

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM REDE – MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

WAGNER DE JESUS PEREIRA SÁ

O uso de Recorrência na Educação Básica

São Luís
2020

WAGNER DE JESUS PEREIRA SÁ

O uso de Recorrência na Educação Básica

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Rede – Matemática em Rede Nacional, da UFMA, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Giovane Ferreira Silva

Doutor em Matemática

São Luís

2020

WAGNER DE JESUS PEREIRA SÁ

O uso de Recorrência na Educação Básica

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Rede – Matemática em Rede Nacional, da UFMA, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 21 de Dezembro de 2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Giovane Ferreira Silva

Doutor em Matemática

Prof. José Santana Campos Costa

Doutor em Matemática

Prof. Marlon Cesar Santos Oliveira

Doutor em Matemática

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Sá, Wagner de Jesus Pereira.

O uso de Recorrência na Educação Básica / Wagner de
Jesus Pereira Sá. - 2020.
122 f.

Orientador(a): Giovane Ferreira Silva.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em
Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade
Federal do Maranhão, São Luís, 2020.

1. Pensamento Recursivo. 2. Recorrência. 3.
Sequências Numéricas. I. Silva, Giovane Ferreira. II.
Título.

*Aos meus pais, Antônio e Edith pelas
primeiras lições recebidas e apoio.*

À minha filha, Sabrina Sá.

Dedico.

Resumo

Este trabalho trata do *Uso de recorrência na educação básica*, com destaque, principalmente, ao estudo das recorrências lineares de 1º e 2ª ordem, e suas técnicas empregadas na resolução de problemas. No trabalho são apresentados conceitos de sequências numéricas que é de grande relevância para o estudo das recorrências lineares. Destaca-se também a importância do pensamento recursivo que serve de alicerce para a resolução de problemas de diversas áreas da matemática. Foram feitas algumas demonstrações de teoremas associados aos estudos das recorrências lineares de 1º e 2ª ordem de forma que os mesmos sejam utilizados como ferramentas de resolução para diversos problemas e atividades do ensino básico. Salientamos diferentes aplicações para mostrar que o estudo de recorrência é um importante aliado na modelagem matemática e que seu estudo é acessível aos estudantes do ensino básico, em especial as olimpíadas de matemática. A expectativa é que este trabalho sirva como motivador para professores e alunos na resolução de problemas matemáticos e que a prática do raciocínio recursivo seja cada vez mais utilizada na educação básica.

Palavras-chave: Sequências Numéricas. Recorrência. Pensamento Recursivo.

Abstract

This work deals with the *Use of recurrence in basic education*, with emphasis, mainly, on the study of linear recurrences of 1st and 2nd order, and their techniques used in problem solving. The work presents numerical sequence concepts that are of great relevance for the study of linear recurrences. It also highlights the importance of recursive thinking that serves as a foundation for solving problems in different areas of mathematics. Some theorem demonstrations were made associated with the studies of 1st and 2nd order linear recurrences so that they are used as tools for solving various problems and activities of basic education. We highlight different applications to show that the study of recurrence is an important ally in mathematical modeling and that its study is accessible to students of basic education, especially the olympics in mathematics. The expectation is that this work will serve as a motivator for teachers and students in solving mathematical problems and that the practice of recursive reasoning will be increasingly used in basic education.

Keywords: Numerical Sequence. Recurrence. Recursive Thinking.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço à Deus por dar-me saúde, paciência e força para continuar sempre firme nesta jornada, mesmo com inúmeros obstáculos.

Aos meus pais, Antônio Sá e Edith Sá por sempre estarem presente nos momentos mais difíceis e por toda educação e esforço que tiveram para me proporcionar a melhor educação possível.

A minha amada filha, Sabrina Sá, por ser a razão da minha vida.

À minha namorada, Márcia Fernanda, pelo seu companheirismo, paciência, compreensão e apoio com muito amor e carinho.

Ao meu orientador, Prof. Giovane Ferreira da Silva, pela paciência, suporte, bom senso e pela prestativa, segura e valiosa orientação efetivamente dada.

Aos professores José Santana Campos Costa e Marlon Cesar Santos Oliveira, pela honrosa presença na banca de defesa deste trabalho e pelas considerações realizadas ao cabo desta, o que, certamente, deu ao texto escrito mais fluidez, clareza e precisão.

À minha família, por me ensinar a ser uma pessoa melhor a cada dia.

Ao amigo Raimundo Neto Velozo, pelo grande incentivo, amizade e alegria na troca de informações e compreensão a mim oferecidos.

Aos criadores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, o PROFMAT, um projeto que pode ser considerado como uma ampliação em larga escala do Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio, o PAP-MEM, a cujo idealizador, o saudoso professor Elon Lages Lima, respeitosa e vivamente, menciono e agradeço.

A UFMA, ao Departamento de Matemática e à coordenação do PROFMAT-UFMA, muito obrigado pela oportunidade de participar desse belíssimo programa de mestrado e aprender muito com um corpo de docente tão qualificado.

A todos os professores do PROFMAT - UFMA pelo profissionalismo, empenho, respeito, dedicação e entusiasmo que nos demonstraram ao longo de todas as disciplinas.

Aos meus colegas de mestrado pela experiência e momentos que passamos juntos e que já deixam saudades.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

Enfim, a todos que de forma direta e indiretamente colaboraram para que este grande dia acontecesse.

“Penso noventa e nove vezes e nada descobro; deixo de pensar, mergulho em profundo silêncio - e eis que a verdade me é revelada.”

Albert Einstein

Sumário

Lista de Figuras	10
Lista de Tabelas	11
Introdução	12
1 Sequência	15
1.1 Sequências Elementares	15
1.1.1 Definição de Sequências e Fórmulas Posicionais	16
1.2 Progressões	17
1.2.1 Considerações Iniciais	17
1.2.2 Progressão Aritmética	18
1.2.3 Progressão Geométrica	20
2 Pensamento recursivo	22
2.1 Problema das lâmpadas numa bancada	22
2.2 Problemas de Sequências definidas recursivamente	25
2.3 Pensamento recursivo em polígonos	28
2.3.1 Soma dos ângulos internos de um polígono convexo	28
2.3.2 Número de diagonais de um polígono convexo	30
3 Recorrência	34
3.1 Recorrência e fórmulas fechadas	34
3.2 Recorrência Linear de primeira ordem	39
3.2.1 Resolução de Recorrências Lineares de primeira ordem homogênea	41

3.2.2	Resolução de Recorrências Lineares de primeira ordem não homogênea	43
3.3	Recorrência Linear de segunda ordem	46
3.3.1	Recorrências lineares de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes	47
3.3.2	Recorrências lineares de segunda ordem não homogênea com coeficientes constantes	53
4	Aplicações de Recorrências	58
4.1	Torre de Hanói	59
4.2	A Sequência de Fibonacci	65
4.3	Matemática Financeira	79
4.4	Análise Combinatória	84
4.5	Recorrência em problemas de Olimpíadas de Matemática	88
5	Outras abordagens do estudo das sequências recorrentes	103
5.1	Sequências de ordem k	103
5.2	Sequências periódicas	107
5.3	Recorrência e aplicações elementares na álgebra	108
5.4	Recorrência e aplicações elementares na aritmética	111
6	Considerações	116
	Referências Bibliográficas	118

Lista de Figuras

2.1	Soma dos ângulos internos de um triângulo	28
2.2	Polígono de $n + 1$ lados	29
2.3	Soma dos ângulos internos de um polígono de $n + 1$ lados	29
2.4	Diagonais de polígonos	30
2.5	Número de diagonais de um polígono de $n + 1$ lados	32
4.1	Torre de Hanói	60
4.2	Movimentação de um disco na Torre de Hanói	61
4.3	Movimentação de dois discos na Torre de Hanói	61
4.4	Movimentação de três discos na Torre de Hanói	62
4.5	Torre de Hanói com n discos	63
4.6	Dominó e raciocínio recursivo	70
4.7	n dominós 2×1 em uma caixa $2 \times n$	71
4.8	Diposição dos dominós na posição vertical e horizontal	71
4.9	Caixa de tamanho $2 \times n$ iniciada por um dominó 2×1 em pé	72
4.10	Caixa de tamanho $2 \times n$ iniciada por dois dominós 2×1 deitados	72
4.11	Triângulos com palitos de fósforos	90
4.12	Sequências de pilhas com cubinhos de tamanhos iguais	92
4.13	Transformação da quarta pilha triangular em uma pilha quadrada	93
4.14	Figura pentagonal	96
4.15	Construção da figura pentagonal	96
4.16	Figura com quadradinhos	98
4.17	Sequência de bolinhas em forma da letra Y	101

Lista de Tabelas

4.1	Tabela Reprodução de coelhos	67
4.2	Tabela dominó na caixa $2 \times n$	73
4.3	Tabela dos vinte e um primeiros números de Fibonacci	79
4.4	Número de filas formadas por n pessoas	85
4.5	Número de triângulos por palitos acrescentados	91

Introdução

A motivação pela escolha do tema deu-se em função da riqueza e potencial que o mesmo possui para a resolução de vários problemas em matemática que são trabalhados no ensino básico.

É oportuno salientar que as disciplinas cursadas no mestrado, em especial a MA 12 que trata de conteúdos da Matemática Discreta, foi de suma importância para a realização deste trabalho.

E podemos observar que a resolução de problemas a partir de um pensamento recursivo vem de uma certa forma contribuir para o pensar matemático no sentido de desenvolver habilidades e incitar a criatividade para a resolução de diversos problemas no ensino básico.

Diante deste primeiro contato chamamos a atenção para que este conteúdo esteja presente na sala de aula com maior frequência e de fato seja trabalhado com o devido rigor em diversos conteúdos da matemática, uma vez que a recorrência prioriza a solução de problemas a partir de uma análise mais detalhada do mesmo em casos menores de forma que sejam trabalhados passo a passo até chegar na elucidação do problema.

O uso de recorrências em conteúdos de Matemática no ensino básico tem como objetivo desenvolver habilidades e estimular o aluno a construir sua própria solução, e por conseguinte aguçar o estudante a ter uma aproximação cada vez mais precisa na resolução de problemas.

A importância do tema ganha ênfase por agregar valores e disciplinar ainda mais a solução de vários problemas que são trabalhados no ensino básico, que passarão a ser resolvidos por meios de técnicas que deliberam uma lógica cadenciada a partir de casos menores até chegar no desfecho do problema em questão, fazendo com que a resolução de vários problemas se torne cada vez mais significativa, objetiva e clara no entendimento do aluno.

O desenvolvimento do trabalho teve fundamentação teórica bibliográfica baseada em livros do ensino básico, obras acadêmicas e livros do ensino superior com foco

na educação básica. Ressaltamos que o texto apresentado parte de um raciocínio lógico-dedutivo para apresentar as definições, propriedades, teoremas e aplicações a partir de exemplos que são feitos de forma minuciosa e detalhada, atendendo que os conteúdos sejam apresentados a partir de uma linguagem simples, clara e eficaz. Desta forma esperamos que o resultado final seja alcançado por professores e alunos na construção do processo ensino aprendizagem na resolução de problemas matemáticos.

No capítulo 1 apresentaremos o estudo das sequências elementares e sua importância em diversos conteúdos trabalhados no ensino básico, destacando-se que o estudo das mesmas e as fórmulas por ela desenvolvidas são originadas a partir de um raciocínio recursivo.

No capítulo 2 é dedicado a resolução de problemas matemáticos que podem ser solucionados a partir de um raciocínio recursivo visando agregar conhecimentos para alunos e professores que priorizará a autonomia, iniciativa, criatividade e construção do pensamento na resolução dos problemas.

No capítulo 3 serão apresentadas e desenvolvidas as definições, teoremas e propriedades relacionadas ao estudo das recorrências, abordando fórmulas fechadas, recorrências lineares de primeira e segunda ordem. Todas serão demonstradas e exemplificadas.

No capítulo 4 mostraremos as aplicações do estudo das recorrências em diversas áreas da matemática tais como a matemática financeira e análise combinatória. Destaca-se também o uso dos jogos que podem ser trabalhados na sala de aula, entre eles podemos citar a Torre de Hanói. Será apresentado também a importância do estudo das Sequências de Fibonacci e suas aplicações na resolução de diversos problemas matemáticos de Ensino Básico.

Observamos ainda que uma das aplicações do estudo das recorrências podem ser verificadas na resolução de diversos problemas do exame das Olimpíadas Brasileira de Matemática - OBMEP, mostrando ao aluno que as soluções de alguns problemas olímpicos podem ser criados e pensados pelo próprio aluno, tornando o mesmo mais preparado e confiante para a resolução do exame como um todo.

Finalmente, no capítulo 5, ratificamos a importância da teoria estudada nos capítulos anteriores para alguns resultados na álgebra e aritmética.

Este trabalho tem como proposta ser um material de apoio que possa ser uti-

lizados por professores do Ensino Básico no quesito em trabalhar recorrência e pensar recursivamente em alguns conteúdos matemáticos objetivando tornar as aulas de matemáticas mais criativas, dinâmicas e atrativas, ou seja, priorizar a resolução de problemas fazendo uma abordagem diferenciada.

Acreditamos que este trabalho contribua para o processo ensino aprendizagem dos alunos de maneira que despertem novos interesses e métodos de resolução de problemas matemáticos com o uso de raciocínio recursivo visando tornar as aulas de matemática mais pontual e atrativas.

1 Sequência

Esta seção teve como referencial teórico a obra da Coleção do Professor de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, o livro Tópicos de Matemática Elementar volume 1 - Números Reais do autor Antônio Caminha Muniz Neto e o livro Matemática Discreta da coleção profmat - SBM dos autores Augusto César Morgado e Paulo Cezar Pinto Carvalho. O texto que segue teve suas devidas adaptações nas definições e exemplos baseadas na obras citadas acima.

1.1 Sequências Elementares

A ideia é mostrar, conforme consta em que o estudo das sequências e fórmulas utilizadas no ensino básico são originados de um pensamento recursivo e que não é costumeiramente abordado a partir deste raciocínio.

Podemos elencar o conteúdo de sequências como um dos mais trabalhados no ensino médio que pode ser mostrado a partir de um pensamento recursivo, mas não é trabalhado como tal. Dentre estes conteúdos podemos citar as progressões com suas fórmulas, aplicações e exemplos.

As sequências podem ser classificadas em sequências finitas ou infinitas, conforme argumentos abaixo.

Uma sequência de números reais é caracterizada como infinita quando seus elementos pertencem a uma lista ordenada infinita $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ de números reais, ou seja, uma lista infinita de números reais na qual é possível especificar quem é o primeiro número da lista, quem é o segundo, o terceiro e assim por diante. Nestes termos podemos estabelecer a seguinte notação para uma sequência infinita por (a_k) com $k \geq 1$.

Uma sequência de números reais é caracterizada como finita quando seus elementos pertencem a uma lista ordenada finita $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ de números reais, ou seja, uma lista finita de números reais na qual, assim como foi feito com as sequências infinitas, especificamos quem é o primeiro número da lista, quem é o segundo, o terceiro e finalizando com o n -ésimo número da lista.

É possível também estabelecer a seguinte notação de sequência finita por (a_k) com $1 \leq k \leq n$.

Nosso objetivo é estudar alguns casos de sequências elementares que aparecem com muita frequência na Matemática e merecem destaques para serem usadas como ferramentas para a construção de um pensamento recursivo. Desta forma estabeleceremos várias definições e propriedades válidas para sequências em geral.

É bom ressaltar que estaremos tratando sempre das sequências infinitas, e deixaremos a cargo do leitor fazer as devidas adaptações para as sequências finitas.

1.1.1 Definição de Sequências e Fórmulas Posicionais

Para determinarmos uma sequência numérica precisamos de uma lei de formação.

Exemplo 1.1.1. A sequência definida pela lei de formação $a_n = 2n - 1$ com $n \in \mathbb{N}$, onde $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ e a_n é o termo que ocupa a n -ésima posição na sequência. Por esse motivo, a_n é chamado de termo geral da sequência.

Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, na qual temos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, e definimos como sequência uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. E esta função é chamada de sequência de números reais, na qual indicamos a sequência por seus valores:

$$f = (f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots).$$

Definição 1.1.1. Dizemos que a sequência (a_k) com $k \geq 1$ dos quadrados perfeitos é dada por $f = (f(1), f(2), f(3), \dots, f(k), \dots) = (1^2, 2^2, 3^2, \dots, k^2, \dots)$. Portanto, temos que $a_1 = 1^2$, $a_2 = 2^2$, $a_3 = 3^2$ e de maneira mais geral, $a_k = k^2$ para $k \geq 1$ inteiro.

É importante salientar que para sequências definidas por fórmulas posicionais, é muito frequente e útil listar os termos da mesma a partir do zero, isto é, estamos considerando $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ e a notação passa a ser (a_k) com $k \geq 0$, o que a princípio parece ser estranho, uma vez que o primeiro termo da sequência seria a_0 , o segundo seria a_1 , etc.

No entanto, torna-se necessário no sentido de simplificar a fórmula posicional que define os valores dos termos da sequência, é oportuno agir assim.

Diante do exposto na definição (1.1.1) como seria a fórmula posicional para as sequências dos quadrados perfeitos para os casos em que (a_k) com $k \geq 0$?

A fórmula posicional para a sequência dos quadrados perfeitos em que (a_k) com $k \geq 0$ seria dada por: $a_k = (k + 1)^2$, para todo $k \geq 0$.

$$\begin{aligned} a_0 &= (0 + 1)^2 = 1^2 && \text{(primeiro quadrado perfeito da sequência).} \\ a_1 &= (1 + 1)^2 = 2^2 && \text{(segundo quadrado perfeito da sequência).} \\ a_2 &= (2 + 1)^2 = 3^2 && \text{(terceiro quadrado perfeito da sequência).} \\ &\vdots \\ a_k &= [(k - 1) + 1]^2 = k^2 && \text{(k-ésimo termo quadrado perfeito da sequência).} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observamos que uma alternativa a fórmulas posicionais para os termos de uma sequência é uma definição recursiva, ou por recorrência, que é uma técnica matemática que permite definir sequências, conjuntos, operações ou até mesmo algoritmos partindo de problemas particulares para problemas genéricos. E tem como procedimento especificar um ou mais termos iniciais da sequência e a partir daí trabalhar com etapas para calcular os demais termos em função dos seus anteriores, isto é, encontrar qualquer termo da sequência em função do(s) antecessor(es) imediato(s).

Trataremos mais formalmente do conceito de recorrência no capítulo (3), mas já fazemos alusão ao tema por está presente em conteúdos algébricos e geométricos do ensino básico, e em especial destacamos os tópicos de progressões que podem ser tratados com rigor e formalização a partir deste conceito.

1.2 Progressões

1.2.1 Considerações Iniciais

O estudo das sequências elementares podem ser iniciado pelas progressões aritméticas e geométricas que são conteúdos bastante explorados nas primeiras séries iniciais do ensino médio, e devem ser transmitidos aos alunos de forma que possa ser feito uma construção de ideias a cerca do tema a partir de um pensamento recursivo.

1.2.2 Progressão Aritmética

Uma sequência (a_k) com $k \geq 1$ de números reais é uma progressão aritmética, costumeiramente com a notação PA, se existir um número real r constante, denominado de razão da PA, tal que a recorrência $a_{k+1} = a_k + r$, seja satisfeita para todo inteiro $k \geq 1$.

O número real r constante, razão da PA, está definido como a diferença de dois termos consecutivos quaisquer da PA, neste caso a diferença entre os termos a_{k+1} e a_k .

É importante observar que para uma PA está completamente determinada é necessário que além de sua razão r , conhecermos seu termo inicial a_1 .

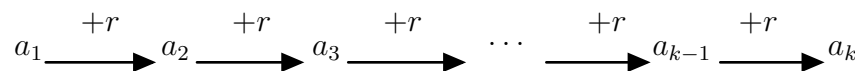
Por exemplo a sequência (a_k) com $k \geq 1$ dada por $a_1 = 5$ e $a_{k+1} = a_k + 2$ para $k \geq 1$ é uma PA de primeiro termo 5 e razão 2, formalmente determinada pela recorrência que deve ser satisfeita pelo valor 5 do termo inicial e seria definida assim: A PA é $(5, 7, 9, 11, \dots)$.

Caso a sequência tivesse sido definida somente pela recorrência $a_{k+1} = a_k + 2$ para todo $k \geq 1$, não teríamos uma só PA, pois dependeria da escolha do termo inicial.

PROPOSIÇÃO 1.2.1. *Se (a_k) com $k \geq 1$ é uma PA de razão r , então:*

1. $a_k = a_1 + (k - 1)r$, para todo $k \geq 1$.
2. $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$, para todo $n \geq 1$.

Demonstração. **Prova do item (1):** Construiremos um diagrama dos k termos da sequência.



Fica claro que:

Para chegar a a_2 a partir de a_1 preciso realizar 1 passo.

Para chegar a a_3 a partir de a_1 preciso realizar 2 passos.

Para chegar a a_4 a partir de a_1 preciso realizar 3 passos.

E assim por diante.

Seguindo esse raciocínio serão necessários $k - 1$ passos, onde cada passo se resume a somar r a um termo. Logo para obter a_k temos que somar $(k - 1)r$ ao termo a_1 , ou seja,

$$a_k = a_1 + (k - 1)r.$$

■

Demonstração. Prova do item (2): A partir do diagrama abaixo, podemos fazer a seguinte construção:

$$a_1 \xrightarrow{+r} a_2 \xrightarrow{+r} a_3 \xrightarrow{+r} \cdots \xleftarrow{-r} a_{n-2} \xleftarrow{-r} a_{n-1} \xleftarrow{-r} a_n$$

Podemos concluir que:

$$a_1 + a_n = (a_2 - r) + (a_{n-1} + r) = a_2 - r + a_{n-1} + r = a_2 + a_{n-1},$$

$$a_2 + a_{n-1} = (a_3 - r) + (a_{n-2} + r) = a_3 - r + a_{n-2} + r = a_3 + a_{n-2},$$

na qual segue que: $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \dots = a_n + a_1$.

Temos a soma $S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$, e escrevendo a soma de trás para frente (S_2), teremos, $S_2 = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1$.

Fazendo a soma de S_1 e S_2 que representa o mesmo valor teremos:

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1). \quad (1.2.1)$$

Podemos observar na equação (1.2.1) que, ao passar de um parêntese para o seguinte, a primeira parcela aumenta de r e a segunda diminui de r , o que não altera a soma. E justifica que todos os parênteses são iguais ao primeiro, $(a_1 + a_n)$.

E como são n parênteses, teremos:

$$2S = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ parcelas}}$$

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \implies S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

■

As fórmulas dos itens (1) e (2) da proposição (1.2.1) são conhecidas respectivamente como as fórmulas para o termo geral e soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética.

1.2.3 Progressão Geométrica

Uma sequência (a_k) com $k \geq 1$ de números reais é uma progressão geométrica, costumeiramente com a notação PG, se existe um número real q constante tal que a recorrência $a_{k+1} = q \cdot a_k$, é satisfeita para todo inteiro $k \geq 1$.

Assim como as progressões aritméticas, o número real q em destaque na definição de uma PG representa a razão da mesma. Podemos observar que, se $q = 0$, então $a_k = 0$ para todo $k > 1$. Por outro lado, se $q = 1$, então $a_k = a_1$, para todo $k \geq 1$.

Uma PG também só estará completamente determinada se dela conhecermos o primeiro termo a_1 e a razão q .

Exemplo 1.2.1. A sequência (a_k) com $k \geq 1$ dada por $a_1 = 5$ e $a_{k+1} = 2 \cdot a_k$ para $k \geq 1$ é uma PG de primeiro termo 5 e razão 2, formalmente determinada pela recorrência que deve ser satisfeita e pelo valor 5 do termo inicial com a seguinte definição: Essa PG teria os seguintes termos $(5, 10, 20, 40, \dots)$.

Seguindo o mesmo raciocínio do estudo das progressões aritméticas, o resultado seguinte apresenta as fórmulas para o termo geral e para a soma dos k primeiros termos de uma PG.

PROPOSIÇÃO 1.2.2. *Se (a_k) com $k \geq 1$ é uma PG de razão q , então:*

1. $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$, para todo $k \geq 1$.
2. Se $q \neq 1$, então $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{q - 1}$, para todo $n \geq 1$.

Demonstração. **Prova do item (1):** A demonstração segue o mesmo raciocínio utilizado para mostrar a fórmula posicional do termo geral da progressão aritmética. Construiremos também um diagrama dos k termos da sequência.

Conforme diagrama segue,

$$a_1 \xrightarrow{\times q} a_2 \xrightarrow{\times q} a_3 \xrightarrow{\times q} \cdots \xrightarrow{\times q} a_{k-1} \xrightarrow{\times q} a_k$$

Fica claro que:

Para chegar a a_2 a partir de a_1 preciso realizar 1 passo.

Para chegar a a_3 a partir de a_1 preciso realizar 2 passos.

Para chegar a a_4 a partir de a_1 preciso realizar 3 passos.

E assim por diante.

Desta forma serão $k - 1$ passos, onde cada passo se resume a multiplicar um termo por q . Logo, temos de multiplicar a_1 por q um total de $k - 1$ vezes, e daí $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$. ■

Demonstração. Prova do item (2): A demonstração será indicada por S_n a soma desejada, isto é, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$, e multiplicando por q , obtemos.

$q \cdot S_n = q \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) = qa_1 + qa_2 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$, na qual equivale as somas dos seguintes termos gerais.

$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 \cdots + a_n + a_{n+1}$. Segue que:

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ q \cdot S_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1}. \end{cases}$$

Fazendo as subtrações das equações no sistema acima, temos:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1} \implies S_n(1 - q) = a_1 - a_{n+1} \implies S_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{q - 1}. \quad \blacksquare$$

As fórmulas dos itens (1) e (2) da proposição (1.2.2) são conhecidas respectivamente como as fórmulas para o termo geral e soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.

2 Pensamento recursivo

Esta seção teve como referencial teórico a obra Matemática Discreta da Coleção Profmat e material em vídeo do programa de aperfeiçoamento para professores do ensino básico proferido pelo professor Augusto César Morgado disponibilizado pelo IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, destaca-se que há uma carência muito grande dos programas de matemática que valorizem os raciocínios recursivos com mais frequência em conteúdos de matemática do ensino básico.

Embora, percebamos o crescimento e a evolução da tecnologia em diversas áreas do conhecimento, nota-se que é extremamente importante e se torna cada vez mais necessário saber raciocinar recursivamente, mas infelizmente esta prática não está sendo realizada em muitas salas de aula que se trabalha matemática.

Iremos apresentar alguns problemas que serão resolvidos a partir do uso de um raciocínio recursivo.

2.1 Problema das lâmpadas numa bancada

O problema central a ser resolvido consiste em determinar o número maneiras que 10 lâmpadas podem ser dispostas (ligadas ou desligadas), sendo que duas lâmpadas consecutivas não podem estar ligadas.

Para resolver este problema, iremos enunciar um problema mais simples e a partir daí resolveremos o problema central.

Problema 2.1.1. Havia uma bancada de 5 lâmpadas, cada uma delas poderia está ligada ou desligada. De quantos modos essas lâmpadas podem está ligada ou desligada de tal forma que duas lâmpadas adjacentes não estejam ligadas ao mesmo tempo.

Solução: Resolveremos primeiro este problema por trata-se de uma bancada com poucas lâmpadas na qual facilitará mostrar todas as configurações possíveis para o entendimento do raciocínio recursivo.

Definiremos o status das lâmpadas como L e D , sendo respectivamente Ligada

e Desligada. As configurações possíveis podem ser:

1. Nenhuma lâmpada está ligada.

Nesta configuração teremos as cinco lâmpadas desligadas ($DDDDD$), o que acarreta em uma possibilidade.

2. Apenas uma Lâmpada está ligada.

Nesta configuração teremos cinco possibilidades, que seguem ($LDDDD$), ($DLDDD$), ($DDLDD$), ($DDDDL$) e ($DDDDL$).

3. Duas lâmpadas estão ligadas.

Nesta configuração teremos seis possibilidades, que seguem ($LDLDD$), ($LDDLD$), ($LDDDL$), ($DLDDL$), ($DLDDL$) e ($DDLDD$).

4. Três lâmpadas estão ligadas.

Nesta configuração teremos apenas uma possibilidade, que segue ($LDLDD$).

Assim sendo, não é possível ter a configuração de quatro lâmpadas ligadas, o que se tornaria impossível ligar quatro lâmpadas nessa bancada de cinco lâmpadas sem termos duas lâmpadas adjacentes ligadas. Então a solução são 13 possibilidades, que corresponde a soma de cada caso apresentado $1 + 5 + 6 + 1 = 13$.

Partindo para o problema central iremos resolver o problema da bancada de 10 lâmpadas raciocinando recursivamente, ou seja, fazendo um raciocínio por recorrência.

Problema 2.1.2. Havia uma bancada de 10 lâmpadas, cada uma delas poderia está ligada ou desligada. De quantos modos essas lâmpadas podem está ligada ou desligada de tal forma que duas lâmpadas adjacentes não estejam ligadas ao mesmo tempo.

A solução por recorrência de um problema de tamanho n será expressa em função do mesmo problema para casos menores, isto é, a solução do problema da bancada de 10 lâmpadas será resolvido a partir da solução de uma bancada com um tamanho menor de lâmpadas.

Expressaremos A_n como a solução do problema para o caso n . E A_n ficará em termos das soluções para tamanho menores.

Para contar o número de soluções para um problema com uma bancada de tamanho n , o raciocínio será da seguinte forma, deve-se somar o número de maneiras de

arrumar a bancada quando a primeira lâmpada estiver apagada com o número de soluções quando a primeira lâmpada estiver acesa. A representação inicial da solução do problema segue conforme notação abaixo.

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}.$$

A vantagem desse raciocínio em abrir o problema em dois casos aparentemente com o mesmo nível de dificuldade é a de que o meu problema de tamanho n ficou expressado em dois problemas menores.

$$\begin{array}{ll} D \underbrace{\text{-----} \dots \text{-----}}_{1^{\text{a}} \text{ lâmpada desligada (caso } A_{n-1})} & \text{bancada com } n-1 \text{ lâmpadas.} \\ LD \underbrace{\text{-----} \dots \text{-----}}_{1^{\text{a}} \text{ lâmpada ligada (caso } A_{n-2})} & \text{bancada com } n-2 \text{ lâmpadas.} \end{array}$$

Segue que o problema de tamanho A_n foi aberto em dois casos menores, A_{n-1} que representa o problema quando a primeira lâmpada está desligada e A_{n-2} representa quando a primeira lâmpada está ligada.

Logo, $\boxed{A_n = A_{n-1} + A_{n-2}}$ é uma recorrência para resolver o problema, embora não sendo obtido uma fórmula fechada, temos uma fórmula recorrente que dá a solução do problema se conhecermos a solução para problemas menores.

É possível obtermos a solução do problema para uma bancada com dez lâmpadas, pois é possível encontrar a solução para a bancada de uma e duas lâmpadas.

Na bancada de uma lâmpada podemos ter somente duas possibilidades, ou a lâmpada está acesa ou apagada. Assim sendo, temos $A_1 = 2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} L \\ D \end{array} \right.$$

Na bancada de duas lâmpadas temos três possibilidades $A_2 = 3$.

$$\left\{ \begin{array}{l} LD \\ DD \\ DL \end{array} \right.$$

Desta forma como já temos a solução para os casos de bancada com uma e duas lâmpadas é possível a partir da recorrência $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ encontrar a solução para a situação na qual a bancada possui dez lâmpadas. Conforme o uso da recorrência.

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$$

$$A_3 = A_2 + A_1 = 3 + 2 = 5$$

$$A_4 = A_3 + A_2 = 5 + 3 = 8$$

$$A_5 = A_4 + A_3 = 8 + 5 = 13$$

$$A_6 = A_5 + A_4 = 13 + 8 = 21$$

$$A_7 = A_6 + A_5 = 21 + 13 = 34$$

$$A_8 = A_7 + A_6 = 34 + 21 = 55$$

$$A_9 = A_8 + A_7 = 55 + 34 = 89$$

$$A_{10} = A_9 + A_8 = 89 + 55 = 144.$$

Logo $A_{10} = 144$, então temos 144 possibilidades na bancada de dez lâmpadas de tal forma que duas lâmpadas adjacentes não estejam ligadas ao mesmo tempo.

2.2 Problemas de Sequências definidas recursivamente

Problema 2.2.1. Quantos são as sequências de n termos todos iguais a 0 ou a 1 , que possuem um número ímpar de termos iguais a 0 ?

Solução: O ponto essencial deste problema está na restrição de que a sequência deve ter um número ímpar de termos iguais a 0 .

Caso não houvesse essa restrição, a solução do problema seria 2^n , ou seja, cada termo da sequência poderia assumir as duas opções.

$$\underbrace{\quad \quad \quad \cdot \cdot \cdot \quad \quad \quad}_{n \text{ termos}}$$

Expressaremos A_n como a solução do problema para tamanho n . E A_n ficará em termos das soluções para tamanho menores. Desta forma iremos abrir o problema em casos menores para reduzir o tamanho do problema conforme a natureza do primeiro elemento.

$$A_n = \underbrace{\text{primeiro elemento sendo } 1}_{1^\circ \text{ caso}} + \underbrace{\text{primeiro elemento sendo } 0}_{2^\circ \text{ caso}}$$

Os casos podem ser ilustrados da seguinte forma:

$$1^\circ \text{ Caso: } 1 \underbrace{\text{---} \text{---} \text{---} \cdots \text{---}}_{\text{primeiro elemento sendo } 1}$$

O problema ficou com uma quantidade ímpar de zeros só que agora com uma redução para o caso $n - 1$, designado de A_{n-1} .

$$2^\circ \text{ Caso: } 0 \underbrace{\text{---} \text{---} \text{---} \cdots \text{---}}_{\text{primeiro elemento sendo } 0}$$

Para não criarmos uma nova variável no problema, é preciso que agora haja uma quantidade par de zeros, para que tenhamos no total uma quantidade ímpar de zero.

Desta forma a expressão que representará a sequência com uma quantidade par de zeros será dada pela diferença entre a quantidade total de números da sequência pela quantidade ímpar de zero.

A expressão matemática para este caso é dada por:

$$2^{n-1} - A_{n-1}.$$

A solução do problema para o tamanho n será dada somando os dois casos apresentados.

$$A_n = A_{n-1} + (2^{n-1} - A_{n-1}) \implies A_n = 2^{n-1}.$$

Problema 2.2.2. Quantas são as sequências de 10 termos, com elementos todos pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2\}$ que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0?

Solução: Expressaremos A_n como a solução do problema para tamanho n . E A_n ficará em termos das soluções para casos menores. Desta forma iremos abrir o problema em casos menores para reduzir o tamanho do problema conforme a natureza do primeiro elemento, que pode ser 1, 2 ou 0.

$$A_n = \underbrace{1^\circ \text{ elemento sendo } 1}_{1^\circ \text{ caso}} + \underbrace{1^\circ \text{ elemento sendo } 2}_{2^\circ \text{ caso}} + \underbrace{1^\circ \text{ elemento sendo } 0}_{3^\circ \text{ caso}}$$

As sequências terão as seguintes configurações:

1 — — — — — — — — — — , o problema ficou reduzido para o tamanho $n-1$.

2 — — — — — — — — — — , o problema ficou reduzido para o tamanho $n-1$.

0 1 — — — — — — — — — — , o problema ficou reduzido para o tamanho $n-2$.

0 2 — — — — — — — — — — , o problema ficou reduzido para o tamanho $n-2$.

Os problemas de tamanho $n-1$ e $n-2$ serão denotados respectivamente por A_{n-1} e A_{n-2} .

A solução do problema para o tamanho n será dada somando todos os casos possíveis da sequência que são iniciados por 1, 2 e 0.

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-1} + A_{n-2} + A_{n-2} \implies A_n = 2A_{n-1} + 2A_{n-2}.$$

Para a sequência de um elemento (A_1) temos três possibilidades.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2. \end{array} \right.$$

Para a sequência de dois elementos (A_2) temos oito possibilidades.

$$\left\{ \begin{array}{ll} 01 & 02 \\ 10 & 11 \\ 12 & 20 \\ 21 & 22. \end{array} \right.$$

Desta forma como já temos a solução para sequências de um e dois termos é possível a partir da recorrência $A_n = 2A_{n-1} + 2A_{n-2}$ encontrar a solução para a situação na qual a sequência possui dez termos, pertencentes a $\{0, 1, 2\}$ que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0. Usando o pensamento recursivo.

$$A_1 = 3$$

$$A_2 = 8$$

$$A_3 = 2A_2 + 2A_1 = 6 + 16 = 22$$

$$A_4 = 2A_3 + 2A_2 = 44 + 16 = 60$$

$$A_5 = 2A_4 + 2A_3 = 120 + 44 = 164$$

$$A_6 = 2A_5 + 2A_4 = 328 + 120 = 448$$

$$A_7 = 2A_6 + 2A_5 = 896 + 328 = 1224$$

$$A_8 = 2A_7 + 2A_6 = 2448 + 896 = 3344$$

$$A_9 = 2A_8 + 2A_7 = 6688 + 2448 = 9136$$

$$A_{10} = 2A_9 + 2A_8 = 18272 + 6688 = 24960.$$

Logo $A_{10} = 24960$, então temos 24960 possibilidades na qual a sequência possui dez termos, pertencentes a $\{0, 1, 2\}$ que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0.

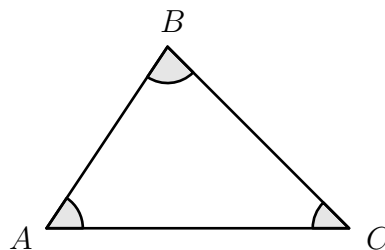
2.3 Pensamento recursivo em polígonos

2.3.1 Soma dos ângulos internos de um polígono convexo

Escreveremos uma fórmula de recorrência para a soma dos ângulos internos de um polígono convexo. É de conhecimento matemático que para escrever uma fórmula de recorrência é necessário ter a lei de formação e um ponto de partida, conforme exemplos já apresentados.

O nosso ponto de partida é o triângulo, pois não existe polígonos convexos com menos de três lados. No nosso caso o ponto de partida será designado por S_3 . Sendo S_3 a soma dos ângulos internos de um polígono de três lados. E a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180° .

Figura 2.1: Soma dos ângulos internos de um triângulo

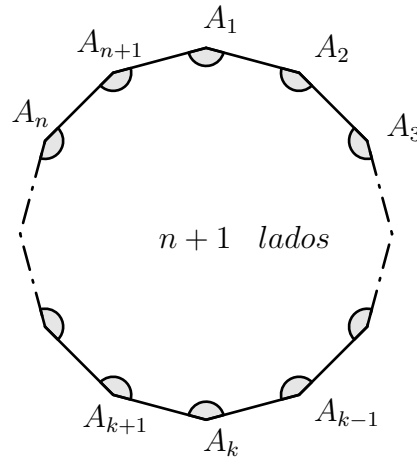


Fonte: O Autor

Desta forma temos $S_3 = 180^\circ$, ou seja, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

Iremos generalizar o nosso raciocínio com um polígono de $n + 1$ lados.

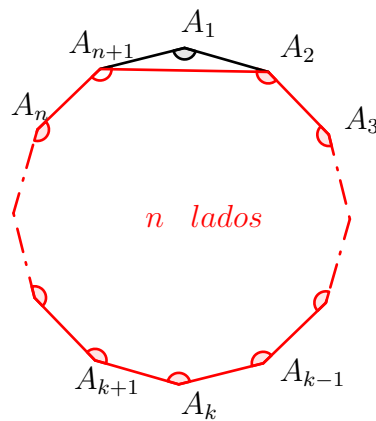
Figura 2.2: Polígono de $n + 1$ lados



Fonte: O Autor

Considerando o polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_nA_{n+1}$, temos os pontos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$ que são os vértices do polígono e os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_{n+1}}$, são os lados do polígono. O nosso objetivo é calcular a soma dos ângulos internos deste polígono de $n + 1$ lados. Sem perda de generalidade traçaremos um segmento unindo os vértices A_{n+1} e A_2 formando $\overline{A_{n+1}A_2}$. Criando assim um novo polígono $A_2A_3A_4 \cdots A_nA_{n+1}$ destacado em vermelho conforme figura (2.3).

Figura 2.3: Soma dos ângulos internos de um polígono de $n + 1$ lados



Fonte: O Autor

Podemos observar que o polígono $A_2A_3A_4 \cdots A_nA_{n+1}$ terá um lado a menos, ou seja, o polígono destacado possui n lados.

A soma dos ângulos internos deste polígono de n lados será designado pela notação S_n .

E para completar o problema em questão que é a soma dos ângulos internos do polígono de $n + 1$ lados será dado pela soma dos ângulos internos do polígono $A_2A_3A_4 \cdots A_nA_{n+1}$ de n lados com a soma dos ângulos internos do triângulo $A_1A_2A_{n+1}$ verificado no polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_nA_{n+1}$. Então, temos:

$$S_{n+1} = S_n + 180^\circ.$$

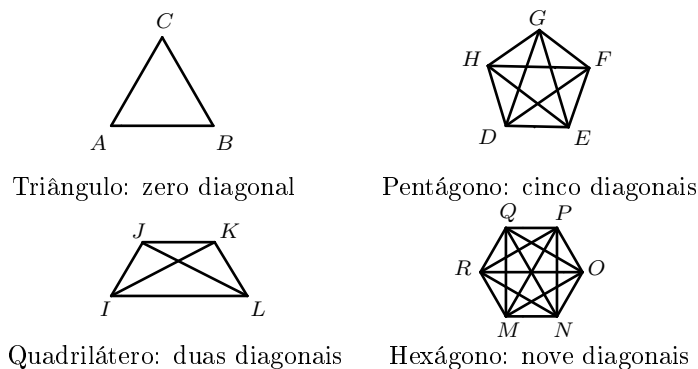
Desta forma está criado a fórmula de recorrência para a soma dos ângulos internos de um polígono de $n + 1$ lados.

$$\begin{cases} S_3 = 180^\circ \\ S_{n+1} = S_n + 180^\circ. \end{cases}$$

2.3.2 Número de diagonais de um polígono convexo

Esta seção teve como referencial teórico a obra de Oswaldo Dolce e José Nicolau Pompeo, Fundamentos de Matemática Elementar volume 9, define-se diagonal de um polígono como um segmento cujas extremidades são vértices não consecutivos do polígono. Da geometria plana, seguem alguns polígonos com seus respectivos números de diagonais.

Figura 2.4: Diagonais de polígonos



Fonte: O Autor

Podemos observar uma importante propriedade para construirmos a fórmula de recorrência para o número de diagonais de um polígono convexo qualquer.

De cada vértice A_i ($1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$) observado de um polígono de n lados percebemos que todos os segmentos que partem de cada vértice A_i são diagonais exceto os segmentos $\overline{A_{i-1}A_i}$, $\overline{A_{i+1}A_i}$ e $\overline{A_iA_i}$, que são respectivamente lado, lado e o próprio vértice A_i .

Daí segue que de cada vértice parte uma quantidade de segmentos que são diagonais, com exceção dos três casos já mencionados. Desta forma de cada vértice partem $n - 3$ diagonais, sendo n o número de lados.

Para uma melhor visualização do nosso argumento iremos generalizar nosso raciocínio para um polígono de $n + 1$ lados.

Considerando o polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_nA_{n+1}$ com $n + 1$ lados, conforme figura (2.2), é fácil observar que o mesmo possui $n + 1$ vértices.

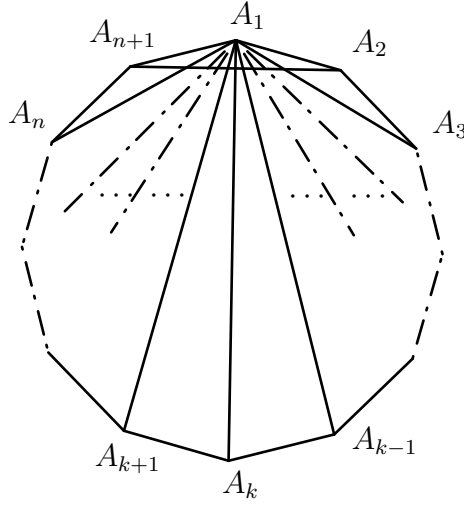
E nosso objetivo é descrever a quantidade de diagonais que este polígono de $n + 1$ lados possui. Usando a mesma estratégia do problema da soma dos ângulos internos de um polígono iremos traçar sem perda de generalidade um segmento que une os vértices A_{n+1} e A_2 ($\overline{A_{n+1}A_2}$) na qual origina o polígono $A_2A_3A_4 \cdots A_nA_{n+1}$, conforme mostrado na figura (2.3), com um lado a menos, ou seja, n lados.

No polígono $A_2A_3A_4 \cdots A_nA_{n+1}$ de n lados teremos uma quantidade de diagonais que chamaremos de D_n .

Verificando o polígono de $n + 1$ lados podemos observar que todas as diagonais D_n do polígono $A_2A_3A_4 \cdots A_nA_{n+1}$ de n lados pertencem ao polígono de $n + 1$ lados.

Para encontrar as demais diagonais do polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_nA_{n+1}$ devemos acrescentar a diagonal $\overline{A_{n+1}A_2}$.

E com a inclusão do vértice A_1 será possível a construção de outras diagonais que não existiam no polígono $A_2A_3A_4 \cdots A_nA_{n+1}$ de n lados. E deste vértice A_1 serão construídas $(n + 1) - 3$ diagonais, conforme figura (2.5).

Figura 2.5: Número de diagonais de um polígono de $n + 1$ lados

Fonte: O Autor

Desta forma serão construídos $n + 1$ segmentos a partir do vértice A_1 na qual deveremos desconsiderar os segmentos $\overline{A_1 A_{n+1}}$, $\overline{A_1 A_2}$ e $\overline{A_1 A_1}$ que não representam diagonais do polígono de $n + 1$ lados. Daí segue recursivamente que:

$$D_{n+1} = D_n + 1 + [(n + 1) - 3]$$

$$D_{n+1} = D_n + 1 + (n + 1 - 3)$$

$$D_{n+1} = D_n + 1 + n - 2$$

$$D_{n+1} = D_n + n - 1.$$

E usando o triângulo como ponto de partida, a lei de recorrência do número de diagonais de um polígono qualquer é dada por:

$$\begin{cases} D_3 = 0 \\ D_{n+1} = D_n + n - 1. \end{cases}$$

Com estas duas expressões definimos a sequência que corresponde ao número de diagonais dos polígonos convexos.

Usando a fórmula de recorrência, verificaremos o número de diagonais dos quadriláteros, pentágonos e hexágonos já mostrados na figura (2.4).

$D_3 = 0$, corresponde ao triângulo.

$D_4 = 0 + 3 - 1 = 2$, corresponde ao quadrilátero.

$D_5 = 2 + 4 - 1 = 5$, corresponde ao pentágono.

$D_6 = 5 + 5 - 1 = 9$, corresponde ao hexágono.

3 Recorrência

Nesta seção teremos como fundamentação teórica as seguintes obras, livro texto **Matemática Discreta da Coleção Profmat** e **A Matemática do Ensino Médio volume 2** da coleção do professor de matemática da SBM - Sociedade Brasileira de Matemática como alicerce de nossas definições, teoremas e exemplos relacionados ao estudo das equações de recorrências.

3.1 Recorrência e fórmulas fechadas

Recorrência ou relação de recorrência é uma técnica matemática que por intermédio de uma regra permite calcular qualquer termo em função do(s) termo(s) anterior(es).

Exemplo 3.1.1. A sequência (X_n) dos números naturais ímpares pode ser definida por $X_{n+1} = X_n + 2$, com $X_1 = 1$ e $n \geq 1$.

As relações de recorrência são formadas por duas partes importantes. A primeira parte refere-se as condições iniciais que devem ser conhecidas relacionadas aos termos iniciais da sequência. E a segunda parte é a relação de recorrência que vem em forma de uma equação, e será a regra que permitirá calcular cada termo da sequência em função dos seus anteriores.

É oportuno destacar que dada uma recorrência é possível gerar várias sequências distintas. Para isso, é necessário que sejam informados o(s) primeiro(s) termo(s) a partir dos quais os demais termos serão obtidos a partir dos anteriores.

No Exemplo (3.1.1), caso seja alterado o termo inicial passaremos a ter uma nova sequência de números, conforme Exemplo (3.1.2).

Exemplo 3.1.2. A sequência (X_n) dos números naturais pares pode ser definida por $X_{n+1} = X_n + 2$, com $X_1 = 2$ e $n \geq 1$.

Observa-se a mesma fórmula de recorrência nos Exemplos (3.1.1) e (3.1.2) representando duas sequências distintas de números na medida que temos termos iniciais diferentes.

O processo de encontrar a fórmula de recorrência de uma sequência é de grande relevância para estimular e desenvolver o processo de raciocínio matemático dos alunos, uma vez que os mesmos terão oportunidades de construir e desenvolver estratégias de resolução de problemas até que se encontre uma fórmula fechada.

A partir das fórmulas de recorrência é possível encontrar uma fórmula fechada para uma determinada sequência recorrente, desde que conheçamos sua regra e o(s) termo(s) anterior(es) que define o termo geral. Nas fórmulas de recorrências da Seção (2.3) que trata da soma dos ângulos internos e do número de diagonais de um polígono convexo percebe-se que para calcular por exemplo o número de diagonais de um polígono de 20 lados é necessário conhecer o número de diagonais de polígonos com menos de 20 lados, ou seja, é necessário construir o número de diagonais de um polígono de 3 lados, 4 lados, 5 lados até chegar ao polígono de 20 lados.

Com o uso da fórmula fechada, o problema ficará em função do número de lados do polígono, sem a necessidade de fazer o cálculo de diagonais em polígonos com menos lados.

Face ao exposto construiremos a partir da fórmula de recorrência uma fórmula fechada para a soma dos ângulos internos e para o número de diagonais de um polígono em função do número de lados deste polígono.

Segue a fórmula fechada para a soma dos ângulos internos de um polígono a partir da fórmula de recorrência na Subseção (2.3.1).

$$\begin{cases} S_3 = 180^\circ \\ S_{n+1} = S_n + 180^\circ. \end{cases}$$

Escreve-se as linhas iniciais a partir do polígono de 3 lados, e em seguida usamos a regra de recorrência que estabelece que o próximo valor da soma é igual ao valor atual mais 180° , até chegarmos no polígono de n lados que será a soma dos ângulos internos do polígono de $n - 1$ lados mais 180° , conforme lista ordenada que segue.

$$\begin{aligned}
S_3 &= 180^\circ \\
S_4 &= S_3 + 180^\circ \\
S_5 &= S_4 + 180^\circ \\
&\vdots \\
S_{n-1} &= S_{n-2} + 180^\circ \\
S_n &= S_{n-1} + 180^\circ \\
\hline
\cancel{S_3} + \cancel{S_4} + \cdots + \cancel{S_{n-1}} + S_n &= \cancel{S_3} + \cancel{S_4} + \cdots + \cancel{S_{n-1}} + \underbrace{180^\circ + 180^\circ + \cdots + 180^\circ}_{n-2 \text{ parcelas}}
\end{aligned}$$

Podemos observar que a lista possui $n - 2$ linhas e somando ambos os lados de todas as igualdades, e por conseguinte foi aplicado a lei do cancelamento da adição, originando a fórmula fechada da soma dos ângulos internos de um polígono convexo.

$$S_n = 180 \cdot (n - 2), \text{ para } n \geq 3.$$

Prosseguiremos com raciocínio análogo para encontrar uma fórmula fechada para o número de diagonais de um polígono convexo.

Segue a fórmula fechada para o número de diagonais de um polígono convexo a partir da fórmula de recorrência na Subseção (2.3.2).

$$\begin{cases} D_3 = 0 \\ D_{n+1} = D_n + n - 1. \end{cases}$$

Fazendo uma lista inicial a partir do polígono com 3 lados até chegarmos na forma generalizada a um polígono com n lados.

$$\begin{aligned}
D_3 &= 0 \\
D_4 &= D_3 + 3 - 1 \\
D_5 &= D_4 + 4 - 1 \\
&\vdots \\
D_{n-1} &= D_{n-2} + (n - 2) - 1 \\
D_n &= D_{n-1} + (n - 1) - 1 \\
\hline
\cancel{D_3} + \cancel{D_4} + \cdots + \cancel{D_{n-1}} + D_n &= \cancel{D_3} + \cancel{D_4} + \cdots + \cancel{D_{n-1}} + \underbrace{2 + 3 + \cdots + (n - 2)}_{n-3 \text{ parcelas}}
\end{aligned}$$

Então restou uma soma de $(n - 3)$ números que estão em uma progressão aritmética, e usaremos a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética apre-

sentada no Item 2 da Proposição (1.2.1).

$$D_n = \frac{[2 + (n - 2)] \cdot (n - 3)}{2}$$

$$D_n = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}, \text{ para } n \geq 3.$$

Encontrando uma fórmula fechada para o Exemplo (3.1.1) da sequência dos números naturais ímpares com $X_1 = 1$ para $n \geq 1$.

A fórmula de recorrência dada é: $X_{n+1} = X_n + 2$ com $X_1 = 1$ e $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} X_1 &= 1 \\ X_2 &= X_1 + 2 \\ X_3 &= X_2 + 2 \\ &\vdots \\ X_{n-1} &= X_{n-2} + 2 \\ X_n &= X_{n-1} + 2 \end{aligned}$$

$$\cancel{X_1} + \cancel{X_2} + \cdots + \cancel{X_{n-1}} + X_n = 1 + \cancel{X_1} + \cancel{X_2} + \cdots + \cancel{X_{n-1}} + \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n \text{ parcelas}}$$

Daí segue,

$$X_n = 2n + 1 \text{ para } X_1 = 1 \text{ com } n \geq 1.$$

Podemos classificar os diversos tipos de sequências recorrentes conforme sua relação de:

Ordem:

Dizemos que uma sequência recorrente possui uma *Ordem* k com $k \in \mathbb{N}$, quando o termo geral depende de k termos anteriores.

Exemplo 3.1.3.

$$\begin{cases} X_1 = \frac{3}{5} \\ X_{n+1} = \frac{1}{3 + X_n}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

O termo geral depende apenas de um termo anterior, ou seja, o termo geral X_{n+1} depende apenas de X_n . Logo a ordem desta sequência definida por recorrência é de 1ª ordem ($k = 1$).

Exemplo 3.1.4.

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

A sequência F_n , dita de Fibonacci ¹, é de 2ª ordem, ou seja, o termo geral depende de dois termos imediatamente anteriores ($k = 2$).

Linearidade:

Dizemos que uma sequência recorrente é dita linear quando a função que relaciona cada termo aos termos anteriores é linear, ou seja, a equação de recorrência for do mesmo modelo que a equação do primeiro grau. Caso contrário, será denominada não linear.

Exemplo 3.1.5.

$$\begin{cases} A_1 = 1, A_2 = 3 \\ A_n = 3A_{n-1} + 2A_{n-2}, \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Observa-se que esta sequência de 2ª ordem possui um termo como combinação linear dos termos anteriores. Logo a sequência recorrente é dita linear.

Segue um contra-exemplo, ou seja, uma sequência recorrente não linear.

Exemplo 3.1.6.

$$\begin{cases} A_1 = 3, A_2 = 5 \\ A_n = 3(A_{n-1})^3 - 2A_{n-2}, \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Observa-se que esta sequência de 2ª ordem não possui um termo como combinação linear dos termos anteriores. Desta forma a sequência recorrente é dita não linear.

Termo independente ou homogeneidade:

A sequência será dita homogênea se o termo independente for nulo.

Exemplo 3.1.7.

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ A_n = 2A_{n-1}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

¹É uma sequência ou sucessão de números inteiros, começando normalmente por 0 e 1, na qual cada termo subsequente corresponde à soma dos dois anteriores, será estudada com mais detalhes na seção (4.2) do capítulo de Aplicações de Recorrência.

A sequência de 1º ordem é dita homogênea, pois o termo independente desta sequência recorrente é nulo.

Exemplo 3.1.8.

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ A_n = 2A_{n-1} + 5n, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Temos agora uma sequência de 1º ordem dita não homogênea, pois o termo independente é não nulo.

Exemplo 3.1.9.

$$\begin{cases} A_1 = 1, A_2 = 3 \\ A_n = 2A_{n-1} - n^2 A_{n-2}, \quad n \geq 3. \end{cases}$$

A sequência de 2ª ordem é dita homogênea, pois o termo independente desta sequência recorrente é nulo.

Fica evidente que dado qualquer sequência recorrente é possível classificá-la simultaneamente em relação à ordem, linearidade e homogeneidade. Conforme exemplo:

Exemplo 3.1.10.

$$\begin{cases} A_1 = 3, A_2 = 5 \\ A_n = 3A_{n-1} + 2A_{n-2} + 3n, \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Em relação à ordem é dita de 2ª ordem pois depende de dois termos imediatamente anteriores. É linear, pois possui um termo como combinação linear dos termos anteriores. Em relação ao termo independente é dita não homogênea, pois possui termo independente não nulo.

3.2 Recorrência Linear de primeira ordem

Fundamentados no livro **Tópico de Matemática Elementar volume 1 - Números Reais** da SBM - Sociedade Brasileira de Matemática iniciaremos esta seção com duas definições que serão de suma importância para escrever as notações no estudo das recorrências lineares.

As notações que serão inseridas no nosso estudo, usaremos os símbolos $\sum$ (lê-se sigma) para somas e $\prod$ (lê-se pi) para produtos, as quais terão um papel fundamental no contexto do estudo das sequências.

Definição 3.2.1. Dada uma sequência $(a_k)_{k \geq 1}$, escrevemos $\sum_{j=1}^n a_j$ para denotar a seguinte soma $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, e lemos o somatório dos a_j , para $1 \leq j \leq n$.

Assim,

$$\sum_{j=1}^n a_j = \begin{cases} a_1 & , \text{ se } n = 1 \\ a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, & \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

Em particular se $(a_k)_{k \geq 1}$ for uma sequência constante, digamos com $a_k = c$ para todo $k \geq 1$, teremos:

$$\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{j=1}^n c = nc.$$

Uma das vantagens da notação usando o símbolo $\sum$ se deve ao fato dela tornar fácil a manipulação de somas com um número grande de parcelas.

Essa notação $\sum$ é particularmente útil para fazermos cancelamentos em somas. Mais precisamente, dada uma sequência $(a_k)_{k \geq 1}$, efetuando os cancelamentos intermediários na soma.

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}).$$

Obtemos $(a_n - a_1)$ como resultado. Com o uso da notação $\sum$, podemos escrever tal igualdade como:

$$\sum_{j=1}^{n-1} (a_{j+1} - a_j) = a_n - a_1.$$

Essa soma é conhecida como **soma telescópica**. A ideia do nome surge porque a visão do telescópio encurta a imensa distância de um corpo celeste a nossos olhos, a soma encurta o caminho entre uma soma inicial de muitas parcelas e o cálculo do resultado da mesma.

Definição 3.2.2. Dada uma sequência $(a_k)_{k \geq 1}$, escrevemos $\prod_{j=1}^n a_j$ para denotar o produto $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$, e lemos o produtório dos a_j , para $1 \leq j \leq n$.

Assim,

$$\prod_{j=1}^n a_j = \begin{cases} a_1 & , \text{ se } n = 1 \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n, & \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

Com o uso da notação $\prod$, podemos denotar o fatorial de $n \in \mathbb{N}$, escrevendo.

$$n! = \prod_{j=1}^n j, \text{ ou seja, } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Analogamente ao caso de somatórios, a notação $\prod$ é particularmente útil para a realização de cancelamentos em produtos. Daí segue o mesmo raciocínio para **produtos telescópicos**, conforme definição (3.2.3).

Definição 3.2.3. Se $(a_k)_{k \geq 1}$ é uma sequência de reais não nulos, então:

$$\prod_{j=1}^n \frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{a_{n+1}}{a_1}, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{\cancel{a_2}}{a_1} \cdot \frac{\cancel{a_3}}{\cancel{a_2}} \cdot \frac{\cancel{a_4}}{\cancel{a_3}} \cdot \dots \cdot \frac{\cancel{a_n}}{\cancel{a_{n-1}}} \cdot \frac{a_{n+1}}{\cancel{a_n}} = \frac{a_{n+1}}{a_1}$$

Feita as devidas definições sobre somatório e produtório iremos tratar do estudo das recorrências lineares de 1ª ordem.

Uma recorrência de 1ª ordem expressa X_{n+1} em função de X_n . Ela é dita linear de 1ª ordem quando a lei que define os elementos da sequência for da forma:

$$X_{n+1} = g(n)X_n + h(n), \text{ com } g(n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Onde $g(n)$ e $h(n)$ são funções de $n \in \mathbb{N}$.

Dizemos que a recorrência é homogênea no caso que $h(n) = 0$.

3.2.1 Resolução de Recorrências Lineares de primeira ordem homogênea

A equação da recorrência linear de 1ª ordem homogênea é do tipo $X_{n+1} = g(n)X_n$. Para resolver estas recorrências será utilizado o método dos produtos telescópicos de forma que seja feito o cancelamento de alguns termos para que possamos escrever X_n em função de n .

$$X_2 = g(1)X_1$$

$$X_3 = g(2)X_2$$

$$X_4 = g(3)X_3$$

$$\vdots$$

$$X_n = g(n-1)X_{n-1}$$

$$\cancel{X_2} \cdot \cancel{X_3} \cdot \cancel{X_4} \cdot \dots \cdot \cancel{X_{n-1}} \cdot X_n = g(1) \cdot g(2) \cdot g(3) \cdot \dots \cdot g(n-1) \cdot X_1 \cdot \cancel{X_2} \cdot \cancel{X_3} \cdot \dots \cdot \cancel{X_{n-1}}$$

Ao multiplicar as igualdades e aplicando a lei do cancelamento do produto obtemos:

$$X_n = X_1 \prod_{j=1}^{n-1} g(j).$$

Exercício 3.2.1. Resolva $X_{n+1} = nX_n$, $X_1 = 1$ e calcule o valor do milésimo termo, ou seja, X_{1000} .

Solução:

$$X_2 = 1X_1$$

$$X_3 = 2X_2$$

$$X_4 = 3X_3$$

$$\vdots$$

$$X_n = (n-1)X_{n-1}$$

$$\cancel{X_2} \cdot \cancel{X_3} \cdot \cancel{X_4} \cdot \dots \cdot \cancel{X_{n-1}} \cdot X_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot X_1 \cdot \cancel{X_2} \cdot \cancel{X_3} \cdot \dots \cdot \cancel{X_{n-1}}$$

Ao multiplicar as igualdades e aplicando a lei do cancelamento do produto, obtemos:

$$X_n = (n-1)!X_1.$$

Como $X_1 = 1$, temos que:

$$X_n = (n-1)!$$

Desta forma temos uma fórmula fechada que permite calcular qualquer termo em função de n , no nosso caso particular X_{1000} .

$$X_{1000} = (1000-1)!$$

$$X_{1000} = 999!.$$

3.2.2 Resolução de Recorrências Lineares de primeira ordem não homogênea

Dividiremos o estudo das recorrências lineares de 1ª ordem não homogênea em dois casos:

1º caso: $X_{n+1} = X_n + h(n)$.

Para resolver essas recorrências será utilizado o método das somas telescópicas de forma que seja feito o cancelamento aditivo de alguns termos para que possamos escrever X_n em função de n .

$$X_2 = X_1 + h(1)$$

$$X_3 = X_2 + h(2)$$

$$X_4 = X_3 + h(3)$$

$$\vdots$$

$$X_n = X_{n-1} + h(n-1)$$

$$\cancel{X_2} + \cancel{X_3} + \cdots + \cancel{X_{n-1}} + X_n = X_1 + \cancel{X_2} + \cancel{X_3} + \cdots + \cancel{X_{n-1}} + h(1) + \cdots + h(n-1)$$

Ao somar as igualdades e aplicando a lei do cancelamento aditivo, obtemos:

$$X_n = X_1 + \sum_{j=1}^{n-1} h(j).$$

Exercício 3.2.2. Qual o trigésimo termo da recorrência $X_{n+1} = X_n + 3^n$, com $X_1 = 1$?

$$X_2 = X_1 + 3^1$$

$$X_3 = X_2 + 3^2$$

$$X_4 = X_3 + 3^3$$

$$\vdots$$

$$X_n = X_{n-1} + 3^{n-1}$$

$$\cancel{X_2} + \cancel{X_3} + \cdots + \cancel{X_{n-1}} + X_n = X_1 + \cancel{X_2} + \cancel{X_3} + \cdots + \cancel{X_{n-1}} + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}$$

Ao somar e aplicar a lei do cancelamento aditivo, temos:

$$X_n = X_1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1}.$$

Como $X_1 = 1$, temos que $X_n = 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1}$ é uma progressão geométrica, logo a soma dos termos é dada por:

$$X_n = \frac{1(3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Então o trigésimo termo da recorrência é $X_{30} = \frac{3^{30} - 1}{2}$.

2º caso: $X_{n+1} = g(n)X_n + h(n)$.

Para resolver este tipo de recorrência iremos utilizar um teorema que terá como objetivo transformar qualquer recorrência linear não homogênea de primeira ordem da forma $X_{n+1} = g(n)X_n + h(n)$ numa do tipo $Y_{n+1} = Y_n + t(n)$ que será facilmente resolvida utilizando os procedimentos do 1º caso.

Teorema 3.2.1. *Se a_n é solução não nula da recorrência $X_{n+1} = g(n)X_n$, então a substituição $X_n = a_n Y_n$ transforma a recorrência $X_{n+1} = g(n)X_n + h(n)$ em $Y_{n+1} = Y_n + h(n) [g(n) \cdot a_n]^{-1}$.*

Demonstração. A substituição $X_n = a_n Y_n$ transforma $X_{n+1} = g(n)X_n + h(n)$ em $a_{n+1} Y_{n+1} = g(n) a_n Y_n + h(n)$.

Portanto $a_{n+1} = g(n) a_n$, pois a_n é solução de $X_{n+1} = g(n)X_n$. Então, a equação se transforma em $g(n) a_n Y_{n+1} = g(n) a_n Y_n + h(n)$. E multiplicando as igualdades da equação por $\frac{1}{g(n)}$ e depois por $\frac{1}{a(n)}$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(n)} g(n) a_n Y_{n+1} &= \frac{1}{g(n)} g(n) a_n Y_n + \frac{1}{g(n)} h(n) \\ a_n Y_{n+1} &= a_n Y_n + h(n) [g(n)]^{-1}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$Y_{n+1} = Y_n + h(n) [g(n) \cdot a_n]^{-1}.$$

■

Exercício 3.2.3. Resolver a recorrência $X_{n+1} = 3X_n + 3^n$, com $X_1 = 2$.

Uma solução não nula de $X_{n+1} = 3X_n$ é $X_n = 3^{n-1}$, qualquer progressão geométrica de razão 3, não nula, conforme segue:

$$\begin{aligned} X_2 &= 3X_1 \\ X_3 &= 3X_2 \\ X_4 &= 3X_3 \\ &\vdots \\ X_n &= 3X_{n-1} \end{aligned}$$

$$\cancel{X_2} \cdot \cancel{X_3} \cdot \cancel{X_4} \cdot \dots \cdot \cancel{X_{n-1}} \cdot X_n = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{n-1 \text{ fatores}} \cdot X_1 \cdot \cancel{X_2} \cdot \cancel{X_3} \cdot \dots \cdot \cancel{X_{n-1}}$$

Daí segue que,

$$X_n = 3^{n-1} X_1.$$

É claro que como não foi prescrito o valor de X_1 , há uma infinidade de soluções para a recorrência $X_n = C \cdot 3^{n-1}$, onde C é uma constante arbitrária, na qual confirma para este exemplo qualquer progressão geométrica de razão 3, não nula.

Então $X_n = 3^{n-1}$ (ou qualquer outra progressão geométrica de razão 3) é um exemplo de solução não nula de $X_{n+1} = 3X_n$.

Façamos a substituição $X_n = 3^{n-1} Y_n$, obtemos:

$$X_{n+1} = 3X_n + 3^n$$

$$3^n \cdot Y_{n+1} = 3 \cdot 3^{n-1} Y_n + 3^n$$

Multiplicando as igualdades por $\frac{1}{3^n}$

$$\frac{1}{3^n} \cdot 3^n \cdot Y_{n+1} = \frac{1}{3^n} (3 \cdot 3^{n-1} Y_n + 3^n)$$

Segue que,

$$Y_{n+1} = Y_n + 1.$$

Daí temos, Y_n uma progressão aritmética de razão 1, logo:

$$Y_2 = Y_1 + 1$$

$$Y_3 = Y_2 + 1$$

$$Y_4 = Y_3 + 1$$

$$\vdots$$

$$Y_{n-1} = Y_{n-2} + 1$$

$$Y_n = Y_{n-1} + 1$$

$$\cancel{Y_2} + \cancel{Y_3} + \cdots + \cancel{Y_{n-1}} + Y_n = Y_1 + \cancel{Y_2} + \cancel{Y_3} + \cdots + \cancel{Y_{n-1}} + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n-1 \text{ parcelas}}$$

Então,

$$Y_n = Y_1 + (n-1) \cdot 1$$

Como $X_n = 3^{n-1} Y_n$ e $X_1 = 2$, temos:

$$X_1 = 3^0 \cdot Y_1 \implies 2 = Y_1 \implies Y_1 = 2.$$

E substituindo $Y_1 = 2$ em $Y_n = Y_1 + (n - 1) \cdot 1$, temos:

$$Y_n = 2 + (n - 1) \cdot 1$$

$$Y_n = 2 + n - 1$$

$$Y_n = n + 1.$$

Portanto a solução $X_n = 3^{n-1} \cdot Y_n$ é,

$$X_n = 3^{n-1} \cdot (n + 1) \implies X_n = (n + 1) \cdot 3^{n-1}.$$

3.3 Recorrência Linear de segunda ordem

Inicialmente definiremos as recorrências lineares de segunda ordem a partir de sua caracterização e posteriormente mostraremos a resolução de recorrências homogêneas e não homogêneas com coeficientes constantes.

Uma recorrência é dita linear de segunda ordem quando aparece na equação de recorrência um termo em função de seus dois antecessores imediatos.

Uma recorrência linear de segunda ordem é uma recorrência do tipo,

$$X_{n+2} + g(n)X_{n+1} + f(n)X_n + h(n) = 0.$$

As funções g , f e h têm como domínio o conjunto dos números naturais e $f(n)$ é uma função não nula, caso contrário a recorrência será de primeira ordem.

Além disso, se $h(n) = 0$ a recorrência é dita homogênea, caso contrário ela será não homogênea.

Nesta seção, estudaremos apenas o caso em que as funções $g(n)$ e $f(n)$ são constantes, ou seja, as recorrências da forma:

$$X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = h(n), \text{ com } q \neq 0.$$

Exemplo 3.3.1. A recorrência $X_{n+2} = 10X_{n+1} + 5X_n$ é dita recorrência linear de segunda ordem homogênea.

Exemplo 3.3.2. A recorrência $X_{n+2} = X_{n+1} - X_n + 10$ é dita recorrência linear de segunda ordem não homogênea.

3.3.1 Recorrências lineares de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes

A cada recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, da forma $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$, associaremos uma equação de 2º grau, $r^2 + pr + q = 0$, chamada de equação característica. A nossa suposição preliminar de que o termo $q \neq 0$ implica que 0 não é raiz da equação característica.

Exemplo 3.3.3. A recorrência $X_{n+2} = 5X_{n+1} - 6X_n$ tem equação característica $r^2 - 5r + 6 = 0$. As raízes da equação característica são:

$$r = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow r_1 = 3 \text{ e } r_2 = 2.$$

O Teorema (3.3.1) mostra que se as raízes da equação característica são r_1 e r_2 , então qualquer sequência da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2 .

Teorema 3.3.1. Se r_1 e r_2 são raízes de $r^2 + pr + q = 0$, então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2 .

Demonstração. Como $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$, iremos substituir a_n na recorrência.

$$C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} + p(C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}) + q(C_1 r_1^n + C_2 r_2^n) = 0.$$

Aplicando a distributividade e agrupando os termos semelhantes,

$$\begin{aligned} C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} + pC_1 r_1^{n+1} + pC_2 r_2^{n+1} + qC_1 r_1^n + qC_2 r_2^n &= 0 \\ (C_1 r_1^{n+2} + pC_1 r_1^{n+1} + qC_1 r_1^n) + (C_2 r_2^{n+2} + pC_2 r_2^{n+1} + qC_2 r_2^n) &= 0 \\ C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) &= 0. \end{aligned}$$

Como r_1 e r_2 são raízes por hipótese

$$C_1 r_1^n \cdot 0 + C_2 r_2^n \cdot 0 = 0.$$

Logo $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução. ■

Exemplo 3.3.4. A recorrência $X_{n+2} - 7X_{n+1} + 12X_n = 0$ tem $r^2 - 7r + 12 = 0$ como equação característica. As raízes da equação característica são 3 e 4. De acordo com o Teorema (3.3.1), todas as sequências da forma $a_n = C_1 3^n + C_2 4^n$ são soluções da recorrência.

O Teorema (3.3.2) mostra que, se $r_1 \neq r_2$, todas as soluções da recorrência têm a forma apontada no Teorema (3.3.1).

Teorema 3.3.2. Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, C_1 e C_2 constantes.

Demonstração. Seja y_n uma solução qualquer de $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$. Iremos determinar as constantes C_1 e C_2 que sejam soluções do sistema de equações,

$$\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1 \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2. \end{cases}$$

Da primeira equação temos,

$$C_1 = \frac{y_1 - C_2 r_2}{r_1}.$$

Substituindo C_1 na segunda equação do sistema,

$$\begin{aligned} \left(\frac{y_1 - C_2 r_2}{r_1} \right) r_1^2 + C_2 r_2^2 &= y_2 \\ \frac{y_1 r_1^2 - C_2 r_2 r_1^2}{r_1} + C_2 r_2^2 &= y_2 \\ y_1 r_1^2 - C_2 r_2 r_1^2 + C_2 r_2^2 r_1 &= y_2 r_1 \\ C_2 r_2^2 r_1 - C_2 r_2 r_1^2 &= y_2 r_1 - y_1 r_1^2 \\ C_2 (r_2^2 r_1 - r_2 r_1^2) &= y_2 r_1 - y_1 r_1^2 \\ C_2 &= \frac{r_1 y_2 - r_1^2 y_1}{r_2 r_1 (r_2 - r_1)}. \end{aligned}$$

Substituindo C_2 na primeira equação do sistema,

$$\begin{aligned} C_1 r_1 &= y_1 - C_2 r_2 \\ C_1 r_1 &= y_1 - \frac{r_1 y_2 - r_1^2 y_1}{r_2 r_1 (r_2 - r_1)} r_2 \\ C_1 r_1 &= y_1 - \frac{r_2 r_1 y_2 - r_2 r_1^2 y_1}{r_2 r_1 (r_2 - r_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 r_1 &= \frac{y_1 r_2 r_1 (r_2 - r_1) - r_2 r_1 y_2 + r_2 r_1^2 y_1}{r_2 r_1 (r_2 - r_1)} \\
C_1 r_1 &= \frac{y_1 r_2^2 r_1 - \cancel{y_1 r_2 r_1^2} - r_2 r_1 y_2 + \cancel{r_2 r_1^2 y_1}}{r_2 r_1 (r_2 - r_1)} \\
C_1 r_1 &= \frac{y_1 r_2^2 r_1 - r_2 r_1 y_2}{r_2 r_1 (r_2 - r_1)} \\
C_1 &= \frac{r_2^2 y_1 r_1 - r_2 r_1 y_2}{r_2 r_1 (r_2 - r_1)} \cdot \frac{1}{r_1} \\
C_1 &= \cancel{r_1} \frac{r_2^2 y_1 - r_2 y_2}{r_2 r_1 (r_2 - r_1)} \cdot \frac{1}{\cancel{r_1}} \\
C_1 &= \frac{r_2^2 y_1 - r_2 y_2}{r_2 r_1 (r_2 - r_1)}.
\end{aligned}$$

Isso é possível pois $r_1 \neq r_2$ e $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$.

Afirmamos que $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ para todo n natural, o que provará o teorema.

Com efeito, seja $z_n = y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n .

Então segue,

$$\begin{aligned}
z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n &= (y_{n+2} - C_1 r_1^{n+2} - C_2 r_2^{n+2}) + p (y_{n+1} - C_1 r_1^{n+1} - C_2 r_2^{n+1}) + \\
&\quad + q (y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n &= y_{n+2} - C_1 r_1^{n+2} - C_2 r_2^{n+2} + p y_{n+1} - p C_1 r_1^{n+1} - p C_2 r_2^{n+1} + \\
&\quad + q y_n - q C_1 r_1^n - q C_2 r_2^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n &= (y_{n+2} + p y_{n+1} + q y_n) + (-C_1 r_1^{n+2} - p C_1 r_1^{n+1} - q C_1 r_1^n) + \\
&\quad + (-C_2 r_2^{n+2} - p C_2 r_2^{n+1} - q C_2 r_2^n)
\end{aligned}$$

$$z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n = (y_{n+2} + p y_{n+1} + q y_n) - C_1 r_1^n (r_1^2 + p r_1 + q) - C_2 r_2^n (r_2^2 + p r_2 + q).$$

O primeiro parêntese é igual a zero porque y_n é solução de,

$$X_{n+2} + p X_{n+1} + q X_n = 0.$$

Os dois últimos parênteses são iguais a zero porque r_1 e r_2 são raízes de $r^2 + p r + q = 0$.

Então,

$$z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n = 0.$$

Além disso, como $C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1$ e $C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2$, temos $z_1 = z_2 = 0$.

Mas, se $z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, então $z_n = 0$ para todo n . ■

Exercício 3.3.1. Determinar as soluções da recorrência $X_{n+2} + 5X_{n+1} + 6X_n = 0$.

A equação característica $r^2 + 5r + 6 = 0$, tem raízes,

$$r = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$$r_1 = -2 \text{ e } r_2 = -3.$$

De acordo com os Teoremas (3.3.1) e (3.3.2), as soluções da recorrência são as sequências da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, ou seja, $a_n = C_1 (-2)^n + C_2 (-3)^n$, onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Finalizando a solução de recorrências lineares de segunda ordem homogêneas, iremos enunciar os Teoremas (3.3.3) e (3.3.4) para mostrar como encontraremos a solução geral das recorrências lineares de segunda ordem homogêneas quando as raízes da equação característica forem iguais.

Teorema 3.3.3. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ é solução da recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2 .*

Demonstração. Se as raízes são iguais então $r = -\frac{p}{2}$. Substituindo $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ na recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$ teremos,

$$C_1 r^{n+2} + C_2 (n+2) r^{n+2} + p [C_1 r^{n+1} + C_2 (n+1) r^{n+1}] + q (C_1 r^n + C_2 n r^n) = 0$$

$$C_1 r^{n+2} + C_2 (n+2) r^{n+2} + p C_1 r^{n+1} + p C_2 (n+1) r^{n+1} + q C_1 r^n + q C_2 n r^n = 0$$

$$C_1 r^{n+2} + C_2 n r^{n+2} + 2 C_2 r^{n+2} + p C_1 r^{n+1} + n p C_2 r^{n+1} + p C_2 r^{n+1} + q C_1 r^n + q C_2 n r^n = 0.$$

Agrupando convenientemente os termos,

$$C_1 r^{n+2} + p C_1 r^{n+1} + q C_1 r^n + C_2 n r^{n+2} + n p C_2 r^{n+1} + q C_2 n r^n + 2 C_2 r^{n+2} + p C_2 r^{n+1} = 0$$

$$C_1 r^n (r^2 + pr + q) + C_2 n r^n (r^2 + pr + q) + C_2 r^n r (2r + p) = 0.$$

Como as raízes são iguais $\left(r = -\frac{p}{2}\right)$ por hipótese, temos

$$C_1 r^n \cdot 0 + C_2 n r^n \cdot 0 + C_2 r^n r \cdot 0 = 0.$$



Teorema 3.3.4. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluções da recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$, C_1 e C_2 constantes.*

Demonstração. Seja y_n uma solução qualquer de $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$. Determine constantes C_1 e C_2 que sejam soluções do sistema de equações.

$$\begin{cases} C_1 r + C_2 r = y_1 \\ C_1 r^2 + 2C_2 r^2 = y_2. \end{cases}$$

Da primeira equação temos,

$$C_1 = \frac{y_1 - C_2 r}{r}.$$

Substituindo C_1 na segunda equação do sistema,

$$\begin{aligned} \frac{y_1 - C_2 r}{r} r^2 + 2C_2 r^2 &= y_2 \\ r^2 \left(\frac{y_1 - C_2 r}{r} + 2C_2 \right) &= y_2 \\ r^2 \left(\frac{y_1 - C_2 r + 2C_2 r}{r} \right) &= y_2 \\ r(y_1 - C_2 r + 2C_2 r) &= y_2 \\ \frac{y_2}{r} &= y_1 - C_2 r + 2C_2 r \\ \frac{y_2}{r} - y_1 &= -C_2 r + 2C_2 r \\ C_2 r &= \frac{y_2 - r y_1}{r} \\ C_2 &= \frac{y_2 - r y_1}{r^2}. \end{aligned}$$

Substituindo C_2 na primeira equação do sistema,

$$\begin{aligned} C_1 r &= y_1 - \left(\frac{y_2 - r y_1}{r^2} \right) r \\ C_1 r &= y_1 - \left(\frac{y_2 - r y_1}{r} \right) \\ C_1 r &= \frac{y_1 r - y_2 + y_1 r}{r} \\ C_1 r &= \frac{2y_1 r - y_2}{r} \\ C_1 &= \frac{2y_1 r - y_2}{r^2} \\ C_1 &= 2\frac{y_1}{r} - \frac{y_2}{r^2}. \end{aligned}$$

Isso é possível pois $r \neq 0$.

Afirmamos que $y_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ para todo n natural, o que provará o teorema. Com efeito, seja $z_n = y_n - C_1 r^n - C_2 n r^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n .

$$\begin{aligned}
 z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n &= [y_{n+2} - C_1 r^{n+2} - C_2 (n+2) r^{n+2}] + \\
 &\quad + p [y_{n+1} - C_1 r^{n+1} - C_2 (n+1) r^{n+1}] + q (y_n - C_1 r^n - C_2 n r^n) \\
 z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n &= y_{n+2} - C_1 r^{n+2} - C_2 n r^{n+2} - C_2 2 r^{n+2} + p y_{n+1} - p C_1 r^{n+1} - \\
 &\quad - p C_2 n r^{n+1} - p C_2 r^{n+1} + q y_n - q C_1 r^n - q C_2 n r^n \\
 z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n &= (y_{n+2} + p y_{n+1} + q y_n) + (-C_1 r^{n+2} - p C_1 r^{n+1} - q C_1 r^n) + \\
 &\quad + (-C_2 n r^{n+2} - p C_2 n r^{n+1} - q C_2 n r^n) + (-C_2 2 r^{n+2} - p C_2 r^{n+1}) \\
 z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n &= (y_{n+2} + p y_{n+1} + q y_n) - C_1 r^n (r^2 + p r + q) - \\
 &\quad - C_2 n r^n (r^2 + p r + q) - C_2 r^n r (2r + p). \quad (3.3.1)
 \end{aligned}$$

Da equação (3.3.1) temos que a expressão do primeiro parêntese é igual a zero porque y_n é solução de $X_{n+2} + p X_{n+1} + q X_n = 0$. E a do segundo e terceiro parênteses são iguais a zero porque r é raiz de $r^2 + p r + q = 0$. A expressão do quarto parêntese é igual a zero porque $2r + p = 0$ já que, quando $r_1 = r_2 = r$, $r = -\frac{p}{2}$. Então $z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n = 0$.

Além disso, como $C_1 r + C_2 r = y_1$ e $C_1 r^2 + 2C_2 r^2 = y_2$, temos $z_1 = z_2 = 0$.

Mas se $z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, então $z_n = 0$ para todo n . ■

Exemplo 3.3.5. Determinar as soluções da recorrência $X_{n+2} - 6X_{n+1} + 9X_n = 0$.

A recorrência tem equação característica $r^2 - 6r + 9 = 0$, tem raízes iguais

$$r = \frac{6 \pm 0}{2}$$

$$r_1 = r_2 = 3.$$

A solução da recorrência é $X_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n$, onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

3.3.2 Recorrências lineares de segunda ordem não homogênea com coeficientes constantes

Lembrando que a recorrência linear de 2ª ordem $X_{n+2} + g(n)X_{n+1} + f(n)X_n + h(n) = 0$ é dita não homogênea quando $h(n) \neq 0$.

O Teorema (3.3.5) mostra um processo para resolver algumas recorrências não homogêneas.

Teorema 3.3.5. *Se a_n é uma solução da equação $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = h(n)$, então a substituição $X_n = a_n + Y_n$ transforma a equação em $Y_{n+2} + pY_{n+1} + qY_n = 0$.*

Demonstração. Substituindo X_n por $a_n + Y_n$ na equação, obtemos

$$\begin{aligned}(a_{n+2} + Y_{n+2}) + p(a_{n+1} + Y_{n+1}) + q(a_n + Y_n) &= h(n) \\ (a_{n+2} + Y_{n+2}) + (pa_{n+1} + pY_{n+1}) + (qa_n + qY_n) &= h(n) \\ (a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n) + (Y_{n+2} + pY_{n+1} + qY_n) &= h(n).\end{aligned}$$

Mas $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = h(n)$, pois a_n é solução da equação original. Logo, a equação se transformou em,

$$\begin{aligned}h(n) + Y_{n+2} + pY_{n+1} + qY_n &= h(n) \\ Y_{n+2} + pY_{n+1} + qY_n &= h(n) - h(n) \\ Y_{n+2} + pY_{n+1} + qY_n &= 0.\end{aligned}$$

■

De acordo com o teorema, a solução de uma recorrência não homogênea é constituída de duas parcelas: Uma solução qualquer da não homogênea e a solução da homogênea. A solução da homogênea, sabemos achar. Uma solução da não homogênea, procuraremos por tentativas.

Exemplo 3.3.6. Resolver a equação de recorrência $X_{n+2} - 5X_{n+1} + 6X_n = n$.

A recorrência $X_{n+2} - 5X_{n+1} + 6X_n = n$ tem equação característica $r^2 - 5r + 6 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$. Portanto, a solução da homogênea é $a_n = C_1 2^n + C_2 3^n$.

Devemos agora determinar uma solução particular Y_n da recorrência $X_{n+2} - 5X_{n+1} + 6X_n = n$, para que quando substituirmos Y_n em $X_{n+2} - 5X_{n+1} + 6X_n$ obtenhamos n . O problema é definir que tipo de função é Y_n .

Observando a recorrência n podemos supor intuitivamente que Y_n é um polinômio de 1º grau. Tentaremos $Y_n = An + B$. Substituímos Y_n em $X_{n+2} - 5X_{n+1} + 6X_n = n$, obtemos:

$$A(n+2) + B - 5[A(n+1) + B] + 6(An + B) = n$$

$$An + 2A + B - 5An - 5A - 5B + 6An + 6B = n$$

$$2An - 3A + 2B = n.$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned} 2A &= 1 \implies A = \frac{1}{2} \quad \text{e} \\ -3A + 2B &= 0 \implies -3 \cdot \frac{1}{2} + 2B = 0 \\ 2B &= \frac{3}{2} \implies B = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Daí,

$$Y_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}.$$

A solução da recorrência é a soma de a_n com Y_n . Portanto,

$$X_n = C_1 2^n + C_2 3^n + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}.$$

Exemplo 3.3.7. Resolver a recorrência $X_{n+2} - 5X_{n+1} + 6X_n = 1 + 3 \cdot 4^n$.

Conforme Exemplo (3.3.6), a recorrência $X_{n+2} - 5X_{n+1} + 6X_n = 1 + 3 \cdot 4^n$ tem solução homogênea $a_n = C_1 2^n + C_2 3^n$. Devemos agora determinar uma solução particular Y_n da recorrência $X_{n+2} - 5X_{n+1} + 6X_n = 1 + 3 \cdot 4^n$, para que quando substituirmos Y_n em $X_{n+2} - 5X_{n+1} + 6X_n$ obtenhamos $1 + 3 \cdot 4^n$. O problema é definir que tipo de função é Y_n .

Observando a recorrência $1 + 3 \cdot 4^n$ podemos supor intuitivamente que Y_n seja a soma de um polinômio de 1º grau com uma exponencial de base 4. Tentaremos $Y_n = An + B + C4^n$.

Substituímos Y_n em $X_{n+2} - 5X_{n+1} + 6X_n = 1 + 3 \cdot 4^n$ obtemos,

$$A(n+2) + B + C4^{n+2} - 5[A(n+1) + B + C4^{n+1}] + 6(An + B + C4^n) = 1 + 3 \cdot 4^n$$

$$An + 2A + B + C4^{n+2} - 5An - 5A - 5B - 5C4^{n+1} + 6An + 6B + 6C4^n = 1 + 3 \cdot 4^n$$

$$2An - 3A + 2B + 16C4^n - 20C4^n + 6C4^n = 1 + 3 \cdot 4^n$$

$$2An - 3A + 2B + 2C4^n = 1 + 3 \cdot 4^n.$$

Com isso, temos que

$$2A = 0 \implies A = 0$$

$$-3A + 2B = 1 \implies 2B = 1 \implies B = \frac{1}{2}$$

$$2C4^n = 3 \cdot 4^n \implies C = \frac{3}{2}.$$

Daí,

$$Y_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot 4^n.$$

A solução da recorrência é a soma de a_n com Y_n . Portanto,

$$X_n = C_1 2^n + C_2 3^n + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot 4^n.$$

Nos Exemplos (3.3.6) e (3.3.7) as tentativas de solução foram executadas com êxito, mas nem sempre a tentativa de resolução é imediata, podem ocorrer falhas e deve-se observar as composições das funções e tentar corrigir fazendo ajustes conforme verificaremos no Exemplo (3.3.8).

Exemplo 3.3.8. Resolver a recorrência $X_{n+2} - 6X_{n+1} + 9X_n = n - 3^n$.

A recorrência $X_{n+2} - 6X_{n+1} + 9X_n = n - 3^n$ tem equação característica $r^2 - 6r + 9 = 0$, cujas raízes são $r_1 = r_2 = 3$. Portanto, a solução da homogênea é $a_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n$.

Devemos agora determinar uma solução particular Y_n da recorrência $X_{n+2} - 6X_{n+1} + 9X_n = n - 3^n$, para que quando substituirmos Y_n em $X_{n+2} - 6X_{n+1} + 9X_n$ obtenhamos $n - 3^n$. O problema é definir que tipo de função Y_n .

Observando a recorrência $n - 3^n$ podemos supor intuitivamente que Y_n seja soma de um polinômio de 1º grau com uma exponencial de base 3. Tentaremos $Y_n = An + B + C3^n$.

Substituindo Y_n em $X_{n+2} - 6X_{n+1} + 9X_n = n - 3^n$ obtemos,

$$A(n+2) + B + C3^{n+2} - 6[A(n+1) + B + C3^{n+1}] + 9(An + B + C3^n) = n - 3^n$$

$$An + 2A + B + 9C3^n - 6An - 6A - 6B - 18C3^n + 9An + 9B + 9C3^n = n - 3^n$$

$$4An - 4A + 4B + 18C3^n - 18C3^n = n - 3^n$$

$$4An - 4A + 4B = n - 3^n.$$

Concluimos que a igualdade $4An - 4A + 4B = n - 3^n$ é impossível. Dessa forma, a recorrência não admite solução da forma $Y_n = An + B + C3^n$. O motivo dessa falha nessa primeira tentativa é que $C3^n$ é solução da homogênea.

Fazendo um ajuste na função $An + B + C3^n$ aumentando o grau, ou seja, multiplicando com o fator n , na composição devida temos $Y_n = An + B + Cn3^n$ como possível candidata a solução particular da recorrência.

Substituindo Y_n em $X_{n+2} - 6X_{n+1} + 9X_n = n - 3^n$ obtemos,

$$A(n+2) + B + C(n+2)3^{n+2} - 6[A(n+1) + B + C(n+1)3^{n+1}] + \\ + 9(An + B + Cn3^n) = n - 3^n$$

$$An + 2A + B + Cn3^{n+2} + 2C3^{n+2} - 6An - 6A - 6B - 6Cn3^{n+1} - 6C3^{n+1} + \\ + 9An + 9B + 9Cn3^n = n - 3^n$$

$$An + 2A + B + 9Cn3^n + 18C3^n - 6An - 6A - 6B - 18Cn3^n - 18C3^n + \\ + 9An + 9B + 9Cn3^n = n - 3^n$$

$$4An - 4A + 4B + 18Cn3^n - 18Cn3^n + 18C3^n - 18C3^n = n - 3^n$$

Então segue que,

$$4An - 4A + 4B = n - 3^n.$$

Novamente concluimos que a igualdade é impossível e a recorrência não admite solução $Y_n = An + B + Cn3^n$. E o motivo dessa falha é que $Cn3^n$ é solução da homogênea.

Seguindo o mesmo procedimento em corrigir o bloco, multiplicando por n , tentemos $Y_n = An + B + Cn^23^n$.

$$A(n+2) + B + C(n+2)^23^{n+2} - 6[A(n+1) + B + C(n+1)^23^{n+1}] + \\ + 9(An + B + Cn^23^n) = n - 3^n$$

$$An + 2A + B + C(n+2)^2 3^{n+2} - 6A(n+1) - 6B - 6C(n+1)^2 3^{n+1} + \\ + 9An + 9B + 9Cn^2 3^n = n - 3^n$$

$$An + 2A + B + C(n^2 + 4n + 4) 3^{n+2} - 6A(n+1) - 6B - 6C(n^2 + 2n + 1) 3^{n+1} + \\ + 9An + 9B + 9Cn^2 3^n = n - 3^n$$

$$An + 2A + B + Cn^2 3^{n+2} + 4Cn 3^{n+2} + 4C 3^{n+2} - 6An - 6A - 6B - 6Cn^2 3^{n+1} - \\ - 6C2n 3^{n+1} - 6C 3^{n+1} + 9An + 9B + 9Cn^2 3^n = n - 3^n$$

$$An + 2A + B + 9Cn^2 3^n + 36Cn 3^n + 36C 3^n - 6An - 6A - 6B - 18Cn^2 3^n - 36Cn 3^n - \\ - 18C 3^n + 9An + 9B + 9Cn^2 3^n = n - 3^n$$

$$4An - 4A + 4B + 18Cn^2 3^n - 18Cn^2 3^n + 36Cn 3^n - 36Cn 3^n + 36C 3^n - 18C 3^n = n - 3^n.$$

Daí segue que,

$$4An - 4A + 4B + 18C 3^n = n - 3^n$$

$$4A = 1 \implies A = \frac{1}{4}$$

$$-4A + 4B = 0 \implies -4 \cdot \frac{1}{4} + 4B = 0 \implies 4B = 1 \implies B = \frac{1}{4}$$

$$18C = -1 \implies C = -\frac{1}{18}$$

A solução particular é $Y_n = \frac{n}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{18}n^2 3^n$.

Logo a solução geral da recorrência é

$$X_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n + \frac{n}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{18}n^2 3^n.$$

4 Aplicações de Recorrências

Este capítulo enfatiza que trabalhar o raciocínio recursivo e o estudo das recorrências são grandes facilitadores na compreensão, interpretação e resolução de diversos problemas matemáticos no ensino básico.

Utilizar a ferramenta do pensamento recursivo com os alunos na resolução de determinados problemas de matemática no ensino básico agrega habilidades de observação, criatividade e motivação contribuindo ainda mais para o enriquecimento da percepção matemática.

Percebe-se que a cada dia as questões de matemática estão cada vez mais bem elaboradas exigindo concentração e competências dos nossos alunos, seja nos livros, nos exames avaliativos, exercícios que envolvam raciocínio lógico e olimpíadas de matemática.

Diante de questões bem elaboradas, evolução na leitura e resolução de problemas matemáticos no ensino básico torna-se cada vez mais importante a ação conjunta de professores e alunos em fortalecer e desenvolver métodos de resolução.

Estes métodos consistem em aplicar técnicas e estratégias de resolução que tem como perspectiva de modelar, desenvolver a criatividade e incentivar o pensamento recursivo em situações problemas matemáticos no ensino básico.

É oportuno fazer referência a duas competências ¹ de matemática da Base Nacional Comum Curricular - BNCC que justifica o uso de técnicas, estratégias e conteúdos que irão contribuir para melhorar o processo ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos na educação básica.

As competências aqui apresentadas são referentes a **terceira competência do ensino fundamental** e a **quinta competência do ensino médio**, ambas voltadas para uma melhor qualidade na resolução de problemas do ensino básico em conteúdos que envolvam matemática.

A terceira competência específica do ensino da matemática para o ensino fun-

¹Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

damental desperta um olhar inovador e inclusivo a questões centrais do processo ensino e aprendizagem de como atuar na leitura, interpretação e resolução de problemas em matemática, deixando o aluno livre para desenvolver o seu próprio raciocínio. Então conforme BNCC,

Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

Desta forma espera-se que os alunos desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações.

Na quinta competência específica do ensino da matemática para o ensino médio, conforme BNCC destaca-se que,

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Segue algumas aplicações do estudo de recorrência na modelagem de situações problemas matemáticos no ensino básico com o intuito de contribuir, incentivar e motivar ainda mais o interesse dos nossos alunos pelos conteúdos e objetos matemáticos.

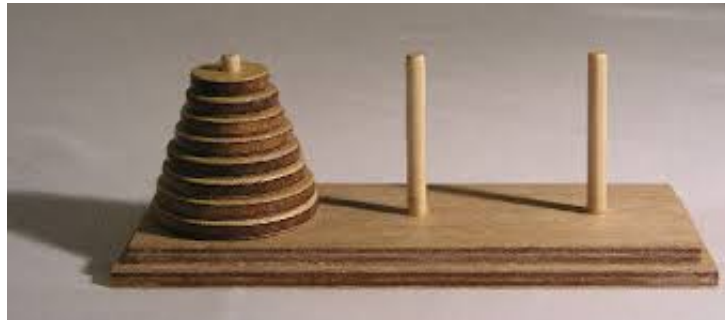
4.1 Torre de Hanói

Nesta seção estudaremos o familiar jogo Torre de Hanói que segundo Andreas M. Hinz et al. (2013) na sua obra *The Tower of Hanoi - Myths and Maths* foi inventada pelo matemático francês Edouard Lucas² em 1883.

²Francois Édouard Anatole Lucas nascido em 04 de abril de 1842 na cidade francesa de Amiens e trabalhou a parte posterior de sua curta vida nas escolas de Paris. Eminentemente teórico dos números publicou a partir de 1882 uma série de quatro volumes "Récréations Mathématiques" realizado postumamente em 1894.

A figura (4.1) mostra a estrutura do quebra cabeça que possui uma base contendo três pinos, onde em um deles são dispostos oito discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo.

Figura 4.1: Torre de Hanói



Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Torre de Hanoi](https://pt.wikipedia.org/wiki/Torre_de_Hanoi)

O problema é transferir a torre de oito discos para qualquer dos dois pinos vazios no menor número possível de movimentos, movendo um disco de cada vez de forma que não seja colocado um disco maior em cima de outro menor.

Ainda segundo Andreas M. Hinz et al. (2013), o matemático Edouard Lucas, o inventor da Torre de Hanói, foi inspirado por uma lenda Hindu, o qual falava de um grande templo em Benares, cidade Santa da Índia, onde existia uma torre sagrada do bramanismo.

No grande templo de Benares, embaixo da cúpula que marca o centro do mundo, repousa uma placa de bronze na qual são fixadas três hastes de diamantes. Em uma dessas hastes, o Deus brama, na criação do mundo, colocou 64 discos de ouros, de forma que o disco de maior diâmetro ficasse apoiado sobre a placa de bronze e os outros ficando cada vez menores até o topo.

Os sacerdotes deveriam transferí-los para a terceira haste, usando a segunda haste como auxiliar. No processo de transferência deveria mover um disco de cada vez, de uma haste para outra, e jamais poderia colocar um disco sobre um outro de diâmetro menor. Quando todos estivessem colocados na terceira haste, o mundo acabaria. Por isso que a Torre de Hanói era também conhecida como quebra-cabeça do fim do mundo. Diante do exposto, pergunta-se:

Quantas transferências de n discos, de uma haste para outra, devem ser feitas

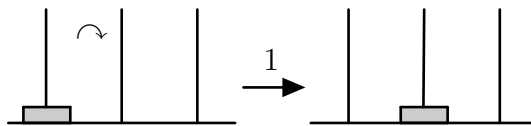
para colocá-los na terceira haste com menor número de movimentos possíveis?

Iremos modelar a solução deste problema por recorrência, isto é, pensaremos recursivamente. Suponha que são dados n discos e seja T_n o número mínimo de movimentos necessários para transferir todos os n discos de uma haste para outra obedecendo as regras de Lucas.

Para resolver este problema iremos analisar o que acontece com casos menores, em destaque T_1 , T_2 e T_3 .

No caso T_1 , ou seja, o número mínimo para transferir um disco de uma haste para outra, temos $T_1 = 1$, conforme figura (4.2).

Figura 4.2: Movimentação de um disco na Torre de Hanói

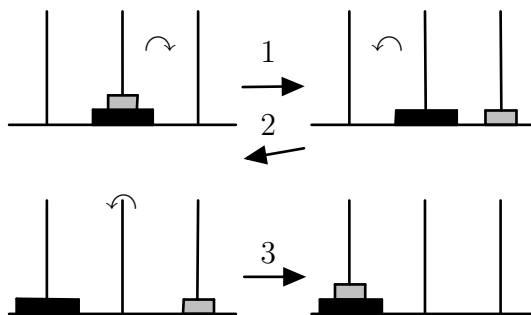


Fonte: O autor

Podemos observar que com apenas um movimento foi possível transferir o disco da haste esquerda para a haste central.

No caso T_2 , ou seja, o número mínimo para transferir dois discos de uma haste para outra com o menor número possível de movimentos é $T_2 = 3$. Conforme figura (4.3).

Figura 4.3: Movimentação de dois discos na Torre de Hanói

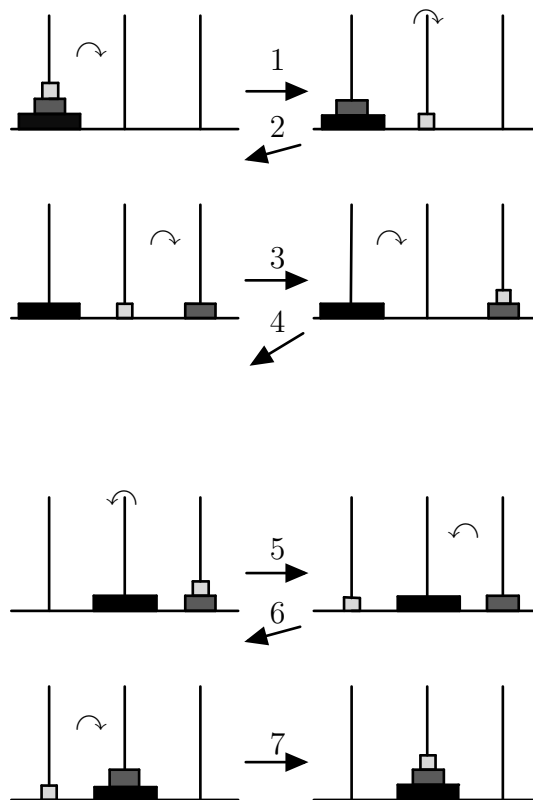


Fonte: O autor

Percebemos que com três movimentos foi possível transferir dois discos da haste central para a haste da esquerda.

No caso T_3 , ou seja, o número mínimo para transferir três discos de uma haste para outra com o menor número possível de movimentos é $T_3 = 7$. Conforme figura (4.4).

Figura 4.4: Movimentação de três discos na Torre de Hanói

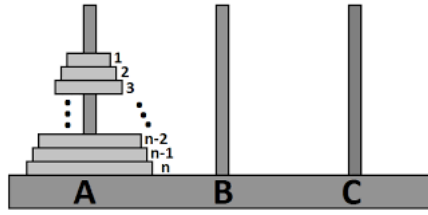


Fonte: O autor

Verificamos que com sete movimentos é possível transferir três discos da haste esquerda para a haste central.

Suponha que são dados n discos e seja T_n o número mínimo de movimentos necessários para transferir n discos de uma haste para outra segundo as regras de Lucas.

Imaginemos nosso quebra cabeça com n discos, conforme a figura (4.5).

Figura 4.5: Torre de Hanói com n discos

Fonte: <https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream>

Para transferir os n discos de uma haste para outra movimentaremos o conjunto dos $n - 1$ discos da haste esquerda para haste central respeitando as regras do jogo de forma que se faça com o menor número de movimentos possíveis que será representada por T_{n-1} .

Feita a transferência T_{n-1} , o próximo passo é movimentar o disco da base da haste A para haste C que será feito realizando apenas um movimento.

Para finalizar iremos deslocar o conjunto dos $n - 1$ discos da haste central para a haste da direita como menor número de movimentos possíveis, conforme já feito anteriormente representado por T_{n-1} .

Então a solução para movimentar uma pilha de n discos de uma haste para outra será representada pela recorrência,

$$T_n = T_{n-1} + 1 + T_{n-1}$$

$$T_n = 2T_{n-1} + 1.$$

Sabendo que nosso ponto de partida é $T_1 = 1$, temos então:

$$\begin{cases} T_n = 2T_{n-1} + 1 \\ T_1 = 1 \end{cases}$$

Temos então uma recorrência linear não homogênea de primeira ordem, na qual temos a seguinte solução, conforme Teorema (3.2.1).

Vamos primeiro resolver a recorrência sem o termo independente de T_n , ou seja, a recorrência linear de primeira ordem homogênea $T_n = 2T_{n-1}$ com $T_1 = 1$.

$$\begin{aligned}
T_2 &= 2T_1 \\
T_3 &= 2T_2 \\
T_4 &= 2T_3 \\
&\vdots \\
T_n &= 2T_{n-1}
\end{aligned}

$$\cancel{T_2} \cdot \cancel{T_3} \cdot \cancel{T_4} \cdot \dots \cdot \cancel{T_{n-1}} \cdot T_n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n-1 \text{ fatores}} \cdot T_1 \cdot \cancel{T_2} \cdot \cancel{T_3} \cdot \dots \cdot \cancel{T_{n-1}}$$$$

Daí segue que,

$$T_n = 2^{n-1} \cdot T_1 \implies T_n = 2^{n-1}.$$

Façamos a substituição $T_n = 2^{n-1}Y_n$ em $T_{n+1} = 2T_n + 1$, obtemos:

$$2^n \cdot Y_{n+1} = 2 \cdot 2^{n-1}Y_n + 1.$$

Multiplicando os dois termos da igualdade por $\frac{1}{2^n}$

$$\frac{1}{2^n} \cdot 2^n \cdot Y_{n+1} = \frac{1}{2^n} (2 \cdot 2^{n-1}Y_n + 1).$$

Segue que,

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2^n}.$$

Daí temos que,

$$\begin{aligned}
Y_2 &= Y_1 + \frac{1}{2^1} \\
Y_3 &= Y_2 + \frac{1}{2^2} \\
Y_4 &= Y_3 + \frac{1}{2^3} \\
&\vdots \\
Y_n &= Y_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

$$\cancel{Y_2} + \cancel{Y_3} + \dots + \cancel{Y_{n-1}} + Y_n = Y_1 + \cancel{Y_2} + \cancel{Y_3} + \dots + \cancel{Y_{n-1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Então pelo método das somas telescópicas obtemos o cancelamento aditivo de alguns termos resultando,

$$Y_n = Y_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Como $T_n = 2^{n-1}Y_n$ e $T_1 = 1$ temos que $Y_1 = 1$.

Fazendo a soma dos termos para uma progressão geométrica, teremos

$$Y_n = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2}} = (-2) \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \right] = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]$$

Portanto,

$$T_n = 2^{n-1}Y_n = 2^{n-1} \cdot 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] = 2^n \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] = 2^n - \frac{2^n}{2^n} = 2^n - 1$$

$$T_n = 2^n - 1.$$

Desta forma, podemos concluir que serão necessários para n discos no mínimo $2^n - 1$ movimentos para transferir de uma haste para outra, conforme as regras antes estabelecidas.

Assim sendo, verificaremos nos casos particulares com 2, 3, 4 e 5 discos.

$$T_2 = 2^2 - 1 = 3$$

$$T_3 = 2^3 - 1 = 7$$

$$T_4 = 2^4 - 1 = 15$$

$$T_5 = 2^5 - 1 = 31.$$

4.2 A Sequência de Fibonacci

Nesta seção temos como fundamentação teórica as obras “**Os números - a história de uma grande invenção**” de Georges Ifrah e “**História da Matemática**” de Carl B. Boyer e Uta C. Merzbach.

Uma das mais importantes sequências definidas por recorrência, é sem dúvida, a chamada sequência de Fibonacci.

Leonardo de Pisa, mais conhecido sob a alcunha de Fibonacci é natural de Pisa - Itália, e foi um importante matemático com várias contribuições no período da Idade Média.

O pai de Fibonacci, Bonaccio, era natural de Pisa e tinha várias atividades mercantis no norte da África. Fases as viagens de seu pai, Leonardo teve a oportunidade de estudar fora com um professor muçulmano e viajou pelo Egito, Síria e Grécia.

Fibonacci visitou a África muçulmana e conheceu o Oriente próximo. Foi ali que teve contato com mestres árabes, que lhe explicaram a fundo seu sistema numérico, as regras do cálculo algébrico e os princípios fundamentais da geometria.

Iniciado nesta ciência, redigiu em 1202 um admirável tratado denominado *Liber Abaci* que defendia a adoção do sistema de numeração indo-arábico.

Vários problemas do *Liber Abaci* são tão estimulantes que foram usados por autores posteriores. Sem dúvida, o problema de *Liber Abaci* que mais inspirou os futuros matemáticos foi o seguinte:

Quantos pares de coelhos serão produzidos em um ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?

Assumindo as seguintes hipóteses,

- No primeiro mês nasce apenas um casal;
- Casais amadurecem e reproduzem-se apenas após o segundo mês de vida;
- Não há problemas genéticos no cruzamento sanguíneo;
- Todos os meses, cada casal fértil dá a luz um novo casal;
- Os coelhos nunca morrem.

Esse problema célebre dá origem à sequência de Fibonacci,

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots, F_n, \dots$$

Sendo que $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, ou seja, em que cada termo após os dois primeiros é a soma dos dois imediatamente anteriores.

Construiremos uma tabela com relatos de quantitativos de coelhos para os primeiros 6 meses onde cada casal de coelhos serão catalogados em casais filhotes (**c**), ou seja, os recém-nascidos, casais jovens (**C**), os que possuem um mês de vida, e os casais adultos (**C**) que possuem dois ou mais meses de vida.

Tabela 4.1: Tabela Reprodução de coelhos

Meses (n)	Casais filhotes	Casais Jovens	Casais adultos	Total de Casais
0	c_1			1
1		C_1		1
2	c_2		C_1	2
3	c_3	C_2	C_1	3
4	c_4, c_5	C_3	C_1, C_2	5
5	c_6, c_7, c_8	C_4, C_5	C_1, C_2, C_3	8
6	$c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}$	C_6, C_7, C_8	C_1, C_2, C_3, C_4, C_5	13

Fonte: O autor

Para o problema em questão, completando a Tabela (4.1) teríamos que após um ano existiria um total de 144 casais de coelhos.

Generalizando o problema para descobrir quantos casais de coelhos teríamos no período de n meses. Podemos observar que o total de casais de um mês é a soma de casais dos dois meses imediatamente anteriores, logo podemos escrever uma equação de recorrência linear de segunda ordem com coeficientes constantes da seguinte forma:

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{com } n \geq 1 \\ F_0 = 1 \\ F_1 = 1, \end{cases}$$

temos $F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$ com a seguinte equação característica $r^2 - r - 1 = 0$.

Então segue que,

$$r^2 - r - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4$$

$$\Delta = 5$$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \implies r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Aplicando os Teoremas (3.3.1) e (3.3.2), as soluções da recorrência são da forma,

$$F_n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Determinando as constantes C_1 e C_2 usando as condições iniciais,

$$F_0 = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 \Rightarrow 1 = C_1 + C_2$$

$$F_1 = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1$$

$$1 = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

$$C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1.$$

Então temos que resolver o seguinte sistema.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1. \end{cases}$$

Da primeira equação temos,

$$C_1 = 1 - C_2.$$

Substituindo C_1 na segunda equação do sistema,

$$(1 - C_2) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1$$

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - C_2 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1$$

$$\frac{1 + \sqrt{5} - C_2 - C_2\sqrt{5} + C_2 - C_2\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$\frac{-2C_2\sqrt{5} + 1 + \sqrt{5}}{2} = 1$$

$$-2C_2\sqrt{5} = 2 - 1 - \sqrt{5}$$

$$-2\sqrt{5}C_2 = 1 - \sqrt{5}$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}.$$

Substituindo C_2 na primeira equação,

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \\ C_1 &= \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \\ C_1 &= \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Daí segue,

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \\ F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \\ F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Esta é a fórmula fechada, número de Fibonacci, que descreve quantos casais de coelhos terão para uma quantidade n de meses.

Verificaremos três soluções particulares já ilustradas na Tabela (4.1).

Caso particular para $n = 0$,

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ F_0 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ F_0 &= \frac{1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \implies F_0 = 1. \end{aligned}$$

Caso particular para $n = 1$,

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 \\ F_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} \right) \\ F_1 &= \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \\ F_1 &= \frac{6 + 2\sqrt{5} - 6 + 2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \implies F_1 = 1. \end{aligned}$$

Caso particular para $n = 2$,

$$\begin{aligned}
 F_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^3 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^3 \\
 F_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + 3\sqrt{5} + 15 + 5\sqrt{5}}{8} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - 3\sqrt{5} + 15 - 5\sqrt{5}}{8} \right) \\
 F_2 &= \frac{1 + 3\sqrt{5} + 15 + 5\sqrt{5}}{8\sqrt{5}} + \frac{-1 + 3\sqrt{5} - 15 + 5\sqrt{5}}{8\sqrt{5}} \\
 F_2 &= \frac{16 + 8\sqrt{5} - 16 + 8\sqrt{5}}{8\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{8\sqrt{5}} \implies F_2 = 2.
 \end{aligned}$$

Exemplo 4.2.1. Verificaremos uma outra atividade que estimule os alunos a desenvolverem estratégias lógicas de resolução. Iremos trabalhar em sala de aula a manipulação de material concreto, incentivando os alunos a desenvolverem o raciocínio recursivo. O material concreto que será utilizado é o jogo de dominó, conforme figura (4.6).

Figura 4.6: Dominó e raciocínio recursivo



<https://www.reviewbox.com.br/domino/>

Nesta atividade será abordado o seguinte problema. De quantas maneiras podemos guardar n dominós 2×1 em uma caixa $2 \times n$?

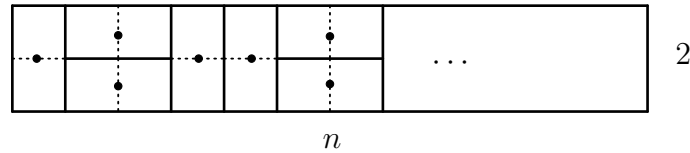
Desconsiderando os números dos dominós, uma vez que não irão interferir na resolução do problema.

Desta forma consideraremos que todas as peças dos dominós são idênticas.

A pergunta é de quantas maneiras guardar os dominós na caixa? E uma maneira será diferente da outra de acordo com o visual dela, ou seja, conforme o encaixe das peças na caixa.

Conforme ilustração utilizando uma caixa $2 \times n$ mostrada na figura (4.7).

Figura 4.7: n dominós 2×1 em uma caixa $2 \times n$



Fonte: O autor

O objetivo do problema é contar de quantas maneiras posso cobrir um retângulo $2 \times n$ com peças retangulares 2×1 . E verificaremos a relação deste problema com a sequência de Fibonacci.

As peças poderão ser encaixadas em pé, representada pela primeira peça da esquerda na figura, ou deitadas na qual necessariamente devem ser encaixada duas peças, conforme pode ser visto à direita da primeira peça já colocada na caixa.

Seja D_n a resposta. Iniciaremos a resolução do problema verificando o que acontece com os casos menores.

Simplificando cada caso, representaremos os dominós em pé por traços verticais e os dominós deitados por traços horizontais.

Daí utilizaremos uma sistemática em escrever todos os casos, dando prioridade em esgotar todas as possibilidades de dominós na posição vertical nas primeiras posições, para depois escrever os casos de dominós na posição horizontal. Conforme figura (4.8),

Figura 4.8: Disposição dos dominós na posição vertical e horizontal

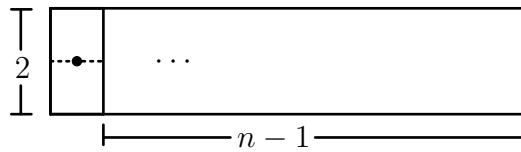
$n = 1$		$D_1 = 1$
$n = 2$	, ==	$D_2 = 2$
$n = 3$	, =, ==	$D_3 = 3$
$n = 4$	, ==, = , == , ====	$D_4 = 5$
$n = 5$	, =, = =, = , ===, == , == =, == =, == , ====	$D_5 = 8$

Fonte: O autor

Para contar o número de soluções para cobrir uma caixa de tamanho $2 \times n$ por peças de dominó 2×1 , o raciocínio será da seguinte forma, abriremos o problema em dois casos menores.

1º caso: A primeira peça da esquerda sendo um dominó em pé. Teremos o nosso problema inicial reduzido a um tamanho menor, designado por D_{n-1} maneiras de completar a cobertura, conforme figura (4.9).

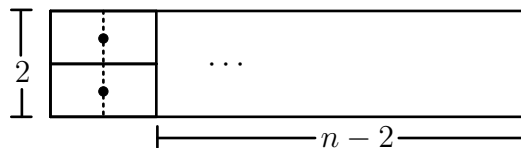
Figura 4.9: Caixa de tamanho $2 \times n$ iniciada por um dominó 2×1 em pé



Fonte: O autor

2º caso: A primeira peça da esquerda sendo dois dominós deitados. Teremos o nosso problema inicial reduzido a um tamanho menor, designado por D_{n-2} maneiras de completar a cobertura, conforme figura (4.10).

Figura 4.10: Caixa de tamanho $2 \times n$ iniciada por dois dominós 2×1 deitados



Fonte: O autor

Logo o número de maneiras de cobrir uma caixa $2 \times n$ por peças de dominós 2×1 será representada pela recorrência linear de segunda ordem.

$$D_n = D_{n-1} + D_{n-2}.$$

Criando uma tabela para os valores encontrados, verificamos que a sequência obedece os critérios da Sequência de Fibonacci.

Tabela 4.2: Tabela dominó na caixa $2 \times n$

Tamanho da caixa (valor de n)	Possibilidades de arrumar n dominós na caixa $2 \times n$
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13

Fonte: O autor

Portanto, temos uma sequência definida por:

$$\begin{cases} D_n = D_{n-1} + D_{n-2} \\ D_1 = 1 \\ D_2 = 2. \end{cases}$$

Vamos resolver esta recorrência e generalizar a solução para a caixa de dominó $2 \times n$.

Temos $D_n - D_{n-1} - D_{n-2} = 0$ com a seguinte equação característica $r^2 - r - 1 = 0$.

Então segue que as raízes são,

$$r^2 - r - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 \implies \Delta = 5$$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \implies r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Aplicando os Teoremas (3.3.1) e (3.3.2), a solução geral será,

$$D_n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Determinando as constantes C_1 e C_2 usando as condições iniciais,

$$D_1 = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1$$

$$C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1$$

$$C_1 (1 + \sqrt{5}) + C_2 (1 - \sqrt{5}) = 2.$$

E temos,

$$D_2 = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2$$

$$C_1 \left(\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} \right) + C_2 \left(\frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} \right) = 2$$

$$C_1 (6 + 2\sqrt{5}) + C_2 (6 - 2\sqrt{5}) = 8.$$

Então temos que resolver o seguinte sistema.

$$\begin{cases} (1 + \sqrt{5}) C_1 + (1 - \sqrt{5}) C_2 = 2 \\ (6 + 2\sqrt{5}) C_1 + (6 - 2\sqrt{5}) C_2 = 8. \end{cases}$$

Da primeira equação temos,

$$C_1 = \frac{2 - C_2 (1 - \sqrt{5})}{1 + \sqrt{5}}.$$

Substituindo C_1 na segunda equação do sistema,

$$(6 + 2\sqrt{5}) \left[\frac{2 - C_2 (1 - \sqrt{5})}{1 + \sqrt{5}} \right] + (6 - 2\sqrt{5}) C_2 = 8$$

$$\frac{12 - 6C_2 + 6C_2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 2\sqrt{5}C_2 + 10C_2}{1 + \sqrt{5}} + (6 - 2\sqrt{5}) C_2 = 8$$

$$\frac{12 + 4C_2 + 4\sqrt{5}C_2 + 4\sqrt{5} + (-4C_2 + 4\sqrt{5}C_2)}{1 + \sqrt{5}} = 8$$

$$\frac{12 + 8\sqrt{5}C_2 + 4\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = 8 \implies 12 + 8\sqrt{5}C_2 + 4\sqrt{5} = 8 + 8\sqrt{5}$$

$$8\sqrt{5}C_2 = -4 + 4\sqrt{5} \implies C_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}.$$

Substituindo C_2 na primeira equação,

$$(1 + \sqrt{5}) C_1 + (1 - \sqrt{5}) \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10} \right) = 2$$

$$C_1 + \sqrt{5} C_1 + \frac{5 - \sqrt{5} - \sqrt{5} + 5}{10} = 2$$

$$10C_1 + 10C_1\sqrt{5} + 10 - 6\sqrt{5} = 20$$

$$(10 + 10\sqrt{5}) C_1 = 10 + 6\sqrt{5} \implies C_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}.$$

Daí segue, a solução para a caixa de dominó $2 \times n$.

$$D_n = \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Seguem alguns resultados acerca da sequência de Fibonacci.

PROPOSIÇÃO 4.2.1. *A soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci, com $n > 1$, é da forma:*

$$S_n = F_{n+2} - 1.$$

Demonstração. Dada a sequência $F_1, F_2, F_3, \dots, F_{n-1}, F_n, F_{n+1}, \dots$ temos que a soma dos n primeiros termos da sequência é dada pela expressão:

$$S_n = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n-2} + F_{n-1} + F_n.$$

Observe que,

$$F_3 = F_1 + F_2$$

$$F_4 = F_2 + F_3$$

$$F_5 = F_3 + F_4$$

$$\vdots$$

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$$

Reescrevendo a soma,

$$F_1 = F_3 - F_2$$

$$F_2 = F_4 - F_3$$

$$F_3 = F_5 - F_4$$

$$\vdots$$

$$F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$$

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3) + \cdots + (F_{n+1} - F_n) + (F_{n+2} - F_{n+1})$$

Portanto,

$$S_n = (\cancel{F_3} - F_2) + (\cancel{F_4} - \cancel{F_3}) + \cdots + (\cancel{F_n} - \cancel{F_{n-1}}) + (\cancel{F_{n+1}} - \cancel{F_n}) + (F_{n+2} - \cancel{F_{n+1}}).$$

Então,

$$S_n = F_{n+2} - F_2.$$

Como o segundo termo da Sequência de Fibonacci é $F_2 = 1$, então temos:

$$S_n = F_{n+2} - 1.$$

■

PROPOSIÇÃO 4.2.2. *A soma dos quadrados de dois números de Fibonacci vizinhos é um número de Fibonacci.*

Demonstração. Dados dois números de Fibonacci vizinhos quaisquer F_n e F_{n+1} temos que:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] \quad \text{e}$$

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right].$$

Então,

$$\begin{aligned} F_n^2 &= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} - 2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] \\ &= \frac{1}{5} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} - 2 \cdot \left[\frac{(1+\sqrt{5}) \cdot (1-\sqrt{5})}{4} \right]^{n+1} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} - 2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}+\sqrt{5}-5}{4} \right)^{n+1} \right] \\
&= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} - 2 \cdot \left(\frac{-4}{4} \right)^{n+1} \right] \\
F_n^2 &= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} - 2 \cdot (-1)^{n+1} \right].
\end{aligned}$$

E temos,

$$\begin{aligned}
F_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right] \\
F_{n+1}^2 &= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+4} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+4} - 2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right] \\
&= \frac{1}{5} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+4} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+4} - 2 \cdot \left[\frac{(1+\sqrt{5}) \cdot (1-\sqrt{5})}{4} \right]^{n+2} \right\} \\
&= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+4} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+4} - 2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}+\sqrt{5}-5}{4} \right)^{n+2} \right] \\
&= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+4} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+4} - 2 \cdot \left(\frac{-4}{4} \right)^{n+2} \right] \\
F_{n+1}^2 &= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+4} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+4} - 2 \cdot (-1)^{n+2} \right].
\end{aligned}$$

Segue que,

$$\begin{aligned}
F_{n+1}^2 + F_n^2 &= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+4} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+4} - 2 \cdot (-1)^{n+2} \right] + \\
&\quad + \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} - 2 \cdot (-1)^{n+1} \right] \\
&= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+4} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+4} - 2 \cdot \cancel{(-1)^{n+2}} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} - 2 \cdot \cancel{(-1)^{n+1}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+4} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+4} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} \right] \\
&= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} \right] \\
&= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} \right] \\
&= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right] \\
&= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} \cdot \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2} \right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} \cdot \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

reescrevendo,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} \cdot \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} \cdot \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} \cdot \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} \cdot \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} \cdot \left(\frac{5\sqrt{5}+5}{10} \right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} \cdot \left(\frac{5\sqrt{5}-5}{10} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+3} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+3} \right] \\
&F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+2}.
\end{aligned}$$

■

Em particular segue exemplo (4.2.2).

Exemplo 4.2.2. Dada a sequência de Fibonacci, conforme tabela para os primeiros vinte e um números da sequência.

Tabela 4.3: Tabela dos vinte e um primeiros números de Fibonacci

Sequência dos primeiros vinte e um números de Fibonacci		
F(0)=1	F(1)=1	F(2)=2
F(3)=3	F(4)=5	F(5)=8
F(6)=13	F(7)=21	F(8)=34
F(9)=55	F(10)=89	F(11)=144
F(12)=233	F(13)=377	F(14)=610
F(15)=987	F(16)=1597	F(17)=2584
F(18)=4181	F(19)=6765	F(20)=10946

Fonte: O autor

Conforme Proposição (4.2.2) podemos verificar dois casos particulares que,

$$F_6^2 + F_5^2 = 13^2 + 8^2 = 233 = F_{12} \quad \text{e} \quad F_{10}^2 + F_9^2 = 89^2 + 55^2 = 10946 = F_{20}.$$

4.3 Matemática Financeira

Conforme livro texto da coleção PROFMAT - Matemática Discreta dos autores Augusto César Morgado e Paulo Cezar Pinto Carvalho, uma das importantes aplicações das progressões geométricas está presente na Matemática Financeira. Na qual temos como operação básica o deslocamento de quantias no tempo, associados a operação de empréstimo.

Analisaremos a situação de empréstimo a partir de alguém que empresta um capital C (chamado de principal) a um cliente por um período de tempo n , aplicados a uma taxa de juros i , e após esse período recebe o seu capital C acrescidos de uma compensação em dinheiro denominada juros J pelo empréstimo.

O principal acrescidos dos juros é chamado de Montante representado por M .

A seguir utilizaremos o raciocínio recursivo para mostrarmos a fórmula fechada para o cálculo dos juros compostos.

$$M_1 = C + J = C + Ci = C(1 + i)$$

$$M_2 = M_1 + J = M_1 + M_1i = M_1(1 + i)$$

$$M_3 = M_2 + J = M_2 + M_2i = M_2(1 + i)$$

$$M_4 = M_3 + J = M_3 + M_3i = M_3(1 + i).$$

Daí segue que,

$$M_1 = C(1 + i)$$

$$M_2 = M_1(1 + i)$$

$$M_3 = M_2(1 + i)$$

$$M_4 = M_3(1 + i)$$

$$\vdots$$

$$M_{n-1} = M_{n-2}(1 + i)$$

$$M_n = M_{n-1}(1 + i)$$

$$\cancel{M_1} \cdot \cancel{M_2} \cdot \dots \cdot \cancel{M_{n-1}} \cdot M_n = C \cdot \cancel{M_1} \cdot \cancel{M_2} \cdot \dots \cdot \cancel{M_{n-1}} \cdot \underbrace{(1 + i) \cdot (1 + i) \cdot \dots \cdot (1 + i)}_{n \text{ fatores}}$$

Ao multiplicar as igualdades e aplicando a lei do cancelamento do produto obtemos:

$$M_n = C(1 + i)^n.$$

Exemplo 4.3.1. A juros compostos de 20% a.m, qual o montante de R\$ 3.500,00 em 8 meses?

Sabendo que o principal C é R\$ 3.500,00, e utilizando o raciocínio recursivo temos,

$$M_1 = 3500 (1, 20)$$

$$M_2 = M_1 (1, 20)$$

$$M_3 = M_2 (1, 20)$$

$$M_4 = M_3 (1, 20)$$

$$\vdots$$

$$M_8 = M_7 (1, 20)$$

$$\cancel{M_1} \cdot \cancel{M_2} \cdot \cancel{M_3} \cdot \dots \cdot \cancel{M_7} \cdot M_8 = 3500 \cdot \cancel{M_1} \cdot \cancel{M_2} \cdot \dots \cdot \cancel{M_7} \cdot \underbrace{(1, 20) \cdot (1, 20) \cdot \dots \cdot (1, 20)}_{8 \text{ fatores}}$$

Ao multiplicar as igualdades e aplicando a lei do cancelamento do produto obtemos:

$$M_8 = 3500 \cdot (1, 20)^8 \implies M_8 = 3500 \cdot 4,29981 \implies M_8 \cong 15.049,33.$$

Exemplo 4.3.2. O salário de Carmelino no mês n é $S_n = a + bn$. Sua renda mensal é formada pelo salário e pelos juros de suas aplicações financeiras. Ele poupa anualmente $\frac{1}{p}$ de sua renda e investe sua poupança a juros mensais de taxa i . Determine a renda de Carmelino no mês n .

A renda X_n no mês n é igual ao salário S_n mais o rendimento sobre montante Y_{n-1} das aplicações financeiras no mês anterior. Ou seja, $X_n = S_n + i \cdot Y_{n-1}$. Por outro lado, o montante das aplicações financeiras no mês n é igual ao do mês anterior, acrescido do valor poupado no mês n . Ou seja, $Y_n = Y_{n-1} + \frac{1}{p}X_n$.

$$\text{Da primeira equação, } Y_{n-1} = \frac{X_n - S_n}{i} \text{ e } Y_n = \frac{X_{n+1} - S_{n+1}}{i}.$$

Substituindo estas expressões na equação $Y_n = Y_{n-1} + \frac{1}{p}X_n$, temos:

$$\frac{X_{n+1} - S_{n+1}}{i} = \frac{X_n - S_n}{i} + \frac{1}{p}X_n.$$

Multiplicando as igualdades por i teremos,

$$X_{n+1} - S_{n+1} = X_n - S_n + \frac{1}{p} \cdot X_n \cdot i$$

Segue que,

$$\begin{aligned} X_{n+1} - S_{n+1} + S_n &= X_n + \frac{1}{p} \cdot X_n \cdot i \\ X_{n+1} - (S_{n+1} - S_n) &= X_n \left(1 + \frac{i}{p}\right) \\ X_{n+1} - b &= X_n \left(1 + \frac{i}{p}\right). \end{aligned}$$

De fato pois,

$$S_n = a + bn \text{ e } S_{n+1} = a + b(n+1) \implies S_{n+1} - S_n = b.$$

Daí temos, recorrência linear de primeira ordem não homogênea.

$$X_{n+1} = X_n \left(1 + \frac{i}{p}\right) + b.$$

Temos que, $a_n = \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{n-1}$ é uma solução não nula da recorrência $X_{n+1} = X_n \left(1 + \frac{i}{p}\right)$, e aplicando o Teorema (3.2.1), segue que:

$$\begin{aligned} X_n &= X_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{i}{p}\right) + b \\ \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{n-1} \cdot Y_n &= \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{n-2} \cdot \left(1 + \frac{i}{p}\right) \cdot Y_{n-1} + b \\ \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{n-1} \cdot Y_n &= \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{n-1} \cdot Y_{n-1} + b. \end{aligned}$$

Chamando $\left(1 + \frac{i}{p}\right) = k$, temos $a_n = k^{n-1}$.

Então,

$$k^{n-1}Y_n = k^{n-1}Y_{n-1} + b.$$

Multiplicando a igualdade por $\frac{1}{k^{n-1}}$ temos,

$$Y_n = Y_{n-1} + \frac{b}{k^{n-1}}.$$

Assim como $X_0 = a$ temos,

$$X_n = a_n Y_n \implies X_0 = a_0 Y_0 \implies a = k^{-1} Y_0 \implies Y_0 = \frac{a}{k^{-1}} \implies Y_0 = ak.$$

Daí segue que,

$$\begin{aligned} Y_0 &= ak \\ Y_1 &= Y_0 + b \\ Y_2 &= Y_1 + \frac{b}{k} \\ &\vdots \\ Y_n &= Y_{n-1} + \frac{b}{k^{n-1}} \end{aligned}$$

$$\cancel{Y_0} + \cancel{Y_1} + \cdots + \cancel{Y_{n-1}} + Y_n = ak + (\cancel{Y_0} + b) + \left(\cancel{Y_1} + \frac{b}{k}\right) + \cdots + \left(\cancel{Y_{n-1}} + \frac{b}{k^{n-1}}\right)$$

Somando e fazendo os devidos cancelamentos,

$$Y_n = ak + \left(b + \frac{b}{k} + \frac{b}{k^2} + \cdots + \frac{b}{k^{n-1}} \right).$$

Então,

$$Y_n = ak + b \cdot \frac{\frac{1}{k^n} - 1}{\frac{1}{k} - 1} = ak + b \cdot \frac{\frac{1 - k^n}{k^n}}{\frac{1 - k}{k}} = ak + b \cdot \left[\frac{1 - k^n}{k^n} \cdot \frac{k}{1 - k} \right].$$

Daí,

$$Y_n = ak + b \cdot \frac{1 - k^n}{k^{n-1}(1 - k)}.$$

Como $X_n = a_n Y_n$, então temos:

$$X_n = k^{n-1} \left[ak + b \cdot \frac{1 - k^n}{k^{n-1}(1 - k)} \right]$$

$$X_n = ak^n + b \cdot \frac{1 - k^n}{1 - k}.$$

Substituindo $k = 1 + \frac{i}{p}$, temos finalmente.

$$X_n = a \left(1 + \frac{i}{p} \right)^n + b \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{p} \right)^n}{1 - \left(1 + \frac{i}{p} \right)}$$

$$X_n = a \left(1 + \frac{i}{p} \right)^n + b \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{p} \right)^n}{-\frac{i}{p}}$$

$$X_n = a \left(1 + \frac{i}{p} \right)^n - \frac{pb}{i} \left[1 - \left(1 + \frac{i}{p} \right)^n \right]$$

$$X_n = a \left(1 + \frac{i}{p} \right)^n - \frac{pb}{i} + \frac{pb}{i} \left(1 + \frac{i}{p} \right)^n$$

Então,

$$X_n = a \left(1 + \frac{i}{p} \right)^n + \frac{pb}{i} \left(1 + \frac{i}{p} \right)^n - \frac{pb}{i}$$

Logo,

$$X_n = \left(1 + \frac{i}{p} \right)^n \cdot \left(a + \frac{pb}{i} \right) - \frac{pb}{i}.$$

4.4 Análise Combinatória

Neste tópico iremos resolver alguns problemas que são comumente resolvidos no Ensino Médio utilizando técnicas de análise combinatória como permutação e combinação.

Nosso objetivo é utilizar o raciocínio recursivo visando compreender, interpretar e desenvolver métodos de resolução que enfatize a solução de problemas que estimule o aluno a construir o raciocínio lógico-matemático.

Exemplo 4.4.1. De quantas maneiras n pessoas podem formar uma fila?

Utilizaremos inicialmente a estratégia em estudar os casos mais simples, chamaremos a resposta do problema de formar filas com n pessoas de A_n .

Para o caso A_1 , ou seja, o problema de formar fila com uma pessoa teremos apenas uma única maneira, $A_1 = 1$.

Para o caso A_2 , ou seja, o problema de formar filas com duas pessoas teremos exatamente duas maneiras, $A_2 = 2$.

Sendo um pouco mais sistemático mostraremos a solução para o problema em formar filas com três pessoas.

Considerando Ana, Beatriz e Carlos as três pessoas e simplificando os nomes pelas letras A , B e C . Formaremos filas que iniciam com Ana, em seguida filas que iniciam com Beatriz e por último as que iniciam com Carlos. Totalizando seis possibilidades de formar fila com três pessoas, $A_3 = 6$.

ABC

ACB

BAC

BCA

CAB

CBA

Podemos observar que no caso $n = 3$ ao fixar a primeira pessoa da fila resta um problema para formar fila com as duas pessoas que sobraram, isto é, o problema reduz a formar filas com duas pessoas.

Em particular ao fixar Ana na primeira posição da fila teremos que ver de quantas maneiras arrumaremos Beatriz e Carlos na fila, o que se resume a um problema

de duas pessoas que podem ser feitas de duas maneiras. Como podemos fixar qualquer uma das três pessoas na posição inicial da fila, teremos um total de seis possibilidades para o caso de formar fila com três pessoas.

Segue tabela (4.4) que ilustra o número de filas para alguns valores iniciais de n .

Tabela 4.4: Número de filas formadas por n pessoas

Número de pessoas (n)	Número de filas formadas por n pessoas (A_n)
1	$A(1) = 1$
2	$A(2) = 2$
3	$A(3) = 3 \cdot 2 = 6$
4	$A(4) = 4 \cdot 6 = 24$
5	$A(5) = 5 \cdot 24 = 120$

Fonte: O autor

De uma maneira geral para resolver um problema com quantidade de filas com n pessoas, ao escolher a primeira pessoa da fila o problema se resume a um já resolvido anteriormente com $n - 1$ pessoas.

Daí segue que para formar todas as permutações com n elementos distintos, devemos escrever todas as permutações com $n - 1$ elementos distintos, em seguida no início de cada uma delas acrescentar um elemento, na qual pode ser realizado de n maneiras.

$$A_n = n \cdot A_{n-1}.$$

Segue daí que,

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 1 \\
 A_2 &= 2A_1 \\
 A_3 &= 3A_2 \\
 &\vdots \\
 A_n &= nA_{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\cancel{A_1} \cdot \cancel{A_2} \cdot \cancel{A_3} \cdot \dots \cdot \cancel{A_{n-1}} \cdot A_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot \cancel{A_1} \cdot \cancel{A_2} \cdot \dots \cdot \cancel{A_{n-1}}$$

Multiplicando os termos da igualdade e aplicando a lei do cancelamento do produto, obtemos:

$$A_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Temos então que o número de filas que podemos formar com n pessoas é:

$$A_n = n!$$

Exemplo 4.4.2. Quantos subconjuntos possui um conjunto com n elementos?

Dado um conjunto X com n elementos. Seja X_n o número de subconjuntos deste conjunto X . Sendo x um destes n elementos do conjunto X . Podemos formar todos os X_n subconjuntos da seguinte maneira:

(i) Os subconjuntos que não contém o elemento x : Teremos um problema de tamanho X_{n-1} no total.

(ii) Os subconjuntos que contém o elemento x : Também teremos X_{n-1} no total. Basta observar que acrescentando o elemento x em cada subconjunto do conjunto $X - \{x\}$ que possui $n-1$ elementos, fato que confirma que teremos novamente o problema de tamanho X_{n-1} .

Logo o número de subconjuntos X_n pode ser escrito recursivamente de forma somando os casos (i) e (ii).

$$X_n = X_{n-1} + X_{n-1} = 2X_{n-1}.$$

Temos que $X_1 = 2$, pois os subconjuntos do conjunto unitário é o próprio conjunto e o conjunto vazio. Daí segue que,

$$\begin{cases} X_1 = 2 \\ X_n = 2X_{n-1} \end{cases}$$

$$X_1 = 2$$

$$X_2 = 2X_1$$

$$X_3 = 2X_2$$

$$X_4 = 2X_3$$

$$\vdots$$

$$X_n = 2X_{n-1}$$

$$\cancel{X_1} \cdot \cancel{X_2} \cdot \cancel{X_3} \cdot \cancel{X_4} \cdot \dots \cdot \cancel{X_{n-1}} \cdot X_n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ fatores}} \cdot \cancel{X_1} \cdot \cancel{X_2} \cdot \cancel{X_3} \cdot \dots \cdot \cancel{X_{n-1}}$$

Daí segue que,

$$X_n = 2^n.$$

Então o número de subconjuntos com n elementos é $X_n = 2^n$.

Exemplo 4.4.3. Utilizando as letras A, B e C , pede-se calcular quantas palavras de dez letras podemos formar, com ou sem significado, de modo que não haja duas consoantes consecutivas.

Para $n \geq 1$, seja A_n o número de palavras de n letras satisfazendo as condições do enunciado. Para $k \geq 3$, uma palavra de k letras pode terminar em A, B ou C . Se terminar em A , as $k - 1$ letras anteriores podem formar qualquer uma das A_{k-1} palavras de $k - 1$ letras satisfazendo as condições do enunciado.

Se terminar em B ou C , a penúltima letra deve necessariamente ser A , obedecendo a condição de não podermos ter duas consoantes consecutivas e as $k - 2$ letras iniciais podem formar qualquer uma das A_{k-2} palavras de $k - 2$ letras satisfazendo as condições do enunciado.

Então o problema de tamanho A_n pode ser escrito recursivamente da seguinte forma:

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + A_{n-2}$$

$$A_n = A_{n-1} + 2A_{n-2}.$$

Daí temos uma recorrência linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes. Então aplicando o Teorema (3.3.1) temos,

$$A_n - A_{n-1} - 2A_{n-2} = 0.$$

De equação característica,

$$r^2 - r - 2 = 0.$$

Com raízes,

$$r_1 = 2 \text{ e } r_2 = -1.$$

Então,

$$A_n = C_1 2^n + C_2 (-1)^n.$$

Iremos determinar as constantes C_1 e C_2 que sejam soluções do sistema de equações para os casos A_1 e A_2 .

Para o caso A_1 temos três palavras com sentido ou não com apenas uma letra ($A_1 = 3$), satisfazendo as condições do enunciado.

Temos $A_2 = 5$ na qual as possíveis palavras de sentido ou não satisfazendo as condições do enunciado são:

$$AA, AB, AC, BA, \text{ ou } CA.$$

Segue o seguinte sistema,

$$\begin{cases} 4C_1 + C_2 = 5 \\ 2C_1 - C_2 = 3. \end{cases} \quad (4.4.1)$$

Somando a primeira e segunda equação do sistema (4.4.1) temos,

$$6C_1 = 8 \implies C_1 = \frac{4}{3}.$$

Daí temos,

$$C_2 = 5 - 4 \cdot \frac{4}{3} \implies C_2 = -\frac{1}{3}.$$

Então,

$$A_n = \frac{4}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{3} \cdot (-1)^n.$$

Logo temos,

$$A_{10} = \frac{4}{3} \cdot 2^{10} - \frac{1}{3} \cdot (-1)^{10}$$

$$A_{10} = \frac{4}{3} \cdot 1024 - \frac{1}{3}$$

$$A_{10} = \frac{4096}{3} - \frac{1}{3}$$

$$A_{10} = \frac{4095}{3}$$

$$A_{10} = 1365.$$

4.5 Recorrência em problemas de Olimpíadas de Matemática

Nesta seção destacaremos a importância da criação de modelos de resolução de problemas matemáticos utilizando o raciocínio recursivo em questões de olimpíadas de matemática, em especial a OBMEP.

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP é um projeto nacional direcionado à rede de escolas públicas e privadas dentro do nosso Território Brasileiro.

A OBMEP, com uma grande aceitação ³, é um projeto realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM sendo administrada com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações - MCTIC.

A Olimpíada foi criada em 2005 com a finalidade de estimular e promover o estudo da Matemática, assim como desenvolver novos talentos na área. A OBMEP possui os seguintes objetivos:

- Contribuir para a melhoria de qualidade da educação básica, possibilitando aos alunos brasileiros terem acesso a um material didático de qualidade;
- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
- Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas e institutos de pesquisas;
- Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

O público alvo da OBMEP é composto de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental até o último ano do Ensino Médio.

Atualmente estas olimpíadas vêm ganhando bastante destaque em desenvolver talentos e proporcionar premiações e reconhecimento para alunos das escolas públicas e particulares no tocante ao avanço de proporcionar oportunidades aos jovens estudantes em desenvolver o processo ensino e aprendizagem da matemática.

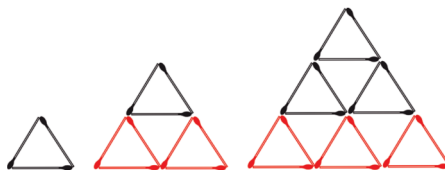
Diante dos fatos fica cada vez mais evidente que é possível empregar técnicas recursivas na resolução de problemas matemáticos abordados no ensino básico, uma vez que a metodologia em trabalhar raciocínios recursivos podem incentivar os alunos em despertar o interesse por competição de forma saudável em resolver problemas matemáticos a partir de problemas de olimpíadas.

³Conforme site oficial <http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm>, no ano de 2019, mais de 18 milhões de alunos participaram da olimpíada.

Segue problema da prova OBMEP [2012], questão que foi exigida nos três níveis da primeira fase.

Problema 4.5.1. Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforos, seguindo o padrão indicado na figura. Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforos. Quantos palitos tem um lado desse triângulo?

Figura 4.11: Triângulos com palitos de fósforos



Fonte: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>

Analisando as três primeiras etapas de construção podemos observar que no primeiro momento é construído um triângulo usando três palitos, na qual podemos representar utilizando o produto 3 por 1.

Na segunda etapa é formado um triângulo em que cada lado é formado por dois palitos, acrescentando ao triângulo precedente dois triângulos iguais ao primeiro, cada um deles com três palitos.

Assim teremos na segunda etapa seis palitos acrescentados, na qual podemos representar utilizando o produto 3 por 2.

Na terceira etapa formamos um triângulo em que cada lado é formado por três palitos acrescentando ao triângulo precedente três triângulos iguais ao primeiro.

Assim são acrescentados nove palitos, na qual podemos representar utilizando o produto 3 por 3.

Esse processo pode ser repetido até termos um triângulo em que cada lado é formado por n palitos, nesse caso acrescentamos ao triângulo precedente n triângulos iguais ao primeiro.

Assim serão acrescentados $3n$ palitos, na qual podemos representar utilizando o produto 3 por n .

Tabela 4.5: Número de triângulos por palitos acrescentados

Etapas	Números de palitos acrescentados
1	$3 \cdot 1 = 3$
2	$3 \cdot 2 = 6$
3	$3 \cdot 3 = 9$
$\vdots$	$\vdots$
n	$3 \cdot n = 3n$

Fonte: O autor

Desta forma estamos diante de um problema utilizando o pensamento recursivo, na qual X_n representará a quantidade de palitos necessários para construir a n -ésima estrutura.

Assim sendo temos uma recorrência linear de primeira ordem.

$$X_2 = X_1 + 3 \cdot 2$$

$$X_3 = X_2 + 3 \cdot 3$$

$$X_4 = X_3 + 3 \cdot 4$$

$$\vdots$$

$$X_n = X_{n-1} + 3 \cdot n$$

$$\cancel{X_2} + \cancel{X_3} + \cdots + \cancel{X_{n-1}} + X_n = X_1 + \cancel{X_2} + \cancel{X_3} + \cdots + \cancel{X_{n-1}} + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + 3 \cdot n$$

Ao somar as igualdades e aplicando a lei do cancelamento aditivo, obtemos:

$$X_n = X_1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 3 \cdot n.$$

Pelo enunciado temos $X_1 = 3$, então segue que:

$$X_n = 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 3 \cdot n$$

$$X_n = 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n).$$

Aplicando a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, teremos que a recorrência possui a seguinte fórmula fechada.

$$X_n = 3 \cdot \frac{(1+n)n}{2}.$$

Daí segue que,

$$X_n = \frac{3}{2} \cdot (n + n^2).$$

Logo,

$$X_n = \frac{3n^2 + 3n}{2}.$$

Para o problema em questão temos que para $X_n = 135$, obtemos a seguinte equação do segundo grau.

$$\frac{3n^2 + 3n}{2} = 135 \implies 3n^2 + 3n - 270 = 0.$$

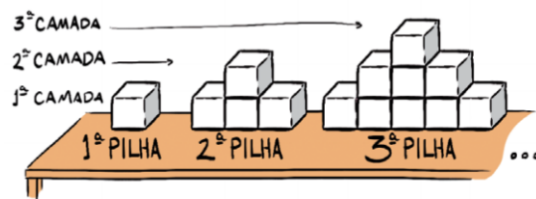
Sendo que as raízes da equação são,

$$n_1 = -10 \quad \text{e} \quad n_2 = 9.$$

Segue então que cada lado desse triângulo possui 9 palitos.

Problema 4.5.2. Pedro constrói uma sequência de pilhas com cubinhos de tamanhos iguais. Ele começa com um único cubinho. As pilhas são construídas sempre de forma triangular, a partir da anterior, aumentando-se dois cubinhos em cada camada e colocando-se um cubinho no topo. Na figura (4.12), estão representadas as três primeiras pilhas da sequência. Observe que na primeira camada da terceira pilha há cinco cubinhos.

Figura 4.12: Sequências de pilhas com cubinhos de tamanhos iguais

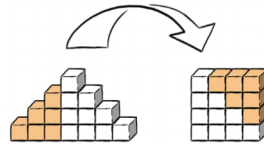


Fonte: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>

- (a) Quantos cubinhos deverá ter a primeira camada da quinta pilha?
- (b) Quantos cubinhos deverá ter a primeira camada da 2014ª pilha?

- (c) Pedro observou que podia transformar qualquer pilha triangular em uma pilha quadrada, reorganizando os cubinhos dessa pilha. Observe na figura (4.13) como ele fez isso com a quarta pilha.

Figura 4.13: Transformação da quarta pilha triangular em uma pilha quadrada



Fonte: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>

Ele usou essa ideia para calcular quantos cubinhos são necessários para construir uma pilha triangular com 99 cubinhos em sua primeira camada. Que resultado ele obteve?

Este problema foi retirado da prova OBMEP [2014] - segunda fase, primeira questão da prova nível 2 direcionada aos alunos do 8º e 9º ano do ensino fundamental maior.

Apresentaremos uma resolução utilizando o raciocínio recursivo para os itens em questão e justificaremos a afirmação do item (c) a partir da fórmula fechada do número de cubinhos em cada pilha fundamentada na fórmula recursiva, enriquecendo ainda mais o enunciado do problema.

Chamando A_n o número de quadradinhos em cada pilha e observando o número de cubinhos nas três primeiras pilhas da sequência podemos observar, conforme enunciado, que cada pilha é obtida da anterior acrescentando-se dois cubinhos em cada camada e colocando-se um cubinho no topo.

Desta forma podemos verificar que ao escolher uma pilha qualquer e retirando os cubinhos da primeira camada, isto é da base, teremos exatamente a pilha imediatamente anterior.

Então segue que,

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 + 3 \\ A_3 &= A_2 + 5 \\ A_4 &= A_3 + 7 \\ &\vdots \\ A_n &= A_{n-1} + (2n - 1) \end{aligned}$$

E a sequência $(3, 5, 7, \dots, 2n - 1)$ representa exatamente a quantidade de cubinhos da base de cada pilha.

Para o item (a) temos que,

A quantidade de cubinhos da primeira camada da quinta pilha é calculada da seguinte maneira:

$$2n - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9 \text{ cubinhos.}$$

No item (b) temos que,

A quantidade de cubinhos da primeira camada da 2014ª pilha é calculada da seguinte maneira:

$$2n - 1 = 2 \cdot 2014 - 1 = 4027 \text{ cubinhos.}$$

No item (c) conforme enunciado temos 99 cubinhos na primeira camada, então temos:

$$2n - 1 = 99 \implies n = 50.$$

Segue que,

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 + 3 \\ A_3 &= A_2 + 5 \\ A_4 &= A_3 + 7 \\ &\vdots \\ A_n &= A_{n-1} + (2n - 1) \end{aligned}$$

$$\cancel{A_2} + \cancel{A_3} + \dots + \cancel{A_{n-1}} + A_n = A_1 + \cancel{A_2} + \cancel{A_3} + \dots + \cancel{A_{n-1}} + [3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)]$$

Ao somar as igualdades e aplicando a lei do cancelamento aditivo, obtemos:

$$A_n = A_1 + [3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)].$$

Temos que $[3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)]$ é uma progressão aritmética de razão 2, e aplicando a soma dos termos (S_n) da P.A., resulta em,

$$S_n = \frac{(3 + 2n - 1) \cdot (n - 1)}{2} \implies S_n = \frac{(2 + 2n) \cdot (n - 1)}{2}.$$

Sabendo-se que,

$$\begin{aligned} A_n &= A_1 + S_n \\ A_n &= A_1 + \frac{(2 + 2n)(n - 1)}{2}. \end{aligned}$$

Do enunciado do problema temos $A_1 = 1$, do qual segue:

$$\begin{aligned} A_n &= 1 + \frac{(2 + 2n)(n - 1)}{2} \\ &= \frac{2 + (2 + 2n)(n - 1)}{2} \\ &= \frac{\cancel{2} + \cancel{2n} - \cancel{2} + 2n^2 - \cancel{2n}}{2} \\ A_n &= n^2. \end{aligned}$$

Daí segue a solução do problema em questão para o valor de $n = 50$.

$$A_{50} = 50^2 \implies A_{50} = 2500 \text{ cubinhos.}$$

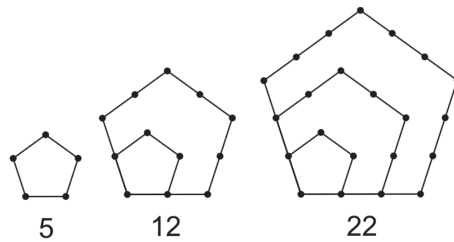
Então podemos observar, conforme figura (4.13), que a quarta pilha triangular com sete cubinhos na primeira camada pode ser transformada numa pilha quadrada de base com quatro cubinhos, preservando a mesma quantidade de cubinhos nas duas pilhas.

De uma maneira geral para calcular o total de cubinhos de uma pilha triangular, basta reorganizar esta pilha de base tamanho $2n - 1$ em uma pilha quadrada de base tamanho n .

Em resumo para encontrar o total de cubinhos de qualquer pilha triangular do problema deve-se calcular a área da pilha quadrada correspondente de tamanho n , e este procedimento pode ser justificado pela fórmula fechada originada da fórmula de recorrência encontrada.

Problema 4.5.3. Abaixo temos três figuras pentagonais: a primeira com 5 pontos, a segunda com 12 pontos e a terceira com 22 pontos. Continuando esse processo de construção, a vigésima figura pentagonal terá 651 pontos. Quantos pontos terá a vigésima primeira figura?

Figura 4.14: Figura pentagonal

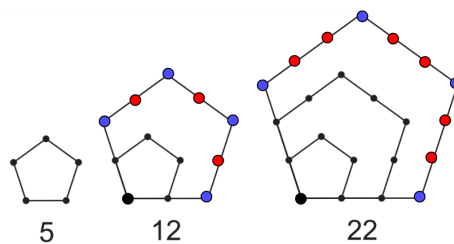


Fonte: O autor

Este problema foi retirado da prova OBMEP [2015] - primeira fase, décima quarta questão da prova nível 3 direcionada aos alunos do ensino médio.

Analisando o processo de construção das figuras, podemos observar a partir de um raciocínio recursivo que cada figura é construída a partir da figura anterior acrescida de novos pontos, conforme é mostrado na figura.

Figura 4.15: Construção da figura pentagonal



Fonte: O autor

Chamaremos de P_1 o número de pontos da figura 1, P_2 o número de pontos da figura 2 e assim sucessivamente até P_n que representa o problema do número de pontos da figura n .

Observe que a partir da figura n , $n \geq 1$, a figura $n + 1$ é obtida acrescentando-se à figura anterior 4 novos pontos que serão vértices do novo pentágono

(destaque em azul) e n novos pontos (destaque em vermelho) em cada um dos três lados opostos ao vértice fixo.

Temos $P_1 = 5$ e prosseguindo o raciocínio temos,

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 + (4 + 3 \cdot 1) \\ P_3 &= P_2 + (4 + 3 \cdot 2) \\ P_4 &= P_3 + (4 + 3 \cdot 3) \\ &\vdots \\ P_n &= P_{n-1} + [4 + 3 \cdot (n - 1)]. \end{aligned}$$

Segue que,

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 + 7 \\ P_3 &= P_2 + 10 \\ P_4 &= P_3 + 13 \\ &\vdots \\ P_n &= P_{n-1} + (3n + 1) \end{aligned}$$

$$\cancel{P_2} + \cancel{P_3} + \cdots + \cancel{P_{n-1}} + P_n = P_1 + \cancel{P_2} + \cancel{P_3} + \cdots + \cancel{P_{n-1}} + [7 + 10 + 13 + \cdots + (3n + 1)]$$

Ao somar as igualdades e aplicando a lei do cancelamento aditivo, obtemos:

$$P_n = P_1 + [7 + 10 + 13 + \cdots + (3n + 1)].$$

Temos que $[7 + 10 + 13 + \cdots + (3n + 1)]$ é uma progressão aritmética de razão 3, e aplicando a soma dos termos (S_n) da P.A., resulta em,

$$S_n = \frac{(7 + 3n + 1) \cdot (n - 1)}{2} \implies S_n = \frac{(8 + 3n) \cdot (n - 1)}{2}.$$

Sabendo-se que,

$$\begin{aligned} P_n &= P_1 + S_n \\ P_n &= P_1 + \frac{(8 + 3n)(n - 1)}{2}. \end{aligned}$$

Do enunciado do problema temos $P_1 = 5$, do qual segue:

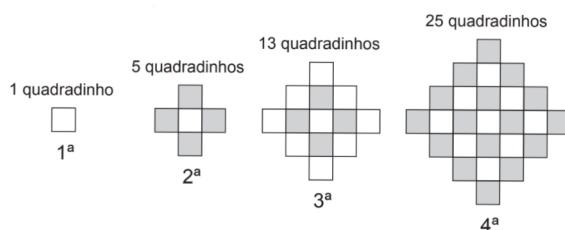
$$\begin{aligned} P_n &= 5 + \frac{(8 + 3n)(n - 1)}{2} \\ &= \frac{10 + (8 + 3n)(n - 1)}{2} \\ &= \frac{10 + 8n - 8 + 3n^2 - 3n}{2} \\ P_n &= \frac{3n^2 + 5n + 2}{2}. \end{aligned}$$

Daí segue a solução do problema em questão para o valor de $n = 21$.

$$\begin{aligned} P_{21} &= \frac{3 \cdot 21^2 + 5 \cdot 21 + 2}{2} \\ P_{21} &= \frac{1323 + 107}{2} \implies P_{21} = 715 \text{ pontos.} \end{aligned}$$

Problema 4.5.4. Felipe construiu uma sequência de figuras com quadradinhos; abaixo mostramos as quatro primeiras figuras que ele construiu. Qual é a primeira figura que tem mais de 2009 quadradinhos?

Figura 4.16: Figura com quadradinhos



Fonte: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>

Este problema foi retirado da prova OBMEP [2009] - primeira fase, décima sexta questão da prova nível 3 direcionada aos alunos do ensino médio.

Chamaremos de Q_1 o número de quadradinhos da figura 1, Q_2 o número de quadradinhos da figura 2 e assim sucessivamente até Q_n que representa o problema do número de quadradinhos da figura n .

Analisando o processo de construção das figuras, podemos observar a partir de um raciocínio recursivo que cada figura é construída a partir da figura anterior acrescida de novos quadradinhos, sendo essa quantidade de quadradinhos um múltiplo de 4.

Temos $Q_1 = 1$ e prosseguindo o raciocínio temos,

$$\begin{aligned} Q_2 &= Q_1 + 4 \cdot 1 \\ Q_3 &= Q_2 + 4 \cdot 2 \\ Q_4 &= Q_3 + 4 \cdot 3 \\ &\vdots \\ Q_n &= Q_{n-1} + 4 \cdot (n-1) \end{aligned}$$

Segue que,

$$\begin{aligned} Q_2 &= Q_1 + 4 \\ Q_3 &= Q_2 + 8 \\ Q_4 &= Q_3 + 12 \\ &\vdots \\ Q_n &= Q_{n-1} + 4(n-1) \end{aligned}$$

$$\cancel{Q_2} + \cancel{Q_3} + \cdots + \cancel{Q_{n-1}} + Q_n = Q_1 + \cancel{Q_2} + \cancel{Q_3} + \cdots + \cancel{Q_{n-1}} + [4 + 8 + 12 + \cdots + 4(n-1)]$$

Ao somar as igualdades e aplicando a lei do cancelamento aditivo, obtemos:

$$Q_n = Q_1 + [4 + 8 + 12 + \cdots + (4n - 4)].$$

Temos que $[4 + 8 + 12 + \cdots + (4n - 4)]$ é uma progressão aritmética de razão 4, e aplicando a soma dos termos (S_n) da P.A., resulta em,

$$S_n = \frac{(4 + 4n - 4) \cdot (n - 1)}{2} \implies S_n = \frac{4n(n - 1)}{2}.$$

Sabendo-se que,

$$\begin{aligned} Q_n &= Q_1 + S_n \\ Q_n &= Q_1 + \frac{4n(n - 1)}{2}. \end{aligned}$$

Do enunciado do problema temos $Q_1 = 1$, do qual segue:

$$\begin{aligned}Q_n &= 1 + \frac{4n^2 - 4n}{2} \\&= \frac{2 + 4n^2 - 4n}{2} \\&= \frac{4n^2 - 4n + 2}{2} \\Q_n &= 2n^2 - 2n + 1.\end{aligned}$$

Para resolvermos o problema de encontrar a primeira figura que tem mais de 2009 quadradinhos, devemos resolver a seguinte inequação.

$$2n^2 - 2n + 1 > 2009$$

$$2n^2 - 2n - 2008 > 0.$$

Teremos o valor do discriminante $\Delta = 16068$ e aproximando o valor de $\sqrt{\Delta} \cong 126$. E com as devidas aproximações segue o estudo do sinal da inequação.

$$n = \frac{2 \pm 126}{4} \implies n_1 \cong -31 \text{ e } n_2 \cong 32$$

Temos como solução da inequação $n < -31$ ou $n > 32$. E para a solução do problema em questão devemos ter $n > 32$.

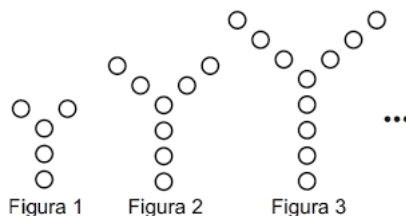
Então a primeira figura com mais de 2009 quadradinhos é 33ª figura, conforme podemos justificar verificando o número de quadradinhos na 32ª e 33ª figura utilizando a fórmula fechada originada da fórmula de recorrência.

$$Q_{32} = 2 \cdot 32^2 - 2 \cdot 32 + 1 = 1985$$

$$Q_{33} = 2 \cdot 33^2 - 2 \cdot 33 + 1 = 2113.$$

Problema 4.5.5. Observe a sequência de figuras abaixo, todas elas com a forma da letra Y. Seguindo este padrão, quantas bolinhas terá a 15ª figura?

Figura 4.17: Sequência de bolinhas em forma da letra Y



Fonte: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>

Este problema foi retirado da prova OBMEP [2019] - primeira fase, quarta questão da prova nível 2 direcionada aos alunos do 8º e 9º ano do ensino fundamental maior.

Chamaremos de Y_1 o número de bolinhas da figura 1, Y_2 o número de bolinhas da figura 2 e assim sucessivamente até Y_n que representa o problema do número de bolinhas da figura n .

Analisando o processo de construção das figuras, podemos observar a partir de um raciocínio recursivo que cada figura é construída a partir da figura anterior acrescentando 3 bolinhas, sendo uma em cada ponta do Y.

Temos $Y_1 = 5$ e prosseguindo o raciocínio temos,

$$Y_2 = Y_1 + 3$$

$$Y_3 = Y_2 + 3$$

$$Y_4 = Y_3 + 3$$

$$\vdots$$

$$Y_n = Y_{n-1} + 3$$

$$\cancel{Y_2} + \cancel{Y_3} + \cdots + \cancel{Y_{n-1}} + Y_n = Y_1 + \cancel{Y_2} + \cancel{Y_3} + \cdots + \cancel{Y_{n-1}} + \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{n-1 \text{ parcelas}}$$

Daí segue que,

$$Y_n = Y_1 + 3(n - 1).$$

Do enunciado do problema temos que $Y_1 = 5$, então:

$$Y_n = 5 + 3n - 3$$

$$Y_n = 3n + 2.$$

Logo o número de bolinhas da 15ª figura pode ser obtido da seguinte fórmula fechada.

$$Y_n = 3 \cdot 15 + 2 \implies Y_n = 47 \text{ bolinhas.}$$

5 Outras abordagens do estudo das sequências recorrentes

Nesta seção fundamentada no livro Sequências Recorrentes de A. Markuchevitch apresentaremos generalizações de recorrências de tal forma a abranger o estudo de sequências possibilitando aplicações em alguns tópicos de matemática incentivando alguns resultados algébricos e aritméticos.

Iremos novamente retomar alguns conceitos já abordados neste trabalho a partir de ideias generalizadas e precisas com o intuito de enriquecer os conceitos, definição e exemplos.

5.1 Sequências de ordem k

Denotaremos as sequências por

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots \quad (5.1.1)$$

Ou simplesmente podemos denotar por $\{u_n\}$.

Definição 5.1.1. Uma sequência definida em (5.1.1) é dita recorrente de ordem k se existirem k números (reais ou complexos) da forma $a_1, a_2, \dots, a_k$ com $a_k \neq 0$ e um número $m \geq 1$ tais que, para qualquer $n \geq m$, vale:

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n. \quad (5.1.2)$$

A relação (5.1.2) é denominada equação de recorrência de ordem k . Cada termo de uma sequência recorrente de ordem k se exprime, assim, através dos k termos que o antecedem imediatamente. E o termo recorrente é utilizado, como já foi explicito em seções anteriores na qual cada termo é determinado por termos anteriores.

Analisaremos a ordem de algumas sequências recorrentes.

Exemplo 5.1.1. Uma progressão geométrica com os termos,

$$u_1 = a, u_2 = aq, u_3 = aq^2, \dots, u_n = aq^{n-1}, \dots \quad (5.1.3)$$

A sequência (5.1.3) será de primeira ordem, ou seja, $k = 1$, dado que:

$$u_{n+1} = qu_n. \quad (5.1.4)$$

De fato, analisando a equação (5.1.2) temos $k = 1$ e $a_1 = q$.

$$u_{n+1} = qu_{n+1-1}$$

$$u_{n+1} = qu_n.$$

Exemplo 5.1.2. Uma progressão aritmética com os termos,

$$u_1 = a, u_2 = a + r, u_3 = a + 2r, \dots, u_n = a + (n - 1)r, \dots \quad (5.1.5)$$

Vale a relação,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Verificaremos a ordem desta sequência recursiva,

Tomemos da sequência dois valores sucessivos de n , na qual teremos as seguintes igualdades.

$$u_{n+2} = u_{n+1} + r \quad \text{e} \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

E fazendo $u_{n+2} - u_{n+1}$, temos:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} + r - (u_n + r)$$

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} + r - u_n - r$$

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$$

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n. \quad (5.1.6)$$

Obtemos uma equação no formato (5.1.2) com $k = 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = -1$. Logo, uma progressão aritmética é uma sequência recorrente de segunda ordem, ou seja, $k = 2$.

Exemplo 5.1.3. Para a sequência dos quadrados dos números naturais,

$$u_1 = 1^2, u_2 = 2^2, u_3 = 3^2, \dots, u_n = n^2, \dots \quad (5.1.7)$$

Temos que,

$$u_{n+1} = (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1,$$

Tomemos da sequência dois termos consecutivos,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \\ u_{n+1} &= u_n + 2n + 1. \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

e,

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= (n+2)^2 = n^2 + 4n + 4 \\ u_{n+2} &= (n^2 + 2n + 1) + 2n + 3 \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + 2n + 3. \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

E fazendo $u_{n+2} - u_{n+1}$, temos

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_{n+1} &= (u_{n+1} + 2n + 3) - (u_n + 2n + 1) \\ u_{n+2} - u_{n+1} &= u_{n+1} + 2n + 3 - u_n - 2n - 1 \\ u_{n+2} - u_{n+1} &= u_{n+1} - u_n + 2, \end{aligned}$$

isto é,

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2. \tag{5.1.10}$$

A relação (5.1.10) sendo verdadeira para qualquer n , se obtém

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2. \tag{5.1.11}$$

E fazendo $u_{n+3} - u_{n+2}$, temos

$$\begin{aligned} u_{n+3} - u_{n+2} &= (2u_{n+2} - u_{n+1} + 2) - (2u_{n+1} - u_n + 2) \\ u_{n+3} - u_{n+2} &= 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2 - 2u_{n+1} + u_n - 2 \\ u_{n+3} &= 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n \end{aligned} \tag{5.1.12}$$

Obtemos uma equação no formato (5.1.2) com $k = 3$, $a_1 = 3$, $a_2 = -3$ e $a_3 = 1$. Logo, a sequência (5.1.7) é, por conseguinte, uma sequência recorrente de terceira ordem, ou seja, $k = 3$.

Exemplo 5.1.4. Para a sequência dos cubos dos números naturais,

$$u_1 = 1^3, u_2 = 2^3, u_3 = 3^3, \dots, u_n = n^3, \dots \quad (5.1.13)$$

Temos que,

$$u_{n+1} = (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1,$$

Tomemos da sequência dois termos consecutivos,

$$u_{n+1} = u_n + 3n^2 + 3n + 1, \quad (5.1.14)$$

e,

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= (n+2)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 \cdot 2 + 3 \cdot n \cdot 2^2 + 2^3 \\ u_{n+2} &= n^3 + 6n^2 + 12n + 8 \\ u_{n+2} &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 3n^2 + 9n + 7 \\ u_{n+2} &= (n+1)^3 + 3n^2 + 9n + 7 \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + 3n^2 + 9n + 7. \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

E fazendo $u_{n+2} - u_{n+1}$, temos

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_{n+1} &= (u_{n+1} + 3n^2 + 9n + 7) - (u_n + 3n^2 + 3n + 1) \\ u_{n+2} - u_{n+1} &= u_{n+1} + 3n^2 + 9n + 7 - u_n - 3n^2 - 3n - 1 \\ u_{n+2} - u_{n+1} &= u_{n+1} - u_n + 6n + 6 \\ u_{n+2} &= 2u_{n+1} - u_n + 6n + 6. \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

A relação (5.1.16) sendo verdadeira para qualquer n , se obtém

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 6n + 6. \quad (5.1.17)$$

E fazendo $u_{n+3} - u_{n+2}$, temos

$$\begin{aligned} u_{n+3} - u_{n+2} &= (2u_{n+2} - u_{n+1} + 6n + 6) - (2u_{n+1} - u_n + 6n + 6) \\ u_{n+3} - u_{n+2} &= 2u_{n+2} - u_{n+1} + 6n + 6 - 2u_{n+1} + u_n - 6n - 6 \\ u_{n+3} &= 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n. \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

A relação (5.1.18) sendo verdadeira para qualquer n , se obtém

$$u_{n+4} = 3u_{n+3} - 3u_{n+2} + u_{n+1}. \quad (5.1.19)$$

E fazendo $u_{n+4} - u_{n+3}$, temos

$$\begin{aligned}
 u_{n+4} - u_{n+3} &= (3u_{n+3} - 3u_{n+2} + u_{n+1}) - (3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n) \\
 u_{n+4} - u_{n+3} &= 3u_{n+3} - 3u_{n+2} + u_{n+1} - 3u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n \\
 u_{n+4} - u_{n+3} &= 3u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_n \\
 u_{n+4} &= 4u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_n.
 \end{aligned} \tag{5.1.20}$$

Obtemos uma equação no formato (5.1.2) com $k = 4$, $a_1 = 4$, $a_2 = -6$, $a_3 = 4$ e $a_4 = -1$. Logo, a sequência (5.1.13) é, por conseguinte, uma sequência recorrente de quarta ordem, ou seja, $k = 4$.

5.2 Sequências periódicas

Segue que qualquer sequência periódica é recorrente. Assim, digamos, a sequência dos algarismos da representação decimal das seguintes frações são obtidas de expansões numéricas periódicas e são recorrentes de ordem k qualquer, conforme exemplos.

Exemplo 5.2.1. A representação decimal da fração,

$$\frac{3187}{3700} = 0,86135135135 \dots,$$

Isto é, a sequência

$$u_1 = 8, u_2 = 6, u_3 = 1, u_4 = 3, u_5 = 5, u_6 = 1, u_7 = 3, \dots \tag{5.2.1}$$

Essa sequência será recorrente de ordem três, $k = 3$, dado que

$$u_{n+3} = u_n \quad (n \geq 3). \tag{5.2.2}$$

Equivale a,

$$u_{n+3} = 0 \cdot u_{n+2} + 0 \cdot u_{n+1} + 1 \cdot u_n$$

Temos então a relação que nada mais é que a equação (5.1.2) com $k = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ e $a_3 = 1$.

Exemplo 5.2.2. A representação decimal da fração,

$$\frac{4297}{16665} = 0,257845784 \dots,$$

Isto é, a sequência

$$u_1 = 2, u_2 = 5, u_3 = 7, u_4 = 8, u_5 = 4, u_6 = 5, u_7 = 7, u_8 = 8 \dots \quad (5.2.3)$$

Essa sequência será recorrente de ordem quatro, $k = 4$, dado que

$$u_{n+4} = u_n \quad (n \geq 2). \quad (5.2.4)$$

Equivale a,

$$u_{n+4} = 0 \cdot u_{n+3} + 0 \cdot u_{n+2} + 0 \cdot u_{n+1} + 1 \cdot u_n.$$

Temos então a relação que nada mais é que a equação (5.1.2) com $k = 4$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ e $a_4 = 1$.

5.3 Recorrência e aplicações elementares na álgebra

Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ dois polinômios escritos na ordem de potências crescentes da variável x . Consideraremos a sequência dos coeficientes do quociente obtida pela divisão de $P(x)$ por $Q(x)$ na ordem crescente de x .

$$P(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_lx^l,$$

e,

$$Q(x) = B_0 + B_1x + \dots + B_kx^k \quad (B_0 \neq 0),$$

Dividindo $P(x)$ por $Q(x)$, se a divisão não for exata, o processo de divisão de $P(x)$ por $Q(x)$ se prolongará então indefinidamente gerando uma série,

$$D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + \dots + D_nx^n + \dots$$

Mostraremos que a sequência

$$u_1 = D_0, u_2 = D_1, \dots, u_n = D_{n-1}, \dots \quad (5.3.1)$$

é recorrente de ordem k , lembrando que k é o grau do divisor.

Para fazer isso, vamos fixar qualquer número natural n que responda à única condição $n \geq l - k + 1$ e interromper o processo de divisão no termo do quociente que contém x^{n+k} .

O Resto da divisão será então um polinômio $R(x)$, no qual todas as potências de x em $R(x)$ serão superiores a $n + k$.

Considerando a relação entre dividendo, divisor, quociente e resto, obtemos a seguinte identidade.

$$A_0 + \dots + A_l x^l = (B_0 + \dots + B_k x^k) \cdot (D_0 + \dots + D_{n+k} x^{n+k}) + R(x).$$

Vamos determinar os coeficientes de x^{n+k} em ambos os membros dessa identidade e torná-los iguais.

Sendo $n + k \geq l + 1$, o coeficiente de x^{n+k} no primeiro membro é igual a zero. Portanto, o coeficiente de x^{n+k} no segundo membro também deve ser zero.

Mas os termos que contêm x^{n+k} aparecem apenas aqui no produto $(B_0 + \dots + B_k x^k) \cdot (D_0 + \dots + D_{n+k} x^{n+k})$, pois as potências dos termos de $R(x)$ são superiores a $n + k$, resulta que o coeficiente mencionado será:

$$D_{n+k} B_0 + D_{n+k-1} B_1 + \dots + D_n B_k. \quad (5.3.2)$$

Este devendo se anular, ou seja, pelo coeficiente procurado que temos, deve ser igual a zero.

$$D_{n+k} B_0 + D_{n+k-1} B_1 + \dots + D_n B_k = 0.$$

Lembrando que $B_0 \neq 0$, encontramos

$$D_{n+k} = -\frac{B_1}{B_0} D_{n+k-1} - \dots - \frac{B_k}{B_0} D_n \quad (n \geq l - k + 1) \quad (5.3.3)$$

Temos uma equação de recorrência mostrando que a sequência (5.3.1) é recorrente de ordem k .

A sequência de Fibonacci é considerada o exemplo mais geral que proporciona uma caracterização das sequências recorrentes. Demonstraremos que qualquer sequência recorrente de ordem k ,

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots \quad (5.3.4)$$

Satisfazendo a equação de recorrência

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \dots + a_k u_n \quad (n \geq m \geq 1). \quad (5.3.5)$$

Coincide com a sequência dos coeficientes do resultado da divisão de um certo polinômio $P(x)$ por,

$$Q(x) = 1 - a_1 x - \dots - a_k x^k. \quad (5.3.6)$$

Seja n qualquer número natural que atenda a condição $n > k + m - 2$, e multiplicando $Q(x)$ por $u_1 + u_2x + u_3x^2 + \dots + u_{n+1}x^n$, obteremos

$$\begin{aligned} (1 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_kx^k) (u_1 + u_2x + \dots + u_{k+m-1}x^{k+m-2} + \dots + u_{n+1}x^n) = \\ = [u_1 + (u_2 - a_1u_1)x + \dots + (u_{k+m-1} - a_1u_{k+m-2} - \dots - a_ku_{m-1})x^{k+m-2}] + \\ + [(u_{k+m} - a_1u_{k+m-1} - \dots - a_ku_m)x^{k+m-1} + \dots + (u_{n+1} - a_1u_n - \dots - \\ - a_ku_{n-k+1})x^n] - [(a_1u_{n+1} + \dots + a_ku_{n-k+2})x^{n+1} + \dots + a_ku_{n+1}x^{n+1}] \quad (5.3.7) \end{aligned}$$

No primeiro colchete da equação (5.3.7) existe um polinômio de grau não superior a $l = k + m - 2$ e cujos coeficientes não dependem de n . Vamos indicar esse polinômio por $P(x)$.

$$P(x) = u_1 + (u_2 - a_1u_1)x + \dots + (u_{k+m-1} - a_1u_{k+m-2} - \dots - a_ku_{m-1})x^{k+m-2}. \quad (5.3.8)$$

A segunda das expressões entre colchetes da equação (5.3.7), é, em virtude da equação (5.3.5), um polinômio com coeficientes todos iguais a zero, enquanto que no último colchete da equação (5.3.7), existe um polinômio cujos coeficientes dependem de n e de grau superior a $n + 1$. Indicando por $R_n(x)$, poderemos reescrever a identidade (5.3.7) assim,

$$P(x) = (1 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_kx^k) \cdot (u_1 + u_2x + \dots + u_{n+1}x^n) + R_n(x). \quad (5.3.9)$$

Temos então que $u_1 + u_2x + \dots + u_{n+1}x^n$ é o quociente e que $R_n(x)$ é o resto da divisão de $P(x)$ por,

$$Q(x) = 1 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_kx^k,$$

Isto é,

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$$

É com efeito, a sequência dos coeficientes do quociente obtida pela divisão do polinômio (5.3.8) pelo polinômio (5.3.6).

Exemplo 5.3.1. A título de exemplo, consideremos a sequência de Fibonacci,

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = 2, \quad u_4 = 3, \quad u_5 = 5, \dots$$

Seus termos verificam a equação,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad (n \geq 1).$$

Teremos para este caso $m = 1$, $k = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$. Logo, $Q(x) = 1 - x - x^2$, o grau do polinômio $P(x)$ não devendo exceder $k + m - 2 = 1$. Aplicando a fórmula (5.3.8) encontramos,

$$P(x) = 1 + (1 - 1 \cdot 1)x = 1.$$

Daí decorre que os números de Fibonacci coincidem com a série dos coeficientes do quociente obtido pela divisão de 1 por $1 - x - x^2$.

$$\begin{array}{r} 1 \\ -1 + x + x^2 \overline{) 1 - x - x^2} \\ \underline{x + x^2} \\ -x + x^2 + x^3 \\ \underline{2x^2 + x^3} \\ -2x^2 + 2x^3 + 2x^4 \\ \underline{3x^3 + 2x^4} \\ -3x^3 + 3x^4 + 3x^5 \\ \underline{5x^4 + 3x^5} \\ \vdots \end{array}$$

5.4 Recorrência e aplicações elementares na aritmética

Para mostrar um precioso resultado do estudo das recorrências na aritmética, retomaremos o número de Fibonacci a partir da equação característica,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{com } u_1 = u_2 = 1.$$

A equação característica é $r^2 - r - 1 = 0$ e as suas raízes são dadas por:

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Então,

$$u_n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Para determinar C_1 e C_2 , podemos usar $u_1 = u_2 = 1$, mas é mais conveniente usar $u_0 = 0$ e $u_1 = 1$.

Obtemos o sistema,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Daí

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Ou seja,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \quad (5.4.1)$$

Uma outra aplicação da Fórmula de Fibonacci consiste em mostrar que,

Seja a e b dois números naturais com $a < b$, o número de divisões sucessivas que devem ser feitas usando o Algoritmo de Euclides para encontrar o máximo divisor comum de a e b é inferior a cinco vezes o número de algarismos na representação decimal de a .

Aplicando o Algoritmo de Euclides aos números a e b conduz a uma cadeia de igualdades.

$$\begin{aligned} 1) \quad & b = ax' + y' \\ 2) \quad & a = y'x'' + y'' \\ 3) \quad & y' = y''x''' + y''' \\ & \vdots \\ k) \quad & y^{(k-2)} = y^{(k-1)}x^{(k)} + y^{(k)} \\ k+1) \quad & y^{(k-1)} = y^{(k)}x^{(k+1)} \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Os restos das divisões obedecendo às desigualdades,

$$a > y' > y'' > y''' > \dots > y^{(k-1)} > y^{(k)} \geq 1$$

Podemos verificar que na cadeia de igualdades em (5.4.2) no item $k+1$) na última igualdade o resto é igual a zero. Obtemos o número $y^{(k)}$, o resto anterior, sendo o m.d.c. entre a e b . E temos que k é o número de divisões necessárias para a determinação deste m.d.c..

Desta forma, iremos comparar os números $y^{(k)}, y^{(k-1)}, \dots, y', a$ com os números de Fibonacci $(u_1, u_2, u_3, \dots)$. E podemos observar que tendo $y^{(k)} \geq 1 = u_2$; mas como o resto anterior $y^{(k-1)}$ é maior que $y^{(k)}$, resulta em $y^{(k-1)} \geq 2 = u_3$.

Da k -ésima das igualdades resulta então que,

$$y^{(k-2)} = y^{(k-1)}x^{(k)} + y^{(k)} \geq y^{(k-1)} \cdot 1 + y^{(k)} \geq u_3 + u_2 = u_4$$

Logo,

$$y^{(k)} \geq u_2, \quad y^{(k-1)} \geq u_3 \quad \text{e} \quad y^{(k-2)} \geq u_4.$$

Uma vez verificado que,

$$y^{(k)} \geq u_2, \quad \dots, \quad y^{(m)} \geq u_{k-m+2}, \quad y^{(m-1)} \geq u_{k-m+3} \quad (m-1 \geq 2),$$

Da igualdade $y^{(m-2)} = y^{(m-1)}x^{(m)} + y^{(m)}$ segue que,

$$y^{(m-2)} \geq y^{(m-1)} \cdot 1 + y^{(m)} \geq u_{k-m+3} + u_{k-m+2} = u_{k-m+4}$$

Portanto continuando nosso raciocínio, chegamos as seguintes desigualdades:

$$y'' \geq u_k, \quad y' \geq u_{k+1},$$

E da cadeia de igualdades em (5.4.2) no item 2) deduziremos então que,

$$a = y'x'' + y'' \geq y' \cdot 1 + y'' \geq u_{k+1} + u_k = u_{k+2}$$

Mas de acordo com a equação (5.4.1), para u_{k+2} temos:

$$u_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} \right],$$

Decorre que,

$$a \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} \right] > \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - 1 \right] \quad (5.4.3)$$

Sabendo-se que $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1$ e, consequentemente, $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right|^{k+2} < 1$.

Da relação (5.4.3) se obtêm, em função de $\sqrt{5} < 3$, vale $\sqrt{5} < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, as

desigualdades $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} < a\sqrt{5} + 1 < \sqrt{5}(a+1) < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 (a+1)$,

então

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 \cdot (a+1)$$

segue que

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k < (a+1). \quad (5.4.4)$$

Tendo-se observado que

$$u_5 = 5 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^5 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^5 \right] < \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^5 + 1 \right],$$

Em que resulta,

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^5 > 5\sqrt{5} - 1 > 10,$$

Em virtude de (5.4.4), podemos escrever

$$10^k < \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{5k} < (a + 1)^5.$$

Se a representação decimal do número a compreender n algarismos, então

$$10^{n-1} \leq a < 10^n,$$

onde podemos escrever

$$a + 1 \leq 10^n,$$

Relação que junto com (5.4.4) fornece

$$10^k < (a + 1)^5 \leq 10^{5n},$$

decorrendo a desigualdade,

$$k < 5n. \tag{5.4.5}$$

Obtivemos o resultado necessário, estipulando que o número k de divisões sucessivas, pelo Algoritmo de Euclides, do m.d.c., de dois números é inferior a cinco vezes o número de algarismos decimais do menor destes números.

As nossas considerações mostram, ademais, que um número considerável de divisões (no sentido de que o número de operações é alto e se aproxima do limite indicado pela desigualdade (5.4.5)) será indispensável ao se aplicar o Algoritmo de Euclides a dois números de Fibonacci consecutivos.

Assim, segundo a nossa avaliação, o número de divisões resultantes da aplicação do Algoritmo de Euclides aos números $b = u_{20} = 6765$ e $a = u_{19} = 4181$, por exemplo, será inferior a $5 \cdot 4 = 20$, 4 (quatro) sendo o número de algarismos decimais de a .

Verifica-se que serão necessárias as seguintes 17 divisões.

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad 6765 = 4181 \cdot 1 + 2584, & 10) \quad 89 = 55 \cdot 1 + 34, \\
 2) \quad 4181 = 2584 \cdot 1 + 1597, & 11) \quad 55 = 34 \cdot 1 + 21, \\
 3) \quad 2584 = 1597 \cdot 1 + 987, & 12) \quad 34 = 21 \cdot 1 + 13, \\
 4) \quad 1597 = 987 \cdot 1 + 610, & 13) \quad 21 = 13 \cdot 1 + 8, \\
 5) \quad 987 = 610 \cdot 1 + 377, & 14) \quad 13 = 8 \cdot 1 + 5, \\
 6) \quad 610 = 377 \cdot 1 + 233, & 15) \quad 8 = 5 \cdot 1 + 3, \\
 7) \quad 377 = 233 \cdot 1 + 144, & 16) \quad 5 = 3 \cdot 1 + 2, \\
 8) \quad 233 = 144 \cdot 1 + 89, & 17) \quad 3 = 2 \cdot 1 + 1, \\
 9) \quad 144 = 89 \cdot 1 + 55, & 18) \quad 2 = 1 \cdot 2 + 0,
 \end{array}$$

Podemos verificar que os restos destas divisões que obtemos aqui sucessivamente são números de Fibonacci consecutivos em ordem decrescente.

Todos os quocientes (com exceção do último) são todos iguais a unidade e isto explica o número elevado de divisões. O máximo divisor comum é igual a um (igual ao resto da 17-ésima divisão) explica o número grande de divisões indispensáveis.

A igualdade a um do m.d.c. de dois números de Fibonacci consecutivos quaisquer resulta, de resto, da coincidência do m.d.c. de u_{n+2} e u_{n+1} e do m.d.c. u_{n+1} e u_n , consequência imediata da relação $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, e do fato que o m.d.c. de u_2 e u_1 é a unidade.

6 Considerações

Visto que o tema de recorrências lineares é pouco abordado nos conteúdos de matemática no ensino básico, este trabalho ressalta a importância do estudo inicial e suas aplicações no ensino básico. A iniciativa do estudo das recorrências no ensino básico é principalmente pelo tema ser bastante contextualizado e fundamentado no pensamento recursivo, tornando-se uma ferramenta facilitadora na resolução dos mais diversos tipos de problemas abordando vários conteúdos.

Podemos observar no decorrer do trabalho que foi enfatizado muito o estudo das sequências numéricas, com sua lógica na disposição e enumeração de cada elemento. Destaca-se a importância do uso das sequências numéricas, uma vez por ter uma abordagem que prioriza a ideia e o pensamento lógico alicerçado no conceito de padrões e modelagem matemática, visando ser um ponto de partida para que possamos ter uma estrutura organizada na resolução de problemas.

A riqueza do tema abordado neste trabalho pode ser verificado em diversos conteúdos da matemática, com intuito de ser mais uma ferramenta de resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem. O uso do estudo das recorrências na geometria, álgebra e aritmética poderá ser um fator motivador na leitura, compreensão e resolução de problemas matemáticos uma vez que o mesmo incentiva a elaboração e construção de soluções alternativas para a resolução de problemas.

A abordagem do estudo das recorrências lineares no ensino básico é de provocar e incentivar que os alunos sejam cada vez mais intensamente desafiados a situações problemas didáticas motivadoras. Fazendo com que a nossa sala de aula se transforme ainda mais em um laboratório para que os nossos alunos se tornem ainda mais protagonistas em elaboração de ideias e resolução de problemas, fortalecendo a experiência e o ambiente em fazer matemática a partir da prática do pensar, do experimentar, do testar, do criar, do desenvolver, do demonstrar, do produzir construindo linguagem matemática a partir das situações do cotidiano.

Trabalhamos vários problemas de livros acadêmicos, didáticos e provas de olimpíadas, em destaque a OBMEP, o que confirma que são situações que não estão tão

distantes dos nossos alunos. Desta forma verifica que os padrões das resoluções de recorrências podem ser perfeitamente inseridos e trabalhados entre professores e alunos visando uma relação mais saudável no processo ensino-aprendizagem na resolução de problemas matemáticos.

Diante do exposto fica cada vez mais evidente iniciar o estudo de recorrências no ensino básico de forma que os professores possam utilizar essa ferramenta nas aulas direcionada aos alunos para facilitar a exposição de conteúdos, abrangendo alguns tópicos com cuidado e atenção para que possam ser supridas as devidas limitações e necessidades de aprofundamento de conteúdos quando assim forem exigidas, desenvolvendo resoluções e instigando os alunos a perceberem a importância de desenvolver seu próprio raciocínio de construção do pensamento resolutivo em diversos conteúdos matemáticos e afins.

Este trabalho, de forma alguma, tem a pretensão de esgotar o assunto em si mesmo. Foi utilizado um referencial teórico abrangente e preciso sobre o estudo das recorrências com foco nas definições, teoremas e aplicações. Em destaque podemos citar a obra da *Iniciação na Matemática - Sequências Recorrentes* de A. Markuchevitch da Editora Mir. Moscou que nos trouxe a ideia do quanto há para ser conhecido, estudado e explorado referente as aplicações e raciocínios recursivos em problemas matemáticos, além das abordagens e resultados que, neste trabalho foram apresentados.

Referências Bibliográficas

NETO, Antonio Caminha Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar Volume 1: Números Reais**. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.

_____. **Tópicos de Matemática Elementar Volume 4: Combinatória**. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2016.

MORGADO, Augusto César.; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta**. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2015.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da Matemática**. Blucher, São Paulo, 2012.

DOLCE, Osvaldo.; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar volume 9: Geometria plana**. Atual Editora, São Paulo, 1993.

WAGNER, Eduardo.; LAGES, Elon.; MORGADO, Augusto César.; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **A Matemática do Ensino Médio volume 2**. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1998.

_____. **Temas e Problemas Elementares**. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2005.

HINZ, Andreas et. al. **The Tower of Hanoi - Myths and Maths**. Birkhauser, New York, 2013.

IFRAH, Georges. **Os Números, a história de uma grande invenção**. Editora Globo, São Paulo, 2005.

MARKUCHEVITCH, A.I. **Sequência Recorrentes**. Editora Mir. Moscou, Moscou, 1985.

ROHDEN, Huberto. **Einstein - O Enigma do Universo**. Editora Martin Claret, São Paulo, 2004.

SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à Teoria dos Números**. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2003.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.

SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à Teoria dos Números**. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 10 de Março de 2020.

OBMEP. **Olimpiadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas: Apresentação**. Disponível em <http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm>. Acesso em: 25 de Março de 2020.

OBMEP. **Olimpiadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas: Provas**. Disponível em <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 27 de Março de 2020.