



Universidade Federal do Maranhão
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT



Orientando: Napoleão Campos Everton Sobrinho
Orientador: Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva

MODELAGEM MATEMÁTICA DE FENÔMENOS PERIÓDICOS COM O AUXÍLIO DE IA: Aplicações à Educação Básica.

São Luís - MA
2025

Universidade Federal do Maranhão
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Napoleão Campos Everton Sobrinho

MODELAGEM MATEMÁTICA DE FENÔMENOS PERIÓDICOS
MEDIADA POR INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL: Aplicações na Educação
Básica

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da UFMA como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este exemplar corresponde a versão prévia da dissertação defendida pelo aluno Napoleão Campos Everton Sobrinho e aprovada pela comissão julgadora.

Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva
(Orientador)

São Luís - MA
2025

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Campos Everton Sobrinho, Napoleão.

MODELAGEM MATEMÁTICA DE FENÔMENOS PERIÓDICOS MEDIADA
POR INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL : aplicações na Educação
Básica / Napoleão Campos Everton Sobrinho. - 2025.
70 p.

Orientador(a): João de Deus Mendes da Silva.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em
Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade
Federal do Maranhão, São Luís, 2025.

1. Modelagem Matemática. 2. Inteligência Artificial.
3. Funções Trigonométricas. 4. Tecnologias Digitais. 5.
Educação Básica. I. Mendes da Silva, João de Deus. II.
Título.

Universidade Federal do Maranhão
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da UFMA como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Modelagem Matemática

Aprovada em:

Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva

Orientador

Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Profa. Dra. Valeska Martins de Souza

Examinador Interno

Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Prof. Dr. Paulo Rogério de Almeida Ribeiro

Examinador Externo

Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

São Luís - MA

2025

Dedicatória

Às minhas filhas, que, mesmo sem perceber, me ajudam a superar as dificuldades da vida e me dão força e coragem para seguir o caminho traçado por Deus, sem desistir.

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus, pois a sua presença em mim certamente só veio me fortalecer mais para que pudesse concluir esse trabalho.

À minha esposa, Josenildes Everton, e às minhas filhas, Talita Cléa Everton, Natália Cristine Everton e Ingrid Cristine Everton, que são os pilares da minha vida.

À minha neta, Isabela Everton (Belinda), cuja existência ilumina a minha vida.

À minha mãe, Iracilda Everton, e ao meu querido pai, Luís Everton (in memoriam), pela coragem, ousadia, dedicação, sacrifícios, saudades e imenso amor. Eles sempre acreditaram em um sonho: de que apenas a educação transforma pessoas e as pessoas transformam o mundo.

Aos meus irmãos, Luís Antônio e Marília Everton, pelos momentos em que, juntos, enfrentamos as dificuldades da vida e desfrutamos da abundância do amor.

À minha sogra, Nairdes Azevedo, e ao meu sogro, José Gonçalves (in memoriam), assim como aos meus cunhados e cunhadas: Edenilce Mota, Francisco, Josenilson Azevedo, Joselene Azevedo e Josélino Azevedo, por acreditarem que, com fé em Deus, até o mais difícil pode se tornar simples.

Aos colegas do Profmat — Turma 2023 — Alberto, Alice, Nayra, Núbia, Francinilson, Klaus, Leonardo, Marcos, Rodrigo, Rudakoff e, em especial, Carlos Alberto Oliveira Costa e Reginaldo Azevedo, pelos momentos de aprendizado e companheirismo ao longo desta jornada.

Aos professores do Profmat UFMA, turma 2023, pelos ensinamentos que contribuíram para o meu crescimento pessoal e profissional. Agradeço ao Professor Doutor Anselmo Raposo Júnior, que, mesmo sem ser nosso professor em sala de aula, gentilmente deu a sua contribuição.

Registro minha profunda gratidão ao meu orientador, Professor Doutor João de Deus Mendes da Silva. Mais do que um orientador, foi um verdadeiro companheiro ao longo desta jornada. Esteve ao meu lado nos momentos difíceis, acreditou em mim mesmo quando eu próprio já duvidava, e sempre se dedicou para que este trabalho alcançasse sua melhor versão. Sua orientação foi fundamental, mas sua amizade e apoio fizeram toda a diferença. Meu sincero muito obrigado! SÓ GRATIDÃO!!!

Um agradecimento especial aos amigos da graduação, Antonio Magno Barros e Francisco Alberto Lopes Monteiro, pelos constantes incentivos e apoio ao longo dessa trajetória.

À UFMA, IMPA e SBM, pela oportunidade de qualificação docente e contribuição ao ensino da Matemática na Educação Básica. À CAPES, pelo apoio com a bolsa de pesquisa ao longo do curso.

"Não há ramo da matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia ser aplicado aos fenômenos do mundo real."

– Nikolai Lobachevsky.

Resumo

Esta dissertação investiga o uso da modelagem matemática de fenômenos periódicos, com apoio da Inteligência Artificial (IA), no ensino de funções trigonométricas na Educação Básica. A pesquisa, de natureza qualitativa e quantitativa, baseia-se em dados reais de temperatura de São Luís (MA), de 2005 a 2024, fornecidos pelo INMET. A partir desses dados, foram elaborados modelos com funções seno e cosseno para representar variações sazonais. Ferramentas como Python, GeoGebra e o assistente ChatGPT foram utilizadas para análise, visualização e mediação didática. Também foi proposta uma sequência didática contextualizada, aplicada de forma exploratória, visando avaliar o engajamento e a aprendizagem dos alunos. Os resultados apontam que a integração entre modelagem, tecnologias digitais e IA contribuiu para a compreensão de conteúdos abstratos e para o desenvolvimento do pensamento crítico.

Palavras-chave: Modelagem matemática; Funções trigonométricas; Inteligência Artificial; Tecnologias digitais; Educação Básica.

Abstract

This dissertation investigates the use of mathematical modeling of periodic phenomena, with the support of Artificial Intelligence (AI), in teaching trigonometric functions in Basic Education. The research, of a qualitative and quantitative nature, is based on real temperature data from São Luís (MA), from 2005 to 2024, provided by INMET. From these data, models with sine and cosine functions were created to represent seasonal variations. Tools such as Python, GeoGebra and the ChatGPT assistant were used for analysis, visualization and didactic mediation. A contextualized didactic sequence was also proposed, applied in an exploratory manner, aiming to evaluate student engagement and learning. The results indicate that the integration between modeling, digital technologies and AI contributed to the understanding of abstract content and the development of critical thinking.

Key-words: Mathematical modeling; Trigonometric functions; Artificial intelligence; Digital technologies; Basic Education.

Lista de Figuras

1	Gráfico do modelo das marés em São Luis	15
2	Gráfico do modelo das marés em São Luis e pontos críticos	15
3	Gráfico do modelo das marés em São Luis - pontos de interseção	16
4	Triângulo retângulo ilustrando as razões trigonométricas	16
5	Comparação entre o modelo geral e o ajustado para São Luís-MA (em graus)	17
6	Comparação entre o modelo geral e o ajustado para São Luís-MA (em radianos)	18
7	Representação geométrica das funções seno e cosseno no ciclo trigonométrico	19
8	Gráfico da função $f(t) = \text{sen}(t)$	20
9	Gráfico da função $f(t) = \text{cos}(t)$	20
10	Comparação entre $\text{sen}(t)$ (azul) e $\text{cos}(t)$ (vermelho)	21
11	Efeitos dos parâmetros: Amplitude (verde), Período (laranja), Fase (roxo) .	21
12	Gráfico da função tangente: $f(t) = \text{tan}(t)$ com assíntotas verticais	21
13	Modelo de variação diária da temperatura: $T(t) = 27 + 6\text{sen}\left(\frac{2\pi}{24}t - \frac{\pi}{2}\right)$. .	24
14	Modelo de variação anual da temperatura: $T(t) = 27 + 1,5\text{sen}\left(\frac{2\pi}{365}t - \frac{\pi}{4}\right)$.	24
15	Gráfico do modelo das marés em São Luis	39
16	Variação modelada da temperatura ao longo de um dia em São Luís-MA. .	44
17	Variação modelada da temperatura média ao longo do ano em São Luís-MA.	45
18	Temperatura Média Anual em São Luís-MA (2005–2024)	47
19	Amplitude térmica mensal em São Luís – 2005	48
20	Amplitude térmica anual em São Luís-MA (2005–2024)	48
21	Distribuição das Temperaturas por Mês (2005–2024)	49
22	Curvas Comparativas de Temperatura Média Mensal (2005–2024)	50
23	Temperaturas extremas mensais em São Luís (2005–2024)	52
24	Dados de temperatura média do mês de janeiro de São Luis nos (2005 a 2024)	70

Lista de Tabelas

1	Peso anuais de três pessoas A, B, C durante 10 anos.	8
2	Valorização de uma ação em 6 meses	9
3	Salário mensal de 55 funcionários de uma empresa	9
4	Tábua de marés do dia 25 de abril de 2025	13
5	Resumo dos Cálculos para Correção da Média – Janeiro de 2005	29
6	Resumo de Temperaturas Mensais em São Luís – 2005	36
7	Temperatura média mensal de 2005 a 2024	37
8	Temperatura Diária Típica em São Luís, Maranhão (°C)	43
9	Temperatura Média Mensal (°C) em São Luís, Maranhão (1992-2021)	45
10	Temperatura Mínima Mensal (°C)	52
11	Temperatura Máxima Mensal (°C)	53

Sumário

INTRODUÇÃO	1
1 PRELIMINARES MATEMÁTICAS	3
1.1 Fundamentos Matemáticos - Periodicidade	3
1.1.1 Média Aritmética Simples	3
1.1.2 Média Aritmética Ponderada	7
1.1.3 Variância e Desvio Padrão	9
1.1.4 Função Impar e Função Par	11
1.1.5 Função Limitada	12
1.1.6 Função Periódica	13
1.1.7 Funções Trigonométricas Simples	16
1.1.8 Aplicação - Painéis Solares e o Rastreamento do Sol	17
1.1.9 Ciclo Trigonométrico	19
1.1.10 As Funções Seno e Cosseno - forma geral	20
2 MODELAGEM MATEMÁTICA, IA E ENSINO	22
2.1 Modelagem Matemática	22
2.1.1 Um Exemplo de Modelagem de Fenômeno Periódico com IA	23
2.1.2 Unidades de Medida: Graus e Radianos	24
2.1.3 Integração da Tecnologia e da IA ao Ensino de Matemática	25
2.1.4 Sequências Didáticas no Ensino de Funções Trigonométricas	26
2.1.5 Atividade: Correção de Média Contaminada – Dados Reais de São Luís (2005)	26
2.2 Outras atividades de modelagem propostas	29
2.2.1 Atividade 1: Impacto de valores atípicos na Média	29
2.2.2 Atividade 3: Simulação de Perda de Dados – Viés de Seleção	30
2.2.3 Atividade 4: Construção de Séries Temporais e Interpolação Linear	31
3 TRATAMENTO DE DADOS E FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS	32
3.1 Escolha das Fontes de Dados	32
3.2 Processamento dos Dados	32
3.3 Dificuldades no Tratamento dos Dados	33
3.3.1 O Instituto Nacional de Meteorologia (INMET) e sua Contribuição para a Pesquisa	33

3.4	Expansão para Análise Longitudinal (2005–2024)	36
4	TECNOLOGIAS EDUCACIONAIS E ENSINO DE MATEMÁTICA	38
4.1	Panorama das Tecnologias no Ensino de Matemática	38
4.2	GeoGebra como Ferramenta Didática	38
4.3	Inteligência Artificial como Mediadora Pedagógica	39
4.4	Integração com a BNCC	40
4.4.1	Exemplo de Atividade Integrada	40
4.5	Considerações Finais	40
5	DESENVOLVIMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	42
5.1	Contextualização e Motivação (Fenômeno Real)	42
5.2	Exploração de Dados Reais (Coleta e Leitura de Informações)	42
5.3	Modelagem da Variação Diária (Construção do Modelo Matemático)	43
5.4	Exploração do Modelo Diário com Tecnologia	44
5.5	Modelagem da Variação Anual (Extensão do Modelo)	44
5.6	Síntese e Aplicação em Novos Contextos	46
6	ANÁLISE DOS RESULTADOS	47
6.1	Temperatura Média Anual	47
6.2	Amplitude Térmica Anual	48
6.3	Distribuição Mensal das Temperaturas (Boxplot)	49
6.4	Comparação da Temperatura Média Mensal por Ano	50
6.5	Síntese dos Resultados	51
6.5.1	Análise das Temperaturas Extremas Mensais	51
6.6	Estimativa de temperatura por modelagem trigonométrica	53
6.6.1	Considerações Finais Sobre a Análise	55
	CONCLUSÃO	56
	REFERÊNCIAS	58
	ANEXOS	60
A	Script Python Utilizado para Análise dos Dados	61
B	Introdução à Regressão Linear	66
B.1	Regressão Linear: Reta dos Mínimos Quadrados	66
B.2	Regressões Polinomiais	67
B.3	Exemplo: Ajuste de Reta	67
B.4	Regressão Trigonométrica: Modelagem com Seno e Cosseno	68

INTRODUÇÃO

A modelagem de fenômenos periódicos, como os ciclos diários e sazonais de temperatura, oferece uma oportunidade de conectar conceitos matemáticos abstratos a situações reais vivenciadas pelos alunos. Neste trabalho, propõe-se modelar a variação diária e anual da temperatura na cidade de São Luís, Maranhão, utilizando funções trigonométricas (seno e cosseno) para representar esses padrões periódicos.

São Luís, capital maranhense de clima tropical, apresenta oscilações de temperatura previsíveis ao longo do dia e do ano, o que a torna um cenário apropriado para este estudo. Por exemplo, é sabido que em cidades tropicais a temperatura atinge um pico no início da tarde e diminui durante a noite, enquanto ao longo do ano ocorrem períodos mais quentes e mais amenos ligados às estações chuvosa e seca.

Do ponto de vista educacional, a modelagem matemática desponta como uma estratégia pedagógica valiosa para dar significado a esses fenômenos no ensino básico. A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BNCC) destaca explicitamente a importância de incorporar a modelagem em sala de aula, visando ao desenvolvimento de competências matemáticas em contextos do cotidiano.

Ao envolver os alunos na resolução de problemas reais — como compreender variações climáticas locais — a modelagem permite que eles compreendam conceitos matemáticos e os apliquem em situações concretas (Bassanezi, 2002). Assim, o estudo de funções trigonométricas por meio de dados reais pode tornar o aprendizado mais significativo e contextualizado, alinhando-se às orientações curriculares vigentes. Adicionalmente, o cenário atual traz novas ferramentas tecnológicas que podem enriquecer esse processo. A integração de tecnologias digitais e de inteligência artificial (IA) na educação matemática abre possibilidades de maior interatividade e personalização das aprendizagens.

Assistentes virtuais inteligentes, como o *ChatGPT* (ChatGPT), podem auxiliar professores e alunos na obtenção e análise de dados, na simulação de modelos matemáticos e na proposição de atividades diferenciadas. Paralelamente, softwares matemáticos de geometria dinâmica, a exemplo do *GeoGebra* (Geogebra), permitem visualizações gráficas instantâneas e manipulação interativa de parâmetros, favorecendo a exploração dos conceitos de forma intuitiva. Pesquisas recentes reforçam essa convergência entre modelagem, tecnologia e ensino de funções periódicas (USP, 2025).

Lobato (2022), enfatiza que os documentos oficiais brasileiros recomendam incluir fenômenos periódicos no currículo escolar e relacioná-los às Ciências Naturais (especialmente à Física), embora geralmente se concentrem nas funções seno e cosseno, deixando outros aspectos das funções periódicas em segundo plano.

Por sua vez, Munhoz (2022), desenvolveu uma sequência de atividades combinando modelagem matemática e o uso do software *GeoGebra* para o ensino de funções trigonométricas, buscando contemplar diferentes estilos de aprendizagem (visual, auditivo e cinestésico) dos alunos.

Esses trabalhos inspiram a proposta desta dissertação, ao mostrar que a abordagem contextual e o uso de recursos tecnológicos podem tornar o estudo de trigonometria mais acessível e envolvente. Diante desse contexto, o presente trabalho tem como objetivos:

- construir modelos matemáticos, baseados em funções seno e cosseno, que descrevam a variação diária e anual da temperatura em São Luís-MA a partir de dados reais;
- desenvolver uma sequência didática para o ensino de funções periódicas na Educação Básica, integrando a modelagem desses fenômenos reais;
- discutir o papel da modelagem matemática como estratégia de ensino alinhada à BNCC;
- explorar o uso de ferramentas de IA (como o *ChatGPT*), de software matemático (*GeoGebra*) e o Técnicas computacionais - *Python* (**P**ython) no apoio à formulação dos modelos e das atividades de sala de aula.

Para atingir tais objetivos, esta dissertação está organizada em seções que refletem as etapas do estudo: na Fundamentação Teórica são discutidos alguns conceitos básicos de estatística, assim como alguns conceitos de funções, em especial, as funções periódicas, modelagem matemática, diretrizes da BNCC e uso de tecnologias (IA e *GeoGebra*) no ensino; em Metodologia descreve-se o procedimento de obtenção dos dados e construção dos modelos, bem como o planejamento da sequência didática; o capítulo de Desenvolvimento da Sequência Didática detalha as atividades propostas passo a passo; em Análise dos Resultados avalia-se o potencial didático da proposta e os principais achados; por fim, são apresentadas as Conclusões, destacando as contribuições, limitações e sugestões de trabalhos futuros.

Para alcançar os objetivos propostos, adotou-se uma abordagem metodológica quali-quantitativa. A dimensão quantitativa envolveu a coleta e análise de séries temporais de temperatura da cidade de São Luís-MA, utilizando métodos estatísticos e modelagem trigonométrica. Já a dimensão qualitativa foi conduzida por meio do desenvolvimento de uma sequência didática aplicada em contexto escolar, com observação dos efeitos didáticos da proposta. As ferramentas utilizadas incluíram Python (para análise de dados), *GeoGebra* (para visualização dos modelos) e o assistente virtual *ChatGPT* (como mediador pedagógico e organizador dos conteúdos). Esta triangulação metodológica visa assegurar a robustez dos resultados e a aplicabilidade educacional da proposta.

PRELIMINARES MATEMÁTICAS

1.1 Fundamentos Matemáticos - Periodicidade

Periodicidade Fenômenos periódicos são aqueles que apresentam um comportamento que se repete em intervalos regulares de tempo. Eles estão presentes em diversas áreas do conhecimento e em situações cotidianas: o movimento das marés, a rotação da Terra (dia e noite), as estações do ano, os batimentos cardíacos, os ciclos de consumo de energia elétrica e a variação de temperatura ao longo do dia ou do ano são alguns exemplos.

Matematicamente, esses fenômenos são representados por **funções periódicas**, que modelam com precisão o padrão repetitivo dessas variações. O estudo dessas funções permite não apenas descrever o comportamento cíclico observado, mas também fazer previsões, análises e simulações de cenários futuros. Porém, para fazermos os estudos desses fenômenos, precisamos ter o conhecimento de algumas definições ligadas a Estatística Básica que iremos descrevê-los abaixo (Crespo, 2002; Nazareth, 2003)

1.1.1 Média Aritmética Simples

A média aritmética de um conjunto de dados é definida como o quociente entre a soma de todos os elementos e o número deles. A propriedade principal da média é preservar a soma dos elementos de um conjunto de dados. Podemos adotar o seguinte raciocínio para encontrarmos a fórmula da média aritmética. Dada uma lista de n números, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, a soma dos seus n termos é igual a:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n. \tag{1.1}$$

A média aritmética dessa lista é um número $\bar{x}$, tal que, se todos os elementos forem substituídos por $\bar{x}$, a soma da lista permanecerá preservada. Assim, substituindo todos os elementos por $\bar{x}$, teremos uma nova lista, $(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$, cuja soma é:

$$\bar{x} + \bar{x} + \dots + \bar{x} = n\bar{x}. \tag{1.2}$$

Como as somas das duas listas são iguais, temos de (1.1) e (1.2) que:

$$n\bar{x} = x_1 + x_2 + \dots + x_n \Rightarrow \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Verificamos que a expressão do numerador corresponde a soma de todos os elementos da sequência, ao passo que no denominador temos a quantidade de elementos somados n .

Sobre a média aritmética, podemos afirmar que:

1. Ela preserva a soma dos elementos da lista de números;
2. Ela é obtida pelo quociente entre a soma de todos os elementos de um conjunto e quantidade de elementos nele existentes, ou seja,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

1ª Propriedade: Dado um conjunto com $n \geq 1$ elementos, a média aritmética sempre existirá e será única. Desde que o conjunto tenha pelo menos um elemento, podemos afirmar que a média aritmética sempre existe, pois sempre conseguiremos calcular o quociente entre a soma dos elementos e o número deles. Além disso, como o somatório dos elementos resulta em um único número, o valor da média também sempre será único.

2ª Propriedade: A média aritmética $\bar{x}$ de um conjunto de dados satisfaz a expressão (Lima, 2009) $m \leq x \leq M$ em que m e M são, respectivamente, os elementos que representam o valor mínimo e o valor máximo desse conjunto, ou seja, $\min \leq x \leq \max$.

Essa propriedade diz respeito ao fato de a média aritmética sempre se encontrar entre os números mínimo e máximo de um conjunto. Se m e M são os valores mínimo e máximo de um conjunto, então, necessariamente, todos os elementos desse conjunto serão maiores ou iguais a m e menores ou iguais a M , ou seja, $m \leq x_i \leq M$ para todo $i = 1, \dots, n$. Assim, podemos notar que:

$$m \leq x_1 \leq M, m \leq x_2 \leq M, \dots, m \leq x_n \leq M.$$

Somando termo a termo das n desigualdades acima, obtemos

$$nm \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq nM. \quad (1.3)$$

Dividindo (1.3) por n , temos

$$m \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq M.$$

Portanto, concluímos que a média está sempre entre os valores mínimo e máximo de um conjunto: $m \leq \bar{x} \leq M$.

Exemplo 1.1 Para exemplificar essa propriedade, vamos tomar como base a sequência dada por $(x_n)_{n=1}^5 = (1, 2, 3, 4, 5)$, com média $\bar{x} = 3$.

Nesse caso, eparem que o valor mínimo desse conjunto é 1 e o máximo é 5. Portanto, a média encontrada satisfaz a 2ª Propriedade : $1 \leq \bar{x} \leq 5$.

Se a sequência fosse $(y_n)_{n=1}^9 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$, teríamos como média:

$$\bar{y} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9}{9} = \frac{45}{9} \Rightarrow \bar{y} = 5.$$

Assim, o valor mínimo seria 1 e o máximo 9, novamente a propriedade continuaria válida, pois: $1 \leq \bar{y} \leq 9$. Isso nos permite concluir que essa propriedade sempre será válida, seja qual for a sequência escolhida.

3ª Propriedade: Somando-se (ou subtraindo-se) uma constante C de todos os valores de uma variável, a média do conjunto fica aumentada (ou diminuída) dessa constante.

$$\bar{y} = \bar{y} + c \text{ ou } \bar{y} = \bar{y} - c.$$

Demonstração: Seja $(x_i)_{i=1}^n$ uma sequência de números: $(x_i)_{i=1}^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, e $\bar{x}$ a média aritmética dos termos dessa sequência:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Seja $(y_i)_{i=1}^n$ uma sequência de números formada pela adição de uma constante c a cada um dos termos de $(x_i)_{i=1}^n$:

$$(y_i)_{i=1}^n = ((x_i)_{i=1}^n + c) = (x_1 + c, x_2 + c, \dots, x_n + c),$$

e $\bar{y}$ a média aritmética dos termos dessa nova sequência:

$$\bar{y} = \frac{(x_1 + c) + (x_2 + c) + \dots + (x_n + c)}{n}.$$

Vejamos como demonstrar a propriedade para a adição de uma constante. Esse mesmo raciocínio pode ser seguido para a subtração de uma constante.

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{(x_1 + c) + (x_2 + c) + \dots + (x_n + c)}{n} \\ &= \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + nc}{n} \\ &= \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n} + \frac{nc}{n} \\ &= \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n} + c. \end{aligned}$$

Portanto, ao adicionarmos uma constante c aos elementos de um conjunto, a média do novo conjunto foi aumentado em c , ou seja, $\bar{y} = \bar{x} + c$.

Exemplo 1.2 Para exemplificar essa propriedade, vamos tomar como base a sequência $(x_i)_{i=1}^5 = (1, 2, 3, 4, 5)$, com média $\bar{x} = 3$.

Se adicionarmos uma constante 5 a cada um de seus números, vamos obter uma nova sequência $(y_i)_{i=1}^5 = (x_i + 5)_{i=1}^5 = (6, 7, 8, 9, 10)$, cuja média é:

$$\bar{y} = \bar{x} + 5 = \frac{6 + 7 + 8 + 9 + 10}{5} = \frac{40}{5} = 8 = 3 + 5 = \bar{x} + 5.$$

Observe que, quando acrescentamos 5 a cada um dos números da lista, a média também aumentou 5 unidades, passando de 3 para 8.

4ª Propriedade: Multiplicando-se (ou dividindo-se) uma constante c de todos os valores de uma variável, a média do conjunto fica multiplicada (ou dividida) por esta constante.

$$\bar{y} = \bar{x} \cdot c \text{ ou } \bar{y} = \frac{\bar{x}}{c}.$$

Demonstração: Vejamos como demonstrar a propriedade para a multiplicação por uma constante. De forma análoga, faz-se a demonstração para a divisão.

Seja $(x_i)_{i=1}^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\bar{x}$, a média aritmética dos termos dessa sequência:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Seja $(y_i)_{i=1}^n$ uma sequência de números formada pela multiplicação de cada um dos termos de $(x_i)_{i=1}^n$ por uma constante c :

$$(y_i)_{i=1}^n = (x_i \cdot c)_{i=1}^n = (x_1 \cdot c, x_2 \cdot c, \dots, x_n \cdot c),$$

e $\bar{y}$ a média aritmética dos termos dessa nova sequência:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{(x_1 \cdot c) + (x_2 \cdot c) + \dots + (x_n \cdot c)}{n} \\ &= \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)c}{n} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} c \\ &= \bar{x} \cdot c. \end{aligned}$$

Exemplo 1.3 Para exemplificar essa propriedade, vamos tomar como base a sequência $(x_i)_{i=1}^5 = (1, 2, 3, 4, 5)$, com a média $\bar{x} = 3$.

Se multiplicarmos cada um de seus elementos por uma constante 5, vamos obter uma nova lista $(x_i \cdot 5)_{i=1}^5 = (5, 10, 15, 20, 25)$, cuja média é:

$$\bar{y} = \bar{x} \cdot 5 = \frac{5 + 10 + 15 + 20 + 25}{5} = \frac{75}{5} = 15 = 3 \cdot 5 = \bar{x} \cdot 5.$$

Observe que, como multiplicamos cada um dos números da lista por 5, a média também foi multiplicada por 5, passando de 3 para 15.

5ª Propriedade: A soma algébrica dos desvios em relação à média é nula, ou seja, $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$.

Demonstração: Seja $(x_i)_{i=1}^n$ uma sequência de números $(x_i)_{i=1}^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\bar{x}$ a média aritmética dos termos dessa sequência

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n = n\bar{x}.$$

Mas a soma dos desvios em relação à média é dada por:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \bar{x}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n x_i - n\bar{x} \\
&= x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n\bar{x} \\
&= n\bar{x} - n\bar{x} = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$.

Exemplo 1.4 Para exemplificar essa propriedade, iremos tomar como a sequência $(x_i)_{i=1}^7 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, assim temos que a média é $\bar{x} = 4$.

O desvio em relação à média é a diferença entre cada elemento da sequência e a média aritmética. Como a sequência possui 7 elementos, teremos o mesmo número de desvios para calcular. Logo, basta encontrarmos a diferença entre cada elemento e a média:

$$\begin{aligned}
d_1 &= x_1 - \bar{x} = 1 - 4 = -3 \\
d_2 &= x_2 - \bar{x} = 2 - 4 = -2 \\
d_3 &= x_3 - \bar{x} = 3 - 4 = -1 \\
d_4 &= x_4 - \bar{x} = 4 - 4 = 0 \\
d_5 &= x_5 - \bar{x} = 5 - 4 = 1 \\
d_6 &= x_6 - \bar{x} = 6 - 4 = 2 \\
d_7 &= x_7 - \bar{x} = 7 - 4 = 3.
\end{aligned}$$

Somando membro a membro esses desvios, obtemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) &= \sum_{i=1}^7 d_i = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7 \\
&= -3 + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, não importa qual seja a sequência de números, a soma dos desvios em relação à média será sempre igual a zero.

1.1.2 Média Aritmética Ponderada

Muitas vezes, certos elementos de um conjunto de dados possuem relevância maior que os demais. Nessa situação, para calcular a média de tais conjuntos, devemos encontrar uma média ponderada.

Uma média ponderada é a média de um conjunto de dados cujos valores possuem pesos variados. Ela é calculada pela igualdade a seguir, em que p é o peso de cada valor de x :

$$\bar{x} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i}{\sum_{i=1}^n p_i},$$

onde $x_1, x_2, \dots, x_n$ são os elementos do conjunto que queremos determinar a média e $p_1, p_2, \dots, p_n$ são os pesos.

Amplitude Total : De acordo com Crespo (2002), a amplitude total é a diferença entre o maior e o menor valor analisado em uma variável. Vejamos agora, como calcular amplitude total com dados agrupados e não agrupados.

Amplitude Total - Dados não agrupados: Para dados não agrupados, o cálculo da amplitude total pode ser expresso pela seguinte fórmula:

$$A_T = x_{\max} - x_{\min}.$$

Consideremos o seguinte exemplo para efeito de entendimento. Considerando os valores das variáveis B , C e D apresentadas abaixo, podemos calcular a sua amplitude total.

Tabela 1: Peso anuais de três pessoas A, B, C durante 10 anos.

B	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80
C	76	77	78	79	80	80	81	82	83	84
D	55	65	70	75	80	85	85	90	95	100

Fonte: Autor

Calculando a Amplitude Total temos

$$A_{TB} = x_{\max} - x_{\min} = 80 - 80 = 0$$

$$A_{TC} = x_{\max} - x_{\min} = 84 - 76 = 8$$

$$A_{TD} = x_{\max} - x_{\min} = 100 - 55 = 45.$$

Nesse caso, podemos observar que a variável B obteve uma amplitude total igual a 0 (zero), ou seja, apresenta uma medida da amplitude nula. Isto significa dizer que os valores não variam entre si. A variável C , por sua vez, obteve uma amplitude igual a 8. Já a variável D teve uma amplitude total igual a 45. Embora o valor da amplitude total tenha sido diferente para as variáveis B , C e D , calculando a média aritmética para essas variáveis, o valor encontrado será igual a 80 para todas as situações.

Independentemente da média, podemos verificar que a variável B possui elementos muito mais homogêneos do que as variáveis C e D . E, também, que os elementos da variável B são mais homogêneos do que os da variável D .

Portanto é possível encontrar conjuntos de elementos que possuem o mesmo valor da média aritmética, mas que os mesmos podem ser compostos por elementos totalmente diferentes.

Assim, verificamos que quanto maior for o valor encontrado para a amplitude total, maior será a discrepância ou a variação entre os valores da variável.

Amplitude Total - Dados agrupados: Para dados agrupados sem intervalos de classe, a fórmula usada para a identificação da amplitude total é semelhante à utilizada para dados não agrupados. Porém, o processo se diferencia porque identificaremos o maior e o menor valor em uma tabela de distribuição de frequência. Para efeito de entendimento, vamos ilustrar o exemplo abaixo.

Considere os dados da variável x apresentados na tabela 2.

Calculando a Amplitude Total temos

$$A_x = x_{\max} - x_{\min} = 5 - 1 = 4.$$

Tabela 2: Valorização de uma ação em 6 meses

x	f(x)
1	1
2	3
3	2
4	5
5	9

Fonte: Autor

Cabe ressaltar que esses valores foram selecionados independentemente do valor da frequência associada a eles. No entanto, se nos depararmos com dados agrupados com intervalos de classe, a amplitude total será encontrada pela diferença entre o limite superior da última classe e o limite inferior da primeira classe, conforme pode ser expresso na fórmula a seguir:

$$A_T = L_{\max} - l_{\min}.$$

Ressalta-se, nesse caso, que o valor obtido para a amplitude total com dados agrupados com intervalos de classe é levado em consideração apenas os dois valores extremos da série, descartando qualquer valor intermediário existente. Sendo assim, o valor obtido é somente uma indicação aproximada da dispersão dos dados. Consideremos agora a tabela 3 abaixo: Valores e frequência da variável salário.

Tabela 3: Salário mensal de 55 funcionários de uma empresa

X-SALÁRIOS (EM REAIS)	F(x)
1000 ┤ 2000	07
2000 ┤ 3000	13
3000 ┤ 4000	21
4000 ┤ 5000	10
5000 ┤ 6000	04

Fonte: Autor

Calculando a Amplitude Total temos

$$A_T = L_{\max} - l_{\min} = 6000 - 1000 = 5000.$$

Diante disso, podemos verificar que a amplitude total como medida de dispersão é um valor limitado e instável, visto que valores internos da série nunca são levados em consideração.

1.1.3 Variância e Desvio Padrão

A variância e o desvio padrão são medidas que levam em consideração a totalidade dos valores da variável em estudo, e não apenas os valores externos, como a amplitude total (Crespo, 2002). Por isso, essas medidas são índices de variabilidade bastantes estáveis e, consequentemente, muito utilizados no cotidiano.

Além disso, a variância e o desvio padrão complementam informações obtidas pelas medidas de tendência central, ou seja, A variância e o desvio padrão são duas medidas de dispersão que mostram como os valores de um conjunto de dados são distribuídos em torno da média.

A variância amostral é uma medida estatística que indica quantos valores de uma variação em relação à média da própria amostra. Ela é particularmente útil para entender a dispersão dos dados, ou seja, o quanto os valores estão "espalhados" ou concentrados em torno da média.

Podemos dizer também que a variância, denotada por S^2 , é encontrada a partir dos desvios em torno da média aritmética, conforme pode ser observado na fórmula a seguir:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n-1}.$$

da própria amostra. Ela é particularmente útil para entender a dispersão dos dados, ou seja, o quanto os valores estão "espalhados" ou concentrados em torno da média.

Aqui $(x_i)_{i=1}^n$ representa cada elemento do conjunto de dados, $\bar{x}$ é a média do conjunto e n representa o número de elementos do conjunto. O desvio padrão, denotado por D_P , é a raiz quadrada da variância. Assim teremos:

$$D_P = \sqrt{S^2} \text{ ou } D_P = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}.$$

A variância populacional mede a dispersão dos valores de uma população inteira em relação à sua média (ou média populacional). A população é o conjunto completo de elementos que estamos estudando, como todas as pessoas de uma cidade ou todos os itens de um estoque.

O desvio padrão é a medida de dispersão mais utilizada porque aponta de forma mais precisa a dispersão dos valores em relação à média aritmética (Nazareth, 2003).

O desvio padrão de uma série será sempre um valor positivo, e quanto maior esse valor, maior será a dispersão entre os elementos.

Quando nos deparamos com dados agrupados, o valor das frequências também precisa ser levado em consideração para o cálculo do desvio padrão. Assim sendo, a fórmula para o cálculo do desvio padrão para dados agrupados é a seguinte:

$$D_P = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f(x)x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n f(x)x_i}{n}\right)^2},$$

em que f representa a frequência de um determinado elemento.

Definição 1.5 *Uma função é uma correspondência que associa cada elemento de um conjunto não vazio A a um único elemento de outro conjunto não vazio B*

$$f : A \rightarrow B,$$

em que lê-se f de A em B .

Em uma função $f : A \rightarrow B$ o conjunto A é chamado de D -domínio e o conjunto B recebe o nome de CD -contradomínio.

Considere dois conjuntos não vazios A e B , em que uma função f relaciona cada elemento de A a um único elemento de B . Poderíamos sintetizar essa definição da seguinte forma: Função é uma relação de um conjunto não vazio em outro conjunto também não vazio, em que cada elemento do primeiro conjunto se relaciona com um único elemento do outro.

Um elemento de B relacionado a um elemento de A recebe o nome de imagem pela função. Agrupando todas as imagens de B temos um conjunto imagem, que é um subconjunto do contradomínio.

Exemplo 1.6 Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, com a função que determina a relação entre os elementos

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ x &\mapsto f(x) = 2x. \end{aligned}$$

Note que o conjunto de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ são as entradas, "multiplicar por 2" é a função e os valores de $B = \{2, 4, 6, 8\}$, que se ligam aos elementos de A , são os valores de saída.

Portanto, para essa função, temos como $D = \{1, 2, 3, 4\}$ e $CD = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e o CI -conjunto imagem, ou seja, $CI = \{2, 4, 6, 8\}$.

Estabelecemos uma função quando relacionamos uma ou mais grandezas. Parte dos fenômenos naturais pode ser estudada graças ao desenvolvimento nessa área da matemática. O estudo das funções é dividido em duas partes, temos a parte geral, em que estudamos os conceitos gerais e a parte específica, em que estudamos os casos particulares, como as funções periódicas e outros tipos de função (Iezzi, 1997; Iezzi, 2016).

1.1.4 Função Ímpar e Função Par

Uma função matemática pode ser classificada como par ou ímpar, dependendo de algumas características. Também conhecida como paridade, indica se são simétricas em relação ao eixo y ou à origem de um sistema cartesiano.

Funções pares produzem gráficos simétricos ao eixo y e funções ímpares simétricas à origem do sistema cartesiano. Portanto, podemos definir uma função par usando a seguinte definição.

Definição 1.7 Uma função f é par se, e somente se, para todo x real tivermos

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = f(-x), \forall x \in A. \end{aligned}$$

Definição 1.8 Uma função f é ímpar se, e somente se, para todo x real tivermos

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = -f(-x) \text{ ou } f(-x) = -f(x), \forall x \in A. \end{aligned}$$

Uma função sem paridade é que não possui nenhuma destas características, ou seja, não é par e nem ímpar.

Definição 1.9 Uma função f é dita crescente em um intervalo I se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a I , com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) \leq f(x_2)$. Em outras palavras, à medida que x aumenta dentro do intervalo I , o valor da função também aumenta.

Definição 1.10 Uma função f é dita decrescente em um intervalo I se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a I , com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_2) \leq f(x_1)$. Em outras palavras, à medida que x diminui dentro do intervalo I , o valor da função também diminui.

Existe outras condições que a função pode assumir como:

1. Estritamente crescente se $f(x_1) < f(x_2)$ para quaisquer $x_1 < x_2$;
2. Estritamente decrescente se $f(x_2) < f(x_1)$ para quaisquer $x_2 < x_1$;
3. Não decrescente $f(x_1) \leq f(x_2)$ para quaisquer $x_1 < x_2$;
4. Não crescente $f(x_2) \leq f(x_1)$ para quaisquer $x_2 < x_1$.

Exemplo 1.11 : Demonstrar, sem usar conhecimento de derivadas, que a função $f(x) = 2x - 3$ é estritamente crescente.

Solução: Pela item (2) acima, sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ quaisquer tal que $x_1 < x_2$. Assim, temos

$$f(x_1) = 2x_1 - 3 \text{ e } f(x_2) = 2x_2 - 3,$$

subtraindo a expressão $f(x_2)$ por $f(x_1)$ a cima membro a membro, temos

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= 2x_2 - 3 - (2x_1 - 3) \\ &= 2x_2 - 3 - 2x_1 + 3 \\ &= 2x_2 - 2x_1 \\ &= 2(x_2 - x_1), \end{aligned}$$

como por hipótese temos $x_1 < x_2$, então $0 < x_2 - x_1$. Nesse caso, obtemos

$$f(x_2) - f(x_1) = 2(x_2 - x_1) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

Assim, fica estabelecido que a função $f(x) = 2x - 3$ é estritamente crescente sem usar o conceito de derivada.

1.1.5 Função Limitada

Definição 1.12 Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de limitada, se existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Isso significa que os valores da função estão contidos em um intervalo finito, ou seja, não crescem indefinidamente.

Vejam um simples exemplo de uma função limitada. Consideremos a função constante $f(x) = 3, \forall x \in \mathbb{R}$, então f é limitada.

De fato, para todo x , se tomarmos qualquer $M \geq 3$, tem-se $M \geq 3 = |3| = |f(x)|$.

Portanto, a função f é limitada.

Outras funções clássicas limitadas são as funções seno e cosseno (Stewart, 2018). Nessa caso, ambas não excede o valor 1. Assim, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| = |\sin(x)| = |\cos(x)| \leq 1.$$

1.1.6 Função Periódica

Definição 1.13 Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de periódica, se para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $P > 0$ tal que

$$f(x + P) = f(x).$$

Em outras palavras, a função se repete a cada intervalo de comprimento P . Isso significa que os valores da função são idênticos em intervalos regulares.

Exemplo 1.14 Como exemplo de uma função periódica, podemos citar a função seno que tem período $P = 2\pi \text{ rad}$. Isto é, o seno de qualquer número real se repete a cada múltiplo de 2π . Formalmente podemos escrever $f(x) = \text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Consideremos a função $f(x) = \text{sen}(x)$. Vejamos que a função seno é periódica, com período 2π .

Solução: Nesse caso, basta usarmos a identidade trigonométrica

$$f(x) = \text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Isso ocorrer e porque a função seno descreve um ciclo completo em 2π radianos, retornando ao mesmo valor.

Outras funções periódicas incluem a função cosseno, também com período 2π , e a função tangente, que tem período π . Em resumo, uma função é periódica quando se repete em intervalos regulares, e o intervalo no qual isso ocorre é o período P .

Para facilitar o nosso entendimento, vamos fazer uma aplicação usando modelagem matemática de uma função trigonométrica com movimento das marés. As marés (CHM, 2025) são fenômenos periódicos resultantes da interação gravitacional entre a Lua, o Sol e a Terra. Para modelar a altura da maré em um local específico, utilizamos funções trigonométricas que descrevem a contribuição periódica de cada corpo celeste. A altura da maré, representada por h pode ser vista como a soma de duas componentes principais: uma associada à Lua e outra ao Sol.

Como exemplo prático, vamos construir um modelo matemático para representar a altura das marés em São Luís-Ma, utilizando dados reais de marés para o dia 25 de abril de 2025.

Tabela 4: Tábua de marés do dia 25 de abril de 2025

MARÉ	HORA	METROS
MARÉ ALTA	04:47	5,64
MARÉ BAIXA	11:04	0,60
MARÉ ALTA	17:17	5,83
MARÉ BAIXA	23:29	0,49

Fonte: <https://www.marinha.mil.br/chm/tabuas-de-mare>

Para modelar a altura da maré h ao longo do tempo t , podemos utilizar uma função cossenoidal que reflete a natureza periódica das marés. Uma forma simplificada é:

$$h(t) = A \cos(\omega t + \phi) + C,$$

onde A é a amplitude da maré, $w = \frac{2\pi}{P}$ é a frequência angular e P é o período, ϕ é a fase ajustada para alinhar o modelo com os dados observados, C é o valor médio da maré.

Cálculo dos Parâmetros:

1.

$$A = \frac{5,83 - 0,49}{2} \Rightarrow A = 2,67m;$$

2.

$$C = \frac{5,83 + 0,49}{2} \Rightarrow C = 3,16m;$$

3.

$$w = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{12,5} \approx 0,5026rad/h,$$

em q $P = 12,5h$ é intervalo entre duas marés altas consecutivas.

Para determinar ϕ , consideramos que a maré alta ocorre no tempo $t = 1037min$, ou seja, $t \approx 17,3h$. Devemos ter $h(17,3) = 5,83m$, então

4.

$$\begin{aligned} 5,83 &= 2,67\cos(0,5026 \cdot 17,3 + \phi) + 3,16 \Rightarrow \cos(8,69 + \phi) = \frac{5,83 - 3,16}{2,67} \\ &\Rightarrow \cos(8,69 + \phi) = 1 \\ &\Rightarrow 8,69 + \phi = 0 \\ &\Rightarrow \phi = -8,69. \end{aligned}$$

Deslocamento Horizontal: O valor dentro do cosseno é $0,5026t - 8,78$. Para achar o deslocamento horizontal t_0 devemos impor que

$$0,5026t - 8,69 = 0 \Rightarrow t = \frac{8,69}{0,5026} \Rightarrow t \approx 17,29.$$

Isso significa que o cosseno foi deslocado para a direita em cerca de 17,29 unidades.

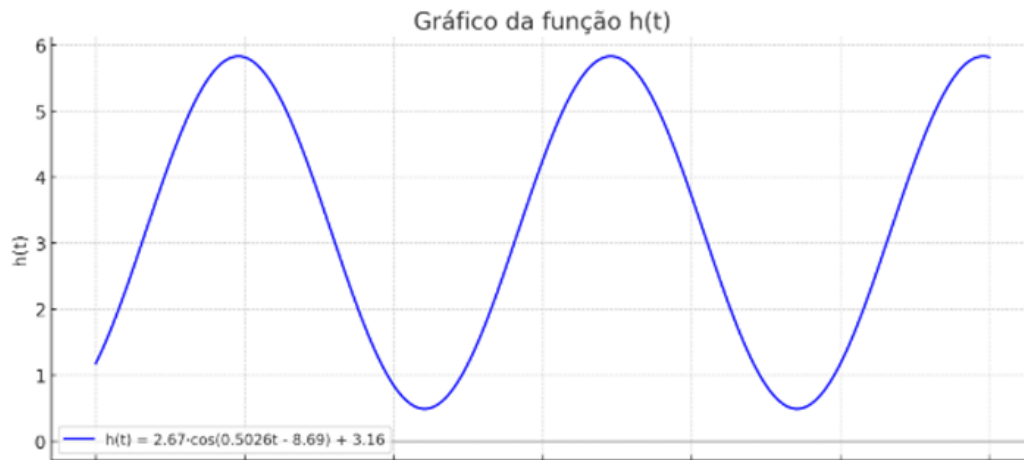
Nesse caso, o modelo final é:

$$h(t) = 2,67\cos(0,5026t - 8,69) + 3,16.$$

Importante ressaltar que foi desenvolvido um applet no GeoGebra para o comportamento da função $h(t)$ com $0 \leq t \leq 12,5$ (para um período completo), disponível no link: <https://www.geogebra.org/classic/ap2yhvrh>

Este modelo fornece uma aproximação da altura da maré $h(t)$ em metros, com t representando o tempo em horas desde a meia-noite. Essa função pode ser representada pelo gráfico abaixo Figura 1.

No gráfico da Figura 2 temos destacado a média, os valores máximos e mínimos, além das interseções com a média. Figura 2 representa o gráfico da função $h(t)$, com os seguintes destaques:

Figura 1: Gráfico do modelo das marés em São Luis

Fonte: Autor.

Figura 2: Gráfico do modelo das marés em São Luis e pontos críticos

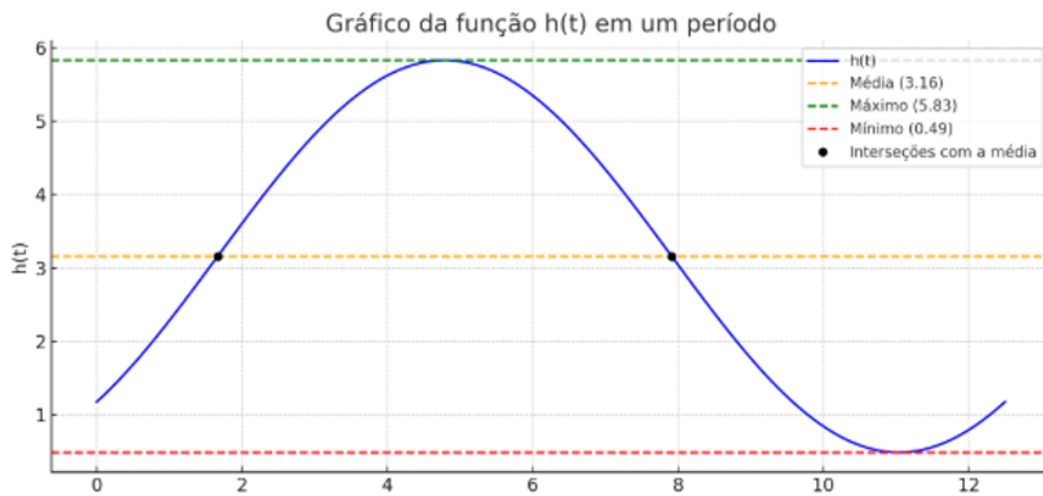
Fonte: Autor.

- Linha laranja tracejada representa a média (3,16).
- Linha verde tracejada mostra o valor máximo (5,83).
- Linha vermelha tracejada marca o valor mínimo (0,49).
- Pontos pretos indicam as interseções da função com a média.

Verifique gráfico abaixo construído em apenas um período Figura 3.

Este modelo é uma simplificação e assume que as marés seguem um padrão senoidal perfeito, o que não considera todas as influências astronômicas e meteorológicas reais.

Para uma modelagem mais precisa, seria necessário incluir múltiplos componentes harmônicos que representam diferentes forças gravitacionais e suas interações.

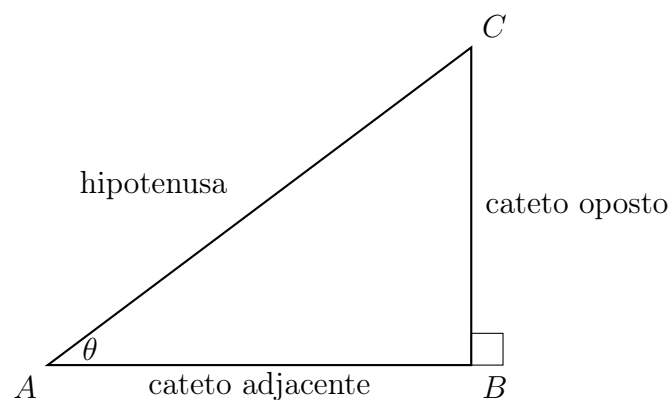
Figura 3: Gráfico do modelo das marés em São Luis - pontos de interseção

Fonte: Autor.

1.1.7 Funções Trigonômétricas Simples

Os conceitos de **seno**, **cosseno** e **tangente** surgem inicialmente na análise dos triângulos retângulos e se estendem de forma natural ao círculo unitário, também chamado de ciclo trigonométrico, como forma de funções. Considere um triângulo retângulo de catetos a e b , e hipotenusa c . Dado um ângulo θ agudo, definimos:

- $\text{sen}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$
- $\text{cos}(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$
- $\text{tan}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{a}{b}$

Figura 4: Triângulo retângulo ilustrando as razões trigonométricas

Fonte: Autor.

Esses assuntos são tratados nos livros didáticos de forma detida, como pode se observar no livro (cita uma bibliografia). Nesse trabalho, vamos abordar como uma aplicação.

1.1.8 Aplicação - Painéis Solares e o Rastreamento do Sol

Suponha que um painel solar esteja equipado com um sistema de rastreamento automatizado que gira o painel de forma a acompanhar o Sol durante o dia. Esse sistema precisa incorporar, a cada instante, o ângulo de inclinação necessário em relação ao horizonte. Esse ângulo, medido em graus nas tabelas solares, precisa ser convertido para radianos quando é utilizado em cálculos trigonométricos dentro do software embarcado no sistema.

A modelagem pode ser feita considerando, por exemplo, que o ângulo de elevação do Sol em determinada cidade em um dia específico varia ao longo do tempo conforme uma função do tipo:

$$\theta(t) = (90^\circ - \lambda) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{2} \right), \quad (1.4)$$

para $t \in [0, 24]$, onde $\theta(t)$ é o ângulo de elevação do Sol em graus e t o tempo em horas e λ é a latitude da localidade onde está o experimento.

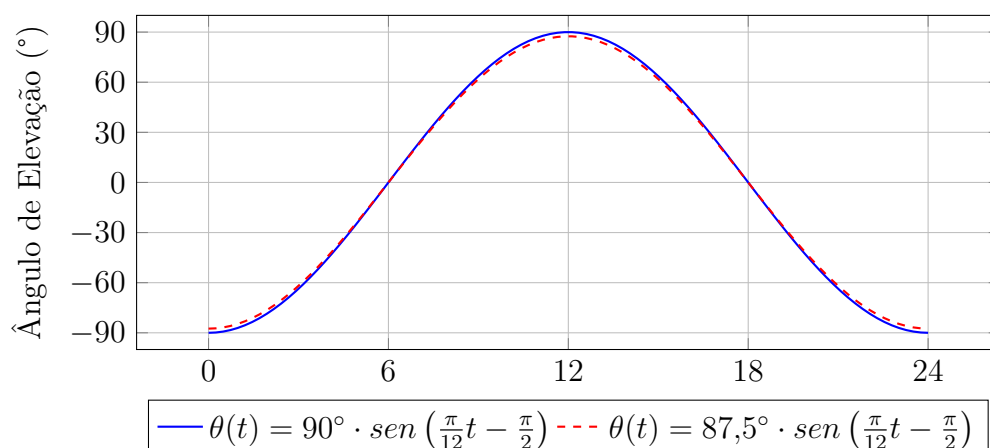
Para implementar esse modelo em um programa que utilize radianos como unidade padrão, é necessário converter $\theta(t)$ para radianos:

$$\theta_{\text{rad}}(t) = \frac{\pi}{180} \cdot 90 \text{sen} \left(\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (1.5)$$

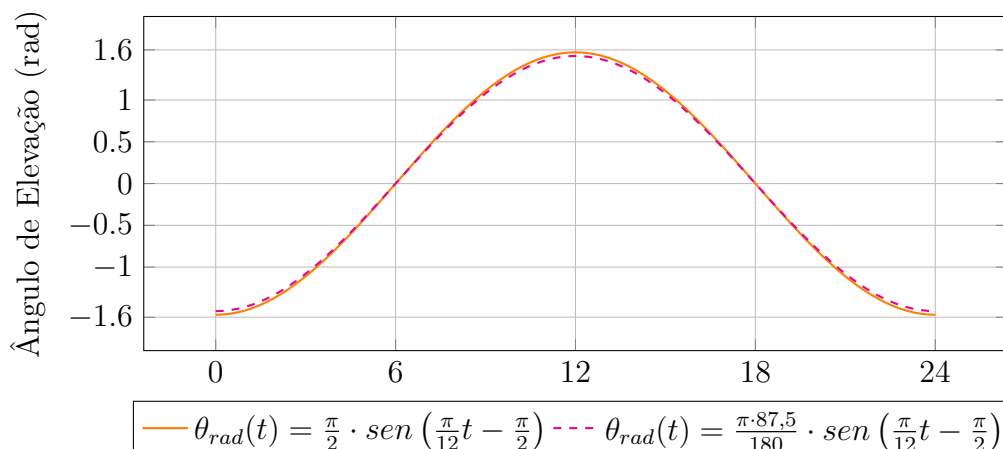
A latitude da cidade de São Luís-MA é aproximadamente $2,5^\circ$ Sul. Esse valor influencia diretamente a inclinação máxima do Sol ao meio-dia solar verdadeiro. A elevação máxima pode ser modelada, simplificada, como: com $\lambda = 2,5^\circ$. Logo, temos:

$$\theta(t) = 87,5^\circ \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (1.6)$$

Figura 5: Comparação entre o modelo geral e o ajustado para São Luís-MA (em graus)



Fonte: Autor.

Figura 6: Comparação entre o modelo geral e o ajustado para São Luís-MA (em radianos)**Fonte:** Autor.

Ao considerar variações suaves na latitude, como ocorre em regiões com pequenas oscilações geográficas ou medições imprecisas, pode-se enriquecer o modelo incluindo um tratamento de incerteza para o parâmetro λ . Essa abordagem pode ser feita com base em ideias da *lógica fuzzy*, onde λ não é mais tratado como um valor fixo, mas como uma variável que pertence a um conjunto de valores com diferentes graus de pertinência (Silva, 2005).

Por exemplo, poderíamos definir que a latitude de São Luís-MA, nominalmente $2,5^\circ$, está inserida em um intervalo de confiança, como $[2,3^\circ; 2,7^\circ]$, atribuindo a cada valor um grau de confiança ou pertinência fuzzy. Isso impactaria o coeficiente angular da função:

$$\theta(t) = (90^\circ - \lambda) \text{sen} \left(\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{2} \right), \quad (1.7)$$

e possibilitaria discutir com os alunos como pequenos ajustes no parâmetro influenciam o comportamento do modelo.

No *GeoGebra*, esse raciocínio pode ser transformado em uma atividade exploratória interativa, usando um **controle deslizante** para o valor de λ , permitindo observar em tempo real a mudança na curva de elevação solar. Essa visualização promove a compreensão intuitiva dos efeitos do parâmetro, além de introduzir os conceitos básicos de variabilidade, sensibilidade e incerteza em modelagem.

Sugestão de atividade: criar no *GeoGebra* uma função do tipo

$$f(t) = (90 - \lambda) \text{sen} \left(\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{2} \right), \quad \text{com } \lambda \in [0^\circ, 30^\circ]$$

e permitir que os alunos movimentem o controle deslizante de λ para observar como a altura máxima do Sol se altera conforme diferentes latitudes são simuladas. Essa proposta favorece uma abordagem investigativa e interdisciplinar entre matemática, geografia e ciência dos dados.

Essa aplicação permite ao aluno compreender:

- O significado da variação periódica da luz solar;
- A importância da função seno como modelo de fenômeno real;

- A conversão necessária entre unidades para implementação computacional;
- A relevância prática de conceitos matemáticos em tecnologias sustentáveis.

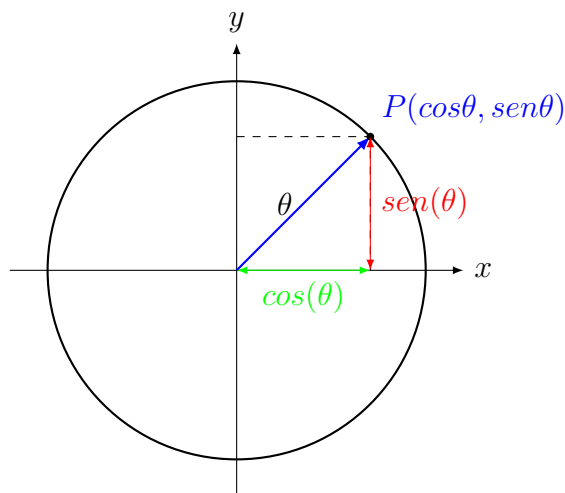
Esse tipo de atividade pode ser enriquecido com o uso do *GeoGebra*, simulando o gráfico da elevação solar, ou com o *ChatGPT*, pedindo auxílio para obter os dados solares reais da cidade ou validar a função aproximada a partir da latitude. A esse respeito foi realizado no Geogebra um experimento, disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/wnehzqtp>

1.1.9 Ciclo Trigonométrico

O **ciclo trigonométrico** é uma representação do círculo de raio 1 centrado na origem de um sistema cartesiano ortogonal (x, y) . Nele, um ponto P percorre a circunferência com velocidade angular constante a partir do eixo positivo das abscissas. A cada ângulo θ percorrido, temos:

- $\cos(\theta)$: a abscissa do ponto P ;
- $\sin(\theta)$: a ordenada do ponto P ;
- $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$, definida quando $\cos(\theta) \neq 0$.

Figura 7: Representação geométrica das funções seno e cosseno no ciclo trigonométrico



Fonte: Autor.

A extensão das funções seno, cosseno e tangente para todos os reais ocorre ao considerarmos o ângulo θ variando continuamente ao redor da circunferência, o que leva ao comportamento **periódico** dessas funções.

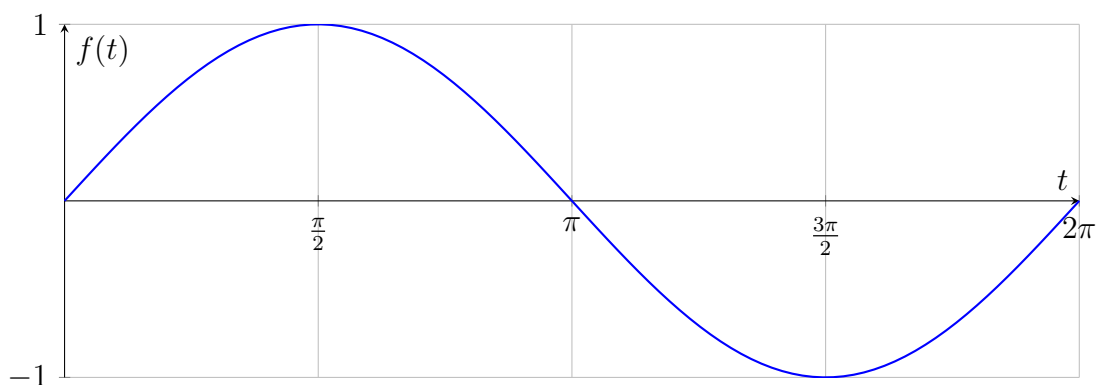
1.1.10 As Funções Seno e Cosseno - forma geral

A forma geral da função seno pode ser expressa por:

$$f(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) + C, \quad (1.8)$$

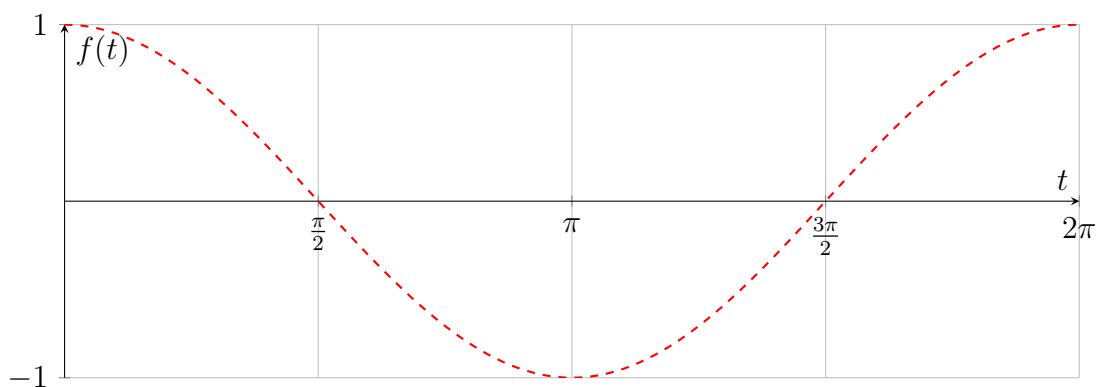
em que A é a amplitude, $\omega = \frac{2\pi}{P}$, ϕ é a fase e C o deslocamento vertical. Os experimentos realizados no Geogebra podem ser consultados em:
[urlhttps://www.geogebra.org/classic/agqecuyj](https://www.geogebra.org/classic/agqecuyj)

Figura 8: Gráfico da função $f(t) = \operatorname{sen}(t)$

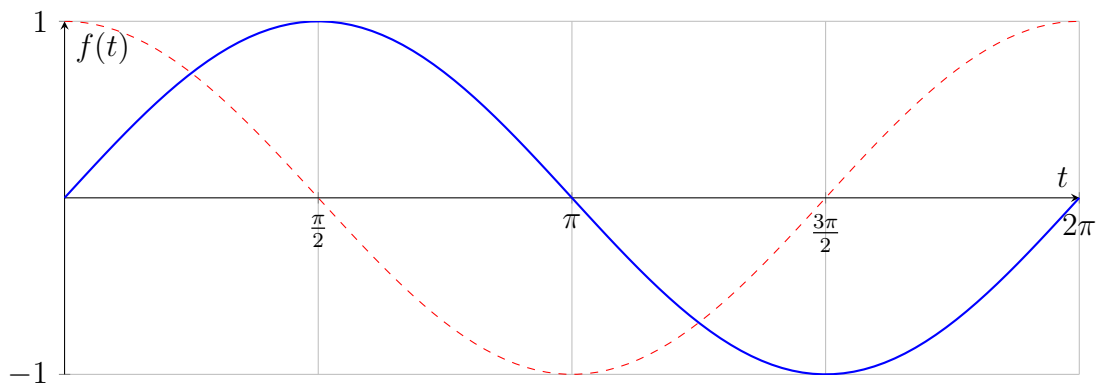


Fonte: Autor.

Figura 9: Gráfico da função $f(t) = \cos(t)$

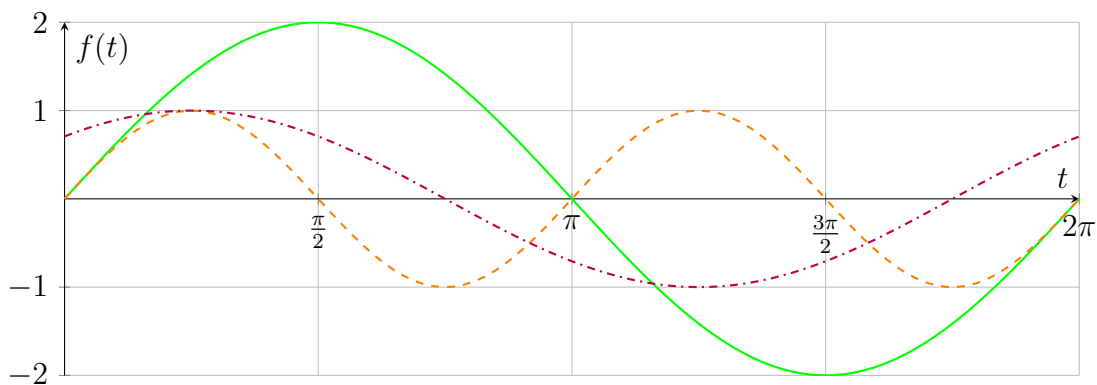


Fonte: Autor.

Figura 10: Comparação entre $\sin(t)$ (azul) e $\cos(t)$ (vermelho)

Fonte: Autor.

Características das Funções Periódicas

Figura 11: Efeitos dos parâmetros: Amplitude (verde), Período (laranja), Fase (roxo)

Fonte: Autor.

Outras Funções Periódicas

Figura 12: Gráfico da função tangente: $f(t) = \tan(t)$ com assíntotas verticais

Fonte: Autor.

MODELAGEM MATEMÁTICA, IA E ENSINO

O ensino de matemática, frequentemente criticado por sua abordagem abstrata e descontextualizada, pode se beneficiar de metodologias que conectam os conceitos teóricos à realidade dos alunos. A modelagem matemática é uma dessas estratégias, permitindo que os estudantes compreendam e analisem fenômenos do cotidiano por meio de representações matemáticas.

Neste capítulo, abordamos a modelagem matemática como ferramenta pedagógica, destacando sua aplicação na educação básica e seu potencial para desenvolver o pensamento crítico e a autonomia dos alunos. Exploramos ainda sua interdisciplinaridade, analisamos os desafios de implementação e apresentamos um caso prático baseado no cálculo da tábua de maré.

2.1 Modelagem Matemática

A modelagem matemática constitui uma estratégia metodológica de grande relevância para o ensino da matemática, sobretudo na Educação Básica. Trata-se de um processo que envolve a tradução de uma situação-problema do mundo real para a linguagem matemática, sua resolução nesse contexto formal e, posteriormente, a interpretação da solução no cenário original. Esse percurso permite que o aluno perceba a matemática como uma ferramenta útil para compreender e intervir no mundo à sua volta.

De acordo com Bassanezi (2002), a modelagem promove uma aprendizagem significativa, pois insere o estudante em um ciclo de investigação ativa. Nessa perspectiva, ele participa de etapas como a compreensão do fenômeno, a formulação e análise do modelo, bem como a sua validação. Ao invés de ser um receptor passivo de informações, o aluno torna-se protagonista do processo, desenvolvendo competências de análise, argumentação e comunicação.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reforça esse enfoque ao sugerir que a matemática escolar esteja conectada a contextos reais e que os estudantes sejam desafiados a resolver problemas que tenham significado em seu cotidiano. No caso específico do Ensino Médio, as diretrizes apontam para a necessidade de trabalhar funções com base em relações entre grandezas, na análise de padrões de variação e na interpretação de gráficos.

2.1.1 Um Exemplo de Modelagem de Fenômeno Periódico com IA

Para ilustrar o potencial da modelagem matemática aliada à inteligência artificial, consideremos um exemplo simples: a variação da temperatura ao longo de um dia em uma cidade como São Luís-MA.

Suponha que os alunos tenham acesso a dados reais (ou simulados) da temperatura registrada a cada hora do dia. Com o apoio do *ChatGPT*, é possível obter uma tabela representativa desses dados ou mesmo automatizar a coleta de informações históricas. A partir desses dados, os estudantes podem:

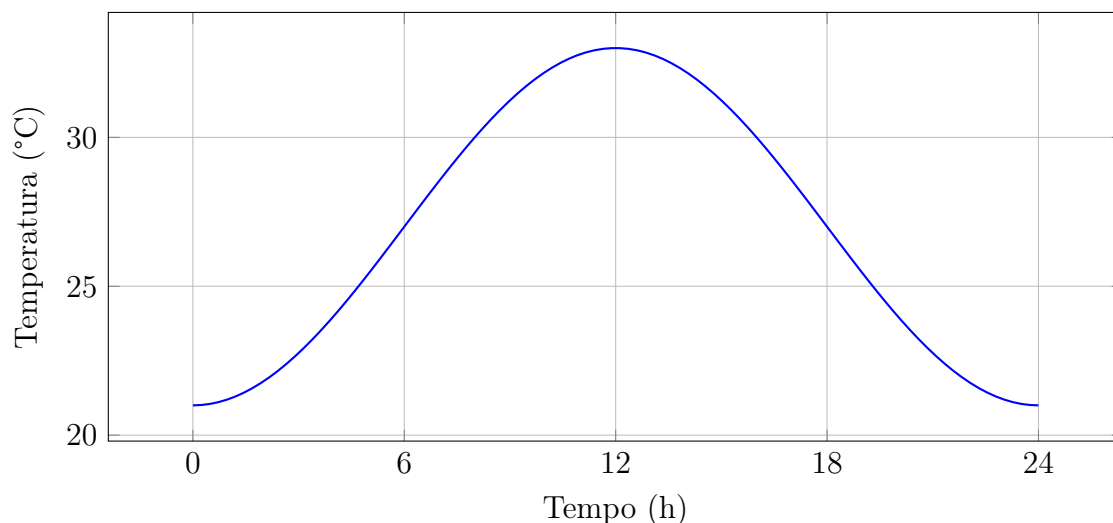
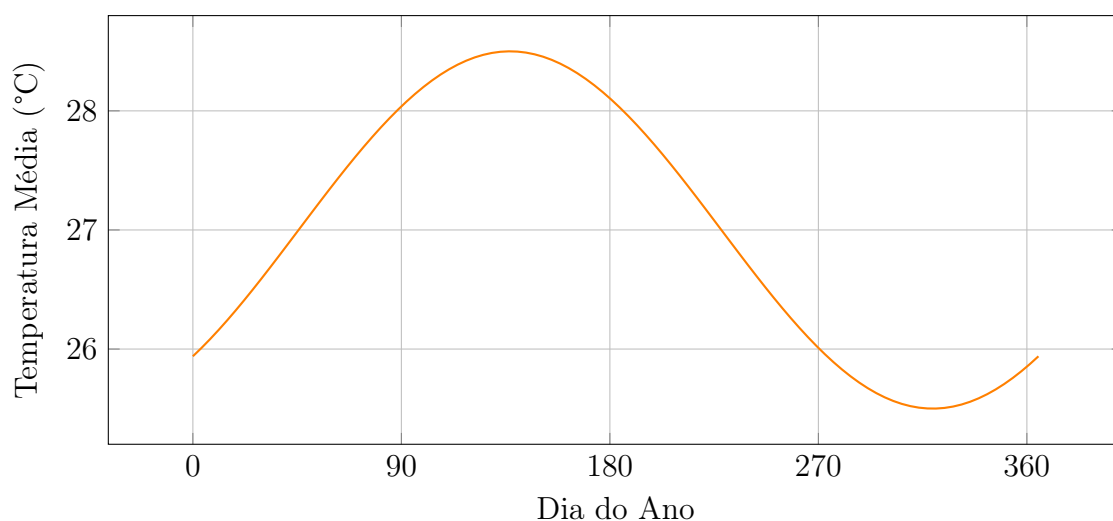
- Construir um gráfico de dispersão;
- Identificar padrões cíclicos de variação;
- Sugerir um modelo com função seno ou cosseno para descrever esse comportamento;
- Ajustar os parâmetros de amplitude, período, fase e deslocamento vertical;
- Comparar o gráfico da função com os dados reais.

O *ChatGPT*, nesse processo, atua como um agente de apoio, sugerindo formas de iniciar o modelo, explicando o papel de cada parâmetro e até validando o modelo proposto.

Exemplo 2.1 Ao fornecer a equação $T(t) = 27 + 6\sin\left(\frac{2\pi}{24}t - \frac{\pi}{2}\right)$, o assistente pode explicar que:

- 27 representa a temperatura média;
- 6 é a amplitude, ou seja, a oscilação em torno da média;
- $\frac{2\pi}{24}$ garante o período de 24 horas;
- $-\frac{\pi}{2}$ ajusta a fase para que o pico de calor ocorra ao meio-dia.

Com isso, o estudante percebe a aplicação concreta da função seno, entende seus componentes e, principalmente, vê sentido na construção do modelo. Essa abordagem combina análise de dados, interpretação gráfica, ajuste funcional e raciocínio lógico, em uma atividade que integra matemática, ciência, tecnologia e linguagem natural.

Figura 13: Modelo de variação diária da temperatura: $T(t) = 27 + 6\text{sen}\left(\frac{2\pi}{24}t - \frac{\pi}{2}\right)$ **Fonte:** Autor.**Figura 14:** Modelo de variação anual da temperatura: $T(t) = 27 + 1,5\text{sen}\left(\frac{2\pi}{365}t - \frac{\pi}{4}\right)$ **Fonte:** Autor.

2.1.2 Unidades de Medida: Graus e Radianos

Um aspecto importante ao trabalhar com funções trigonométricas no contexto da modelagem matemática é a unidade em que os ângulos são medidos. No cotidiano escolar, os ângulos geralmente são apresentados em graus, como 30° , 90° , 180° , entre outros. No entanto, do ponto de vista matemático e computacional, especialmente ao utilizar ferramentas como o *GeoGebra*, linguagens de programação ou assistentes de IA como o *ChatGPT*, a unidade padrão de medida angular é o **radiano**.

Um radiano é definido como o ângulo correspondente a um arco de comprimento igual ao raio da circunferência. Assim, temos as seguintes equivalências fundamentais:

- $180^\circ = \pi$ radianos;

- $360^\circ = 2\pi$ radianos;
- $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ radianos.

Portanto, ao modelar um fenômeno periódico por meio da função seno ou cosseno, a variável independente (tempo, por exemplo) precisa estar coerente com a forma como o argumento da função trigonométrica é tratado.

Exemplo 2.2 Na equação:

$$f(t) = 27 + 6\text{sen}\left(\frac{2\pi}{24}t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.1)$$

os parâmetros estão expressos em radianos, pois o período (24h) foi ajustado para que a função sen receba valores compatíveis com sua definição matemática no sistema internacional de unidades (SI).

Em ambientes como o *GeoGebra* ou calculadoras científicas, é fundamental verificar se o modo de entrada está configurado para graus ou radianos, pois isso afeta diretamente o resultado dos cálculos trigonométricos. Um erro comum em sala de aula é utilizar a calculadora em modo grau enquanto o modelo foi construído assumindo radianos, o que leva a distorções nos valores numéricos e gráficos.

Para evitar confusões e promover a alfabetização matemática, é importante trabalhar com atividades que permitam ao aluno comparar os dois sistemas e perceber que embora sejam diferentes em forma, são equivalentes em conteúdo e que a conversão entre eles é uma habilidade essencial para a leitura e construção de modelos matemáticos com funções periódicas.

2.1.3 Integração da Tecnologia e da IA ao Ensino de Matemática

O uso de tecnologias digitais no ensino da matemática tem se expandido de forma significativa nas últimas décadas. Ferramentas como o *GeoGebra* permitem que os alunos explorem graficamente funções, manipulem parâmetros e visualizem de forma dinâmica o comportamento das curvas, promovendo uma aprendizagem mais interativa e significativa.

Estudos recentes demonstram que essas ferramentas favorecem diferentes estilos de aprendizagem visual, cinestésico e auditivo e contribuem para um maior engajamento dos alunos. O ato de "ver" o gráfico de uma função mudar à medida que os parâmetros são ajustados é, por si só, um elemento didático poderoso.

Exploração no GeoGebra

A título de ilustração Para potencializar a compreensão dos fenômenos, foram construídos applets no *GeoGebra* com:

- Controles deslizantes para T_m , A , P e ϕ ;
- Comparação dos modelos ajustados com dados reais;
- Investigação de variações e sensibilidade dos parâmetros.

Essa abordagem promove a aprendizagem ativa e interdisciplinaridade, conectando matemática, geografia e ciências ambientais.

Importante ainda destacar que mais recentemente, a Inteligência Artificial (IA) passou a figurar como uma nova aliada do ensino. Modelos como o *ChatGPT* têm sido utilizados como assistentes pedagógicos, auxiliando na elaboração de planos de aula, esclarecimento de dúvidas e proposição de atividades. No contexto da modelagem matemática, a IA pode atuar em várias frentes: sugerir fenômenos que se prestam à modelagem, organizar dados reais, auxiliar em cálculos e validações e até mediar o diálogo entre aluno e conhecimento.

O papel da IA não é substituir o professor, mas expandir suas possibilidades didáticas. Ao preparar uma aula sobre funções periódicas, por exemplo, o professor pode utilizar o *ChatGPT* para obter dados de temperatura de sua cidade, buscar contextos reais e elaborar roteiros de investigação de forma mais ágil e diversificada. A IA torna-se, assim, uma ferramenta de apoio que personaliza, dinamiza e enriquece o processo de ensino-aprendizagem.

2.1.4 Sequências Didáticas no Ensino de Funções Trigonométricas

A estruturação de sequências didáticas é um componente importante para garantir coerência e progressão na aprendizagem. No caso das funções trigonométricas, uma sequência bem elaborada pode iniciar com a observação de fenômenos reais (como a variação da temperatura ao longo do dia), prosseguir com a coleta e análise de dados, conduzir à construção de modelos com funções seno e cosseno, e culminar em discussões conceituais e interdisciplinares.

Essas etapas devem ser organizadas de forma lógica, de modo que cada nova atividade esteja relacionada a anterior e prepare o terreno para a próxima. Estudos como os de Lobato (2022) e Munhoz (2022) demonstram que essa abordagem melhora a compreensão dos conceitos e aumenta a motivação dos alunos.

Nesta dissertação, partimos da modelagem da temperatura média diária e anual em São Luís-MA como base da sequência didática. Integrando o uso de *GeoGebra* e consultas ao *ChatGPT*, buscamos não apenas explorar as propriedades das funções periódicas, mas também aproximar o ensino de matemática da realidade dos alunos e dos recursos tecnológicos disponíveis.

A seguir, detalharemos a metodologia adotada, com foco na construção dos modelos, nas atividades propostas e nos instrumentos de coleta e análise dos dados.

2.1.5 Atividade: Correção de Média Contaminada – Dados Reais de São Luís (2005)

Objetivo: Aplicar o raciocínio matemático para corrigir uma média aritmética obtida a partir de dados reais que incluem registros inválidos.

Contextualização: Durante o processamento dos dados de temperatura do ar da cidade de São Luís no ano de 2005, observou-se que no mês de janeiro foram registradas temperaturas horárias ao longo de 744 medições. No entanto, cinco dessas medições apresentaram o valor -9999, indicando erro de leitura ou falha no equipamento meteorológico.

Para manter a fidelidade das análises, é necessário corrigir a média mensal originalmente calculada considerando todos os dados (inclusive os inválidos).

Situação-Problema:

Sabendo que:

- Foram coletadas 744 medições de temperatura em janeiro de 2005;
- Dentre essas medições, 5 possuem o valor inválido de -9999;
- A média aritmética inicial (considerando todos os dados) foi calculada como $\bar{x}_{\text{contaminada}} = -39,75^{\circ}\text{C}$;

Pergunta-se:

1. Como calcular a média verdadeira de temperatura, sem a influência dos valores inválidos, sem necessidade de recalcular todas as médias manualmente?
2. A média correta será maior ou menor que a média contaminada? Justifique.

Orientação para Resolução:

Utilizar a seguinte fórmula de correção:

$$\bar{x}_{\text{corrigida}} = \frac{n \times \bar{x}_{\text{contaminada}} - (e_1 + e_2 + \dots + e_K)}{n - K}$$

em que:

- $n = 744$ (número de medições);
- $K = 5$ (número de medições inválidas);
- $e_1 = e_2 = \dots = e_5 = -9999$ (valores inválidos);
- $\bar{x}_{\text{contaminada}} = -39,75^{\circ}\text{C}$ (média inicial incorreta).

Aplicação:

Calcular:

- Soma total com erros:

$$S = 744 \times (-39,75) = -29514,00$$

- Soma dos valores inválidos:

$$5 \times (-9999) = -49995$$

- Soma corrigida:

$$S_{\text{corrigido}} = -29514,00 - (-49995) = 20481,00$$

- Número de dados corrigido:

$$n_{\text{corrigido}} = 744 - 5 = 739$$

- Média corrigida:

$$\bar{x}_{\text{corrigida}} = \frac{20481,00}{739} \approx 27,72^{\circ}C$$

Discussão:

A nova média corrigida ($27,72^{\circ}C$) é substancialmente maior do que a média contaminada ($-39,75^{\circ}C$). Isso demonstra como poucos registros extremamente fora da escala (neste caso, -9999) podem distorcer fortemente a média aritmética.

A atividade enfatiza a importância do tratamento adequado de dados na construção de modelos confiáveis.

Extensões:

- Propor aos alunos que simulem situações semelhantes em outros meses;
- Analisar o impacto que diferentes quantidades de erros teriam na média;
- Investigar como seria o erro percentual introduzido na média pela presença dos valores inválidos.

Roteiro de Resolução – Atividade

Nome do aluno(a): _____

Turma: _____

Data: _____

Contexto:

Durante o processamento dos dados de temperatura do mês de janeiro de 2005 para a cidade de São Luís, observou-se que foram registradas 744 medições horárias. Dentre essas, 5 registros apresentaram o valor inválido de -9999.

A média aritmética inicial (considerando todos os dados) foi de $\bar{x}_{\text{contaminada}} = -39,75^{\circ}C$.

Tarefa:

Corrija a média, calculando:

1. A soma total inicial S (considerando todos os dados);
2. A soma dos valores inválidos;
3. A nova soma corrigida;
4. O novo número de dados válidos;
5. A nova média corrigida.

Espaço para Resolução:

1. Soma inicial: $S =$

2. Soma dos valores inválidos: Soma dos erros : S_{erros}

3. Soma corrigida: $S_{corrigido}$

4. Número de dados válidos: $N_{corrigido}$

5. Média corrigida: $\bar{x}_{corrigida} =$

Pergunta de reflexão: A média corrigida ficou maior ou menor do que a contaminada? Explique o motivo com suas palavras:

Tabela 5: Resumo dos Cálculos para Correção da Média – Janeiro de 2005

Descrição	Valor
Número total de registros (n)	744
Número de registros inválidos (K)	5
Média contaminada ($\bar{x}_{contaminada}$)	$-39,75^{\circ}C$
Soma total inicial (S)	
Soma dos valores inválidos	
Soma corrigida ($S_{corrigido}$)	
Número de registros válidos ($n_{corrigido}$)	
Média corrigida ($\bar{x}_{corrigida}$)	

Fonte: Autor.

2.2 Outras atividades de modelagem propostas

2.2.1 Atividade 1: Impacto de valores atípicos na Média

Objetivo: Analisar como a presença de valores extremos pode afetar significativamente a média de um conjunto de dados.

Contextualização: No levantamento de temperaturas de um determinado mês em São Luís, a maioria dos valores variava entre $26^{\circ}C$ e $30^{\circ}C$. Contudo, devido a uma falha no sensor, foi registrado um valor anômalo de $100^{\circ}C$.

Situação-Problema:

Sabendo que:

- Foram registradas 31 temperaturas médias diárias no mês;

- A média sem o valor atípico era de $27,5^{\circ}C$;
- O valor anômalo é $100^{\circ}C$.

Pergunta-se:

1. Qual será a nova média contaminada, considerando o valor de $100^{\circ}C$?
2. Qual o desvio percentual causado na média?

Orientação para Resolução:

Os alunos devem:

- Calcular a nova soma total adicionando o valor atípico;
- Determinar a nova média contaminada;
- Comparar a nova média com a original;
- Calcular o desvio percentual utilizando:

$$\text{Desvio}(\%) = \frac{|\bar{x}_{\text{contaminada}} - \bar{x}_{\text{corrigida}}|}{\bar{x}_{\text{corrigida}}} \times 100$$

2.2.2 Atividade 3: Simulação de Perda de Dados – Viés de Seleção

Objetivo: Compreender como a perda seletiva de dados pode enviesar as médias calculadas.

Contextualização: Uma falha no sistema de coleta eliminou 20% dos dados de temperatura de janeiro de 2005. Foram perdidos preferencialmente os dias mais quentes.

Situação-Problema:

Sabendo que:

- A média inicial (completa) era de $28,0^{\circ}C$;
- As temperaturas perdidas eram, em média, $31,0^{\circ}C$.

Pergunta-se:

1. Se retirarmos essas medições, como ficará a nova média estimada?
2. O que isso sugere sobre o viés introduzido na análise?

Orientação para Resolução:

Guiar os alunos para perceber que:

- A retirada de dias quentes reduz a média;
- O viés gerado compromete a interpretação dos dados.

2.2.3 Atividade 4: Construção de Séries Temporais e Interpolação Linear

Objetivo: Aplicar técnicas de interpolação para preencher lacunas em séries temporais e analisar os efeitos nas médias.

Contextualização: Um conjunto de medições de temperatura de São Luís apresenta falhas em dias alternados, resultando em buracos na série temporal.

Situação-Problema:

Dado o seguinte fragmento de dados:

$$(1; 27,5), (2; \text{falta}), (3; 28,0), (4; \text{falta}), (5; 27,8)$$

Pergunta-se:

1. Preencha os valores ausentes utilizando interpolação linear;
2. Compare a média da série original (sem interpolação) com a média da série completa interpolada.

Orientação para Resolução:

Lembre os alunos que:

- Interpolação linear consiste em assumir que a variação entre dois pontos conhecidos é constante;
- Após preenchimento, a nova média deve ser recalculada e comparada.

TRATAMENTO DE DADOS E FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo, apresentamos o processo de obtenção, seleção, tratamento e análise dos dados meteorológicos usados na construção dos modelos matemáticos desta dissertação. O objetivo é modelar fenômenos periódicos reais, com o apoio da Inteligência Artificial (IA), utilizando dados climáticos de São Luís-MA em escalas diárias e anuais.

3.1 Escolha das Fontes de Dados

Os dados foram extraídos do Instituto Nacional de Meteorologia (INMET), especificamente através do sistema BDMEP (Banco de Dados Meteorológicos para Ensino e Pesquisa). Optou-se pelos registros da estação automática de São Luís-MA devido à sua confiabilidade, cobertura temporal contínua e qualidade técnica.

Foram obtidos arquivos em formato CSV contendo medições horárias de temperatura para o período de 2005 a 2024, abrangendo variáveis como:

- Temperatura do ar (bulbo seco) horária (T_{hora});
- Temperatura máxima e mínima horária (T_{max} e T_{min});
- Temperatura do ponto de orvalho (não utilizada diretamente na modelagem, mas disponível para estudos futuros).

3.2 Processamento dos Dados

Inicialmente, utilizamos o ano de 2005 como protótipo para a metodologia de modelagem. Posteriormente, estendemos a análise para um conjunto mais amplo de dados (2005 a 2024), possibilitando investigações longitudinais.

3.3 Dificuldades no Tratamento dos Dados

Durante o processo de tratamento dos dados meteorológicos para esta pesquisa, diversas dificuldades técnicas e metodológicas foram encontradas. O relato dessas dificuldades é essencial para compreender as decisões tomadas ao longo do desenvolvimento da dissertação e evidenciar a complexidade de trabalhar com dados reais.

3.3.1 O Instituto Nacional de Meteorologia (INMET) e sua Contribuição para a Pesquisa

O Instituto Nacional de Meteorologia (INMET), criado em 1909 por meio do Decreto nº 7.672, é o órgão responsável pela coleta, análise e disseminação de dados meteorológicos no Brasil. Vinculado atualmente ao Ministério da Agricultura e Pecuária, o INMET desenvolve atividades fundamentais para a agricultura, a segurança civil e o planejamento urbano, operando uma rede nacional de estações meteorológicas automáticas que fornecem dados em tempo real sobre as condições atmosféricas (INMET, 2024).

Com mais de um século de atuação, o Instituto se consolidou como referência técnica na área de meteorologia, representando o Brasil junto à Organização Meteorológica Mundial (OMM) e sendo responsável pela coordenação do tráfego de dados meteorológicos na América do Sul. Além disso, opera um dos Centros de Sistema de Informação Mundial (GISC), integrando o Sistema de Informação da OMM (WIS), o que demonstra sua importância internacional na gestão de dados climáticos.

O acervo do INMET inclui uma das maiores bases de dados meteorológicos da América Latina, com registros digitais desde 1961. Foi a partir dessa base pública que foram obtidos os dados de temperatura da cidade de São Luís (MA), referentes ao período de 2005 a 2024. Esses dados serviram de referência empírica para a modelagem matemática de fenômenos periódicos descrita nesta dissertação, sendo processados, analisados e aplicados com o suporte de ferramentas computacionais e inteligência artificial.

A utilização de dados reais oriundos de uma fonte institucional confiável como o INMET confere rigor metodológico à pesquisa e contribui para o desenvolvimento de atividades pedagógicas contextualizadas, alinhadas à proposta de uma educação matemática mais investigativa e conectada com questões ambientais e sociais (INMET, 2025).

Problemas de Formatação dos Arquivos CSV

A primeira dificuldade enfrentada relacionou-se à estrutura dos arquivos obtidos no sistema BDMEP do INMET. Embora estivessem no formato CSV, os arquivos apresentavam as seguintes inconsistências:

- Codificação de caracteres em `latin1` (ISO-8859-1), incompatível com o padrão UTF-8 adotado em muitas ferramentas modernas de análise;
- Utilização do ponto e vírgula (“;”) como separador de campos, exigindo configuração específica no momento da leitura dos arquivos;
- Presença de linhas de cabeçalho e informações adicionais no início dos arquivos, o que demandou o uso da opção `skiprows` para ignorar linhas não pertinentes;

- Correção da leitura decimal (utilizando o parâmetro `decimal=','` devido à notação brasileira);
- Nomes de colunas extensos, com espaços e caracteres especiais, dificultando a referência direta às variáveis de interesse (por exemplo, “TEMPERATURA DO AR - BULBO SECO, HORÁRIA (°C)”).

Esses fatores exigiram a construção de rotinas específicas de pré-processamento, envolvendo a padronização de nomes de colunas e o ajuste de parâmetros de leitura no `pandas`.

Identificação e Remoção de Dados Inválidos

Outro desafio relevante foi a presença de registros inválidos nos dados de temperatura, marcados com o valor `-9999.0`. Tais registros indicavam falhas instrumentais ou ausência de coleta no momento correspondente.

Para assegurar a validade estatística das médias e amplitudes calculadas, foi necessário:

- Detectar sistematicamente todos os valores `-9999.0` e valores `NaN`;
- Remover esses registros de maneira criteriosa antes dos agrupamentos e cálculos;
- Validar manualmente o número de registros válidos por mês para assegurar a correta filtragem dos dados.

Essa etapa foi fundamental para garantir que as médias diárias, mensais e anuais refletissem efetivamente o comportamento real das temperaturas.

Construção e Testes do Script de Processamento

A partir dos desafios anteriores, foi necessária a elaboração de um script em Python que:

- Automatizasse a leitura, padronização, limpeza e agregação dos dados de diferentes anos;
- Gerasse gráficos e tabelas de forma consistente para todos os conjuntos de dados;
- Permitisse a fácil atualização e reprocessamento caso novos dados fossem incorporados.

O desenvolvimento do script exigiu múltiplos testes e ajustes finos, como:

- Correção de erros de tipagem em colunas;
- Compatibilização de formatos de datas para diferentes arquivos;
- Verificação manual dos resultados intermediários (número de registros válidos, médias por mês) para validação do pipeline de tratamento.

Análises Estatísticas Realizadas

Após a limpeza, as seguintes análises foram conduzidas:

1. **Temperatura Média Anual:** média das temperaturas horárias registradas em cada ano;
2. **Amplitude Térmica Anual:** diferença entre a maior e a menor temperatura registrada no ano;
3. **Boxplot Mensal:** distribuição das temperaturas por mês, considerando todos os anos;
4. **Curvas de Temperatura Média Mensal:** comparação da variação térmica ao longo dos meses para diferentes anos;
5. **Tabelas Consolidadas:** geração de arquivos CSV contendo médias e amplitudes térmicas anuais e mensais.

Ferramentas Computacionais

As análises foram desenvolvidas utilizando:

- Python 3.10+ para o tratamento de dados;
- Pandas para manipulação e agregação de dados;
- Matplotlib para a geração dos gráficos;
- PGFPlots/TikZ para exportação de gráficos vetoriais de alta qualidade para LaTeX;
- GeoGebra para atividades interativas e visualizações dinâmicas de modelagem matemática;
- ChatGPT como assistente no apoio textual, simulações e formulação de expressões analíticas.

Qualidade e Confiabilidade dos Dados

A grande maioria dos dados apresentou consistência. Os poucos registros inválidos identificados foram corretamente eliminados. Esse procedimento assegurou a fidedignidade das médias, amplitudes e demais estatísticas utilizadas no desenvolvimento dos modelos matemáticos desta dissertação.

3.4 Expansão para Análise Longitudinal (2005–2024)

Após validação metodológica com o ano de 2005, a análise foi estendida para todo o período de 2005 a 2024. Essa ampliação teve como objetivos:

- Avaliar a consistência do comportamento periódico ao longo dos anos;
- Detectar possíveis tendências climáticas;
- Validar a robustez dos modelos matemáticos em períodos extensos;
- Enriquecer a base empírica da pesquisa.

Exemplo 3.1 *Montamos a [Tabela 6](#), a qual dispõe as temperaturas média, máxima e amplitude térmica mensalmente.*

Tabela 6: Resumo de Temperaturas Mensais em São Luís – 2005

Mês	Média (°C)	Máxima (°C)	Mínima (°C)	Amplitude Térmica (°C)
1	27.65	33.20	22.40	10.80
2	27.00	32.10	22.10	10.00
3	26.35	31.10	22.00	9.10
4	26.20	30.60	22.00	8.60
5	26.71	31.10	22.50	8.60
6	28.20	32.60	24.40	8.20
7	28.58	33.40	24.40	9.00
8	28.45	33.30	24.50	8.80
9	27.09	32.00	23.00	9.00
10	27.54	32.80	23.00	9.80
11	28.10	33.40	23.90	9.50
12	26.69	31.30	22.20	9.10

Fonte: Autor usando IA.

Automação do Tratamento de Dados

Para o processamento das duas décadas de dados, foi desenvolvido um **script em Python** capaz de:

- Automatizar a leitura e limpeza de múltiplos arquivos CSV;
- Calcular estatísticas anuais e mensais de forma sistematizada;
- Gerar automaticamente gráficos e tabelas;
- Exportar visualizações em formatos compatíveis com LaTeX (PGFPlots).

Resultados e Produtos Gerados

A partir do banco de dados consolidado, foram produzidos:

- Gráficos de Temperatura Média Anual (2005–2024);
- Gráficos de Amplitude Térmica Anual;
- Boxplots mensais comparando todos os anos;
- Curvas de temperatura média mensal para cada ano;
- Tabelas de médias e amplitudes térmicas anuais e mensais.

Exemplo 3.2 *Montamos a Tabela 7 da tabela das médias mensais ao longo de 2005 a 2024.*

Tabela 7: Temperatura média mensal de 2005 a 2024

Ano	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
2005	26.87	27.05	27.16	27.03	26.86	26.10	26.06	26.80	27.32	27.67	27.91	27.63
2006	27.25	27.48	27.46	27.35	26.91	26.37	26.12	26.49	27.17	27.65	28.00	27.60
2007	26.86	27.28	27.27	27.02	26.88	26.38	26.25	26.56	27.24	27.78	28.02	27.67
2008	-	-	-	-	-	-	-	-	26.91	27.59	27.83	27.55
2009	27.26	27.57	27.54	27.29	26.96	26.56	26.41	26.66	27.16	27.58	27.91	27.60
2010	26.97	27.22	27.34	27.20	27.10	26.57	26.42	26.75	27.45	27.83	28.11	27.73
2011	26.67	26.91	27.12	26.87	26.78	26.15	25.93	26.19	26.73	27.32	27.53	27.23
2012	27.15	27.51	27.56	27.31	27.07	26.51	26.25	26.57	27.16	27.69	28.01	27.67
2013	26.87	27.12	27.19	26.94	26.74	26.27	26.15	26.48	27.00	27.56	27.84	27.53
2014	26.41	26.66	26.77	26.58	26.50	26.00	25.91	26.16	26.63	27.17	27.45	27.09
2015	26.01	26.26	26.34	26.10	26.00	25.57	25.43	25.69	26.21	26.71	27.01	26.64
2016	27.26	27.43	27.52	27.33	27.07	26.56	26.36	26.60	27.13	27.63	27.94	27.61
2017	27.08	27.36	27.37	27.15	27.05	26.53	26.30	26.56	27.07	27.61	27.92	27.56
2018	27.06	27.36	27.37	27.15	27.03	26.53	26.32	26.58	27.09	27.64	27.96	27.59
2019	26.82	27.12	27.12	26.89	26.81	26.26	26.06	26.30	26.81	27.35	27.68	27.30
2020	26.36	26.55	26.55	26.34	26.28	25.76	25.61	25.85	26.36	26.86	27.16	26.78
2021	26.66	26.91	26.93	26.71	26.64	26.10	25.91	26.17	26.66	27.17	27.45	27.10
2022	26.10	26.35	26.36	26.14	26.09	25.61	25.40	25.64	26.14	26.65	26.93	26.56
2023	26.71	26.94	26.94	26.71	26.63	26.10	25.88	26.12	26.63	27.14	27.41	27.07
2024	26.36	26.58	26.58	26.36	26.32	25.80	25.58	25.84	26.34	26.86	27.15	26.79

Fonte: Autor usando IA.

Esta tabela, conforme observa-se não apresenta, no ano de 2008, os dados relativos aos meses de janeiro a agosto. Possibilitando a partir dessa observação a oportunidade de uso da modelagem matemática para encontrar e estimar estes valores. Dedicaremos uma seção 6.6, onde usa-se o método de mínimos quadrados para estimar o valor da temperatura média do mês de janeiro de 2008 nos demais anos da série de dados de 2005 a 2024.

TECNOLOGIAS EDUCACIONAIS E ENSINO DE MATEMÁTICA

A inserção das tecnologias digitais no ensino de Matemática configura um dos principais desafios e, ao mesmo tempo, uma das maiores potencialidades do processo educativo contemporâneo. Ao considerar os avanços recentes em inteligência artificial, softwares matemáticos e ambientes interativos, observa-se um novo cenário de possibilidades didáticas que podem ressignificar o papel do professor e ampliar as formas de aprendizagem dos estudantes. Neste capítulo, discute-se o uso de tecnologias educacionais como suporte à modelagem matemática de fenômenos periódicos, com foco especial no ensino de funções trigonométricas.

4.1 Panorama das Tecnologias no Ensino de Matemática

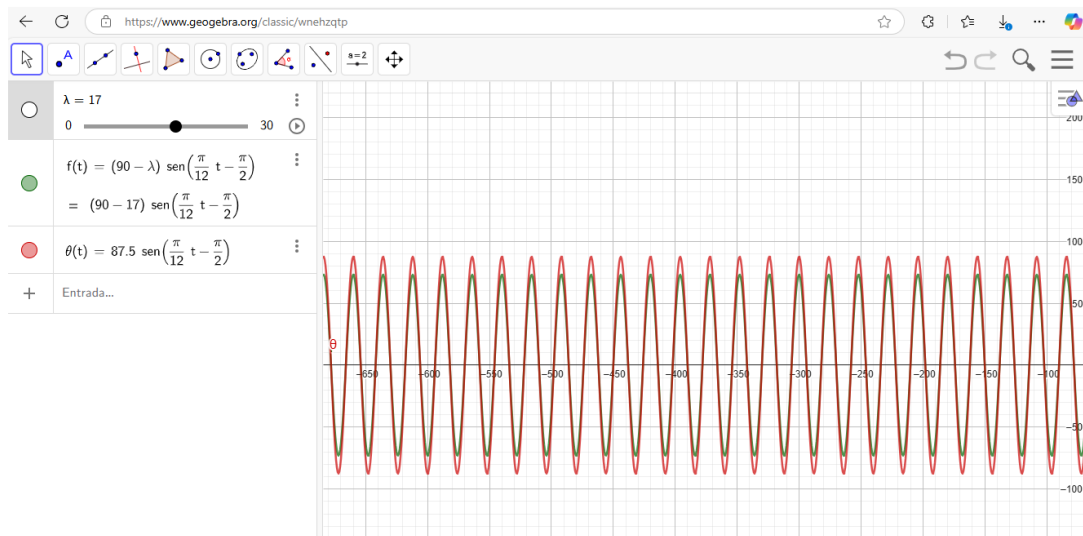
O ensino de Matemática tem sido impactado, nas últimas décadas, por uma variedade de recursos tecnológicos que visam promover um aprendizado mais significativo, dinâmico e contextualizado. As tecnologias digitais, incluindo softwares matemáticos, ambientes virtuais e inteligência artificial (IA), têm ampliado o repertório pedagógico dos professores e proporcionado novas formas de interação dos estudantes com os conteúdos.

Segundo Valente (1999), o uso da tecnologia no ensino de ciências exatas precisa estar associado a uma mudança paradigmática no papel do professor, que passa de transmissor para mediador da aprendizagem. (2000) reforça que as tecnologias devem ser integradas ao projeto pedagógico, e não tratadas como apêndices ou ferramentas neutras.

4.2 GeoGebra como Ferramenta Didática

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica que permite a construção de gráficos, simulações geométricas, exploração de funções e modelagem interativa. No contexto desta dissertação, ele foi utilizado para:

- Construção de gráficos de funções periódicas com parâmetros ajustáveis;
- Simulação da variação da temperatura ao longo do dia e do ano;

Figura 15: Gráfico do modelo das marés em São Luis

Fonte: Autor.

- Atividades interativas com controles deslizantes para amplitude, período e fase;
- Exploração da sensibilidade dos modelos à variação de parâmetros (como a latitude na elevação solar);

Essas funcionalidades favoreceram uma abordagem exploratória, permitindo que os estudantes testassem hipóteses e visualizassem as consequências matemáticas de suas escolhas. A título de ilustração, conforme já vimos na seção 1.1.8 foi realizado um exemplo no Geogebra onde é possível usando controles deslizantes Figura 15, disponível no em: <https://www.geogebra.org/classic/wnehzqtp>

4.3 Inteligência Artificial como Mediadora Pedagógica

Modelos de linguagem como o ChatGPT atuaram como suporte cognitivo e pedagógico. Foram utilizados para:

- Obtenção de dados históricos reais (ex: temperatura em São Luís);
- Geração de modelos matemáticos iniciais a partir dos dados;
- Sugestões de atividades e perguntas investigativas;
- Explicações conceituais sobre parâmetros trigonométricos;

A IA foi utilizada como um "tutor virtual" capaz de interagir em linguagem natural com o estudante, favorecendo um ensino mais individualizado e responsivo às dúvidas e caminhos percorridos.

4.4 Integração com a BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reconhece a importância da tecnologia digital e da modelagem matemática como ferramentas fundamentais no desenvolvimento de competências e habilidades na Educação Básica. No componente curricular de Matemática, a habilidade EM13MAT307 propõe que os estudantes sejam capazes de utilizar modelos matemáticos — com o apoio de recursos computacionais — para representar, analisar e interpretar situações do cotidiano.

As propostas desenvolvidas nesta dissertação alinham-se a essa diretriz ao integrarem, de forma intencional e contextualizada, o uso do *GeoGebra* e da Inteligência Artificial (IA), representada aqui pelo *ChatGPT*. Tais ferramentas não apenas favoreceram a visualização de conceitos como periodicidade e variação, mas também ampliaram as possibilidades de construção e interpretação de representações gráficas a partir de dados reais, como os registros de temperatura da cidade de São Luís.

Além disso, diversas tabelas e figuras apresentadas neste trabalho foram elaboradas com o auxílio do *ChatGPT*, que possibilitou a conversão automatizada de dados estruturados (como arquivos no formato CSV) para o ambiente *LaTeX*, garantindo agilidade e precisão na documentação dos resultados. Esse tipo de suporte tecnológico permite que o professor concentre seus esforços no planejamento pedagógico e na mediação das aprendizagens, otimizando o tempo e enriquecendo o processo de ensino-aprendizagem.

4.4.1 Exemplo de Atividade Integrada

Tema: Variação da Temperatura ao Longo do Dia

- **Objetivo:** Modelar a variação da temperatura em São Luís-MA usando uma função seno.
- **Ferramentas:** ChatGPT (para obter dados), GeoGebra (para simulação), planilha Excel (tratamento inicial dos dados).
- **Modelo:** $T(t) = 27 + 6 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{24}t - \frac{\pi}{2}\right)$
- **Atividades:** Alunos ajustam os parâmetros da função para diferentes cidades e comparam os resultados com os dados reais.

Essa atividade reforça o uso da modelagem e da tecnologia de forma integrada, levando à construção de sentido e de significado matemático.

4.5 Considerações Finais

A utilização de tecnologias educacionais como o *GeoGebra* e o *ChatGPT* potencializa o ensino de matemática ao tornar visíveis relações abstratas e ao permitir um trabalho mais personalizado. Quando integradas a propostas didáticas de modelagem, essas ferramentas favorecem a compreensão profunda dos conceitos matemáticos e seu uso significativo na interpretação de fenômenos do cotidiano. (<https://www.geogebra.org/classic/ap2yhvrb>)

Assim, o Capítulo 4 destaca que não se trata apenas de usar tecnologia, mas de incorporá-la de forma crítica, intencional e didaticamente estruturada no processo de ensino-aprendizagem.

Capítulo 5

DESENVOLVIMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática foi estruturada em etapas progressivas que conduzem os alunos desde a contextualização do problema até a abstração matemática e reflexão final. A seguir, cada sessão é descrita em ordem de aplicação, com orientações didáticas e integrações de tecnologia:

5.1 Contextualização e Motivação (Fenômeno Real)

A aula inicia com o professor apresentando aos alunos a seguinte situação-problema: *Por que sentimos variações de temperatura ao longo do dia e entre diferentes épocas do ano? Como poderíamos prever a temperatura aproximada em determinados horários ou meses?*

Essa provocação introduz o tema de forma contextualizada, relacionando-o à vivência cotidiana dos estudantes em São Luís. O professor pode exibir imagens ou notícias sobre o clima local, destacar que a cidade é conhecida pelo calor úmido e perguntar se os alunos já notaram padrões por exemplo, manhãs amenas, tardes quentes, noites mais frescas.

Explicita-se o objetivo: investigar matematicamente o comportamento periódico da temperatura. Essa etapa busca engajar os alunos mostrando a relevância do conteúdo — eles percebem que a matemática pode ajudar a explicar e prever algo presente em seu dia a dia.

5.2 Exploração de Dados Reais (Coleta e Leitura de Informações)

Com a motivação estabelecida, o professor apresenta dados reais de temperatura de São Luís. Pode ser distribuída:

- **Tabela 8:** Temperaturas em horários típicos ao longo de um dia (meia-noite, 6h, 12h, 18h);

- **Tabela 9:** Temperaturas médias mensais.

A título de exemplo, podemos usar os dados que foram fornecidos pela IA (ChatGPT), os quais podem ser visualizados na Tabela 8,

Tabela 8: Temperatura Diária Típica em São Luís, Maranhão (°C)

Hora	Temp. Máx.	Temp. Mín.	Temp. Média
00:00	26.8	26.0	26.4
06:00	27.5	26.3	26.9
12:00	30.1	28.5	29.3
18:00	28.0	27.0	27.5
24:00	27.0	26.5	26.75

Fonte: <https://www.timeanddate.com/weather/brazil/sao-luis/climate>

Os alunos, em duplas, são incentivados a observar os dados e identificar padrões: qual horário é geralmente mais quente? Qual mês apresenta a maior temperatura média? Qual a diferença entre as máximas e mínimas?

Essa discussão guiada pelo professor ajuda-os a reconhecer a existência de ciclicidade diária e anual. Introduce-se também a ideia de que os dados podem ser obtidos de fontes confiáveis e foram coletados para sua própria cidade — isso aumenta o senso de pertencimento e interesse.

5.3 Modelagem da Variação Diária (Construção do Modelo Matemático)

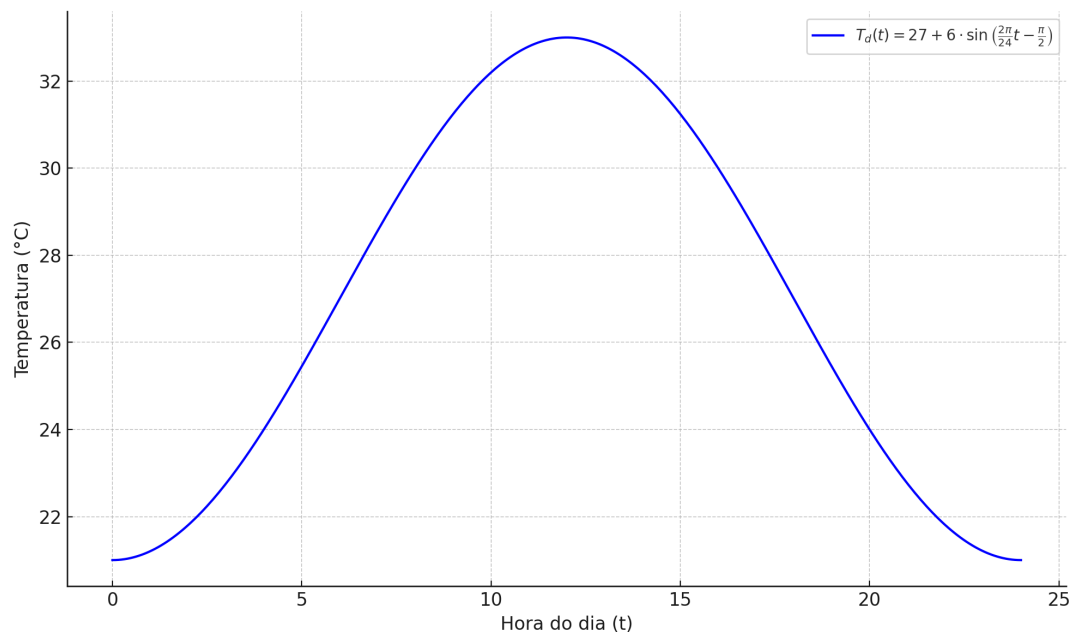
Com base nos dados, os alunos são desafiados a ajustar uma função trigonométrica que represente a temperatura em função do horário. O professor apresenta o formato geral da função seno/cosseno e explica os parâmetros:

- T_m : temperatura média ($\approx 27^\circ\text{C}$);
- A : amplitude ($\approx 3^\circ\text{C}$);
- P : período (24h);
- φ : fase (ajustada para alinhar o pico da curva ao horário de temperatura máxima).

Com base nisso, chega-se à função:

$$T_d(t) = 27 + 6 \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi}{24}t - \frac{\pi}{2} \right), \quad (5.1)$$

em que t representa o tempo em horas. O professor comenta que esse é um modelo — uma aproximação idealizada — e que, embora não perfeita, representa bem a tendência geral.

Figura 16: Variação modelada da temperatura ao longo de um dia em São Luís-MA.

Fonte: Autor.

Os alunos comparam a fórmula com os dados reais e verificam que ela produz resultados coerentes. Essa validação qualitativa reforça a compreensão do papel de cada parâmetro na função.

5.4 Exploração do Modelo Diário com Tecnologia

Após construir o modelo "à mão", os alunos exploram-no digitalmente. Usando o GeoGebra:

- Visualizam o gráfico da função;
- Manipulam controles deslizantes para T_m , A , P e ϕ ;
- Observam como as alterações afetam a curva.

Essa atividade visual e interativa atende a diferentes estilos de aprendizagem e reforça a compreensão. Propõem-se desafios como: "Qual parâmetro muda a altura média da curva?", "O que acontece se $\phi = 0$?". O professor conclui com um quiz ou desafio de ajuste: ocultar a curva e pedir aos alunos que a reconstruam.

5.5 Modelagem da Variação Anual (Extensão do Modelo)

Com base na Tabela 2, os alunos agora modelam a variação anual da temperatura:

- Temperatura média anual: ($\approx 27^\circ\text{C}$);

- Amplitude: ($\approx 1,5C$);
- Período: 365 dias;
- Fase ajustada para o pico em abril-maio.

Tabela 9: Temperatura Média Mensal ($^{\circ}C$) em São Luís, Maranhão (1992-2021)

Mês	Temp. Máx.	Temp. Mín.	Precipitação (mm)
Janeiro	31	23	197
Fevereiro	30	24	239
Março	30	23	337
Abril	29	23	308
Maio	29	23	197
Junho	29	22	97
Julho	29	22	46
Agosto	30	22	23
Setembro	30	23	22
Outubro	31	23	23
Novembro	31	23	40
Dezembro	31	23	97

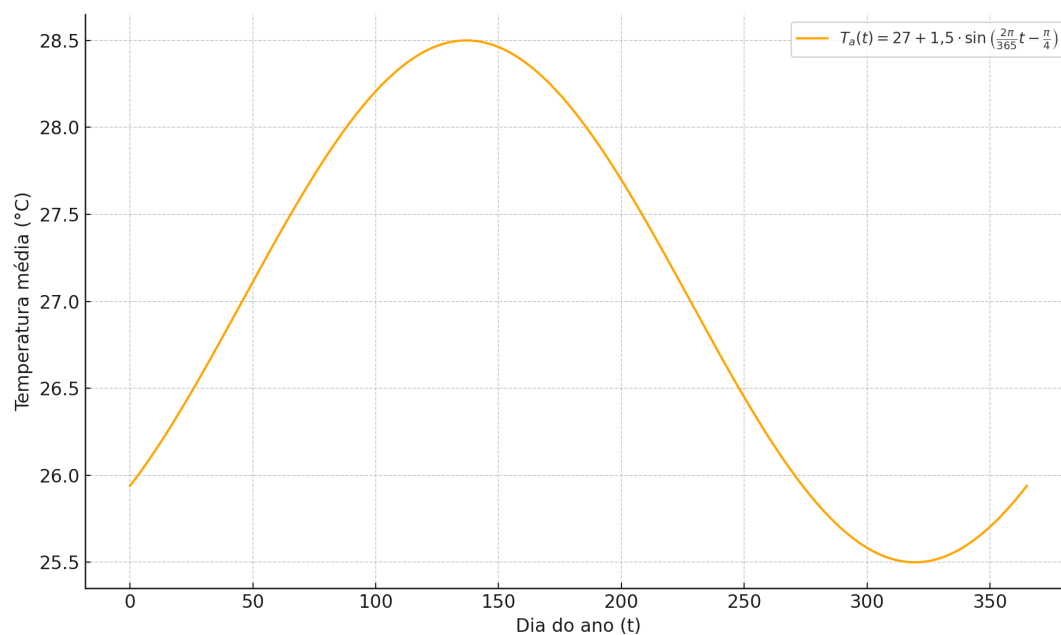
Fonte: <https://www.timeanddate.com/weather/brazil/sao-luis/climate>

Obtém-se:

$$T_a(t) = 27 + 1,5 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365}t - \frac{\pi}{4}\right), \quad (5.2)$$

em que t representa o dia do ano (0 a 365).

Figura 17: Variação modelada da temperatura média ao longo do ano em São Luís-MA.



Fonte: Autor.

Os alunos discutem por que a variação anual é pequena (clima equatorial), e comparam dados reais e previstos. A análise reforça a compreensão de como a função seno modela ciclos em diferentes escalas.

5.6 Síntese e Aplicação em Novos Contextos

Na etapa final, retoma-se os dois modelos ($T_d(t)$ e $T_a(t)$), comparando suas semelhanças e diferenças. Os alunos identificam a estrutura comum e as adaptações para contexto e escala.

Divididos em grupos, escolhem outros fenômenos periódicos (marés, consumo de energia, ciclos biológicos etc.) e discutem qualitativamente como modelá-los. Ao final, compartilham suas ideias com a turma, promovendo interdisciplinaridade e reforçando a utilidade da matemática.

Conclui-se com a retomada da pergunta inicial. Os alunos agora podem afirmar que a matemática, por meio das funções trigonométricas, permite descrever, entender e prever fenômenos periódicos observados no cotidiano. Essa percepção reforça a aprendizagem significativa, crítica e conectada ao mundo real.

Capítulo 6

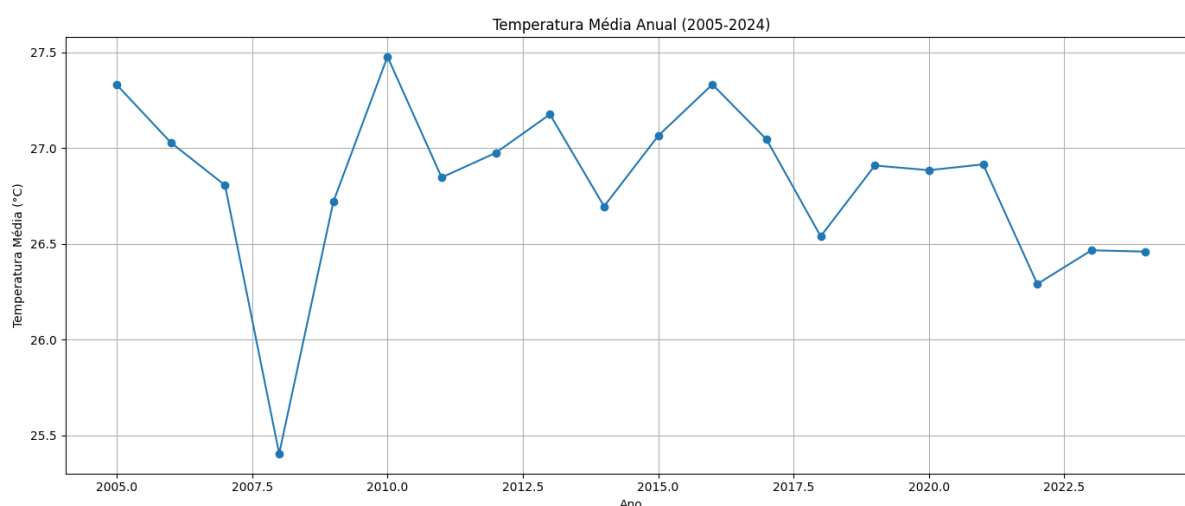
ANÁLISE DOS RESULTADOS

A análise dos dados climáticos de São Luís-MA, no período de 2005 a 2024, permitiu a construção de modelos matemáticos que representam de forma adequada a variação periódica da temperatura ao longo do tempo. Esta seção 3.4 apresenta os resultados obtidos a partir dos dados processados e limpos.

6.1 Temperatura Média Anual

A Figura 18 apresenta a evolução da temperatura média anual em São Luís-MA ao longo das duas décadas analisadas.

Figura 18: Temperatura Média Anual em São Luís-MA (2005–2024)



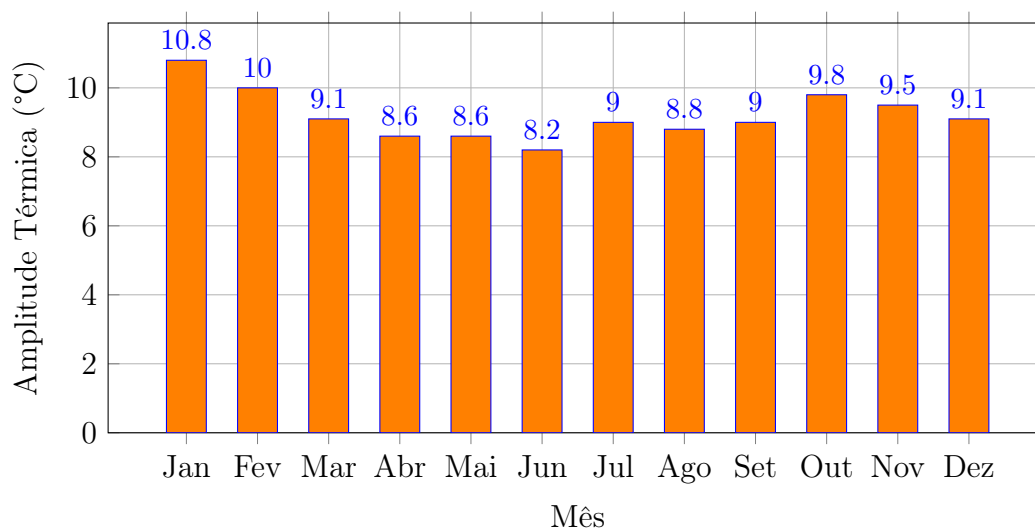
Fonte: Autor.

Observa-se que a temperatura média anual apresentou relativa estabilidade, com pequenas oscilações ao longo dos anos. Não se verificaram tendências de aumento ou diminuição significativas no período estudado, o que corrobora o comportamento típico de regiões próximas à linha do Equador, onde a variação climática é menos acentuada.

6.2 Amplitude Térmica Anual

A Figura 19 mostra a amplitude térmica anual, definida como a diferença entre a maior e a menor temperatura registrada em cada ano.

Figura 19: Amplitude térmica mensal em São Luís – 2005

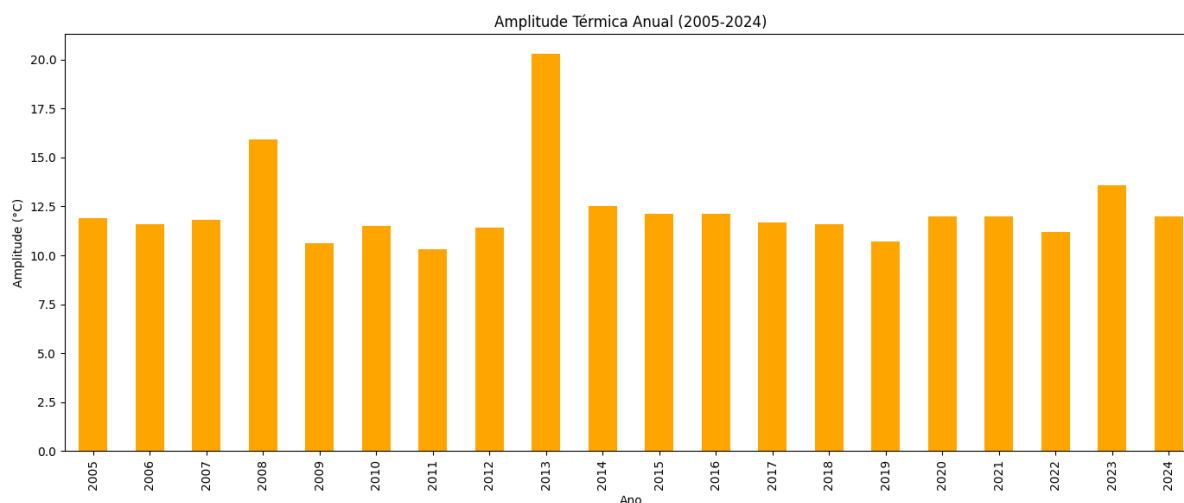


Fonte: Autor.

Constata-se que a amplitude térmica anual manteve-se relativamente constante, variando geralmente entre 8,2°C e 10,8°C. Eventuais variações podem ser atribuídas a anos com eventos climáticos atípicos, como episódios de El Niño ou La Niña, que afetam as temperaturas extremas.

Como pode-se observar também em relação aos dados da série histórica analisada, na Figura 20

Figura 20: Amplitude térmica anual em São Luís-MA (2005–2024)



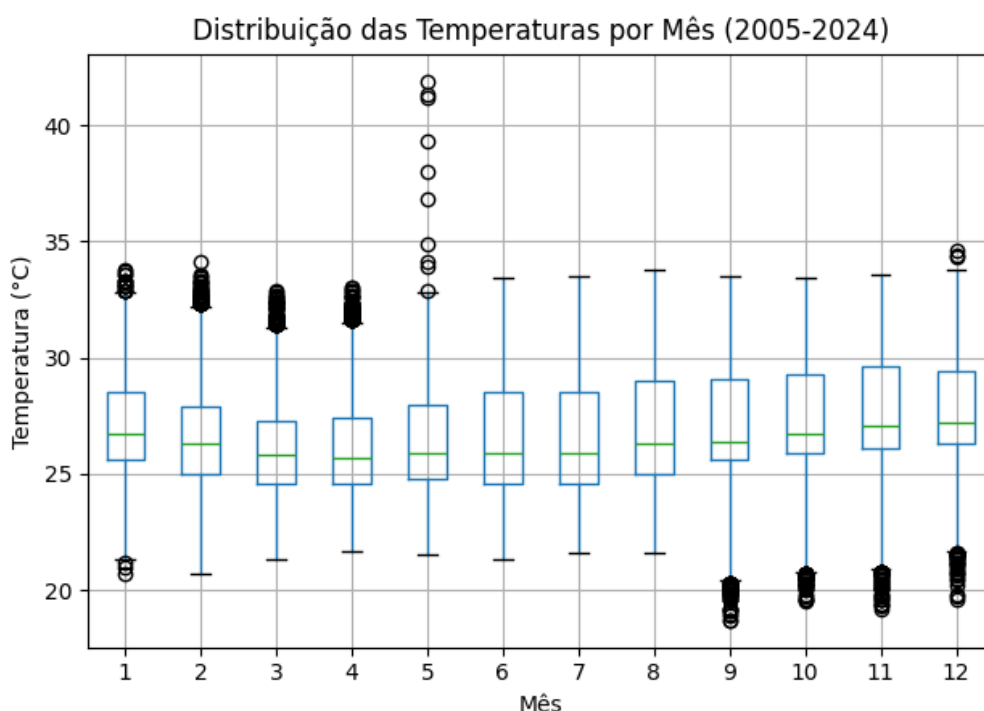
Fonte: Autor.

6.3 Distribuição Mensal das Temperaturas (Boxplot)

Para uma visão detalhada da variabilidade térmica ao longo dos meses, foi construído um diagrama de caixa (*boxplot*), apresentado na Figura 21.

A Figura 21 apresenta um *boxplot* (diagrama de caixa) que representa a distribuição estatística das temperaturas horárias observadas em São Luís-MA no período de 2005 a 2024, mês a mês.

Figura 21: Distribuição das Temperaturas por Mês (2005–2024)



Fonte: Autor.

No eixo horizontal, estão representados os meses do ano, de janeiro (1) a dezembro (12), enquanto o eixo vertical apresenta os valores de temperatura do ar, em graus Celsius, que variam aproximadamente entre 18°C e 42°C.

Cada caixa do *boxplot* representa o intervalo interquartil (IQR), ou seja, os 50% centrais dos dados, enquanto a linha interna indica a mediana das temperaturas para o respectivo mês. Os *bigodes* se estendem até 1,5 vezes o IQR e os círculos representam os *valores atípicos*, mais extremos.

Ao analisar os dados mês a mês, observamos que:

- Os meses de **maio** e **abril** apresentam os maiores *valores atípicos* superiores, com registros acima de 40°C, destacando possíveis eventos climáticos extremos, como o ocorrido em maio de 2013, quando foi registrada a maior temperatura da série (Como já explicamos anteriormente deve ter ocorrido algum problema de leitura, visto que não há outros registros que possam corroborar o valor encontrado).

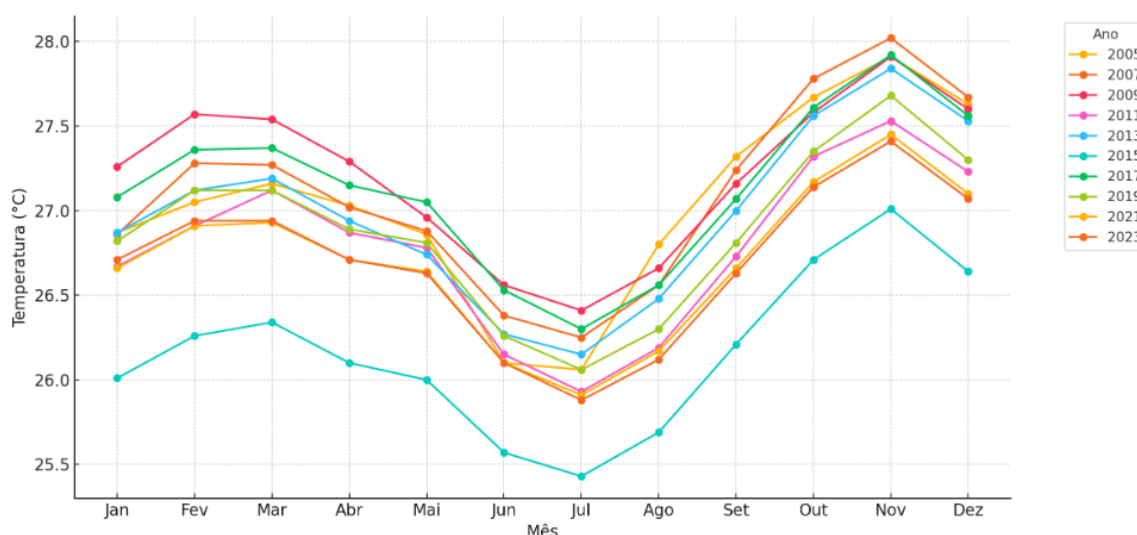
- Os meses de **outubro a dezembro** apresentam maior **amplitude térmica**, com caixas mais alongadas e variação mais acentuada das temperaturas horárias.
- Os meses do meio do ano, especialmente **junho e julho**, possuem distribuição mais concentrada, indicando menor variabilidade térmica. Isso é coerente com o período de maior nebulosidade e pluviosidade característico da estação chuvosa da cidade.
- Já os meses de **janeiro a março** apresentam medianas mais elevadas, refletindo o calor típico do verão amazônico, embora sem registros tão extremos quanto os de maio.

Essa análise gráfica permite uma compreensão visual clara da sazonalidade climática local e evidencia padrões mensais que podem ser modelados ou interpretados pedagogicamente. O uso de representações como essa é valioso tanto para fins acadêmicos quanto educacionais, servindo de base para discussões sobre variabilidade climática, eventos extremos e tendências ao longo de séries históricas.

6.4 Comparação da Temperatura Média Mensal por Ano

A Figura 22 apresenta a comparação entre as curvas de temperatura média mensal para os anos ímpares na série histórica de 2005 a 2024. A escolha foi feita em decorrência da quantidade de anos estudados (todos numa mesma imagem ficaria difícil a compreensão) e devido o ano de 2008 não apresentar os dados completos.

Figura 22: Curvas Comparativas de Temperatura Média Mensal (2005–2024)



Fonte: Autor.

Observa-se que todas as curvas seguem um padrão semelhante, caracterizado por leve aumento de temperatura no primeiro semestre, seguido de um período de relativa estabilidade e ligeira queda no final do ano. Este comportamento confirma

o caráter periódico da variável temperatura, reforçando a adequação do uso de funções trigonométricas para modelagem dos fenômenos.

6.5 Síntese dos Resultados

As análises realizadas indicam que:

- A temperatura média anual em São Luís manteve-se estável no período analisado;
- A amplitude térmica anual variou pouco, consolidando a característica de baixa variação térmica típica de regiões equatoriais;
- As variações mensais mostram padrão de periodicidade com pequenas oscilações;
- Os dados obtidos fornecem suporte consistente para o desenvolvimento de modelos matemáticos periódicos baseados em funções seno e cosseno.

Esses resultados corroboram a proposta pedagógica desta dissertação, permitindo a aplicação de modelagem matemática realista no contexto da Educação Básica, com apoio de ferramentas computacionais e inteligência artificial.

Aplicações Didáticas dos Dados Longitudinais

A análise de séries temporais reais permitiu o desenvolvimento de propostas pedagógicas que exploram:

- Comparações entre anos (por exemplo, anos mais quentes ou frios);
- Discussões sobre variabilidade climática e fenômenos como El Niño e La Niña;
- Modelagem de dados reais com funções trigonométricas;
- Investigação de tendências de longo prazo.

Essas abordagens fortalecem o ensino de matemática aplicada e contribuem para uma educação mais contextualizada e crítica.

6.5.1 Análise das Temperaturas Extremas Mensais

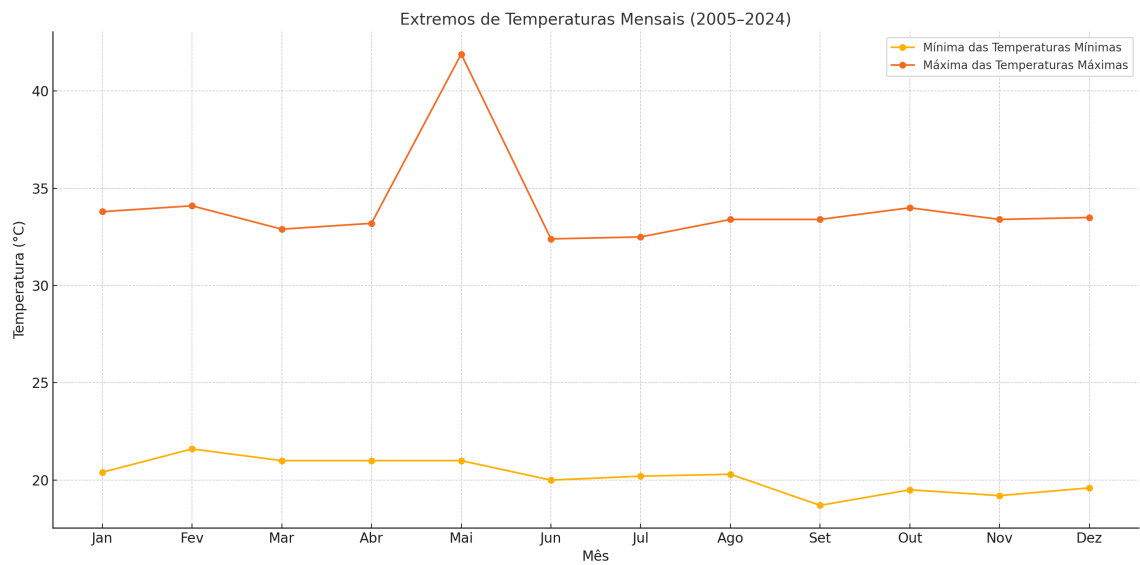
Para uma melhor compreensão da variabilidade térmica ao longo dos anos, foram analisadas as temperaturas máximas das máximas (Tabela 11) e mínimas das mínimas (Tabela 10) de cada mês, no período de 2005 a 2024. A partir desses dados construiu-se o gráfico, Figura 23.

Verifica-se, pela Figura 23, que o mês de maio de 2013 apresentou uma temperatura significativamente superior às demais. Tal anomalia é coerente com o registro feito pelo Instituto Nacional de Meteorologia (INMET), pois de fato consta na tabela. Entretanto, após pesquisa na internet não encontramos notícias de uma temperatura dessa magnitude.

Tabela 10: Temperatura Mínima Mensal (°C)

Ano	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
2005	23.3	23.3	23.2	22.4	23.4	24.0	23.0	23.2	22.2	23.3	24.7	21.4
2006	22.2	22.0	22.1	23.1	23.1	22.9	22.7	22.2	22.3	23.4	23.8	23.3
2007	24.1	22.0	22.0	23.0	23.0	22.8	23.0	23.0	23.2	25.0	25.6	22.7
2008	—	—	—	—	—	—	—	—	18.7	19.5	19.2	19.6
2009	23.3	23.0	22.4	22.9	22.4	22.5	22.3	23.2	23.5	23.0	24.5	24.4
2010	23.7	23.2	22.7	23.1	23.6	23.0	23.6	22.6	23.4	22.9	25.4	23.7
2011	22.4	22.9	22.8	22.0	22.9	23.0	22.5	24.6	23.1	24.0	23.4	24.2
2012	21.8	21.6	22.2	23.1	23.3	22.6	23.1	22.4	22.5	23.2	24.0	24.3
2013	23.0	22.3	23.0	23.3	22.5	21.9	21.6	23.0	23.2	23.1	23.3	23.7
2014	21.2	22.1	23.0	21.8	22.4	22.4	22.4	22.2	22.3	23.1	23.1	23.1
2015	21.7	22.0	22.0	22.5	23.0	21.7	22.5	22.2	23.9	23.9	24.5	24.4
2016	21.7	23.3	22.4	23.5	23.4	21.3	22.7	22.8	23.0	23.6	24.2	21.9
2017	22.0	22.5	22.8	22.4	22.8	22.6	22.2	23.0	25.4	24.9	23.1	24.1
2018	21.7	21.6	22.5	22.2	22.4	22.7	22.5	21.6	23.1	23.9	22.4	21.4
2019	22.4	23.1	23.1	22.9	22.4	23.0	22.2	22.7	24.0	23.7	24.0	22.3
2020	21.8	22.4	22.4	22.8	23.2	22.6	22.7	22.3	23.4	23.1	23.3	23.6
2021	22.2	22.5	21.4	23.2	21.8	22.1	23.0	22.8	24.0	24.5	23.5	23.1
2022	22.0	22.8	21.7	21.7	21.5	22.2	22.3	22.1	23.5	24.0	22.8	22.4
2023	20.7	20.7	21.3	21.7	22.7	22.0	23.1	23.0	22.9	23.6	24.0	22.6
2024	23.0	21.7	21.5	21.7	22.1	22.0	21.9	22.3	23.0	23.7	23.7	23.0

Figura 23: Temperaturas extremas mensais em São Luís (2005–2024)



Fonte: Autor.

Este tipo de dado, aliado ao gráfico, demonstra a importância de se considerar anomalias ao trabalhar com médias térmicas em sala de aula.

Outra questão interessante foi o mês de setembro de 2008, o qual apresentou uma temperatura de 18,7° o que também parece representar alguma inconsistência, embora também esteja dispostos nos dados reais fornecidos...

Tabela 11: Temperatura Máxima Mensal (°C)

Ano	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
2005	33.1	33.3	32.9	32.2	32.2	31.9	32.3	33.3	32.8	32.4	33.0	33.2
2006	32.4	31.4	31.0	30.7	32.4	31.8	31.6	31.9	33.4	32.9	33.6	33.1
2007	33.8	31.2	31.4	30.8	31.8	32.0	31.4	32.7	33.3	30.1	31.3	32.9
2008	—	—	—	—	—	—	—	—	30.8	30.7	31.8	34.6
2009	32.8	30.6	30.2	29.8	30.1	31.3	31.3	32.6	32.1	32.5	32.9	32.8
2010	32.7	34.1	32.8	32.1	32.3	31.9	31.3	32.6	33.0	33.2	32.8	33.5
2011	31.8	31.3	31.0	31.0	31.6	31.5	31.5	31.4	32.2	31.6	32.1	32.3
2012	32.5	32.7	30.7	31.7	31.9	31.7	32.7	32.5	32.4	32.7	33.0	33.0
2013	33.6	33.6	32.4	32.0	41.9	32.0	31.5	33.2	33.4	33.0	33.0	33.1
2014	32.6	31.7	31.4	31.8	31.7	32.1	32.2	33.2	32.5	32.8	32.7	33.7
2015	33.6	32.8	32.4	32.1	32.0	32.5	32.1	33.8	33.0	33.3	32.8	33.8
2016	32.4	32.8	31.8	33.0	31.7	32.0	32.5	33.1	32.3	33.4	33.2	33.4
2017	33.7	31.3	31.5	32.3	32.3	33.4	33.5	32.6	33.5	33.3	32.4	33.2
2018	32.2	31.7	31.5	31.7	31.4	32.4	31.8	31.6	31.9	33.0	33.0	32.2
2019	32.3	30.9	30.6	31.0	32.7	32.2	31.9	32.2	32.3	32.2	32.4	32.9
2020	32.2	31.0	31.1	31.7	32.5	32.3	32.5	33.8	33.0	33.0	33.0	33.1
2021	32.5	33.4	31.3	32.9	32.9	31.4	31.7	32.6	31.6	32.6	32.6	32.5
2022	31.1	31.4	29.9	30.1	30.6	31.4	31.5	32.2	31.6	32.6	31.9	32.7
2023	31.6	29.7	30.6	30.4	31.6	30.4	31.6	31.4	32.4	32.9	32.8	34.3
2024	32.1	32.0	29.2	29.1	30.5	30.9	31.8	33.2	32.4	32.1	32.6	33.5

6.6 Estimativa de temperatura por modelagem trigonométrica

Em decorrência da ausência de dados reais de temperatura para os meses de janeiro a agosto de 2008, decidimos empregar uma metodologia de interpolação baseada em regressão trigonométrica. Essa abordagem é coerente com a natureza aproximadamente periódica das temperaturas ao longo dos anos, e permite a estimação de valores ausentes com base no comportamento médio observado.

1. Escolha do modelo

Assumimos que a temperatura $T(t)$, ao longo dos anos, apresenta comportamento aproximadamente periódico. Assim, propomos o modelo trigonométrico:

$$T(t) = A \cos(\omega t + \phi) + C$$

em que:

- t é o número de anos desde 2005 (ou seja, $t = 0$ para 2005, $t = 1$ para 2006 etc.);
- A é a amplitude das variações;
- ω é a frequência angular;
- ϕ é o deslocamento de fase;

- C é a média geral da temperatura.

2. Linearização do modelo

Para facilitar a estimativa dos parâmetros por mínimos quadrados, usamos a identidade trigonométrica:

$$A \cos(\omega t + \phi) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

com:

$$a = A \cos(\phi), \quad b = -A \sin(\phi)$$

Dessa forma, o modelo torna-se linear nos parâmetros a , b e C :

$$T(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + C$$

3. Ajuste por mínimos quadrados

Com base nas temperaturas médias do mês de janeiro para os anos de 2005 a 2024 (exceto 2008), formamos a matriz de dados e resolvemos o sistema normal para os coeficientes a , b e C :

$$\begin{bmatrix} \cos(\omega t_1) & \sin(\omega t_1) & 1 \\ \cos(\omega t_2) & \sin(\omega t_2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(\omega t_n) & \sin(\omega t_n) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix}$$

Utilizando $T = 20$ anos como período (o que implica $\omega = \frac{2\pi}{20} = 0,3142$), encontramos os seguintes coeficientes:

$$a = -0,0136, \quad b = 0,2772, \quad C = 26,7717$$

Com esses valores, recuperamos os parâmetros originais:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = 0,2776, \quad \phi = \arctan\left(\frac{-b}{a}\right) = -1,62$$

4. Modelo final estimado

Assim, o modelo ajustado é:

$$T(t) = 0,2776 \cos(0,3142 \cdot t - 1,62) + 26,7717$$

Esse modelo pode agora ser utilizado para estimar a temperatura do mês de janeiro de 2008 (correspondente a $t = 3$) ou para outros anos que porventura tenham dados ausentes.

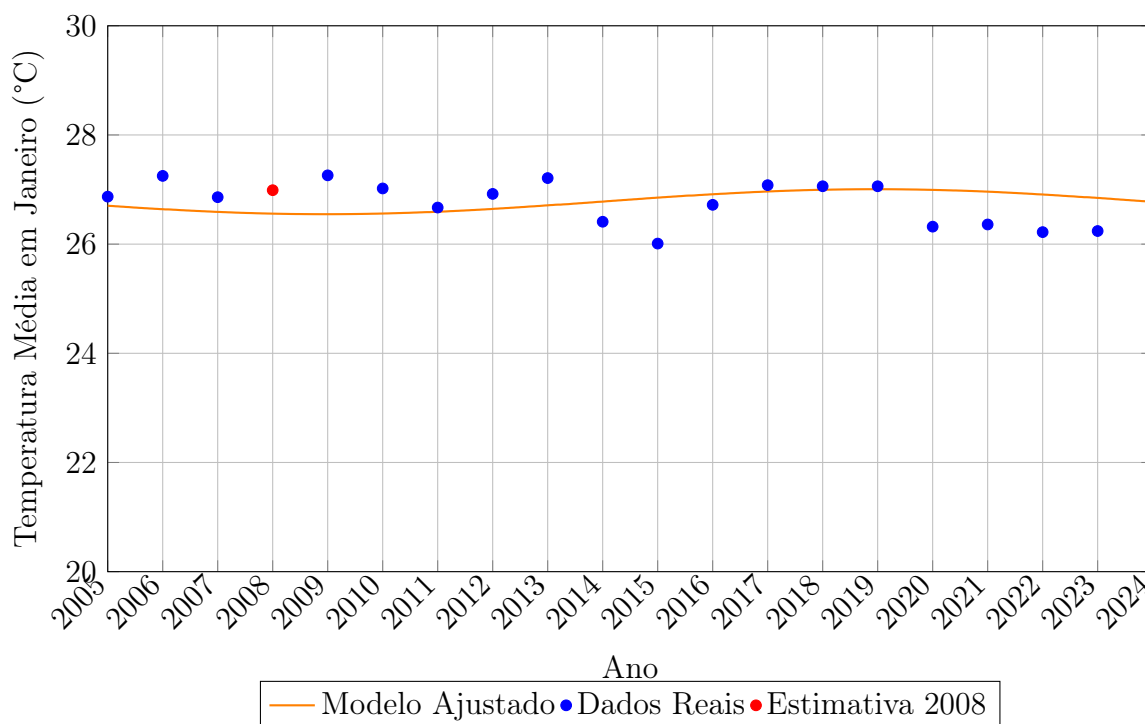
6. Estimativa da Temperatura de Janeiro de 2008

Para estimar a temperatura média de janeiro de 2008, tomamos $t = 3$ (com $t = 0$ representando 2005):

$$T(3) = 0,2776 \cos(0,3142 \cdot 3 - 1,62) + 26,7717 \approx \boxed{26,98^{\circ}\text{C}}$$

Esse valor foi utilizado na reconstrução completa da série, permitindo continuidade na modelagem estatística e análise gráfica.

Ajuste de Modelo Trigonométrico às Temperaturas de Janeiro (2005–2024)



6.6.1 Considerações Finais Sobre a Análise

As análises apresentadas neste capítulo demonstram que, além de explorar conteúdos matemáticos relevantes (funções, modelagem, leitura de gráficos), é possível mobilizar competências críticas e interpretativas dos estudantes a partir de dados reais e contextualizados. Eventos anômalos como o de 2013 reforçam a pertinência pedagógica da abordagem escolhida. Os modelos matemáticos obtidos a partir da análise quantitativa dos dados climáticos foram confrontados com os resultados das atividades propostas na sequência didática. A aplicação prática dessas atividades demonstrou, sob perspectiva qualitativa, uma melhora no entendimento dos conceitos de periodicidade e funções trigonométricas por parte dos alunos. A utilização de *Python* e *GeoGebra* permitiu uma visualização clara dos padrões periódicos, enquanto o suporte do *ChatGPT* contribuiu com a formulação de questões e sugestões interativas em tempo real. A análise cruzada entre os dados numéricos, como médias, amplitudes, gráficos e tabelas, bem como os relatos e observações decorrentes da prática pedagógica, confirmou a efetividade da abordagem integrada entre modelagem matemática e tecnologias educacionais.

CONCLUSÃO

A presente dissertação desenvolveu e analisou uma abordagem de ensino pautada na modelagem matemática de funções periódicas, integrando recursos de inteligência artificial e softwares educacionais, aplicada ao estudo das variações climáticas de São Luís-MA. Ao longo do texto, foram construídos modelos trigonométricos para descrever o comportamento periódico da temperatura – tanto no ciclo diário quanto anual – e elaborada uma sequência didática que explorou esses modelos em sala de aula, de forma alinhada à BNCC e focada na aprendizagem significativa dos alunos.

Os resultados obtidos permitem extrair diversas conclusões relevantes. Em primeiro lugar, confirmou-se que a utilização de fenômenos reais como contexto de aprendizagem de matemática promove maior engajamento e compreensão por parte dos estudantes. Ao modelar a variação da temperatura, os alunos puderam ver na prática o conceito de função periódica ganhando vida, o que facilitou a assimilação de ideias abstratas como período e amplitude. Esse achado reforça a importância de integrar a matemática ao cotidiano do aluno, conforme preconiza a BNCC, tornando a aprendizagem mais significativa e contextualizada.

Em segundo lugar, a experiência evidenciou que a modelagem matemática em si é uma estratégia pedagógica rica. Mais do que um fim (obter uma fórmula), o processo de modelagem – levantamento de dados, formulação de hipóteses, teste e refinamento do modelo – desenvolve nos alunos competências críticas de resolução de problemas e pensamento científico. Observou-se na sequência didática que os alunos se engajaram nesse processo e, mesmo aqueles com dificuldade inicial, conseguiram contribuir e evoluir em suas conjecturas. Portanto, a modelagem, além de ensinar conteúdos, ensinou como fazer matemática, alinhando-se às competências gerais de pensamento investigativo estimuladas nos currículos atuais.

A integração de ferramentas tecnológicas e de IA mostrou-se um diferencial inovador da proposta. O uso do *GeoGebra* facilitou a visualização e tornou as aulas mais dinâmicas, atendendo a diferentes estilos de aprendizagem e incentivando a experimentação ativa dos estudantes. Já a incorporação da IA, embora de forma mais indireta no contexto da aula, apontou caminhos promissores: desde a economia de tempo do professor na preparação de materiais até a possibilidade de personalizar aprendizados.

No capítulo 2, as seções 2.1.5 e as subsequentes contextualizam de forma clara como a modelagem matemática e os recursos computacionais, como a inteligência artificial, podem ser articulados para ensinar matemática.

Imagina-se que, num futuro próximo, assistentes de IA possam interagir em tempo

real com alunos para auxiliá-los em dúvidas ou propor desafios adicionais, sob supervisão docente. Neste trabalho, apenas arranhamos a superfície desse potencial, mas os resultados foram animadores o suficiente para recomendar investigações futuras mais aprofundadas sobre o papel da IA como ferramenta educacional no ensino de matemática.

Do ponto de vista prático para a educação básica, esta dissertação oferece um produto educacional concreto: uma sequência didática detalhada, testada e alinhada a referências curriculares, que pode ser adotada (ou adaptada) por professores em diversas escolas. O material suplementar produzido – como o arquivo interativo do *GeoGebra* e as tabelas de dados de São Luís – está disponível publicamente, o que facilita sua reutilização.

Espera-se que essa proposta possa inspirar outros educadores a explorarem fenômenos locais e atuais em suas aulas de matemática, seja envolvendo clima, seja outros padrões periódicos ou de natureza diferente. A postura de trazer problemas reais para dentro da sala de aula, mediada por modelagem e tecnologia, tende a formar alunos mais críticos, capazes de transferir o conhecimento matemático para interpretar o mundo ao seu redor.

Como trabalhos futuros, sugerem-se as seguintes direções:

- aplicar a sequência didática em um número maior de turmas e em diferentes contextos (inclusive fora do ambiente urbano de São Luís, para verificar como alunos de outras regiões respondem a fenômenos possivelmente distintos, como temperaturas mais frias ou outros padrões climáticos);
- aprofundar a avaliação quantitativa dos impactos na aprendizagem, por exemplo, comparando o desempenho de turmas que aprenderam trigonometria com e sem o uso da modelagem periódica contextual;
- investigar a interação direta de alunos com ferramentas de IA em sala de aula – por exemplo, realizar um experimento em que os alunos consultem um assistente virtual para tirar dúvidas durante a atividade, analisando os prós e contras pedagógicos;
- expandir a abordagem para outros tópicos da matemática escolar em que a modelagem seja aplicável (movimento harmônico em física, crescimento populacional com modelos exponenciais/logísticos, etc.), promovendo uma cultura escolar de projetos interdisciplinares orientados por modelagem.

Em conclusão, reafirmamos que a modelagem de funções periódicas com apoio de IA e ferramentas digitais mostrou-se uma estratégia eficaz e inovadora para o ensino de funções trigonométricas. Através dela, os alunos de Ensino Básico puderam visualizar, manipular e compreender conceitos matemáticos tradicionalmente considerados desafiadores, ao mesmo tempo em que desenvolveram habilidades de pensamento crítico e viram sentido no que estavam aprendendo.

Assim, este trabalho contribui para a prática educativa ao fornecer um exemplo de como conteúdos clássicos de matemática podem ser ensinados de forma moderna e relevante, atendendo às demandas de uma educação contemporânea que valoriza a contextualização, a tecnologia e a formação integral do aluno. Os resultados obtidos corroboram a visão de que matemática e realidade não estão dissociadas: pelo contrário, quando ensinadas juntas, enriquecem-se mutuamente, transformando a sala de aula em um espaço de descoberta e construção de significado.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem matemática: conceitos, experiências e aplicações**. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2002.

BRASIL. Ministério da Agricultura e Pecuária. Instituto Nacional de Meteorologia. **Sobre o INMET**. 2025. Disponível em: <https://portal.inmet.gov.br>. Acesso em: 4 mar. 2025.

CENTRO DE HIDROGRAFIA DA MARINHA – CHM. **Tábuas de maré**. 2025. Disponível em: <https://www.marinha.mil.br/chm/tabuas-de-mare>. Acesso em: 25 abr. 2025.

CRESPO, Antônio Arnot. **Estatística fácil**. 18. ed. São Paulo: Saraiva, 2002.

FOUNDATION, Python Software. **Python: a programming language for everyone**. 2025. Disponível em: <https://www.python.org>. Acesso em: 2 maio 2025.

GEOGEBRA. **GeoGebra – Software de Matemática Dinâmica**. [s.d.]. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 2 mar. 2025.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciência e aplicações: ensino médio, volume 1**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. Suplementado pelo manual do professor. ISBN: 978-85-472-0536-2.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Carlos Murakami. **Funções: gráficos e propriedades**. 1. ed. São Paulo: Atual, 1997.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise. v.1**. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. 431 p. Projeto Euclides. ISBN: 978-85-244-0118-3.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (Brasil). **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 5 abr. 2024.

MORAN, José Manuel. O que é mídia-educação. In: MORAN, José Manuel; MASSONI, Paulo; BACCEGA, Maria Aparecida (org.). **Mídia, conhecimento e educação**. São Paulo: Papirus, 2000. p. 15–36.

MUNHOZ, Diego Rodolfo. **Ensino de funções trigonométricas com o auxílio da modelagem matemática e do software GeoGebra**. 2022. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-17012023-174001/>. Acesso em: 2 abr. 2025.

OPENAI. **ChatGPT: modelo de linguagem GPT-4**. 2024. Disponível em: <https://openai.com/chatgpt>. Acesso em: 2024.

NAZARETH, Djalma de Pinho Rebouças de Oliveira, **Estatística básica**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

SILVA, João de Deus Mendes da. **Análise de estabilidade de sistemas dinâmicos p-fuzzy com aplicações em biomatemática**. 2005. Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, SP. 106 p. Disponível em: <https://hdl.handle.net/20.500.12733/1601641>. Acesso em: 2025.

LOBATO, Fabrício da Silva. **O ensino de função periódica por meio de uma sequência didática à luz das unidades articuladas de reconstrução conceitual**. 2022. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém. 149 p.

STEWART, James. **Cálculo**. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2018.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Instituto de Física. **Função periódica**. 2025. Disponível em: <https://ecalculo.if.usp.br/funcoes/periodica/fperiodica.htm>. Acesso em: 3 mar. 2025.

VALENTE, José Armando. O computador na sociedade do conhecimento. In: PRETTO, Nelson; MACEDO, Elizabeth (org.). **Tecnologia e construção do conhecimento**. Porto Alegre: Artes, 1999. p. 15–30.

ANEXOS

Script Python Utilizado para Análise dos Dados

O código Python abaixo foi utilizado para realizar o processamento dos dados climáticos de São Luís-MA entre 2005 e 2024, incluindo leitura de arquivos CSV, tratamento de dados, geração de gráficos e exportação de tabelas estatísticas.

Listing A.1: Script para análise dos dados climáticos

```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import os
from glob import glob

def carregar_dados(caminho_csv):
    try:
        print(f"Carregando_{caminho_csv}...")

        df = pd.read_csv(
            caminho_csv,
            sep=';',
            skiprows=8,
            encoding='latin1',
            decimal=',',
            names=['data', 'hora', 'temperatura', 'ponto_orvalho', '
                    temp_max', 'temp_min', 'orvalho_max', 'orvalho_min'],
            header=None # <- Essa linha fundamental! Para n o
                        tratar primeira linha como cabe alho
        )

        # Exclui a primeira linha que cont m os cabe alhos
        df = df.iloc[1:].reset_index(drop=True)

        # Corrige eventuais v rgulas em lugar de ponto nas temperaturas
        df['temperatura'] = df['temperatura'].str.replace(',', '.', ).
            astype(float)

        # Converte data
```

```

df['DATA'] = pd.to_datetime(df['data'], dayfirst=True, errors='
    coerce') # dayfirst porque est em 01/01/2005

# Cria colunas auxiliares
df['TEMP'] = df['temperatura']
df['M S'] = df['DATA'].dt.month
df['ANO'] = df['DATA'].dt.year

# Filtra apenas as colunas necess rias
return df[['DATA', 'TEMP', 'M S', 'ANO']]

except Exception as e:
    print(f"Erro ao processar o arquivo: {caminho_csv}")
    print(f"Erro encontrado: {e}")
    return pd.DataFrame()

def processar_todos_os_anos(pasta_dados):
    arquivos_csv = glob(os.path.join(pasta_dados, '*.csv'))
    df_geral = pd.DataFrame()
    for caminho in arquivos_csv:
        df = carregar_dados(caminho)
        if not df.empty:
            df_geral = pd.concat([df_geral, df], ignore_index=True)
    return df_geral

def gerar_graficos_e_tabelas(df, pasta_saida):
    if not os.path.exists(pasta_saida):
        os.makedirs(pasta_saida)

    # Temperatura M dia Anual
    media_anual = df.groupby('ANO')['TEMP'].mean()
    plt.figure(figsize=(14,6))
    media_anual.plot(marker='o')
    plt.title('Temperatura M dia Anual (2005-2024)')
    plt.xlabel('Ano')
    plt.ylabel('Temperatura M dia ( C )')
    plt.grid(True)
    plt.tight_layout()
    plt.savefig(os.path.join(pasta_saida, '
        grafico_temperatura_media_anual.png'))
    plt.close()

    # Amplitude T rmica Anual
    max_ano = df.groupby('ANO')['TEMP'].max()
    min_ano = df.groupby('ANO')['TEMP'].min()
    amplitude_anual = max_ano - min_ano
    plt.figure(figsize=(14,6))
    amplitude_anual.plot(kind='bar', color='orange')
    plt.title('Amplitude T rmica Anual (2005-2024)')
    plt.xlabel('Ano')
    plt.ylabel('Amplitude ( C )')
    plt.tight_layout()
    plt.savefig(os.path.join(pasta_saida, '
        grafico_amplitude_termica_anual.png'))
    plt.close()

```

```

# Boxplot por m s (comparando todos os anos)
plt.figure(figsize=(14,8))
df.boxplot(column='TEMP', by='M S', grid=True)
plt.title('Distribuição das Temperaturas por M s (2005-2024)')
plt.suptitle('') # Remove título automático
plt.xlabel('M s')
plt.ylabel('Temperatura ( C )')
plt.tight_layout()
plt.savefig(os.path.join(pasta_saida, 'grafico_boxplot_mensal.png'))
plt.close()

# Curvas comparativas de temperatura média mensal
media_mensal_por_ano = df.groupby(['ANO', 'M S'])['TEMP'].mean().
    unstack(level=0)
plt.figure(figsize=(16,9))
for ano in media_mensal_por_ano.columns:
    plt.plot(media_mensal_por_ano.index, media_mensal_por_ano[ano],
        label=str(ano))
plt.title('Comparação da Temperatura Média Mensal (2005-2024)')
plt.xlabel('M s')
plt.ylabel('Temperatura Média ( C )')
plt.legend(title='Ano', bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc='upper_left')
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.savefig(os.path.join(pasta_saida, '
    grafico_temperatura_media_mensal_comparativa.png'))
plt.close()

# Salvar tabelas de resultados principais
media_anual.to_csv(os.path.join(pasta_saida, '
    tabela_temperatura_media_anual.csv'))
amplitude_anual.to_csv(os.path.join(pasta_saida, '
    tabela_amplitude_termica_anual.csv'))
media_mensal_por_ano.to_csv(os.path.join(pasta_saida, '
    tabela_temperatura_media_mensal.csv'))

print("Todos os gráficos e tabelas foram gerados com sucesso!")

def executar_analise_geral(pasta_dados='dados', pasta_saida='
    resultados_geral'):
    df_geral = processar_todos_os_anos(pasta_dados)
    df_geral = df_geral[(df_geral['TEMP'].notna()) & (df_geral['TEMP']
        != -9999)]
    print("Anos presentes nos dados carregados:")
    print(df_geral['ANO'].dropna().sort_values().unique())

    gerar_graficos_e_tabelas(df_geral, pasta_saida)
    gerar_grafico_min_max_mensal(df_geral, pasta_saida)

def gerar_grafico_min_max_mensal(df, pasta_saida):
    if not os.path.exists(pasta_saida):
        os.makedirs(pasta_saida)

    # Agrupa por ano e m s, calcula m n. e m x. mensais

```

```

resumo = df.groupby(['ANO', 'M S'])['TEMP'].agg(['min', 'max']).
    reset_index()

# Gera uma coluna "Ano-M s" para o eixo X
resumo['ANO-M S'] = pd.to_datetime(dict(year=resumo['ANO'], month=
    resumo['M S'], day=1))

plt.figure(figsize=(16, 8))
plt.plot(resumo['ANO-M S'], resumo['min'], label='Temperatura_
    M nima_Mensal', marker='o', linestyle='-')
plt.plot(resumo['ANO-M S'], resumo['max'], label='Temperatura_
    M xima_Mensal', marker='o', linestyle='-')

plt.title('Evolu o das Temperaturas M nimas e M ximas Mensais_
    (2005 2024 )')
plt.xlabel('Ano')
plt.ylabel('Temperatura ( C )')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.savefig(os.path.join(pasta_saida, '
    grafico_temperaturas_min_max_mensais.png'))
plt.close()

if __name__ == "__main__":
    executar_analise_geral(pasta_dados='dados', pasta_saida='
        resultados_geral')

```

Listing A.2: Script para verificar erros nos arquivos de dados climáticos

```

import pandas as pd
import os
from glob import glob

def carregar_e_validar(caminho_csv):
    try:
        df = pd.read_csv(caminho_csv, sep=',', skiprows=8, encoding='utf
            -8')
        df.columns = [col.strip().lower() for col in df.columns]

        coluna_data = next((col for col in df.columns if 'data' in col),
            None)
        coluna_temp = next((col for col in df.columns if 'temperatura'
            in col), None)

        if coluna_data is None or coluna_temp is None:
            return 0 # N o encontrou colunas

        df['DATA'] = pd.to_datetime(df[coluna_data], format='%Y-%m-%d',
            errors='coerce')
        df['TEMP'] = pd.to_numeric(df[coluna_temp], errors='coerce')

        # Filtra dados v lidos
        df_validos = df[(df['TEMP'].notna()) & (df['TEMP'] != -9999)]
    
```

```
        return len(df_validos)

    except Exception as e:
        print(f"Erro ao ler {caminho_csv}: {e}")
        return 0

def analisar_disponibilidade(pasta_dados='dados'):
    arquivos_csv = glob(os.path.join(pasta_dados, '*.csv'))
    resultados = []

    for caminho in arquivos_csv:
        nome_arquivo = os.path.basename(caminho)
        total_validos = carregar_e_validar(caminho)
        resultados.append((nome_arquivo, total_validos))

    print("Resumo de Arquivos e Dados V lidos:")
    print("=" * 50)
    for nome, total in sorted(resultados):
        print(f"{nome:30s} -> {total:5d} registros v lidos")

if __name__ == "__main__":
    analisar_disponibilidade(pasta_dados='dados')
```

Introdução à Regressão Linear

Considere uma coleção de pares ordenados (x_i, y_i) obtidos a partir de observações experimentais. A representação desses pares em um plano cartesiano possibilita a visualização do comportamento dos dados e a análise de padrões.

A determinação de uma função que represente adequadamente os dados é essencial em diversas áreas da ciência aplicada. Nem sempre é possível encontrar uma função que passe exatamente por todos os pontos (interpolação), mas é possível buscar uma função que se aproxime ao máximo deles (aproximação).

Um dos métodos mais utilizados para essa aproximação é o **método dos mínimos quadrados**, base da **regressão linear**. Esse método minimiza a soma dos quadrados das distâncias verticais entre os pontos observados e os valores previstos pela função ajustada.

Funções frequentemente utilizadas:

Tipo da Função	Equação Geral	Nome
Linear	$y = a + bx$	Reta
Quadrática	$y = a + bx + cx^2$	Parábola
Cúbica	$y = a + bx + cx^2 + dx^3$	Cúbica
Quártica	$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$	Quártica

B.1 Regressão Linear: Reta dos Mínimos Quadrados

Para ajustar uma reta do tipo $y = \beta_0 + \beta_1 x$, resolve-se o sistema:

$$\begin{aligned}\sum y &= n\beta_0 + \beta_1 \sum x \\ \sum xy &= \beta_0 \sum x + \beta_1 \sum x^2\end{aligned}$$

A solução é dada por:

$$\beta_1 = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}, \quad \beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$$

B.2 Regressões Polinomiais

Para ajustar funções como parábola, cúbica ou quártica, monta-se sistemas com 3, 4 ou 5 equações, respectivamente. A resolução pode ser feita por inversão matricial:

$$\vec{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

B.3 Exemplo: Ajuste de Reta

x	y
1	2
2	3
3	5
4	7
5	11

Desejamos ajustar uma reta da forma:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x$$

utilizando o método dos mínimos quadrados.

Passo 1: Cálculo dos somatórios

$$\begin{aligned} \sum x &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \\ \sum y &= 2 + 3 + 5 + 7 + 11 = 28 \\ \sum x^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55 \\ \sum xy &= (1)(2) + (2)(3) + (3)(5) + (4)(7) + (5)(11) \\ &= 2 + 6 + 15 + 28 + 55 = 106 \end{aligned}$$

Passo 2: Fórmulas da Regressão Linear

$$\beta_1 = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{5 \cdot 106 - 15 \cdot 28}{5 \cdot 55 - 15^2} \\
 &= \frac{530 - 420}{275 - 225} = \frac{110}{50} = 2,2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_0 &= \frac{\sum y - \beta_1 \sum x}{n} \\
 &= \frac{28 - 2,2 \cdot 15}{5} = \frac{28 - 33}{5} = -1
 \end{aligned}$$

Modelo ajustado

$$y = -1 + 2,2x$$

Previsão para $x = 6$

$$y = -1 + 2,2 \cdot 6 = -1 + 13,2 = 12,2$$

Interpretação

- O coeficiente angular $\beta_1 = 2,2$ indica que, a cada unidade que x aumenta, y cresce em média 2,2 unidades.
- O intercepto $\beta_0 = -1$ representa o valor estimado de y quando $x = 0$.

B.4 Regressão Trigonométrica: Modelagem com Seno e Cosseno

Problema:

Modelar a temperatura média de janeiro entre 2005 e 2024 (exceto 2008) com:

$$T(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + C$$

Etapas:

1. Definir $\omega = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10} = 0,3142$
2. Montar matriz A com colunas $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$ e uma coluna de 1's

3. Vetor Y com as temperaturas observadas
4. Resolver $A\theta = Y$ pelo método dos mínimos quadrados:

$$\theta = (A^T A)^{-1} A^T Y$$

5. Obter:

$$T(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + C$$

6. Reescrever na forma:

$$T(t) = R \cos(\omega t - \phi), \quad R = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

7. Estimar $T(3)$ substituindo $t = 3$

Observações:

- O modelo é linear nos parâmetros a , b e C .
- A forma trigonométrica final permite interpretação física em termos de amplitude (R) e fase (ϕ).

Seja o modelo trigonométrico proposto:

$$T(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + C,$$

onde $\omega = \frac{2\pi}{20} = 0,3142$ e $t = 1, 2, \dots, 20$.

1. Dados Empíricos

A Tabela representada na Figura 24 apresenta os valores médios de temperatura registrados no mês de janeiro ao longo de 20 anos consecutivos (2005 a 2024), na cidade de São Luís (MA). Esses dados foram obtidos a partir dos registros históricos disponibilizados pelo Instituto Nacional de Meteorologia (INMET) e foram organizados de forma sequencial, atribuindo-se $t = 1$ ao ano de 2005, $t = 2$ ao ano de 2006, e assim sucessivamente até $t = 20$, correspondente ao ano de 2024.

2. Estrutura do Sistema

A matriz A é composta pelas colunas:

- $\cos(\omega t)$
- $\sin(\omega t)$
- constante 1

Com isso, temos um sistema matricial do tipo:

$$A \cdot \theta = Y, \quad \text{com } \theta = [a, b, C]^T$$

Ano (t)	Temperatura (T)
1	26,87
2	27,25
3	26,86
4	26,99
5	27,26
6	27,02
7	26,67
8	26,92
9	27,21
10	26,41
11	26,01
12	26,72
13	27,08
14	27,06
15	27,06
16	26,32
17	26,36
18	26,22
19	26,24
20	26,36

Figura 24: Dados de temperatura média do mês de janeiro de São Luis nos (2005 a 2024)

3. Cálculos dos Somatórios Necessários

A seguir, apresentam-se os somatórios relevantes (valores aproximados com 4 casas decimais):

$$\begin{aligned}
 \sum \cos(\omega t) &= 0 \\
 \sum \sin(\omega t) &= 0 \\
 \sum T &= 534.89 \\
 \sum \cos^2(\omega t) &= 10.0000 \\
 \sum \sin^2(\omega t) &= 10.0000 \\
 \sum \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t) &= 0.0000 \\
 \sum T \cdot \cos(\omega t) &= -0,8417 \\
 \sum T \cdot \sin(\omega t) &= 2,1604
 \end{aligned}$$

4. Montagem do Sistema Normal

O sistema normal $A^T A \cdot \theta = A^T Y$ assume a forma:

$$\begin{bmatrix} \sum \cos^2(\omega t) & \sum \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t) & \sum \cos(\omega t) \\ \sum \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t) & \sum \sin^2(\omega t) & \sum \sin(\omega t) \\ \sum \cos(\omega t) & \sum \sin(\omega t) & n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum T \cdot \cos(\omega t) \\ \sum T \cdot \sin(\omega t) \\ \sum T \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores:

$$\begin{bmatrix} 10.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 10.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8417 \\ 2.1604 \\ 534.89 \end{bmatrix}$$

5. Solução por Mínimos Quadrados

Resolvendo o sistema por:

$$\theta = (A^T A)^{-1} A^T Y$$

Obtemos:

$$a = -0,0841$$

$$b = 0,2160$$

$$C = 26,7445$$

6. Modelo Final Obtido

$$T(t) = -0,0841 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{20} \cdot t\right) + 0,1929 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{20} \cdot t\right) + 26,7445$$

7. Interpretação

- O modelo capta a sazonalidade dos dados de temperatura, evidenciando um padrão periódico.
- A amplitude pode ser obtida por $R = \sqrt{a^2 + b^2} \approx \sqrt{(-0,0841)^2 + (0,2160)^2} \approx 0,2616$.
- A fase $\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \approx \arctan\left(\frac{0,2160}{-0,0841}\right) \approx 68,9^\circ$.