



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Marcos Vinícius Conceição Almeida

**Sólitons BPS em um modelo  $CP(2)$  calibrado e  
estendido pela presença de uma impureza  
magnética**

São Luís - MA, Brasil

Junho de 2023

Marcos Vinícius Conceição Almeida

**Sólitons BPS em um modelo  $CP(2)$  calibrado e estendido  
pela presença de uma impureza magnética**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Carlos Eduardo da Hora Santos

São Luís - MA, Brasil

Junho de 2023

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Almeida, Marcos Vinícius Conceição.

Sólitons BPS em um modelo CP2 calibrado e estendido  
pela presença de uma impureza magnética / Marcos Vinícius  
Conceição Almeida. - 2023.

123 p.

Coorientador(a): Rodolfo Alvan Casana Sifuentes.

Orientador(a): Carlos Eduardo da Hora Santos.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-graduação em  
Física/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís,  
2023.

1. Formalismo BPS. 2. Impureza magnética. 3.  
Sólitons não topológicos. 4. Sólitons topológicos. I.  
Hora Santos, Carlos Eduardo da. II. Sifuentes, Rodolfo  
Alvan Casana. III. Título.

Marcos Vinícius Conceição Almeida

**Sólitons BPS em um modelo  $CP(2)$  calibrado e estendido  
pela presença de uma impureza magnética**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

São Luís - MA, Brasil. Trabalho aprovado em 27 de junho de 2023:

---

Prof. Dr. Carlos Eduardo da Hora  
Santos (UFMA)

---

Prof. Dr. Rodolfo Alvan Casana  
Sifuentes (UFMA)

---

Prof. Dr. Fabiano de Carvalho Simas  
(UFMA - Chapadinha)

---

Prof. Dr. Adalto Rodrigues Gomes dos  
Santos Filho (UFMA)

---

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de  
Almeida (UFC)

---

Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho  
(UEPB)

*Dedico este trabalho àquele que, mesmo distante, continua a ser meu grande herói, meu pai.*

# Agradecimentos

A Deus em primeiro lugar.

Ao meus pais, Lígia e Sebastião, pelo amor dedicado, pela educação que reflete o que sou hoje e pelo incentivo aos estudos.

Aos meus irmãos, Márcio e Mariana, e ao meu primo, Guilherme, pela companhia, por me ensinarem a dividir o que tenho e pelo incentivo.

A minha namorada, Bhrenda, pelo carinho, compreensão nos momentos de ausência, pelo incentivo e pela força nos momentos difíceis.

A minha avó, Lúcia. As minhas avós, Rita e Alzimira, que descansam em paz. Aos meus tios e tias. Aos meus primos e primas. Aos meus padrinhos e madrinhas.

Aos bons "Guias de luz".

Aos meus amigos do curso de Física: João Luís, Daniel, Marcos Lima, Wellington, Railson, Joelson, Joel Félix, Joel Anderson, Kayman, Arthur, Charles, João Alphieres, entre outros. Companheiros de caminhada. Aos meus outros amigos.

Aos meus professores do doutorado em Física da UFMA pela contribuição na minha vida acadêmica.

Ao meus orientadores, Prof. Dr. Carlos Eduardo da Hora Santos e Prof. Dr. Rodolfo Alvan Casana Sifuentes pela contribuição e ajuda neste trabalho e, principalmente, pela paciência.

À FAPEMA pela contribuição financeira. ‘

À Universidade Federal do Maranhão, pelo espaço cedido e pela oportunidade oferecida.

*Aquele que habita no esconderijo do Altíssimo e descansa à sombra do Onipotente diz ao Senhor: "Tu és o meu refúgio e a minha fortaleza, o meu Deus, em quem confio."*

*(Salmo 91)*

# Resumo

Investigamos a existência de sólitons BPS em dois modelos  $CP(2)$  calibrados estendidos via inclusão de impurezas magnéticas. Dessa forma, através da implementação do formalismo BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield), observamos que a energia total possui um limite de Bogomol'nyi bem definido e um fluxo magnético quantizado para as configurações topológicas. Além disso, a análise verificou que a impureza magnética contribui para o potencial BPS e aparece na equação BPS em ambos os modelos. Neste contexto, introduzimos uma impureza do tipo gaussiana (que é comumente interpretada como uma única barreira /poço) para os casos topológico e não topológico, e uma impureza senoidal (uma cadeia de barreiras/poços) para o caso não topológico apenas (restrito ao cenário Chern-Simons- $CP(2)$ ). Desse modo, resolvemos as equações autoduais numericamente, de acordo com as condições de contorno correspondentes a cada caso. As soluções resultantes apresentam um comportamento não monotônico que invertem os campos magnético e elétrico para o caso topológico. Para o caso não topológico, os principais efeitos causados pelas impurezas incluem uma grande resposta do setor elétrico, com a formação de um perfil periódico que se espalha para o limite assintótico, e um anel magnético multicamadas que mantém o fluxo magnético confinado à mesma região no espaço.

**Palavras-chave:** Sólitons topológicos; Sólitons não topológicos; Formalismo BPS; Impureza magnética.

# Abstract

We investigated the existence of BPS solitons in two gauged- $CP(2)$  models extended via inclusion of magnetic impurities. Thus, through the implementation of the BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) formalism, we observe that the total energy possesses a well-defined Bogomol'nyi bound and a quantized magnetic flux for the topological configurations. Further, the analysis verified that the magnetic impurity contributes to the BPS potential and appears in the BPS equation in both models. We then introduce a Gaussian type impurity (which is commonly interpreted as a single barrier/well) for the topological and non-topological cases, and a periodic impurity (a chain of barriers/wells) for the non-topological case only (restricted to the Chern-Simons- $CP(2)$  scenario). Thus, we solve the self-dual equations numerically, according to the boundary conditions corresponding to each case. The resulting solutions present a non-monotonic behavior that inverts the magnetic and electric fields, for the topological case. For the non-topological case, the main effects caused by impurities include a large electrical sector response, with the formation of a periodic profile that spreads to the asymptotics and a multilayered magnetic ring which maintains the magnetic flux confined to the original region in space.

**Keywords:** Topological solitons; Non-topological solitons; BPS formalism; Magnetic impurities .

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Espaço interno dos campos relacionado ao modelo $CP(2)$ . Os campos escalares complexos $\phi_a$ formam uma esfera de raio $h^{1/2}$ no espaço $\mathbb{C}^3$ ou uma hipersfera em $\mathbb{R}^6$ . . . . .	24
Figura 2 – Soluções numéricas para os campos $\alpha(r)$ (a) e $A(r)$ (b), obtidas a partir das equações de primeira ordem (2.61) e (2.62), de acordo com as condições de contorno (2.50) e (2.60), em que fixamos $g = h = 1$ . Na figura, mostramos os perfis para $m = 1$ (linha preta sólida), $m = 2$ (linha azul tracejada), $m = 3$ (linha vermelha ponto-tracejada) e $m = 4$ (linha laranja sólida). . . . .	33
Figura 3 – Soluções numéricas para o campo magnético $B(r)$ (a) e para a densidade de energia BPS $\varepsilon(r)$ (b), obtidas a partir de equações (2.51) e (2.53). As convenções são as mesmas da Figura 2. . . . .	34
Figura 4 – Soluções numéricas para os campos $\alpha(r)$ (a) e $A(r)$ (b), obtidas a partir das equações de primeira ordem (3.38) e (3.39), de acordo com as condições de contorno (3.25) e (3.37), onde fixamos $h = \kappa = 1$ e $g = \sqrt{2}$ . Na figura, mostramos os perfis para os valores: $m = 1$ (linha preta sólida), $m = 2$ (linha azul tracejada), $m = 3$ (linha vermelha ponto-tracejada) e $m = 4$ (linha laranja sólida). . . . .	45
Figura 5 – Soluções numéricas para o campo magnético $B(r)$ (a) e para a densidade de energia BPS $\varepsilon(r)$ (b), obtidas a partir de equações (3.26) e (3.30). As convenções são as mesmas da Figura 4. . . . .	46
Figura 6 – Soluções numéricas para o potencial escalar $A_0(r)$ (a) e para o campo elétrico $E(r)$ (b). As convenções são as mesmas da Figura 4. . . . .	46
Figura 7 – Soluções numéricas para os campos $\alpha(r)$ (a) e $A(r)$ (b), obtidas a partir das equações de primeira ordem (4.38) e (4.39), em conformidade com as condições de contorno (2.50) e (4.30), onde fixamos $g = h = 1$ , $m = 1$ e $d = 1$ . Na figura, mostramos os perfis para $c = -4$ (linha vermelha tracejada), $c = -2$ (linha azul tracejada), $c = 0$ (linha preta sólida - solução usual, sem impureza), $c = +2$ (linha azul sólida) e $c = +4$ (linha vermelha sólida). . . . .	55
Figura 8 – Soluções numéricas para o campo magnético $B(r)$ (a) e para a densidade de energia BPS $\varepsilon(r)$ (b) relacionadas às configurações BPS Maxwell- $CP(2)$ com impureza. As convenções são as mesmas utilizadas na Figura 7. . . . .	56

Figura 9	– Soluções numéricas para os campos $\alpha(r)$ (a) e $A(r)$ (b), obtidas a partir das equações de primeira ordem (5.31) e (5.32), em conformidade com as condições de contorno (5.20) e (4.30), onde fixamos $\kappa = h = 1$ , $g = \sqrt{2}$ , $m = 1$ e $d = 1$ . Na figura, mostramos os perfis para $c = -4$ (linha vermelha tracejada), $c = -2$ (linha azul tracejada), $c = 0$ (linha preta sólida - solução usual, sem impureza), $c = +2$ (linha azul sólida) e $c = +4$ (linha vermelha sólida). . . . .	63
Figura 10	– Soluções numéricas para o campo magnético $B(r)$ (a) e para a densidade de energia BPS $\varepsilon(r)$ (b) relacionadas às configurações BPS Chern-Simons-CP(2) com impureza. As convenções são as mesmas utilizadas na Figura 9. . . . .	64
Figura 11	– Soluções numéricas para o potencial escalar $A_0(r)$ (a) e para o campo elétrico $E(r)$ (b) relacionadas às configurações BPS Chern-Simons-CP(2) com impureza. As convenções são as mesmas da Figura 9 . . . . .	65
Figura 12	– Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil $\alpha(r)$ , obtidas via as Eqs. (6.51) e (6.52), para $h = \kappa = m = d = 1$ , $g = \sqrt{2}$ e diferentes valores de $c \ll 1$ . Esquerda - (a): $c = 0$ (linha preta sólida) e o perfil analítico correspondente (com $r_0 = 10$ , linha magenta tracejada). Direita - (b): $c = -0.1$ (linha azul tracejada), $c = 0.1$ (linha vermelha ponto-tracejada) e (novamente por comparação) $c = 0$ (linha preta sólida). . . . .	75
Figura 13	– Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil $A(r)$ . Convenções conforme a Figura 12. . . . .	75
Figura 14	– Soluções numéricas não topológicas para o campo magnético $B(r)$ . Convenções conforme a Figura 12. . . . .	76
Figura 15	– Soluções numéricas não topológicas para o potencial $A_0(r)$ . Convenções conforme a Figura 12. . . . .	77
Figura 16	– Soluções numéricas não topológicas para campo elétrico $E(r)$ . Convenções conforme a Figura 12. . . . .	78
Figura 17	– Soluções numéricas não topológicas para a distribuição de energia $\varepsilon_{bps}(r)$ . Convenções conforme a Figura 12. . . . .	78
Figura 18	– Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil $\alpha(r)$ , obtidas via as Eqs. (6.51) e (6.52), para $h = \kappa = m = d = 1$ , $g = \sqrt{2}$ e para valores consideráveis de $c$ (diferentes de $c \ll 1$ ). Esquerda - (a): $c = 0$ (linha preta sólida), $c = +1$ (linha vermelha tracejada) e $c = +3$ (linha azul pontilhada). Direita - (b): $c = -1$ (linha vermelha pontilhada) e $c = -3$ (linha azul tracejada) e (novamente por comparação) $c = 0$ (linha preta sólida). . . . .	79
Figura 19	– Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil $A(r)$ . Convenções conforme a Figura 18. . . . .	80

Figura 20 – Soluções numéricas não topológicas para o campo magnético $B(r)$ . Convenções conforme a Figura 18. . . . .	81
Figura 21 – Soluções numéricas não topológicas para o potencial $A_0(r)$ . Convenções conforme a Figura 18. . . . .	81
Figura 22 – Soluções numéricas não topológicas para campo elétrico $E(r)$ . Conven- ções conforme a Figura 18. . . . .	82
Figura 23 – Soluções numéricas não topológicas para a distribuição de energia $\varepsilon_{bps}(r)$ . Convenções conforme a Figura 18. . . . .	82
Figura 24 – Soluções numéricas não topológicas para o campo magnético $B(r)$ para $h = \kappa = m = d = 1$ , $g = \sqrt{2}$ e para valores consideráveis de $c$ (diferentes de $c \ll 1$ ). Esquerda - (a): $c = 0$ (linha preta sólida) e $c = +8$ (linha magenta ponto-tracejada). Direita - (b): $c = -8$ (linha magenta tracejada) e (novamente por comparação) $c = 0$ (linha preta sólida). . .	83
Figura 25 – Soluções numéricas não topológicas para a distribuição de energia $\varepsilon_{bps}(r)$ . Convenções conforme a Figura 24. . . . .	84
Figura 26 – Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil $\alpha(r)$ , obtidas via as equações (6.64) e (6.65), para $\kappa = g = 1$ , $h = 5$ , $m = 1$ e $d = 1$ e diferentes valores de $c \ll 1$ . Esquerda - (a): $c = 0$ (linha preta sólida) e o perfil analítico correspondente (com $r_0 = 10$ , linha magenta tracejada). Direita - (b): $c = -0.1$ (linha azul tracejada), $c = 0.1$ (linha vermelha ponto-tracejada) e (novamente por comparação) $c = 0$ (linha preta sólida). . .	85
Figura 27 – Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil $A(r)$ . Con- venções conforme a Figura 26. . . . .	85
Figura 28 – Soluções numéricas não topológicas para o campo magnético $B(r)$ . Convenções conforme a Figura 26. . . . .	86
Figura 29 – Soluções numéricas não topológicas para o potencial $A_0(r)$ (esquerda- (a)) e para o campo elétrico $E(r)$ correspondente (direita-(b)). Aqui, utilizamos os mesmos valores anteriores para os parâmetros, i.e., $\kappa =$ $g = 1$ , $h = 5$ , $m = 1$ , $d = 1$ , além disso, utilizamos $c \ll 1$ . Em ambos os perfis, temos os valores: $c = 0$ (linha preta sólida) e o perfil analítico correspondente (com $r_0 = 10$ , linha magenta tracejada). . . . .	87
Figura 30 – Soluções numéricas não topológicas para o potencial $A_0(r)$ . Utilizamos os mesmos valores anteriores para os parâmetros, $\kappa = g = 1$ , $h = 5$ , $m = 1$ , $d = 1$ e diferentes valores de $c \ll 1$ , que são: $c = -0.1$ (linha azul tracejada), $c = 0.1$ (linha vermelha ponto-tracejada) e (novamente por comparação) $c = 0$ (linha preta sólida) . . . . .	88
Figura 31 – Soluções numéricas não topológicas para o campo elétrico $E(r)$ . Con- venções conforme a Figura 30. . . . .	88

Figura 32 – Soluções numéricas não topológicas para a distribuição de energia $\varepsilon_{bps}(r)$ . Convenções conforme a Figura 26. . . . .	89
Figura 33 – Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil $\alpha(r)$ , obtidas via as Eqs. (6.64) e (6.65), para $\kappa = g = 1$ , $h = 5$ , $m = 1$ e $d = 1$ ; para valores consideráveis de $c$ (diferentes de $c \ll 1$ ). Esquerda - (a): $c = 0$ (linha preta sólida), $c = 1$ (vermelha tracejada), $c = 3$ (azul tracejada) e $c = 5$ (verde sólida). Direita - (b): $c = -1$ (linha vermelha ponto-tracejada), $c = -3$ (linha azul tracejada), $c = -5$ (linha verde ponto-tracejada) e (novamente por comparação) $c = 0$ (linha preta sólida).	90
Figura 34 – Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil $A(r)$ . Con- venções conforme a Figura 33. . . . .	91
Figura 35 – Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil $\alpha(r)$ , obtidas via as Eqs. (6.64) e (6.65), para $\kappa = g = 1$ , $h = 5$ , $m = 1$ e $d = 1$ ; para valores consideráveis de $c$ (diferentes de $c \ll 1$ ). Esquerda - (a): $c = 0$ (linha preta sólida), $c = 7$ (linha azul claro ponto-tracejada), $c = 9$ (linha laranja tracejada) e $c = -7$ (linha azul claro ponto-tracejada). Direita - (b): $c = -7$ (linha azul claro ponto-tracejada), $c = -9$ (linha laranja ponto-tracejada) e (novamente por comparação) $c = 0$ (linha preta sólida). . . . .	91
Figura 36 – Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil $A(r)$ . Con- venções conforme a Figura 35. . . . .	92
Figura 37 – Soluções numéricas não topológicas para o campo magnético $B(r)$ . Convenções conforme a Figura 33. . . . .	92
Figura 38 – Solução numérica não topológicas para o potencial elétrico $A_0(r)$ , obtidas para $\kappa = g = 1$ , $h = 5$ , $m = 1$ e $d = 1$ , para valores consideráveis de $c$ (diferentes de $c \ll 1$ ), i.e., $c = 0$ (linha preta sólida), $c = 1$ (vermelha tracejada), $c = 3$ (azul tracejada) e $c = 5$ (verde sólida). . . . .	93
Figura 39 – Soluções numéricas não topológicas para o potencial $A_0(r)$ para $\kappa = g =$ $1$ , $h = 5$ , $m = 1$ , $d = 1$ , e para valores consideráveis de $c$ (diferentes de $c \ll 1$ ), que incluem: $c = -1$ (linha vermelha ponto-tracejada), $c =$ $-3$ (linha azul tracejada), $c = -5$ (linha verde ponto-tracejada) e (novamente por comparação) $c = 0$ (linha preta sólida) . . . . .	94
Figura 40 – Soluções numéricas não topológicas para o campo elétrico $E(r)$ . Con- venções conforme a Figura 38. . . . .	94
Figura 41 – Soluções numéricas não topológicas para o campo elétrico $E(r)$ . Con- venções conforme a Figura 39. . . . .	95
Figura 42 – Soluções numéricas não topológicas para a distribuição de energia $\varepsilon_{bps}(r)$ . Convenções conforme a Figura 33. . . . .	95

Figura 43 – Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil $\alpha(r)$ , levando em conta uma magnitude considerável para a função [ $\alpha(r) \geq 1$ ]. Tais soluções são obtidas via as Eqs. (6.64) e (6.65), para $\kappa = g = m = d = 1$ , $h = 1.4$ , $r_0 = 3.2$ e para valores variáveis de $c$ . Esquerda - (a): $c = 0$ (linha preta sólida), $c = +0.30$ (linha roxa sólida), $c = +0.40$ (linha laranja sólida), $c = +0.48$ (linha cinza sólida). Direita - (b): $c = -0.30$ (linha roxa tracejada), $c = -0.40$ (linha laranja tracejada) e $c = -0.48$ (linha cinza tracejada). . . . .	97
Figura 44 – Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil $A(r)$ . Convenções conforme a Figura 43. . . . .	97
Figura 45 – Soluções numéricas não topológicas para o campo magnético $B(r)$ . Convenções conforme a Figura 43. . . . .	98
Figura 46 – Solução numérica não topológicas para o potencial elétrico $A_0(r)$ . Convenções conforme a Figura 43-(a). . . . .	99
Figura 47 – Soluções numéricas não topológicas para o potencial $A_0(r)$ . Convenções conforme a Figura 43-(b). . . . .	99
Figura 48 – Soluções numéricas não topológicas para o campo elétrico $E(r)$ . Convenções conforme a Figura 43-(a). . . . .	100
Figura 49 – Soluções numéricas não topológicas para o campo elétrico $E(r)$ . Convenções conforme a Figura 43-(b). . . . .	100
Figura 50 – Soluções numéricas não topológicas para a distribuição de energia $\varepsilon_{bps}(r)$ . Convenções conforme a Figura 43. . . . .	101

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>SÓLITONS BPS TOPOLÓGICOS EM UM MODELO MAXWELL- <math>CP(2)</math></b>	<b>23</b>
<b>2.1</b>	<b>O modelo <math>CP(2)</math></b>	<b>23</b>
<b>2.2</b>	<b>O modelo Maxwell-<math>CP(2)</math> efetivo</b>	<b>26</b>
2.2.1	Formalismo BPS aplicado ao modelo Maxwell- $CP(2)$	28
<b>2.3</b>	<b>Sólitons BPS topológicos oriundos do modelo Maxwell-<math>CP(2)</math></b>	<b>30</b>
2.3.1	Soluções BPS	33
2.3.1.1	Comportamento aproximado das soluções na origem	34
2.3.1.2	Comportamento aproximado das soluções no limite assintótico	36
<b>3</b>	<b>SÓLITONS BPS TOPOLÓGICOS EM UM MODELO CHERN- SIMONS-<math>CP(2)</math></b>	<b>38</b>
<b>3.1</b>	<b>O modelo Chern-Simos-<math>CP(2)</math> efetivo</b>	<b>38</b>
3.1.1	Formalismo BPS aplicado ao modelo Chern-Simos- $CP(2)$	39
<b>3.2</b>	<b>Sólitons topológicos oriundos do modelo Chern-Simos-<math>CP(2)</math></b>	<b>41</b>
3.2.1	Soluções BPS	44
3.2.1.1	Comportamento aproximado das soluções na origem	46
3.2.1.2	Comportamento aproximado das soluções no limite assintótico	47
<b>4</b>	<b>SÓLITONS BPS TOPOLÓGICOS EM UM MODELO MAXWELL- <math>CP(2)</math> COM IMPUREZA MAGNÉTICA</b>	<b>48</b>
<b>4.1</b>	<b>O cenário Maxwell-<math>CP(2)</math> estendido pela presença de uma impureza magnética</b>	<b>48</b>
4.1.1	Formalismo BPS aplicado ao cenário Maxwell- $CP(2)$ com impureza	50
<b>4.2</b>	<b>Sólitons topológicos oriundos do cenário Maxwell-<math>CP(2)</math> estendido</b>	<b>52</b>
4.2.1	Soluções BPS na presença da impureza magnética	54
4.2.1.1	Comportamento aproximado das soluções na origem	56
4.2.1.2	Comportamento aproximado no limite assintótico	57
<b>5</b>	<b>SÓLITONS BPS TOPOLÓGICOS EM UM MODELO CHERN- SIMONS-<math>CP(2)</math> COM IMPUREZA MAGNÉTICA</b>	<b>58</b>
<b>5.1</b>	<b>O cenário Chern-Simos-<math>CP(2)</math> estendido pela presença de uma impureza magnética</b>	<b>58</b>

5.1.1	Formalismo BPS aplicado ao cenário Chern-Simos- $CP(2)$ com impureza magnética . . . . .	59
<b>5.2</b>	<b>Sólitons topológicos oriundos do modelo Cher-Simons-<math>CP(2)</math> estendido</b>	<b>61</b>
5.2.1	Soluções BPS na presença da impureza magnética . . . . .	62
5.2.1.1	Comportamento aproximado das soluções na origem . . . . .	65
5.2.1.2	Comportamento aproximado das soluções no limite assintótico . . . . .	66
<b>6</b>	<b>SÓLITONS BPS NÃO TOPOLÓGICOS EM UM MODELO CHERN-SIMONS-<math>CP(2)</math> COM UMA IMPUREZA MAGNÉTICA</b>	<b>67</b>
<b>6.1</b>	<b>O cenário Chern-Simos-<math>CP(2)</math> estendido pela presença de uma impureza magnética para o caso não topológico</b>	<b>67</b>
6.1.1	Formalismo BPS aplicado ao cenário Chern-Simos- $CP(2)$ com impureza magnética para o caso não topológico . . . . .	68
<b>6.2</b>	<b>Sólitons BPS não topológico oriundos de um modelo Chern-Simons-<math>CP(2)</math></b>	<b>69</b>
6.2.1	O cenário aproximado: soluções analíticas com pequenas amplitudes . . . . .	72
6.2.2	O cenário numérico 1: uma impureza localizada . . . . .	74
6.2.2.1	O caso $\Delta \ll 1$ . . . . .	74
6.2.2.2	O caso geral - impureza considerável . . . . .	78
6.2.3	O cenário numérico 2: uma impureza magnética periódica . . . . .	84
6.2.3.1	O caso $\Delta \ll 1$ . . . . .	84
6.2.3.2	O caso geral - impureza considerável . . . . .	89
<b>6.3</b>	<b>Soluções numéricas para uma impureza periódica, tendo em vista <math>\alpha(r) \geq 1</math>.</b>	<b>96</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>102</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>106</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>114</b>
	<b>APÊNDICE A – DETERMINAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA OS CAMPOS</b>	<b>115</b>
<b>A.1</b>	<b>Condições de contorno do Capítulo 2</b>	<b>116</b>
	<b>APÊNDICE B – RECUPERAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EULER LAGRANGE A PARTIR DAS EQUAÇÕES BPS.</b>	<b>119</b>
<b>B.1</b>	<b>Recuperação da Lei de Ampère relacionada ao Capítulo 2</b>	<b>120</b>
<b>B.2</b>	<b>Recuperação das equações do campo <math>CP(2)</math> relacionada ao Capítulo 2120</b>	<b>120</b>

# 1 INTRODUÇÃO

*Defeitos topológicos* [1] são estruturas que resultam a partir de uma transição de fase<sup>1</sup> relacionada a um sistema físico. Um dos exemplos de formação de tais estruturas remonta ao universo primordial, onde o resfriamento, originário do processo de expansão, conduziu a transições de fase. Na interface das diferentes regiões dessa transição, defeitos topológicos eram formados. Dentre estes defeitos, podemos citar as paredes cósmicas, as cordas cósmicas e os monopólos magnéticos.

De um modo geral, os defeitos topológicos são estáveis, espacialmente localizados e apresentam uma energia finita. Além disso, dentre estas configurações, existe uma categoria única que possui a propriedade especial de manter a sua forma e velocidade ao longo de sua trajetória, mesmo após a colisão com outros defeitos análogos. Estas configurações recebem o nome de *Sóliton*.

Neste sentido, sóliton é o nome dado a certos tipos de fenômenos ondulatórios não lineares, altamente estáveis e espacialmente localizados, também chamados de “ondas solitárias” [2]. Esta peculiaridade foi primeiramente observado em 1834 pelo engenheiro escocês e filósofo natural John Scott Russell [3, 4]. Enquanto cavalgava ao longo de um estreito canal de embarcação, situado nas proximidades de Edimburgo, na Escócia, ele se deparou com uma onda localizada de grande amplitude e altamente estável que mantinha sua forma ao se propagar, sem apresentar qualquer tipo de atenuação. Apesar desta descoberta datar de 1834, uma descrição teórica satisfatória desse fenômeno foi alcançado somente em 1895 por Korteweg e de Vries, através de uma equação não linear que conseguia explicar as propriedades dessa onda e que ficou conhecida como equação KDV [5]

As configurações de ondas solitárias estudadas por John Scott Russell são retratadas como sólitons hidrodinâmicos, a estabilidade dessas estruturas é garantida pela combinação entre efeitos de não linearidade e dispersão. Em virtude disso, elas conseguem se mover com velocidade e forma constantes. No entanto, em ambos os lados desse tipo de sóliton, o estado do meio é o mesmo. Por esse motivo, eles contrastam com uma outra classe de sólitons [6] que surgem a partir de uma região de transição entre fases distintas de um sistema, cuja estabilidade é atribuída ao caráter topológico dessas estruturas. Estes são chamados de *sólitons topológicos* [7, 8].

No domínio da física da matéria condensada, a investigação acerca dos defeitos topológicos ganhou relevância com a descoberta da supercondutividade, em 1911, por

<sup>1</sup> Nem toda transição de fase leva ao aparecimento de um defeito topológico, no entanto, se há o aparecimento, em um dado sistema físico, de tais estruturas, podemos afirmar que houve uma transição de fase.

Heike Kamerlingh Onnes [9], onde, analisando o comportamento da resistência elétrica do mercúrio a baixas temperaturas, ele observou a queda abrupta dessa resistência ao atingir uma temperatura crítica de  $T_c \approx 4,2K$ .

Uma observação interessante a respeito do comportamento dos supercondutores, na presença de um campo magnético externo, foi levantada pelos alemães Karl Walther Meissner e Robert Ochsenfeld em 1933. Eles verificaram que estes materiais, na fase supercondutora, repeliam o campo magnético no seu interior, se este estivesse abaixo de um determinado valor crítico. Tal comportamento se assemelhando a de um material diamagnético perfeito. Este fenômeno ficou conhecido como efeito Meissner [10].

Uma explicação teórica bastante relevante para este comportamento foi realizada pelos irmãos F. e H. London, através de uma teoria fenomenológica, publicada dois anos posteriormente, que ficou conhecida como teoria de London [11]. A equação de London, obtida levando-se em consideração as equações de Maxwell do eletromagnetismo, descreve de forma satisfatória a ausência do campo magnético no interior de um material supercondutor. No entanto, o comportamento peculiar destes materiais não se restringe apenas à presença de um campo magnético, nesse sentido, a teoria de London não se demonstrou totalmente eficaz em explicar o estado supercondutor na ausência do campo magnético externo.

Diante deste empecilho é que em 1950 é formulada a teoria de Ginzburg-Landau [12], baseada na Mecânica Quântica e no processo termodinâmico de transição de fase de segunda ordem, por L.D. Landau e V.L. Ginzburg, que conseguiu explicar várias propriedades fundamentais da supercondutividade e serviu como base para o russo A. A. Abrikosov classificar os supercondutores em tipo I e II, em 1957 [13].

Para esses materiais, existe uma transição de fase entre o estado normal e o supercondutor quando, não só a temperatura, mas também o campo magnético externo e a corrente elétrica aplicada atingem os seus valores críticos ( $T_c$ ,  $H_c$  e  $J_c$ ). Para o supercondutor do tipo I essa transição ocorre de maneira abrupta e nítida, sendo que, no estado supercondutor, o campo magnético externo, abaixo do valor crítico, não consegue penetrar no interior do material, o que faz com que eles obedeçam perfeitamente ao efeito Meissner. Para este caso, podemos observar a existência de apenas um valor crítico para o campo magnético.

Todavia, para o supercondutor tipo II essa transição ocorre de maneira suave, havendo um estado intermediário, delimitado por dois valores críticos para o campo magnético ( $H_{c1} < H < H_{c2}$ ). É exatamente nessa zona de transição que reside uma rede cristalina de defeitos bidimensionais, conhecidos como vórtices, que apresentam um fluxo magnético quantizado, por onde é possível a penetração do campo  $H$ . Essa rede de vórtices ficou conhecida como *rede de Abrikosov*, em virtude da notória contribuição do físico russo. Como podemos inferir, os defeitos topológicos topológicos são estruturas que surgem

em meio a transições de fase, formadas a partir de uma quebra espontânea de simetria relacionada à teoria.

Em um contexto diferente, no qual se inserem as teorias clássicas de campos, os defeitos topológicos surgem como soluções de sistemas não-lineares. Estas soluções, além de possuírem um caráter relativístico, também podem ser interpretadas como configurações semelhantes a uma partícula, que se diferem das partículas elementares usuais, pelo fato destas últimas surgirem a partir do processo de quantização dos campos clássicos. Apesar disso, os defeitos topológicos são entidades espacialmente localizadas, que se caracterizam por apresentarem uma energia finita e certa estabilidade, que lhes é conferida em virtude de sua estrutura topológica. Tal estrutura é representada por quantidade conservada, denominada de carga topológica,<sup>2</sup> que decorre da quebra espontânea da simetria da teoria. Em contrapartida, existe uma outra classe de defeitos, cuja quantidade conservada correspondente configura uma carga de *Noether*, que está relacionada à simetria do Lagrangeano [14]. Esta outra classe é classificada como sólitons não topológicos [15, 16]. Além disso, as configurações topológicas levam à presença de um estado de vácuo degenerado para a teoria, enquanto que para a não topológica, há a necessidade de um estado de vácuo não degenerado.

Em especial, o estudo sobre defeitos topológicos emerge na teoria de campos motivado pela existência dessas estruturas em sistemas eletromagnéticos. Em vista disso, defeitos foram estudados pela primeira vez em 1973 em um cenário mais simples da eletrodinâmica de *Maxwell Higgs*, por H. B. Nielsen e P. Olesen, cuja proposta era descrever *cordas duais* [17], utilizando, para tal finalidade, um modelo baseado em vórtices abelianos. Um detalhe especial relacionado a essa teoria é que, no limite não relativístico, ela consegue retomar os resultados obtidos através da teoria de Ginzburg-Landau [12] da supercondutividade.

Dentre os principais tipos defeitos topológicos, podemos destacar o *kink* [18], o *vórtice* [17] e o *monopólo magnético* [19]. Os *kinks* são considerados defeitos unidimensionais; são obtidos dentro do contexto de teorias de campos definidas em um espaço-tempo (1+1)-dimensional, contendo um único campo escalar. Os vórtices, por outro lado, são bidimensionais, eles são soluções obtidas no terreno de teorias de *calibre Abelianas* em um espaço-tempo (2+1)-dimensional, nas quais são acoplados um campo de *calibre* a um campo escalar complexo, em virtude do Teorema de Derrick<sup>3</sup> [20]. Neste sentido, eles surgem a partir da quebra espontânea da simetria de calibre. Por fim, os monopólos magnéticos são obtidos através de teorias de *calibre não Abelianas* (3+1)-dimensionais,

<sup>2</sup> Vale ressaltar que a carga topológica é uma quantidade quantizada em termos do *winding number*  $m$ , o que reflete também na quantização do fluxo magnético, uma vez que, na grande maioria dos casos, existe uma proporcionalidade entre essas quantidades.

<sup>3</sup> Este teorema restringe a possibilidade de obtenção de soluções estáveis independentes do tempo oriundas de teorias de campos escalares apenas ao caso unidimensional

caracterizadas pela presença de um tripleto de campos de calibre e um tripleto de campos escalares reais.

Em particular, os defeitos topológicos resultam como soluções das equações de segunda ordem de Euler-Lagrange pertencentes a teorias de campos clássicos. No entanto, existe um determinado limite no qual essas estruturas também podem ser obtidas através de um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, denominadas de *equações BPS* ou *autoduais*. Dentro desse limite, conhecido como limite de Bogomol'nyi, as forças (de atração ou de repulsão) entre os defeitos se anulam, tornando possível encontrar configurações múltiplas e estáveis, dotadas de uma energia mínima. Esta energia se demonstra proporcional à carga topológica e ao fluxo magnético, apresentando uma quantização relacionada ao *winding number*  $m$ , em se tratando de configurações topológicas. Para as configurações não topológicas, essa quantização não se faz presente.

O termo *BPS* (*Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield*) tem origem no fato de que o método empregado na obtenção de soluções estáveis para determinadas equações de campos clássicos foi proposto por Bogomol'nyi em um trabalho publicado em 1976 [21]. Neste estudo, ele discute a estabilidade de soluções do tipo parede de domínio, linha de vórtice e monopólos magnéticos. No entanto, um pouco antes, em 1975, M. K. Prasad e C. M. Sommerfield já haviam publicado um trabalho sobre o assunto [22], em que abordaram a estabilidade de soluções do tipo monopolo magnético e dyon.

O método BPS consiste em reescrever a relação para o funcional da energia estacionária de um determinado sistema em função de termos quadráticos e de um termo contendo uma derivada total. Da minimização desse funcional e da utilização das condições de contorno inerentes ao sistema, é possível obter, mediante a anulação dos termos quadráticos, as equações de primeira ordem, cujas soluções também satisfazem as equações de Euler-Lagrange do sistema, sendo, portanto, soluções genuínas da teoria.

Além do método descrito anteriormente, também podemos destacar outros algoritmos conhecidos que levam às equações BPS, como o estudo da conservação do tensor energia-momento [23] e o método On-Shell [24, 25]. Neste contexto, em 1990, vórtices de primeira ordem ou autoduais foram estudados dentro da eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs, tanto para o caso topológico [26], quanto para o não topológico [27]. As configurações obtidas neste cenário, diferente dos vórtices de Abrikosov, são dotadas de carga elétrica total não nula, ou seja, são eletricamente carregadas; além de também apresentarem um momento angular e um momento de dipolo.

Dando prosseguimento a esses cenários, é interessante considerar a existência de defeitos bem comportados que surgem dentro do modelo  $CP(2)$  bidimensional, em que o campo escalar da teoria interage minimamente com o campo de calibre Abelian. Tal modelo pertence a uma teoria mais geral, denominada  $CP(N - 1)$ , onde o termo  $CP$  significa *Projetivo Complexo* e o  $N$  corresponde ao número de componentes do campo da teoria, ou

seja, uma  $N$ -upla de campos escalares complexos. Nesse sentido, a relevância dos modelos  $CP(N-1)$  bidimensionais reside no fato de que eles representam um excelente laboratório teórico para modelar, em um ambiente simplificado, uma variedade de fenômenos e propriedades inerentes a teorias de calibre não-abelianas 4-dimensionais [28, 29], como as teorias de Yang-Mills [30–33] e a QCD (Cromodinâmica Quântica) [34, 35]. A relação com estas teorias em muito se deve ao fato de que os modelos  $CP(N-1)$  bidimensionais apresentarem uma topologia não trivial, além de serem capazes de gerar soluções do tipo *instantons*. Outro detalhe importante se resume no fato de que o modelo  $CP(1)$  é equivalente ao modelo sigma  $O(3)$  [36]. No entanto, para valores de  $N$  maiores essa equivalência é perdida<sup>4</sup>

Neste contexto, soluções radialmente simétricas, correspondentes a vórtices, foram obtidas de uma teoria  $CP(2)$  bidimensional calibrada pela ação do termo de Maxwell por A. Yu. Loginov [37] em 2016. Nesse trabalho, no entanto, as configurações de vórtices foram obtidas resolvendo as equações de Euler-Lagrange de segunda ordem diretamente. Estas configurações apresentaram tanto fluxo magnético quantizado quanto não quantizado (contínuo).

Neste mesmo cenário, também foi possível obter estruturas autoduais que saturavam o limite de Bogomol'nyi [38]. Tais configurações de primeira ordem apresentaram o fluxo magnético quantizado. Ademais, a interação entre o campo  $CP(2)$  e o campo de calibre Abelian, através da ação do termo de Chern-Simons, também demonstrou ser útil para obtenção de sólitons de primeira ordem, tanto para o caso topológico [39], quanto para o não topológico [40]. Além dessas abordagens, estruturas solitônicas autoduais também se demonstraram possíveis em uma teoria  $CP(2)$  calibrada pela ação do termo de Maxwell-Chern-Simons [41], e no contexto de cenários estendidos, também baseados pelo modelo  $CP(2)$  calibrado, como os sólitons Maxwell- $CP(2)$  saturados por uma função dielétrica não trivial [42] e os sólitons Maxwell- $CP(2)$  com estruturas internas, devido a presença de um campo escalar adicional [43].

As interações entre defeitos e impurezas têm sido observadas em vários sistemas físicos, como matéria condensada [44] e condensados de Bose-Einstein [45]. O problema dinâmico envolvendo um vórtice em movimento e uma impureza estática foi considerado nas referências [46, 47], enquanto que uma prescrição para a introdução de impurezas em sistemas BPS (que preserva parcialmente as equações de primeira ordem) foi apresentada nas referências [48, 49], e então aplicado ao estudo do espalhamento entre um kink e um kink aprisionado por uma impureza, como visto na Ref. [50]. Questões adicionais relativas à presença de impurezas incluem o estudo dos principais efeitos que elas introduzem

<sup>4</sup> Para  $N > 2$  o modelo  $CP(N-1)$  continua a manter a sua estrutura de vácuo não trivial, além de conseguir gerar soluções do tipo instantons; o que não se repete para o modelo sigma  $O(N)$ , que para  $N > 3$  passa a ter uma estrutura de vácuo trivial, além de impossibilitar a obtenção de instantons como soluções.

na teoria de Manton-Schrödinger-Chern-Simons [51] e sua dinâmica de vórtices [52, 53]. Outra questão interessante reside na busca por configurações que emergem de modelos de campos estendidos que simulam fenômenos de matéria condensada. Nesse sentido, os primeiros estudos sobre a existência de estruturas BPS em um cenário de Maxwell-Higgs ampliado por impurezas (ambas magnética e elétrica) foram feitas por Tong e Wong [54]. Nesse estudo, eles demonstram como a presença de impurezas afeta o espaço de módulos (espaço interno dos campos) correspondente. Além disso, vórtices BPS de primeira ordem inerentes a um cenário Chern-Simons-Higgs saturado por impurezas foram estudados na Ref. [55], enquanto o problema dinâmico que envolve o espalhamento de um vórtice de Maxwell-Higgs em movimento por uma impureza magnética estática foi considerado nas referências [56, 57].

Um outro exemplo significativo acerca de sistemas dopados com uma impureza é demonstrado na Ref. [58]. Neste trabalho temos o acoplamento do cenário Maxwell-Higgs a um campo escalar neutro  $\chi$ <sup>5</sup>, relacionado à simetria  $Z_2$ . No acoplamento crítico, que corresponde ao limite autodual, as equações de primeira ordem podem ser identificadas como as de um modelo Maxwell-Higgs estendido pela presença da impureza magnética, cuja forma desta impureza muda de acordo com as propriedades do campo escalar neutro, o que permite uma análise dos parâmetros relacionados à impureza em termos de certas propriedades do defeito tipo kink.

Para apresentar os nossos resultados, o presente manuscrito está estruturado da seguinte forma: nos capítulos 2 e 3, introduzimos o estudo acerca das configurações topológicas que se assemelham a vórtices, e que saturam o limite de Bogomol'nyi, engendradas pelo modelo  $CP(2)$   $(2 + 1)$ -dimensional calibrado em dois contextos diferentes. Nessa perspectiva, utilizamos uma configuração específica para o campo  $CP(2)$  (2.10) para ser acoplada minimamente, tanto ao campo de Maxwell quanto ao campo de Chern-Simons, respectivamente. O objetivo destes capítulos introdutórios é demonstrar a aplicação do método BPS e apresentar os modelos efetivos que servirão como parâmetro para comparação das soluções obtidas nos contextos estendidos.

Nos capítulos 4 e 5, abordamos as teorias ampliadas, que consistem no modelo  $CP(2)$   $(2 + 1)$ -dimensional calibrado (tanto pelo campo de Maxwell quanto pelo campo de Chern-Simons, separadamente) na presença de um termo adicional que representa a impureza magnética. Nestes contextos, utilizamos uma configuração específica para o campo  $CP(2)$ , através da qual procuramos por soluções com simetria radial que saturam o limite de Bogomol'nui. Com este intuito e, sendo possível a implementação do formalismo BPS, descrevemos as principais diferenças entre as soluções resultantes e as obtidas no contexto sem impureza, discutindo como sua presença afeta a formação dos defeitos

<sup>5</sup> O acoplamento deste campo escalar neutro ao cenário Maxwell-Higgs também está relacionado ao surgimento de uma estrutura interna nos vórtices originados neste cenário. Tal interação se faz por intermédio de uma permeabilidade generalizada [59]

correspondentes.

No Capítulo 6, analisamos a interação entre defeitos não topológicos e uma impureza magnética, no âmbito do modelo Chern-Simons-CP(2). Ao final, resumimos os resultados contidos neste trabalho e apresentamos nossas conclusões e perspectivas.

As teorias apresentadas neste trabalho são definidas em um espaço-tempo  $(2 + 1)$ -dimensional. Os índices gregos denotam as coordenadas de espaço-tempo  $(\mu, \nu, \rho = 0, 1, 2)$ , enquanto que os índices latinos correspondem a coordenadas espaciais apenas  $(i, j, k = 1, 2)$ . A métrica utilizada é  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1)$ , o quadri-vetor posição é definido como  $x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) = (t, x, y)$ , o campo de calibre é dado por  $A^\mu = (A^0, A^1, A^2) = (A_t, A_x, A_y)$  e a derivada em relação às coordenadas do espaço-tempo possui a forma  $\partial_\mu = (\partial_0, \partial_1, \partial_2) = (\partial_t, \partial_x, \partial_y)$ . Além disso, utilizamos o sistema de unidades naturais ( $c = \hbar = 1$ ).

## 2 Sólitons BPS topológicos em um modelo Maxwell- $CP(2)$

### 2.1 O modelo $CP(2)$

Neste capítulo inicial, iremos primeiramente apresentar o modelo  $CP(2)$  Abeliano em  $(2+1)$ -dimensões, mostrando alguns aspectos inerentes a esta teoria. Posteriormente, iremos investigar a formação de sólitons autoduais, que se assemelham a vórtices, a partir deste modelo calibrado.

O modelo  $CP(2)$  corresponde a uma teoria de campos projetivos complexos relacionada a uma teoria mais geral, denominada de  $CP(N-1)$  [60–62]. Tal teoria é caracterizada por uma simetria global  $SU(N)$ , além de também possuir uma simetria local  $U(1)$ .

Os modelos  $CP(N-1)$  foram introduzidos como uma generalização do modelo sigma não linear  $O(N)$ , por volta de 1978 [63], para o caso em que o grupo de simetria é o  $SU(N)$ . O principal interesse na estrutura destes modelos, na versão bidimensional, reside no fato deles configurarem uma teoria efetiva com topologia não trivial, que guardam uma similaridade com as teorias de calibre não Abelianas quadridimensionais [28, 29], como as teorias de Yang-Mills [30–33], tornando possível a análise de uma variedade de fenômenos e propriedades inerentes a estes modelos de maneira mais simplificada.

O modelo  $CP(N-1)$  é descrito por  $\phi_a$  (com  $a = 1, 2, 3, \dots, N$ ) campos escalares complexos, que assumem valores no “coset space”  $G/H$ , sendo  $G = SU(N)$  e  $H = U(N-1)$ . Em se tratando do modelo  $CP(2)$ , temos um tripleto de campos escalares complexos,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

sujeitos à condição:

$$\phi^\dagger \phi = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 = h. \quad (2.2)$$

Isto significa que o espaço interno dos campos compreende uma esfera de raio  $h^{1/2}$ , inserida em  $\mathbb{C}^3$ , ou uma hiperesfera em  $\mathbb{R}^6$ , como podemos perceber na Figura 1.

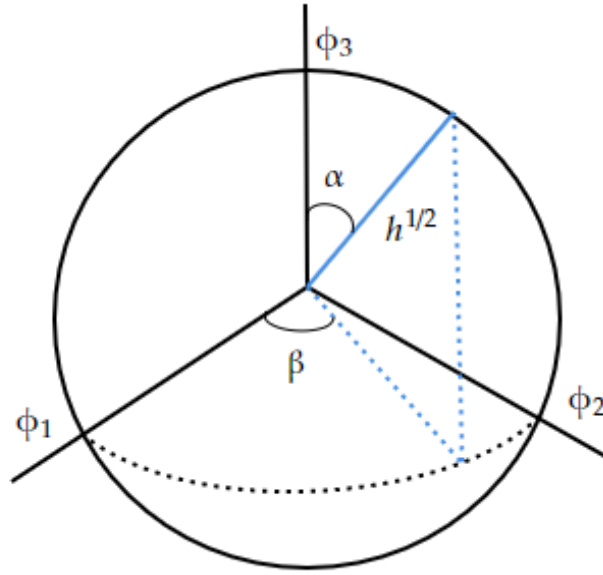


Figura 1 – Espaço interno dos campos relacionado ao modelo  $CP(2)$ . Os campos escalares complexos  $\phi_a$  formam uma esfera de raio  $h^{1/2}$  no espaço  $\mathbb{C}^3$  ou uma hipersfera em  $\mathbb{R}^6$ .

Da análise da figura acima, podemos obter a configuração geral para o campo da teoria a partir da parametrização envolvendo os ângulos,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = h^{1/2} \begin{pmatrix} e^{m_1 i \theta} \sin \alpha \cos \beta \\ e^{m_2 i \theta} \sin \alpha \sin \beta \\ e^{m_3 i \theta} \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

com  $m_i \in \mathbb{Z}$ . No entanto, para que possamos gerar soluções solitônicas junto ao modelo  $CP(2)$ , devemos considerar  $\beta$  constante, conforme demonstrado em [37]. Além disso, o parâmetro  $\alpha$  se restringe ao intervalo angular  $0 < \alpha < \pi/2$  para sólitos com caráter topológico, o que corresponde apenas a  $1/8$  da hipersfera sendo varrida.

A densidade de lagrangeana que representa o modelo  $CP(2)$  puro é dada na seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{CP(2)} = |\mathcal{D}_\mu \phi|^2, \quad (2.4)$$

onde temos a derivada covariante  $\mathcal{D}_\mu \phi$  expressa por

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi - h^{-1} (\phi^\dagger \partial_\mu \phi) \phi. \quad (2.5)$$

A relação (2.4) é invariante perante transformações globais do grupo  $SU(3)$ ,

$$\phi_a(x) \rightarrow U_{ab} \phi_b(x), \quad (2.6)$$

e também sobre transformações  $U(1)$  locais,

$$\phi_a(x) \rightarrow e^{i\theta} \phi_a(x). \quad (2.7)$$

A densidade de corrente topológica intrínseca ao campo  $CP(2)$  é dada por

$$\tau_\mu = \frac{1}{2\pi i h} \varepsilon_{\mu\nu\rho} (\mathcal{D}^\nu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\rho \phi), \quad (2.8)$$

onde  $\mathcal{D}_\nu \phi$  é demonstrado em (2.5). A carga topológica correspondente a (2.8) é expressa por

$$q = \int d^2 \mathbf{x} \tau_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (2.9)$$

Soluções solitônicas são passíveis de serem geradas a partir do modelo  $CP(2)$ , desde que sejam feitas certas restrições no espaço interno dos campos. Em detrimento disso, passamos a considerar a estruturas topológicas engendradas pela configuração de campo (tal como considerado na Ref. [64]) mostrada a seguir:

$$\phi = \begin{pmatrix} (-1)^k \psi \\ \psi^* \\ \phi_3 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

onde  $k \in \mathbb{Z}$ , com  $\psi \in \mathbb{C}$  e  $\phi_3 \in \mathbb{R}$ . A configuração acima está relacionada às soluções  $CP(2)$  desenvolvidas nas referências [37–39, 41], nas quais são adotadas o ângulo  $\beta$  fixo em (2.3). Para esta configuração, em particular, o caso  $\beta = \beta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ <sup>1</sup>. Estas definições específicas reduzem o espaço interno dos campos (demonstrado na Figura 1), convertendo-o de uma hipersfera de raio  $h^{1/2}$ , definida em  $\mathbb{R}^6$  a uma simples esfera em  $\mathbb{R}^3$ , o que corresponde a um espaço interno definido por  $S^2$ , se adotarmos  $h = 1$ . Por essa razão, podemos abordar a formação de sólitos topológicos dentro desta teoria.

Por efeito da definição (2.10) para o campo  $CP(2)$ , o modelo (2.4) agora é reescrito como

$$\mathcal{L}_{CP(2)} = 2(\partial_\mu \psi) (\partial^\mu \psi^*) + (\partial_\mu \phi_3) (\partial^\mu \phi_3). \quad (2.11)$$

Esta configuração  $CP(2)$ , quando acoplada minimamente ao campo de calibre Abelian, possui uma estrutura BPS bem definida, que suporta soluções solitônicas, estudadas em [37–39, 41].

Vale ressaltar que o campo  $CP(N - 1)$  descreve excitações topológicas em alguns sistemas atômicos frios. Por exemplo, no caso de um férmion ( $s = 1/2$ ), o modelo  $CP(1)$  descreve a dinâmica do spin [65], enquanto o modelo  $CP(3)$  pode ser usado para estudar o caso  $s = 3/2$  [66]. Neste sentido, esperamos então que a configuração  $CP(2)$  (2.10) descreva as excitações de um condensado de Bose-Einstein ( $s = 1$ ), como vórtices ou monopólos [67–69].

<sup>1</sup> Tais definições equivalem a tomar  $m_1 = -m_2 = m$ ,  $m_3 = 0$  e  $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$  em (2.3)

## 2.2 O modelo Maxwell-CP(2) efetivo

Abordamos agora o modelo que descreve a interação entre o campo CP(2) e o campo de calibre Abelian  $A^\mu$ , através de um acoplamento mínimo entre os campos, cuja dinâmica é controlada pela ação do termo de Maxwell. O modelo é redefinido pela seguinte densidade de lagrangeana em  $(2 + 1)$ -dimensões:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |\nabla_\mu\phi|^2 - U(\phi), \quad (2.12)$$

onde o primeiro termo representa a ação do termo de Maxwell, o segundo termo corresponde à interação entre o campo de calibre e o setor CP(2). Esta interação se dá por meio da derivada covariante:

$$\nabla_\mu\phi = D_\mu\phi - h^{-1}(\phi^\dagger D_\mu\phi)\phi, \quad (2.13)$$

que representa o acoplamento mínimo entre o campo de calibre Abelian  $A_\mu$ , com simetria  $U(1)$ , e o campo CP(2). Aqui,  $D_\mu\phi$  é dado por

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - igA_\mu\mathbb{Q}\phi, \quad (2.14)$$

onde  $g$  simboliza uma constante de acoplamento e  $\mathbb{Q}$  uma matriz de carga, real, diagonal e de traço nulo, expressa na forma:

$$\mathbb{Q} = \frac{1}{2}\text{diag}(1, -1, 0). \quad (2.15)$$

que está relacionada à matriz  $\lambda_3 = \text{diag}(1, -1, 0)$ , uma das matrizes de Gell-Mann que formam a base do grupo  $SU(3)$ .

O terceiro termo de (2.12) representa o potencial  $U(\phi_3)$ , que define a variedade de vácuo do modelo correspondente, além de ser responsável pela quebra da simetria  $SU(3)$  da teoria. Além disso, usamos a relação

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.16)$$

para o tensor do campo eletromagnético e  $\epsilon^{123} = +1$  para o símbolo antissimétrico  $\epsilon^{\alpha\mu\nu}$ . A densidade de lagrangeana (2.12) é invariante perante a transformação de calibre local  $U(1)$ ,

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta \quad (2.17)$$

(com  $e = g/2$ ), o que também abrange a relação (2.7).

A densidade de corrente topológica pertencente à teoria CP(2) calibrada é dada por

$$\bar{q}_\mu = \frac{1}{2\pi i h} \varepsilon_{\mu\nu\rho} \left[ (\nabla^\nu\phi)^\dagger (\nabla^\rho\phi) - i\frac{g}{2} F^{\nu\rho} (\phi^\dagger \mathbb{Q}\phi) \right], \quad (2.18)$$

cujas cargas topológicas correspondente se expressa por

$$\mathcal{Q}_{top} = \int d^2\mathbf{x} \bar{q}_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (2.19)$$

Esperamos, daqui em diante, abordar a ocorrência de sólitons BPS no contexto da configuração (2.10) para o campo  $CP(2)$ . Para essa definição, o modelo é então reescrito de tal modo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi - U(\phi_3) - \lambda(h - \phi^\dagger\phi), \quad (2.20)$$

em que  $D_\mu\phi$  é definido em (2.14), além do mais,  $\lambda$  corresponde ao multiplicador de Lagrange, que garante a condição

$$h = \phi^\dagger\phi = 2|\psi|^2 + |\phi_3|^2. \quad (2.21)$$

Neste contexto, equação de movimento para o campo de calibre é

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = J^\mu, \quad (2.22)$$

onde  $J^\mu$  é a densidade de corrente conservada relacionada ao campo  $\psi$ , expressa por

$$J^\mu = ig \left[ (\hat{D}^\mu\psi)^* \psi - \psi^* (\hat{D}^\mu\psi) \right], \quad (2.23)$$

com a quantidade  $\hat{D}^\mu\psi$  representando a derivada covariante (2.14), que agora é definida unicamente para o campo  $\psi$ ,

$$\hat{D}_\mu\psi = \partial_\mu\psi - \frac{ig}{2}A_\mu\psi. \quad (2.24)$$

Do mesmo modo, temos as equações para as componentes do campo  $CP(2)$ , expressas em termos dos campos  $\psi$  e  $\phi_3$ , i.e.,

$$\hat{D}_\mu\hat{D}^\mu\psi - \lambda\psi = 0, \quad (2.25)$$

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\phi_3}U(\phi_3) - \lambda\phi_3 = 0. \quad (2.26)$$

Através da combinação das duas equações anteriores e da relação (2.21) chegamos à seguinte expressão para o multiplicador de Lagrange:

$$\lambda h = -2|\hat{D}_\mu\psi|^2 - (\partial_\mu\phi_3)^2 + \frac{1}{2}\phi_3\frac{\partial}{\partial\phi_3}U(\phi_3). \quad (2.27)$$

A lei de Gauss do modelo (2.20) é obtida como a componente temporal (i.e., para  $\mu = 0$ ) da Eq. (2.22). Para configurações de campo independentes do tempo, essa equação pode ser escrita no seguinte formato:

$$\partial_k\partial_k A_0 = g^2 A_0 |\psi|^2, \quad (2.28)$$

na qual  $k = 1, 2$  abrange apenas as coordenadas espaciais.

Por outro lado, a componente espacial ( $\mu = k$ ) da Eq. (2.22) nos remete à lei de Ampère do modelo, que para configurações independentes do tempo é dada por

$$\epsilon_{kj}\partial_j B = -J_k, \quad (2.29)$$

onde utilizamos  $F_{jk} = \epsilon_{kj}B$  ( $j, k = 1, 2$ ).

A partir de (2.28) verifica-se a possibilidade de fixação do calibre temporal ( $A^0 = 0$ ), dado que esta escolha satisfaz identicamente a supramencionada lei de Gauss. Neste caso, vale frisar, que as configurações resultantes apresentarão carga elétrica total nula.

### 2.2.1 Formalismo BPS aplicado ao modelo Maxwell-CP(2)

Neste ponto, concentramos o nosso foco sobre as estruturas energeticamente estáveis independentes do tempo. Com esse intuito, procedemos à minimização da energia total do nosso modelo através da implementação do formalismo BPS, tendo como ponto de partida a expressão para sua densidade de energia, i.e.,

$$\varepsilon = \frac{1}{2}B^2 + (D_k\phi)^\dagger D_k\phi + U(\phi_3). \quad (2.30)$$

Um detalhe importante para implementação do formalismo BPS consiste em sermos capazes de reescrever a densidade de energia em uma forma quadrática fechada, que consiste em reestruturar a relação para a densidade, utilizando manipulação algébrica, de modo que apareçam termos quadráticos em sua composição. Portanto, com esse intuito, utilizamos as seguintes relações:

$$\frac{1}{2}B^2 + U = \frac{1}{2} \left( B \mp \sqrt{2U} \right)^2 \pm B\sqrt{2U}, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} |D_k\phi|^2 &= (D_k\phi)^\dagger D_k\phi = \frac{1}{2} \left| D_j\phi \pm i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} (\phi \times D_k\phi)^* \right|^2 \\ &\mp i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} \phi \cdot (D_j\phi \times D_k\phi), \end{aligned} \quad (2.32)$$

o que nos permite reformular a expressão para a densidade de energia (2.30), ou seja,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2} \left( B \mp \sqrt{2U} \right)^2 + \frac{1}{2} \left| D_j\phi \pm i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} (\phi \times D_k\phi)^* \right|^2 \\ &\pm B \left( \sqrt{2U} - h^{1/2}g\phi_3 \right) + \varepsilon_{bps}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde implementamos

$$\varepsilon_{bps} = \pm 2\pi h \bar{q}_0, \quad (2.34)$$

com

$$\bar{q}_0 = \frac{1}{i2\pi h^{3/2}} [\epsilon_{jk}\phi \cdot (D_j\phi \times D_k\phi) + ihg\phi_3B], \quad (2.35)$$

que representa a densidade de carga topológica inerente ao cenário CP(2) calibrado para a configuração (2.10).

A energia total do sistema efetivo é dada pela integração da densidade de energia sobre as coordenadas espaciais,

$$\mathcal{E} = \int d^2\mathbf{x}\varepsilon, \quad (2.36)$$

o que equivale a

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \int d^2\mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} (B \mp \sqrt{2U})^2 + \frac{1}{2} \left| D_j \phi \pm i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} (\phi \times D_k \phi)^* \right|^2 \right] \\ & \pm \int d^2\mathbf{x} [B (\sqrt{2U} - h^{1/2} g \phi_3)] + \mathcal{E}_{bps}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde  $\mathcal{E}_{bps}$  é dado da seguinte maneira:

$$\mathcal{E}_{bps} = \int \varepsilon_{bps} d^2\mathbf{x} = \pm 2\pi h \mathcal{Q}_{top}, \quad (2.38)$$

enquanto que  $\mathcal{Q}_{top}$  é definido como

$$\mathcal{Q}_{top} = \int d^2\mathbf{x} \bar{q}_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (2.39)$$

O processo de minimização da energia requer que a integral no penúltimo termo da Eq. (2.37) se anule, desse modo, obtemos como consequência uma equação de vínculo,

$$\sqrt{2U} - h^{1/2} g \phi_3 = 0, \quad (2.40)$$

da qual podemos extrair como resultado a expressão:

$$U(\phi_3) = \frac{1}{2} h g^2 (\phi_3)^2, \quad (2.41)$$

que é o potencial autodual pertencente ao modelo, i.e., o potencial que suporta a existência de soluções de primeira ordem. Com esse resultado, podemos concluir a implementação do formalismo BPS para o modelo (2.20), escrevendo a energia total no formato:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \int d^2\mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} (B \mp h^{1/2} g \phi_3)^2 + \frac{1}{2} \left| D_j \phi \pm i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} (\phi \times D_k \phi)^* \right|^2 \right] \\ & + \mathcal{E}_{bps} \geq 2\pi h |\mathcal{Q}_{top}|, \end{aligned} \quad (2.42)$$

a partir do qual podemos observar que no limite em que a energia total assume o seu valor mínimo, conhecido como *bound de Bogomol'nyi*, os termos quadráticos dentro das integrais são assumidos como sendo nulos, de onde se obtém as equações BPS ou autoduais do sistema,

$$B = \pm h^{1/2} g \phi_3, \quad (2.43)$$

$$D_j \phi = \mp \frac{i}{h^{1/2}} \epsilon_{jk} (\phi \times D_k \phi)^*, \quad (2.44)$$

cujas soluções são configurações independentes do tempo com energia total dada por

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{bps} = 2\pi h |\mathcal{Q}_{top}|, \quad (2.45)$$

que é proporcional à carga topológica do modelo, como esperado.

Em particular, a segunda equação BPS pode ser decomposta em termos dos campos  $\psi$  e  $\phi_3$  como

$$\hat{D}_j \psi = \mp \frac{i}{h^{1/2}} \epsilon_{jk} (\psi \partial_k \phi_3 - \phi_3 \hat{D}_k \psi). \quad (2.46)$$

$$\partial_j \phi_3 = \pm \frac{1}{gh^{1/2}} \epsilon_{jk} J_k, \quad (2.47)$$

onde  $J_k$  é a densidade de corrente conservada, previamente definida em (2.23).

No limite BPS, as equações autoduais recuperam a lei de Ampère estacionária (2.29) e as equações estacionárias de Euler-Lagrange para os campos  $\psi$  (2.25) e  $\phi_3$  (2.26), como demonstrado no Apêndice B.1.

## 2.3 Sólitons BPS topológicos oriundos do modelo Maxwell-CP(2)

Uma vez que construímos com êxito a estrutura BPS mais geral relacionada ao modelo Maxwell-CP(2), particularizamos agora o nosso estudo concentrando nossa atenção sobre as configurações de primeira ordem independentes do tempo com simetria radial. Para atingir tal objetivo iremos recorrer à projeção do nosso sistema, através da utilização de um ansatz<sup>2</sup> para nossas soluções (aqui,  $r$  e  $\theta$  correspondem às coordenadas polares), i.e.,

$$A_i = -\frac{\epsilon_{ij} x_j}{gr^2} A(r), \quad (2.48)$$

$$\psi = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} e^{im\theta} \sin(\alpha(r)) \quad \text{e} \quad \phi_3 = \sqrt{\hbar} \cos(\alpha(r)), \quad (2.49)$$

onde  $\epsilon_{ij}$  e  $x_j = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  são, respectivamente, as componentes do tensor de Levi-Civita bidimensional ( $\epsilon_{12} = +1$ ) e um vetor de posição, enquanto que  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  denota o *winding number* das configurações resultantes. Além de que,  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  são funções adimensionais que dependem apenas da coordenada radial. Elas devem garantir a regularidade das soluções descritas pelo ansatz acima quando na origem, com esse intuito, elas deverão satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$\alpha(r=0) = 0 \quad \text{e} \quad A(r=0) = 0. \quad (2.50)$$

Devido à utilização desse mapa para as soluções, o campo magnético será dado por

$$B = -\frac{1}{gr} \frac{dA}{dr}, \quad (2.51)$$

cujos fluxos magnéticos associados são perpendiculares ao plano espacial no qual o sóliton com simetria radial está contido, sendo expresso pela relação:

$$\Phi = 2\pi \int_0^\infty B r dr = -\frac{2\pi}{g} A_\infty, \quad (2.52)$$

onde utilizamos (2.51), além de definirmos  $A(r \rightarrow \infty) = A_\infty$ .

Podemos agora reescrever os principais resultados, obtidos de maneira geral, na forma projetada, i.e., na forma radialmente simétrica, que correspondem à implementação

<sup>2</sup> O ansatz em questão possui a mesma estrutura que a utilizada na Ref. [37], porém, ela foi adaptada para a configuração de campo (2.10), que corresponde ao caso  $\beta_1$  desenvolvido na referência.

do ansatz anterior, (2.48) e (2.49), nesses resultados. Neste sentido, para a densidade de energia (2.30), temos

$$\varepsilon = \frac{1}{2}B^2 + U(\alpha) + h \left[ \left( \frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{4r^2} (2m - A)^2 \right]. \quad (2.53)$$

Assim como para o potencial autodual (2.41),

$$U(\alpha) = \frac{1}{2}h^2g^2 \cos^2 \alpha. \quad (2.54)$$

Da análise da condição de finitude da energia para as configurações solitônicas  $\varepsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  [vide Eq. (2.53)], podemos inferir os seguintes comportamentos no limite  $r \rightarrow \infty$ :

$$B(r) \rightarrow 0, \quad (2.55)$$

$$U(\alpha) \rightarrow 0, \quad (2.56)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} \rightarrow 0, \quad (2.57)$$

A condição (2.55) requer que o campo de calibre  $A_i$  seja um “gauge puro”, cujo valor assumido é proporcional ao grau topológico  $m$  (vide Apêndice A.1), ou melhor,

$$A(r \rightarrow \infty) \rightarrow 2m. \quad (2.58)$$

Já a condição (2.56) para o potencial (2.54) é satisfeita pelo seguinte valor assintótico:

$$\alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow \pi/2. \quad (2.59)$$

Este valor corresponde aos estados de vácuo da teoria, responsáveis por minimizar o potencial. Ele possui relação com o círculo de mínimos que forma a variedade de vácuo. Uma vez que essa variedade corresponde a um vácuo degenerado para a teoria, i.e., os vários pontos deste círculo de mínimo irão resultar na anulação do potencial, esta condição de contorno assintótica para  $\alpha(r)$  diz respeito a uma configuração topológica. Além disso, verifica-se que este comportamento assintótico satisfaz a condição (2.57).

Em suma, para que haja a descrição de estruturas solitônicas topológicas que apresentem energia bem definida e finita, as funções  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  deverão satisfazer as seguintes condições de contorno assintóticas:

$$\alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad A(r \rightarrow \infty) \rightarrow 2m, \quad (2.60)$$

além de também satisfazer as condições de contorno na origem (2.50).

Neste contexto, as equações BPS (2.43) e (2.44) também podem ser reescritas na forma radialmente simétrica, i.e.,

$$\frac{d\alpha}{dr} = \mp \frac{\sin \alpha}{2r} (2m - A), \quad (2.61)$$

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp hg^2 \cos \alpha, \quad (2.62)$$

onde os sinais superiores (inferiores) valem para  $m < 0$  ( $m > 0$ ). Além disso, a densidade de carga topológica (2.35) assume a forma

$$\bar{q}_0 = \frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dr} [(2m - A) \cos \alpha], \quad (2.63)$$

a partir da qual o limite inferior da energia (2.38) passa a ser dado por

$$\mathcal{E}_{bps} = \mp 4\pi h m = 4\pi h |m|, \quad (2.64)$$

onde utilizamos as condições (2.50) e (2.60) para resolver a integração.

Além do mais, a partir da Eq. (2.53), chegamos à expressão para a densidade de energia BPS,

$$\varepsilon_{bps} = 2U(\alpha) + 2h \left( \frac{d\alpha}{dr} \right)^2. \quad (2.65)$$

Observa-se que o valor da energia total das configurações BPS (2.64) resulta quantizado pelos valores inteiros de  $m$ .

Além disso, através da condição de contorno (2.60), obtemos a expressão para o fluxo magnético (2.52),

$$\Phi = -\frac{4\pi}{g} m, \quad (2.66)$$

através da qual, podemos concluir que

$$\mathcal{E}_{bps} = \pm gh\Phi, \quad (2.67)$$

ou seja,  $\mathcal{E}_{bps}$  e  $\Phi$  são proporcionais entre si, sendo ambos quantizados de acordo com o *winding number*  $m$ .

Levando-se em consideração o ansatz (2.49) e a condição de contorno (2.41), podemos concluir que, o valor mínimo para o potencial é atingido quando,

$$|\phi_3|^2 = 0, \quad |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 = h, \quad (2.68)$$

o que significa que a variedade de vácuo da teoria é representada por um círculo de mínimos  $S^1_{vac}$ , descrito no plano que contém os campos  $\phi_1$  e  $\phi_2$ .

Em uma analogia à teoria de Ginzburg-Landau [12] para a supercondutividade, podemos fazer a seguinte interpretação:

$$\Psi_S = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2, \quad (2.69)$$

onde a relação acima representa a função para a densidade dos 'elétrons de supercondução'.

### 2.3.1 Soluções BPS

Na sequência, apresentamos as soluções numéricas para as funções  $\alpha(r)$  e  $A(r)$ , o campo magnético  $B(r)$  e a densidade energia  $\varepsilon_{bps}(r)$ , obtidas através das equações autoduais (2.61) e (2.62), por intermédio das condições de contorno (2.50) e (2.60). Para simplificar, adotamos  $g = h = 1$ .

A Figura 2 apresenta as soluções numéricas para os campos  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  (curva preta sólida para  $m = 1$ , curva azul tracejada para  $m = 2$ , curva vermelha ponto-tracejada para  $m = 3$  e curva laranja sólida para  $m = 4$ ), a partir das quais podemos verificar a forma monotônica como estas soluções obedecem às condições de contorno. Nesse sentido, podemos destacar o comportamento relacionado ao campo  $CP(2)$ ,  $\alpha(r)$ , onde percebemos que, quanto maior o valor de  $m$ , maior é a forma acentuada com que as curvas tenderão ao seu valor de mínimo,  $\alpha(r \rightarrow 0) \rightarrow 0$ , valor esse que se encontra exatamente na origem, onde o módulo do campo magnético é máximo,  $|B| = 1$ , correspondendo ao núcleo dos sólitons bidimensionais. Em contrapartida, este campo deverá assumir o seu valor máximo na região em que o módulo do campo magnético é nulo [vide Eq. (2.62)], i.e.,  $\alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow \pi/2$ , o qual independe do valor de  $m$ . Este comportamento em muito se assemelha às soluções para os vórtices BPS do tipo Abrikosov-Nielsen-Olesen, que são caracterizados por apresentarem um fluxo magnético quantizado, propriedade esta que também se faz presente nas estruturas aqui abordadas.

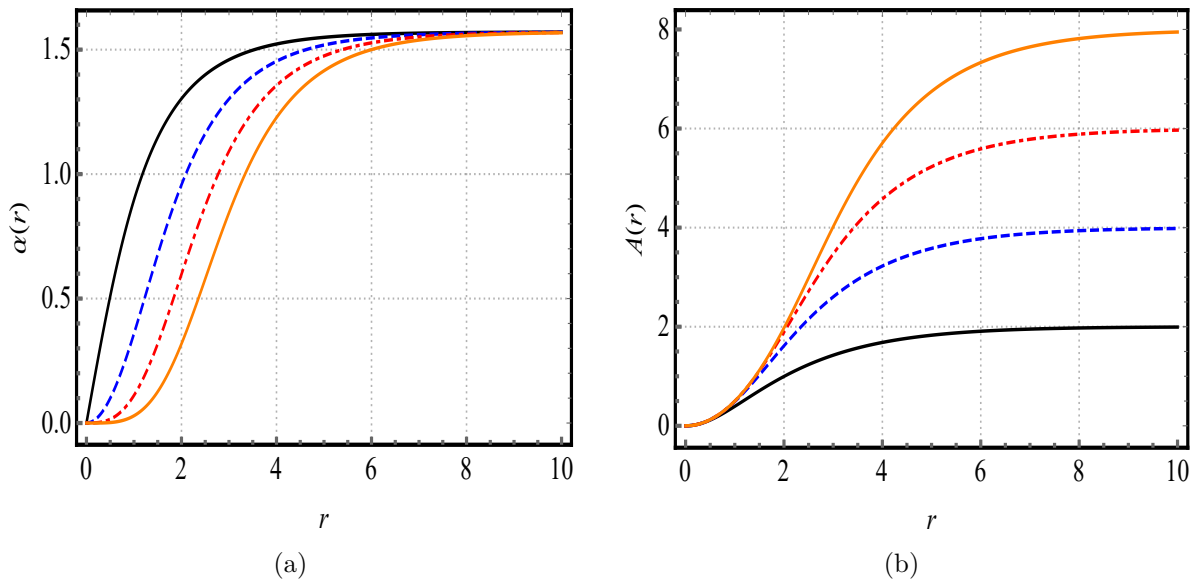


Figura 2 – Soluções numéricas para os campos  $\alpha(r)$  (a) e  $A(r)$  (b), obtidas a partir das equações de primeira ordem (2.61) e (2.62), de acordo com as condições de contorno (2.50) e (2.60), em que fixamos  $g = h = 1$ . Na figura, mostramos os perfis para  $m = 1$  (linha preta sólida),  $m = 2$  (linha azul tracejada),  $m = 3$  (linha vermelha ponto-tracejada) e  $m = 4$  (linha laranja sólida).

Na Figura 3 mostramos as soluções numéricas para o campo magnético  $B(r)$  e para a densidade de energia BPS  $\varepsilon(r)$ , construídas a partir das equações (2.51) e (2.53), com as mesmas convenções visualizadas na Figura 2. Para o campo magnético, verificamos as condições  $B(r \rightarrow 0) \rightarrow -gh = -1$  e  $B(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , que independem do valor de  $m$ ; haja vista que o módulo do campo magnético é maior na origem,  $|B| = 1$ , o que corresponde a uma região com fluxo magnético mais intenso, além disso, também podemos perceber o aumento da distribuição de  $B(r)$ , em relação ao centro do sóliton, à medida que o valor de  $m$  aumenta. Além do mais, a condição assintótica deste campo implica na condição de finitude da energia. Para a densidade de energia BPS, a curva para o valor  $m = 1$  atinge seu máximo em  $r \rightarrow 0$  e decresce até se anular, indicando que o sóliton correspondente é totalmente concentrado na origem. No entanto, para  $m \neq 1$ , as soluções formam anéis<sup>3</sup> centrados na origem, cujos raios (amplitudes) aumentam (diminuem) com o valor do *winding number*  $m$ . Este comportamento indica que os sólitons correspondentes formam uma região anelar com maior densidade de energia deslocada em relação à origem, em virtude do aumento do valor de  $m$ .

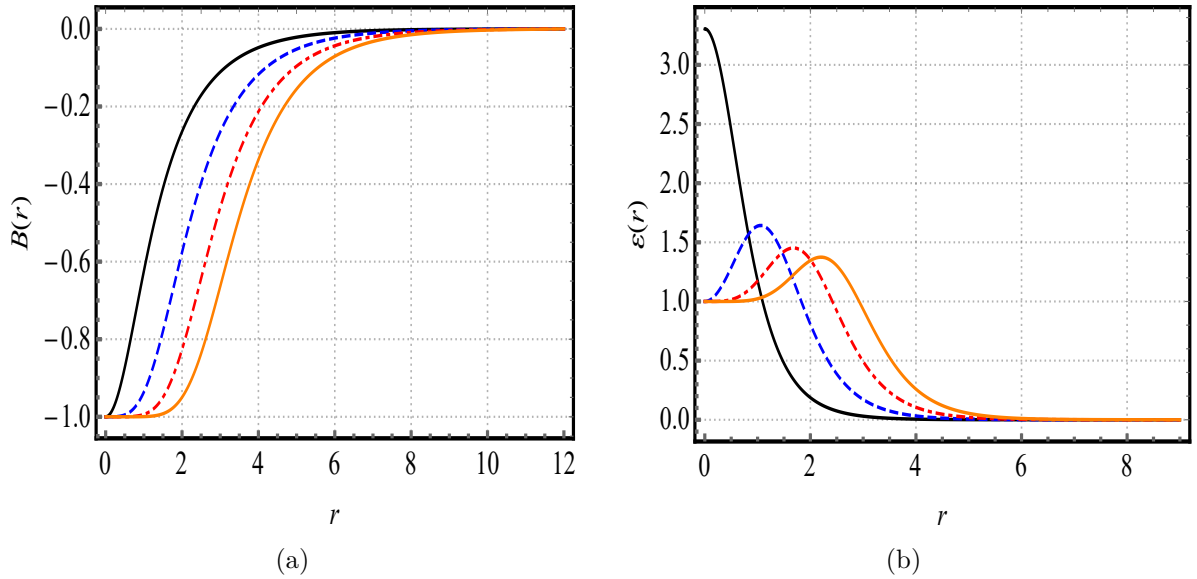


Figura 3 – Soluções numéricas para o campo magnético  $B(r)$  (a) e para a densidade de energia BPS  $\varepsilon(r)$  (b), obtidas a partir de equações (2.51) e (2.53). As convenções são as mesmas da Figura 2.

### 2.3.1.1 Comportamento aproximado das soluções na origem

É possível analisar o comportamento dos campos  $\alpha(r)$  e  $A(r)$ , tanto na origem quanto no limite assintótico, através de soluções analíticas aproximadas que são válidas

<sup>3</sup> Estes anéis correspondem aos gráficos em três dimensões espaciais, resultantes da revolução dos perfis em torno da origem. As figuras apresentadas neste trabalho são apenas representações planares.

apenas dentro desses limites, e são obtidas via o processo de linearização das equações de primeira ordem (2.61) e (2.62), com o auxílio de (2.50) e (2.60).

A partir deste ponto, por uma questão de simplicidade, serão consideradas apenas os valores positivos de  $m$  ( $m > 0$ ) ou, de maneira equivalente, apenas os sinais inferiores (positivos) das expressões (2.61) e (2.62).

Assim, as equações a serem consideradas são:

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{\sin \alpha}{2r} (2m - A), \quad (2.70)$$

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = hg^2 \cos \alpha. \quad (2.71)$$

O processo de linearização busca definir a dependência funcional dos campos no entorno das condições de contorno. Para tanto, tendo em mente as condições (2.50), os campos  $\alpha(r)$  e  $A(r)$ , quando próximos da origem, podem ser decompostos via

$$\alpha(r) \approx 0 + \delta\alpha(r) \quad \text{e} \quad A(r) \approx 0 + \delta A(r), \quad (2.72)$$

nas quais  $\delta\alpha(r)$  e  $\delta A(r)$  são pequenas variações submetidas às condições:

$$\delta\alpha(r \rightarrow 0) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \delta A(r \rightarrow 0) \rightarrow 0. \quad (2.73)$$

Na sequência, substituindo as expressões (2.72) nas equações (2.70) e (2.71), e considerando apenas as contribuições lineares em  $\delta$ , resulta, respectivamente, em

$$\frac{d}{dr} \delta\alpha = m \frac{\delta\alpha}{r}, \quad (2.74)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \delta A = hg^2. \quad (2.75)$$

As soluções destas equações são:

$$\delta\alpha(r) = C_0 r^m \quad \text{e} \quad \delta A(r) = \varrho r^2, \quad (2.76)$$

onde  $C_0$  é uma constante real positiva (definida numericamente) e  $\varrho = hg^2/2$ .

Por conseguinte, os campos em (2.72) resultam em

$$\alpha(r) \approx C_0 r^m \quad \text{e} \quad A(r) \approx \varrho r^2. \quad (2.77)$$

Soluções estas que são válidas apenas no limite  $r \rightarrow 0$ .

Com esses resultados, é possível também obter uma solução aproximada para a densidade de energia BPS. Com esse intuito, utilizando a Eq.(2.65), chegamos a

$$\varepsilon_{bps}(r) \approx h^2 g^2 + 2hm^2 C_0^2 r^{2m-2} \quad (2.78)$$

que, em  $r = 0$ , pode ser decomposta em

$$\varepsilon_{bps}(r = 0) \approx h^2 g^2 + 2hC_0^2, \quad \text{para } m = 1, \quad (2.79)$$

$$\varepsilon_{bps}(r = 0) \approx h^2 g^2, \quad \text{para } m \neq 1. \quad (2.80)$$

Se considerarmos, na expressão acima, os mesmos valores para os parâmetros utilizados nas soluções numéricas, i.e.,  $g = h = 1$ , chegamos a

$$\varepsilon_{bps}(r = 0) \approx 1 + 2C_0^2, \quad \text{para } m = 1, \quad (2.81)$$

$$\varepsilon_{bps}(r = 0) \approx 1, \quad \text{para } m \neq 1, \quad (2.82)$$

que se encaixam nos valores limites, descritos na Figura 3; de onde também podemos inferir que  $C_0 \approx 1,0723$ .

### 2.3.1.2 Comportamento aproximado das soluções no limite assintótico

De maneira análoga, tendo em mente as condições (2.60), os campos  $\alpha(r)$  e  $A(r)$ , quando no limite  $r \rightarrow \infty$ , podem ser decompostos como:

$$\alpha(r) \approx \frac{\pi}{2} - \delta\alpha(r) \quad \text{e} \quad A(r) \approx 2m - \delta A(r), \quad (2.83)$$

nas quais  $\delta\alpha(r)$  e  $\delta A(r)$  devem satisfazer

$$\delta\alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \delta A(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (2.84)$$

Novamente, substituindo (2.83) nas equações (2.70) e (2.71), e considerando apenas as contribuições lineares em  $\delta$ , resulta, em um sistema de equações diferenciais acopladas, a saber:

$$\frac{d}{dr}\delta\alpha = -\frac{\delta A}{2r}, \quad (2.85)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\delta A = -hg^2\delta\alpha, \quad (2.86)$$

cujas soluções são:

$$\delta\alpha(r) = C_\infty e^{-\mathcal{M}_\alpha r} \quad \text{e} \quad \delta A(r) = 2C_\infty \sqrt{\varrho} r e^{-\mathcal{M}_A r}. \quad (2.87)$$

Assim, os campos em (2.83) podem ser reescritos como:

$$\alpha(r) \approx \frac{\pi}{2} - C_\infty e^{-\mathcal{M}_\alpha r} \quad \text{e} \quad A(r) \approx 2m - 2C_\infty \sqrt{\varrho} r e^{-\mathcal{M}_A r}, \quad (2.88)$$

nas quais

$$\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}_A = \sqrt{\varrho} \quad (2.89)$$

representam as massas dos bósons relacionados aos correspondentes campos da teoria. Neste caso, a relação  $\mathcal{M}_\alpha/\mathcal{M}_A = 1$  define o limite de Bogomol'nyi, ou seja, o limite no qual é possível a implementação do formalismo BPS. Além disso, a constante  $C_\infty$  é definida como positiva e real.

Inferre-se da Eq. (2.89) que os campos bosônicos são responsáveis por adicionar a mesma quantidade de inércia (massa) às partículas no limite autodual

### 3 Sólitos BPS topológicos em um modelo Chern-Simons- $CP(2)$

No capítulo anterior, observamos que o modelo Maxwell- $CP(2)$  bidimensional suporta estruturas BPS com simetria rotacional e eletricamente descarregadas, dotadas apenas de campo magnético. Isto se deve ao fato do potencial escalar se anular, em virtude da fixação do calibre temporal ( $A^0 = 0$ ). Todavia, existe uma teoria de calibre bidimensional que nos permite originar defeitos com simetria rotacional que sejam eletricamente carregados. Esta teoria é descrita por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{CS} - A_\mu J^\mu, \quad (3.1)$$

onde a dinâmica do campo de calibre é governada pelo termo de Chern-Simons [70]:

$$\mathcal{L}_{CS} = -\frac{\kappa}{4}\epsilon^{\alpha\mu\nu}A_\alpha F_{\mu\nu}. \quad (3.2)$$

Além de que existe a presença de um termo incluindo uma fonte externa de corrente  $J^\mu$ , que é conservada:  $\partial_j J^\mu = 0$ .

Uma das principais utilidades do termo de Chern-Simons envolve a descrição do Efeito Hall Quântico [71–73], tanto o inteiro como o fracionário.

#### 3.1 O modelo Chern-Simons- $CP(2)$ efetivo

De maneira similar ao que foi trabalhado no capítulo anterior, iremos agora abordar o modelo que descreve a interação entre o campo  $CP(2)$  e o campo de calibre Abelian  $A^\mu$ , cuja a dinâmica agora é controlada pelo termo de Chern-Simons. O modelo é definido pela seguinte densidade de lagrangeana em  $(2 + 1)$ -dimensões:

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4}\epsilon^{\alpha\mu\nu}A_\alpha F_{\mu\nu} + |\nabla_\mu \phi|^2 - U(\phi), \quad (3.3)$$

onde o primeiro termo corresponde à ação padrão de Chern-Simons, em que se faz presente o parâmetro  $\kappa$ , uma constante de acoplamento adimensional. Além disso, usamos  $\epsilon_{123} = 1$  para o símbolo antissimétrico  $\epsilon_{\alpha\mu\nu}$ . As demais definições básicas, convenções e discussões correlatas introduzidas no capítulo anterior permanecem as mesmas.

Em nosso estudo, consideramos mais uma vez a configuração (2.10) para o campo  $CP(2)$ . Para tal configuração, o modelo efetivo (3.3) passa a ser expresso de tal modo:

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4}\epsilon^{\alpha\mu\nu}A_\alpha F_{\mu\nu} + |D_\mu \phi|^2 - U(\phi_3) - \lambda(h - \phi^\dagger \phi), \quad (3.4)$$

onde  $\lambda$  se refere ao multiplicador de Lagrange, que garante a condição (2.21) ( $h = \phi^\dagger \phi = 2|\psi|^2 + |\phi_3|^2$ ).

Neste contexto, equação de movimento para o campo de calibre é

$$\frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} + J^\mu = 0, \quad (3.5)$$

onde  $J^\mu$  é a densidade de corrente conservada, expressa na Eq. (2.23).

A componente temporal ( $\mu = 0$ ) de (3.5) nos fornece

$$\kappa B = \rho = -g^2 A_0 |\psi|^2 = -\frac{1}{2} g^2 A_0 (h - \phi_3^2), \quad (3.6)$$

que corresponde à Lei de Gauss para configurações de campos independentes do tempo. De sua análise, podemos concluir que não existe mais a possibilidade de fixação do calibre temporal. Dessa forma, as estruturas resultantes irão possuir tanto campos elétricos como magnéticos não triviais.

Por outro lado, se considerarmos a componente espacial de (3.5) ( $\mu = k, k = 1, 2$ ), obtemos como resultado a lei de Ampère, que para configurações independentes do tempo, se exprime da seguinte forma:

$$\kappa \partial_j A_0 = -\epsilon_{jk} J_k, \quad (3.7)$$

onde utilizamos  $F^{j0} = E^j = -\partial_j A^0$ .

A equação (3.6) demonstra que a densidade de carga é localmente proporcional ao campo magnético. Desse modo, podemos concluir que o efeito do campo de Chern-Simons é amarrar o fluxo magnético à carga elétrica. Em qualquer ponto que um exista, existirá o outro. Por esse motivo, a teoria de Chern-Simons também é de grande utilidade na descrição de ânions [74, 75]

### 3.1.1 Formalismo BPS aplicado ao modelo Chern-Simons-CP(2)

Vimos no capítulo anterior que a implementação do formalismo BPS está intimamente ligada à obtenção de estruturas energeticamente estáveis independentes do tempo. Neste sentido, tal implementação passa pela minimização do funcional da energia do sistema, sendo de extrema utilidade a relação para a densidade de energia relacionada ao modelo (3.4). Tal expressão pode ser obtida utilizando a componente temporal do tensor energia momento. Deste processo, obtemos

$$\varepsilon = \frac{\kappa^2 B^2}{g^2(h - \phi_3^2)} + (D_k \phi)^\dagger D_k \phi + U(\phi_3). \quad (3.8)$$

Com a finalidade de reescrever a densidade de energia na sua forma quadrática fechada, empregamos as seguintes manipulações algébricas:

$$\frac{\kappa^2 B^2}{g^2(h - \phi_3^2)} + U = \left( \frac{\kappa B}{g(h - \phi_3^2)^{1/2}} \mp \sqrt{U} \right)^2 \pm \frac{2\kappa B}{g(h - \phi_3^2)^{1/2}} \sqrt{U}, \quad (3.9)$$

$$|D_k\phi|^2 = (D_k\phi)^\dagger D_k\phi = \frac{1}{2} \left| D_j\phi \pm i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} (\phi \times D_k\phi)^* \right|^2 \mp i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} \phi \cdot (D_j\phi \times D_k\phi), \quad (3.10)$$

o que nos permite reestruturar a densidade de energia na forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \left( \frac{\kappa B}{g(h - \phi_3^2)^{1/2}} \mp \sqrt{U} \right)^2 + \frac{1}{2} \left| D_j\phi \pm i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} (\phi \times D_k\phi)^* \right|^2 \\ & \pm B \left( \frac{2\kappa\sqrt{U}}{g(h - \phi_3^2)^{1/2}} - h^{1/2}g\phi_3 \right) + \varepsilon_{bps}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde implementamos

$$\varepsilon_{bps} = \pm 2\pi h \bar{q}_0, \quad (3.12)$$

com  $\bar{q}_0$  definido como

$$\bar{q}_0 = \frac{1}{i2\pi h^{3/2}} [\epsilon_{jk}\phi \cdot (D_j\phi \times D_k\phi) + ihg\phi_3 B], \quad (3.13)$$

que corresponde à densidade de carga topológica inerente à estrutura CP(2) calibrada, tendo o mesmo formato encontrado na Eq. (2.35) para o modelo Maxwell-CP(2).

A energia total do sistema efetivo é

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \int d^2\mathbf{x} \left[ \left( \frac{\kappa B}{g(h - \phi_3^2)^{1/2}} \mp \sqrt{U} \right)^2 + \frac{1}{2} \left| D_j\phi \pm i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} (\phi \times D_k\phi)^* \right|^2 \right] \\ & \pm \int d^2\mathbf{x} \left[ B \left( \frac{2\kappa\sqrt{U}}{g(h - \phi_3^2)^{1/2}} - h^{1/2}g\phi_3 \right) \right] + \mathcal{E}_{bps}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde  $\mathcal{E}_{bps}$  representa o limite inferior para o funcional da energia total do sistema, cuja relação é expressa da seguinte maneira:

$$\mathcal{E}_{bps} = \pm 2\pi h \int d^2\mathbf{x} \bar{q}_0 = \pm 2\pi h \mathcal{Q}_{top}, \quad (3.15)$$

com  $\mathcal{Q}_{top}$  definido na Eq. (2.39).

Visando a minimização da energia do sistema, passamos a considerar, no terceiro termo da Eq. (3.14), o fator que acompanha o campo magnético como sendo nulo, o que nos leva à expressão:

$$U(\phi_3) = \frac{g^4 h}{4\kappa^2} (\phi_3)^2 [h - (\phi_3)^2], \quad (3.16)$$

que corresponde à relação para o potencial autodual inerente ao modelo. Com esse resultado, podemos concluir a implementação do formalismo BPS para a teoria, escrevendo a energia total no formato

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \int d^2\mathbf{x} \left\{ \left[ \frac{\kappa B}{g(h - \phi_3^2)^{1/2}} \mp \frac{g^2 h^{1/2}}{2\kappa} \phi_3 (h - \phi_3^2)^{1/2} \right]^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left| D_j\phi \pm i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} (\phi \times D_k\phi)^* \right|^2 \right\} + \mathcal{E}_{bps} \geq 2\pi h |\mathcal{Q}_{top}|. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Podemos observar que a energia total assume o seu valor mínimo,  $\mathcal{E}_{bps}$  (3.15), no limite em que os termos quadráticos dentro das integrais são assumidos como sendo iguais a zero, de onde se obtém as equações BPS,

$$B = \pm \frac{g^3 h^{1/2}}{2\kappa^2} \phi_3 (h - \phi_3^2), \quad (3.18)$$

$$D_j \phi = \mp \frac{i}{h^{1/2}} \epsilon_{jk} (\phi \times D_k \phi)^*. \quad (3.19)$$

cujas soluções implicam em configurações independentes do tempo com energia total igual a

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{bps} = 2\pi h |\mathcal{Q}_{top}|, \quad (3.20)$$

que se demonstra proporcional à carga topológica do modelo.

Em particular, a equação BPS para o campo CP(2) (3.19) possui a mesma forma que a Eq. (2.44), podendo também ser decomposta em termos dos campos  $\psi$  e  $\phi_3$ , como

$$\hat{D}_j \psi = \mp \frac{i}{h^{1/2}} \epsilon_{jk} (\psi \partial_k \phi_3 - \phi_3 \widehat{D}_k \psi), \quad (3.21)$$

$$\partial_j \phi_3 = \pm \frac{1}{gh^{1/2}} \epsilon_{jk} J_k, \quad (3.22)$$

que são as mesmas equações demonstradas em (2.46) e (2.47). Além disso, temos  $J_k$  representando a densidade de corrente conservada, cuja expressão é dada na Eq. (2.23).

## 3.2 Sólitos topológicos oriundos do modelo Chern-Simons-CP(2)

Tendo construído, na seção anterior, a estrutura BPS geral relacionada ao modelo Chern-Simons-CP(2), voltamos nosso foco agora sobre as configurações de primeira ordem, bidimensionais, independentes do tempo e com simetria radial que podem ser extraídas dessa estrutura geral. Nesse sentido, iremos proceder com a projeção do sistema, empregando o mesmo ansatz para as soluções expresso em (2.48) e (2.49), no entanto  $A_0$  agora é assumido como uma função de  $r$ ,

$$A_i = -\frac{\epsilon_{ij} x_j}{gr^2} A(r) \quad \text{e} \quad A_0 = A_0(r), \quad (3.23)$$

$$\psi = \sqrt{\frac{h}{2}} e^{im\theta} \sin(\alpha(r)) \quad \text{e} \quad \phi_3 = \sqrt{h} \cos(\alpha(r)), \quad (3.24)$$

onde as funções adimensionais  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  devem garantir a regularidade em  $r = 0$  das soluções descritas pelo mapa acima, desse modo, elas deverão satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$\alpha(r = 0) = 0 \quad \text{e} \quad A(r = 0) = 0. \quad (3.25)$$

Em virtude do mapa acima, tanto o campo magnético quanto o campo elétrico passam a ser descritos, respectivamente, pelas relações:

$$B = -\frac{1}{gr} \frac{dA}{dr}, \quad (3.26)$$

$$E = -\frac{dA_0}{dr}. \quad (3.27)$$

Além desses resultados, podemos destacar o fluxo magnético associado a (3.26), cuja expressão correspondente é

$$\Phi = 2\pi \int_0^\infty Br dr = -\frac{2\pi}{g} A_\infty, \quad (3.28)$$

onde  $A_\infty$  representa o valor contante assumido por  $A(r)$  no limite assintótico.

Passamos agora a reescrever os principais resultados obtidos para a estrutura BPS geral desenvolvida na seção anterior, com o auxílio do mapa (3.23) e (3.24), o que nos leva à versão radialmente simétrica para estas estruturas, que geram configurações do tipo sólitos de primeira ordem, que se assemelham a vórtices, como resultado. Neste sentido, para a lei de Gaus (3.6), teremos

$$\kappa B = \rho = -\frac{h}{2} g^2 A^0 \sin^2 \alpha. \quad (3.29)$$

De maneira análoga, a densidade de energia (3.8) passa a ser dada por

$$\varepsilon = \frac{\kappa^2 B^2}{g^2 h \sin^2 \alpha} + U(\alpha) + h \left[ \left( \frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{4r^2} (2m - A)^2 \right]. \quad (3.30)$$

Assim como o potencial BPS (3.16), cuja forma projetada é expressa por

$$U(\alpha) = \frac{g^4 h^3}{4\kappa^2} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha. \quad (3.31)$$

Mais uma vez nos ateremos à análise da condição da finitude da energia  $\varepsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , levando em consideração a Eq. (3.30), de onde podemos concluir os seguintes comportamentos em  $r \rightarrow \infty$ :

$$B(r) \rightarrow 0, \quad (3.32)$$

$$U(\alpha) \rightarrow 0, \quad (3.33)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} \rightarrow 0, \quad (3.34)$$

A condição (3.32) é satisfeita quando o campo de calibre assume o “gauge puro”, que para o caso topológico leva a

$$A(r \rightarrow \infty) \rightarrow 2m. \quad (3.35)$$

O comportamento (3.33) para o potencial (3.31) indica que existem duas possibilidades para os valores assumidos pelo campo  $\alpha(r)$  responsáveis por anular o potencial em  $r \rightarrow \infty$ , i.e.,

$$\alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow \pi/2. \quad (3.36)$$

Estas duas possibilidades correspondem, respectivamente, a uma variedade de vácuo simétrica ou não degenerada, que é intrínseca às configurações solitônicas não topológicas, e a uma variedade de vácuo assimétrica ou degenerada, que engendra configurações solitônicas topológicas. Portanto, diferentemente do cenário Maxwell-CP(2), o cenário Chern-Simons-CP(2) traz a possibilidade de trabalharmos também com as estruturas não topológicas, no entanto, por hora, iremos nos fixar à investigação das configurações topológicas apenas, deixando esta outra possibilidade para os capítulos posteriores. Vale ressaltar que a condição topológica  $\alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow \pi/2$  satisfaz a condição (3.34).

Em resumo, para que haja a formação de estruturas solitônicas topológicas que apresentem energia bem definida e finita, as funções  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  deverão satisfazer as seguintes condições de contorno assintóticas:

$$\alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad A(r \rightarrow \infty) \rightarrow 2m, \quad (3.37)$$

além de também satisfazerem as condições de contorno na origem (3.25).

Nessa conjuntura, as equações BPS (3.18) e (3.19) também podem ser reescritas na sua forma radialmente simétrica, como

$$\frac{d\alpha}{dr} = \mp \frac{\sin \alpha}{2r} (2m - A), \quad (3.38)$$

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp \frac{g^4 h^2 \sin^2 \alpha}{2\kappa^2} \cos \alpha. \quad (3.39)$$

onde os sinais superiores (inferiores) condizem com  $m < 0$  ( $m > 0$ ).

Além disso, a densidade de carga topológica (3.13) assume a forma

$$\bar{q}_0 = \frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dr} [(2m - A) \cos \alpha], \quad (3.40)$$

o que nos permite inferir que o limite inferior da energia total do sistema (3.15) passa a ser dado por

$$\mathcal{E}_{bps} = \mp 4\pi h m = 4\pi h |m|, \quad (3.41)$$

onde utilizamos as condições (3.25) e (3.37).

Ademais, a densidade de energia BPS, obtida da Eq. (3.30), é

$$\varepsilon_{bps} = 2U(\alpha) + 2h \left( \frac{d\alpha}{dr} \right)^2. \quad (3.42)$$

Observa-se outra vez que o valor da energia total das configurações BPS (3.41) resulta quantizado em termos dos valores inteiros do *winding number*  $m$ .

Do mesmo modo, obtemos a expressão para o fluxo magnético,

$$\Phi = -\frac{4\pi}{g}m, \quad (3.43)$$

onde utilizamos a condição de contorno (3.37) e a expressão (3.28). O resultado (3.43) nos permite concluir que

$$\mathcal{E}_{bps} = \pm gh\Phi, \quad (3.44)$$

i.e.,  $\mathcal{E}_{bps}$  e  $\Phi$  são mais uma vez proporcionais entre si, sendo ambos quantizados de acordo com o *winding number*  $m$ .

### 3.2.1 Soluções BPS

A seguir, apresentamos os perfis numéricos obtidos através da resolução das equações de primeira ordem (3.38) e (3.39), via as condições de contorno (3.25) e (3.37). Por conveniência, adotamos  $h = \kappa = 1$  e  $g = \sqrt{2}$ .

A Figura 4 apresenta as soluções numéricas para os campos  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  (curva preta sólida para  $m = 1$ , curva azul tracejada para  $m = 2$ , curva vermelha ponto-tracejada para  $m = 3$  e curva laranja sólida para  $m = 4$ ), a partir das quais podemos verificar a forma monotônica com que estas soluções atingem as condições de contorno (3.25) e (3.37). Em particular, verifica-se a validade da condição  $A(r \rightarrow \infty) \rightarrow 2m$ .

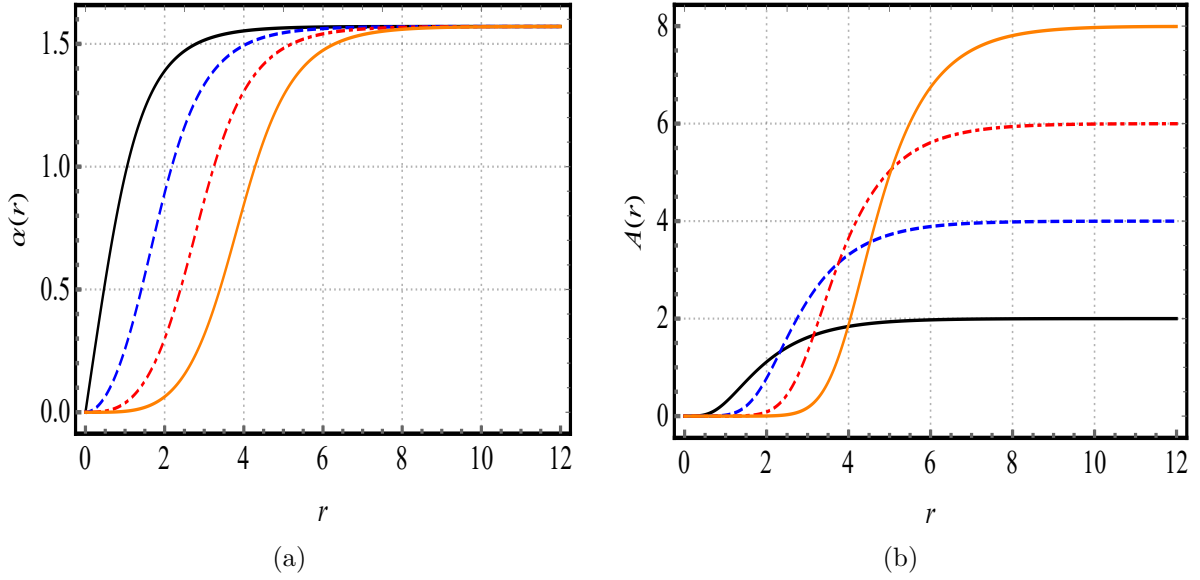


Figura 4 – Soluções numéricas para os campos  $\alpha(r)$  (a) e  $A(r)$  (b), obtidas a partir das equações de primeira ordem (3.38) e (3.39), de acordo com as condições de contorno (3.25) e (3.37), onde fixamos  $h = \kappa = 1$  e  $g = \sqrt{2}$ . Na figura, mostramos os perfis para os valores:  $m = 1$  (linha preta sólida),  $m = 2$  (linha azul tracejada),  $m = 3$  (linha vermelha ponto-tracejada) e  $m = 4$  (linha laranja sólida).

O campo magnético  $B(r)$  e a densidade de energia BPS  $\varepsilon(r)$  são mostrados na Figura 5, construídas a partir das equações (3.26) e (3.30), com as mesmas convenções visualizadas na Figura 4. Para o campo magnético, verificamos as condições  $B(r \rightarrow 0) \rightarrow 0$  e  $B(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , em que tais comportamentos das soluções nas fronteiras independem dos valores assumidos por  $m$ . Outro detalhe importante são as configurações em formato de anéis centrados na origem formados por estas soluções. De maneira análoga, para a densidade de energia BPS, as curvas para os valores  $m \neq 1$  também engendram anéis centrados na origem, cujos raios (amplitudes) crescem (decrecem) com o aumento dos valores de  $m$ . Um ponto importante é que  $\varepsilon(r \rightarrow 0) \neq 0$  para  $m = 1$ .

Na Figura 6 demonstramos as soluções para o potencial elétrico  $A_0(r)$  e para o campo elétrico  $E(r)$ . Este último comportando-se da mesma maneira que o campo magnético, i.e.,  $E(r \rightarrow 0) \rightarrow 0$  e  $E(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  para todos os valores de  $m$ , o que corresponde à formação de anéis bem definidos para os perfis. Este comportamento é possível devido à lei de Gauss (3.29), que representa uma relação entre o setor elétrico e o magnético através de uma dependência linear entre o potencial elétrico e o campo magnético.

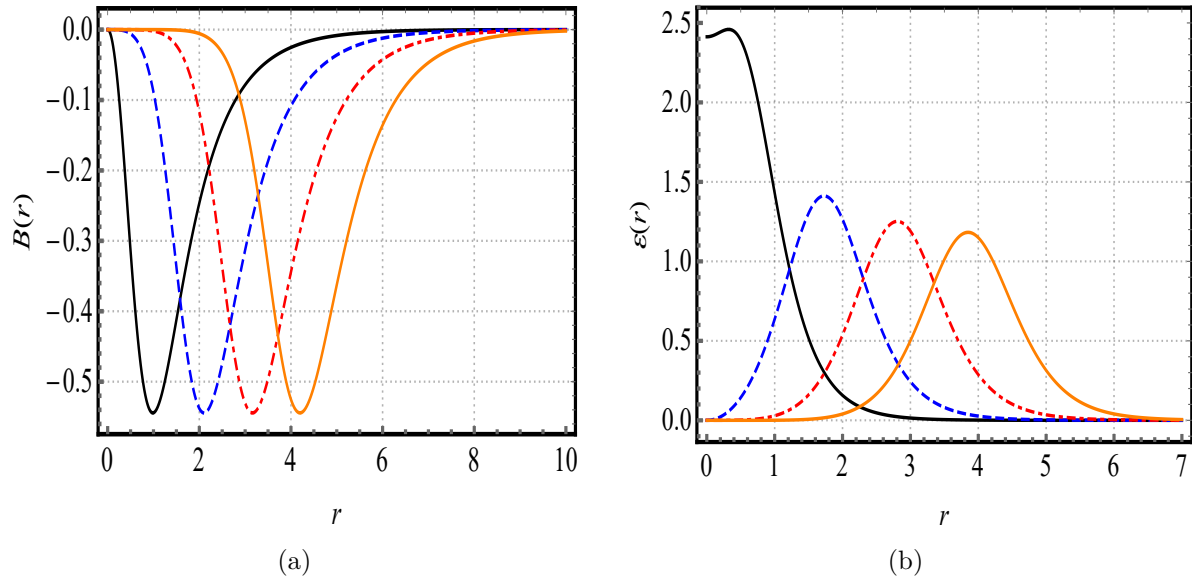


Figura 5 – Soluções numéricas para o campo magnético  $B(r)$  (a) e para a densidade de energia BPS  $\varepsilon(r)$  (b), obtidas a partir de equações (3.26) e (3.30). As convenções são as mesmas da Figura 4.

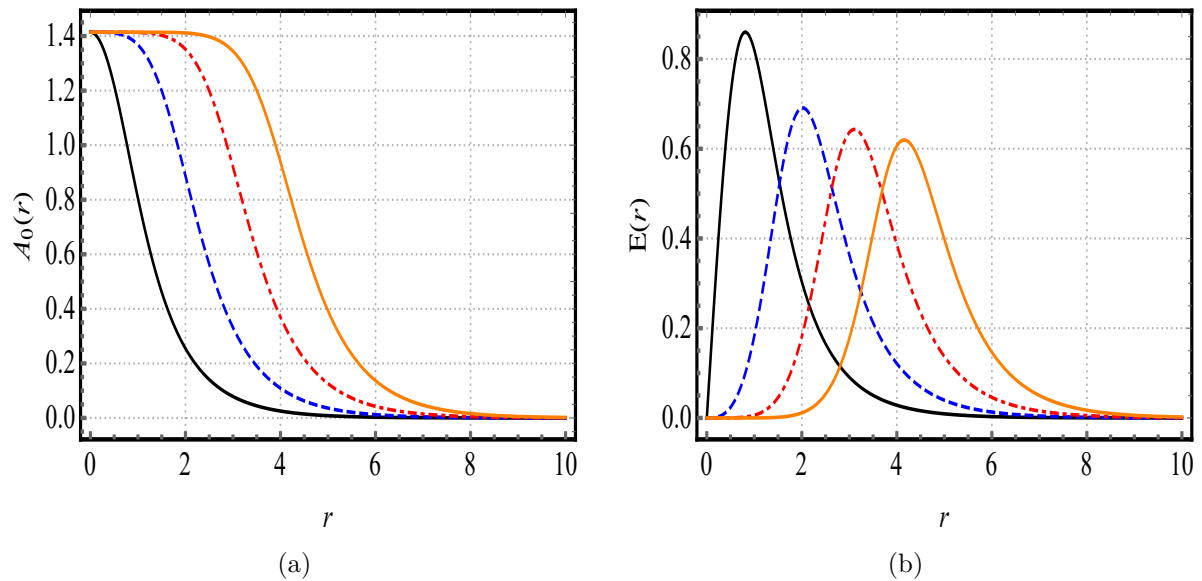


Figura 6 – Soluções numéricas para o potencial escalar  $A_0(r)$  (a) e para o campo elétrico  $E(r)$  (b). As convenções são as mesmas da Figura 4.

### 3.2.1.1 Comportamento aproximado das soluções na origem

A partir deste ponto, é possível calcular soluções aproximadas para os campos  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  via as equações (3.38) e (3.39), com o auxílio das condições de contorno (3.25) e (3.37). Para tal feito, implementa-se novamente o processo de linearização, já detalhado

no capítulo anterior. Por simplicidade, adotemos apenas os sinais inferiores ( $m > 0$ ) nas equações BPS.

Portanto, próximo da origem, obtemos as soluções aproximadas:

$$\alpha(r) \approx C_0 r^m \quad \text{e} \quad A(r) \approx \frac{C_0^2 g^4 h^2}{4\kappa^2(m+1)} r^{2(m+1)}, \quad (3.45)$$

onde  $C_0$  configura uma constante real e positiva, que é definida numericamente.

Através dos resultados anteriores, e utilizando a Eq. (3.42), podemos prever o comportamento da densidade de energia BPS nas proximidades da origem, cuja solução aproximada é

$$\varepsilon_{bps} \approx \frac{g^4 h^3}{\kappa^2} C_0^2 r^{2m} + 2hm^2 C_0^2 r^{2(m-1)}. \quad (3.46)$$

Ao considerarmos, na expressão acima, os mesmos valores para os parâmetros utilizados nas soluções numéricas ( $h = \kappa = 1$  e  $g = \sqrt{2}$ ), obtemos

$$\varepsilon_{bps}(r=0) \approx 2C_0^2, \quad \text{para } m = 1, \quad (3.47)$$

$$\varepsilon_{bps}(r=0) \approx 0, \quad \text{para } m \neq 1, \quad (3.48)$$

que explica os valores limites descritos na Figura 5, ao considerarmos  $C_0 \approx 1,0954$ .

### 3.2.1.2 Comportamento aproximado das soluções no limite assintótico

De maneira semelhante, no limite  $r \rightarrow \infty$ , calculamos:

$$\alpha(r) \approx \frac{\pi}{2} - C_\infty e^{-\mathcal{M}_\alpha r} \quad \text{e} \quad A(r) \approx 2m - 2C_\infty \sqrt{\varrho} r e^{-\mathcal{M}_A r}, \quad (3.49)$$

nas quais

$$\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}_A = \sqrt{\varrho} \quad (3.50)$$

representam as massas dos bósons, escalar e de calibre, respectivamente. Como antes,  $\mathcal{M}_\alpha/\mathcal{M}_A = 1$  verifica o limite de Bogomol'nyi, e a constante  $C_\infty$  é definida como real e positiva. Ademais, podemos concluir de (3.50) que os campos bosônicos adicionam a mesma quantidade de inércia (massa) às partículas no limite autodual

## 4 Sólitons BPS topológicos em um modelo Maxwell- $CP(2)$ com impureza magnética

### 4.1 O cenário Maxwell- $CP(2)$ estendido pela presença de uma impureza magnética

Impurezas, de um modo geral, são facilmente encontradas no âmbito da Física da Matéria Condensada, como por exemplo, na forma de defeitos em uma rede periódica (cristais), em materiais metálicos e até mesmo nos supercondutores. Em todas esses materiais, a presença de uma impureza leva a mudanças significativas em suas propriedades.

Com avanço das técnicas de resfriamento dos metais, nos primeiros anos do século XX, observou-se um decaimento monotônico na resistividade elétrica destes materiais à medida que sua temperatura diminuía consideravelmente, em se tratando de amostras metálicas com um alto grau de pureza. No entanto, em algumas amostras, era observado um comportamento contrário, em que a resistividade passava a aumentar após a temperatura ter alcançado um certo valor mínimo.

Foi observado que a razão para este comportamento estava ligado à presença de uma impureza magnética na estrutura metálica, que passavam a interagir com os elétrons de condução, aumentando a resistência elétrica. Esse fenômeno ficou conhecido como efeito Kondo [76].

Pelo mesmo motivo, as impurezas magnéticas também estão intimamente ligadas à supressão das propriedades que caracterizam os supercondutores [77]. Especificamente, elas são responsáveis por afetarem os pares de Cooper, que são as associações entre os elétrons responsáveis pela corrente supercondutora a baixas temperaturas.

Em se tratando das Teorias Clássicas de Campos, as impurezas magnéticas tornaram-se, recentemente, uma área ativa de pesquisa teórica, em virtude da possibilidade de interação com sólitos BPS. Nesta perspectiva, na Ref. [54] são considerados vórtices BPS na presença de uma impureza magnética, onde Tong e Wong dão uma interessante interpretação para tais impurezas, tratando-as como uma segunda espécie de vórtices, “congelados” no espaço, associados a um grupo de calibre diferente.

Dentro dessa lógica, uma possível questão pode saltar ao nosso raciocínio, que é a possibilidade da inserção de uma impureza magnética comprometer a propriedade BPS das teorias já desenvolvidas neste manuscrito. No entanto, na Ref. [78] é demonstrado, através de argumentos relacionados à supersimetria, que sempre que uma teoria de campo escalar

(calibrada ou não) possui uma estrutura BPS, ela permite uma generalização, através da inclusão de uma impureza, em que boa parte dos sólitons, oriundos dessa generalização, saturam o limite topológico.

Devido ao fato de que as impurezas são facilmente encontradas no contexto da Matéria Condensada, assim como os sólitons BPS; em especial, quando se trata da abordagem de materiais supercondutores. Os modelos que serão descritos a partir de agora, podem encontrar aplicações dentro deste cenário. Neste sentido, eles poderão servir como uma descrição teórica para a interação entre sólitons BPS ou defeitos com uma impureza de caráter magnético dentro de materiais dopados.

Dentro deste contexto, passamos agora a investigar o cenário Maxwell-CP(2) estendido para incluir a presença de uma impureza com caráter magnético. O objetivo deste capítulo é analisar a possibilidade da obtenção de soluções BPS do tipo sólitons planares com essa inclusão, ou seja, verificar se a dopagem do sistema não compromete a estabilidade energética das soluções já obtidas no cenário mais simples, desenvolvido no Capítulo 2, e (se possível) que mudanças são ocasionadas nessas configurações em decorrência dessa presença. Neste sentido, o modelo atual passa a ser definido pela seguinte densidade de lagrangeana em (2+1)-dimensões:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |\nabla_{\mu}\phi|^2 - U(\phi, \Delta) + \Delta B, \quad (4.1)$$

que é a mesma densidade que aparece em (2.12) (sendo válidas aqui as mesmas definições e convenções atribuídas ao modelo original), no entanto, temos agora a presença do termo  $\Delta B$ , que representa a impureza magnética, que como podemos observar, representa uma nova fonte magnética, inserida ao sistema, que é “modulada” por

$$\Delta = \Delta(|\mathbf{x}|), \quad (4.2)$$

que é uma função que depende explicitamente das coordenadas espaciais apenas. Além de se supor que o potencial  $U(\phi, \Delta)$ , que define a variedade de vácuo e é responsável pela quebra espontânea da simetria  $SU(3)$  da teoria, aparece agora em termos também da impureza magnética.

Iremos reiteradamente considerar a configuração (2.10) para o campo CP(2). Nesse contexto, a densidade de lagrangeana (4.1) passa a apresentar o seguinte formato:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 - U(\phi_3, \Delta) - \lambda(h - \phi^{\dagger}\phi) + \Delta B, \quad (4.3)$$

onde  $\lambda$  corresponde ao multiplicador de Lagrange que garante a condição (2.21) ( $h = \phi^{\dagger}\phi = 2|\psi|^2 + |\phi_3|^2$ ), também válida aqui, por se tratar da estrutura CP(2).

Com o aspecto adicional da impureza, a equação de movimento para o campo de calibre é dada por

$$\partial_{\nu}F^{\nu\mu} + (\delta_2^{\mu}\partial_1 - \delta_1^{\mu}\partial_2)\Delta = J^{\mu}, \quad (4.4)$$

onde  $J^\mu$  é a mesma densidade de corrente conservada vista em (2.23). Já para o campo CP(2), temos as seguintes equações

$$\hat{D}_\mu \hat{D}^\mu \psi - \lambda \psi = 0, \quad (4.5)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \phi_3} U(\phi_3, \Delta) - \lambda \phi_3 = 0, \quad (4.6)$$

que são as mesmas dadas em (2.25) e (2.26). Por essa razão, também teremos a relação (2.27) para o multiplicador de lagrange  $\lambda$  sendo válida para este caso com impureza.

Como podemos perceber até agora, grande parte dos resultados obtidos no Capítulo 2 para o modelo Maxwell-CP(2) não sofreram modificações com a atuação da impureza magnética. Um outro exemplo de resultados que se mantiveram foi a lei de Gauss, que para configurações de campos independentes do tempo é dada por

$$\partial_k \partial_k A_0 = g^2 A_0 |\psi|^2, \quad (4.7)$$

sendo a mesma relação denotada na Eq. (2.28).

Por outro lado, a lei de Ampère para configurações independentes do tempo passa a manifestar a influência da impureza, o que gera uma modificação na relação em comparação à Eq.(2.29), em outras palavras,

$$\partial_j (B - \Delta) = \epsilon_{jk} J_k. \quad (4.8)$$

Da análise de (4.7), inferimos novamente a possibilidade fixação do gauge temporal ( $A_0 = 0$ ), o que é presumível, uma vez que esta expressão se manteve inalterada em relação ao caso original.

#### 4.1.1 Formalismo BPS aplicado ao cenário Maxwell-CP(2) com impureza

O foco de nossa investigação se volta mais uma vez para as estruturas BPS que surgem do modelo (4.3). Por efeito, utilizamos aqui a relação para a distribuição de energia relacionada à teoria estendida, i.e.,

$$\varepsilon = \frac{1}{2} B^2 + (D_k \phi)^\dagger D_k \phi + U(\phi_3, \Delta) - \Delta B, \quad (4.9)$$

cujo processo de quadramento, etapa fundamental para a implementação do formalismo BPS, se faz possível graças às relações:

$$\frac{1}{2} B^2 + U = \frac{1}{2} \left( B \mp \sqrt{2U} \right)^2 \pm B \sqrt{2U}, \quad (4.10)$$

$$|D_k \phi|^2 = (D_k \phi)^\dagger D_k \phi = \frac{1}{2} \left| D_j \phi \pm i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} (\phi \times D_k \phi)^* \right|^2 \mp i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} \phi \cdot (D_j \phi \times D_k \phi). \quad (4.11)$$

Assim sendo, podemos reescrever a densidade de energia da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2} \left( B \mp \sqrt{2U} \right)^2 + \frac{1}{2} \left| D_j \phi \pm i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} (\phi \times D_k \phi)^* \right|^2 \\ & \pm B \left( \sqrt{2U} - h^{1/2} g \phi_3 \mp \Delta \right) + \varepsilon_{bps}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde definimos

$$\varepsilon_{bps} = \pm 2\pi h \bar{q}_0, \quad (4.13)$$

com

$$\bar{q}_0 = \frac{1}{i2\pi h^{3/2}} [\epsilon_{jk} \phi \cdot (D_j \phi \times D_k \phi) + i h g \phi_3 B], \quad (4.14)$$

sendo a densidade de carga topológica inerente ao modelo estendido.

A energia total da teoria ampliada é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \int d^2 \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} \left( B \mp \sqrt{2U} \right)^2 + \frac{1}{2} \left| D_j \phi \pm i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} (\phi \times D_k \phi)^* \right|^2 \right] \\ & \pm \int d^2 \mathbf{x} \left[ B \left( \sqrt{2U} - h^{1/2} g \phi_3 \mp \Delta \right) \right] + \mathcal{E}_{bps}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde  $\mathcal{E}_{bps}$  é expresso da seguinte forma:

$$\mathcal{E}_{bps} = \int \varepsilon_{bps} d^2 \mathbf{x} = \pm 2\pi h \mathcal{Q}_{top}, \quad (4.16)$$

enquanto que  $\mathcal{Q}_{top}$  é definido na Eq. (2.39), que representa a carga topológica relacionada ao modelo CP(2) calibrado.

A minimização do funcional da energia, que representa a estabilidade energética, requer que a integral no penúltimo termo da Eq. (4.15) se anule, dessa forma, obtemos a expressão

$$U(\phi_3, \Delta) = \frac{g^2 h}{2} \left( \phi_3 \pm \frac{\Delta}{g h^{1/2}} \right)^2, \quad (4.17)$$

que é a relação para o potencial autodual pertencente ao modelo estendido, ou melhor, o potencial que suporta a existência de soluções de primeira ordem com energia mínima na presença de uma impureza magnética. Este resultado nos permite concluir a implementação do formalismo BPS para o modelo (4.3), escrevendo a energia total no formato

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \int d^2 \mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} \left[ B \mp g h^{1/2} \left( \phi_3 \pm \frac{\Delta}{g h^{1/2}} \right) \right]^2 + \frac{1}{2} \left| D_j \phi \pm i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} (\phi \times D_k \phi)^* \right|^2 \right\} \\ & + \mathcal{E}_{bps} \geq 2\pi h |\mathcal{Q}_{top}|. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Podemos observar que a energia total assume o seu valor mínimo,  $\mathcal{E}_{bps}$ , no limite em que os termos quadráticos dentro das integrais são assumidos como sendo iguais a zero, de onde se obtém as equações BPS ou autoduais do sistema, i.e.,

$$B = \pm g h^{1/2} \left( \phi_3 \pm \frac{\Delta}{g h^{1/2}} \right), \quad (4.19)$$

$$D_j \phi = \mp \frac{i}{h^{1/2}} \epsilon_{jk} (\phi \times D_k \phi)^*, \quad (4.20)$$

cujas soluções correspondem a configurações independentes do tempo com energia total dada por

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{bps} = \pm 2\pi h \mathcal{Q}_{top}, \quad (4.21)$$

que, apesar da presença da impureza, resulta proporcional à carga topológica do modelo, possuindo o mesmo valor que a energia obtida para o modelo Maxwell-CP(2) sem impureza, ou seja, o mesmo formato encontrado na Eq. (2.45).

Em particular, a segunda equação BPS também se mantém inalterada em comparação ao caso sem impureza, podendo ser decomposta em termos dos campos  $\psi$  e  $\phi_3$ . Tais equações são mostradas em (2.46) e (2.47).

## 4.2 Sólitons topológicos oriundos do cenário Maxwell-CP(2) estendido

Na seção anterior, pudemos observar que a presença de uma impureza magnética no modelo Maxwell-CP(2) não comprometeu a estabilidade energética das configurações resultantes. Isso foi possível graças à redefinição do potencial autodual (4.17) e da equação BPS (4.19), que acabaram por incorporar a impureza. Todos esses fatores demonstraram a possibilidade de construção de uma estrutura de primeira ordem, que iremos, a partir de agora, projetar a um cenário de análise mais específica, por intermédio do mesmo ansatz empregado no Capítulo 2, nas equações (2.48) e (2.49).

Uma vez que utilizamos esse mapa para as soluções, o campo magnético assume o formato (2.51).

Do mesmo modo, a distribuição de energia (4.9) e o potencial BPS (4.17), nas suas formas radialmente simétrica, se exprimem, respectivamente, como

$$\varepsilon = \frac{1}{2} B^2 + U(\alpha, \Delta) + h \left[ \left( \frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{4r^2} (2m - A)^2 \right] - \Delta B, \quad (4.22)$$

$$U(\alpha, \Delta) = \frac{h^2 g^2}{2} \left( \cos \alpha \pm \frac{\Delta}{hg} \right)^2, \quad (4.23)$$

onde a impureza  $\Delta$  deve depender de  $r$  apenas, ou seja,  $\Delta = \Delta(r)$ .

Neste ponto, passamos a analisar a condição de finitude da energia  $\varepsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , a partir da qual obtemos, para o limite  $r \rightarrow \infty$ , os seguintes comportamentos [vide Eq. (4.22)]:

$$B(r) \rightarrow 0, \quad (4.24)$$

$$U(\alpha, \Delta) \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha(r) \rightarrow \pi/2 \text{ e } \Delta(r) \rightarrow 0, \quad (4.25)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} \rightarrow 0. \quad (4.26)$$

De análises anteriores, sabemos que, para configurações topológicas, a condição (4.24) implica em

$$A(r \rightarrow \infty) \rightarrow 2m. \quad (4.27)$$

No entanto, a análise da condição (4.25) para o potencial (4.23) sugere que tenhamos um perfil para a impureza que se anule no limite assintótico,

$$\Delta(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad (4.28)$$

uma vez que, para o caso topológico, temos a seguinte condição de contorno assintótica:

$$\alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow \pi/2. \quad (4.29)$$

Neste sentido, em  $r \rightarrow \infty$ , a impureza irá se anular e o campo  $\alpha(r)$  irá assumir o valor responsável pela minimização do potencial, o que leva à quebra espontânea da simetria da teoria.

Portanto, para que seja realizada a descrição de sólitos topológicas que apresentem energia bem definida e finita, os campos  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  deverão satisfazer as seguintes condições de contorno assintóticas:

$$\alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad A(r \rightarrow \infty) \rightarrow 2m, \quad (4.30)$$

além das condições de contorno definidas na origem (2.50).

Neste contexto, as equações BPS (4.19) e (4.20) reescritas na forma radialmente simétrica, são dadas, respectivamente, por

$$\frac{d\alpha}{dr} = \mp \frac{\sin \alpha}{2r} (2m - A), \quad (4.31)$$

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \pm hg^2 \left( \cos \alpha \pm \frac{\Delta}{hg} \right), \quad (4.32)$$

onde os sinais superiores (inferiores) valem para  $m < 0$  ( $m > 0$ ).

Seguindo esse raciocínio, para a densidade de carga topológica (4.14) é possível obter a seguinte forma projetada:

$$\bar{q}_0 = \frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dr} [(2m - A) \cos \alpha], \quad (4.33)$$

a partir da qual o limite inferior da energia (4.16) é redefinido como

$$\mathcal{E}_{bps} = \mp 4\pi h m = 4\pi h |m|. \quad (4.34)$$

Note que, apesar da ação da impureza magnética, a energia das estruturas BPS se mantém inalterada em comparação ao caso sem impureza [vide Eq. (2.64)], resultando novamente quantizada em relação aos valores inteiros do grau topológico  $m$ . Assim como o fluxo magnético,

$$\Phi = -\frac{4\pi}{g}m, \quad (4.35)$$

que também se mostra quantizado em termos de  $m$ .

### 4.2.1 Soluções BPS na presença da impureza magnética

Para darmos continuidade com o desenvolvimento das soluções das equações BPS, precisamos definir uma expressão explícita para a impureza magnética. Para tanto, escolhemos trabalhar com uma impureza localizada; nesse sentido, recorreremos a um perfil gaussiano centrado na origem para  $\Delta$ , ou seja,

$$\Delta(r) = ce^{-dr^2}, \quad (4.36)$$

onde, ambos,  $c$  e  $d \in \mathbb{R}$ , com  $d > 0$ . Neste caso, os parâmetros  $c$  e  $d$  controlam, respectivamente, a “altura” e a “largura” da impureza. Neste sentido, para  $c > 0$  ( $c < 0$ ), a impureza (4.36) representa uma barreira (poço).

Com a escolha deste perfil, o potencial BPS (4.23) pode ser reescrito como

$$U(\alpha, \Delta) = \frac{h^2 g^2}{2} \left( \cos \alpha \pm \frac{c}{hg} e^{-dr^2} \right)^2, \quad (4.37)$$

no qual o sinal superior (inferior) vale para os valores negativos (positivos) da vorticidade  $m$ . Do mesmo modo, em vista do potencial (4.37), as equações de primeira ordem (4.31) e (4.32) assumem as formas:

$$\frac{d\alpha}{dr} = \mp \frac{\sin \alpha}{2r} (2m - A), \quad (4.38)$$

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \pm hg^2 \left( \cos \alpha \pm \frac{c}{hg} e^{-dr^2} \right), \quad (4.39)$$

as quais podemos resolver de acordo com as condições de contorno (2.50) e (4.30).

Na sequência, apresentamos os perfis numéricos para as funções  $\alpha(r)$  e  $A(r)$ , obtidas das equações (4.38) e (4.39), por intermédio das condições (2.50) e (4.30). Além das soluções para o campo magnético  $B(r)$  e para a densidade de energia BPS  $\varepsilon(r)$ . Por simplicidade, fixamos  $g = h = 1$ . Além disso, escolhemos  $m = 1$  (i.e., o sinal inferior das equações BPS, incluindo o sinal inferior do potencial (4.37)) e  $d = 1$  (um valor fixo para a largura da impureza); no entanto, utilizamos valores diferentes de  $c$  (altura da impureza).

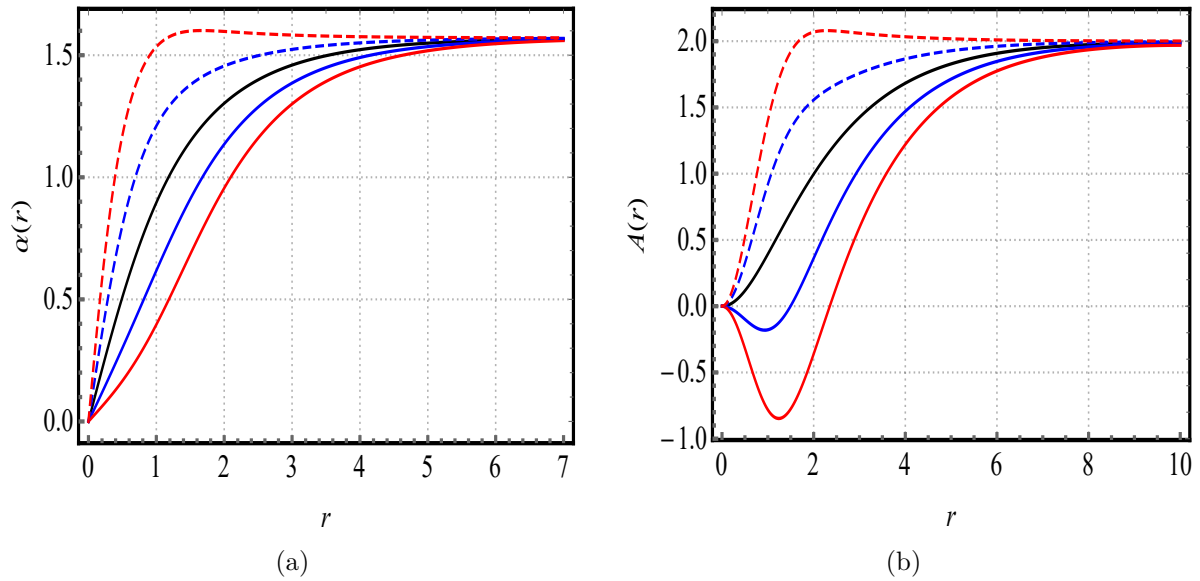


Figura 7 – Soluções numéricas para os campos  $\alpha(r)$  (a) e  $A(r)$  (b), obtidas a partir das equações de primeira ordem (4.38) e (4.39), em conformidade com as condições de contorno (2.50) e (4.30), onde fixamos  $g = h = 1$ ,  $m = 1$  e  $d = 1$ . Na figura, mostramos os perfis para  $c = -4$  (linha vermelha tracejada),  $c = -2$  (linha azul tracejada),  $c = 0$  (linha preta sólida - solução usual, sem impureza),  $c = +2$  (linha azul sólida) e  $c = +4$  (linha vermelha sólida).

A Figura 7 mostra os perfis dos campos  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  para  $c = -4$  (linha vermelha tracejada),  $c = -2$  (linha azul tracejada),  $c = 0$  (linha preta sólida - solução usual, sem impureza),  $c = +2$  (linha azul sólida) e  $c = +4$  (linha vermelha sólida). É importante destacar que os perfis dos campos perdem a monotonicidade original (obtida na ausência da impureza) na proporção que o valor de  $|c|$  aumenta. Como consequência, os perfis para  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  apresentam um máximo global para  $c = -4$ , enquanto que  $A(r)$  apresenta um mínimo global para  $c = +2$  e  $c = +4$ .

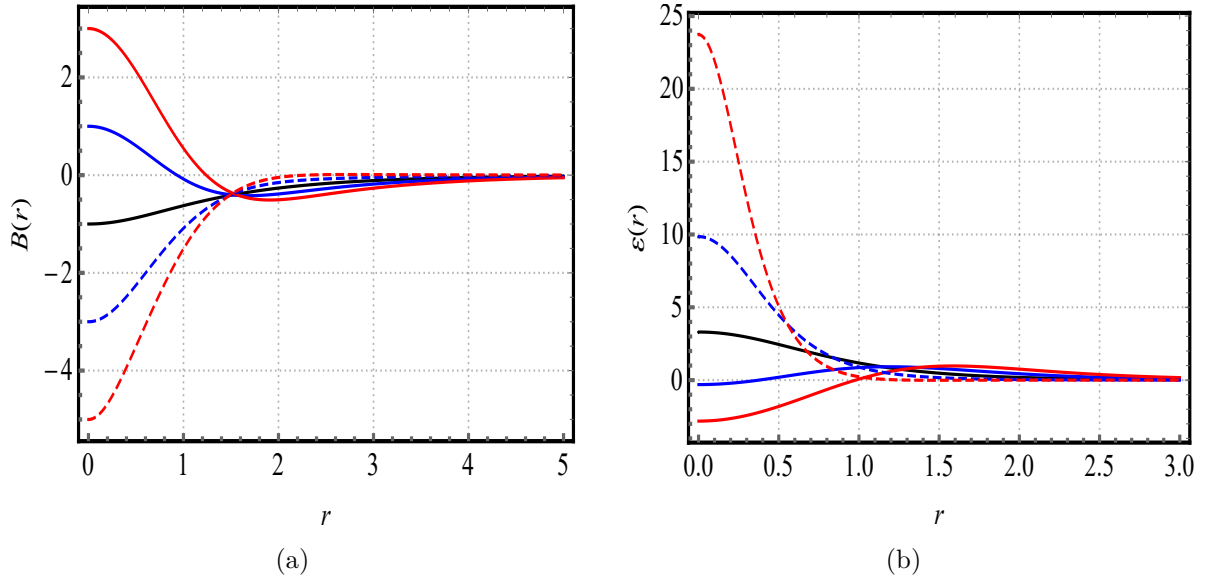


Figura 8 – Soluções numéricas para o campo magnético  $B(r)$  (a) e para a densidade de energia BPS  $\varepsilon(r)$  (b) relacionadas às configurações BPS Maxwell-CP(2) com impureza. As convenções são as mesmas utilizadas na Figura 7.

Na Figura 8, mostramos as soluções para o campo magnético  $B(r)$  e para a densidade de energia BPS  $\varepsilon(r)$ . Os perfis sugerem que o parâmetro  $c$  (a altura da impureza) induz uma inversão no sinal de ambos, quando estas soluções se aproximam da origem. Em particular, para  $c > 0$ , a densidade de energia BPS atinge valores negativos dentro de uma região espacial finita que começa em  $r = 0$ . Os valores negativos surgem devido à impureza magnética, que impede de expressar a densidade de energia BPS (4.22) como uma soma de termos positivos apenas.

#### 4.2.1.1 Comportamento aproximado das soluções na origem

Através do processo de linearização das equações autoduais, podemos obter soluções analíticas aproximadas que nos auxiliam no entendimento do comportamento dos perfis numéricos obtidos, tanto nas proximidades da origem quanto no limite assintótico. Nesse sentido, nas proximidades da origem, temos os seguintes comportamentos para as funções  $\alpha(r)$  e  $A(r)$ :

$$\alpha(r) \approx C_0 r^m, \quad (4.40)$$

$$A(r) \approx \frac{gh^2}{2} \left(1 - \frac{c}{gh}\right) r^2, \quad (4.41)$$

que prontamente recuperam os resultados para  $c = 0$  (i.e., na ausência da impureza magnética).

Observa-se que a impureza não muda o comportamento do campo escalar  $\alpha(r)$  nas proximidades da origem; contudo, ela (através de seu parâmetro de altura  $c$ ) muda o fator

que multiplica o termo relevante da solução analítica para o campo de calibre  $A(r)$  nas proximidades da origem.

Com os resultados anteriores, é possível explicar a inversão que ocorre, tanto para o campo magnético  $B(r)$  quanto para a densidade de energia BPS  $\varepsilon(r)$  nas imediações da origem. Para tal feito, consideramos  $g = h = 1$ ,  $m = 1$  e  $d = 1$  (ou seja, os valores dos parâmetros usados para obter as soluções numéricas). Nesta perspectiva, encontramos o seguinte comportamento para o campo magnético:

$$B(r) \approx c - 1 + \frac{C_0^2 - 2c}{2} r^2, \quad (4.42)$$

e para a densidade de energia energia BPS, obtemos

$$\varepsilon_{bps} \approx -c + 1 + 2C_0^2 + \frac{C_1}{6} r^2, \quad (4.43)$$

onde  $C_1 = 3c(3C_0^2 + 2) - 4C_0^2(C_0^2 + 3)$ , com  $C_0 > 0$  (uma constante real positiva). Note que ambas as expressões anteriores refletem os comportamentos apresentados na Figura 8 para  $r \rightarrow 0$ , explicando em detalhes o porquê dos valores  $c > 0$  ( $c < 0$ ) gerarem perfis que se aproximam de  $r = 0$  por cima (baixo) do eixo positivo, em se tratando das soluções para  $B(r)$ , e o motivo do comportamento contrário para  $\varepsilon(r)$ .

#### 4.2.1.2 Comportamento aproximado no limite assintótico

Apresentamos também o comportamento dos campos  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  para grandes valores da coordenada radial. No presente caso, para todos os valores de  $c$  e  $d$  em (4.36), obtemos os seguintes comportamentos para os campos:

$$\alpha(r) \approx \frac{\pi}{2} - C_\infty \frac{\exp(-\mathcal{M}r)}{\sqrt{r}}, \quad (4.44)$$

$$A(r) \approx 2m - 2\mathcal{M}C_\infty \sqrt{r} \exp(-\mathcal{M}r), \quad (4.45)$$

onde  $C_\infty$  representa uma constante positiva e real, e

$$\mathcal{M} = g\sqrt{\frac{h}{2}}, \quad (4.46)$$

que é a massa de ambos os bósons, escalar e de calibre. Concluimos então que os campos bosônicos são responsáveis por adicionar a mesma quantidade de inércia (massa) às partículas no limite autodual.

## 5 Sólitos BPS topológicos em um modelo Chern-Simons- $CP(2)$ com impureza magnética

### 5.1 O cenário Chern-Simons- $CP(2)$ estendido pela presença de uma impureza magnética

No Capítulo 3, exploramos a formação de soluções solitônicas oriundas de um modelo Chern-Simons- $CP(2)$ . Neste capítulo, iremos ampliar este cenário para incluir a presença de uma impureza com caráter magnético, com a finalidade de analisar a possibilidade de obtenção de configurações BPS. O objetivo principal de nossa investigação é observar as mudanças que surgem nos perfis das soluções em decorrência da presença da impureza. Sendo assim, para representar o modelo, utilizamos a seguinte densidade de lagrangeana em (2+1)-dimensões:

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4}\epsilon^{\alpha\mu\nu}A_\alpha F_{\mu\nu} + |\nabla_\mu\phi|^2 - U(\phi, \Delta) + \Delta B, \quad (5.1)$$

que é a mesma densidade definida na Eq. (3.3), onde se inclui apenas o termo relacionado à impureza, i.e.,  $\Delta = \Delta(|\mathbf{x}|)$ , definida como uma função da coordenada espacial apenas. Desse modo, as conveções, definições básicas e discussões correlatas introduzidas anteriormente permanecem inalteradas. Além disso, por se tratar do modelo  $CP(2)$ , consideramos a configuração (2.10), o que nos permite reescrever a Eq. (5.1) no seguinte formato:

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4}\epsilon^{\alpha\mu\nu}A_\alpha F_{\mu\nu} + |D_\mu\phi|^2 - U(\phi_3, \Delta) - \lambda(h - \phi^\dagger\phi) + \Delta B, \quad (5.2)$$

onde  $\lambda$  representa o multiplicador de Lagrange que garante a condição (2.21).

Neste contexto, a equação de Euler-Lagrange para o campo de calibre é dada pela seguinte expressão:

$$-\frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} + (\delta_2^\mu\partial_1 - \delta_1^\mu\partial_2)\Delta = J^\mu, \quad (5.3)$$

onde  $J^\mu$  é a densidade de corrente conservada, expressa na Eq. (2.23).

A partir de (5.3), considerando a componente temporal ( $\mu = 0$ ), obtemos

$$\kappa B = -g^2 A_0 |\psi|^2 = -\frac{1}{2}g^2 A_0 (h - \phi_3^2), \quad (5.4)$$

que corresponde à Lei de Gauss para configurações topológicas independentes do tempo. De sua análise é possível deduzir a impossibilidade de fixação do calibre temporal ( $A_0 = 0$ ), uma vez que esta escolha não mais satisfaz identicamente a relação (5.4). Dessa forma, as

estruturas topológicas resultantes irão possuir tanto campos elétricos como magnéticos não triviais. Além disso, também podemos inferir que a expressão (5.4) não se modificou, em comparação ao caso sem impureza (3.6). Em contrapartida, se considerarmos agora  $\mu = k$  ( $k = 1, 2$ ) em (5.3), chegamos à lei de Ampère para configurações independentes do tempo, i.e.,

$$\partial_j(\kappa A_0 + \Delta) = -\epsilon_{jk} J_k, \quad (5.5)$$

onde utilizamos  $F^{j0} = -F_{j0} = E^j = \partial^j A^0 = -\partial_j A^0$ .

Observando a Eq. (5.5), podemos perceber que a Lei de Ampère é redefinida em termos da impureza, em comparação ao caso sem impureza (vide Eq.(3.7)).

### 5.1.1 Formalismo BPS aplicado ao cenário Chern-Simos-CP(2) com impureza magnética

O ponto central de nossa investigação são as estruturas autoduais que advêm do modelo (5.2). Tais estruturas surgem da minimização do funcional da energia do sistema, assim como da quebra espontânea da simetria do modelo, que acontece quando o potencial atinge o seu estado de mínima energia, também conhecido como estado de vácuo. Portanto, para implementar o formalismo BPS, devemos recorrer à distribuição de energia atrelada à teoria, cuja expressão é dada a seguir:

$$\varepsilon = \frac{\kappa^2 B^2}{g^2(h - \phi_3^2)} + (D_k \phi)^\dagger D_k \phi + U(\phi_3, \Delta) - \Delta B. \quad (5.6)$$

O quadramento da relação anterior se faz possível através da utilização das relações:

$$\frac{\kappa^2 B^2}{g^2(h - \phi_3^2)} + U = \left( \frac{\kappa B}{g(h - \phi_3^2)^{1/2}} \mp \sqrt{U} \right)^2 \pm \frac{2\kappa B}{g(h - \phi_3^2)^{1/2}} \sqrt{U}, \quad (5.7)$$

$$|D_k \phi|^2 = (D_k \phi)^\dagger D_k \phi = \frac{1}{2} \left| D_j \phi \pm i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} (\phi \times D_k \phi)^* \right|^2 \mp i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} \phi \cdot (D_j \phi \times D_k \phi), \quad (5.8)$$

que permitem reescrever a densidade de energia na sua forma quadrática fechada, dada por

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left( \frac{\kappa B}{g(h - \phi_3^2)^{1/2}} \mp \sqrt{U} \right)^2 + \frac{1}{2} \left| D_j \phi \pm i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} (\phi \times D_k \phi)^* \right|^2 \\ &\pm B \left( \frac{2\kappa \sqrt{U}}{g(h - \phi_3^2)^{1/2}} - h^{1/2} g \phi_3 \mp \Delta \right) + \varepsilon_{bps}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

na qual implementamos

$$\varepsilon_{bps} = \pm 2\pi h \bar{q}_0, \quad (5.10)$$

onde utilizamos a expressão (3.13) para a densidade de carga topológica  $\bar{q}_0$  para o modelo CP(2) calibrado.

Através da integração da densidade de energia sobre as coordenadas espaciais, obtemos a energia total do sistema efetivo, que é definida como

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \int d^2\mathbf{x} \left[ \left( \frac{\kappa B}{g(h - \phi_3^2)^{1/2}} \mp \sqrt{U} \right)^2 + \frac{1}{2} \left| D_j \phi \pm i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} (\phi \times D_k \phi)^* \right|^2 \right] \\ & \pm \int d^2\mathbf{x} \left[ B \left( \frac{2\kappa\sqrt{U}}{g(h - \phi_3^2)^{1/2}} - h^{1/2} g \phi_3 \mp \Delta \right) \right] + \mathcal{E}_{bps}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

onde definimos  $\mathcal{E}_{bps}$  da seguinte forma:

$$\mathcal{E}_{bps} = \int \varepsilon_{bps} d^2\mathbf{x} = \pm 2\pi h \mathcal{Q}_{top}, \quad (5.12)$$

com  $\mathcal{Q}_{top}$  definido na Eq. (2.39), que representa a carga topológica relacionada ao modelo CP(2) calibrado.

Para minimizar o funcional da energia e atingir a estabilidade energética que caracteriza o limite BPS, devemos considerar o fator que multiplica o campo magnético, no penúltimo termo da Eq. (5.11), como sendo igual a zero, o que nos permite obter como resultado o potencial BPS,

$$U(\phi_3, \Delta) = \frac{g^4 h}{4\kappa^2} \left( \phi_3 \pm \frac{\Delta}{gh^{1/2}} \right)^2 [h - (\phi_3)^2], \quad (5.13)$$

a partir do qual concluímos a implementação do formalismo BPS para o modelo (5.2), escrevendo a energia total no formato

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \int d^2\mathbf{x} \left\{ \left[ \frac{\kappa B}{g(h - \phi_3^2)^{1/2}} \mp \frac{g^2 h^{1/2}}{2\kappa} \left( \phi_3 \pm \frac{\Delta}{gh^{1/2}} \right) (h - \phi_3^2)^{1/2} \right]^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left| D_j \phi \pm i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} (\phi \times D_k \phi)^* \right|^2 \right\} + \mathcal{E}_{bps} \geq 2\pi h |\mathcal{Q}_{top}|. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Podemos observar que no limite em que a energia total assume o seu valor mínimo, os termos quadráticos dentro das integrais são assumidos como sendo iguais a zero, de onde se obtém as equações BPS ou autoduais do sistema, i.e.,

$$B = \pm \frac{g^3 h^{1/2}}{2\kappa^2} \left( \phi_3 \pm \frac{\Delta}{gh^{1/2}} \right) (h - \phi_3^2), \quad (5.15)$$

$$D_j \phi = \mp \frac{i}{h^{1/2}} \epsilon_{jk} (\phi \times D_k \phi)^*, \quad (5.16)$$

cujas soluções são configurações independentes do tempo com energia total dada por

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{bps} = 2\pi h |\mathcal{Q}_{top}|, \quad (5.17)$$

que é proporcional à carga topológica do modelo, como esperado.

Assim, como mostrado nos capítulos anteriores, a segunda equação BPS pode ser decomposta em termos dos campos  $\psi$  e  $\phi_3$ , tais equações são as mesmas expressas nas equações (2.46) e (2.47).

## 5.2 Sólitos topológicos oriundos do modelo Chern-Simons-CP(2) estendido

Tendo construído a estrutura BPS mais geral relacionada ao modelo Chern-Simons-CP(2) ampliado na seção anterior, iremos agora particularizar o nosso estudo, concentrando nossa atenção sobre as configurações topológicas de primeira ordem independentes do tempo que possuem simetria radial. Para tal finalidade, iremos projetar o nosso sistema através da utilização de uma mapa para nossas soluções, tendo por base as coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ , i.e.,

$$A_i = -\frac{\epsilon_{ij}x_j}{gr^2}A(r) \quad \text{e} \quad A_0 = A_0(r), \quad (5.18)$$

$$\psi = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}e^{im\theta} \sin(\alpha(r)) \quad \text{e} \quad \phi_3 = \sqrt{\hbar} \cos(\alpha(r)), \quad (5.19)$$

que é semelhante ao mapa utilizado para o caso Chern-Simons-CP(2) sem impureza [vide equações (3.23) e (3.24)], por esse motivo, são válidas aqui as mesmas definições e convenções anteriores, incluindo as mesmas funções de perfil adimensionais,  $\alpha(r)$  e  $A(r)$ , que, para garantir a regularidade das soluções na origem, deverão satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$\alpha(r=0) = 0 \quad \text{e} \quad A(r=0) = 0. \quad (5.20)$$

Nesta conjuntura, o campo magnético é expresso como em (3.26). Além disso, como o potencial escalar  $A_0$  é definido como uma função da coordenada radial  $r$  somente, o campo elétrico possui a mesma forma de (3.27).

Do mesmo modo, a densidade de energia (5.6), na sua forma projetada é reescrita como

$$\varepsilon = \frac{k^2 B^2}{g^2 \hbar \sin^2 \alpha} + U(\alpha, \Delta) + \hbar \left[ \left( \frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{4r^2} (2m - A)^2 \right] - \Delta B. \quad (5.21)$$

Assim como o potencial BPS,

$$U(\alpha, \Delta) = \frac{g^4 \hbar^3}{4\kappa^2} \left( \cos \alpha \pm \frac{\Delta}{\hbar g} \right)^2 \sin^2 \alpha, \quad (5.22)$$

A análise da condição da finitude da energia  $\varepsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , impõe que a impureza magnética  $\Delta(r)$ , assim como os campos  $\alpha(r)$  e  $A(r)$ , satisfaçam, respectivamente, às condições de contorno topológicas (4.28) e (4.30.)

Podemos reescrever a lei de Gauss (5.4) em função do mapa (5.18) e (5.19), desse modo, teremos a seguinte expressão:

$$kB = -\frac{\hbar}{2}g^2 A^0 \sin^2 \alpha, \quad (5.23)$$

que representa a lei de Gauss projetada para configurações de campo independentes do tempo, relacionada ao modelo estendido, para o caso topológico. A análise assintótica dessa relação nos permite inferir que

$$A^0(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (5.24)$$

Na forma radialmente simétrica, as equações BPS (5.15) e (5.16) passam a ser expressas por

$$\frac{d\alpha}{dr} = \mp \frac{\sin \alpha}{2r} (2m - A), \quad (5.25)$$

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp \frac{g^4 h^2}{2\kappa^2} \left( \cos \alpha \pm \frac{\Delta}{hg} \right) \sin^2 \alpha, \quad (5.26)$$

onde os sinais superiores (inferiores) valem para  $m < 0$  ( $m > 0$ ).

Além disso, a densidade de carga topológica projetada permanece com o mesmo formato que o modelo sem impureza (3.40), o que nos remete ao seguinte valor para o limite inferior da energia:

$$\mathcal{E}_{bps} = 4\pi h |m|. \quad (5.27)$$

Observa-se outra vez que, para o caso topológico, o valor da energia total das configurações BPS (5.27) resulta quantizado em termos dos valores inteiros do *winding number*  $m$ . Tal como o fluxo magnético,

$$\Phi = -\frac{4\pi}{g} m, \quad (5.28)$$

que também se mostra quantizado em termos de  $m$ .

### 5.2.1 Soluções BPS na presença da impureza magnética

Para obter as soluções inerentes às equações de primeira ordem (5.25) e (5.26), precisamos especificar uma relação para a impureza magnética  $\Delta$ . Como identificamos anteriormente, esse perfil possui como limitação a anulação para grandes valores da coordenada radial. Em vista disso, escolhemos trabalhar com uma impureza localizada na origem, já definida na Eq. (4.36), i.e.,

$$\Delta(r) = ce^{-dr^2}, \quad (5.29)$$

onde, ambos,  $c$  e  $d \in \mathbb{R}$ , com  $d > 0$ . Os parâmetros  $c$  e  $d$  controlam, respectivamente, a “altura” e a “largura” da impureza. A partir de (5.29), escrevemos o potencial (5.22) na forma:

$$U(\alpha, \Delta) = \frac{g^4 h^3}{4\kappa^2} \left( \cos \alpha \pm \frac{ce^{-dr}}{gh} \right)^2 \sin^2 \alpha, \quad (5.30)$$

no qual o sinal superior (inferior) vale para os valores negativos (positivos) de  $m$ .

Pelo mesmo motivo, as equações BPS projetadas (5.25) e (5.26) tornam-se:

$$\frac{d\alpha}{dr} = \mp \frac{\sin \alpha}{2r} (2m - A), \quad (5.31)$$

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp \frac{g^4 h^2}{2\kappa^2} \left( \cos \alpha \pm \frac{ce^{-dr^2}}{gh} \right) \sin^2 \alpha, \quad (5.32)$$

as quais podemos resolver de acordo com as condições de contorno topológicas, (5.20) e (4.30).

Em sequência, apresentamos os perfis numéricos para as funções  $\alpha(r)$  e  $A(r)$ , obtidas das equações (5.31) e (5.32), por intermédio das condições topológicas (5.20) e (4.30). Além das soluções para o campo magnético  $B(r)$ , para a densidade de energia BPS  $\varepsilon(r)$ , e também para o potencial escalar  $A_0(r)$  e para o campo elétrico  $E(r)$ . Por conveniência, fixamos  $\kappa = h = 1$ ,  $g = \sqrt{2}$ ,  $m = 1$  e  $d = 1$  (a largura da impureza), a partir dos quais analisamos as configurações BPS para os mesmos casos abordados no capítulo anterior.

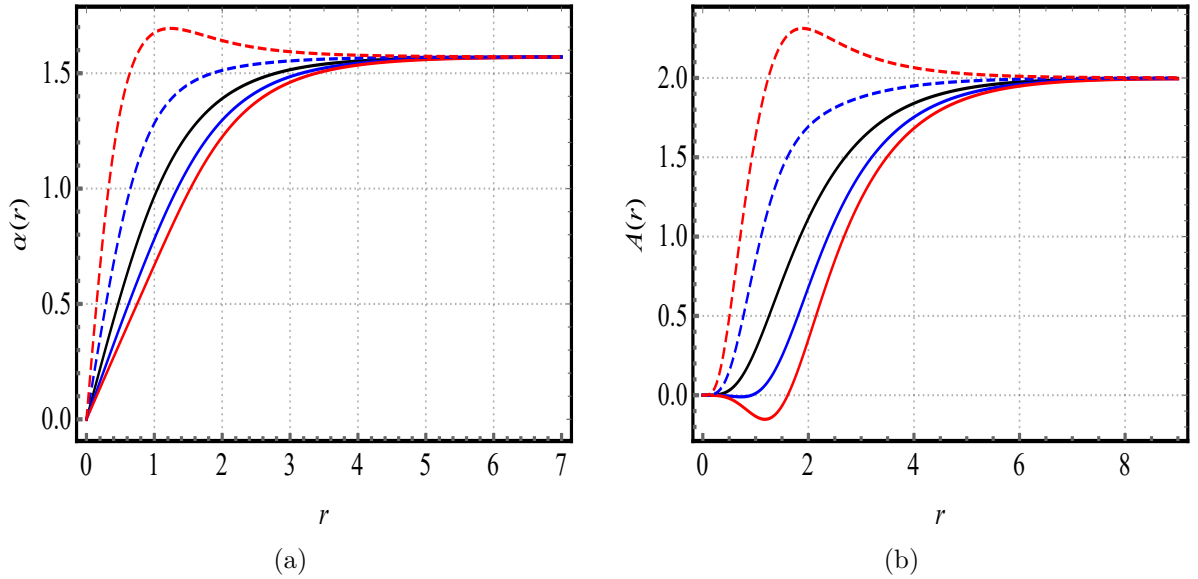


Figura 9 – Soluções numéricas para os campos  $\alpha(r)$  (a) e  $A(r)$  (b), obtidas a partir das equações de primeira ordem (5.31) e (5.32), em conformidade com as condições de contorno (5.20) e (4.30), onde fixamos  $\kappa = h = 1$ ,  $g = \sqrt{2}$ ,  $m = 1$  e  $d = 1$ . Na figura, mostramos os perfis para  $c = -4$  (linha vermelha tracejada),  $c = -2$  (linha azul tracejada),  $c = 0$  (linha preta sólida - solução usual, sem impureza),  $c = +2$  (linha azul sólida) e  $c = +4$  (linha vermelha sólida).

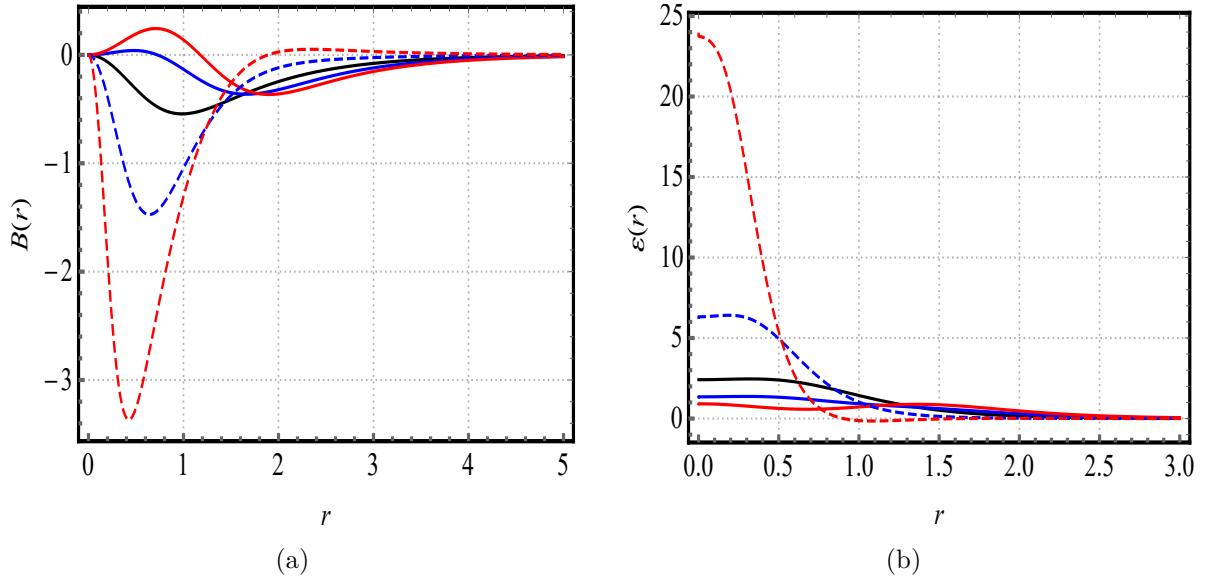


Figura 10 – Soluções numéricas para o campo magnético  $B(r)$  (a) e para a densidade de energia BPS  $\varepsilon(r)$  (b) relacionadas às configurações BPS Chern-Simons-CP(2) com impureza. As convenções são as mesmas utilizadas na Figura 9.

A Figura 9 traz os perfis para as soluções das funções  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  para  $c = -4$  (linha vermelha tracejada),  $c = -2$  (linha azul tracejada),  $c = 0$  (linha preta sólida - solução usual, sem impureza),  $c = +2$  (linha azul sólida) e  $c = +4$  (linha vermelha sólida), das quais podemos mais uma vez observar que os perfis perdem sua monotonicidade original à medida que os valores de  $|c|$  aumentam, ou melhor, os perfis perdem sua monotonicidade devido à presença da impureza magnética. Em razão dessa perda, os perfis para  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  podem eventualmente assumir valores, respectivamente, maiores que  $\pi/2$  e  $2m$ .

A Figura 10 representa o campo magnético  $B(r)$  e a densidade de energia BPS  $\varepsilon(r)$ . Para valores crescentes de  $|c|$ , identificamos novamente uma inversão no sinal do campo magnético, como já observado nas soluções do capítulo anterior, sendo tal efeito causado pela impureza magnética, que dá origem a um campo de calibre  $A(r)$  com uma forma não monotônica. Além disso, apesar dos efeitos causados pela impureza, a densidade de energia permanece localizada e bem comportada ao longo da coordenada radial, como esperado.

Finalmente, plotamos os perfis para o potencial escalar  $A_0(r)$  e para o campo elétrico  $E(r) = -dA_0/dr$  na Figura 11. A lei de Gauss (5.23) define uma dependência linear entre o potencial escalar e o campo magnético, que significa que a inversão de  $B(r)$  (vide Figura 11) leva a uma inversão no sinal de  $A_0(r)$ , e vice-versa. Portanto, este comportamento do potencial escalar também produz a inversão no sinal do próprio campo elétrico.

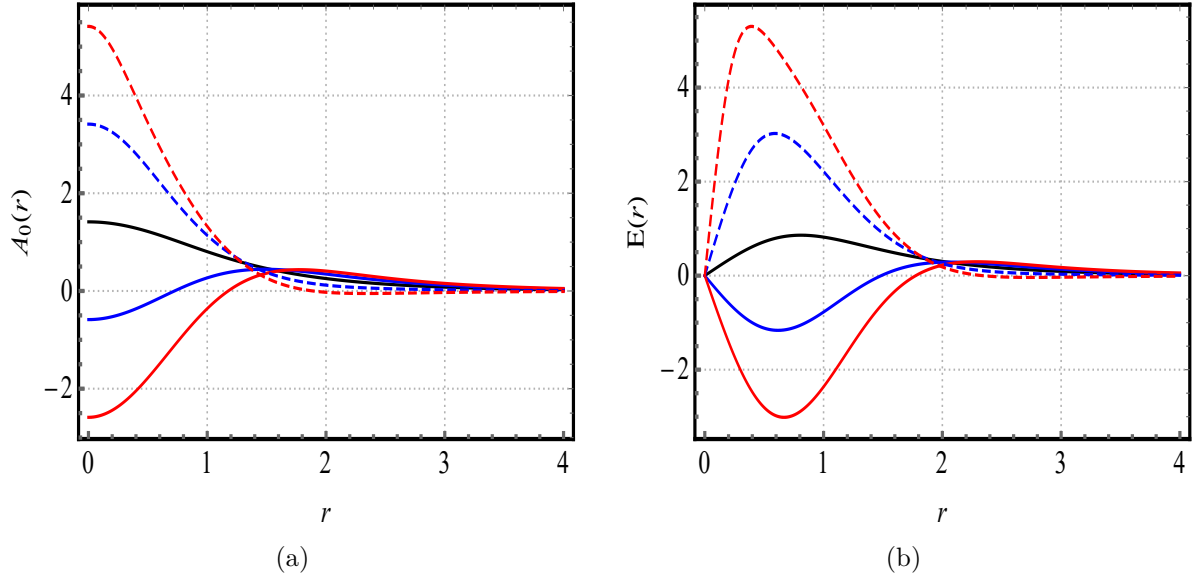


Figura 11 – Soluções numéricas para o potencial escalar  $A_0(r)$  (a) e para o campo elétrico  $E(r)$  (b) relacionadas às configurações BPS Chern-Simons-CP(2) com impureza. As convenções são as mesmas da Figura 9

### 5.2.1.1 Comportamento aproximado das soluções na origem

Agora, investigamos a maneira como os perfis das soluções dos campos  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  se aproximam dos valores limites em (5.20) e (4.30). Sem perda de generalidade, consideramos apenas as configurações com valores positivos da vorticidade  $m$  em (5.31) e (5.32). Assim, o comportamento dos perfis das funções nas proximidades da origem são

$$\alpha(r) \approx C_0 r^m \quad \text{e} \quad A(r) \approx \frac{C_0 g^3 h (hg - c)}{4\kappa^2 (m+1)} r^{2(m+1)}, \quad (5.33)$$

onde  $C_0$  representa uma constante real positiva.

Com esses resultados, escrevemos a seguir os comportamentos próximos à origem para o campo magnético  $B(r)$ , para a densidade de energia BPS  $\varepsilon(r)$ , para o potencial escalar  $A^0(r)$  e para o campo elétrico  $E(r)$ . Para tal propósito, consideramos  $\kappa = h = 1$ ,  $g = \sqrt{2}$ ,  $m = 1$  e  $d = 1$ , i.e., os mesmos valores usados na obtenção das soluções numéricas anteriores. Então, alcançamos os seguintes comportamentos para o setor magnético e para a densidade de energia BPS:

$$B(r) \approx C_0 (c - \sqrt{2}) r^2 \quad \text{e} \quad \varepsilon(r) \approx 2C_0 - \frac{C_1}{3} r^2, \quad (5.34)$$

onde  $C_1 = C_0^2 (3\sqrt{2}c + 2C_0^2 - 6)$ .

Como resultado, as expressões acima oferecem uma explicação em termos dos valores de  $c$  sobre o comportamento dos setores correspondentes perto da origem, conforme aparece na Figura 10.

Além disso, o comportamento do potencial escalar e do campo elétrico torna-se, respectivamente,

$$A_0(r) \approx \sqrt{2} - c + \left(c - \frac{\sqrt{2}}{2}C_0^2\right)r^2 \quad \text{e} \quad E(r) \approx \left(\sqrt{2}C_0^2 - 2c\right)r - \frac{\left(\sqrt{2}C_0^4 - 6c\right)}{3}r^3. \quad (5.35)$$

Estas soluções aproximadas também explicam os comportamentos próximos de  $r = 0$ , representados na Figura 11.

### 5.2.1.2 Comportamento aproximado das soluções no limite assintótico

Apresentamos também o comportamento dos campos  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  para grandes valores da coordenada radial. No presente caso, para todos os valores de  $c$  e  $d$  em (5.29), obtemos os seguintes comportamentos para os campos:

$$\alpha(r) \approx \frac{\pi}{2} - C_\infty \frac{\exp(-\mathcal{M}r)}{\sqrt{r}} \quad \text{e} \quad A(r) \approx 2m - 2\mathcal{M}C_\infty\sqrt{r} \exp(-\mathcal{M}r), \quad (5.36)$$

$$A(r) \approx 2m - 2\mathcal{M}C_\infty\sqrt{r} \exp(-\mathcal{M}r), \quad (5.37)$$

onde  $C_\infty$  representa uma constante real positiva, e

$$\mathcal{M} = g\sqrt{\frac{\hbar}{2}}, \quad (5.38)$$

que é a massa de ambos os bósons, escalar e de calibre. Concluimos então que os campos bosônicos são responsáveis por adicionar a mesma quantidade de inércia (massa) às partículas no limite autodual. Além do mais, como no caso Maxell-CP(2), é possível concluir também que, mesmo com a presença da impureza localizada, o presente cenário, Chern-Simons-CP(2), não muda a maneira como o perfil das funções se aproximam dos valores assintóticos.

## 6 Sólitos BPS não topológicos em um modelo Chern-Simons- $CP(2)$ com uma impureza magnética

### 6.1 O cenário Chern-Simons- $CP(2)$ estendido pela presença de uma impureza magnética para o caso não topológico

Abordaremos agora o modelo que descreve a interação entre o campo  $CP(2)$  e o campo de calibre Abelian  $A^\mu$ , atrelado à ação do termo de Chern-Simons, para o caso não topológico. Neste sentido, introduzimos a densidade de Lagrange em  $(2+1)$  dimensões que define este novo cenário,

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4}\epsilon^{\alpha\mu\nu}A_\alpha F_{\mu\nu} + |\nabla_\mu\phi|^2 - V(\phi, \Delta) + \Delta B, \quad (6.1)$$

que como podemos perceber, é idêntica à densidade de Lagrange para o caso topológico (5.1), abordado no capítulo anterior, por esse motivo, são válidas aqui as mesmas definições e convenções anteriores. Vale ressaltar que a grande diferença deste caso não topológico para o caso anterior reside nas condições de contorno às quais estão sujeitas os campos da teoria, o que reflete na mudança da sua variedade de vácuo, e, por consequência, no estado de mínima energia para o potencial. Estado esse que deverá ser responsável pela quebra espontânea da simetria  $SU(3)$  do modelo, gerando as configurações de primeira ordem, que agora apresentam um caráter não topológico.

Note que se supõe o potencial  $V(\phi, \Delta)$  dependendo de ambos, o campo  $\phi$  e  $\Delta$ , com o intuito gerar as configurações autoduais inerentes ao modelo. Além disso, consideramos a configuração (2.10) para o campo  $CP(2)$ , o que nos permite reescrever o modelo (6.1) no seguinte formato:

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4}\epsilon^{\alpha\mu\nu}A_\alpha F_{\mu\nu} + |D_\mu\phi|^2 - V(\phi, \Delta) - \lambda(h - \phi^\dagger\phi) + \Delta B, \quad (6.2)$$

com  $\lambda$  representando ao multiplicador de Lagrange, que garante a condição (2.21).

Neste cenário, a equação de campo para o setor de calibre é dada por

$$-\frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} + (\delta_2^\mu\partial_1 - \delta_1^\mu\partial_2)\Delta = J^\mu, \quad (6.3)$$

onde  $J^\mu$  é a densidade de corrente, expressa por (2.23).

A componente temporal ( $\mu = 0$ ) da Eq. (6.3) se equivale à lei da Gauss do modelo, que para configurações independentes do tempo, se dispõe da seguinte maneira:

$$\kappa B = \rho, \quad (6.4)$$

onde  $\rho = -g^2 A_0 |\psi|^2$ . Aqui, utilizamos  $F_{21} = -F_{12} = B$ . Além do mais, também podemos escrever a Eq. (6.4) na forma

$$\kappa B = -\frac{1}{2}g^2 A_0 (h - \phi_3^2), \quad (6.5)$$

i.e., uma relação direta entre o campo magnético  $B$  e o potencial escalar  $A^0$ .

Da análise de (6.5), podemos concluir que o gauge temporal ( $A^0 = 0$ ) não é permitido para este caso. Dessa forma, as estruturas resultantes possuem tanto campos elétricos como magnéticos não triviais.

Contudo, a componente espacial ( $\mu = k$ ,  $k = 1, 2$ ) da Eq. (6.3) nos remete à lei de Ampère do modelo, que para configurações independentes tempo é dada por

$$\partial_j (\kappa A_0 + \Delta) = -\epsilon_{jk} J_k, \quad (6.6)$$

onde utilizamos  $F^{j0} = E^j = -\partial_j A^0$ .

### 6.1.1 Formalismo BPS aplicado ao cenário Chern-Simons-CP(2) com impureza magnética para o caso não topológico

Dando sequência ao nosso estudo, implementaremos agora o formalismo BPS, a fim de procedermos com a minimização da energia total do modelo, o que torna imprescindível a expressão para a distribuição de energia. Tal relação é dada por

$$\varepsilon = \frac{\kappa^2 B^2}{g^2 (h - \phi_3^2)} + V + (D_k \phi)^\dagger D_k \phi - \Delta B, \quad (6.7)$$

onde utilizamos a lei de Gauss (6.5)

Após algumas manipulações algébricas, a expressão anterior pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \left( \frac{\kappa B}{g(h - \phi_3^2)^{1/2}} \mp \sqrt{V} \right)^2 + \frac{1}{2} \left| D_j \phi \pm i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} (\phi \times D_k \phi)^* \right|^2 \\ & \pm B \left( \frac{2\kappa \sqrt{V}}{g(h - \phi_3^2)^{1/2}} - h^{1/2} g \phi_3 \mp \Delta \right) + \varepsilon_{bps}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

onde implementamos

$$\varepsilon_{bps} = \pm 2\pi h \bar{q}_0, \quad (6.9)$$

com  $\bar{q}_0$  representando a densidade de carga topológica para o modelo CP(2) calibrado, que é dada pela Eq. (3.13).

A energia total da teoria estendida é então dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \int d^2 \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} \left| D_j \phi \pm i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} (\phi \times D_k \phi)^* \right|^2 + \left( \frac{\kappa B}{g(h - \phi_3^2)^{1/2}} \mp \sqrt{V} \right)^2 \right] \\ & \pm \int d^2 \mathbf{x} \left[ B \left( \frac{2\kappa \sqrt{V}}{g(h - \phi_3^2)^{1/2}} - h^{1/2} g \phi_3 \mp \Delta \right) \right] + \mathcal{E}_{bps}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

onde  $\mathcal{E}_{bps}$  possui a seguinte forma:

$$\mathcal{E}_{bps} = \int \varepsilon_{bps} d^2\mathbf{x} = \pm 2\pi h Q_{top}, \quad (6.11)$$

enquanto que  $Q_{top}$  é definido como

$$Q_{top} = \int d^2\mathbf{x} \bar{q}_0 \quad (6.12)$$

e representa a carga topológica relacionada ao modelo  $CP(2)$  calibrado.

Com a finalidade de atingir a estabilidade energética, consideramos a integral no penúltimo termo da Eq. (6.10) como sendo nula, desse modo, obtemos a expressão

$$V(\phi_3, \Delta) = \frac{g^4 h}{4\kappa^2} \left( \phi_3 \pm \frac{\Delta}{gh^{1/2}} \right)^2 (h - \phi_3^2), \quad (6.13)$$

que é o potencial autodual pertencente ao modelo estendido; em outras palavras, é o potencial que suporta a existência de soluções de primeira ordem com energia mínima na presença de uma impureza magnética. Com esse resultado, podemos totalizar a implementação do formalismo BPS para o modelo (6.2), escrevendo a energia total no formato

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \int d^2\mathbf{x} \left\{ \left[ \frac{\kappa B}{g(h - \phi_3^2)^{1/2}} \mp \frac{g^2 h^{1/2}}{2\kappa} \left( \phi_3 \pm \frac{\Delta}{gh^{1/2}} \right) (h - \phi_3^2)^{1/2} \right]^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left| D_j \phi \pm i \frac{\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} (\phi \times D_k \phi)^* \right|^2 \right\} + \mathcal{E}_{bps} \geq 2\pi h |Q_{top}|. \end{aligned} \quad (6.14)$$

a partir da qual podemos observar que no limite em que a energia total assume o seu valor mínimo, os termos quadráticos dentro das integrais se anulam, dando origem às equações BPS do sistema, i.e.,

$$B = \pm \frac{g^3 h^{1/2}}{2\kappa^2} \left( \phi_3 \pm \frac{\Delta}{gh^{1/2}} \right) (h - \phi_3^2), \quad (6.15)$$

$$D_j \phi = \mp \frac{i}{h^{1/2}} \epsilon_{jk} (\phi \times D_k \phi)^*, \quad (6.16)$$

cujas soluções nos remetem a configurações independentes do tempo com energia total dada por

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{bps} = 2\pi h |Q_{top}|, \quad (6.17)$$

que é proporcional à carga topológica do modelo, como esperado.

## 6.2 Sólitos BPS não topológico oriundos de um modelo Chern-Simons- $CP(2)$

Visto que construímos na seção anterior uma estrutura BPS mais geral relacionada ao modelo Chern-Simons- $CP(2)$  estendido; iremos, nesta seção, restringir a nossa investigação às configurações de primeira ordem independentes do tempo com simetria radial.

Entretanto, dado que o termo de Chern-Simons nos permite abordar tanto as configurações de caráter topológico quanto as de caráter não topológico, neste capítulo, iremos estudar o caso não topológico apenas, uma vez que as estruturas topológicas foram abordadas no capítulo anterior. A diferença entre as duas abordagens se faz nas condições de contorno satisfeitas pelos campos. Para o caso topológico, é necessário que a condição de contorno no infinito seja topologicamente diferente daquela do estado de vácuo físico; por sua vez, isso requer estados de vácuo degenerados para a teoria. Por outro lado, para o caso não topológico, a condição de contorno no infinito é a mesma que para o estado de vácuo físico; assim, não há necessidade de estados de vácuo degenerados para a teoria.

Nesta perspectiva, para atingir o objetivo de obter configurações de primeira ordem independentes do tempo com simetria radial, iremos recorrer à projeção do nosso sistema, através da utilização do mapa (5.18) e (5.19) para nossas soluções, cuja regularidade na origem é garantida pela seguinte condição de contorno:

$$\alpha(r=0) = 0 \quad \text{e} \quad A(r=0) = 0. \quad (6.18)$$

Em virtude desta implementação, o campo magnético  $B(r)$  e o campo elétrico  $E(r)$  são expressos, respectivamente, por (3.26) e (3.27).

Do mesmo modo, a densidade de energia (6.8), na sua forma projetada é reescrita como

$$\varepsilon = \frac{k^2 B^2}{g^2 h \sin^2 \alpha} + U(\alpha, \Delta) + h \left[ \left( \frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{4r^2} (2m - A)^2 \right] - \Delta B. \quad (6.19)$$

Assim como o potencial BPS,

$$U(\alpha, \Delta) = \frac{g^4 h^3}{4\kappa^2} \left( \cos \alpha \pm \frac{\Delta}{hg} \right)^2 \sin^2 \alpha, \quad (6.20)$$

onde a impureza  $\Delta$  passa a depender da coordenada radial  $r$  apenas, i.e.  $\Delta = \Delta(r)$ .

A análise da condição da finitude da energia  $\varepsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  nos remete aos seguintes comportamentos:

$$B(r) \rightarrow 0, \quad (6.21)$$

$$U(\alpha, \Delta) \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha(r) \rightarrow 0, \quad \Delta(r) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \Delta(r) \rightarrow 0, \quad (6.22)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} \rightarrow 0, \quad (6.23)$$

onde levamos em consideração a Eq. (6.19).

Em virtude de estarmos abordando configurações não topológicas, o comportamento (6.21) deve ser satisfeito agora pela seguinte condição de contorno de Neumann,

$$A'(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (6.24)$$

O comportamento (6.22) para o potencial (6.20) aponta para a existência de duas possibilidades para os valores assumidos pelo campo  $\alpha(r)$  em  $r \rightarrow \infty$ , i.e.

$$\alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow \pi/2, \quad (6.25)$$

$$\alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (6.26)$$

Como visto anteriormente, estas duas possibilidades correspondem, respectivamente, às configurações solitônicas topológicas e às não topológicas. Nos fixaremos apenas ao último caso (6.26).

Para que o comportamento (6.22) para o potencial (6.20) seja totalmente satisfeito, devemos deixar claro que tipo de comportamento assintótico é satisfeito pela impureza. Desse modo, o caso não topológico (6.26) nos permite trabalhar com um perfil para a impureza que não se anule no infinito,

$$\Delta(r \rightarrow \infty) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \Delta(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (6.27)$$

Outro detalhe importante é que a condição de fronteira para o campo  $\alpha(r)$  (6.26) satisfaz o comportamento (6.23).

Assim sendo, para o caso não topológico, as funções adimensionais  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  satisfazem as condições de contorno correspondentes, que são:

$$\alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad A'(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad (6.28)$$

além das condições tomadas na origem (6.18). Estes comportamentos na fronteira correspondem à descrição de estruturas regulares com energia finita. O valor  $A(r \rightarrow \infty) \rightarrow A_\infty$  deve ser determinado numericamente.

Nestas circunstâncias, a lei de Gauss (6.5) projetada assume a forma

$$kB = -\frac{\hbar}{2}g^2 A^0 \sin^2 \alpha, \quad (6.29)$$

que nos permite concluir, através de uma análise assintótica, a possibilidade do potencial escalar  $A^0(r)$  assumir um valor constante não nulo em  $r \rightarrow \infty$ ,

$$A^0(r \rightarrow \infty) \rightarrow A_\infty^0, \quad (6.30)$$

onde utilizamos as condições (6.21) e (6.28).

De forma análoga, as equações BPS (6.15) e (6.16) são então reescritas na forma radialmente simétrica, como

$$\frac{d\alpha}{dr} = \mp \frac{\sin \alpha}{2r} (2m - A), \quad (6.31)$$

$$\frac{1}{gr} \frac{dA}{dr} = \mp \frac{g^3 h^2 \sin^2 \alpha}{2\kappa^2} \left( \cos \alpha \pm \frac{\Delta}{hg} \right). \quad (6.32)$$

onde os sinais superiores (inferiores) correspondem a  $m < 0$  ( $m > 0$ ).

Além disso, a densidade de carga topológica assume a forma (3.40), a partir da qual o *bound* da energia passa a ser dado por

$$\mathcal{E}_{bps} = \mp 2\pi h A_\infty, \quad (6.33)$$

onde utilizamos as condições (6.18) e (6.28). Neste ponto, ressaltamos que a energia das configurações que saturam o limite de Bogomol'nyi não é mais definida em termos do grau topológico  $m$ , em contrapartida, ela passa a ser definida em termos do valor assumido pelo campo  $A(r)$  em  $r \rightarrow \infty$ .

Do mesmo modo, o fluxo magnético, dado por

$$\Phi = -\frac{2\pi}{g} A_\infty, \quad (6.34)$$

passa a apresentar um comportamento não mais quantizado em termos de  $m$ , o que é característico das configurações não topológicas.

### 6.2.1 O cenário aproximado: soluções analíticas com pequenas amplitudes

O sistema formado pelas equações de primeira ordem (6.31) e (6.32) admite soluções analíticas aproximadas quando tanto o campo  $\alpha(r)$  quanto a impureza magnética  $\Delta(r)$  são caracterizados por amplitudes muito pequenas. Para esclarecer este ponto, vamos primeiramente supor que  $\alpha(r) \ll 1$  para todos os valores de  $r$ . Nesse caso, as equações BPS se reduzem, respectivamente, a

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{\alpha}{r} \left( \frac{A}{2} - m \right), \quad (6.35)$$

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp \frac{g^4 h^2 \alpha^2}{2\kappa^2} \left( 1 \pm \frac{\Delta}{hg} \right), \quad (6.36)$$

que podemos combinar para obter

$$\frac{d^2}{dr^2} (\ln \alpha^2) + \frac{1}{r} (\ln \alpha^2) + \frac{1}{2} \lambda^2 \alpha^2 \left( 1 \pm \frac{\Delta}{hg} \right) = 0, \quad (6.37)$$

onde utilizamos  $(2/\alpha)(d\alpha/dr) = \ln \alpha^2$ , e definimos o parâmetro  $\lambda$ , tal que  $\lambda^2 = g^4 h^2 / \kappa^2$ .

Na sequência, ao considerarmos  $\Delta(r) \ll 1$ , esta última expressão assume a forma aproximada

$$\frac{d^2}{dr^2} (\ln \alpha^2) + \frac{1}{r} (\ln \alpha^2) + \frac{1}{2} \lambda^2 \alpha^2 = 0, \quad (6.38)$$

que representa a equação de Liouville para o caso sem impureza [79], cuja solução é dada por

$$\alpha(r) = \frac{4C_1}{\lambda r_0} \frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{C_1-1}}{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2C_1}}, \quad (6.39)$$

onde  $C_1$  e  $r_0$  são constantes de integração positivas. Vale ressaltar que para termos a condição  $\alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  satisfeita, devemos ter  $C_1 > 1$ . Além disso, a combinação das equações (6.35) e (6.39), revela que a função de perfil  $A(r)$  para o campo de calibre admite a solução

$$A(r) = 2(m + 1 - C_1) + \frac{4C_1 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2C_1}}{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2C_1}}, \quad (6.40)$$

que satisfaz a condição  $A(r = 0)$  apenas para

$$C_1 = m + 1. \quad (6.41)$$

Esse resultado nos permite escrever (6.39) e (6.40) nas formas

$$\alpha_m(r) = \frac{4(m + 1)}{\lambda r_0} \frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^m}{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2(m+1)}}, \quad (6.42)$$

$$A_m(r) = 4(m + 1) \frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2(m+1)}}{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2(m+1)}}, \quad (6.43)$$

de onde obtemos não apenas as soluções analíticas para o potencial elétrico e para o campo elétrico,

$$A_m^0(r) = \frac{gh}{\kappa} \left(1 - \frac{\alpha_m^2}{2}\right), \quad (6.44)$$

$$E_m(r) = -\frac{gh}{\kappa} \frac{\alpha_m^2}{r} \left(\frac{A_m}{2} - m\right), \quad (6.45)$$

mas também para o campo magnético e para a densidade de energia BPS,

$$B_m(r) = -\frac{g^3 h^2}{2\kappa^2} \alpha_m^2, \quad (6.46)$$

$$\varepsilon_{bps,m}(r) = \frac{h}{2} \alpha_m^2 \left[\lambda^2 + \frac{1}{r^2} (A_m - 2m)^2\right]. \quad (6.47)$$

Todos eles definidos em termos de  $\alpha_m(r)$  e  $A_m(r)$ .

Em particular, a Eq. (6.43) leva ao valor assintótico:

$$A_{m,\infty} \equiv A_m(r \rightarrow \infty) \approx 4(m + 1), \quad (6.48)$$

a partir do qual, podemos concluir que a energia das configurações BPS é igual a

$$\mathcal{E}_{bps} = \mp 8\pi h (m + 1), \quad (6.49)$$

onde recorreremos à Eq. (6.33).

Neste manuscrito, usamos essas expressões aproximadas para atestar a consistência de nossa construção teórica e também a precisão do algoritmo numérico aqui usado para representar um conjunto de soluções mais gerais relacionadas a amplitudes não necessariamente pequenas.

## 6.2.2 O cenário numérico 1: uma impureza localizada

Agora consideramos um cenário de primeira ordem, cujas equações BPS correspondentes suportam apenas soluções numéricas. Este caso é definido pelo exemplo mais simples de uma impureza magnética, ou seja,

$$\Delta(r) = ce^{-dr^2}, \quad (6.50)$$

que denota uma impureza localizada centrada em  $r = 0$ . Os parâmetros  $c$  e  $d > 0$  representam a “altura” e a “largura”, respectivamente (neste sentido, o requisito  $\Delta \ll 1$  é atingido quando  $|c| \ll 1$ ). Com esta definição, as equações BPS (6.31) e (6.32) assumem então a forma

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{\sin \alpha}{2r} (A - 2m), \quad (6.51)$$

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp \frac{g^4 h^2 \sin^2 \alpha}{2\kappa^2} \left( \cos \alpha \pm \frac{c}{hg} e^{-dr^2} \right), \quad (6.52)$$

e devem ser resolvidas numericamente de acordo com as condições de contorno não topológicas (6.18) e (6.28).

Fixamos  $h = \kappa = 1$ ,  $g = \sqrt{2}$ ,  $m = 1$  (ou seja, sinais inferiores nas expressões de primeira ordem) e  $d = 1$ , a partir dos quais resolvemos as equações BPS (6.51) e (6.52) por meio de um esquema de diferenças finitas para diferentes valores de  $c$ .

### 6.2.2.1 O caso $\Delta \ll 1$

Iniciamos o trabalho numérico estudando o caso  $|c| \ll 1$  (i.e.,  $\Delta \ll 1$ ), através do qual comparamos os resultados numéricos com os analíticos, obtidos via a equação de Liouville (6.38). Nesse sentido, demonstramos os perfis para  $c = -0.1$  (linha azul tracejada),  $c = 0$  (linha preta sólida) e  $c = +0.1$  (linha vermelha ponto-tracejada), enquanto que as soluções analíticas aproximadas aparecem em linha magenta tracejada.

As figuras 12, 13 e 14 mostram as soluções para  $\alpha(r)$ ,  $A(r)$  e  $B(r)$ , respectivamente. Neste caso, podemos observar que não há mudanças relevantes nos perfis das soluções numéricas em comparação aos perfis das soluções analíticas. O que nos permite inferir que os perfis analíticos, que se originam de uma análise aproximada, ajustam-se parcialmente bem aos resultados obtidos para o caso  $\Delta \ll 1$ .

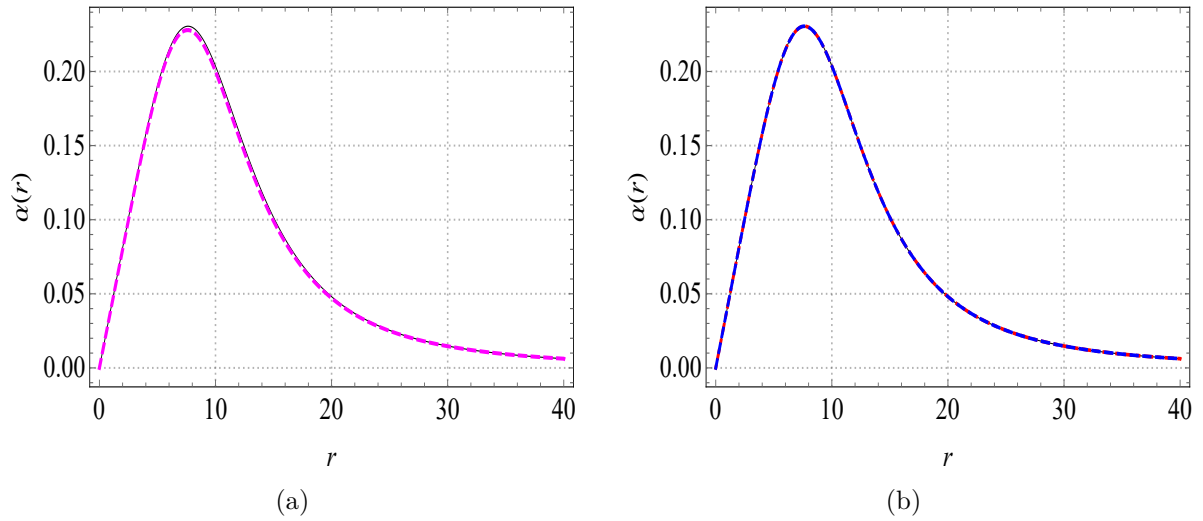


Figura 12 – Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil  $\alpha(r)$ , obtidas via as Eqs. (6.51) e (6.52), para  $h = \kappa = m = d = 1$ ,  $g = \sqrt{2}$  e diferentes valores de  $c \ll 1$ . Esquerda - (a):  $c = 0$  (linha preta sólida) e o perfil analítico correspondente (com  $r_0 = 10$ , linha magenta tracejada). Direita - (b):  $c = -0.1$  (linha azul tracejada),  $c = 0.1$  (linha vermelha ponto-tracejada) e (novamente por comparação)  $c = 0$  (linha preta sólida).

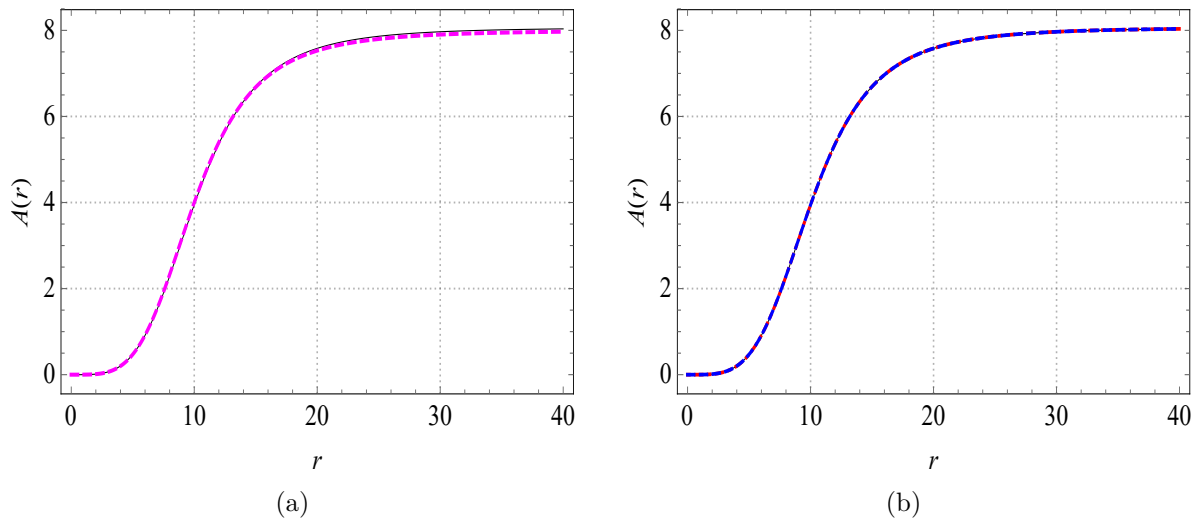


Figura 13 – Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil  $A(r)$ . Convenções conforme a Figura 12.

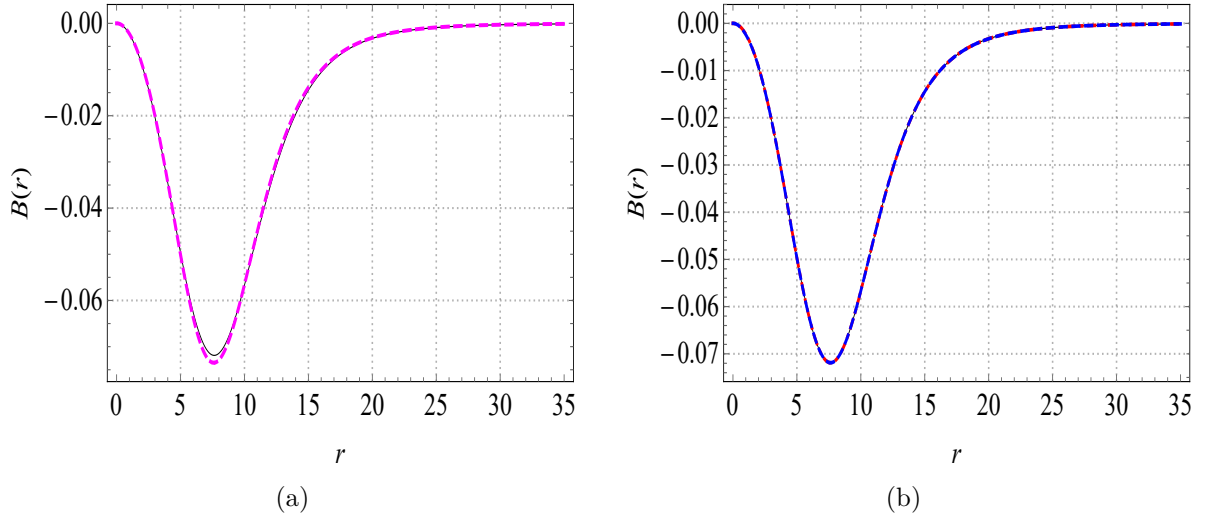


Figura 14 – Soluções numéricas não topológicas para o campo magnético  $B(r)$ . Convenções conforme a Figura 12.

No entanto, quando consideramos o setor elétrico, a situação começa a se modificar, como podemos perceber nas figuras 15 e 16, que mostram os resultados para  $A_0(r)$  e  $E(r)$ , respectivamente. Neste caso, embora para o valor  $c = 0$ , as soluções se comportem de maneira padronizada ou, de maneira geral, quando se trata do limite assintótico  $r \rightarrow \infty$ . Os valores para  $c \neq 0$  afetam, não só o valor de contorno  $A(r = 0)$ , mas também a maneira como ele é alcançado pelo próprio potencial elétrico (i.e., o sinal de  $A'_0(r)$  em torno de  $r = 0$ ). Em suma, a impureza magnética localizada causa uma inversão no sinal do campo elétrico nas proximidades da origem, dando origem a um comportamento que não pode ser predito pela análise aproximada baseada no método de Liouville, Eq. (6.38). Isso nos permite concluir que o setor elétrico é sensível não apenas ao módulo de  $c$ , mas também ao seu sinal, ou seja, se a impureza representa uma barreira ou um poço. Apesar deste comportamento inabitual para o setor elétrico, a distribuição de energia tende a se comportar de maneira padrão para todos os valores de  $r$ , como visto na Figura 17.

Podemos utilizar o proceso de linearização (bastante explorado anteriormente) das equações BPS (6.51) e (6.52) em torno da origem para explicar este comportamento peculiar do setor elétrico nas proximidades de  $r = 0$ . Em particular, essa linearização leva à seguinte soluções aproximada para o potencial elétrico (válida apenas nas proximidades da origem) :

$$A^0(r) \approx A^0(r=0) + \frac{cd}{\kappa}r^2 - \frac{cd^2}{2\kappa}r^4 + \frac{cd^3}{6\kappa}r^6 - \frac{ghH_m^2}{2\kappa}r^{2m} + \frac{ghH_m^4}{8\kappa}r^{4m}, \quad (6.53)$$

onde definimos

$$A^0(r=0) = \frac{hg - c}{\kappa}. \quad (6.54)$$

que representa o valor assumido pelo potencial elétrico  $A^0(r)$  em  $r = 0$ . Com esse resultado também conseguimos obter a solução aproximada para o campo campo elétrico nas proximidades da origem,

$$E(r) \approx -\frac{2cd}{\kappa}r + \frac{2cd^2}{2\kappa}r^3 - \frac{cd^3}{\kappa}r^5 + \frac{mghH_m^2}{\kappa}r^{2m-1} - \frac{mghH_m^4}{2\kappa}r^{4m-1}, \quad (6.55)$$

onde definimos  $H_m$  como uma contante real e positiva.

Em particular, para  $h = \kappa = m = 1$  e  $g = \sqrt{2}$  (i.e., o caso que estamos efetivamente analisando), a Eq. (6.54) nos remete aos valores

$$A^0(r=0) \approx \begin{cases} 1.5142, & \text{para } c = -0.1 \\ 1.3142, & \text{para } c = +0.1 \end{cases} \quad (6.56)$$

que se ajustam aos valores numéricos indicados na Figura 15. Além de que, da análise do primeiro termo da Eq. (6.55), podemos concluir que o sinal assumido por  $c$  neste termo é responsável por empurrar a curva, nas proximidades da origem, para cima (para baixo) quando  $c < 0$  ( $c > 0$ ).

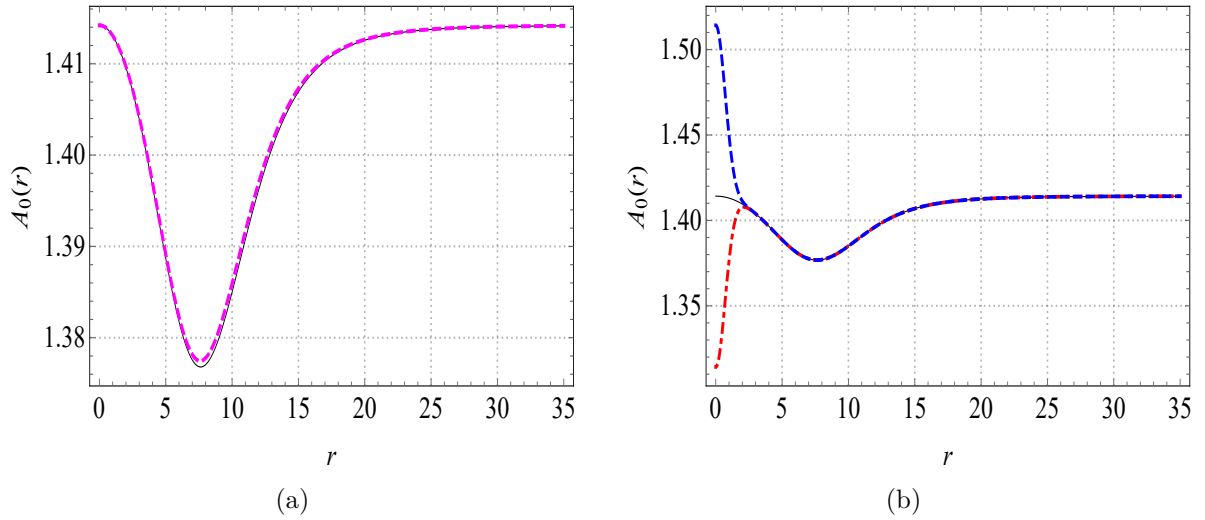


Figura 15 – Soluções numéricas não topológicas para o potencial  $A_0(r)$ . Convenções conforme a Figura 12.

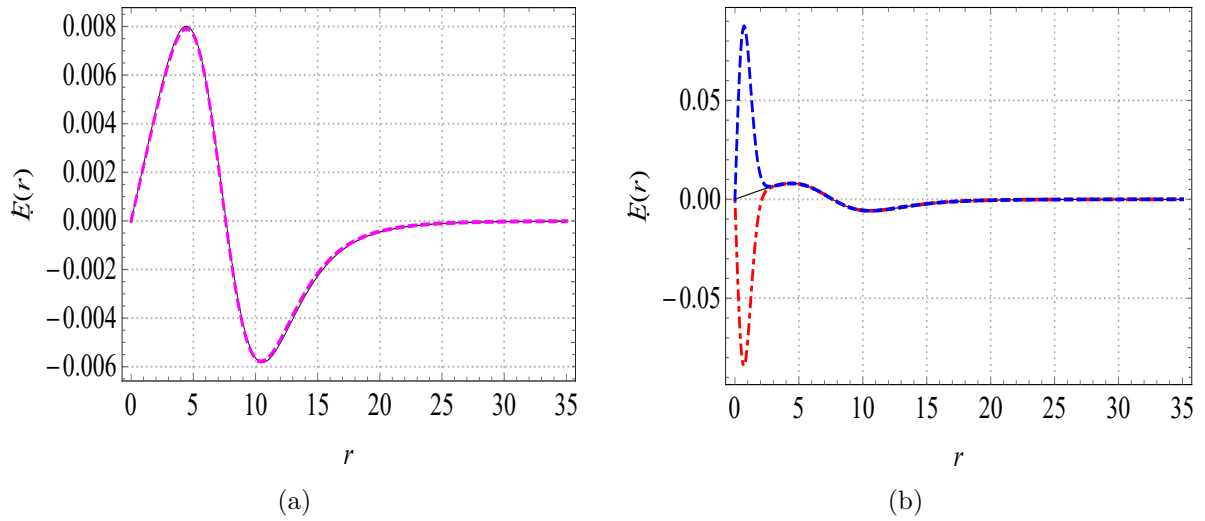


Figura 16 – Soluções numéricas não topológicas para campo elétrico  $E(r)$ . Convenções conforme a Figura 12.

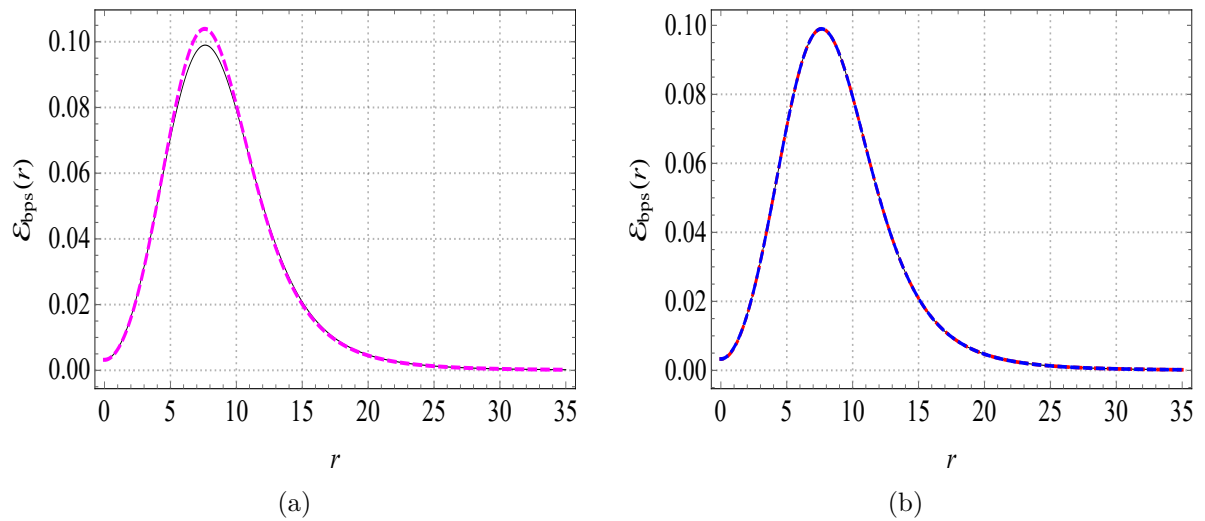


Figura 17 – Soluções numéricas não topológicas para a distribuição de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$ . Convenções conforme a Figura 12.

### 6.2.2.2 O caso geral - impureza considerável

Agora, iremos mais uma vez resolver, numericamente, as equações de primeira ordem (6.51) e (6.52), de acordo com as condições não topológicas (6.18) e (6.28), no entanto, para valores consideráveis de  $c$ , ou seja, para valores diferentes de  $c \ll 1$ .

Com esse intuito, optamos novamente por trabalhar com  $h = \kappa = 1, g = \sqrt{2}, m = 1$  (i.e., os sinais inferiores nas expressões de primeira ordem) e  $d = 1$ , a partir dos quais resolvemos as Eqs. (6.51) e (6.52) para  $c = -3$  (linha azul pontilhada),  $c = -1$  (linha

vermelha tracejada),  $c = 0$  (linha preta sólida),  $c = +1$  (linha preta pontilhada),  $c = +3$  (linha azul tracejada).

As figuras 18 e 19 mostram os resultados para  $\alpha(r)$ ,  $A(r)$ , respectivamente, de onde podemos inferir que esses perfis mantêm sua monotonicidade, assim como para  $c \ll 1$ . Identificamos então uma diferença importante em comparação com o caso topológico Chern-Simons-CP(2) de primeira ordem, para o qual a impureza localizada força as funções de perfil a serem não monotônicas à medida que os valores de  $|c|$  aumentam.

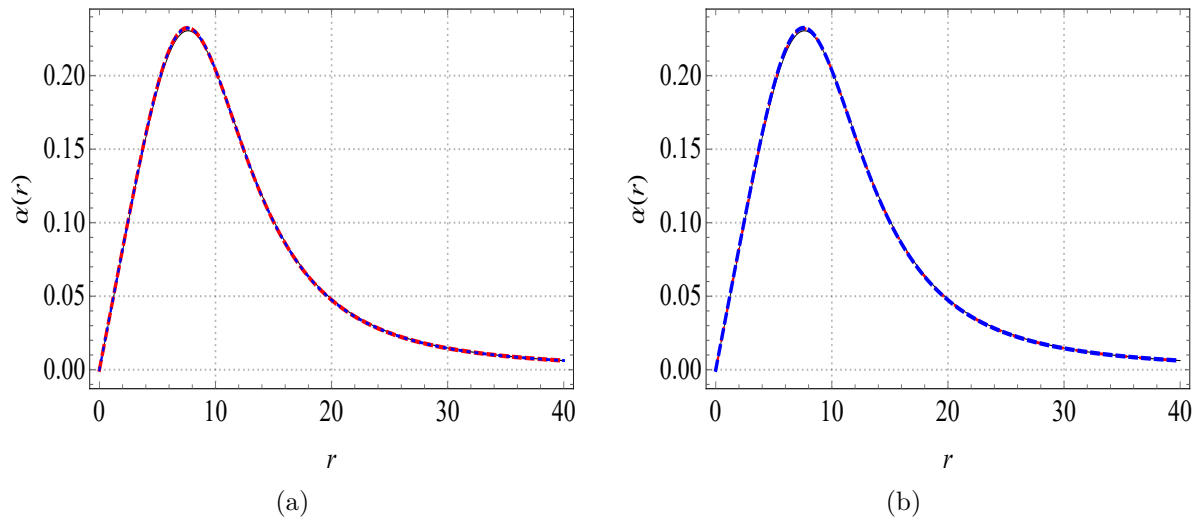


Figura 18 – Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil  $\alpha(r)$ , obtidas via as Eqs. (6.51) e (6.52), para  $h = \kappa = m = d = 1$ ,  $g = \sqrt{2}$  e para valores consideráveis de  $c$  (diferentes de  $c \ll 1$ ). Esquerda - (a):  $c = 0$  (linha preta sólida),  $c = +1$  (linha vermelha tracejada) e  $c = +3$  (linha azul pontilhada). Direita - (b):  $c = -1$  (linha vermelha pontilhada) e  $c = -3$  (linha azul tracejada) e (novamente por comparação)  $c = 0$  (linha preta sólida).

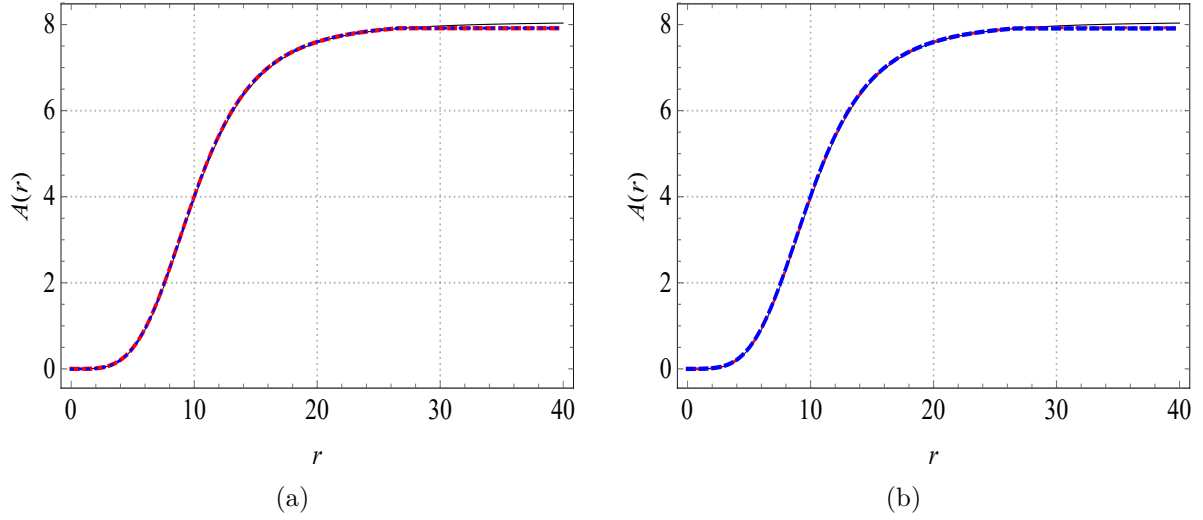


Figura 19 – Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil  $A(r)$ . Convenções conforme a Figura 18.

As soluções numéricas para  $B(r)$  aparecem na Figura 20, de onde se deduz que, em geral, elas se comportam em conformidade com as soluções canônicas, exceto por um pequeno setor próximo à origem. Para destacar essa peculiaridade, também descrevemos os resultados para  $c = -8$  (linha magenta tracejada),  $c = +8$  (linha magenta pontilhada) na Figura 24. Este comportamento particular pode ser entendido com base na solução aproximada do campo magnético que vem da linearização de (6.51) e (6.52) em torno da origem ( $r = 0$ ), i.e.,

$$\begin{aligned}
 B(r) \approx & -\frac{g^2 h(gh - c)H_m^2}{2\kappa^2} r^{2m} - \frac{cdg^2 H_m^2}{2\kappa^2} r^{2m+2} \\
 & + \frac{g^2 h(2gh - c)H_m^4}{4\kappa^2} r^{4m},
 \end{aligned} \tag{6.57}$$

de onde podemos inferir que o primeiro termo da relação acima pode ser desmembrado em dois termos de mesma ordem em  $r$ , ou seja,

$$-\frac{g^2 h(gh - c)H_m^2}{2\kappa^2} r^{2m} = -\frac{g^3 h^2 H_m^2}{2\kappa^2} r^{2m} + \frac{cg^2 h H_m^2}{2\kappa^2} r^{2m}. \tag{6.58}$$

Porém, o segundo termo desse desmembramento depende do sinal assumido por  $c$ , sendo tão relevante quanto o primeiro nas proximidades de  $r = 0$ , desse modo, concluímos que este termo empurra a curva para cima (para baixo) quando  $c > 0$  ( $c < 0$ ).

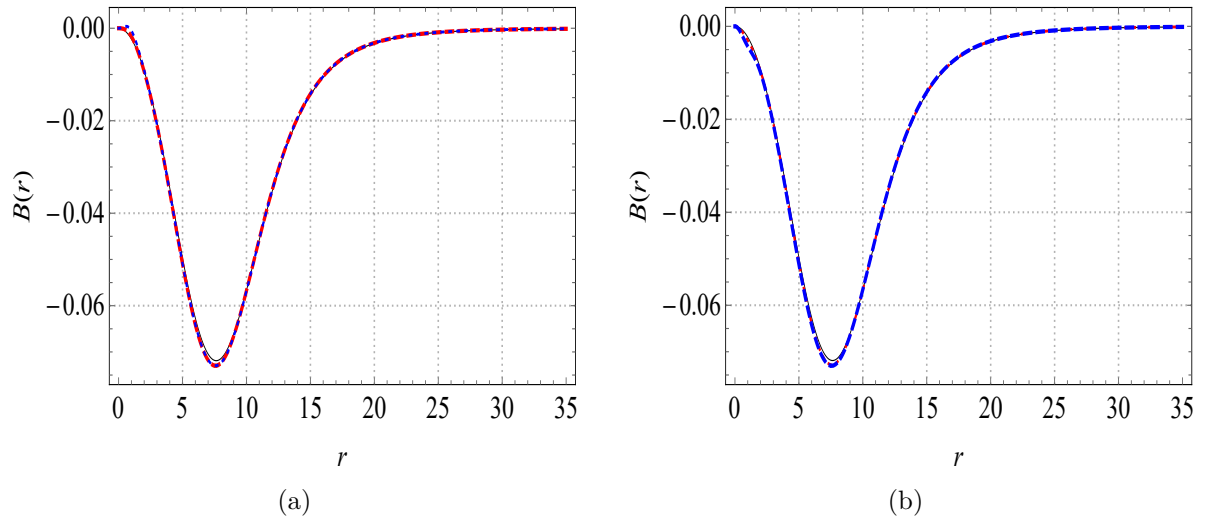


Figura 20 – Soluções numéricas não topológicas para o campo magnético  $B(r)$ . Convenções conforme a Figura 18.

As figuras 21 e 22 trazem os perfis para o potencial elétrico  $A_0(r)$  e para o campo elétrico  $E(r)$ , respectivamente. Essas soluções se comportam da mesma maneira geral que as obtidas para  $c \ll 1$ . Em particular, a Eq. (6.54) fornece

$$A^0(r=0) \approx \begin{cases} 2.4142, & \text{para } c = -1 \\ 0.4142, & \text{para } c = +1 \end{cases} \quad (6.59)$$

e

$$A^0(r=0) \approx \begin{cases} 4.4142, & \text{para } c = -3 \\ -1.5858, & \text{para } c = +3, \end{cases} \quad (6.60)$$

que novamente se ajustam muito bem aos resultados numéricos.

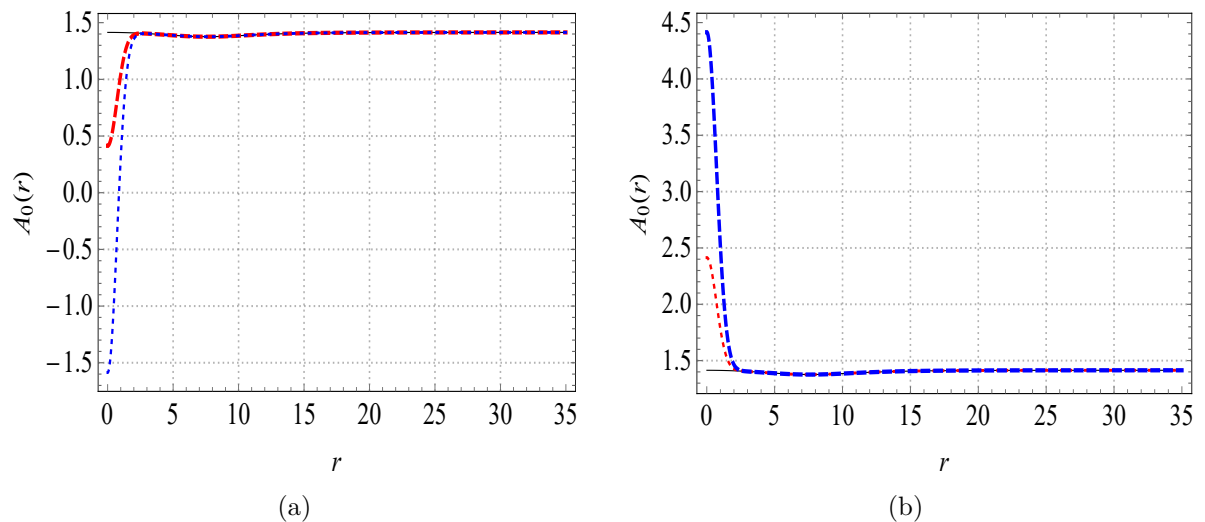


Figura 21 – Soluções numéricas não topológicas para o potencial  $A_0(r)$ . Convenções conforme a Figura 18.

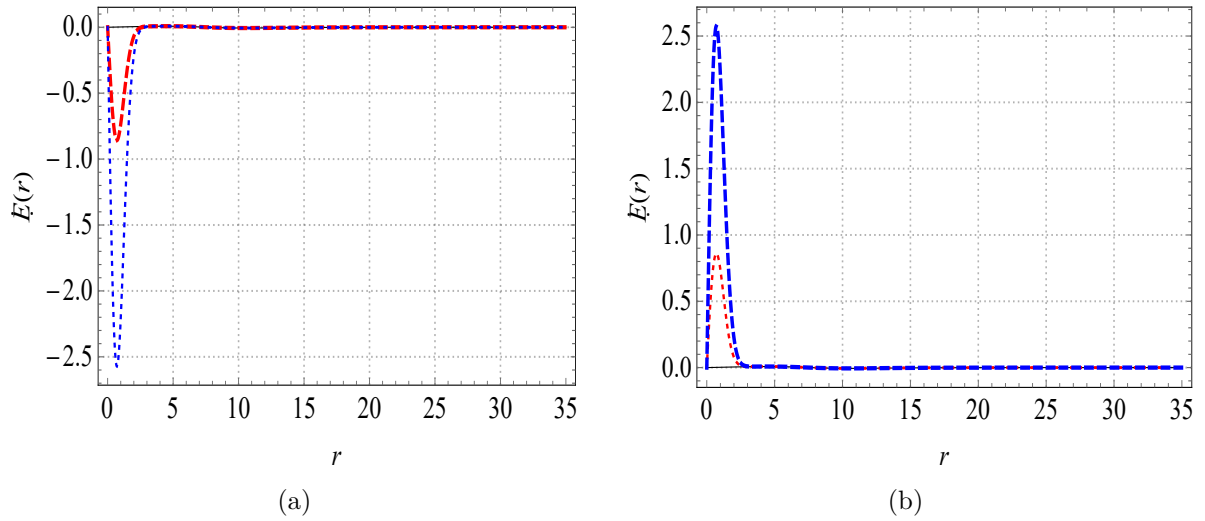


Figura 22 – Soluções numéricas não topológicas para campo elétrico  $E(r)$ . Convenções conforme a Figura 18.

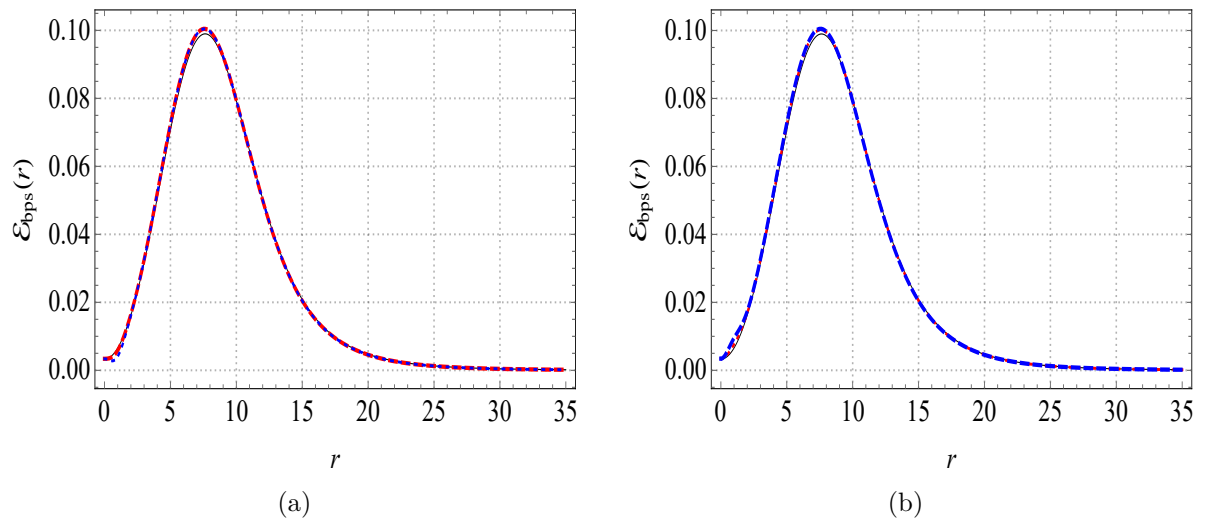


Figura 23 – Soluções numéricas não topológicas para a distribuição de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$ . Convenções conforme a Figura 18.

Finalmente, o perfil para a distribuição de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$  inerente aos sólitons de primeira ordem aparece na Figura 23, da qual observamos que, em geral, essas soluções se comportam de acordo com as soluções canônicas, semelhante ao caso em que  $|c| \ll 1$ . Porém, próximo a  $r = 0$ , uma pequena parte da curva apresenta uma peculiaridade que pode ser melhor evidenciada com base na Figura 25. Este comportamento particular é semelhante ao que ocorre com o campo magnético, podendo também ser entendido com base na solução aproximada para a distribuição de energia nas proximidades de  $r = 0$ , que

é dada por

$$\varepsilon_{bps}(r) \approx 2m^2 h H_m^2 r^{2m-2} + \frac{g^3 h^2 (gh - c) H_m^2 r^{2m}}{2\kappa^2} + \frac{cdg^3 H_m^2 r^{2m+2}}{2\kappa^2}, \quad (6.61)$$

onde podemos concluir que o segundo termo de (6.61) também pode ser desmembrado em dois termos de mesma ordem em  $r$ , em que um desses termos possui dependência com o sinal de  $c$ ,

$$\frac{g^3 h^2 (gh - c) H_m^2 r^{2m}}{2\kappa^2} = \frac{g^4 h^3 H_m^2 r^{2m}}{2\kappa^2} - \frac{cg^3 h^2 H_m^2 r^{2m}}{2\kappa^2}, \quad (6.62)$$

sendo este segundo termo de grande relevância nas proximidades da origem, o que faz com que a curva se desloque para cima (para baixo) para  $c < 0$  ( $c > 0$ ). Além disso, podemos perceber que, para  $m = 1$ , o primeiro termo em (6.61) se torna constante, o que explica o fato da curva para  $\varepsilon_{bps}$  assumir um valor constante e não nulo na origem.

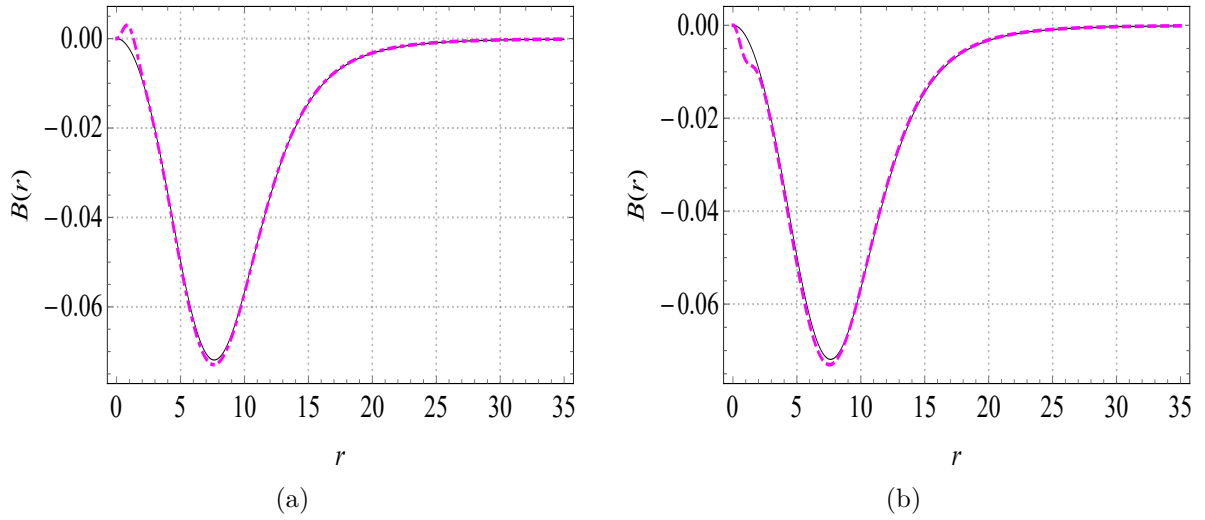


Figura 24 – Soluções numéricas não topológicas para o campo magnético  $B(r)$  para  $h = \kappa = m = d = 1$ ,  $g = \sqrt{2}$  e para valores consideráveis de  $c$  (diferentes de  $c \ll 1$ ). Esquerda - (a):  $c = 0$  (linha preta sólida) e  $c = +8$  (linha magenta ponto-tracejada). Direita - (b):  $c = -8$  (linha magenta tracejada) e (novamente por comparação)  $c = 0$  (linha preta sólida).

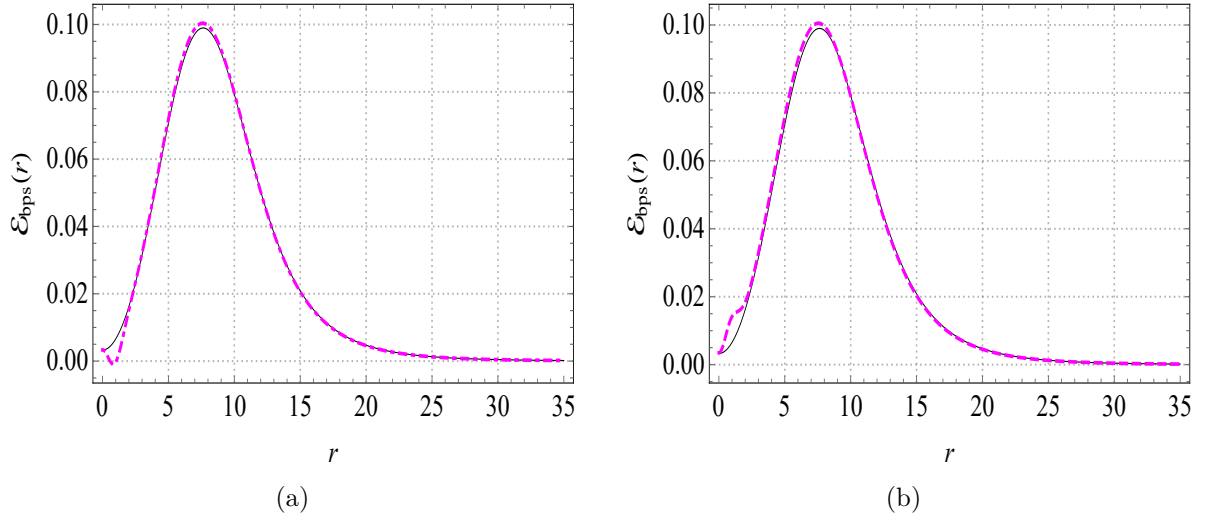


Figura 25 – Soluções numéricas não topológicas para a distribuição de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$ . Convenções conforme a Figura 24.

### 6.2.3 O cenário numérico 2: uma impureza magnética periódica

Devido à condição não topológica  $\alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , a exigência de uma energia finita  $\varepsilon_{bps}(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  pode ser atingida para uma impureza regular que não se anule no limite assintótico ( $\Delta(r \rightarrow \infty) \neq 0$ ). Com o intuito de estudar tais efeitos sobre os sólitos de primeira ordem, consideramos o caso definido pela expressão

$$\Delta(r) = c \sin^2\left(\frac{\pi}{2}dr\right), \quad (6.63)$$

onde  $c$  e  $d$  novamente denotam “altura” e “largura”, respectivamente (como antes,  $|c| \ll 1$  implica em  $\Delta \ll 1$ ). Note que a impureza (6.63) pode ser interpretada como um sequência de barreiras e poços.

Com o novo perfil para a impureza, as equações de primeira ordem (6.31) e (6.32) assumem a forma

$$\frac{d\alpha}{dr} = \mp \frac{\sin \alpha}{2r} (2m - A), \quad (6.64)$$

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp \frac{g^4 h^2 \sin^2 \alpha}{2\kappa^2} \left( \cos \alpha \pm \frac{c}{hg} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}dr\right) \right), \quad (6.65)$$

que devem ser estudadas numericamente, de acordo com (6.18) e (6.28).

Neste caso, por conveniência, fixamos  $\kappa = g = 1$ ,  $h = 5$ ,  $m = 1$  e  $d = 1$ , a partir dos quais resolvemos as equações (6.64) e (6.65) para valores diferentes de  $c$ .

#### 6.2.3.1 O caso $\Delta \ll 1$

Consideramos novamente o caso com  $\Delta \ll 1$ , com a intenção de comparar os resultados com as soluções analíticas aproximadas, obtidos pela equação de Liouville (6.38).

Com esse objetivo em mente, plotamos as soluções para  $c = -1$  (linha azul tracejada),  $c = 0$  (linha preta sólida) e  $c = +1$  (linha vermelha pontilhada), enquanto que os resultados analíticos aproximados são mostrados em linha magenta pontilhada.

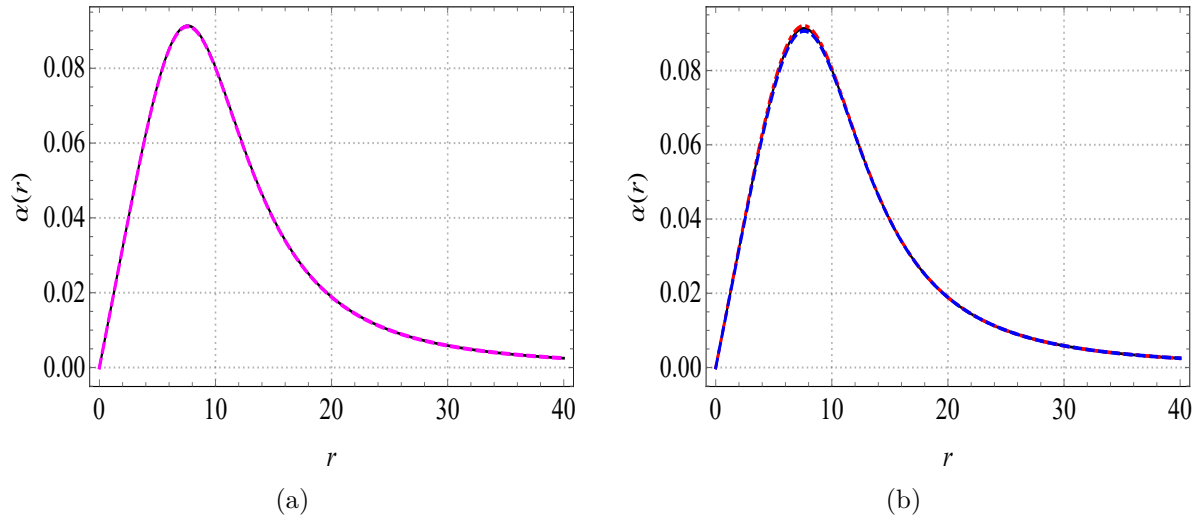


Figura 26 – Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil  $\alpha(r)$ , obtidas via as equações (6.64) e (6.65), para  $\kappa = g = 1$ ,  $h = 5$ ,  $m = 1$  e  $d = 1$  e diferentes valores de  $c \ll 1$ . Esquerda - (a):  $c = 0$  (linha preta sólida) e o perfil analítico correspondente (com  $r_0 = 10$ , linha magenta tracejada). Direita - (b):  $c = -0.1$  (linha azul tracejada),  $c = 0.1$  (linha vermelha ponto-tracejada) e (novamente por comparação)  $c = 0$  (linha preta sólida).

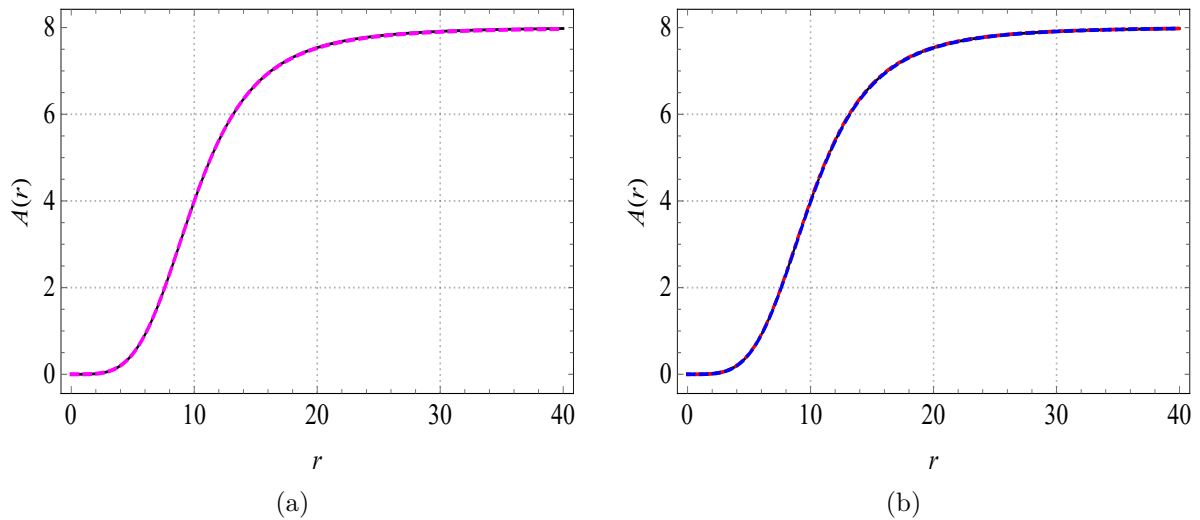


Figura 27 – Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil  $A(r)$ . Convenções conforme a Figura 26.

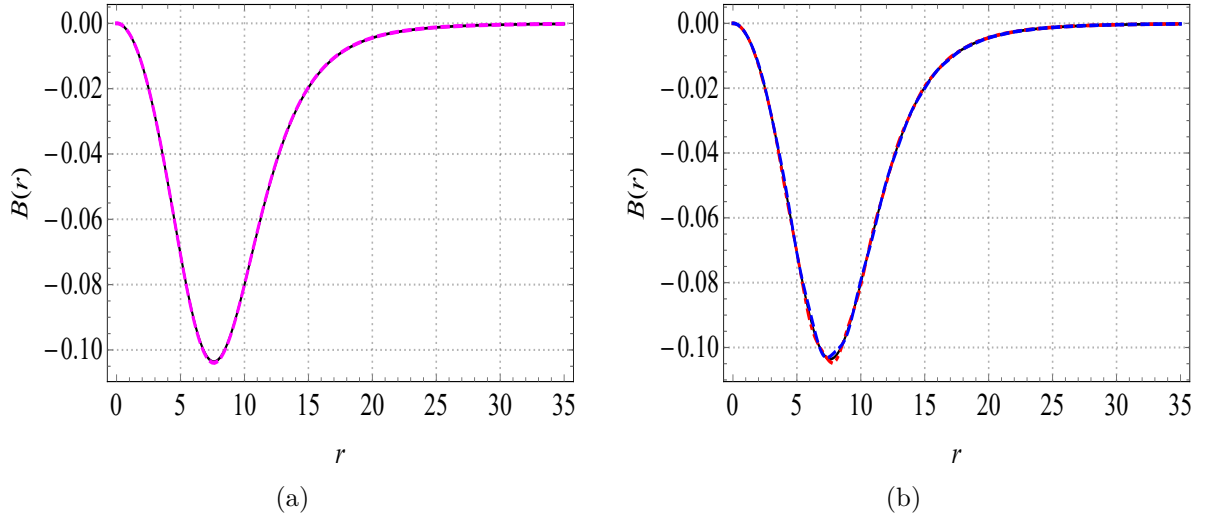


Figura 28 – Soluções numéricas não topológicas para o campo magnético  $B(r)$ . Convenções conforme a Figura 26.

Os perfis para  $\alpha(r)$ ,  $A(r)$  e  $B(r)$  aparecem nas figuras 26, 27 e 28, respectivamente. Tal como no caso anterior (impureza localizada), não surgem novidades relevantes. Assim como na Figura 29 para o setor elétrico. Portanto, é razoável supor que, como no caso anterior, as soluções analíticas aproximadas são capazes de explicar o comportamento geral desses campos, suficientemente bem, quando  $\Delta \ll 1$ .

Por outro lado, destacamos as mudanças consideráveis exibidas nas figuras 30 e 31 para  $A_0(r)$  e  $E(r)$ , respectivamente, relacionadas aos valores  $c \neq 0$ , que dão origem a perfis periódicos que se espalham para a região assintótica indefinidamente. Nesse sentido, dado que tal comportamento periódico não é previsto pelas expressões obtidas da equação de Liouville, o trabalho numérico revelou que o setor elétrico é extremamente sensível ao valor de  $|c|$ , mesmo quando a impureza representa uma sequência de barreiras (ou poços). No entanto, na Figura

Em particular as soluções linearizadas para o setor elétrico próximas à origem, são dadas por

$$A^0(r) \approx A^0(r=0) - \frac{\pi^2 cd^2}{4\kappa} r^2 + \frac{\pi^4 cd^4}{48\kappa} r^4 - \frac{ghH_m^2}{2\kappa} r^{2m} + \frac{ghH_m^4}{8\kappa} r^{4m}, \quad (6.66)$$

$$E(r) \approx \frac{\pi^2 cd^2}{2\kappa} r - \frac{\pi^4 cd^4}{12\kappa} r^3 + \frac{mghH_m^2}{\kappa} r^{2m-1} - \frac{mghH_m^4}{2\kappa} r^{4m-1}, \quad (6.67)$$

com

$$A^0(r=0) = \frac{gh}{\kappa}, \quad (6.68)$$

de onde se obtém que o valor do potencial elétrico em  $r = 0$  não é mais controlado por  $c$ . Desse modo, uma vez que tomamos  $\kappa = g = m = d = 1$  e  $h = 5$  (i.e., os mesmos valores dos parâmetros para caso que estamos analisando), a Eq. (6.68) nos fornece

$$A^0(r = 0) = 5, \quad (6.69)$$

que está de acordo com os resultados numéricos, e consegue explicar o porquê das curvas com diferentes valores de  $c$  assumirem esse valor em  $r = 0$ .

Outro detalhe importante em relação ao comportamento dos perfis para o campo elétrico nas proximidades da origem pode ser explicado pela Eq. (6.67), onde o primeiro termo (o mais relevante), além de indicar o valor  $E(r = 0) = 0$ , também deixa claro a forma como as curvas se aproximam desse valor, em decorrência do sinal de  $c$ .

Novamente, apesar deste novo perfil para o setor elétrico, a densidade de energia das configurações resultantes permanece localizada, como esperado e demonstrado na Figura 32.

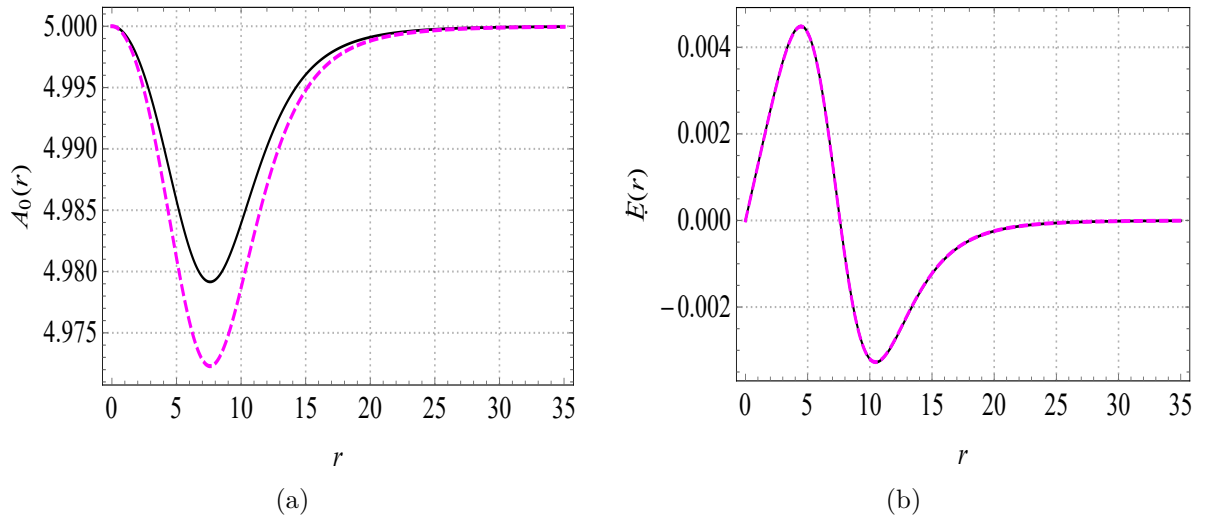


Figura 29 – Soluções numéricas não topológicas para o potencial  $A_0(r)$  (esquerda-(a)) e para o campo elétrico  $E(r)$  correspondente (direita-(b)). Aqui, utilizamos os mesmos valores anteriores para os parâmetros, i.e.,  $\kappa = g = 1$ ,  $h = 5$ ,  $m = 1$ ,  $d = 1$ , além disso, utilizamos  $c \ll 1$ . Em ambos os perfis, temos os valores:  $c = 0$  (linha preta sólida) e o perfil analítico correspondente (com  $r_0 = 10$ , linha magenta tracejada).

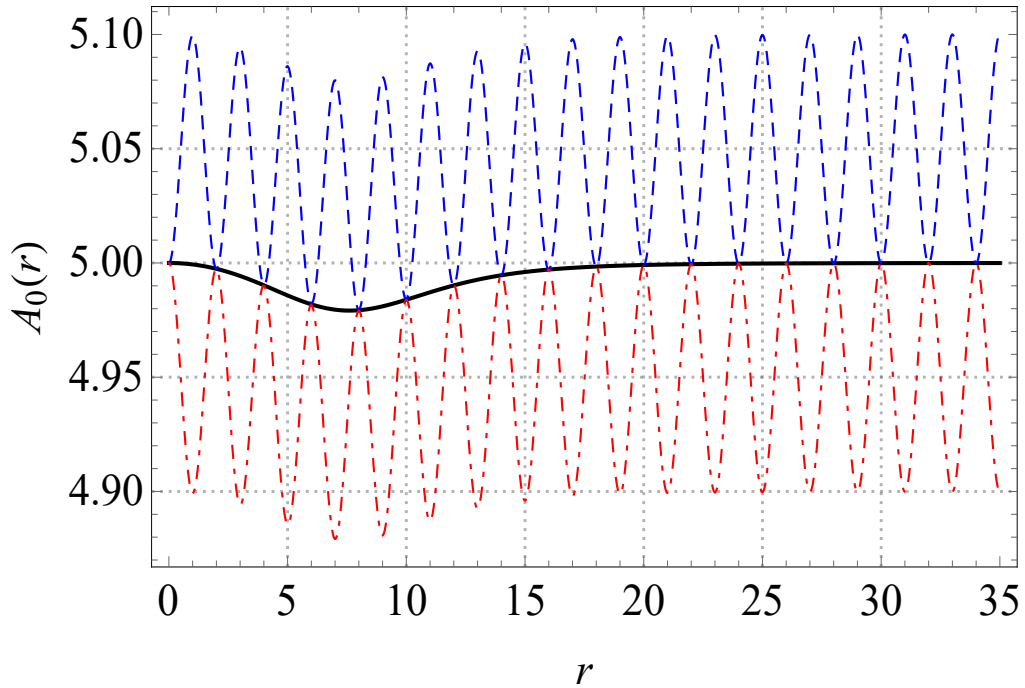


Figura 30 – Soluções numéricas não topológicas para o potencial  $A_0(r)$ . Utilizamos os mesmos valores anteriores para os parâmetros,  $\kappa = g = 1$ ,  $h = 5$ ,  $m = 1$ ,  $d = 1$  e diferentes valores de  $c \ll 1$ , que são:  $c = -0.1$  (linha azul tracejada),  $c = 0.1$  (linha vermelha ponto-tracejada) e (novamente por comparação)  $c = 0$  (linha preta sólida)

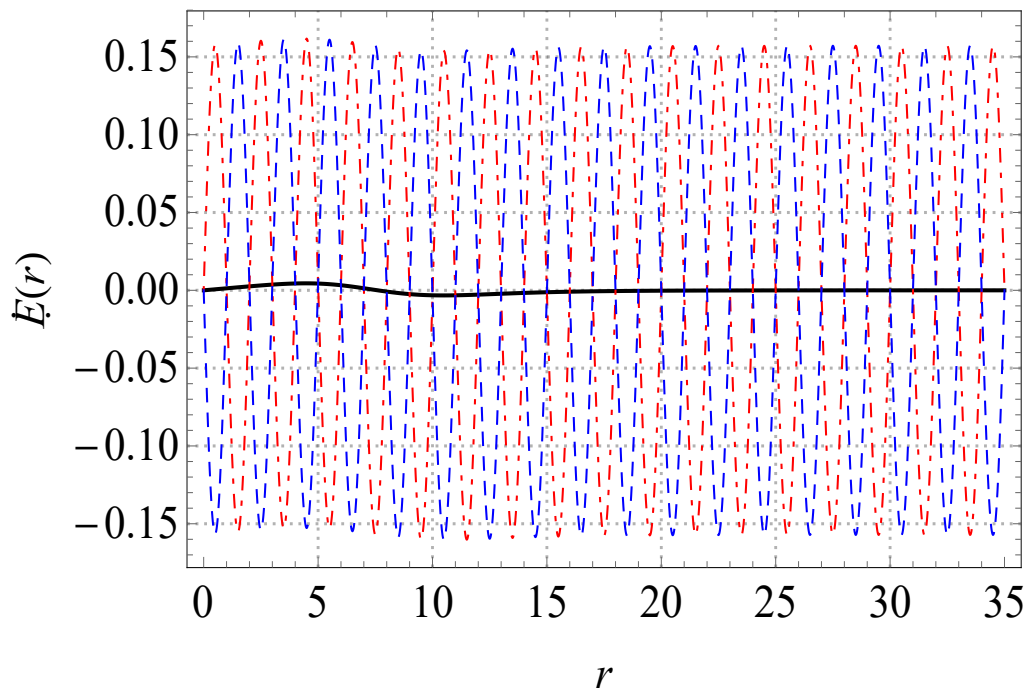


Figura 31 – Soluções numéricas não topológicas para o campo elétrico  $E(r)$ . Convenções conforme a Figura 30.

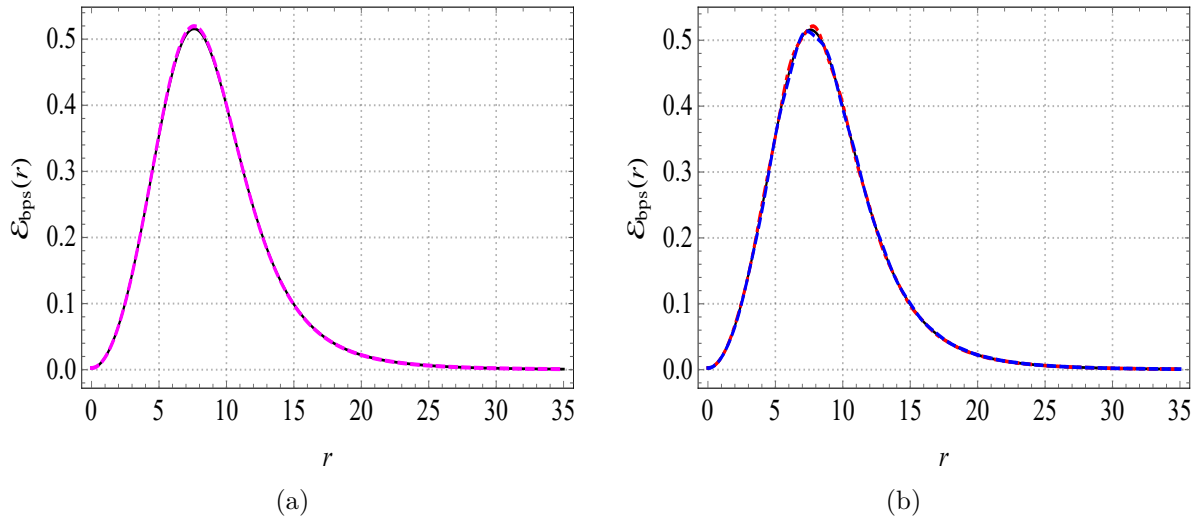


Figura 32 – Soluções numéricas não topológicas para a distribuição de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$ . Convenções conforme a Figura 26.

### 6.2.3.2 O caso geral - impureza considerável

Para finalizar, resolvemos as equações BPS (6.64) e (6.65), de acordo com as condições (6.18) e (6.28), para  $c = -5$  (linha verde tracejada),  $c = -3$  (linha azul tracejada espessa),  $c = -1$  (linha vermelha ponto-tracejada),  $c = 0$  (linha preta sólida),  $c = +1$  (linha vermelha tracejada espessa),  $c = +3$  (linha azul tracejada),  $c = +5$  (linha verde sólida).

As soluções numéricas para  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  aparecem nas figuras 33 e 34, respectivamente. Em geral, vemos que, apesar das variações em suas amplitudes, esses campos se comportam canonicamente para valores relativamente pequenos de  $|c|$ . No entanto, à medida que  $|c|$  aumenta, as soluções resultantes perdem sua monotonicidade original, conforme podemos observar nos resultados para  $c = -9$  (linha ponto-tracejada laranja),  $c = -7$  (linha azul claro tracejada),  $c = +7$  (linha ponto-tracejada azul claro) e  $c = +9$  (linha azul claro tracejada) que estão plotados nas figuras 35 e 36. Identificamos, portanto, um efeito previamente encontrado no contexto de configurações topológicas na presença de impurezas localizadas.

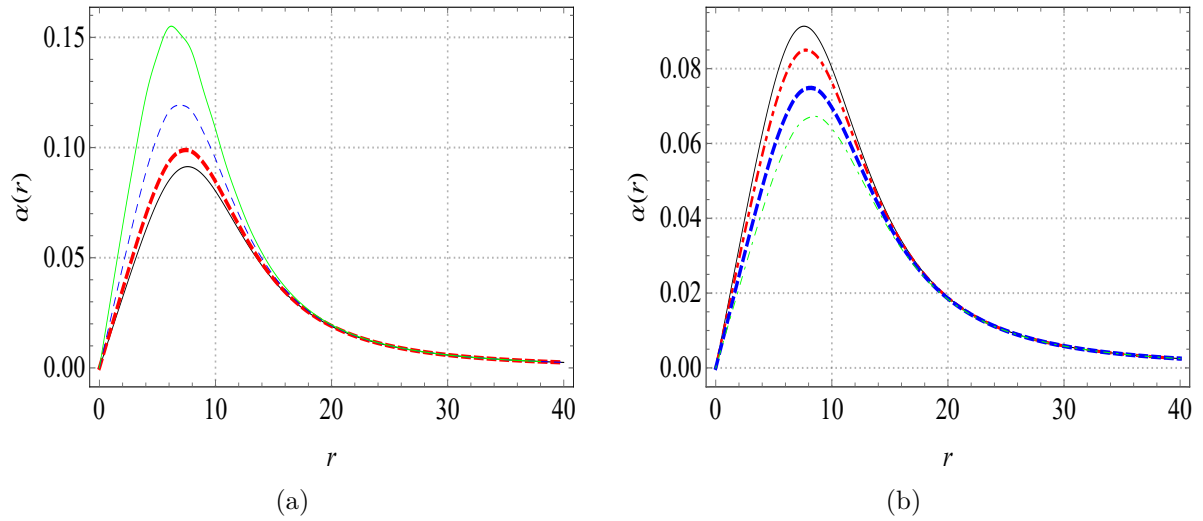


Figura 33 – Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil  $\alpha(r)$ , obtidas via as Eqs. (6.64) e (6.65), para  $\kappa = g = 1$ ,  $h = 5$ ,  $m = 1$  e  $d = 1$ ; para valores consideráveis de  $c$  (diferentes de  $c \ll 1$ ). Esquerda - (a):  $c = 0$  (linha preta sólida),  $c = 1$  (vermelha tracejada),  $c = 3$  (azul tracejada) e  $c = 5$  (verde sólida). Direita - (b):  $c = -1$  (linha vermelha ponto-tracejada),  $c = -3$  (linha azul tracejada),  $c = -5$  (linha verde ponto-tracejada) e (novamente por comparação)  $c = 0$  (linha preta sólida).

A Figura 37 contém os perfis para  $B(r)$ , que agora apresentam uma forma não canônica, descrevendo um anel multicamada (tridimensional, centrado em  $r = 0$ ) que mantém o fluxo magnético confinado à mesma região no espaço. É importante destacar que este perfil representa uma novidade sem nenhuma correspondência com o cenário topológico. Além disso, uma vez que tal comportamento não ocorre para  $\Delta \ll 1$ , concluímos que ele está diretamente relacionado à magnitude de  $|c|$ .

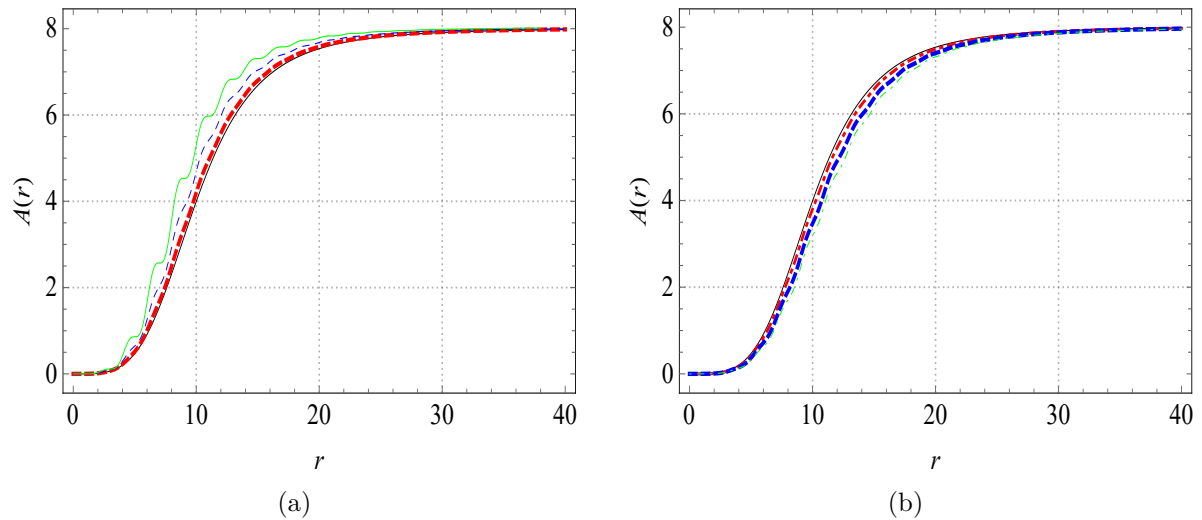


Figura 34 – Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil  $A(r)$ . Convenções conforme a Figura 33.

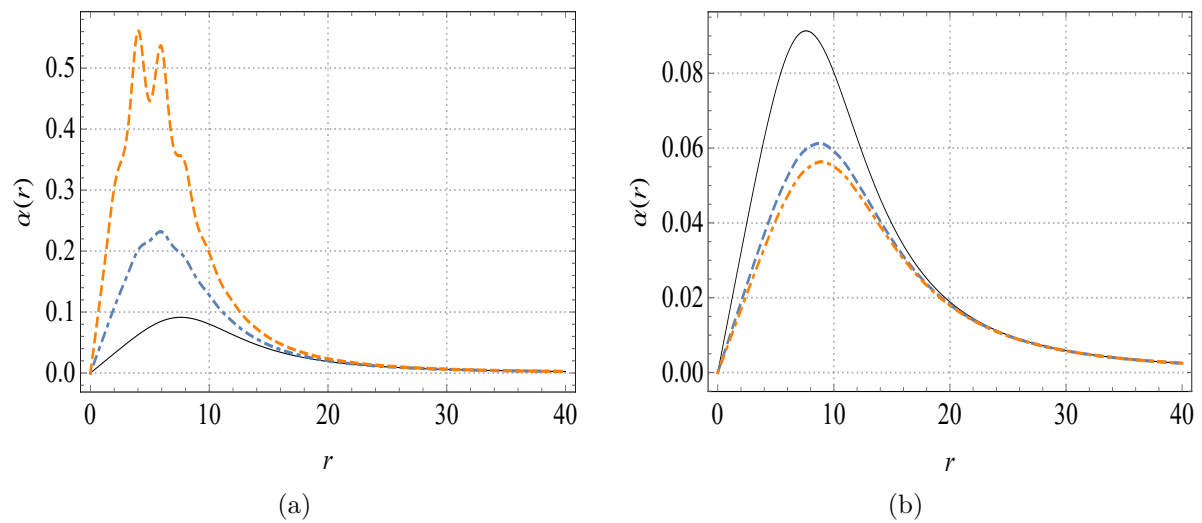


Figura 35 – Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil  $\alpha(r)$ , obtidas via as Eqs. (6.64) e (6.65), para  $\kappa = g = 1$ ,  $h = 5$ ,  $m = 1$  e  $d = 1$ ; para valores consideráveis de  $c$  (diferentes de  $c \ll 1$ ). Esquerda - (a):  $c = 0$  (linha preta sólida),  $c = 7$  (linha azul claro ponto-tracejada),  $c = 9$  (linha laranja tracejada) e  $c = -7$  (linha azul claro ponto-tracejada). Direita - (b):  $c = -7$  (linha azul claro ponto-tracejada),  $c = -9$  (linha laranja ponto-tracejada) e (novamente por comparação)  $c = 0$  (linha preta sólida).

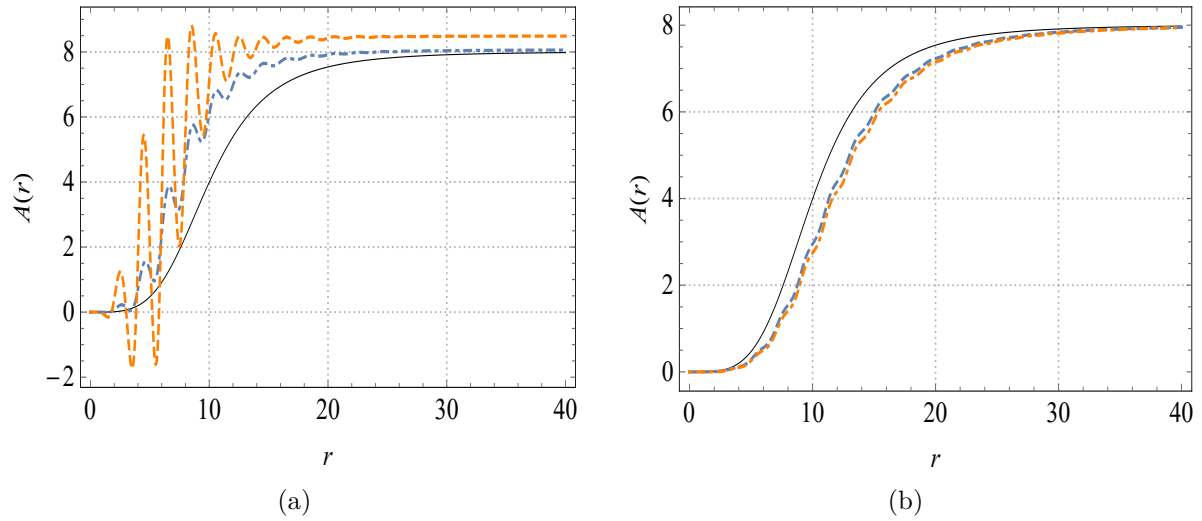


Figura 36 – Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil  $A(r)$ . Convenções conforme a Figura 35.

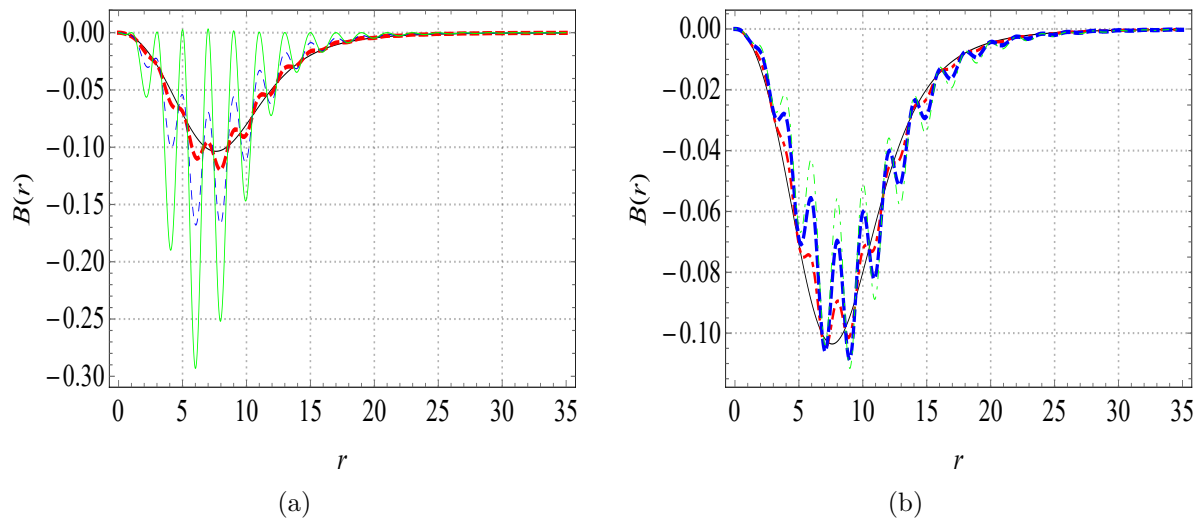


Figura 37 – Soluções numéricas não topológicas para o campo magnético  $B(r)$ . Convenções conforme a Figura 33.

As soluções para  $A_0(r)$  e  $E(r)$  são representadas em destaque nas figuras 38, 39, 40 e 41, respectivamente. Aqui é possível notar a persistência do referido comportamento periódico que se propaga até o limite assintótico  $r \rightarrow \infty$  indefinidamente, com o valor de  $|c|$  agora controlando a amplitude das oscilações. Outro detalhe importante é que os perfis oscilatórios são contornados pela curva relacionada à ausência de impureza (linha preta sólida,  $c = 0$ ). Dessa forma, este perfil, em especial, também pode gerar mudanças na amplitude dos perfis periódicos em certos pontos do gráfico, como poderemos perceber adiante, nas soluções do Seção 6.3 para magnitudes consideráveis de  $\alpha(r)$ .

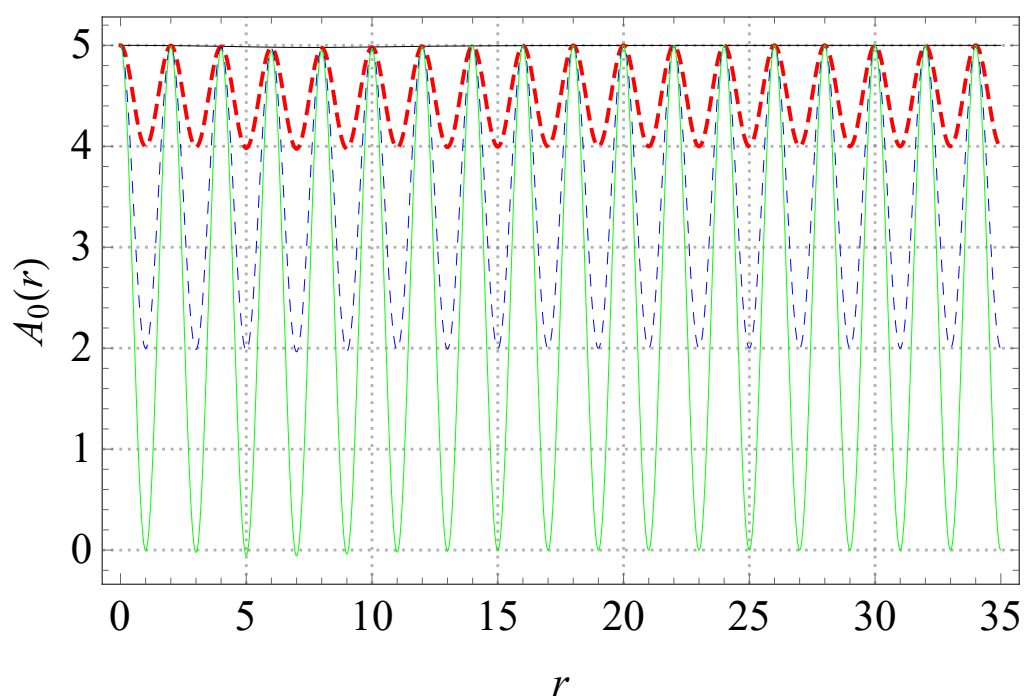


Figura 38 – Solução numérica não topológicas para o potencial elétrico  $A_0(r)$ , obtidas para  $\kappa = g = 1$ ,  $h = 5$ ,  $m = 1$  e  $d = 1$ , para valores consideráveis de  $c$  (diferentes de  $c \ll 1$ ), i.e.,  $c = 0$  (linha preta sólida),  $c = 1$  (vermelha tracejada),  $c = 3$  (azul tracejada) e  $c = 5$  (verde sólida).

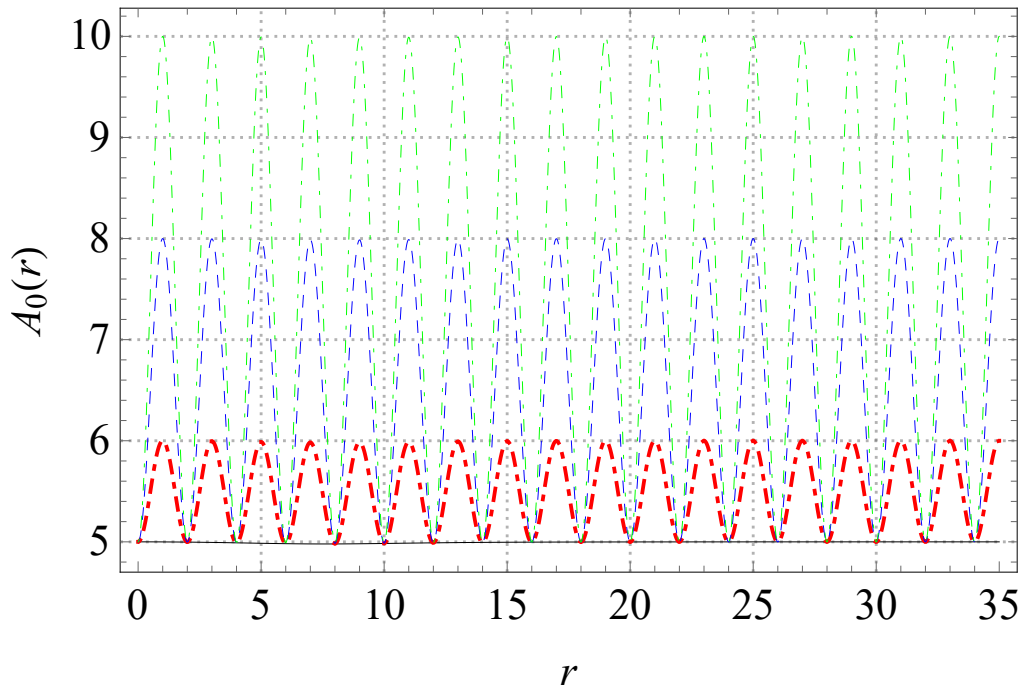


Figura 39 – Soluções numéricas não topológicas para o potencial  $A_0(r)$  para  $\kappa = g = 1$ ,  $h = 5$ ,  $m = 1$ ,  $d = 1$ , e para valores consideráveis de  $c$  (diferentes de  $c \ll 1$ ), que incluem:  $c = -1$  (linha vermelha ponto-tracejada),  $c = -3$  (linha azul tracejada),  $c = -5$  (linha verde ponto-tracejada) e (novamente por comparação)  $c = 0$  (linha preta sólida)

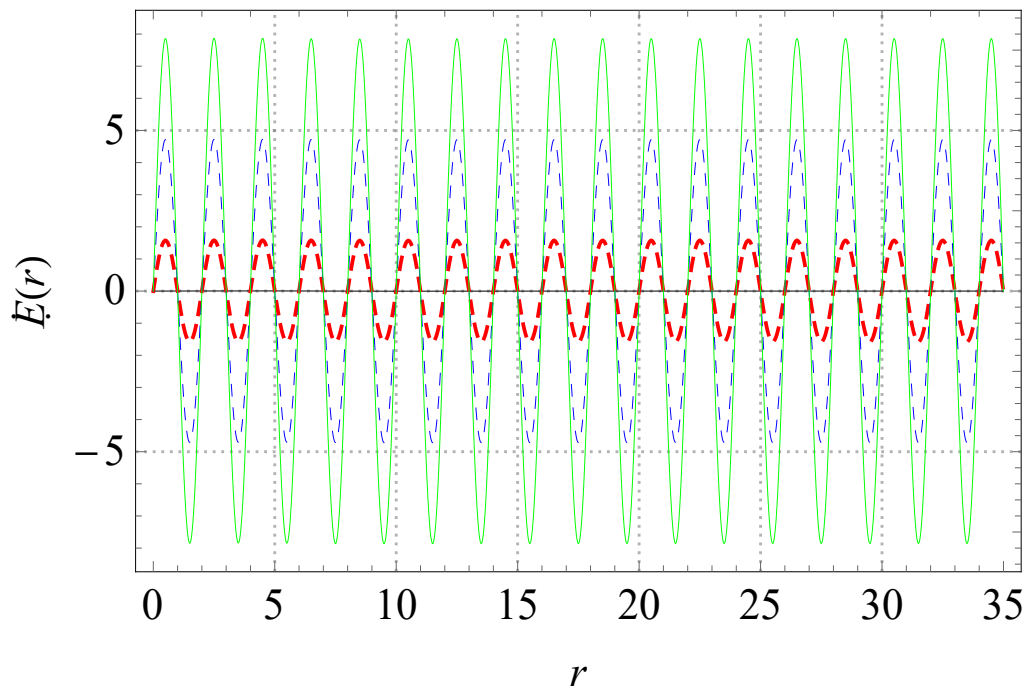


Figura 40 – Soluções numéricas não topológicas para o campo elétrico  $E(r)$ . Convenções conforme a Figura 38.

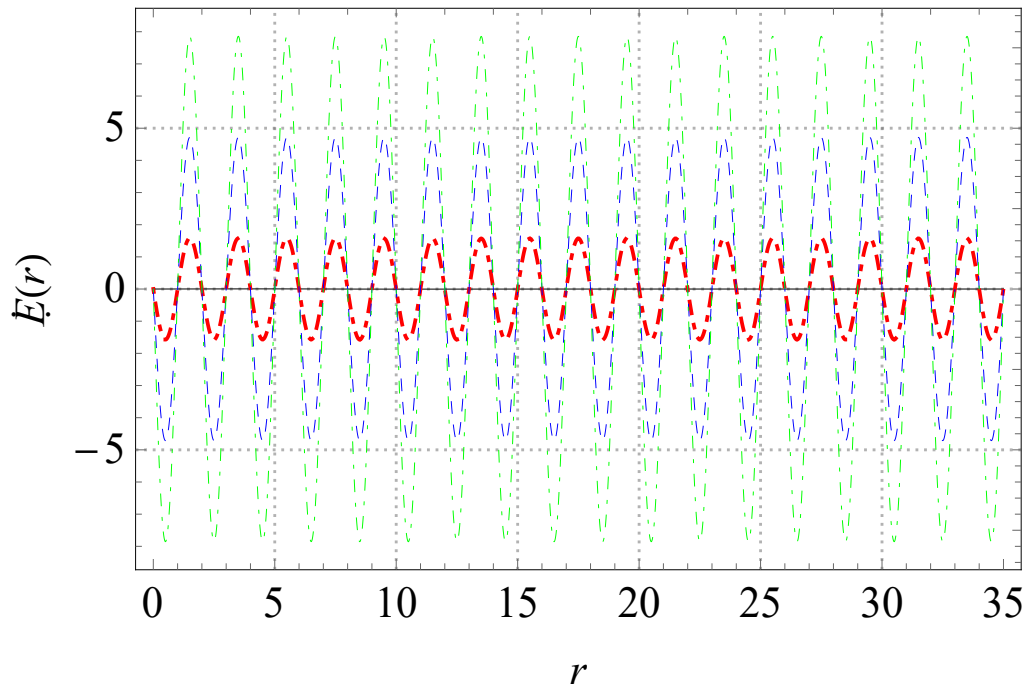


Figura 41 – Soluções numéricas não topológicas para o campo elétrico  $E(r)$ . Convenções conforme a Figura 39.

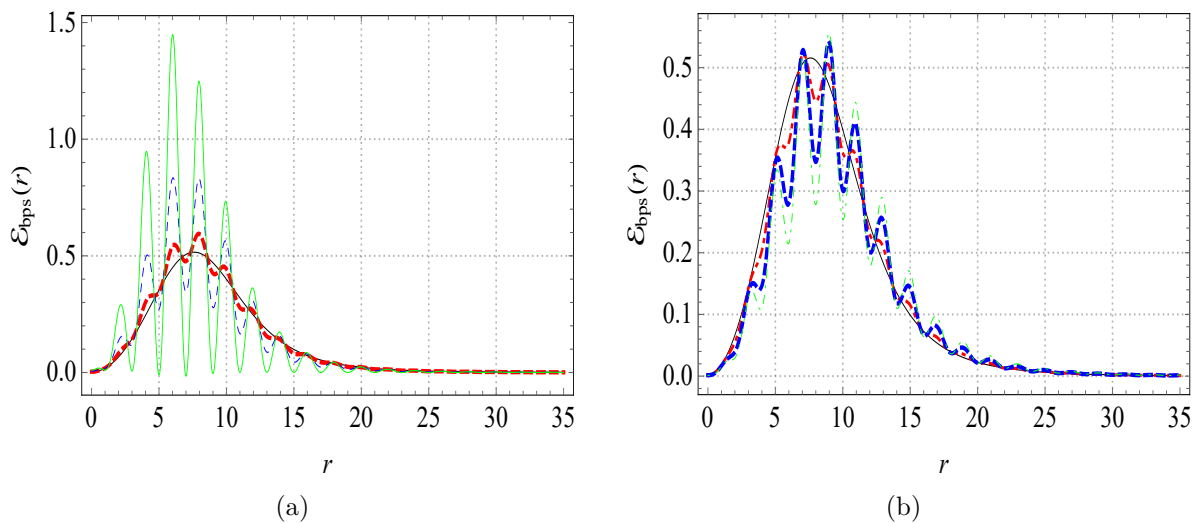


Figura 42 – Soluções numéricas não topológicas para a distribuição de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$ . Convenções conforme a Figura 33.

Por fim, apresentamos as soluções para  $\varepsilon_{bps}(r)$  na Figura 42, o que revela que esta função se comporta como o campo magnético, ou seja, dá origem a um anel multicamadas (novamente centrado na origem) que, no presente caso, mantém a probabilidade de encontrar a partícula quântica correspondente confinada à mesma região no espaço.

### 6.3 Soluções numéricas para uma impureza periódica, tendo em vista $\alpha(r) \geq 1$ .

Trataremos nesta seção das soluções numéricas não topológicas para o caso de uma impureza magnética periódica, em se tratando de uma amplitude considerável para a função  $\alpha(r)$ , ou melhor, uma amplitude que se encaixa na condição  $\alpha(r) \geq 1$ . Em virtude disso, o comportamento destas soluções não pode ser previsto pela construção analítica da Subseção 6.2.1

Para introduzir estas novas soluções, resolvemos novamente as equações BPS (6.64) e (6.65) numericamente, de acordo com as condições (6.18) e (6.28), a partir das quais apresentamos os perfis resultantes nas Figs. 43-50. Aqui, fixamos  $\kappa = g = m = d = 1$ ,  $h = 1.4$  e  $r_0 = 3.2$ . No entanto, variamos o valor do parâmetro  $c$ , i.e.,  $c = 0$  (linha preta sólida),  $c = +0.30$  (linha roxa sólida),  $c = +0.40$  (linha laranja sólida),  $c = +0.48$  (linha cinza sólida),  $c = -0.30$  (linha roxa tracejada),  $c = -0.40$  (linha laranja tracejada) e  $c = -0.48$  (linha cinza tracejada).

Mostramos as soluções numéricas para  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  nas figuras 43 e 44, respectivamente. De modo geral, percebemos que, para o caso em que  $\alpha(r) \geq 1$ , as soluções apresentam uma grande sensibilidade à impureza, principalmente quando se trata do comportamento do tipo barreira ( $c > 0$ ). Assim sendo, variações muito pequenas de  $|c|$  já apontam para perda do padrão monotônico das soluções [bem mais notório na Figura 44-(a)].

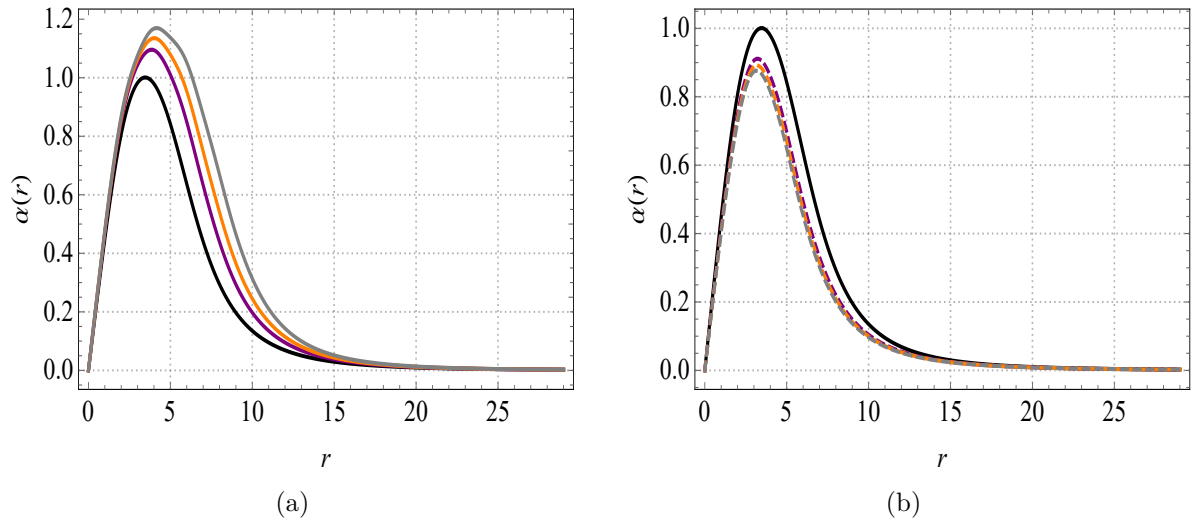


Figura 43 – Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil  $\alpha(r)$ , levando em conta uma magnitude considerável para a função [ $\alpha(r) \geq 1$ ]. Tais soluções são obtidas via as Eqs. (6.64) e (6.65), para  $\kappa = g = m = d = 1$ ,  $h = 1.4$ ,  $r_0 = 3.2$  e para valores variáveis de  $c$ . Esquerda - (a):  $c = 0$  (linha preta sólida),  $c = +0.30$  (linha roxa sólida),  $c = +0.40$  (linha laranja sólida),  $c = +0.48$  (linha cinza sólida). Direita - (b):  $c = -0.30$  (linha roxa tracejada),  $c = -0.40$  (linha laranja tracejada) e  $c = -0.48$  (linha cinza tracejada).

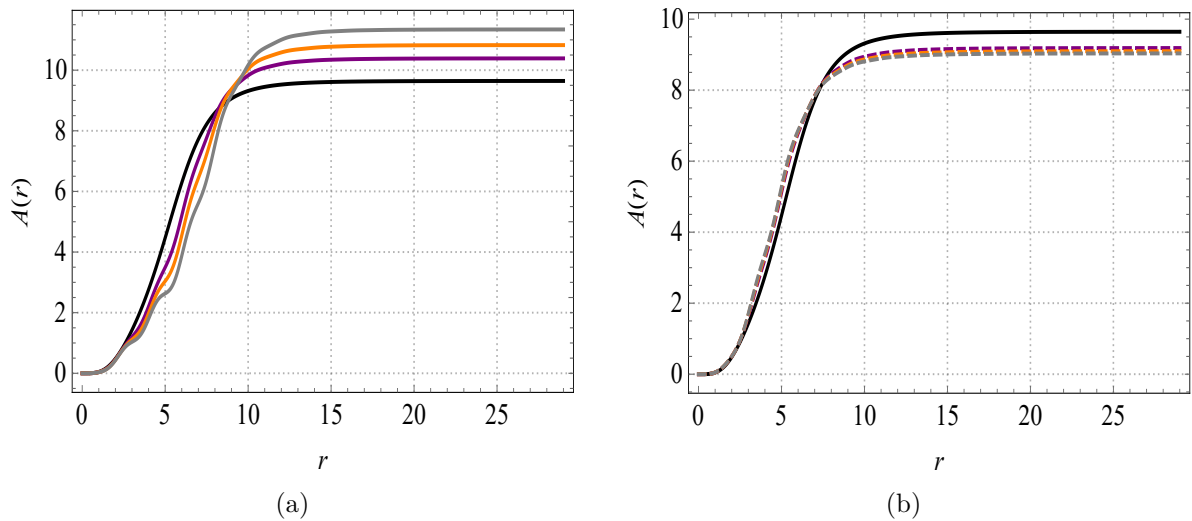


Figura 44 – Soluções numéricas não topológicas para a função de perfil  $A(r)$ . Convenções conforme a Figura 43.

Na Figura 45, demonstramos os perfis para  $B(r)$ , onde podemos observar a persistência dos perfis oscilatórios que caracterizam os anéis multicamadas, em razão da variação da magnitude de  $|c|$ . Este comportamento se faz presente desde o caso  $\alpha(r) \ll 1$  (Figura 37).

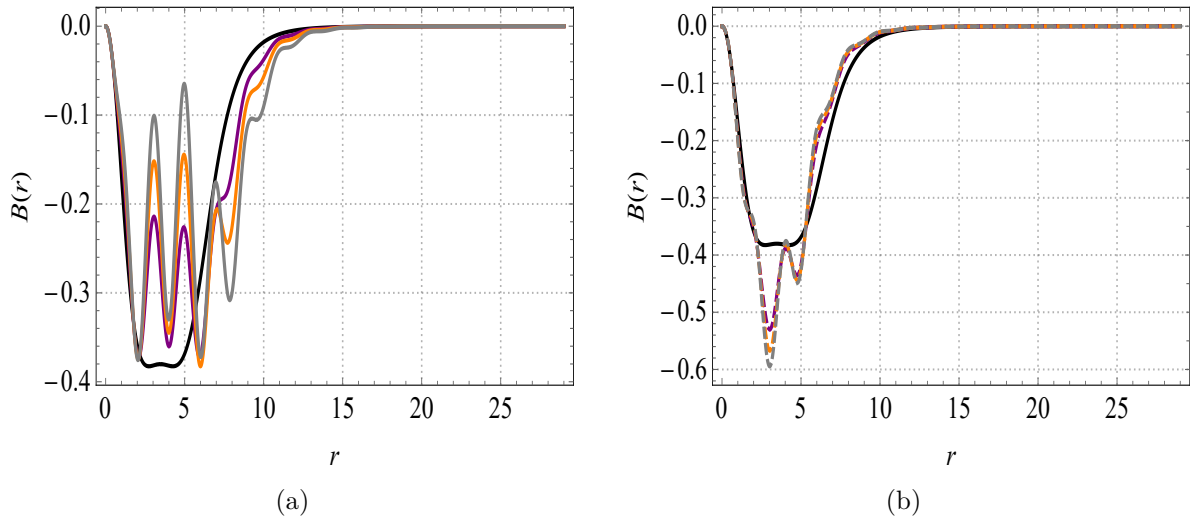


Figura 45 – Soluções numéricas não topológicas para o campo magnético  $B(r)$ . Convenções conforme a Figura 43.

As soluções para  $A_0(r)$  e  $E(r)$  são esboçadas nas figuras 46, 47, 48 e 49, respectivamente. Aqui, também é possível notar a persistência do comportamento periódico, que se propaga até o limite assintótico indefinidamente. Ressaltamos ainda que este comportamento oscilatório dos perfis é contornado pela curva referente à solução livre de impureza (curva preta sólida -  $c = 0$ ), o que causa amplitudes maiores (menores) para as soluções, em virtude da interação com uma configuração de impureza representando uma sequência de poços (barreiras).

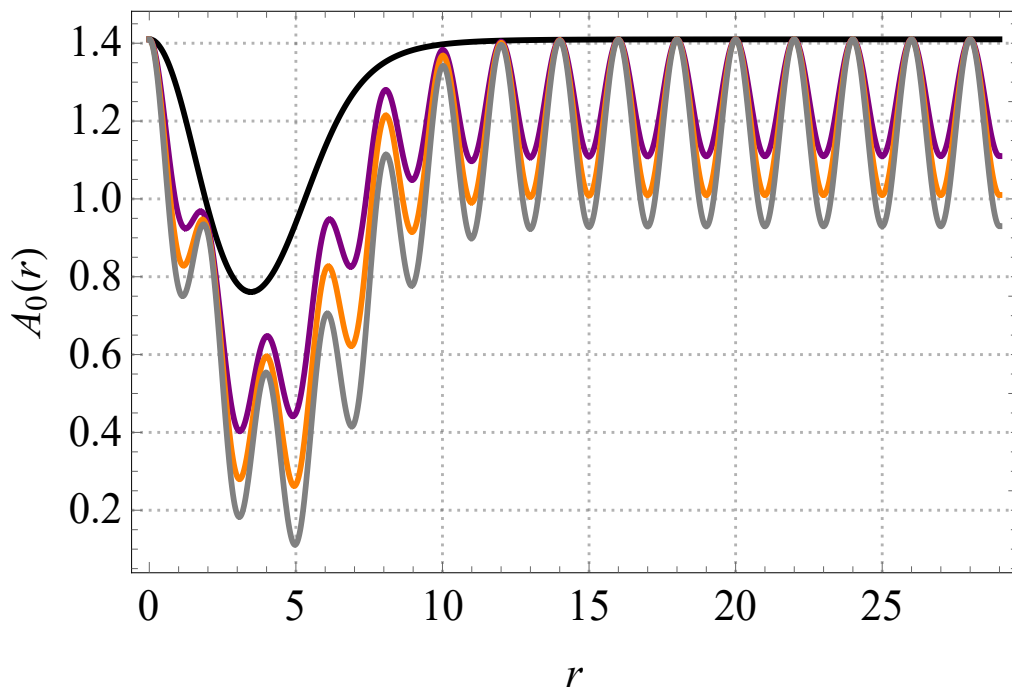


Figura 46 – Solução numérica não topológicas para o potencial elétrico  $A_0(r)$ . Convenções conforme a Figura 43-(a).

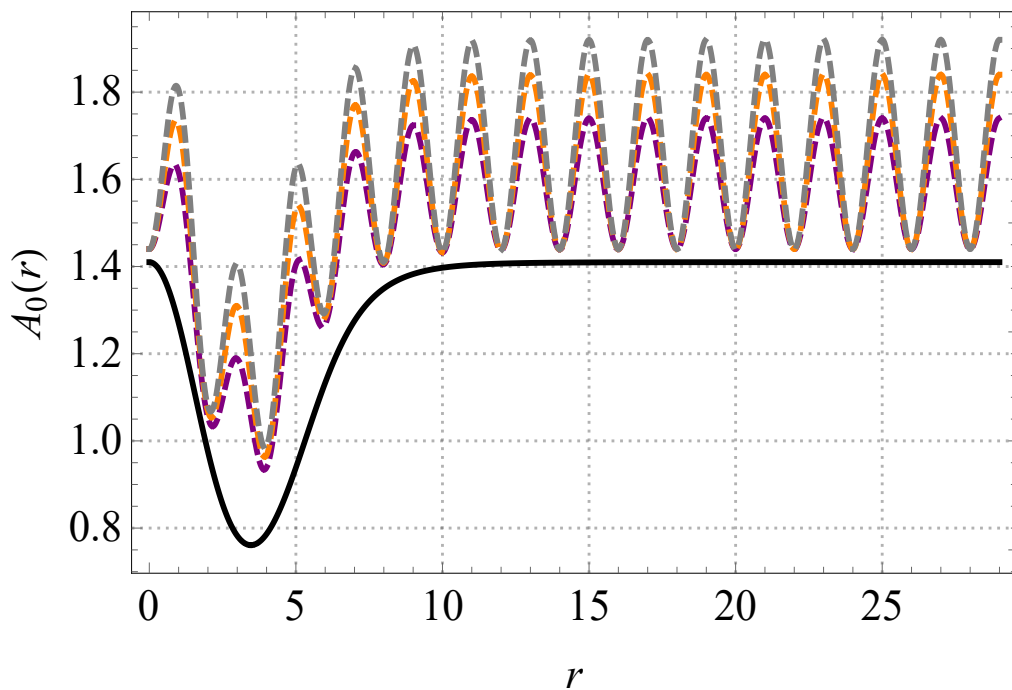


Figura 47 – Soluções numéricas não topológicas para o potencial  $A_0(r)$ . Convenções conforme a Figura 43-(b).

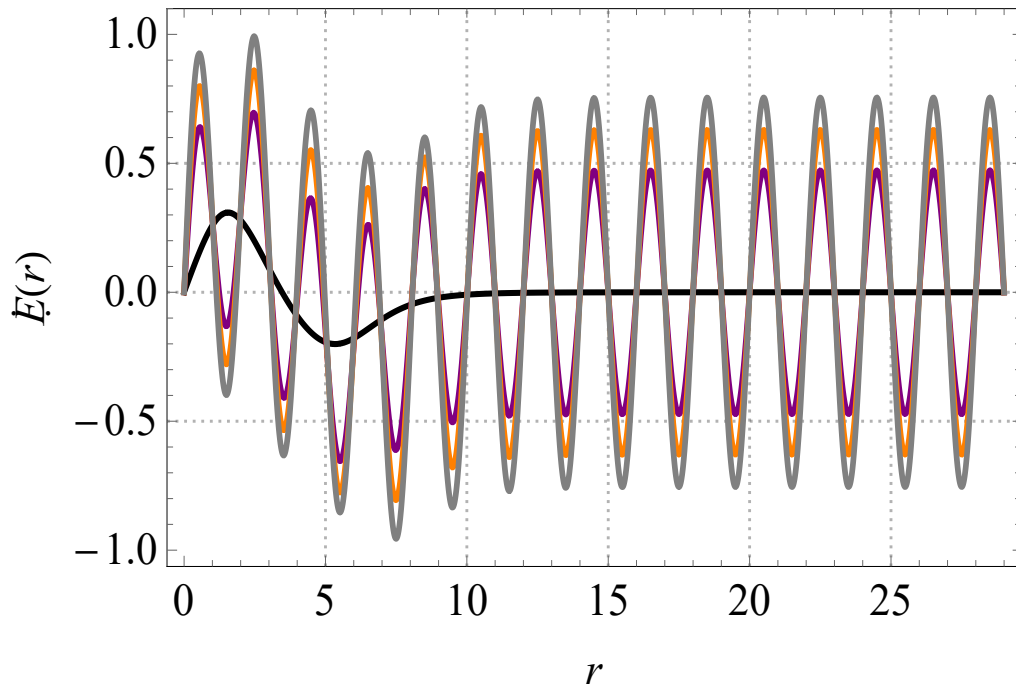


Figura 48 – Soluções numéricas não topológicas para o campo elétrico  $E(r)$ . Convenções conforme a Figura 43-(a).

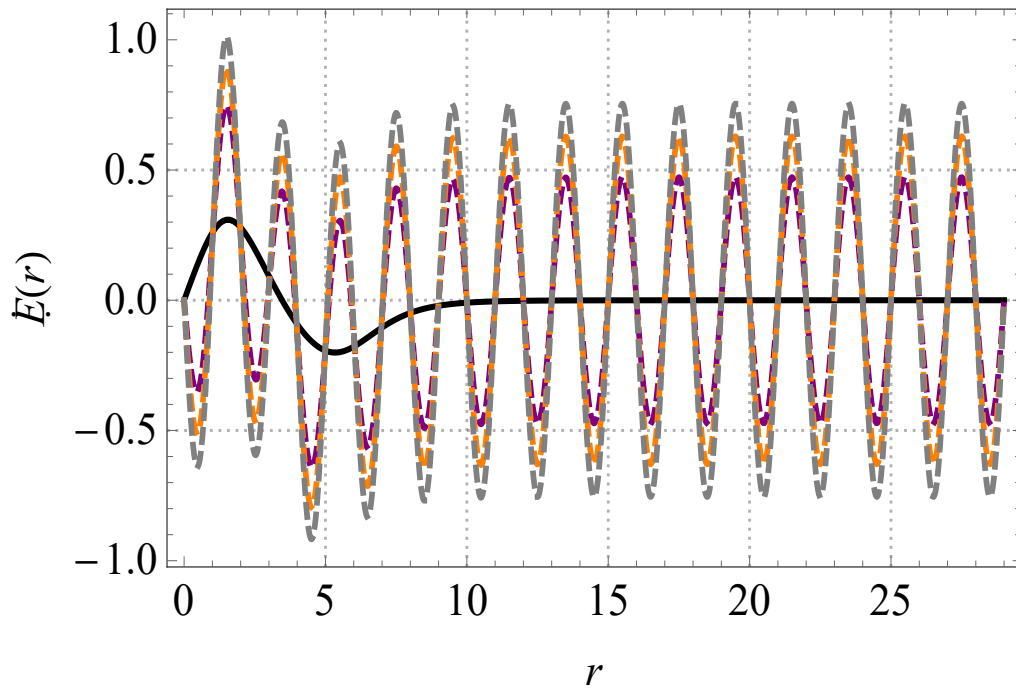


Figura 49 – Soluções numéricas não topológicas para o campo elétrico  $E(r)$ . Convenções conforme a Figura 43-(b).

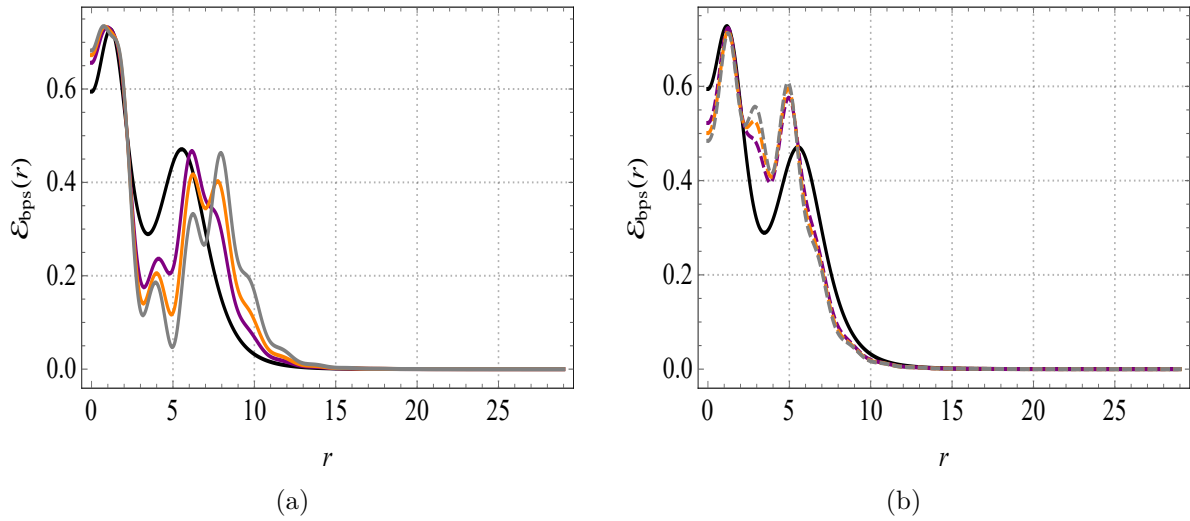


Figura 50 – Soluções numéricas não topológicas para a distribuição de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$ . Convenções conforme a Figura 43.

Finalmente, são apresentadas as soluções para  $\varepsilon_{bps}(r)$  na Figura 50, onde observamos a formação de perfis que também se assemelham a anéis multicamadas centrados na origem, análogo ao comportamento do campo magnético, cujos valores, em  $r \rightarrow 0$ , são constantes e não nulos. Em particular, os perfis se anulam no limite assintótico, o que significa que o requisito de energia finita continua a ser válido.

## 7 CONCLUSÕES

Neste trabalho, abordamos a formação de sólitons autoduais no contexto de dois cenários diferentes para o modelo  $CP(2)$  calibrado que foram ampliados pela adição de um termo que representa uma impureza magnética  $\Delta(|\mathbf{x}|)$ . Com esse objetivo em mente, escolhemos uma configuração específica para o campo  $CP(2)$  (2.10) para ser acoplada minimamente tanto ao campo de Maxwell quanto ao campo de Chern-Simons, separadamente.

Para esclarecer um pouco mais a implementação do formalismo BPS e para estabelecer um parâmetro ao qual comparar as soluções obtidas para o cenário ampliado pela presença da impureza, abordamos capítulos introdutórios que descreviam a formação de sólitons BPS dentro do cenário  $CP(2)$  calibrado na ausência desta influência, ou seja, nos mesmos contextos anteriores, porém, sem a presença da impureza magnética. De onde pudemos observar, inicialmente, através da implementação do formalismo BPS, que os modelos efetivos para a configuração (2.10) possuem uma estrutura autodual que se assemelha a dos modelos sigma calibrados.

Neste sentido, introduzimos nosso estudo, analisando a formação de estruturas solitônicas topológicas inerentes aos modelos Maxwell- $CP(2)$  e Chern-Simons- $CP(2)$  em (2+1)-dimensões que saturavam o limite de Bogomol'nyi. Assim sendo, construímos uma estrutura BPS geral, através da qual conseguimos especificar as expressões para o potencial autodual relacionado às teorias (em termos do campo  $\phi_3$  apenas), assim como definir o valor para os limite inferior das energias dos modelos, que demonstraram-se diretamente proporcionais às cargas topológicas de ambos os modelos calibrados, como esperado. Além disso, também obtivemos as equações BPS nas suas formas covariantes. Um detalhe importante é que, através da lei de Gauss inerente às teorias, pudemos concluir a possibilidade de fixação do calibre temporal  $A^0 = 0$  para o cenário Maxwell- $CP(2)$ , o que implicou em configurações resultantes apresentando carga elétrica total nula. Diferentemente cenário Chern-Simons- $CP(2)$ , onde não houve essa possibilidade, resultando em configurações que apresentavam carga elétrica total não nula.

Posteriormente, focamos nossa atenção às configurações independentes do tempo com simetria radial, através da utilização de um mapa para as soluções. Deste processo, obtivemos os principais resultados, inerentes à estrutura geral, na forma projetada (i.e., na forma radialmente simétrica), onde se incluem o potencial autodual, as equações BPS e o valor para o limite inferior da energia total do sistema. Vale destacar que o limite para a energia demonstrou-se quantizado em termos dos valores inteiros do *winding number*  $m$  para os dois cenários, em se tratando de configurações com caráter topológico. Neste

ponto, é relevante ressaltar que para o modelo Chern-Simons- $CP(2)$  houve a possibilidade de abordar as configurações não topológicas, no entanto, deixamos essa possibilidade para o cenário estendido.

Em seguida, passamos à resolução das equações de primeira ordem da teoria, numericamente, utilizando um algoritmo de diferenças finitas, de onde obtivemos os perfis relacionados às configurações resultantes para diferentes valores de  $m$ . Da análise desses resultados, pudemos inferir que tanto o perfil da função  $A(r)$ , relacionada ao campo de calibre, quanto o perfil da função  $\alpha(r)$ , relacionada ao campo  $CP(2)$ , apresentavam um padrão monotônico em ambos os modelos. Além disso, também obtivemos as soluções para o campo magnético e para a distribuição de energia BPS. Neste ponto, vale ressaltar que, para o cenário Maxwell- $CP(2)$ , os perfis para a distribuição de energia correspondiam a anéis centrados na origem, com exceção do perfil relacionado ao valor  $m = 1$ . Outro detalhe importante é evidenciado na presença do setor elétrico para o caso Chern-Simons- $CP(2)$ , onde encontramos as soluções para o potencial escalar  $A^0(r)$  e para o campo elétrico  $E(r)$ . Da análise dessas soluções, podemos destacar o comportamento dos perfis de  $E(r)$ , que também correspondem a anéis bem definidos centrados na origem.

Após a definição dos cenários efetivos, passamos a explorar os modelos estendidos através da inclusão de um termo que representa a impureza magnética. Desse modo, investigamos a formação de soluções solitônicas geradas pelos cenários Maxwell- $CP(2)$  e Chern-Simons- $CP(2)$ , ambos ampliados pela presença da impureza, que saturavam o *bound* de Bogomol'nyi. Nessa perspectiva, verificamos que houve a possibilidade de desenvolvimento de uma estrutura autodual geral, análoga às anteriores, através da implementação do formalismo BPS. No entanto, essa implementação levou a uma redefinição para o potencial autodual em termos da impureza, assim como para as equações BPS, em ambos os casos. Um detalhe importante é que a impureza não alterou o limite de Bogomol'nyi saturado pelas configurações BPS, ou seja, a energia autodual permaneceu diretamente proporcional à carga topológica para os dois cenários

Com o intuito de focar a nossa análise sobre as configurações independentes do tempo com simetria radial, empregamos os mesmos mapas para as soluções presentes nos casos sem impureza, de onde obtivemos as equações BPS, o potencial e a energia autodual; todos estes nas suas formas projetadas (i.e., na forma radialmente simétrica). Através desses resultados, inferimos que a energia BPS, saturada pelas configurações de primeira ordem, resultou quantizada em termos dos valores inteiros de  $m$  para os dois casos ampliados, em se tratando de configurações com caráter topológico. Entretanto, para o caso Chern-Simons- $CP(2)$ , as configurações não topológicas apresentaram um limite inferior para a energia diretamente proporcional ao valor assumido pelo campo  $A(r)$  no limite  $r \rightarrow \infty$ , o que é característico dessas estruturas.

Para estudar os efeitos causados pela impureza magnética nas soluções dos sistemas

BPS relacionados às configurações topológicas, particularizamos nossa análise escolhendo uma impureza Gaussiana (localizada) controlada por dois parâmetros reais,  $c$  e  $d$  (que controlam a “altura” e o “largura” da impureza, respectivamente). Para um valor fixo de  $d$  e diferentes valores de  $c$ , a análise numérica demonstrou como o parâmetro  $c$  induz não apenas a perda de monotonicidade do perfil das funções  $\alpha(r)$  e  $A(r)$ , mas também a inversão de ambos os perfis, tanto o campo magnético quanto o elétrico, quando estas soluções se aproximam da origem. Nesta perspectiva, a análise do comportamento das soluções próximo à origem esclareceu estas peculiaridades. Além disso, verificamos que a impureza não alterou a maneira como esses campos se comportam na região assintótica ( $r \rightarrow \infty$ ).

Para o caso não topológico, restrito ao cenário Chern-Simons- $CP(2)$  com impureza, calculamos soluções analíticas aproximadas para os campos, relevantes para o caso  $\alpha(r) \ll 1$  e  $\Delta(r) \ll 1$ . Na sequência, procedemos ao estudo numérico do sistema BPS projetado a fim de identificar os efeitos causados por dois tipos diferentes de impurezas magnéticas, ou seja, uma localizada (que representa uma única barreira/poço) e uma impureza periódica (uma cadeia de barreiras/poços). Neste sentido, observamos que as expressões analíticas aproximadas imitam parcialmente bem os resultados numéricos para o caso localizado. Por outro lado, também verificamos a ocorrência de uma inversão de sinal do campo elétrico próximo à origem, tal fenômeno não pode ser previsto pela estudo analítico aproximado, mencionado anteriormente. Explicamos tal inversão com base nos perfis linearizados calculados em torno de  $r = 0$ , dos quais concluímos que o setor elétrico não topológico é sensível não apenas à “altura” (representada pelo parâmetro real  $c$ ) da impureza, mas também se a impureza representa uma barreira ou um poço (que possui relação com o sinal do parâmetro  $c$ ).

Além disso, descobrimos que tanto  $\alpha(r)$  quanto  $A(r)$  retêm sua monotonicidade, mesmo para valores consideráveis de  $c$  (diferentes de  $|c| \ll 1$ ). Este fato constitui uma diferença importante em comparação com o caso topológico, para o qual impurezas localizadas dão origem a funções de perfil não monotônico conforme  $c$  aumenta. Além disso, os resultados para o campo magnético  $B(r)$  e densidade de energia BPS  $\varepsilon_{bps}(r)$  apresentaram uma peculiaridade perto da origem que explicamos com base nas correspondentes soluções linearizadas aproximadas.

Com base no fato de que a distribuição de energia permanece localizada (e a energia total, portanto, permanece finita) mesmo quando a impureza não desaparece no limite assintótico, também investigamos o caso definido por uma impureza periódica, que pode ser interpretada como uma cadeia infinita de barreiras ou poços, onde os parâmetros  $c$  e  $d$  controlam a “altura” e a “largura” da impureza, respectivamente. Neste caso, nosso trabalho numérico mostrou que as expressões aproximadas descrevem o comportamento geral de  $\alpha(r)$ ,  $A(r)$  e  $B(r)$  satisfatoriamente bem para  $\Delta \ll 1$ . Por outro lado, descobrimos

que o setor elétrico desenvolve um novo perfil periódico que se espalha para a região assintótica, mesmo para  $|c| \ll 1$ , e cuja ocorrência não pode ser prevista pelas soluções analíticas aproximadas. Apesar desta significativa novidade, a densidade de energia das configurações resultantes permanece localizada, como esperado.

Os resultados numéricos para  $c$  considerável (diferente de  $|c| \ll 1$ ) confirmou a persistência do perfil periódico citado anteriormente. Além disso, à medida que  $c$  aumenta positivamente, as soluções tanto para  $\alpha(r)$  quanto para  $A(r)$  perdem sua monotonicidade, um efeito previamente encontrado no contexto de configurações topológicas na presença de impurezas localizadas. Finalmente, observamos que o campo magnético correspondente representa um anel multicamadas centrado na origem, que retém o fluxo magnético confinado a esta região, do qual destacamos que se trata de uma novidade sem qualquer correspondência com o cenário topológico. Além disso, as soluções para a densidade de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$  se comportam semelhante as do campo magnético (ou seja, formam um anel multicamadas centrado na origem).

Com base nos resultados que expusemos neste trabalho, seria interessante estudar como os perfis adotados para a impureza magnética neste manuscrito afetam um sóliton  $CP(2)$  calibrado no contexto de um problema dinâmico, envolvendo a propagação deste sóliton e a interação com uma impureza mantida estática.

Outra possível linha de pesquisa envereda pelo estudo acerca dos Skyrmions  $CP(2)$  [80, 81], em se tratando da configuração de campo (2.10). Além de analisar a possibilidade de uma extensão deste cenário para a inclusão de uma impureza magnética e, se possível, uma impureza de caráter elétrico, ou um cenário bem mais ampliado em que incluam os dois tipos de impurezas.

## Referências

- 1 VILENKIN, A.; SHELLARD, E. P. S. **Cosmic string and other topological defects**. New York, USA: Cambridge University Press, 1994. ISBN 0521391539. Citado na página 16.
- 2 JÚNIOR, J. L. C. Solitons. **Revista Brasileira de Física**, v. 10, n. 3, p. 695–716, abr. 1980. Disponível em: <<http://sbfisica.org.br/bjp/download/v10/v10a44.pdf>>. Citado na página 16.
- 3 ALLEN, J. E. The early history of solitons (solitary waves). **Physica Scripta**, v. 57, n. 3, p. 436, mar 1998. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0031-8949/57/3/016>>. Citado na página 16.
- 4 RUSSELL, J. S. Report on waves. In: **Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science**. York. London: John Murray.: [s.n.], 1845. p. 311–390. Disponível em: <<https://www.macs.hw.ac.uk/~chris/Scott-Russell/SR44.pdf>>. Citado na página 16.
- 5 KORTEWEG, D.; VRIES, G. de. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. **Philosophical Magazine**, v. 39, n. 5, p. 422–443, 1895. Disponível em: <[https://staff.fnwi.uva.nl/t.h.koornwinder/pastkdvi/Korteweg\\_deVries/1895\\_PhilMag\\_Korteweg\\_deVries.pdf](https://staff.fnwi.uva.nl/t.h.koornwinder/pastkdvi/Korteweg_deVries/1895_PhilMag_Korteweg_deVries.pdf)>. Citado na página 16.
- 6 DAUXOIS, T.; PEYRARD, M. **Physics of Solitons**. New York, USA: Cambridge University Press, 2006. ISBN 9780521854214. Citado na página 16.
- 7 MANTON, N.; SUTCLIFFE, P. **Topological Solitons (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)**. New York, USA: Cambridge University Press, 2010. ISBN 9780511617034. Citado na página 16.
- 8 SHNIR, Y. M. **Topological and Non-Topological Solitons in Scalar Field Theories (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)**. New York, USA: Cambridge University Press, 2018. ISBN 9781108555623. Citado na página 16.
- 9 ONNES, H. K.; ONNES, H. K. Further experiments with liquid helium. c. on the change of electric resistance of pure metals at very low temperatures etc. iv. the resistance of pure mercury at helium temperatures. In: GAVROGLU, K.; GOUDAROULIS, Y. (Ed.). **Through Measurement to Knowledge: The Selected Papers of Heike Kamerlingh Onnes 1853-1926**. Dordrecht: Springer Netherlands. p. 261–263. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-94-009-2079-8\\_15](https://doi.org/10.1007/978-94-009-2079-8_15)>. Citado na página 17.
- 10 MEISSNER, W.; OCHSENFELD, R. Ein neuer effekt bei eintritt der supraleitfähigkeit. **Naturwissenschaften**, v. 21, n. 44, p. 787–788. ISSN 1432-1904. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01504252>>. Citado na página 17.
- 11 LONDON, F.; LONDON, H. The electromagnetic equations of the supraconductor. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A - Mathematical and**

- Physical Sciences**, The Royal Society, v. 149, n. 866, p. 71–88, mar 1935. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rspa.1935.0048>>. Citado na página 17.
- 12 GINZBURG, V. L.; LANDAU, L. D.; GINZBURG, V. L. On the theory of superconductivity. In: **On Superconductivity and Superfluidity: A Scientific Autobiography**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. p. 113–137. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-3-540-68008-6\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-540-68008-6_4)>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 32.
- 13 ABRIKOSOV, A. A. Magnetic properties of superconductors of the second group. **Sov. Phys. - JETP (Engl. Transl.); (United States)**, v. 5, n. 6, p. 1174–1182, jun 1957. Disponível em: <<https://www.osti.gov/biblio/7155233>>. Citado na página 17.
- 14 BRIHAYE, Y. *et al.* Symmetry breaking in (gravitating) scalar field models describing interacting boson stars and  $q$ -balls. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 80, p. 064014, Sep 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.064014>>. Citado na página 18.
- 15 LEE, T.; PANG, Y. Nontopological solitons. **Physics Reports**, v. 221, n. 5, p. 251–350, nov. 1992. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157392900647>>. Citado na página 18.
- 16 FRIEDBERG, R.; LEE, T. D.; SIRLIN, A. Class of scalar-field soliton solutions in three space dimensions. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 13, p. 2739–2761, May 1976. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.13.2739>>. Citado na página 18.
- 17 NIELSEN, H.; OLESEN, P. Vortex-line models for dual strings. **Nuclear Physics B**, Elsevier BV, v. 61, p. 45–61, sep 1973. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321373903507>>. Citado na página 18.
- 18 FINKELSTEIN, D. Kinks. **Journal of Mathematical Physics**, AIP Publishing, v. 7, n. 7, p. 1218–1225, jul 1966. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1705025>>. Citado na página 18.
- 19 HOOFT, G. Magnetic monopoles in unified gauge theories. **Nuclear Physics B**, v. 79, n. 2, p. 276–284, 1974. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321374904866>>. Citado na página 18.
- 20 DERRICK, G. H. Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles. **Journal of Mathematical Physics**, v. 5, p. 1252–1254, abr. 1964. Disponível em: <<https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.1704233>>. Citado na página 18.
- 21 BOGOMOL'NYI, E. B. The stability of classical solutions. **Sov. J. Nucl. Phys.**, v. 24, n. 4, p. 861–870, out. 1976. Disponível em: <<https://www.osti.gov/biblio/7309001>>. Citado na página 19.
- 22 PRASAD, M. K.; SOMMERFIELD, C. M. Exact classical solution for the t hooft monopole and the julia-zee dyon. **Physical Review Letters**, v. 35, n. 12, p. 760–762, sep 1975. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.35.760>>. Citado na página 19.

- 23 VEGA, H. J. de; SCHAPOSIK, F. A. Classical vortex solution of the abelian higgs model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 14, p. 1100–1106, Aug 1976. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.14.1100>>. Citado na página 19.
- 24 ATMAJA, A. N.; RAMADHAN, H. S. Bogomol'nyi equations of classical solutions. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 90, p. 105009, Nov 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.105009>>. Citado na página 19.
- 25 ATMAJA, A.; RAMADHAN, H.; da Hora, E. More on bogomol'nyi equations of three-dimensional generalized maxwell-higgs model using on-shell method. **Journal of High Energy Physics**, Springer Verlag, v. 2016, n. 2, fev. 2016. ISSN 1126-6708. Disponível em: <[https://link.springer.com/article/10.1007/JHEP02\(2016\)117](https://link.springer.com/article/10.1007/JHEP02(2016)117)>. Citado na página 19.
- 26 JACKIW, R.; WEINBERG, E. J. Self-dual chern-simons vortices. **Physical Review Letters**, v. 64, n. 19, p. 2234–2237, may 1990. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.64.2234>>. Citado na página 19.
- 27 JACKIW, R.; LEE, K.; WEINBERG, E. J. Self-dual chern-simons solitons. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 42, p. 3488–3499, Nov 1990. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.42.3488>>. Citado na página 19.
- 28 GORSKY, A.; SHIFMAN, M.; YUNG, A. Higgs and coulomb/confining phases in “twisted-mass” deformed  $cp(n-1)$  model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 73, p. 065011, Mar 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.065011>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 23.
- 29 DIN, A.; ZAKRZEWSKI, W. General classical solutions in the  $cpn1$  model. **Nuclear Physics B**, v. 174, n. 2, p. 397–406, 1980. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321380902916>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 23.
- 30 D'ADDA, A.; LÜSCHER, M.; Di Vecchia, P. A 1n expandable series of non-linear models with instantons. **Nuclear Physics B**, v. 146, n. 1, p. 63–76, 1978. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321378904327>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 23.
- 31 ACTOR, A. Classical solutions of yang-mills and  $cpn1$  models with scalar fields. **Zeitschrift für Physik C Particles and Fields**, v. 6, n. 3, p. 223–234, 1980. ISSN 1431-5858. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01557773>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 23.
- 32 DURHUUS, B.; FRÖHLICH, J. A connection between  $\nu$ -dimensional yang-mills theory and  $(\nu-1)$ -dimensional, non-linear  $\sigma$ -models. **Communications in Mathematical Physics**, v. 75, p. 103–151, 1980. Disponível em: <<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF01222514.pdf?pdf=button>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 23.
- 33 KAFIEV, Y. The four-dimensional-model as yang-mills theory. **Physics Letters B**, v. 96, n. 3, p. 337–339, 1980. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269380907819>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 23.

- 34 BURKHALTER, R.; IMACHI, M.; YONEYAMA, H.  $Cp(n-1)$  model and topological term. **Nuclear Physics B - Proceedings Supplements**, v. 83-84, p. 562–564, 2000. ISSN 0920-5632. Proceedings of the XVIIth International Symposium on Lattice Field Theory. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920563200917390>>. Citado na página 20.
- 35 WITTEN, E. Instantons, the quark model, and the  $1/n$  expansion. **Nuclear Physics B**, v. 149, n. 2, p. 285–320, 1979. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321379902438>>. Citado na página 20.
- 36 SHIFMAN, M. A. **Advanced Topics in Quantum Field Theory: A lecture course**. First edition. New York, USA: Cambridge University Press. ISBN 9780521190848. Citado na página 20.
- 37 LOGINOV, A. Y. Topological solitons in a gauged  $cp(2)$  model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 93, p. 065009, Mar 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.065009>>. Citado 4 vezes nas páginas 20, 24, 25 e 30.
- 38 CASANA, R.; DIAS, M.; da Hora, E. Topological first-order vortices in a gauged  $cp(2)$  model. **Physics Letters B**, v. 768, p. 254–259, 2017. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269317301703>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 25.
- 39 ALMEIDA, V.; CASANA, R.; HORA, E. da. First-order vortices in a gauged  $cp(2)$  model with a chern-simons term. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 97, p. 016013, Jan 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.016013>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 25.
- 40 CASANA, R.; DIAS, M. L.; HORA, E. da. Nontopological first-order vortices in a gauged  $cp(2)$  theory endowed with the chern-simons action. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 98, p. 056011, Sep 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.056011>>. Citado na página 20.
- 41 CASANA, R.; GONZALEZ-GUTIERREZ, N. H.; HORA, E. da. Topological BPS solitons in a maxwell-chern-simons gauged  $CP(2)$  model. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 127, n. 6, p. 61001, nov 2019. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2019EL....12761001C>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 25.
- 42 CASANA, R.; DIAS, M. L.; HORA, E. da. Nontopological first-order vortices in a gauged  $cp(2)$  model with a dielectric function. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 96, p. 076013, Oct 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.076013>>. Citado na página 20.
- 43 ANDRADE, J. *et al.* First-order solitons with internal structures in an extended maxwell- $cp(2)$  model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 99, p. 056014, Mar 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.99.056014>>. Citado na página 20.
- 44 SHAPOVAL, T. *et al.* Direct observation of superconducting vortex clusters pinned by a periodic array of magnetic dots in ferromagnetic/superconducting hybrid structures. **Phys. Rev. B**, American Physical Society, v. 81, p. 092505, Mar 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.81.092505>>. Citado na página 20.

- 45 TUNG, S.; SCHWEIKHARD, V.; CORNELL, E. A. Observation of vortex pinning in bose-einstein condensates. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 97, p. 240402, Dec 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.240402>>. Citado na página 20.
- 46 BULGAC, A.; FORBES, M. M.; SHARMA, R. Strength of the vortex-pinning interaction from real-time dynamics. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 110, p. 241102, Jun 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.241102>>. Citado na página 20.
- 47 WLAZŁOWSKI, G. *et al.* Vortex pinning and dynamics in the neutron star crust. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 117, p. 232701, Nov 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.232701>>. Citado na página 20.
- 48 ADAM, C.; WERESZCZYNSKI, A. Bps property and its breaking in 1 + 1 dimensions. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 98, p. 116001, Dec 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.116001>>. Citado na página 20.
- 49 ADAM, C.; QUEIRUGA, J. M.; WERESZCZYNSKI, A. Bps soliton-impurity models and supersymmetry. **Journal of High Energy Physics**, v. 2019, n. 7, p. 164, 2019. ISSN 1029-8479. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/JHEP07\(2019\)164](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2019)164)>. Citado na página 20.
- 50 GOATHAM, S. *et al.* Dynamics of multi-kinks in the presence of wells and barriers. **Acta Physica Polonica B**, v. 42, p. 18, 07 2010. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1007.2641.pdf>>. Citado na página 20.
- 51 MANTON, N. First order vortex dynamics. **Annals of Physics**, v. 256, n. 1, p. 114–131, 1997. ISSN 0003-4916. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491697956724>>. Citado na página 21.
- 52 ROMÃO, N. M.; SPEIGHT, J. M. Slow schrödinger dynamics of gauged vortices. **Nonlinearity**, v. 17, n. 4, p. 1337–1355, apr 2004. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0951-7715/17/4/010>>. Citado na página 21.
- 53 KRUSCH, S.; SUTCLIFFE, P. Schrödinger–chern–simons vortex dynamics. **Nonlinearity**, v. 19, n. 7, p. 1515–1534, may 2006. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0951-7715/19/7/003>>. Citado na página 21.
- 54 TONG, D.; WONG, K. Vortices and impurities. **Journal of High Energy Physics**, v. 2014, n. 1, p. 90, 2014. ISSN 1029-8479. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/JHEP01\(2014\)090](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2014)090)>. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 48.
- 55 HAN, X.; YANG, Y. Magnetic impurity inspired abelian higgs vortices. **Journal of High Energy Physics**, v. 2016, n. 2, p. 46, 2016. ISSN 1029-8479. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/JHEP02\(2016\)046](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2016)046)>. Citado na página 21.
- 56 COCKBURN, A.; KRUSCH, S.; MUHAMED, A. A. Dynamics of vortices with magnetic impurities. **Journal of Mathematical Physics**, v. 58, n. 6, p. 063509, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.4984980>>. Citado na página 21.
- 57 ASHCROFT, J.; KRUSCH, S. Vortices and magnetic impurities. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 101, p. 025004, Jan 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.101.025004>>. Citado na página 21.

- 58 BAZEIA, D.; LIAO, M.; MARQUES, M. Impurity-like solutions in vortex systems coupled to a neutral field. **Physics Letters B**, v. 825, p. 136862, 2022. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269321008029>>. Citado na página 21.
- 59 BAZEIA, D.; MARQUES, M.; MENEZES, R. Maxwell–higgs vortices with internal structure. **Physics Letters B**, v. 780, p. 485–490, 2018. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269318302375>>. Citado na página 21.
- 60 CREMMER, E.; SCHERK, J. The supersymmetric non-linear  $\sigma$ -model in four dimensions and its coupling to supergravity. **Physics Letters B**, v. 74, n. 4, p. 341–343, 1978. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026937890672X>>. Citado na página 23.
- 61 GOLO, V. L.; PERELOMOV, A. M. A few remarks on chiral theories with sophisticated topology. **Letters in Mathematical Physics**, v. 2, n. 6, p. 477–482, 1978. ISSN 1573-0530. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00398500>>. Citado na página 23.
- 62 GOLO, V.; PERELOMOV, A. Solution of the duality equations for the two-dimensional  $su(n)$ -invariant chiral model. **Physics Letters B**, v. 79, n. 1, p. 112–113, 1978. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269378904471>>. Citado na página 23.
- 63 EICHENHERR, H.  $Su(n)$  invariant non-linear  $\sigma$  models. **Nuclear Physics B**, v. 146, n. 1, p. 215–223, 1978. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032137890439X>>. Citado na página 23.
- 64 ALMEIDA, V. *et al.* Self-dual  $cp(2)$  vortex-like solitons in the presence of magnetic impurities. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 106, p. 016010, Jul 2022. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.106.016010>>. Citado na página 25.
- 65 AOKI, K. *et al.* Magnetic order, bose-einstein condensation, and superfluidity in a bosonic t-j model of  $cp$  *sup1* spinons and doped higgs holons. **Physical Review. B, Condensed Matter and Materials Physics**, v. 80, n. 14, 10 2009. ISSN 1098-0121. Disponível em: <<https://www.osti.gov/biblio/21294408>>. Citado na página 25.
- 66 WU, C.; HU, J.-p.; ZHANG, S.-c. Exact  $so(5)$  symmetry in the spin-3/2 fermionic system. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 91, p. 186402, Oct 2003. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.186402>>. Citado na página 25.
- 67 STOOFF, H. T. C.; VLIEGEN, E.; KHAWAJA, U. A. Monopoles in an antiferromagnetic bose-einstein condensate. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 87, p. 120407, Sep 2001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.120407>>. Citado na página 25.
- 68 CHANG, D. E. Method for monopole creation in spinor bose-einstein condensates. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 66, p. 025601, Aug 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.66.025601>>. Citado na página 25.

- 69 KASAMATSU, K.; TSUBOTA, M.; UEDA, M. Vortices in multicomponent bose–einstein condensates. **International Journal of Modern Physics B**, v. 19, n. 11, p. 1835–1904, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0217979205029602>>. Citado na página 25.
- 70 DUNNE, G. V. Aspects of chern-simons theory. In: COMTET, A. *et al.* (Ed.). **Aspects topologiques de la physique en basse dimension. Topological aspects of low dimensional systems**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1999. p. 177–263. ISBN 978-3-540-46637-6. Disponível em: <[https://link.springer.com/chapter/10.1007/3-540-46637-1\\_3](https://link.springer.com/chapter/10.1007/3-540-46637-1_3)>. Citado na página 38.
- 71 HALL, E. Xxxviii. on the new action of magnetism on a permanent electric current. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor Francis, v. 10, n. 63, p. 301–328, 1880. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/14786448008626936>>. Citado na página 38.
- 72 PRANGE, S. M. G. R. E. **The Quantum Hall Effect**. Springer New York, NY, 2012. ISBN 978-1-4684-0499-9. Disponível em: <<https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4684-0499-9>>. Citado na página 38.
- 73 HORVATHY, P. A.; ZHANG, P. Vortices in (abelian) chern–simons gauge theory. **Physics Reports**, v. 481, n. 5, p. 83–142, 2009. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157309001781>>. Citado na página 38.
- 74 LERDA, A. **Anyons: Quantum Mechanics of Particles with Fractional Statistics**. Springer Berlin Heidelberg, 1992. (Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems). ISBN 9783540561057. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=PZT7DcAMEIkC>>. Citado na página 39.
- 75 WILCZEK, F. **Fractional Statistics and Anyon Superconductivity**. World Scientific, 1990. (International journal of modern physics). ISBN 9789810200497. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=MHf9sBNPszkC>>. Citado na página 39.
- 76 KONDO, J. Resistance minimum in dilute magnetic alloys. **Progress of Theoretical Physics**, v. 32, n. 1, p. 37–49, 07 1964. ISSN 0033-068X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1143/PTP.32.37>>. Citado na página 48.
- 77 POOLE, C. P. *et al.* 14 - magnetic penetration depth. In: POOLE, C. P. *et al.* (Ed.). **Superconductivity (Second Edition)**. Second edition. Amsterdam: Academic Press, 2007. p. 409–431. ISBN 978-0-12-088761-3. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780120887613500363>>. Citado na página 48.
- 78 ADAM, C.; QUEIRUGA, J. M.; WERESZCZYNSKI, A. BPS soliton-impurity models and supersymmetry. **Journal of High Energy Physics**, Springer Science and Business Media LLC, v. 2019, n. 7, jul 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007%2Fjhep07%282019%29164>>. Citado na página 48.
- 79 CASANA, R.; DIAS, M.; HORA, E. da. Nontopological first-order vortices in a gauged CP(2) model with a dielectric function. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 96, n. 7, oct 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.076013>>. Citado na página 72.

80 ZHANG, H. *et al.*  $cp^2$  skyrmions and skyrmion crystals in realistic quantum magnets. **arXiv preprint arXiv:2203.15248**, p. 6, Mar 2022. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/2203.15248.pdf>>. Citado na página 105.

81 AKAGI, Y. *et al.* Isolated skyrmions in the  $cp^2$  nonlinear sigma model with a dzyaloshinskii-moriya type interaction. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 103, p. 065008, Mar 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.103.065008>>. Citado na página 105.

# Apêndices

# APÊNDICE A – DETERMINAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA OS CAMPOS

## A.1 Condições de contorno do Capítulo 2

Para especificar a obtenção das condições de contorno para os campos da teoria, iremos analisar a condição de finitude de energia  $[\varepsilon(|\mathbf{x}| \rightarrow \infty) \rightarrow 0]$ , em se tratando da versão não projetada (2.30):

$$\varepsilon = \frac{1}{2}B^2 + (D_k\phi)^\dagger D_k\phi + U(\phi_3). \quad (\text{A.1})$$

Tal condição é satisfeita pelos seguintes comportamentos:

$$B \rightarrow 0, \quad (\text{A.2})$$

$$D_k\phi \rightarrow 0, \quad (\text{A.3})$$

$$U_0(\phi_3) \rightarrow 0. \quad (\text{A.4})$$

A condição (A.2) requer que o campo de calibre  $A_k$  seja um “gauge puro” [vide Eq.(2.17)], i.e.,

$$A_{k,vác} = \frac{1}{e}\partial_k\theta, \quad (\text{A.5})$$

onde  $e = g/2$  e o índice “vác” se refere ao estado de vácuo, que é acessado no limite assintótico dos campos.

Já a condição (A.3) nos fornece o seguinte resultado:

$$\begin{pmatrix} \partial_k\phi_{1,vác} \\ \partial_k\phi_{2,vác} \\ \partial_k\phi_{3,vác} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +iA_{k,vác}\phi_{1,vác} \\ -iA_{k,vác}\phi_{2,vác} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{pmatrix} \partial_k\phi_{1,vác} \\ \partial_k\phi_{2,vác} \\ \partial_k\phi_{3,vác} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +(i\partial_k\theta)\phi_{1,vác} \\ -(i\partial_k\theta)\phi_{2,vác} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \phi_{1,vác} \\ \phi_{2,vác} \\ \phi_{3,vác} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ve^{i\theta} \\ ve^{-i\theta} \\ const \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

onde utilizamos acima as equações (2.14) e (A.5). Além do mais,  $v$  representa o valor assumido pelo campo  $\phi_i$  no estado de vácuo.

O potencial (2.41) nos permite concluir que a condição (A.4) é satisfeita por  $\phi_{3,vác} = 0$ , desse modo, temos

$$\phi_{vác} = \begin{pmatrix} \phi_{1,vác} \\ \phi_{2,vác} \\ \phi_{3,vác} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ve^{i\theta} \\ ve^{-i\theta} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Além de que, da análise da Figura 1, podemos observar que o campo  $\phi_3$  assume o valor nulo exatamente quando

$$\alpha = \pi/2. \quad (\text{A.9})$$

Variações cíclicas na fase de (A.8) não deverão gerar mudanças, neste sentido,

$$\phi_{vác}(\theta + \Delta\theta) = \phi_{vác}(\theta) \Rightarrow \begin{pmatrix} v e^{i\theta} e^{i\Delta\theta} \\ v e^{-i\theta} e^{-i\Delta\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v e^{i\theta} \\ v e^{-i\theta} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

de onde podemos inferir que

$$\Delta\theta = m2\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{A.11})$$

Também podemos concluir que, no estado de vácuo,

$$|\phi_3|^2 = 0, \quad |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 = h \Rightarrow v = \sqrt{\frac{h}{2}}, \quad (\text{A.12})$$

o que significa que a variedade de vácuo da teoria é representada por um círculo de mínimos  $S_{vác}^1$ , descrito no plano que contém os campos  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , que é obtido quando o campo de calibre assume o seu “gauge puro”.

Iremos agora descrever a circulação de  $eA_{k,vác}$  (A.5) ao longo de um círculo  $C$  fechado de raio  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , que corresponde à variedade física da teoria ( $S_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty}^1$ ). Portanto,

$$e \oint_C A_{k,vác} dx^k = \oint_C \partial_k \theta dx^k = \oint_C \frac{\partial \theta}{\partial x^k} dx^k = \oint_C \partial \theta = \Delta\theta = m2\pi. \quad (\text{A.13})$$

onde utilizamos (A.11). Esse resultado nos permite concluir que  $m$  corresponde ao número de vezes que o círculo  $S_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty}^1$  envolve o círculo  $S_{vác}^1$ , ou melhor, o número de voltas que o campo  $\phi$  completa sobre  $S_{vác}^1$  enquanto o campo de calibre percorre todo espaço físico. Essa relação entre as variedades pode ser descrita por

$$f : S_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty}^1 \rightarrow S_{vác}^1, \quad (\text{A.14})$$

onde  $f$  corresponde a uma relação homotópica.

Se refizermos o cálculo anterior, aproveitando o seu resultado, mas agora utilizando o ansatz (2.48) para o campo de calibre  $A_i$ , obtemos (tomando  $r \rightarrow \infty = \mathbf{R}$ )

$$\begin{aligned} e \oint_C A_{i,vác} dx^i &= -\frac{g}{2} \oint_C \frac{\epsilon_{ij} x^j}{gR^2} A_{vác} dx^i = -\frac{g}{2} A_{vác} \left( \int_0^{2\pi} \frac{x^2}{gR^2} dx^1 - \int_0^{2\pi} \frac{x^1}{gR^2} dx^2 \right) \\ &= -\frac{g}{2} A_{vác} \left( -\int_0^{2\pi} \frac{R \sin \theta}{gR^2} R \sin \theta d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{R \cos \theta}{gR^2} R \cos \theta d\theta \right) \\ &= \frac{A_{vác}}{2} \left( \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right) \\ &= \frac{A_{vác}}{2} \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) = \frac{A_{vác}}{2} 2\pi \\ e \oint_C A_{i,vác} dx^i &= A_{vác} \pi = m2\pi \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

onde  $A(r = R) = A_{vác}$ . Desse modo, concluímos que

$$A(r \rightarrow \infty) = A_{vác} = 2m, \tag{A.16}$$

e que no “gauge puro”, para o caso topológico, o campo de calibre é proporcional ao grau topológico  $m$ .

APÊNDICE B – RECUPERAÇÃO DAS  
EQUAÇÕES DE EULER LAGRANGE A  
PARTIR DAS EQUAÇÕES BPS.

## B.1 Recuperação da Lei de Ampère relacionada ao Capítulo 2

Nesta seção iremos recuperar a lei de Ampère (2.29),

$$\epsilon_{kj}\partial_j B = -J_k, \quad (\text{B.1})$$

através de manipulações envolvendo as equações BPS (2.43), (2.46) e (2.47), que são representadas, respectivamente, por

$$B = \pm h^{1/2} g \phi_3, \quad (\text{B.2})$$

$$\hat{D}_j \psi = \mp \frac{i\epsilon_{jk}}{h^{1/2}} (\psi \partial_k \phi_3 - \psi \hat{D}_k \psi), \quad (\text{B.3})$$

$$\partial_j \phi_3 = \pm \frac{i\epsilon_{jk}}{gh^{1/2}} J_k. \quad (\text{B.4})$$

Através da Eq. (B.4), obtemos a relação para a densidade de corrente  $J_k$  no limite BPS, ou seja,

$$\epsilon_{kj}\partial_j \phi_3 = \pm \frac{i\epsilon_{kj}\epsilon_{j\rho}}{gh^{1/2}} J_\rho \quad (\text{B.5})$$

$$gh^{1/2}\epsilon_{kj}\partial_j \phi_3 = \pm J_k. \quad (\text{B.6})$$

$$J_k = \mp gh^{1/2}\epsilon_{kj}\partial_j \phi_3. \quad (\text{B.7})$$

Agora, aplicando  $\epsilon_{kj}\partial_j$  sobre (B.2) retomamos

$$\epsilon_{kj}\partial_j B = \pm h^{1/2} g \epsilon_{kj}\partial_j \phi_3. \quad (\text{B.8})$$

Utilizando (B.7), obtemos

$$\epsilon_{kj}\partial_j B = -J_k, \quad (\text{B.9})$$

que é exatamente a Lei de Ampère (B.1).

## B.2 Recuperação das equações do campo $CP(2)$ relacionada ao Capítulo 2

Partimos agora da equação BPS (B.4),

$$\partial_j \phi_3 = \pm \frac{\epsilon_{jk}}{gh^{1/2}} J_k. \quad (\text{B.10})$$

onde, derivando em relação a  $x^j$ , obtemos

$$\partial_j \partial_j \phi_3 = \mp \frac{i}{h^{1/2}} \underbrace{\epsilon_{j\rho} \partial_j [\psi^* (\hat{D}_\rho \psi) - (\hat{D}_\rho \psi)^* \psi]} \quad (\text{B.11})$$

Passamos a resolver o termo em destaque,

$$\begin{aligned}\epsilon_{j\rho}\partial_j\left[\psi^*(\hat{D}_\rho\psi) - (\hat{D}_\rho\psi)^*\psi\right] &= \epsilon_{j\rho}\left\{(\partial_j\psi^*)(\hat{D}_\rho\psi) + \psi^*\partial_j(\hat{D}_\rho\psi)\right. \\ &= \left. -(\partial_j\hat{D}_\rho\psi)^*\psi - (\partial_j\hat{D}_\rho\psi)^*\partial_j\psi\right\}\end{aligned}\quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{j\rho}\partial_j\left[\psi^*(\hat{D}_\rho\psi) - (\hat{D}_\rho\psi)^*\psi\right] &= \epsilon_{j\rho}\left\{\left(\partial_j\psi^* + \frac{ig}{2}A_j\psi^*\right)(\hat{D}_\rho\psi) - \frac{ig}{2}A_j\psi^*(\hat{D}_\rho\psi)\right. \\ &+ \psi^*\left(\partial_j - \frac{ig}{2}A_j\right)(\hat{D}_\rho\psi) + \frac{ig}{2}A_j\psi^*(\hat{D}_\rho\psi) \\ &- \left[\left(\partial_j - \frac{ig}{2}A_j\right)(\hat{D}_\rho\psi)\right]^*\psi + \frac{ig}{2}A_j(\hat{D}_\rho\psi)^*\psi \\ &\left. - (\hat{D}_\rho\psi)^*\left(\partial_j\psi - \frac{ig}{2}A_j\psi\right) - \frac{ig}{2}A_j(\hat{D}_\rho\psi)^*\psi\right\}\end{aligned}\quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{j\rho}\partial_j\left[\psi^*(\hat{D}_\rho\psi) - (\hat{D}_\rho\psi)^*\psi\right] &= \epsilon_{j\rho}\left\{(\hat{D}_j\psi)^*(\hat{D}_\rho\psi) + \psi^*(\hat{D}_j\hat{D}_\rho\psi)\right. \\ &\left. - (\hat{D}_j\hat{D}_\rho\psi)^*\psi + (\hat{D}_\rho\psi)^*(\hat{D}_j\psi)\right\}\end{aligned}\quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{j\rho}\partial_j\left[\psi^*(\hat{D}_\rho\psi) - (\hat{D}_\rho\psi)^*\psi\right] &= \epsilon_{j\rho}\left\{2(\hat{D}_j\psi)^*(\hat{D}_\rho\psi) + \psi^*(\hat{D}_j\hat{D}_\rho\psi)\right. \\ &\left. - (\hat{D}_j\hat{D}_\rho\psi)^*\psi\right\}.\end{aligned}\quad (\text{B.15})$$

Como

$$\epsilon_{j\rho}\psi^*(\hat{D}_j\hat{D}_\rho\psi) - \epsilon_{j\rho}(\hat{D}_j\hat{D}_\rho\psi)^*\psi = igB|\psi|^2, \quad (\text{B.16})$$

então

$$\epsilon_{j\rho}\partial_j\left[\psi^*(\hat{D}_\rho\psi) - (\hat{D}_\rho\psi)^*\psi\right] = 2\epsilon_{j\rho}(\hat{D}_j\psi)^*(\hat{D}_\rho\psi) + igB|\psi|^2. \quad (\text{B.17})$$

Dessa forma, substituindo (B.17) em (B.11), chegamos a

$$\partial_j\partial_j\phi_3 = \mp\frac{i}{h^{1/2}}\left[2\epsilon_{j\rho}(\hat{D}_j\psi)^*(\hat{D}_\rho\psi) + igB|\psi|^2\right] \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned}\partial_j\partial_j\phi_3 &= \mp\frac{i}{h^{1/2}}\left[2\epsilon_{j\rho}(\hat{D}_j\psi)^*(\hat{D}_\rho\psi) + i\frac{g}{2}B(h - \phi_3^2)\right] \\ &= \mp\frac{i}{h^{1/2}}\left[2\epsilon_{j\rho}(\hat{D}_j\psi)^*(\hat{D}_\rho\psi) + i\frac{g}{2}Bh - i\frac{g}{2}B\phi_3^2\right]\end{aligned}\quad (\text{B.19})$$

$$\mp\frac{i}{h^{1/2}}2\epsilon_{j\rho}(\hat{D}_j\psi)^*(\hat{D}_\rho\psi) \pm \frac{g}{2}h^{1/2}B \mp \frac{g}{2}h^{-1/2}B\phi_3^2 \quad (\text{B.20})$$

Utilizando a BPS (B.2),

$$\partial_j\partial_j\phi_3 = \mp\frac{i}{h^{1/2}}2\epsilon_{j\rho}(\hat{D}_j\psi)^*(\hat{D}_\rho\psi) + \left(\frac{g^2}{2}h\phi_3\right) - \left(\frac{g^2}{2}\phi_3^2\right)\phi_3 \quad (\text{B.21})$$

$$\mp\frac{i}{h^{1/2}}2\epsilon_{j\rho}(\hat{D}_j\psi)^*(\hat{D}_\rho\psi) + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial\phi_3}\right) - \left(\frac{1}{2}h^{-1}\phi_3\frac{\partial U}{\partial\phi_3}\right)\phi_3, \quad (\text{B.22})$$

onde recorreremos ao potencial (2.41).

Dado que

$$2\epsilon_{j\rho} (\hat{D}_j\psi)^* (\hat{D}_\rho\psi) = \mp i h^{1/2} \phi_3 \frac{(\partial_\rho\phi_3)^2}{|\psi|^2}, \quad (\text{B.23})$$

finalmente obtemos

$$\partial_j\partial_j\phi_3 = -\frac{(\partial_\rho\phi_3)^2}{|\psi|^2}\phi_3 + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial\phi_3}\right) - \left(\frac{1}{2}h^{-1}\phi_3\frac{\partial U}{\partial\phi_3}\right)\phi_3, \quad (\text{B.24})$$

$$\partial_j\partial_j\phi_3 = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial\phi_3}\right) - \left(\frac{(\partial_\rho\phi_3)^2}{|\psi|^2} + \frac{1}{2}h^{-1}\phi_3\frac{\partial U}{\partial\phi_3}\right)\phi_3. \quad (\text{B.25})$$

No limite BPS a relação (2.27) para o valor de  $\lambda$  se resume a

$$\lambda = \frac{(\partial_\rho\phi_3)^2}{|\psi|^2} + \frac{1}{2}h^{-1}\phi_3\frac{\partial U}{\partial\phi_3}. \quad (\text{B.26})$$

Portanto,

$$\partial_j\partial_j\phi_3 - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial\phi_3}\right) + \lambda\phi_3 = 0, \quad (\text{B.27})$$

que recupera a equação de Lagrange (2.26) para o campo  $\phi_3$ .