

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS DO MAR
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM OCEANOGRAFIA

JÚLIO CÉSAR MARTINS RIBEIRO JÚNIOR

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO HIDRÁULICO COMPUTACIONAL PARA O
COMPLEXO ESTUARINO DE SÃO MARCOS (CESM) - MARANHÃO

São Luís
2019

JÚLIO CÉSAR MARTINS RIBEIRO JÚNIOR

**DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO HIDRÁULICO COMPUTACIONAL PARA O
COMPLEXO ESTUARINO DE SÃO MARCOS (CESM) - MARANHÃO**

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Oceanografia da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos para a obtenção de título de mestre em Oceanografia.

Linha de Pesquisa: Dinâmica de Sistemas Costeiros e Oceânicos.

Área de Concentração: Oceanografia Física.

Orientador: Dr. Audálio Rebelo Torres Júnior

São Luís

2019

JULIO CÉSAR MARTINS RIBEIRO JÚNIOR

**DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO HIDRÁULICO COMPUTACIONAL PARA O
COMPLEXO ESTUARINO DE SÃO MARCOS (CESM) - MARANHÃO**

Dissertação de Mestrado submetida ao
Programa de Pós-Graduação em Oceanografia
da Universidade Federal do Maranhão como
parte dos requisitos para a obtenção de título de
mestre em Oceanografia.

BANCA EXAMINADORA

Prof(a). Dr. Audálio Rebelo Torres Júnior.

Dr. Victor Azevedo Godoi

Prof(a). Dr. Francisco José da Silva Dias.

Prof(a). Dr. Alessandro Luvizon Bérghamo.

Cesar Martins Ribeiro Júnior, Júlio.

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO HIDRÁULICO COMPUTACIONAL
PARA O COMPLEXO ESTUARINO DE SÃO MARCOS CSM - MARANHÃO /
Júlio Cesar Martins Ribeiro Júnior. - 2019.

87 p.

Coorientador(a): Osvaldo Ronald Saavedra Mendez.

Orientador(a): Audalio Rebelo Torres Júnior.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em
Oceanografia/ccbs, Universidade Federal do Maranhão, São
Luis, MA, 2019.

1. Complexo Estuarino de São Marcos. 2. Continuidade.
3. Hidráulica. 4. Navier-Stokes. I. Rebelo Torres
Júnior, Audalio. II. Ronald Saavedra Mendez, Osvaldo.
III. Título.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha família, por todo o apoio por mais essa etapa na minha vida acadêmica. Demonstrar à minha gratidão por todos os integrantes do Laboratório de Hidrodinâmica Costeira, Estuarina e de Águas Interiores (LHiCEAI) da Universidade Federal do Maranhão (UFMA), em especial ao meu orientador Prof. Dr. Audálio Rebelo Torres Júnior e ao Prof. Dr. Francisco José da Silva Dias.

Agradeço ao Prof. Dr. Osvaldo Ronald Saavedra Mendez do Instituto de Engenharia Elétrica (IEE) pela oportunidade do financiamento desse trabalho pela Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão (FAPEMA).

RESUMO

Neste trabalho, está descrita a solução numérica aplicada às equações de Navier-Stokes e da Continuidade para a elaboração de um código computacional, em linguagem FORTRAN, que simula a hidráulica no Complexo Estuarino de São Marcos (CESM). Para a elaboração do código computacional, as equações governantes foram divididas em dois domínios: espacial e temporal. Na solução do domínio espacial, foram utilizados o esquema de Leonard para a solução do termo advectivo e o esquema de Smagorinsky para estimar o coeficiente horizontal de difusão. No domínio temporal, foram utilizados o esquema de Matsuno para a solução da variação local do campo de velocidade e superfície livre e o filtro de Asselin para reduzir o ruído provocado pela integração numérica. Na condição de contorno para a fronteira norte, do domínio espacial, foram introduzidas duas séries temporais de variação da superfície livre, obtidas do TPXO 6.2, a fim de simular a oscilação na superfície livre provocada pela maré e a contribuição zonal do campo de velocidade relacionada à Corrente Norte do Brasil (CNB). Na fronteira sul foi introduzida a contribuição meridional no campo de velocidade associada à vazão média do rio Mearim. O experimento de Berkhoff foi utilizado para validar a solução numérica das equações governantes, simulando de maneira satisfatória a propagação da onda e empinamento na região da calota em uma área confinada. Para a validação e ajuste da solução numérica ao simular a hidráulica do CESM, foi utilizado uma série temporal de preamar e baixamar observada no complexo portuário através de uma estação maregráfica no período de 01 a 11 de janeiro de 2015. A série de preamar e baixamar observada confirmou a habilidade da solução numérica em simular a hidráulica na região do complexo portuário e simulando inversões periódicas no campo de velocidade que ocorrem nas margens do CESM provocadas por conservação de vorticidade potencial.

Palavras-Chave: Navier-Stokes, continuidade, hidráulica, Complexo Estuarino de São Marcos.

ABSTRACT

This work describes the numerical solution applied to the Navier-Stokes and Continuity equations when developing a computational model, using the FORTRAN language, to simulate the hydraulics of São Marcos Estuarine Complex (SMEC). The computational model governing equations were explicitly discretized using the finite difference method (FDM) and were divided into the spatial and temporal domains. In the spatial domain, the Leonard were employed to solve the advective terms and Smagorinsky schemes to estimate the horizontal diffusion coefficient. In the temporal domain, the Matsuno scheme were implemented to solve the local variation term at velocity field and free surface elevation and the Asselin filter to reduce the noise caused by numerical integrations. Two free surface oscillation time series were used as boundary conditions along the numerical grid northern boundary to simulate the free surface disturbance caused by the tide variation, obtained from the TPXO 6.2 model, and the zonal contribution of the velocity field related to the Northern Brazil Current (NBC) and the meridional contribution of the velocity field associated with the mean discharge of Mearim river was used as forcing at the southern boundary. The Berkhoff experiment was reproduced to test the numerical solution proposed here, simulating in a satisfactory way the wave propagation at the shoal in a confined area. The simulation of the SMEC hydraulics using the numerical solution proposed was validated and adjusted using a time series of high and low tide measurements collected within the harbor complex during January 1–11 2015. The measurements confirmed the skill of the computational model developed here in simulating the harbor complex region hydraulics and the occurrence of periodic inversions in the velocity field along the SMEC margins caused by potential vorticity.

Keywords: Navier-Stokes, continuity, hydraulics São Marcos Estuarine Complex;

LISTA DE FIGURAS

Figura 01: Complexo Estuarino de São Marcos, Maranhão, Brasil.	16
Figura 02: Sistema cartesiano ortogonal tridimensional (OXYZ).	17
Figura 03: Coeficiente de arrasto para o domínio espacial do modelo computacional.	24
Figura 04: Domínio espacial da solução numérica do modelo computacional.	25
Figura 05: Batimetria utilizada no domínio espacial do modelo computacional para o CESM.	26
Figura 06: Condição de Contorno para a fronteira norte da solução numérica do modelo computacional.	28
Figura 07: Variação da superfície livre para 10 dias de execução da solução numérica para o CESM no período de 01 janeiro de 2015 a 11 de janeiro de 2015.	29
Figura 08: Vazão média do Rio Mearim (IBGE, 1997).	30
Figura 09: Representação da visão superior do experimento, modificado de Berkhoff (1982).	40
Figura 10: Esquema matemático para elaboração da calota no experimento, modificado de Berkhoff (1982).	41
Figura 11: Representação Batimétrica para o experimento de Berkhoff (1982).	41
Figura 12: Superfície livre na seção 6 do experimento de Berkhoff (1982).	42
Figura 13: Superfície livre na seção 7 do experimento de Berkhoff (1982).	43
Figura 14: Superfície livre na seção 8 do experimento de Berkhoff (1982).	43
Figura 15: Pontos de análise de resultado da solução numérica.	45
Figura 16: Variação de superfície livre modelada e observada na região portuária.	46
Figura 17: Componentes da Equação de conservação de momentum na direção zonal.	47
Figura 18: Componentes da equação de conservação de momentum na direção meridional.	48
Figura 19: Aceleração advectiva média na direção zonal da solução numérica.	49
Figura 20: Aceleração advectiva média na direção meridional da solução numérica.	50
Figura 21: Termo de Gradiente de pressão médio da solução numérica.	51
Figura 22: Termo Difusivo médio na direção zonal da solução numérica.	52
Figura 23: Termo difusivo médio na direção meridional da solução numérica.	53

Figura 24: Termo de Tensão de fundo médio da solução numérica.	54
Figura 25: Superfície livre e campo de velocidade no domínio de solução com 36,5 horas modeladas.	55
Figura 26: Superfície livre e campo de velocidade no domínio de solução com 38,5 horas modeladas.	56
Figura 27: Superfície livre e campo de velocidade no domínio de solução com 40,5 horas modeladas.	56
Figura 28: Superfície livre e campo de velocidade no domínio de solução com 42,5 horas modeladas.	57
Figura 29: Superfície livre e campo de velocidade no domínio de solução com 44,5 horas modeladas.	57
Figura 30: Superfície livre e campo de velocidade no domínio de solução com 46,5 horas modeladas.	58
Figura 31: Superfície livre e campo de velocidade no domínio de solução com 48,5 horas modeladas.	58
Figura 32: Superfície livre e campo de velocidade no domínio de solução com 50,5 horas modeladas.	59
Figura 33: Superfície livre e campo de velocidade no CESM com 36,5 horas modeladas.	60
Figura 34: Superfície livre e campo de velocidade no CESM com 38,5 horas modeladas.	60
Figura 35: Superfície livre e campo de velocidade no CESM com 40,5 horas modeladas.	61
Figura 36: Superfície livre e campo de velocidade no CESM com 42,5 horas modeladas	61
Figura 37: Superfície livre e campo de velocidade no CESM com 44,5 horas modeladas.	62
Figura 38: Superfície livre e campo de velocidade no CESM com 46,5 horas modeladas.	62
Figura 39: Superfície livre e campo de velocidade no CESM com 48,5 horas modeladas.	63

Figura 40: Superfície livre e campo de velocidade no CESM com 50,5 horas modeladas.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	OBJETIVOS	15
2.1	Geral	15
2.2	Específico	15
3	MÉTODOS	15
3.1	Área de Estudo	15
3.2	Descrição do Modelo Computacional Hidrodinâmico	17
3.2.1	Equações Governantes	18
3.2.1.1	Equação da Continuidade	18
3.2.1.2	Equação de Momento Linear	20
3.2.2	Domínio Matemático da Solução	25
3.2.2.1	Condição de Contorno	26
3.3	Solução Numérica do Modelo	30
3.3.1	Discretização em Diferenças Finitas	30
3.3.1.1	Solução no espaço	33
3.3.1.2	Solução no tempo	35
3.3.1.3	Discretização das Equações Governantes	35
3.3.1.4	Condição de Contorno	39
3.4	Método de Validação da Solução Numérica	40
3.4.1	Experimento de Berkhoff	40
3.4.1.1	Descrição do Experimento	40
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	42
4.1	Experimento de Berkhoff	42

4.2	Complexo Estuarino de São Marcos (CESM)	44
4.2.1	Componentes do Campo de Velocidade	45
4.2.1.1	Termo Advectivo	49
4.2.1.2	Gradiente de Pressão	50
4.2.1.3	Termo Difusivo	51
4.2.1.4	Tensão de Fundo	53
4.2.2	Distribuição do campo de velocidade e superfície livre	54
4.2.2.1	Domínio espacial	54
4.2.2.2	Complexo Estuarino de São Marcos	59
4.2.2.3	Canal de Acesso do Complexo Estuarino de São Marcos	64
4.2.2.4	Região Portuária	65
4.2.2.5	Canal de Acesso do Boqueirão	66
4.2.3	Energia Cinética	67
4.2.4	Validação da solução numérica	45
5	CONCLUSÃO	69
	REFERÊNCIAS	70
	ANEXOS	77
1	INTRODUÇÃO	

O comportamento físico de um fluido pode ser compreendido utilizando modelos hidráulicos, baseados nas equações de conservação de momentum e conservação de massa ou volume, utilizando aproximações matemáticas que tornem a solução numérica próxima do comportamento observado na região de estudo (SANTOS, 2009). Os modelos computacionais possuem a capacidade de simular o comportamento do fenômeno que ocorrem na natureza (WOODROFFE, 2002), existindo a possibilidade de extrapolar o comportamento do fenômeno estudado em diferentes cenários levando em consideração mudanças naturais e antrópicas.

Os ambientes estuarinos são regiões onde os efeitos da oscilação da superfície livre causado pela maré e correntes associadas, sobrepõem-se aos movimentos

gerados pela descarga do rio, fazendo com que os processos de escoamento assumam características bastante complexas (MIRANDA *et al.*, 2002; BENEVIDES *et al.*, 2011; FREITAS *et al.*, 2012).

O Complexo Estuarino de São Marcos (CESM), juntamente com o Complexo Estuarino de São José e a baía de Cumã, estão situados no litoral do estado do Maranhão (COUTINHO, 1976) desaguardo diretamente na Plataforma Continental Maranhense (PCM). A PCM está localizada na região oeste do Oceano Atlântico, entre as latitudes 0,5°N e 2,5°S e entre as longitudes 41 e 45°, e marcada por um sistema marinho de alta energia, devido aos processos associados à Corrente Norte do Brasil (CNB), ventos alísios, oscilações periódicas da superfície livre causadas por forças astronômicas (SILVA, 2005; SILVA *et al.*, 2007).

No CESM o regime de maré é caracterizado como semidiurno, com altura de maré podendo alcançar 7 metros em situações extremas (SOUZA FILHO, 2005; DHN, 2004) e em condições normais a região apresenta uma altura média de 6,5 metros com amplitude média de 2,9 metros (DILLENBURG *et al.*, 2008), o que o classifica como estuários de macromaré (DAVIES, 1964). Essa variação periódica do nível do mar gera correntes (PEREIRA *et al.*, 1995) ao longo de todo o ciclo semidiurno, podendo atingir valores acima de 3 m/s, e, portanto, têm a capacidade de modificar e modelar falésias emersas e submersas (CHAGAS, 2013).

As equações governantes utilizadas para simular o comportamento do fluido no CESM, para a formulação da solução numérica do modelo computacional hidráulico que foi desenvolvido neste estudo, foram a de Navier-Stokes e da continuidade utilizando esquemas de soluções numéricas, tanto para o tempo quanto para o espaço, discretizadas através do Método de Diferenças Finitas (MDF) e transcritas em linguagem de programação Fortran (*IBM Mathematical Formula Translation System*). Para a simulação do comportamento do fluido no CESM a solução numérica da equação de momentum leva em consideração as forças inerciais, difusivas, gradiente de pressão e tensão no fundo, e em sua inicialização são utilizadas como forçantes da solução numérica a elevação da superfície livre provocada pela maré, contribuição do rio Mearim e da CNB no campo de velocidade e a batimetria da região.

No capítulo 3 está descrito a área de estudo, o modelo computacional hidrodinâmico, a solução numérica e o método de validação. No capítulo 4 está descrito os resultados e discussão do experimento de Berkhoff e a hidráulica do Complexo Estuarino de São Marcos e no capítulo 5 a conclusão do trabalho.

2 OBJETIVOS

2.1 Geral

Desenvolver um modelo hidrodinâmico computacional utilizando características oceanográficas que simulem a hidrodinâmica no Complexo Estuarino de São Marcos (CESM) - MA, Brasil.

2.2 Específico

- Descrever a hidráulica da região com implementação da Corrente Norte do Brasil, juntamente com a oscilação na superfície livre provocada pela maré e com a contribuição média no campo de velocidade causado pela descarga do rio Mearim;
- Compreender a contribuição dos termos da equação de momentum;
- Estimar o comportamento da energia cinética envolvida em todo o domínio espacial da solução numérica no tempo.

3 MÉTODOS

3.1 Área de Estudo

A região do Complexo Estuarino de São Marcos (CESM) está localizado no norte do estado do Maranhão entre as coordenadas 44,0344° a 44,6517° O e 2,2872° a 3,1093° S (Figura 1). O CESM possui uma área de aproximadamente 3100 km², compreendendo a foz do Rio Mearim e a Ilha dos Caranguejos na região sul, até sua saída para a plataforma continental (RIOS, 2001).

A profundidade média da região é de aproximadamente 10 metros, havendo profundidades maiores que 50 metros (SOARES, 2015). Morais (1977) descreveu que o CESM possui uma extensão de 100 km, com largura na região mais externa de 45 km, em frente a ilha dos Caranguejos de 25 km e na região portuária aproximadamente 13 km.

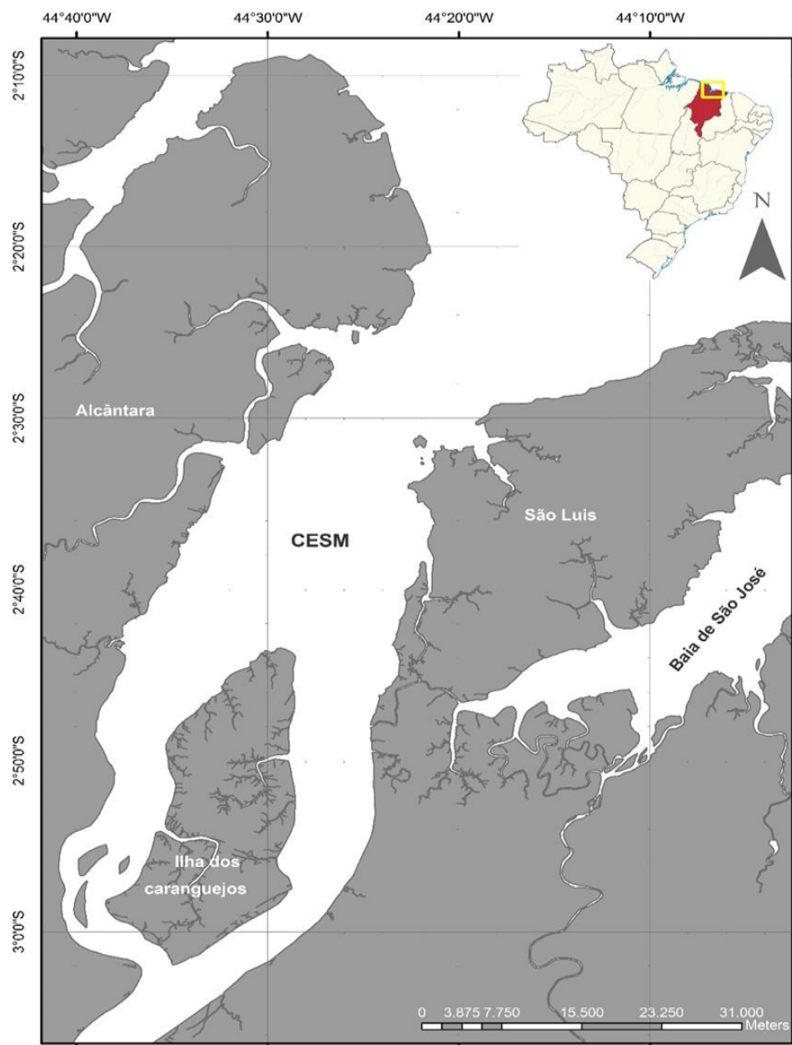


Figura 01: Complexo Estuarino de São Marcos, Maranhão, Brasil.

Os ventos dessa região consistem nos ventos alísios de Nordeste que convergem com os ventos alísios de sudeste na Zona de Convergência Intertropical (ZCIT) e seguem para oeste. A ZCIT migra meridionalmente ao longo do ano ficando posicionada entre as latitudes de 5°S a 10°N (GRUBER, 1971), para a região de estudo, a ZCIT está posicionada entre os meses de janeiro a junho.

O Complexo Estuarino de São Marcos (CESM) possui maré com características semidiurna, com regime de macromaré com periodicidade de aproximadamente 12,4 horas. As amplitudes médias de maré na região alcançam 2,9 metros em regime de quadratura e 3,3 metros em regime de sizígia, apresentando altura média de 6,6 metros no período de maré sizígia (SOUZA FILHO, 2005; DHN, 2004).

3.2 Descrição do Modelo Computacional Hidrodinâmico

Para a elaboração do código computacional foram utilizadas, como equações governantes, a equação de Navier-Stokes e a equação de conservação de massa para simular o escoamento de um fluido incompressível. Para a solução numérica foram utilizados a batimetria local da região, a variação de superfície livre, contribuição zonal da Corrente Norte do Brasil na condição de contorno norte e a contribuição meridional da vazão do Rio Mearim na condição de contorno sul. A solução da equação de momentum é baseada na metodologia de Casulli (1992), que descreve o escoamento do fluido como uma única camada, parametrizando as tensões de superfície e fundo.

O sistema de solução numérica das equações governantes utilizado foi o método de diferenças finitas (Anexo I). O domínio espacial da solução é baseado em um sistema de coordenadas ortogonais tridimensional (Figura 2), apresentando variação zonal (direção X), meridional (direção Y) e vertical (direção Z), que ascendem, respectivamente, no sentido leste, norte e no sentido contrário ao vetor de aceleração da gravidade.

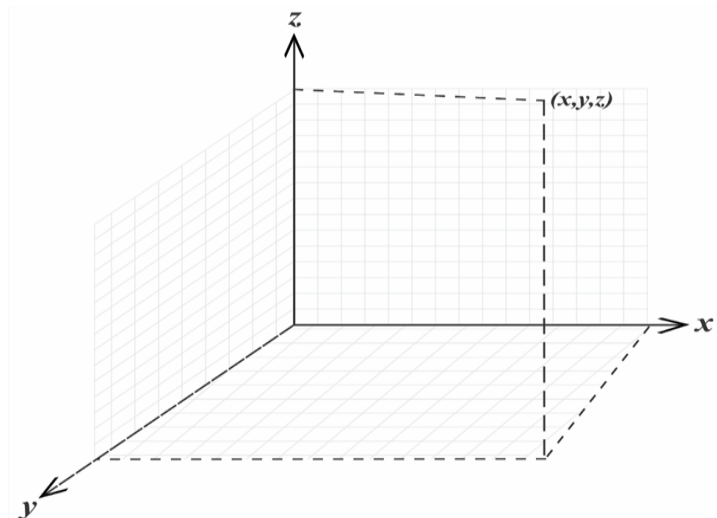


Figura 02: Sistema cartesiano ortogonal tridimensional (OXYZ).

Para a solução numérica das equações governantes foram aplicados esquemas matemáticos nas variações espaciais e temporais. Na solução das variações espaciais foram utilizados o método de diferenças finitas centrado, nas derivadas de primeira ordem; o esquema de Leonard (1979), para os termos advectivos; o método de diferenças finitas para o termo de segunda ordem nos operadores Laplacianos e; a

solução Smagorinsky (1963), para estimar o coeficiente horizontal de difusão em função do campo de velocidade. No domínio temporal foram utilizados os esquemas de Matsuno (1966) e o Asselin (1972), visando a correção de ruídos decorrentes das aproximações e condições aplicadas para a formulação da solução numérica das equações governantes (LI *et al.*, 2015).

Para a determinação da resolução temporal (δt), intervalo temporal de solução das equações governantes, foi utilizado a condição de Courant- Friedrichs-Lewy (CFL), para evitar a instabilidade numérica devido a discretização em diferenças finitas (CASULLI, 1990; CASULLI *et al.*, 1994; CASULLI *et al.*, 1992).

$$CFL_{(x,y)}: (U, V) \frac{\delta t}{\delta(x,y)} \leq 1 \quad (1)$$

onde, U e V representam as velocidades médias na direção zonal e meridional, respectivamente. $\delta(x, y)$ são as resoluções espaciais, na direção zonal e meridional utilizados na solução numérica.

Para a solução espacial foi utilizada um espaçamento de pontos de grade de 100 metros, tanto na direção zonal quanto meridional, baseado na batimetria fornecida pelo Laboratório de Hidrodinâmica Costeira, Estuarina e de Águas Interiores da Universidade Federal do Maranhão (LHiCEAI- UFMA) abrangendo o intervalo de coordenadas 1,7832 a 3,1099° S e 43,4104 a 44,6889° O.

3.2.1 Equações Governantes

3.2.1.1 Equação da continuidade

A equação da continuidade é a relação matemática que expressa a conservação de massa para o fluido, assim como a conservação de volume e/ou densidade (HOLTON, 2004; POND *et al.*, 1983) e é descrita matematicamente, na forma diferencial, como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0 \quad (2)$$

onde ρ representa a densidade, t o tempo, ∇ é a derivada parcial no espaço, $\vec{V}$ é o vetor de velocidade composto pela soma vetorial das componentes de velocidade zonal

(u), meridional (v) e vertical (w). Ao aplicarmos a regra matemática de distribuição no termo $\nabla \cdot \rho \vec{V}$, obtemos a equação:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{V} + \vec{V} \nabla \cdot \rho = 0 \equiv \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (3)$$

Onde a expressão $\frac{D}{Dt}$ representa a derivada material, ou substancial, de uma grandeza qualquer em um sistema de coordenadas ortogonal e equivalente a $\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$. Assumindo que a variação de densidade, tanto no tempo quanto no espaço, é tão baixa que a densidade possa ser tratada como uma constante, a equação 3 é reescrita como:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

integrando a equação 4 em função da altura da coluna de água, obtemos:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \quad (5)$$

onde h representa a altura da coluna de água em repouso e η a variação da superfície livre. Aplicando Regra de Leibniz para a solução das integrais (KAPLAN,1972) e considerando a solução na vertical como uma única camada (solução barotrópica) na equação 5, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{h+\eta} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{h+\eta} \int_{-h}^{\eta} v dz - \left(u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + u(-h) \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \left(v(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} + v(-h) \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad (6)$$

Segundo Moura *et. al* (2002) é necessário a definição de uma equação de fronteira para a coluna de água, definida de forma genérica como $G_{x,y,z,t} = 0$. Desta forma, ao aplicarmos a equação de fronteira na superfície livre obtemos:

$G(\eta)_{x,y,z,t} = z - \left(h_{x,y,t} + \eta_{x,y,z,t} \right)$ onde $z = h_{x,y,t} + \eta_{x,y,z,t}$. A velocidade vertical na zona superficial da camada é definida, matematicamente, como:

$$w(\eta) = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (7)$$

e de forma análoga para o fundo:

$$w(-h) = \frac{d(-h)}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial t} - u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y} \quad (8)$$

substituindo as equações 7 e 8 na equação 6, obtemos:

$$\frac{\partial(u(h+\eta))}{\partial x} + \frac{\partial v(h+\eta)}{\partial y} + \frac{\partial(h+\eta)}{\partial t} = 0 \text{ ou } \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_H(H\vec{V}) = 0 \quad (9)$$

onde ∇_H é o operador de gradiente horizontal e H é a altura da coluna de água ($h + \eta$).

Desta maneira, a equação da continuidade para uma única camada na vertical, é definida como:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(\frac{\partial(HU)}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial(HV)}{\partial y} \right) = 0 \quad (10)$$

3.2.1.2 Equação de conservação de momentum

É o conjunto de equações que descrevem matematicamente o escoamento dos fluidos e pode ser definido pela Segunda Lei de Newton. Para o caso de um fluido Newtoniano compressível, a equação é descrita como:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot (\nabla \vec{V}) \right)_{\omega(1)} = - \nabla P_{\omega(2)} + \nabla \left(\mu \left(\nabla \vec{V} + (\nabla \vec{V})^T \right) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \vec{V}) I \right)_{\omega(3)} + F_{\omega(4)} \quad (11)$$

(1) Termos referentes às forças inerciais;

(2) Gradiente de Pressão;

(3) Quantidade de movimento gerado por difusão molecular;

(4) Tensões aplicadas ao fluido;

onde P representa a pressão, μ é a viscosidade dinâmica do fluido, $(\nabla \vec{V})^T$ é o tensor de deformação e I é a matriz identidade.

Para a formulação da equação de Navier-Stokes, na simulação da hidráulica do CESM, foi levado em consideração o campo inercial de velocidade, o gradiente de pressão, os termos de difusão e o fluxo de flutuabilidade. Desta forma, obtemos a equação:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot (\nabla \vec{V}) \right) = - \nabla P + \nabla \left(\mu \left(\nabla \vec{V} + (\nabla \vec{V})^T \right) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{V}) I \right) + \rho g \quad (12)$$

onde o termo ρg expressa o fluxo de flutuabilidade.

Aplicando a condição de Boussinesq, onde a variação de densidade não interfere de forma significativa no campo inercial do escoamento do fluido (exceto se houver o aumento do fluxo de flutuabilidade do sistema), então a equação de Navier-Stokes é reescrita como:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot (\nabla \vec{V}) \right) = - \nabla P + \nabla \left(\mu \left(\nabla \vec{V} + (\nabla \vec{V})^T \right) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{V}) I \right) + (\rho_0 + \delta \rho) g \quad (13)$$

onde ρ_0 representa uma densidade constante ou de referência e $\delta \rho$ é a variação da densidade em torno de ρ_0 .

Quando aplicados a aproximação de Boussinesq e a equação continuidade, o termo referente a compressibilidade do fluido $(\frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{V}) I)$ se iguala a zero. O termo de difusão $\nabla \left(\mu \left(\nabla \vec{V} + (\nabla \vec{V})^T \right) \right)$ pode ser reescrito como $\mu \nabla^2 \vec{V}$, onde o operador Laplaciano (∇^2) representa a variação de segunda ordem de uma grandeza no espaço ($\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$). Desta forma, a equação de momentum é reescrita como:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot (\nabla \vec{V}) \right) = - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V} + (\rho_0 + \delta \rho) g \quad (14)$$

utilizando a condição da hidrostática, onde a taxa de aumento da pressão da superfície ao fundo é proporcional ao peso da densidade do fluido em sua posição na vertical, a pressão pode ser representada como:

$$P = \rho_0 \cdot g \cdot H \therefore dP = \rho_0 \cdot g \cdot dH \quad (15)$$

na condição da hidrostática as variáveis ρ_0, g, h são constantes. Desta maneira, ∇P pode ser representado como $\rho_0 \cdot g \nabla \eta$, dividindo toda a equação a equação 14 por ρ_0 a equação de momentum é representada como:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot (\nabla \vec{V}) = -g \nabla \eta + \nu (\nabla^2 \vec{V}) + \frac{(\rho_0 + \delta \rho)}{\rho_0} g \quad (16)$$

onde ν é a viscosidade cinemática definida como a relação entre a viscosidade dinâmica (μ) e a densidade (ρ).

Segundo Casulli *et al.* (1992), para a simplificação das equações de Navier-Stokes tridimensional no espaço é necessário assumir que a coluna de água possui característica barotrópica e aplicar a solução numérica de Reynolds para fluxo médio. Deste modo, a equação 16 é reescrita como:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} - fV = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + A_H \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_z \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \quad (17)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} + fU = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + A_H \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_z \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \quad (18)$$

onde – segundo o fluxo médio de Reynolds (HOLTON, 2004) - U, V, W são, respectivamente, as médias das velocidades zonais, meridionais, e verticais na coluna de água; A_H e ν_z são, nesta ordem, o coeficiente de difusão horizontal e de viscosidade cinemática vertical; ∂z é a variação com a profundidade e f é o parâmetro de Coriolis, definido como $2 \vec{\omega} \text{ seno}(\theta^\circ)$, - $\vec{\omega}$ é velocidade angular de rotação da terra e θ° é a latitude.

Ao se adotar o comportamento barotrópico do fluido, a variação espacial das velocidades horizontais, em relação à profundidade e o fluxo de fluabilidade, são

desprezados devido ao comportamento de deslocamento do fluido ser dado através de uma única camada, o conjunto de equações 17 e 18 são reescritas como:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + A_H \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_z \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (19)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + A_H \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_z \frac{\partial V}{\partial z} \right) \quad (20)$$

Para a parametrização da variação do termo difusivo vertical, se faz necessário a determinação de condições de superfície e fundo (CASULLI, 1992). Assim, a tensão na superfície é representada como:

$$v_z \frac{\partial U}{\partial z} = \gamma_T (Ua - U) \quad (21)$$

$$v_z \frac{\partial V}{\partial z} = \gamma_T (Va - V) \quad (22)$$

onde γ_T representa o coeficiente de cisalhamento do vento, Ua e Va representam a velocidade média do vento no sentido zonal e meridional.

Para a determinação da tensão provocada pelo deslocamento do fluido no fundo foi utilizado uma parametrização baseada na solução logarítmica, descrita por Von Karman (1930), expressa como:

$$v_z \frac{\partial U}{\partial z} = C_d U \sqrt{U^2 + V^2} \quad (23)$$

$$v_z \frac{\partial V}{\partial z} = C_d V \sqrt{U^2 + V^2} \quad (24)$$

onde do C_d é o coeficiente de arrasto no fundo é definido como:

$$C_d = \frac{\kappa^2}{\left[\log \left(\frac{h}{z_0} \right) \right]^2} \quad (25)$$

sendo κ é a constante de von Kármán, igual a 0,4, z_0 é parametro de rugosidade do fundo. O coeficiente de arrasto, parâmetro adimensional, para o CESM apresentou valores no entre 0,00066 a 0,00104 representando respectivamente as regiões profundas e as rasas (Figura 3).

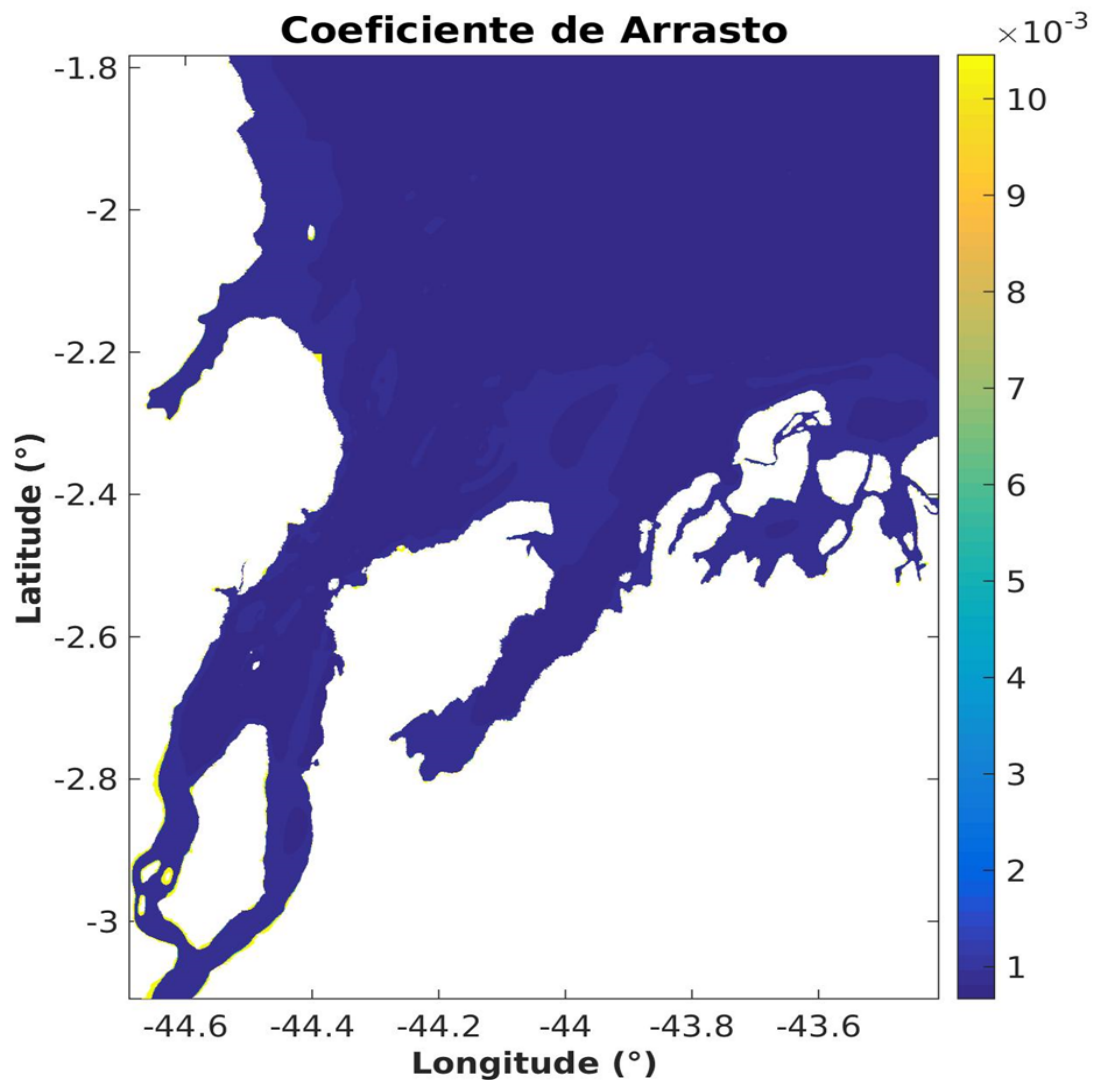


Figura 03: Coeficiente de arrasto para o domínio espacial do modelo computacional.

A equação de momentum utilizada para a solução numérica do modelo computacional hidrodinâmico é representada nas equações 26 e 27.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + A_H \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\gamma_T (Ua - U)}{H} - \frac{C_d U \sqrt{U^2 + V^2}}{H} \right) + f V \quad (26)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + A_H \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\gamma_T (Va - V)}{H} - \frac{C_d V \sqrt{U^2 + V^2}}{H} \right) - f U \quad (27)$$

3.2.2 Domínio Matemático da Solução

Segundo Orlansky (1976), o domínio da solução numérica das equações governantes é definido em uma área confinada ou finita, onde ocorrerá a integração numérica, sendo necessário a definição de condições de contorno que podem modificar o comportamento do fenômeno físico no domínio espacial da solução. O domínio de solução no interior do espaço finito é representado através de pontos de grades (Figura 4).

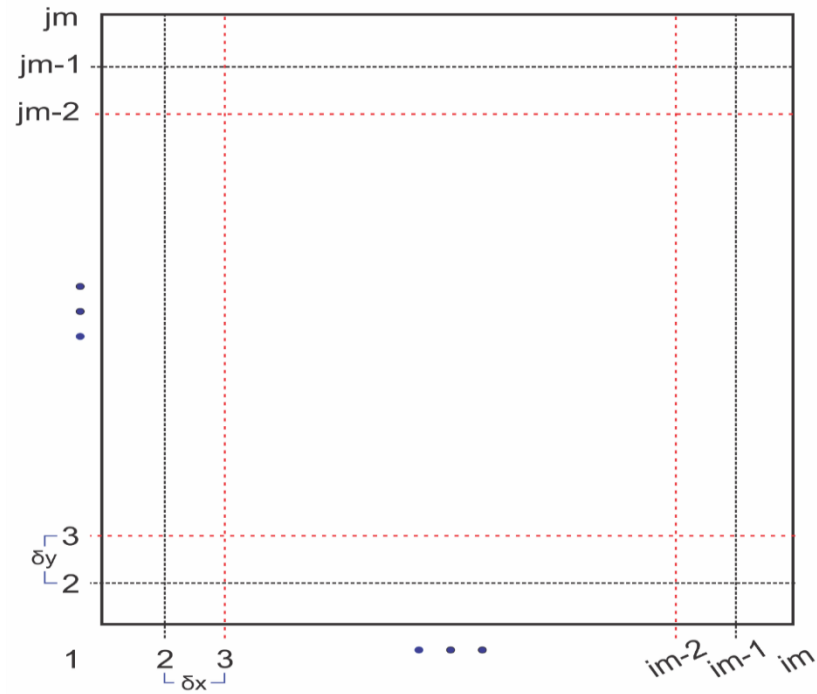


Figura 04: Domínio espacial da solução numérica do modelo computacional.

A integração numérica é realizada entre os pontos de grade. Desta forma, ao solucionarmos as equações na direção zonal e meridional utilizamos as variáveis i, j , sendo elas definidas como:

$$i = 1 \dots IM, j = 1 \dots JM$$

onde IM e JM representam a enésima posição na direção zonal e meridional, respectivamente. Desta maneira, definindo o domínio espacial da solução numérica, onde as bordas norte, sul, leste e oeste são representadas a partir de suas respectivas posições na grade do domínio espacial.

O domínio espacial do modelo hidrodinâmico no CESM é definido baseado na dimensão da batimetria possuindo 1234 pontos de grade na direção meridional, 1175 na direção zonal e uma variação na profundidade de 0 a 53 metros (Figura 5).

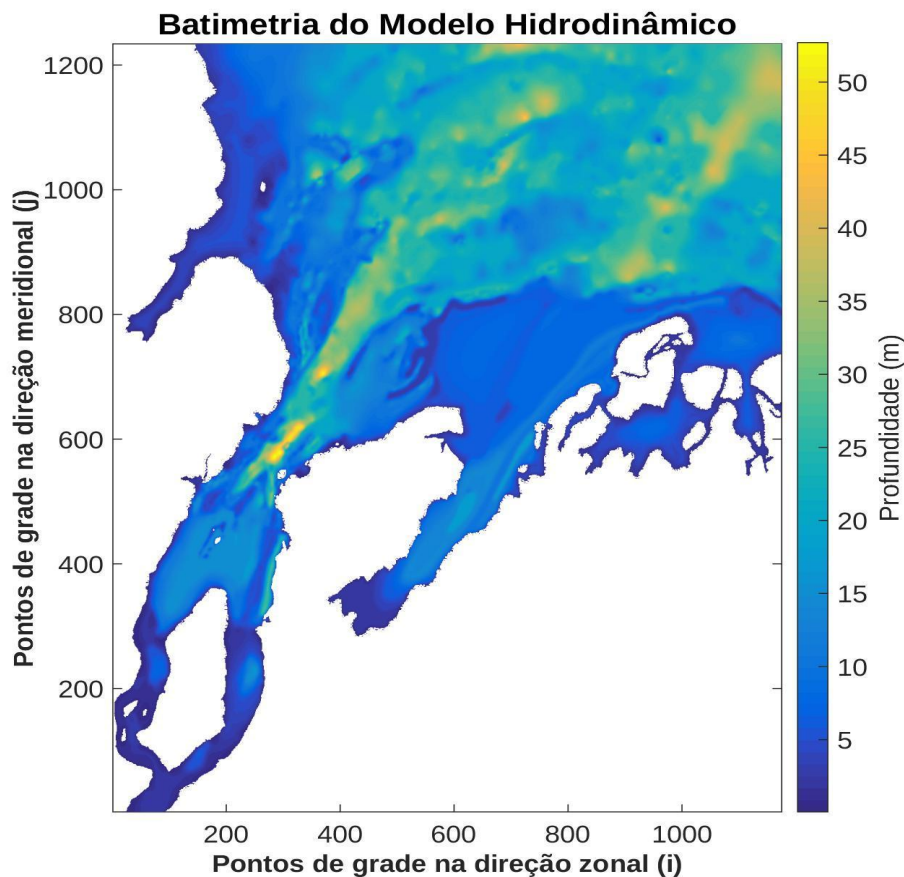


Figura 05: Batimetria utilizada no domínio espacial do modelo computacional para o CESM.

3.2.2.1 Condição de Contorno

A condição de contorno é uma expressão matemática que representa o comportamento do fenômeno ao ter contato com as fronteiras do domínio espacial, podendo o fenômeno ser refletido (condição de contorno fechada) ou sair do domínio

de solução (condição de contorno aberta) sem causar interferências na solução numérica.

3.2.2.1.1 Condição de contorno radiacionais

3.2.2.1.1.1 Sommerfeld

A condição radiacional de Sommerfeld (1912) é uma condição de contorno aberta passiva para qualquer grandeza física (ϕ) que dependa da celeridade da onda para ser transportada, devendo apresentar a relação entre a resolução espacial e temporal igual à celeridade da onda, desta forma garantindo a sua passagem pela fronteira com o mínimo de ruído possível (ORLANSKI, 1976), expressa através das equações:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \pm c_x \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (28a,b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \pm c_y \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (28c,d)$$

onde c é a celeridade da onda, o sinal positivo para c_x e c_y representa, respectivamente, o deslocamento da grandeza em direção às fronteiras leste e norte no domínio espacial e para valores negativos em direção às fronteiras oeste e sul.

3.2.2.1.1.2 Orlanski

A condição radiacional de Orlanski é uma condição de contorno aberta ativa, que utiliza a celeridade da onda para ajustar a passagem do fenômeno pelas bordas, não sendo necessário a relação entre a resolução espacial e temporal ser igual a celeridade. De acordo com Orlanski (1976), a celeridade pode ser estimada através da equação radiacionária de Sommerfeld. Desta maneira, obtemos para a borda norte:

$$c = - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial t}}{\frac{\partial \phi}{\partial y}} \quad (29)$$

Uma vez definida a celeridade, utiliza-se a seguinte equação para expressar a condição de contorno aberta de Orlansky:

$$\phi_{i,jm}^{n+1} = \frac{1-c(\frac{\delta t}{\delta y})}{1+c(\frac{\delta t}{\delta y})}\phi_{i,jm}^{n-1} + 2\frac{c(\frac{\delta t}{\delta y})}{1+c(\frac{\delta t}{\delta y})}\phi_{i,jm}^n \quad (30)$$

onde a equação 30 representa a condição de contorno na fronteira norte; o subíndice $i = 1...IM$ são todas as posições na direção zonal, indo de oeste a leste; jm representa a enésima posição no domínio espacial na direção meridional; c é a celeridade no ponto vizinho à fronteira; o índice n representa a grandeza no tempo atual; $n+1$ incremento avançado no tempo e; $n-1$ incremento recuado no tempo.

3.2.2.1.2 Forçantes

3.2.2.1.2.1 Variação na superfície Livre

Para o início da solução numérica foi necessário introduzir duas séries temporais na fronteira norte (uma posicionada na borda oeste próxima à costa e a outra na borda leste) interpoladas numericamente no sentido zonal.

As séries temporais de variação da superfície livre da água (Figura 6) foram obtidas através de Série de Fourier utilizando os esféricos harmônicos do TPXO 6.2 (EGBERT *et al.* 2002) nas coordenadas 0,743533°S e 44,701001°O (borda oeste) e 0,743533°S e 43,394275°O (borda leste), com resolução temporal de 1 segundo, partindo do dia 01 de janeiro às 00 horas, até 01 de fevereiro de 2015 (30 dias), tendo como referência de horário o meridiano de Greenwich (GMT+00).

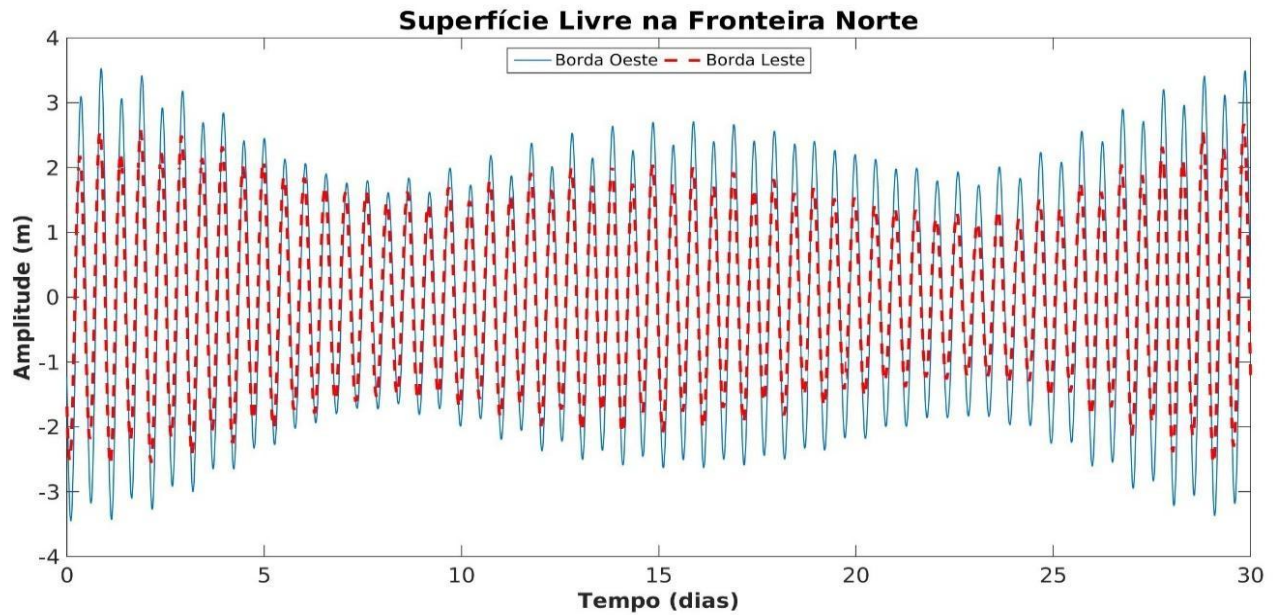


Figura 06: Condição de Contorno para a fronteira norte da solução numérica do modelo computacional.

Para a execução do modelo computacional ao longo de 10 dias foi utilizado a variação da superfície livre, iniciando às 5 horas e 35 minutos dia 01 de janeiro de 2015 (GMT+00) (Figura 7), com o intuito de reduzir do tempo de aquecimento (*spin-up*) da solução numérica.

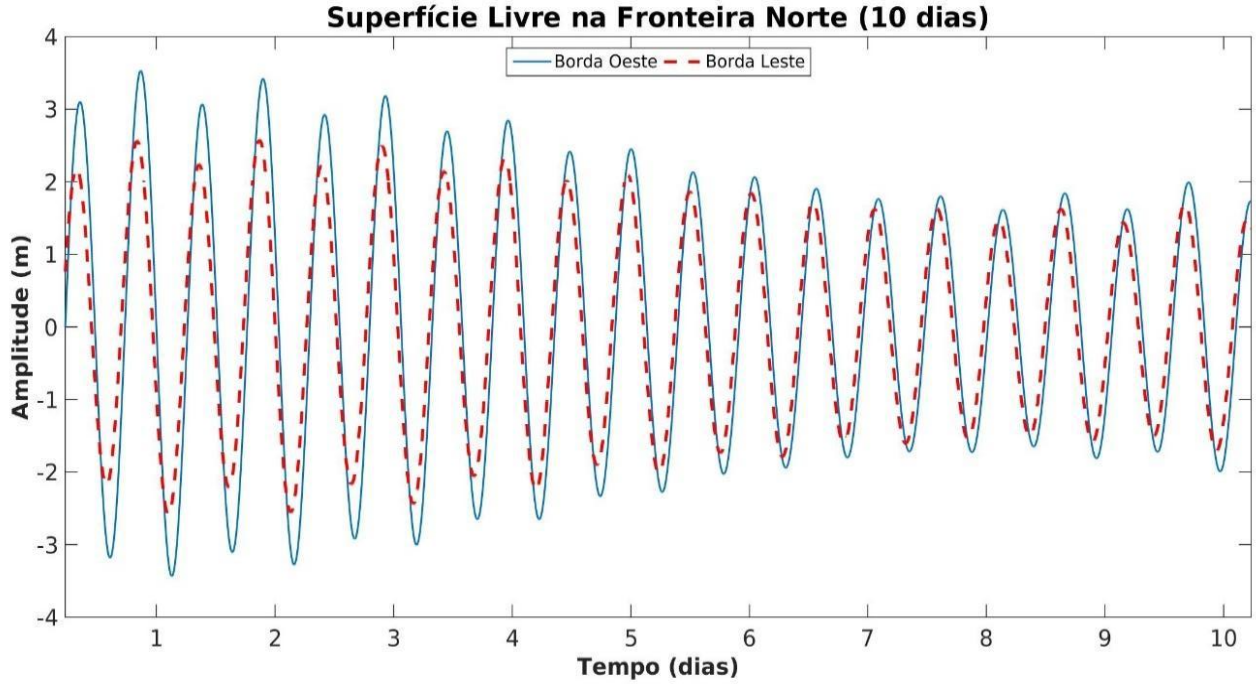


Figura 07: Variação da superfície livre para 10 dias de execução da solução numérica para o CESM no período de 01 janeiro de 2015 a 11 de janeiro de 2015.

3.2.2.1.2.2 Velocidades

Para a forçante no campo de velocidade foi utilizado o esquema de Flather (1976) que consiste na combinação da equação radiacionária, da celeridade de fase de uma onda longa e da equação da continuidade, aplicados para um sistema hidrodinâmico (Carter & Merrifield, 2007), representado matematicamente como:

$$V_i^n = Vext_i^n \pm \sqrt{\frac{g}{H}} \left(\eta_{i\pm 1}^n - \eta ext_i^n \right) \quad (31)$$

onde V_i^n representa a velocidade no tempo de solução n no espaço i , onde i representa as posições da fronteira, $Vext_i^n$ é a velocidade externa imposta (velocidade observada) na condição de contorno, $\eta_{i\pm 1}^n$ é o valor da superfície livre próximo à fronteira e ηext_i^n é o valor da superfície livre imposta (variação da superfície livre observada) na fronteira.

Na fronteira sul há uma contribuição no campo de velocidade oriunda da vazão do Rio Mearim na direção meridional, que segundo o Instituto Brasileiro de Geografia

Espacial (IBGE,1997) apresenta uma variação ao longo do ano de 309 a 1900 $m^3.s^{-1}$ (Figura 8). A descarga média de água doce proveniente da vazão do rio Mearim na fronteira sul foi estimada por uma média ao longo do ano, obtendo o valor de 831 $m^3.s^{-1}$. O valor da velocidade externa, imposta na condição de contorno sul, leva em consideração a profundidade e extensão da largura do rio e sua vazão média.

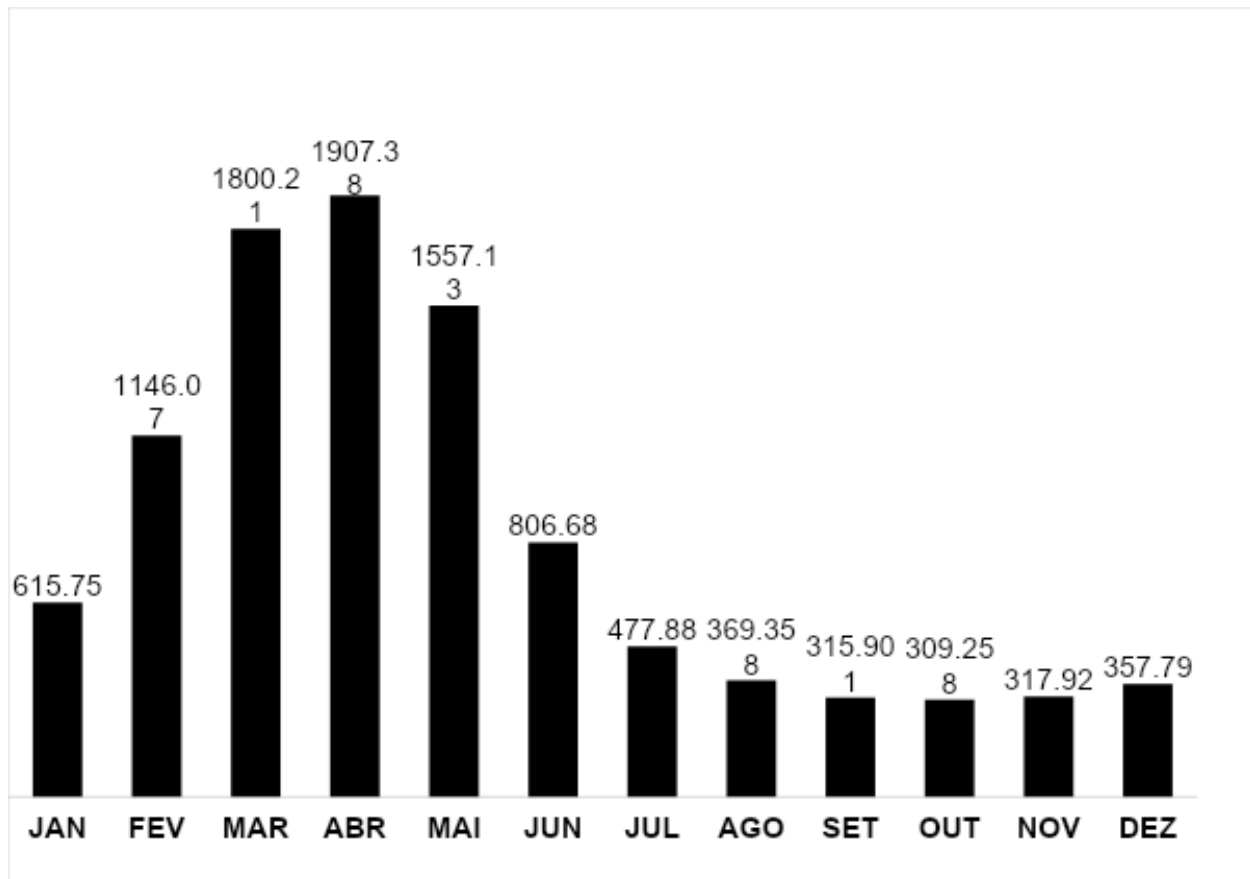


Figura 08: Vazão média do Rio Mearim (IBGE, 1997).

Na fronteira norte há contribuição no campo de velocidade na direção zonal oriunda de uma corrente oceânica superficial (Corrente Norte do Brasil - CNB) formada a partir da ramificação da Corrente Superficial Equatorial (CSE) (STRAMMA, 1999). O valor utilizado para a contribuição da CNB na direção zonal foi estimado baseado no estudo realizado por GOES *et. al* (2005).

3.3 Solução Numérica do Modelo

3.3.1 Discretização em Diferenças Finitas

As variáveis que compõem as equações governantes do modelo computacional são definidas tanto no domínio espacial quanto temporal, sendo definidas como:

$$\phi = \phi(x, y, t), \quad (32)$$

onde x e y representam o domínio espacial zonal e meridional, respectivamente, e t o domínio temporal. Essa relação significa que os seus valores dependem intrinsecamente do espaço e do tempo, logo, as discretizações das equações governantes sempre possuirão dois domínios de solução e são descritas, em notação científica, sob a forma de:

$$\phi(x, y, t) = \phi_{ij}^n, \quad (33)$$

onde n representa o tempo e i, j representam o espaço na direção zonal e meridional, para cada passo no incremento temporal (δt), as variáveis serão representadas como:

$$\phi(x, y, t + \delta t) = \phi_{ij}^{n+1}, \quad (34)$$

e para cada passo do incremento espacial na direção zonal (δx) são representados como:

$$\phi(x + \delta x, y, t) = \phi_{i+1,j}^n, \quad (35)$$

e de forma análoga, para a direção meridional (δy):

$$\phi(x, y + \delta y, t) = \phi_{i,j+1}^n \quad (36)$$

A solução numérica das equações governantes foi separada em duas partes, a solução temporal e a solução espacial, utilizando a Equação de Transporte Advectivo e Difusivo tridimensional de uma grandeza qualquer (ϕ). Como exemplo, obtemos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \omega_{(1)} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} + V \frac{\partial \phi}{\partial y} + W \frac{\partial \phi}{\partial z} \omega_{(2)} = A_H \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + A_z \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \omega_{(3)} \quad (37)$$

(1) Variação Local;

(2) Termos advectivos responsáveis pelo transporte da grandeza ao longo do domínio de solução espacial;

(3) Termos difusivos responsáveis pelo processo de espalhamento;

explicitando a variação local dos outros termos que constituem a equação, obtém-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \omega_{(1)} = A_H \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + A_z \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) - \left(U \frac{\partial \phi}{\partial x} + V \frac{\partial \phi}{\partial y} + W \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \omega_{(2)} \quad (38)$$

(1) Solução temporal do fenômeno;

(2) Solução espacial;

De forma análoga, para as soluções diferenciais das equações governantes do modelo hidrodinâmico, obtemos:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \left(\frac{\partial HU}{\partial x} + \frac{\partial HV}{\partial y} \right) \quad (39)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + A_H \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\gamma_T (Ua - U)}{H} - \frac{C_d \sqrt{U^2 + V^2}}{H} U \right) + fV - \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (40)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + A_H \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\gamma_T (Va - V)}{H} - \frac{C_d \sqrt{U^2 + V^2}}{H} V \right) - fU - \left(U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) \quad (41)$$

Seguindo metodologia de O'Brien (1985), a solução espacial pode ser expressa como:

$$\xi(\phi) = A_H \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + A_z \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) - \left(U \frac{\partial \phi}{\partial x} + V \frac{\partial \phi}{\partial y} + W \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (42)$$

onde $\xi(\phi)$ expressa a domínio espacial.

Utilizando a equação 42 nas equações 39, 40 e 41 obtém-se, respectivamente:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \xi(\eta), \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \xi(U), \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \xi(V) \quad (43, 44, 45)$$

3.3.1.1 Solução no espaço

Utilizando os termos espaciais das equações governantes e aplicando a regra da cadeia na equação da continuidade obtemos as seguintes equações para a superfície livre e para o campo de velocidade médio na direção zonal e meridional:

$$\xi(\eta)_{i,j}^n = - \left(U \frac{\partial H}{\partial x} + V \frac{\partial H}{\partial y} \omega_{(3)} + H \frac{\partial U}{\partial x} + H \frac{\partial V}{\partial y} \right) \quad (44)$$

$$\xi(U)_{i,j}^n = - g \frac{\partial \eta}{\partial x} \omega_{(1)} + A_H \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \omega_{(2)} - \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) \omega_{(3)} + f V \omega_{(4)} + \left(\frac{\gamma_I}{\rho} \right) \quad (45)$$

$$\xi(V)_{i,j}^n = - g \frac{\partial \eta}{\partial y} \omega_{(1)} + A_H \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \omega_{(2)} - \left(U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) \omega_{(3)} - f U \omega_{(5)} + \left(\frac{\gamma_V}{\rho} \right) \quad (46)$$

- (1) Força de gradiente de pressão;
- (2) Termos difusivos;
- (3) Termos advectivos;
- (4) Parâmetro de Coriolis;
- (5) Tensões atuantes no fluido;

3.3.1.1.1 Esquema de Leonard

Devido às variações espaciais da grandeza física, torna-se essencial a aplicação de um método que represente o seu transporte. O esquema de Leonard (1979), também conhecido como esquema CUIKEST (*Cubic Upstream Interpolation for Convective Kinematics with Estimated Stream Term*), é aplicado utilizando os valores das velocidades que transportam a grandeza apresentando um esquema de solução para velocidades acima e abaixo de zero. Para valores maiores que zero, utiliza-se respectivamente para a variação zonal e meridional da grandeza:

$$U \frac{\partial \phi}{\partial x} = U_{i,j}^n \frac{1}{2\delta x} \left(\phi_{i-2,j}^n - 6\phi_{i-1,j}^n + 3\phi_{i,j}^n + 2\phi_{i+1,j}^n \right) \quad (47)$$

$$V \frac{\partial \phi}{\partial y} = V_{i,j}^n \frac{1}{2\delta y} \left(\phi_{i,j-2}^n - 6\phi_{i,j-1}^n + 3\phi_{i,j}^n + 2\phi_{i,j+1}^n \right) \quad (48)$$

e para velocidades menores que zero:

$$U \frac{\partial \phi}{\partial x} = U_{i,j}^n \frac{1}{2\delta x} \left(-2\phi_{i-1,j}^n - 3\phi_{i,j}^n + 6\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i+2,j}^n \right) \quad (49)$$

$$V \frac{\partial \phi}{\partial y} = V_{i,j}^n \frac{1}{2\delta y} \left(-2\phi_{i,j-1}^n - 3\phi_{i,j}^n + 6\phi_{i,j+1}^n + \phi_{i,j+2}^n \right) \quad (50)$$

3.3.1.1.2 Coeficiente de difusão horizontal: esquema de Smagorinsky

Para a estimativa do coeficiente horizontal de difusão foi utilizado a formulação do MDF avançado, para operador diferencial de gradiente e a centrada, para o operador diferencial rotacional no esquema de Smagorinsky (Anexo II), obtendo a formulação em diferenças finitas para o coeficiente de difusão horizontal, descrita como:

$$A_H = C \delta x \delta y \left(\left(\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n}{\delta x} \right)^2 + \left(\frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j}^n}{\delta y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{V_{i+1,j}^n + V_{i+1,j+1}^n - V_{i-1,j}^n - V_{i-1,j+1}^n}{\delta x} + \frac{U_{i+1,j}^n + U_{i+1,j+1}^n - U_{i-1,j}^n - U_{i-1,j+1}^n}{\delta y} \right)^2 \right) \right) \quad (51)$$

3.3.1.2 Solução no tempo

3.3.1.2.1 Esquema de Matsuno

O esquema de Matsuno (1966), para a solução da variação local, consiste em utilizar o método de diferenças finitas avançado e recuado para a previsão da variação temporal de uma grandeza genérica (ϕ), com o intuito de reduzir o erro provocado pela condição inicial, sendo descrita como:

$$\phi_*^{n+1} - \phi^n = \delta t \xi(\phi^n) \quad (52)$$

$$\phi^{n+1} - \phi^n = \delta t \xi(\phi_*^{n+1}) \quad (53)$$

onde a grandeza genérica ϕ_*^{n+1} é uma estimativa da variável avançada no tempo.

3.3.1.2.2 Esquema de Asselin

O esquema de Asselin (1972) é um filtro de passa baixa que pode ser ajustado visando o amortecimento de ruídos de alta frequência causados devido à difusão matemática, que ocorre ao longo do processo de solução matemática das equações governantes (HURL, 2014).

A descrição matemática do Filtro de Asselin em sua forma unidimensional, utilizando uma grandeza genérica (ϕ), pode ser descrita em diferenças finitas sob a forma:

$$\overline{\phi_{i,j,k}^n} = \phi_{i,j,k}^n + 0.5 \alpha \left(\phi_{i,j,k}^{n-1} - 2\phi_{i,j,k}^n + \phi_{i,j,k}^{n+1} \right) \quad (54)$$

onde $\overline{\phi_{i,j}^n}$ é a variável genérica filtrada, α é o coeficiente de ajuste do filtro de passa baixa, $\phi_{i,j}^{n-1}$ é a variável recuada no tempo, $\phi_{i,j}^n$ é a variável no tempo de filtragem e $\phi_{i,j}^{n+1}$ é a variável avançada no tempo.

3.3.1.3 Discretização das Equações Governantes

3.3.1.3.1 Equação da Continuidade

Para a solução numérica da equação da continuidade foi utilizado o MDF centrado, na solução das derivadas de primeira ordem no domínio espacial, obtendo:

$$\xi(\eta)_{i,j}^n = -\frac{H_{i,j}^n}{2\delta x} \left(U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n \right) - \frac{U_{i,j}^n}{2\delta x} \left(H_{i+1,j}^n - H_{i-1,j}^n \right) - \frac{H_{i,j}^n}{2\delta y} \left(V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n \right) - \cdot \quad (55)$$

Os termos advectivos são solucionados de acordo com o esquema de Leonard. Desta forma, a solução espacial para equação da continuidade em diferenças finitas utilizada na solução numérica é representada como:

$$\xi(\eta)_{i,j}^n = -\frac{H_{i,j}^n}{2\delta x} \left(U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n \right) - \frac{H_{i,j}^n}{2\delta y} \left(V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n \right)$$

$$- \left\{ \frac{U_{ij}^n}{2\delta x} \left(H_{i-2,j}^n - 6H_{i-1,j}^n + 3H_{i,j}^n + 2H_{i+1,j}^n \right), \text{ para } U_{ij}^n > 0 \right. \frac{V_{ij}^n}{2\delta x} \left(H_{i,j-2}^n - 6H_{i,j-1}^n + \right. \quad (56)$$

A variação temporal é solucionada com o esquema de Matsuno (1966), assim:

$$\eta_{ij}^{n+1} - \eta_{ij}^n = \delta t \xi \left(\eta_{ij}^{n+1} \right) \quad (57)$$

3.3.1.3.2 Equação de conservação de momentum

3.3.1.3.2.1 Zonal

Utilizando o MDF centrado para a solução das derivadas de primeira ordem e o MDF de segunda ordem para operador Laplaciano no domínio espacial, obtemos:

$$\begin{aligned} \xi(U)_{ij}^n = & -U_{ij}^n \frac{(U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n)}{2\delta x} - V_{ij}^n \frac{(U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n)}{2\delta y} - g \frac{(\eta_{i+1,j}^n - \eta_{i-1,j}^n)}{2\delta x} \\ & + A_H \left(\frac{(U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n - 2U_{ij}^n)}{\delta x^2} + \frac{(U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n - 2U_{ij}^n)}{\delta y^2} \right) + \gamma_T \frac{(U_{ij}^n - U_{ij}^n)}{H_{ij}^n} - l \end{aligned} \quad (58)$$

Os termos advectivos são solucionados de acordo com o esquema de Leonard. Desta forma, a solução espacial para equação de momentum na direção zonal em diferenças finitas utilizada na solução numérica é representada como:

$$\begin{aligned} \xi(U)_{ij}^n = & A_H \left(\frac{(U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n - 2U_{ij}^n)}{\delta x^2} + \frac{(U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n - 2U_{ij}^n)}{\delta y^2} \right) + \gamma_T \frac{(U_{ij}^n - U_{ij}^n)}{H_{ij}^n} - U_{ij}^n C_{d_{ij}} \\ & - \left\{ \frac{U_{ij}^n}{2\delta x} \left(U_{i-2,j}^n - 6U_{i-1,j}^n + 3U_{i,j}^n + 2U_{i+1,j}^n \right), \text{ para } U_{ij}^n > 0 \right. \frac{V_{ij}^n}{2\delta y} \left(U_{i,j-2}^n - 6U_{i,j-1}^n + \right. \end{aligned} \quad (59)$$

Utilizando, de forma análoga, a solução temporal da equação da continuidade para a equação de momentum na direção zonal, obtemos:

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + \delta t \xi(U_{*}^{n+1})_{i,j} \quad (60)$$

3.3.1.3.2 Meridional

Utilizando o MDF centrado para a solução das variações de primeira ordem e o MDF de segunda ordem para os termos diferenciais de segunda ordem no domínio espacial, obtemos:

$$\xi(V)_{i,j}^n = -U_{i,j}^n \frac{(V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n)}{2\delta x} - V_{i,j}^n \frac{(U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n)}{2\delta y} - g \frac{(\eta_{i,j+1}^n - \eta_{i,j-1}^n)}{2\delta y} + A_H \left(\frac{(V_{i+1,j}^n + V_{i-1,j}^n)}{\delta x^2} \right) \quad (61)$$

Os termos advectivos são solucionados de acordo com o esquema de Leonard, desta forma a solução espacial para equação de Momentum na direção meridional em diferenças finitas utilizada na solução numérica é representada como:

$$\xi(V)_{i,j}^n = A_H \left(\frac{(V_{i+1,j}^n + V_{i-1,j}^n - 2V_{i,j}^n)}{\delta x^2} + \frac{(V_{i,j+1}^n + V_{i,j-1}^n - 2V_{i,j}^n)}{\delta y^2} \right) + \gamma_T \frac{(V_{i,j}^n - V_{i,j}^n)}{H_{i,j}^n} - V_{i,j}^n C_{d_{i,j}} \quad (62)$$

De forma análoga à solução temporal da equação de momentum na direção zonal para a direção meridional, obtemos:

$$V_{i,j}^{n+1} = V_{i,j}^n + \delta t \xi(V_{*}^{n+1})_{i,j} \quad (63)$$

3.3.1.4 Condição de Contorno

3.3.1.4.1 Condição aberta: radiacional

3.3.1.4.1.1 Sommerfeld

A solução numérica para a condição radiacional de Sommerfeld em diferenças finitas para as fronteiras norte, leste, sul e oeste (Anexo III) são representadas respectivamente nas equações 38a, 38b, 38c e 38d.

$$\phi_{i,jm}^n = \phi_{i,jm-1}^{n-1} \quad (38a)$$

$$\phi_{im,j}^n = \phi_{im-1,j}^{n-1} \quad (38b)$$

$$\phi_{i,1}^n = \phi_{i,2}^{n-1} \quad (38ac)$$

$$\phi_{1,j}^n = \phi_{2,j}^{n-1} \quad (38d)$$

3.3.1.4.1.2 Orlanski

A solução numérica para a condição radiacional de Orlanski em diferenças finitas para as fronteiras norte, leste, sul e oeste (Anexo IV) são representadas respectivamente nas equações 39a, 39b, 39c e 39d

$$\phi_{i,jm}^{n+1} = \left(\frac{\phi_{i,jm-1}^n - \phi_{i,jm-2}^{n-1}}{\phi_{i,jm-1}^{n-2} - \phi_{i,jm-2}^{n-1}} \right) \phi_{i,jm}^{n-1} - \left(\frac{\phi_{i,jm-1}^n - \phi_{i,jm-1}^{n-2}}{\phi_{i,jm-1}^{n-2} - \phi_{i,jm-2}^{n-1}} \right) \phi_{i,jm-1}^n \quad (39a)$$

$$\phi_{im,j}^{n+1} = \left(\frac{\phi_{im-1,j}^n - \phi_{im-2,j}^{n-1}}{\phi_{im-1,j}^{n-2} - \phi_{im-2,j}^{n-1}} \right) \phi_{im,j}^{n-1} - \left(\frac{\phi_{im-1,j}^n - \phi_{im-1,j}^{n-2}}{\phi_{im-1,j}^{n-2} - \phi_{im-2,j}^{n-1}} \right) \phi_{im-1,j}^n \quad (39b)$$

$$\phi_{i,1}^{n+1} = \left(\frac{\phi_{i,3}^{n-1} - \phi_{i,2}^n}{\phi_{i,3}^{n-1} - \phi_{i,2}^{n-2}} \right) \phi_{i,1}^{n-1} - \left(\frac{\phi_{i,2}^n - \phi_{i,2}^{n-2}}{\phi_{i,3}^{n-1} - \phi_{i,2}^{n-2}} \right) \phi_{i,2}^n \quad (39c)$$

$$\phi_{1,j}^{n+1} = \left(\frac{\phi_{3,j}^{n-1} - \phi_{2,j}^n}{\phi_{3,j}^{n-1} - \phi_{2,j}^{n-2}} \right) \phi_{1,j}^{n-1} - \left(\frac{\phi_{2,j}^n - \phi_{2,j}^{n-2}}{\phi_{3,j}^{n-1} - \phi_{2,j}^{n-2}} \right) \phi_{2,j}^n \quad (39d)$$

3.4 Método de Validação da Solução Numérica

3.4.1 Experimento de Berkhoff

3.4.1.1 Descrição do Experimento

O experimento de Berkhoff (1982) consiste em um modelo de escala reduzida para a propagação de onda de gravidade em um ambiente confinado, com condições muito bem definidas. Foi proposto para avaliar soluções numéricas para análise e previsão da propagação de onda em uma área com batimetria variável.

O espaço confinado possui uma área de 35m x 30 m com uma escala de variação de profundidade de 1:50 e que vai se elevando a partir de uma topografia constante de 0,45m e possui uma calota em forma elíptica de altura 0,2 metros, e essa

batimetria apresenta uma inclinação de 20° . Em uma das bordas do tanque é gerado uma oscilação na superfície livre artificial utilizando o gerador de ondas (Figura 9).

No experimento de Berkhoff foram utilizados 10 equipamentos, distribuídos em 8 seções, dentre elas 5 horizontais e 3 verticais, localizadas próximas à calota, com o objetivo de observar o comportamento das ondas se propagando no tanque nessa região.

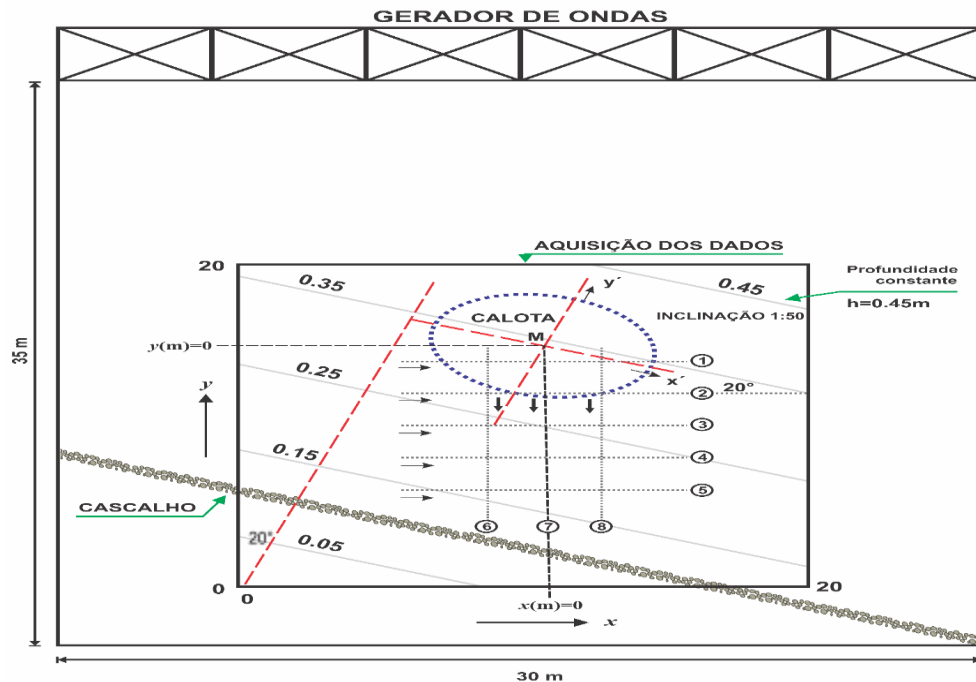


Figura 09: Representação da visão superior do experimento, modificado de Berkhoff (1982).

Para a definição da forma e altura da calota da calota foi utilizado a representação matemática proposta por Berkhoff (Figura 10):

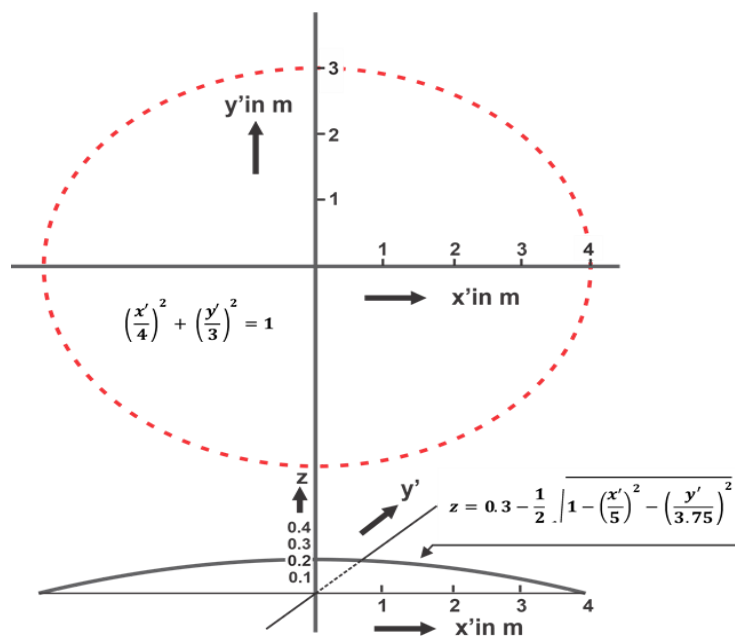


Figura 10: Esquema matemático para elaboração da calota no experimento, modificado de Berkhoff (1982).

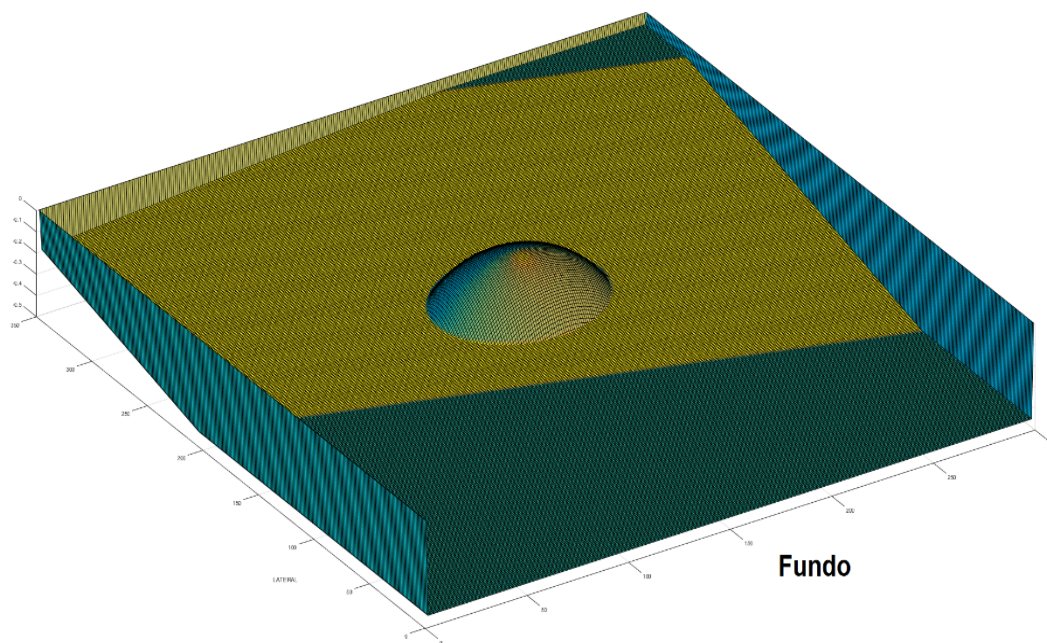


Figura 11: Representação Batimétrica para o experimento de Berkhoff (1982).

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Experimento de Berkhoff

Para análise do comportamento de propagação de onda no experimento de Berkhoff utilizando a solução numérica descrita no capítulo 3 foram utilizados os valores observados nas seções 6, 7 e 8 (seções verticais). Na solução numérica foi utilizado uma resolução espacial na direção meridional e zonal de 0,1 metro e temporal de 0,01 segundo. No domínio espacial do modelo matemático, foi utilizado a condição contorno fechada nas fronteiras norte, leste e oeste e uma forçante, oscilação na superfície livre, na fronteira sul definida matematicamente como:

$$\eta_{i,1}^n = A. \sin(2\pi \frac{n^* \delta t}{T}) \quad (40)$$

onde n representa o passo de tempo referente a solução numérica, A é a amplitude da onda definido como 0.0464, e T é o período da onda definido como 1 segundo. Os resultados são mostrados nas figuras 12, 13 e 14.

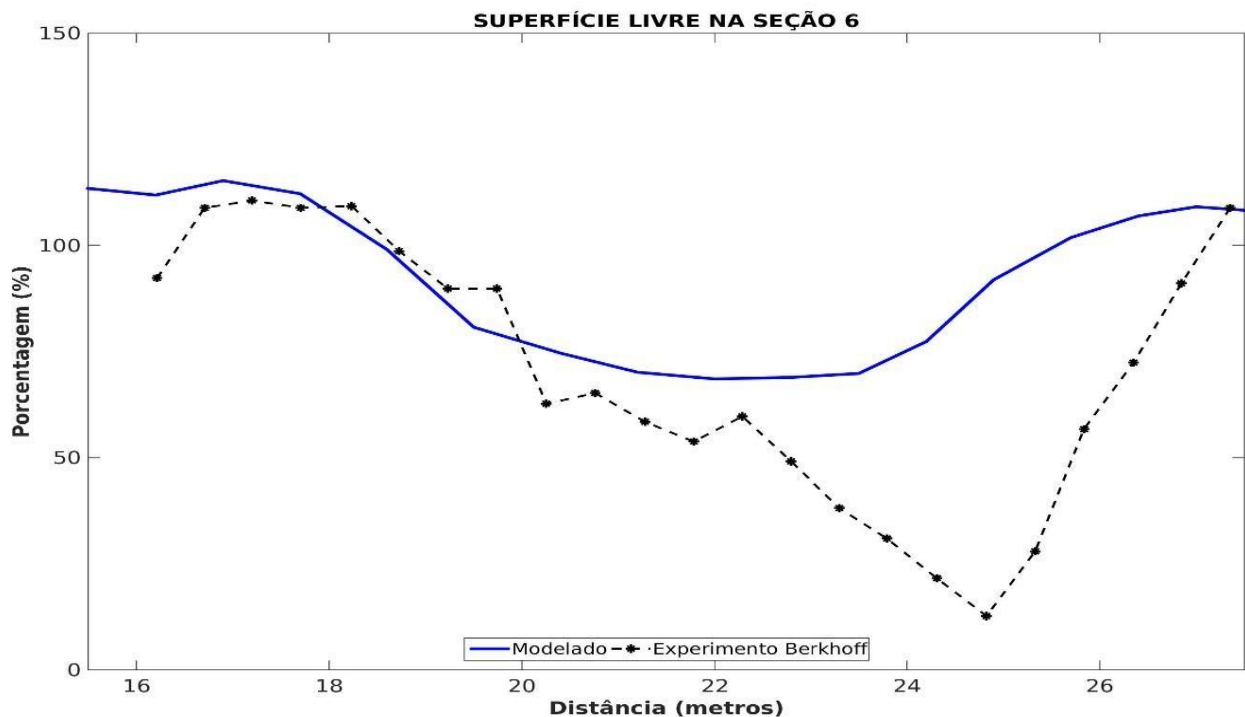


Figura 12: Superfície livre na seção 6 do experimento de Berkhoff (1982).

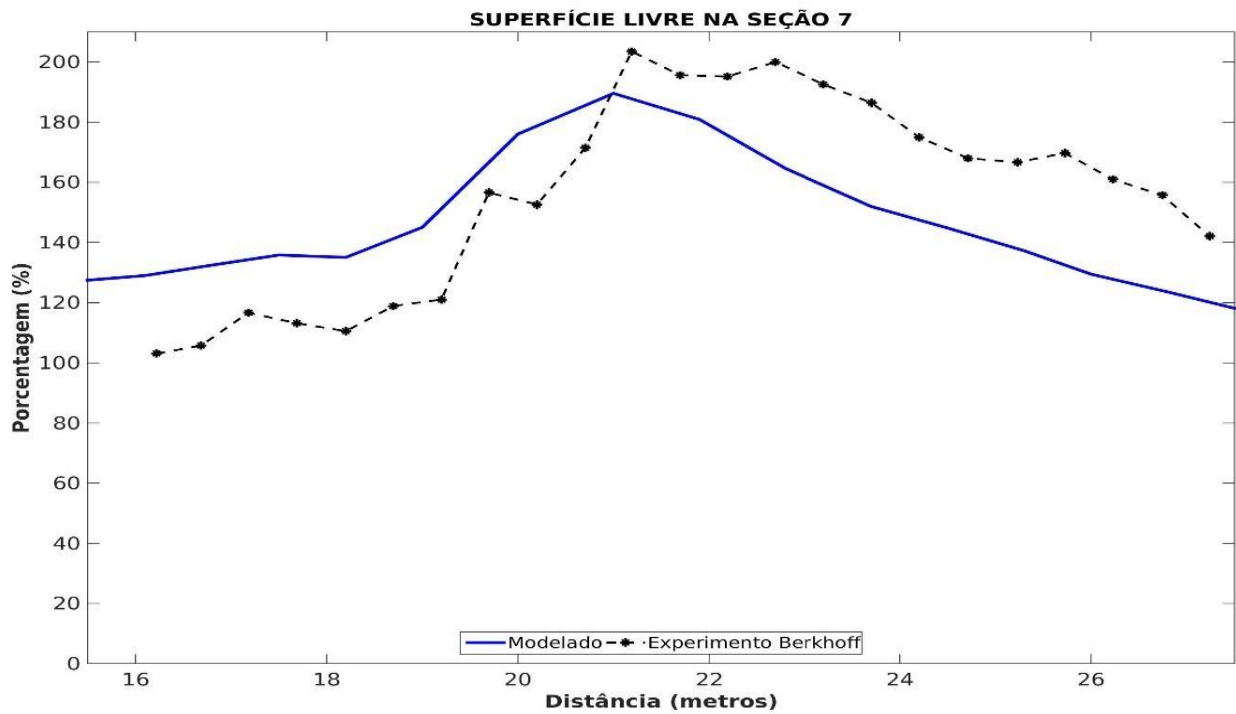


Figura 13: Superfície livre na seção 7 do experimento de Berkhoff (1982).

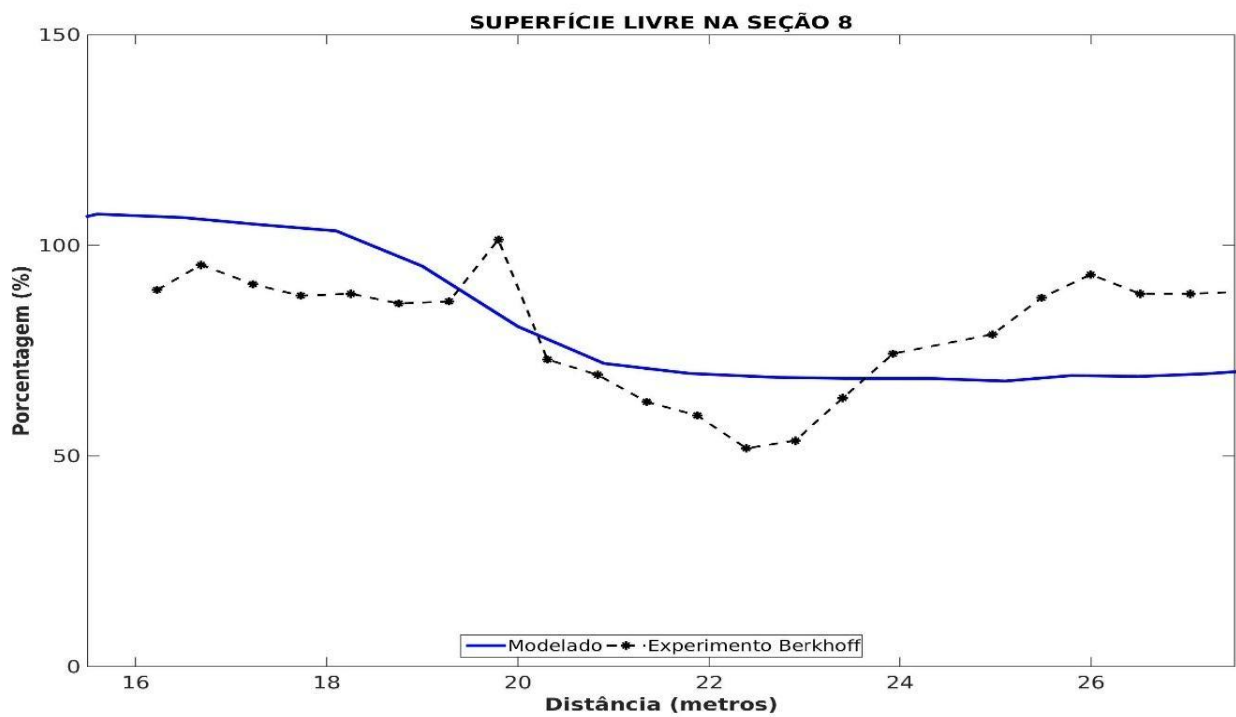


Figura 14: Superfície livre na seção 8 do experimento de Berkhoff (1982).

Baseado nas figuras 12, 13 e 14 a solução numérica utilizada nas equações governantes descreveu a propagação de uma onda em uma região com batimetria irregular, simulando um aumento na variação da superfície livre na seção 7 (figura 13), região da altura máxima da calota, assim como a diminuição no campo da celeridade nas regiões mais rasas, deve se levar em consideração que no experimento de Berkhoff foi utilizado na região mais rasa uma zona de dissipação de energia, ou seja, o experimento de Berkhoff foi utilizado apenas para observar a capacidade da solução numérica de propagar um sinal de onda regular em uma batimetria irregular, observando o comportamento do sinal de onda propagado.

4.2 Complexo Estuarino de São Marcos (CESM)

Para a solução da hidráulica no CESM foi utilizado uma resolução temporal de 1 segundo e espacial de 100 metros na direção zonal e meridional com tempo de integração de 10 dias. Os resultados foram armazenados a cada 15 minutos modelados pela solução numérica e filtrados espacialmente através de uma média móvel de 5 elementos, tanto para a direção zonal quanto para a meridional, a cada 20 segundos simulados, realizando de tal maneira uma média em área para o campo de velocidade e variação da superfície livre.

Para a análise da hidráulica foram armazenados o campo de velocidade e a variação da superfície livre em 3 pontos localizados próximos à região portuária, um localizado no canal de acesso do Complexo Estuarino São Marcos sob às coordenadas $44,3883^{\circ}\text{O}$ e $2,5031^{\circ}\text{S}$, um no canal de acesso do Boqueirão sob as coordenadas $44,3611^{\circ}\text{O}$ e $2,5364^{\circ}\text{S}$ e um na Região Portuária sob às coordenadas $44,3807^{\circ}\text{O}$ e $2,5547^{\circ}$ (Figura 15). Para a validação da solução numérica foi utilizado dados de preamar e baixamar observados na região portuária fornecida pela Empresa Vale S.A.

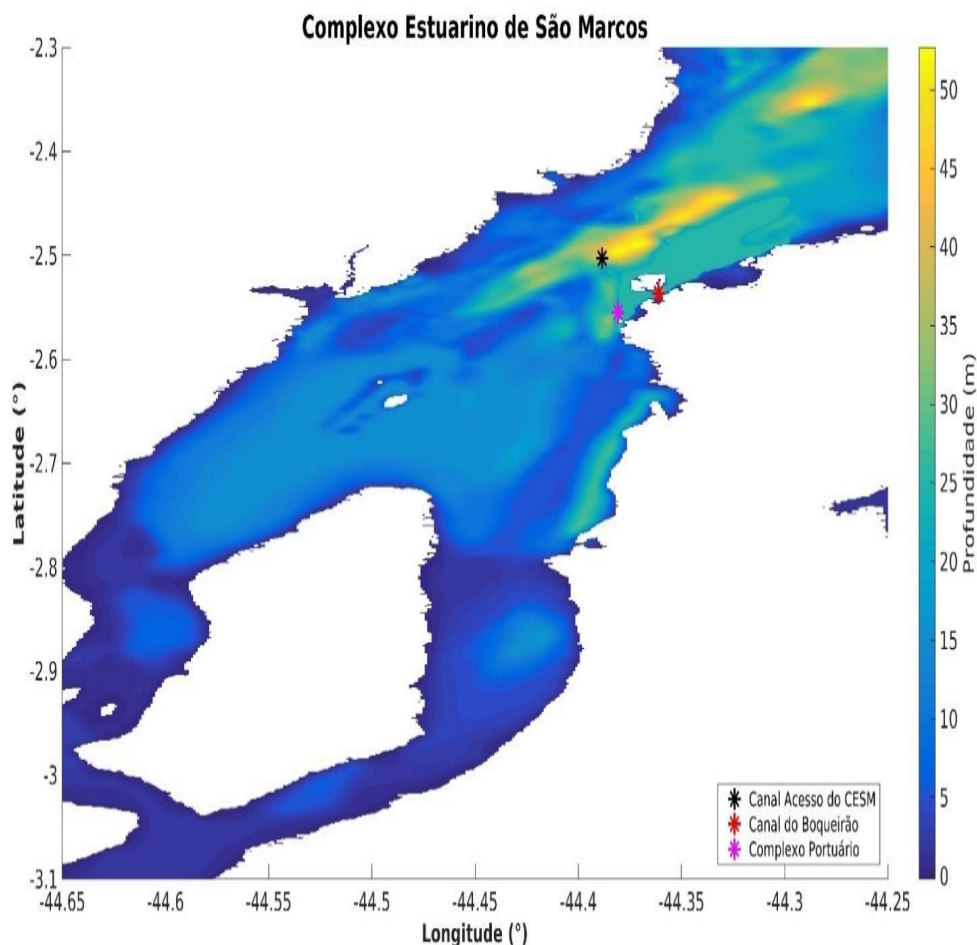


Figura 15: Pontos de análise de resultado da solução numérica.

4.2.1 Validação da solução numérica

Para a validação do modelo computacional foi realizado uma comparação da oscilação da superfície livre na região portuária com uma série pontual histórica de 13 anos com valores de preamar e baixamar observadas no complexo portuário, iniciando do dia 01 de março de 2005 às 03 horas e 55 minutos até o dia 31 de dezembro de 2018 às 21 horas e 2 minutos no horário local da região portuária. A série temporal foi obtida de uma estação maregráfica posicionada nas coordenadas ($02^{\circ} 33' 9''$ S e $44^{\circ} 22' 7''$ O - Anexo V). Para efetuar a comparação entre os dados observados e os resultados simulados foi necessário realizar a correção temporal, devido a hora local da região portuária estar no GMT-03. O tempo inicial de referência da solução numérica foi

às 02 horas e 35 minutos do dia 01 de janeiro de 2015 no GMT-03 (Figura 16), horário local do Complexo Portuário.

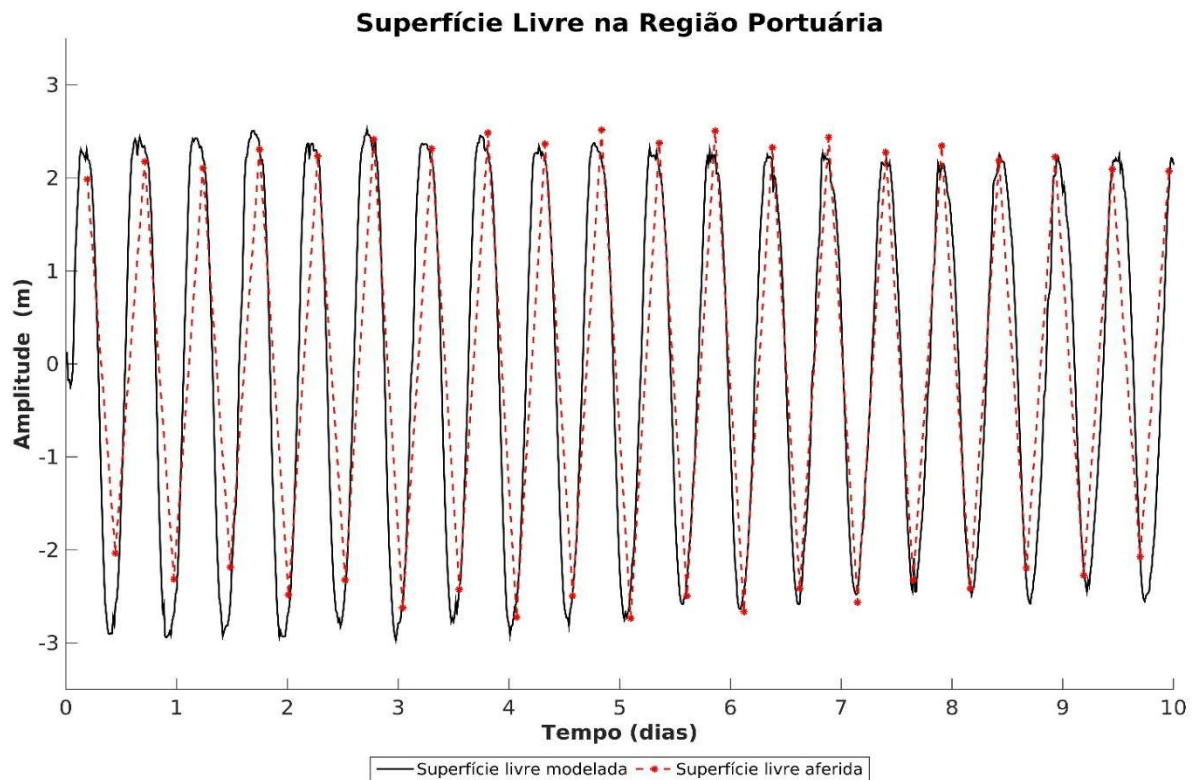


Figura 16: Variação de superfície livre modelada e observada na região portuária.

4.2.2 Componentes do Campo de Velocidade

A equação de conservação de momentum utilizada na solução numérica para a simulação da hidráulica é constituída pelas forças inerciais, a força de gradiente de pressão, forças difusivas e tensão de fundo. Foi realizada uma média espacial da contribuição para cada termo, na direção zonal e meridional, a cada 15 minutos modelados (Figura 17 e 18).

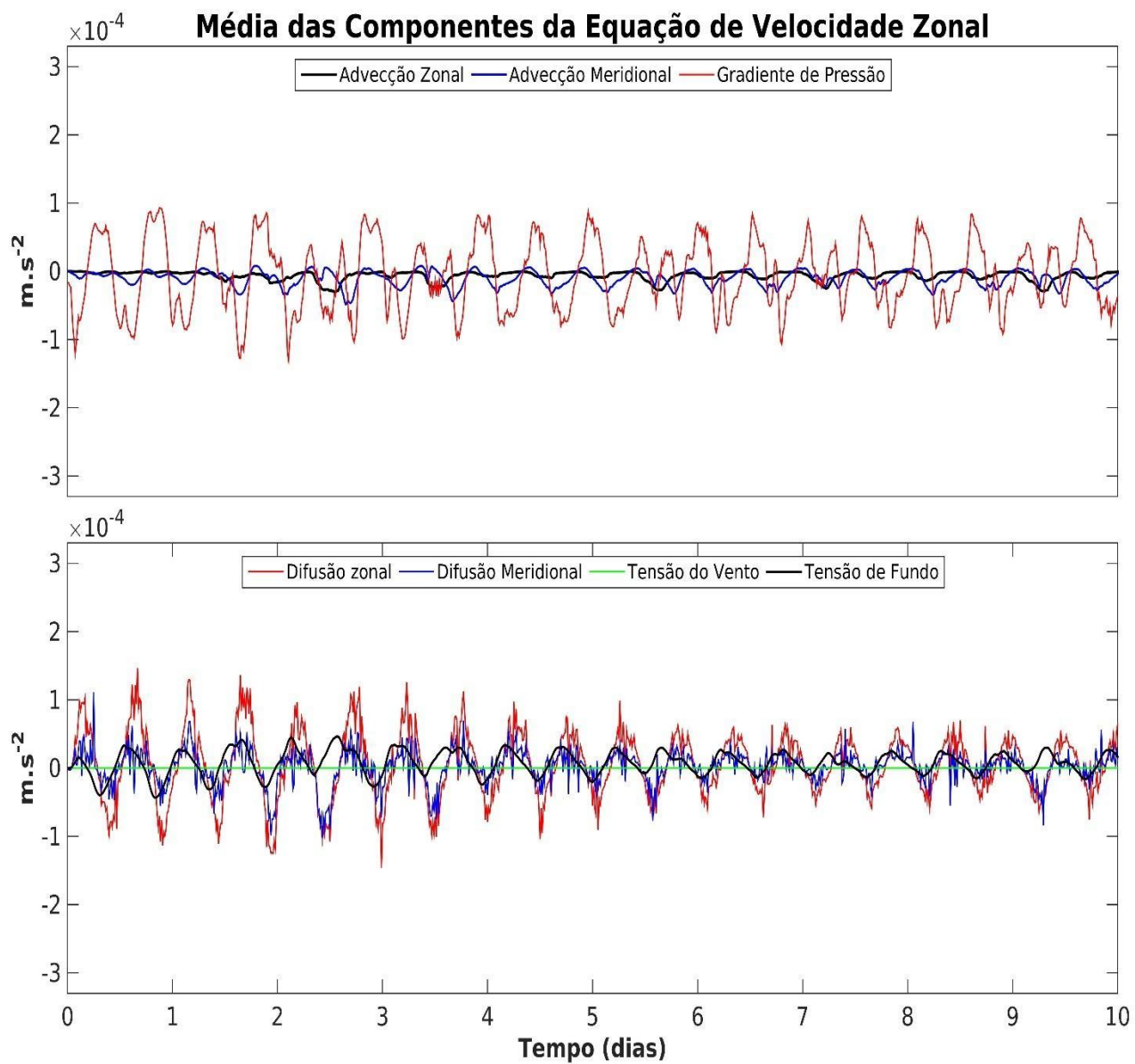


Figura 17: Componentes da Equação de conservação de momentum na direção zonal.

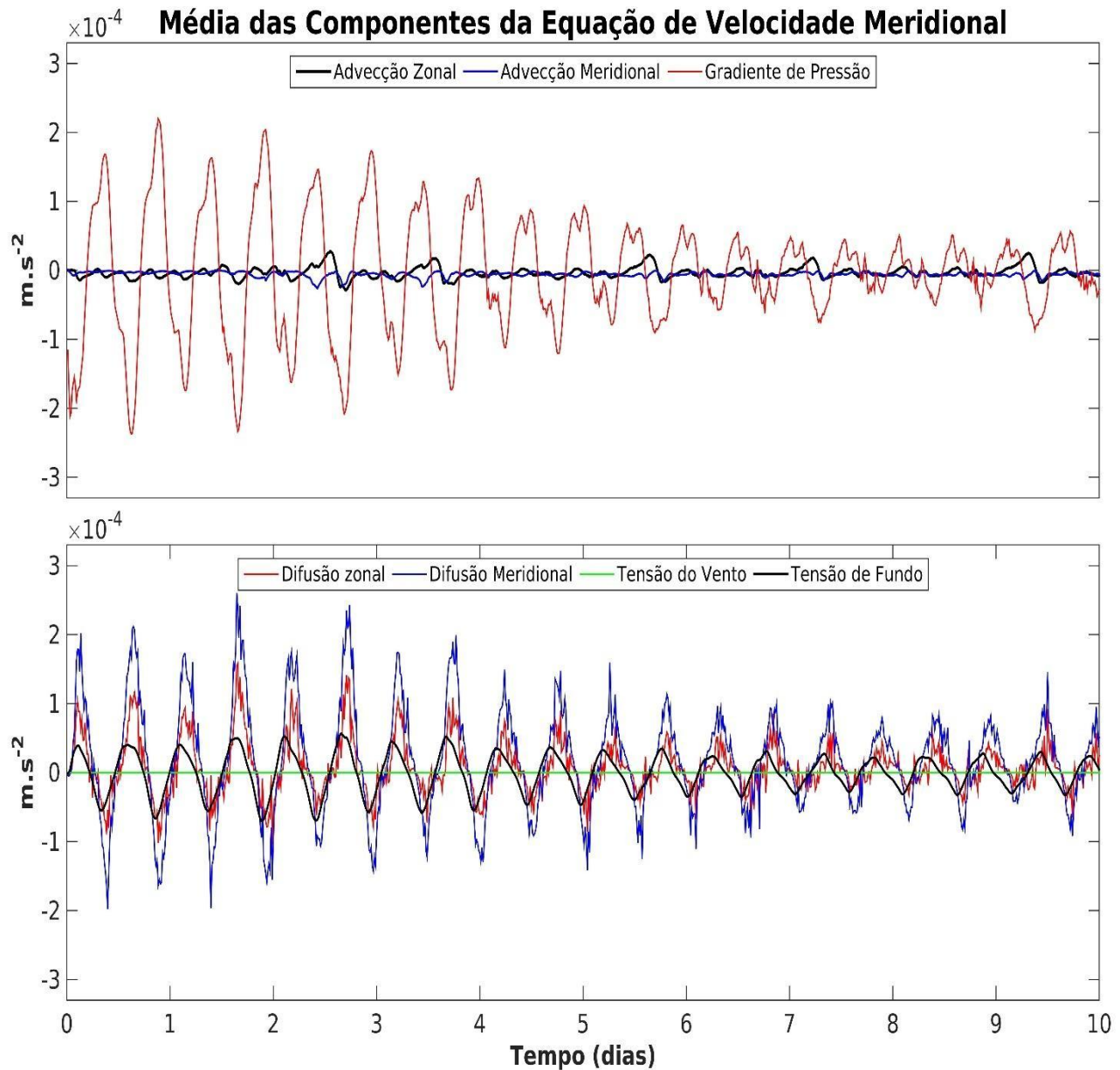


Figura 18: Componentes da equação de conservação de momentum na direção meridional.

O campo de velocidade no domínio espacial é regido, principalmente, pela variação da superfície livre causada pela maré, onde as maiores contribuições nos termos da equação de momentum foram obtidas no gradiente de pressão e difusão. Nos termos de gradiente de pressão, difusão e tensão no fundo foram obtidos variações regidas pela perturbação da superfície livre, com variações mais elevadas no período com as maiores oscilações, enquanto na direção zonal para o termo de gradiente de pressão

não houve variação significativa ao longo do tempo de integração, resultando em uma contribuição com baixa dependência do regime de maré.

4.2.2.1 Termo Advectivo

O termo de advecção média na direção zonal para a velocidade zonal obteve valores entre $-3,08.10^{-5} m.s^{-2}$ a $-2,5.10^{-8} m.s^{-2}$ com valor médio de $-6,35.10^{-6} m.s^{-2}$ e para a velocidade meridional foram obtidos valores entre $-2,91.10^{-5} m.s^{-2}$ a $2,82.10^{-5} m.s^{-2}$ com valor médio de $-3,42.10^{-6} m.s^{-2}$ (Figura 19).

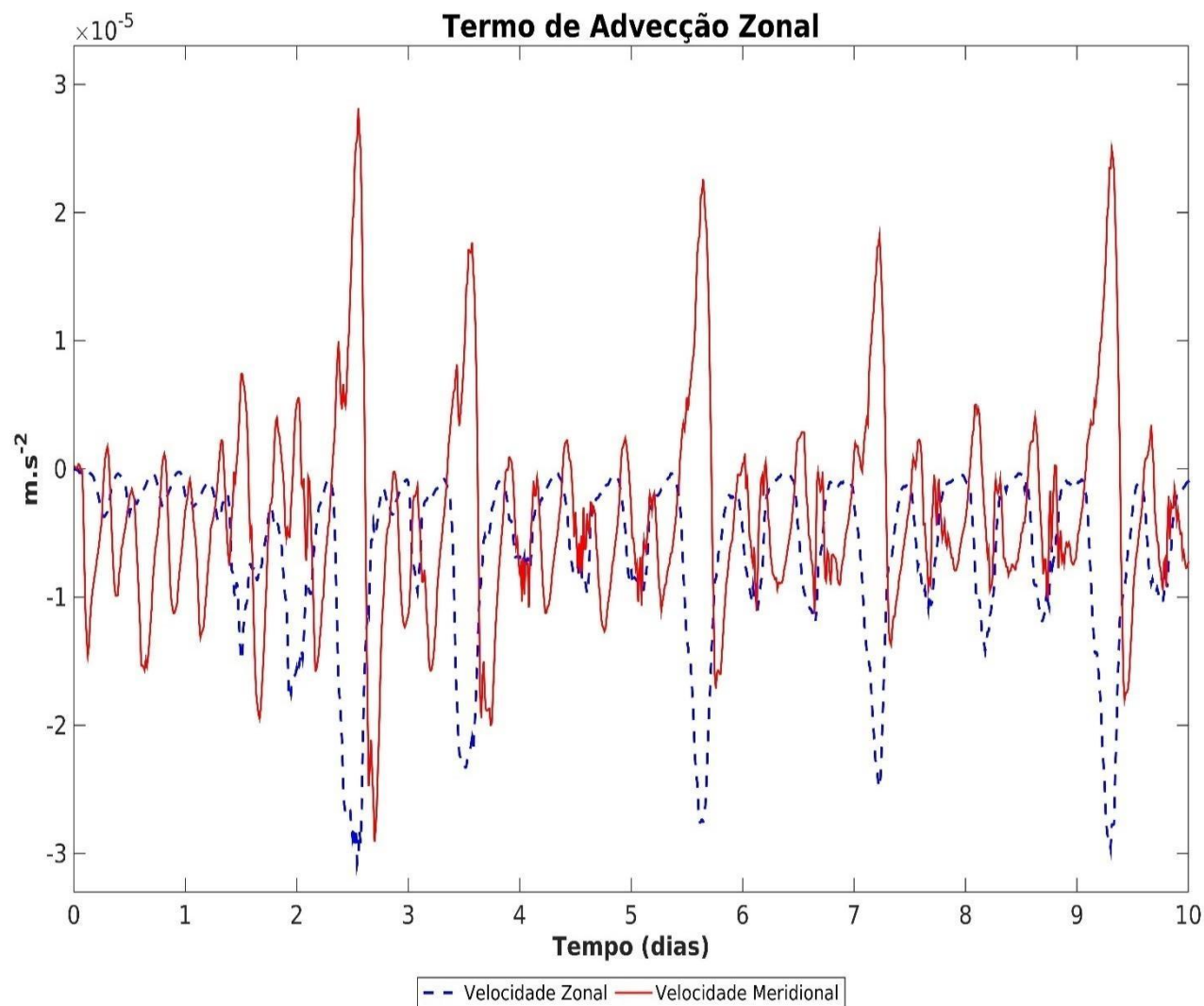


Figura 19: Aceleração advectiva média na direção zonal da solução numérica.

Na direção meridional o termo advectivo médio para a velocidade zonal obteve valores entre $-4,84.10^{-5} m.s^{-2}$ a $8,07.10^{-6} m.s^{-2}$ com valor médio de $-1,03.10^{-5} m.s^{-2}$, enquanto para a velocidade meridional foram obtidos valores entre $-2,65.10^{-5} m.s^{-2}$ a $-3,56.10^{-7} m.s^{-2}$ com valor médio de $-5,73.10^{-6} m.s^{-2}$ (Figura 20).

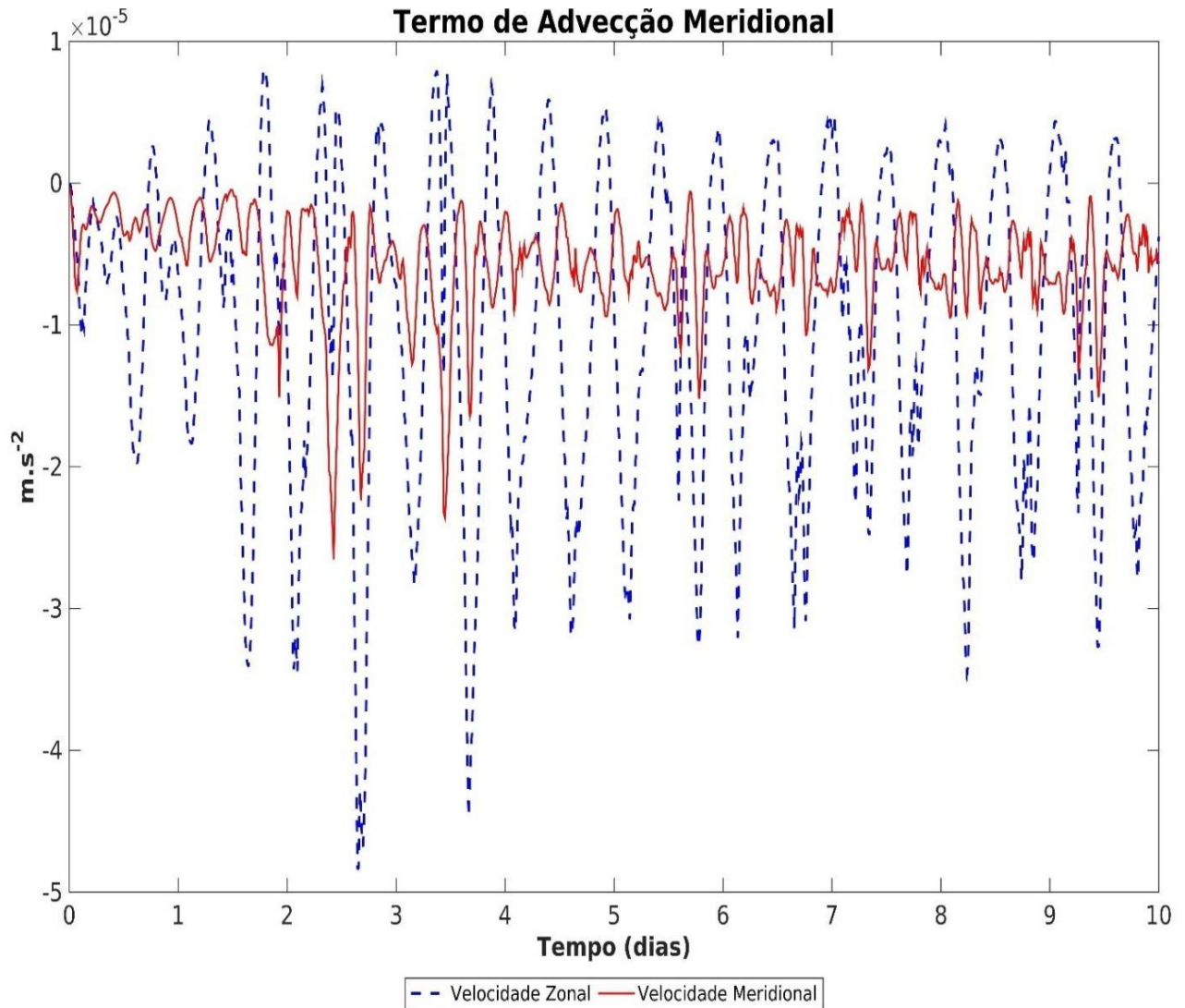


Figura 20: Aceleração advectiva média na direção meridional da solução numérica.

4.2.2.2 Força de gradiente de pressão

O termo referente à força de gradiente de pressão médio para a velocidade zonal obteve variação entre $-1,3 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-2}$ a $9,33 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$ com valor médio de $-6,02 \cdot 10^{-6} \text{ m.s}^{-2}$ enquanto na velocidade meridional a variação foi de $-2,38 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-2}$ a $-2,20 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-2}$ com valor médio de $-4,48 \cdot 10^{-6} \text{ m.s}^{-2}$ (Figura 21).

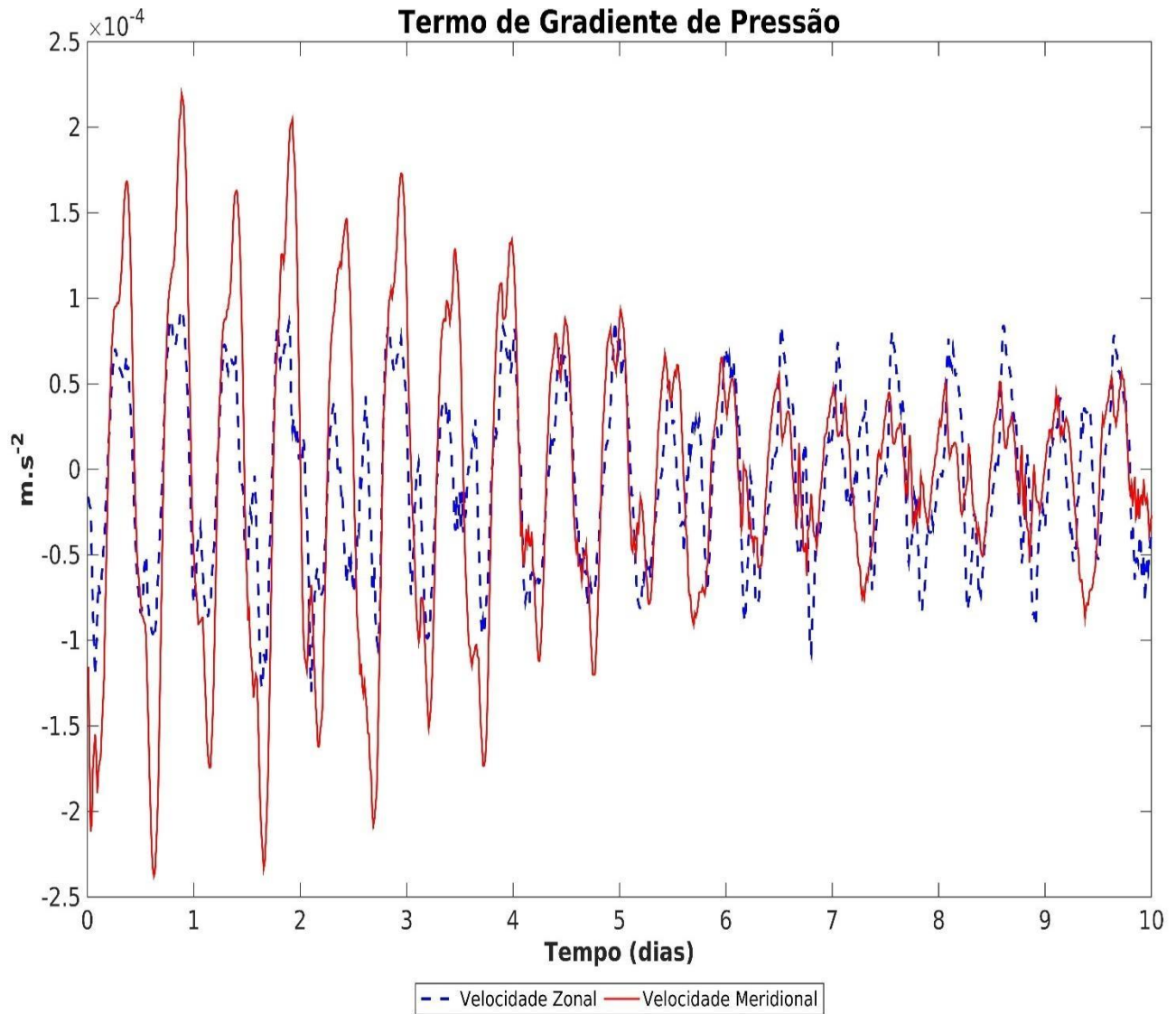


Figura 21: Termo de Gradiente de pressão médio da solução numérica.

4.2.2.3 Termo Difusivo

O termo difusivo médio na direção zonal para a velocidade zonal obteve variação entre $-1,46 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-2}$ a $1,46 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-2}$ com valor médio de $5,57 \cdot 10^{-6} \text{ m.s}^{-2}$ e na velocidade meridional a variação foi de $-1,05 \cdot 10^{-4}$ a $1,58 \cdot 10^{-4}$ com valor médio de $6,39 \cdot 10^{-6} \text{ m.s}^{-2}$ (Figura 22).

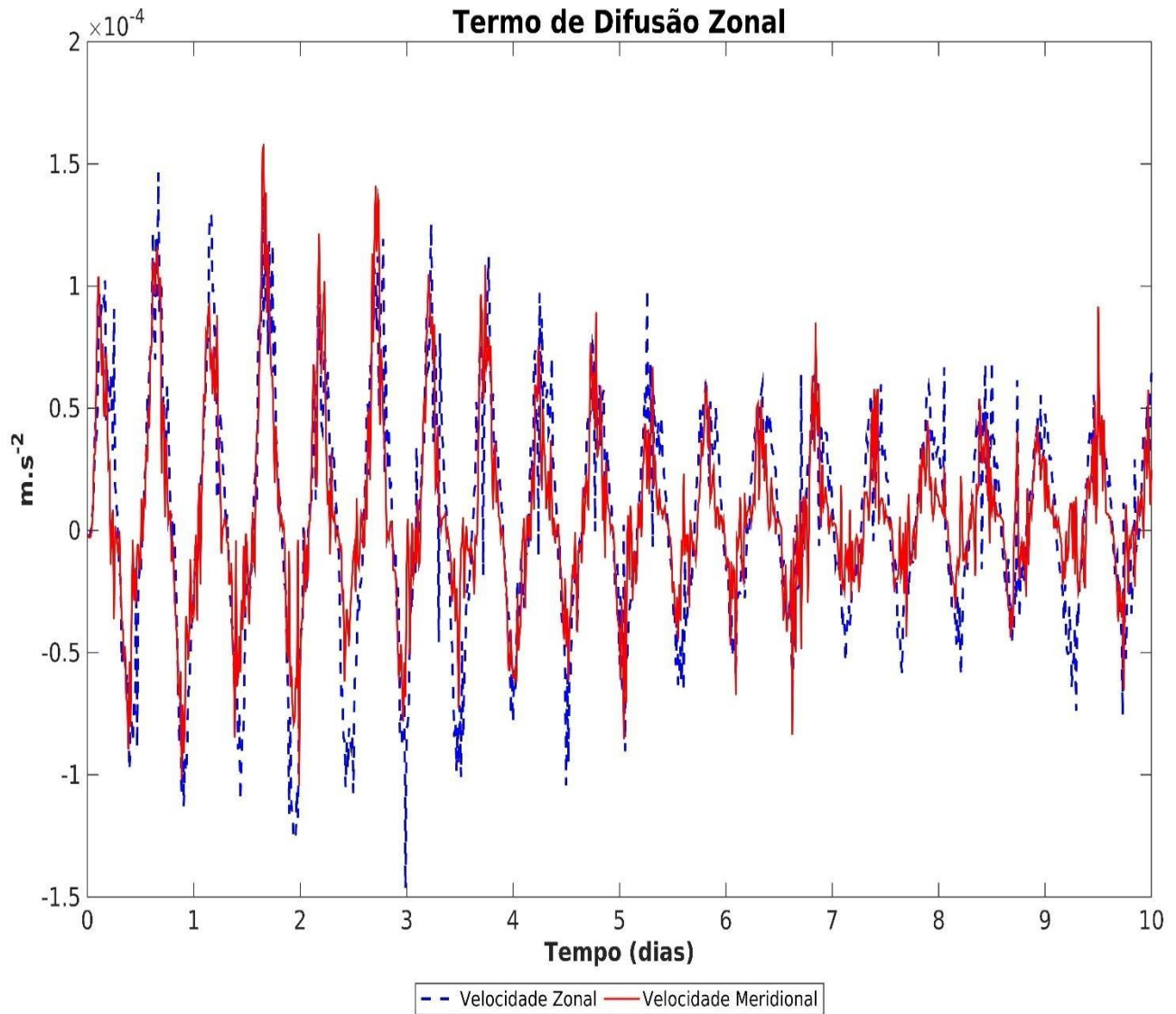


Figura 22: Termo Difusivo médio na direção zonal da solução numérica.

Para a variação na direção meridional do termo difusivo médio foram obtido valores para a velocidade zonal entre de $-1,03.10^{-4} m.s^{-2}$ a $1,11.10^{-4} m.s^{-2}$ com valor médio de $1,57.10^{-6} m.s^{-2}$, enquanto para a velocidade meridional foram obtidos valores entre $-1,98.10^{-4} m.s^{-2}$ a $2,6.10^{-4} m.s^{-2}$ com valor médio de $1,83.10^{-5} m.s^{-2}$ (Figura 23).

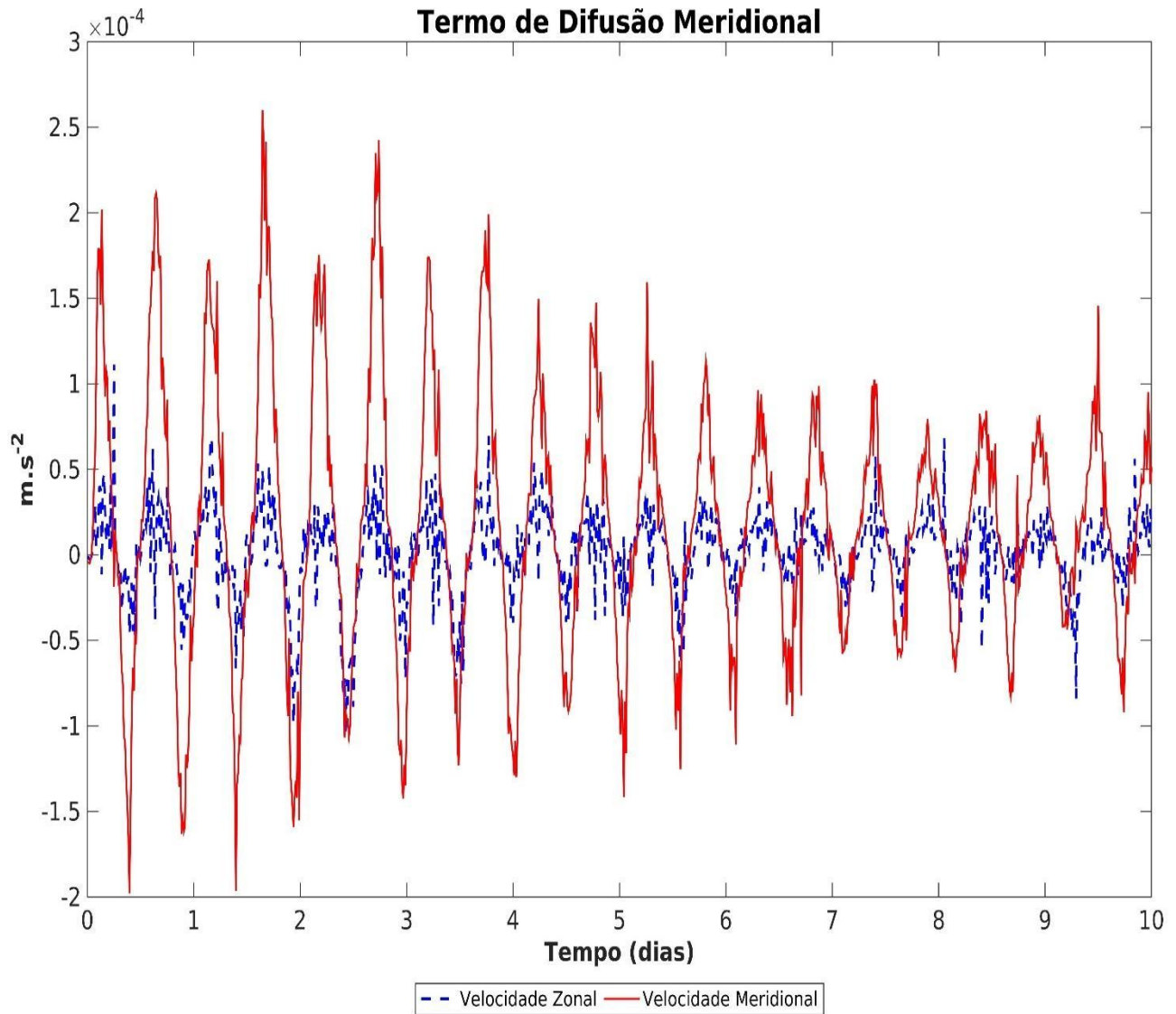


Figura 231: Termo difusivo médio na direção meridional da solução numérica.

4.2.2.4 Redução de velocidade no fundo

O termo de tensão média no fundo obteve valores na velocidade zonal entre $-4,35 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$ a $4,62 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$ com valor médio de $7,3 \cdot 10^{-6} \text{ m.s}^{-2}$ e para a velocidade meridional $-7,02 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$ a $5,71 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$ com valor médio de $-1,61 \cdot 10^{-6} \text{ m.s}^{-2}$ (Figura 24).

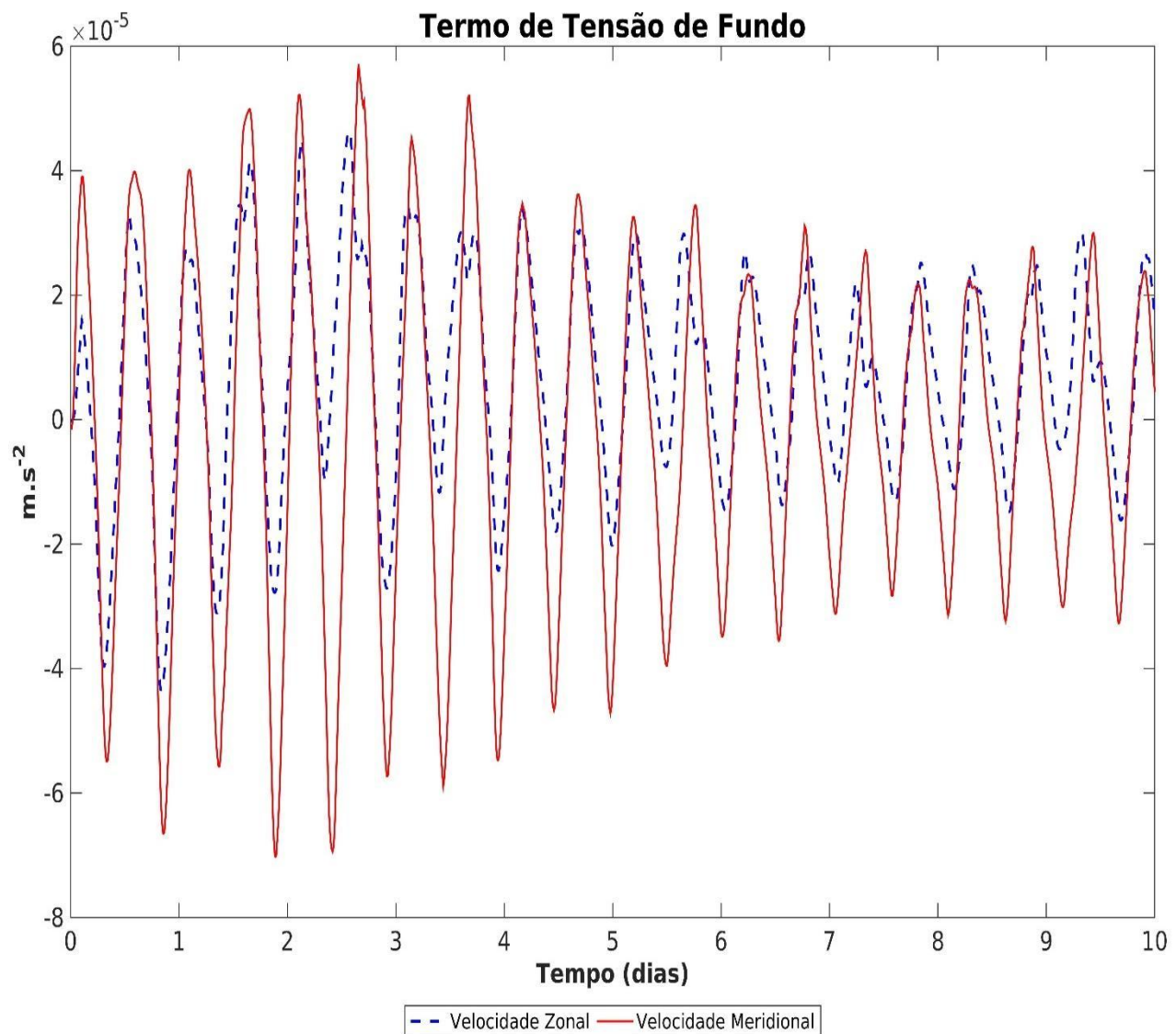


Figura 24: Termo de Tensão de fundo médio da solução numérica.

4.2.3 Distribuição do campo de velocidade e superfície livre

4.2.3.1 Domínio espacial

O campo de velocidade e superfície livre, obtidos como resultados da solução numérica das equações governantes, simulou o comportamento do fluido levando em consideração a oscilação da superfície livre (maré) e a Corrente Norte do Brasil na fronteira juntamente com a influência da descarga média do rio Mearim na fronteira sul.

A perturbação da superfície livre causada na fronteira norte levou aproximadamente 2,5 horas para chegar na região portuária, representado na figura 16. O campo de velocidade e de superfície livre modelados em todo o domínio de solução são representados nas figuras 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, totalizando 14 horas de representação temporal da hidráulica, representando o período preamar (Figura 27) e baixamar (Figura 30) na fronteira norte, onde a coloração azul representa a enchente e a vermelha a vazante tanto para o superfície livre quanto para o campo de velocidade.

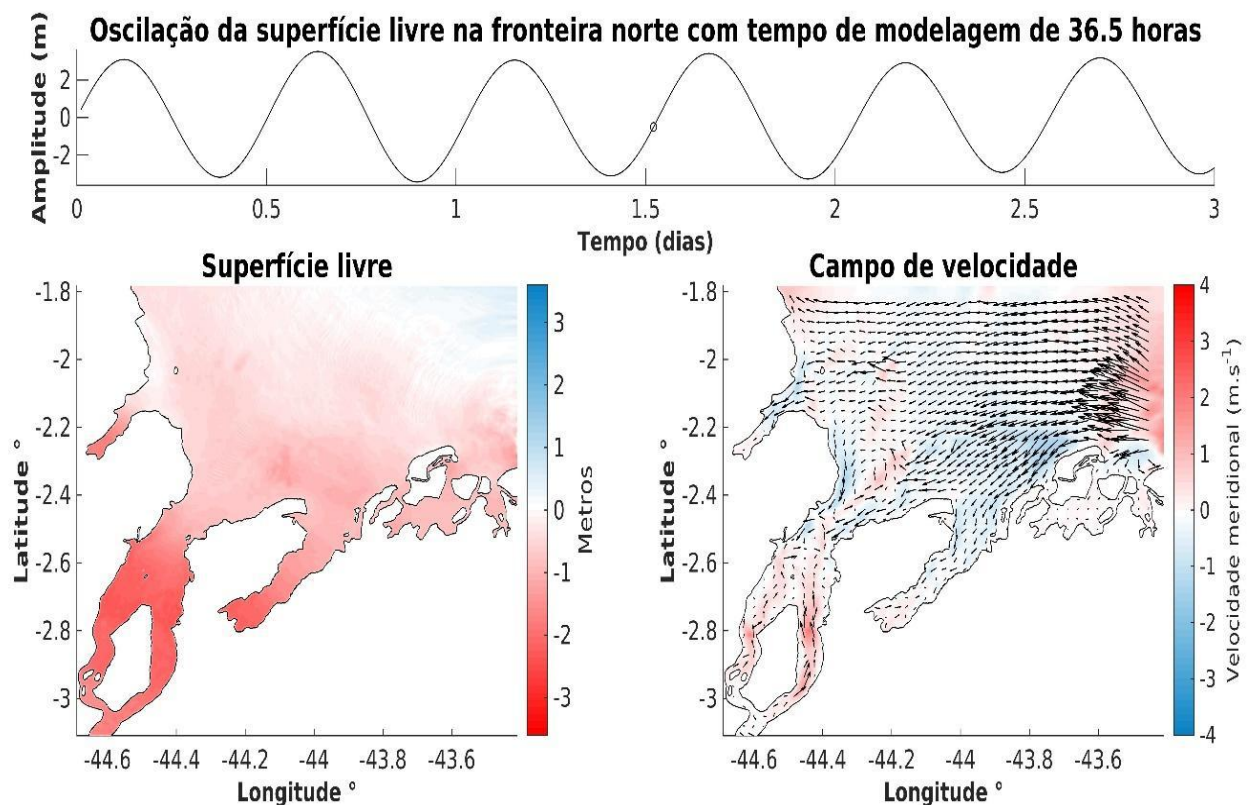


Figura 25: Superfície livre e campo de velocidade no domínio de solução com 36,5 horas modeladas.

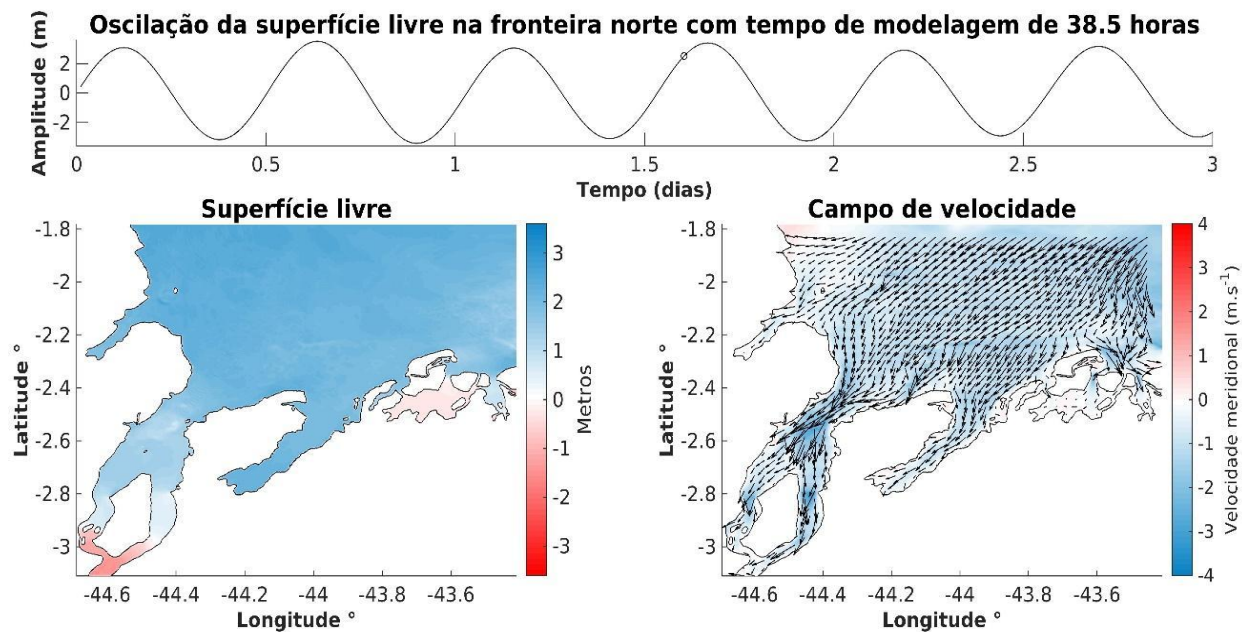


Figura 26: Superfície livre e campo de velocidade no domínio de solução com 38,5 horas modeladas.

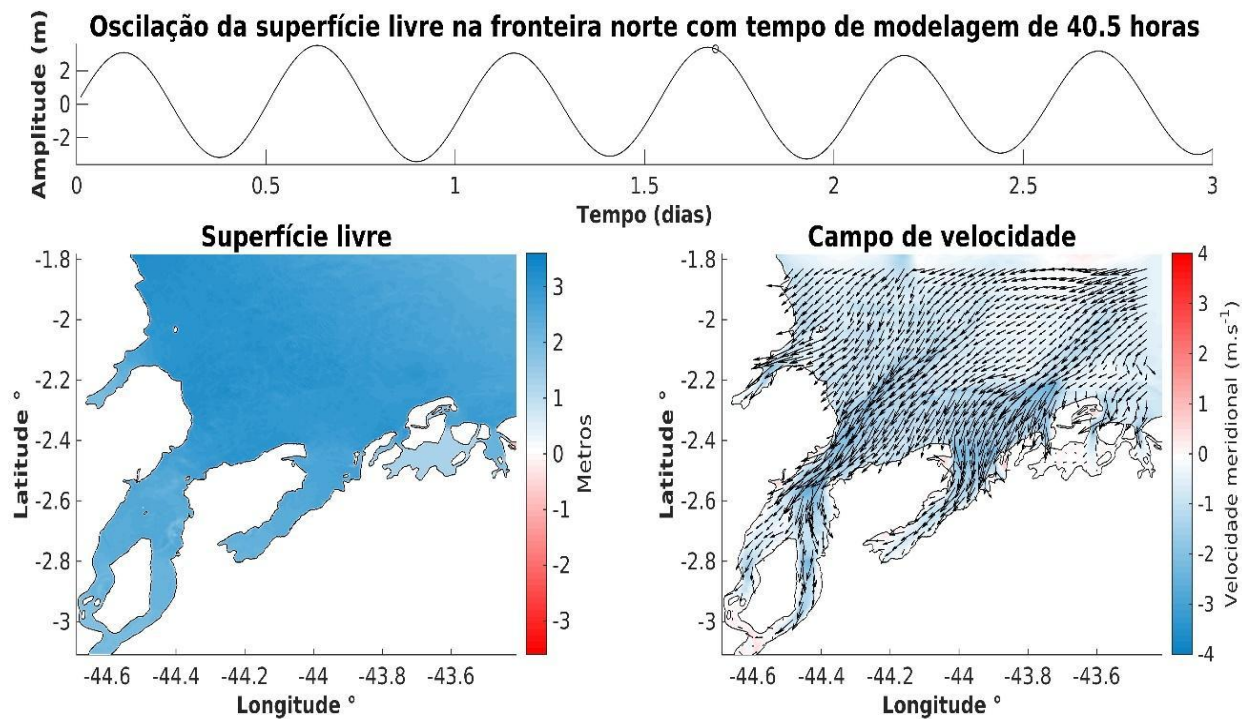


Figura 27: Superfície livre e campo de velocidade no domínio de solução com 40,5 horas modeladas.

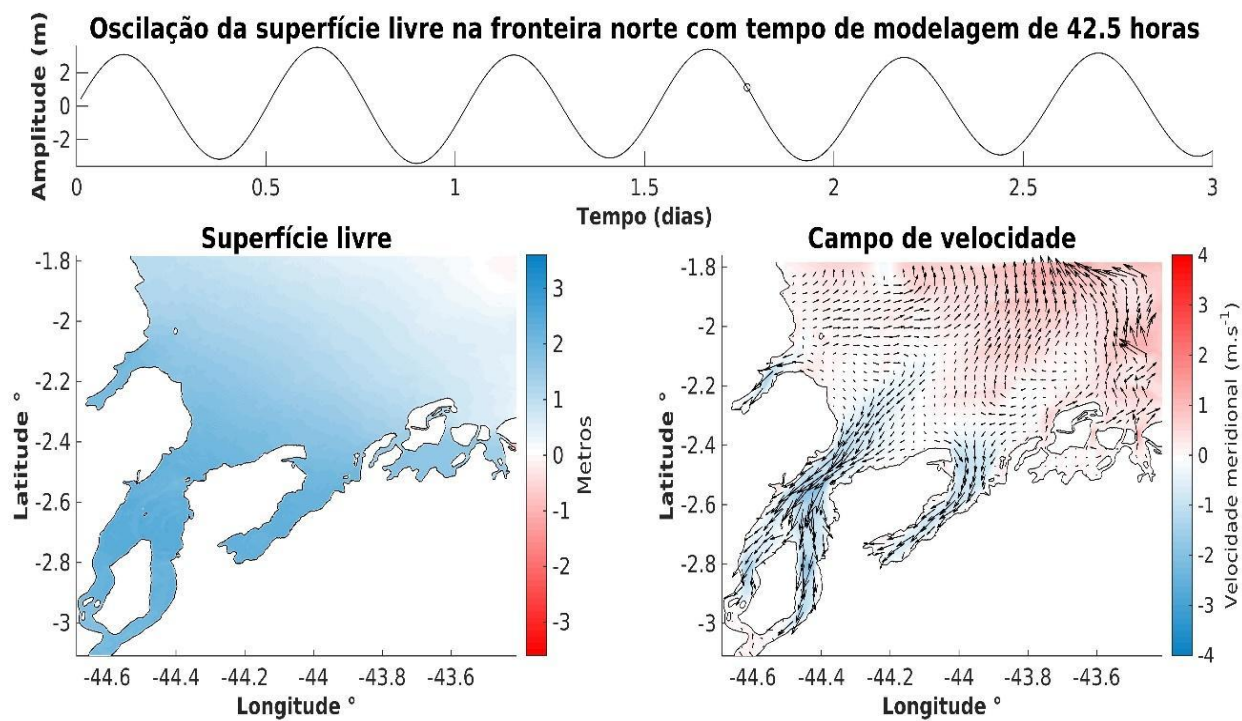


Figura 28: Superfície livre e campo de velocidade no domínio de solução com 42,5 horas modeladas.

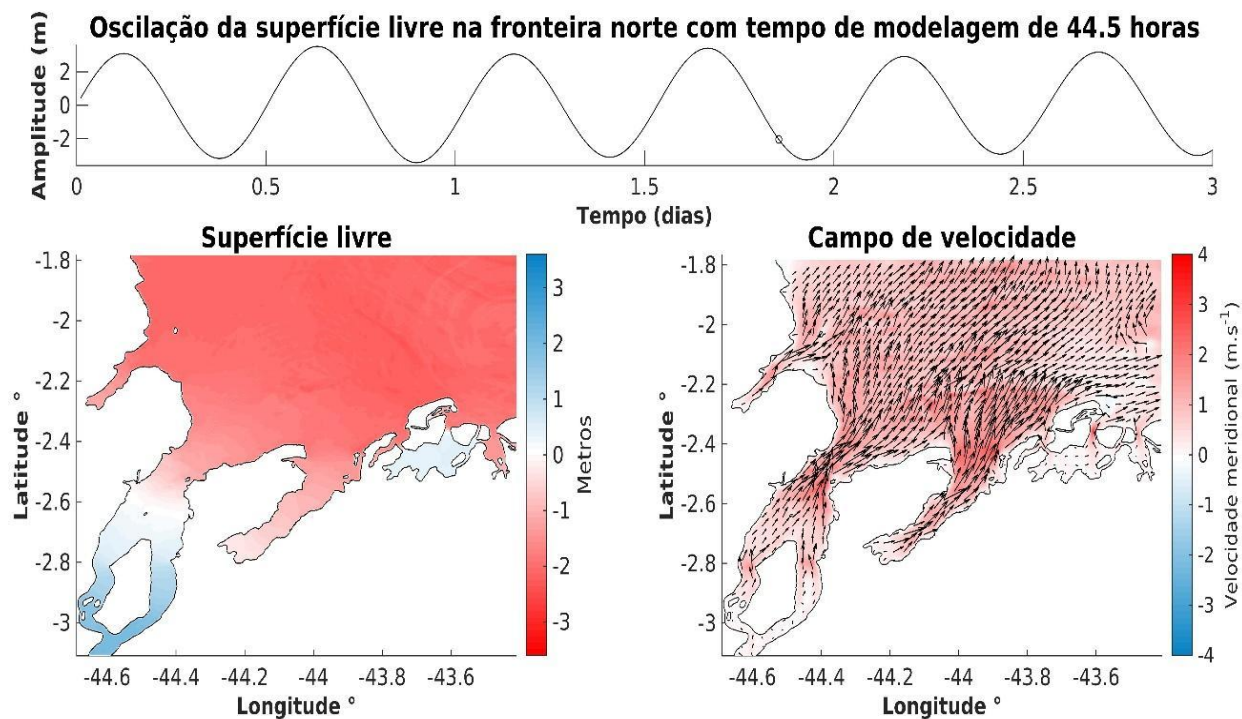


Figura 29: Superfície livre e campo de velocidade no domínio de solução com 44,5 horas modeladas.

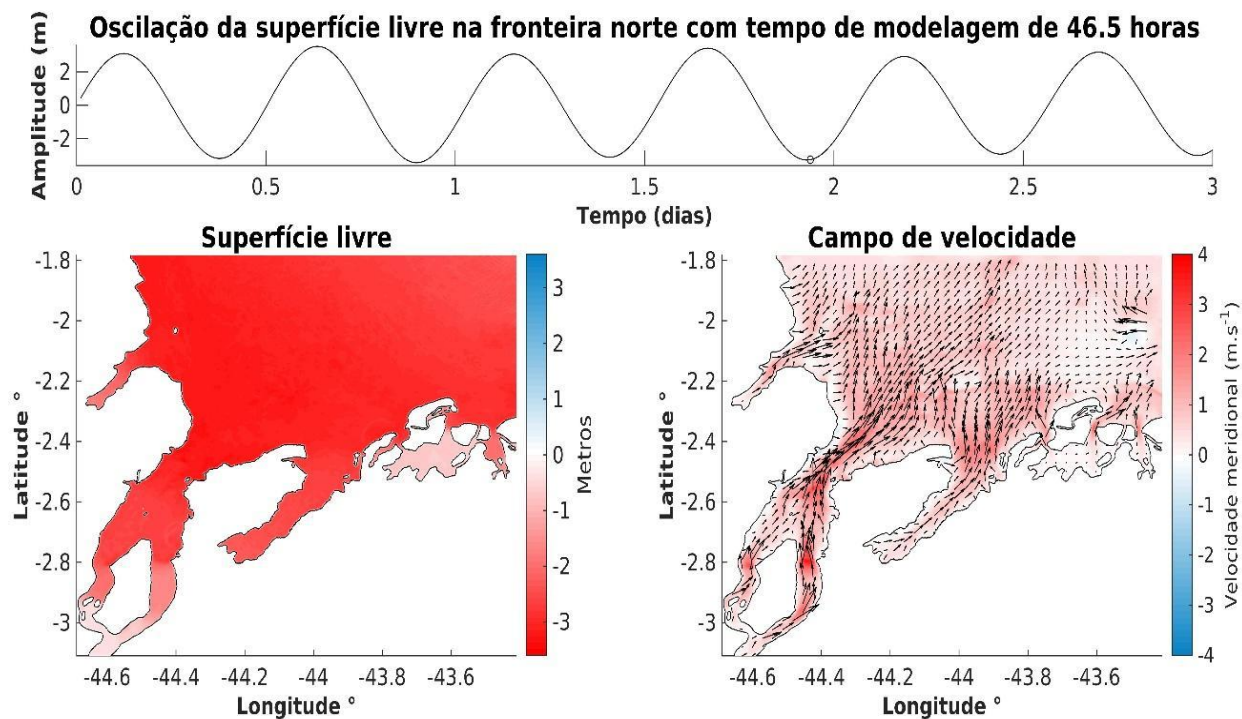


Figura 30: Superfície livre e campo de velocidade no domínio de solução com 46,5 horas modeladas.

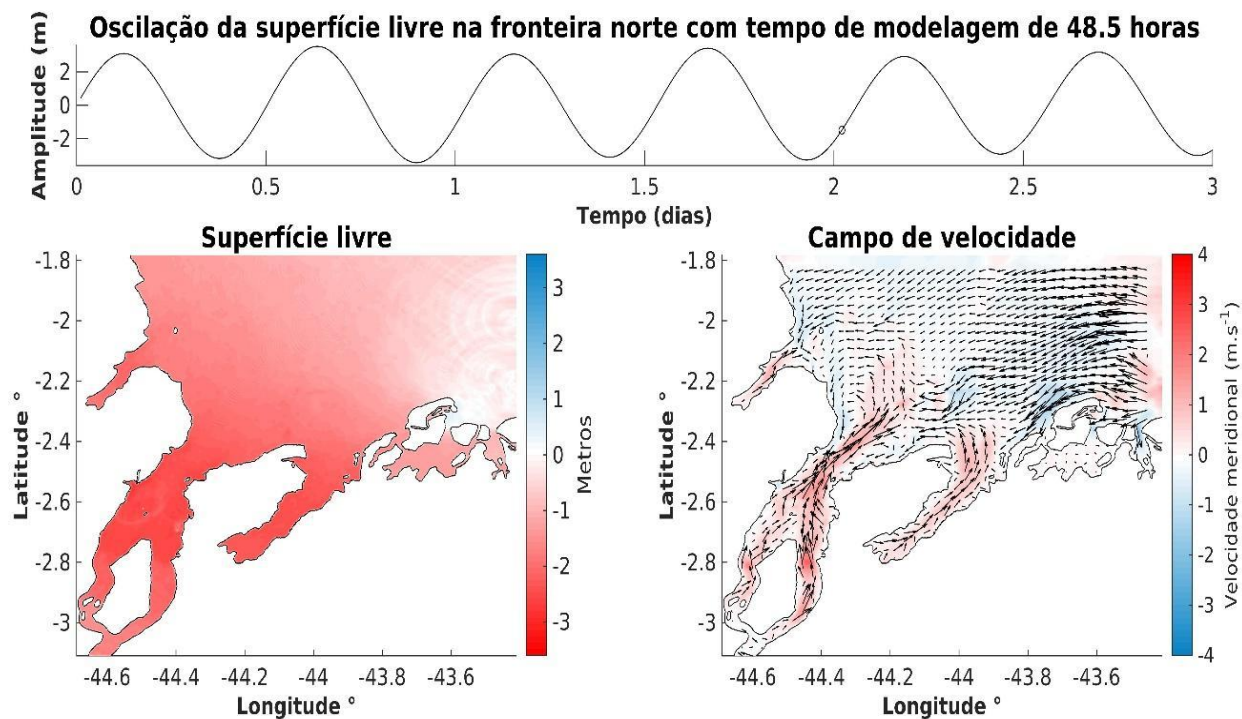


Figura 31: Superfície livre e campo de velocidade no domínio de solução com 48,5 horas modeladas.

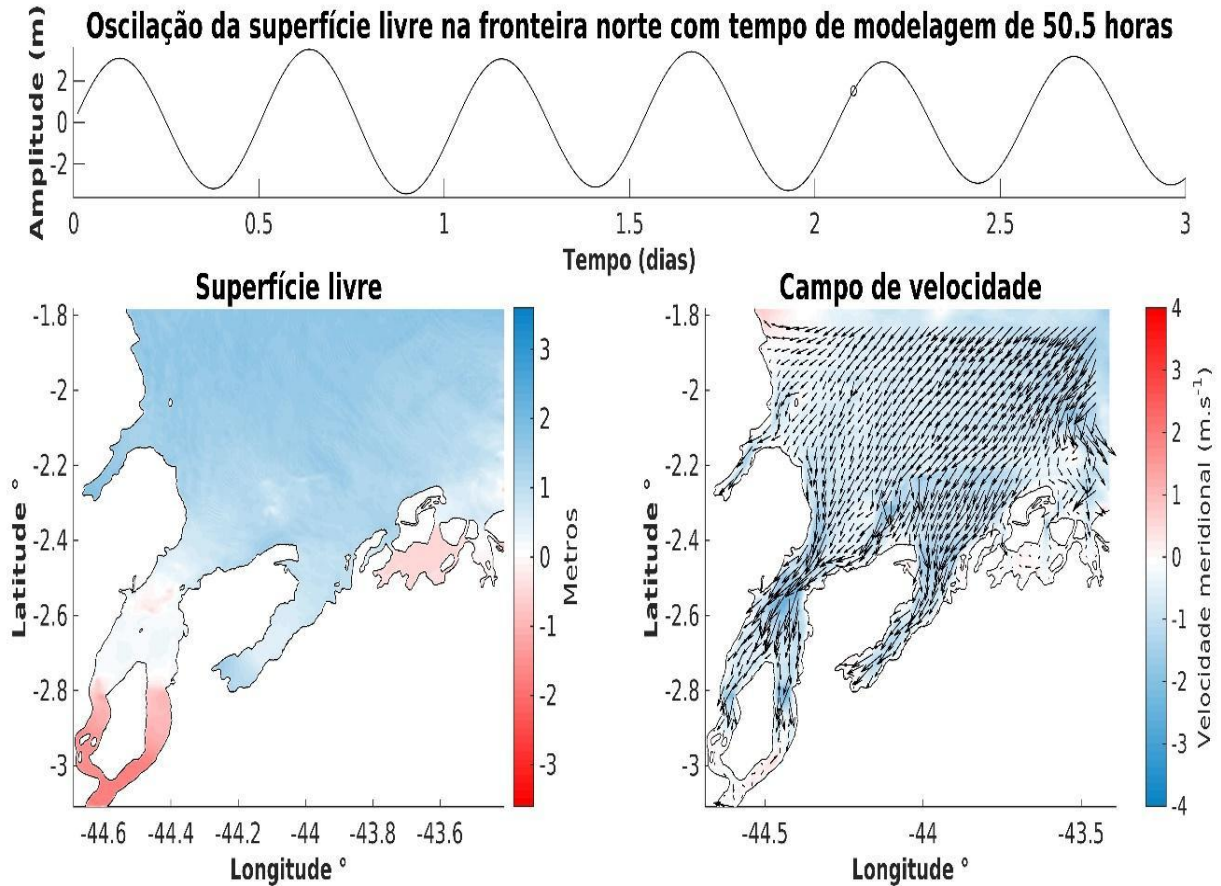


Figura 32: Superfície livre e campo de velocidade no domínio de solução com 50,5 horas modeladas.

4.2.3.2 Complexo Estuarino de São Marcos

No domínio espacial para o CESM no mesmo período representado nas figuras do domínio espacial completo, foi observado a presença de ondas de gravidade formadas tanto pela propagação da maré quanto por reflexão e a refração causada pela variação de profundidade e as bordas do continente (Figuras 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39,40), onde a coloração azul representa a enchente e a vermelha a vazante tanto para a superfície livre quanto para o campo de velocidade.

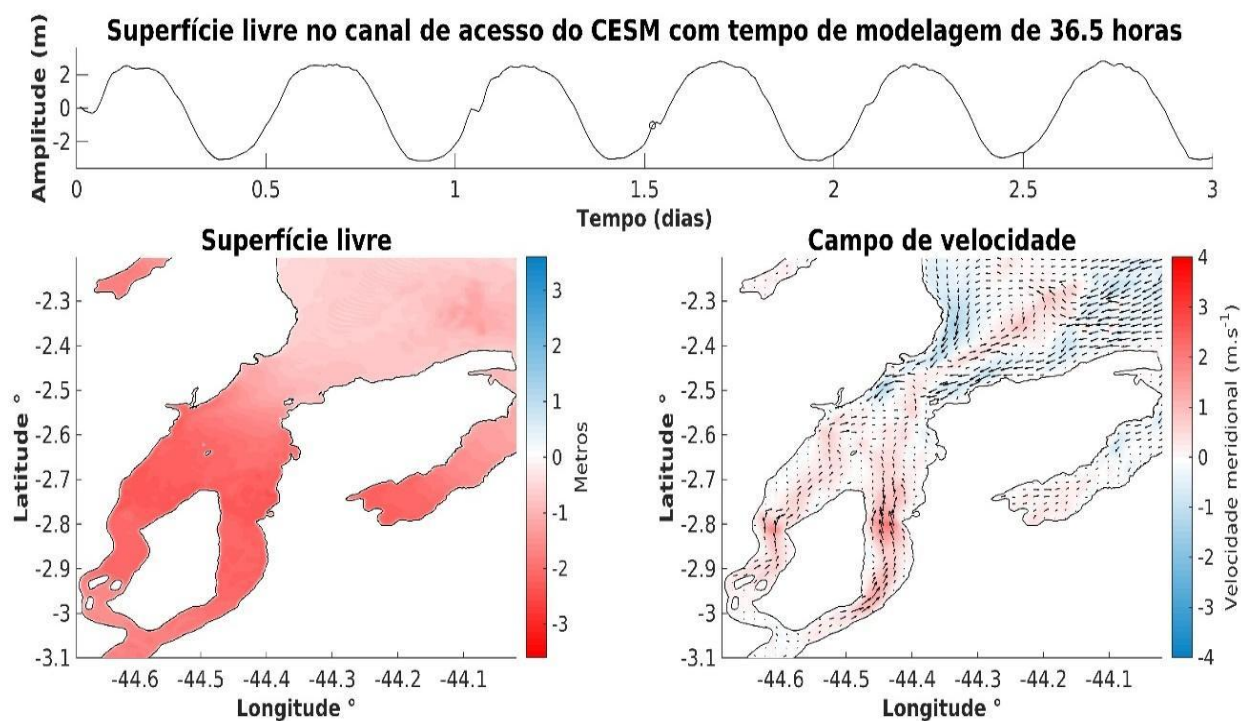


Figura 332: Superfície livre e campo de velocidade no CESM com 36,5 horas modeladas.

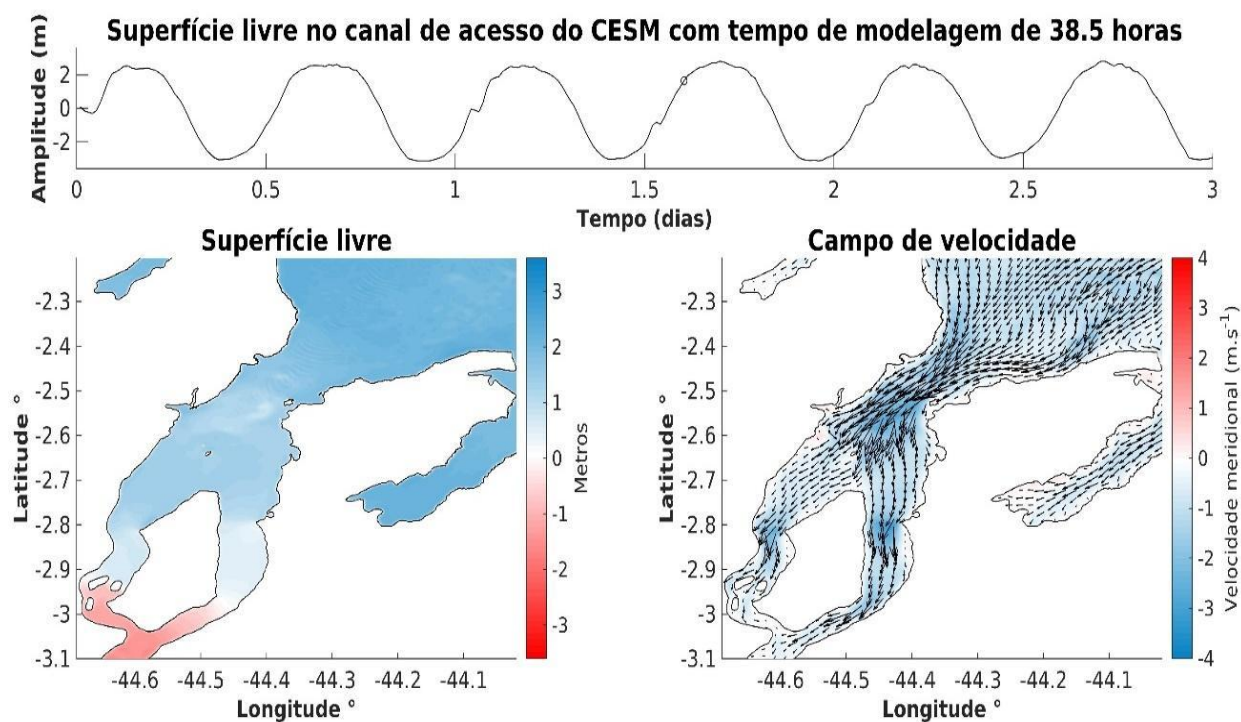


Figura 34: Superfície livre e campo de velocidade no CESM com 38,5 horas modeladas.

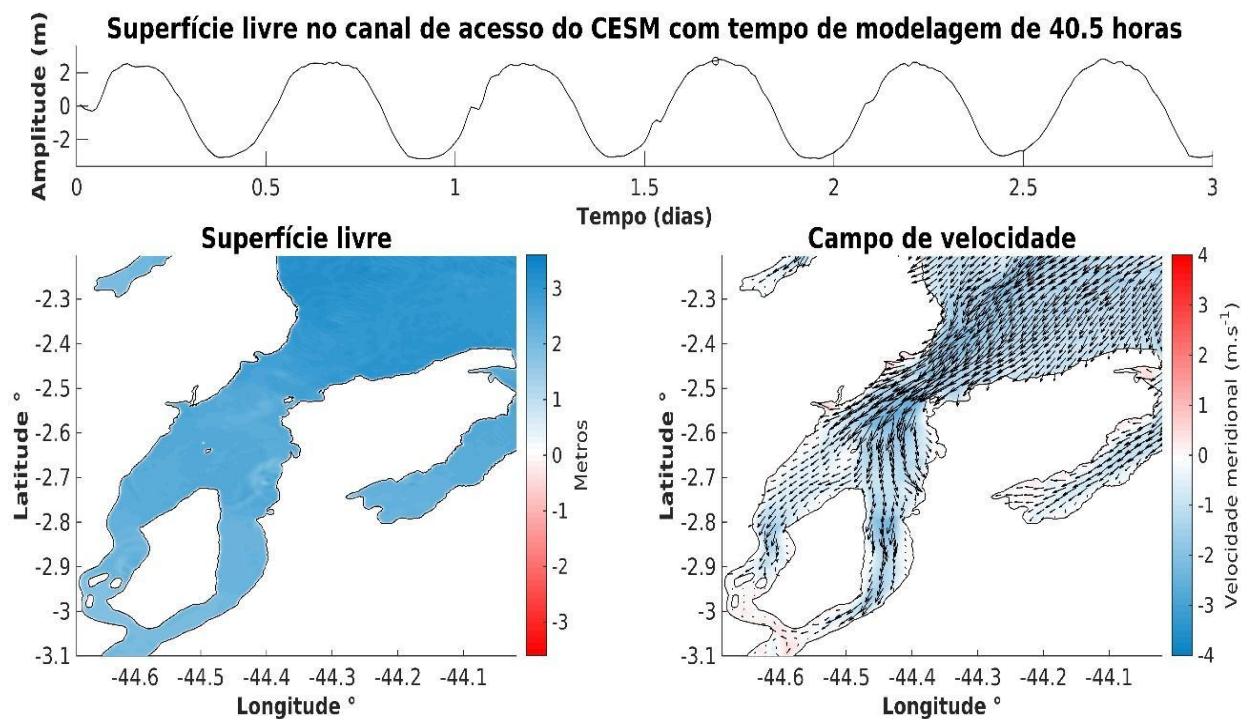


Figura 35: Superfície livre e campo de velocidade no CESM com 40,5 horas modeladas.

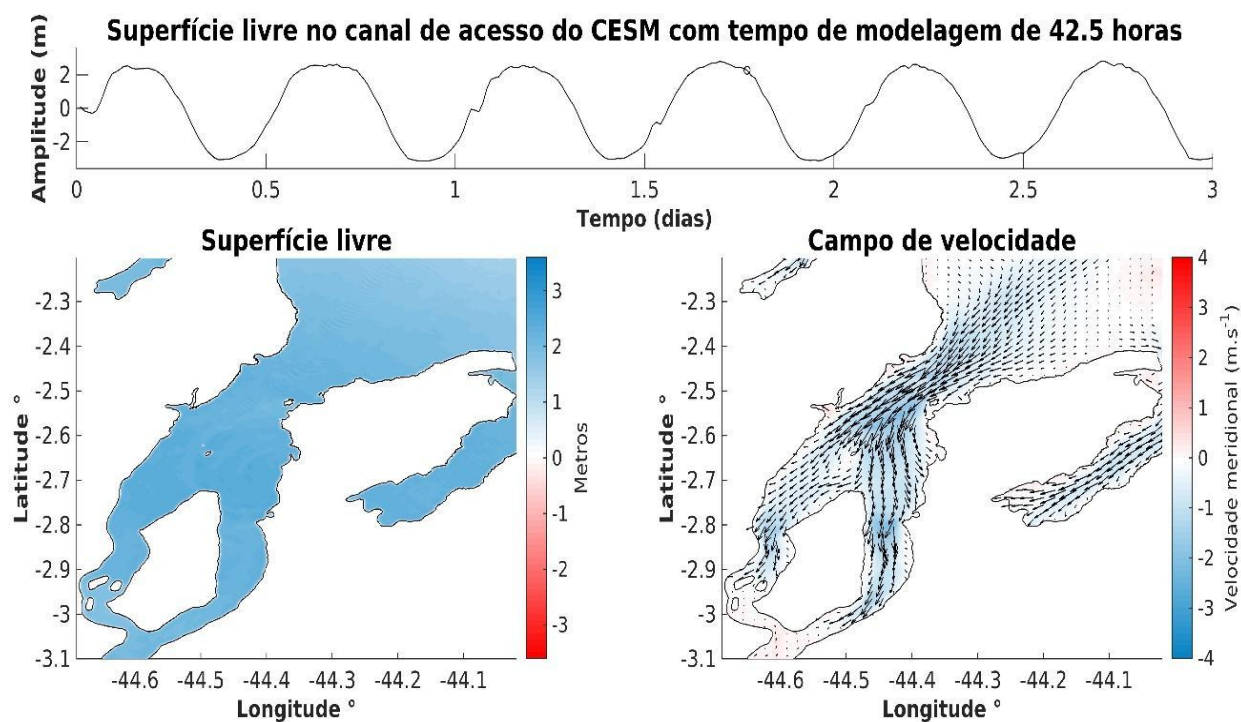


Figura 363: Superfície livre e campo de velocidade no CESM com 42,5 horas modeladas

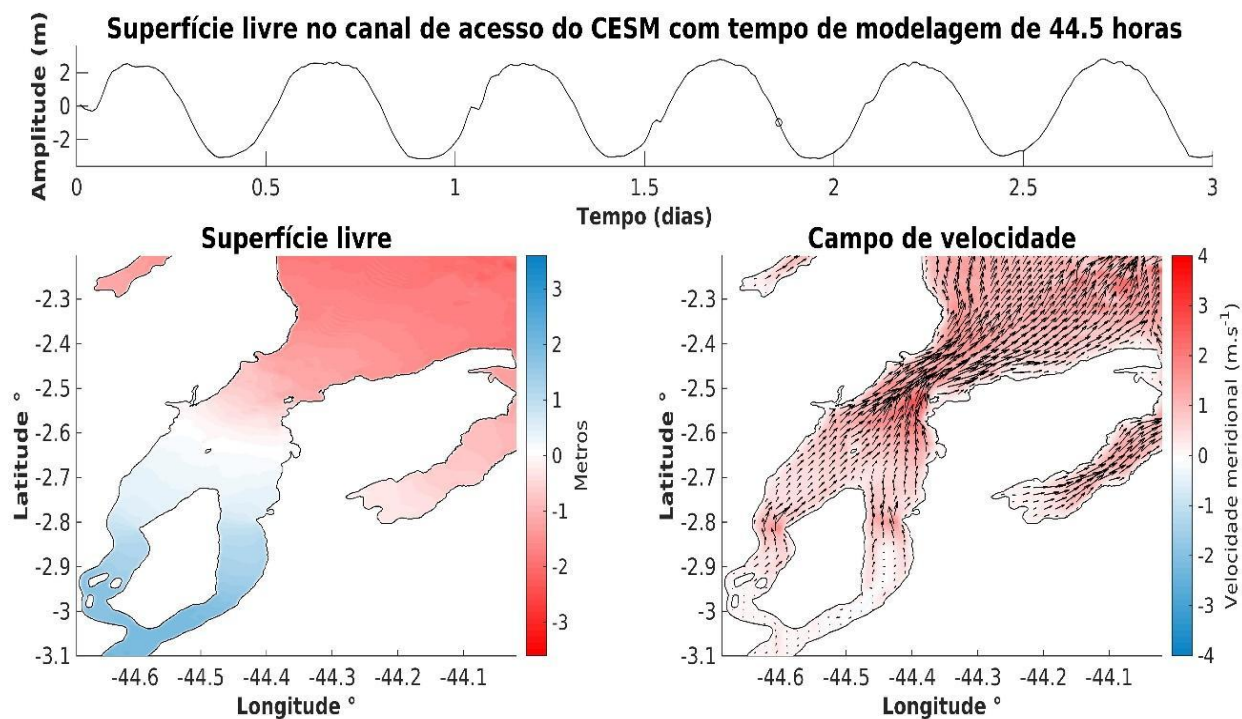


Figura 37: Superfície livre e campo de velocidade no CESM com 44,5 horas modeladas.

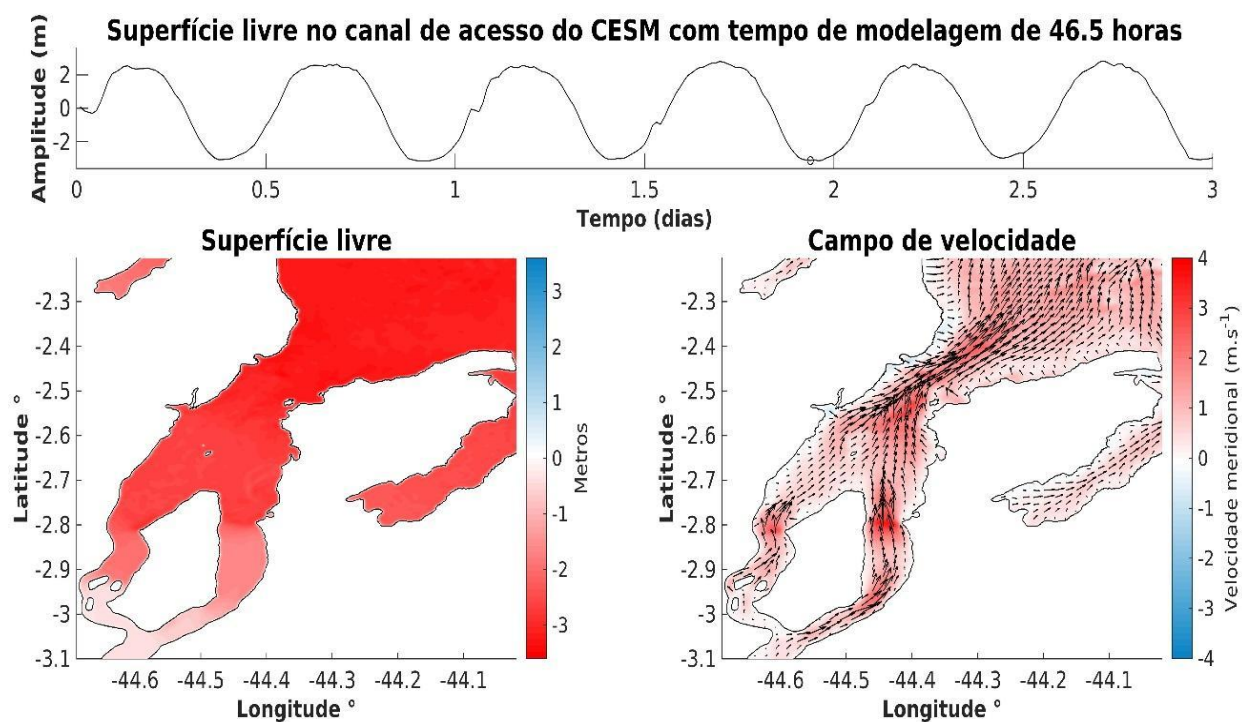


Figura 38: Superfície livre e campo de velocidade no CESM com 46,5 horas modeladas.

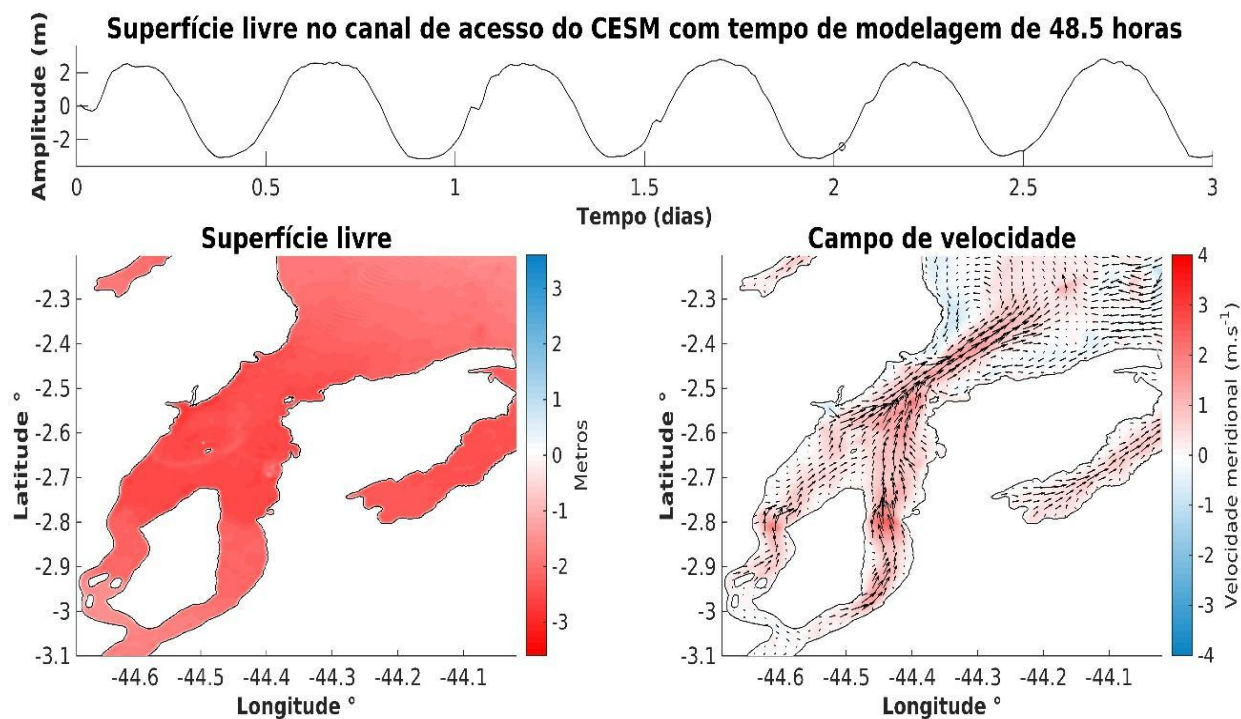


Figura 39: Superfície livre e campo de velocidade no CESM com 48,5 horas modeladas.

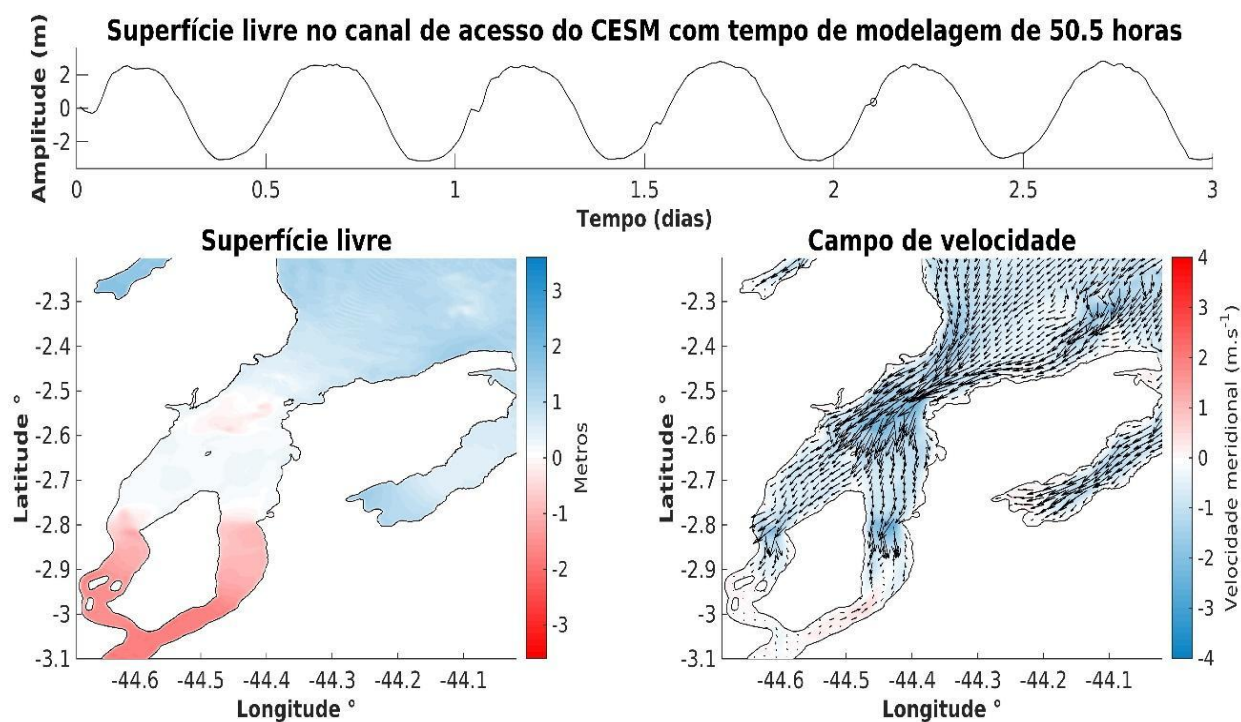


Figura 404: Superfície livre e campo de velocidade no CESM com 50,5 horas modeladas.

No Complexo Estuarino de São Marcos podemos sugerir, com base na simulação hidráulica, a presença de inversão periódica de corrente nas bordas do CESM após aproximadamente 1,5 horas após a baixamar (figura 33 e 39) e preamar (figura 35) levando como referência a oscilação da superfície livre no canal de acesso do CESM. A inversão do campo de correntes nas bordas do CESM está relacionada a conservação de vorticidade (POND&PICKARD, 1983; HOLTON, 2004), formando um giro no sentido anti-horário na região próxima à região portuária após a preamar (Figura 35), na baixamar houve a formação de uma célula de circulação no sentido anti-horário na borda superior oeste, enquanto na borda superior leste houve a formação de uma célula de circulação no sentido horário (figura 33 e 39). Essas células de circulação são causadas pela variação horizontal de velocidade onde há variação de profundidade, causando redução de velocidade próximo à costa. A relação de intensidade de corrente e profundidade é inversamente proporcional na equação de conservação de vorticidade potencial composta pelo somatório entre a vorticidade planetária e a vorticidade relativa. No CESM a vorticidade planetária é constante e pequena, devido ao parâmetro de Coriolis ser da ordem de grandeza de 10^{-6} , predominando desta forma a vorticidade relativa causada pelo deslocamento do fluido em regiões com variações de profundidade. A conservação de vorticidade potencial pode resultar nas formações locais de empilhamento ou rebaixamento do nível da água dependendo do sentido do giro (HOLTON, 2004) acarretando em formação de ondas de gravidade (LOTT *et al.*, 2010; VIÚDEZ, 2012).

4.2.3.3 Canal de Acesso do Complexo Estuarino de São Marcos

Nos dez dias de simulação no canal de acesso do CESM a variação da superfície livre teve variação em torno de -3,1355 m a 2,7353 m com um valor médio de -0,0052 m enquanto na direção zonal da velocidade obteve valores entre -2,0011 $m.s^{-1}$ a 1,7951 $m.s^{-1}$ com valor médio de -0,1493 $m.s^{-1}$, e na direção meridional houve variação entre -1,6848 $m.s^{-1}$ a 2,2964 $m.s^{-1}$ com valor médio de 0,1057 $m.s^{-1}$ (Figura 40). A intensidade de corrente, vetor composto pela soma vetorial da velocidade zonal e da meridional, simulada para o canal de acesso do CESM obteve

variação em torno de $-2,6159 \text{ m.s}^{-1}$ a $2,8807 \text{ m.s}^{-1}$ com valor médio de $-0,0202 \text{ m.s}^{-1}$ com uma direção resultante baseado na média de velocidade meridional e zonal de aproximadamente 35° trigonométricos, cerca de 55° geográfico.

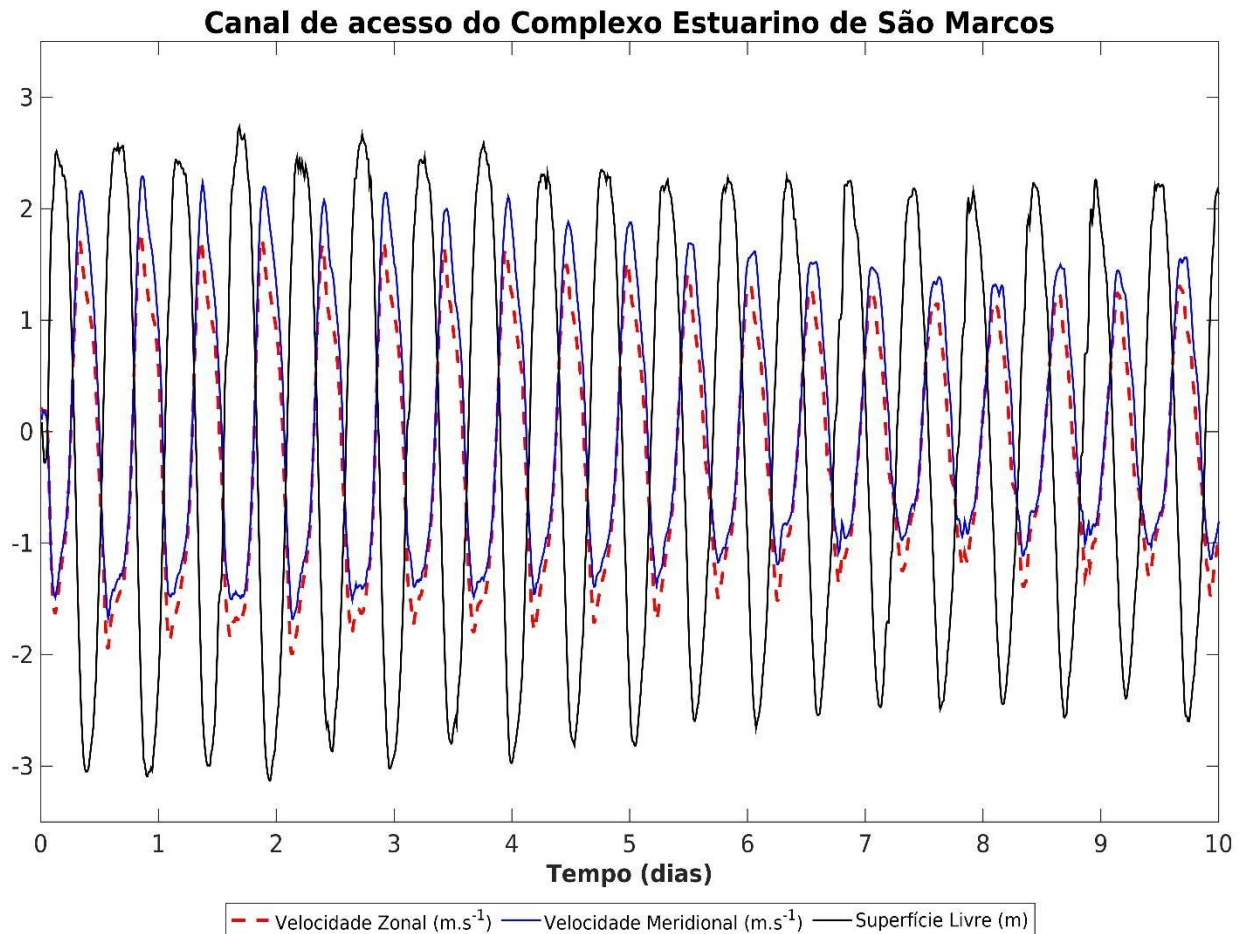


Figura 5: Variação da superfície livre e das velocidades no CESM.

4.2.3.4 Região Portuária

Nos dez dias de simulação na região portuária a variação da superfície livre teve variação em torno de $-2,97 \text{ m}$ a $2,5243 \text{ m}$ com um valor médio de $-0,0023 \text{ m}$ enquanto na direção zonal da velocidade foi simulado valores entre $-0,2717 \text{ m.s}^{-1}$ a $0,3432 \text{ m.s}^{-1}$ com um valor médio de $0,0370 \text{ m.s}^{-1}$ e na direção meridional houve variação entre $-0,8615 \text{ m.s}^{-1}$ a $1,1797 \text{ m.s}^{-1}$ com um valor médio de $0,1179 \text{ m.s}^{-1}$ (Figura 41). A intensidade de corrente simulada para a região portuária obteve variação em torno

de $-0,8861 \text{ m.s}^{-1}$ a $1,1805 \text{ m.s}^{-1}$ com um valor médio de $0,1232 \text{ m.s}^{-1}$ com uma direção baseada nos valores médios de velocidades de aproximadamente 75° trigonométricos, cerca de 15° geográfico.

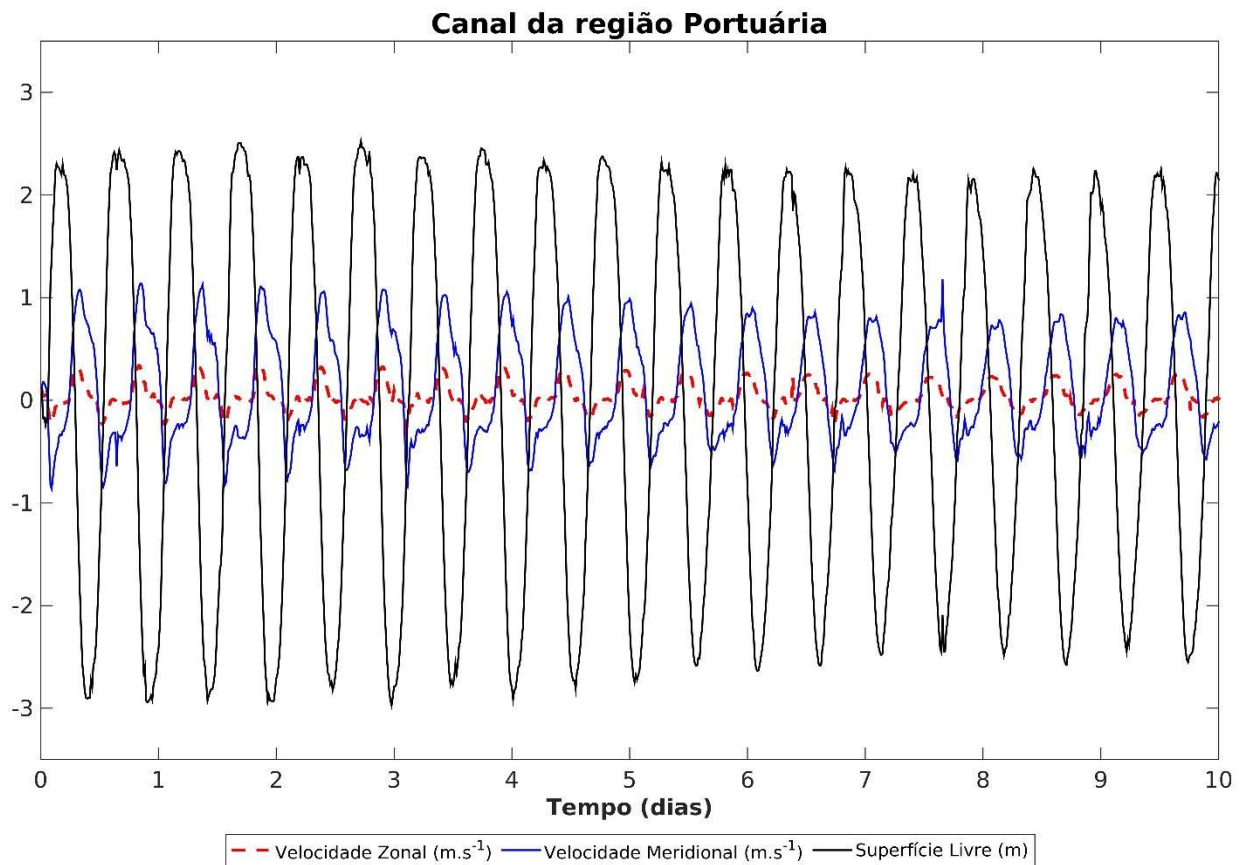


Figura 6: Variação da superfície livre e das velocidades na região portuária

4.2.3.5 Canal de Acesso do Boqueirão

Nos dez dias de simulação no canal de acesso do Boqueirão a variação de superfície livre teve variação em torno de 2,6137 m a 2,2733 m com um valor médio de 0,0002 m enquanto na direção zonal da velocidade foi simulado valores entre $-0,3837 \text{ m.s}^{-1}$ a $0,3108 \text{ m.s}^{-1}$ com valor médio de $-0,0200 \text{ m.s}^{-1}$ e na direção meridional houve variação em torno de $-0,2832 \text{ m.s}^{-1}$ a $0,2200 \text{ m.s}^{-1}$ com valor médio de $-0,0071 \text{ m.s}^{-1}$ (Figura 42). A intensidade de corrente simulada para o canal de acesso do Boqueirão

obteve variação em torno de -0,4769 a 0,3808 com valor médio de $-0,0109 \text{ m.s}^{-1}$ com uma direção baseada nos valores médios das componentes de velocidade de aproximadamente 19° trigonométricos, cerca de 71° geográfico.

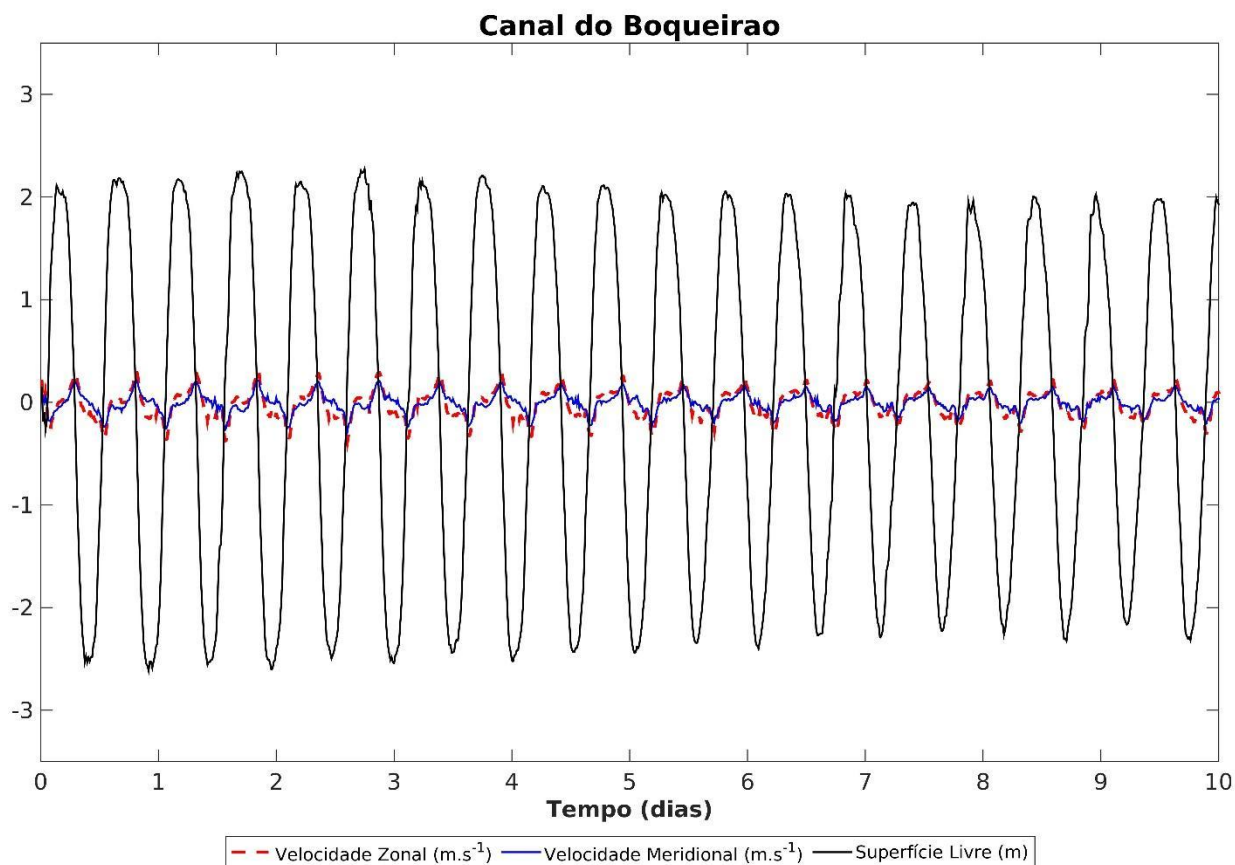


Figura 7: Variação da superfície livre e das velocidades no canal de acesso do Boqueirão.

4.2.4 Energia Cinética

A energia cinética é a energia envolvida no movimento e é representada matematicamente pela equação $E_c = \frac{1}{2} m v^2$, onde m representa a massa (kg) e v a velocidade. A média da energia ao longo do domínio espacial foi calculada utilizando a velocidade média no domínio espacial com a massa calculada através do produto da densidade média da água do mar (1023 kg/m^3), e o volume total médio de água no domínio espacial (Figura 33). A energia cinética em todo o domínio espacial utilizando

a velocidade apresentou valores entre $7,027 \cdot 10^{15}$ a $6,697 \cdot 10^{16}$ com valor médio de $2,4163 \cdot 10^{16} \text{ kgm}^2 \text{ s}^{-2}$ excluindo as primeiras 7,5 horas.

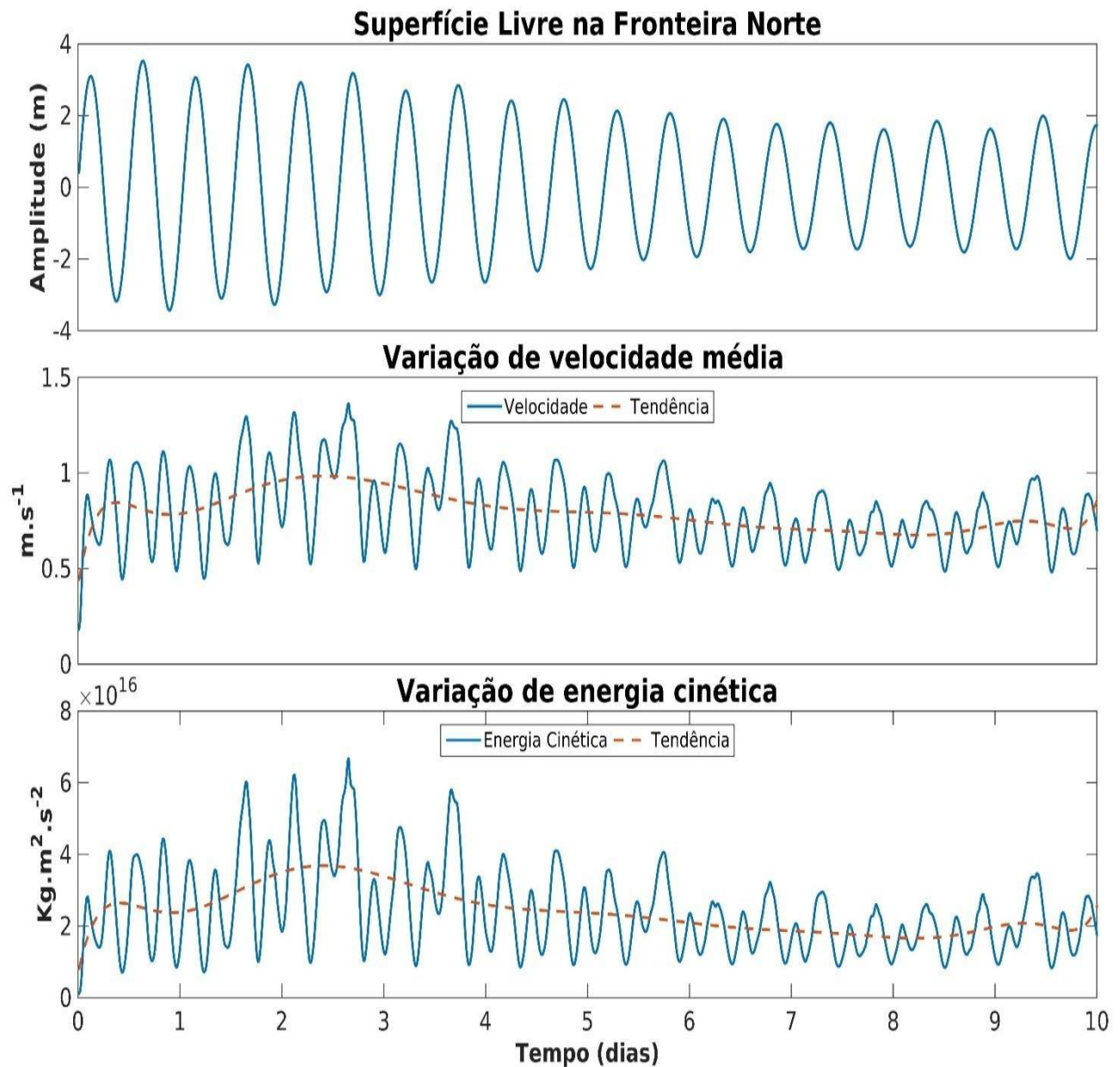


Figura 8: Energia cinética média no domínio espacial do modelo computacional.

De acordo com a figura 43, o período com a maior energia no domínio espacial é entre o início da solução numérica até o 4º dia modelado, representando o período de mudança de maré de sizígia para quadratura (Figura 07), marcando o período com as maiores oscilações. Levando em consideração a tendência da velocidade média e a

variação da superfície livre a solução numérica tornou-se mais estável entre 6,1416 a 8,8464 horas modeladas, podendo ser definido como o tempo de aquecimento (*spin-up*) da solução numérica.

5 CONCLUSÃO

As soluções numéricas utilizadas nas equações governantes apresentaram uma excelente representação da variação temporal de elevação de superfície livre na região portuária do Complexo Estuarino de São Marcos durante o período estudado, atestando a capacidade da solução numérica do modelo computacional de representar a hidráulica na região, podendo se destacar:

- O campo de velocidade é regido, principalmente, pela oscilação da superfície livre provocado pela mare.
- A reprodução da inversão no campo de velocidade nas bordas causada pela conservação de vorticidade potencial.
- A capacidade do modelo computacional de descrever a formação de ondas de gravidade provocadas pela oscilação de sinal de maré e vorticidade potencial.

O modelo computacional desenvolvido nessa dissertação pode ser utilizado como base da hidráulica para o entendimento do transporte de constituintes passivos ao escoamento do fluido para o CESM não levando em consideração a ação do vento no deslocamento do fluido, sendo uma ferramenta para previsão e testes de cenários para possíveis variações no domínio espacial, nas condições de contorno e iniciais.

REFERÊNCIAS

- ASSELIN, Richard. Frequency Filter for Time Integrations. **Monthly Weather Review**, v. 100, n. 6, p. 487–490, 1972.
- BENEVIDES, D. C. A.; DIAS, F. J. S.; ALFREDINI, P. **Análise do padrão de correntes do estuário do rio Itajaí-Açú nas proximidades do canal de acesso à região portuária durante o inverno de 2008**. In: Simpósio Brasileiro de Oceanografia, V, 2011, São Paulo. *Anais*. São Paulo.
- BERKHOFF, J.C.W.; BOOY, N.; RADDER, A.C. Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves. **Coastal Engineering**, v. 6, n. 3, p. 255–279, 1982.
- BLUMBERG, Alan F.; MELLOR, George L. A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model. *In*: HEAPS, Norman S. (Org.). **Coastal and Estuarine Sciences**. Washington, D. C.: American Geophysical Union, 1987, v. 4, p. 1–16. Disponível em: <<http://www.agu.org/books/co/v004/CO004p0001/CO004p0001.shtml>>. Acesso em: 10 jun. 2019.
- CARTER, Glenn S.; MERRIFIELD, Mark A. Open boundary conditions for regional tidal simulations. **Ocean Modelling**, v. 18, n. 3–4, p. 194–209, 2007.
- CASULLI, V.; CATTANI, E. Stability, accuracy and efficiency of a semi-implicit method for three-dimensional shallow water flow. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 27, n. 4, p. 99–112, 1994.

- CASULLI, Vincenzo. A semi-implicit finite difference method for non-hydrostatic, free-surface flows. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 30, n. 4, p. 425–440, 1999.
- CASULLI, Vincenzo. Semi-implicit finite difference methods for the two-dimensional shallow water equations. **Journal of Computational Physics**, v. 86, n. 1, p. 56–74, 1990.
- CASULLI, Vincenzo; CHENG, Ralph T. Semi-implicit finite difference methods for three-dimensional shallow water flow. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 15, n. 6, p. 629–648, 1992.
- CHAGAS, Felipe Murai. **Dinâmica de ondas de areia na Baía de São Marcos (Ponta da Madeira/MA): observações e modelagem numérica**. Text, Universidade de São Paulo, 2013. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/21/21136/tde-31032014-161956/>>. Acesso em: 10 jun. 2019.
- COUTINHO, P da N; MORAIS, JO de. Distribuição de sedimentos na Baía de São José, Estado do Maranhão, Brasil. **Arquivo Ciências do Mar**, v. 16, n. 2, p. 123–127, 1976.
- DAVIES, JL. A morphogenic approach to world shorelines. **Zeitschrift fur Geomorphologie**, v. 8, p. 127–142, 1964.
- DE MIRANDA, Luiz Bruner. **Princípios de Oceanografia Física de Estuários**. 2. Ed. São Paulo SP, BRASIL: EdUSP, 2002. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=cpM7IFEOS1sC>>.

- DE MORAIS, Jóder Onofre. PROCESSOS MARCOS, DE SEDIMENTAÇÃO NA BAIÁ SÃO ESTADO DO MARANHÃO, DE BRASIL. **Arquivos de Ciências do Mar**, v. 17, n. 2, p. 153–164, 1977.
- DHN, BRASIL. **Diretoria de Hidrografia e Navegação, Tábua das marés para 2004 São Luís (Estado do Maranhão)**. Tábua de marés Brasil. Disponível em: <<http://www.mar.mil.br/dhn/chm/box-previsao-mare/tabuas/30110Jan2015.htm>>. Acesso em: 17 maio 2018. Tábuas das marés para 2015 São Luís (Estado do Maranhão).
- DILLENBURG, Sérgio R.; HESP, Patrick A. **Geology and geomorphology of Holocene coastal barriers of Brazil**. Springer Science & Business Media, 2008.
- EGBERT, Gary D.; EROFEEVA, Svetlana Y. Efficient Inverse Modeling of Barotropic Ocean Tides. **Journal of Atmospheric and Oceanic Technology**, v. 19, n. 2, p. 183–204, 2002.
- FLATHER, R. A. A tidal impac to the north-west European continental shelf. **Mem. Soc. R. Sci. Liege.**, v. 10, p. 141–164, 1976.
- FREITAS, Paulo TA; SILVEIRA, Odete FM; ASP, Nils Edvin. Tide distortion and attenuation in an Amazonian tidal river. **Brazilian Journal of Oceanography**, v. 60, n. 4, p. 429-446, 2012.
- GOES, Marlos et. Retroflections of the North Brazil Current during February 2002. **Pesquisa Deep Sea Part I: Oceanographic Research Papers**, v. 52, n. 4, p. 647-667, 2005.

- GRUBER, Arnold. Fluctuations in the position of the ITCZ in the Atlantic and Pacific Oceans. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 29, n. 1, p. 193–197, 1972.
- HOLTON, JR. **Isso Introduction to Dynamic Meteorology, Int.** 4^a th. United States: Elsevier Academic Press, 2004.
- HURL, Nicholas; LAYTON, William; LI, Yong; *et al.* Stability analysis of the Crank–Nicolson–Leapfrog method with the Robert–Asselin–Williams time filter. **BIT Numerical Mathematics**, v. 54, n. 4, p. 1009–1021, 2014.
- IBGE, BRASIL. **Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Atlas do Maranhão.** Rio de Janeiro, Brasil.: IBGE, 1997. Disponível em: <ftp://geoftp.ibge.gov.br/documentos/recursos_naturais/diagnosticos/maranhao.pdf>. Acesso em: 5 abr. 2018.
- JACOBY, Jacob; KAPLAN, Leon B. The impact of perceived risk. **ACR Special Volumes**, 1972.
- KJERFVE, B. Estuarine geomorphology and physical oceanography. **Estuarine ecology**, p. 47–78, 1989.
- LEMES, Marco Antonio Maringolo; LEMES, Marco Antonio Maringolo; MOURA, Antonio Divino. **Fundamentos de dinâmica aplicados à meteorologia e oceanografia.** Ribeirão Preto: Holos, 2002.
- LEONARD, B.P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 19, n. 1, p. 59–98, 1979.

- LOTT, François; PLOUGONVEN, Riwal; VANNESTE, Jacques. Gravity waves produced by sheared potential vorticity anomalies. **Journal of Atmospheric Science**, v. 67, n. 2, p. 157-170, 2010.
- LI, Yong; TRENCHEA, Catalin. Analysis of time filters used with the leapfrog scheme. P. 15, 2015.
- MARTIN, Nick; GORELICK, Steven M. MOD_FreeSurf2D: A MATLAB surface fluid flow model for rivers and streams. **Computers & Geosciences**, v. 31, n. 7, p. 929–946, 2005.
- MATSUNO, Taroh. Numerical Integrations of the Primitive Equations by a Simulated Backward Difference Method. **Journal of the Meteorological Society of Japan. Ser. II**, v. 44, n. 1, p. 76–84, 1966.
- MELLOR, GL. Users guide for a three-dimensional, primitive equation, numerical ocean model. **Program in Atmospheric and Ocean Sciences**, 2002.
- O'BRIEN, James J. **Advanced physical oceanographic numerical modelling**. [s.l.]: Springer Science & Business Media, 1985.
- ORLANSKI, I. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. **Journal of Computational Physics**, v. 21, n. 3, p. 251–269, 1976.
- PEREIRA, José Edson Rodrigues; HARARI, Joseph. Modelo numérico tri-dimensional linear da plataforma continental do Estado do Maranhão. **Brazilian Journal of Oceanography**, v. 43, n. 1, p. 19–34, 1995.
- POND, Stephen; PICKARD, George L. **Introductory dynamical oceanography**. 3. Ed., reprinted. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2007.

- PRITCHARD, Donald W.; SCHUBEL, Jerry R. Physical and Geological Processes Controlling Nutrient Levels in Estuaries. *In*: NEILSON, Bruce J.; CRONIN, Lewis Eugene (Orgs.). **Estuaries and Nutrients**. Totowa, NJ: Humana Press, 1981, p. 47–69. (Contemporary Issues in Science and Society). Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5826-1_3>. Acesso em: 10 jun. 2019.
- PROVOST, Christian Le; LYARD, Florent. The impact of ocean bottom morphology on the modelling of the long gravity waves, from tides and tsunami to climate. P. 12, 1903.
- RIOS, Luiz. Estudos de geografia do Maranhão. **São Luis. Editora Gr@phis**, v. 3, 2001.
- SANTOS, Laércio Leal. Modelos hidrológicos: Conceitos e aplicações. **Revista Brasileira de Geografia Física**, v. 2, n. 3, p. 1–19, 2009.
- SILVA, Alex Costa da; ARAÚJO, Moacyr; BOURLÈS, Bernard. Variação sazonal da estrutura de massas de água na plataforma continental do Amazonas e área oceânica adjacente. **Revista Brasileira de Geofísica**, v. 23, n. 2, p. 145–157, 2005.
- SILVA, Alex Costa da; ARAÚJO, Moacyr; PINHEIRO, Lidriana de Souza. Caracterização hidrográfica da plataforma continental do maranhão a partir de dados oceanográficos medidos, remotos e modelados. **Revista Brasileira de Geofísica**, v. 25, n. 3, 2007. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-261X200700030005&lng=pt&nrm=iso&tlng=pt>. Acesso em: 10 jun. 2019.

- SMAGORINSKY, J. GENERAL CIRCULATION EXPERIMENTS WITH THE PRIMITIVE EQUATIONS: I. THE BASIC EXPERIMENT*. **Monthly Weather Review**, v. 91, n. 3, p. 99–164, 1963.
- SOARES, Romulo Araujo. **Modelagem do transporte de ictioplâncton no Complexo Estuarino de São Marcos**. Dissertação de mestrado, Curso de Recursos Aquáticos e Pesca, Universidade Estadual do Maranhão – UEMA, São Luís, MA, 2015. Disponível em: <http://www.ppgrap.uema.br/wp-content/uploads/2016/03/DISSERTA%C3%87%C3%83O_final_Romulo.pdf>.
- SOMMERFELD, Arnold. Die Greensche funktion der schwingungsgleichung. **J.-Ber. Deutsch Math.-Verein**, v. 21, p. 309–353, 1912.
- SOUZA FILHO, Pedro Walfir Martins. Costa de manguezais de macromaré da Amazônia: cenários morfológicos, mapeamento e quantificação de áreas usando dados de sensores remotos. **Revista Brasileira de Geofísica**, v. 23, n. 4, p. 427–435, 2005.
- STRAMMA, Lothar; SCHOTT, Friedrich. The mean flow field of the tropical Atlantic Ocean. **Deep Sea Research Part II: Topical Studies in Oceanography**, v. 46, n. 1–2, p. 279–303, 1999.
- VIÚDEZ, A. Potential vorticity and inertia-gravity waves. **Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics**, v. 106, n.1, p. 67-88, 2012.
- VON KÁRMÁN, Th. Mechanische ähnlichkeit und turbulenz. **Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse**, v. 1930, p. 58–76, 1930.

- WOODROFFE, Colin D. et al. **Coasts: form, process and evolution.**
Cambridge University Press, 2002.

ANEXOS

ANEXO I: MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

Método de diferenças finitas

Para solucionar as Equações Diferenciais Parciais (EDP's) de qualquer ordem que governam o modelo foi necessário utilizar o Método de Diferenças Finitas (MDF), o qual é um método fundamentado na aproximação de derivadas através de diferenças finitas baseadas na expansão em série de Taylor:

$$f(t) = \sum_{i=0}^n \frac{(\delta t)^i}{i!} \frac{\partial^i f(t_0)}{\partial t^i}$$

assumindo f como uma grandeza genérica, t_0 é o termo de referência, $(\frac{\partial^i f}{\partial t^i})$ é a representação derivada da grandeza no termo de variação de ordem i , δt é o incremento de variação, t é o termo de predição desejado podendo ser representado como $t = t_0 \pm \delta t$.

Método de Diferença Finita Avançado

Ao utilizarmos um incremento positivo ($+\delta t$) na expansão em série de Taylor, obtemos:

$$f(t_0 + \delta t) = f(t_0) + \delta t \frac{\partial f(t_0)}{\partial t} + \frac{\delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 f(t_0)}{\partial t^2} + \frac{\delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 f(t_0)}{\partial t^3} + \dots + \frac{\delta t^n}{n!} \frac{\partial^n f(t_0)}{\partial t^n}$$

explicitando apenas os termos de diferenças finitas no primeiro membro da equação e os diferenciais no segundo membro e dividindo toda a equação por δt obtém-se:

$$\frac{f(t_0 + \delta t) - f(t_0)}{\delta t} = \frac{\partial f(t_0)}{\partial t} + \frac{\delta t^1}{2!} \frac{\partial^2 f(t_0)}{\partial t^2} + \frac{\delta t^2}{3!} \frac{\partial^3 f(t_0)}{\partial t^3} + \dots + \frac{\delta t^{n-1}}{n!} \frac{\partial^n f(t_0)}{\partial t^n}$$

para a aproximação pelo MDF avançado é necessário a realização de um processo de truncamento para a obtenção da aproximação da derivada de primeira ordem, com esse processo de truncamento obtêm-se um erro de aproximação (C_1), onde:

$$C_1 = \frac{\delta t^1}{2!} \frac{\partial^2 f(t_0)}{\partial t^2} + \frac{\delta t^2}{3!} \frac{\partial^3 f(t_0)}{\partial t^3} + \dots + \frac{\delta t^{n-1}}{n!} \frac{\partial^n f(t_0)}{\partial t^n}$$

e a relação entre diferenças finitas e diferenciais passa a ser dada como:

$$\frac{f(t_0+\delta t)-f(t_0)}{\delta t} = \frac{\partial f(t_0)}{\partial t} + C_1 \frac{f(t_0+\delta t)-f(t_0)}{\delta t} \cong \frac{\partial f(t_0)}{\partial t} \frac{\partial f(t_0)}{\partial t} \cong \frac{f(t_0+\delta t)-f(t_0)}{\delta t}$$

Desta forma obtém-se uma relação para a solução de um diferencial de primeira ordem através de valores discretos sob forma de:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \cong \frac{f(t_0+\delta t)-f(t_0)}{\delta t}$$

Método de Diferença Finita Recuado

Ao utilizarmos um incremento negativo ($-\delta t$) na expansão em série de Taylor, obtemos:

$$f(t_0 - \delta t) = f(t_0) - \delta t \frac{\partial f(t_0)}{\partial t} + \frac{\delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 f(t_0)}{\partial t^2} - \frac{\delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 f(t_0)}{\partial t^3} + \dots - \frac{\delta t^n}{n!} \frac{\partial^n f(t_0)}{\partial t^n}$$

explicitando apenas os termos de diferenças finitas no primeiro membro da equação e o diferencial no segundo membro e dividindo toda a equação por δt obtém-se:

$$\frac{f(t_0-\delta t)-f(t_0)}{\delta t} = -\frac{\partial f(t_0)}{\partial t} + \frac{\delta t^1}{2!} \frac{\partial^2 f(t_0)}{\partial t^2} - \frac{\delta t^2}{3!} \frac{\partial^3 f(t_0)}{\partial t^3} + \dots - \frac{\delta t^{n-1}}{n!} \frac{\partial^n f(t_0)}{\partial t^n}$$

para a aproximação pelo MDF recuado é necessário a realização de um processo de truncamento para a obtenção da aproximação da derivada de primeira ordem, com esse processo de truncamento obtém-se um erro de aproximação (C_2), onde:

$$C_2 = \frac{\delta t^1}{2!} \frac{\partial^2 f(t_0)}{\partial t^2} - \frac{\delta t^2}{3!} \frac{\partial^3 f(t_0)}{\partial t^3} + \dots - \frac{\delta t^{n-1}}{n!} \frac{\partial^n f(t_0)}{\partial t^n}$$

e a relação entre diferenças finitas e diferenciais passa a ser dada como:

$$\frac{f(t_0-\delta t)-f(t_0)}{\delta t} = -\frac{\partial f(t_0)}{\partial t} + C_2 \frac{f(t_0-\delta t)-f(t_0)}{\delta t} \cong -\frac{\partial f(t_0)}{\partial t} \frac{\partial f(t_0)}{\partial t} \cong \frac{f(t_0)-f(t_0-\delta t)}{\delta t}$$

Desta forma obtém-se uma relação para a solução de um diferencial de primeira ordem através de valores discretos sob a forma de:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \cong \frac{f(t_0)-f(t_0-\delta t)}{\delta t}$$

Método de Diferença Finita Centrado

O MDF pelo termo centrado, o qual foi utilizado nas variações espaciais das EDP's governantes do modelo, é obtido através da diferença das Expansões em Série de Taylor pelos termos avançado (quando o incremento δt é positivo, maior que zero) e recuado (quando o incremento δt é negativo, menor que zero), assim obtendo:

$$- \{f(t_0 + \delta t) = f(t_0) + \delta t \frac{\partial f(t_0)}{\partial t} + \frac{\delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 f(t_0)}{\partial t^2} + \frac{\delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 f(t_0)}{\partial t^3} + \dots + \frac{\delta t^n}{n!} \frac{\partial^n f(t_0)}{\partial t^n} f(t_0 - \delta t) = f(t_0) - \delta t \frac{\partial f(t_0)}{\partial t} + \frac{\delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 f(t_0)}{\partial t^2} - \frac{\delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 f(t_0)}{\partial t^3} + \dots - \frac{\delta t^n}{n!} \frac{\partial^n f(t_0)}{\partial t^n}\}$$

$$f(t_0 + \delta t) - f(t_0 - \delta t) = 2\delta t \frac{\partial f(t_0)}{\partial t} + 2 \frac{\delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 f(t_0)}{\partial t^3} + \dots + 2 \frac{\delta t^n}{n!} \frac{\partial^n f(t_0)}{\partial t^n}$$

explicitando apenas os termos de diferenças finitas no primeiro membro da equação e o diferencial no segundo membro e dividindo toda a equação por $2\delta t$ obtém-se:

$$\frac{f(t_0 + \delta t) - f(t_0 - \delta t)}{2\delta t} = \frac{\partial f(t_0)}{\partial t} + \frac{\delta t^2}{3!} \frac{\partial^3 f(t_0)}{\partial t^3} + \dots + \frac{\delta t^{n-1}}{n!} \frac{\partial^n f(t_0)}{\partial t^n}$$

realizando o processo de truncamento para a obtenção da aproximação da derivada de primeira ordem, é obtido um erro de aproximação chamado de C_3 ,

$$C_3 = \frac{\delta t^2}{3!} \frac{\partial^3 f(t_0)}{\partial t^3} + \dots + \frac{\delta t^{n-1}}{n!} \frac{\partial^n f(t_0)}{\partial t^n}$$

e a relação entre diferenças finitas e diferenciais passa a ser dada como:

$$\frac{f(t_0 + \delta t) - f(t_0 - \delta t)}{2\delta t} = \frac{\partial f(t_0)}{\partial t} + C_3$$

$$\frac{\partial f(t_0)}{\partial t} \cong \frac{f(t_0 + \delta t) - f(t_0 - \delta t)}{2\delta t}$$

Desta forma obtém-se uma relação para a solução de um diferencial de primeira ordem através de valores discretos sob forma de:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \cong \frac{f(t_0 + \delta t) - f(t_0 - \delta t)}{2\delta t}$$

Método de Diferença para termos de segunda ordem

Este método foi utilizado nas variações de segunda ordem EDP's governantes do modelo, é obtido através da soma das Expansões em Série de Taylor pelos termos avançado (quando o incremento δt é positivo, maior que zero) e recuado (quando o incremento δt é negativo, menor que zero), assim obtendo:

$$+ \{f(t_0 + \delta t) = f(t_0) + \delta t \frac{\partial f(t_0)}{\partial t} + \frac{\delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 f(t_0)}{\partial t^2} + \frac{\delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 f(t_0)}{\partial t^3} + \frac{\delta t^4}{4!} \frac{\partial^4 f(t_0)}{\partial t^4} + \dots + \frac{\delta t^n}{n!} \frac{\partial^n f(t_0)}{\partial t^n} f(t_0 - \delta t) =$$

$$f(t_0 + \delta t) + f(t_0 - \delta t) = 2f(t_0) + 2 \frac{\delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f(t_0)}{\partial t^2} + 2 \frac{\delta t^4}{4!} \frac{\partial^4 f(t_0)}{\partial t^4} + \dots + 2 \frac{\delta t^{n-2}}{n!} \frac{\partial^{n-2} f(t_0)}{\partial t^{n-2}}$$

explicitando apenas os termos de diferenças finitas no primeiro membro da equação e

o diferencial no segundo membro e dividindo toda a equação por δt^2 obtém-se:

$$\frac{f(t_0 + \delta t) + f(t_0 - \delta t) - 2f(t_0)}{\delta t^2} = \frac{\partial^2 f(t_0)}{\partial t^2} + \frac{\delta t^2}{12} \frac{\partial^4 f(t_0)}{\partial t^4} + \dots + 2 \frac{\delta t^{n-2}}{n!} \frac{\partial^n f(t_0)}{\partial t^n}$$

realizando o processo de truncamento para a obtenção da aproximação da derivada de primeira ordem, é obtido um erro de aproximação chamado de C_4 ,

$$C_4 = \frac{\delta t^2}{12} \frac{\partial^4 f(t_0)}{\partial t^4} + \dots + 2 \frac{\delta t^{n-2}}{n!} \frac{\partial^n f(t_0)}{\partial t^n}$$

$$\frac{f(t_0 + \delta t) + f(t_0 - \delta t) - 2f(t_0)}{\delta t^2} = \frac{\partial^2 f(t_0)}{\partial t^2} + C_4$$

$$\frac{\partial^2 f(t_0)}{\partial t^2} \cong \frac{f(t_0 + \delta t) + f(t_0 - \delta t) - 2f(t_0)}{\delta t^2}$$

Desta forma obtém-se uma relação para a solução de um diferencial de segunda ordem através de valores discretos sob a forma de:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \cong \frac{f(t_0 + \delta t) + f(t_0 - \delta t) - 2f(t_0)}{\delta t^2}$$

ANEXO II: SOLUÇÃO MATEMÁTICA DO COEFICIENTE DE DIFUSÃO HORIZONTAL PELO ESQUEMA DE SMAGORINSKY

Para a solução da equação de Smagorinsky foi utilizado o MDF avançado para os gradientes de velocidades e MDF centrado para o rotacional, desta forma obtendo:

$$A_H = C \delta x \delta y \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2}{2} + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$A_H = C \delta x \delta y \left(\left(\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n}{\delta x} \right)^2 + \left(\frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j}^n}{\delta y} \right)^2 + \frac{\left(\frac{V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n}{2\delta x} + \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2\delta y} \right)^2}{2} \right)^{1/2}$$

Utilizando a aproximação médias entre posições próximas para uma variável genérica para termos avançados e recuados para solução do termo diferencial rotacional ($\phi_{i+1,j}^n = \frac{(\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i+1,j+1}^n)}{2}$ e $\phi_{i-1,j}^n = \frac{(\phi_{i-1,j}^n + \phi_{i-1,j+1}^n)}{2}$), e adequando essa igualdade na equação acima obtém-se:

$$A_H = C \delta x \delta y \left(\left(\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n}{\delta x} \right)^2 + \left(\frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j}^n}{\delta y} \right)^2 + \frac{\left(\frac{\frac{V_{i+1,j}^n + V_{i+1,j+1}^n}{2} - \frac{V_{i-1,j}^n + V_{i-1,j+1}^n}{2}}{2\delta x} + \frac{\frac{U_{i+1,j}^n + U_{i+1,j+1}^n}{2} - \frac{U_{i-1,j}^n + U_{i-1,j+1}^n}{2}}{2\delta y} \right)^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$A_H = C \delta x \delta y \left(\left(\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n}{\delta x} \right)^2 + \left(\frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j}^n}{\delta y} \right)^2 + \frac{\left(\frac{\frac{V_{i+1,j}^n + V_{i+1,j+1}^n}{2} - \frac{V_{i-1,j}^n + V_{i-1,j+1}^n}{2}}{2\delta x} + \frac{\frac{U_{i+1,j}^n + U_{i+1,j+1}^n}{2} - \frac{U_{i-1,j}^n + U_{i-1,j+1}^n}{2}}{2\delta y} \right)^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$A_H = C \delta x \delta y \left(\left(\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n}{\delta x} \right)^2 + \left(\frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j}^n}{\delta y} \right)^2 + \frac{\left(\frac{\frac{V_{i+1,j}^n + V_{i+1,j+1}^n}{2} - \frac{V_{i-1,j}^n + V_{i-1,j+1}^n}{2}}{4\delta x} + \frac{\frac{U_{i+1,j}^n + U_{i+1,j+1}^n}{2} - \frac{U_{i-1,j}^n + U_{i-1,j+1}^n}{2}}{4\delta y} \right)^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$A_H = c\delta x\delta y\left(\left(\frac{U^n_{i+1,j}-U^n_{i,j}}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{V^n_{i,j+1}-V^n_{i,j}}{\delta y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{V^n_{i+1,j}+V^n_{i+1,j+1}-V^n_{i-1,j}-V^n_{i-1,j+1}}{\delta x} + \right.\right.\right.$$

ANEXO III: SOLUÇÃO MATEMÁTICA PARA A CONDIÇÃO RADIACIONAL DE SOMMERFELD

Para $c_y = \frac{\delta y}{\delta t}$, e $c_x = \frac{\delta x}{\delta t}$ para as fronteiras Norte e Leste respectivamente é utilizado o MDF centrado no domínio temporal levando como referência a variável em um passo atrasado no tempo e recuado no domínio espacial em seus respectivos limites espaciais, obtendo a condição matemática para a fronteira norte:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_y \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\phi_{i,jm}^n - \phi_{i,jm}^{n-2}}{2\delta t} = -c_y \frac{\phi_{i,jm}^{n-1} - \phi_{i,jm-1}^{n-1}}{\delta y}$$

Sabendo que $c_y = \frac{\delta y}{\delta t}$ e que $\phi_{i,jm}^{n-1} = \frac{(\phi_{i,jm}^n + \phi_{i,jm}^{n-2})}{2}$, obtém-se:

$$\frac{\phi_{i,jm}^n - \phi_{i,jm}^{n-2}}{2\delta t} = -\frac{\left(\frac{\delta y}{\delta t}\right)}{\delta y} \left(\frac{\phi_{i,jm}^n + \phi_{i,jm}^{n-2}}{2} - \phi_{i,jm-1}^{n-1} \right) \frac{\phi_{i,jm}^n - \phi_{i,jm}^{n-2}}{2\delta t} = -\frac{1}{\delta t} \left(\frac{\phi_{i,jm}^n + \phi_{i,jm}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-1}^{n-1}}{2} \right) \frac{\phi_{i,jm}^n - \phi_{i,jm}^{n-2}}{2\delta t} = -\frac{1}{2\delta t} (\phi_{i,jm}^n + \phi_{i,jm}^{n-2})$$

$$\phi_{i,jm}^n = \phi_{i,jm-1}^{n-1}$$

de forma análoga para a fronteira leste, obtém-se:

$$\phi_{im,j}^n = \phi_{im-1,j}^{n-1}$$

Para $c_y = \frac{-\delta y}{\delta t}$, e $c_x = \frac{-\delta x}{\delta t}$ para as fronteiras Sul e Oeste é utilizado o MDF centrado no domínio temporal levando como referência a variável em um passo atrasado no tempo de integração e avançado no domínio espacial em seus respectivos limites espaciais, obtendo a condição matemática para a fronteira sul:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - c_y \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \frac{\phi_{i,1}^n - \phi_{i,1}^{n-2}}{2\delta t} = -c_y \frac{\phi_{i,2}^{n-1} - \phi_{i,1}^{n-1}}{\delta y}$$

Sabendo que $c_y = \frac{-\delta y}{\delta t}$ e que $\phi_{i,1}^{n-1} = \frac{(\phi_{i,1}^n + \phi_{i,1}^{n-2})}{2}$, obtém-se:

$$\frac{\phi_{i,1}^n - \phi_{i,1}^{n-2}}{2\delta t} = -\frac{\left(\frac{-\delta y}{\delta t}\right)}{\delta y} \left(\phi_{i,2}^{n-1} - \frac{\phi_{i,1}^n + \phi_{i,1}^{n-2}}{2} \right) \frac{\phi_{i,1}^n - \phi_{i,1}^{n-2}}{2\delta t} = \frac{1}{\delta t} \left(\frac{2\phi_{i,2}^{n-1} - \phi_{i,1}^n - \phi_{i,1}^{n-2}}{2} \right) \frac{\phi_{i,1}^n - \phi_{i,1}^{n-2}}{2\delta t} = \frac{1}{2\delta t} (2\phi_{i,2}^{n-1} - \phi_{i,1}^n - \phi_{i,1}^{n-2})$$

$$\phi_{i,1}^n = \phi_{i,2}^{n-1}$$

de forma análoga para a fronteira leste, obtém-se:

$$\phi_{1,j}^n = \phi_{2,j}^{n-1}$$

ANEXO IV: SOLUÇÃO MATEMÁTICA PARA A CONDIÇÃO RADIACIONAL DE ORLANSKI

Baseado na solução numérica descrita por Sommerfeld a celeridade para as fronteiras é definida através:

Norte:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_{norte} \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

$$c_{norte} \left(\frac{\phi_{i,jm}^{n-1} - \phi_{i,jm-1}^{n-1}}{\delta y} \right) = - \frac{\phi_{i,jm}^n - \phi_{i,jm}^{n-2}}{2\delta t} c_{norte} = - \frac{\left(\frac{\phi_{i,jm}^n - \phi_{i,jm}^{n-2}}{2\delta t} \right)}{\left(\frac{\phi_{i,jm}^{n-1} - \phi_{i,jm-1}^{n-1}}{\delta y} \right)}$$

Utilizando a aproximação numérica $\phi_{i,jm}^{n-1} = \frac{(\phi_{i,jm}^n + \phi_{i,jm}^{n-2})}{2}$:

$$c_{norte} = - \frac{\left(\frac{\phi_{i,jm}^n - \phi_{i,jm}^{n-2}}{2\delta t} \right)}{\left(\frac{\left(\frac{\phi_{i,jm}^n + \phi_{i,jm}^{n-2}}{2} \right) - \phi_{i,jm-1}^{n-1}}{\delta y} \right)} c_{norte} = - \frac{\left(\frac{\phi_{i,jm}^n - \phi_{i,jm}^{n-2}}{2\delta t} \right)}{\left(\frac{\phi_{i,jm}^n + \phi_{i,jm}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-1}^{n-1}}{2} \right)} c_{norte} = - \frac{\left(\frac{\phi_{i,jm}^n - \phi_{i,jm}^{n-2}}{2\delta t} \right)}{\left(\left[\frac{\phi_{i,jm}^n + \phi_{i,jm}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-1}^{n-1}}{2} \right] \cdot \frac{1}{\delta y} \right)} c_{norte} = - \frac{\left(\frac{\phi_{i,jm}^n - \phi_{i,jm}^{n-2}}{2\delta t} \right)}{\left(\frac{\phi_{i,jm}^n + \phi_{i,jm}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-1}^{n-1}}{2\delta y} \right)}$$

$$c_{norte} = - \left(\frac{\phi_{i,jm}^n - \phi_{i,jm}^{n-2}}{2\delta t} \right) \left(\frac{2\delta y}{\phi_{i,jm}^n + \phi_{i,jm}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-1}^{n-1}} \right) c_{norte} = - \frac{2\delta y}{2\delta t} \left(\frac{\phi_{i,jm}^n - \phi_{i,jm}^{n-2}}{\phi_{i,jm}^n + \phi_{i,jm}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-1}^{n-1}} \right)$$

aplicando para o ponto de grade próximo à fronteira norte, obtém-se:

$$c_{norte} = - \frac{\delta y}{\delta t} \left(\frac{\phi_{i,jm-1}^n - \phi_{i,jm-1}^{n-2}}{\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1}} \right)$$

aplicando a celeridade na relação matemática de propagação da grandeza:

$$\phi_{i,jm}^{n+1} = \frac{1 - c_{norte} \left(\frac{\delta t}{\delta y} \right)}{1 + c_{norte} \left(\frac{\delta t}{\delta y} \right)} \phi_{i,jm}^{n-1} + 2 \frac{c_{norte} \left(\frac{\delta t}{\delta y} \right)}{1 + c_{norte} \left(\frac{\delta t}{\delta y} \right)} \phi_{i,jm-1}^n$$

$$\phi_{i,jm}^{n+1} = \frac{1 - \left(-\frac{\delta y}{\delta t} \left(\frac{\phi_{i,jm-1}^n - \phi_{i,jm-1}^{n-2}}{\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1}} \right) \right) \left(\frac{\delta t}{\delta y} \right)}{1 + \left(-\frac{\delta y}{\delta t} \left(\frac{\phi_{i,jm-1}^n - \phi_{i,jm-1}^{n-2}}{\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1}} \right) \right) \left(\frac{\delta t}{\delta y} \right)} \phi_{i,jm}^{n-1} + 2 \frac{\left(-\frac{\delta y}{\delta t} \left(\frac{\phi_{i,jm-1}^n - \phi_{i,jm-1}^{n-2}}{\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1}} \right) \right) \left(\frac{\delta t}{\delta y} \right)}{1 + \left(-\frac{\delta y}{\delta t} \left(\frac{\phi_{i,jm-1}^n - \phi_{i,jm-1}^{n-2}}{\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1}} \right) \right) \left(\frac{\delta t}{\delta y} \right)} \phi_{i,jm-1}^n$$

$$\phi_{i,jm}^{n+1} = \frac{1 + \left(\frac{\phi_{i,jm-1}^n - \phi_{i,jm-1}^{n-2}}{\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1}} \right)}{1 - \left(\frac{\phi_{i,jm-1}^n - \phi_{i,jm-1}^{n-2}}{\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1}} \right)} \phi_{i,jm}^{n-1} - 2 \frac{\left(\frac{\phi_{i,jm-1}^n - \phi_{i,jm-1}^{n-2}}{\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1}} \right)}{1 - \left(\frac{\phi_{i,jm-1}^n - \phi_{i,jm-1}^{n-2}}{\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1}} \right)} \phi_{i,jm-1}^n$$

$$\phi_{i,jm}^{n+1} = \frac{\left(\frac{\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1} + \phi_{i,jm-1}^n - \phi_{i,jm-1}^{n-2}}{\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1}} \right)}{\left(\frac{\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1} - \phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2}}{\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1}} \right)} \phi_{i,jm}^{n-1} - 2 \frac{\left(\frac{\phi_{i,jm-1}^n - \phi_{i,jm-1}^{n-2}}{\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1}} \right)}{\left(\frac{\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1} - \phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2}}{\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1}} \right)} \phi_{i,jm-1}^n$$

$$\phi_{i,jm}^{n+1} = \frac{\left(\frac{2\phi_{i,jm-1}^n - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1}}{\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1}} \right)}{\left(\frac{2\phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1}}{\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1}} \right)} \phi_{i,jm}^{n-1} - 2 \frac{\left(\frac{\phi_{i,jm-1}^n - \phi_{i,jm-1}^{n-2}}{\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1}} \right)}{\left(\frac{2\phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1}}{\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1}} \right)} \phi_{i,jm-1}^n$$

$$\phi_{i,jm}^{n+1} = \left(\frac{(2\phi_{i,jm-1}^n - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1})}{(\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1})} \cdot \frac{(\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1})}{(2\phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1})} \right) \phi_{i,jm}^{n-1} - 2 \left(\frac{(\phi_{i,jm-1}^n - \phi_{i,jm-1}^{n-2})}{(\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1})} \cdot \frac{(\phi_{i,jm-1}^n + \phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1})}{(2\phi_{i,jm-1}^{n-2} - 2\phi_{i,jm-2}^{n-1})} \right)$$

$$\phi_{i,jm}^{n+1} = \left(\frac{\phi_{i,jm-1}^n - \phi_{i,jm-2}^{n-1}}{\phi_{i,jm-1}^{n-2} - \phi_{i,jm-2}^{n-1}} \right) \phi_{i,jm}^{n-1} - \left(\frac{\phi_{i,jm-1}^n - \phi_{i,jm-1}^{n-2}}{\phi_{i,jm-1}^{n-2} - \phi_{i,jm-2}^{n-1}} \right) \phi_{i,jm-1}^n$$

de forma análoga para a fronteira leste obtêm-se:

$$\phi_{im,j}^{n+1} = \left(\frac{\phi_{im-1,j}^n - \phi_{im-2,j}^{n-1}}{\phi_{im-1,j}^{n-2} - \phi_{im-2,j}^{n-1}} \right) \phi_{im,j}^{n-1} - \left(\frac{\phi_{im-1,j}^n - \phi_{im-1,j}^{n-2}}{\phi_{im-1,j}^{n-2} - \phi_{im-2,j}^{n-1}} \right) \phi_{im-1,j}^n$$

Para a fronteira sul e oeste utilizando a mesma metodologia, obtêm-se;

$$\phi_{i,1}^{n+1} = \left(\frac{\phi_{i,3}^{n-1} - \phi_{i,2}^n}{\phi_{i,3}^{n-1} - \phi_{i,2}^{n-2}} \right) \phi_{i,1}^{n-1} - \left(\frac{\phi_{i,2}^n - \phi_{i,2}^{n-2}}{\phi_{i,3}^{n-1} - \phi_{i,2}^{n-2}} \right) \phi_{i,2}^n$$

$$\phi_{1,j}^{n+1} = \left(\frac{\phi_{3,j}^{n-1} - \phi_{2,j}^n}{\phi_{3,j}^{n-1} - \phi_{2,j}^{n-2}} \right) \phi_{1,j}^{n-1} - \left(\frac{\phi_{2,j}^n - \phi_{2,j}^{n-2}}{\phi_{3,j}^{n-1} - \phi_{2,j}^{n-2}} \right) \phi_{2,j}^n$$

ANEXO V: QUADRO DE BAIXAMAR E PREAMAR OBSERVADA NO COMPLEXO PORTUÁRIA NO PERÍDO DE 01 DE JANEIRO 2015 A 11 DE JANEIRO DE 2015

DATA	HORA	ALTURA (m)
01/01/2015	04:02:00	5,24
01/01/2015	10:06:00	1,22
01/01/2015	16:29:00	5,43
01/01/2015	22:47:00	0,94
02/01/2015	05:04:00	5,36
02/01/2015	11:02:00	1,07
02/01/2015	17:21:00	5,56
02/01/2015	23:40:00	0,77
03/01/2015	05:57:00	5,49
03/01/2015	11:55:00	0,93
03/01/2015	18:06:00	5,67
04/01/2015	00:23:00	0,63
04/01/2015	06:40:00	5,57
04/01/2015	12:38:00	0,83
04/01/2015	18:51:00	5,74
05/01/2015	01:04:00	0,53
05/01/2015	07:14:00	5,62
05/01/2015	13:12:00	0,76
05/01/2015	19:27:00	5,77
06/01/2015	01:47:00	0,52

DATA	HORA	ALTURA (m)
06/01/2015	07:55:00	5,63
06/01/2015	13:53:00	0,76
06/01/2015	20:02:00	5,76
07/01/2015	02:16:00	0,59
07/01/2015	08:25:00	5,58
07/01/2015	14:23:00	0,84
07/01/2015	20:36:00	5,69
08/01/2015	02:53:00	0,69
08/01/2015	08:59:00	5,53
08/01/2015	14:59:00	0,93
08/01/2015	21:06:00	5,6
09/01/2015	03:17:00	0,84
09/01/2015	09:31:00	5,44
09/01/2015	15:29:00	1,06
09/01/2015	21:42:00	5,48
10/01/2015	03:53:00	0,98
10/01/2015	10:04:00	5,35
10/01/2015	16:02:00	1,18
10/01/2015	22:16:00	5,33
11/01/2015	04:21:00	1,17