



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Programa de Pós-Graduação em Matemática

LUIS EDUARDO SOUSA BRANDÃO

**NÚMEROS COMPLEXOS: Do estudo de
equações algébricas ao novo conjunto numérico**

São Luís - MA

2024

LUIS EDUARDO SOUSA BRANDÃO

**NÚMEROS COMPLEXOS: Do estudo de equações
algébricas ao novo conjunto numérico**

Dissertação apresentada como requisito
parcial para obtenção do título de Mestre em
Matemática, ao Programa de Pós-Graduação
em Matemática, da Universidade Federal do
Maranhão.

Orientador: Prof. Dr. José Santana C. Costa

São Luís - MA

2024

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Brandão, Luis Eduardo Sousa Brandão.

Números complexos:Do estudo de Equações Algébricas ao novo conjunto numérico : do estudo de Equações Algébricas ao novo conjunto numérico / Luis Eduardo Sousa Brandão Brandão. - 2024.

133 p.

Orientador(a): José Santana.c Costa.

Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Maranhão, Sao Raimundo das Mangabeiras, 2024.

1. Numeros Complexos. 2. Novo Conjunto Numérico. 3. Equações Algébricas. I. Costa, José Santana.c. II. Título.

LUIS EDUARDO SOUSA BRANDÃO

NÚMEROS COMPLEXOS: Do estudo de equações algébricas ao novo conjunto numérico

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Maranhão.

Dissertação de Mestrado. São Luís - MA, 29 de Outubro de 2024:

Prof. Dr. José Santana C. Costa

Orientador

Universidade Federal do Maranhão

Prof.^a Dr.^a Valeska martins De Souza

Examinador Interno

Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Marlon César Santos

Oliveira-UEMA

Examinador Externo

Universidade de São Paulo - ICMC

São Luís - MA

2024

Agradecimentos

Primeiramente, sou grato a Deus por me proporcionar saúde e força para não desistir durante a execução deste trabalho. E por me possibilitar atingir minhas metas ao longo de todos os anos de estudo.

Agradeço aos amigos e familiares pelo suporte e contribuição relevantes para a execução deste trabalho. Também agradeço aos meus pais e irmãos, que me apoiaram nos momentos de dificuldade e entenderam a minha ausência enquanto me dedicava ao TCC.

Sou grato ao professor Santana pela sua dedicação e amizade que demonstrou ao me orientar. Agradeço aos docentes pelas orientações e lições que enriqueceram minha formação profissional.

Agradeço a todos que, de maneira direta ou indireta, auxiliaram na execução deste projeto. E aos indivíduos com quem interagi durante esses anos de estudo, que exerceram influência na minha formação acadêmica.

*"A Matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema
beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura."*

(Bertrand Russell)

Resumo

O presente trabalho realizada no Programa de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, tem por objetivo apresentar de forma contextualizada e didática um breve estudo sobre Números Complexos, por meio da resolução de equações algébricas com foco na História da matemática, devido a sua grande importância no ensino aprendizagem e posteriormente definimos o conjunto dos números complexos com suas operações, propriedades e aplicações.

Finalizando com o estudo de equações algébricas dando ênfase a teoremas, corolários e proposições.

Palavras-chave: Números complexos; História da Matemática; Equações algébricas.

Abstract

The present work carried out in the Mathematics in National Network - PROFMAT, aims to present in a contextualized and didactic way a brief study on Complex Numbers, through the resolution of algebraic equations with a focus on the History of Mathematics, due to its great importance in teaching and learning and later we define the set of complex numbers with their operations, properties and applications. Ending with the study of algebraic equations emphasizing theorems, corollaries and propositions.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	ASPECTO HISTÓRICO DOS NÚMEROS COMPLEXOS	12
3	NÚMEROS COMPLEXOS	18
3.1	Propriedades da adição dos números complexos	22
3.2	Propriedades da multiplicação dos números complexos	24
3.3	O conjugado de um número complexo	26
3.4	Propriedades do conjugado	26
3.5	O plano de Argand-Gauss e a representação geométrica dos números complexos	28
3.6	Operações básicas com números complexos	30
3.7	Potências da unidade imaginária	34
3.8	Módulo de um número complexo	35
3.9	Interpretação geométrica do módulo de um número complexo	36
3.10	Propriedades do módulo	36
3.11	Argumento de um número complexo	38
4	A FORMA TRIGONOMÉTRICA DE NÚMEROS COMPLEXOS	41
4.1	Operações com a forma trigonométrica	42
4.2	Produtos de números complexos na forma trigonométrica	42
4.3	Quocientes de números complexos na forma trigonométrica	43
4.4	Potenciação de números complexos na forma trigonométrica	44
4.5	Radiciação de números complexos na forma trigonométrica	46
4.6	Raízes complexas da unidade	51
4.7	Fórmula da raiz quadrada de qualquer número complexo	51
5	POLINÔMIOS EM UMA VARIÁVEL	54
5.1	Operações com polinômios	55
5.2	Valor numérico dos polinômios	56
5.3	Raiz de um Polinômio	56
5.4	Algoritmo da divisão para polinômios	57
5.5	Teorema do resto	58
6	EQUAÇÕES EQUAÇÕES ALGÉBRICAS	60
6.1	Raiz de uma equação polinomial	60
6.2	Multiplicidade de uma raiz	60

6.3	Conjunto solução de uma equação polinomial	61
6.4	Teorema Fundamental da Álgebra	61
6.5	Teorema da Decomposição ou teorema do fator	61
6.6	O Teorema das Raízes Racionais	63
6.7	Raízes complexas:	64
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	67
	BIBLIOGRAFIA	68
A	INTRODUÇÃO	72
B	ASPECTO HISTÓRICO DOS NÚMEROS COMPLEXOS	74
C	NÚMEROS COMPLEXOS	80
C.1	Propriedades da adição dos números complexos	84
C.2	Propriedades da multiplicação dos números complexos	86
C.3	O conjugado de um número complexo	88
C.4	Propriedades do conjugado	88
C.5	O plano de Argand-Gauss e a representação geométrica dos números complexos	90
C.6	Operações básicas com números complexos	92
C.7	Potências da unidade imaginária	96
C.8	Módulo de um número complexo	97
C.9	Interpretação geométrica do módulo de um número complexo	98
C.10	Propriedades do módulo	98
C.11	Argumento de um número complexo	100
D	A FORMA TRIGONOMÉTRICA DE NÚMEROS COMPLEXOS	103
D.1	Operações com a forma trigonométrica	104
D.2	Produtos de números complexos na forma trigonométrica	104
D.3	Quocientes de números complexos na forma trigonométrica	105
D.4	Potenciação de números complexos na forma trigonométrica	106
D.5	Radiciação de números complexos na forma trigonométrica	108
D.6	Raízes complexas da unidade	113
D.7	Fórmula da raiz quadrada de qualquer número complexo	113
E	POLINÔMIOS EM UMA VARIÁVEL	116
E.1	Operações com polinômios	117
E.2	Valor numérico dos polinômios	118

E.3	Raiz de um Polinômio	118
E.4	Algoritmo da divisão para polinômios	119
E.5	Teorema do resto	120
F	EQUAÇÕES EQUAÇÕES ALGÉBRICAS	122
F.1	Raiz de uma equação polinomial	122
F.2	Multiplicidade de uma raiz	122
F.3	Conjunto solução de uma equação polinomial	123
F.4	Teorema Fundamental da Álgebra	123
F.5	Teorema da Decomposição ou teorema do fator	123
F.6	O Teorema das Raízes Racionais	125
F.7	Raízes complexas:	126
G	CONSIDERAÇÕES FINAIS	129
	 BIBLIOGRAFIA	 130

1 INTRODUÇÃO

Apresentar o surgimento dos números complexos de forma contextualizada e didática por meio do estudo de equações algébricas como foco na História da matemática foi que motivou a escolha do tema deste trabalho, devido a sua grande importância no ensino aprendizagem. Diante dessa abordagem histórica, introduziremos as definições e propriedades importantes como a representação do número imaginário i a partir da resolução de equações quadráticas e cúbicas. A determinação da solução de uma equação do segundo grau com discriminante negativo parece ter sido sempre evidente para os matemáticos que se depararam com o problema, uma vez que não há raiz quadrada de um número negativo, como indicado na fórmula de Bhaskara para resolução. Portanto, se durante o processo de resolução surgisse uma raiz quadrada de um número negativo, isso era visto apenas como um sinal de que a questão originalmente proposta não possuía solução. Ao resolver equações do terceiro grau, foi necessário lidar com números imaginários.

Desde que os babilônios aprenderam a resolver equações quadráticas, já se passaram mais de 3000 anos desde que a fórmula que fornece as raízes das equações de terceiro grau foi identificada.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (1.1)$$

Vamos exemplificar a dedução da fórmula mencionada, empregando a técnica de remover o termo de grau dois da equação geral de 3º grau.

No entanto, ao utilizar a fórmula (1.1) atualmente conhecida na equação $x^3 = 15x + 4$, obtemos:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Geralmente, ao iniciarmos o estudo de números complexos no Ensino Médio, os percebemos como pares ordenados de números reais, sujeitos às normas de duas operações bem definidas: a adição, obtida pela soma das coordenadas, e a multiplicação, realizada por meio da lei distributiva e da regra que afirma que $i^2 = -1$. Depois de definir essas definições, o ponto $(0, 1)$ é definido como a unidade imaginária. Com base nessa dedução, é possível representar as coordenadas de números reais através da fórmula $z = a + bi$, também chamada de forma algébrica ou cartesiana, com base no conceito de multiplicação de coordenadas, determina-se que $i^2 = -1$, o que leva à expressão $i = \sqrt{-1}$.

Ao contrário dos números reais, que são representados por pontos numa linha horizontal real, eles não são representados por pontos, onde cada número é dado pela combinação de uma parte real e uma parte imaginária.

Ao longo da história, foi bastante frequente a expansão de um conjunto numérico para um novo conjunto. Ocorre que, ao longo do tempo, a matemática evoluiu e, para satisfazer as demandas da época, percebeu-se que havia números que não faziam parte do conjunto numérico ao qual se referia.

Tal como aconteceu com o surgimento dos conjuntos numéricos de inteiros, racionais, irracionais e reais, o mesmo ocorreu com a necessidade de ampliar o conjunto de números reais para abranger os números complexos. Na tentativa de solucionar equações do segundo grau, é comum encontrarmos a raiz quadrada de um número negativo, algo que não tem solução no conjunto dos números reais. Assim, a necessidade de ampliar o conjunto dos números que comportem as soluções das equações algébricas.

Os números complexos se desenvolveram como uma extensão dos números reais, possibilitando o surgimento da unidade imaginária, simbolizada por " i ". Esta unidade imaginária é caracterizada pela raiz quadrada de -1 , isto é, $i = \sqrt{-1}$.

Na matemática e na física, os números Complexos desempenham um papel crucial, representando quantidades que não podem ser expressas apenas por números reais. O conceito de número complexo se desenvolveu gradativamente, como ocorreu com os demais tipos de números. Havia séculos que se sabia da inviabilidade de resolver a equação $x^2 + a = 0$ quando a era positivo no século XVI, pois para os estudiosos da época a raiz negativa não existia mas as tentativas de superar os obstáculos levaram tempo para ocorrer. Com o passar dos anos, alguns matemáticos viram o mesmo problema para equações do 3º, onde foi possível perceber que os números reais não eram suficientes para resolver este tipo de equação.

“Os números complexos são frequentemente associados à resolução de equações quadráticas cujas soluções são expressas por raízes quadradas de números negativos. Evocasse um contexto histórico para justificar a necessidade de se introduzir estes números na matemática, ainda que a sua história não seja detalhada” (PINTO, 2009, p. 11).

Os números complexos começaram a ser desenvolvidos por Scipione del Ferro. Ele desenvolveu uma teoria para a solução das equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, mas acabou não publicando sua teoria. Apenas a revelou a dois discípulos seus: Della Nave e Antônio Fior, dando a demonstração apenas ao primeiro.

2 ASPECTO HISTÓRICO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

No século XIX, o italiano Girolamo Cardano (1501–1576) foi o primeiro matemático a trabalhar com números complexos, ao invés de simplesmente rejeitá-los. A partir desse momento, os matemáticos começaram a aceitar e formalizar esses números. Girolamo Cardano, que nasceu em Pavia em 1501 e faleceu em Roma em 1576, foi um cientista de grande versatilidade e controvérsia. É o autor do livro *Liber De Ludo Aleae* (Livro dos Jogos de Azar), onde de maneira brilhante apresentou a noção de probabilidade que é utilizada atualmente. Além disso, ensinou técnicas para burlar os jogos. Mesmo com características pessoais nada apelativas, Cardano deixou para a história um livro que, naquele tempo, era indiscutivelmente a maior obra de Álgebra já publicada: a *Artis Magnae Sive de Regulis*.

Cardano, ao tentar solucionar o desafio de dividir um segmento de 10 cm em dois segmentos, cujo produto desses segmentos seja igual a 40. Em outras palavras, transformando o desafio em uma equação, obtemos:

$$40 = x \cdot (10 - x).$$

Vamos determinar os valores de x :

$$40 = x \cdot (10 - x) \implies x^2 - 10x = 40 \implies x^2 - 10x - 40 = 0$$

em que $a = 1$, $b = -10$ e $c = -40$.

Para calcular vamos usar a fórmula resolutive de "Bhaskara"

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aplicando essa fórmula,

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 160}}{2}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{-60}}{2}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{-2^2 \cdot 3 \cdot 5}}{2}$$

$$x = \frac{10 \pm -2\sqrt{-3 \cdot 5}}{2}$$

$$x = \frac{2(5 \pm \sqrt{-15})}{2}$$

$$x = 5 \pm \sqrt{-15}$$

As quais são: $x = 5 \pm \sqrt{-15}$.

Resolvendo o problema de dividir o número 10 em duas partes cujo produto é 40, provou que os números são: $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$.

Supõe-se que a incapacidade dos números complexos foi primeiramente notada ao solucionar equações de terceiro grau. No livro "Ars Magna", de 1545, escrito por Girolano Cardano, é apresentado um método para solucionar algumas equações de terceiro grau, conhecido atualmente como Fórmula de Cardano-Tartaglia, que se baseia em raízes quadradas de números complexos.

Niccolò Fontana, também chamado de Tartaglia, desempenhou um papel significativo na história da Matemática. Tartaglia, que nasceu em Bréscia em 1501, superou obstáculos na fala devido a cicatrizes na boca e se sobressaiu por suas contribuições matemáticas, particularmente em cálculos de artilharia e equações cúbicas.

Cardano é creditado pela criação de uma fórmula para solucionar equações do tipo, $x^3 + px + q$.

Ao examinar a técnica criada por Tartaglia, percebemos a origem das referidas raízes de números negativos.

Tartaglia criou um método para solucionar equações cúbicas, que posteriormente foi adotado por Cardano. A equação cúbica utiliza a fórmula de Cardano-Tartaglia para determinar raízes reais.

Vamos examinar o método de Tartaglia:

vamos tomara equação geral cúbica:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \text{ com } a \neq 0$$

Vamos trocar x por $y + m$ e, posteriormente, eliminar o termo quadrático,

$$a(y + m)^3 + b(y + m)^2 + c(y + m) + d = 0$$

Descomplicando e ampliando:

$$ay^3 + (3am + b)y^2 + (3am^2 + 2bm + c)y + am^3 + bm^2 + cm + d = 0.$$

Para eliminar o termo quadrático, procedemos da seguinte maneira:

$$3am + b = 0 \implies 3am = -b \implies m = -\frac{b}{3a}$$

$$\text{Substituindo } m, \text{ obtemos: } ay^3 + \left(3ac - \frac{b^2}{3a}\right)y + \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2} = 0.$$

Simplificando, obtemos a forma:

$$y^3 + py + q = 0, \text{ sendo } p = 3ac - \frac{b^2}{3a} \text{ e } q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2}$$

$$\text{Vamos supor } x = A + B \implies x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx.$$

Comparando com a equação cúbica,

$$y^3 + py + q = 0, \text{ obtemos:}$$

$$A^3 + B^3 = -q \text{ e } 3AB = -p \implies A^3 B^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

Essas relações permitem encontrar A e B, e consequentemente, as raízes da equação cúbica.

$$\text{Sendo } A^3 + B^3 = -q \text{ e } A^3 B^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

$$\begin{aligned} \text{Substituindo } B^3 = -q - A^3 \text{ na equação } A^3 B^3 = -\frac{p^3}{27}, &\implies A^3(-q - A^3) = -\frac{p^3}{27} \\ \implies -A^6 - qA^3 = -\frac{p^3}{27} &\implies A^6 + qA^3 = \frac{p^3}{27} \implies (A^3)^2 + qA^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \end{aligned}$$

Esta é uma equação do tipo quadrática em termos de A^3 .

$$\text{Vamos definir } u = A^3, \text{ então a equação se torna: } u^2 + qu - \frac{p^3}{27} = 0$$

Resolvendo esta equação quadrática para u obtemos:

$$u = \frac{-q \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}{2}$$

Vamos tomar

$$u = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4 \cdot \frac{p^3}{27}}}{2}$$

$$u = \frac{-q}{2} + \frac{\sqrt{q^2 + 4 \cdot \frac{p^3}{27}}}{2}$$

$$u = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \implies A^3 = u$$

Portanto,

$$A = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$\begin{aligned} \text{Sendo } B^3 = -q - A^3 &\implies B^3 = -q - u \implies B^3 = -q - \left(\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right) \\ &\implies B^3 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \implies B = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \end{aligned}$$

Finalmente como $x = A + B$, temos:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Uma característica única na equação de Cardano (Tartaglia!) é que ela não oferece soluções complexas para a equação do terceiro grau; deve ser utilizada na busca por uma raiz real.

Cardano se deparou com um problema: "Um carpinteiro tem a intenção de construir duas caixas, uma em formato de cubo de aresta x , e a outra em formato de paralelepípedo de base retangular, com dimensões de 3 m e 5 m, e altura igual à altura do cubo." A escolha de x deve assegurar que o volume do cubo supere o do paralelepípedo em $4m^3$.

Ele utilizou a fórmula para validar a resposta de $x = 4$ que já sabia, chegando à conclusão de que $x = 4$ era a resposta correta, um desfecho inesperado.

Vamos seguir o processo de dedução da fórmula realizado por ele.

Fazendo $x = A + B$, e utilizando o raciocínio de Tartaglia :

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx. \text{Igualando os termos: } A^3 + B^3 + 3ABx = 15x + 4$$

Então, $A^3B^3 = 125$ e $A^3 + B^3 = 4$, de onde $A^3(4 - A^3) = 125$ ou seja:

$$(A^3)^2 - A^3 + 125 = 0 \implies A^3 = 2 + \sqrt{-121} \text{ e } B^3 = 2 - \sqrt{-121}.$$

Desse modo, temos a solução:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Contudo, Cardano não conseguiu converter a expressão acima em 4, que ele tinha conhecimento ser uma das raízes que procurava. Contudo, a conexão entre a raiz natural 4 e a raiz da equação no formato da fórmula continuou a intrigar os matemáticos até o ano de 1572.

O algebrista bolonhês Rafael Bombelli (1526–1572) foi um notável diletante da matemática que publicou um livro intitulado *Álgebra* em 1572. Este livro apresenta pela primeira vez uma teoria dos números complexos bem organizada, inclusive com uma notação específica, introduzindo pela primeira vez os números complexos e apresentando

uma primeira introdução ao tema. É precisamente neste livro que descreve de maneira didática as ideias de Cardano. Durante o ano de 1818, Rafael Bombelli dedicou 74 páginas de sua *L'Algebra* ao estudo das leis algébricas que orientavam o cálculo das quantidades $a + b \cdot \sqrt{-1}$. Especificamente, demonstrou que: as quatro operações aritméticas sobre números "sofísticos" (como eram conhecidos naquela época) eram possíveis.

Bombelli optou por agir como se as raízes quadradas de números negativos representassem números reais. Ele entende que a raiz cúbica de $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ é um "número" representado por $a + \sqrt{-b}$. Em tal cenário, a situação é diferente.

$$\begin{cases} \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1} \\ \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1} \end{cases}$$

Logo,

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1} = 2 - \sqrt{-121}$$

Substituindo os valores na equação obtemos:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

Donde ele deduzir que :

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 = \\ 8 + 12\sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (-1) + (\sqrt{-1})^3 &= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}. \end{aligned}$$

Portanto, mesmo com o desconforto de lidar com números que parecem "ilegais", no final, se alcançava um resultado legítimo. Esta é apenas uma das circunstâncias, possivelmente a de maior relevância, onde se justifica a utilização de raízes quadradas de números negativos.

Em 1637, com a publicação de *La Géométrie*, Renè Descartes introduziu os conceitos de parte real e parte imaginária.

Albert Girard introduziu o símbolo $\sqrt{-1}$ em 1669, e um pouco mais tarde, em 1777, o matemático suíço Leonhard Euler estabeleceu $i = \sqrt{-1}$, que foi impresso pela primeira vez em 1794. A letra *i* só começou a ser usada para representar a raiz quadrada de -1 a partir de 1777 por Leonhard Euler, o genial suíço.

Em 1798, o século XVIII chegava ao fim quando Gauss retomou o conceito de Argand em 1831, considerando os números $a + b\sqrt{-1}$ como coordenadas de um ponto em um plano cartesiano, resultando em (a, b) . Também foi realizada uma interpretação geométrica para os símbolos de adição e multiplicação. Esta representação geométrica permitiu que os matemáticos se sentissem mais confortáveis com os números imaginários, uma vez que agora podiam ser visualizados considerando que cada ponto, representa um número complexo no plano.

Jean Robert Argand e Caspar Wessel, de forma autônoma, inspirados pela geometria

e topografia, representaram geometricamente os complexos de forma intuitiva e prática, utilizando pontos e vetores em um plano cartesiano. Gauss descreveu os números complexos da seguinte maneira: $a + bi$, onde a e b são números reais e $i^2 = -1$.

A representação geométrica desses números como pontos no plano foi o passo crucial para formalizar o conceito de número complexo. Gauss foi o primeiro matemático a ter uma compreensão clara dessa representação e a utilizá-la em seus estudos. Como fica evidente, mesmo que implicitamente, em sua tese redigida em 1799. No entanto, Gauss só tornou suas ideias públicas em 1831, com a intenção de introduzir os inteiros gaussianos. Hamilton definiu rigorosamente o corpo dos números complexos em 1837.

Jean-Robert Argand (1768-1822) é o autor da publicação de 1806 que apresenta a interpretação geométrica atual e definitiva dos números complexos, denominada Diagrama de Argand. O projeto de Argand-Gauss é bastante ambicioso.

Como é evidente, a origem dos números complexos está intimamente ligada à dos polinômios, já que a "criação" desses números ocorreu ao analisar as soluções de certas equações polinomiais. No entanto, o estudo das raízes das equações polinomiais também se baseou em números complexos, culminando na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra de Gauss.

Em 1837, Sir William Rowan Hamilton chegou ao final dessas descobertas reconhecendo os números complexos como um par ordenado de números reais e reescreveu as definições geométricas de Gauss na forma algébrica.

A partir daí, números complexos, até então supostamente inexistentes, tornaram-se um objeto matemático. Hoje, a teoria dos números complexos, tem ampla aplicação nos estudos mais avançados de eletricidade, engenharia, eletromagnetismo, física quântica, teoria do caos.

3 NÚMEROS COMPLEXOS

Quando pensamos sobre a representação dos números reais, imaginamos uma reta numérica (reta horizontal) no sentido negativo e positivo em relação ao zero, o ponto inicial das semirretas subsequentes. Escolhemos um comprimento padrão, denominado unidade, e duas regras distintas para realizar duas operações na reta, denominadas adição e multiplicação de números reais. O objetivo é gerar um terceiro ponto como resultado. Observamos que as operações estabelecidas possuem diversas propriedades úteis, como a comutatividade, associatividade e outras.

Seja $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$, o conjunto dos pares ordenados de números reais sujeitos às regras e leis das operações de adição e multiplicação usuais de números reais, definidas a seguir.

Sejam (a_1, b_1) e (a_2, b_2) dois números complexos não nulos, então:

$$(1) (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Regra da adição de pares ordenados: Dados dois pontos coordenados $z_1 = (a_1, b_1)$ e $z_2 = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$, somam-se as primeiras e as segundas coordenadas separadamente dos números dados.

$$(2)(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$$

Regra da multiplicação de pares ordenados: dados dois pontos (a_1, b_1) e $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$, calculamos a diferença entre os produtos das primeiras e das segundas coordenadas respectivamente e depois calculamos a soma dos produtos da primeira coordenada do primeiro número pela segunda coordenada do segundo número e vice-versa ordenadamente.

Exemplo 3.1. a) Calcule $(2, 5) + (7, 8) = (2 + 7, 5 + 8) = (9, 13)$.

b) Determine $(3, 4) \cdot (1, 2)$:

$$(3, 4) \cdot (1, 2) = (3 \cdot 1 - 4 \cdot 2, 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1) = (3 - 8, 6 + 4) = (-5, 10)$$

Definição 3.1: Chamamos de **número complexo** o par ordenado dos pontos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, convencionalmente denotado por $z = (a, b)$, sujeito às regras e leis das operações de adição e multiplicação usuais de números reais definidos.

De acordo com essa definição, devemos nos atentar que todo número complexo $(a, 0)$ com a segunda coordenada nula pode ser associado a um número real a de tal forma que $(a, 0) = a$.

Dessa forma, os números complexos $(0, 0)$ e $(1, 0)$ podem ser associados aos números reais 0 e 1 respectivamente. Ou seja, $(0, 0) = 0$ e $(1, 0) = 1$.

Em particular, os elementos $0 = (0, 0)$ e $1 = (1, 0)$ são, respectivamente, os elementos neutros da adição e da multiplicação.

Agora, o número complexo $(0, 1)$ é chamado de **unidade imaginária** e é representado por i . Notemos que: $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1$

Portanto, $i^2 = -1$. (relação fundamental)

Com as identificações citadas, $(1, 0) = 1$ e $(0, 1) = i$, podemos escrever os números complexos (a, b) , em uma nova forma, dada pela expressão $z = a + bi$. Para obter essa nova notação, observamos inicialmente a correspondência de números complexos, dado na forma de par ordenado, com números reais, e aplicando a definição de adição e multiplicação, podemos escrever qualquer número complexo $z = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ da seguinte forma:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1),$$

como $(a, 0) = a$, $(0, b) = b$ e $(0, 1) = i$, podemos escrever:

$$z = (a, b) = a + bi \text{ ou } z = a + bi.$$

Os números complexos, em geral, são dados por sua forma algébrica, sendo representados por $z = a + bi$ e por sua forma geométrica representada no plano cartesiano, fazendo a utilização das coordenadas a e b , dos eixos das abcissas e ordenadas respectivamente.

$$\text{a) } z = (2, 3) = (2, 0) + (0, 3) = (2, 0) + (3 \cdot 0 - 0 \cdot 1, 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (2, 0) + (3, 0) \cdot (0, 1) = 2 + 3i$$

$$\text{b) } z = (-1, 4) = (-1, 0) + (0, 4) = (-1, 0) + (4 \cdot 0 - 0 \cdot 1, 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0)$$

$$= (-1, 0) + (4, 0) \cdot (0, 1) = -1 + 4i$$

$$\text{c) } z = (5, -2) = (5, 0) + (0, -2) = (5, 0) + (-2 \cdot 0 - 0 \cdot 1, -2 \cdot 1 + 0 \cdot 0)$$

$$= (5, 0) + (-2, 0) \cdot (0, 1) = 5 - 0, 2i$$

$$\text{d) } z = (-1, -3) = (-1, 0) + (0, -3) = (-1, 0) + (-3 \cdot 0 - 0 \cdot 1, -3 \cdot 1 + 0 \cdot 0)$$

$$= (-1, 0) + (-3, 0) \cdot (0, 1) = -1 - 3i.$$

Assim, todo número complexo dado na forma de par ordenado de números reais $z = (a, b)$ pode ser escrito na forma $z = a + bi$, chamada de forma algébrica ou forma cartesiana sendo, o número real a , chamada **parte real**, e denotado por $Re(z)$, b , denominado de **parte imaginária**, sendo indicado por $Im(z)$ e i a unidade imaginária.

Se $z = (0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1) = b \cdot i = 0 + b \cdot i$, ou seja, se a parte real for nula, então z é chamado de **imaginário puro**. Já se $z = (a, 0) = a + 0i = a$ apresentar a parte imaginária nula, ele é considerado um número real puro. Logo, todo número real é um caso particular de número complexo com parte imaginária igual a zero, o que significa dizer que o conjunto de números complexos é, na prática, um número complexo $z = (a, b)$ é representado na forma $z = a + bi = Re(z) + Im(z) \cdot i$

Assim, cada número complexo (não real) $z = (a, b)$ pode ser escrito como a soma

de um número real e um número complexo puro $z = (a, b) = a + bi$.

Como consequência da forma algébrica, pode-se escrever a multiplicação de dois números complexos usando a multiplicação distributiva, considerando a relação fundamental $i^2 = -1$.

$$(a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot i$$

Exemplo 3.2. a) $z = 3 + 0i$ é um número real, pois $Re(z) = 3$ e $Im(z) = 0$

b) $z = 7 + 4i$ é um número complexo, pois $Re(z) = 7$ e $Im(z) = 4$

c) $z = 0 + 5i$ é um número imaginário puro, pois $Re(z) = 0$ e $Im(z) = 5$

d) $z = -2 + 0i$ é um número real, pois $Re(z) = -2$ e $Im(z) = 0$

e) $z = 0 + 0i$ é um número real, pois $Re(z) = 0$ e $Im(z) = 0$

Segundo (Fundamentos da Matemática Elementar, 2015) denomina-se conjunto dos números complexos o conjunto $\mathbb{C}$ de todos os pares ordenados de números reais que satisfazem as seguintes definições, de tal modo que as propriedades de associatividade, comutatividade e distributividade usuais sejam preservadas:

(i). Igualdade: $(a, b) = (c, d) \iff a = c$ e $b = d$.

(ii). Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

(iii). Multiplicação: $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$.

Assim, $z \in \mathbb{C} \implies Z = (a, b)$, em que $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.

Com isso, o conjunto dos números complexos pode ser representado por:

$$\mathbb{C} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}; \}$$

No conjunto $\mathbb{C}$, o número -1 possui uma raiz quadrada, uma vez que foi concebida a unidade imaginária $i = (0, 1)$ e aplicando a definição de produto de pares ordenados, temos a propriedade básica do algarismo imaginário, $i^2 = -1$ e, portanto, $\mathbb{C}$ é uma extensão do conjunto $\mathbb{R}$ na qual o elemento $-1 = (-1, 0)$ tem raiz quadrada $i \in \mathbb{C}$ e escrevemos $i = \sqrt{-1}$.

Como todo número real a está associado com o par ordenado $a = (a, 0)$, podemos dizer que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é visto como um subconjunto dos números complexos $\mathbb{C}$. Portanto, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ e distributividade usuais sejam preservadas.

$$\mathbb{C} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

No conjunto $\mathbb{C}$, o número -1 possui uma raiz quadrada, uma vez que foi concebida a unidade imaginária $i = (0, 1)$ e aplicando a definição de produto de pares ordenados, temos a propriedade básica do algarismo imaginário, $i^2 = -1$ e, portanto, $\mathbb{C}$ é uma extensão do conjunto $\mathbb{R}$ na qual o elemento $-1 = (-1, 0)$ tem raiz quadrada $i \in \mathbb{C}$ e escrevemos $i = \sqrt{-1}$.

Como todo o número real a está associado com o par ordenado $a = (a, 0)$, podemos dizer que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é visto como um subconjunto dos números complexos $\mathbb{C}$. Portanto, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Prosseguindo nosso estudo, vamos introduzir em $\mathbb{C}$ outras duas operações, semelhantes à **subtração** e à **divisão** de números reais.

Dados z_1, z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$

A subtração é o inverso da adição

$$z_1 - z_2 = z_3 \implies z_1 = z_2 + z_3 \text{ ou } (x_2, y_2) + (x_3, y_3) = (x_1, y_1)$$

Assim,

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

Já a divisão é o inverso da multiplicação

Dados z_1, z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$

Pra dividir dois números complexos na forma de par ordenado, escrevemos a divisão na forma fracionária.

$$(z_1 : z_2) = \frac{z_1}{z_2}, \text{ com } z_2 \neq 0$$

Dividir dois números complexos significa obter um outro número complexo z_3 , tal que $z_3 = z_1 \cdot z_2$

$$(z_1 : z_2) = z_3 \text{ se } z_1 = z_2 \cdot z_3, (z_2 \neq 0) \text{ ou}$$

$$(x_2 \cdot x_3 - y_2 \cdot y_3, x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_2) = (x_1, y_1)$$

$$\text{Encontramos o valor de } z_1 = (x_2 \cdot x_3 - y_2 \cdot y_3, x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_2)$$

Portanto, $z_1 : z_2$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_2 \cdot x_3 - y_2 \cdot y_3, x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_2)}{(x_2, y_2)}$$

Logo, igualando os pontos correspondentes, temos:

$$x_1 = x_2 \cdot x_3 - y_2 \cdot y_3 \text{ e } y_1 = x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_2$$

Montando o sistema de equações, em relação a x_3, y_3 ,

$$S = \begin{cases} x_2 \cdot x_3 - y_2 \cdot y_3 = x_1 \\ x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_2 = y_1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos as coordenadas de x_3 e y_3 , dados por

$$x_3 = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)} \text{ e } y_3 = \frac{(x_2y_1 - x_1y_2)i}{(x_2^2 + y_2^2)}$$

Com esse ultimo resultado, escrevemos a divisão de z_1 por z_2 ,

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}i, z_2 \neq 0.$$

No decorrer do trabalho, iremos introduzir novos conceitos, como a existência do inverso multiplicativo e do conjugado de um número complexo, de modo a facilitar o resultado da divisão de dois números complexos por outros métodos mais simples.

Exemplo 3.3. *Determine o valor da expressão:*

$$\frac{(-1, 3)(1, 2)}{(2, -1)} + (0, 2)$$

Solução:

Primeiro, multiplicamos os números complexos no numerador:

$$(-1, 3) \cdot (1, 2) = (-7, 1)$$

Agora, para dividir $(-7, 1)$ por $(2, -1)$ significa obter um número $z = (a, b)$ de coordenadas desconhecidas

$$\frac{(-7, 1)}{(2, -1)} = (a, b) \implies (2, -1) \cdot (a, b) = (-7, 1)$$

Para Determinar as coordenadas de z , montamos e resolvemos o sistema de equações gerado,

$$\begin{cases} 2a + b = -7 \\ -a + 2b = 1 \end{cases}$$

Portanto, de $a = -3$ e $b = 1$ obtemos as coordenadas de $z = (-3, 1)$.

Finalmente, somamos $(-3, 1) + (0, 2) = (-3, 1) = -3 + i$

Uma curiosidade sobre o conjunto dos números complexos é que não existe relação de ordem, ou seja, não existe número complexo maior que outro.

3.1 Propriedades da adição dos números complexos

Para quaisquer z_1, z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$, onde $z_1 = (x, y)$, $z_2 = (a, b)$ e $z_3 = (c, d)$, a operação de adição definida em $\mathbb{C}$ atende as seguintes propriedades:

- (i) Propriedade Associativa: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
- (ii) Propriedade Comutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- (iii) Propriedade do Elemento Neutro:

$0 = 0 + i0$ é elemento neutro da soma: $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$

(iv) Existência do Elemento Simétrico:

$-z = -a - bi$ é negativo de $z = a + bi$; ou seja, $z + (-z) = 0$

Demonstração:

Para quaisquer z_1, z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$, onde $z_1 = (x, y)$, $z_2 = (a, b)$ e $z_3 = (c, d)$, a operação de adição definida em $\mathbb{C}$ atende as seguintes propriedades:

(i) Propriedade associativa.

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (x, y) + [(a, b) + (c, d)] \\ &= (x, y) + (a + c, b + d) \\ &= (x + a + c, y + b + d). \\ &= ((x + a) + c, (y + b) + d) \\ &= (x + a, y + b) + (c, d) \\ &= (z_1 + z_2) + z_3. \end{aligned}$$

(ii) Propriedade comutativa.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x, y) + (a, b) \\ &= (x + a, y + b). \\ &= (a + x, b + y) \\ &= (a, b) + (x, y) \\ &= z_2 + z_1. \end{aligned}$$

Conforme descrito acima, utilizamos as propriedades dos números reais, estendendo-as aos números complexos.

(iii) Propriedade do elemento neutro.

$$\begin{aligned} z_0 &= (a, b) \in \mathbb{C} \text{ tal que} \\ z_1 + z_0 = z_1 &\implies (x, y) + (a, b) = (x, y) \implies (x + a, y + b) = (x, y) \end{aligned}$$

Montando um sistema de equações:

$$\begin{cases} x + a = x \\ y + b = y \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Portanto, } z_0 = (a, b) = (0, 0) = 0,$$

Portanto existe, $z_0 = (a, b) = (0, 0) = 0$, chamado elemento neutro para a adição, que somado a qualquer número complexo z dá como resultado o próprio z , isto é, $z + 0 = z$

(iv) Propriedade do elemento simétrico.

Dado o número complexo z , queremos encontrar $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que

$$z_1 + z_2 = 0. \implies (x, y) + (a, b) = (0, 0)$$

$$= (x + a, y + b) = (0, 0) \implies$$

Motando o sistema de equações:

$$\begin{cases} x + a = 0 \\ y + b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -x \\ b = -y \end{cases}$$

A propriedade do elemento simétrico para números complexos é fundamental. Para qualquer número complexo $z = (x, y)$, existe um número complexo $v = (-x, -y)$ tal que $z + v = 0$ ou seja $z + (-z) = (x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$.

Portanto, $-z$ é chamado de simétrico ou inverso aditivo de z .

3.2 Propriedades da multiplicação dos números complexos

Para quaisquer z_1, z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$, a operação de adição definida em $\mathbb{C}$ atende as seguintes propriedades:

(i) Propriedade Associativa: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

(ii) Propriedade Comutativa: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

(iii) Existência do Elemento Neutro:

$1 = 1 + 0i$ é elemento neutro do produto: $z \cdot 1 = z$

(iv) Existência do Elemento Inverso: $z \cdot z^{-1} = 1$

(v) Propriedade Distributiva: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Essas propriedades garantem que a multiplicação de números complexos é bem definida e segue regras semelhantes às dos números reais.

Demonstração:

Para quaisquer z_1, z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$, onde $z_1 = (x, y)$, $z_2 = (a, b)$ e $z_3 = (c, d)$, a operação de adição definida em $\mathbb{C}$ atende as seguintes propriedades: (i) Propriedade Associativa

A propriedade associativa da multiplicação é demonstrada como:

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

$$= [(x, y) \cdot (a, b)] \cdot (c, d) = (x, y) \cdot [(a, b) \cdot (c, d)]$$

$$= (x, y) \cdot (a, b) = (xa - yb, xb + ya)$$

$$= [(xa - yb, xb + ya) \cdot (c, d)]$$

$$[(xa - yb)c - (xb + ya)d, (xa - yb)d + (xb + ya)c]$$

Usando a distributividade dos números reais, simplifique:

$$[(x(ac - ybc - xbd - yad), xad - ybd + xbc + yac)]$$

Reorganize os termos:

$$[x(ac - bd) - y(bc + ad), x(ad + bc) + y(ac - bd)]$$

$$= [(x, y)(ac - bd, ad + bc) = (x, y)[(a, b)(c, d)]$$

$$= z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

Portanto, a propriedade associativa é verificada.

(ii). Propriedade Comutativa

$$z_1 \cdot z_2 = (x, y) \cdot (a, b)$$

$$= (xa - yb, xb + ya)$$

$$= (xa - yb, xb + ya)$$

$$= (ax - by, ay + bx)$$

$$= (a, b) \cdot (x, y) = z_2 \cdot z_1$$

Portanto, a propriedade comutativa é verificada.

(iii). Existência do Elemento Neutro

Para qualquer número complexo $z_1 = (x, y)$, existe um elemento neutro $z_2 = (1, 0)$ tal que:

$$z_1 \cdot z_2 = z_1 \implies (x, y) \cdot (a, b) = (x, y) \implies (xa - yb, xb + ya) = (x, y) \implies$$

$$\begin{cases} xa - yb = x \\ xb + ya = y \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases},$$

Portanto, $z_2 = (a, b) = (1, 0) = 1$, que é o elemento neutro para a multiplicação.

(iv) Existência do Elemento Inverso

Seja $z = (a, b)$ com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. e $z^{-1} = (x, y)$ tal que $z \cdot z^{-1} = 1$. $\implies$

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0) \implies (ax - by, ay + bx) = (1, 0)$$

$$\begin{cases} xa - yb = 1 \\ xb + ya = 0 \end{cases} \implies x = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

Portanto, o inverso multiplicativo é:

$$v^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$$

(v). Propriedade Distributiva

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (x, y) \cdot (a + c, b + d)$$

$$= x(a + c) - y(b + d), x(b + d) + y(a + c)$$

$$= (xa + xc - yb - yd, xb + xd + ya + yc)$$

Aplicando a associatividade dos números reais, temos:

$$(xa - yb) + (xc - yd), (xb + ya) + (xd + yc)$$

$$= (xa - yb, xb + ya) + (xc - yd, xd + yc)$$

$$= (x, y) \cdot (a, b) + (x, y) \cdot (c, d) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

Portanto, a propriedade distributiva é verificada. Essas propriedades são fundamentais para a álgebra dos números complexos.

Todas essas propriedades decorrem diretamente da definição de igualdade e das operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$. Com a definição dessas operações, podemos definir subtração e divisão de maneira usual:

$$\text{Subtração: } z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

$$\text{Divisão: } \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}, \text{ se } z_2 \neq 0 \text{ Inclui a potenciação é definida de maneira usual:}$$

$$z^0 = (x, y)^0 = 1 = (1, 0)$$

$$z^n = z \cdot z \cdot \dots \cdot z \text{ (repetimos o fator } z \text{ n vezes)}$$

$$z^{-n} = z^{-1} \cdot z^{-1} \cdot \dots \cdot z^{-1} \text{ (repetimos o fator } z^{-1} \text{ n vezes), se } z \neq 0 \text{ e } n \geq 1$$

Essas propriedades mostram que muitas operações aritméticas válidas para números reais também são válidas para números complexos.

3.3 O conjugado de um número complexo

Conjugado de um número complexo, $z = a + bi$ é denotado por $\bar{z}$ e é dado por $\bar{z} = a - bi$. Assim, para encontrarmos o conjugado de um número complexo, basta trocarmos o sinal da parte imaginária.

Valem então as relações:

$$Re(z) = Re(\bar{z}) \text{ e } Im(z) = -Im(\bar{z}).$$

Isso significa que a parte real de um número complexo z é igual à parte real do seu conjugado $\bar{z}$, e a parte imaginária de z é o oposto da parte imaginária do seu conjugado.

Assim, por exemplo o número complexo $\bar{z} = 3 - 5i$, é conjugado do número complexo $z = 3 + 5i$;

3.4 Propriedades do conjugado

Uma das propriedades do conjugado é que o produto entre um número complexo e seu conjugado é sempre igual a um número real não negativo.

O produto de um número complexo pelo seu conjugado é igual à soma dos quadrados da parte real com a parte imaginária do número complexo.

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2 \cdot i^2 = x^2 - y^2 \cdot (-1) = x^2 + y^2$$

Exemplo 3.4. Dados $z = 3 + 5i$; $\bar{z} = 3 - 5i$. Mostre que o produto de z pelo seu conjugado é de fato um número real.

$$z \cdot \bar{z} = (3 + 5i)(3 - 5i) = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34.$$

Conheça outras propriedades importantes:

(i) A parte real de z é a metade da soma de z com seu conjugado

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}.$$

Verificação:

$$\begin{aligned} Re(z) &= \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{(a + bi) + (a - bi)}{2} = \frac{(a + a) + (b - b)i}{2} \\ &= \frac{2a + 0i}{2} = \frac{2a}{2} = a = Re(z) \end{aligned}$$

(ii) A parte imaginária de z corresponde ao quociente da subtração entre z e seu conjugado e o número $2i$.

$$Im(z) = \frac{(z - \bar{z})}{2i}.$$

Verificação:

$$\begin{aligned} Im(z) &= \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{(a + bi) - (a - bi)}{2i} = \frac{a + bi - a + bi}{2i} \\ &= \frac{(a - a) + (b + b)i}{2i} = \frac{0a + 2bi}{2i} \\ &= \frac{2bi}{2i} = b = Im(z) \end{aligned}$$

(iii) O conjugado da soma de dois números complexos é a soma dos conjugados:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

Verificação:

Considere $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = \\ &= (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \end{aligned}$$

(iv) O conjugado do produto de dois números complexos é o produto dos conjugados:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

Verificação:

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i \\ &= (a - bi) \cdot (c - di) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.\end{aligned}$$

(v) Potência de um conjugado: Se n é um inteiro positivo,

$$\overline{z^n} = \overline{z}^n.$$

Verificação:

Aplicando a definição de potenciação, multiplicando o fator $\overline{z}$ n vezes,

$$\overline{z^n} = \overline{z \cdot z \cdot \dots \cdot z} = \overline{z \cdot z \cdot \dots \cdot z} = \overline{z}^n.$$

3.5 O plano de Argand-Gauss e a representação geométrica dos números complexos

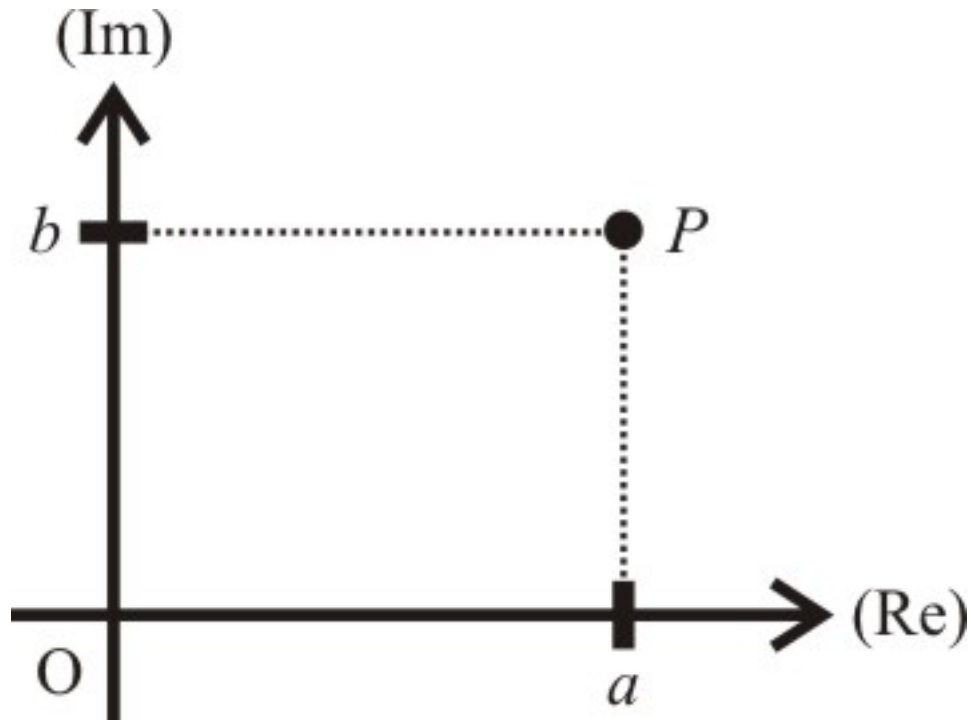
Conhecemos como plano de Argand-Gauss, ou plano complexo, um Plano Cartesiano, constituído de dois eixos orientados e perpendiculares entre si com um ponto em comum entre os dois eixos denominado Origem, $O(0, 0)$.

Para representar geometricamente um número complexo utilizamos o plano de Argand-Gauss, e fazemos semelhante a representar um ponto formado pelas coordenadas (a, b) em $\mathbb{R}^2$. No plano de Argand-Gauss o eixo horizontal (eixo das abscissas) é identificado como o eixo da parte real, denotado por $Re(z)$ de um número complexo, e o eixo vertical (eixo das ordenadas) é identificado como eixo imaginário, $Im(z)$. Logo, o número complexo $z = a + bi$ é representado pelo ponto $P(a, b)$.

Vimos que um número complexo z pode ser escrito como um par ordenado $z = (a, b)$ e na forma algébrica $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Assim, cada par ordenado de números reais (a, b) pode ser representado no plano cartesiano por um único ponto em que, P de coordenadas a e b , ou seja, $P(a, b)$, podemos associar um único número complexo $z = a + bi$, e vice-versa.

A imagem do complexo $z = a + bi$ é o ponto (a, b) do plano cartesiano. Podemos, também, chamar o segmento orientado que liga a origem do plano à imagem de z de vetor representativo desse número complexo; vetor esse, $\overrightarrow{OP}$ com componentes a e b . Mais adiante, daremos ênfase a como calcular o comprimento desse vetor para determinar o módulo de um número complexo.

Figura 1 – Plano de Argan-Gauss



Fonte: www.obaricentrodamente.com/2010/05/numeros-complexos.html

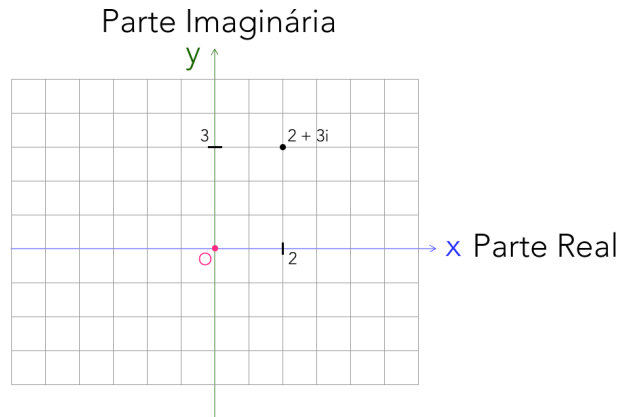
O ponto $P(a, b)$ representado no Plano de Argand, em que a é a parte real do complexo $z = a + bi$ e representa-se no eixo Ox (eixo real) e b é o coeficiente da parte imaginária e representa-se no eixo Oy (eixo dos imaginários puros). Denominada imagem de z e sua representação no plano é chamada **afixo de P** .

Os números no eixo de Ox são da forma $(a, 0) = a + 0i$, ou seja, são números reais puros. Por isso, esse eixo é chamado de eixo real e será denotado por $Re(z)$; enquanto os números no eixo de Oy são da forma $0 + bi = bi$, são números imaginários puros. Por isso, esse eixo é chamado de eixo imaginário. Já, um número complexo $z = a + bi$ é plotado como o par ordenado (a, b) no plano complexo. O plano onde são representados os números complexos é chamado de plano complexo ou plano de Argand. Vamos conhecer um pouco da história de Argand e sua contribuição sobre os números complexos.

Nesse plano, o eixo das abscissas é o **eixo real**, indicado por $Re(z)$, o eixo das ordenadas, **eixo imaginário** indicado por $Im(z)$.

Exemplo 3.5. *Vamos representar o número complexo $z = 2 + 3i$ no plano de Argand-Gauss*

Figura 2 – Plano de Argand Gauss



Fonte: www.profcardy.com

***Jean-Robert Argand** foi um matemático suíço amador mais conhecido como um dos primeiros a fornecer uma descrição geométrica dos números complexos. Argand publicou em 1806 uma interpretação geométrica dos números complexos, o Diagrama de Argand. Esta descrição geométrica dos números complexos também é associada ao nome de Gauss, embora anteriormente a Gauss, Caspar Wessel também tenha descrito o diagrama.*

Figura 3 – Plano de Argand Gauss



Fonte: www.biografias.es/famosos/carlo-fontana.html

3.6 Operações básicas com números complexos

Adição de dois números

Para realizarmos a adição de dois números complexos, z_1 e z_2 , faremos a soma das partes reais e a soma das partes imaginárias. Ou seja, soma-se parte real com parte real e parte imaginária com parte imaginária, respectivamente.

Seja:

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di$$

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

Seja:

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di$$

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

Exemplo 3.6. Realização da soma de z_1 e z_2 .

$$\text{Dados } z_1 = 2 + 3i \text{ e } z_2 = 1 + 2i$$

$$z_1 + z_2 = (2 + 1) + (3 + 2)i$$

$$z_1 + z_2 = 3 + 5i$$

Exemplo 3.7. Realização da soma de z_1 e z_2 .

$$\text{Dados } z_1 = 5 - 2i \text{ e } z_2 = -3 + 2i$$

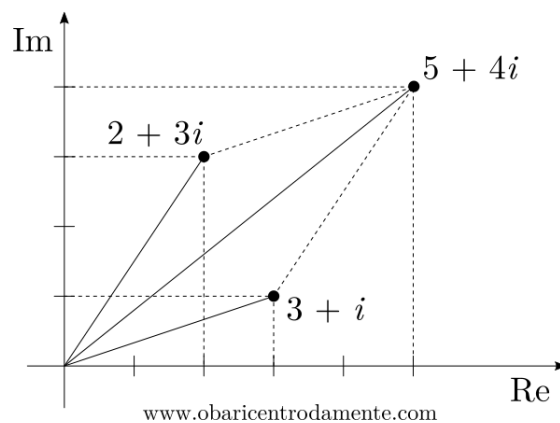
$$z_1 + z_2 = (5 + (-3)) + (-2 + 2)i$$

$$z_1 + z_2 = (5 - 3) + 0i$$

$$z_1 + z_2 = 2 + 0i = 2$$

Quando representada no plano de Argand-Gauss, a soma de dois números complexos corresponde à soma de dois vetores pela regra do paralelogramo.

Figura 4 – soma de dois números no plano complexo



Subtração de dois números

A subtração segue o mesmo princípio da adição. Subtraem-se as partes reais e as partes imaginárias separadamente, porém é necessário compreender que z_2 é o oposto de um número complexo, o que torna necessário a realização da regra de sinal.

Exemplo 3.8. Realização da subtração de z_1 e z_2 .

$$z_1 = 2 + 3i$$

$$z_2 = 1 + 2i$$

$$z_1 - z_2 = (2 - 1) + (3 - 2)i$$

$$z_1 - z_2 = 1 + 1i = 1 + i$$

Exemplo 3.9. Realização da subtração de z_1 e z_2 .

$$z_1 = 5 - 2i$$

$$z_2 = -3 + 2i$$

$$z_1 - z_2 = [5 - (-3)] + (-2 - 2)i$$

$$z_1 - z_2 = (5 + 3) + (-4)i$$

$$z_1 - z_2 = 8 + (-4)i$$

$$z_1 - z_2 = 8 - 4i$$

Multiplicação de dois números

Vamos utilizar a propriedade distributiva para efetuar a multiplicação de dois números complexos. Ou seja. Em outras palavras, cada termo do primeiro número é multiplicado pelos termos do segundo e, quando necessário, a propriedade $i^2 = -1$ é aplicada:

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di, \text{ então}$$

o produto:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di),$$

aplicando a propriedade distributiva,

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + cbi + bdi^2,$$

mas, como vimos, $i^2 = -1$

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + cbi - bd$$

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + cb)i$$

Utilizando-nos dessa fórmula, é possível encontrarmos o produto de quaisquer dois números complexos, mas, de modo geral, ela não precisa ser decorada, já que, para o

cálculo em questão, basta aplicarmos a propriedade distributiva.

Exemplo 3.10. Cálculo do produto de $(2 + 3i) \cdot (1 - 4i)$

Aplicando a multiplicação distributiva, obtemos:

$$(2 + 3i) \cdot (1 - 4i) = 2 - 8i + 3i - 12i^2$$

lembrando que $i^2 = -1$:

$$(2 + 3i) \cdot (1 - 4i) = 2 - 8i + 3i - 12 \cdot (-1)$$

$$(2 + 3i) \cdot (1 - 4i) = 2 - 8i + 3i + 12$$

$$(2 + 3i) \cdot (1 - 4i) = (2 + 12) + (-8 + 3)i$$

$$(2 + 3i) \cdot (1 - 4i) = 14 - 5i$$

Divisão de dois números complexos

Usamos o conjugado do divisor para dividir dois números complexos. O resultado da multiplicação de um número complexo $z = x + yi$ é $\bar{z} = x - yi$.

Ao multiplicar o numerador e o denominador pelo seu conjugado, asseguramos que o denominador se transforme em um número real, já que sempre que dividimos um número complexo pelo seu conjugado, o denominador se torna um número real.

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos.

A divisão $\frac{z_1}{z_2}$, é feita da seguinte forma:

Para dividir dois números complexos, é possível obter o quociente escrevendo-o como uma fração; em seguida, de maneira semelhante à usada para racionalizar o denominador de uma fração, deve-se multiplicar ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di}$$

Aplicamos a distributiva no numerador e no denominador:

$$\frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Portanto, a divisão de z_1 por z_2 resulta em:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Exemplo 3.11. Vamos a um exemplo prático:

Se $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 1 - 2i$, a divisão será:

$$\begin{aligned} \frac{3 + 4i}{1 - 2i} &= \frac{3 + 4i}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} \\ &= \frac{(3 + 4i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3 + 6i + 4i + 8i^2}{1 + 4} \\
&= \frac{3 + 10i - 8}{5} \\
&= \frac{-5 + 10i}{5} \\
&= -1 + 2i
\end{aligned}$$

Exemplo 3.12. Cálculo da divisão de $(6 - 4i) : (4 + 2i)$

Resolução:

Vamos escrever a divisão dos números na forma de fração, para aplicar a regra da divisão:

Multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador.

$$\begin{aligned}
\frac{6 - 4i}{4 + 2i} &= \frac{(6 - 4i) \cdot (4 - 2i)}{(4 + 2i) \cdot (4 - 2i)} \\
&= \frac{(24 - 8) + (-12 - 16)i}{16 - 4i^2} \\
&= \frac{16 + (-12 - 16)i}{16 - 4 \cdot (-1)} \\
&= \frac{16 - 28i}{16 + 4} \\
&= \frac{16 - 28i}{20} \\
&= \frac{16}{20} - \frac{28i}{20} \\
&= \frac{4}{5} - \frac{7i}{5}
\end{aligned}$$

Lembre-se que: $i^2 = -1$

3.7 Potências da unidade imaginária

A partir da definição de $i^2 = -1$, podemos calcular a potência da unidade imaginária, com $n \in \mathbb{N}$, tomando $i^n i^{2k}$, se n for par, ou seja, se n for forma $n=2k$ e $i^n = i^{2k+1}$ se n for ímpar, ou seja, $n=2k+1$. Assim,

$$i^n = \begin{cases} i^{2k}; n = 2k \\ i^{2k+1}; n = 2k + 1 \end{cases}$$

Vamos calcular i^0 e i^1 , pela definição descrita acima:

Para calcular i^0 $n = 0 \implies 2k = 0 \implies k = 0$.

Logo,

$$i^{2 \cdot 0} = (i^2)^0 = (-1)^0 = 1.$$

Para calcular i^1 , vamos tomar $n = 1 \implies 2k + 1 = 1 \implies k = 0$. Logo,

$$i^{2 \cdot 0 + 1} = (i^2)^0 \cdot i = (-1)^0 \cdot i = 1 \cdot i = i.$$

Observe que $i^0 = 1$ e $i^1 = i$ está em consonância com as propriedades dos números reais, uma vez que, todo número real diferente de zero, elevado a zero é igual a 1 e todo número elevado a um é igual ao próprio número.

Exemplo 3.13. Calcular i^{214}

Solução: Como $n = 214 \implies 2k = 214 \implies k = 107$, logo

$$i^{214} = i^{2 \cdot 107} = (i^2)^{107} = (-1)^{107} = -1$$

Para n sendo ímpar: Calcular i^{403}

Solução: Como $n = 403 \implies 2k + 1 = 403 \implies k = 201$, logo

$$i^{403} = i^{2 \cdot 201 + 1} = (i^2)^{201} \cdot i = (-1)^{201} \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

3.8 Módulo de um número complexo

Definiremos o módulo de um número complexo $z = a + bi \in \mathbb{C}$ denotado por $|z|$ ao número real não negativo, dado pela raiz quadrada da soma dos quadrados das partes real e imaginária:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Com a definição de módulo de um número complexo z , temos algumas propriedades importantes envolvendo o conjugado de um número complexo, dentre elas:

O produto de um número complexo z pelo seu conjugado $\bar{z}$ é igual ao quadrado do seu módulo, ou seja,

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

O inverso de um número complexo z pode ser expresso como

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

3.9 Interpretação geométrica do módulo de um número complexo

Para representar matematicamente o módulo de um número complexo, identificamos o afixo do número $z = (a, b)$ no plano. Traçamos um segmento que conecta o afixo à origem do plano. Notamos que há um triângulo retângulo cuja medida da hipotenusa corresponde à distância da origem O ao afixo z , representada aqui por $|z|$ ou ρ , como é comumente visto em livros de ensino médio.

O módulo de z é determinado pelo Teorema de Pitágoras, que estabelece: O cateto horizontal mede a parte real do número complexo " a ", enquanto o cateto vertical representa a parte imaginária " b " do mesmo número complexo " z ". Assim, ao utilizar o teorema de Pitágoras, obtemos. $a^2 + b^2$ significa que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Assim, por exemplo para representar o módulo do número complexo $z = 3 + 4i$, localizamos o ponto $(3, 4)$ e traçamos um segmento de reta unido ao ponto $(3, 4)$ à origem $O(0, 0)$ do plano complexo e desenhamos um triângulo retângulo com lados de catetos iguais a 3 e 4. Para determinar a medida da hipotenusa do triângulo retângulo, calculamos algebricamente a raiz quadrada da soma dos quadrados das medidas dos catetos 3 e 4 respectivamente.

$$|z| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Desse modo, se $z = a + bi$ é um número complexo, então a medida da hipotenusa é, por definição, o módulo do número complexo z , denotado por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observe na imagem que a fórmula do $|z|$ ou ρ é obtida através da aplicação do Teorema de Pitágoras.

3.10 Propriedades do módulo

Já que definimos módulo e conjugado de números complexos, é possível verificar algumas propriedades que facilitam os cálculos envolvendo esses números.

$$(i) \operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \text{ e } \operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|.$$

$$(ii) |z|^2 = z \cdot \bar{z}, |z| = |\bar{z}| \text{ e } |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$(iii) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

$$(iv) |z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

A desigualdade (iii) é conhecida como desigualdade triangular.

Demonstração:

(i) Se $z = x + yi$, então $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |Re(z)| \geq Re(z)$.

Analogamente, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |Im(z)| \geq Im(z)$.

(ii) Se $z = x + yi$, então $|z|^2 = x^2 + y^2$. Por outro lado, como $\bar{z} = x - yi$, temos

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2,$$

concluimos que

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

Observe, também, que $|z| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |z|$

Agora, se $z_1 = x + yi$ e $z_2 = a + bi$, temos:

$$z_1 \cdot z_2 = (xa - yb) + (xb + ya)i$$

Então,

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(xa - yb)^2 + (xb + ya)^2}$$

Expandindo os termos dentro da raiz quadrada, obtemos:

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{x^2a^2 - 2xayb + y^2b^2 + x^2b^2 + 2xbya + y^2a^2}$$

Agrupando os termos semelhantes, temos:

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{x^2(a^2 + b^2) + y^2(a^2 + b^2)}$$

Fatorando $a^2 + b^2$, obtemos:

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(x^2 + y^2)(a^2 + b^2)}$$

Finalmente, podemos separar as raízes quadradas:

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

Como $|z_1| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $|z_2| = \sqrt{a^2 + b^2}$,

concluimos que:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

(iii) Note que,

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)}$$

Expandindo, obtemos:

$$(z_1 + z_2)^2 = (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2$$

$$= |z_1|^2 + (z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1) + |z_2|^2$$

$$= |z_1|^2 + (z_1 \cdot \bar{z}_2 + \overline{z_2 \cdot \bar{z}_1}) + |z_2|^2$$

$$= |z_1|^2 + (z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_2 \cdot z_1) + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2(z_1 \cdot \bar{z}_2) + |z_2|^2$$

$$= |z_1|^2 + 2|z_1 \cdot \bar{z}_2| + |z_2|^2$$

$$\begin{aligned}
&= |z_1|^2 + 2|z_1 \cdot z_2| + |z_2|^2 \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2
\end{aligned}$$

Extraindo as raízes quadradas de ambos os lados da desigualdade acima, obtemos a desigualdade desejada.

$$\sqrt{|z_1 + z_2|^2} \leq \sqrt{(|z_1| + |z_2|)^2} \text{ obtemos:}$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(iv) Usando a desigualdade triangular, temos:

$$|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2| = |z_1 + z_2| + |z_2|$$

Portanto,

$$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

Trocando os papéis de z_1 e z_2 na desigualdade acima, obtemos:

$$|z_1 + z_2| \geq |z_2| - |z_1|$$

Como

$$||z_1| - |z_2|| = |z_1| - |z_2| \text{ se } (|z_1| \geq |z_2|) \text{ e } ||z_1| - |z_2|| = |z_2| - |z_1| \text{ se } (|z_2| \geq |z_1|),$$

concluimos que, em qualquer caso:

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

Esses passos mostram que a desigualdade triangular é válida para qualquer par de números complexos z_1 e z_2 .

Para um número complexo $z \neq 0$, podemos reescrever a primeira igualdade do item (ii) da seguinte forma:

$$|z|^2 = z \cdot z^{-1}$$

ou seja,

$$z^{-1} = \frac{z}{|z|^2}.$$

Essa identidade mostra que, representando graficamente z , z^{-1} aponta na mesma direção de z e tem valor absoluto $\frac{1}{|z|}$. Isso significa que z^{-1} é o inverso multiplicativo de z no plano complexo, mantendo a direção, mas ajustando o comprimento.

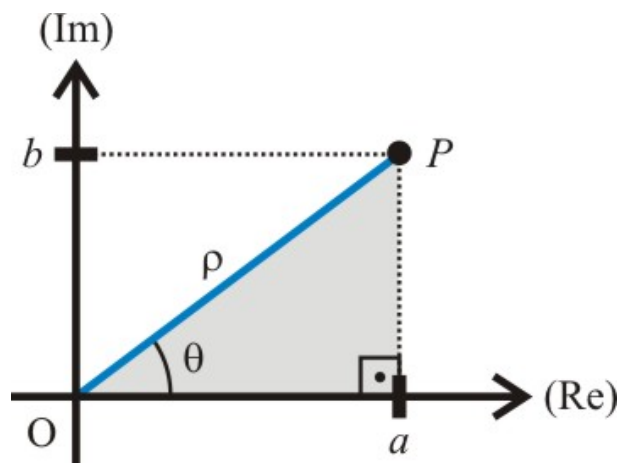
3.11 Argumento de um número complexo

Utilizaremos conceitos geométricos e trigonométricos para apresentar o argumento de um número complexo em $\mathbb{C}$ de maneira intuitiva. Estamos cientes de que qualquer ponto no plano complexo representa a representação geométrica de um valor complexo.

Um número $z \in \mathbb{C}^*$, $z = a + bi$, tem afixo $P(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que projetado sobre o círculo $S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = |z|^2\}$ com centro na origem do plano complexo, de raio igual ao valor do módulo de z determina um ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$ medido em radianos, formado entre o segmento $\overrightarrow{OP}$ (vetor de z) e o eixo real no sentido anti-horário, é denominado argumento do número complexo e indicado por $\arg z = \theta$.

A medida do ângulo pode ser determinada utilizando conceitos básicos de trigonometria, tomando conhecimento de que por construção o lado oposto é sempre o componente imaginário e o lado adjacente é sempre o componente real, visualizando a estrutura geométrica do número complexo no plano complexo..

Figura 5 – Triângulo retângulo



Fonte: www.obaricentrodamente.com/2010/05/numeros-complexos.

Pelas definições da trigonometria circular temos as três relações fundamentais:

$$\sin(\theta) = \frac{b}{\rho} = \frac{b}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}$$

Dividindo o número $z = (a, b)$ pelo seu módulo $|z|$ acima podemos relacionar às razões trigonométricas.

temos $\frac{z}{|z|} = \left(\frac{a}{|z|}, \frac{b}{|z|}\right) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = (\cos \theta, \sin \theta) = (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$ logo

$$z = |z| \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta).$$

Com base em nossa experiência, percebemos que é mais eficaz empregar o cosseno ou o seno do ângulo para definir adequadamente o argumento.

Qualquer valor de α na forma $\alpha + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$ é um argumento de z , devido à periodicidade das funções seno e cosseno. Assim, concluímos que z tem infinitos

argumentos, uma vez que $\cos \theta = \cos \alpha$ e $\sin \theta = \sin \alpha$ implicam $\theta = \alpha + 2k\pi$. A totalidade dos argumentos de z é:

$$\arg z = \{\alpha + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

O argumento principal de z no intervalo $] -\pi, \pi]$ é identificado como $\text{Arg } z$.

Com as definições e determinação definidas para módulo e argumento, é possível, por meio de relações trigonométricas básicas, estabelecer uma nova representação de um número complexo, denominada forma polar (ou trigonométrica).

4 A FORMA TRIGONOMÉTRICA DE NÚMEROS COMPLEXOS

A representação de um número complexo na forma trigonométrica ou polar é feita através do ângulo e do raio do ponto (módulo de z). Ela indica a posição de um ponto em um plano complexo através do ângulo θ e do raio $|z|$. O raio $|z|$ representa a distância do ponto até a origem, enquanto o ângulo θ representa o ângulo que o ponto forma com o eixo real positivo.

Definição: Seja $z \in \mathbb{C}^*$, o par $(|z|, \arg(z))$ é uma representação (ou forma) polar de z . A forma polar de um número complexo z é definida por:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Em que $|z|$ representa o módulo e θ representa o argumento de z . Isso pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$z = |z| \cdot \cos \theta + i \cdot |z| \cdot \sin \theta.$$

Considerando que $a = \operatorname{Re}(z) = |z| \cos \theta$ e $b = \operatorname{Im}(z) = |z| \sin \theta$. Assim, podemos expressar a parte real a e a parte imaginária b de z em termos do módulo e do argumento de z .

$$z = |z| \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$$

onde $|z|$ representa o módulo de z (a distância de z até a origem) e θ representa o argumento de z (o ângulo formado com o eixo real).

Utilizando a expressão algébrica $z = a + bi$ de um número complexo e relacionando os termos a e b com as relações de cosseno e seno do argumento, obtemos: $a = |z| \cdot \cos(\theta)$ e $b = |z| \cdot (\sin(\theta))$.

Substituindo a forma algébrica, chegamos à forma trigonométrica:

$$z = |z| \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$$

Por exemplo, se tivermos $(z = 1 + i)$, temos $a = 1; b = 1$

o módulo é $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

argumento é $\tan \theta = \frac{b}{a} = 1$

$$\theta = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Portanto, a forma trigonométrica de z é:

$$z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

4.1 Operações com a forma trigonométrica

Em certas situações, a representação algébrica de um número complexo pode não ser tão útil e a representação trigonométrica de um número complexo surge como uma excelente alternativa. Assim, primeiramente, localizamos no plano complexo o prefixo do número complexo para determinar a qual quadrante ele pertence. Em seguida, usamos os valores reais de a e b para calcular o módulo, o seno e o cosseno do ângulo, substituindo esses valores na forma trigonométrica.

Agora que compreendemos a transformação de números complexos da forma algébrica para a trigonométrica, vamos aprender a executar operações em números complexos na forma trigonométrica. Essas operações com números complexos na forma trigonométrica simplificaram consideravelmente o manuseio de produtos, quocientes, potências e raízes em comparação com a aritmética tradicional.

4.2 Produtos de números complexos na forma trigonométrica

Considere dois números complexos quaisquer, escritos na forma trigonométrica:

$$z_1 = |z_1| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{e} \quad z_2 = |z_2| \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

O produto entre z_1 e z_2 pode ser feito da seguinte forma:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot [\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha)]$$

Para números complexos, $z_1, z_2, \dots, z_n$ na forma polar: $z_k = \rho_k(\cos(\theta_k) + i \sin(\theta_k))$

Isso sugere, por indução, que ao multiplicar números complexos na forma polar, os módulos ρ são multiplicados e os ângulos θ são adicionados. A soma de números complexos é expressa por:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)]$$

Note que o produto requer a soma dos módulos e a adição dos ângulos. Portanto, é possível notar que "a multiplicação de números complexos na forma trigonométrica corresponde à multiplicação de seus módulos e à adição de seus argumentos". Isso ainda se aplica à multiplicação de números complexos com mais de dois dígitos.

Tal fato é garantido pela adição de arcos trigonométricos: $\sin(\theta + \alpha) = \sin \theta \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \theta$

$$\cos(\theta + \alpha) = \cos \theta \cdot \cos \alpha - \sin \theta \cdot \sin \alpha$$

Exemplo 4.1. *Dados os números complexos*

$$z_1 = 6 \cdot \cos(30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ) \text{ e } z_2 = 3 \cdot (\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ), \text{ calcule o valor de } z_1 \cdot z_2.$$

Solução: Ao aplicar a fórmula da multiplicação de números complexos na forma trigonométrica, obtemos:

$$z_1 \cdot z_2 = 6 \cdot 3 \cdot [\cos(30^\circ + 15^\circ) + i \cdot \sin(30^\circ + 15^\circ)]$$

$$z_1 \cdot z_2 = 18 \cdot (\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 18 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 9\sqrt{2} + 9\sqrt{2}i$$

Exemplo 4.2. *Dados $z_1 = 5 \cdot (\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3})$ e $z_2 = 4 \cdot (\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6})$. Determine o número complexo gerado pelo produto $z_1 \cdot z_2$.*

$$z_1 \cdot z_2 = 5 \cdot 4 \cdot [\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})]$$

$$z_1 \cdot z_2 = 20 \cdot (\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2})$$

$$z_1 \cdot z_2 = 20 \cdot (0 + i) = 20i$$

4.3 Quocientes de números complexos na forma trigonométrica

A primeira etapa para executar a divisão na forma trigonométrica é determinar a forma trigonométrica de z^{-1} .

Já aprendemos que $z = a + bi$ ($z \neq 0$), seu inverso é $z^{-1} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Também é conhecido que z^{-1} é igual à $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Note que o módulo do conjugado corresponde ao módulo de z , pois ambos são iguais. Portanto, como $|\bar{z}| = |z|$.

$$|z^{-1}| = \frac{|\bar{z}|}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}$$

Para determinar a representação polar de z^{-1} , começamos por assumir $z = |z|[\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$, onde z é um número complexo não nulo. Da trigonometria, sabemos que

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \text{ e } \sin(-\theta) = -\sin(\theta).$$

$$\text{Portanto, podemos escrever } z^{-1} = \frac{1}{|z|}[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)].$$

Com base na representação trigonométrica de z^{-1} e na regra do produto de dois números complexos, conforme discutido anteriormente, chegamos à seguinte conclusão:

$$z_1 \cdot z_2^{-1} = |z|[\cos(\theta) + i \sin(\theta)] \cdot |z_2^{-1}|(\cos(-\theta_2) + i \sin(-\theta_2))$$

Simplificando, obtemos:

$$z_1 \cdot z_2^{-1} = |z_1| \cdot |z_2^{-1}| \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Isso nos dá a seguinte fórmula de divisão:

$$z_1 \cdot z_2^{-1} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

Exemplo 4.3. Dados $z = 22 \cdot (\cos 120^\circ + i \cdot \sin 120^\circ)$ e $w = 11 \cdot (\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ)$,

Determine o valor de $\frac{z}{w}$.

Solução: Pela fórmula da divisão de complexos na forma trigonométrica, temos que:

$$\frac{z}{w} = \frac{22}{11} \cdot [\cos(120^\circ - 90^\circ) + i \cdot \sin(120^\circ - 90^\circ)] = 2 \cdot (\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ)$$

$$\frac{z}{w} = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

4.4 Potenciação de números complexos na forma trigonométrica

Dado um número complexo escrito na forma algébrica $z = x + iy$, podemos calcular a n -ésima potência de z pela definição, ou seja,

$$z^n = (x + iy)^n = (x + iy) \cdot (x + iy) \cdot (x + iy) \cdot \dots \cdot (x + iy)$$

(aplicamos a definição de potenciação, ou seja, repetimos n vezes $(x + iy)$),

Mas, quando n for grande, essas operações podem ser muito trabalhosas! Este problema pode ser contornado escrevendo o número complexo z na forma trigonométrica. Vejamos como fazer isso. Observe que se $z = |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$

Assim, utilizando a regra de multiplicação de dois números complexos na forma trigonométrica, sabemos que basta multiplicar os módulos dos números complexos dados e somar os argumentos, podemos concluir que $z^n = (|z|)^n \cdot [\cos(n \cdot \theta) + i \cdot \sin(n \cdot \theta)]$.

Dado um número complexo, não – nulo na forma:

$$z = |z| \cdot [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$$

, não nulo e um número inteiro n .

Vamos demonstrar a dedução da regra da potenciação de números complexos com dois casos particulares e, em seguida, generalizamos para o caso geral. Aplicando a definição de potenciação, vamos calcular z^n , com z na forma trigonométrica, onde $n = 1, 2, 3, \dots$

Para $n = 1$, teremos:

$$z^1 = z = |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Para $n = 2$, teremos:

$$z^2 = z \cdot z = |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) \cdot |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z^2 = |z| \cdot |z| \cdot (\cos \theta \cdot \cos \theta + i \cos \theta \cdot \sin \theta + i \cos \theta \cdot \sin \theta + i \sin \theta \cdot i \sin \theta)$$

$$z^2 = |z|^2 \cdot (\cos^2 \theta + i \cdot 2 \sin \theta \cdot \cos \theta + i^2 \sin^2 \theta),$$

Como, $i^2 = -1$,

$$z^2 = |z|^2 \cdot (\cos^2 \theta + i \cdot 2 \sin \theta \cdot \cos \theta - \sin^2 \theta)$$

$$z^2 = |z|^2 \cdot [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + i(2 \sin \theta \cdot \cos \theta)]$$

Lembrando das fórmulas de arcos duplos em trigonometria:

$$\begin{cases} \sin 2\theta = 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \\ \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{cases}$$

Logo temos:

$$z^2 = |z|^2 \cdot (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

Para $n = 3$, teremos:

$$z^3 = z \cdot z = |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) \cdot |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) \cdot |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z^3 = |z| \cdot |z| \cdot |z| \cdot (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z^3 = |z|^3 \cdot (\cos 2\theta \cdot \cos \theta + \cos 2\theta \cdot i \cdot \sin \theta + i \cdot \sin 2\theta \cdot \cos \theta + i \cdot \sin 2\theta \cdot i \sin \theta)$$

Aqui, faremos uma mudança de variáveis, onde:

$$2\theta = a \quad \text{e} \quad \theta = b$$

$$z^3 = |z|^3 \cdot (\cos a \cdot \cos b + \cos a \cdot i \cdot \sin b + i \cdot \sin a \cdot \cos b + i \cdot \sin a \cdot i \sin b)$$

$$z^3 = |z|^3 \cdot (\cos a \cdot \cos b + i \cdot \cos a \cdot \sin b + i \cdot \sin a \cdot \cos b + i^2 \cdot \sin a \cdot \sin b)$$

Pelo fato de $i^2 = -1$,

$$z^3 = |z|^3 \cdot (\cos a \cdot \cos b + i \cdot (\cos a \cdot \sin b + \sin a \cdot \cos b) - \sin a \cdot \sin b)$$

Vejam que:

$$\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \cos(a + b) \quad \text{e} \quad \cos a \cdot \sin b + \sin a \cdot \cos b = \sin(a + b)$$

No entanto, as variáveis:

Substituindo na equação acima, teremos:

$$z^3 = |z|^3 \cdot (\cos(a + b) + i \cdot \sin(a + b))$$

Vejam que: $2\theta = a$ e $\theta = b$

Temos então:

$$z^3 = |z|^3 \cdot (\cos(2\theta + \theta) + i \cdot \sin(2\theta + \theta))$$

Logo:

$$z^3 = |z|^3 \cdot (\cos 3\theta + i \cdot \sin 3\theta)$$

De modo análogo, podemos calcular a potência de um número complexo na forma polar para $n = 4, 5, 6, \dots$. Assim, podemos generalizar uma fórmula, chegando à 1ª Fórmula de De Moivre:

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \theta) + i \cdot \sin(n \cdot \theta)]$$

Essa relação é chamada de **1ª lei de Moivre** em homenagem ao matemático francês Abraham De Moivre. Ela também é válida para expoentes inteiros negativos.

Exemplo 4.4. Calcule $(1 + \sqrt{3}i)^{20}$

Vamos analisar a solução passo a passo:

Identificação do módulo e argumento:

O número complexo $(1 + \sqrt{3}i)$ tem módulo $|z| = 2$ e argumento $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Expressão em forma polar:

$$1 + \sqrt{3}i = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right].$$

Elevação à potência 20:

$$(1 + \sqrt{3}i)^{20} = \left(2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] \right)^{20}.$$

Usando a 1ª fórmula de De Moivre:

$$\left(2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] \right)^{20} = 2^{20} \left[\cos\left(\frac{20\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{20\pi}{3}\right) \right].$$

Simplificação do argumento:

$$\frac{20\pi}{3} = 6\pi + \frac{2\pi}{3}.$$

Como $\cos$ e $\sin$ são funções periódicas com período 2π , podemos simplificar:

$$\cos\left(6\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \text{ e } \sin\left(6\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

Resultado final:

$$((1 + \sqrt{3}i)^{20} = 2^{20} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right]).$$

Sabemos que $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ e $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então:

$$(1 + \sqrt{3}i)^{20} = 2^{20} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2^{19} (-1 + i\sqrt{3}).$$

4.5 Radiciação de números complexos na forma trigonométrica

Dado um número complexo ($z = x + yi$), queremos encontrar suas raízes enésimas. A segunda fórmula de Moivre nos diz que um número complexo (u) é uma raiz enésima de

z se:

$$z_k^n = z$$

A **2ª fórmula de Moivre** é muito importante em problemas para efetuarmos a radiciação de números complexos em sua forma trigonométrica.

Dado um número complexo, z em sua forma trigonométrica ($z = |z| \cdot [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$) chamamos o número z_k como raiz n -ésima de z , se e somente se:

$$(1) z_k^n = z \text{ para } n \geq 2$$

Então, se:

$$z = |z| \cdot [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$$

Sua raiz n -ésima será:

$$\sqrt[n]{|z| \cdot [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]} = z_k$$

Seja o número complexo $z = x + yi$ em sua forma polar e seja uma de suas raízes n -ésimas:

$$(2) z_k^n = |z_k|^n \cdot (\cos(n \cdot \theta_k) + i \cdot \sin(n \cdot \theta_k))$$

Pela definição, (1), podemos aplicar a 1ª Fórmula de De Moivre :

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos(n \cdot \theta) + i \cdot \sin(n \cdot \theta))$$

$$z_k^n = |z| \cdot [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$$

Desta última igualdade, temos que:

$$(3) |z_k|^n = |z| \text{ se } |z_k| = \sqrt[n]{|z|}$$

Onde: $\sqrt[n]{|z|}$ é a raiz n -ésima do número real e positivo $|z|$.

$$\begin{cases} \cos(n \cdot \theta_k) = \cos(\theta) \\ \sin(n \cdot \theta_k) = \sin(\theta) \end{cases}$$

Onde:

$$(4) n\theta_k = \theta + 2k\pi \text{ logo,}$$

$$\theta_k = \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

ou

$$\theta_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

Como θ_k é o argumento de z_k , este deve pertencer ao intervalo

$$[0; 2\pi[$$

Se substituirmos (3) e (4) em (2), obteremos:

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right]$$

onde:

$|z|$ é o módulo de z .

θ é o argumento de z .

k varia de 0 a $(n-1)$.

Passo a passo para utilizar a 2ª fórmula de De Moivre:

Inicialmente calculamos o módulo em seguida determinamos o argumento do número complexo já previamente identificado o quadrante em que o afixo pertence plano complexo

Após fazer isso substitua os valores na fórmula e varie o valor de k que satisfaçam uma volta no círculo já que as demais são repetições. Os valores de k varia de 0 a $(n-1)$.

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right]$$

Por exemplo, se quisermos calcular a raiz quadrada de um número complexo z , usamos a segunda fórmula de De Moivre com $(n = 2)$:

$$z_k = \sqrt{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right) \right]$$

Exemplo 4.5. Vamos fazer uma aplicação da 2ª fórmula de De Moivre, para determinar as raízes de um número complexo qualquer:

Dado um número complexo $z = -2 - 2\sqrt{3}i$. Vamos determinar as raízes quartas deste número e representá-las no Plano Argand – Gauss.

Encontramos aqui um seno e cosseno negativos. Se analisarmos o círculo trigonométrico abaixo, podemos observar que este ângulo está localizado no 3º quadrante.

Módulo:

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$$

Argumento :

$$\theta = \arctan\left(\frac{-2\sqrt{3}}{-2}\right) = \arctan \sqrt{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

Se analisarmos o círculo trigonométrico abaixo, podemos observar que este ângulo está localizado no 3º quadrante.

$$\theta = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$$

vamos escrever z na forma trigonométrica:

$$z = 4 \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

Aplicando a fórmula a 2ª fórmula de Moivre obtemos as raízes (n) -ésimas de um número complexo z são : Para as raízes quartas ($n = 4$), temos:

$$z_k = \sqrt[4]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{4\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4}\right) \right]$$

Simplificando temos:

$$z_k = \sqrt{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right) \right]$$

logo,

$$z_k = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi+3\cdot k\cdot\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi+3\cdot k\cdot\pi}{6}\right) \right]$$

onde: ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$).

Substituindo ($k = 0, 1, 2, 3$), obtemos as quatro raízes de z .

Para as raízes quartas ($n = 4$), temos:

(I) Raiz 1: (Atribuimos o valor $k=0$)

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi+3\cdot 0\cdot\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi+3\cdot 0\cdot\pi}{6}\right) \right]$$

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) \right]$$

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(II) Raiz 2: (Atribuimos o valor $k=1$)

$$z_2 = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi+3\cdot 1\cdot\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi+3\cdot 1\cdot\pi}{6}\right) \right]$$

$$z_2 = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right]$$

$$z_2 = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(III) Raiz 3: (Atribuimos o valor $k=2$)

$$z_3 = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi+3\cdot 2\cdot\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi+3\cdot 2\cdot\pi}{6}\right) \right]$$

$$z_3 = \sqrt{2} \left[\cos\frac{8\pi}{6} + i \sin\left(\frac{8\pi}{6}\right) \right]$$

$$z_3 = \sqrt{2} \left[\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

$$z_3 = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

$$z_3 = \sqrt{2} \left[\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right] \quad z_3 = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

(IV) Raiz 4: (Atribuímos o valor $k=3$)

$$z_4 = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi+3\cdot 3\cdot \pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi+3\cdot 3\cdot \pi}{6}\right) \right]$$

$$z_4 = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \right]$$

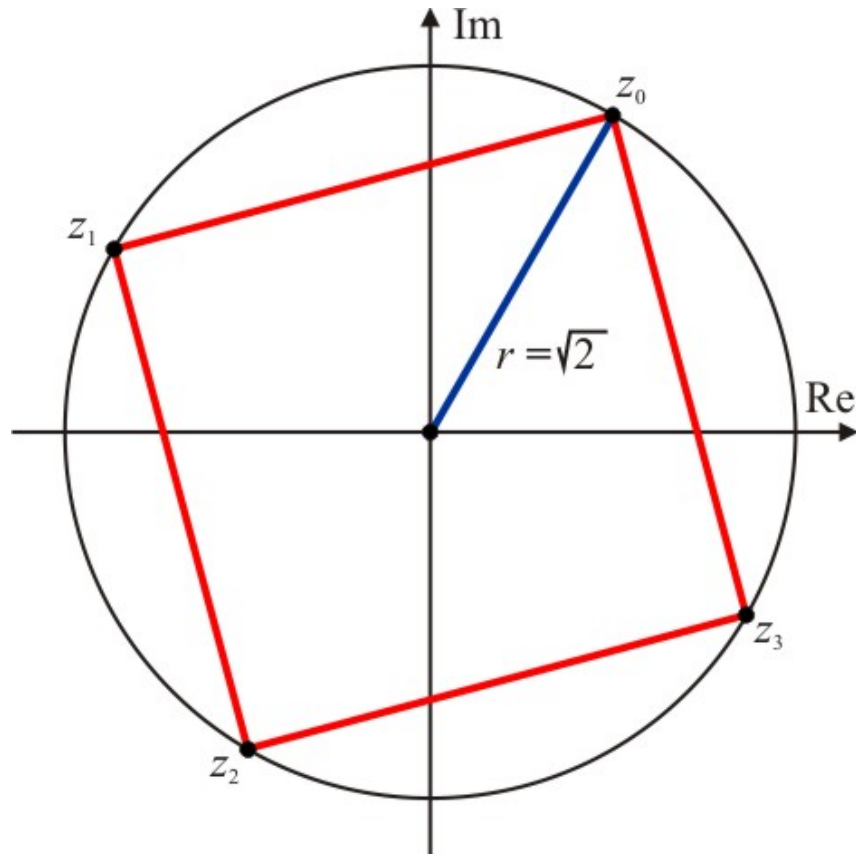
$$z_4 = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Resp.: } \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ ou } \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Observação: Os afixos 4 raízes z_0, z_1, z_2 e z_3 pertencem à circunferência de raio centrada na origem. Eles dividem o Plano de Argand – Gauss em 4 partes congruentes e são os vértices de um quadrado inscrito à circunferência:

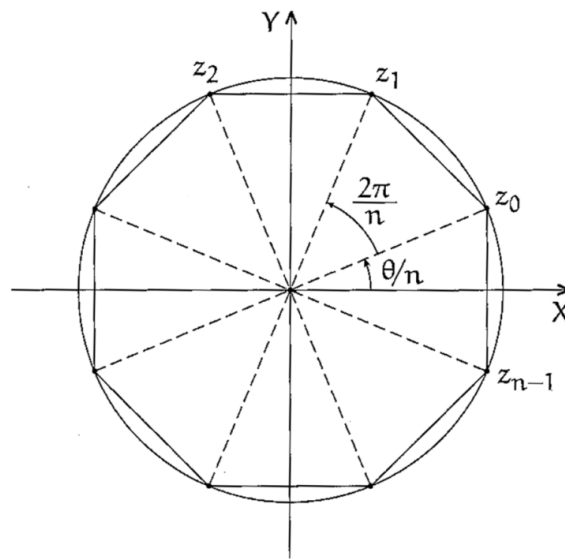
Figura 6 – Quadrado inscrito à circunferência



Fonte: www.obaricentrodamente.com/2010/05/aplicacao-da-2-formula-de-de-moivre

De um modo geral, os afixos z_k de um complexo z são vértices de um polígono regular de n lados com o mesmo módulo, $\frac{|z|}{n}$ inscrito em uma circunferência com centro na origem e raio $\sqrt[n]{|z|}$ no plano complexo.

Figura 7 – Raízes inscrito à circunferência



Fonte: www.matematicasimplificada.com/numeros-complexos-forma-polar

Observe ainda por esta figura que dando valores inteiros para k , os argumentos crescem em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$, o que nos mostra que as raízes estão uniformemente distribuídas na circunferência.

4.6 Raízes complexas da unidade

As raízes complexas en-ésimas de 1 são chamadas de raízes enésimas da unidade. O que é equivalente a $z^n = 1$.

Considere $z = 1 \implies z = \cos 0 + i \sin 0$

Logo, as raízes n -ésimas da unidade:

$$\sqrt[n]{z} = \left[\cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi}{n} \right) \right]$$

Quando localizamos as raízes n -ésimas da unidade no plano complexo como os vértices geramos de um polígono regular de n lados.

4.7 Fórmula da raiz quadrada de qualquer número complexo

Para determinar as raízes quadradas de um número complexo $z > 0$, siga as etapas a seguir:

Escreva o número complexo na forma trigonométrica.

$$z = |z| \cdot [\cos \theta + i \cdot \sin \theta]$$

Finalmente, aplicando a fórmula de 1ª De Moivre para determinar as raízes quadradas:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{2} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{2} \right) \right]$$

Simplifique as raízes quadradas:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} + k\pi \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\theta}{2} + k\pi \right) \right]$$

Vamos escrever esta última igualdade da seguinte forma:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot [\cos(2\alpha) + i \cdot \sin(2\alpha)].$$

Simplificação das Raízes:

As raízes quadradas são simplificadas para

$$z = \sqrt{|z|} \cdot [\cos(\alpha + k\pi) + i \sin(\alpha + k\pi)].$$

Vamos considerar os valores de k :

Para encontrar duas raízes complexas, k assume os valores 0 e 1.

Lembrando de duas identidades trigonométricas: Utiliza-se

$\cos(\alpha + 180^\circ) = -\cos \alpha$ e $\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin \alpha$. Obtemos:

Para $k = 0$:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

Para $k = 1$:

$$\sqrt{z} = -\sqrt{|z|} \cdot \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

Portanto, a fórmula para encontrar as raízes quadradas de um número complexo

$z = |z| \cdot [\cos \theta + i \cdot \sin \theta]$ é dada por:

$$\sqrt{z} = \pm \sqrt{|z|} \cdot \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

Exemplo 4.6. Determinar as raízes quadradas do número complexo $z = 5 - 12i$, Inicialmente, vamos converter z da forma algébrica para a forma trigonométrica: Primeiro, encontramos o módulo de z :

$$|z| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Em seguida, calculamos

$$\cos(2\theta) = \frac{5}{13} \text{ e } (2\theta) = -\frac{12}{13}$$

Como $0 \leq 2\theta \leq 2\pi$ indica que (2θ) pode estar em qualquer quadrante.

Com base nos valores de seno e cosseno, deduzimos que 2θ está no quarto quadrante.

Agora, utilizando as relações trigonométricas:

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} \text{ e } \sin(\theta) = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$$

Substituindo

$$\cos(2\theta) = \frac{5}{13} \implies \cos(\theta) = \sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{18}{26}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \text{ e em}$$

$$\sin \theta = -\frac{12}{13} \implies \sin \theta = \sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{8}{26}} = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Portanto:

$$\cos(\theta) = -\frac{3}{\sqrt{13}} \text{ e } \sin(\theta) = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Lebrando da a: fórmula de De Moivre as raízes quadradas de z :

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right) \right] \text{ onde } k = 0, 1 .$$

Substituindo os valores obtidos na fórmula de De Moivre as raízes quadradas de z são dadas por:

$$\sqrt{5-12i} = \pm\sqrt{13} \cdot \left[-\frac{3}{\sqrt{13}} + i \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} \right] = \pm(-3 + 2i)$$

5 Polinômios em uma variável

Definição: Um polinômio em $\mathbb{C}$ é uma soma formal $f = f(x)$ do tipo $f(x) = a_k \cdot x^k + a_{k-1} \cdot x^{k-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$

Para algum $k \in \mathbb{N}$ e $a_k \neq 0$ chamada polinômio ou função polinômial na variável(indeterminada) x . Onde os números complexos $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset \mathbb{C}$ são denominados coeficientes (constantes). Os números indicados nos expoentes e nos índices $\{k, k-1, k-2, \dots, 1, 0\} \in \mathbb{N}$ e a variável x podem assumir qualquer valor complexo.

Cada uma das parcelas formadas pelo produto de um número por uma potência n -ésima positiva da variável x : $a_k x^k, a_{k-1} x^{k-1}, \dots, a_1 x, a_0$ são chamadas de termos ou monômios do polinômio. O coeficiente $a_k \neq 0$ é chamado coeficiente líder. O termo a_0 é chamado de termo independente do polinômio.

Obs.: Um caso especial é aquele em que os coeficientes deste polinômio são todos números reais.

O maior valor do expoente da variável x entre os termos de coeficientes não nulos é denominado grau do polinômio. Utilizamos a notação $\text{gr } f = k$, para dizer que o grau de f é k , se $a_k \neq 0$.

Observe que, na definição de polinômios, incluímos a função constante $p(z) = a_0$, que possui grau zero se $a_0 \neq 0$ e a função afim $p(z) = a_0 + a_1 x$, que possui grau um se $a_1 \neq 0$.

Quando o grau $\text{gr } f > 0$, dizemos que f é um polinômio não-constante.

Essas definições ajudam a classificar os polinômios de acordo com seus graus e coeficientes.

Exemplo 5.1. Considere o polinômio $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4$.

Os coeficientes de $f(x)$ são 2, 5, 0, -4.

Portanto, $f(x)$ é um polinômio de grau 3.

Observações:

Se $a_k \neq 0$, dizemos que $f(x)$ tem grau k .

Um número complexo α é uma raiz do polinômio se $f(\alpha) = 0$.

O polinômio $f(x) = x^2 + 1$ tem grau 2 e suas raízes são $x = \pm i$.

Polinômio identicamente nulo Definição: O polinômio $f(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \dots + 0x^2 + 0x + 0 = 0$ é denominado o polinômio identicamente nulo (ou polinômio nulo)

sobre $\mathbb{C}$. Assim, denotaremos por 0 polinômio identicamente nulo.

Polinômios Idênticos

Definição: Assumiremos que os polinômios $f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ e $g(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k$ sobre $\mathbb{C}$ são iguais se, e somente se, $a_k = b_k$ para todo $k \geq 0$.

Polinômios constante: Dado $\alpha \in \mathbb{C}$, denotaremos o polinômio $f(x) = \alpha + 0x^n + 0x^{n+1} + \dots + 0x^2 + 0x + 0$ simplesmente por α e o denominamos o polinômio constante α

5.1 Operações com polinômios

Vamos definir sobre $\mathbb{C}$ as operações adição e multiplicação. **Soma e produto de polinômios**

Definição: Dados dois polinômios não constantes $f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ e $g(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k$ sobre $\mathbb{C}$ a soma e o produto de f e g denotados respectivamente por $f + g$ e $f \cdot g$, são os polinômios:

$$f + g = \sum_{k \geq 0} (a_k + b_k) x^k$$

e

$$f \cdot g = \sum_{k \geq 0} (a_k \cdot b_k) x^k = \sum_{k \geq 0} c_k x^k, \text{ onde } c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

A seguir, vejamos algumas propriedades da adição e multiplicação de polinômios. Consideremos f, g e h polinômios quaisquer. A operação de adição possui as seguintes propriedades:

Associatividade: $(f + g) + h = f + (g + h)$ e $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$

Comutatividade: $f + g = g + f$ e $f \cdot g = g \cdot f$

Existência de elemento neutro (aditivo e multiplicativo):

Existe $g \in \mathbb{C}$ tal que $f + g = f$; e $f \cdot g = f$ para todo polinômio.

Existência de inverso aditivo:

Existe $-g \in \mathbb{C}$ tal que $f + (-g) = 0$, para todo polinômio.

Obs.: O polinômio 0 (polinômio identicamente nulo) é o elemento neutro da adição de polinômios e o polinômio constante $f(x) = 1$ é chamado de elemento neutro da multiplicação de polinômios.

Distributividade: $f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h$

As demonstrações dessas propriedades se encontram em Iezzi (2013, p.52 e 53).

5.2 Valor numérico dos polinômios

Dado um polinômio não constante $f(x) = a_k \cdot x^k + a_{k-1} \cdot x^{k-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ com $a_k \neq 0$, temos que valor numérico é um valor que se obtém substituindo à variável x por α , $\forall \alpha \in \mathbb{C}$. Dessa forma, concluímos que o valor numérico de $P(\alpha)$ corresponde a $f(x)$ onde $x = \alpha$.

Exemplo 5.2. Dado o polinômio $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 8x - 10$, determine o valor numérico de $p(3)$.

$$f(3) = 4 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 10$$

$$f(3) = 4 \cdot 27 - 9 \cdot 9 + 24 - 10$$

$$f(3) = 108 - 81 + 24 - 10$$

$$f(3) = 41$$

O valor de $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 8x - 10$ para $f(3)$ é 41.

5.3 Raiz de um Polinômio

Definição: Dado um polinômio não constante f e um número complexo α tal que $f(\alpha) = 0$, dizemos que α é uma raiz ou zero de f .

Exemplo 5.3. Observe o polinômio $f(x) = x^2 - 6x + 8$ quando aplicamos $f(2)$.

$$f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 8$$

$$f(2) = 4 - 12 + 8$$

$$f(2) = 12 - 12$$

$$f(2) = 0$$

Dessa forma, percebemos que o número 2 é raiz do polinômio $f(x) = x^2 - 6x + 8$, pois temos que $f(2) = 0$.

As raízes polinomiais são fundamentais na elaboração de gráficos de polinômios (funções polinomiais), pois são elas que nos permitem identificar os pontos em que o gráfico intersecta o eixo das abscissas (eixo x).

Normalmente, problemas relacionados a raízes polinomiais surgem de duas formas. Em uma situação, verifica-se se a informação fornecida para a variável resultará no valor numérico zero, isto é, se este valor representa a raiz do polinômio. Por outro lado, deve-se determinar a raiz do polinômio.

É importante enfatizar que o número de raízes de um polinômio está diretamente ligado ao seu grau. Por exemplo, um polinômio de grau 2 só pode ter no máximo duas raízes,

independentemente de serem números complexos ou não. Por outro lado, o polinômio de grau 3 terá apenas 3 raízes possíveis.

Exemplo 5.4. *Verifique se 1 é a raiz do polinômio $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$.*

Caso 1 seja raiz, teremos que $f(1) = 0$.

Vamos verificar se isso é verdade.

$$f(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 1$$

$$f(1) = 1 + 2 \cdot 1 - 2 - 1$$

$$f(1) = 1 + 2 - 2 - 1$$

$$f(1) = 0$$

Portanto, o valor $x = 1$ é uma das raízes do polinômio $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$.

Este polinômio pode ter até 3 raízes, mas isso será discutido mais à frente.

Para grande utilidade do algoritmo da divisão de polinômios nos teoremas e proposições sobre raízes de polinômios, discuiremos agora o enredo de sua demonstração (GONÇALVES, Adilson, 2007).

5.4 Algoritmo da divisão para polinômios

Teorema do Algoritmo da Divisão para Polinômios:

Dados dois polinômios $f(x)$ e $g(x)$ (Sobre $\mathbb{R}$ ou sobre $\mathbb{C}$) com $d(x) \neq 0$, existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$, que são chamado de quociente e resto, respectivamente, tais que:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

$$r(x) = 0 \text{ ou o grau de } gr(r(x)) < g(x)$$

Além disso, os polinômios $q(x)$ e $r(x)$ são únicos.

Demonstração:

Primeiro demonstraremos a existência de $q(x)$ e $r(x)$.

Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_1 x + a_0$, de $gr f = n$ e

$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ de $gr(g) = m$

Se $f(x) = 0$ (polinômio nulo), então $0 = 0 \cdot g(x) + 0$; logo, tanto q como r também são o polinômio zero.

Agora suponha que $f(x) \neq 0$. Assim $gr(f(x)) = n$. Se $m > n$, então $q(x) = 0$ e $r(x) = f(x)$.

Podemos agora supor que $n \geq m$.

Agora seja $f_1(x)$ o polinômio definido por:

$$f(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot g(x) + r_1(x)$$

É fácil ver que $gr(f_1) < gr(f(x))$. Vamos demonstrar o teorema por indução sobre $gr(f) = n$.

Se $n = 0, n \geq m \implies m = 0$ e portanto $f(x) = a_0, g(x) = b_0 \neq 0$ e teremos $f(x) = \frac{a_0}{b_0} \cdot g(x)$ e basta tomar $q(x) = \frac{a_0}{b_0}$ e $r(x) = 0$.

Pela igualdade $f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g(x)$ e $gr f_1(x) < gr f(x) = n$ temos pela hipótese de indução que existe $q_1(x), r_1(x)$ tais que $f_1(x) = q_1(x) \cdot g(x) + r_1(x)$ onde $gr r_1(x) = 0$ ou o grau de $r_1(x) < gr(g(x))$. Daí segue imediatamente que: $f(x) = (q_1(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m})g(x) + r_1(x)$, e portanto tomando $q(x) = q_1(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$ e $r_1(x) = r(x)$.

Agora vamos provar a unicidade.

Sejam $q_1(x), q_2(x), r_1(x)$ e $r_2(x)$ tais que $f_1(x) = q_1(x) \cdot g(x) + r_1(x) = q_2(x) \cdot g(x) + r_2(x)$ onde $r_i(x) = 0$ ou $gr(r_i(x)) < gr(g(x)), i = 1, 2$.

Daí segue: $(q_1(x) - q_2(x)) \cdot g(x) = r_2(x) - r_1(x)$. Mas $q_1(x) \neq q_2(x)$ o grau do polinômio do lado esquerdo da igualdade acima é maior ou igual ao grau de $g(x)$ enquanto $gr(r_2(x) - r_1(x)) < gr(g(x))$ o que é uma contradição. Logo $q_1(x) = q_2(x)$ e daí segue $r_1(x) = f(x) - q_1(x) \cdot g(x) = f(x) - q_2(x) \cdot g(x) = r_2(x)$ como queríamos demonstrar.

O algoritmo da divisão para polinômios nos diz que se você tem dois polinômios $f(x)$ e $g(x)$, com $g(x) \neq 0$, e precisa dividir $f(x)$ por $g(x)$, então você conseguirá encontrar um quociente $q(x)$ e um resto $r(x)$, únicos, tais que $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ onde $r(x) = 0$ ou $gr(r(x)) < gr(g(x))$.

No caso em que, na divisão de $f(x)$ por $g(x)$ obtivermos $r(x) = 0$, ou seja, o resto da divisão é o polinômio nulo, dizemos que $g(x)$ divide $f(x)$.

5.5 Teorema do resto

Teorema: Dado um dividendo polinomial $f(x)$ e um divisor polinomial diferente de zero, $(x - k)$ onde o grau de $d(x)$ é menor ou igual ao grau de $f(x)$. O resto da divisão de $f(x)$ por $(x - k)$ é igual a $f(k)$.

Demonstração

De acordo com a definição de divisão $f(x) = (x - k) \cdot q(x) + r(x)$. Sendo o divisor $(x - k)$ linear (binômio do 1º, o restante será uma constante, r pois ao testarmos o valor numérico $(x = k)$ em $f(x)$, obtemos:

$$f(k) = (k - k) \cdot q(k) + r = 0 \cdot q(k) + r = r$$

Portanto, $f(k)$ é o resto da divisão de $f(x)$ por $(x - k)$.

Exemplo 5.5. Use o Teorema do Resto para determinar o resto da divisão de $f(x) = 6x^4 - x^3 - 15x^2 + 2x - 7$ por $(x - 2)$.

Solução: Pelo teorema basta calcular $f(2)$,

$$f(2) = 6 \cdot 2^4 - 2^3 - 15 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 7$$

$$f(2) = 6 \cdot 16 - 8 - 15 \cdot 4 + 4 - 7$$

$$f(2) = 96 - 8 - 60 + 4 - 7$$

$$f(2) = 100 - 75$$

$$f(2) = 25$$

O Teorema do Resto é um recurso eficaz que torna o cálculo do resto na divisão de um polinômio $f(x)$ por um binômio da forma $(x - k)$. O teorema estabelece que o saldo dessa divisão corresponde ao valor de $f(k)$. Ou seja, para descobrir o resto, basta substituir ' k ' na expressão do polinômio $f(x)$ e calcular o resultado.

6 Equações Algébricas

Definição: Denominamos equações polinomiais ou equações algébricas, toda equação que pode ser reduzida à forma: $f(x) = 0$, em que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ é um polinômio qualquer de grau n . Então, de forma geral, uma equação polinomial pode ser representada por:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

O coeficiente a_n que acompanha a variável de maior expoente, que determina o grau da equação é chamado de coeficiente dominante e o termo a_0 é o termo independente.

Exemplo 6.1. Dado o polinômio de grau 3, $f(x) = 9x^3 - 36x^2 + 29x - 6$ fazendo $f(x) = 0$ temos a equação cúbica. $9x^3 - 36x^2 + 29x - 6 = 0$

Exemplo 6.2. $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$

$$5x^5 - 5x^4 - 80x + 80 = 0$$

6.1 Raiz de uma equação polinomial

Proposição: Dado um polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$. Dizemos que $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma raiz ou zero do polinômio f , se $f(\alpha) = 0$ isto é:

$$f(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} (\alpha)^{n-1} + \dots + a_1 (\alpha) + a_0, a_n \neq 0 = 0$$

Demonstração

Do Teorema da divisão Euclidiana segue que existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$ em $\mathbb{C}$ tais que $f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x) + r(x)$, onde $r(x) = 0$ ou $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}((x - \alpha)) = 1$. Portanto, podemos escrever $f(x) = (x - \alpha)q(x) + r_0$, onde $r_0 \in \mathbb{C}$. Calculando $f(x)$ em α , temos $f(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + r_0$, de onde segue que $r_0 = f(\alpha)$. Assim, se $(x - \alpha)$ divide $f(x)$, então $f(\alpha) = 0$, e reciprocamente

6.2 Multiplicidade de uma raiz

Definição: A multiplicidade de uma raiz a de um polinômio $f(x) = 0$ indica o número de vezes que essa raiz é aparece na decomposição do polinômio. Em outras palavras, afirmamos que a representa a raiz da multiplicidade $m \geq 1$ da equação $f(x) = 0$ se, e somente se, essa multiplicidade for igual a 1. $f(x) = (x - a)^m \cdot q(x)$, onde a é a raiz da multiplicidade m de $f(x) = 0$. Se uma, duas, três ou mais raízes forem iguais, elas são chamadas de raízes simples, duplas, triplas e assim por diante.

Exemplo 6.3. A equação $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$, admite a raiz simples -1 e raiz 2 com multiplicidade 3 . Logo, podemos escrever $f(x) = (x + 1) \cdot (x - 2)^3 = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 2) \cdot (x - 2)$

Portanto, a equação é de 4° grau, porém, o conjunto solução só tem dois elementos
 $S = \{-1, 2\}$

6.3 Conjunto solução de uma equação polinomial

Definição: Chama-se conjunto solução ou conjunto verdade da equação $f(x) = 0$ em $\mathbb{C}$ o conjunto S ou V cujos elementos são as raízes complexas da equação.

Exemplo 6.4. Com relação a equação $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$, temos que $x = -1$ também é raiz pois $(-1)^3 + (-1)^2 - (-1) - 1 = -1 + 1 + 1 - 1 = 0$. Por ora, acredite que $x = \pm 1$ são suas únicas raízes, sendo $x = -1$ uma raiz dupla. Desta forma, seu conjunto solução, muitas vezes denotado por S , é dado por

$$S = \{-1, 1\} \text{ ou } V = \{-1, 1\}.$$

OBS: Resolver uma equação polinomial é obter o seu conjunto verdade.

6.4 Teorema Fundamental da Álgebra

O Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) afirma que todo polinômio $f(x) = 0$ de grau $n \geq 1$ admite pelo menos uma raiz complexa, seja ela real ou não. Este teorema foi demonstrado por Carl Friedrich Gauss em sua tese de doutorado em 1799, quando ele tinha apenas 21 anos. A demonstração de Gauss é um marco importante no estudo das equações algébricas e na matemática em geral. OBS: Equações de 5° grau ou maiores não possuem fórmulas para a sua solução direta.

Para a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, é necessário um conhecimento avançado em matemática, geralmente abordado em cursos de graduação.

6.5 Teorema da Decomposição ou teorema do fator

O Teorema da decomposição é uma aplicação do TFA que nos garante que todo polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x_{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$ de grau $n \geq 1$ pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau, isto é $f(x) = a_n \cdot (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$, em que $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as raízes de $f(x)$.

Teorema: Todo polinômio f não-constante de grau $n \geq 1$ e coeficiente dominante $a_n \neq 0$ pode ser fatorado como o produto de n fatores do 1° grau (fatoração linear):

Demonstração

Como $f(x)$ é um polinômio de grau $n \geq 1$, pelo Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A), $f(x)$ admite pelo menos uma raiz complexa x_1 . Assim pelo teorema do resto $f(x_1) = 0$ o que significa que $f(x)$ é divisível por $(x - x_1)$. Então existe um polinômio $q_1(x)$.

$$f(x) = (x - x_1) \cdot q_1(x)$$

em que $q_1(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$ e coeficiente dominante a_n (pois o divisor $x - x_1$ tem coeficiente dominante unitário). Temos:

(i) Se $n = 1$, então $q_1(x)$ é um polinômio de grau $1-1=0$, ou seja $q_1(x)$ é um polinômio constante, dado por $q_1(x) = a_n$. Substituindo em $f(x) = (x - x_1) \cdot q_1(x)$, vem $f(x) = a_n \cdot (x - x_1)$ e o teorema fica demonstrado.

(ii) Se $n \geq 2$, então $n - 1 \geq 1$. Assim, podemos aplicar, podemos aplicar o TFA ao polinômio $q_1(x)$. isto é $q_1(x)$ tem ao menos uma raiz complexa x_2 . Assim $q_1(x_2) = 0$ e $q_1(x)$ é divisível $(x - x_2)$:

$$q_1(x) = (x - x_2) \cdot q_2(x)$$

em que $q_2(x)$ é um polinômio de grau $n-2$ e coeficiente dominante a_n (pois o divisor $x - x_2$ tem coeficiente dominante unitário). Substituindo em $f(x) = (x - x_1) \cdot q_1(x)$, resulta em:

$$f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot q_2(x)$$

(i) Se $n = 2$, então $q_2(x)$ é um polinômio de grau 0, dado por $q_2(x) = a_n$. Substituindo em $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot q_2(x)$, vem $f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ e o teorema fica demonstrado.

Aplicando sucessivas vezes o T.F.A., obtemos, obtemos:

$$f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \cdot q_n(x)$$

em que $q_n(x)$ é um polinômio de grau $n - n = 0$, dado por $q_n(x) = a_n$.

Obs.:Pela definição de identidade de polinômios, o coeficiente a_n de $f(x)$ deve ser igual a $q_n(x)$.

Portanto:

$$f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

Isso mostra que qualquer polinômio de grau n pode ser decomposto em n fatores lineares, cada um associado a uma raiz complexa do polinômio.

Então, $f(x)$ pode ser decomposto em n fatores do 1º grau sob a forma:

$$f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n),$$

em que $x_1, x_2, \dots, x_n$ são raízes de $f(x)$ e a_n é o coeficiente dominante de $f(x)$.

Observações

(1) Dizemos que cada um dos polinômios de 1º grau, $x - x_1, x - x_2, \dots, x - x_n$ é um fator de $f(x)$.

(2) $f(x)$ é divisível por cada um de seus fatores, individualmente ou por qualquer produto desses fatores.

Exemplo 6.5. Fatore $f(x) = 5x^5 - 5x^4 - 80x + 80 = 0$ sabendo que suas raízes são $1, -2, 2, -2i$ e $2i$.

Resolução:

Nas condições do Teorema da decomposição, temos que

$$n = 5, a_n = a_5 = 5, x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 2, x_4 = -2i \text{ e } x_5 = 2i.$$

Assim

$$\begin{aligned} f(x) &= a_5(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) \\ &= 5(x - 1)(x + 2)(x - 2)(x + 2i)(x - 2i) = 0 \end{aligned}$$

Exemplo 6.6. Use o teorema da decomposição em fatores lineares para encontrar os zeros de um $f(x) = x^3 + 4x^2 - 4x - 16$ dado que $(x - 2)$ é um fator do polinômio.

Solução:

Os zeros são $2, -2$ e -4 .

6.6 O Teorema das Raízes Racionais

Teorema: Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$ um polinômio com coeficientes inteiros, se o número $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, com p e q primos entre si, é raiz da equação, então p é divisor do termo independente a_0 e q é divisor do termo dominante a_n .

Demonstração

Como $\frac{p}{q}$ é raiz do polinômio $f(x)$, temos

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_2 \left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0.$$

Multiplicando ambos os lados da equação por q^n , obtemos:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} \cdot q + \dots + a_2 p^2 \cdot q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Podemos reescrever a equação como:

$$a_n p^n = -q(a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 \cdot q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_0 q^n).$$

Da equação acima, vemos que q divide $a_n p$.

Como $\text{mdc}(p, q) = 1$, isso implica que q deve dividir a_n .

Similarmente, podemos reescrever a equação como:

$$a_0 q^n = -p(a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 \cdot q^{n-2} + a_1 q^{n-1})$$

Da equação acima, vemos que p divide $a_0 q^n$. Como $\text{mdc}(p, q) = 1$, isso implica que p deve dividir a_0 .

Portanto, se $\frac{p}{q}$ é uma raiz racional do polinômio $P(x)$ então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n .

Exemplo 6.7. *Determine as raízes da equação $x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 16x + 8 = 0$*

Solução:

Pelo teorema das n raízes de uma equação polinomial de grau n , a equação dada tem 4 raízes e utilizando o teorema das raízes racionais sabemos que as possíveis raízes racionais são $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$.

Pelo método de divisão sintética, as raízes da equação são $1 + i, 1 - i, 2$ (dupla).

6.7 Raízes complexas:

Teorema: Se um número complexo não-real, $z = a + bi$, com $b \neq 0$, é raiz de uma equação polinomial com coeficientes reais, então seu conjugado, $\bar{z} = a - bi$, também é raiz dessa equação.

Em Matemática, o Teorema Fundamental da Álgebra afirma que qualquer polinômio $f(x)$ com coeficientes complexos de uma variável e de grau $n \geq 1$ possui alguma raiz complexa.

Exemplo 6.8. *A equação $x^4 = 4x - 3$, tem as seguintes raízes no conjunto dos números complexos:*

$$1, 1, -1 + i\sqrt{2} \quad \text{e} \quad -1 - i\sqrt{2}.$$

Demonstração

Para a demonstração do teorema das raízes conjugadas vamos utilizar as propriedades do conjugado de um número complexo já apresentada e discutidas.

Seja a equação $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, onde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são seus coeficientes são reais e z é raiz de $f(x)$, isto é, $f(z) = 0$.

Provemos que o conjugado de z também é raiz dessa equação, isto é, $f(\bar{z}) = 0$.

Dados dois números complexos z_1 e z_2 e considerando seus conjugados $\bar{z}_1$ e $\bar{z}_2$, temos:

$$(i) \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$(ii) \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$(iii) \quad z_1 = \bar{z}_1 \text{ se, e somente se } z_1 \text{ é real}$$

$$(iv) \quad \overline{z_1^n} = \bar{z}_1^n$$

Vamos verificar que $\bar{z}$, na equação $f(x)$.

$$f(\bar{z}) = a_n \cdot \bar{z}^n + a_{n-1} \cdot \bar{z}^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \bar{z} + a_0.$$

Lembrando que o conjugado de um número real puro a é igual a ele próprio,

$$f(\bar{z}) = \overline{a_n \cdot z^n} + \overline{a_{n-1} \cdot z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 \cdot z} + \overline{a_0}$$

$$f(\bar{z}) = \overline{a_n \cdot z^n} + \overline{a_{n-1} \cdot z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 \cdot z} + \overline{a_0}$$

$$f(\bar{z}) = \overline{a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0} = \overline{p(z)} = \bar{0} = 0.$$

Com isso, podemos concluir rapidamente a prova deste teorema.

Portanto, $\bar{z}$ também é raiz.

Exemplo 6.9. Se $z = 2 + 3i$ é uma raiz de $p(x) = x^2 - 4x + 13$, mostre que $\bar{z} = 2 - 3i$ é outra raiz.

Solução:

Sabemos que se z é a raiz de um polinômio, devemos ter $f(z) = 0$. Portanto, podemos usar $z = 2 - 3i$ no polinômio e verifica a igualdade de $f(\bar{z}) = 0$.

Se verificar a igualdade então $f(\bar{z})$ também é uma raiz de $f(x)$.

$$f(2 - 3i) = (2 - 3i)^2 - 4(2 - 3i) + 13$$

$$f(2 - 3i) = 4 - 12i + 9i^2 - 8 + 12i + 13$$

$$f(2 - 3i) = 9 + 9(-1)$$

$$f(2 - 3i) = 9 + 9 \cdot (-1)$$

$$f(2 - 3i) = 9 - 9$$

$$f(2 - 3i) = 0$$

Obtemos zero após substituir $z = 2 - 3i$ no polinômio. Isso significa que $z = 2 - 3i$ é uma raiz de $f(x)$, provando a validade do teorema das raízes conjugadas de polinômios de coeficientes reais.

Observações

(1) Se o número complexo $z = a + bi, b \neq 0$, é raiz com multiplicidade m de uma equação polinomial, então seu conjugado $\bar{z} = a - bi, b \neq 0$ também é raiz com multiplicidade m dessa equação.

(2) Esse teorema nos garante que, em uma equação polinomial de coeficientes reais, as raízes complexas não reais sempre ocorrem aos pares. Dessa forma, uma equação de grau ímpar apresenta ao menos uma raiz real. Assim por exemplo, a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, (com a, b, c e d reais) admite uma ou três raízes reais, pois o número de raízes complexas não reais é par.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi apresentar o surgimento dos números complexos oferecendo uma perspectiva histórica do surgimento desses números a partir da invenção da unidade imaginária na resolução de equações quadráticas e cúbicas, pois, acreditamos na possibilidade da história dos números complexos e mais amplamente que a história da matemática possa despertar nos professores e nos alunos uma nova perspectiva para ajudá-los no processo de ensino e aprendizado deste conteúdo relevante e desmitificar a ideia de que Matemática é direcionada apenas uma prática docente diferenciada, menos centrada em uma matemática de resultados prontos, e mais em uma matemática de descobertas e conexões. Dessa forma concluímos que a História da Matemática é uma ferramenta fundamental no ensino-aprendizagem dos conteúdos, por trazer resultados positivos em sala de aula.

Com essa percepção os alunos e professores além de compreender melhor sobre o conteúdo, conseguem também assimilar de forma significativa. Apresentar conteúdos matemáticos através da história acrescenta bastante na bagagem do aluno e facilita muito para que o aluno não esqueça das principais definições. Através dessa abordagem sugere-se a aplicação da história da matemática no ensino de outros conteúdos como geometria, trigonometria e o estudo de aplicações desse conteúdo ao longo do tempo e suas contribuições para o futuro.

Bibliografia

- [1] BASTOS, Gervasio G. **Resolução de Equações Algébricas por Radicais.**
Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/M30.pdf>. Acesso em 05 set. 2024.
- [2] BECKER, Joel Marcelo. Relative curvature measures of nonlinearity. **Polinômios, equações e resoluções.** .2014.63f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Cuiabá-MT, 2014.
- [3] GONÇALVES, Adilson. *Introdução à Álgebra* .Rio De Janeiro-RJ: IMPAR, 2007. **Keywords: Complex numbers; History of Mathematics; Algebraic equations.**

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	ASPECTO HISTÓRICO DOS NÚMEROS COMPLEXOS	12
3	NÚMEROS COMPLEXOS	18
3.1	Propriedades da adição dos números complexos	22
3.2	Propriedades da multiplicação dos números complexos	24
3.3	O conjugado de um número complexo	26
3.4	Propriedades do conjugado	26
3.5	O plano de Argand-Gauss e a representação geométrica dos números complexos	28
3.6	Operações básicas com números complexos	30
3.7	Potências da unidade imaginária	34
3.8	Módulo de um número complexo	35
3.9	Interpretação geométrica do módulo de um número complexo	36
3.10	Propriedades do módulo	36
3.11	Argumento de um número complexo	38
4	A FORMA TRIGONOMÉTRICA DE NÚMEROS COMPLEXOS	41
4.1	Operações com a forma trigonométrica	42
4.2	Produtos de números complexos na forma trigonométrica	42
4.3	Quocientes de números complexos na forma trigonométrica	43
4.4	Potenciação de números complexos na forma trigonométrica	44
4.5	Radiciação de números complexos na forma trigonométrica	46
4.6	Raízes complexas da unidade	51
4.7	Fórmula da raiz quadrada de qualquer número complexo	51
5	POLINÔMIOS EM UMA VARIÁVEL	54
5.1	Operações com polinômios	55
5.2	Valor numérico dos polinômios	56
5.3	Raiz de um Polinômio	56
5.4	Algoritmo da divisão para polinômios	57
5.5	Teorema do resto	58
6	EQUAÇÕES EQUAÇÕES ALGÉBRICAS	60
6.1	Raiz de uma equação polinomial	60
6.2	Multiplicidade de uma raiz	60

6.3	Conjunto solução de uma equação polinomial	61
6.4	Teorema Fundamental da Álgebra	61
6.5	Teorema da Decomposição ou teorema do fator	61
6.6	O Teorema das Raízes Racionais	63
6.7	Raízes complexas:	64
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	67
	BIBLIOGRAFIA	68
A	INTRODUÇÃO	72
B	ASPECTO HISTÓRICO DOS NÚMEROS COMPLEXOS	74
C	NÚMEROS COMPLEXOS	80
C.1	Propriedades da adição dos números complexos	84
C.2	Propriedades da multiplicação dos números complexos	86
C.3	O conjugado de um número complexo	88
C.4	Propriedades do conjugado	88
C.5	O plano de Argand-Gauss e a representação geométrica dos números complexos	90
C.6	Operações básicas com números complexos	92
C.7	Potências da unidade imaginária	96
C.8	Módulo de um número complexo	97
C.9	Interpretação geométrica do módulo de um número complexo	98
C.10	Propriedades do módulo	98
C.11	Argumento de um número complexo	100
D	A FORMA TRIGONOMÉTRICA DE NÚMEROS COMPLEXOS	103
D.1	Operações com a forma trigonométrica	104
D.2	Produtos de números complexos na forma trigonométrica	104
D.3	Quocientes de números complexos na forma trigonométrica	105
D.4	Potenciação de números complexos na forma trigonométrica	106
D.5	Radiciação de números complexos na forma trigonométrica	108
D.6	Raízes complexas da unidade	113
D.7	Fórmula da raiz quadrada de qualquer número complexo	113
E	POLINÔMIOS EM UMA VARIÁVEL	116
E.1	Operações com polinômios	117
E.2	Valor numérico dos polinômios	118

E.3	Raiz de um Polinômio	118
E.4	Algoritmo da divisão para polinômios	119
E.5	Teorema do resto	120
F	EQUAÇÕES EQUAÇÕES ALGÉBRICAS	122
F.1	Raiz de uma equação polinomial	122
F.2	Multiplicidade de uma raiz	122
F.3	Conjunto solução de uma equação polinomial	123
F.4	Teorema Fundamental da Álgebra	123
F.5	Teorema da Decomposição ou teorema do fator	123
F.6	O Teorema das Raízes Racionais	125
F.7	Raízes complexas:	126
G	CONSIDERAÇÕES FINAIS	129
	 BIBLIOGRAFIA	 130

A INTRODUÇÃO

Apresentar o surgimento dos números complexos de forma contextualizada e didática por meio do estudo de equações algébricas como foco na História da matemática foi que motivou a escolha do tema deste trabalho, devido a sua grande importância no ensino aprendizagem. Diante dessa abordagem histórica, introduziremos as definições e propriedades importantes como a representação do número imaginário i a partir da resolução de equações quadráticas e cúbicas. A determinação da solução de uma equação do segundo grau com discriminante negativo parece ter sido sempre evidente para os matemáticos que se depararam com o problema, uma vez que não há raiz quadrada de um número negativo, como indicado na fórmula de Bhaskara para resolução. Portanto, se durante o processo de resolução surgisse uma raiz quadrada de um número negativo, isso era visto apenas como um sinal de que a questão originalmente proposta não possuía solução. Ao resolver equações do terceiro grau, foi necessário lidar com números imaginários.

Desde que os babilônios aprenderam a resolver equações quadráticas, já se passaram mais de 3000 anos desde que a fórmula que fornece as raízes das equações de terceiro grau foi identificada.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (\text{A.1})$$

Vamos exemplificar a dedução da fórmula mencionada, empregando a técnica de remover o termo de grau dois da equação geral de 3º grau.

No entanto, ao utilizar a fórmula (1.1) atualmente conhecida na equação $x^3 = 15x + 4$, obtemos:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Geralmente, ao iniciarmos o estudo de números complexos no Ensino Médio, os percebemos como pares ordenados de números reais, sujeitos às normas de duas operações bem definidas: a adição, obtida pela soma das coordenadas, e a multiplicação, realizada por meio da lei distributiva e da regra que afirma que $i^2 = -1$. Depois de definir essas definições, o ponto $(0, 1)$ é definido como a unidade imaginária. Com base nessa dedução, é possível representar as coordenadas de números reais através da fórmula $z = a + bi$, também chamada de forma algébrica ou cartesiana, com base no conceito de multiplicação de coordenadas, determina-se que $i^2 = -1$, o que leva à expressão $i = \sqrt{-1}$.

Ao contrário dos números reais, que são representados por pontos numa linha horizontal real, eles não são representados por pontos, onde cada número é dado pela combinação de uma parte real e uma parte imaginária.

Ao longo da história, foi bastante frequente a expansão de um conjunto numérico para um novo conjunto. Ocorre que, ao longo do tempo, a matemática evoluiu e, para satisfazer as demandas da época, percebeu-se que havia números que não faziam parte do conjunto numérico ao qual se referia.

Tal como aconteceu com o surgimento dos conjuntos numéricos de inteiros, racionais, irracionais e reais, o mesmo ocorreu com a necessidade de ampliar o conjunto de números reais para abranger os números complexos. Na tentativa de solucionar equações do segundo grau, é comum encontrarmos a raiz quadrada de um número negativo, algo que não tem solução no conjunto dos números reais. Assim, a necessidade de ampliar o conjunto dos números que comportem as soluções das equações algébricas.

Os números complexos se desenvolveram como uma extensão dos números reais, possibilitando o surgimento da unidade imaginária, simbolizada por " i ". Esta unidade imaginária é caracterizada pela raiz quadrada de -1 , isto é, $i = \sqrt{-1}$.

Na matemática e na física, os números Complexos desempenham um papel crucial, representando quantidades que não podem ser expressas apenas por números reais. O conceito de número complexo se desenvolveu gradativamente, como ocorreu com os demais tipos de números. Havia séculos que se sabia da inviabilidade de resolver a equação $x^2 + a = 0$ quando a era positivo no século XVI, pois para os estudiosos da época a raiz negativa não existia mas as tentativas de superar os obstáculos levaram tempo para ocorrer. Com o passar dos anos, alguns matemáticos viram o mesmo problema para equações do 3º, onde foi possível perceber que os números reais não eram suficientes para resolver este tipo de equação.

“Os números complexos são frequentemente associados à resolução de equações quadráticas cujas soluções são expressas por raízes quadradas de números negativos. Evocasse um contexto histórico para justificar a necessidade de se introduzir estes números na matemática, ainda que a sua história não seja detalhada” (PINTO, 2009, p. 11).

Os números complexos começaram a ser desenvolvidos por Scipione del Ferro. Ele desenvolveu uma teoria para a solução das equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, mas acabou não publicando sua teoria. Apenas a revelou a dois discípulos seus: Della Nave e Antônio Fior, dando a demonstração apenas ao primeiro.

B ASPECTO HISTÓRICO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

No século XIX, o italiano Girolamo Cardano (1501–1576) foi o primeiro matemático a trabalhar com números complexos, ao invés de simplesmente rejeitá-los. A partir desse momento, os matemáticos começaram a aceitar e formalizar esses números. Girolamo Cardano, que nasceu em Pavia em 1501 e faleceu em Roma em 1576, foi um cientista de grande versatilidade e controvérsia. É o autor do livro *Liber De Ludo Aleae* (Livro dos Jogos de Azar), onde de maneira brilhante apresentou a noção de probabilidade que é utilizada atualmente. Além disso, ensinou técnicas para burlar os jogos. Mesmo com características pessoais nada apelativas, Cardano deixou para a história um livro que, naquele tempo, era indiscutivelmente a maior obra de Álgebra já publicada: a *Artis Magnae Sive de Regulis*.

Cardano, ao tentar solucionar o desafio de dividir um segmento de 10 cm em dois segmentos, cujo produto desses segmentos seja igual a 40. Em outras palavras, transformando o desafio em uma equação, obtemos:

$$40 = x \cdot (10 - x).$$

Vamos determinar os valores de x :

$$40 = x \cdot (10 - x) \implies x^2 - 10x = 40 \implies x^2 - 10x - 40 = 0$$

em que $a = 1$, $b = -10$ e $c = -40$.

Para calcular vamos usar a fórmula resolutive de "Bhaskara"

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aplicando essa fórmula,

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 160}}{2}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{-60}}{2}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{-2^2 \cdot 3 \cdot 5}}{2}$$

$$x = \frac{10 \pm -2\sqrt{-3 \cdot 5}}{2}$$

$$x = \frac{2(5 \pm \sqrt{-15})}{2}$$

$$x = 5 \pm \sqrt{-15}$$

As quais são: $x = 5 \pm \sqrt{-15}$.

Resolvendo o problema de dividir o número 10 em duas partes cujo produto é 40, provou que os números são: $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$.

Supõe-se que a incapacidade dos números complexos foi primeiramente notada ao solucionar equações de terceiro grau. No livro "Ars Magna", de 1545, escrito por Girolano Cardano, é apresentado um método para solucionar algumas equações de terceiro grau, conhecido atualmente como Fórmula de Cardano-Tartaglia, que se baseia em raízes quadradas de números complexos.

Niccolò Fontana, também chamado de Tartaglia, desempenhou um papel significativo na história da Matemática. Tartaglia, que nasceu em Bréscia em 1501, superou obstáculos na fala devido a cicatrizes na boca e se sobressaiu por suas contribuições matemáticas, particularmente em cálculos de artilharia e equações cúbicas.

Cardano é creditado pela criação de uma fórmula para solucionar equações do tipo, $x^3 + px + q$.

Ao examinar a técnica criada por Tartaglia, percebemos a origem das referidas raízes de números negativos.

Tartaglia criou um método para solucionar equações cúbicas, que posteriormente foi adotado por Cardano. A equação cúbica utiliza a fórmula de Cardano-Tartaglia para determinar raízes reais.

Vamos examinar o método de Tartaglia:

vamos tomara equação geral cúbica:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \text{ com } a \neq 0$$

Vamos trocar x por $y + m$ e, posteriormente, eliminar o termo quadrático,

$$a(y + m)^3 + b(y + m)^2 + c(y + m) + d = 0$$

Descomplicando e ampliando:

$$ay^3 + (3am + b)y^2 + (3am^2 + 2bm + c)y + am^3 + bm^2 + cm + d = 0.$$

Para eliminar o termo quadrático, procedemos da seguinte maneira:

$$3am + b = 0 \implies 3am = -b \implies m = -\frac{b}{3a}$$

$$\text{Substituindo } m, \text{ obtemos: } ay^3 + \left(3ac - \frac{b^2}{3a}\right)y + \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2} = 0.$$

Simplificando, obtemos a forma:

$$y^3 + py + q = 0, \text{ sendo } p = 3ac - \frac{b^2}{3a} \text{ e } q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2}$$

$$\text{Vamos supor } x = A + B \implies x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx.$$

Comparando com a equação cúbica,

$$y^3 + py + q = 0, \text{ obtemos:}$$

$$A^3 + B^3 = -q \text{ e } 3AB = -p \implies A^3 B^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

Essas relações permitem encontrar A e B, e consequentemente, as raízes da equação cúbica.

$$\text{Sendo } A^3 + B^3 = -q \text{ e } A^3 B^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

$$\begin{aligned} \text{Substituindo } B^3 = -q - A^3 \text{ na equação } A^3 B^3 = -\frac{p^3}{27}, &\implies A^3(-q - A^3) = -\frac{p^3}{27} \\ \implies -A^6 - qA^3 = -\frac{p^3}{27} &\implies A^6 + qA^3 = \frac{p^3}{27} \implies (A^3)^2 + qA^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \end{aligned}$$

Esta é uma equação do tipo quadrática em termos de A^3 .

$$\text{Vamos definir } u = A^3, \text{ então a equação se torna: } u^2 + qu - \frac{p^3}{27} = 0$$

Resolvendo esta equação quadrática para u obtemos:

$$u = \frac{-q \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}{2}$$

Vamos tomar

$$u = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4 \cdot \frac{p^3}{27}}}{2}$$

$$u = \frac{-q}{2} + \frac{\sqrt{q^2 + 4 \cdot \frac{p^3}{27}}}{2}$$

$$u = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \implies A^3 = u$$

Portanto,

$$A = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$\begin{aligned} \text{Sendo } B^3 = -q - A^3 &\implies B^3 = -q - u \implies B^3 = -q - \left(\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right) \\ &\implies B^3 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \implies B = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \end{aligned}$$

Finalmente como $x = A + B$, temos:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Uma característica única na equação de Cardano (Tartaglia!) é que ela não oferece soluções complexas para a equação do terceiro grau; deve ser utilizada na busca por uma raiz real.

Cardano se deparou com um problema: "Um carpinteiro tem a intenção de construir duas caixas, uma em formato de cubo de aresta x , e a outra em formato de paralelepípedo de base retangular, com dimensões de 3 m e 5 m, e altura igual à altura do cubo." A escolha de x deve assegurar que o volume do cubo supere o do paralelepípedo em $4m^3$.

Ele utilizou a fórmula para validar a resposta de $x = 4$ que já sabia, chegando à conclusão de que $x = 4$ era a resposta correta, um desfecho inesperado.

Vamos seguir o processo de dedução da fórmula realizado por ele.

Fazendo $x = A + B$, e utilizando o raciocínio de Tartaglia :

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx. \text{ Igualando os termos: } A^3 + B^3 + 3ABx = 15x + 4$$

Então, $A^3 B^3 = 125$ e $A^3 + B^3 = 4$, de onde $A^3(4 - A^3) = 125$ ou seja:

$$(A^3)^2 - A^3 + 125 = 0 \implies A^3 = 2 + \sqrt{-121} \text{ e } B^3 = 2 - \sqrt{-121}.$$

Desse modo, temos a solução:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Contudo, Cardano não conseguiu converter a expressão acima em 4, que ele tinha conhecimento ser uma das raízes que procurava. Contudo, a conexão entre a raiz natural 4 e a raiz da equação no formato da fórmula continuou a intrigar os matemáticos até o ano de 1572.

O algebrista bolonhês Rafael Bombelli (1526–1572) foi um notável diletante da matemática que publicou um livro intitulado *Álgebra* em 1572. Este livro apresenta pela primeira vez uma teoria dos números complexos bem organizada, inclusive com uma notação específica, introduzindo pela primeira vez os números complexos e apresentando

uma primeira introdução ao tema. É precisamente neste livro que descreve de maneira didática as ideias de Cardano. Durante o ano de 1818, Rafael Bombelli dedicou 74 páginas de sua *L'Algebra* ao estudo das leis algébricas que orientavam o cálculo das quantidades $a + b \cdot \sqrt{-1}$. Especificamente, demonstrou que: as quatro operações aritméticas sobre números "sofísticos" (como eram conhecidos naquela época) eram possíveis.

Bombelli optou por agir como se as raízes quadradas de números negativos representassem números reais. Ele entende que a raiz cúbica de $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ é um "número" representado por $a + \sqrt{-b}$. Em tal cenário, a situação é diferente.

$$\begin{cases} \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1} \\ \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1} \end{cases}$$

Logo,

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1} = 2 - \sqrt{-121}$$

Substituindo os valores na equação obtemos:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

Donde ele deduzir que :

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 = \\ 8 + 12\sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (-1) + (\sqrt{-1})^3 &= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}. \end{aligned}$$

Portanto, mesmo com o desconforto de lidar com números que parecem "ilegais", no final, se alcançava um resultado legítimo. Esta é apenas uma das circunstâncias, possivelmente a de maior relevância, onde se justifica a utilização de raízes quadradas de números negativos.

Em 1637, com a publicação de *La Géométrie*, Renè Descartes introduziu os conceitos de parte real e parte imaginária.

Albert Girard introduziu o símbolo $\sqrt{-1}$ em 1669, e um pouco mais tarde, em 1777, o matemático suíço Leonhard Euler estabeleceu $i = \sqrt{-1}$, que foi impresso pela primeira vez em 1794. A letra *i* só começou a ser usada para representar a raiz quadrada de -1 a partir de 1777 por Leonhard Euler, o genial suíço.

Em 1798, o século XVIII chegava ao fim quando Gauss retomou o conceito de Argand em 1831, considerando os números $a + b\sqrt{-1}$ como coordenadas de um ponto em um plano cartesiano, resultando em (a, b) . Também foi realizada uma interpretação geométrica para os símbolos de adição e multiplicação. Esta representação geométrica permitiu que os matemáticos se sentissem mais confortáveis com os números imaginários, uma vez que agora podiam ser visualizados considerando que cada ponto, representa um número complexo no plano.

Jean Robert Argand e Caspar Wessel, de forma autônoma, inspirados pela geometria

e topografia, representaram geometricamente os complexos de forma intuitiva e prática, utilizando pontos e vetores em um plano cartesiano. Gauss descreveu os números complexos da seguinte maneira: $a + bi$, onde a e b são números reais e $i^2 = -1$.

A representação geométrica desses números como pontos no plano foi o passo crucial para formalizar o conceito de número complexo. Gauss foi o primeiro matemático a ter uma compreensão clara dessa representação e a utilizá-la em seus estudos. Como fica evidente, mesmo que implicitamente, em sua tese redigida em 1799. No entanto, Gauss só tornou suas ideias públicas em 1831, com a intenção de introduzir os inteiros gaussianos. Hamilton definiu rigorosamente o corpo dos números complexos em 1837.

Jean-Robert Argand (1768-1822) é o autor da publicação de 1806 que apresenta a interpretação geométrica atual e definitiva dos números complexos, denominada Diagrama de Argand. O projeto de Argand-Gauss é bastante ambicioso.

Como é evidente, a origem dos números complexos está intimamente ligada à dos polinômios, já que a "criação" desses números ocorreu ao analisar as soluções de certas equações polinomiais. No entanto, o estudo das raízes das equações polinomiais também se baseou em números complexos, culminando na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra de Gauss.

Em 1837, Sir William Rowan Hamilton chegou ao final dessas descobertas reconhecendo os números complexos como um par ordenado de números reais e reescreveu as definições geométricas de Gauss na forma algébrica.

A partir daí, números complexos, até então supostamente inexistentes, tornaram-se um objeto matemático. Hoje, a teoria dos números complexos, tem ampla aplicação nos estudos mais avançados de eletricidade, engenharia, eletromagnetismo, física quântica, teoria do caos.

C NÚMEROS COMPLEXOS

Quando pensamos sobre a representação dos números reais, imaginamos uma reta numérica (reta horizontal) no sentido negativo e positivo em relação ao zero, o ponto inicial das semirretas subsequentes. Escolhemos um comprimento padrão, denominado unidade, e duas regras distintas para realizar duas operações na reta, denominadas adição e multiplicação de números reais. O objetivo é gerar um terceiro ponto como resultado. Observamos que as operações estabelecidas possuem diversas propriedades úteis, como a comutatividade, associatividade e outras.

Seja $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$, o conjunto dos pares ordenados de números reais sujeitos às regras e leis das operações de adição e multiplicação usuais de números reais, definidas a seguir.

Sejam (a_1, b_1) e (a_2, b_2) dois números complexos não nulos, então:

$$(1) (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Regra da adição de pares ordenados: Dados dois pontos coordenados $z_1 = (a_1, b_1)$ e $z_2 = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$, somam-se as primeiras e as segundas coordenadas separadamente dos números dados.

$$(2)(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$$

Regra da multiplicação de pares ordenados: dados dois pontos (a_1, b_1) e $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$, calculamos a diferença entre os produtos das primeiras e das segundas coordenadas respectivamente e depois calculamos a soma dos produtos da primeira coordenada do primeiro número pela segunda coordenada do segundo número e vice-versa ordenadamente.

Exemplo C.1. a) Calcule $(2, 5) + (7, 8) = (2 + 7, 5 + 8) = (9, 13)$.

b) Determine $(3, 4) \cdot (1, 2)$:

$$(3, 4) \cdot (1, 2) = (3 \cdot 1 - 4 \cdot 2, 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1) = (3 - 8, 6 + 4) = (-5, 10)$$

Definição 3.1: Chamamos de **número complexo** o par ordenado dos pontos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, convencionalmente denotado por $z = (a, b)$, sujeito às regras e leis das operações de adição e multiplicação usuais de números reais definidos.

De acordo com essa definição, devemos nos atentar que todo número complexo $(a, 0)$ com a segunda coordenada nula pode ser associado a um número real a de tal forma que $(a, 0) = a$.

Dessa forma, os números complexos $(0, 0)$ e $(1, 0)$ podem ser associados aos números reais 0 e 1 respectivamente. Ou seja, $(0, 0) = 0$ e $(1, 0) = 1$.

Em particular, os elementos $0 = (0, 0)$ e $1 = (1, 0)$ são, respectivamente, os elementos neutros da adição e da multiplicação.

Agora, o número complexo $(0, 1)$ é chamado de **unidade imaginária** e é representado por i . Notemos que: $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1$

Portanto, $i^2 = -1$. (relação fundamental)

Com as identificações citadas, $(1, 0) = 1$ e $(0, 1) = i$, podemos escrever os números complexos (a, b) , em uma nova forma, dada pela expressão $z = a + bi$. Para obter essa nova notação, observamos inicialmente a correspondência de números complexos, dado na forma de par ordenado, com números reais, e aplicando a definição de adição e multiplicação, podemos escrever qualquer número complexo $z = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ da seguinte forma:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1),$$

como $(a, 0) = a$, $(0, b) = b$ e $(0, 1) = i$, podemos escrever:

$$z = (a, b) = a + bi \text{ ou } z = a + bi.$$

Os números complexos, em geral, são dados por sua forma algébrica, sendo representados por $z = a + bi$ e por sua forma geométrica representada no plano cartesiano, fazendo a utilização das coordenadas a e b , dos eixos das abcissas e ordenadas respectivamente.

$$\text{a) } z = (2, 3) = (2, 0) + (0, 3) = (2, 0) + (3 \cdot 0 - 0 \cdot 1, 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (2, 0) + (3, 0) \cdot (0, 1) = 2 + 3i$$

$$\text{b) } z = (-1, 4) = (-1, 0) + (0, 4) = (-1, 0) + (4 \cdot 0 - 0 \cdot 1, 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0)$$

$$= (-1, 0) + (4, 0) \cdot (0, 1) = -1 + 4i$$

$$\text{c) } z = (5, -2) = (5, 0) + (0, -2) = (5, 0) + (-2 \cdot 0 - 0 \cdot 1, -2 \cdot 1 + 0 \cdot 0)$$

$$= (5, 0) + (-2, 0) \cdot (0, 1) = 5 - 0, 2i$$

$$\text{d) } z = (-1, -3) = (-1, 0) + (0, -3) = (-1, 0) + (-3 \cdot 0 - 0 \cdot 1, -3 \cdot 1 + 0 \cdot 0)$$

$$= (-1, 0) + (-3, 0) \cdot (0, 1) = -1 - 3i.$$

Assim, todo número complexo dado na forma de par ordenado de números reais $z = (a, b)$ pode ser escrito na forma $z = a + bi$, chamada de forma algébrica ou forma cartesiana sendo, o número real a , chamada **parte real**, e denotado por $Re(z)$, b , denominado de **parte imaginária**, sendo indicado por $Im(z)$ e i a unidade imaginária.

Se $z = (0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1) = b \cdot i = 0 + b \cdot i$, ou seja, se a parte real for nula, então z é chamado de **imaginário puro**. Já se $z = (a, 0) = a + 0i = a$ apresentar a parte imaginária nula, ele é considerado um número real puro. Logo, todo número real é um caso particular de número complexo com parte imaginária igual a zero, o que significa dizer que o conjunto de números complexos é, na prática, um número complexo $z = (a, b)$ é representado na forma $z = a + bi = Re(z) + Im(z) \cdot i$

Assim, cada número complexo (não real) $z = (a, b)$ pode ser escrito como a soma

de um número real e um número complexo puro $z = (a, b) = a + bi$.

Como consequência da forma algébrica, pode-se escrever a multiplicação de dois números complexos usando a multiplicação distributiva, considerando a relação fundamental $i^2 = -1$.

$$(a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot i$$

Exemplo C.2. a) $z = 3 + 0i$ é um número real, pois $Re(z) = 3$ e $Im(z) = 0$

b) $z = 7 + 4i$ é um número complexo, pois $Re(z) = 7$ e $Im(z) = 4$

c) $z = 0 + 5i$ é um número imaginário puro, pois $Re(z) = 0$ e $Im(z) = 5$

d) $z = -2 + 0i$ é um número real, pois $Re(z) = -2$ e $Im(z) = 0$

e) $z = 0 + 0i$ é um número real, pois $Re(z) = 0$ e $Im(z) = 0$

Segundo (Fundamentos da Matemática Elementar, 2015) denomina-se conjunto dos números complexos o conjunto $\mathbb{C}$ de todos os pares ordenados de números reais que satisfazem as seguintes definições, de tal modo que as propriedades de associatividade, comutatividade e distributividade usuais sejam preservadas:

(i). Igualdade: $(a, b) = (c, d) \iff a = c$ e $b = d$.

(ii). Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

(iii). Multiplicação: $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$.

Assim, $z \in \mathbb{C} \implies Z = (a, b)$, em que $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.

Com isso, o conjunto dos números complexos pode ser representado por:

$$\mathbb{C} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}; \}$$

No conjunto $\mathbb{C}$, o número -1 possui uma raiz quadrada, uma vez que foi concebida a unidade imaginária $i = (0, 1)$ e aplicando a definição de produto de pares ordenados, temos a propriedade básica do algarismo imaginário, $i^2 = -1$ e, portanto, $\mathbb{C}$ é uma extensão do conjunto $\mathbb{R}$ na qual o elemento $-1 = (-1, 0)$ tem raiz quadrada $i \in \mathbb{C}$ e escrevemos $i = \sqrt{-1}$.

Como todo número real a está associado com o par ordenado $a = (a, 0)$, podemos dizer que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é visto como um subconjunto dos números complexos $\mathbb{C}$. Portanto, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ e distributividade usuais sejam preservadas.

$$\mathbb{C} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

No conjunto $\mathbb{C}$, o número -1 possui uma raiz quadrada, uma vez que foi concebida a unidade imaginária $i = (0, 1)$ e aplicando a definição de produto de pares ordenados, temos a propriedade básica do algarismo imaginário, $i^2 = -1$ e, portanto, $\mathbb{C}$ é uma extensão do conjunto $\mathbb{R}$ na qual o elemento $-1 = (-1, 0)$ tem raiz quadrada $i \in \mathbb{C}$ e escrevemos $i = \sqrt{-1}$.

Como todo o número real a está associado com o par ordenado $a = (a, 0)$, podemos dizer que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é visto como um subconjunto dos números complexos $\mathbb{C}$. Portanto, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Prosseguindo nosso estudo, vamos introduzir em $\mathbb{C}$ outras duas operações, semelhantes à **subtração** e à **divisão** de números reais.

Dados z_1, z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$

A subtração é o inverso da adição

$$z_1 - z_2 = z_3 \implies z_1 = z_2 + z_3 \text{ ou } (x_2, y_2) + (x_3, y_3) = (x_1, y_1)$$

Assim,

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

Já a divisão é o inverso da multiplicação

Dados z_1, z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$

Pra dividir dois números complexos na forma de par ordenado, escrevemos a divisão na forma fracionária.

$$(z_1 : z_2) = \frac{z_1}{z_2}, \text{ com } z_2 \neq 0$$

Dividir dois números complexos significa obter um outro número complexo z_3 , tal que $z_3 = z_1 \cdot z_2$

$$(z_1 : z_2) = z_3 \text{ se } z_1 = z_2 \cdot z_3, (z_2 \neq 0) \text{ ou}$$

$$(x_2 \cdot x_3 - y_2 \cdot y_3, x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_2) = (x_1, y_1)$$

$$\text{Encontramos o valor de } z_1 = (x_2 \cdot x_3 - y_2 \cdot y_3, x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_2)$$

Portanto, $z_1 : z_2$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_2 \cdot x_3 - y_2 \cdot y_3, x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_2)}{(x_2, y_2)}$$

Logo, igualando os pontos correspondentes, temos:

$$x_1 = x_2 \cdot x_3 - y_2 \cdot y_3 \text{ e } y_1 = x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_2$$

Montando o sistema de equações, em relação a x_3, y_3 ,

$$S = \begin{cases} x_2 \cdot x_3 - y_2 \cdot y_3 = x_1 \\ x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_2 = y_1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos as coordenadas de x_3 e y_3 , dados por

$$x_3 = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)} \text{ e } y_3 = \frac{(x_2y_1 - x_1y_2)i}{(x_2^2 + y_2^2)}$$

Com esse ultimo resultado, escrevemos a divisão de z_1 por z_2 ,

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}i, z_2 \neq 0.$$

No decorrer do trabalho, iremos introduzir novos conceitos, como a existência do inverso multiplicativo e do conjugado de um número complexo, de modo a facilitar o resultado da divisão de dois números complexos por outros métodos mais simples.

Exemplo C.3. *Determine o valor da expressão:*

$$\frac{(-1, 3)(1, 2)}{(2, -1)} + (0, 2)$$

Solução:

Primeiro, multiplicamos os números complexos no numerador:

$$(-1, 3) \cdot (1, 2) = (-7, 1)$$

Agora, para dividir $(-7, 1)$ por $(2, -1)$ significa obter um número $z = (a, b)$ de coordenadas desconhecidas

$$\frac{(-7, 1)}{(2, -1)} = (a, b) \implies (2, -1) \cdot (a, b) = (-7, 1)$$

Para Determinar as coordenadas de z , montamos e resolvemos o sistema de equações gerado,

$$\begin{cases} 2a + b = -7 \\ -a + 2b = 1 \end{cases}$$

Portanto, de $a = -3$ e $b = 1$ obtemos as coordenadas de $z = (-3, 1)$.

Finalmente, somamos $(-3, 1) + (0, 2) = (-3, 1) = -3 + i$

Uma curiosidade sobre o conjunto dos números complexos é que não existe relação de ordem, ou seja, não existe número complexo maior que outro.

C.1 Propriedades da adição dos números complexos

Para quaisquer z_1, z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$, onde $z_1 = (x, y)$, $z_2 = (a, b)$ e $z_3 = (c, d)$, a operação de adição definida em $\mathbb{C}$ atende as seguintes propriedades:

- (i) Propriedade Associativa: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
- (ii) Propriedade Comutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- (iii) Propriedade do Elemento Neutro:

$0 = 0 + i0$ é elemento neutro da soma: $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$

(iv) Existência do Elemento Simétrico:

$-z = -a - bi$ é negativo de $z = a + bi$; ou seja, $z + (-z) = 0$

Demonstração:

Para quaisquer z_1, z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$, onde $z_1 = (x, y)$, $z_2 = (a, b)$ e $z_3 = (c, d)$, a operação de adição definida em $\mathbb{C}$ atende as seguintes propriedades:

(i) Propriedade associativa.

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (x, y) + [(a, b) + (c, d)] \\ &= (x, y) + (a + c, b + d) \\ &= (x + a + c, y + b + d). \\ &= ((x + a) + c, (y + b) + d) \\ &= (x + a, y + b) + (c, d) \\ &= (z_1 + z_2) + z_3. \end{aligned}$$

(ii) Propriedade comutativa.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x, y) + (a, b) \\ &= (x + a, y + b). \\ &= (a + x, b + y) \\ &= (a, b) + (x, y) \\ &= z_2 + z_1. \end{aligned}$$

Conforme descrito acima, utilizamos as propriedades dos números reais, estendendo-as aos números complexos.

(iii) Propriedade do elemento neutro.

$z_0 = (a, b) \in \mathbb{C}$ tal que

$$z_1 + z_0 = z_1 \implies (x, y) + (a, b) = (x, y) \implies (x + a, y + b) = (x, y)$$

Montando um sistema de equações:

$$\begin{cases} x + a = x \\ y + b = y \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Portanto, $z_0 = (a, b) = (0, 0) = 0$,

Portanto existe, $z_0 = (a, b) = (0, 0) = 0$, chamado elemento neutro para a adição, que somado a qualquer número complexo z dá como resultado o próprio z , isto é, $z + 0 = z$

(iv) Propriedade do elemento simétrico.

Dado o número complexo z , queremos encontrar $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que

$$z_1 + z_2 = 0. \implies (x, y) + (a, b) = (0, 0)$$

$$= (x + a, y + b) = (0, 0) \implies$$

Motando o sistema de equações:

$$\begin{cases} x + a = 0 \\ y + b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -x \\ b = -y \end{cases}$$

A propriedade do elemento simétrico para números complexos é fundamental. Para qualquer número complexo $z = (x, y)$, existe um número complexo $v = (-x, -y)$ tal que $z + v = 0$ ou seja $z + (-z) = (x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$.

Portanto, $-z$ é chamado de simétrico ou inverso aditivo de z .

C.2 Propriedades da multiplicação dos números complexos

Para quaisquer z_1, z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$, a operação de adição definida em $\mathbb{C}$ atende as seguintes propriedades:

(i) Propriedade Associativa: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

(ii) Propriedade Comutativa: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

(iii) Existência do Elemento Neutro:

$1 = 1 + 0i$ é elemento neutro do produto: $z \cdot 1 = z$

(iv) Existência do Elemento Inverso: $z \cdot z^{-1} = 1$

(v) Propriedade Distributiva: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Essas propriedades garantem que a multiplicação de números complexos é bem definida e segue regras semelhantes às dos números reais.

Demonstração:

Para quaisquer z_1, z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$, onde $z_1 = (x, y)$, $z_2 = (a, b)$ e $z_3 = (c, d)$, a operação de adição definida em $\mathbb{C}$ atende as seguintes propriedades: (i) Propriedade Associativa

A propriedade associativa da multiplicação é demonstrada como:

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

$$= [(x, y) \cdot (a, b)] \cdot (c, d) = (x, y) \cdot [(a, b) \cdot (c, d)]$$

$$= (x, y) \cdot (a, b) = (xa - yb, xb + ya)$$

$$= [(xa - yb, xb + ya) \cdot (c, d)]$$

$$[(xa - yb)c - (xb + ya)d, (xa - yb)d + (xb + ya)c]$$

Usando a distributividade dos números reais, simplifique:

$$[(x(ac - ybc - xbd - yad), xad - ybd + xbc + yac)]$$

Reorganize os termos:

$$[x(ac - bd) - y(bc + ad), x(ad + bc) + y(ac - bd)]$$

$$= [(x, y)(ac - bd, ad + bc) = (x, y)[(a, b)(c, d)]$$

$$= z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

Portanto, a propriedade associativa é verificada.

(ii). Propriedade Comutativa

$$z_1 \cdot z_2 = (x, y) \cdot (a, b)$$

$$= (xa - yb, xb + ya)$$

$$= (xa - yb, xb + ya)$$

$$= (ax - by, ay + bx)$$

$$= (a, b) \cdot (x, y) = z_2 \cdot z_1$$

Portanto, a propriedade comutativa é verificada.

(iii). Existência do Elemento Neutro

Para qualquer número complexo $z_1 = (x, y)$, existe um elemento neutro $z_2 = (1, 0)$ tal que:

$$z_1 \cdot z_2 = z_1 \implies (x, y) \cdot (a, b) = (x, y) \implies (xa - yb, xb + ya) = (x, y) \implies$$

$$\begin{cases} xa - yb = x \\ xb + ya = y \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases},$$

Portanto, $z_2 = (a, b) = (1, 0) = 1$, que é o elemento neutro para a multiplicação.

(iv) Existência do Elemento Inverso

Seja $z = (a, b)$ com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. e $z^{-1} = (x, y)$ tal que $z \cdot z^{-1} = 1$. $\implies$

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0) \implies (ax - by, ay + bx) = (1, 0)$$

$$\begin{cases} xa - yb = 1 \\ xb + ya = 0 \end{cases} \implies x = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

Portanto, o inverso multiplicativo é:

$$v^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$$

(v). Propriedade Distributiva

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (x, y) \cdot (a + c, b + d)$$

$$= x(a + c) - y(b + d), x(b + d) + y(a + c)$$

$$= (xa + xc - yb - yd, xb + xd + ya + yc)$$

Aplicando a associatividade dos números reais, temos:

$$(xa - yb) + (xc - yd), (xb + ya) + (xd + yc)$$

$$= (xa - yb, xb + ya) + (xc - yd, xd + yc)$$

$$= (x, y) \cdot (a, b) + (x, y) \cdot (c, d) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

Portanto, a propriedade distributiva é verificada. Essas propriedades são fundamentais para a álgebra dos números complexos.

Todas essas propriedades decorrem diretamente da definição de igualdade e das operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$. Com a definição dessas operações, podemos definir subtração e divisão de maneira usual:

$$\text{Subtração: } z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

$$\text{Divisão: } \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}, \text{ se } z_2 \neq 0 \text{ Inclusive a potenciação é definida de maneira usual:}$$

$$z^0 = (x, y)^0 = 1 = (1, 0)$$

$$z^n = z \cdot z \cdot \dots \cdot z \text{ (repetimos o fator } z \text{ n vezes)}$$

$$z^{-n} = z^{-1} \cdot z^{-1} \cdot \dots \cdot z^{-1} \text{ (repetimos o fator } z^{-1} \text{ n vezes), se } z \neq 0 \text{ e } n \geq 1$$

Essas propriedades mostram que muitas operações aritméticas válidas para números reais também são válidas para números complexos.

C.3 O conjugado de um número complexo

Conjugado de um número complexo, $z = a + bi$ é denotado por $\bar{z}$ e é dado por $\bar{z} = a - bi$. Assim, para encontrarmos o conjugado de um número complexo, basta trocarmos o sinal da parte imaginária.

Valem então as relações:

$$Re(z) = Re(\bar{z}) \text{ e } Im(z) = -Im(\bar{z}).$$

Isso significa que a parte real de um número complexo z é igual à parte real do seu conjugado $\bar{z}$, e a parte imaginária de z é o oposto da parte imaginária do seu conjugado.

Assim, por exemplo o número complexo $\bar{z} = 3 - 5i$, é conjugado do número complexo $z = 3 + 5i$;

C.4 Propriedades do conjugado

Uma das propriedades do conjugado é que o produto entre um número complexo e seu conjugado é sempre igual a um número real não negativo.

O produto de um número complexo pelo seu conjugado é igual à soma dos quadrados da parte real com a parte imaginária do número complexo.

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2 \cdot i^2 = x^2 - y^2 \cdot (-1) = x^2 + y^2$$

Exemplo C.4. Dados $z = 3 + 5i$; $\bar{z} = 3 - 5i$. Mostre que o produto de z pelo seu conjugado é de fato um número real.

$$z \cdot \bar{z} = (3 + 5i)(3 - 5i) = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34.$$

Conheça outras propriedades importantes:

(i) A parte real de z é a metade da soma de z com seu conjugado

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}.$$

Verificação:

$$\begin{aligned} Re(z) &= \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{(a + bi) + (a - bi)}{2} = \frac{(a + a) + (b - b)i}{2} \\ &= \frac{2a + 0i}{2} = \frac{2a}{2} = a = Re(z) \end{aligned}$$

(ii) A parte imaginária de z corresponde ao quociente da subtração entre z e seu conjugado e o número $2i$.

$$Im(z) = \frac{(z - \bar{z})}{2i}.$$

Verificação:

$$\begin{aligned} Im(z) &= \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{(a + bi) - (a - bi)}{2i} = \frac{a + bi - a + bi}{2i} \\ &= \frac{(a - a) + (b + b)i}{2i} = \frac{0a + 2bi}{2i} \\ &= \frac{2bi}{2i} = b = Im(z) \end{aligned}$$

(iii) O conjugado da soma de dois números complexos é a soma dos conjugados:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

Verificação:

Considere $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = \\ &= (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \end{aligned}$$

(iv) O conjugado do produto de dois números complexos é o produto dos conjugados:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

Verificação:

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i \\ &= (a - bi) \cdot (c - di) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.\end{aligned}$$

(v) Potência de um conjugado: Se n é um inteiro positivo,

$$\overline{z^n} = \overline{z}^n.$$

Verificação:

Aplicando a definição de potenciação, multiplicando o fator $\overline{z}$ n vezes,

$$\overline{z^n} = \overline{z \cdot z \cdot \dots \cdot z} = \overline{z \cdot z \cdot \dots \cdot z} = \overline{z}^n.$$

C.5 O plano de Argand-Gauss e a representação geométrica dos números complexos

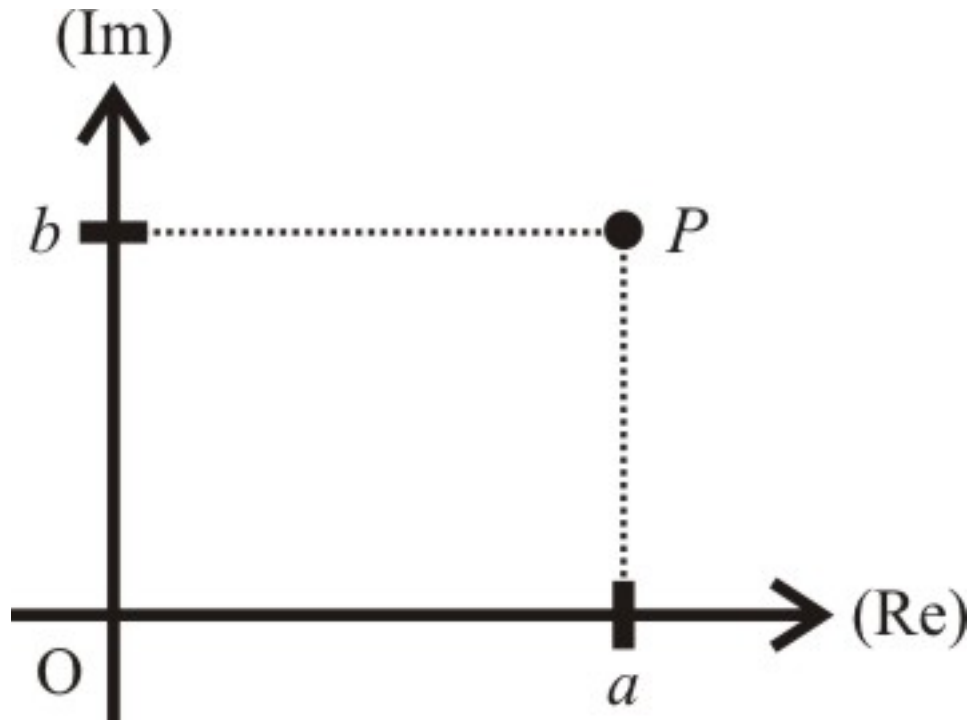
Conhecemos como plano de Argand-Gauss, ou plano complexo, um Plano Cartesiano, constituído de dois eixos orientados e perpendiculares entre si com um ponto em comum entre os dois eixos denominado Origem, $O(0, 0)$.

Para representar geometricamente um número complexo utilizamos o plano de Argand-Gauss, e fazemos semelhante a representar um ponto formado pelas coordenadas (a, b) em $\mathbb{R}^2$. No plano de Argand-Gauss o eixo horizontal (eixo das abscissas) é identificado como o eixo da parte real, denotado por $Re(z)$ de um número complexo, e o eixo vertical (eixo das ordenadas) é identificado como eixo imaginário, $Im(z)$. Logo, o número complexo $z = a + bi$ é representado pelo ponto $P(a, b)$.

Vimos que um número complexo z pode ser escrito como um par ordenado $z = (a, b)$ e na forma algébrica $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Assim, cada par ordenado de números reais (a, b) pode ser representado no plano cartesiano por um único ponto em que, P de coordenadas a e b , ou seja, $P(a, b)$, podemos associar um único número complexo $z = a + bi$, e vice-versa.

A imagem do complexo $z = a + bi$ é o ponto (a, b) do plano cartesiano. Podemos, também, chamar o segmento orientado que liga a origem do plano à imagem de z de vetor representativo desse número complexo; vetor esse, $\overrightarrow{OP}$ com componentes a e b . Mais adiante, daremos ênfase a como calcular o comprimento desse vetor para determinar o módulo de um número complexo.

Figura 8 – Plano de Argan-Gauss



Fonte: www.obaricentrodamente.com/2010/05/numeros-complexos.html

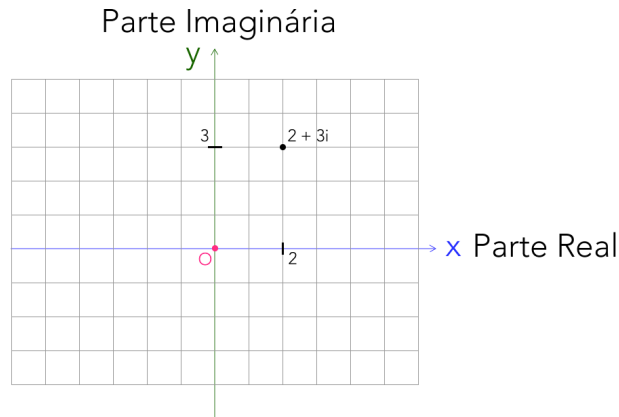
O ponto $P(a, b)$ representado no Plano de Argand, em que a é a parte real do complexo $z = a + bi$ e representa-se no eixo Ox (eixo real) e b é o coeficiente da parte imaginária e representa-se no eixo Oy (eixo dos imaginários puros). Denominada imagem de z e sua representação no plano é chamada **afixo de P** .

Os números no eixo de Ox são da forma $(a, 0) = a + 0i$, ou seja, são números reais puros. Por isso, esse eixo é chamado de eixo real e será denotado por $Re(z)$; enquanto os números no eixo de Oy são da forma $0 + bi = bi$, são números imaginários puros. Por isso, esse eixo é chamado de eixo imaginário. Já, um número complexo $z = a + bi$ é plotado como o par ordenado (a, b) no plano complexo. O plano onde são representados os números complexos é chamado de plano complexo ou plano de Argand. Vamos conhecer um pouco da história de Argand e sua contribuição sobre os números complexos.

Nesse plano, o eixo das abscissas é o **eixo real**, indicado por $Re(z)$, o eixo das ordenadas, **eixo imaginário** indicado por $Im(z)$.

Exemplo C.5. *Vamos representar o número complexo $z = 2 + 3i$ no plano de Argand-Gauss*

Figura 9 – Plano de Argand Gauss



Fonte: www.profcardy.com

Jean-Robert Argand foi um matemático suíço amador mais conhecido como um dos primeiros a fornecer uma descrição geométrica dos números complexos. Argand publicou em 1806 uma interpretação geométrica dos números complexos, o Diagrama de Argand. Esta descrição geométrica dos números complexos também é associada ao nome de Gauss, embora anteriormente a Gauss, Caspar Wessel também tenha descrito o diagrama.

Figura 10 – Plano de Argand Gauss



Fonte: www.biografias.es/famosos/carlo-fontana.html

C.6 Operações básicas com números complexos

Adição de dois números

Para realizarmos a adição de dois números complexos, z_1 e z_2 , faremos a soma das partes reais e a soma das partes imaginárias. Ou seja, soma-se parte real com parte real e parte imaginária com parte imaginária, respectivamente.

Seja:

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di$$

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

Seja:

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di$$

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

Exemplo C.6. Realização da soma de z_1 e z_2 .

$$\text{Dados } z_1 = 2 + 3i \text{ e } z_2 = 1 + 2i$$

$$z_1 + z_2 = (2 + 1) + (3 + 2)i$$

$$z_1 + z_2 = 3 + 5i$$

Exemplo C.7. Realização da soma de z_1 e z_2 .

$$\text{Dados } z_1 = 5 - 2i \text{ e } z_2 = -3 + 2i$$

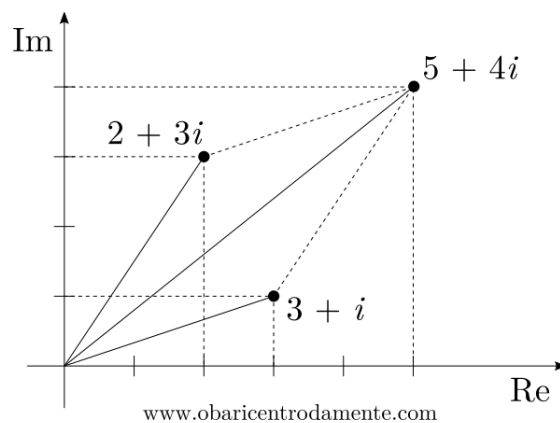
$$z_1 + z_2 = (5 + (-3)) + (-2 + 2)i$$

$$z_1 + z_2 = (5 - 3) + 0i$$

$$z_1 + z_2 = 2 + 0i = 2$$

Quando representada no plano de Argand-Gauss, a soma de dois números complexos corresponde à soma de dois vetores pela regra do paralelogramo.

Figura 11 – soma de dois números no plano complexo



Subtração de dois números

A subtração segue o mesmo princípio da adição. Subtraem-se as partes reais e as partes imaginárias separadamente, porém é necessário compreender que z_2 é o oposto de um número complexo, o que torna necessário a realização da regra de sinal.

Exemplo C.8. Realização da subtração de z_1 e z_2 .

$$z_1 = 2 + 3i$$

$$z_2 = 1 + 2i$$

$$z_1 - z_2 = (2 - 1) + (3 - 2)i$$

$$z_1 - z_2 = 1 + 1i = 1 + i$$

Exemplo C.9. Realização da subtração de z_1 e z_2 .

$$z_1 = 5 - 2i$$

$$z_2 = -3 + 2i$$

$$z_1 - z_2 = [5 - (-3)] + (-2 - 2)i$$

$$z_1 - z_2 = (5 + 3) + (-4)i$$

$$z_1 - z_2 = 8 + (-4)i$$

$$z_1 - z_2 = 8 - 4i$$

Multiplicação de dois números

Vamos utilizar a propriedade distributiva para efetuar a multiplicação de dois números complexos. Ou seja. Em outras palavras, cada termo do primeiro número é multiplicado pelos termos do segundo e, quando necessário, a propriedade $i^2 = -1$ é aplicada:

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di, \text{ então}$$

o produto:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di),$$

aplicando a propriedade distributiva,

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + cbi + bdi^2,$$

mas, como vimos, $i^2 = -1$

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + cbi - bd$$

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + cb)i$$

Utilizando-nos dessa fórmula, é possível encontrarmos o produto de quaisquer dois números complexos, mas, de modo geral, ela não precisa ser decorada, já que, para o

cálculo em questão, basta aplicarmos a propriedade distributiva.

Exemplo C.10. Cálculo do produto de $(2 + 3i) \cdot (1 - 4i)$

Aplicando a multiplicação distributiva, obtemos:

$$(2 + 3i) \cdot (1 - 4i) = 2 - 8i + 3i - 12i^2$$

lembrando que $i^2 = -1$:

$$(2 + 3i) \cdot (1 - 4i) = 2 - 8i + 3i - 12 \cdot (-1)$$

$$(2 + 3i) \cdot (1 - 4i) = 2 - 8i + 3i + 12$$

$$(2 + 3i) \cdot (1 - 4i) = (2 + 12) + (-8 + 3)i$$

$$(2 + 3i) \cdot (1 - 4i) = 14 - 5i$$

Divisão de dois números complexos

Usamos o conjugado do divisor para dividir dois números complexos. O resultado da multiplicação de um número complexo $z = x + yi$ é $\bar{z} = x - yi$.

Ao multiplicar o numerador e o denominador pelo seu conjugado, asseguramos que o denominador se transforme em um número real, já que sempre que dividimos um número complexo pelo seu conjugado, o denominador se torna um número real.

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos.

A divisão $\frac{z_1}{z_2}$, é feita da seguinte forma:

Para dividir dois números complexos, é possível obter o quociente escrevendo-o como uma fração; em seguida, de maneira semelhante à usada para racionalizar o denominador de uma fração, deve-se multiplicar ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di}$$

Aplicamos a distributiva no numerador e no denominador:

$$\frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Portanto, a divisão de z_1 por z_2 resulta em:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Exemplo C.11. Vamos a um exemplo prático:

Se $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 1 - 2i$, a divisão será:

$$\begin{aligned} \frac{3 + 4i}{1 - 2i} &= \frac{3 + 4i}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} \\ &= \frac{(3 + 4i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3 + 6i + 4i + 8i^2}{1 + 4} \\
&= \frac{3 + 10i - 8}{5} \\
&= \frac{-5 + 10i}{5} \\
&= -1 + 2i
\end{aligned}$$

Exemplo C.12. *Cálculo da divisão de $(6 - 4i) : (4 + 2i)$*

Resolução:

Vamos escrever a divisão dos números na forma de fração, para aplicar a regra da divisão:

Multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador.

$$\begin{aligned}
\frac{6 - 4i}{4 + 2i} &= \frac{(6 - 4i) \cdot (4 - 2i)}{(4 + 2i) \cdot (4 - 2i)} \\
&= \frac{(24 - 8) + (-12 - 16)i}{16 - 4i^2} \\
&= \frac{16 + (-12 - 16)i}{16 - 4 \cdot (-1)} \\
&= \frac{16 - 28i}{16 + 4} \\
&= \frac{16 - 28i}{20} \\
&= \frac{16}{20} - \frac{28i}{20} \\
&= \frac{4}{5} - \frac{7i}{5}
\end{aligned}$$

Lembre-se que: $i^2 = -1$

C.7 Potências da unidade imaginária

A partir da definição de $i^2 = -1$, podemos calcular a potência da unidade imaginária, com $n \in \mathbb{N}$, tomando $i^n i^{2k}$, se n for par, ou seja, se n for forma $n=2k$ e $i^n = i^{2k+1}$ se n for ímpar, ou seja, $n=2k+1$. Assim,

$$i^n = \begin{cases} i^{2k}; n = 2k \\ i^{2k+1}; n = 2k + 1 \end{cases}$$

Vamos calcular i^0 e i^1 , pela definição descrita acima:

Para calcular i^0 $n = 0 \implies 2k = 0 \implies k = 0$.

Logo,

$$i^{2 \cdot 0} = (i^2)^0 = (-1)^0 = 1.$$

Para calcular i^1 , vamos tomar $n = 1 \implies 2k + 1 = 1 \implies k = 0$. Logo,

$$i^{2 \cdot 0 + 1} = (i^2)^0 \cdot i = (-1)^0 \cdot i = 1 \cdot i = i.$$

Observe que $i^0 = 1$ e $i^1 = i$ está em consonância com as propriedades dos números reais, uma vez que, todo número real diferente de zero, elevado a zero é igual a 1 e todo número elevado a um é igual ao próprio número.

Exemplo C.13. Calcular i^{214}

Solução: Como $n = 214 \implies 2k = 214 \implies k = 107$, logo

$$i^{214} = i^{2 \cdot 107} = (i^2)^{107} = (-1)^{107} = -1$$

Para n sendo ímpar: Calcular i^{403}

Solução: Como $n = 403 \implies 2k + 1 = 403 \implies k = 201$, logo

$$i^{403} = i^{2 \cdot 201 + 1} = (i^2)^{201} \cdot i = (-1)^{201} \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

C.8 Módulo de um número complexo

Definiremos o módulo de um número complexo $z = a + bi \in \mathbb{C}$ denotado por $|z|$ ao número real não negativo, dado pela raiz quadrada da soma dos quadrados das partes real e imaginária:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Com a definição de módulo de um número complexo z , temos algumas propriedades importantes envolvendo o conjugado de um número complexo, dentre elas:

O produto de um número complexo z pelo seu conjugado $\bar{z}$ é igual ao quadrado do seu módulo, ou seja,

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

O inverso de um número complexo z pode ser expresso como

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

C.9 Interpretação geométrica do módulo de um número complexo

Para representar matematicamente o módulo de um número complexo, identificamos o afixo do número $z = (a, b)$ no plano. Traçamos um segmento que conecta o afixo à origem do plano. Notamos que há um triângulo retângulo cuja medida da hipotenusa corresponde à distância da origem O ao afixo z , representada aqui por $|z|$ ou ρ , como é comumente visto em livros de ensino médio.

O módulo de z é determinado pelo Teorema de Pitágoras, que estabelece: O cateto horizontal mede a parte real do número complexo " a ", enquanto o cateto vertical representa a parte imaginária " b " do mesmo número complexo " z ". Assim, ao utilizar o teorema de Pitágoras, obtemos. $a^2 + b^2$ significa que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Assim, por exemplo para representar o módulo do número complexo $z = 3 + 4i$, localizamos o ponto $(3, 4)$ e traçamos um segmento de reta unido ao ponto $(3, 4)$ à origem $O(0, 0)$ do plano complexo e desenhamos um triângulo retângulo com lados de catetos iguais a 3 e 4. Para determinar a medida da hipotenusa do triângulo retângulo, calculamos algebricamente a raiz quadrada da soma dos quadrados das medidas dos catetos 3 e 4 respectivamente.

$$|z| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Desse modo, se $z = a + bi$ é um número complexo, então a medida da hipotenusa é, por definição, o módulo do número complexo z , denotado por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observe na imagem que a fórmula do $|z|$ ou ρ é obtida através da aplicação do Teorema de Pitágoras.

C.10 Propriedades do módulo

Já que definimos módulo e conjugado de números complexos, é possível verificar algumas propriedades que facilitam os cálculos envolvendo esses números.

$$(i) \operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \text{ e } \operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|.$$

$$(ii) |z|^2 = z \cdot \bar{z}, |z| = |\bar{z}| \text{ e } |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$(iii) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

$$(iv) |z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

A desigualdade (iii) é conhecida como desigualdade triangular.

Demonstração:

(i) Se $z = x + yi$, então $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |Re(z)| \geq Re(z)$.

Analogamente, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |Im(z)| \geq Im(z)$.

(ii) Se $z = x + yi$, então $|z|^2 = x^2 + y^2$. Por outro lado, como $\bar{z} = x - yi$, temos

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2,$$

concluimos que

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

Observe, também, que $|z| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |z|$

Agora, se $z_1 = x + yi$ e $z_2 = a + bi$, temos:

$$z_1 \cdot z_2 = (xa - yb) + (xb + ya)i$$

Então,

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(xa - yb)^2 + (xb + ya)^2}$$

Expandindo os termos dentro da raiz quadrada, obtemos:

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{x^2a^2 - 2xayb + y^2b^2 + x^2b^2 + 2xbya + y^2a^2}$$

Agrupando os termos semelhantes, temos:

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{x^2(a^2 + b^2) + y^2(a^2 + b^2)}$$

Fatorando $a^2 + b^2$, obtemos:

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(x^2 + y^2)(a^2 + b^2)}$$

Finalmente, podemos separar as raízes quadradas:

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

Como $|z_1| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $|z_2| = \sqrt{a^2 + b^2}$,

concluimos que:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

(iii) Note que,

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)}$$

Expandindo, obtemos:

$$(z_1 + z_2)^2 = (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2$$

$$= |z_1|^2 + (z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1) + |z_2|^2$$

$$= |z_1|^2 + (z_1 \cdot \bar{z}_2 + \overline{z_2 \cdot \bar{z}_1}) + |z_2|^2$$

$$= |z_1|^2 + (z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_2 \cdot z_1) + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2(z_1 \cdot \bar{z}_2) + |z_2|^2$$

$$= |z_1|^2 + 2|z_1 \cdot \bar{z}_2| + |z_2|^2$$

$$\begin{aligned}
&=|z_1|^2 + 2|z_1 \cdot z_2| + |z_2|^2 \\
&=(|z_1| + |z_2|)^2
\end{aligned}$$

Extraindo as raízes quadradas de ambos os lados da desigualdade acima, obtemos a desigualdade desejada.

$$\sqrt{|z_1 + z_2|^2} \leq \sqrt{(|z_1| + |z_2|)^2} \text{ obtemos:}$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(iv) Usando a desigualdade triangular, temos:

$$|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2| = |z_1 + z_2| + |z_2|$$

Portanto,

$$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

Trocando os papéis de z_1 e z_2 na desigualdade acima, obtemos:

$$|z_1 + z_2| \geq |z_2| - |z_1|$$

Como

$$||z_1| - |z_2|| = |z_1| - |z_2| \text{ se } (|z_1| \geq |z_2|) \text{ e } ||z_1| - |z_2|| = |z_2| - |z_1| \text{ se } (|z_2| \geq |z_1|),$$

concluimos que, em qualquer caso:

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

Esses passos mostram que a desigualdade triangular é válida para qualquer par de números complexos z_1 e z_2 .

Para um número complexo $z \neq 0$, podemos reescrever a primeira igualdade do item (ii) da seguinte forma:

$$|z|^2 = z \cdot z^{-1}$$

ou seja,

$$z^{-1} = \frac{z}{|z|^2}.$$

Essa identidade mostra que, representando graficamente z , z^{-1} aponta na mesma direção de z e tem valor absoluto $\frac{1}{|z|}$. Isso significa que z^{-1} é o inverso multiplicativo de z no plano complexo, mantendo a direção, mas ajustando o comprimento.

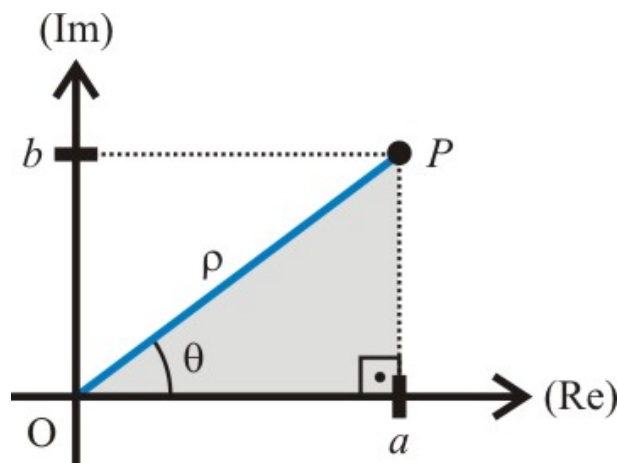
C.11 Argumento de um número complexo

Utilizaremos conceitos geométricos e trigonométricos para apresentar o argumento de um número complexo em $\mathbb{C}$ de maneira intuitiva. Estamos cientes de que qualquer ponto no plano complexo representa a representação geométrica de um valor complexo.

Um número $z \in \mathbb{C}^*$, $z = a + bi$, tem afixo $P(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que projetado sobre o círculo $S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = |z|^2\}$ com centro na origem do plano complexo, de raio igual ao valor do módulo de z determina um ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$ medido em radianos, formado entre o segmento $\overrightarrow{OP}$ (vetor de z) e o eixo real no sentido anti-horário, é denominado argumento do número complexo e indicado por $\arg z = \theta$.

A medida do ângulo pode ser determinada utilizando conceitos básicos de trigonometria, tomando conhecimento de que por construção o lado oposto é sempre o componente imaginário e o lado adjacente é sempre o componente real, visualizando a estrutura geométrica do número complexo no plano complexo..

Figura 12 – Triângulo retângulo



Fonte: www.obaricentrodamente.com/2010/05/numeros-complexos.

Pelas definições da trigonometria circular temos as três relações fundamentais:

$$\sin(\theta) = \frac{b}{\rho} = \frac{b}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}$$

Dividindo o número $z = (a, b)$ pelo seu módulo $|z|$ acima podemos relacionar às razões trigonométricas.

temos $\frac{z}{|z|} = \left(\frac{a}{|z|}, \frac{b}{|z|}\right) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = (\cos \theta, \sin \theta) = (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$ logo

$$z = |z| \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta).$$

Com base em nossa experiência, percebemos que é mais eficaz empregar o cosseno ou o seno do ângulo para definir adequadamente o argumento.

Qualquer valor de α na forma $\alpha + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$ é um argumento de z , devido à periodicidade das funções seno e cosseno. Assim, concluímos que z tem infinitos

argumentos, uma vez que $\cos \theta = \cos \alpha$ e $\sin \theta = \sin \alpha$ implicam $\theta = \alpha + 2k\pi$. A totalidade dos argumentos de z é:

$$\arg z = \{\alpha + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

O argumento principal de z no intervalo $] - \pi, \pi]$ é identificado como $\text{Arg } z$.

Com as definições e determinação definidas para módulo e argumento, é possível, por meio de relações trigonométricas básicas, estabelecer uma nova representação de um número complexo, denominada forma polar (ou trigonométrica).

D A FORMA TRIGONOMÉTRICA DE NÚMEROS COMPLEXOS

A representação de um número complexo na forma trigonométrica ou polar é feita através do ângulo e do raio do ponto (módulo de z). Ela indica a posição de um ponto em um plano complexo através do ângulo θ e do raio $|z|$. O raio $|z|$ representa a distância do ponto até a origem, enquanto o ângulo θ representa o ângulo que o ponto forma com o eixo real positivo.

Definição: Seja $z \in \mathbb{C}^*$, o par $(|z|, \arg(z))$ é uma representação (ou forma) polar de z . A forma polar de um número complexo z é definida por:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Em que $|z|$ representa o módulo e θ representa o argumento de z . Isso pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$z = |z| \cdot \cos \theta + i \cdot |z| \cdot \sin \theta.$$

Considerando que $a = \operatorname{Re}(z) = |z| \cos \theta$ e $b = \operatorname{Im}(z) = |z| \sin \theta$. Assim, podemos expressar a parte real a e a parte imaginária b de z em termos do módulo e do argumento de z .

$$z = |z| \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$$

onde $|z|$ representa o módulo de z (a distância de z até a origem) e θ representa o argumento de z (o ângulo formado com o eixo real).

Utilizando a expressão algébrica $z = a + bi$ de um número complexo e relacionando os termos a e b com as relações de cosseno e seno do argumento, obtemos: $a = |z| \cdot \cos(\theta)$ e $b = |z| \cdot (\sin(\theta))$.

Substituindo a forma algébrica, chegamos à forma trigonométrica:

$$z = |z| \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$$

Por exemplo, se tivermos $(z = 1 + i)$, temos $a = 1; b = 1$

o módulo é $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

argumento é $\tan \theta = \frac{b}{a} = 1$

$\theta = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Portanto, a forma trigonométrica de z é:

$$z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

D.1 Operações com a forma trigonométrica

Em certas situações, a representação algébrica de um número complexo pode não ser tão útil e a representação trigonométrica de um número complexo surge como uma excelente alternativa. Assim, primeiramente, localizamos no plano complexo o prefixo do número complexo para determinar a qual quadrante ele pertence. Em seguida, usamos os valores reais de a e b para calcular o módulo, o seno e o cosseno do ângulo, substituindo esses valores na forma trigonométrica.

Agora que compreendemos a transformação de números complexos da forma algébrica para a trigonométrica, vamos aprender a executar operações em números complexos na forma trigonométrica. Essas operações com números complexos na forma trigonométrica simplificaram consideravelmente o manuseio de produtos, quocientes, potências e raízes em comparação com a aritmética tradicional.

D.2 Produtos de números complexos na forma trigonométrica

Considere dois números complexos quaisquer, escritos na forma trigonométrica:

$$z_1 = |z_1| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{e} \quad z_2 = |z_2| \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

O produto entre z_1 e z_2 pode ser feito da seguinte forma:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot [\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha)]$$

Para números complexos, $z_1, z_2, \dots, z_n$ na forma polar: $z_k = \rho_k(\cos(\theta_k) + i \sin(\theta_k))$

Isso sugere, por indução, que ao multiplicar números complexos na forma polar, os módulos ρ são multiplicados e os ângulos θ são adicionados. A soma de números complexos é expressa por:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)]$$

Note que o produto requer a soma dos módulos e a adição dos ângulos. Portanto, é possível notar que "a multiplicação de números complexos na forma trigonométrica corresponde à multiplicação de seus módulos e à adição de seus argumentos". Isso ainda se aplica à multiplicação de números complexos com mais de dois dígitos.

Tal fato é garantido pela adição de arcos trigonométricos: $\sin(\theta + \alpha) = \sin \theta \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \theta$

$$\cos(\theta + \alpha) = \cos \theta \cdot \cos \alpha - \sin \theta \cdot \sin \alpha$$

Exemplo D.1. *Dados os números complexos*

$$z_1 = 6 \cdot \cos(30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ) \text{ e } z_2 = 3 \cdot (\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ), \text{ calcule o valor de } z_1 \cdot z_2.$$

Solução: Ao aplicar a fórmula da multiplicação de números complexos na forma trigonométrica, obtemos:

$$z_1 \cdot z_2 = 6 \cdot 3 \cdot [\cos(30^\circ + 15^\circ) + i \cdot \sin(30^\circ + 15^\circ)]$$

$$z_1 \cdot z_2 = 18 \cdot (\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 18 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 9\sqrt{2} + 9\sqrt{2}i$$

Exemplo D.2. *Dados $z_1 = 5 \cdot (\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3})$ e $z_2 = 4 \cdot (\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6})$. Determine o número complexo gerado pelo produto $z_1 \cdot z_2$.*

$$z_1 \cdot z_2 = 5 \cdot 4 \cdot [\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})]$$

$$z_1 \cdot z_2 = 20 \cdot (\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2})$$

$$z_1 \cdot z_2 = 20 \cdot (0 + i) = 20i$$

D.3 Quocientes de números complexos na forma trigonométrica

A primeira etapa para executar a divisão na forma trigonométrica é determinar a forma trigonométrica de z^{-1} .

Já aprendemos que $z = a + bi$ ($z \neq 0$), seu inverso é $z^{-1} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Também é conhecido que z^{-1} é igual à $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Note que o módulo do conjugado corresponde ao módulo de z , pois ambos são iguais. Portanto, como $|\bar{z}| = |z|$.

$$|z^{-1}| = \frac{|\bar{z}|}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}$$

Para determinar a representação polar de z^{-1} , começamos por assumir $z = |z|[\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$, onde z é um número complexo não nulo. Da trigonometria, sabemos que

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \text{ e } \sin(-\theta) = -\sin(\theta).$$

$$\text{Portanto, podemos escrever } z^{-1} = \frac{1}{|z|}[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)].$$

Com base na representação trigonométrica de z^{-1} e na regra do produto de dois números complexos, conforme discutido anteriormente, chegamos à seguinte conclusão:

$$z_1 \cdot z_2^{-1} = |z|[\cos(\theta) + i \sin(\theta)] \cdot |z_2^{-1}|(\cos(-\theta_2) + i \sin(-\theta_2))$$

Simplificando, obtemos:

$$z_1 \cdot z_2^{-1} = |z_1| \cdot |z_2^{-1}| \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Isso nos dá a seguinte fórmula de divisão:

$$z_1 \cdot z_2^{-1} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

Exemplo D.3. Dados $z = 22 \cdot (\cos 120^\circ + i \cdot \sin 120^\circ)$ e $w = 11 \cdot (\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ)$,

Determine o valor de $\frac{z}{w}$.

Solução: Pela fórmula da divisão de complexos na forma trigonométrica, temos que:

$$\frac{z}{w} = \frac{22}{11} \cdot [\cos(120^\circ - 90^\circ) + i \cdot \sin(120^\circ - 90^\circ)] = 2 \cdot (\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ)$$

$$\frac{z}{w} = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

D.4 Potenciação de números complexos na forma trigonométrica

Dado um número complexo escrito na forma algébrica $z = x + iy$, podemos calcular a n -ésima potência de z pela definição, ou seja,

$$z^n = (x + iy)^n = (x + iy) \cdot (x + iy) \cdot (x + iy) \cdot \dots \cdot (x + iy)$$

(aplicamos a definição de potenciação, ou seja, repetimos n vezes $(x + iy)$),

Mas, quando n for grande, essas operações podem ser muito trabalhosas! Este problema pode ser contornado escrevendo o número complexo z na forma trigonométrica. Vejamos como fazer isso. Observe que se $z = |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$

Assim, utilizando a regra de multiplicação de dois números complexos na forma trigonométrica, sabemos que basta multiplicar os módulos dos números complexos dados e somar os argumentos, podemos concluir que $z^n = (|z|)^n \cdot [\cos(n \cdot \theta) + i \cdot \sin(n \cdot \theta)]$.

Dado um número complexo, não – nulo na forma:

$$z = |z| \cdot [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$$

, não nulo e um número inteiro n .

Vamos demonstrar a dedução da regra da potenciação de números complexos com dois casos particulares e, em seguida, generalizamos para o caso geral. Aplicando a definição de potenciação, vamos calcular z^n , com z na forma trigonométrica, onde $n = 1, 2, 3, \dots$

Para $n = 1$, teremos:

$$z^1 = z = |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Para $n = 2$, teremos:

$$z^2 = z \cdot z = |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) \cdot |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z^2 = |z| \cdot |z| \cdot (\cos \theta \cdot \cos \theta + i \cos \theta \cdot \sin \theta + i \cos \theta \cdot \sin \theta + i \sin \theta \cdot i \sin \theta)$$

$$z^2 = |z|^2 \cdot (\cos^2 \theta + i \cdot 2 \sin \theta \cdot \cos \theta + i^2 \sin^2 \theta),$$

Como, $i^2 = -1$,

$$z^2 = |z|^2 \cdot (\cos^2 \theta + i \cdot 2 \sin \theta \cdot \cos \theta - \sin^2 \theta)$$

$$z^2 = |z|^2 \cdot [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + i(2 \sin \theta \cdot \cos \theta)]$$

Lembrando das fórmulas de arcos duplos em trigonometria:

$$\begin{cases} \sin 2\theta = 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \\ \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{cases}$$

Logo temos:

$$z^2 = |z|^2 \cdot (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

Para $n = 3$, teremos:

$$z^3 = z \cdot z = |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) \cdot |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) \cdot |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z^3 = |z| \cdot |z| \cdot |z| \cdot (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z^3 = |z|^3 \cdot (\cos 2\theta \cdot \cos \theta + \cos 2\theta \cdot i \sin \theta + i \sin 2\theta \cdot \cos \theta + i \sin 2\theta \cdot i \sin \theta)$$

Aqui, faremos uma mudança de variáveis, onde:

$$2\theta = a \quad \text{e} \quad \theta = b$$

$$z^3 = |z|^3 \cdot (\cos a \cdot \cos b + \cos a \cdot i \sin b + i \sin a \cdot \cos b + i \sin a \cdot i \sin b)$$

$$z^3 = |z|^3 \cdot (\cos a \cdot \cos b + i \cos a \cdot \sin b + i \sin a \cdot \cos b + i^2 \sin a \cdot \sin b)$$

Pelo fato de $i^2 = -1$,

$$z^3 = |z|^3 \cdot (\cos a \cdot \cos b + i \cdot (\cos a \cdot \sin b + \sin a \cdot \cos b) - \sin a \cdot \sin b)$$

Vejam que:

$$\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \cos(a + b) \quad \text{e} \quad \cos a \cdot \sin b + \sin a \cdot \cos b = \sin(a + b)$$

No entanto, as variáveis:

Substituindo na equação acima, teremos:

$$z^3 = |z|^3 \cdot (\cos(a + b) + i \sin(a + b))$$

Vejam que: $2\theta = a$ e $\theta = b$

Temos então:

$$z^3 = |z|^3 \cdot (\cos(2\theta + \theta) + i \sin(2\theta + \theta))$$

Logo:

$$z^3 = |z|^3 \cdot (\cos 3\theta + i \cdot \sin 3\theta)$$

De modo análogo, podemos calcular a potência de um número complexo na forma polar para $n = 4, 5, 6, \dots$. Assim, podemos generalizar uma fórmula, chegando à 1ª Fórmula de De Moivre:

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \theta) + i \cdot \sin(n \cdot \theta)]$$

Essa relação é chamada de **1ª lei de Moivre** em homenagem ao matemático francês Abraham De Moivre. Ela também é válida para expoentes inteiros negativos.

Exemplo D.4. Calcule $(1 + \sqrt{3}i)^{20}$

Vamos analisar a solução passo a passo:

Identificação do módulo e argumento:

O número complexo $(1 + \sqrt{3}i)$ tem módulo $|z| = 2$ e argumento $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Expressão em forma polar:

$$1 + \sqrt{3}i = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right].$$

Elevação à potência 20:

$$(1 + \sqrt{3}i)^{20} = \left(2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] \right)^{20}.$$

Usando a 1ª fórmula de De Moivre:

$$\left(2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] \right)^{20} = 2^{20} \left[\cos\left(\frac{20\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{20\pi}{3}\right) \right].$$

Simplificação do argumento:

$$\frac{20\pi}{3} = 6\pi + \frac{2\pi}{3}.$$

Como $\cos$ e $\sin$ são funções periódicas com período 2π , podemos simplificar:

$$\cos\left(6\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \text{ e } \sin\left(6\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

Resultado final:

$$((1 + \sqrt{3}i)^{20} = 2^{20} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right]).$$

Sabemos que $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ e $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então:

$$(1 + \sqrt{3}i)^{20} = 2^{20} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2^{19} (-1 + i\sqrt{3}).$$

D.5 Radiciação de números complexos na forma trigonométrica

Dado um número complexo ($z = x + yi$), queremos encontrar suas raízes enésimas. A segunda fórmula de Moivre nos diz que um número complexo (u) é uma raiz enésima de

z se:

$$z_k^n = z$$

A **2ª fórmula de Moivre** é muito importante em problemas para efetuarmos a radiciação de números complexos em sua forma trigonométrica.

Dado um número complexo, z em sua forma trigonométrica ($z = |z| \cdot [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$) chamamos o número z_k como raiz n -ésima de z , se e somente se:

$$(1) z_k^n = z \text{ para } n \geq 2$$

Então, se:

$$z = |z| \cdot [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$$

Sua raiz n -ésima será:

$$\sqrt[n]{|z| \cdot [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]} = z_k$$

Seja o número complexo $z = x + yi$ em sua forma polar e seja uma de suas raízes n -ésimas:

$$(2) z_k^n = |z_k|^n \cdot (\cos(n \cdot \theta_k) + i \cdot \sin(n \cdot \theta_k))$$

Pela definição, (1), podemos aplicar a 1ª Fórmula de De Moivre :

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos(n \cdot \theta) + i \cdot \sin(n \cdot \theta))$$

$$z_k^n = |z| \cdot [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$$

Desta última igualdade, temos que:

$$(3) |z_k|^n = |z| \text{ se } |z_k| = \sqrt[n]{|z|}$$

Onde: $\sqrt[n]{|z|}$ é a raiz n -ésima do número real e positivo $|z|$.

$$\begin{cases} \cos(n \cdot \theta_k) = \cos(\theta) \\ \sin(n \cdot \theta_k) = \sin(\theta) \end{cases}$$

Onde:

$$(4) n\theta_k = \theta + 2k\pi \text{ logo,}$$

$$\theta_k = \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

ou

$$\theta_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

Como θ_k é o argumento de z_k , este deve pertencer ao intervalo

$$[0; 2\pi[$$

Se substituirmos (3) e (4) em (2), obteremos:

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right]$$

onde:

$|z|$ é o módulo de z .

θ é o argumento de z .

k varia de 0 a $(n-1)$.

Passo a passo para utilizar a 2ª fórmula de De Moivre:

Inicialmente calculamos o módulo em seguida determinamos o argumento do número complexo já previamente identificado o quadrante em que o afixo pertence plano complexo

Após fazer isso substitua os valores na fórmula e varie o valor de k que satisfaçam uma volta no círculo já que as demais são repetições. Os valores de k varia de 0 a $(n-1)$.

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right]$$

Por exemplo, se quisermos calcular a raiz quadrada de um número complexo z , usamos a segunda fórmula de De Moivre com $(n = 2)$:

$$z_k = \sqrt{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right) \right]$$

Exemplo D.5. Vamos fazer uma aplicação da 2ª fórmula de De Moivre, para determinar as raízes de um número complexo qualquer:

Dado um número complexo $z = -2 - 2\sqrt{3}$. Vamos determinar as raízes quartas deste número e representá-las no Plano Argand – Gauss.

Encontramos aqui um seno e cosseno negativos. Se analisarmos o círculo trigonométrico abaixo, podemos observar que este ângulo está localizado no 3º quadrante.

Módulo:

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$$

Argumento :

$$\theta = \arctan\left(\frac{-2\sqrt{3}}{-2}\right) = \arctan \sqrt{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

Se analisarmos o círculo trigonométrico abaixo, podemos observar que este ângulo está localizado no 3º quadrante.

$$\theta = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$$

vamos escrever z na forma trigonométrica:

$$z = 4 \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

Aplicando a fórmula a 2ª fórmula de Moivre obtemos as raízes (n) -ésimas de um número complexo z são : Para as raízes quartas ($n = 4$), temos:

$$z_k = \sqrt[4]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{4\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4}\right) \right]$$

Simplificando temos:

$$z_k = \sqrt{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right) \right]$$

logo,

$$z_k = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi+3\cdot k\cdot\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi+3\cdot k\cdot\pi}{6}\right) \right]$$

onde: ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$).

Substituindo ($k = 0, 1, 2, 3$), obtemos as quatro raízes de z .

Para as raízes quartas ($n = 4$), temos:

(I) Raiz 1: (Atribuimos o valor $k=0$)

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi+3\cdot 0\cdot\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi+3\cdot 0\cdot\pi}{6}\right) \right]$$

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) \right]$$

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(II) Raiz 2: (Atribuimos o valor $k=1$)

$$z_2 = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi+3\cdot 1\cdot\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi+3\cdot 1\cdot\pi}{6}\right) \right]$$

$$z_2 = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right]$$

$$z_2 = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(III) Raiz 3: (Atribuimos o valor $k=2$)

$$z_3 = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi+3\cdot 2\cdot\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi+3\cdot 2\cdot\pi}{6}\right) \right]$$

$$z_3 = \sqrt{2} \left[\cos\frac{8\pi}{6} + i \sin\left(\frac{8\pi}{6}\right) \right]$$

$$z_3 = \sqrt{2} \left[\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

$$z_3 = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

$$z_3 = \sqrt{2} \left[\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right] \quad z_3 = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

(IV) Raiz 4: (Atribuímos o valor $k=3$)

$$z_4 = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi+3\cdot 3\cdot \pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi+3\cdot 3\cdot \pi}{6}\right) \right]$$

$$z_4 = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \right]$$

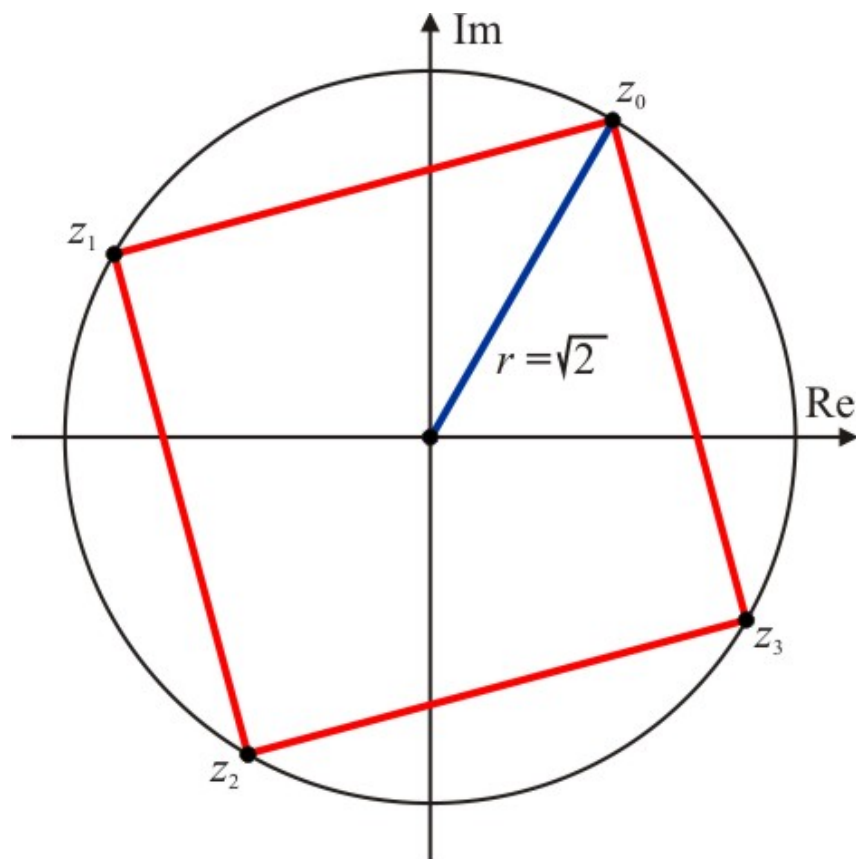
$$z_4 = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Resp.: } \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ ou } \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Observação: Os afixos 4 raízes z_0, z_1, z_2 e z_3 pertencem à circunferência de raio centrada na origem. Eles dividem o Plano de Argand – Gauss em 4 partes congruentes e são os vértices de um quadrado inscrito à circunferência:

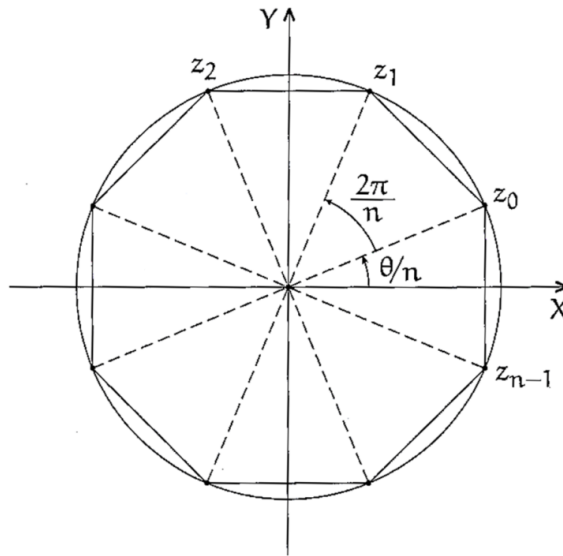
Figura 13 – Quadrado inscrito à circunferência



Fonte: www.obaricentrodamente.com/2010/05/aplicacao-da-2-formula-de-de-moivre

De um modo geral, os afixos z_k de um complexo z são vértices de um polígono regular de n lados com o mesmo módulo, $\frac{|z|}{n}$ inscrito em uma circunferência com centro na origem e raio $\sqrt[n]{|z|}$ no plano complexo.

Figura 14 – Raízes inscrito à circunferência



Fonte: www.matematicasimplificada.com/numeros-complexos-forma-polar

Observe ainda por esta figura que dando valores inteiros para k , os argumentos crescem em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$, o que nos mostra que as raízes estão uniformemente distribuídas na circunferência.

D.6 Raízes complexas da unidade

As raízes complexas n -ésimas de 1 são chamadas de raízes n -ésimas da unidade. O que é equivalente a $z^n = 1$.

Considere $z = 1 \implies z = \cos 0 + i \sin 0$

Logo, as raízes n -ésimas da unidade:

$$\sqrt[n]{z} = \left[\cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi}{n} \right) \right]$$

Quando localizamos as raízes n -ésimas da unidade no plano complexo como os vértices geramos de um polígono regular de n lados.

D.7 Fórmula da raiz quadrada de qualquer número complexo

Para determinar as raízes quadradas de um número complexo $z > 0$, siga as etapas a seguir:

Escreva o número complexo na forma trigonométrica.

$$z = |z| \cdot [\cos \theta + i \cdot \sin \theta]$$

Finalmente, aplicando a fórmula de 1ª De Moivre para determinar as raízes quadradas:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{2} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{2} \right) \right]$$

Simplifique as raízes quadradas:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} + k\pi \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\theta}{2} + k\pi \right) \right]$$

Vamos escrever esta última igualdade da seguinte forma:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot [\cos(2\alpha) + i \cdot \sin(2\alpha)].$$

Simplificação das Raízes:

As raízes quadradas são simplificadas para

$$z = \sqrt{|z|} \cdot [\cos(\alpha + k\pi) + i \sin(\alpha + k\pi)].$$

Vamos considerar os valores de k :

Para encontrar duas raízes complexas, k assume os valores 0 e 1.

Lembrando de duas identidades trigonométricas: Utiliza-se

$\cos(\alpha + 180^\circ) = -\cos \alpha$ e $\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin \alpha$. Obtemos:

Para $k = 0$:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

Para $k = 1$:

$$\sqrt{z} = -\sqrt{|z|} \cdot \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

Portanto, a fórmula para encontrar as raízes quadradas de um número complexo

$z = |z| \cdot [\cos \theta + i \cdot \sin \theta]$ é dada por:

$$\sqrt{z} = \pm \sqrt{|z|} \cdot \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

Exemplo D.6. Determinar as raízes quadradas do número complexo $z = 5 - 12i$, Inicialmente, vamos converter z da forma algébrica para a forma trigonométrica: Primeiro, encontramos o módulo de z :

$$|z| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Em seguida, calculamos

$$\cos(2\theta) = \frac{5}{13} \text{ e } \sin(2\theta) = -\frac{12}{13}$$

Como $0 \leq 2\theta \leq 2\pi$ indica que (2θ) pode estar em qualquer quadrante.

Com base nos valores de seno e cosseno, deduzimos que 2θ está no quarto quadrante.

Agora, utilizando as relações trigonométricas:

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} \text{ e } \sin(\theta) = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$$

Substituindo

$$\cos(2\theta) = \frac{5}{13} \implies \cos(\theta) = \sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{18}{26}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \text{ e em}$$

$$\sin \theta = -\frac{12}{13} \implies \sin \theta = \sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{8}{26}} = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Portanto:

$$\cos(\theta) = -\frac{3}{\sqrt{13}} \text{ e } \sin(\theta) = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Lebrando da a: fórmula de De Moivre as raízes quadradas de z :

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right) \right] \text{ onde } k = 0, 1 .$$

Substituindo os valores obtidos na fórmula de De Moivre as raízes quadradas de z são dadas por:

$$\sqrt{5-12i} = \pm\sqrt{13} \cdot \left[-\frac{3}{\sqrt{13}} + i \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} \right] = \pm(-3 + 2i)$$

E Polinômios em uma variável

Definição: Um polinômio em $\mathbb{C}$ é uma soma formal $f = f(x)$ do tipo $f(x) = a_k \cdot x^k + a_{k-1} \cdot x^{k-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$

Para algum $k \in \mathbb{N}$ e $a_k \neq 0$ chamada polinômio ou função polinômial na variável(indeterminada) x . Onde os números complexos $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset \mathbb{C}$ são denominados coeficientes (constantes). Os números indicados nos expoentes e nos índices $\{k, k-1, k-2, \dots, 1, 0\} \in \mathbb{N}$ e a variável x podem assumir qualquer valor complexo.

Cada uma das parcelas formadas pelo produto de um número por uma potência n -ésima positiva da variável x : $a_k x^k, a_{k-1} x^{k-1}, \dots, a_1 x, a_0$ são chamadas de termos ou monômios do polinômio. O coeficiente $a_k \neq 0$ é chamado coeficiente líder. O termo a_0 é chamado de termo independente do polinômio.

Obs.: Um caso especial é aquele em que os coeficientes deste polinômio são todos números reais.

O maior valor do expoente da variável x entre os termos de coeficientes não nulos é denominado grau do polinômio. Utilizamos a notação $\text{gr } f = k$, para dizer que o grau de f é k , se $a_k \neq 0$.

Observe que, na definição de polinômios, incluímos a função constante $p(z) = a_0$, que possui grau zero se $a_0 \neq 0$ e a função afim $p(z) = a_0 + a_1 x$, que possui grau um se $a_1 \neq 0$.

Quando o grau $\text{gr } f > 0$, dizemos que f é um polinômio não-constante.

Essas definições ajudam a classificar os polinômios de acordo com seus graus e coeficientes.

Exemplo E.1. Considere o polinômio $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4$.

Os coeficientes de $f(x)$ são 2, 5, 0, -4.

Portanto, $f(x)$ é um polinômio de grau 3.

Observações:

Se $a_k \neq 0$, dizemos que $f(x)$ tem grau k .

Um número complexo α é uma raiz do polinômio se $f(\alpha) = 0$.

O polinômio $f(x) = x^2 + 1$ tem grau 2 e suas raízes são $x = \pm i$.

Polinômio identicamente nulo Definição: O polinômio $f(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \dots + 0x^2 + 0x + 0 = 0$ é denominado o polinômio identicamente nulo (ou polinômio nulo)

sobre $\mathbb{C}$. Assim, denotaremos por 0 polinômio identicamente nulo.

Polinômios Idênticos

Definição: Assumiremos que os polinômios $f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ e $g(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k$ sobre $\mathbb{C}$ são iguais se, e somente se, $a_k = b_k$ para todo $k \geq 0$.

Polinômios constante: Dado $\alpha \in \mathbb{C}$, denotaremos o polinômio $f(x) = \alpha + 0x^n + 0x^{n+1} + \dots + 0x^2 + 0x + 0$ simplesmente por α e o denominamos o polinômio constante α

E.1 Operações com polinômios

Vamos definir sobre $\mathbb{C}$ as operações adição e multiplicação. **Soma e produto de polinômios**

Definição: Dados dois polinômios não constantes $f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ e $g(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k$ sobre $\mathbb{C}$ a soma e o produto de f e g denotados respectivamente por $f + g$ e $f \cdot g$, são os polinômios:

$$f + g = \sum_{k \geq 0} (a_k + b_k) x^k$$

e

$$f \cdot g = \sum_{k \geq 0} (a_k \cdot b_k) x^k = \sum_{k \geq 0} c_k x^k, \text{ onde } c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

A seguir, vejamos algumas propriedades da adição e multiplicação de polinômios. Consideremos f, g e h polinômios quaisquer. A operação de adição possui as seguintes propriedades:

Associatividade: $(f + g) + h = f + (g + h)$ e $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$

Comutatividade: $f + g = g + f$ e $f \cdot g = g \cdot f$

Existência de elemento neutro (aditivo e multiplicativo):

Existe $g \in \mathbb{C}$ tal que $f + g = f$; e $f \cdot g = f$ para todo polinômio.

Existência de inverso aditivo:

Existe $-g \in \mathbb{C}$ tal que $f + (-g) = 0$, para todo polinômio.

Obs.: O polinômio 0 (polinômio identicamente nulo) é o elemento neutro da adição de polinômios e o polinômio constante $f(x) = 1$ é chamado de elemento neutro da multiplicação de polinômios.

Distributividade: $f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h$

As demonstrações dessas propriedades se encontram em Iezzi (2013, p.52 e 53).

E.2 Valor numérico dos polinômios

Dado um polinômio não constante $f(x) = a_k \cdot x^k + a_{k-1} \cdot x^{k-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ com $a_k \neq 0$, temos que valor numérico é um valor que se obtém substituindo à variável x por α , $\forall \alpha \in \mathbb{C}$. Dessa forma, concluímos que o valor numérico de $P(\alpha)$ corresponde a $f(x)$ onde $x = \alpha$.

Exemplo E.2. Dado o polinômio $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 8x - 10$, determine o valor numérico de $p(3)$.

$$f(3) = 4 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 10$$

$$f(3) = 4 \cdot 27 - 9 \cdot 9 + 24 - 10$$

$$f(3) = 108 - 81 + 24 - 10$$

$$f(3) = 41$$

O valor de $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 8x - 10$ para $f(3)$ é 41.

E.3 Raiz de um Polinômio

Definição: Dado um polinômio não constante f e um número complexo α tal que $f(\alpha) = 0$, dizemos que α é uma raiz ou zero de f .

Exemplo E.3. Observe o polinômio $f(x) = x^2 - 6x + 8$ quando aplicamos $f(2)$.

$$f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 8$$

$$f(2) = 4 - 12 + 8$$

$$f(2) = 12 - 12$$

$$f(2) = 0$$

Dessa forma, percebemos que o número 2 é raiz do polinômio $f(x) = x^2 - 6x + 8$, pois temos que $f(2) = 0$.

As raízes polinomiais são fundamentais na elaboração de gráficos de polinômios (funções polinomiais), pois são elas que nos permitem identificar os pontos em que o gráfico intersecta o eixo das abscissas (eixo x).

Normalmente, problemas relacionados a raízes polinomiais surgem de duas formas. Em uma situação, verifica-se se a informação fornecida para a variável resultará no valor numérico zero, isto é, se este valor representa a raiz do polinômio. Por outro lado, deve-se determinar a raiz do polinômio.

É importante enfatizar que o número de raízes de um polinômio está diretamente ligado ao seu grau. Por exemplo, um polinômio de grau 2 só pode ter no máximo duas raízes,

independentemente de serem números complexos ou não. Por outro lado, o polinômio de grau 3 terá apenas 3 raízes possíveis.

Exemplo E.4. *Verifique se 1 é a raiz do polinômio $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$.*

Caso 1 seja raiz, teremos que $f(1) = 0$.

Vamos verificar se isso é verdade.

$$f(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 1$$

$$f(1) = 1 + 2 \cdot 1 - 2 - 1$$

$$f(1) = 1 + 2 - 2 - 1$$

$$f(1) = 0$$

Portanto, o valor $x = 1$ é uma das raízes do polinômio $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$.

Este polinômio pode ter até 3 raízes, mas isso será discutido mais à frente.

Para grande utilidade do algoritmo da divisão de polinômios nos teoremas e proposições sobre raízes de polinômios, discuiremos agora o enredo de sua demonstração (GONÇALVES, Adilson, 2007).

E.4 Algoritmo da divisão para polinômios

Teorema do Algoritmo da Divisão para Polinômios:

Dados dois polinômios $f(x)$ e $g(x)$ (Sobre $\mathbb{R}$ ou sobre $\mathbb{C}$) com $d(x) \neq 0$, existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$, que são chamado de quociente e resto, respectivamente, tais que:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

$$r(x) = 0 \text{ ou o grau de } gr(r(x)) < g(x)$$

Além disso, os polinômios $q(x)$ e $r(x)$ são únicos.

Demonstração:

Primeiro demonstraremos a existência de $q(x)$ e $r(x)$.

Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_1 x + a_0$, de $gr f = n$ e

$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ de $gr(g) = m$

Se $f(x) = 0$ (polinômio nulo), então $0 = 0 \cdot g(x) + 0$; logo, tanto q como r também são o polinômio zero.

Agora suponha que $f(x) \neq 0$. Assim $gr(f(x)) = n$. Se $m > n$, então $q(x) = 0$ e $r(x) = f(x)$.

Podemos agora supor que $n \geq m$.

Agora seja $f_1(x)$ o polinômio definido por:

$$f(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot g(x) + r_1(x)$$

É fácil ver que $gr(f_1) < gr(f(x))$. Vamos demonstrar o teorema por indução sobre $gr(f) = n$.

Se $n = 0, n \geq m \implies m = 0$ e portanto $f(x) = a_0, g(x) = b_0 \neq 0$ e teremos $f(x) = \frac{a_0}{b_0} \cdot g(x)$ e basta tomar $q(x) = \frac{a_0}{b_0}$ e $r(x) = 0$.

Pela igualdade $f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g(x)$ e $gr f_1(x) < gr f(x) = n$ temos pela hipótese de indução que existe $q_1(x), r_1(x)$ tais que $f_1(x) = q_1(x) \cdot g(x) + r_1(x)$ onde $gr r_1(x) = 0$ ou o grau de $r_1(x) < gr(g(x))$. Daí segue imediatamente que: $f(x) = (q_1(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m})g(x) + r_1(x)$, e portanto tomando $q(x) = q_1(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$ e $r_1(x) = r(x)$.

Agora vamos provar a unicidade.

Sejam $q_1(x), q_2(x), r_1(x)$ e $r_2(x)$ tais que $f_1(x) = q_1(x) \cdot g(x) + r_1(x) = q_2(x) \cdot g(x) + r_2(x)$ onde $r_i(x) = 0$ ou $gr(r_i(x)) < gr(g(x)), i = 1, 2$.

Daí segue: $(q_1(x) - q_2(x)) \cdot g(x) = r_2(x) - r_1(x)$. Mas $q_1(x) \neq q_2(x)$ o grau do polinômio do lado esquerdo da igualdade acima é maior ou igual ao grau de $g(x)$ enquanto $gr(r_2(x) - r_1(x)) < gr(g(x))$ o que é uma contradição. Logo $q_1(x) = q_2(x)$ e daí segue $r_1(x) = f(x) - q_1(x) \cdot g(x) = f(x) - q_2(x) \cdot g(x) = r_2(x)$ como queríamos demonstrar.

O algoritmo da divisão para polinômios nos diz que se você tem dois polinômios $f(x)$ e $g(x)$, com $g(x) \neq 0$, e precisa dividir $f(x)$ por $g(x)$, então você conseguirá encontrar um quociente $q(x)$ e um resto $r(x)$, únicos, tais que $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ onde $r(x) = 0$ ou $gr(r(x)) < gr(g(x))$.

No caso em que, na divisão de $f(x)$ por $g(x)$ obtivermos $r(x) = 0$, ou seja, o resto da divisão é o polinômio nulo, dizemos que $g(x)$ divide $f(x)$.

E.5 Teorema do resto

Teorema: Dado um dividendo polinomial $f(x)$ e um divisor polinomial diferente de zero, $(x - k)$ onde o grau de $d(x)$ é menor ou igual ao grau de $f(x)$. O resto da divisão de $f(x)$ por $(x - k)$ é igual a $f(k)$.

Demonstração

De acordo com a definição de divisão $f(x) = (x - k) \cdot q(x) + r(x)$. Sendo o divisor $(x - k)$ linear (binômio do 1º, o restante será uma constante, r pois ao testarmos o valor numérico $(x = k)$ em $f(x)$, obtemos:

$$f(k) = (k - k) \cdot q(k) + r = 0 \cdot q(k) + r = r$$

Portanto, $f(k)$ é o resto da divisão de $f(x)$ por $(x - k)$.

Exemplo E.5. Use o Teorema do Resto para determinar o resto da divisão de $f(x) = 6x^4 - x^3 - 15x^2 + 2x - 7$ por $(x - 2)$.

Solução: Pelo teorema basta calcular $f(2)$,

$$f(2) = 6 \cdot 2^4 - 2^3 - 15 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 7$$

$$f(2) = 6 \cdot 16 - 8 - 15 \cdot 4 + 4 - 7$$

$$f(2) = 96 - 8 - 60 + 4 - 7$$

$$f(2) = 100 - 75$$

$$f(2) = 25$$

O Teorema do Resto é um recurso eficaz que torna o cálculo do resto na divisão de um polinômio $f(x)$ por um binômio da forma $(x - k)$. O teorema estabelece que o saldo dessa divisão corresponde ao valor de $f(k)$. Ou seja, para descobrir o resto, basta substituir ' k ' na expressão do polinômio $f(x)$ e calcular o resultado.

F Equações Algébricas

Definição: Denominamos equações polinomiais ou equações algébricas, toda equação que pode ser reduzida à forma: $f(x) = 0$, em que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ é um polinômio qualquer de grau n . Então, de forma geral, uma equação polinomial pode ser representada por:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

O coeficiente a_n que acompanha a variável de maior expoente, que determina o grau da equação é chamado de coeficiente dominante e o termo a_0 é o termo independente.

Exemplo F.1. Dado o polinômio de grau 3, $f(x) = 9x^3 - 36x^2 + 29x - 6$ fazendo $f(x) = 0$ temos a equação cúbica. $9x^3 - 36x^2 + 29x - 6 = 0$

Exemplo F.2. $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$

$$5x^5 - 5x^4 - 80x + 80 = 0$$

F.1 Raiz de uma equação polinomial

Proposição: Dado um polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$. Dizemos que $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma raiz ou zero do polinômio f , se $f(\alpha) = 0$ isto é:

$$f(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} (\alpha)^{n-1} + \dots + a_1 (\alpha) + a_0, a_n \neq 0 = 0$$

Demonstração

Do Teorema da divisão Euclidiana segue que existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$ em $\mathbb{C}$ tais que $f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x) + r(x)$, onde $r(x) = 0$ ou $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}((x - \alpha)) = 1$. Portanto, podemos escrever $f(x) = (x - \alpha)q(x) + r_0$, onde $r_0 \in \mathbb{C}$. Calculando $f(x)$ em α , temos $f(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + r_0$, de onde segue que $r_0 = f(\alpha)$. Assim, se $(x - \alpha)$ divide $f(x)$, então $f(\alpha) = 0$, e reciprocamente

F.2 Multiplicidade de uma raiz

Definição: A multiplicidade de uma raiz a de um polinômio $f(x) = 0$ indica o número de vezes que essa raiz aparece na decomposição do polinômio. Em outras palavras, afirmamos que a representa a raiz da multiplicidade $m \geq 1$ da equação $f(x) = 0$ se, e somente se, essa multiplicidade for igual a 1. $f(x) = (x - a)^m \cdot q(x)$, onde a é a raiz da multiplicidade m de $f(x) = 0$. Se uma, duas, três ou mais raízes forem iguais, elas são chamadas de raízes simples, duplas, triplas e assim por diante.

Exemplo F.3. A equação $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$, admite a raiz simples -1 e raiz 2 com multiplicidade 3 . Logo, podemos escrever $f(x) = (x + 1) \cdot (x - 2)^3 = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 2) \cdot (x - 2)$

Portanto, a equação é de 4^o grau, porém, o conjunto solução só tem dois elementos
 $S = \{-1, 2\}$

F.3 Conjunto solução de uma equação polinomial

Definição: Chama-se conjunto solução ou conjunto verdade da equação $f(x) = 0$ em $\mathbb{C}$ o conjunto S ou V cujos elementos são as raízes complexas da equação.

Exemplo F.4. Com relação a equação $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$, temos que $x = -1$ também é raiz pois $(-1)^3 + (-1)^2 - (-1) - 1 = -1 + 1 + 1 - 1 = 0$. Por ora, acredite que $x = \pm 1$ são suas únicas raízes, sendo $x = -1$ uma raiz dupla. Desta forma, seu conjunto solução, muitas vezes denotado por S , é dado por

$$S = \{-1, 1\} \text{ ou } V = \{-1, 1\}.$$

OBS: Resolver uma equação polinomial é obter o seu conjunto verdade.

F.4 Teorema Fundamental da Álgebra

O Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) afirma que todo polinômio $f(x) = 0$ de grau $n \geq 1$ admite pelo menos uma raiz complexa, seja ela real ou não. Este teorema foi demonstrado por Carl Friedrich Gauss em sua tese de doutorado em 1799, quando ele tinha apenas 21 anos. A demonstração de Gauss é um marco importante no estudo das equações algébricas e na matemática em geral. OBS: Equações de 5^o grau ou maiores não possuem fórmulas para a sua solução direta.

Para a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, é necessário um conhecimento avançado em matemática, geralmente abordado em cursos de graduação.

F.5 Teorema da Decomposição ou teorema do fator

O Teorema da decomposição é uma aplicação do TFA que nos garante que todo polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x_{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$ de grau $n \geq 1$ pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau, isto é $f(x) = a_n \cdot (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$, em que $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as raízes de $f(x)$.

Teorema: Todo polinômio f não-constante de grau $n \geq 1$ e coeficiente dominante $a_n \neq 0$ pode ser fatorado como o produto de n fatores do 1^o grau (fatoração linear):

Demonstração

Como $f(x)$ é um polinômio de grau $n \geq 1$, pelo Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A), $f(x)$ admite pelo menos uma raiz complexa x_1 . Assim pelo teorema do resto $f(x_1) = 0$ o que significa que $f(x)$ é divisível por $(x - x_1)$. Então existe um polinômio $q_1(x)$.

$$f(x) = (x - x_1) \cdot q_1(x)$$

em que $q_1(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$ e coeficiente dominante a_n (pois o divisor $x - x_1$ tem coeficiente dominante unitário). Temos:

(i) Se $n = 1$, então $q_1(x)$ é um polinômio de grau $1-1=0$, ou seja $q_1(x)$ é um polinômio constante, dado por $q_1(x) = a_n$. Substituindo em $f(x) = (x - x_1) \cdot q_1(x)$, vem $f(x) = a_n \cdot (x - x_1)$ e o teorema fica demonstrado.

(ii) Se $n \geq 2$, então $n - 1 \geq 1$. Assim, podemos aplicar, podemos aplicar o TFA ao polinômio $q_1(x)$. isto é $q_1(x)$ tem ao menos uma raiz complexa x_2 . Assim $q_1(x_2) = 0$ e $q_1(x)$ é divisível $(x - x_2)$:

$$q_1(x) = (x - x_2) \cdot q_2(x)$$

em que $q_2(x)$ é um polinômio de grau $n-2$ e coeficiente dominante a_n (pois o divisor $x - x_2$ tem coeficiente dominante unitário). Substituindo em $f(x) = (x - x_1) \cdot q_1(x)$, resulta em:

$$f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot q_2(x)$$

(i) Se $n = 2$, então $q_2(x)$ é um polinômio de grau 0, dado por $q_2(x) = a_n$. Substituindo em $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot q_2(x)$, vem $f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ e o teorema fica demonstrado.

Aplicando sucessivas vezes o T.F.A., obtemos, obtemos:

$$f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \cdot q_n(x)$$

em que $q_n(x)$ é um polinômio de grau $n - n = 0$, dado por $q_n(x) = a_n$.

Obs.: Pela definição de identidade de polinômios, o coeficiente a_n de $f(x)$ deve ser igual a $q_n(x)$.

Portanto:

$$f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

Isso mostra que qualquer polinômio de grau n pode ser decomposto em n fatores lineares, cada um associado a uma raiz complexa do polinômio.

Então, $f(x)$ pode ser decomposto em n fatores do 1º grau sob a forma:

$$f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n),$$

em que $x_1, x_2, \dots, x_n$ são raízes de $f(x)$ e a_n é o coeficiente dominante de $f(x)$.

Observações

(1) Dizemos que cada um dos polinômios de 1º grau, $x - x_1, x - x_2, \dots, x - x_n$ é um fator de $f(x)$.

(2) $f(x)$ é divisível por cada um de seus fatores, individualmente ou por qualquer produto desses fatores.

Exemplo F.5. *Fatore $f(x) = 5x^5 - 5x^4 - 80x + 80 = 0$ sabendo que suas raízes são $1, -2, 2, -2i$ e $2i$.*

Resolução:

Nas condições do Teorema da decomposição, temos que

$$n = 5, a_n = a_5 = 5, x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 2, x_4 = -2i \text{ e } x_5 = 2i.$$

Assim

$$\begin{aligned} f(x) &= a_5(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) \\ &= 5(x - 1)(x + 2)(x - 2)(x + 2i)(x - 2i) = 0 \end{aligned}$$

Exemplo F.6. *Use o teorema da decomposição em fatores lineares para encontrar os zeros de um $f(x) = x^3 + 4x^2 - 4x - 16$ dado que $(x - 2)$ é um fator do polinômio.*

Solução:

Os zeros são $2, -2$ e -4 .

F.6 O Teorema das Raízes Racionais

Teorema: Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$ um polinômio com coeficientes inteiros, se o número $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, com p e q primos entre si, é raiz da equação, então p é divisor do termo independente a_0 e q é divisor do termo dominante a_n .

Demonstração

Como $\frac{p}{q}$ é raiz do polinômio $f(x)$, temos

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_2 \left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0.$$

Multiplicando ambos os lados da equação por q^n , obtemos:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} \cdot q + \dots + a_2 p^2 \cdot q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Podemos reescrever a equação como:

$$a_n p^n = -q(a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 \cdot q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_0 q^n).$$

Da equação acima, vemos que q divide $a_n p$.

Como $\text{mdc}(p, q) = 1$, isso implica que q deve dividir a_n .

Similarmente, podemos reescrever a equação como:

$$a_0 q^n = -p(a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 \cdot q^{n-2} + a_1 q^{n-1})$$

Da equação acima, vemos que p divide $a_0 q^n$. Como $\text{mdc}(p, q) = 1$, isso implica que p deve dividir a_0 .

Portanto, se $\frac{p}{q}$ é uma raiz racional do polinômio $P(x)$ então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n .

Exemplo F.7. Determine as raízes da equação $x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 16x + 8 = 0$

Solução:

Pelo teorema das n raízes de uma equação polinomial de grau n , a equação dada tem 4 raízes e utilizando o teorema das raízes racionais sabemos que as possíveis raízes racionais são $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$.

Pelo método de divisão sintética, as raízes da equação são $1 + i, 1 - i, 2$ (dupla).

F.7 Raízes complexas:

Teorema: Se um número complexo não-real, $z = a + bi$, com $b \neq 0$, é raiz de uma equação polinomial com coeficientes reais, então seu conjugado, $\bar{z} = a - bi$, também é raiz dessa equação.

Em Matemática, o Teorema Fundamental da Álgebra afirma que qualquer polinômio $f(x)$ com coeficientes complexos de uma variável e de grau $n \geq 1$ possui alguma raiz complexa.

Exemplo F.8. A equação $x^4 = 4x - 3$, tem as seguintes raízes no conjunto dos números complexos:

$$1, 1, -1 + i\sqrt{2} \quad \text{e} \quad -1 - i\sqrt{2}.$$

Demonstração

Para a demonstração do teorema das raízes conjugadas vamos utilizar as propriedades do conjugado de um número complexo já apresentada e discutidas.

Seja a equação $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, onde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são seus coeficientes são reais e z é raiz de $f(x)$, isto é, $f(z) = 0$.

Provemos que o conjugado de z também é raiz dessa equação, isto é, $f(\bar{z}) = 0$.

Dados dois números complexos z_1 e z_2 e considerando seus conjugados $\bar{z}_1$ e $\bar{z}_2$, temos:

$$(i) \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$(ii) \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$(iii) \quad z_1 = \bar{z}_1 \text{ se, e somente se } z_1 \text{ é real}$$

$$(iv) \quad \overline{z_1^n} = \bar{z}_1^n$$

Vamos verificar que $\bar{z}$, na equação $f(x)$.

$$f(\bar{z}) = a_n \cdot \bar{z}^n + a_{n-1} \cdot \bar{z}^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \bar{z} + a_0.$$

Lembrando que o conjugado de um número real puro a é igual a ele próprio,

$$f(\bar{z}) = \overline{a_n \cdot z^n} + \overline{a_{n-1} \cdot z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 \cdot z} + \overline{a_0}$$

$$f(\bar{z}) = \overline{a_n \cdot z^n} + \overline{a_{n-1} \cdot z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 \cdot z} + \overline{a_0}$$

$$f(\bar{z}) = \overline{a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0} = \overline{p(z)} = \bar{0} = 0.$$

Com isso, podemos concluir rapidamente a prova deste teorema.

Portanto, $\bar{z}$ também é raiz.

Exemplo F.9. Se $z = 2 + 3i$ é uma raiz de $p(x) = x^2 - 4x + 13$, mostre que $\bar{z} = 2 - 3i$ é outra raiz.

Solução:

Sabemos que se z é a raiz de um polinômio, devemos ter $f(z) = 0$. Portanto, podemos usar $z = 2 - 3i$ no polinômio e verifica a igualdade de $f(\bar{z}) = 0$.

Se verificar a igualdade então $f(\bar{z})$ também é uma raiz de $f(x)$.

$$f(2 - 3i) = (2 - 3i)^2 - 4(2 - 3i) + 13$$

$$f(2 - 3i) = 4 - 12i + 9i^2 - 8 + 12i + 13$$

$$f(2 - 3i) = 9 + 9(-1)$$

$$f(2 - 3i) = 9 + 9 \cdot (-1)$$

$$f(2 - 3i) = 9 - 9$$

$$f(2 - 3i) = 0$$

Obtemos zero após substituir $z = 2 - 3i$ no polinômio. Isso significa que $z = 2 - 3i$ é uma raiz de $f(x)$, provando a validade do teorema das raízes conjugadas de polinômios de coeficientes reais.

Observações

(1) Se o número complexo $z = a + bi, b \neq 0$, é raiz com multiplicidade m de uma equação polinomial, então seu conjugado $\bar{z} = a - bi, b \neq 0$ também é raiz com multiplicidade m dessa equação.

(2) Esse teorema nos garante que, em uma equação polinomial de coeficientes reais, as raízes complexas não reais sempre ocorrem aos pares. Dessa forma, uma equação de grau ímpar apresenta ao menos uma raiz real. Assim por exemplo, a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, (com a, b, c e d reais) admite uma ou três raízes reais, pois o número de raízes complexas não reais é par.

G CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi apresentar o surgimento dos números complexos oferecendo uma perspectiva histórica do surgimento desses números a partir da invenção da unidade imaginária na resolução de equações quadráticas e cúbicas, pois, acreditamos na possibilidade da história dos números complexos e mais amplamente que a história da matemática possa despertar nos professores e nos alunos uma nova perspectiva para ajudá-los no processo de ensino e aprendizado deste conteúdo relevante e desmitificar a ideia de que Matemática é direcionada apenas uma prática docente diferenciada, menos centrada em uma matemática de resultados prontos, e mais em uma matemática de descobertas e conexões. Dessa forma concluímos que a História da Matemática é uma ferramenta fundamental no ensino-aprendizagem dos conteúdos, por trazer resultados positivos em sala de aula.

Com essa percepção os alunos e professores além de compreender melhor sobre o conteúdo, conseguem também assimilar de forma significativa. Apresentar conteúdos matemáticos através da história acrescenta bastante na bagagem do aluno e facilita muito para que o aluno não esqueça das principais definições. Através dessa abordagem sugere-se a aplicação da história da matemática no ensino de outros conteúdos como geometria, trigonometria e o estudo de aplicações desse conteúdo ao longo do tempo e suas contribuições para o futuro.

Bibliografia

- [1] BASTOS, Gervasio G. **Resolução de Equações Algébricas por Radicais**.
Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/M30.pdf>. Acesso em 05 set. 2024.
- [2] BECKER, Joel Marcelo. Relative curvature measures of nonlinearity. **Polinômios, equações e resoluções**. .2014.63f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Cuiabá-MT, 2014.
- [3] GONÇALVES, Adilson. *Introdução à Álgebra*. Rio De Janeiro-RJ: IMPAR, 2007.
- [4] IEZZI, Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 6: Complexos, Polinômios e Equações*. Atual Didáticos, 2013.
- [5] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. *Tópicos de matemática Elementar*. 2^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- [6] História dos números complexos. Disponível em:
<http://www.ime.usp.br/martha/caem/complexos.pdf>. Acesso em: 12 de mar. 2012.
- [7] Números Imaginários. Disponível em: <<http://www.educairani.com/artigos/numerosimaginarios.pdf>>. Acesso em: 13 de agos. 2024.
- [8] Números Complexos. *A Forma Polar e as Operações Elementares*. Disponível em: <<https://matematicasimplificada.com/numeros-complexos-forma-polar/google-vignette>>. Acesso em: 25 set. 2024.
- [9] Números Complexos. Disponível em: <<https://www.obaricentrodamente.com/2022/01/os-numeros-complexos-de-cardano-a-hamilton.html>>. Acesso em: 06 set. 2024.
- [10] Números Complexos. Disponível em: <https://www.obaricentrodamente.com/2010/04/demonstracao-da-1-formula-de-de-moivre.html>. Acesso em: 10 set. 2024.
- [11] Números Complexos. Disponível em: <https://www.obaricentrodamente.com/2010/05/demonstracao-da-2-formula-de-de-moivre.html>. Acesso em: 12 set. 2024.
- [12] Números Complexos. Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euler>>. Acesso em: 12 de agos. 2024.
- [13] Números complexos. Disponível em: <<https://brasilescola.uol.com.br/matematica/propriedades-envolvendo-numeros-complexos.html>>. Acesso em: 12 de agos. 2024.

- [14] Números complexos. Uma Introdução ao Estudo dos Números Complexos. Disponível em: <<http://www.hermes.ucs.br/lavia/pro/complex.html>>. Acesso em: 03 de agos. 2024.