



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Maria Carla Bulhão de Queirós Andrade Vale

Classes homoclínicas e medidas de máxima entropia

São Luís - MA

2025

Maria Carla Bulhão de Queirós Andrade Vale

Classes homoclínicas e medidas de máxima entropia

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Santana Campos Costa

São Luís - MA

2025

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Bulhão de Queirós Andrade Vale, Maria Carla.

Classes homoclínicas e medidas de máxima entropia /
Maria Carla Bulhão de Queirós Andrade Vale. - 2025.
95 f.

Orientador(a): José Santana Campos Costa.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em
Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São
Luís, 2025.

1. Classes Homoclínicas. 2. Entropia. 3. Exemplo de
Shub. 4. Hiperbolicidade Parcial. I. Santana Campos
Costa, José. II. Título.

Maria Carla Bulhão de Queirós Andrade Vale

Classes homoclínicas e medidas de máxima entropia

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Dissertação de Mestrado. São Luís - MA, DIA de MÊS de 2025:

Prof. Dr. José Santana Campos Costa
Orientador
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof^a. Dr^a. Vanessa Ribeiro Ramos
Examinador Interno
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Marlon Cesar Santos Oliveira
Examinador Externo
Universidade Estadual do Maranhão -
UEMA

São Luís - MA
2025

A Deus, que me trouxe até aqui, e à minha família, pelo apoio incondicional.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por estar sempre guiando a minha trajetória pessoal e profissional. À minha mãe, Francisca Bulhão de Queirós, por todo o apoio que tem me dado durante toda a minha vida. Ao meu pai, José de Ribamar Ferreira Andrade (*in memoriam*), por todos os ensinamentos e todo o cuidado. À minha vó, Maria Bulhão de Queirós, pelo cuidado que sempre teve para comigo. Ao meu marido, Lucas Santos Vale, por estar sempre ao meu lado. Ao meu irmão José de Ribamar Ferreira Andrade Júnior, por ser um ótimo irmão e amigo, e sempre me ajudar nos momentos de necessidade.

Tenho dois agradecimentos especiais a fazer, a pessoas que me ajudaram durante esse processo e que foram fundamentais para que eu estivesse aqui hoje: meu irmão Francolino Andrade Neto e o padrinho da minha mãe, José Sotero dos Santos. Muito obrigada por me ajudarem durante os primeiros meses de curso, quando precisava me adaptar a uma nova vida em uma outra cidade. Agradeço a toda a minha família, por tudo o que fizeram e fazem por mim.

Agradeço muito ao meu orientador, Prof. Dr. José Santana Campos Costa, que esteve comigo durante todo o período de construção do trabalho, e que me ajudou não somente com o texto da dissertação, mas com suas palavras de conforto e direcionamento. Ao coordenador do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Prof. Dr. Giovane Ferreira Silva, por seu trabalho como coordenador e pelas suas palavras de incentivo.

Não posso deixar de agradecer a todos os excelentes professores que passaram pela minha vida durante o período do mestrado e que, mais que ensinar, são responsáveis pela mudança nas vidas de cada um de seus alunos: Prof. Dr. Anselmo Baganha Raposo Junior, Prof. Dr. Gustavo Silvestre Amaral Costa, Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes, Prof. Dr. José Vanterler da Costa Sousa e Profa. Dra. Vanessa Ribeiro Ramos. Agradeço também à Profa. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto, pelas palavras de encorajamento.

Estendo meus agradecimentos a todos os meus colegas de mestrado: os que já estavam no programa quando eu entrei; quem já tinha saído, mas que eu tive a alegria de poder conhecer; quem entrou junto comigo no curso e quem entrou nos semestres seguintes. Muito obrigada por tudo. Todos vocês serão sempre lembrados por mim.

Agradeço também a todos os professores que passaram pela minha vida, pois se estou aqui, é graças a todos vocês também. Agradeço aos meus amigos, que sempre acreditaram em mim. Por fim, à Universidade Federal do Maranhão – UFMA –, pela oportunidade de ter uma educação de qualidade, e à Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão (FAPEMA), pelo apoio financeiro durante esta jornada.

"Não sou nada. Nunca serei nada. Não posso querer ser nada. À parte isso, tenho em mim todos os sonhos do mundo. [...]"

Fernando Pessoa, em *Tabacaria*

Resumo

Esta pesquisa estuda acerca de classes homoclínicas e medidas maximizantes de entropia, com o objetivo de apresentar a prova dos principais teoremas e corolários estudados no Artigo *Shub's example revisited* [30]. Foi analisada a unicidade da medida de entropia máxima para uma classe de perturbações do sistema original. Os objetivos específicos são: expor conceitos e resultados iniciais pertinentes à compreensão dos teoremas principais, apresentar os teoremas principais e explicitar as contribuições do trabalho para a comunidade acadêmica. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica.

Palavras-chave: Classes homoclínicas. Entropia. Exemplo de Shub. Hiperbolicidade parcial.

Abstract

This research studies homoclinic classes and maximizing entropy measures, with the objective of presenting the proof of the main theorems and corollaries studied in the Article *Shub's example revisited* [30]. The uniqueness of the maximum entropy measure for a class of perturbations of the original system was analyzed. The specific objectives are: to expose initial concepts and results relevant to the understanding of the main theorems, to present the main theorems and to explain the contributions of the work to the academic community. This is a bibliographic research.

Keywords: Homoclinic classes. Entropy. Shub's example. Partial hiperbolicity.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Mudança de coordenadas	20
Figura 2 – Um ponto homoclínico	28
Figura 3 – λ -lema	29
Figura 4 – Folheações estável e instável	40
Figura 5 – Representação de uma decomposição parcialmente hiperbólica do espaço tangente	48
Figura 6 – Pontos homoclinicamente relacionados	52
Figura 7 – Representação da holonomia estável	64
Figura 8 – Variedades estável e instável em um ponto fixo	83

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	PRELIMINARES	14
2.1	A pesquisa em sistemas dinâmicos sob uma perspectiva histórica	14
2.2	Conceitos essenciais de Topologia	16
2.2.1	Aplicações homotópicas	17
2.3	Conceitos em Análise no $\mathbb{R}^n$ e Análise Funcional	18
2.4	Conceitos em Geometria Diferencial, Variedades Diferenciáveis e Teoria das Folheações	19
2.4.1	Espaço tangente	20
2.4.2	Mergulhos	22
2.4.3	Teoria das Folheações	23
2.5	Introdução aos Sistemas Dinâmicos	26
2.6	Introdução à Teoria da Medida	30
2.7	Conceitos iniciais em Teoria Ergódica	34
2.7.1	Teorema da Variedade Estável e Folheações Invariantes	39
2.7.2	Entropia	40
2.7.3	Pressão	43
2.7.4	Operador de transferência	44
3	RESULTADOS	45
3.1	O exemplo de Shub	45
3.2	Teoremas principais e resultados relevantes	47
3.2.1	O exemplo de Shub revisitado	47
3.2.2	Estados de equilíbrio	53
3.2.3	Holonomias homoclínicas	63
3.2.4	Medidas hiperbólicas	64
3.2.5	Critério de unicidade do estado de equilíbrio	65
3.2.6	Hiperbolicidade e estados de equilíbrio	65
4	PROVAS DOS TEOREMAS E COROLÁRIOS	70
4.1	Prova do Teorema A	70
4.1.1	Definição de $\mathcal{U}^r$ e plano da prova	70
4.1.2	Prova da densidade C^r	72
4.1.3	Prova da Proposição 4.1.5	80
4.2	Prova do Corolário B	82

4.3	Prova do Teorema C	84
4.4	Prova do Corolário D	86
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	88
	Referências	90

1 Introdução

Os estudos realizados por Michael Shub são muito importantes para o desenvolvimento da pesquisa em sistemas dinâmicos. Em sua tese de doutorado, em 1967, ele introduziu a noção de *expanding maps*, e deu exemplos de atratores estranhos estruturalmente estáveis, contribuindo de forma essencial para o desenvolvimento da área. O exemplo de Shub, introduzido no ano de 1971, combina uma dinâmica parcialmente hiperbólica em que se tem um subespaço central não hiperbólico e uma transitividade robusta, conferindo uma grande relevância a esse resultado.

A introdução feita por Shub de um exemplo de difeomorfismo em $\mathbb{T}^4$ foi muito importante dentro da dinâmica suave, uma vez que trata-se do primeiro exemplo de difeomorfismo que é robustamente transitivo, mas não é hiperbólico. Mais tarde, Mañé (1978) [33] também construiu um exemplo de difeomorfismo que seguia essas configurações, sendo o exemplo de Shub de dimensão central 2 (dois), enquanto o de Mañé possui dimensão central 1 (um).

A presença de dimensão central 2 (dois) no exemplo de Shub permite a existência de uma dinâmica mais rica, uma vez que, havendo duas direções centrais, há maiores possibilidades de comportamentos de expansão e contração nos subespaços centrais.

A presente pesquisa foi desenvolvida a partir do estudo do trabalho intitulado "Shub's example revisited" [30], de autoria de Chao Liang, Radu Saghin, Fan Yang e Jiagang Yang, e publicado no ano de 2024 pela Cambridge University Press. O artigo em questão trabalha com o exemplo de Shub de uma maneira diferente da forma como ele é comumente estudado: ao invés de trabalhar com a condição restritiva de que a direção central tem uma decomposição dominada em dois subfibrados unidimensionais, os autores trabalharam a partir de uma perspectiva mais geral, não assumindo que as funções admitem uma outra dominação da direção central.

Essa ausência de dominação central torna a pesquisa mais interessante e rica, uma vez que não poderão ser utilizadas as técnicas unidimensionais. No entanto, haverá suficiente hiperbolicidade dentro desses sistemas para se obter um bom entendimento de suas propriedades ergódicas. Os teoremas e corolários principais a serem trabalhados ao longo da pesquisa são apresentados de maneira contextualizada no Capítulo 3, e são provados ao longo do Capítulo 4. Vejamos o que dizem eles.

Teorema A. Para um $2 \leq r \leq \infty$, existe um subconjunto $\mathcal{U}^r \subset SH_r^b$, C^2 aberto e C^r denso, tal que para um $f \in \mathcal{U}^r$, satisfaz o seguinte: todo par de pontos periódicos hiperbólicos de f com índice estável 2 são homoclinicamente relacionados.

Corolário B. Para um $f \in \mathcal{U}^r$, f admite uma única classe homoclínica $H(p_f, f)$ associada aos pontos periódicos hiperbólicos de índice 2, e a classe homoclínica coincide com a variedade ambiente.

Teorema C. Para qualquer $f \in \mathcal{U}^r$, todas as medidas ergódicas hiperbólicas de índice 2 são homoclinicamente relacionadas. Seja $\phi : \mathbb{T}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função potencial de Holder com $\max_{x,y \in \mathbb{T}^4} \|\phi(x) - \phi(y)\| < \log \lambda_B$, onde $f \in PH_{A,B}^0$, então f admite no máximo um estado de equilíbrio para o potencial ϕ . Em particular, todo $f \in \mathcal{U}^r$ admite no máximo uma medida de entropia maximal.

Corolário D. Todo $f \in \mathcal{U}^\infty \cap PH_{A,B}^0$ admite um único estado de equilíbrio para todo potencial de Holder satisfazendo $\max_{x,y \in \mathbb{T}^4} \|\phi(x) - \phi(y)\| < \log \lambda_B$. Em particular, todo $f \in \mathcal{U}^\infty$ admite uma única medida de entropia maximal.

O presente trabalho objetiva apresentar a prova dos principais teoremas estudados no artigo. Como objetivos específicos, tem-se: expor conceitos e resultados iniciais pertinentes à compreensão dos teoremas principais; apresentar os teoremas principais; e explicitar as contribuições do trabalho para a comunidade acadêmica. Além disso, justifica-se pela relevância do material base e do exemplo de Shub dentro da área de Sistemas Dinâmicos.

Para melhor compreensão dos tópicos a serem apresentados nas principais etapas do trabalho, foi proposta uma divisão de capítulos elaborada com o objetivo de situar melhor o leitor quanto a conceitos iniciais de dinâmica e outras áreas necessárias a uma correta interpretação do texto. Dessa maneira, dividiu-se o trabalho nas seguintes temáticas: Preliminares (Capítulo 2); Resultados (Capítulo 3); Provas dos teoremas e corolários principais (Capítulo 4); e Considerações finais (Capítulo 5).

2 Preliminares

Neste capítulo, algumas noções pertinentes ao estudo desenvolvido são expostas. Convém tratar, inicialmente, da área estudada sob uma perspectiva histórica, de maneira a situar melhor o leitor dentro do percurso feito pelo estudo de dinâmica e teoria ergódica.

As seções seguintes serão divididas em subseções, conforme a área à qual relacionam-se os conceitos essenciais para o entendimento do trabalho. A disposição dos conceitos de maneira organizada por área visa uma melhor experiência de leitura e compreensão textual.

2.1 A pesquisa em sistemas dinâmicos sob uma perspectiva histórica

Fenômenos meteorológicos, comportamento e multiplicação de vírus, e outras questões são aplicações interessantes e bastante úteis da área de sistemas dinâmicos. Pela sua importância tanto na área da matemática quanto em outros segmentos de pesquisa científica, a busca por respostas acerca de como certos sistemas evoluem com o tempo constitui um objeto de grande curiosidade e anseio por respostas. O estudo da área como disciplina teve início no trabalho de Henri Poincaré (1854–1912), considerado pai da dinâmica, que hoje é um campo bastante amplo e possui diversas frentes de pesquisa. [3]

De forma simplificada, esse ramo da Matemática busca saber como certos processos evoluem com o tempo. Um sistema dinâmico, assim, pode ser definido de forma geral como um par (X, f) , onde X é um espaço topológico (frequentemente uma variedade diferenciável) e f é uma aplicação contínua que descreve a evolução do sistema com o tempo. Em nosso caso, X é uma variedade diferenciável e f um difeomorfismo.

A dinâmica do sistema é estudada por meio das órbitas dos pontos de X , os quais representam a trajetória percorrida por esses pontos com a aplicação de f . Algumas propriedades, como estabilidade, periodicidade e sensibilidade às condições iniciais são fundamentais para a análise desses sistemas.

A teoria dos sistemas dinâmicos abrange diversos ramos de pesquisa, com destaque para a dinâmica topológica — a qual estuda algumas propriedades globais, tais como recorrência e caos —, dinâmica diferenciável — a qual se utiliza do cálculo diferencial na análise de sistemas suaves —, além da teoria ergódica — área que engloba o tema desta pesquisa —, que se preocupa com o comportamento de sistemas dinâmicos ao longo do tempo, especialmente em entender se as médias temporais das trajetórias individuais coincidem com as médias espaciais em relação a uma medida invariante.

O histórico a seguir tem como fonte o livro de Viana e Oliveira [38].

A palavra *ergódico* é formada por duas palavras gregas: *ergos*, que significa "trabalho", e *odos*, que, por sua vez, significa "caminho". Este termo foi introduzido por L. Boltzmann, físico austríaco oitocentista, em seu trabalho sobre a teoria cinética dos gases. Boltzmann, assim como outros dos principais fundadores da teoria cinética (J. C. Maxwell, J. C. Gibbs), estava interessado em sistemas descritos por um fluxo Hamiltoniano, isto é, uma equação diferencial da forma:

$$\left(\frac{dq_1}{dt}, \dots, \frac{dq_n}{dt}, \frac{dp_1}{dt}, \dots, \frac{dp_n}{dt} \right) = \left(-\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial p_n}, \frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_n} \right)$$

Boltzmann acreditava que as órbitas típicas do fluxo preenchem toda a superfície de energia $H^{-1}(c)$ que as contém. A partir desta *hipótese ergódica*, foi deduzido por ele que as médias temporais das funções ao longo das órbitas típicas coincidem com as respectivas médias espaciais na superfície de energia. Sendo essa hipótese falsa, tornou-se recorrente chamar de hipótese ergódica o que seria uma consequência sua: que as médias temporais e espaciais sejam iguais. Sistemas para os quais vale essa igualdade são, por sua vez, chamados de *ergódicos*.

Com um grande avanço nos anos 1930, com a prova, por J. von Neumann e G. D. Birkhoff, de que as médias temporais existem para quase toda órbita, a teoria teve um ponto de grande desenvolvimento nos anos 1950, quando o russo A. N. Kolmogorov observou que muitos sistemas hamiltonianos não são ergódicos, resultado que foi expandido por V. Arnold e J. Moser e que passou a ser chamado de teoria KAM em homenagem aos três.

Ainda nos anos 1930, o trabalho de Hopf, o qual forneceu os primeiros exemplos de sistemas hamiltonianos ergódicos (os fluxos geodésicos de superfícies com curvatura negativa), foi generalizado por D. Anosov, que tratou de sistemas mais gerais, chamados de Sistemas de Anosov, ou globalmente hiperbólicos. S. Smale introduziu ainda os sistemas uniformemente hiperbólicos, classe ainda mais ampla, formada por sistemas cujo espaço tangente se divide continuamente em direções que contraem e expandem uniformemente por meio da ação da dinâmica.

Nos anos 1970, destaca-se o desenvolvimento da teoria das medidas de Gibbs dos sistemas de Anosov (por Ya. Sinai), estendida por D. Ruelle e R. Bowen. É importante mencionar a introdução da noção de *entropia* por Kolmogorov e Sinai, bem como a demonstração, por D. Ornstein, de que a entropia é um invariante completo para deslocamentos de Bernoulli, ou seja, dois *shifts* de Bernoulli são equivalentes se, e somente se, eles têm a mesma entropia.

2.2 Conceitos essenciais de Topologia

Os conceitos a seguir têm como fonte o livro de Katok e Hasselblatt [25]. Caso o leitor esteja familiarizado com os conceitos iniciais relacionados a Topologia, pode prosseguir diretamente para o tópico seguinte.

Definição 2.2.1. *Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é um conjunto X acompanhado de uma coleção $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de X , chamado de topologia de X , tal que*

- (1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
- (2) se $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}$, então $\bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \in \mathcal{T}$ para qualquer conjunto A ;
- (3) se $\{O_i\}_{i=1}^k \subset \mathcal{T}$, então $\bigcap_{i=1}^k O_i \in \mathcal{T}$.

Os conjuntos $O \in \mathcal{T}$ são chamados de *conjuntos abertos*, e seus complementares, de *conjuntos fechados*. Se $x \in X$, então um conjunto aberto contendo x é chamado de *vizinhança* de x . O *fecho* $\overline{A}$ de um conjunto $A \subset X$ é o menor conjunto fechado contendo A , isto é, $\overline{A} := \bigcap \{C \mid A \subset C \text{ e } C \text{ é fechado}\}$. É dito que x é um *ponto de acumulação* de $A \subset X$ se toda vizinhança de x contém infinitos pontos distintos de A .

Uma *base* para uma topologia $\mathcal{T}$ é um subconjunto $\beta \subset \mathcal{T}$ tal que para todo $O \in \mathcal{T}$ e $x \in O$ existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset O$. Uma topologia $\mathcal{S}$ é dita *mais fina* que $\mathcal{T}$, se $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$, e *mais grossa* se $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Se $Y \subset X$, então Y pode ser transformado em um espaço topológico de forma natural ao considerar a *topologia induzida* $\mathcal{T}_Y := \{O \cap Y \mid O \in \mathcal{T}\}$.

É dito que uma série $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset X$ converge para $x \in X$ se para todo conjunto aberto O contendo x existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_i\}_{i > N} \subset O$.

O par $(X, \mathcal{T})$ é chamado um *espaço de Hausdorff* se para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ existem $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ tais que $x_i \in O_i$ e $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. O espaço é chamado de *normal* se é Hausdorff e para quaisquer dois fechados $X_1, X_2 \subset X$ existem $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ tais que $X_i \subset O_i$ e $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

Uma família $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}$ é chamada uma *cobertura aberta* de X se $X = \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha$ e uma cobertura aberta finita se A é finito. $(X, \mathcal{T})$ é chamado de *compacto* se toda cobertura aberta possui uma subcobertura finita, *localmente compacto* se todo ponto possui uma vizinhança com fecho compacto, e *sequencialmente compacto* se toda sequência possui uma subsequência convergente.

Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Um conjunto $D \subset X$ é dito *denso* em X se $\overline{D} = X$. O conjunto X é dito *separável* se possui um subconjunto denso enumerável.

2.2.1 Aplicações homotópicas

Definição 2.2.2. Duas aplicações contínuas $h_0, h_1 : X \rightarrow Y$ entre espaços topológicos são ditas homotópicas se existe uma aplicação contínua $h : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ (a homotopia) tal que

$$h(0, x) = h_0(x) \text{ e } h(1, x) = h_1(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Se $h_0(x) = h_1(x) = p$ para algum $p \in Y$, então dizemos que h_0 e h_1 são homotópicas com respeito a p (ou *rel* p) se a homotopia h puder ser escolhida de modo que

$$h(t, p) = p \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

Se $X = [0, 1]$, $h_0(0) = h_1(0)$, e $h_0(1) = h_1(1)$, então dizemos que h_0 e h_1 são homotópicas com respeito aos extremos ("*rel endpoints*") se a homotopia h puder ser escolhida tal que $h(t, 0)$ e $h(t, 1)$ sejam constantes em t .

Uma aplicação h é chamada de *nula homotópica* se ela for homotópica a uma aplicação constante. Se h_0 e h_1 são homeomorfismos, eles são chamados de *isotópicos* se a homotopia h puder ser escolhida de modo que, para todo $t \in [0, 1]$, a aplicação $h(t, \cdot)$ seja um homeomorfismo.

Os espaços X e Y são chamados de *homotopicamente equivalentes* se existem aplicações

$$g : X \rightarrow Y \text{ e } f : Y \rightarrow X$$

tais que $f \circ g$ e $g \circ f$ sejam homotópicas à identidade.

Um espaço X é chamado de *contrátil* se ele for homotópico a um ponto. Uma propriedade de um espaço topológico que se mantém para qualquer espaço homotopicamente equivalente é chamada de *invariante homotópico*.

Seja M uma variedade (ver conceito no tópico 2.4) compacta C^r , com $1 \leq r < \infty$. Consideramos o espaço dos difeomorfismos C^r , $\text{Diff}^r(M)$, uma topologia especificada pelas sequências convergentes: dizemos que f_n converge em C^r quando todas as derivadas de ordem menor ou igual a r convergem uniformemente. Essa definição se estende ao caso $r = 0$, tomando $\text{Diff}^0(M) = \text{Hom}(M)$.

Difeomorfismos formam um conjunto aberto $\text{Diff}^r(M)$ no espaço $C^r(M, M)$, que corresponde às aplicações C^r de M em si mesmo. Assim, temos uma topologia natural induzida de $C^r(M, M)$ nos espaços de difeomorfismos. Um conjunto de difeomorfismos é *C^r -aberto* se é aberto na topologia induzida pela norma C^r no espaço dos difeomorfismos.

2.3 Conceitos em Análise no $\mathbb{R}^n$ e Análise Funcional

Neste tópico, introduziremos, de forma breve, alguns pontos em Análise no $\mathbb{R}^n$ e Análise Funcional que serão úteis no decorrer deste trabalho. As fontes para as informações a seguir são os trabalhos de Palis Jr. e Welington (2017) [42], Rudin (1991) [47] e Viana e Oliveira (2016) [54].

Teorema 2.3.1. (Teorema da Função Implícita) *Seja $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^r ($r \geq 1$). Sejam $z_0 = (x_0, y_0) \in U$ e $c = f(z_0)$. Suponha que a derivada parcial, em relação à segunda variável $\sigma_2 f(z_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, seja um isomorfismo. Então existem abertos $V \subset \mathbb{R}^n$ contendo x_0 , e $W \subset U$ contendo z_0 , tais que, para cada $x \in V$, existe um único $\xi(x) \in \mathbb{R}^m$, com $(x, \xi(x)) \in W$ e $f(x, \xi(x)) = c$. A aplicação $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, assim definida, é de classe C^r e sua derivada é dada por $d\xi(x) = [\sigma_2 f(x, \xi(x))]^{-1} \circ \sigma_2 f(x, \xi(x))$.*

É importante lembrar também que uma aplicação $h : M \rightarrow N$ é *Lipschitz* se existe alguma constante $C > 0$ tal que $d(h(x), h(y)) \leq Cd(x, y)$ para todo $x, y \in N$. Se for necessário especificar a constante, dir-se-á que h é função *C-Lipschitz*. Dizemos que h é *Holder* (ou *Holder contínua*) se existem $C, \theta > 0$ tais que $d(h(x), h(y)) \geq Cd(x, y)^\theta$ para todo $x, y \in N$. Nesse caso, também podemos dizer que a função h é θ -Holder ou (C, θ) -Holder.

Definição 2.3.2. *Um espaço vetorial X é dito um espaço normado se a cada $x \in X$ está associada uma quantidade real não negativa $\|x\|$, chamada de norma de x , tal que:*

- (a) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$;
- (b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in X$;
- (c) $\|x\| > 0$ se, e somente se, $x \neq 0$.

Todo espaço normado pode ser considerado um espaço métrico, com a distância definida por $d(x, y) = \|x - y\|$, a qual satisfaz:

- (i) $0 \leq d(x, y) < \infty$ para todos $x, y \in X$;
- (ii) $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$;
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todos $x, y, z \in X$.

Definição 2.3.3. *Um espaço de Banach é um espaço normado que é completo na métrica definida por sua norma. Isso significa que toda sequência de Cauchy deve convergir.*

2.4 Conceitos em Geometria Diferencial, Variedades Diferenciáveis e Teoria das Folheações

Os conceitos apresentados neste subtópico podem ser encontrados nas referências Burns e Wilkinson (2005) [8], Camacho e Lins Neto (1979) [11], Carmo (1976) [12], Carmo (2015) [13], Lee (2013) [29], Lima (2007) [32] e Viana e Oliveira (2016) [54].

Definição 2.4.1. *Seja M um espaço topológico. Um sistema de coordenadas locais ou carta local em M é um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ de um subconjunto aberto $U \subset M$ sobre um aberto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$.*

Dizemos que m é a dimensão de $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$. Para cada $p \in U$ tem-se que $\varphi(p) = (\varphi^1(p), \dots, \varphi^m(p))$. Os números $\varphi^i = \varphi^i(p)$, $i = 1, \dots, m$ são chamados de *coordenadas* do ponto $p \in M$ no sistema φ .

Definição 2.4.2. *Um atlas de dimensão m sobre um espaço topológico M é uma coleção $\mathcal{A}$ de sistemas de coordenadas locais $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , cujos domínios U cobrem M . Os domínios U dos sistemas de coordenadas $\varphi \in \mathcal{A}$ são chamados de *vizinhanças coordenadas* de $\mathcal{A}$.*

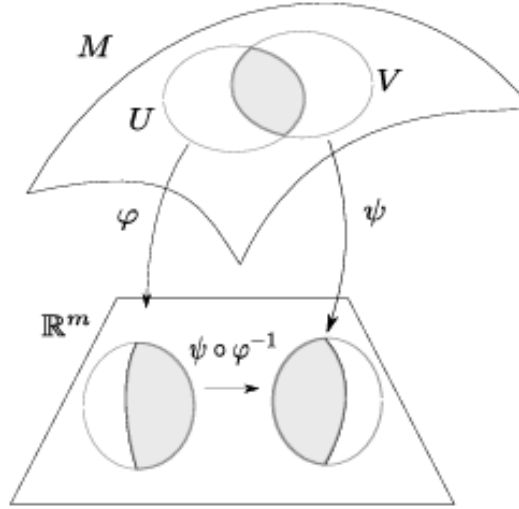
Definição 2.4.3. *Um espaço topológico M no qual existe um atlas de dimensão m chama-se uma variedade topológica de dimensão m .*

Definição 2.4.4. *Dados os sistemas de coordenadas locais $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ no espaço topológico M , tais que $U \cap V \neq \emptyset$, cada ponto $p \in U \cap V$ tem coordenadas $\varphi^i = \varphi^i(p)$ no sistema φ e coordenadas $\psi^i = \psi^i(p)$ no sistema ψ . A correspondência*

$$(\varphi^1(p), \varphi^m(p)) \longleftrightarrow (\psi^1(p), \psi^m(p))$$

estabelece um homeomorfismo $\phi_{xy} = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ que é chamado de mudança de coordenadas.

Figura 1 – Mudança de coordenadas



Fonte: Aguirre (2018) [1]

Um atlas $\mathcal{A}$ sobre um espaço topológico M diz-se *diferenciável de classe C^k* ($k \geq 1$), se todas as mudanças de coordenadas $\phi_{\varphi\psi}$, $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ são aplicações de classe C^k , e escreve-se $\mathcal{A} \in C^k$. Como $\phi_{\psi\varphi} = (\phi_{\varphi\psi})^{-1}$, segue que $\phi_{\varphi\psi}$ são difeomorfismos de classe C^k . Em particular, escrevendo $\phi_{\varphi\psi} : (\varphi^1, \dots, \varphi^m) \mapsto (\psi^1, \dots, \psi^m)$, o determinante jacobiano $\det(\frac{\partial \psi^i}{\partial \varphi^j})$ é não nulo em todo ponto de $\varphi(U \cap V)$.

Definição 2.4.5. *Seja $\mathcal{A}$ um atlas de dimensão m e de classe C^k num espaço topológico M . Um sistema de coordenadas $\nu : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ em M é chamado *admissível relativamente ao atlas $\mathcal{A}$* se, para todo sistema de coordenadas locais $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, pertencente a $\mathcal{A}$, com $U \cap W \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas $\phi_{\varphi\nu}$ e $\phi_{\nu\varphi}$ são de classe C^k . Em outras palavras, o sistema é *admissível* se $\mathcal{A} \cup \{\nu\}$ é ainda um atlas de classe C^k em M .*

Um atlas $\mathcal{A}$ é dito *máximo* se contiver todos os sistemas de coordenadas locais que são admissíveis em relação a $\mathcal{A}$.

Definição 2.4.6. *Uma variedade diferenciável de dimensão m e classe C^k é o par ordenado $(M, \mathcal{A})$, onde M é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e $\mathcal{A}$ é um atlas máximo de dimensão m e classe C^k sobre M .*

2.4.1 Espaço tangente

Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é chamada de *curva* (diferenciável) em M . Suponhamos que $\alpha(0) = p \in M$, e seja $\mathcal{D}$ o conjunto de funções de M diferenciáveis em p . O *vetor tangente* à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, f \in \mathcal{D}.$$

Um *vetor tangente em p* é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por $T_p M$, o qual é um espaço vetorial chamado de *espaço tangente* de M em p .

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e seja $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\}$. Vamos munir o conjunto TM de uma estrutura diferenciável (de dimensão $2n$). Com tal estrutura, chamamos TM de *fibrado tangente* de M , o qual é o espaço natural para se trabalhar quando se trata de questões envolvendo posições e velocidades, como na Mecânica, por exemplo.

Definição 2.4.7. *Seja I o intervalo no qual uma curva diferenciável é definida. Uma curva diferenciável parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada regular se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.*

Denotamos por $T^1 M$ o *fibrado tangente unitário*, que é o subconjunto de TM formado pelas duplas $(x, v) \in TM$ com $\|v\| = 1$.

Definição 2.4.8. *Seja $E_0 \rightarrow X_0$ um fibrado vetorial, ou seja, um espaço E_0 onde cada ponto $x \in X_0$ tem uma fibra vetorial associada, denotada por E_x . Seja $f : E_0 \rightarrow E_0$ uma aplicação contínua que preserva as fibras, ou seja, para cada $x \in X_0$, a imagem for E_x por f está contida em alguma outra fibra $E_{h(x)}$, onde $h : X_0 \rightarrow X_0$ é uma função contínua (a aplicação que f “induz” na base).*

Dizemos que f é uma contração de fibra se: ela age de fibra em fibra, ou seja, $f(E_x) \subset E_{h(x)}$ para todo $x \in X_0$; e ela contrai dentro da fibra, isto é, existe uma constante $0 < \lambda < 1$ tal que, para todos os pontos $x \in X_0$, a restrição de f à fibra E_x tem constante de Lipschitz menor que λ . Formalmente, isso significa que

$$\sup_{x \in X_0} \text{Lip}(f|_{E_x}) < 1.$$

Isso significa que, se forem pegos dois vetores na mesma fibra E_x , a distância de suas imagens por f é estritamente menor que a distância original, e isso vale uniformemente em todas as fibras. Quando essa condição é satisfeita e X_0 é compacto, existe uma única seção contínua $\sigma : X_0 \rightarrow E_0$ tal que:

$$f(\sigma(x)) = \sigma(h(x)) \text{ para todo } x \in X_0.$$

Ou seja, σ é uma seção invariante por f .

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ chama-se *imersão* quando, para cada $x \in U$, a derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ é uma transformação linear injetora.

2.4.2 Mergulhos

Sejam M^m, N^n variedades de classe C^k ($k \geq 1$). Diz-se que uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é um *mergulho* se

- (i) f é uma imersão;
- (ii) f é um homeomorfismo de M sobre o subespaço $f(M) \subset N$.

Introduzir-se-á, a seguir, o conceito de *subvariedade*.

Uma *subvariedade* M^m de classe C^k de uma variedade N^n de classe C^r ($r \geq k$) é um subconjunto $M \subset N$, com a topologia induzida pela de N , e dotado de uma estrutura de variedade C^k tal que a aplicação de inclusão $i : M \rightarrow N$ é um mergulho de classe C^k .

Devido à importância do conceito apresentado, convém explicitar as condições a serem verificadas para que se possa classificar M como subvariedade de classe C^k de N .

- (i) M é uma variedade de classe C^k ;
- (ii) $M \subset N$ e a topologia de M é induzida pela de N ;
- (iii) Para cada $p \in M$, existem sistemas de coordenadas $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ em N e $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M tais que $p \in U \subset V$ e $y \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma imersão de classe C^k . (Então $y \circ x^{-1}$ é necessariamente um mergulho, pois a topologia de U é induzida pela de V).

Em seguida, é pertinente explicitar três condições que devem ser verificadas para que M seja considerada uma subvariedade de classe C^k de N . Elas serão apresentadas em forma das proposições dispostas a seguir:

Proposição 2.4.9. *Seja N uma variedade C^r e M um subconjunto de N . Suponhamos que para cada $p \in M$ exista um sistema de coordenadas $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ em N , com $p \in V$, e uma aplicação injetiva $x : M \cap V \rightarrow \mathbb{R}^m$ tais que $x(M \cap V)$ é aberto e $y \circ x^{-1} : x(M \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um mergulho de classe C^k . Então existe uma (única) estrutura de variedade C^k em M que o torna uma subvariedade de classe C^k de N .*

Proposição 2.4.10. *Seja N^n uma variedade de classe C^r . Para que um subconjunto $M \subset N$ seja uma subvariedade de dimensão m e classe C^k ($k \leq r$) de N é necessário e suficiente que, para cada $P \in M$, exista um aberto $V \subset N$, $p \in V$, e um difeomorfismo de classe C^k $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ tal que $y(M \cap V) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$.*

Corolário 2.4.11. *Seja N uma variedade de classe C^r . Dado $M \subset N$, se cada $p \in M$*

possui uma vizinhança V em N tal que $M \cap V$ é uma subvariedade de dimensão m e classe C^k de N ($k \leq r$), então M é uma subvariedade de dimensão m e classe C^k de N .

Proposição 2.4.12. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $K \subset U$ compacto. Dados um número $\delta > 0$ e uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^r , existe uma aplicação $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^∞ , tal que $|g - f|_r < \delta$ em K ($0 \leq r < \infty$).*

2.4.3 Teoria das Folheações

Introduziremos a seguir uma definição de grande importância no decorrer do trabalho: a de folheação.

Definição 2.4.13. *Seja M uma variedade de dimensão m e classe C^∞ . Uma folheação de classe C^r e dimensão n de M é um atlas máximo $\mathcal{F}$ de classe C^r de M com as seguintes propriedades:*

- *Se $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$, então $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, onde U_1 e U_2 são discos abertos de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^{m-n}$, respectivamente.*
- *Se (U, φ) e $(V, \psi) \in \mathcal{F}$ são tais que $U \cap V \neq \emptyset$, então a mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é da forma $(h_1(x, y), h_2(y))$. Diz-se também que M é folheada por $\mathcal{F}$, ou ainda que $\mathcal{F}$ é uma estrutura folheada de dimensão n e classe C^r sobre M .*

Uma transversal suave a $\mathcal{F}$ em U é um disco suave de codimensão d em U que intersecta cada folha local de $\mathcal{F}$ em U exatamente uma vez, e cujo fibrado tangente é uniformemente transversal a $T\mathcal{F}$. Se τ_1 e τ_2 são duas transversais suaves a $\mathcal{F}$ em U , temos a aplicação de *holonomia*:

$$h_{\mathcal{F}} : \tau_1 \rightarrow \tau_2,$$

que leva um ponto de τ_1 à interseção de sua folha local com τ_2 .

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de classe C^r e dimensão n , $0 < n < m$ de uma variedade M^m . Consideremos uma carta local (U, φ) de $\mathcal{F}$ tal que $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m-n}$. Os conjuntos da forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, $c \in U_2$ são chamadas *placas* de U , ou ainda placas de $\mathcal{F}$. Fixado $c \in U_2$, a aplicação $f = \varphi^{-1}/U_1 \times \{c\} : U_1 \times \{c\} \rightarrow U$ é um mergulho de classe C^r de M . Além disso, se α e β são placas de U , então $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ ou $\alpha = \beta$.

Um *caminho de placas* de $\mathcal{F}$ é uma sequência $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de placas de $\mathcal{F}$ tal que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Como M é recoberta pelas placas de $\mathcal{F}$, pode-se definir em M a seguinte relação de equivalência: pRq se existe um caminho de placas

$\alpha_1, \dots, \alpha_k$ com $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$. As classes de equivalência da relação R são chamadas de *folhas* de $\mathcal{F}$.

As três definições seguintes, relacionadas a expansividade em placas, estão presentes no artigo de Pugh, Shub e Wilkinson (2011) [43].

Definição 2.4.14. *Uma caixa de folheação é a imagem de um homeomorfismo local $\varphi : D^c \times D^{m-c} \rightarrow M$, tal que cada subconjunto $D^c \times \{y\}$ é enviado para um pedaço de uma folha da folheação em M . D^c é o disco aberto de dimensão c , m é a dimensão da variedade M , e $m - c$ é a dimensão transversal da folheação.*

Definição 2.4.15. *Uma folheação f -invariante é expansiva em placas se existe uma plaquation $\mathcal{P}$ de $\mathcal{F}$ e um $\delta > 0$ tal que quaisquer duas δ -pseudo-órbitas de f que respeitam $\mathcal{P}$ e que se sombreiam mutuamente a δ -distância pertencem necessariamente às mesmas placas de $\mathcal{P}$.*

Definição 2.4.16. *Formalmente, uma plaquation de $\mathcal{F}$ resulta da escolha de um número finito de caixas de folheação*

$$\varphi : D^c \times D^{m-c} \rightarrow M$$

tal que as caixas de folheação de metade do tamanho

$$\varphi \left(\frac{1}{2}D^c \times \frac{1}{2}D^{m-c} \right)$$

recobrem M . A plaquation $\mathcal{P}$ consiste nas placas de tamanho unitário $\varphi(D^c \times y)$. Elas recobrem as folhas de $\mathcal{F}$ de maneira uniforme.

Um espaço fibrado consiste de variedades diferenciáveis E , B , F e de uma aplicação diferenciável $\pi : E \rightarrow B$. Além disso, E possui uma estrutura de produto local definida por uma cobertura $(U_i)_{i \in J}$ de B e por difeomorfismos $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$, $i \in J$, que tornam os diagramas do tipo abaixo comutativos

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\varphi_i} & U_i \times F \\ \pi \downarrow & \searrow p & \\ U_i & & \end{array}$$

isto é, $\pi = p \circ \varphi_i$, onde p é a primeira projeção. Em particular, π é uma submersão sobre B e E é localmente difeomorfo ao produto de um aberto em B por F .

Um espaço E é chamado *espaço total*, B a base e F a fibra do fibrado. A aplicação π é chamada *projeção*. Se $x \in B$, a subvariedade $F_x = \pi^{-1}(x) \simeq F$ é chamada *fibra* de E sobre x . Usualmente, os fibrados são denotados por (E, π, B, F) .

Seja E uma variedade compacta C^∞ e sem bordo, Λ um espaço topológico. Um fibrado localmente trivial $\pi : E \rightarrow \Lambda$ é um *fibrado C^r regular* se $\pi^{-1}(\lambda)$ é uma subvariedade C^r de E ($\lambda \in \Lambda$) e a aplicação $x \mapsto T_x \pi^{-1}(\pi x)$ é contínua.

Convém mencionar também o conceito de *fibrado de Banach*, que consiste em um fibrado cujas fibras são espaços de Banach.

Seja E um fibrado vetorial suave sobre uma variedade suave M , com projeção $\pi : E \rightarrow M$. Uma *seção* de E é uma seção da aplicação π , isto é, uma aplicação contínua $\sigma : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \sigma = \text{Id}_M$. Se $U \subset M$ é um aberto, uma seção do fibrado restrito $E|_U$ é chamada de *seção local* de E . Uma *seção suave* é uma seção (local ou global) que é suave como aplicação entre variedades. A *seção nula* é a aplicação $\zeta : M \rightarrow E$ definida por

$$\zeta(p) = 0 \in E_p \quad \text{para todo } p \in M.$$

Definição 2.4.17. *Seja M uma variedade suave e $K, N \subset M$ subvariedades suaves. K e N são ditas transversais a $x \in M$ se $x \notin K \cap N$ ou $T_x K + T_x N = T_x M$. Escrevemos $K \pitchfork N$. Em particular, se $\dim K + \dim N = \dim M$ e $x \in K \cap N$, então a última condição é equivalente a $T_x K \cap T_x N = \{0\}$.*

Dizemos que K e N são transversos (um ao outro), o que representamos por $K \pitchfork N$, se $T_x K + T_x N = T_x M$ para todo $x \in K \cap N$.

Seja $F : M \rightarrow N$ uma aplicação suave entre variedades diferenciáveis. Dizemos que um ponto $p \in M$ é um *ponto regular* de F se o diferencial $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ é sobrejetor; caso contrário, p é chamado de *ponto crítico*. (Isso significa, em particular, que todo ponto é crítico se $\dim M < \dim N$.) Um ponto $c \in N$ é chamado de *valor regular* de F se todo ponto do conjunto de nível $F^{-1}(c)$ é um ponto regular. Caso contrário, dizemos que c é um *valor crítico*. Em particular, se $F^{-1}(c) = \emptyset$, então c é considerado regular.

Dizemos que o conjunto de nível $F^{-1}(c)$ é um *conjunto de nível regular* se c for um valor regular; ou seja, um conjunto de nível regular é aquele que consiste inteiramente de pontos regulares.

Teorema 2.4.18. (Sard) *Se $f : M \rightarrow M$ é uma aplicação suave, o conjunto dos valores críticos de f tem medida zero em M .*

Proposição 2.4.19. *Seja p um ponto crítico não degenerado (isto é, com matriz Hessiana de uma função diferenciável em relação a ele diferente de zero) de uma função C^r , $r \geq 2$, em uma variedade suave M . Então existe $0 \leq k \leq n$ e um sistema de coordenadas C^{r-2} $(x_1, \dots, x_n)$ com origem p tal que, nessas coordenadas, f é dada por*

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^k x_i^2 - \sum_{i=k+1}^n x_i^2.$$

O número k é chamado de *índice de Morse* do ponto p .

2.5 Introdução aos Sistemas Dinâmicos

A fim de fazer do tema abordado na dissertação algo mais compreensível e acessível, é de fundamental importância expor alguns dos conceitos principais relacionados à área de sistemas dinâmicos, tornando a leitura mais confortável e o conteúdo do trabalho mais completo. Noções como as de conjuntos estáveis, instáveis e transitividade serão de fundamental importância durante o desenvolvimento do texto, fazendo de sua compreensão uma tarefa necessária. As principais fontes a partir das quais este subtópico foi construído são: Aguirre (2018) [1], Backes (2023) [3], Hirsch, Pugh e Shub (1977) [21], Shub (2013) [49] e Shub (1971) [50].

Definição 2.5.1. *Um sistema dinâmico é um par (X, f) , sendo X um conjunto às vezes chamado de espaço de fases, e $f : X \rightarrow X$ é uma função, a qual mostra como os pontos do espaço de fases se movem com o passar do tempo.*

A dinâmica, isto é, a passagem do tempo, é observada a partir da iteração da função f . Esta iteração é a aplicação da função n vezes, a qual pode ser representada por $f^n(x)$. Dessa maneira, temos

$$\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ vezes}} = f^n(x)$$

O que se pretende estudar é, portanto, a evolução do tempo em um ponto x , isto é, $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots$. Esse conjunto recebe o nome de órbita do ponto x , e é dado por

$$O(x) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(x).$$

Quando f possui função inversa $f^{-1} : X \rightarrow X$, podemos considerar também os iterados de f para o passado. Assim, dado $n \in \mathbb{N}$, f^{-n} significa iterar a função f^{-1} n -vezes, ou seja,

$$f^{-n}(x) = \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}}_{n \text{ vezes}}$$

E a órbita de x , portanto, é dada por

$$O(x) := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(x).$$

Definição 2.5.2. *Dada uma aplicação $f : X \rightarrow X$, podemos definir a imagem inversa de um conjunto Y , denotada por $f^{-1}(Y)$, como sendo*

$$f^{-1}(Y) = \{x \in X : f(x) \in Y\}.$$

Isso significa que a pré-imagem de um conjunto Y é constituída por todos os pontos de X que são levados a Y pela aplicação f .

Definição 2.5.3. *Um conjunto $A \subset X$ é dito invariante por $f : X \rightarrow X$ se $f^{-1}(A) = A$, sendo $f^{-1}(A)$ a pré-imagem de A .*

Definição 2.5.4. *Dizemos que x é um ponto periódico se existe $n \in \mathbb{N}_*$ tal que $f^n(x) = x$. Seu período, então, é o menor número natural $p \in \mathbb{N}_*$ tal que $f^p(x) = x$. Quando $p = 1$, o que significa que $f(x) = x$, chamamos x de ponto fixo de f .*

Quando x é um ponto periódico, sua órbita é o conjunto finito

$$\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x)\},$$

o qual chamamos de órbita periódica. Denotamos por $Per(f)$ o conjunto de todos os pontos periódicos de f .

Definição 2.5.5. *Dizemos que uma sequência de pontos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma δ -pseudo-órbita para f se*

$$d(f(x_n), x_{n+1}) \leq \delta \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Um *ponto fixo hiperbólico* é um ponto (fixo) p tal que os autovalores de $Df(p)$ têm módulo diferente de 1. Já o *ponto periódico hiperbólico* é um ponto (periódico) tal que cada ponto da órbita periódica tem derivada de f^k com autovalores de módulo diferente de 1.

Definição 2.5.6. *Sejam $f : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico invertível e $x \in X$ um ponto arbitrário. O conjunto estável de x é definido como*

$$W_f^s(x) = \left\{ y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\},$$

enquanto o conjunto instável de x é definido como

$$W_f^u(x) = \left\{ y \in X : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\}.$$

Esses conjuntos também são chamados de *variedades* estável e instável, e serão expressos ao longo do texto por $W^s(x)$ e $W^u(x)$.

Dado $\epsilon > 0$, os *conjuntos estáveis e instáveis locais* (de tamanho $\epsilon > 0$) de x são definidos respectivamente como

$$W_{f,\epsilon}^s(x) = \{y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

e

$$W_{f,\epsilon}^u(x) = \{y \in X : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Definição 2.5.7. *Seja $f : X \rightarrow X$ um homeomorfismo de um espaço métrico (X, d) . O ponto $x \in X$ é dito homoclínico ao ponto $y \in X$ se*

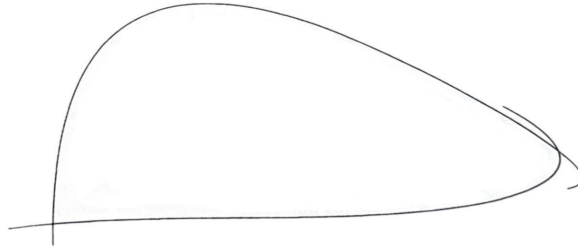
$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

Dizemos que x é heteroclínico aos pontos $y_1, y_2 \in X$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y_1)) = \lim_{n \rightarrow -\infty} d(f^n(x), f^n(y_2)) = 0.$$

Se M é uma variedade diferenciável e $x \in M$ é um ponto fixo hiperbólico para $f \in \text{Diff}^1(M)$, então dizemos que $q \in M$ é um ponto homoclínico transversal se q é um ponto de interseção transversal das variedades estável e instável de x .

Figura 2 – Um ponto homoclínico



Fonte: Katok e Hasselblatt (1995) [25]

Definição 2.5.8. *Se $\mathcal{O} = \mathcal{O}(p)$ é uma órbita periódica hiperbólica. Dizemos que $q \in M$ é um ponto homoclínico a $\mathcal{O}$ se $q \in W^s(\mathcal{O}) \cap W^u(\mathcal{O})$. Se, além disso, q é um ponto de interseção transversal entre essas variedades, então dizemos que q é um ponto transversal homoclínico associado a $\mathcal{O}$.*

Definição 2.5.9. *A classe homoclínica $H(\mathcal{O})$ associada a $\mathcal{O}$ (ou p) é dada por*

$$H(p) = \overline{W^s(p) \pitchfork W^u(p)}.$$

Um conjunto invariante compacto é uma classe homoclínica se for igual a $H(p)$.

Definição 2.5.10. *Dizemos que $f : X \rightarrow X$ é transitiva (ou topologicamente transitiva) se existe $x \in X$ tal que $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$. Ou seja, se f possui alguma órbita densa.*

Uma *perturbação* de π é um homeomorfismo $h : E \rightarrow E$, C^r nas fibras, tal que πh^{-1} é um fibrado C^r regular, h é C^0 perto da identidade e Dh ao longo das fibras é C^1 perto da identidade. Dizemos que π é um *fibrado C^r equivariante* para um difeomorfismo $F : E \rightarrow E$ e um homeomorfismo $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$ se $\pi F = f\pi$.

Definição 2.5.11. *Um difeomorfismo f é robustamente transitivo se ele é topologicamente transitivo e qualquer perturbação pequena permanece transitiva.*

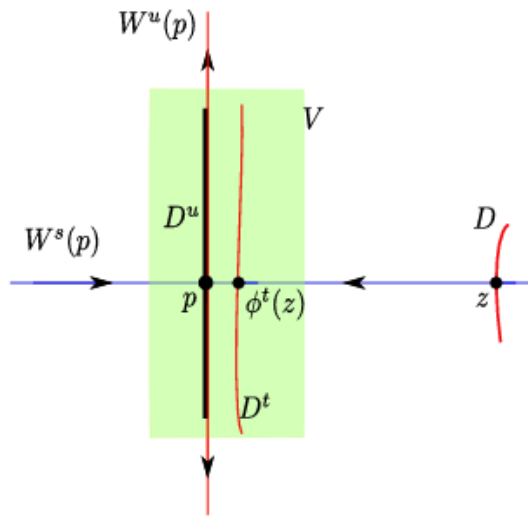
A existência de transitividade significa que existe algum ponto $x \in X$ cuja órbita visita qualquer conjunto aberto de X . Isso implica que o sistema não pode ser decomposto em dois subsistemas com espaços de fase de interior não vazio e que não sejam um subsistema do outro.

Proposição 2.5.12. *Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação contínua agindo em um espaço métrico (X, d) de Hausdorff e localmente compacto. Então f é transitiva se, e somente se, para todo par de subconjuntos abertos U e V , existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Lema 2.5.13. (λ -lema) *Seja p um ponto fixo de um fluxo ψ de classe C^r , com variedades estável e instável locais $W_\eta^s(p)$, $W_\eta^u(p)$. Seja D^u um disco mergulhado em $W_\eta^u(p)$ que é uma vizinhança de p em $W_\eta^u(p)$ e V uma vizinhança deste disco em M . Seja $z \in W_\eta^s(p)$ e D um disco transversal a $W_\eta^s(p)$ em z com a mesma dimensão de D^u . Seja D^t a componente conexa de $\phi^t(D) \cap V$ que contém $\psi^t(z)$, para todo $t \geq 0$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que para todo $t > T$ o disco D^t está ε -próximo de V na topologia C^r .*

A prova do λ -lema pode ser encontrada em Palis Jr e Melo (2017) [42].

Figura 3 – λ -lema



Fonte: Aguirre (2018) [1]

Definição 2.5.14. *Consideremos duas transformações $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$. Uma conjugação entre f e g é uma transformação $h : X \rightarrow Y$, a qual é um homeomorfismo, e que satisfaz*

$$h \circ f = g \circ h.$$

Duas transformações conjugadas compartilham diversas propriedades dinâmicas. A periodicidade é um exemplo: se x é um ponto periódico de f , então $h(x)$ é um ponto periódico de g . Isso pode ser observado a partir da seguinte sequência de passos:

$$f^2 = f \circ f = (h^{-1} \circ g \circ h) \circ (h^{-1} \circ g \circ h) = h^{-1} \circ g \circ id \circ g \circ h = h^{-1} \circ g^2 \circ h.$$

Assim, prosseguindo de forma recursiva, obtemos que $f^n = h^{-1} \circ g^n \circ h$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa maneira, se $f^n(x) = x$, temos

$$x = f^n(x) = h^{-1}(g^n(h(x))),$$

implicando em $h(x) = g^n(h(x))$, e garantindo a veracidade da afirmação.

Podemos entender a conjugação de funções da seguinte maneira: se f e g são conjugadas uma à outra, podemos dizer, de certa forma, que se entendermos o comportamento de f , seremos capazes também de entender o de g .

A noção de conjugação, no entanto, pode por vezes ser um pouco restritiva, cabendo, em alguns casos, a utilização de outra noção um pouco mais fraca: a de *semiconjugação*. Dizemos que uma transformação $f : X \rightarrow X$ é *semiconjugada* a $g : Y \rightarrow Y$ ou que (Y, g) é um *fator* de (X, f) se existe uma transformação $h : X \rightarrow Y$, contínua e sobrejetiva, tal que

$$h \circ f = g \circ h.$$

A definição a seguir foi retirada da obra de Hirsch, Pugh e Shub (1977) [21].

Definição 2.5.15. *Seja um sistema dinâmico $f : X \rightarrow X$. f é dita estruturalmente estável se, para todo sistema dinâmico $g : X \rightarrow X$ "próximo" de f , temos que f e g são conjugadas. A noção de proximidade depende do contexto no qual cada caso se insere e deve ser sempre explicitada.*

2.6 Introdução à Teoria da Medida

Este tópico reúne noções básicas de Teoria da Medida, em grande parte voltadas para revisão.

Dado um subconjunto $A \subset X$, denotaremos por A^c o complementar $X \setminus A$ do conjunto A em relação a X . As principais fontes utilizadas para a construção desse tópico são Folland (1999) [18] e Viana e Oliveira (2016) [54].

Definição 2.6.1. *Uma álgebra de X é uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X que é fechada para as operações elementares de conjuntos e contém o conjunto vazio, isto é, tal que*

- (a) $\emptyset \in \mathcal{B}$;
- (b) $A \in \mathcal{B}$ implica que $A^c \in \mathcal{B}$;
- (c) $A \in \mathcal{B}$ e $B \in \mathcal{B}$ implica $A \cup B \in \mathcal{B}$.

Definição 2.6.2. *Uma álgebra se diz uma σ -álgebra de subconjuntos de X e também for fechada para as uniões enumeráveis, ou seja,*

$$A_j \in \mathcal{B} \text{ para } j = 1, \dots, n, \dots \text{ implica em } \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{B}.$$

Observe que uma σ -álgebra $\mathcal{B}$ também é fechada para as interseções enumeráveis: se $A_j \in \mathcal{B}$ para $j = 1, \dots, n, \dots$, então $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c)^c$ também está em $\mathcal{B}$.

Definição 2.6.3. *Um espaço mensurável é uma dupla $(X, \mathcal{B})$, onde X é um conjunto e $\mathcal{B}$ é uma σ -álgebra de subconjuntos de X . Os elementos de $\mathcal{B}$ são chamados conjuntos mensuráveis do espaço.*

Definição 2.6.4. *A σ -álgebra gerada por uma família $\mathcal{E}$ de subconjuntos X é a menor σ -álgebra $\sigma(\mathcal{E})$ que contém a família $\mathcal{E}$, ou seja, é a interseção de todas as σ -álgebras que contêm $\mathcal{E}$.*

Definição 2.6.5. *A σ -álgebra de Borel (ou σ -álgebra boreliana) de um espaço topológico é a σ -álgebra $\sigma(\tau)$ gerada pela topologia τ , isto é, a menor σ -álgebra que contém todos os subconjuntos abertos. Nesse caso, os conjuntos mensuráveis recebem o nome de borelianos.*

É interessante acrescentar que os subconjuntos fechados de X , ou seja, os complementares dos subconjuntos abertos, também pertencem à σ -álgebra de Borel.

A partir das informações obtidas, pode-se introduzir o conceito de medida.

Definição 2.6.6. *Uma medida em um espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$ é uma função $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ a qual satisfaz:*

- (a) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (b) $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ para quaisquer $A_j \in \mathcal{B}$ disjuntos dois a dois.

Dizemos que uma medida é σ -finita se existe uma sequência de subconjuntos $A_1, \dots, A_n, \dots$ de X tal que $\mu(A_i) < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

A segunda propriedade na definição de medida é a de σ -aditividade. Dizemos que uma função $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ é *finitamente aditiva* se

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^N A_j\right) = \sum_{j=1}^N \mu(A_j)$$

para qualquer família finita $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ de subconjuntos disjuntos dois a dois. Note que, em particular, toda medida é finitamente aditiva, e que, se μ é finitamente aditiva e não é constante igual a $+\infty$, então $\mu(\emptyset) = 0$, pois $\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset)$ e, subtraindo $\mu(A)$ nas duas extremidades, obtemos $0 = \mu(\emptyset)$.

Sejam $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$ dois espaços mensuráveis, isto é, X e Y são conjuntos munidos de σ -álgebras $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, respectivamente. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita *mensurável* (ou $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -mensurável) se, para todo conjunto $E \in \mathcal{N}$, a pré-imagem $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$.

Definição 2.6.7. *Seja $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ uma função mensurável. Então*

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu,$$

desde que alguma das integrais do lado direito seja finita.

Definição 2.6.8. *Dizemos que uma função $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ é integrável se for mensurável e sua integral for um número real. Denotamos o conjunto das funções integráveis por $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ ou $\mathcal{L}^1(\mu)$.*

Dado qualquer $p \in [1, \infty)$, dizemos que $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função p -integrável com relação a μ se a função $|f|^p$ é integrável com relação a μ .

Definição 2.6.9. *Denotamos por $L^p(\mu)$ o conjunto das funções complexas p -integráveis com relação a μ , módulo a relação de equivalência que identifica quaisquer funções que são iguais em μ -quase todo ponto.*

O seguinte teorema é a principal ferramenta para construção de medidas.

Teorema 2.6.10. *(Extensão) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de subconjuntos de X e seja $\mu_0 : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ uma função σ -aditiva com $\mu_0(X) < \infty$. Então existe uma única medida μ definida na σ -álgebra $\mathcal{B}$ gerada por $\mathcal{A}$ que é uma extensão de μ_0 , ou seja, tal que $\mu(A) = \mu_0(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$.*

Vejamos o conceito de anel de conjuntos, exposto por Isnard (2018) [24].

Definição 2.6.11. Um anel de conjuntos é qualquer coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de um conjunto Ω tal que $\emptyset \in \mathcal{A}$ e se A_1 e $A_2 \in \mathcal{A}$, então $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$ e $A_1 \cap A_2^c \in \mathcal{A}$.

Em consequência, as uniões e interseções finitas de elementos de $\mathcal{A}$ estão em $\mathcal{A}$.

Um anel de medida é um anel de conjuntos com uma função medida definida sobre ele.

Conforme exposto em Halmos (1974) [20], um átomo de um anel de medida (S, μ) (ou de uma medida μ) é um elemento E diferente de zero tal que, se $F \subset E$, então $F = \emptyset$ ou $F = E$. Um anel de medida sem átomos é chamado não atômico. Além disso, se (X, S, μ) é um espaço de medida cujo anel de medida é não atômico, então tanto o espaço de medida X quanto a μ são chamados não atômicos.

Definição 2.6.12. Seja (X, τ) um espaço topológico e seja μ uma medida na σ -álgebra de Borel de X . O suporte da medida μ é o conjunto $\text{supp } \mu$ formado pelos pontos $x \in X$ tais que $\mu(V) > 0$ para qualquer vizinhança V de x .

Temos que $x \in \text{supp}(\mu)$ se, e somente se, $\int f d\mu > 0$ para todo $f \in C_c(X, [0, 1])$ tal que $f(x) > 0$.

Dizemos que uma medida μ é suportada em S (suporte) se sua massa estiver inteiramente concentrada nesse conjunto, ou seja, $\mu(A) = 0$ para qualquer conjunto A fora de S .

É pertinente destacar também resultados relacionados à convergência de sequências de funções mensuráveis: teoremas da convergência monótona e dominada, além do lema de Fatou.

Teorema 2.6.13. (Convergência monótona) Seja $f_n : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ uma sequência não decrescente de funções mensuráveis não negativas e seja $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ a função definida por $f(x) = \lim_n f_n(x)$. Então

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

O próximo resultado vale para sequências mais gerais, não sendo elas necessariamente monótonas.

Teorema 2.6.14. (Lema de Fatou) Seja $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$ uma sequência de funções mensuráveis não negativas. Então, a função $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ definida por $f(x) = \liminf_n f_n(x)$ é integrável e vale

$$\int \liminf_n f_n(x) d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Temos ainda o teorema da convergência dominada, o principal dentre estes três resultados.

Teorema 2.6.15. (*Convergência dominada*) *Seja $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis e suponha que existe uma função integrável g tal que $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ para μ -quase todo x em X . Suponha também que a sequência $(f_n)_n$ converge em μ -quase todo ponto para uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Então, f é integrável e vale*

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Dizemos que uma medida invariante μ é ergódica se $f^{-1}(A) = A$ a menos de medida nula implicar que $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A^c) = 0$.

2.7 Conceitos iniciais em Teoria Ergódica

Uma noção fundamental, e que será utilizada ao longo do texto deste trabalho, é a de expoentes de *Lyapunov*. Para compreensão do conceito, algumas ideias iniciais devem ser apresentadas, o que será feito de forma breve, de maneira a facilitar o entendimento do texto sem torná-lo desnecessariamente extenso. As principais fontes das informações a seguir são: Álvarez (2023) [2], Katok e Hasselblatt (1995) [25] e Viana e Oliveira (2014) [38].

Teorema 2.7.1. (*Birkhoff - versão para tempos médios de visita*) *Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável e μ uma probabilidade invariante por f . Dado qualquer conjunto mensurável $E \subset M$, o tempo médio de visita*

$$\tau(E, x) = \lim_n \frac{1}{n} \# \{j = 0, 1, \dots, n-1 : f^j(x) \in E\}$$

existe em μ -quase todo ponto $x \in M$. Além disso, $\int \tau(E, x) d\mu(x) = \mu(E)$.

Observe que, se $\tau(E, x)$ existe para um certo ponto $x \in M$, então

$$\tau(E, f(x)) = \tau(E, x) \tag{2.1}$$

De fato, por definição,

$$\begin{aligned}
\tau(E, f(x)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mathcal{X}_E(f^j(x)) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n-1} \mathcal{X}_E(f^j(x)) - \frac{1}{n} [\mathcal{X}_E(x) - \mathcal{X}_E(f^n(x))] \\
&= \tau(E, x) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\mathcal{X}_E(x) - \mathcal{X}_E(f^n(x))]
\end{aligned}$$

Sendo a função característica limitada, visto que sua imagem é sempre igual a zero ou um, temos que o último limite é igual a zero, completando a prova da Igualdade 2.1.

O próximo passo será generalizar o Teorema 2.7.1 para o caso em que φ é uma função integrável qualquer:

Teorema 2.7.2. (*Birkhoff*) *Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável e seja μ uma probabilidade invariante por f . Dada qualquer função integrável $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, o limite*

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) \quad (2.2)$$

existe em μ -quase todo ponto $x \in M$. Além disso, a função $\tilde{\varphi}$ definida desta forma é integrável e satisfaz

$$\int \tilde{\varphi}(x) d\mu(x) = \int \varphi(x) d\mu(x).$$

O limite $\tilde{\varphi}$ é chamado *média temporal*, ou *média orbital* de φ . A proposição a seguir mostra que as médias temporais são constantes ao longo de órbitas, em μ -quase todo ponto, generalizando a Igualdade 2.1.

Proposição 2.7.3. *Seja $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Então*

$$\tilde{\varphi}(f(x)) = \tilde{\varphi}(x) \text{ para } \mu\text{-quase todo ponto } x \in M. \quad (2.3)$$

Dizemos que uma sequência de funções $\varphi_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ é subaditiva para uma transformação $f : M \rightarrow M$ se

$$\varphi_{m+n} \leq \varphi_m + \varphi_n \circ f^m \text{ para todo } m, n \geq 1. \quad (2.4)$$

Toda soma temporal constitui uma sequência aditiva e, em particular, subaditiva.

Teorema 2.7.4. (*Kingman*) *Seja μ uma probabilidade invariante para uma transformação $f : M \rightarrow M$ e seja $\varphi_n : M \rightarrow \mathbb{R}$, com $n \geq 1$, uma sequência subaditiva de funções*

mensuráveis tal que $\varphi_1^+ \in L^1(\mu)$. Então a sequência $(\varphi_n/n)_n$ converge em μ -quase todo ponto para uma função f -invariante $\varphi : M \rightarrow [-\infty, +\infty)$. Além disso, $\varphi^+ \in L^1(\mu)$ e

$$\int \varphi d\mu = \lim_n \frac{1}{n} \int \varphi_n d\mu = \inf_n \frac{1}{n} \int \varphi_n d\mu \in [-\infty, +\infty).$$

Uma sequência $(a_n)_n$ em $[-\infty, +\infty)$ é dita subaditiva se vale $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ para todo $m, n \geq 1$.

Lema 2.7.5. *Se $(a_n)_n$ é uma sequência subaditiva, então*

$$\lim_n \frac{a_n}{n} = \inf_n \frac{a_n}{n} \in [-\infty, +\infty).$$

Consideremos $\varphi_-(x) = \lim_n \inf \frac{\varphi_n}{n}(x)$ e $\varphi_+(x) = \lim_n \sup \frac{\varphi_n}{n}(x)$.

Para a próxima aplicação a ser definida, suporemos que $\varphi_- > -\infty$ em todo ponto. Fixado $\epsilon > 0$, defina, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$E_k = \{x \in M : \varphi_j(x) \leq j(\varphi_-(x) + \epsilon) \text{ para algum } j \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Temos, assim, $E_k \subset E_{k+1}$ para todo k . Além disso, a definição de $\varphi_-(x)$ implica que $M = \bigcup_k E_k$. Defina também

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \varphi_-(x) + \epsilon & \text{se } x \in E_k \\ \varphi_1(x) & \text{se } x \in E_k^c. \end{cases}$$

Segue da definição de E_k que $\varphi_1(x) > \varphi_-(x) + \epsilon$ para todo $x \in E_k^c$. Temos também que a sequência $(\varphi_k(x))_k$ é não-crescente e converge para $\varphi_-(x) + \epsilon$, qualquer que seja $x \in M$. Em particular, pelo Teorema da Convergência Monótona (2.6.13),

$$\int \psi_k d\mu \rightarrow \int (\varphi_- + \epsilon) d\mu \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Como já observado, toda sequência de somas orbitais

$$\varphi_n = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^j, n \geq 1$$

é aditiva e, em particular, subaditiva. Portanto, o Teorema ergódico de Birkhoff (2.7.2) é um caso particular do Teorema 2.7.4. Outro corolário importante do Teorema Ergódico Subaditivo é o teorema de Furstenberg-Kesten, que será enunciado neste tópico.

Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável e seja μ uma probabilidade invariante. Seja $\theta : M \rightarrow GL(d)$ uma função mensurável com valores no conjunto $GL(d)$

das matrizes quadradas invertíveis de dimensão d . O cociclo definido por θ sobre a transformação f é a sequência de funções dada por

$$\phi^n(x) = \theta(f^{n-1}(x)) \dots (\theta(f(x)))\theta(x), \text{ para } n \geq 1 \text{ e } \phi^0(x) = id$$

para todo $x \in M$. Temos que vale o seguinte:

$$\phi^{m+n}(x) = \phi^n(f^m(x)) \cdot \phi^m(x), \text{ para todo } m, n \in \mathbb{Z} \text{ e todo } x \in M. \quad (2.5)$$

Isso porque, como temos

$$\phi^{m+n}(x) = (\theta(f^{m+n-1}(x))) \dots (\theta(f^{m-1}(x))) \dots (\theta(f(x)))\theta(x)$$

As parcelas $\theta(f^{m+n-1}(x))$ até $\theta(f^m(x))$ são correspondentes a $n - 1$ iteradas, ou seja, a $\phi^n(f^m(x))$, enquanto as parcelas restantes correspondem a $\phi^m(x)$.

Além disso, temos que qualquer sequência $(\phi^n)_n$ que satisfaz (2.5) é o cociclo definido por $\theta = \phi^1$ sobre a transformação f .

Teorema 2.7.6. (*Furstenberg-Kersen*) Se $\log^+ \|\theta\| \in L^1(\mu)$, então

$$\lambda_{max} d\mu = \lim_n -\frac{1}{n} \log \|\phi^n(x)^{-1}\|.$$

Se $\log^+ \|\theta^{-1}\| \in L^1(\mu)$, então

$$\lambda_{min}(x) = \lim_n -\frac{1}{n} \log \|\phi^n(x)^{-1}\|$$

existe em μ -quase todo ponto. Além disso, $\lambda_{min} \in L^1(\mu)$ e

$$\int \lambda_{min} d\mu = \lim_n -\frac{1}{n} \int \log \|(\phi^n(x)^{-1})\| d\mu = \sup_n -\frac{1}{n} \int \log \|(\phi^n)^{-1}\| d\mu.$$

O teorema ergódico subaditivo de Oseledets, a ser enunciado a seguir, refina a conclusão do Teorema de Furstenberg-Kersten:

Teorema 2.7.7. (*Oseledets*) Nas mesmas condições do Teorema 2.7.6, para μ -quase todo $x \in M$, existe um número inteiro positivo $k = k(x)$ e existem números reais $\lambda_1(x) > \dots > \lambda_k(x)$ e uma filtração

$$\mathbb{R}^d = V_x^1 > \dots > V_x^k > V_x^{k+1} \equiv \{0\} \quad (2.6)$$

tal que, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ e para μ -quase todo $x \in M$,

1. $k(f(x)) = k(x)$, $\lambda_i(f(x)) = \lambda_i(x)$ e $\theta(x) \cdot V_x^i = V_{f(x)}^i$;
2. $\lim_n \frac{1}{n} \log \|\phi^n(x)v\| = \lambda_i(x)$ para todo $v \in V_x^i \setminus V_x^{i+1}$
3. $\lim_n \frac{1}{n} \log |\det \phi^n(x)| = \sum_{i=1}^k d_i(x) \lambda_i(x)$, onde $d_i(x) = \dim V_x^i - \dim V_x^{i+1}$.

Os números $\lambda_i(x)$ são chamados *expoentes de Lyapunov* de θ relativamente a f no ponto x . Eles satisfazem $\lambda_1 = \lambda_{max}$ e $\lambda_k = \lambda_{min}$. Por isso, também chamamos λ_{max} e λ_{min} de expoentes de Lyapunov extremos no ponto x . Cada $d_i(x)$ é chamado multiplicidade do expoente de Lyapunov $\lambda_i(x)$.

Quando f é invertível, podemos estender a sequência $(\phi^n)_n$ a todo o $\mathbb{Z}$, definindo

$$\phi^{-n}(x) = \phi^n(f^{-n}(x))^{-1} \text{ para todo } n \geq 1 \text{ e } x \in M.$$

Supondo também que $\log^+ \|\theta^{-1}\| \in L^1(\mu)$, é possível obter uma conclusão mais forte do que anteriormente: no lugar da Filtração 2.6, obtemos uma decomposição

$$\mathbb{R}^d = E_x^1 \oplus \dots \oplus E_x^k$$

tal que, para todo $i = 1, \dots, k$,

1. $\theta(x) \cdot E_x^i = E_{f(x)}^i$ e $V_x^i = V_x^{i+1} \oplus E_x^i$; logo, $\dim E_x^i = \dim V_x^i - \dim V_x^{i+1}$;
2. $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|\phi^n(x)v\| = \lambda_i(x)$ para todo $v \in E_x^i$ diferente de zero;
3. $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log |\det \phi^n(x)| = \sum_{i=1}^k d_i(x) \lambda_i(x)$, onde $d_i(x) = \dim E_x^i$.

A família $\{V_x^i\}_{x \in M}$ define, para cada índice i , uma variação mensurável de subespaços ao longo de x , e essa estrutura é chamada de *fibrado de Oseledets*.

Definição 2.7.8. *Uma medida de probabilidade ergódica f -invariante μ é chamada hiperbólica se todos os seus expoentes de Lyapunov são não nulos e existem expoentes de Lyapunov com sinais diferentes. Dizemos que uma medida hiperbólica é do tipo sela se $\lambda_1 < 0 < \lambda_d$. Denotamos por $\mathcal{M}_h(f)$ o conjunto de medidas hiperbólicas ergódicas de tipo sela.*

Seja $r \geq 1$, e seja $f \in \text{Diff}^r(M)$ um difeomorfismo de classe C^r sobre uma variedade Riemanniana compacta M de dimensão d . Dado um subconjunto compacto $\Lambda \subset M$, invariante por f , dizemos que Λ admite uma *decomposição dominada* se existe uma

decomposição Df -invariante do espaço tangente $T_\Lambda M = E \oplus F$, e constantes $C > 0$, $\lambda \in (0, 1)$, tais que, para todo $x \in \Lambda$ e $n > 0$, tem-se:

$$\|Df_x^n|_E\| \cdot \|Df_{f^n(x)}^{-n}|_F\| \leq C\lambda^n.$$

Um *conjunto hiperbólico* para f é um subconjunto compacto f -invariante $\Lambda \subset M$, com uma decomposição

$$T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$$

para todo $x \in \Lambda$, tal que, para algum $C > 0$ e $\lambda \in (0, 1)$, para todo $x \in \Lambda$, $n \geq 0$, $v^s \in E^s(x)$, $v^u \in E^u(x)$, temos:

$$\|Df_x^n(v^s)\| \leq C\lambda^n \|v^s\| \quad \text{e} \quad \|Df_x^{-n}(v^u)\| \leq C\lambda^n \|v^u\|.$$

Quando $\Lambda = M$, dizemos que f é um *difeomorfismo de Anosov*.

2.7.1 Teorema da Variedade Estável e Folheações Invariantes

Seja f um difeomorfismo C^r sobre uma variedade compacta M , admitindo uma decomposição dominada da forma

$$TM = E^u \oplus E^c \oplus E^s,$$

onde Df é uniformemente expansivo ao longo de E^u e uniformemente contrativo ao longo de E^s , isto é, f é parcialmente hiperbólico.

Teorema 2.7.9. *Supondo $\dim E^u > 0$, existe uma única família $\mathcal{F}^u$ de subvariedades imersas C^r , injetivamente, tais que $x \in \mathcal{F}^u(x)$ e $\mathcal{F}^u(x)$ é tangente a E^u em todo ponto $x \in M$. Essa família é invariante, no sentido de que*

$$f(\mathcal{F}^u(x)) = \mathcal{F}^u(f(x)) \quad \text{para todo } x \in M,$$

e as folhas $\mathcal{F}^u(x)$ são uniformemente contraídas por algum iterado negativo de f . Além disso, $\mathcal{F}^u$ é uma laminação contínua de M , ou seja, todo ponto possui uma carta local contínua que trivializa as folhas e é uniformemente C^r ao longo de cada folha.

Dessa maneira, os conjuntos instáveis locais formam uma folheação instável forte. Introduziremos a seguir, a partir das ideias vistas, os conceitos de folheação estável, instável, forte e fraca, também de grande importância no decorrer do trabalho.

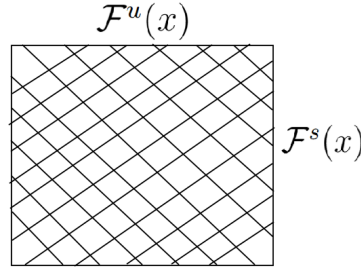
Temos uma *folheação estável* $\mathcal{F}^s$ se existe uma partição da variedade M em subvariedades imersas, chamadas folhas estáveis, tais que para todo $x \in M$, temos:

$$\mathcal{F}^s(x) = \{y \in M | d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}.$$

Temos uma *folheação instável* $\mathcal{F}^u$ se existe uma partição da variedade M em subvariedades imersas, chamadas folhas instáveis, tais que para todo $x \in M$, temos:

$$\mathcal{F}^u(x) = \{y \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}.$$

Figura 4 – Folheações estável e instável



Fonte: A autora

Essas folheações são invariantes por f , isto é,

$$f(\mathcal{F}^s(x)) = \mathcal{F}^s(f(x)) \text{ e } f(\mathcal{F}^u(x)) = \mathcal{F}^u(f(x)).$$

Dizemos que uma folheação $\mathcal{F}$ é *subfolheação* de outra $\mathcal{G}$ quando cada folha de $\mathcal{G}$ é folheada por folhas de $\mathcal{F}$.

Folheação forte diz respeito às folheações estável e instável, enquanto *folheação fraca* diz respeito à centro-estável e à centro-instável.

2.7.2 Entropia

Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação contínua sobre um espaço métrico compacto, e μ uma medida de probabilidade f -invariante e ergódica. Um conjunto $E \subset M$ é dito ser (n, ϵ) -separado se, para todo $x, y \in E$, com $x \neq y$, existe $i \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que $d(f^i(x), f^i(y)) \geq \epsilon$.

A *entropia topológica* é definida por:

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup \{ \#E : E \subset M \text{ é } (n, \epsilon)\text{-separado} \}.$$

A entropia topológica é, de maneira informal, uma medida que nos fornece a taxa de crescimento exponencial do número de segmentos de órbitas de tamanho n que podemos distinguir dada uma resolução finita. Ela, portanto, dá, de certa maneira, uma medida de complexidade do sistema em questão, sendo ele mais complexo quando a entropia for maior.

A seguir, definiremos a entropia métrica.

Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ou (X, μ) um espaço de probabilidade e I um conjunto finito ou contável de índices. Uma coleção de subconjuntos mensuráveis $\xi = \{C_\alpha \in \mathcal{B} | \alpha \in I\}$ é chamada *partição mensurável* de X se $\mu(X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha) = 0$ e $\mu(C_{\alpha_1} \cap C_{\alpha_2}) = 0$ para $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

A entropia de uma partição mensurável ξ é dada por

$$H(\xi) := H_\mu(\xi) := - \sum_{\substack{\alpha \in I \\ \mu(C_\alpha) > 0}} \mu(C_\alpha) \log \mu(C_\alpha) \geq 0.$$

Alternativamente, podemos concordar que $0 \log 0 = 0$ e escrever

$$H_\mu(\xi) := - \sum_{\alpha \in I} \mu(C_\alpha) \log \mu(C_\alpha).$$

Para partições enumeráveis ξ , a entropia pode ser infinita. Na maioria dos casos, suprimiremos a dependência da entropia em relação à medida, mas quando mais de uma medida estiver envolvida na discussão, utilizaremos o índice inferior.

Se $T : X \rightarrow X$ é uma transformação que preserva a medida, ξ é uma partição mensurável de X e $T^{-1}(\xi) = \{T^{-1}(C_\alpha) | \alpha \in I\}$, então

$$H(T^{-1}(\xi)) = H(\xi). \quad (2.7)$$

Para uma partição mensurável ξ e $x \in X$, seja $C_\xi(x)$ o elemento de ξ que contém x . A função $I_\xi : X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$I_\xi(x) = - \log \mu(C_\xi(x)) \quad (2.8)$$

é chamada *função informação* da partição ξ . Nessa definição, desconsideramos o conjunto de medida nula para o qual $\mu(C_\xi(x)) = 0$. Usando 2.8, podemos escrever

$$H_\mu(\xi) = \int_X I_\xi d\mu. \quad (2.9)$$

Essa representação de entropia ilumina e torna natural, segundo Katok e Hasselblatt (1995) [25], a seguinte noção de entropia condicional de uma partição com respeito a outra partição que desempenha um papel central na teoria da entropia para transformações que preservam a medida. Ao considerar uma partição, é conveniente usar uma notação alternativa para as medidas condicionais μ_A , correspondentes aos elementos da partição, definindo $\mu(A|B) = \mu(A \cap B)/\mu(B)$.

Definição 2.7.10. *Seja $\xi = \{C_\alpha | \alpha \in I\}$, $\eta = \{D_\alpha | \alpha \in J\}$ duas partições mensuráveis de (X, μ) . A entropia condicional de ξ com respeito a η é*

$$H(\xi|\eta) := \sum_{\beta \in J} \mu(D_\beta) \sum_{\alpha \in I} \mu(C_\alpha | D_\beta) \log \mu(C_\alpha | D_\beta).$$

Observação 2.7.11. *Se $\nu = \{X\}$ é a partição trivial, então $H(\xi) = H(\xi|\nu)$. Similarmente à equação 2.9, podemos reescrever a definição de entropia condicional como*

$$H(\xi|\eta) = \int_X I_{\xi,\eta} d\mu, \quad (2.10)$$

onde $I_{\xi,\eta}$ é a função informação condicional definida por

$$I_{\xi,\eta}(x) = -\log \mu(C_\xi(x) | C_\eta(x)).$$

Para uma partição mensurável ξ e uma transformação mensurável (não necessariamente invertível) T , definimos a *partição conjunta* por

$$\xi_{-n}^T = \xi \vee T^{-1}(\xi) \vee \dots \vee T^{-n+1}(\xi).$$

Definição 2.7.12.

$$h(T, \xi) := h_\mu(T, \xi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\xi_{-n}^T)$$

é chamada de entropia métrica da transformação T relativa à partição ξ .

Definição 2.7.13. A entropia de T com respeito a μ (ou a entropia de μ) é

$$h(T) := h_\mu(T) := \sup \{h_\mu(T, \xi) \mid \xi \text{ é uma partição mensurável com } H(\xi) < \infty\}.$$

Conforme apresentado em Bowen (1971) [5], o produto de dois sistemas dinâmicos contínuos T_1 e T_2 entre espaços compactos satisfaz

$$h_{top}(T_1 \times T_2) = h_{top}(T_1) + h_{top}(T_2).$$

Dentre os exemplos de cálculos de entropia apresentados por Katok e Hasselblatt (1996) [25], temos o caso dos automorfismos torais hiperbólicos, exemplo de grande utilidade para o desenvolvimento desta pesquisa, e que apresenta, entre outras coisas, a ideia de que, neste contexto, dado um automorfismo hiperbólico toral f ,

$$h_{top}(f) = \log \lambda, \quad (2.11)$$

sendo λ o autovalor máximo de f .

2.7.3 Pressão

Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação contínua em um espaço métrico compacto. Chamamos *potencial* em M a qualquer função $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\phi_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ por $\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ f^i$. Dada qualquer subcobertura aberta α de M , definimos

$$P_n(f, \phi, \alpha) = \inf \left\{ \sum_{U \in \mathcal{Y}} \sup_{x \in U} e^{\phi_n(x)} : \mathcal{Y} \text{ é subcobertura finita de } \alpha^n \right\}.$$

A sequência $\log P_n(f, \phi, \alpha)$ é subaditiva e, portanto, o limite

$$P(f, \phi, \alpha) = \lim_n \frac{1}{n} \log P_n(f, \phi, \alpha)$$

existe. Chamados de *pressão* (ou *pressão topológica*) do potencial ϕ relativamente a f ao limite $P(f, \phi)$ de $P(f, \phi, \alpha)$ quando o diâmetro de α vai para zero. A existência desse limite é garantida no lema 10.3.1 do livro de Viana e Oliveira (2016) [54].

Um *potencial de Holder* é um potencial que é Holder contínuo.

O conceito a ser apresentado a seguir é o princípio variacional. Para trabalhar com a estrutura mensurável dos homeomorfismos f de espaços métricos compactos X , levemos em conta que o conjunto $\mathcal{M}(f)$ de medidas de probabilidade de Borel invariantes por f em X é um subconjunto convexo, compacto (na topologia fraca estrela) e não vazio (os pontos extremos são medidas ergódicas).

Teorema 2.7.14. (*Princípio Variacional*) Se $f : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo de um espaço métrico compacto (X, d) , então $h_{\text{top}}(f) = \sup \{h_\mu(f) | \mu \in \mathcal{M}(f)\}$.

Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto. Uma medida invariante de probabilidade μ é dita um *estado de equilíbrio* para um potencial $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ se ela realiza o supremo no princípio variacional, isto é,

$$h_\mu(f) + \int \phi d\mu = P(\phi, f) = \sup \{h_\nu(f) + \int \phi d\nu : \nu \in \mathcal{M}(f)\}.$$

No caso particular $\phi \equiv 0$, também dizemos que μ é uma *medida de máxima entropia*.

Exemplo 2.7.15. Se $f : M \rightarrow M$ tem entropia topológica nula, toda probabilidade invariante μ é medida de máxima entropia, pois $h_\mu(f) = 0 = h(f)$. Agora, para um potencial qualquer $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$,

$$P(f, \phi) = \sup \left\{ \int \phi d\nu : \nu \in \mathcal{M}(f) \right\}.$$

Logo, ν é estado de equilíbrio se, e somente se, ν maximiza a integral de ϕ . Como a função $\nu \mapsto \int \phi d\nu$ é contínua e $\mathcal{M}(f)$ é compacto, relativamente à topologia fraca estrela, máximos existem para todo potencial ϕ .

Se μ é uma medida f -invariante em X , e $\nu = \pi * \mu$ a medida imagem em Y , então a *pressão relativa* satisfaz uma versão do princípio variacional:

$$P(f, \varphi, \pi) = \sup \left\{ f|\pi^{-1}(\mathcal{B}_Y) + \int \varphi d\mu \right\},$$

onde $h_\mu(f|\pi^{-1}(\mathcal{B}_Y))$ é a entropia condicional de μ dado o fator Y , ou seja, mede a incerteza “dentro” das fibras de μ .

O teorema que segue é de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho, e é fornecido por Ledrappier e Walters (1977) [27]. Considere $C(X)$ o espaço das funções contínuas reais definidas em X , $M(Y, S)$ o espaço das probabilidades S -invariantes definidas nos subconjuntos de Borel $\mathcal{B}(Y)$, $h_\mu(T|S)$ como sendo igual ao $\sup \{h_\mu(T|S, \xi) | \xi \text{ uma partição finita de } x\}$, e

$$h_\mu(T|S, \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_\mu(\xi^n | \pi^{-1}(\epsilon_Y)).$$

Teorema 2.7.16. (Teorema Variacional de Ledrappier-Walters) *Sejam X e Y espaços métricos compactos e seja $T : X \rightarrow X$, $S : Y \rightarrow Y$, $\pi : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas tais que π é sobrejetora e $\pi T = S\pi$. Seja $f \in C(X)$ e $\nu \in M(Y, S)$. Então*

$$\sup \left\{ h_\mu(T|S) + \mu(f) | \mu \in M(X, T) \text{ e } \mu \circ \pi^{-1} = \nu \right\} = \int_Y P(T, f, \pi^{-1}(y)) d\nu(y),$$

sendo $\mu(f)$ correspondente a $\int \varphi d\mu$, conforme Walkden (2018) [55].

Segundo Ures (2012) [53], uma aplicação f é *intrinsecamente ergódica* se possui uma única medida de máxima entropia.

2.7.4 Operador de transferência

O conceito de operador de transferência (ou operador de Ruelle-Perron-Frobenius) também tem utilidade no desenvolvimento da pesquisa. Trata-se de um operador linear $\mathcal{L} : C^0(M) \rightarrow C^0(M)$ definido no espaço $C^0(M)$ das funções contínuas complexas por

$$\mathcal{L}g(y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} e^{\varphi(x)} g(x).$$

3 Resultados

Este capítulo apresenta os principais resultados a serem utilizados ao longo da prova dos teoremas principais deste trabalho.

3.1 O exemplo de Shub

Este tópico tem como referência o trabalho de Shub (1971) [50] acerca de difeomorfismos topologicamente transitivos em $\mathbb{T}^4$, e é de fundamental importância para o desenvolvimento posterior dos teoremas e corolários principais desta pesquisa.

Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo (M variedade compacta, conexa e C^∞) com p ponto periódico de f de período n . Temos o seguinte resultado a respeito da transitividade de f :

Teorema 3.1.1. *Seja $W^s(p)$ (resp. $W^u(p)$) o conjunto estável (resp. instável) tangente ao subespaço $T_p M$ correspondendo aos autovalores de $Df^n(p)$ com módulo maior que 1 (resp. menor que 1). Aqui, f não precisa ser hiperbólico. Se $W^s(p)$ e $W^u(p)$ são densos em M , então f é topologicamente transitivo.*

Demonstração. Se as variedades $W^s(p)$ e $W^u(p)$ são densas em M , então para todo ponto $x \in M$ e todo raio $\epsilon > 0$, existe um ponto $y \in W^s(p)$ (resp. $W^u(p)$) tal que a distância entre x e y é menor que ϵ , ou seja, as variedades $W^s(p)$ e $W^u(p)$ passam arbitrariamente perto de todo ponto no espaço M .

Sendo as variedades próximas a qualquer ponto no espaço, então, visto que elas se referem aos pontos que se aproximam de p no futuro ($W^s(p)$) ou no passado ($W^u(p)$), algum ponto dentro dessas variedades e, conseqüentemente, da órbita do ponto x que se aproxima de p , terá distância menor que ϵ em relação a um ponto q qualquer. Dessa maneira, tomando abertos U e V de p e q , respectivamente, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. $\square$

Teorema 3.1.2. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo Anosov com pontos periódicos densos em M , $f(m_0) = m_0$, $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado C^r equivariante para $F : E \rightarrow E$, e f tal que $F|_{\pi^{-1}(m_0)}$ é Anosov com pontos periódicos densos. Então f é topologicamente transitiva.*

Teorema 3.1.3. (Teorema do fibrado equivariante) *Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado C^r equivariante de F e f , onde f é Anosov. Se f possui taxas de expansão/contração que superam as de F ao longo das fibras, então para qualquer perturbação C^1 G de F suficientemente pequena, existe uma perturbação π' de π tal que π' é um fibrado C^1 equivariante para G e f .*

Teorema 3.1.4. *Sejam π , E , f como nos teoremas 3.1.2 e 3.1.3. Então qualquer perturbação C^1 de F suficientemente pequena é topologicamente transitiva.*

Demonstração. A prova deste teorema consiste na articulação das conclusões obtidas nos dois anteriores (3.1.2 e 3.1.3): o primeiro garante que F , tal como é caracterizada, é topologicamente transitiva, enquanto o segundo assegura que isso se mantém ainda que haja uma perturbação C^1 , desde que esta seja suficientemente pequena. $\square$

A seguir, é apresentado o exemplo intitulado como "Exemplo de Shub", base para a construção do presente trabalho. Ele foi exposto no trabalho de Bonatti, Díaz e Viana (2004) [4].

Considere difeomorfismos A e B definidos no toro $\mathbb{T}^2$, tais que a aplicação produto $(A, B) : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ seja parcialmente hiperbólica com subfibrado central E^c tangente às fibras $\{x\} \times \mathbb{T}^2$ (para isso, basta escolher $A = B^n$ para algum $n = 1$). Suponha que A tenha pontos fixos p e q e que B tenha um ponto fixo r .

Considere ainda uma aplicação $f : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ da forma $f(x, y) = (A(x), F_x(y))$, parcialmente hiperbólica com E^c tangente às fibras $\{x\} \times \mathbb{T}^2$, e tal que $F_p = B$.

Proposição 3.1.5. *O difeomorfismo f é robustamente transitivo.*

Demonstração. No exemplo de Shub, o sistema é construído em $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ por meio de uma aplicação da forma $f(x, y) = (A(x), F_x(y))$, na qual $A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ é um difeomorfismo Anosov e, para cada $x \in \mathbb{T}^2$, a aplicação $F_x : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ depende suavemente de x . Temos, a partir dessa estrutura, uma folheação central cujas folhas são as fibras $\{x\} \times \mathbb{T}^2$, obtidas fixando x e variando y . Sendo a dependência de F_x em relação a x suave e a decomposição em fibras na forma de produto, temos que a folheação central é diferenciável.

Faz-se necessária à demonstração da proposição a inserção do teorema a seguir, de autoria de Hirsch, Pugh e Shub (1970) [21]. O resultado a ser apresentado assume que a folheação central inicial é expansiva por placas, isto é: dado ϵ , existe δ tal que, se x_n e y_n são δ -pseudo-órbitas com todas as transições ao longo das folhas centrais, e permanecem a uma distância menor que ϵ em todos os tempos, então x_n e y_n pertencem à mesma folha central local para todo n .

Teorema 3.1.6. (Hirsch, Pugh, Shub) *Se f admite uma folheação central $\mathcal{F}^c$ com a propriedade de expansividade em placas, então $(f, \mathcal{F}^c)$ é estruturalmente estável. A hipótese de expansividade em placas vale, em particular, se $\mathcal{F}^c$ é de classe C^1 .*

Como a folheação central $\mathcal{F}^c$ (tangente ao subfibrado E^c) é diferenciável, o Teorema 3.1.6 implica que o par $(f, \mathcal{F}^c)$ é estruturalmente estável. Segue-se, portanto, que as variedades estável e instável da continuação da fibra $\{p\} \times \mathbb{T}^2$ são ambas densas em $\mathbb{T}^4$

para toda perturbação C^1 de f . Assim, como os endomorfismos lineares no toro têm as folheações densas (no toro), então as variedades invariantes do ponto fixo (p, r) são ambas densas de forma robusta em $\mathbb{T}^4$. Isso implica, pelo Teorema 3.1.1, que f é robustamente transitivo (aliás, todo difeomorfismo Anosov no toro é robustamente transitivo): a variedade estável do ponto fixo intersecta qualquer conjunto aberto U de $\mathbb{T}^4$, logo, os iterados $f^n(U)$, $n > 0$, acumulam discos arbitrariamente grandes na variedade instável, os quais, por sua vez, intersectam qualquer conjunto aberto V . Ou seja, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. $\square$

Para garantir a não hiperbolicidade, basta tomar $F_q : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ com pontos periódicos com índices de Morse – isto é, número de direções instáveis em um ponto crítico ou periódico – distintos (uma sela e uma fonte, por exemplo): então f também tem pontos com diferentes índices de Morse. No entanto, a hiperbolicidade exige que todos os pontos periódicos tenham o mesmo número de direções estáveis/instáveis, ou seja, o mesmo índice de Morse, e a transitividade de f implica que essa diferença de índices não pode ser "separada" em regiões distintas do espaço, como se fossem desconectadas, temos que a presença de índices distintos aliada à transitividade contradiz a possibilidade de f ser hiperbólico.

3.2 Teoremas principais e resultados relevantes

Este tópico inicia o estudo do artigo [30] propriamente dito. Como mencionado anteriormente, a introdução do exemplo de Shub é muito importante dentro da dinâmica suave. Isso se dá pelo fato de que trata-se do primeiro exemplo de um difeomorfismo que, ao mesmo tempo, é robustamente transitivo e é não uniformemente hiperbólico.

3.2.1 O exemplo de Shub revisitado

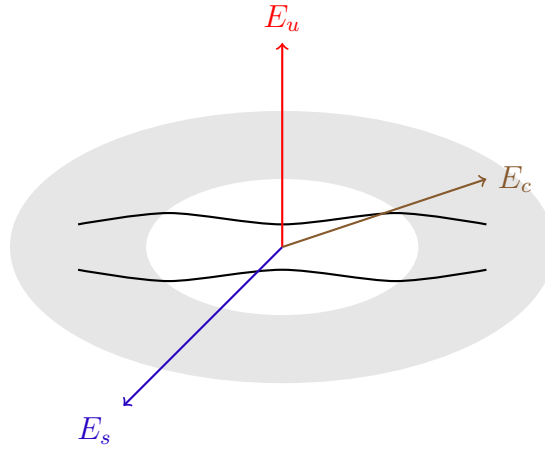
O estudo desse exemplo na presente pesquisa, no entanto, não considerará a condição restritiva comumente adotada de que as funções admitem uma outra dominação do espaço central. Essa ausência de dominação central torna essa classe de funções interessante, pois não se pode fazer uso das técnicas unidimensionais.

Nesse trabalho, considerar-se-á uma classe ligeiramente mais geral que a apresentada no exemplo de Shub original, a qual será definida da seguinte forma:

Definição 3.2.1. *Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é chamado de parcialmente hiperbólico se o espaço tangente admite uma decomposição Df -invariante $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ tal que existem funções contínuas $0 < \lambda_s(x) < \lambda_c^-(x) \leq \lambda_c^+(x) < \lambda_u(x)$, com $\lambda_s(x) < 1 < \lambda_u(x)$, satisfazendo as seguintes condições:*

$$(1) \|Df(x)v^s\| \leq \lambda_s(x);$$

Figura 5 – Representação de uma decomposição parcialmente hiperbólica do espaço tangente



Fonte: A autora

$$(2) \lambda_c^-(x) \leq \|Df(x)v^c\| \leq \lambda_c^+(x);$$

$$(3) \|Df(x)v^u\| \geq \lambda_u(x),$$

para todo $x \in M$ e vetores unitários $v^i \in E^i(x) (i = s, c, u)$.

Chama-se um difeomorfismo parcialmente hiperbólico *dinamicamente coerente* se existem folheações invariantes $\mathcal{F}^{cs}$ e $\mathcal{F}^{cu}$ tangentes a $E^{cs} = E^c \oplus E^s$ e $E^{cu} = E^c \oplus E^u$. Assim, temos $\mathcal{F}^{cs}$ subfolheada pelas folheações estável e central ($\mathcal{F}^s$ e $\mathcal{F}^c$), e $\mathcal{F}^{cu}$ pelas folheações instável e central ($\mathcal{F}^u$ e $\mathcal{F}^c$).

Sejam A, B dois automorfismos Anosov lineares tais que $1 < |\lambda_B| < |\lambda_A|$, onde λ_A e λ_B são os valores próprios instáveis de A e B . Então $f_{A,B} : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$

$$f_{A,B}(x, y) = (A(x), B(y))$$

é um automorfismo Anosov, o qual pode ser visto como um difeomorfismo parcialmente hiperbólico com fibrado central bidimensional e direções estável e instável unidimensionais. Em primeiro lugar, trata-se de um automorfismo Anosov porque, representando a matriz de f como uma matriz de blocos

$$F = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

e sendo $|\lambda_A|$ e $|\lambda_B|$ maiores que 1, e o determinante da matriz igual a 1, concluímos que a aplicação um automorfismo Anosov.

Além disso, a aplicação pode ser vista como um difeomorfismo parcialmente hiperbólico com fibrado central bidimensional e direções estável e instável unidimensionais.

É um difeomorfismo porque é um automorfismo Anosov. Os autovalores que geram os espaços E^s , E^c e E^u seriam, respectivamente, λ_B^s ; λ_A^s e λ_B^u ; e λ_A^u , obtidos a partir da desigualdade entre λ_A e λ_B dada anteriormente.

Definição 3.2.2. *Seja $PH_{A,B}$ o conjunto dos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos isotópicos a $f_{A,B}$, todos com a mesma dimensão do fibrado estável e instável, os quais são unidimensionais. Seja também $PH_{A,B}^0$ uma componente conexa de $PH_{A,B}$ contendo $f_{A,B}$.*

A proposição a seguir é um resultado apresentado em Fisher, Potrie e Sambarino (2014) [17].

Proposição 3.2.3. *(Fisher, Potrie e Sambarino) Se $f \in PH_{A,B}^0$, então f é dinamicamente coerente e admite uma folheação central onde todas as folhas centrais são toros bidimensionais C^1 e f é conjugado, no nível das folhas centrais, a $f_{A,B}$.*

Definição 3.2.4. *A classe de Shub $SH \subset \bigcup_{1 < \lambda_B < \lambda_A} PH_{A,B}^0$ é o conjunto dos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos f de $\mathbb{T}^4$ tais que f pertence a algum $PH_{A,B}^0$ e existe um ponto fixo $p_f = f(p_f) \in \mathbb{T}^4$, tal que $f|_{\mathcal{F}_f^c(p_f)}$ é um difeomorfismo Anosov, onde $\mathcal{F}_f^c(p_f)$ é a folha central fixa passando através de p_f .*

Seja também

$$SH^r := \{f \in SH : f \text{ é } C^r\}, r \geq 1.$$

Em [30], menciona-se que, a partir da análise da aplicação induzida pelo grupo fundamental, que $f|_{\mathcal{F}_f^c(p_f)}$ é topologicamente conjugado a B .

Shub (1971) [50] provou o seguinte teorema:

Teorema 3.2.5. *(Shub) SH é C^1 -aberto e todo $f \in SH$ é transitivo.*

Shub provou esse resultado para alguns exemplos específicos, mas a prova pode ser adaptada para a classe de difeomorfismos de Shub que satisfazem algumas *bunching conditions*:

(a) *bunching* global

$$\lambda_s(x) < \frac{\lambda_c^-(x)}{\lambda_c^+(x)} \leq \frac{\lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x)} < \lambda_u(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{T}^4; \quad (3.1)$$

(b) *bunching* local forte na folha central fixa $\mathcal{F}_f^c(p_f)$

$$\lambda_s(x) < (\lambda_c^-(x))^2 \leq (\lambda_c^+(x))^2 < \lambda_u(x), \text{ para todo } x \in \mathcal{F}_f^c(p_f) \quad (3.2)$$

$$\lambda_s(x) < \frac{\lambda_c^-(x)}{(\lambda_c^+(x))^2} \leq \frac{\lambda_c^+(x)}{(\lambda_c^-(x))^2} < \lambda_u(x), \text{ para todo } x \in \mathcal{F}_f^c(p_f). \quad (3.3)$$

Observação 3.2.6. Bunching conditions são hipóteses técnicas que relacionam as taxas de contração e expansão das direções estáveis, instáveis e centrais em um sistema parcialmente hiperbólico.

Um exemplo é o caso dos automorfismos lineares no toro, nos quais todas as taxas de expansão e contração são constantes, dadas pelos autovalores da matriz. Nesse caso, as bunching conditions são satisfeitas de forma trivial, já que não há variações locais que possam violar as desigualdades exigidas.

Um exemplo concreto é dado pela matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que atua no toro $\mathbb{T}^3$. O bloco 2×2 define um automorfismo de Anosov com autovalores aproximadamente 0,382 (λ_s) e 2,618 (λ_u), e com $\lambda_c = 1$. Assim, temos três direções invariantes: uma contraída, uma expandida e uma neutra.

As bunching conditions exigem, de forma geral, que a contração em E^s seja suficientemente mais forte do que a proveniente da direção central, e que a expansão em E^u seja maior que a do centro. No caso específico em que se busca holonomias C^1 entre folhas centrais, isso se traduz nas desigualdades

$$|\lambda_s| < |\lambda_c|^\theta \quad \text{e} \quad |\lambda_c|^\theta < |\lambda_u|,$$

onde θ denota o expoente de Holder da regularidade de Df , isto é, supomos que $f \in C^{1+\theta}$.

Como $|\lambda_c| = 1$, essas condições ficam triviais, reduzindo-se a

$$|\lambda_s| < 1 < |\lambda_u|,$$

que se verificam de forma imediata.

Claramente, SH_b^r é um conjunto C^r aberto. De fato, já sabemos, pela sua própria definição, que SH_b^r , que é o conjunto SH^r satisfazendo as bunching conditions, é um conjunto de funções com derivadas até a ordem r contínuas. Resta-nos provar que se trata de um conjunto aberto.

Sabemos que SH é C^1 aberto e que todo $f \in SH$ é transitivo. A parcial hiperbolicidade é uma propriedade robusta, o que significa que, se f é parcialmente hiperbólico, então

existe uma vizinhança C^1 de f tal que qualquer g pertencente à vizinhança também é parcialmente hiperbólico. Essa robustez resulta da continuidade dos subespaços invariantes E^s , E^c , E^u sob pequenas perturbações e da preservação das desigualdades entre as taxas de expansão/contração no sentido C^1 .

Sabendo que mesmo com uma pequena perturbação de f dentro de SH , ainda são satisfeitas as condições do conjunto SH_b^r , então existe uma vizinhança $V(f)$ em C^1 , para todo $f \in SH_b^r$, tal que toda função g dentro dessa vizinhança também pertence a SH_b^r , fazendo do conjunto C^1 aberto.

Observação 3.2.7. *A condição na equação 3.1 implica que se f é C^2 , então os fibrados estável e instável são C^1 e, como consequência, as holonomias forte estável e forte instável entre as folhas centrais são de classe C^1 (quando restritas, respectivamente, às folhas centro-estável e centro-instável). Veremos mais tarde que, de fato, essas holonomias dependem continuamente na topologia C^1 com respeito aos pontos (ou folhas centrais) e com respeito à aplicação f (na topologia C^2).*

Observação 3.2.8. *A condição expressa pela segunda equação é a bunching condition 2 padrão, e implica que, se f é C^2 , então $\mathcal{F}_f^c(p_f)$, $\mathcal{F}_f^{cs}(p_f)$ e $\mathcal{F}_f^{cu}(p_f)$ são de classe C^2 . Se os fibrados centrais são simétricos, ou $\lambda_c^- \lambda_c^+ = 1$, então é equivalente à bunching condition global.*

A condição na terceira equação nos dá melhor regularidade de folheações fortes correspondendo à folha Anosov fixa $\mathcal{F}_f^c(p_f)$. Em particular, se f é C^3 , então a folheação estável forte $\mathcal{F}_f^s$ restrita à variedade centro-estável $\mathcal{F}_f^{cs}(p_f)$ é de classe C^2 , e a folheação instável forte $\mathcal{F}_f^u$ restrita à variedade centro-instável $\mathcal{F}_f^{cu}(p_f)$ é também de classe C^2 .

O texto a seguir será referente à subseção "Resultados" do artigo-base, e tem como objetivo apresentar, como o próprio título sugere, resultados pertinentes para o desenvolvimento do tema de pesquisa. Serão expostos, entre outros pontos importantes, os três teoremas principais a serem demonstrados mais tarde.

As interseções homoclínicas entre pontos periódicos hiperbólicos foram observadas primeiro por Poincaré e, desde então, elas têm um papel importante na teoria dos sistemas dinâmicos. Smale (1965) [51] as utilizou para definir classes homoclínicas.

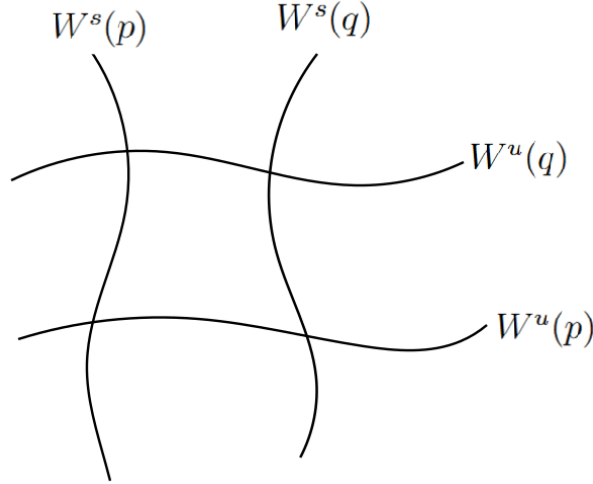
Definição 3.2.9. *Dados dois pontos periódicos hiperbólicos p, q do difeomorfismo f , com o mesmo índice estável, dizemos que eles são homoclinicamente relacionados se suas variedades estável e instável se intersectam transversalmente.*

$$W^s(p) \cap W^u(q) \neq \emptyset \text{ e } W^s(q) \cap W^u(p) \neq \emptyset.$$

Dizemos que $\text{Orb}(p)$ e $\text{Orb}(q)$ são homoclinicamente relacionadas se

$$W^s(Orb(p)) \cap W^u(Orb(q)) \neq \emptyset \text{ e } W^s(Orb(q)) \cap W^u(Orb(p)) \neq \emptyset. \quad (3.4)$$

Figura 6 – Pontos homoclinicamente relacionados



Fonte: A autora

Existe, assim, uma relação de equivalência entre órbitas periódicas hiperbólicas. Vejamos que isso de fato se verifica.

Para que seja provada a existência de uma relação de equivalência a partir das desigualdades acima expostas, é necessário demonstrar a validade das propriedades de reflexividade, simetria e transitividade para o caso específico.

(a) Reflexividade: A órbita de p (p ponto periódico hiperbólico) relaciona-se consigo mesma pois, sendo p hiperbólico, $W^s(Orb(p))$ se intersecta transversalmente com $W^u(Orb(p))$. Isso ocorre porque o ponto p pertence tanto a $W^s(Orb(p))$ quanto a $W^u(Orb(p))$.

(b) Simetria: Observa-se a partir do fato de que $W^s(Orb(p)) \cap W^u(Orb(q)) \neq \emptyset$ e $W^s(Orb(q)) \cap W^u(Orb(p)) \neq \emptyset$.

(c) Transitividade: Considere p, q, r pontos periódicos hiperbólicos tais que

$$W^s(Orb(p)) \cap W^u(Orb(q)) \neq \emptyset \text{ e } W^s(Orb(q)) \cap W^u(Orb(p)) \neq \emptyset$$

$$W^s(Orb(q)) \cap W^u(Orb(r)) \neq \emptyset \text{ e } W^s(Orb(r)) \cap W^u(Orb(q)) \neq \emptyset.$$

Se as interseções das variedades das órbitas são não vazias, existem pontos $x_1 \in W^s(p_i) \cap W^u(q_j)$ e $x_2 \in W^s(q_k) \cap W^u(r_l)$ com interseções transversais, para certos iterados $p_i = f^i(p)$, $q_j = f^j(q)$, $q_k = f^k(q)$, $r_l = f^l(r)$, com $i, j, k, l \in \mathbb{Z}$. Pelo λ -lema, a interseção transversal $x_1 \in W^s(p_i) \cap W^u(q_j)$ implica que existem discos $D^u \subset W^u(Orb(p))$

tais que $f^{-n}(D^u) \rightarrow W^u(Orb(p))$ em C^1 e, analogamente, a interseção transversal $x_2 \in W^s(q_k) \cap W^u(r_l)$ implica que existem discos $D^u \subset W^u(Orb(r))$ tais que $f^n(D^u) \rightarrow W^u(Orb(q))$ em C^1 .

Compondo essas aproximações, obtemos que a imagem direta de discos em $W^u(Orb(r))$ acumula-se em discos de $W^u(Orb(p))$. Logo, para algum N , há $f^N(D^u) \pitchfork W^s(Orb(p)) \neq \emptyset$. Assim, $W^u(Orb(r)) \pitchfork W^s(Orb(p)) \neq \emptyset$, e pela simetria da relação homoclínica, $W^s(Orb(r)) \pitchfork W^u(Orb(p)) \neq \emptyset$, fazendo das órbitas homoclinicamente relacionadas, e encerrando a prova.

As classes homoclínicas de $Orb(p)$, $HC(Orb(p))$, são o fecho da classe de equivalência de $Orb(p)$.

Para difeomorfismos na classe de Shub, o fibrado central pode não admitir uma decomposição dominada, o que significa que os difeomorfismos podem não ter uma decomposição dominada de índice 2. Se um difeomorfismo não tem decomposição dominada de índice 2, parece inesperado que dois pontos hiperbólicos de índice estável 2 são homoclinicamente relacionados um ao outro. Isso se mostra inesperado porque os tamanhos das variedades estável e instável dos pontos hiperbólicos são não uniformes, e a interseção na equação 3.4 pode ser vazia ou, mesmo que não o seja, pode não ser transversal, devido à ausência de dominação (o leitor pode buscar mais informações no trabalho de Pujals e Sambarino (2000) [45]).

O principal resultado do presente trabalho é o seguinte teorema:

Teorema 3.2.10. (Teorema A) *Para um $2 \leq r \leq \infty$, existe um subconjunto $\mathcal{U}^r \subset SH_b^r$, C^2 aberto e C^r denso, tal que para um $f \in \mathcal{U}^r$, satisfaz o seguinte: todo par de pontos periódicos hiperbólicos de f com índice estável 2 são homoclinicamente relacionados.*

Como consequência do teorema, um difeomorfismo $f \in \mathcal{U}^r$ admite uma única classe homoclínica associada aos pontos periódicos hiperbólicos de índice 2. Denote por p_f um ponto hiperbólico fixo de $f \in \mathcal{U}^r$.

Corolário 3.2.11. (Corolário B) *Para um $f \in \mathcal{U}^r$, f admite uma única classe homoclínica $H(p_f, f)$ associada aos pontos periódicos hiperbólicos de índice 2, e a classe homoclínica coincide com a variedade ambiente.*

3.2.2 Estados de equilíbrio

Neste tópico, estudaremos os estados de equilíbrio relacionados à dinâmica considerada ao longo deste trabalho.

Para um potencial contínuo ϕ e uma aplicação contínua f , uma medida de probabilidade f -invariante μ é chamada de medida de equilíbrio para o potencial ϕ se

$$h_\mu(f) + \int \phi d\mu = P_{top}(\phi),$$

onde $P_{top}(\phi) := \sup_{v \in M_e(f)} \{h_v(f) + \int \phi dv\}$.

Algumas pesquisas foram feitas em torno da existência do estado de equilíbrio, no qual vale a igualdade acima. Esse estado não necessariamente existe. Assumindo expansividade da entropia, Bowen, em seu trabalho do ano de 1972 [6] sobre aplicações de entropia expansiva, provou que o estado de equilíbrio existe. Liao, Viana e Yang (2013) [31] mostraram, em seu trabalho sobre a conjectura de entropia publicado no ano de 2013, que qualquer difeomorfismo distante da tangência homoclínica é expansivo de entropia, e Yondim provou também, em artigo intitulado *Volume growth and entropy* (1987) [57], que, para qualquer difeomorfismo C^∞ , o estado de equilíbrio sempre existe.

Quanto à unicidade do estado de equilíbrio, trata-se de um problema mais sutil. O trabalho de Climenhaga e Thompson, intitulado *Unique equilibrium states for flows and homeomorphisms with non-uniform structure* (2016) [15] (veja também Pacifico, Yang e Yang (2022) [41], forneceu um critério baseado na propriedade de Bowen e especificação. Outro método usado por Buzzi, Crovisier e Sarig (2022) [10] é baseado no uso de classes homoclínicas de medida.

Definição 3.2.12. *Suponha que f é um difeomorfismo C^r para algum $r > 1$. Para duas medidas hiperbólicas ergódicas μ_1 e μ_2 de f , escrevemos $\mu_1 \preceq \mu_2$ se, e somente se, existem dois conjuntos mensuráveis $A_1, A_2 \subset M$ com $\mu_i(A_i) > 0$ tais que para qualquer $x_1 \in A_1$ e $x_2 \in A_2$, as variedades $W^u(x_1)$ e $W^s(x_2)$ têm um ponto de interseção transversal.*

Aqui, μ_1 e μ_2 são homoclinicamente relacionados se $\mu_1 \preceq \mu_2$ e $\mu_2 \preceq \mu_1$. Escrevemos $\mu_1 \stackrel{h}{\sim} \mu_2$. O conjunto de medidas ergódicas homoclinicamente relacionadas a uma medida ergódica hiperbólica μ é chamado de classe homoclínica medida de μ .

Lema 3.2.13. *A relação homoclínica é uma relação de equivalência. Além disso, duas medidas atômicas suportadas em duas órbitas periódicas são homoclinicamente relacionadas se, e somente se, as duas órbitas periódicas são hiperbólicas e homoclinicamente relacionadas.*

Demonstração. Vejamos, inicialmente, que a relação homoclínica entre as medidas é uma relação de equivalência, a partir da prova da reflexividade, simetria e transitividade da homoclinidade.

Reflexividade: É evidente, visto que, se considerarmos $\mu_1 = \mu_2$, então sempre haverá uma interseção transversal entre as variedades estável e instável de um mesmo ponto. Dessa forma, $\mu \stackrel{h}{\sim} \mu$.

Simetria: Se $\mu_1 \stackrel{h}{\sim} \mu_2$, então vale, nos termos da Definição 3.2.12, que há interseção transversal não vazia entre $W^u(x_2)$ e $W^s(x_1)$. Se isso acontece, temos também que $\mu_2 \stackrel{h}{\sim} \mu_1$. Então, vale a simetria.

Transitividade: Se $\mu_1 \stackrel{h}{\sim} \mu_2$, então, novamente nos termos da Definição 3.2.12, sempre há uma interseção não vazia entre $W^u(x_2)$ e $W^s(x_1)$, qualquer que seja $x_i \in A_i \subset M$ com $\mu_i(A_i) > 0$, $i \in [1, 2]$. O mesmo vale se $\mu_2 \stackrel{h}{\sim} \mu_3$. Como a relação homoclínica entre pontos também é transitiva, isso vale para os pontos x_i nos conjuntos de medidas positivas. Logo, a transitividade vale para as medidas também: se $\mu_1 \stackrel{h}{\sim} \mu_2$ e $\mu_2 \stackrel{h}{\sim} \mu_3$, então $\mu_1 \stackrel{h}{\sim} \mu_3$.

Vejamos agora que a segunda parte da observação é verdadeira: duas medidas atômicas suportadas em duas órbitas periódicas são homoclinicamente relacionadas se, e somente se, as duas órbitas periódicas são hiperbólicas e homoclinicamente relacionadas.

Se duas medidas são homoclinicamente relacionadas, então existe interseção não vazia entre $W^s(x_1)$ e $W^u(x_2)$, assim como entre $W^s(x_2)$ e $W^u(x_1)$, para quaisquer $x_1 \in A_1$ e $x_2 \in A_2$, sendo A_1 e A_2 conjuntos de medida positiva para as medidas μ_1 e μ_2 , respectivamente. Se as medidas são atômicas e suportadas em órbitas periódicas, então todo o seu peso está nas órbitas, fazendo com que os conjuntos A_1 e A_2 estejam dentro delas. Se há interseção não vazia quaisquer que sejam $x_1 \in A_1$ e $x_2 \in A_2$, então há interseção transversal entre as órbitas, que são, por isso, homoclinicamente relacionadas. Se, para todo $x_1 \in A_1$ e $x_2 \in A_2$ em conjuntos A_1 e A_2 das órbitas periódicas nas quais as medidas são suportadas, existem variedades estáveis e instáveis, então as órbitas são hiperbólicas.

Para a prova da implicação contrária, consideremos duas medidas atômicas suportadas em duas órbitas periódicas, e tratemos elas por μ_p e μ_q . Se as duas órbitas periódicas são hiperbólicas e homoclinicamente relacionadas, então temos a interseção não vazia entre as variedades estável e instável das órbitas:

$$W^s(\text{Orb}(p)) \cap W^u(\text{Orb}(q)) \neq \emptyset \text{ e } W^s(\text{Orb}(q)) \cap W^u(\text{Orb}(p)) \neq \emptyset.$$

Logo, existem $x \in \text{Orb}(p)$ e $y \in \text{Orb}(q)$ tais que

$$W^s(x) \cap W^u(y) \neq \emptyset \text{ e } W^s(y) \cap W^u(x) \neq \emptyset,$$

pois as órbitas, sendo periódicas, são finitas.

Como $\text{Orb}(p)$ e $\text{Orb}(q)$ são hiperbólicas periódicas, as variedades estáveis e instáveis se transportam por f , ou seja:

$$W^s(f^i(p)) = f^i(W^s(p)) \text{ e } W^u(f^i(p)) = f^i(W^u(p)).$$

Então, se $x \sim y$, $f^i(x) \sim f^j(y)$, para quaisquer i, j , uma vez que as variedades estáveis e instáveis são invariantes por f . Como as órbitas são finitas, temos que $\forall$

$x \in \text{Orb}(p)$ e $\forall y \in \text{Orb}(q)$, $x \sim y$. Como as medidas μ_p e μ_q são medidas de probabilidade suportadas nas órbitas finitas $\text{Orb}(p)$ e $\text{Orb}(q)$, e todo ponto do suporte de μ_p é homoclinicamente relacionado a todo ponto do suporte de μ_q , então as medidas são homoclinicamente relacionadas, o que encerra a prova. □

Uma vez compreendidos os conceitos ligados a estados de equilíbrio, temos o seguinte teorema.

Teorema 3.2.14. (Teorema C) *Para qualquer $f \in \mathcal{U}^r$, todas as medidas ergódicas hiperbólicas de índice 2 são homoclinicamente relacionadas. Seja $\phi : \mathbb{T}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função potencial de Holder com $\max_{x,y \in \mathbb{T}^4} \|\phi(x) - \phi(y)\| < \log \lambda_B$, onde $f \in PH_{A,B}^0$, então f admite no máximo um estado de equilíbrio para o potencial ϕ . Em particular, todo $f \in \mathcal{U}^r$ admite no máximo uma medida de máxima entropia.*

Uma consequência de Buzzi (2022) [9] e Yondim (1987) [57] é o seguinte corolário.

Corolário 3.2.15. (Corolário D) *Todo $f \in \mathcal{U}^\infty \cap PH_{A,B}^0$ admite um único estado de equilíbrio para todo potencial de Holder satisfazendo $\max_{x,y \in \mathbb{T}^4} \|\phi(x) - \phi(y)\| < \log \lambda_B$. Em particular, todo $f \in \mathcal{U}^\infty$ admite uma única medida de máxima entropia.*

Para o exemplo de Shub, a obtenção de alguns resultados similares foi lograda a partir da consideração de algumas suposições adicionais. Por exemplo, nos trabalhos de Newhouse e Young (1983) [36] e Carvalho e Pérez (2021) [14], foi feita a suposição extra de que, na folheação central, existe uma subfolheação invariante unidimensional, e por Álvarez, assumindo que o fibrado central admite uma decomposição ainda mais dominada. Para outros difeomorfismos parcialmente hiperbólicos em $\mathbb{T}^4$, existem resultados na unicidade de u -Gibbs no trabalho de Crovisier, Obata e Poletti (2023) [16], bem como no desenvolvido por Obata e publicado também em 2023 [37].

Vejamos, a seguir, alguns resultados importantes para que o desenvolvimento do trabalho seja feito. Inicialmente, deve-se compreender um pouco acerca de holonomias – instáveis e estáveis – entre folhas centrais.

Como mencionado anteriormente, a condição na equação de *bunching* global implica que as holonomias entre as folhas centrais são uniformemente C^1 , ou seja, diferenciáveis e com derivada uniformemente contínua. De fato, existe uma continuidade das holonomias na topologia C^1 . Se $y \in \mathcal{F}_f^u(x)$, denotemos por $h_{f,x,y}^u : \mathcal{F}_f^c(x) \rightarrow \mathcal{F}_f^c(y)$ a holonomia instável entre as duas folhas centrais. Sendo de classe C^1 , a derivada $Dh_{f,x,y}^u$ induz uma aplicação contínua entre os fibrados tangentes unitários $Dh_{f,x,y}^u : T^1\mathcal{F}_f^c(x) \rightarrow T^1\mathcal{F}_f^c(y)$. Dessa maneira, tem-se que a função derivada é contínua.

Lema 3.2.16. $Dh_{f,x,y*}^u$ é contínuo com respeito a $f \in SH_b^2$ (a topologia C^2) e $x, y \in \mathbb{T}^4$, $y \in \mathcal{F}_f^u(x)$. O mesmo vale para a holonomia estável.

Observação 3.2.17. A continuidade do Lema 3.2.16 significa que, se f_n converge para f na topologia C^2 , x_n converge para x em $\mathbb{T}^4$ e $y_n \in \mathcal{F}_{f_n,loc}^u(x_n)$ converge para y , então Dh_{f_n,x_n,y_n*}^u converge uniformemente para $Dh_{f,x,y*}^u$. A prova utiliza-se da condição global fraca da equação de bunching global.

Observação 3.2.18. Sejam, neste caso, os fibrados estável e instável unidimensionais. Poderíamos aproximar a questão da continuidade usando a equação diferencial ordinária clássica (EDO), teoria da regularidade de soluções com respeito às condições iniciais e parâmetros. Optou-se por apresentar uma prova diferente, a qual constrói as holonomias projetivizadas como folheações instáveis da projetivização de f junto ao fibrado central.

Demonstração. Seja $T^1\mathbb{T}^4$ o fibrado tangente unitário de $\mathbb{T}^4$ com Df_* sendo o difeomorfismo C^1 induzido por f . $T^1\mathbb{T}^4$ pode ser identificado como $\mathbb{T}^4 \times \mathbb{S}^3$ pois, sendo um fibrado, é formado por $(p, v); p \in \mathbb{T}^4, v \in \mathbb{S}^3$, uma vez que, podendo um vetor unitário em $\mathbb{R}^4$ ser descrito por três coordenadas independentes, temos que o conjunto dos vetores unitários em $\mathbb{R}^4$ ($T_p\mathbb{T}^4$ é isomorfo a $\mathbb{R}^4$) forma uma esfera tridimensional $\mathbb{S}^3$.

Vamos considerar o fibrado tangente unitário central $S_f := \bigcup_{x \in \mathbb{T}^4} S(f, x)$, onde $S(f, x) = T_x^1 \mathcal{F}_f^c(x)$ é o círculo unitário em $E_f^c(x)$. Então, S_f é uma subvariedade Holder de $T^1\mathbb{T}^4$ invariante sob Df_* , e é também um fibrado Holder sobre $\mathbb{T}^4$.

Isso se dá porque o espaço central E^c é contínuo e satisfaz uma condição de *bunching* e, pela Observação 3.2.7, as holonomias estáveis e instáveis entre as folhas centrais são de classe C^1 e variam continuamente na topologia C^1 . Como mostrado por Burns e Wilkinson (2005) [8], sob a condição de *bunching* central, as holonomias fortes entre as folhas centrais são de classe $C^{1+\beta}$, com derivada Holder-contínua. Isso implica que o espaço central varia Holder-continuamente com x e, assim, o conjunto S_f é o gráfico de uma aplicação Holder, sendo, dessa forma, uma subvariedade Holder de $T^1\mathbb{T}^4$. A projeção natural $\pi : S_f \rightarrow \mathbb{T}^4$, dada por $\pi(x, v) = x$, tem como fibra $\pi^{-1}(x) = T_x^1 \mathcal{F}^c(x) \cong S^1$. A variação Holder de $E^c(x)$ garante que essas fibras variam Holder-continuamente. Assim, S_f é um fibrado Holder com fibra S^1 sobre $\mathbb{T}^4$.

Consideremos a existência de uma folheação instável contínua em S_f , além de $Dh_{f,x,y*}^u$ ser exatamente a holonomia instável para essa folheação entre os transversais $T^1 \mathcal{F}_f^c(x)$ e $T^1 \mathcal{F}_f^c(y)$. Nós aplicamos a construção padrão das folhas locais instáveis como a seção invariante de uma aplicação de contração de fibrado, com uma pequena dificuldade surgindo da falta de suavidade, uma vez que o sistema é apenas Holder contínuo, e não diferenciável.

Para $x, y \in \mathbb{T}^4$, definimos $\pi_{f,y,x} : E_f^c(y) \rightarrow E_f^c(x)$ como o paralelo da projeção a $E_f^c(x) \oplus E_f^u(x)$. As aplicações $\pi_{f,y,x}$ dependem continuamente em $x, y \in \mathbb{T}^4$ e f (na topologia C^1). Para x próximo de y , é invertível e próximo à identidade, e sua projetivização $\pi_{f,x,y*}$ é bi-Lipschitz com constante Lipschitz próxima de 1.

Para $\delta > 0$ e $x \in \mathbb{T}^4$, seja $\alpha_{f,x} : [-\delta, \delta] \rightarrow \mathcal{F}_f^u(x)$ a parametrização por comprimento da variedade instável local de f em x . Sendo a folheação instável orientável e dependente continuamente na topologia C^1 com respeito a α e f , temos que sua parametrização $\alpha_{f,x}$ é contínua em x e f (na topologia C^1).

Para algum $\delta > 0$, existe $\epsilon_\delta > 0$ tal que para x, y com $d(x, y) < \delta$, temos

(a) $\|\pi_{f,y,x}^{\pm 1} - Id\| < \epsilon_\delta$ (o que significa que, para x e y próximos, temos uma aplicação próxima da identidade);

(b) $\pi_{f,y,x*}^{\pm 1}$ é bi-Lipschitz com constante $(1 + \epsilon_\delta)$;

(c) $(1 + \epsilon_\delta)^{-1} \lambda_c^-(x) < \lambda_c^-(y) \leq \lambda_c^+(y) < (1 + \epsilon_\delta) \lambda_c^+(x)$;

(d) Se, além disso, $y \in \mathcal{F}_{f,\delta}^u(x)$, então $d_u(f(x), f(y)) \geq (1 + \epsilon_\delta)^{-1} \lambda_u(x) d_u(x, y)$, onde d_u é a distância junto às folhas instáveis.

Podemos escolher ϵ_δ independente de f em uma vizinhança C^1 e $\lim_{\delta \rightarrow 0} \epsilon_\delta = 0$. Agora, construiremos o fibrado com os candidatos para as variedades instáveis locais em S_f . Considere $\delta > 0$ (pequeno) a ser especificado mais tarde. Seja

$$B = \left\{ \sigma : [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R} : \sigma(0) = 0, \left| \frac{\sigma(t)}{t} \right| < \infty \right\}$$

o espaço de Banach de funções limitadas pela norma

$$\|\sigma\| = \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \left| \frac{\sigma(t)}{t} \right|.$$

Então, $V(f) := S_f \times B$ é um fibrado de Banach contínuo (na verdade, Holder) sobre S_f . Vejamos que isso é verdadeiro.

$V(f)$, conforme definido anteriormente, é dado pelo par (x, φ) , com $x \in S_f$ e $\varphi \in B$. A projeção natural $\pi : V(f) \rightarrow S_f$, $(x, \varphi) \mapsto x$ tem como fibra $\pi^{-1}(x) = \{x\} \times B \cong B$, ou seja, todas as fibras são iguais a B , independentemente de x . Temos uma estrutura de fibrado de Banach porque cada ponto $x \in S_f$ tem uma vizinhança $U \subset S_f$ tal que $\pi^{-1}(U) = U \times B$, isto é, o espaço total se comporta como um produto direto contínuo. Como B é fixo, não há variação da norma nas fibras, e a topologia de $V(f)$ é induzida pela topologia do produto (se $x_n \rightarrow x$ em S_f e $\varphi_n \rightarrow \varphi$ em B , então $(x_n, \varphi_n) \rightarrow (x, \varphi)$ em $V(f)$).

A continuidade Holder vem do fato de que S_f é Holder-contínua, e de que as fibras são constantes; não há, nelas, variação da estrutura de Banach.

Observação 3.2.19. As funções σ são candidatas para variedades instáveis em S_f no seguinte sentido: para $(x, v) \in S_f$ e $\sigma \in B$, podemos definir uma seção $\tilde{\sigma} : \mathcal{F}_{f,\delta}^u(x) \rightarrow S_f$ da seguinte maneira:

$$\tilde{\sigma}(y) := \pi_{f,y,x}^{-1}(v + \sigma(\alpha_{f,x}^{-1}(y))) \in S(f, y).$$

O gráfico da seção $\tilde{\sigma}$ é um candidato natural para a variedade instável local em $(x, v) \in S_f$. Construimos como um ponto fixo da transformação do gráfico natural, de forma a ser obtida uma aplicação cujos pontos afastam-se exponencialmente de x conforme aumentam as iteradas.

Seja $T : V(f) \rightarrow V(f)$ a aplicação de fibrado que fibra sobre Df_* em S_f (ou seja, leva cada fibra em $(x, v) \in S_f$ sobre $Df_*(x, v) \in S_f$) e é dada por

$$T\sigma_{(x,v)}(t) = (\pi_{f,f(y(t)),f(x)} \circ Df(y(t)) \circ \pi_{f,y(t),x}^{-1})(v + \sigma(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t)))) - Df(x)_*(v),$$

$$y(t) = f^{-1} \circ \alpha_{f,f(x)}(t).$$

Podemos verificar que, de fato, T é definido de tal forma que temos $\tilde{T}\sigma = Df_*\tilde{\sigma}$. Verifiquemos que T é uma aplicação de fibrado contínuo em $V(f)$, e também é uma contração de fibra.

Afirmção 1: Se $\sigma \in B$, então $T\sigma(x, v) \in B$.

Prova: Lembre-se que $y(t) = f^{-1} \circ \alpha_{f,f(x)}(t)$, e denotamos

$$G(t) := (\pi_{f,f(y(t)),f(x)} \circ Df(y(t)) \circ \pi_{f,x,y}^{-1}).$$

Observe que $G(t)_*$ é Lipschitz com constante de Lipschitz

$$\text{Lip}(G(t)_*) = (1 + \epsilon_\delta)^2 \frac{\lambda_c^+(y(t))}{\lambda_c^-(y(t))} \leq (1 + \epsilon_\delta)^4 \frac{\lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x)}.$$

Vejamos que isso é verdadeiro. $G(t)_*$ é dada pela composição das projeções de cada componente linear de $G(t)$:

$$G(t)_* = \pi_{f,f(y(t)),f(x)*} \circ Df(y(t))_* \circ \pi_{f,x,y*}^{-1}.$$

Cada fator dessa composição é Lipschitz: $\pi_{f,f(y(t)),f(x)*}$ e $\pi_{f,x,y*}^{-1}$ são, pelo que foi visto anteriormente, Lipschitz com constantes $(1 + \epsilon_\delta)$. Para verificarmos que $Df(y(t))_*$ também o é, utilizaremos a desigualdade

$$\left\| \frac{a}{\|a\|} - \frac{b}{\|b\|} \right\| \leq \frac{2\|a - b\|}{\|b\|}$$

aplicada a $a = Df(y(t))v_1$, $b = Df(y(t))v_2$, com $v_1, v_2 \in S(E_{y(t)}^c)$. Assim, temos

$$\left\| \frac{Df(y(t))v_1}{\|Df(y(t))v_1\|} - \frac{Df(y(t))v_2}{\|Df(y(t))v_2\|} \right\| \leq \frac{2\|Df(y(t))(v_1 - v_2)\|}{\min\{\|Df(y(t))v_1\|, \|Df(y(t))v_2\|\}}.$$

Como visto na definição 3.2.1, $\lambda_c^-(y(t)) \leq \|Df(y(t))v\| \leq \lambda_c^+(y(t))$, para todo $v \in S(E_{y(t)}^c)$. Logo,

$$\left\| \frac{Df(y(t))v_1}{\|Df(y(t))v_1\|} - \frac{Df(y(t))v_2}{\|Df(y(t))v_2\|} \right\| \leq \frac{2\lambda_c^+(y(t))}{\lambda_c^-(y(t))} \cdot \|v_1 - v_2\|,$$

o que faz da diferencial Lipschitz com constante $\frac{\lambda_c^+(y(t))}{\lambda_c^-(y(t))}$. Sendo $G(t)_*$ composição de aplicações Lipschitz, então ela também o é, e sua constante é obtida a partir do produto das três constantes de suas componentes.

Além disso, temos

$$|\alpha_{f,x}^{-1}(y(t))| = d_u(x, y(t)) \leq (1 + \epsilon_\delta)\lambda_u(x)^{-1}d_u(f(x), f(y(t))) = (1 + \epsilon_\delta)\lambda_u(x)^{-1}|t| \quad (3.5)$$

A desigualdade da expressão acima vem do fato de que, pelo que foi visto anteriormente, $d_u(f(x), f(y(t))) \leq \lambda_u(x)d_u(x, y(t))(1 + \epsilon_\delta)^{-1}$, enquanto a última igualdade é obtida a partir do seguinte: sabemos que $y(t) = f^{-1}(\alpha_{f,f(x)}(t))$, o que nos dá

$$d_u(f(x), f(y(t))) = d_u(f(f^{-1}(\alpha_{f,f(x)}(t)))) = d_u(f(x), \alpha_{f,f(x)}(t)).$$

Sendo $\alpha_{f,f(x)}$ uma parametrização por comprimento de arco, $\alpha_{f,f(x)}(0) = f(x)$ e $\|\alpha'(t)\| = 1$. Assim, a distância entre $f(x) = \alpha_{f,f(x)}(0)$ e $\alpha_{f,f(x)}(t)$ é o comprimento do arco t até zero, ou seja, $|t|$.

Então,

$$\begin{aligned} \|T\sigma\| &= \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \left| \frac{G(t)_*(v + \sigma(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t)))) - Df(x)_*(v)}{t} \right| \\ &\leq \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \left| \frac{G(t)_*(v + \sigma(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t)))) - G(t)_*(v)}{t} \right| + \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \left| \frac{G(t)_*(v) - Df(x)_*(v)}{t} \right| \\ &\leq (1 + \epsilon_\delta)^4 \frac{\lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x)} \sup \left| \frac{\sigma(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t)))}{t} \right| + \frac{\pi}{2} \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \frac{1}{t} \left\| \frac{G(t)(v)}{\|G(t)(v)\|} - \frac{Df(x)(v)}{\|Df(x)(v)\|} \right\| \\ &\leq (1 + \epsilon_\delta)^4 \frac{\lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x)} \frac{(1 + \epsilon_\delta)}{\lambda_u(x)} \|\sigma\| + \frac{\pi}{\lambda_c^+(x)} \sup \left\| \frac{G(t)(v) - Df(x)(v)}{t} \right\| \\ &\leq (1 + \epsilon_\delta)^5 \frac{\lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x)\lambda_u(x)} \|\sigma\| + \frac{\pi}{\lambda_c^+(x)} \sup \left\| \frac{G(t)(v) - Df(x)(v)}{t} \right\|. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Na penúltima linha dessa sucessão de cálculos, utilizamos a desigualdade

$$\left\| \frac{a}{\|a\|} - \frac{b}{\|b\|} \right\| \leq \left\| \frac{a}{\|a\|} - \frac{a}{\|b\|} \right\| + \left\| \frac{a}{\|b\|} - \frac{b}{\|b\|} \right\| \leq \frac{2\|a-b\|}{\|b\|}$$

para chegarmos a

$$\frac{\pi}{2} \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \frac{1}{t} \left\| \frac{G(t)(v)}{\|G(t)(v)\|} - \frac{Df(x)(v)}{\|Df(x)(v)\|} \right\| \leq \frac{\pi}{t} \sup \frac{\|G(t)(v) - Df(x)(v)\|}{\|Df(x)(v)\|}.$$

Observemos que, se $v \in E_f^c(x)$, então $\pi_{f,f(y(t)),f(x)} \circ Df(x) \circ \pi_{f,y,x}^{-1}(v) = Df(x)(v)$, porque a decomposição parcialmente hiperbólica é invariante por Df . Então

$$\begin{aligned} \|G(t)(v) - Df(x)(v)\| &= \left\| \pi_{f,f(y(t)),f(x)} \circ Df(y(t)) \circ \pi_{f,x,y}^{-1} - \pi_{f,f(y(t)),f(x)} \circ Df(x) \circ \pi_{f,y,x}^{-1}(v) \right\| \\ &= \left\| \pi_{f,f(y(t)),f(x)} \circ (Df(y(t)) - Df(x)) \circ \pi_{f,y,x}^{-1}(v) \right\| \\ &\leq (1 + \epsilon_\delta)^2 \text{Lip}(Df) d(y(t), x) \\ &\leq \text{Lip}(Df) \frac{(1 + \epsilon_\delta)^3}{\lambda_u(x)} |t|. \end{aligned} \quad (3.7)$$

A última desigualdade é obtida a partir de 3.5, que garante que $d_u(y(t), x) \leq \frac{(1+\epsilon_\delta)}{\lambda_u(x)} |t|$. A partir de 3.6 e 3.7, obtemos:

$$\|T\sigma\| = \frac{(1+\epsilon_\delta)^5 \lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x) \lambda_u(x)} \|\sigma\| + \frac{\text{Lip}(Df)(1+\epsilon_\delta)^3 \pi}{\lambda_c^+(x) \lambda_u(x)}.$$

Afirmção 2: T é uma contração de fibra.

Prova: Temos

$$\begin{aligned} \|T\sigma_1 - T\sigma_2\| &= \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \left| \frac{T\sigma_1(t) - T\sigma_2(t)}{t} \right| \\ &= \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \left| G(t)_*(v + \sigma_1(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t)))) - G(t)_*(v + \sigma_2(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t)))) \right| \\ &\leq (1 + \epsilon_\delta)^4 \frac{\lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x)} \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \left| \frac{\sigma_1(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t))) - \sigma_2(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t)))}{t} \right| \\ &\leq (1 + \epsilon_\delta)^5 \frac{\lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x) \lambda_u(x)} \|\sigma_1 - \sigma_2\|. \end{aligned}$$

Agora, resta somente escolher δ pequeno o suficiente tal que ϵ_δ esteja suficientemente próximo de zero, de modo que tenhamos

$$(1 + \epsilon_\delta)^5 \frac{\lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x) \lambda_u(x)} < 1.$$

□

As afirmações 1 e 2 mostram que são válidas as condições do teorema da seção invariante de Hirsch, Pugh e Shub (1970) [21], então existe uma única seção invariante contínua e limitada.

De Pugh, Shub e Wilkinson (2004) [44], sabemos que a holonomia instável ao longo das folhas centrais é uniformemente diferenciável. A projetivização da derivada desta holonomia local corresponderá, então, a uma seção invariante limitada para o operador de transferência T . Vejamos que isso de fato ocorre.

Para que a derivada dessa holonomia projetivizada seja uma seção invariante para o operador de transferência T , é necessário que

$$T\sigma(x, v) = \sigma(f_*(x, v)), \text{ para todo } (x, v) \in S_f,$$

onde f_* é a aplicação induzida por Df na projetivização: $f(x, v) = (f(x), Df(x, v))$, renormalizado em norma 1. Aqui, $\sigma(x) = Dh_{f, x, y}^u(v) = \frac{Dh_{f, x, y}^u(v)}{\|Dh_{f, x, y}^u(v)\|}$. Seja $z \in \mathcal{F}^c(x)$. Sabendo que $h_{x, y}^u(z) = \mathcal{F}^c(y) \cap \mathcal{F}^u(z)$, e aplicando f de ambos os lados, obtemos que $f(h_{x, y}^u(z)) \in \mathcal{F}^c(f(y)) \cap \mathcal{F}^u(f(z))$ e $f(z) \in \mathcal{F}^c(f(x))$. Assim, pela definição de holonomia,

$$h_{f(x), f(y)}^u(f(z)) = f(h_{x, y}^u(z)),$$

o que implica que

$$Dh_{f(x), f(y)}^u \circ Df(x) = Df(y) \circ Dh_{x, y}^u.$$

Projetivizando, obtemos

$$\frac{Dh_{f(x), f(y)}^u(Df(x)(v))}{\|Dh_{f(x), f(y)}^u(Df(x)(v))\|} = \frac{Df(y)(Dh_{x, y}^u(v))}{\|Df(y)(Dh_{x, y}^u(v))\|},$$

ou seja, $\sigma(f(x)) = T\sigma(x)$, pois

$$T\sigma(x) = \text{proj}(Df(y)(\sigma(x))) = \frac{Df(y)(\sigma(x))}{\|Df(y)(\sigma(x))\|}.$$

A seção invariante coincidirá, dessa maneira, com a única seção invariante contínua construída acima. Isso conclui a prova da continuidade de $Dh_{f, x, y}^u$ com respeito aos pontos x, y (foi provado para $d(x, y) < \delta$, mas pode ser estendido para grandes distâncias).

Se f_n converge para f , então S_{f_n} converge para S_f (isso pode ser explicitado projetando $E_{f_n}^c$ em E_f^c paralelo a $E_f^s \oplus E_f^u$, por exemplo). Podemos verificar se a transferência correspondente de operadores T_{f_n} . Sabendo que T é dado por

$$T\sigma(x, v)(t) = (\pi_{f, f(y(t)), f(x)} \circ Df(y(t)) \circ \pi_{f, y(t), x}^{-1})_*(v + \sigma(\alpha_{f, x}^{-1}(y(t)))) - Df(x)_*(v),$$

com $y(t) = f^{-1} \circ \alpha_{f, f(x)}(t)$, e tendo em mente que f_n converge para f e sua derivada é uniformemente contínua, concluímos, percebendo que todas as aplicações que compõem T (exceto o vetor unitário v , que não depende de f_n e não interfere na convergência) dependem continuamente de f , temos que Tf_n também converge para Tf .

Sendo a seção invariante contínua com respeito à aplicação de fibrado, obtemos a continuidade de $Dh_{f, x, y}^u$ com respeito a f .

□

Observação 3.2.20. *Demos a prova para nossa configuração especial, mas a prova pode ser adaptada para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos em altas dimensões em geral. Usamos que Df é Lipschitz para mostrar que o operador de transferência T verifica as condições do teorema da seção invariante. A prova pode ser adaptada para f de classe $C^{1+\alpha}$ e a bunching condition mais forte $\lambda_s(x)^\alpha < \lambda_c^-(x)/\lambda_c^+(x) \leq \lambda_c^+(x)/\lambda_c^-(x) < \lambda_u(x)^\alpha$, usando a norma $\|\sigma\| = \sup_{t \in [-\alpha, \alpha]} |\sigma(t)/t^\alpha|$. Uma vez que se obtém a seção invariante limitada para a projetivização Df_* em S_f , usando a limitabilidade do jacobiano – que se aplica, visto que temos uma função contínua, $Df(x)$, definida em um conjunto compacto, $\mathbb{T}^4$ –, poderíamos tentar obter a diferenciabilidade da holonomia estável/instável ao longo das folhas centrais.*

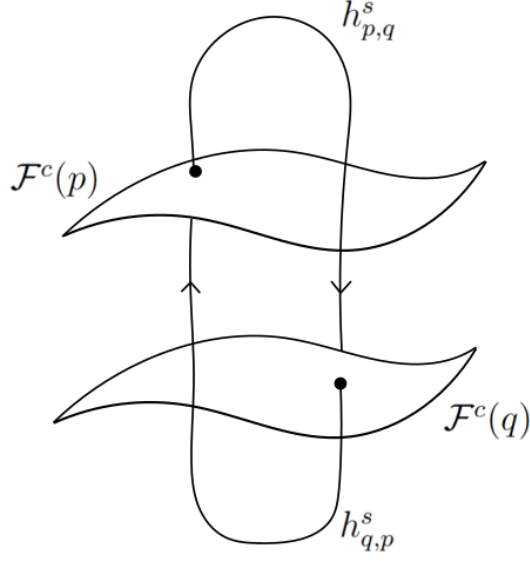
3.2.3 Holonomias homoclínicas

Seja $f \in SH_b^2$ e p_f o ponto fixo tal que $f|_{\mathcal{F}_f^c(p_f)}$ é Anosov. Vamos descartar o índice f quando ele não for necessário para especificar a dependência de f . De Hirsch, Pugh e Shub (1977) [21] e das *bunching conditions*, sabemos que $\mathcal{F}_p^c$, $\mathcal{F}^{cu}(p)$ e $\mathcal{F}^{cs}(p)$ são subvariedades C^2 . Assumamos que q é um ponto homoclínico de $W^c(p)$, isto é, $q \in \mathcal{F}^{cu}(p) \cap \mathcal{F}^{cs}(p)$, então $W^c(p)$ é também C^2 como uma componente conexa da interseção das subvariedades transversais $\mathcal{F}^{cu}(p)$ e $\mathcal{F}^{cs}(p)$.

Podemos definir a holonomia estável $h_{p, q}^s : \mathcal{F}^c(p) \rightarrow \mathcal{F}^c(q)$, além da holonomia instável $h_{q, p}^u : \mathcal{F}^c(q) \rightarrow \mathcal{F}^c(p)$, e ambas são de classe C^1 (vide Observação 3.2.7). Então, $\tilde{h}_q := h_{q, p}^u \circ h_{p, q}^s : \mathcal{F}^c(p) \rightarrow \mathcal{F}^c(p)$ é um difeomorfismo C^1 (uma vez que as holonomias que a compõem são também C^1), e induz uma aplicação C^0 no fibrado tangente unitário $T^1\mathcal{F}^c(p)$, o qual denotamos por $D\tilde{h}_q^*$.

Seja $\tilde{v}^s(x)$ o vetor tangente unitário em $x \in \mathcal{F}^c(p)$ à direção estável de $f|_{\mathcal{F}^c(p)}$ (fixamos uma orientação). Sendo $f|_{\mathcal{F}^c(p)}$ uma aplicação C^2 Anosov em uma superfície C^2 , temos que $\tilde{v}^s : \mathcal{F}^c(p) \rightarrow T^1\mathcal{F}^c(p)$ é C^1 . Definimos a aplicação $\tilde{g}_q : \mathcal{F}^c(p) \rightarrow T^1\mathcal{F}^c(p)$,

Figura 7 – Representação da holonomia estável



Fonte: A autora

$$\tilde{g}_q(x) := D\tilde{h}_{q*}(\tilde{v}^s(h^{-1}(x))) = \frac{D\tilde{h}_q(h^{-1}(x))\tilde{v}^s(h^{-1}(x))}{\|D\tilde{h}_q(h^{-1}(x))\tilde{v}^s(h^{-1}(x))\|} \quad (3.8)$$

Observação 3.2.21. De fato, consideramos a folheação estável de $f|_{\mathcal{F}^c(p)}$ dentro da fibra $\mathcal{F}^c(p)$, “empurrando”, inicialmente, para frente, usando a holonomia estável $h_{p,q}^s$ para a folha $\mathcal{F}^c(p)$ e, então, “empurrando” novamente usando a holonomia instável $h_{q,p}^u$ de volta para a folha $\mathcal{F}^c(p)$. Então, $\tilde{g}_q(x)$ é de fato o vetor unitário tangente em x para essa nova folheação.

Se, além disso, $f \in SH_b^3$, então as holonomias estável e instável ao longo da folha centro-estável fixa $W^{cs}(p)$ e, respectivamente, a folha centro-instável fixa $W^{cu}(p)$ são C^2 . Portanto, nesse caso, $D\tilde{h}_{q*}$ e $\tilde{g}_q$ são, de fato, C^1 .

Se a aplicação f' é C^2 próxima de f , então a folha central Anosov fixa $\mathcal{F}^c(p)$ e sua folha central homoclínica $\mathcal{F}^c(q)$ terão continuações $\mathcal{F}_{f'}^c(p(f'))$ e $\mathcal{F}_{f'}^c(q(f'))$. Então, obtemos as continuações da holonomia estável $h_{p(f'),q(f'),f'}^s : \mathcal{F}_{f'}^c(p(f')) \rightarrow \mathcal{F}_{f'}^c(q(f'))$ e a holonomia instável $h_{q(f'),p(f'),f'}^u : \mathcal{F}_{f'}^c(q(f')) \rightarrow \mathcal{F}_{f'}^c(p(f'))$; elas também são aplicações C^1 com respeito a f' (na topologia C^2). Temos também a continuação $\tilde{g}_{q(f'),f'} : \mathcal{F}_{f'}^c(p(f')) \rightarrow T^1\mathcal{F}_{f'}^c(p(f'))$, que é contínua tanto com respeito a $x \in \mathcal{F}_{f'}^c(p(f'))$ quanto com respeito a $f' \in SH_b^2$ (na topologia C^2).

3.2.4 Medidas hiperbólicas

Seja μ uma medida ergódica de um difeomorfismo f . Então, pelo Teorema de Oseledets, como visto anteriormente, para μ -quase todo ponto $x \in M$, existem $k(\mu) \in \mathbb{N}$,

números reais $\lambda_1(\mu) > \dots > \lambda_k(\mu)$, e uma decomposição invariante $T_x M = E^1(x) \oplus \dots \oplus E^k(x)$ do fibrado tangente de x , dependendo mensuravelmente no ponto, de forma que $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \log \|Df_x^n(v)\| = \lambda_j(\mu)$ para todo $0 \neq v \in E^j(x)$. Os números reais $\lambda_j(\mu)$ são os expoentes de Lyapunov de μ . Diz-se que a medida ergódica é hiperbólica se todo expoente de Lyapunov de μ é não nulo.

Lema 3.2.22. *(Teorema da ferradura de Katok) Para qualquer $f \in \text{Diff}^r(M)$, $r > 1$ e qualquer medida hiperbólica ergódica μ , existe um ponto periódico hiperbólico p , tal que $\mu \stackrel{h}{\sim} \delta_{\text{Orb}(p)}$, onde $\delta_{\text{Orb}(p)}$ é a medida ergódica suportada na órbita $\text{Orb}(p)$.*

Se um difeomorfismo f admite uma decomposição dominada, então a decomposição de Oseledets, dada pelo igualmente intitulado teorema, deve ser subordinada à decomposição dominada. Em particular, sendo qualquer $f \in SH$ parcialmente hiperbólico em $\mathbb{T}^4$, então para qualquer medida ergódica μ de f , o maior expoente de Lyapunov é positivo ($\lambda^u > 0$) e o fibrado de Oseledet associado é tangente ao fibrado instável forte E^u de f . Um resultado similar vale para o expoente de Lyapunov minimal $\lambda^s < 0$ com dois expoentes de Lyapunov centrais (contados com multiplicidade), $\lambda_1^c \geq \lambda_2^c$, cujos fibrados de Oseledets associados são tangentes ao fibrado central E^c de f .

3.2.5 Critério de unicidade do estado de equilíbrio

Definição 3.2.23. *Seja μ uma medida hiperbólica ergódica de um difeomorfismo f . O índice estável de μ é o número de expoentes de Lyapunov negativos, contados com multiplicidade.*

Proposição 3.2.24. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo C^r , $r > 1$, $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ um potencial de Holder, e p um ponto periódico hiperbólico. Então, existe no máximo um estado de equilíbrio para ϕ que é homoclinicamente relacionado a $\delta_{\text{Orb}(p)}$, e seu suporte coincide com o conjunto homoclínico $HC(\text{Orb}(p))$.*

A prova desta proposição foi exposta em Ovadia (2021) [40], Teorema 2.4 e Buzzi, Crovisier e Sarig (2022) [10], § 1.6. Veja também Ovadia (2016) [39] e [10], Corolário 3.3.

3.2.6 Hiperbolicidade e estados de equilíbrio

Se $f \in PH_{A,B}^0$, então resultados de Franks (1969) [19] e Manning (1974) [34], que afirmam que todo difeomorfismo de Anosov de um toro é topologicamente equivalente a um Anosov linear, implicam que f é semi-conjugada a $f_{A,B}$, isto é, existe uma sobrejetividade contínua $h : \mathbb{T}^4 \rightarrow \mathbb{T}^4$ homotópica à identidade, tal que $f_{A,B} \circ h = h \circ f$.

Pelo Princípio Variacional de Ledrappier-Walters (1977) [27], vale a seguinte igualdade:

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}(f), \pi_* \mu = \nu} \left(h_\mu(f) + \int \varphi d\mu \right) = \int_Y P(f, \varphi, \pi^{-1}(y)) d\nu(y),$$

na qual $P(f, \varphi, \pi^{-1}(y))$ representa a pressão relativa da dinâmica de f restrita à fibra $\pi^{-1}(y)$ em relação ao potencial φ .

Temos a aplicação π como semiconjugada contínua entre o difeomorfismo f e o sistema linear $f_{A,B}$, e como estamos interessados somente na entropia topológica, tomamos o potencial nulo $\varphi = 0$. Substituindo-o na igualdade, obtemos

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}(f), \pi_* \mu = \nu} h_\mu(f) = \int h(f|\pi^{-1}(y)) d\nu(y),$$

onde $h(f|\pi^{-1}(y)) = P(f, 0, \pi^{-1}(y))$ é a entropia condicional de f nas fibras de π .

Aqui, as fibras $\pi^{-1}(y)$ são contidas em folhas centrais que não têm dinâmica interna significativa, isto é, as órbitas dentro das fibras não se afastam entre si e, portanto, a entropia condicional nas fibras é nula ($h(f|\pi^{-1}(y)) = 0$ para quase todo y). Dessa forma, obtemos

$$\sup_{\mu: \pi_* \mu = \nu} h_\mu(f) = h_\nu(f_{A,B}). \quad (3.9)$$

Agora, utilizando o Princípio Variacional clássico,

$$h_{top}(f) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} h_\mu(f) \geq \sup_{\nu \in \mathcal{M}(f_{A,B})} \sup_{\mu: \pi_* \mu = \nu} h_\mu(f),$$

e substituindo o lado direito pela igualdade 3.9 obtida, temos

$$h_{top}(f) \geq \sup_{\nu \in \mathcal{M}(f_{A,B})} h_\nu(f_{A,B}) = h_{top}(f_{A,B}). \quad (3.10)$$

Sabemos também que A e B são automorfismos lineares em $\mathbb{T}^2$. E sendo $h_{top}(A \times B) = h_{top}(A) + h_{top}(B)$, aliado ao fato de que a entropia topológica da aplicação é igual ao logaritmo de seu maior autovalor (informações que estão presentes no tópico 2.7), obtemos que

$$h_{top}(f_{A,B}) = h_{top}(A) + h_{top}(B) = \log \lambda_A + \log \lambda_B. \quad (3.11)$$

Associando 3.10 a 3.11, segue-se que

$$h_{top}(f) \geq h_{top}(f_{A,B}) = \log \lambda_A + \log \lambda_B. \quad (3.12)$$

Para qualquer medida de probabilidade invariante μ de f , diz-se que uma partição mensurável ξ é μ adaptada (subordinada) a $\mathcal{F}^u$ se as seguintes condições são satisfeitas:

- existe $r_0 > 0$ tal que $\xi(x) \subset B_{r_0}^{\mathcal{F}^u}(x)$ para μ -quase todo x , onde $B_{r_0}^{\mathcal{F}^u}(x)$ é uma bola de $\mathcal{F}^u(x)$ com raio r_0 ;
- $\xi(x)$ contém uma vizinhança aberta de f dentro de $\mathcal{F}^u(x)$;
- ξ é crescente, isto é, para μ -quase todo x , $\xi(x) \subset f(\xi(f^{-1}(x)))$.

A existência de tal partição foi fornecida por Ledrappier e Strelcyn (1982) [26] (veja também Ledrappier e Young (1985b) [28] e Yang (2021) [56]), trabalho que envolve a fórmula da entropia de Pesin e, para demonstração de seu principal resultado, constrói uma partição mensurável subordinada à folheação instável.

A entropia parcial de μ ao longo da folheação expansora $\mathcal{F}^u$ é definida por

$$h_\mu(f, \mathcal{F}^u) = H_\mu(f^{-1}\xi \setminus \xi). \quad (3.13)$$

A definição de entropia parcial não depende da escolha da partição, conforme exposto em Ledrappier e Young (1985b) [28]. Os dois lemas seguintes são importantes para nossa discussão adicional.

Lema 3.2.25. *Se $f \in PH_{A,B}^0$, então $h_\mu(f, \mathcal{F}^u) \leq \log \lambda_A$.*

Demonstração. Denote por $\mathcal{F}_f^c$ a folheação central de f . Pela Proposição 3.2.3, a aplicação da projeção π_f^c ao longo da folheação central induz um homeomorfismo Anosov topológico $\bar{f}$ no espaço quociente $\bar{\mathbb{T}}^2 = \mathbb{T}^4 / \mathcal{F}_f^c$, o qual é topologicamente conjugado a A . Então, podemos de fato identificar $\bar{\mathbb{T}}_f^2$ com $\mathbb{T}^2$ e $\bar{f}$ com A .

Denote por $\mathcal{F}_A^s$ (respectivamente $\mathcal{F}_A^u$) a folheação estável (respectivamente instável) de A . A aplicação da projeção π_f^c leva cada folha centro-instável $\mathcal{F}^{cu}$ de f em uma folha instável $\mathcal{F}_A^u$ de A . A Proposição 3.2.3 implica que todas as hipóteses de Tahzibi e Yang (2019) [52] apresentadas em seu Teorema A são satisfeitas (veja também Álvarez (2023) [2], § 2.5), e isso implica que $h_\mu(f, \mathcal{F}^u) \leq h_{top}(A) = \log A$.

As hipóteses em questão são dadas em um resultado que afirma que

Proposição 3.2.26. *Seja f um difeomorfismo parcialmente hiperbólico C^2 satisfazendo as seguintes hipóteses:*

- *f é dinamicamente coerente com todas as folhas centrais compactas;*
- *f admite holonomias globais;*

- f_c é um homeomorfismo Anosov topológico transitivo, onde f_c é a dinâmica induzida satisfazendo $f_c \circ \pi = \pi \circ f$ e $\pi : M \rightarrow M/\mathcal{F}^c$ é a projeção natural no espaço das folhas centrais.

Seja μ uma probabilidade f -invariante e $\nu := \pi_*\mu$. Então, $h_\mu(f, \mathcal{F}^u) \leq h_\nu(f_c)$, e a igualdade ocorre se, e somente se, $\mu \in \text{Gibb}_\nu^u(f)$ (ou seja, $\pi_*(\mu_x^u) = \nu_{\pi(x)}^u$ para μ -quase todo $x \in M$).

□

O seguinte lema é uma generalização de Álvarez (2023) [2], em seu Teorema A. No material citado, temos um resultado para $f \in \text{Diff}^2(\pi^d)$ e com propriedades específicas, enquanto o lema a ser apresentado é uma generalização para difeomorfismos de classe C^r , com $r > 1$.

Lema 3.2.27. *Seja $f \in PH_{A,B}^0$ um difeomorfismo C^r , $r > 1$, e μ uma medida ergódica f -invariante com $h_\mu(f) > \log \lambda_A$. Então, μ é uma medida ergódica hiperbólica de f com índice estável 2, isto é, $\lambda_1^c > 0 > \lambda_2^c$.*

Demonstração. Mostraremos $\lambda_1^c > 0$. Para provar que $\lambda_2^c < 0$, é necessário somente considerar o difeomorfismo f . Vejamos, a seguir, a fórmula de Ledrappier e Young, a qual será utilizada no desenvolvimento da prova do lema:

Proposição 3.2.28. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo C^r ($r > 1$) de uma variedade riemanniana compacta, e seja μ uma medida de probabilidade de Borel ergódica. Sejam $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_u > 0$ os expoentes de Lyapunov positivos distintos de f , δ_i a dimensão de μ das variedades W^i . Então, para $1 \leq i \leq u$, existem números γ_i , com $0 \leq \gamma_i \leq \dim E_i$ tais que*

$$\delta_i = \sum_{j \leq i} \gamma_j$$

para $i = 1, \dots, u$ e

$$h_\mu(f) = \sum_{i \leq u} \lambda_i \gamma_i.$$

Suponha, de forma a obter uma prova por contradição, que $\lambda_1^c \leq 0$. Agora, com a fórmula de Ledrappier e Young (veja Brown (2016) [7], Ledrappier e Strelcyn (1982) [26]), a entropia total de μ também pode ser decomposta como

$$h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{F}^u) + h_\mu(f, \mathcal{F}_+^c),$$

onde $h_\mu(f, \mathcal{F}^u)$ é a entropia ao longo da folheação instável $\mathcal{F}^u$ e $h_\mu(f, \mathcal{F}_+^c)$ é associada à parte do subespaço central E^c que tem expoentes positivos. Como $\lambda_1^c < 1$, não há expoentes de Lyapunov positivos na direção central. Logo, temos

$$h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{F}^u). \quad (3.14)$$

De acordo com o lema anterior, o qual se aplica nessas condições, $h_\mu(f, \mathcal{F}^u) \leq \log \lambda_A$. Combinando o lema à igualdade 3.14, temos que $h_\mu(f) \leq \log \lambda_A$, o que é uma contradição com a hipótese de que $h_\mu(f) > \log \lambda_A$. A prova está completa. $\square$

4 Provas dos teoremas e corolários

4.1 Prova do Teorema A

4.1.1 Definição de $\mathcal{U}^r$ e plano da prova

Vamos definir o conjunto aberto $\mathcal{U}^r$, o qual é o candidato ao conjunto $\mathcal{U}^r$ no Teorema A. Relembramos, da definição de classe de Shub, que p é um ponto fixo para $f \in SH_b^r$, e a restrição de f à folha central $\mathcal{F}^c(p)$ é Anosov. Aqui, q é um ponto homoclínico de $\mathcal{F}^c(p)$ se $q \in \mathcal{F}^{cu}(p) \cap \mathcal{F}^{cs}(p)$. A aplicação $\tilde{g}_q : \mathcal{F}^c(p) \rightarrow T^1\mathcal{F}^c(p)$ é definida pela equação 3.8, e representa de fato o vetor tangente unitário ao folheamento obtido ao empurrar o folheamento estável de $f|_{\mathcal{F}^c(p)}$ ao longo do laço homoclínico correspondente a q , por meio da holonomia.

Definição 4.1.1. *Seja $\mathcal{U}_s^r \subset SH_b^r$,*

$$\mathcal{U}_s^r = \{f \in SH_b^r : \text{para todo } x \in \mathcal{F}^c(p), \text{ existe } q \text{ homoclínico a } \mathcal{F}^c(p) \text{ tal que } \tilde{g}_q(x) \neq \pm \tilde{v}^s(x)\}.$$

De maneira similar, definimos $\mathcal{U}_u^r$. Seja $\mathcal{U}^r = \mathcal{U}_s^r \cap \mathcal{U}_u^r$.

A definição de $\mathcal{U}_s^r$ é dada, de fato, por uma condição de transversalidade. O que pedimos é que o folheamento estável de $f|_{\mathcal{F}^c(p)}$ e sua imagem por holonomias ao longo de laços homoclínicos sejam transversos.

Para provar o Teorema A, teremos que mostrar os seguintes três fatos:

1. o conjunto $\mathcal{U}^r$ é C^2 -aberto;
2. o conjunto $\mathcal{U}^r$ é C^r -denso;
3. o conjunto $\mathcal{U}^r$ satisfaz a conclusão do Teorema A, em outras palavras, se $f \in \mathcal{U}^r$, então quaisquer dois pontos periódicos hiperbólicos de f de índice 2 são homoclinicamente relacionados.

Consequentemente, a prova do Teorema A está dividida nas três proposições seguintes.

Proposição 4.1.2. *$\mathcal{U}^r$ é C^2 -aberto.*

Demonstração. Uma consequência imediata da compacidade de $\mathcal{F}^c(p)$ (que é vista a partir da Proposição 3.2.3 que, afirmando que as folhas centrais são toros $\mathbb{T}^2$ de classe C^1 , e

sendo os toros compactos, então as folhas e, em particular, $\mathcal{F}^c(p)$, são também compactas) e do fato de que as holonomias estáveis e instáveis dependem continuamente na topologia C^1 com respeito aos pontos (o que é exposto na Observação 3.2.7) é o seguinte lema.

Lema 4.1.3. *Seja $f \in SH_b^r$. Então $f \in \mathcal{U}_s^r$ se, e somente se, existem pontos homoclínicos $q_1, q_2, \dots, q_k$ de $\mathcal{F}^c(p)$ tais que a imagem de $\tilde{g}_{q_1} \times \tilde{g}_{q_2} \times \dots \times \tilde{g}_{q_k}$ é disjunta da imagem de $\pm \tilde{v}_k^s$.*

Demonstração. Se $f \in SH_b^r$, então para todo $x \in \mathcal{F}^c(p)$, existe q homoclínico a $\mathcal{F}^c(p)$ tal que $\tilde{g}_q(x) \neq \pm \tilde{v}^s(x)$. Logo, existem pontos homoclínicos $q_1, q_2, \dots, q_k$ a $\mathcal{F}^c(p)$ tais que $(\tilde{g}_{q_1}(x), \dots, \tilde{g}_{q_k}(x))$ nunca está em $(\tilde{v}_1^s(x), \dots, \tilde{v}_k^s(x))$ e, assim, o produto cartesiano dos $\tilde{g}_{q_k}(x)$ também é diferente de $\pm \tilde{v}^s$.

Reciprocamente, se existem pontos homoclínicos $q_1, q_2, \dots, q_k$ a $\mathcal{F}^c(p)$ tais que a imagem $\tilde{g}_{q_1} \times \tilde{g}_{q_2} \times \dots \times \tilde{g}_{q_k}$ é disjunta da imagem de $\pm \tilde{v}_k^s$, isso vale, em particular, para $k = 1$. Logo, existe q homoclínico a $\mathcal{F}^c(p)$ tal que $\tilde{g}_q(x) \neq \tilde{v}^s(x)$. Assim, $f \in \mathcal{U}_s^r$. $\square$

Contudo, as holonomias ao longo das folhas centrais dependem continuamente na topologia C^1 com respeito à aplicação f (quando esta varia na topologia C^2), o que é resultado da Observação 3.2.7 e do Lema 3.2.16.

Como os vetores $\tilde{g}_{q_i}$ e $\tilde{v}_i^s$, $i \in \{1, \dots, k\}$, são obtidos por meio de transporte por holonomias, então as imagens de $\tilde{g}_{q_1} \times \dots \times \tilde{g}_{q_k}$ e $\pm \tilde{v}_k^s$ dependem continuamente da aplicação f . Isso significa que, se a desigualdade entre os vetores crucial para a definição de $\mathcal{U}_s^r$ ($\tilde{g}_q(x) \neq \tilde{v}^s(x)$) vale para um certo f , então também vale para f_2 suficientemente próximo de f .

Sendo as imagens $\tilde{g}_{q_1} \times \dots \times \tilde{g}_{q_k}$ e $\pm \tilde{v}_k^s$ compactas (pois são uniões finitas de compactos) e disjuntas (pelo Lema 4.1.3), então sua distância é maior que zero, fazendo de qualquer f_2 suficientemente próximo de f uma aplicação pertencente a $\mathcal{U}_s^r$ – já que as imagens variam continuamente com a aplicação f – e concluindo a prova da abertura C^2 do conjunto. A prova para $\mathcal{U}_u^r$ é análoga, então $\mathcal{U}^r = \mathcal{U}_s^r \cap \mathcal{U}_u^r$ é C^2 -aberto. $\square$

Proposição 4.1.4. $\mathcal{U}^r$ é C^r -denso.

A prova desta proposição será fornecida no tópico 4.1.2.

Proposição 4.1.5. *Se $f \in \mathcal{U}^r$, então quaisquer dois pontos periódicos hiperbólicos de f de índice 2 são homoclinicamente relacionados.*

Vamos fornecer a prova da proposição no tópico 4.1.3. Como mencionamos antes, a prova dessas três proposições implicará o Teorema A.

4.1.2 Prova da densidade C^r

Mostraremos que $\mathcal{U}_s^r$ é C^r -denso em SH_b^r , e a prova para $\mathcal{U}_u^r$ é similar. Então $\mathcal{U}^r$ será C^r -denso, já que é a interseção de dois conjuntos abertos e densos C^r .

O principal resultado de perturbação que usaremos é o seguinte lema.

Lema 4.1.6. *Seja $f \in \text{SH}_b^3$ e seja q um ponto homoclínico da folha de Anosov fixa $\mathcal{F}^c(p)$. Então temos o seguinte:*

(1) *Para qualquer família C^2 (ϕ_T) , onde $T \in \mathbb{R}^n$ é um parâmetro, de perturbações da identidade em $\mathbb{T}^4$ (ou seja, $\phi_0 = \text{Id}_{\mathbb{T}^4}$), suportada em uma vizinhança de $\mathcal{F}^c(q)$ disjunta de todas as outras iteradas $f^k(\mathcal{F}^c(q))$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, a aplicação $(T, x) \mapsto \tilde{g}_{q(f \circ \phi_T), f \circ \phi_T}(x)$ é C^1 em $[-\delta, \delta]^n \times \mathcal{F}^c(p)$ para algum $\delta > 0$.*

(2) *Para qualquer $x_0 \in \mathcal{F}^c(p)$ e qualquer $r_0 > 0$, existe uma família C^∞ $(\phi_t)_{t \in [-\delta, \delta]}$ de perturbações (preservando volume) da identidade em $\mathbb{T}^4$, suportada em $B(y_0, r_0)$, onde $y_0 := h_{p,q}^u(x_0) \in \mathcal{F}^c(q)$, tal que:*

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}_{q(f \circ \phi_t), f \circ \phi_t}(x) \right|_{(x,t)=(x_0,0)} \neq 0.$$

Demonstração. (1) Como $\mathcal{F}^c(p)$ é compacta, é suficiente provar que $\tilde{g}_{q(f \circ \phi_T), f \circ \phi_T}(x)$ é C^1 em (x, T) em uma vizinhança pequena de cada ponto $(x_0, 0^n) \in \mathcal{F}^c(p) \times \mathbb{R}^n$. Isso porque, se a diferenciabilidade C^1 acontece para todo ponto e em uma vizinhança ao redor dele, então vale para todo $[-\delta, \delta] \times \mathcal{F}^c(p)$.

Seja $x_0 \in \mathcal{F}^c(p)$ e denotemos $y_0 = h_{p,q}^u(x_0) \in \mathcal{F}^c(q)$, $y_1 = f(y_0) \in \mathcal{F}^c(f(q))$, $z_1 = h_{f(q),p}^s(y_1) \in \mathcal{F}^c(p)$, e $z_0 = f^{-1}(z_1) \in \mathcal{F}^c(p)$. A f -invariância das holonomias estáveis implica que $h_{q,p}^s(y_0) = z_0$, ou seja, $\tilde{h}_q(z_0) = x_0$. Isso se dá pelo seguinte:

$$\begin{aligned} z_0 &= f^{-1}(z_1) \\ &= f^{-1}(h_{f(q),p}^s(y_1)) \\ &= f^{-1}(h_{f(q),p}^s(f(y_0))) \\ &= (h_{q,p}^s(y_0)). \end{aligned}$$

Seja $\psi_p : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{F}^c(p)$ uma imersão C^2 , $a_0 = \psi_p^{-1}(x_0)$, $b_0 = \psi_p^{-1}(z_0)$. Seja $I_\delta = [-\delta, \delta]$. Existem cartas de folheações C^2 de $\mathcal{F}^s$ (respectivamente $\mathcal{F}^u$) numa vizinhança pequena de y_1 (respectivamente y_0) dentro de $\mathcal{F}^{cs}(p)$ (respectivamente $\mathcal{F}^{cu}(p)$):

$$\begin{aligned} \alpha^s : B_{y_1}^c \times I_\delta &\rightarrow B_{y_1}^{cs}, & \alpha^s(\cdot, 0) &= \text{Id}_{\mathcal{F}_{\text{loc}}^c(y_1)}, & \alpha^s(\{y\} \times I_\delta) &= \mathcal{F}_{\text{loc}}^s(y), \\ \alpha^u : B_{y_0}^c \times I_\delta &\rightarrow B_{y_0}^{cu}, & \alpha^u(\cdot, 0) &= \text{Id}_{\mathcal{F}_{\text{loc}}^c(y_0)}, & \alpha^u(\{y\} \times I_\delta) &= \mathcal{F}_{\text{loc}}^u(y). \end{aligned}$$

Aqui B_x^* denota uma bola pequena centrada em x dentro de $\mathcal{F}^*$. Definimos as aplicações C^2 :

$$\begin{aligned}\beta^s : B_{b_0} \times I_\delta &\rightarrow B_{y_1}^{cs}, & \beta^s(b, s) &= \alpha^s(h_{p,f(q)}^s(f(\psi_p(b))), s), \\ \beta^u : B_{a_0} \times I_\delta &\rightarrow B_{y_0}^{cu}, & \beta^u(a, r) &= \alpha^u(h_{p,q}^u(\psi_p(a)), r),\end{aligned}$$

onde B_x é uma bola pequena centrada em x em $\mathbb{T}^2$.

Sabemos que o suporte de ϕ_T não intersecta $f^k(\mathcal{F}_{\text{loc}}^{cs}(y_1))$ para todo $k \geq 0$, nem $f^\ell(\mathcal{F}_{\text{loc}}^{cu}(y_0))$ para todo $\ell < 0$. Isso ocorre porque, sendo $y_1 = f(y_0) = f(h_{p,q}^u(x_0))$, a iterada f^k deve ter $k \geq 0$, já que, para $k = 0$, $f^0(f(h_{p,q}^u(x_0))) = f(h_{p,q}^u(x_0))$. No caso de f^ℓ , não ocorre o mesmo processo, uma vez que já se está trabalhando com y_0 , e não com sua imagem, y_1 .

Esta configuração implica que $\mathcal{F}_{\text{loc}}^{cs}(y_1)$ permanece como uma folha centro-estável local para $f_T := f \circ \phi_T$ para todo T , $\beta^s(a, \cdot)$ permanece como uma parametrização das variedades estáveis fortes dentro de $\mathcal{F}^{cs}(p)$ (assim como na aplicação β^s acima, cuja imagem está em uma bola dentro de $\mathcal{F}^{cs}$), e a holonomia estável entre $\mathcal{F}^c(p)$ e $\mathcal{F}_{\text{loc}}^{cs}(y_1)$ é inalterada. Uma afirmação similar vale para $\mathcal{F}_{\text{loc}}^{cu}(y_0)$.

As aplicações f_T de fato mudam as folhas centrais $\mathcal{F}^c(q)$, ou seja, a folheação central não é invariável sob f_T . Temos que $\mathcal{F}^c(q(f_T), f_T) = f^{-1}(\mathcal{F}_{\text{loc}}^s(\mathcal{F}^c(y_1))) \cap \mathcal{F}_{\text{loc}}^s(\mathcal{F}^c(y_0))$, isto é, a folheação central associada a f_T passando por $q(f_T)$ pode ser construída como intersecção de duas folheações maiores (centro-estável e centro-instável). Essas folheações invariantes existem porque f_T é parcialmente hiperbólico e dinamicamente coerente, conforme visto nos resultados iniciais deste trabalho. Podemos apresentar implicitamente a holonomia homoclínica $\tilde{h}_{q(f_T), f_T}$ numa vizinhança de z_0 da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\psi_p(a) = \tilde{h}_{q(f_T), f_T}(\psi_p(b)) &\Leftrightarrow \tilde{h}_{q(f_T), f_T}(\psi_p(b)) = h_{q(f_T), p, f_T}^u(\psi_p(a)) \circ h_{p, q(f_T), f_T}^s(\psi_p(b)) \\ &\Leftrightarrow h_{q(f_T), p, f_T}^{u^{-1}}(\psi_p(a)) = h_{p, q(f_T), f_T}^s(\psi_p(b)) \\ &\Leftrightarrow h_{p, q(f_T), f_T}^u(\psi_p(a)) = h_{p, q(f_T), f_T}^s(\psi_p(b)) \\ &\Leftrightarrow h_{p, q(f_T), f_T}^u(\psi_p(a)) = f_T^{-1}(h_{p, q(f_T), f_T}^s(f(\psi_p(b)))) \\ &\Leftrightarrow \beta^u(a, r) = f_T^{-1}(\beta^s(b, s)) \text{ para algum } r, s \in I_\delta \\ &\Leftrightarrow \phi_T(\beta^u(a, r)) = f^{-1}(\beta^s(b, s)) \text{ para algum } r, s \in I_\delta.\end{aligned}$$

Em conclusão, denotando $h_T = \psi_p^{-1} \circ \tilde{h}_{q(f_T), f_T \circ \psi_p}$ (a aplicação $\tilde{h}_{q(f_T), f_T}$ vista no sistema de coordenadas de ψ_p),

$$a = h_T(b) \Leftrightarrow \phi_T(\beta^u(a, r)) = f^{-1}(\beta^s(b, s)) \text{ para algum } r, s \in I_\delta.$$

Escolhemos uma carta C^∞ $\psi_q : B_{y_0} \rightarrow \mathbb{R}^4$ (pode também preservar o volume) tal que:

- $\psi_q(y_0) = 0 \in \mathbb{R}^4$;
- $D\psi_q(y_0)(E^c(q_0)) = \text{span}\{e_1, e_2\}$;
- $D\psi_q(y_0)(E^u(q_0)) = \text{span}\{e_3\}$;
- $D\psi_q(y_0)(E^s(q_0)) = \text{span}\{e_4\}$.

Os termos e_1, e_2, e_3 e e_4 são vetores canônicos da base padrão de $\mathbb{R}^4$: $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$. $\text{span}\{e_1, e_2\}$, por exemplo, é o plano dos vetores que têm a forma $(x, y, 0, 0)$, enquanto $\text{span}\{e_3\}$ é a reta $(0, 0, z, 0)$. A segunda equação indica, assim, que a direção central é levada para o plano dos dois primeiros eixos.

Seja $E : B_{a_0} \times B_{b_0} \times I_\delta^2 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por:

$$E(a, b, r, s, T) = \psi_q(\phi_T(\beta^u(a, r))) - \psi_q(f^{-1}(\beta^s(b, s))).$$

Temos que E é C^2 e que $E(a_0, b_0, 0, 0, 0^n) = \psi_q(y_0) - \psi_q(f^{-1}(y_1)) = 0$. E é C^2 porque é uma composição de várias aplicações de classe igual ou superior: ψ_q é C^∞ , ψ_p é C^2 – assim como α^s , α^u e $(\phi_T) -$, as holonomias h são C^2 (conforme visto nas preliminares do trabalho), e f é C^3 , o que vem da suposição de que $f \in SH_b^3$.

Afirmção. A matriz $\frac{\partial E}{\partial(b, r, s)}(a_0, b_0, 0, 0, 0^n)$ é invertível.

Prova. Observamos que, como α^s é um difeomorfismo tal que $\alpha^s(\{y\} \times I_\delta) = \mathcal{F}_{\text{loc}}^s(y)$, $\alpha^s(\cdot, 0) = \text{Id}_{\mathcal{F}_{\text{loc}}^c}(y_1)$, e então $D\alpha^s(y, 0) \cdot \frac{\partial}{\partial s}$ é um vetor não nulo em $E^s(y)$. Como Df preserva E^s (pela invariância de f nas holonomias estáveis), e $D\psi_q(y_0)$ leva $E^s(q_0)$ para a reta gerada por e_4 , temos que $DE(a_0, b_0, 0, 0, 0^n)$ leva a direção $\frac{\partial}{\partial s}$ isomorficamente sobre a direção e_4 .

Um argumento semelhante nos leva a perceber que $DE(a_0, b_0, 0, 0, 0^n)$ leva a direção $\frac{\partial}{\partial r}$ isomorficamente sobre e_3 , lembrando que $\phi_0 = \text{Id}_{\mathbb{T}^4}$.

Agora, analisemos a ação de $DE(a_0, b_0, 0, 0, 0^n)$ no espaço bidimensional $T_{b_0}B_{b_0}$. Não é difícil ver que $D\beta^s(b_0, 0)$ leva $T_{b_0}B_{b_0}$ isomorficamente sobre $E^c(y_1)$. Sabemos que ambos os espaços são bidimensionais. Como β^s é uma aplicação construída como composição de difeomorfismos locais, ela própria é um difeomorfismo local, tendo sua derivada posto máximo em cada ponto. Isso significa que a derivada leva vetores não nulos a vetores não nulos, ou seja, seu núcleo é trivial, o que, por sua vez, implica que ela é injetora. Somando isso ao fato de os espaços terem a mesma dimensão, obtemos a bijetividade e, assim, o isomorfismo da aplicação.

Como Df preserva E^c e $D\psi_q(y_0)$ leva $E^c(q_0)$ para o plano gerado por e_1 e e_2 , então $DE(a_0, b_0, 0, 0, 0^n)$ leva $T_{b_0}B_{b_0}$ isomorficamente para $\text{span}\{e_1, e_2\}$. Isso conclui a prova da afirmação, pois se DE é isomorfismo, então é invertível. $\square$

Agora, finalizemos a prova da primeira parte do lema. O Teorema da Função Implícita nos dá a existência de uma função C^2 $H : B_{a_0} \times I_\delta^n \rightarrow B_{b_0} \times I_\delta^2$, com $H(a, T) = (h(a, T), r(a, T), s(a, T))$, tal que:

$$E(a, h(a, T), r(a, T), s(a, T), T) = 0$$

(talvez após restringirmos os domínios das bolas e dos intervalos). Então, a aplicação $h_T(a) = h(a, T)$ é C^2 em ambas as variáveis ($h_T = \psi_p^{-1} \circ \tilde{h}_{q(f_T), f_T} \circ \psi_p$, e tanto ψ_p quanto a holonomia são C^2), o que significa que $\tilde{h}_{q(f_T), f_T}(x)$ é C^2 nas variáveis, e então $\tilde{g}_{q(f \circ \phi_T), f \circ \phi_T}(x)$ é C^1 em ambas as variáveis, uma vez que é a derivada de uma aplicação C^2 . Isso finaliza a prova da primeira parte.

(2) Utilizaremos a mesma notação da parte (1). Seja $\rho : \mathbb{R}^4 \rightarrow [0, \infty)$ uma função suave do tipo *bump function*, suportada numa bola pequena centrada na origem, e constantemente igual a 1 próxima da origem. A família $\phi_t : \mathbb{T}^4 \rightarrow \mathbb{T}^4$ é definida como:

$$\phi_t := \psi_q^{-1} \circ (R_{\rho t} \times \text{Id}_{\mathbb{R}^2}) \circ \psi_q,$$

onde R_t é a rotação de ângulo t em $\mathbb{R}^2$. Suponha que o suporte de ρ seja pequeno o suficiente para que o suporte de ϕ_t esteja contido em $B(y_0, r_0)$ e seja disjunto de todas as outras iteradas de $W^c(q)$. Pela parte (1), temos:

$$E(a, b, r, s, t) = (R_{\rho t} \times \text{Id}_{\mathbb{R}^2})(\psi_q(\beta^u(a, r))) - \psi_q(f^{-1}(\beta^s(b, s))).$$

Vamos calcular $DE(a_0, b_0, 0, 0, t)$. Observamos que:

- $L_b := DE(a_0, b_0, 0, 0, t)|_{T_{b_0}B_{b_0}} : T_{b_0}B_{b_0} \rightarrow \text{span}\{e_1, e_2\}$ é um isomorfismo independente de t ;
- $L_s := DE(a_0, b_0, 0, 0, t)|_{\text{span}\{\frac{\partial}{\partial s}\}} : \text{span}\{\frac{\partial}{\partial s}\} \rightarrow \text{span}\{e_4\}$ também é um isomorfismo independente de t ;
- Como $D(R_{\rho t} \times \text{Id}_{\mathbb{R}^2})$ preserva e_3 , temos que $L_r := DE(a_0, b_0, 0, 0, t)|_{\text{span}\{\frac{\partial}{\partial r}\}} : \text{span}\{\frac{\partial}{\partial r}\} \rightarrow \text{span}\{e_3\}$ também é um isomorfismo independente de t .

Os dois primeiros itens se mostram verdadeiros porque, estando eles em função de b e s , respectivamente, suas derivadas não dependem do valor de t . O terceiro é verdadeiro porque, sabendo que $D(R_{\rho t} \times \text{Id}_{\mathbb{R}^2})$ preserva e_3 e que $DE(a_0, b_0, 0, 0, 0^n)$ leva a direção $\frac{\partial}{\partial r}$

isomorficamente sobre e_3 , temos que a variação de t não interfere na derivada de E com respeito a r , o que mostra que L_r não depende de t .

Portanto,

$$\frac{\partial E}{\partial(b, r, s)}(a_0, b_0, 0, 0, t) = L_b \times L_r \times L_s.$$

Da equação anterior, podemos computar:

$$DE(a_0, b_0, 0, 0, t)|_{T_{a_0}B_{a_0}} = R_t \circ L_a : T_{a_0}B_{a_0} \rightarrow \text{span}\{e_1, e_2\},$$

onde $L_a := DE(a_0, b_0, 0, 0, 0)|_{T_{a_0}B_{a_0}} : T_{a_0}B_{a_0} \rightarrow \text{span}\{e_1, e_2\}$ é um isomorfismo.

Como L_b é invertível, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma função h_t , definida em uma vizinhança de a_0 , tal que $E(h_t(a), a, 0, 0, t) = 0$, e

$$Dh_t(a_0) = \left(\frac{\partial E}{\partial B}(h_t(a_0), a_0, 0, 0, t) \right)^{-1} \circ \left(\frac{\partial E}{\partial A}(h_t(a_0), a_0, 0, 0, t) \right).$$

Então,

$$Dh_t(a_0) = L_b^{-1} \circ R_t \circ L_a.$$

Definimos $g : B_{a_0} \times I_\delta \rightarrow \mathbb{T}^1$ por:

$$\begin{aligned} g(a, t) &= D\psi_p^{-1}(a)_* \tilde{g}_{q(f \circ \phi_t), f \circ \phi_t}(\psi_p(a)) \\ &= D\psi_p^{-1}(a)_* Dh_{t*}(\tilde{v}^s(\psi_p(a))) \\ &= \frac{Dh_t(a)(v^s(a))}{\|Dh_t(a)(v^s(a))\|}, \end{aligned}$$

onde $D\psi_p^{-1}(a)_*$ é o difeomorfismo induzido por $D\psi_p^{-1}(a)$ nos fibrados tangentes unitários e $v^s(a) = D\psi_p^{-1}(a)(\tilde{v}^s(\psi_p(a)))$. Em outras palavras, $g(\cdot, t)$ é de fato a aplicação $\tilde{g}_{q(f \circ \phi_t, f \circ \phi_t)}$ vista na carta ψ_p que identifica $W^c(p)$ com $\mathbb{T}^2$ e os espaços tangentes unitários com $\mathbb{T}^1$.

Para provar a equação desejada, é suficiente mostrar que:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} g(a, t) \right|_{(a, t) = (a_0, 0)} \neq 0,$$

o que, por sua vez, é equivalente a mostrar que $Dh_0(a_0)(v^s(a_0))$ e $\left. \frac{\partial}{\partial t} Dh_t(a_0)(v^s(a_0)) \right|_{t=0}$ não são colineares. Isso porque, sendo g uma função direção – um vetor tangente unitário

–, então sua derivada é zero se, e somente se, a direção não mudar com t em $t = 0$. Logo, se $Dh_0(a_0)(v^s(a_0))$ e $\frac{\partial}{\partial t}Dh_t(a_0)(v^s(a_0))\big|_{t=0}$ não são colineares, a direção muda e, consequentemente, $\frac{\partial}{\partial t}g(a, t)\big|_{(a,t)=(a_0,0)} \neq 0$.

Usando a fórmula para $Dh_t(a_0)$, temos:

$$Dh_0(a_0)(v^s(a_0)) = L_b^{-1} \circ L_a(v^s(a_0)),$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}Dh_t(a_0)(v^s(a_0))\bigg|_{t=0} = L_b^{-1} \circ R_{\pi/2} \circ L_a(v^s(a_0)),$$

não cabendo por R_t na primeira equação porque estamos considerando $t = 0$, e pondo $R_{\pi/2}$ na segunda, visto que o processo feito é distinto: o que na equação anterior se tratava de uma substituição de t por 0, aqui é uma restrição da imagem aos valores obtidos em $t = 0$. Sendo

$$R_t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}R_t = \begin{bmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}R_t|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

que é a matriz de rotação $\frac{\pi}{2}$.

Os dois $(Dh_0(a_0)(v^s(a_0)))$ e $\frac{\partial}{\partial t}Dh_t(a_0)(v^s(a_0))\big|_{t=0}$ são claramente não colineares, pois L_a e L_b são isomorfismos (o que faz com que preservem a colinearidade e independência linear), e $v^s(a_0)$ é não-nulo (e sendo L_a isomorfismo, não anula vetores diferentes de zero). Isso conclui a prova da parte (2). $\square$

Prova da Proposição 4.1.4 Seja $f \in \text{SH}_b^r$. Precisamos encontrar aplicações em $\mathcal{U}_s^r$ arbitrariamente C^r -próximas de f . Como as aplicações C^∞ são densas nas aplicações C^r na topologia C^r (mesmo dentro da classe de volume preservado. Esta relação de densidade é provada em Lima (2007) [32]), podemos supor que f é C^∞ .

Escolhemos pontos homoclínicos q_1, q_2, q_3 da folha $\mathcal{F}^c(p)$ tal que as órbitas das folhas homoclínicas $\mathcal{F}^c(q_i)$ são mutuamente disjuntas, $i \in \{1, 2, 3\}$.

Para cada $x \in \mathcal{F}^c(p)$ e para todo $1 \leq i \leq 3$, existe $r_{x,i} > 0$ tal que, se $y_i := h_{p,q_i}^u(x) \in \mathcal{F}^c(q_i)$, então a bola $B(y_i, r_{x,i})$ é disjunta de $\mathcal{F}^c(p)$, de todas as iteradas

$f^k(\mathcal{F}^c(q_i))$ para todo $k \neq 0$, e de todas as iteradas de $\mathcal{F}^c(q_j)$, $j \neq i$. Aplicando a parte (2) do Lema 3.6, obtemos uma família de perturbações $\phi_{t,x,i}$ tal que a derivada de $\tilde{g}_{q_i, f \circ \phi_{t,x,i}}$ em relação a t , no ponto $(x, 0)$, não se anula. Pela continuidade da derivada, existe uma vizinhança $U_{x,i}$ de x tal que $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}_{q_i, f \circ \phi_{t,x,i}} \neq 0$ em $U_{x,i} \times \{0\}$.

Seja $U_x = \bigcap_{i=1}^3 U_{x,i}$. Pela compacidade de $\mathcal{F}^c(p)$, existem finitos pontos $x_1, x_2, \dots, x_K \in \mathcal{F}^c(p)$ tais que $\mathcal{F}^c(p) = \bigcup_{j=1}^K U_{x_j}$.

Fixemos notações. Denotemos:

$$T = (t_i^j)_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq K} = (T_i)_{1 \leq i \leq 3} = (T^j)_{1 \leq j \leq K} \in I^{3K} := [-\delta, \delta]^{3K},$$

com $T_i = (t_i^j)_{1 \leq j \leq K} \in I^K$, $i \in \{1, 2, 3\}$, e $T^j = (t_i^j)_{1 \leq i \leq 3} \in I^3$, $j \in \{1, 2, \dots, K\}$.

Para cada $1 \leq i \leq 3$, definimos $\phi_i : \mathbb{T}^4 \times I^K \rightarrow \mathbb{T}^4$ dada por:

$$\phi_i(\cdot, T_i) = \phi_{t_i^1, x_1, i} \circ \phi_{t_i^2, x_2, i} \circ \dots \circ \phi_{t_i^K, x_K, i}, \quad \text{para todo } T_i \in I^K.$$

Definimos $\phi, F : \mathbb{T}^4 \times I^{3K} \rightarrow \mathbb{T}^4$ por:

$$\phi(\cdot, T) = \phi_T(\cdot) := \phi_1(\cdot, T_1) \circ \phi_2(\cdot, T_2) \circ \phi_3(\cdot, T_3),$$

$$F(\cdot, T) = f_T(\cdot) := f \circ \phi_T.$$

As aplicações ϕ_i , ϕ , e F têm as seguintes propriedades:

1. ϕ_i , ϕ , e F são C^∞ em (x, T) ;
2. ϕ_i é uma pequena perturbação da identidade numa vizinhança de $\mathcal{F}^c(q_i)$; em particular, ela deixa as outras órbitas homoclínicas $\mathcal{F}^c(q_j)$, $j \neq i$, inalteradas;
3. f_T é igual a f numa vizinhança de $\mathcal{F}^c(p)$, então não altera $\mathcal{F}^c(p)$ nem o campo $\tilde{v}^s$.

Seja $V_j = \psi_p^{-1}(U_{x_j})$, onde $\psi_p : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{F}^c(p)$ é a imersão C^2 . Para cada $1 \leq i \leq 3$, definimos $g_i : \mathbb{T}^2 \times I^{3K} \rightarrow \mathbb{T}^1$ por:

$$g_i(x, T) = D\psi_p^{-1}(x)_* \tilde{g}_{q_i, f_T}(\psi_p(x)).$$

Ou seja, $g_i(\cdot, T)$ é a aplicação $\tilde{g}_{q_i, f_T}$ vista na carta ψ_p que identifica $\mathcal{F}^c(p)$ com $\mathbb{T}^2$ e os espaços tangentes unitários com $\mathbb{T}^1$, uma vez que $D\psi_p^{-1}(x)_*$ é um difeomorfismo induzido por $D\psi_p^{-1}(x)$ nos fibrados tangentes unitários e $\tilde{g}$ é unitário pela sua própria

definição. O Lema 4.1.6 (parte 1) nos garante que g_i é C^1 em $(x, T) \in \mathbb{T}^2 \times I^{3K}$. Além disso,

$$\frac{\partial g_i}{\partial t_i^j}(x, T) \neq 0 \quad \text{para todo } (x, T) \in V_j \times \{0\}^{3K}, \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq K. \quad (4.1)$$

No entanto, como para $l \neq i$, a perturbação ϕ_l não toca a órbita de $\mathcal{F}^c(q_i)$ (o que é expresso no início desta prova), temos:

$$\frac{\partial g_i}{\partial t_l^j}(x, T) = 0 \quad \text{para todo } (x, T), \text{ para todo } l \neq i, \text{ e todo } 1 \leq j \leq K. \quad (4.2)$$

A derivada é nula justamente porque é obtida em relação a t_l^i , que não toca a órbita de $\mathcal{F}^c(q_i)$.

Definimos $G : \mathbb{T}^2 \times I^{3K} \rightarrow \mathbb{T}^3$ por

$$G(x, T) = (g_1(x, T), g_2(x, T), g_3(x, T)). \quad (4.3)$$

Novamente, G é C^1 em $(x, T) \in \mathbb{T}^2 \times I^{3K}$, uma vez que cada g_i é C^1 . As equações 4.1 e 4.2 nos dizem que, para todo $1 \leq j \leq K$, temos:

$$\det \left(\frac{\partial G}{\partial T^j}(x, T) \right) = \det \left(\frac{\partial g_i}{\partial t_i^j}(x, T) \right) = \prod_{i=1}^3 \frac{\partial g_i}{\partial t_i^j}(x, T). \quad (4.4)$$

Pela compacidade de $\overline{V^j}$ e pela continuidade C^1 de G com respeito a T , existe $J \subset I$ com $0 \in J$, tal que, para todo $1 \leq j \leq K$, temos

$$\det \left(\frac{\partial G}{\partial T^j}(x, T) \right) \neq 0 \quad \text{para todo } (x, T) \in V^j \times J^{3K}.$$

E, como todo ponto de $\mathbb{T}^2$ está contido em algum V^j , podemos tomar um ponto arbitrário $(x, T) \in \mathbb{T}^2 \times J^{3K}$, e existirá algum índice j com $v \in V_j$. Em V_j , como vimos, $\det \left(\frac{\partial G}{\partial T^j}(x, T) \right) \neq 0$, o que garante que os três vetores coluna correspondentes (as derivadas de G em relação às três componentes de T^d) são linearmente independentes. Assim, G tem posto, no mínimo, 3. Mas a imagem de G é $\mathbb{T}^3$, de dimensão 3, o que faz de 3 posto máximo. Dessa forma, concluímos que G tem posto máximo em todo ponto de $\mathbb{T}^2 \times J^{3K}$.

Temos que $v^s : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^1$ é a aplicação C^1 dada por $v^s(x) = D\psi_p^{-1}(x)_* \tilde{v}^s(\psi(x))$.

Seja

$$A := \left\{ (x, T) \in \mathbb{T}^2 \times J^{3K} : G(x, T) \in \{-v^s(x), v^s(x)\}^3 \right\}, \quad B = \pi_2(A),$$

onde π_2 é a projeção de $\mathbb{T}^2 \times J^{3K}$ na componente $T \in J^{3K}$.

Em consequência do que foi visto acima, se $T \notin B$, então, por definição da projeção $B = \pi(A)$, o vetor $G(x, T) = (g_1(x, T), g_2(x, T), g_3(x, T))$ não pertence ao conjunto $\{\pm v^s(x)\}^3$. Isso significa que, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, temos $g_i(x, T) \neq \pm v^s(x)$, isto é, os vetores $g_i(x, T)$ não são colineares com $v^s(x)$. Como $v^s(x) = D\psi_p^{-1}(x)_* \tilde{v}^s(\psi(x))$ e $g_i(x, T) = D\psi_p^{-1}(x)_* \tilde{g}_{q_i, f_T}(\psi_p(x))$, então $\tilde{g}_{q_i, f_T}(\psi(x)) \neq \tilde{v}^s(\psi(x))$, para $i \in \{1, 2, 3\}$. Isso mostra que, para cada x , os vetores $\tilde{g}_{q_i, f_T}(\psi(x))$ não são colineares com $\tilde{v}^s(\psi(x))$, o que, pela definição, implica que $f_T \in \mathcal{U}_s^r$.

Para finalizar a prova da densidade de $\mathcal{U}_s^r$, precisamos encontrar T arbitrariamente próximo de 0^{NK} tal que $T \notin B$. Provaremos que B tem medida de Lebesgue zero em J^{3K} .

É suficiente mostrar isso para $B_1 = \pi_2(A_1)$, sendo o termo A_1 definido por $A_1 = \{(x, T) \in \mathbb{T}^2 \times J^{3K} : G(x, T) = v^s(x)^3\}$, e as outras combinações de $\pm v^s$ trabalham similarmente. Seja $H(x, T) = G(x, T) - v^s(x)^3$ uma aplicação C^1 de $\mathbb{T}^2 \times J^{3K}$ em $\mathbb{T}^3$. A equação 4.4 diz que H tem posto máximo igual a 3 em todo ponto (v^s é independente de T), então $H^{-1}(0^3)$ é uma subvariedade C^1 de codimensão 3 (ou dimensão $3K - 1$) dentro de $\mathbb{T}^2 \times J^{3K}$. Sendo $\pi_2|_{H^{-1}(0^3)} : H^{-1}(0^3) \rightarrow J^{3K}$ uma aplicação C^1 , o Teorema de Sard diz que a imagem B_1 tem medida de Lebesgue zero, pois sua derivada não tem posto máximo.

Isso implica que podemos encontrar um T arbitrariamente pequeno, e finalizamos a prova da densidade C^r de $\mathcal{U}_s^r$. A prova para $\mathcal{U}_u^r$ é idêntica, e então $\mathcal{U}^r = \mathcal{U}_s^r \cap \mathcal{U}_u^r$ é C^r -denso.

4.1.3 Prova da Proposição 4.1.5

A proposição 4.1.5 afirma que, sendo $f \in \mathcal{U}^r$, então quaisquer pontos periódicos hiperbólicos de índice 2 de f são homoclinicamente relacionados.

Demonstração. Observemos primeiro que, por conta da transitividade da relação homoclínica – expressa na Observação 3.2.18, que afirma que a relação em questão é de equivalência –, é suficiente mostrar que todo ponto periódico hiperbólico de índice 2 de $f \in \mathcal{U}^r$ é homoclinicamente relacionado ao ponto fixo p da folha hiperbólica fixa $\mathcal{F}^c(p)$. Isso porque, sendo todos os pontos relacionados a um único ponto fixo, por transitividade, serão necessariamente relacionados entre si.

Seja x um ponto hiperbólico de $f \in \mathcal{U}^r$ de índice 2. Seja $\tilde{v}^u(x)$ um vetor unitário tangente para a direção instável fraca dentro de $T_x \mathcal{F}(x)$. A variedade instável forte $\mathcal{F}^u(x)$ deve acumular-se na folha fixa hiperbólica $\mathcal{F}^c(p)$, pois sendo p um ponto fixo, a variedade instável estando em processo de afastamento do ponto hiperbólico x , e sendo o sistema transitivo (possui órbitas densas no espaço), então a variedade vai, inevitavelmente, chegar perto de $\mathcal{F}^c(p)$. Então, existe uma sequência de pontos homoclínicos

$p_n \in \mathcal{F}^u(x) \cap \mathcal{F}_{loc}^s(\mathcal{F}^c(p))$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p_0 \in \mathcal{F}^c(p)$, resultado devido ao acúmulo anteriormente exposto.

Se para algum p_n temos que $Dh_{x,p_n}^u(\tilde{v}^u(x)) \neq \pm Dh_{p,p_n}^s(\tilde{v}^s(h_{p,p_n}^{s^{-1}}(p_n)))$, então a variedade instável bidimensional de x , $W^u(x)$, intersecta $\mathcal{F}^c(p_n)$ em uma curva C^1 localmente transversa à folheação estável fraca dentro de $\mathcal{F}^c(p_n)$ (a qual é, então, empurrada pela holonomia estável na folheação estável fraca em $\mathcal{F}^c(p)$), pois as direções transportadas pelas holonomias estável e instável são distintas.

Temos que a variedade estável global bidimensional de p , $W^s(p)$, é densa dentro da folheação estável fraca de $\mathcal{F}^c(p_n)$. Isso porque, sendo $W^s(p)$ o conjunto dos pontos que se aproximam de p via iteradas futuras, e como $\mathcal{F}^c(p_n)$ está se aproximando de $\mathcal{F}^c(p)$, então $W^s(p)$ – que preenche densamente a estrutura estável fraca dentro de $\mathcal{F}^c(p)$, visto que o sistema é transitivo – passa arbitrariamente perto de pontos de $\mathcal{F}^c(p_n)$, e sua interseção ocorre de forma densa nessa interseção. Assim, obtemos uma intersecção homoclínica transversal de x a p , pois as variedades estável e instável dos pontos se intersectam transversalmente.

Suponha que $W^u(x) \cap W^s(p) = \emptyset$. O argumento acima implica que

$$Dh_{x,p_n}^u(\tilde{v}^u) = \pm Dh_{p,p_n}^s(\tilde{v}^s(h_{p,p_n}^{s^{-1}}(p_n))), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

pois se os dois termos forem distintos para algum $n \in \mathbb{N}$, então $W^u(x)$ intersecta $\mathcal{F}^c(p_n)$ em uma curva C^1 localmente transversa à folheação estável fraca dentro de $\mathcal{F}^c(p_n)$, na qual $W^s(p)$ é densa, contrariando $W^u(p) \cap W^s(p) = \emptyset$.

Sendo $f \in \mathcal{U}^r$, existe um ponto homoclínico q de $\mathcal{F}^c(p)$ tal que $\tilde{g}_q(p_0) \neq \pm \tilde{v}^s(p_0) \in T^1 \mathcal{F}^c(p)$. Seja $q_0 := h_{p,q}^u(p_0)$, considere a holonomia instável forte $h_{loc}^u : \mathcal{F}_{loc}^{cs}(p_0) \rightarrow \mathcal{F}_{loc}^{cs}(q_0)$, e seja $q_n := h_{p,q_n}^u(p_n) \in \mathcal{F}_{loc}^{cs}(q_0)$. Então, por termos $p_0 \rightarrow p_n$, q_0 e q_n sendo imagens, respectivamente, de p_0 e p_n obtidas através de holonomias, e sendo a holonomia instável uma aplicação contínua, temos que $q_n \rightarrow q_0$. A ausência de relações homoclínicas entre x e p implica também em

$$Dh_{x,q_n}^u(\tilde{v}^u) = \pm Dh_{p,q_n}^s(\tilde{v}^s(h_{p,q_n}^{s^{-1}}(q_n))), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

porque sendo q_n resultado de uma holonomia aplicada a p_n , a substituição pode ser feita, uma vez que não há relação entre x e p . Sendo $h_{x,q_n}^u = h_{p_n,q_n}^u \circ h_{x,p_n}^u$, obtemos que

$$Dh_{p,q_n}^s(\tilde{v}^s(h_{p,q_n}^{s^{-1}}(q_n))) = \pm Dh_{p_n,q_n}^u \circ Dh_{p,p_n}^s(\tilde{v}^s(h_{p,p_n}^{s^{-1}}(p_0))).$$

Usando a continuidade de $\tilde{v}^s$ (o qual é de classe C^1 , conforme visto no tópico 3.2.3) e de $Dh^{s,u}$ (como as holonomias são de classe C^2 , suas derivadas são de classe C^1),

podemos tomar o limite e obtemos que

$$Dh_{p,q*}^s(\tilde{v}^s(h_{p,q}^{s^{-1}}(q_0))) = \pm Dh_{p,q*}^u(\tilde{v}^s(p_0)),$$

ou $\tilde{g}_q(p_0) = \pm \tilde{v}^s(p_0)$, o que é uma contradição pois, pela definição de $\mathcal{U}^r$ temos que, se f pertence ao conjunto, e sendo $p_0 \in \mathcal{F}^c(p)$, deve existir q homoclínico a $\mathcal{F}^c(p)$ tal que $\tilde{g}_q(p_0) \neq \pm \tilde{v}^s(p_0)$. Dessa forma, não pode haver $W^u(x) \cap W^s(p) = \emptyset$, sendo, portanto, x e p homoclinicamente relacionados.

A prova da interseção da variedade estável global de x com a variedade instável de p é similar. Isso conclui a prova.

□

Com a prova desta proposição, conclui-se a demonstração do Teorema A.

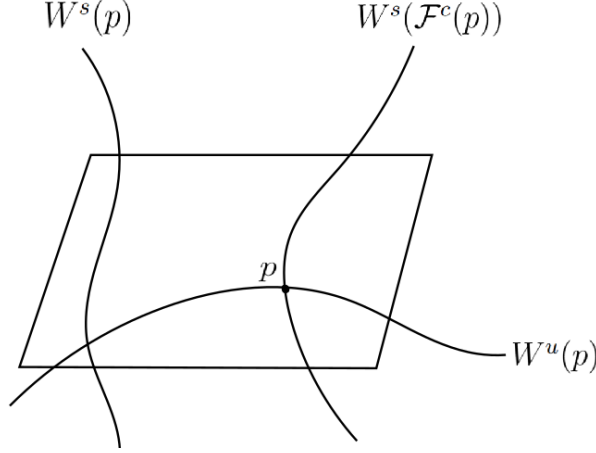
4.2 Prova do Corolário B

Esta seção fornece a demonstração do corolário B (3.2.11), apresentado e contextualizado nos primeiros capítulos do presente trabalho. O corolário afirma que, para $f \in \mathcal{U}^r$, f admite uma única classe homoclínica $H(p_f, f)$ associada aos pontos periódicos hiperbólicos de índice 2, e a classe homoclínica coincide com a variedade ambiente. Vejamos que isto vale.

Demonstração. Se existe uma única classe homoclínica associada aos pontos periódicos hiperbólicos de índice 2, isso significa que todos esses pontos são homoclinicamente relacionados. Temos que p_f e todos os pontos da classe homoclínica são periódicos hiperbólicos de índice 2.

Devemos mostrar que, para qualquer $f \in \mathcal{U}^r$, as interseções homoclínicas transversais das variedades invariantes dos pontos hiperbólicos fixos p_f são densas em $\mathbb{T}^4$. Isso porque, se as interseções são densas em $\mathbb{T}^4$, todos os pontos periódicos hiperbólicos de índice 2 são homoclinicamente relacionados e suas órbitas são espalhadas densamente pelo espaço, e sendo a classe homoclínica o fecho dos pontos homoclinicamente relacionados, ela coincidirá, portanto, com a variedade ambiente, o toro $\mathbb{T}^4$. A prova usa as mesmas ideias da última proposição do Teorema A.

Figura 8 – Variedades estável e instável em um ponto fixo



Fonte: A autora

Seja $f \in \mathcal{U}^r$, e p o ponto fixo de f (para simplificar, vamos eliminar o índice f nos argumentos seguintes). Seja U um conjunto aberto em $\mathbb{T}^4$. Seja $W^u(p) \cap W^s(\mathcal{F}^c(p))$ denso em $\mathbb{T}^4$ – já que ambas as variedades percorrem o toro $\mathbb{T}^4$. Escolha $x \in W^u(p) \cap W^s(\mathcal{F}^c(p))$ tal que $B(x, \delta) \subset U$ para algum $\delta > 0$. Se $Dh_{p,x*}^s(\tilde{v}^s(h_{x,p}^s(x))) \notin T_x W^u(p)$, então claramente há uma interseção homoclínica transversal entre $W^s(p)$ e $W^u(p)$ arbitrariamente perto de x . Isso porque se o vetor não pertence a $T_x W^u(p)$, a direção estável fraca transportada até x não está contida na direção da variedade instável naquele ponto e, assim, existe um ângulo não nulo entre as duas direções em x .

Suponha que $Dh_{p,x*}^s(\tilde{v}^s(h_{x,p}^s(x))) \in T_x W^u(p)$. Então existe uma subsequência $n_k \rightarrow \infty$ e $(p_0, v_0) \in T^1 \mathcal{F}^c(p)$ tais que $Df_*^{n_k}(x, v) \rightarrow (p_0, \tilde{v}^s(p_0))$. Existe um ponto homoclínico q de $\mathcal{F}^c(p)$ tal que $\tilde{g}_q(p_0) \neq \pm \tilde{v}^s(p_0) \in T^1 \mathcal{F}^c(p)$, uma vez que $f \in \mathcal{U}^r$. Consideramos novamente a holonomia forte instável $h_{loc}^u : \mathcal{F}_{loc}^{cs}(p_0) \rightarrow \mathcal{F}_{loc}^{cs}(p_0)$, e seja $q_k := h_{loc}^u(f^{n_k}(x)) \in \mathcal{F}_{loc}^{cs}(q_0)$, onde $q_0 := h_{p,q}^u(p_0)$. Temos que, da prova da proposição 4.1.3,

$$Dh_{p,q*}^s(\tilde{v}^s(h_{p,q}^{s^{-1}}(q_0))) \neq Dh_{p,q*}^u(\tilde{v}^s(p_0)),$$

e, por continuidade, para todo k suficientemente grande (de forma que, como $q_n \rightarrow q_0$ conforme $n \rightarrow \infty$, q_k esteja próximo de q_0), temos

$$Dh_{p,q*}^s(\tilde{v}^s(h_{p,q_k}^{s^{-1}}(q_k))) \neq \pm Dh_{f^{n_k}(x),q_k*}^u(\tilde{v}^s(f^{n_k}(x))).$$

Iterando por f^{-n_k} e denotando $f^{-n_k}(q_k) = x_k \rightarrow x$, obtemos

$$Dh_{p,x_k*}^s(\tilde{v}^s(h_{p,x_k}^{s^{-1}}(x_k))) \neq \pm Dh_{x,x_k*}^u(\tilde{v}^s(x)).$$

Faremos uso do seguinte lema na prova:

Lema 4.2.1. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico de classe C^r . Considere $\mathcal{F}^u$ a folheação instável forte, $\mathcal{F}^c$ a folheação central, $W^u(p)$ a variedade instável do ponto fixo hiperbólico p e $h_{x,y}^u : \mathcal{F}^c(x) \rightarrow \mathcal{F}^c(y)$ a holonomia instável forte entre as folhas centrais, definida ao longo da folha $\mathcal{F}^u(x)$ e levando x em $\mathcal{F}^u(x) \cap W^u(p)$.*

Então, para todo $x \in W^u(p)$ e todo $y \in \mathcal{F}^u(x) \cap W^u(p)$, tem-se

$$Dh_{x,y*}^u(T_x W^u(p)) \subset T_y W^u(p).$$

Demonstração. Como $y \in \mathcal{F}^u(x)$, existe uma curva regular $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}^u(x) \subset W^u(p)$ tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Como $\gamma(t) \subset W^u(p)$, então $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)} W^u(p)$ para todo $t \in [0, 1]$. A holonomia instável $h_{x,y}^u$ é construída ao longo da curva γ , e leva pontos de $\mathcal{F}^c(x) \cap W^u(p)$ em pontos de $\mathcal{F}^c(y) \cap W^u(p)$. Como a aplicação $h_{x,y}^u$ é diferenciável, sua derivada leva vetores tangentes a $W^u(p)$ em vetores tangentes a $W^u(p)$. Logo,

$$Dh_{x,y*}^u(v) \in T_y W^u(p), \text{ para todo } v \in T_x W^u(p),$$

isto é,

$$Dh_{x,y*}^u(T_x W^u(p)) \subset T_y W^u(p).$$

□

Como Dh^u preserva $TW^u(p)$ (resultado obtido no lema anterior), obtemos que $Dh_{p,x_k*}^s(\tilde{v}^s(h_{x_k,p}^s(x_k))) \notin T_{x_k} W^u(x)$, com $x_k \in W^u(p) \cap W^s(\mathcal{F}^c(p))$, e isso implica novamente que, arbitrariamente perto de x_k – e, portanto, perto de x – existe uma intersecção homoclínica transversal entre $W^s(p)$ e $W^u(p)$. Isso encerra a prova. □

4.3 Prova do Teorema C

Nesta seção, veremos a prova proposta para o Teorema C (3.2.14), que afirma que, para qualquer $f \in \mathcal{U}^r$, todas as medidas ergódicas hiperbólicas de índice 2 são homoclinicamente relacionadas. Além disso, sendo $\phi : \mathbb{T}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função potencial de Holder com $\max_{x,y \in \mathbb{T}^4} \|\phi(x) - \phi(y)\| < \log \lambda_B$, onde $f \in PH_{A,B}^0$, então f admite no máximo um estado de equilíbrio para o potencial ϕ . Em particular, todo $f \in \mathcal{U}^r$ admite no máximo uma medida de máxima entropia.

Demonstração. Lembre-se que $\phi : \mathbb{T}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é um potencial de Holder satisfazendo $\max \|\phi(x) - \phi(y)\| = \sup \phi - \inf \phi < \log \lambda_B$. Para simplificar, podemos assumir que $\inf \phi > 0$ e que o valor de $\sup \phi$ não ultrapassa o de $\log \lambda_B$, ou seja,

$$0 < \inf \phi \leq \sup \phi \leq \log \lambda_B. \quad (4.5)$$

Podemos assumir que essa desigualdade é verdadeira porque somar ou subtrair uma constante ao potencial ϕ não altera as medidas de equilíbrio, apenas desloca o valor da pressão topológica.

Primeiramente, pelo princípio variacional, existe uma sequência de medidas ergódicas μ_n de f tal que

$$\limsup h_{\mu_n} = h_{top}(f) \geq \log \lambda_A + \log \lambda_B,$$

sendo a última desigualdade vinda da equação 3.12.

Então, temos que

$$\limsup h_{\mu_n} = h_{top}(f) \geq h_{top}(f_{A,B}) = \log \lambda_A + \log \lambda_B. \quad (4.6)$$

Novamente, pelo princípio variacional, a pressão da função ϕ é

$$P_{top}(\phi) \geq \limsup (h_{\mu_n} + \int \phi d\mu_n) \geq \limsup h_{\mu_n} \geq \log \lambda_A + \log \lambda_B. \quad (4.7)$$

Isso se dá pelo seguinte:

- 1ª desigualdade: Pelo Teorema Variacional de Kolmogorov Sinai, $h_{top}(f) = \sup_{\mu \in M(f)} h_{\mu}(f)$, para um sistema dinâmico (X, f) . Então

$$\begin{aligned} h_{top}(f) &= \sup_{\mu \in M(f)} h_{\mu}(f) \\ h_{top}(f) + \sup \int \phi d\mu &= \sup h_{\mu}(f) + \sup \int \phi d\mu \\ h_{top}(f) + \sup \int \phi d\mu &= P_{top}(\phi). \end{aligned}$$

Sendo $\sup \int \phi d\mu \geq \sup \int \phi d\mu_n$, e como $h_{top}(f) = \limsup h_{\mu_n}$,

$$P_{top}(\phi) \geq \limsup \left\{ h_{\mu_n} + \int \phi d\mu_n \right\}.$$

- 2ª desigualdade: Decorre do fato de que assumimos $\phi > 0$ na Equação 4.5.
- 3ª desigualdade: É a desigualdade obtida em 4.6.

Então, para toda medida ergódica μ com pressão suficientemente grande, ou seja,

$$h_\mu + \int \phi d\mu > P_{top}(\phi) + \left(\int \phi d\mu - \log \lambda_B \right), \quad (4.8)$$

(a qual está suficientemente próxima do supremo, $P_{top}(\phi)$), temos

$$\begin{aligned} h_\mu + \int \phi d\mu &> P_{top}(\phi) + \left(\int \phi d\mu - \log \lambda_B \right) \\ h_\mu + \int \phi d\mu - \int \phi d\mu + \log \lambda_B &> P_{top}(\phi) \end{aligned}$$

Por 4.7,

$$\begin{aligned} h_\mu + \log \lambda_B &> P_{top}(\phi) \geq \log \lambda_A + \log \lambda_B \\ h_\mu &> P_{top}(\phi) - \log \lambda_B \geq \log \lambda_A. \end{aligned}$$

Como consequência do Lema 3.2.27, μ é uma medida hiperbólica com índice estável 2.

Pelo Lema 3.2.22, μ é homoclinicamente relacionada à medida atômica suportada em um ponto periódico O .

Sendo $f \in \mathcal{U}$, pelo Teorema A (3.2.10), todas as órbitas periódicas hiperbólicas com índice estável 2 são homoclinicamente relacionadas, e como consequência do Lema 3.2.13, todas as medidas ergódicas hiperbólicas com índice estável 2 são homoclinicamente relacionadas. Em particular, todas as medidas ergódicas satisfazendo a Equação 4.8 são homoclinicamente relacionadas. Então, todos os estados de equilíbrio para o potencial de Holder ϕ são homoclinicamente relacionados, se existirem. Pela Proposição 3.2.24, existe no máximo um estado de equilíbrio.

Sendo a máxima entropia um caso particular de estado de equilíbrio para o qual $\phi \equiv 0$, se existe no máximo um estado de equilíbrio, existe no máximo uma medida de máxima entropia.

□

4.4 Prova do Corolário D

Vejamos novamente o enunciado do Corolário D.

Corolário 4.4.1. *Todo $f \in \mathcal{U}^\infty \cap PH_{A,B}^0$ admite um único estado de equilíbrio para todo potencial de Holder satisfazendo $\max_{x,y \in \mathbb{T}^4} \|\phi(x) - \phi(y)\| < \log \lambda_B$. Em particular, todo $f \in \mathcal{U}^\infty$ admite uma única medida de máxima entropia.*

Demonstração. O teorema C garante que todo $f \in \mathcal{U}^r$ admite no máximo um estado de equilíbrio para o potencial de Holder que satisfaz $\max_{x,y \in \mathbb{T}^4} \|\phi(x) - \phi(y)\| < \log \lambda_B$. Estando todo $f \in \mathcal{U}^\infty$ dentro de $\mathcal{U}^r$ também, uma vez que toda aplicação diferenciável C^∞ é também diferenciável de classe C^r , $r \geq 0$, obtemos que isso vale, em particular, para $f \in \mathcal{U}^\infty$. Vejamos que, para $f \in \mathcal{U}^\infty \cap PH_{A,B}^0$, existem necessariamente um estado de equilíbrio e uma medida de máxima entropia.

Buzzi (1997) [9] mostra que aplicações C^∞ têm as mesmas propriedades de ergodicidade intrínseca que as aplicações monotônicas por partes, isto é, há uma medida de entropia máxima e ela é única. Uma aplicação monotônica por partes em um intervalo é (de acordo com Hofbauer (2005) [23]) uma transformação que admite uma partição finita do domínio em subintervalos nos quais a função é estritamente monótona (crescente ou decrescente). Em cada "pedaço", f é contínua e monótona, embora possa haver descontinuidade nos pontos de fronteira. Segundo Hofbauer (1979) [22], essas transformações possuem apenas uma medida de máxima entropia. Então também existirá um estado de equilíbrio que, pelo teorema C, é único. $\square$

5 Considerações finais

O exemplo de Shub, de 1971, é um exemplo clássico de difeomorfismo transitivo e não uniformemente hiperbólico. Pelo fato de o exemplo apresentar distribuição central bidimensional, o estudo da medida de máxima entropia possui uma análise mais complexa que nos casos unidimensionais. A pesquisa envolve a compreensão da estrutura de classes homoclínicas em sistemas não uniformemente hiperbólicos, além do entendimento acerca de medidas de máxima entropia.

A prova construída por Liang et al. (2024) [30] trata da existência de um conjunto aberto e denso (na topologia C^r) de difeomorfismos para os quais todos os pontos periódicos hiperbólicos de índice 2 são homoclinicamente relacionados. Prova também que, como consequência, existe uma única classe homoclínica associada aos pontos periódicos de índice 2. Por último, prova a unicidade ou finitude de medidas de máxima entropia para essa classe de sistemas em função de condições de Holder sobre o potencial, incluindo, além do caso C^r , o C^∞ .

Como visto nos resultados deste trabalho, outras possibilidades foram estudadas dentro do exemplo de Shub: a suposição extra de que na folheação central existe uma subfolheação invariante unidimensional foi acrescentada nos estudos de Newhouse e Young (1983) [36] e de Carvalho e Pérez (2021) [14]. Em Álvarez (2023) [2], foi feita a suposição de que o espaço central admite uma decomposição dominada. O trabalho de Crovisier, Obata e Poletti (2023) [16] e o de Obata (2023) [37] trabalham com outros difeomorfismos parcialmente hiperbólicos em $\mathbb{T}^4$, e fornecem alguns resultados na unicidade de u-Gibbs.

Foram encontrados dois artigos que mencionam o trabalho de Liang et al. (2024) [30]: Saghin (2025) [48] prova, entre outras coisas, que para difeomorfismos dinamicamente coerentes e que satisfazem uma condição chamada θ -bunching, as holonomias estáveis e instáveis entre as folhas centrais são de classe C^1 e suas derivadas dependem continuamente dos pontos e na aplicação; Mongez e Pacifico (2024) [35] provaram que difeomorfismos parcialmente hiperbólicos com uma direção central unidimensional tal que as entropias estável e instável são diferentes têm um número finito de medidas ergódicas de máxima entropia.

O trabalho de Liang et al. dialoga com diversas áreas, e sua construção demanda conhecimento acerca de variedades diferenciáveis, teoria da medida, teoria das folheações, entre outros campos de estudo. A partir dele, abrem-se diferentes possibilidades de pesquisa, "afrouxando" hipóteses, trabalhando com outros exemplos de difeomorfismos robustamente transitivos e não uniformemente hiperbólicos, ou ainda investigando outros tipos de medidas invariantes.

Quanto às aplicações práticas do estudo de sistemas parcialmente hiperbólicos, destacam-se as áreas de processamentos de sinais, criptografia e segurança da informação, além do estudo de fenômenos físicos caóticos. O trabalho de Redaud e Sano (2024) [46], por exemplo, aplica dinâmica caótica hiperbólica para criptografia.

Referências

- [1] AGUIRRE, Julián Lázaro. **Sistemas quase-Anosov**. 2018. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG. Orientador: Jean Venato Santos. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.181>>.
- [2] ÁLVAREZ, Carlos F. Hyperbolicity of maximal entropy measures for certain maps isotopic to Anosov diffeomorphisms. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Elsevier, v. 528, n. 1, p. 127531, 2023.
- [3] BACKES, Lucas; BARAVIERA, Alexandre Tavares; BRANCO, Flávia Malta. **Uma introdução aos sistemas dinâmicos via exemplos**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2023.
- [4] BONATTI, Christian; DÍAZ, Lorenzo J; VIANA, Marcelo. **Dynamics beyond uniform hyperbolicity: A global geometric and probabilistic perspective**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2004. v. 3.
- [5] BOWEN, Rufus. Entropy for Group Endomorphisms and Homogeneous Spaces. **Transactions of the American Mathematical Society**, American Mathematical Society, v. 153, p. 401–414, 1971. DOI: [10.2307/1995565](https://doi.org/10.2307/1995565).
- [6] _____. Entropy-expansive maps. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 164, p. 323–331, 1972.
- [7] BROWN, Aaron. Smoothness of stable holonomies inside center-stable manifolds and the C^2 hypothesis in Pugh-Shub and Ledrappier-Young theory. **arXiv preprint arXiv:1608.05886**, 2016.
- [8] BURNS, Keith; WILKINSON, Amie. On the Ergodicity of Partially Hyperbolic Systems. **Annals of Mathematics**, v. 171, n. 1, p. 451–489, 2010. Preprint available as arXiv:math/0510234 (2005). DOI: [10.4007/annals.2010.171.451](https://doi.org/10.4007/annals.2010.171.451).
- [9] BUZZI, Jérôme. Intrinsic ergodicity of smooth interval maps. **Israel Journal of Mathematics**, v. 100, p. 125–161, 1997.
- [10] BUZZI, Jérôme; CROVISIER, Sylvain; SARIG, Omri. Measures of maximal entropy for surface diffeomorphisms. **Annals of Mathematics**, v. 195, n. 2, p. 421–508, mar. 2022. DOI: [10.4007/annals.2022.195.2.2](https://doi.org/10.4007/annals.2022.195.2.2).
- [11] CAMACHO, César; LINS NETO, Alcides. **Teoria Geométrica das Folheações**. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. v. 9, p. 238. (Projeto Euclides). 1ª edição em português.
- [12] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1976.

- [13] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Riemanniana**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2015. 2ª impressão.
- [14] CARVALHO, Maria; PÉREZ, Sebastián A. Periodic points and measures for a class of skew-products. **Israel Journal of Mathematics**, Springer, v. 245, n. 1, p. 455–500, 2021.
- [15] CLIMENHAGA, Vaughn; THOMPSON, Daniel J. Unique equilibrium states for flows and homeomorphisms with non-uniform structure. **Advances in Mathematics**, Elsevier, v. 303, p. 745–799, 2016.
- [16] CROVISIER, Sylvain; OBATA, Davi; POLETTI, Martín. Uniqueness of u-Gibbs measures for hyperbolic skew products on $\mathbb{T}^4$, 2023. Preprint.
- [17] FISHER, Todd; POTRIE, Rafael; SAMBARINO, Martín. Dynamical coherence of partially hyperbolic diffeomorphisms of tori isotopic to Anosov. **Mathematische Zeitschrift**, Springer, v. 278, n. 1, p. 149–168, 2014.
- [18] FOLLAND, Gerald B. **Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications**. 2. ed. New York: Wiley, 1999.
- [19] FRANKS, John. Anosov diffeomorphisms. **Global analysis**, v. 14, p. 61–93, 1970.
- [20] HALMOS, Paul R. **Measure Theory**. New York: Springer-Verlag, 1974. Reimpressão da edição publicada por Van Nostrand, na série: The University Series in Higher Mathematics. (Graduate Texts in Mathematics, v. 18).
- [21] HIRSCH, Morris W.; PUGH, Charles C.; SHUB, Michael. **Invariant Manifolds**. Berlin: Springer-Verlag, 1977. v. 583. (Lecture Notes in Mathematics). DOI: [10.1007/BFb0086173](https://doi.org/10.1007/BFb0086173).
- [22] HOFBAUER, Franz. On intrinsic ergodicity of piecewise monotonic transformations with positive entropy. **Israel Journal of Mathematics**, Springer, v. 34, p. 213–237, 1979.
- [23] _____. The recurrence dimension for piecewise monotonic maps of the interval. **Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze**, v. 4, n. 3, p. 439–449, 2005.
- [24] ISNARD, Carlos. **Introdução à medida e integração**. 2. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2018.
- [25] KATOK, Anatole; HASSELBLATT, Boris. **Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. v. 54. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications).
- [26] LEDRAPPIER, François; STRELCYN, J. M. A proof of the estimation from below in Pesin’s entropy formula. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, Cambridge University Press, v. 2, n. 2, p. 203–219, 1982. DOI: [10.1017/S0143385700009846](https://doi.org/10.1017/S0143385700009846).

- [27] LEDRAPPIER, François; WALTERS, Peter. A relativised variational principle for continuous transformations. **Journal of the London Mathematical Society**, Oxford University Press, v. 2, n. 3, p. 568–576, 1977.
- [28] LEDRAPPIER, François; YOUNG, Lai-Sang. The Metric Entropy of Diffeomorphisms: Part II. Relations Between Entropy, Exponents and Dimension. **Annals of Mathematics**, Princeton University Press, v. 122, n. 3, p. 540–574, 1985. DOI: [10.2307/1971325](https://doi.org/10.2307/1971325).
- [29] LEE, John M. **Introduction to Smooth Manifolds**. 2. ed. New York: Springer, 2013. v. 218. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 978-1-4419-9981-8.
- [30] LIANG, Chao et al. Shub’s example revisited. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, Cambridge University Press, v. 45, n. 3, p. 894–914, 2024.
- [31] LIAO, Gang; VIANA, Marcelo; YANG, Jiagang. The entropy conjecture for diffeomorphisms away from tangencies. **Journal of the European Mathematical Society**, European Mathematical Society Publishing House, v. 15, n. 6, p. 2043–2060, 2013. DOI: [10.4171/JEMS/414](https://doi.org/10.4171/JEMS/414).
- [32] LIMA, Elon Lages. **Variedades Diferenciáveis**. Rio de Janeiro, Brasil: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2007. PM-25. (Publicações Matemáticas). Reimpressão/digitalização de 2011 — cópia em PDF utilizada.
- [33] MAÑÉ, Ricardo. Contributions to the stability conjecture. **Topology**, Elsevier, v. 17, n. 4, p. 383–396, 1978. DOI: [10.1016/0040-9383\(78\)90029-6](https://doi.org/10.1016/0040-9383(78)90029-6).
- [34] MANNING, Anthony. There are no new Anosov diffeomorphisms on tori. **American Journal of Mathematics**, Johns Hopkins University Press, v. 96, n. 3, p. 422–429, 1974. DOI: [10.2307/2373606](https://doi.org/10.2307/2373606).
- [35] MONGEZ, Juan; PACIFICO, Maria. Finite measures of maximal entropy for an open set of partially hyperbolic diffeomorphisms. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 377, n. 12, p. 8695–8720, 2024.
- [36] NEWHOUSE, Sheldon E.; YOUNG, Lai-Sang. Dynamics of certain skew products. In: ... (Ed.). **Geometric Dynamics**. Berlin: Springer, 1983. P. 611–629.
- [37] OBATA, Davi. Open sets of partially hyperbolic skew products having a unique SRB measure. **Advances in Mathematics**, v. 427, paper no. 109136, 2023.
- [38] OLIVEIRA, Krerley; VIANA, Marcelo. Fundamentos da teoria ergódica. **IMPA, Brazil**, p. 3–12, 2014.
- [39] OVADIA, Snir Ben. Symbolic dynamics for non uniformly hyperbolic diffeomorphisms of compact smooth manifolds. **arXiv preprint arXiv:1609.06494**, 2016.

- [40] OVADIA, Snir Ben. The set of points with Markovian symbolic dynamics for non-uniformly hyperbolic diffeomorphisms. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, Cambridge University Press, v. 41, n. 11, p. 3244–3269, 2021.
- [41] PACIFICO, Maria José; YANG, Fan; YANG, Jiagang. Existence and uniqueness of equilibrium states for systems with specification at a fixed scale: an improved Climenhaga–Thompson criterion. **Nonlinearity**, IOP Publishing, v. 35, n. 12, p. 5963–6000, 2022. DOI: [10.1088/1361-6544/ac992e](https://doi.org/10.1088/1361-6544/ac992e).
- [42] PALIS JR., Jacob; MELO, Welington de. **Introdução aos sistemas dinâmicos**. 2. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2017. (Projeto Euclides). ISBN 978-85-244-0426-9.
- [43] PUGH, Charles; SHUB, Michael; WILKINSON, Amie. Holder foliations, revisited. **arXiv preprint arXiv:1112.2646**, 2011.
- [44] _____. Partial differentiability of invariant splittings. **Journal of statistical physics**, Springer, v. 114, p. 891–921, 2004.
- [45] PUJALS, Enrique R.; SAMBARINO, Martín. Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms. **Annals of Mathematics**, Princeton University Press, v. 151, n. 3, p. 961–1023, 2000. DOI: [10.2307/121099](https://doi.org/10.2307/121099).
- [46] REDAUD, Jeanne; SANO, Hideki. Synchronization of chaotic hyperbolic PDE systems for image encryption using backstepping observer design. In: IEEE. **2024 EUROPEAN CONTROL CONFERENCE (ECC)**. [S.l.: s.n.], 2024. P. 376–381.
- [47] RUDIN, Walter. **Functional Analysis**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1991. (International Series in Pure and Applied Mathematics). ISBN 0-07-054236-8.
- [48] SAGHIN, Radu. On invariant holonomies between centers. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, Cambridge University Press, v. 45, n. 1, p. 274–293, 2025.
- [49] SHUB, Michael. **Global stability of dynamical systems**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- [50] _____. Topologically transitive diffeomorphisms of $\mathbf{T}^4$. In: CHILLINGWORTH, D. (Ed.). **Proceedings of the Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems**. Berlin: Springer, 1971. v. 206. (Lecture Notes in Mathematics). P. 39–40.
- [51] SMALE, Stephen. Diffeomorphisms with Many Periodic Points. In: CAIRNS, Stephen S. (Ed.). **Differential and Combinatorial Topology: A Symposium in Honor of Marston Morse**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1965. P. 63–80.

- [52] TAHZIBI, Ali; YANG, Jiagang. Invariance principle and rigidity of high entropy measures. **Transactions of the American Mathematical Society**, American Mathematical Society, v. 371, n. 2, p. 1231–1251, 2019. DOI: [10.1090/tran/7262](https://doi.org/10.1090/tran/7262).
- [53] URES, Raúl. Intrinsic ergodicity of partially hyperbolic diffeomorphisms with a hyperbolic linear part. **Proceedings of the American Mathematical Society**, American Mathematical Society, v. 140, n. 6, p. 1973–1985, 2012. DOI: [10.1090/S0002-9939-2011-11080-2](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2011-11080-2).
- [54] VIANA, Marcelo; OLIVEIRA, Krerley. **Fundamentos da Teoria Ergódica**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.
- [55] WALKDEN, Charles. **MATH41112/61112 Ergodic Theory**. [S.l.: s.n.], 2018. Lecture notes. Disponível online em https://www.maths.manchester.ac.uk/~cwalkden/ergodic_theory/.
- [56] YANG, Jiagang. Entropy along expanding foliations. **Advances in Mathematics**, Elsevier, v. 389, p. 107893, 2021. DOI: [10.1016/j.aim.2021.107893](https://doi.org/10.1016/j.aim.2021.107893).
- [57] YOMDIN, Y. Volume growth and entropy. **Israel Journal of Mathematics**, v. 57, n. 3, p. 285–300, 1987.