



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO DE FÍSICA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**O OSCILADOR DE KLEIN-GORDON (2+1)D SUJEITO A INTERAÇÕES  
EXTERNAS**

São Luis, 19 de dezembro de 2016



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO DE FÍSICA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**O OSCILADOR DE KLEIN-GORDON (2+1)D SUJEITO A INTERAÇÕES  
EXTERNAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão para obtenção do título de Mestre em Física

**Orientador:** Prof. Dr. Luis Rafael Benito Castro

São Luis, 19 de dezembro de 2016



Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Alves da Cruz Neto, Francisco.

O OSCILADOR DE KLEIN-GORDON 2+1D SUJEITO A INTERAÇÕES  
EXTERNAS / Francisco Alves da Cruz Neto. - 2016.

66 p.

Orientador(a): Luis Rafael Benito Castro.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em  
Física/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís,  
MA, 2016.

1. Estados ligados. 2. Oscilador Klein-Gordon. 3.  
Polinômios de Heun. 4. Potencial Cornell. I. Benito  
Castro, Luis Rafael. II. Título.



**FRANCISCO ALVES DA CRUZ NETO**

**O OSCILADOR DE KLEIN-GORDON (2+1)D SUJEITO A INTERAÇÕES  
EXTERNAS**

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação em Física da Universidade  
Federal do Maranhão para obtenção do título  
de Mestre em Física

Aprovado em     /     /

**Banca Examinadora:**

---

**Prof. Dr. Luis Rafael Benito Castro (Orientador)**

Doutor em Física

Universidade Federal do Maranhão - UFMA

---

**Prof. Dr. Rodolfo Alvan Casana Sifuentes**

Doutor em Física

Universidade Federal do Maranhão - UFMA

---

**Prof. Dr. Edilberto Oliveira Silva**

Doutor em Física

Universidade Federal do Maranhão - UFMA

---

**Profa. Dra. Geusa de Araujo Marques**

Doutora em Física

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG



## DEDICATÓRIA

Aos meus amigos;  
À minha namorada Suly;  
À minha mãe Maria da Conceição;  
Às minhas irmãs





## AGRADECIMENTOS

À Deus que, com a sua infinita misericórdia e amor tem sempre mostrado os caminhos de minha vida.

Agradeço em especial ao Professor e Orientador Dr. Luis Rafael Benito Castro, pela orientação e paciência.

Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão que contribuíram para minha formação acadêmica.

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES pelo incentivo financeiro destinado aos Estudantes de Pós-Graduação Stricto Senso

Agradeço à minha família e à minha namorada que tanto me ajudaram nessa caminhada.



## Resumo

A dinâmica de partículas escalares de spin-zero num plano tem chamado a atenção recentemente devido a novos fenômenos como por exemplo o efeito Hall quântico e isolantes topológicos para sistemas bosônicos. Neste trabalho estudamos a dinâmica de uma partícula escalar de spin-zero num potencial oscilador de Klein–Gordon acoplado a uma mistura de potenciais de natureza escalar e vetorial do tipo Cornell em (2+1) dimensões. Aplicando o método de separação de variáveis, a equação radial pode ser expressa como uma equação de Schrödinger com um potencial efetivo composto do oscilador harmônico tridimensional mais um potencial Cornell. Usando uma apropriada mudança de variável a equação radial pode ser expressa em termos da equação diferencial de segunda ordem chamada biconfluyente de Heun. Seguindo o procedimento adequado, é dizer, aplicando corretamente as condições de contorno, a solução da equação radial pode ser expressa em termos dos polinômios de Heun. A partir das condições de contorno a condição de quantização também é obtida e mostramos que para este problema o estado fundamental é definido pelo número quântico  $n = 0$  mediante restrições dos valores dos parâmetros do potencial. Também analisamos as soluções para alguns casos particulares já discutidos na literatura. Neste contexto, quando consideramos o potencial escalar do tipo linear e vetor do tipo Coulomb, o estado fundamental também é definido pelo número  $n = 0$  em oposição ao que foi divulgado na literatura. Observamos ainda que quando consideramos apenas a interação vetorial do tipo Coulomb, neste caso o estado fundamental é definido pelo número quântico  $n = 1$ , em concordância com outros trabalhos divulgados na literatura.

**Palavras-chaves:** Oscilador Klein-Gordon, potencial Cornell, estados ligados, polinômios de Heun



## Abstract

The dynamics of scalar particle spin-zero in a plane has drawn attention recently due to new phenomena such as quantum Hall effect and topological insulators for bosonic systems. We study the dynamics of a particle spin-zero scalar Klein-Gordon an oscillator coupled to a potential mixture of potential nature scalar and vector Cornell type in the  $(2 + 1)$  dimensions. Applying the method of separation of variables, the radial equation may be expressed as a Schrödinger equation with an effective candidate compound the three-dimensional harmonic oscillator potential Cornell another. Using an appropriate change of variable radial equation can be expressed in terms of the differential equation of second order called biconfluent of Heun. Following proper procedure, that is, correctly applying the boundary conditions, the radial equation solution can be expressed in terms of polynomials Heun. From the boundary conditions the quantization condition is also obtained and show that for this fundamental state problem is defined by the quantum number  $n = 0$  under restrictions of the values of potential parameters. We also analyze the solutions to some particular cases already discussed in the literature. In this context, when we consider the scalar potential of the linear type and vector Coulomb type, the ground state is also defined by the number  $n = 0$  as opposed to what was reported in the literature. We also observed that when we consider only the vector Coulomb interaction type, in this case the ground state is defined by quantum number  $n = 1$ , in agreement with other studies reported in the literature. **Keywords:** Klein-Gordon oscillator, Cornell potential, bound states, polynomials Heun



# Sumário

<b>Apresentação</b>	<b>17</b>
<b>1 Relatividade Restrita</b>	<b>20</b>
1.1 Notação . . . . .	20
1.2 Produto interno no espaço de Minkowski . . . . .	22
1.3 Transformações gerais de Lorentz . . . . .	23
1.4 Relatividade e eletromagnetismo . . . . .	25
1.4.1 Quadripotencial do campo eletromagnético . . . . .	26
<b>2 Equação de onda relativística para partículas de spin-zero</b>	<b>28</b>
2.1 Equação de Schrödinger . . . . .	29
2.1.1 Densidade de probabilidade e de corrente para ondas quânticas não-relativísticas . . . . .	30
2.2 Equação de Klein-Gordon . . . . .	31
2.2.1 Quadricorrente de Klein-Gordon . . . . .	33
2.2.2 Solução para partículas livres . . . . .	35
2.3 A interação de uma partícula de spin-0 com um campo eletromagnético . . . . .	36
2.3.1 Quadricorrente de Klein-Gordon sob a ação de um campo eletromagnético . . . . .	37
2.3.2 Equação radial de Klein-Gordon . . . . .	38
2.3.3 Acoplamento mínimo para um potencial Coulombiano . . . . .	39
<b>3 Oscilador Klein-Gordon</b>	<b>47</b>
3.1 Oscilador de Klein-Gordon (2+1)D . . . . .	47
3.2 Oscilador de Klein-Gordon com potencial escalar e vetorial . . . . .	50
3.2.1 Potencial escalar-vetorial misto do tipo Cornell . . . . .	51
3.2.2 Oscilador de Klein-Gordon submetido a um potencial escalar linear e a um potencial vetorial do tipo Coulomb . . . . .	57



3.2.3 Oscilador de Klein-Gordon submetido a um potencial vetorial do tipo Coulomb . . . . .	59
<b>Conclusão</b>	<b>60</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>64</b>
<b>Apêndices</b>	<b>65</b>
<b>A Valor Esperado do Momento <math>p_r^2</math> para a Função de Onda <math>u(r) = \Omega r^{-1/2 \pm i\vartheta}</math></b>	<b>66</b>

# Apresentação

O oscilador harmônico é um modelo que tem uma função fundamental no ramo da física [1]. Ao longo dos séculos tem sido um instrumento de grande importância na resolução de problemas científicos, sua maior relevância como ferramenta básica veio à tona com o surgimento da Mecânica Quântica. A razão do seu destaque junto à Mecânica Quântica se deve ao fato de ter sido o primeiro exemplo em que as regras de quantização foram aplicadas (a proposta de Planck para associar unidades discretas de energia com osciladores de radiação), e desde então, seus espectros, funções de onda, simetrias, entre outras características têm sido usados em inúmeras aplicações, não só em cálculos diretos, mas também para aumentar nossa compreensão acerca dos problemas mais complexos [2].

O modelo relativístico mais popular do oscilador Harmônico que hoje é conhecido como oscilador de Dirac foi proposto por Moshinsky e Szczepaniak [3, 4] em 1989 no seu artigo intitulado de “*The Dirac Oscillator*” com o propósito descrever sistemas relativísticos (partículas) invariantes sob transformação de Poincaré e que produzem estados ligados arbitrariamente para altas energias com espectros analiticamente solucionáveis [5]. Eles acoplaram à equação de Dirac uma interação do tipo linear tanto para as coordenadas quanto para o momento.

O modelo do oscilador de Dirac é o paradigma natural usado para estudar as propriedades de sistemas físicos [6, 7]. Este modelo é baseado na dinâmica do oscilador harmônico para partículas de spin-1/2 introduzindo uma prescrição não-mínima na equação de Dirac. Tais características já mencionadas sobre este modelo e mais o fato de ser exatamente resolvível têm contribuído para a grande quantidade de trabalhos desenvolvidos no âmbito deste formalismo teórico nos últimos anos [7]. O interesse nesse problema aparece em diferentes contextos, tais como ótica quântica [7–10], supersimetria [7, 11–13], reações nucleares [14], álgebra de Clifford [15, 16], e espaço não-comutativo [17].

Apesar de ser um modelo bastante estudado desde sua publicação seminal, a primeira verificação experimental do oscilador de Dirac só foi obtido em 2013 por Franco-Villafañe et al. O experimento realizado por eles foi baseado na relação do oscilador de Dirac com um correspondente sistema de elétrons fortemente ligados (*tight-binding*). Este sistema é implementado como um conjunto de micro-ondas por uma cadeia de discos dielétricos aco-

plados, onde cada acoplamento é evanescente e pode ser ajustado de forma apropriada. As ressonâncias do sistema de micro-ondas finito deram origem ao espectro de energia que é condizente com o oscilador de Dirac unidimensional com e sem o termo de massa [18].

De maneira análoga, outros autores propuseram um modelo relativístico do oscilador harmônico para descrever partículas escalares (sistemas relativísticos de spin inteiro). Beckers et al., introduziram este tipo de interação à equação Duffin-Kemmer-Petiau (que trata particularmente de partículas com spins  $S = 0$  e  $S = 1$ ), enquanto Bruce e Minning introduziram a mesma interação à equação de Klein-Gordon (que particularmente se atem a partícula com spin  $S = 0$ ) [19] que atualmente é conhecida como oscilador de Klein-Gordon. Estes últimos mostraram que o acoplamento do oscilador de Dirac na equação de Klein-Gordon no limite não-relativístico leva à equação de Schrödinger para oscilador harmônico não-relativístico [4].

Sistemas bosônicos em (2+1) dimensões tem chamado a atenção recentemente devido a novos fenômenos físicos, como por exemplo o efeito Hall quântico [20], isolantes topológicos [21] e novos semimetais topológicos [22]. Além disso, considerando espaços curvos, especificamente uma métrica de corda cósmica tem muita aplicação em física da matéria condensada, já que a métrica que descreve uma disclinação corresponde à parte espacial do elemento de linha da corda cósmica [23]. Outras aplicações físicas de sistemas bosônicos podem ser associadas a condensados de Bose-Einstein (CBE) [24, 25] e átomos neutros [26]. Portanto, nós acreditamos que sistemas bosônicos em (2+1) dimensões merecem ser mais explorados.

A equação de Klein-Gordon é usada para descrever a dinâmica de partículas de spin-zero na mecânica quântica relativística. Esta equação, para partículas livres, é construída usando dois objetos: o quadrivetor, operador momento linear  $p_\mu = i\hbar\nabla_\mu$  e o escalar, massa de repouso  $m$ . Usando estes elementos e a relação de dispersão relativística chegamos a forma

$$(p_\mu p^\mu - m_0^2 c^2)\Psi(\vec{r}, t) = 0.$$

Esta é a equação de Klein-Gordon para partículas escalares livres. De modo que a inserção do oscilador de Dirac a esta equação a transforma em

$$(E^2 - m_0^2 c^4)\Psi(\vec{r}, t) = (\hat{p} + im_0\omega r\hat{r}) \cdot (\hat{p} - im_0\omega r\hat{r})\Psi(\vec{r}, t).$$

Essa construção nos permite naturalmente a introdução de dois tipos de potenciais externos, um deles é a inserção de um quadrivetor potencial  $A_\mu$ , anexado à equação via acoplamento mínimo modificando  $p_\mu \rightarrow p_\mu - qA_\mu$ . O outro é um acoplamento escalar  $V_s(r)$ , que é introduzido pela substituição  $m \rightarrow m + V_s(r)$ . O acoplamento mínimo inserido na equação de Klein-Gordon é útil para estudar o comportamento de partículas de spin-zero

carregadas submetidas a um campo eletromagnético. Ele atua diferentemente nas partículas e antipartículas quebrando a simetria do espectro de autovalores. Já o acoplamento escalar atua igualmente tanto para partículas quanto para antipartículas e apresenta um espectro de autovalores simétrico com respeito a  $E = 0$ .

Os termos “quadrivetores” e “escalares” referem-se à representação irredutível unitária correspondente do grupo de simetria do espaço-tempo de Poincaré. A invariância de gauge do vetor acoplado nos permite fixá-lo sem alterar o conteúdo físico do problema.

Neste trabalho, estudamos a dinâmica de uma partícula escalar de spin-zero sujeita a um potencial do tipo oscilador de Klein–Gordon acoplado a uma mistura de potenciais de natureza escalar e vetorial em  $(2+1)$  dimensões. Aqui, descartamos a parte espacial do quadrivetor potencial e consideramos apenas a temporal. Para cada um dos campos externos utilizamos o potencial do tipo Cornell. A interação tipo Cornell é a combinação de uma componente linear que é responsável pelo confinamento da partícula e uma tipo Coulomb que é responsável pela interação de longo alcance e pode ser atrativo ou repulsivo. Mostramos que a equação diferencial radial deste problema é equivalente a uma equação de Schrödinger com um potencial efetivo composto do oscilador harmônico tridimensional mais um potencial de Cornell. Aplicando corretamente as condições de contorno, encontramos que para este sistema, as soluções para estados ligados são expressas em função dos polinômios de Heun. Além disso, das condições de contorno a condição de quantização também é obtida e mostramos que o estado fundamental é definido pelo número quântico  $n = 0$ , juntamente com restrições dos valores dos parâmetros dos potenciais externos. Analisamos em detalhe a condição de quantização para dois casos particulares já estudados na literatura e apresentamos algumas correções a esses resultados.

Como proposta de investigações futuras podemos estender a investigação deste problema para o âmbito de espaços curvos e estudar o comportamento do oscilador de Klein-Gordon com interações mista vetor-escalar do tipo Cornell.

# Capítulo 1

## Relatividade Restrita

### 1.1 Notação

Para descrever a teoria relativística devemos conhecer a ferramenta matemática usada nela. Nesta seção, introduziremos a notação usada na teoria relativística que tem como pano de fundo o espaço de Minkowski, o qual dá uma nova identidade para a relação espaço-tempo combinando o espaço Euclideo com o tempo em uma variedade quadridimensional. Nesse espaço, um intervalo de espaço-tempo é invariante para referenciais inerciais. Começamos definindo o tensor métrico (forma covariante)

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (1.1.1)$$

com

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu = 0 \\ -1 & \mu = \nu = i \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}. \quad (1.1.2)$$

Uma vez definida a métrica, podemos agora caracterizar o comprimento de um vetor  $dx = dx^\mu$  por  $ds^2 = dx dx = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ . Esta relação define o tensor métrico. A forma contravariante  $g^{\mu\nu}$  desse tensor surge da seguinte condição:

$$[g^{\mu\sigma}][g_{\sigma\nu}] = [\delta_\nu^\mu] \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.1.3)$$

De (1.1.3) podemos mostrar que  $[g^{\mu\sigma}] = [g_{\sigma\nu}]^{-1}$ , de modo que

$$[g^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad [g^{\mu\nu}] = [g_{\mu\nu}]. \quad (1.1.4)$$

Esta métrica é denominada de métrica especial de Lorentz.

O quadrivetor é um conjunto de quatro grandezas, em particular para o quadrivetor covariante, ele é definido como

$$x^\mu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} \equiv \{ct, x, y, z\}, \quad (1.1.5)$$

que retrata as coordenadas do espaço-tempo. A componente de subíndice zero representa a grandeza do tipo-tempo e as componentes de subíndices 1,2,3 representam as grandezas do tipo-espaço. O quadrivetor covariante é obtido fazendo o abaixamento do índice  $\mu$  com o auxílio do tensor métrico como segue:

$$\begin{aligned} x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu &= \{x^0, -x^1, -x^2, -x^3\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}, \\ x_\mu &= \{ct, -x, -y, -z\}. \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Podemos observar que o abaixamento dos índices de um quadrivetor muda o sinal do componentes espaciais desse vetor mantendo inalterada a componente do tempo.

Reciprocamente, podemos obter o quadrivetor contravariante a partir do covariante, ou seja

$$x_\nu = g_{\nu\sigma}x^\sigma, \quad (1.1.7)$$

$$g^{\mu\nu}x_\nu = g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma}x^\sigma.$$

De (1.1.3) temos que  $g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta_\sigma^\mu$ , ou seja, a identidade. Assim, podemos escrever

$$x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu. \quad (1.1.8)$$

## 1.2 Produto interno no espaço de Minkowski

O produto interno de quadrivetores no espaço de Minkowski é dado por

$$x \cdot x = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu = x^\mu x_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu = x^0 x_0 - x^1 x_1 - x^2 x_2 - x^3 x_3.$$

De (1.1.5) e (1.1.6), temos

$$\begin{aligned} x \cdot x &= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \\ x \cdot x &= c^2 t^2 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

De forma análoga ao quadrivetor, podemos definir o quadrimomento da seguinte forma:

$$\begin{cases} p^\mu = \left\{ \frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right\}, \\ p_\mu = \left\{ \frac{E}{c}, -p_x, -p_y, -p_z \right\}. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

O produto interno para o quadrimomento no espaço de Minkowski pode ser escrito como

$$\begin{aligned} p \cdot p &= p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2, \\ p \cdot p &= \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}, \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

e, da mesma forma podemos fazer

$$\begin{aligned} x \cdot p &= x^\mu p_\mu = x_\mu p^\mu = ct \cdot \frac{E}{c} - xp_x - yp_y - zp_z, \\ x \cdot p &= Et - xp_x - yp_y - zp_z, \\ x \cdot p &= Et - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}. \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

O operador quadrimomento

$$\begin{aligned} \hat{p}^\mu &= i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial x_0}, i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1}, i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2}, i\hbar \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}, \\ &\equiv i\hbar \nabla^\mu = \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial(ct)}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right\}, \end{aligned}$$

$$\hat{p}^\mu \equiv i\hbar\nabla^\mu = i\hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial(ct)}, -\nabla \right\}. \quad (1.2.5)$$

Da Eq. (1.2.5) temos que  $\hat{p}^\mu$  se transforma como uma quadrivetor contravariante. Analogamente, temos que

$$\hat{p}_\mu \equiv i\hbar\nabla_\mu = i\hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial(ct)}, \nabla \right\}. \quad (1.2.6)$$

De (1.2.5) e (1.2.6), o produto

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right], \quad (1.2.7)$$

onde

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \quad (1.2.8)$$

$\square$  é chamado de operador d'Alembertiano, pode ser escrito como

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu = -\hbar^2 \square. \quad (1.2.9)$$

### 1.3 Transformações gerais de Lorentz

As transformações gerais de Lorentz são representados como

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (1.3.1)$$

nas quais estão incluídas as translações (definidas pelos parâmetros  $a^\mu$ ), as rotações espaciais e as transformações especiais de Lorentz (entre referenciais inerciais em movimento relativo uniforme), além das inversões espaciais e temporais. As transformações (1.3.1) são conhecidas como transformações gerais de Lorentz não homogêneas ou, simplesmente, transformações Poincaré. Sem as translações, (1.3.1) converte-se nas transformações de Lorentz homogêneas

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (1.3.2)$$

as quais contêm rotações espaciais e transformação especiais de Lorentz (entre referenciais inerciais em movimento relativo uniforme), além das inversões espaciais e temporais.

As transformações especiais de Lorentz ao longo dos três eixos coordenados tem como matrizes de transformação,



$$L_1 = \begin{bmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1\beta_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.3.3)$$

para deslocamentos ao longo do eixo  $x$ ,

$$L_2 = \begin{bmatrix} \gamma_2 & 0 & -\gamma_2\beta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma_2\beta_2 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.3.4)$$

para deslocamentos ao longo do eixo  $y$  e

$$L_3 = \begin{bmatrix} \gamma_3 & 0 & 0 & -\gamma_3\beta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_3\beta_3 & 0 & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix}, \quad (1.3.5)$$

para movimentos relativos ao longo do eixo  $z$ , em que

$$\beta_i = \frac{V_i}{c} \quad e \quad \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_i^2}}, \quad (1.3.6)$$

com  $(i = 1, 2, 3)$ .

As componentes contravariantes e covariantes de um quadrivetor se transformam sob transformações de Lorentz como

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}, \quad (1.3.7a)$$

$$A'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} A_{\nu}, \quad (1.3.7b)$$

nesta ordem. Desta forma, o produto escalar transforma-se como

$$A'^{\mu} A'_{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu} \Lambda_{\mu}^{\lambda} A_{\lambda} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda_{\mu}^{\lambda} A^{\nu} A_{\lambda},$$

sob a condição de invariância

$$A'^{\mu} A'_{\mu} = A^{\mu} A_{\mu},$$

fornece a condição

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\lambda = \delta^\lambda{}_\nu, \quad (1.3.8)$$

que é conhecida como condição de ortonormalidade para matrizes das transformações de Lorentz.

Para as componentes  $\nu = \lambda = 0$ , resulta

$$\Lambda^\mu{}_0 \Lambda_\mu{}^0 = \Lambda^0{}_0 \Lambda_0{}^0 + \Lambda^i{}_0 \Lambda_i{}^0 = 1.$$

Isto nos leva a relação

$$|\Lambda^0{}_0|^2 = 1 + \Lambda^i{}_0 \Lambda_i{}^0 \geq 1. \quad (1.3.9)$$

Quando  $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ , a transformação é ortócrona (sinal do tempo é mantido), e quando  $\Lambda^0{}_0 \leq -1$  a transformação é não-ortócrona (com inversão temporal). Da equação (1.3.8) e do fato que

$$g^{\lambda\eta} g_{\eta\nu} = g^\lambda{}_\nu, \quad (1.3.10)$$

chegamos à relação

$$g^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\lambda \Lambda^\nu{}_\eta g^{\lambda\eta} \iff \Lambda g \Lambda = g. \quad (1.3.11)$$

De (1.3.11), podemos obter condições sobre o determinante de  $\Lambda$ :

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1. \quad (1.3.12)$$

No caso de  $\det \Lambda = 1$ , trata-se de uma transformação própria (sem reflexão espacial ou inversão temporal) e no caso de  $\det \Lambda = -1$  a transformação é imprópria (há reflexão espacial e ou inversão temporal). Com as condições

$$\det \Lambda = 1 \quad e \quad \Lambda_0{}^0 = 1, \quad (1.3.13)$$

as transformações contínuas, que podem ser obtidas por uma sucessão infinita de transformações infinitesimais a partir da identidade, devem ser próprias e ortócronas.

## 1.4 Relatividade e eletromagnetismo

As equações de Maxwell escritas em 1859 que unificou a eletricidade com o magnetismo, foram capazes de explicar todos os fenômenos conhecidos do eletromagnetismo e, ao mesmo tempo previu as ondas eletromagnéticas. Em contraste à mecânica, veremos que o eletromagnetismo descrito pelas equações de Maxwell no vácuo é covariante com respeito às

transformações de Lorentz.

### 1.4.1 Quadripotencial do campo eletromagnético

O campo eletromagnético pode ser completamente caracterizado pelo potencial escalar  $\Phi$  e um potencial vetor  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ , lembrando que a definição de escalar e vetor para estas duas grandezas se refere ao conceito clássico.

Todo o eletromagnetismo clássico é descrito pelas Equações de Maxwell juntamente com a lei de conservação de cargas [27]

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0, \quad (1.4.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.4.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.4.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.4.1d)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1.4.2)$$

Usando as identidades vetoriais para os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}, \quad (1.4.3a)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (1.4.3b)$$

nas equações (1.4.1a) e (1.4.3) para um espaço sem cargas e correntes obtemos as equações de onda para os campos elétrico e magnético:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{E}, \quad (1.4.4a)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (1.4.4b)$$

com  $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ . Isso mostra a relação direta entre a teoria clássica eletromagnética de Maxwell e a teoria ondulatória da luz.

Usando a contração do espaço e a dilatação do tempo nas várias leis básicas do Eletromagnetismo é possível mostrar que os campos elétrico  $\mathbf{E}(x, y, z, t)$  e magnético  $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ , medidos em um referencial inercial  $S$ , são relacionados aos campos elétrico  $\mathbf{E}'(x', y', z', t')$  e

magnético  $\mathbf{B}'(x', y', z', t')$ , medidos em referencial inercial  $S'$  movendo-se com velocidade  $v$  em relação da  $S$ , por:

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - v_x B_z), \quad E'_z = \gamma(E_z - v_x B_y); \quad (1.4.5a)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma\left(B_y - \frac{v_x}{c^2} E_z\right), \quad B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v_x}{c^2} E_y\right). \quad (1.4.5b)$$

É claro que as leis de transformações dadas nas equações (1.4.5a) e (1.4.5b) não são compatíveis às de um quadrivetor.

Definindo o tensor campo eletromagnético como

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{bmatrix} 0 & -cB_x & cB_y & E_x \\ cB_z & 0 & -cB_x & E_y \\ -cB_y & cB_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.4.6)$$

e operando  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  em  $F^{\mu\nu}$ , podemos compactar duas das equações de Maxwell na forma

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{J^\nu}{c\epsilon_0}. \quad (1.4.7)$$

As outras duas equações dependem da forma covariante do tensor eletromagnético

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{bmatrix} 0 & -cB_x & cB_y & -E_x \\ cB_z & 0 & -cB_x & -E_y \\ -cB_y & cB_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.4.8)$$

e podem ser escritas como

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial F_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} = 0. \quad (1.4.9)$$

## Capítulo 2

# Equação de onda relativística para partículas de spin-zero

O estudo de processos relativísticos é baseado em fenômenos de colisões de energia muito maior que a energia de repouso da partícula envolvida. Neste regime, grande número de novas partículas é tipicamente produzidas, com grande momento ou, equivalentemente, com pequeno comprimento de onda. Por esta razão, o esquema da Mecânica Quântica ordinária baseada na Equação de Schrödinger que descreve funções de onda para um numero fixo de partículas não é mais aplicável. Logo, para descrever os fenômenos em altas energias deve-se concentrar esforços na investigação das equações de ondas relativísticas, ou seja, equações que são invariantes sob transformações de Lorentz [28].

Para que possamos ter o entendimento da teoria relativísticas alguns conceitos têm que serem revistos em relação à teoria não-relativística. Destes o primordial é a nova noção de tempo e espaço que para a teoria não-relativística são entidades desconexas e já na teoria relativística devem ser tratados como uma só entidade.

Desde que

$$\Delta x \sim \frac{\hbar}{2\Delta p} \sim \frac{\hbar}{2mc}, \quad (2.0.1)$$

temos que uma partícula relativística não pode ser localizada numa região menor que  $\hbar/2mc$ ; do contrário para  $E > 2mc^2$  ocorre criação de pares. Desta forma, a ideia de partícula livre só faz sentido se ela não está atrelada por um vínculo externo a um volume que seja menor que aproximadamente a metade do comprimento de onda de Compton  $\lambda_c/2 = \hbar/2mc$ . Caso essa premissa seja violada, haverá automaticamente a criação de um par partícula-antipartícula[28].

Como há incerteza na posição, ou seja,

$$\Delta x > \frac{\hbar}{2mc}, \quad (2.0.2)$$

também há incerteza no tempo, pois

$$\Delta t \sim \frac{\Delta x}{c} > \frac{\hbar}{2mc^2}. \quad (2.0.3)$$

## 2.1 Equação de Schrödinger

O conceito de uma função de onda é um postulado fundamental da mecânica quântica. A equação de Schrödinger também é muitas vezes apresentada como um postulado separado, mas alguns autores afirmam que pode ser derivada de princípios de simetria.

Na interpretação padrão da mecânica quântica, a função de onda é a descrição mais completa que pode ser dada a um sistema físico. As soluções para a equação de Schrödinger descrevem não só sistemas moleculares, atômicas e subatômicas, mas também os sistemas macroscópicos, possivelmente, até mesmo todo o universo. A equação de Schrödinger, em sua forma mais geral, é compatível tanto com a mecânica clássica ou a relatividade especial, mas a formulação original do próprio Schrödinger era não-relativista.

A equação de Schrödinger para a função de onda quântica baseia-se na expressão não-relativística para a energia de uma partícula. O ponto de partida é a relação energia-momento

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{x}). \quad (2.1.1)$$

Fazendo uso das correspondências

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad p \rightarrow -i\hbar \nabla,$$

e aplicando em  $\Psi$ , chegamos à equação de Schrödinger para uma partícula de massa  $m$  submetida a um potencial  $V(\mathbf{x})$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V(\mathbf{x}) \Psi. \quad (2.1.2)$$

Esta equação, por ter diferentes ordens para as derivadas temporais e espaciais, não é um covariante de Lorentz (não é um invariante de Lorentz). Isto significa que, passando de um referencial inercial para outro, a equação muda sua estrutura, conflitando com o princípio da Relatividade.

Outro problema da equação (2.1.2) quando proposta em 1926 por Schrödinger estava no fato de que sua solução era uma função complexa. Logo, sendo uma grandeza complexa, esta

solução não tem nenhuma interpretação física direta, pois não pode ser medida diretamente por um instrumento físico. Este problema foi resolvido por Marx Born no final de 1926. Ele postulou que o quadrado do módulo da função de onda  $|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$  poderia ser interpretado como densidade de probabilidade  $\rho(\mathbf{x}, t)$  de encontrar uma partícula na posição  $x$ , no instante  $t$ , ou seja,

$$\rho(\mathbf{x}, t) = |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2. \quad (2.1.3)$$

A equação (2.1.3) mostra que  $\rho$  é uma grandeza positiva definida.

### 2.1.1 Densidade de probabilidade e de corrente para ondas quânticas não-relativísticas

Na física clássica ondas transportam energia. Para estas podemos definir grandezas como a densidade de energia  $u$  e a densidade de corrente de energia  $\vec{S}$ . Especificamente para as ondas eletromagnéticas a densidade de corrente de energia é representada pelo vetor de Poynting, dado por

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (2.1.4)$$

o qual obedece a lei de conservação de energia,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{S} - \mathbf{j}_e \cdot \mathbf{E}, \quad (2.1.5)$$

conhecida como teorema de Poynting. O termo  $\nabla \cdot \mathbf{S}$  representa o fluxo de energia,  $\mathbf{j}_e \cdot \mathbf{E}$  equivale a taxa de variação da densidade de energia mecânica das cargas e  $\mathbf{j}_e$  é a densidade de corrente elétrica. Na ausência de correntes ( $\mathbf{j}_e = 0$ ) a equação (2.1.5) se transforma na equação da continuidade para a conservação de energia, dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0. \quad (2.1.6)$$

Diferentemente das ondas eletromagnéticas, as quânticas são ondas de matéria, ou seja, são ondas que fornecem a probabilidade de encontrar uma partícula de matéria no espaço. De certa forma, podemos afirmar que estas ondas carregam probabilidade. De forma análoga, temos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (2.1.7)$$

onde  $\rho \equiv \rho(\mathbf{x}, t)$  é densidade de probabilidade e  $\mathbf{j}$  é a densidade de corrente de probabilidade.

Uma vez definida a relação entre  $\rho$  e  $\mathbf{j}$ , podemos chegar à expressão da densidade de

corrente de probabilidade transportada pela onda quântica.

Derivando  $\rho$  em relação ao tempo, temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (2.1.8)$$

Tomando a equação de Schrödinger e sua conjugada e admitindo que o potencial seja real, a equação (2.1.8) se transforma em

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} [\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*]. \quad (2.1.9)$$

Substituindo as identidades

$$\nabla \cdot (\Psi^* \nabla \Psi) = \nabla \Psi^* \cdot \nabla \Psi + \Psi^* \nabla^2 \Psi, \quad (2.1.10)$$

e

$$\nabla \cdot (\Psi \nabla \Psi^*) = \nabla \Psi \cdot \nabla \Psi^* + \Psi \nabla^2 \Psi^*, \quad (2.1.11)$$

na equação (2.1.9), obtemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \nabla \cdot [\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*]. \quad (2.1.12)$$

Comparando (2.1.12) com (2.1.7) chegamos a expressão

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m} [\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*]. \quad (2.1.13)$$

Considerando partículas livres, a solução da equação de Schrödinger é uma função de onda plana, dada por

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = C e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (2.1.14)$$

onde  $C$  é a constante de normalização. Substituindo (2.1.14) diretamente em (2.1.13), obtemos

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar \mathbf{k}}{m}. \quad (2.1.15)$$

Podemos observar que, assim como o vetor de Poynting, a densidade de corrente de probabilidade tem a mesma direção do vetor onda  $\mathbf{k}$ .

## 2.2 Equação de Klein-Gordon

A equação de Klein-Gordon é a versão relativista da equação de Schrödinger que tinha como proposta inicial descrever o comportamento relativísticos dos elétrons. No entanto, ela



fracassou, pois é uma abordagem relativística da Mecânica Quântica para descrever partículas de spin-zero e sabemos que o elétron é uma partícula que possui spin. Esta equação não corresponde a uma densidade de probabilidade definida positiva e, além disso, ela é de segunda ordem na derivada temporal, o que impede uma interpretação física simples.

De acordo com a relatividade restrita a energia  $E$  de uma partícula livre não é apenas a energia cinética, mas também a energia de repouso  $mc^2$ , onde  $c$  é a velocidade da luz. Sendo assim, a relação de dispersão relativística é dada por:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}. \quad (2.2.1)$$

Aplicando essa equação na função de onda  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  e usando as correspondências para energia e momento dadas em (2.2.1), chegamos à equação:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = [m^2c^4 - \hbar^2c^2\nabla^2]^{1/2} \Psi(\mathbf{x}, t). \quad (2.2.2)$$

Contudo, esta expressão possui problema na interpretação da raiz quadrada dos operadores pois, fazendo a expansão de Taylor da raiz quadrada da (2.2.2) obtemos

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = m^2c^2\Psi(\mathbf{x}, t) - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{x}, t) - \frac{\hbar^4}{8m^3c^2}(\nabla^2)^2\Psi(\mathbf{x}, t) + \dots \quad (2.2.3)$$

desta forma para resolver a equação (2.2.3), ou seja, obter a função de onda desta equação será obrigado dispor de um número infinito de condições de contorno. Esta efetiva “não-localidade” junto com assimetria (com respeito ao espaço e tempo) sugere que esta equação não é o ponto de partida adequado para descrever partículas relativísticas. Uma forma de contornar o problema é fazer o quadrado de ambos os lados da eq. (2.2.1) e aplicar em  $\Psi$ , obtendo

$$E^2\Psi(\mathbf{x}, t) = [m^2c^4 + c^2p^2]\Psi(\mathbf{x}, t). \quad (2.2.4)$$

Usando as mesmas correspondências utilizadas em (2.2.2) para energia e momentos, temos

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \left[ \nabla^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right] \Psi(\mathbf{x}, t). \quad (2.2.5)$$

Rearranjando esta equação, obtemos

$$\left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right] \Psi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.2.6)$$

Substituindo a sentença (1.2.8) na (2.2.6) chegamos a

$$\left[ \square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \Psi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.2.7)$$

Usando a (1.2.9) podemos obter a uma forma mais compacta para (2.2.7), ou seja,

$$(p^\mu p_\mu - m^2 c^2) \Psi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.2.8)$$

Esta é a equação de Klein-Gordon na forma invariante de Lorentz.

### 2.2.1 Quadricorrente de Klein-Gordon

Aqui, vamos construir a quadricorrente  $j^\mu$  para equação de Klein-Gordon. Vamos iniciar multiplicando a (2.2.8) por  $\Psi(\mathbf{x}, t)^*$ , ou seja,

$$\Psi(\mathbf{x}, t)^* (p^\mu p_\mu - m^2 c^2) \Psi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.2.9)$$

Agora, tomando o conjugado complexo de (2.2.8) e multiplicando por  $\Psi(\mathbf{x}, t)$ , chegamos a

$$\Psi(\mathbf{x}, t) (p^\mu p_\mu - m^2 c^2) \Psi(\mathbf{x}, t)^* = 0. \quad (2.2.10)$$

Subtraindo (2.2.9) de (2.2.10) e fazendo algumas manipulações algébricas chegamos a

$$\Psi(\mathbf{x}, t)^* \nabla_\mu \nabla^\mu \Psi(\mathbf{x}, t) - \Psi(\mathbf{x}, t) \nabla_\mu \nabla^\mu \Psi(\mathbf{x}, t)^* = 0. \quad (2.2.11)$$

Usando as identidades

$$\nabla_\mu [\Psi(\mathbf{x}, t)^* \nabla^\mu \Psi(\mathbf{x}, t)] = \Psi(\mathbf{x}, t)^* \nabla_\mu \nabla^\mu \Psi(\mathbf{x}, t) + \nabla^\mu \Psi(\mathbf{x}, t)^* \nabla_\mu \Psi(\mathbf{x}, t), \quad (2.2.12)$$

e

$$\nabla_\mu [\Psi(\mathbf{x}, t) \nabla^\mu \Psi(\mathbf{x}, t)^*] = \Psi(\mathbf{x}, t) \nabla_\mu \nabla^\mu \Psi(\mathbf{x}, t)^* + \nabla^\mu \Psi(\mathbf{x}, t) \nabla_\mu \Psi(\mathbf{x}, t)^*, \quad (2.2.13)$$

na equação (2.2.11), obtemos

$$\nabla_\mu [\Psi(\mathbf{x}, t)^* \nabla^\mu \Psi(\mathbf{x}, t) - \Psi(\mathbf{x}, t) \nabla^\mu \Psi(\mathbf{x}, t)^*] = 0. \quad (2.2.14)$$

Esta equação é uma lei de conservação. Novamente, podemos fazer uso da analogia com as ondas eletromagnéticas e definir

$$j^\mu = \alpha [\Psi(\mathbf{x}, t)^* \nabla^\mu \Psi(\mathbf{x}, t) - \Psi(\mathbf{x}, t) \nabla^\mu \Psi(\mathbf{x}, t)^*] \quad (2.2.15)$$

onde o  $j^\mu$  é um quadrivetor definido por  $j^\mu \equiv (c\rho, \mathbf{j})$ , que pode ser escrito como

$$\rho = \frac{\alpha}{c^2} \left[ \Psi(\mathbf{x}, t)^* \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \Psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)^*}{\partial t} \right], \quad (2.2.16)$$

e

$$\mathbf{j} = -\alpha [\Psi(\mathbf{x}, t)^* \nabla \Psi(\mathbf{x}, t) - \Psi(\mathbf{x}, t) \nabla \Psi(\mathbf{x}, t)^*]. \quad (2.2.17)$$

Comparando (2.1.13) com (2.2.17), temos

$$\alpha = \frac{i\hbar}{2m}. \quad (2.2.18)$$

Assim, as equações (2.2.16) e (2.2.17) podem ser reescritas como

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left[ \Psi(\mathbf{x}, t)^* \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \Psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)^*}{\partial t} \right], \quad (2.2.19)$$

e

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m} [\Psi(\mathbf{x}, t)^* \nabla \Psi(\mathbf{x}, t) - \Psi(\mathbf{x}, t) \nabla \Psi(\mathbf{x}, t)^*]. \quad (2.2.20)$$

A equação (2.2.19) mostra que a densidade  $\rho(\mathbf{x}, t)$ , ao contrario da expressão não-relativística, contém derivadas temporais. Como para um instante  $t$  tanto  $\Psi(\mathbf{x})$  quanto  $\frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$  tem valores arbitrário, portando a densidade pode ser positiva ou negativa. Pelo fato de  $\rho(\mathbf{r}, t)$  não ser uma grandeza positiva definida ela não pode ser interpretada como uma densidade de probabilidade. Portanto, a alternativa para resolver este problema é obter o *quadrivetor densidade de corrente de cargas* multiplicando a equação (2.2.15) pela carga elementar  $e$ , ou seja,

$$j'^\mu = \frac{i\hbar e}{2mc^2} [\Psi(\mathbf{x}, t)^* \nabla^\mu \Psi(\mathbf{x}, t) - \Psi(\mathbf{x}, t) \nabla^\mu \Psi(\mathbf{x}, t)^*] = (c\rho', \mathbf{j}'), \quad (2.2.21)$$

onde

$$\rho' = \frac{i\hbar e}{2mc^2} \left[ \Psi(\mathbf{x}, t)^* \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \Psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)^*}{\partial t} \right], \quad (2.2.22)$$

é a densidade de cargas, e

$$\mathbf{j}' = -\frac{i\hbar e}{2m} [\Psi(\mathbf{x}, t)^* \nabla \Psi(\mathbf{x}, t) - \Psi(\mathbf{x}, t) \nabla \Psi(\mathbf{x}, t)^*], \quad (2.2.23)$$

é a densidade de corrente de cargas. A densidade de cargas (2.2.22) pode ser negativo, positivo ou nula. Isto é equivalente com a existência de partículas e antipartículas na teoria.

## 2.2.2 Solução para partículas livres

Para partículas livres temos que

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = A \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et) \right], \quad (2.2.24)$$

e substituindo em (2.2.5), chegamos à relação relativística da energia

$$E^2 = m^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2, \quad (2.2.25)$$

e, conseqüentemente, a duas possíveis soluções para um dado momento  $\mathbf{p}$ : uma com energia positiva e outra com valor negativo.

$$E_p = \pm \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2}, \quad \Psi_{\pm}(\mathbf{x}, t) = A_{\pm} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \mp E_p t) \right], \quad (2.2.26)$$

onde  $A_{\pm}$  são constantes de normalização. Inserindo (2.2.26) em (2.2.22), obtemos

$$\rho_{\pm} = \pm \frac{e|E|}{mc^2} \Psi_{\pm}(\mathbf{x}, t)^* \Psi_{\pm}(\mathbf{x}, t). \quad (2.2.27)$$

A interpretação de (2.2.27) sugere que a solução  $\Psi_{-}(\mathbf{x}, t)$  refere-se partículas com cargas  $-e$ , enquanto que  $\Psi_{+}(\mathbf{x}, t)$  descreve partículas de mesma massa, mas com cargas  $+e$ . De (2.2.26) temos que

$$\Psi_{\pm}(\mathbf{x}, t) = u_{\pm}(\mathbf{x}) \exp \left[ \mp \frac{i}{\hbar} E_p t \right], \quad (2.2.28)$$

com

$$u_{\pm}(\mathbf{x}) = A_{\pm} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \right]. \quad (2.2.29)$$

Logo, a (2.2.27) torna-se

$$\rho_{\pm} = \pm \frac{e|E|}{mc^2} |u_{\pm}(\mathbf{x})|^2. \quad (2.2.30)$$

Como  $\int \rho_{\pm} d\mathbf{x}$  representa uma quantidade física, isto impõe que as funções de ondas  $u_{\pm}(\mathbf{x})$  sejam quadradas integráveis, isto é, na forma

$$\int |u_{\pm}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}, \quad (2.2.31)$$

a qual, como já conhecido da mecânica quântica não-relativística, deve ser finita.

## 2.3 A interação de uma partícula de spin-0 com um campo eletromagnético

O eletromagnetismo é a mais importante interação para o estudo de átomos, moléculas e materiais. Ele determina a maioria dos potenciais de perturbação que são estudados em aplicações práticas da Mecânica Quântica, e também serve como um exemplo básico para a implementação de interações mais complexas na Mecânica Quântica [29].

No caso da Mecânica Quântica não-relativística, a introdução da ação eletromagnética na dinâmica de uma partícula de massa  $m$  e de carga elétrica  $e$  pode ser obtida usando o acoplamento mínimo, ou seja, fazendo a substituição de

$$\hat{E} \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0, \quad (2.3.1)$$

e

$$\hat{p} \equiv -i\hbar \nabla \Rightarrow -i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad (2.3.2)$$

na equação de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t), \quad (2.3.3)$$

obtemos a equação de Schrödinger para uma partícula carregada sob a ação de um campo eletromagnético, dada por

$$-\frac{1}{2m} \left( \hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi(\mathbf{x}, t) + eA_0 \Psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t). \quad (2.3.4)$$

Para inserir a interação eletromagnética na equação de Klein-Gordon devemos compactar as relações (2.3.1) e (2.3.2) em uma forma quadridimensional, como:

$$p_\mu = p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \quad \text{ou} \quad p^\mu = p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu, \quad (2.3.5)$$

que é a forma relativística do acoplamento mínimo. Considerando a equação de Klein-Gordon na forma

$$p_\mu p^\mu \Psi(\mathbf{x}, t) = m^2 c^4 \Psi(\mathbf{x}, t), \quad (2.3.6)$$

e substituindo a (2.3.5), obtemos

$$\left( p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \left( p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right) \Psi(\mathbf{x}, t) = m^2 c^4 \Psi(\mathbf{x}, t). \quad (2.3.7)$$

A equação de Klein-Gordon livre (2.3.6) inclui agora uma interação eletromagnética.

### 2.3.1 Quadricorrente de Klein-Gordon sob a ação de um campo eletromagnético

Agora vamos examinar como a quadricorrente da equação de Klein-Gordon se transforma sob a ação de um campo eletromagnético. Partindo das equações (1.2.6) e (2.3.5), obtemos

$$\nabla^\mu \rightarrow \nabla^\mu + \frac{ie}{\hbar c} A^\mu, \quad (2.3.8)$$

que substituída na equação na (2.3.7), fornece

$$\left( \nabla_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \left( \nabla^\mu + \frac{ie}{\hbar c} A^\mu \right) \Psi(\mathbf{x}, t) = m^2 c^4 \Psi(\mathbf{x}, t). \quad (2.3.9)$$

Multiplicando a (2.3.9) pela esquerda por  $\Psi(\mathbf{x}, t)^*$  e subtraindo pelo seu conjugado complexo, obtemos

$$\nabla_\mu \left[ \Psi(\mathbf{x}, t)^* \nabla^\mu \Psi(\mathbf{x}, t) - \Psi(\mathbf{x}, t) \nabla^\mu \Psi(\mathbf{x}, t)^* + \frac{ie}{\hbar c} A^\mu \Psi(\mathbf{x}, t) \Psi(\mathbf{x}, t)^* \right]. \quad (2.3.10)$$

Do resultado acima, podemos definir

$$j'^\mu = \frac{i\hbar e}{2m} [\Psi(\mathbf{x}, t)^* \nabla^\mu \Psi(\mathbf{x}, t) - \Psi(\mathbf{x}, t) \nabla^\mu \Psi(\mathbf{x}, t)^*] - \frac{e^2}{mc^2} A^\mu \Psi(\mathbf{x}, t) \Psi(\mathbf{x}, t)^*, \quad (2.3.11)$$

que é a quadricorrente da equação de Klein-Gordon sob a ação de um campo eletromagnético. Podemos notar que (2.3.11) difere da equação (2.2.15) apenas pelo termo proporcional à  $A^\mu$ . Este termo é justificável porque trata da contribuição do campo eletromagnético para a quadricorrente. Podemos escrever

$$\rho' = \frac{i\hbar e}{2mc^2} \left( \Psi(\mathbf{x}^*, t) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \Psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)^*}{\partial t} \right) - \frac{e^2}{mc^2} A_0 \Psi(\mathbf{x}, t) \Psi(\mathbf{x}, t)^*, \quad (2.3.12)$$

e

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar e}{2mc} (\Psi(\mathbf{x}, t)^* \nabla \Psi(\mathbf{x}, t) - \Psi(\mathbf{x}, t) \nabla \Psi(\mathbf{x}^*)) - \frac{e^2}{mc} \mathbf{A} \Psi(\mathbf{x}, t) \Psi(\mathbf{x}, t)^*. \quad (2.3.13)$$

Para ter uma melhor compreensão destas expressões, vamos considerar um estado estacionário da equação de Klein-Gordon, que tem a forma

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}) e^{-iEt}, \quad (2.3.14)$$

onde  $E$  é a energia da partícula. Substituindo a (2.3.14) na (2.3.12), obtemos

$$\rho(\mathbf{x}, t) = e \frac{E - eA_0}{mc^2} \psi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x})^*. \quad (2.3.15)$$

Logo, a densidade de carga torna-se

$$\rho(\mathbf{x}, t) > 0 \text{ para } E > eA_0, \quad \rho(\mathbf{x}, t) < 0 \text{ para } E < eA_0 \quad (2.3.16)$$

Para o primeiro caso a densidade tem o mesmo sinal da carga da partícula e para segundo é o contrario. A densidade de cargas tem sinal oposto ao da carga da partícula, independentemente do valor do potencial a energia  $E$  vai ser menor que  $eA_0$ . O significado físico para a mudança do sinal da densidade de cargas  $\rho(\mathbf{x}, t)$  em campos fortes pode ser explicado apenas no âmbito da teoria de campos, onde o numero de partículas se torna variável.

### 2.3.2 Equação radial de Klein-Gordon

Se a equação de Klein-Gordon contém um potencial centralmente simétrico  $eA_0 = V(x)$ ,  $\mathbf{A} = 0$ , ela possui uma simetria esférica. Assim como na mecânica quântica não-relativística, é então necessário reescrever a equação de Klein-Gordon em termos de coordenadas esféricas,

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad (2.3.17)$$

a fim de separar a parte angular da radial. A equação (2.3.7) sob estas condições pode ser colocada na forma

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right)^2 \Psi(r, \varphi, \theta, t) = -c^2 \hbar^2 \nabla^2 \Psi(r, \varphi, \theta, t) + m_0^2 c^4 \Psi(r, \varphi, \theta, t). \quad (2.3.18)$$

Definindo  $\Psi(r, \varphi, \theta, t) = \psi(r, \varphi, \theta) e^{-iEt}$  e substituindo diretamente na (2.3.18) chegamos a

$$[(E - V(r))^2 + c^2 \hbar^2 \nabla^2 - m_0^2 c^4] \psi(r, \varphi, \theta) = 0. \quad (2.3.19)$$

Usando

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Lambda^2 \quad \text{e} \quad \psi(r, \varphi, \theta) = \frac{R(r)}{r} Y_{l,m}(\theta, \varphi), \quad (2.3.20)$$

onde  $\Lambda^2$  é o operador Legendriano (parte angular do Laplaciano), a (2.3.19) se transforma em

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{(E - V(r))^2}{c^2 \hbar^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{\Lambda^2}{r^2} \right] \frac{R(r)}{r} Y_{l,m}(\theta, \varphi) = 0. \quad (2.3.21)$$

Como  $Y_{l,m}(\theta, \phi)$  são autovetores de  $\Lambda^2$  com autovalores  $-l(l+1)$ , podemos reescrever a (2.3.21) na forma

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \left[ \left( \frac{E - V(r)}{c\hbar} \right)^2 - \left( \frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = 0. \quad (2.3.22)$$

Esta é equação radial de Klein-Gordon com uma interação vetorial em (3+1)D.

### 2.3.3 Acoplamento mínimo para um potencial Coulombiano

Nesta seção, resolvemos o problema da Equação de Klein-Gordon (3+1) para o méson- $\pi^-$ , partículas subatômicas de spin-0, sob a ação de um potencial Coulombiano atrativo

$$V(r) = -\frac{e^2 Z}{r} \quad (2.3.23)$$

e discutimos seus autovalores de energia para os estados ligados, ou seja, para o intervalo de energia  $-mc^2 < E < mc^2$ . Para isto, substituímos a Eq.(2.3.23) na Eq.(2.3.22) resultando

$$\frac{dR(r)}{dr^2} + \left[ \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{c^2 \hbar^2} + \frac{2e^2 Z E}{c^2 \hbar^2} \frac{1}{r} + \left( \frac{e^4 Z^2}{c^2 \hbar^2} - l(l+1) \right) \frac{1}{r^2} \right] R(r). \quad (2.3.24)$$

Usando a definição,

$$\alpha_e = \frac{e^2}{\hbar c},$$

onde  $\alpha_e$  é denominada de *constante de estrutura fina*. A equação radial de Klein-Gordon (2.3.24) torna-se

$$\frac{dR(r)}{dr^2} + \left[ \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{c^2 \hbar^2} + \frac{2\alpha_e Z E}{c\hbar} \frac{1}{r} + \frac{(\alpha_e Z)^2 - l(l+1)}{r^2} \right] R(r). \quad (2.3.25)$$

Podemos introduzir as quantidades

$$\eta = \beta r, \quad \beta = 2\sqrt{\frac{m^2 c^4 - E^2}{\hbar^2 c^2}}, \quad \lambda = \frac{2EZ\alpha_e}{\beta\hbar c} \quad (2.3.26)$$

e reescrever a (2.3.25) como

$$\left[ \frac{d^2}{d\eta^2} - \frac{l'(l'+1)}{\eta^2} + \frac{\lambda}{\eta} - \frac{1}{4} \right] R_l(\eta) = 0. \quad (2.3.27)$$

Com

$$l'(l'+1) = l(l+1) - (Z\alpha_e)^2,$$



que nos leva a

$$l' = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - (Z\alpha_e)^2}. \quad (2.3.28)$$

Visando simplificar a resolução da (2.3.27), vamos verificar o comportamento assintótico da solução desta equação para  $\eta \rightarrow 0$  e  $\infty$ . Quando  $\eta \rightarrow \infty$ , o termo  $\frac{1}{4}$  torna-se dominante, de modo que podemos desprezar os termos proporcionais a  $\frac{1}{\eta^2}$  e  $\frac{1}{\eta}$ . Assim, a (2.3.27) reduz à equação

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} - \frac{1}{4}\right] R_l(\eta) = 0 \quad (2.3.29)$$

cuja solução geral é dada por

$$R_l(\eta) = a \exp\left(-\frac{\eta}{2}\right) + b \exp\left(\frac{\eta}{2}\right).$$

O segundo termo desta solução diverge quando  $\eta$  vai para o infinito. Para que tenhamos uma função bem comportada no infinito devemos fazer o coeficiente  $b = 0$ . Assim, a solução resulta

$$R_l(\eta) = a \exp\left(-\frac{\eta}{2}\right). \quad (2.3.30)$$

No caso de  $\eta \rightarrow 0$ , o termo proporcional a  $\frac{1}{\eta^2}$  é o dominante. Deste modo, podemos desprezar os dois últimos termos, e a (2.3.27) se converte na equação

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} - \frac{l'(l'+1)}{\eta^2}\right] R_l(\eta) = 0, \quad (2.3.31)$$

tendo como solução  $R_l(\eta) = \eta^{l'+1}$  e  $R_l(\eta) = \eta^{-l'}$ . Tomando como referencia a (2.3.28), temos que

$$l' + 1 = 1/2 \pm \sqrt{(l + 1/2)^2 - (Z\alpha_e)^2},$$

e

$$-l' = 1/2 \mp \sqrt{(l + 1/2)^2 - (Z\alpha_e)^2},$$

então estas duas soluções se resume a apenas uma,

$$R_l(\eta) = \eta^{l'+1}. \quad (2.3.32)$$

Precisamos encontrar uma solução que tenha significado físico e, para chegarmos ao perfil desta solução devemos olhar para a expressão (2.3.28). Primeiro vamos analisar a sentença do radical: Se  $(l + 1/2)^2 - (Z\alpha_e)^2 < 0$ ,  $l'$  será um complexo que vamos representar por

$l' = -1/2 \pm i\vartheta$ , com  $\vartheta = \sqrt{(Z\alpha_e)^2 - (l + 1/2)^2}$  e a função de onda terá a forma  $R_l(\eta) = \eta^{1/2 \pm i\vartheta}$ . Esta função, apesar de ser convergente quando  $\eta$  tende a zero, ela proporciona valores esperados divergentes para  $p_r^2$ . Logo, esta função de onda não representa uma solução física. Assim, devemos considerar a condição  $(l + 1/2)^2 - (Z\alpha_e)^2 > 0$ .

Feito a análise do radical, agora devemos verificar qual sinal deve ser adotado para (2.3.28). Devido ao comportamento do potencial Coulombiano ( $\propto \frac{1}{r}$ ), para que a função seja integrável próximo da origem, o vínculo  $l' + 1 > 0$  deve ser obedecido. Escolhendo o sinal positivo esta restrição é sempre válida. Caso seja escolhido o sinal negativo obtemos outra condição:

$$0 < \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - (Z\alpha_e)^2} < 1/2,$$

para que a função seja bem comportada próximo da origem. Contudo, para esta escolha, acontece o mesmo problema encontrado para a função de onda complexa (valor esperado de  $p_r^2$  divergente), assim devemos desprezar o sinal negativo em (2.3.28).

Para obter a solução válida em toda as regiões usamos o seguinte ansatz

$$R_l(\eta) = N\eta^{l'+1} \exp\left(-\frac{\eta}{2}\right) f(\eta). \quad (2.3.33)$$

Substituindo (2.3.33) na (2.3.27), obtemos

$$\frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} + \left(\frac{2l' + 2}{\eta} - 1\right) \frac{f(\eta)}{d\eta} - \left(\frac{l' - \lambda + 1}{\eta}\right) f(\eta) = 0.$$

Fazendo  $2l' + 2 = b$  e  $l' - \lambda + 1 = a$ , obtemos

$$\frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} + \left(\frac{b}{\eta} - 1\right) \frac{f(\eta)}{d\eta} - \frac{a}{\eta} f(\eta) = 0. \quad (2.3.34)$$

Para resolver a (2.3.34) vamos usar o método de Frobenius assumindo que a solução seja da forma

$$f(\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \eta^{j+s}. \quad (2.3.35)$$

Substituindo a série (2.3.35) na (2.3.34), obtemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+s)(j+s-1) a_j \eta^{j+s-2} + \left(\frac{b}{\eta} - 1\right) \sum_{j=0}^{\infty} (j+s) a_j \eta^{j+s-1} - \frac{a}{\eta} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \eta^{j+s} = 0.$$

Agrupando os termos de mesma potências de  $\eta$  chegamos a

$$\sum_{j=0}^{\infty} [(j+s)(j+s-1) + (j+s)b] a_j \eta^{j+s-2} - \sum_{j=0}^{\infty} (j+s+a) a_j \eta^{j+s-1} = 0. \quad (2.3.36)$$

Redefinindo o índice do somatório da primeira soma na equação (2.3.29) e arranjando os termos de mesma potência de  $\eta$ , obtemos

$$s(s-1+c)a_0 + \sum_{j=0}^{\infty} [(j+s+b)(j+s+1)a_{j+1} - (j+s+a)a_j] \eta^{j+s-1} = 0. \quad (2.3.37)$$

Como esta equação é válida para valores arbitrários de  $\eta$ , isso implica que o coeficiente de cada potência deve ser nulo. Isto nos leva às relações

$$s(s-1+b) = 0, \quad (2.3.38a)$$

e

$$a_{j+1} = \frac{j+s+a}{(j+s+b)(j+s+1)} a_j. \quad (2.3.38b)$$

A equação (2.3.38a) tem como raízes  $s = 0$  e  $s = b-1$ . Para  $s = b-1$  a solução é divergente na origem logo, devemos descartá-la.

A equação (2.3.38b) nos fornece as seguintes relações:

$$a_1 = \frac{a}{b} a_0,$$

$$a_2 = \frac{(a+1)}{2(b+1)} \frac{a}{b} a_0,$$

$$a_3 = \frac{(a+2)}{3(b+2)} a_2 = \frac{(a+2)}{3 \cdot 2(b+2)} \frac{(a+1)}{(b+1)} \frac{a}{b} a_0,$$

⋮

$$a_n = \frac{(a+n-1)}{n(b+n-1)} a_{n-1} = \frac{(a+n-1)}{n(b+n-1)} \frac{(a+n-2)}{(n-1)(b+n-2)} \cdots \frac{(a+2)}{3 \cdot 2(b+2)} \frac{(a+1)}{(b+1)} \frac{a}{b} a_0,$$

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{(a+n-1)}{(b+n-1)} \frac{(a+n-2)}{(b+n-2)} \cdots \frac{(a+2)}{3 \cdot 2(b+2)} \frac{(a+1)}{(b+1)} \frac{a}{b} a_0.$$

Substituindo esta ultima relação na (2.3.35), obtemos a seguinte expressão:

$$f(\eta) = a_0 \sum_{z=0}^{\infty} \frac{1}{z!} \frac{(a+j-1)}{(b+z-1)} \frac{(a+z-2)}{(b+z-2)} \cdots \frac{(a+2)}{3 \cdot 2(b+2)} \frac{(a+1)a}{(b+1)b} \eta^z. \quad (2.3.39)$$

Esta série pode ser escrita numa forma compacta como

$$f(\eta) = a_0 \sum_{z=0}^{\infty} \frac{(a)_z \eta^z}{(b)_z z!} \quad (2.3.40)$$

onde

$$(a)_z = \frac{\Gamma(a+z)}{\Gamma(a)}, \quad (2.3.41)$$

e

$$(b)_z = \frac{\Gamma(b+z)}{\Gamma(b)}. \quad (2.3.42)$$

A função (2.3.40) é a função hipergeométrica confluyente  ${}_1F_1(a, c, \eta)$ , dada por

$${}_1F_1(a, b, \eta) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+z) \eta^z}{\Gamma(b+z) z!}, \quad (2.3.43)$$

cuja representação integral é

$${}_1F_1(a, b, \eta) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 e^{\eta t} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} dt. \quad (2.3.44)$$

Para verificar o comportamento da função  ${}_1F_1(a, b, \eta)$  quando  $|\eta| \rightarrow \infty$ , fazemos a troca  $u = -\eta t$  na integral, obtendo

$${}_1F_1(a, b, \eta) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} (-\eta)^{-a} \int_0^{-\eta} e^{-u} u^{a-1} \left(1 + \frac{u}{\eta}\right)^{b-a-1} du. \quad (2.3.45)$$

Dividindo a integral em duas partes, obtemos

$${}_1F_1(a, b, \eta) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} (-\eta)^{-a} (I_1 - I_2), \quad (2.3.46)$$

onde,

$$I_1 \approx \int_0^{\infty} e^{-u} u^{a-1} du = \Gamma(a), \quad (2.3.47)$$

e

$$I_2 = \int_{\infty}^{-\eta} e^{-u} u^{a-1} \left(1 + \frac{u}{\eta}\right)^{b-a-1} du. \quad (2.3.48)$$

Fazendo  $v = u + \eta$ , a integral  $I_2$  resulta

$$\begin{aligned}
I_2 &= e^\eta \int_{-\infty}^0 e^{-v} (v - \eta)^{a-1} \left(\frac{v}{\eta}\right)^{b-a-1} dv, \\
&= e^\eta \eta^{a-b+1} (-\eta)^{a-1} \int_{-\infty}^0 e^{-v} \left(1 - \frac{v}{\eta}\right)^{a-1} v^{b-a-1} dv, \\
&\approx e^\eta \eta^{a-b+1} (-\eta)^{a-1} \int_{-\infty}^0 e^{-v} v^{b-a-1} dv = -e^\eta \eta^{a-b+1} (-\eta)^{a-1} \int_0^\infty e^{-v} v^{b-a-1} dv, \\
&= -e^\eta \eta^{a-b} (-\eta)^a \Gamma(b-a).
\end{aligned}$$

Logo, encontramos

$$I_2 \approx -e^\eta \eta^{a-b} (-\eta)^a \Gamma(b-a). \quad (2.3.49)$$

Substituindo (2.3.47) e (2.3.49) na equação (2.3.46), obtemos

$${}_1F_1(a, b, \eta) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} (-\eta)^{-a} + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^\eta \eta^{a-b}. \quad (2.3.50)$$

A expansão assintótica da função hipergeométrica confluyente mostra que ela diverge quando  $\eta \rightarrow \infty$ . Logo, a única forma de normalizarmos a função é truncando a série dela. Ou seja, fazer

$$a_{n'+1} = \frac{a + n'}{(b + n')(n' + 1)} a_{n'} = 0, \quad (2.3.51)$$

com  $a_{n'} \neq 0$ . Assim, temos  $a = -n'$ . Com essas imposições, nós obtemos uma discretização para os valores de  $a$ , ou seja, seus valores são obrigatoriamente inteiros negativos. Ao fazermos esse artifício estamos transformando as soluções que tinha a forma de uma serie infinita em soluções do tipo polinômial:

$${}_1F_1(-n', b, \eta) = \sum_{j=0}^{n'} \frac{\Gamma(j - n')}{\Gamma(-n')} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b + j)} \frac{\eta^j}{j!},$$

onde

$$\frac{\Gamma(z - N)}{\Gamma(-N)} = (-1)^{n'} \frac{N!}{(N - n')!}.$$

Assim, temos

$${}_1F_1(-n', b, \eta) = \sum_{j=0}^{n'} (-1)^j \frac{n!}{(n' - j)!} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b + j)} \frac{\eta^{n'}}{j!}. \quad (2.3.52)$$

Como  $a = -n'$ , temos que

$$\lambda = n' + l' + 1, \quad n' = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.3.53)$$

ou seja,  $\lambda$  está restrito a alguns valores. A condição de quantização imposta a  $\lambda$  resulta também na quantização da energia do estado ligado, levando ao espectro

$$E_{n'l}^2 = m^2 c^4 \left[ 1 + \frac{(\alpha_e Z)^2}{\left( \sqrt{(l + \frac{1}{2})^2 - (\alpha_e Z)^2} + \frac{1}{2} + n' \right)^2} \right]^{-1}. \quad (2.3.54)$$

A (2.3.54) fornece energia  $E_{nl}$  com valores positivos e negativos. A escolha do sinal da energia para este problema requer de algumas análises. Para chegar a essa conclusão, primeiro vamos olhar para expressão quantizada do  $\lambda$  que é a soma dos termos  $n' + l' + 1$ . Já conhecido da análise da (2.3.32) que  $l' + 1$  se trata de valor positivo, e  $n'$  que tem valor mínimo igual a zero, de modo que  $\lambda$  é também um número positivo. Logo,

$$\frac{2Z\alpha_e E}{\hbar c \beta} > 0, \quad (2.3.55)$$

com  $\beta > 0$ , pois aqui estamos restritos a  $|E| < mc^2$  pelo fato de estarmos lidando com energias de estados ligados. Isso nos leva a considerar apenas valores de  $mc^2 > E > 0$ . Da equação (2.3.54) temos que

$$E_{n'l} = mc^2 \left[ 1 + \frac{(\alpha_e Z)^2}{\left( \sqrt{(l + \frac{1}{2})^2 - (\alpha_e Z)^2} + \frac{1}{2} + n' \right)^2} \right]^{-1/2}. \quad (2.3.56)$$

Como já tínhamos restringido anteriormente, pelo fato da função de onda fornecer valor esperado infinito para o momento,  $l + 1/2 \leq Z\alpha_e$ , também é necessário para que a energia seja real.

A Tabela 2.1 mostra que não existe estados ligados para  $Z$  muito grande. A fim de comparar com a notação espectroscópica não-relativística, vamos introduzir o número quântico principal  $n = n' + l + 1$ . Este artifício torna o número  $n$  dependente da soma de  $n'$  e  $l$ . Portanto, ao contrario da mecânica quântica não-relativística a degenerescência com respeito ao momento angular torna-se inexistente no âmbito relativístico. Assim a (2.3.56) se transforma

1	Z (Número Atômico)
0	< 68.5
1	< 205.5
2	< 342.5
⋮	⋮

Tabela 2.1: Valores limite de  $Z$  para que haja estados ligados

em

$$E_{nl} = mc^2 \left[ 1 + \frac{(\alpha_e Z)^2}{\left( \sqrt{(l + \frac{1}{2})^2 - (\alpha_e Z)^2} + n - (l + \frac{1}{2}) \right)^2} \right]^{-1/2}. \quad (2.3.57)$$

Com  $n = 1, 2, \dots$  e  $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ .

Expandindo a (2.3.57) em potência de  $Z\alpha_e$ , obtemos

$$E_{n,l} = mc^2 \left[ 1 - \frac{(Z\alpha_e)^2}{2n^2} - \frac{(Z\alpha_e)^2}{2n^4} \left( \frac{n}{l + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right]. \quad (2.3.58)$$

O primeiro termo é a energia de repouso. O segundo é a energia de ligação do problema Coulombiano não relativístico e o terceiro é o fator de correção relativística no qual a não-degenerescência devido ao momento angular se manifesta.

# Capítulo 3

## Oscilador Klein-Gordon

### 3.1 Oscilador de Klein-Gordon (2+1)D

A equação de Klein-Gordon em duas dimensões espaciais (coordenadas cilíndricas) num potencial do tipo oscilador Klein-Gordon, em unidades naturais ( $\hbar = c = 1$ ), é dada por

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - m^2 \right] \Psi(\rho, \varphi, t) = [\mathbf{p} + im\omega\rho\hat{\rho}] \cdot [\mathbf{p} - im\omega\rho\hat{\rho}] \Psi(\rho, \varphi, t). \quad (3.1.1)$$

Fazendo uso da definição para o momento  $\mathbf{p} = -i\nabla$ , dado na Seção 2.1, a equação (3.1.1) se transforma em

$$-\left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - m^2 + 2m\omega - m^2\omega^2\rho^2 \right] \Psi(\rho, \varphi, t) = -\frac{\partial^2 \Psi(\rho, \varphi, t)}{\partial t^2}. \quad (3.1.2)$$

A seguir, vamos assumir que a (3.1.2) tem uma solução da forma  $\Psi(\rho, \varphi, t) = R(\rho)\Phi(\varphi)T(t)$  e obter

$$-\left[ \frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} - m^2 + 2m\omega - m^2\omega^2\rho^2 \right] = -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2}. \quad (3.1.3)$$

Como  $\rho$ ,  $\varphi$  e  $t$  são variáveis independentes, a (3.1.3) pode ser verdadeira somente se ambos lados da equação for igual a mesma constante, que por motivos óbvios vamos escolher  $E^2$ . A equação (3.1.3) se separa em duas equações diferenciais

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + E^2 T(t) = 0, \quad (3.1.4)$$

$$\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + E^2 - m^2 + 2m\omega - m^2\omega^2\rho^2 = 0.$$



A *constante de separação*  $E^2$  é a energia elevada ao quadrado, onde  $E$  pode tomar valores positivos e negativos. A primeira equação nós conhecemos como *equação do movimento harmônico simples*, com solução

$$T(t) = e^{-iEt}. \quad (3.1.5)$$

A segunda equação, que é parte espacial de (3.1.3), podemos rearranjá-la como

$$\frac{\rho^2}{R(\rho)} \left[ \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right] + [E^2 - m + 2m\omega - m^2\omega^2\rho^2] \rho^2 = -\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = l^2, \quad (3.1.6)$$

onde  $l^2$  é a segunda *constante de separação* escolhida. Assim, a equação (3.1.6), divide-se em duas equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + l^2\Phi(\varphi) = 0, \quad (3.1.7)$$

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left[ E^2 - m + 2m\omega - m^2\omega^2\rho^2 - \frac{l^2}{\rho^2} \right] R(\rho) = 0.$$

As soluções da equação para  $\Phi(\varphi)$  podem ser expressa em termos da base complexa  $e^{\pm il\varphi}$ , ou da base real  $\cos(l\varphi)$  e  $\sin(l\varphi)$ . Como  $(\rho, \varphi)$  e  $(\rho, \varphi + 2\pi)$  são parametrização do mesmo ponto do plano, os únicos autovalores  $l$  aceitáveis são os que torna  $\psi(\rho, \varphi) = \psi(\rho, \varphi + 2\pi)$ , ou seja,  $l$  deve ser um inteiro, onde

$$\int \Phi_l(\varphi)\Phi_{l'}(\varphi) = 2\pi\delta_{ll'}. \quad (3.1.8)$$

Definindo

$$R(\rho) = \frac{u(\rho)}{\sqrt{\rho}}, \quad (3.1.9)$$

a equação radial (3.1.7) pode ser escrita como

$$\frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} + \left[ \mathcal{E} - m^2\omega^2\rho^2 - \frac{l'(l'+1)}{\rho^2} \right] u(\rho) = 0, \quad (3.1.10)$$

com

$$\mathcal{E} = E^2 - m^2 + 2m\omega,$$

e

$$l'(l'+1) = l^2 - \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad l' = -\frac{1}{2} \pm |l|.$$

A equação (3.1.10) é equivalente à equação radial de Schrödinger para oscilador harmônico tridimensional não-relativístico. O comportamento assintótico da (3.1.10) juntamente com

as condições

$$u(0) = 0, \quad (3.1.11)$$

e

$$\int_0^\infty |u(\rho)|^2 d\rho < \infty, \quad (3.1.12)$$

impõem que a solução próxima da origem válida para todos os valores de  $l' + 1 > 0$  seja definida por uma função proporcional a  $\rho^{l'+1}$  e proporcional a  $e^{-m\omega\rho^2/2}$  quando  $\rho \rightarrow \infty$ . Portanto, a função de onda que é válida em todo espaço para a equação (3.1.10) é proposta como

$$u_l(\rho) = B\rho^{l'+1} \exp\left[-\frac{1}{2}m\omega\rho^2\right] W(\rho). \quad (3.1.13)$$

Substituindo (3.1.13) em (3.1.10), obtemos

$$\frac{d^2W(\rho)}{d\rho^2} + \left[\frac{2l' + 2}{\rho} - 2m\omega\rho\right] \frac{dW(\rho)}{d\rho} + [\mathcal{E} - (2l' + 3)m\omega]W(\rho) = 0. \quad (3.1.14)$$

Introduzindo as seguintes mudanças

$$\xi = m\omega\rho^2, \quad a = \frac{1}{2}\left(l' + \frac{3}{2} - \frac{\mathcal{E}}{2m\omega}\right), \quad b = l' + \frac{3}{2}, \quad (3.1.15)$$

em (3.1.14) chegamos à equação hipergeométrica confluyente

$$\frac{d^2W(\xi)}{d\xi^2} + \left(\frac{b}{\xi} - 1\right) \frac{dW(\xi)}{d\xi} - \left(\frac{a}{\xi}\right) W(\xi) = 0. \quad (3.1.16)$$

Esta equação já é conhecida da Seção 2.2 e tem como solução

$$W(\xi) = {}_1F_1(a, b, \xi) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(b+k)} \frac{\xi^k}{k!}. \quad (3.1.17)$$

A equação (3.1.17), como já é sabido da Seção 2.2, diverge quando  $\xi \rightarrow \infty$ , pois  ${}_1F_1(a, b, \xi)$  se comporta como  $e^\xi$  neste limite. Esta divergência é excluída quando a série é truncada. Isto ocorre quando fazemos  $a = -n'$ , onde  $n'$  é um número inteiro não-negativo. Desta maneira obtemos como soluções os seguintes polinômios

$${}_1F_1(-n', b, m\omega\rho^2) = \sum_{k=0}^{n'} (-1)^k \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+k)} \frac{n'!}{(n'-k)!} \frac{\xi^k}{k!}. \quad (3.1.18)$$

Observe que  $F_1(-n', b, \xi)$  é proporcional ao polinômio generalizado de Laguerre  $L_{n'}^{(b-1)}(\xi)$ . Estes polinômios são ortogonais em relação à função peso  $\xi^{b-1}e^{-\xi}$  e obedecem a seguinte

relação

$$\langle L_{n'}^{b-1} | L_{n'}^{b-1} \rangle = \int_0^\infty \xi^{b-1} e^{-\xi} [L_{n'}^{b-1}(\xi)]^2 d\xi = \frac{\Gamma(n' + b)}{n'!}. \quad (3.1.19)$$

que nos permite determinar a constante  $B$  da (3.1.13). A solução normalizada é dada por

$$\psi_{nl}(\rho, \varphi) = \sqrt{\frac{(m\omega)^{|l|+3/2} \left(\frac{n-|l|}{2}\right)!}{2\pi\omega|E|\Gamma\left(\frac{n+2|l|+2}{2}\right)}} \rho^{|l|} \exp\left[-\frac{1}{2}m\omega\rho^2\right] L_{(n-|l|)/2}^{(|l|)}(m\omega\rho^2) e^{il\varphi}, \quad (3.1.20)$$

com  $n = 2n' + |l|$ . Note que  $|l|$  toma valores  $0, 2, \dots, n$  quando  $n$  for um número par, e  $1, 3, \dots, n$  quando  $n$  for um número ímpar.

Usando as definições (3.1.15) e o requisito  $a = -\frac{n-|l|}{2}$ , chegamos a expressão para energia do oscilador de Klein-Gordon

$$|E| = \sqrt{m^2 + 2nm\omega}. \quad (3.1.21)$$

Todos os níveis de energias com exceção para  $n = 0$  são degenerados. A degenerescência do nível de energia para um dado  $n$  é dado por  $(n+1)(n+2)/2$ . No limite não-relativístico, a energia do oscilador harmônico é dado por  $E_{nr} = \mathcal{E} + \omega$ , onde  $\mathcal{E} = |E| - m$ .

## 3.2 Oscilador de Klein-Gordon com potencial escalar e vetorial

Para este caso, nós introduzimos ao oscilador de Klein-Gordon um potencial do tipo vetorial  $eA_0 = V_v(\rho)$  (vetor de Lorentz) acoplado à energia via acoplamento mínimo e um potencial do tipo escalar  $V_S(\rho)$  (escalar de Lorentz) acoplado diretamente à massa, assim a equação de Klein-Gordon torna-se

$$\left[ \left( i\frac{\partial}{\partial t} - V_v(\rho) \right)^2 - (m + V_S(\rho))^2 \right] \Psi(\rho, \varphi, t) = [\mathbf{p} + im\omega\rho\hat{\rho}] \cdot [\mathbf{p} - im\omega\rho\hat{\rho}] \Psi(\rho, \varphi, t). \quad (3.2.1)$$

Vale ressaltar que o potencial vetorial  $V_v(\rho)$  e o escalar  $V_S(\rho)$  aqui empregado são todos

dependes da variável radial  $\rho$ . Como  $\mathbf{p} = -i\nabla$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2iV_v(\rho)\frac{\partial}{\partial t} + V_v(\rho)^2 - (m + V_S(\rho))^2 \right] \Psi(\rho, \varphi, t) = \\ = - \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 2m\omega - m^2\omega^2\rho^2 \right] \Psi(\rho, \varphi, t). \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Na Seção 3.1 obtivemos para os operadores  $i\frac{\partial}{\partial t}$  e  $i\frac{\partial}{\partial \varphi}$  as autofunções  $T(t) = e^{-iEt}$  e  $\Phi(\varphi) = e^{-il\varphi}$  respectivamente, de forma que podemos expressar a função de onda em termo do produto destas autofunções multiplicada pela função de onda radial  $\frac{u(\rho)}{\sqrt{\rho}}$ , como a seguir

$$\Psi(\rho, \varphi, t) = \frac{u(\rho)}{\sqrt{\rho}} e^{-il\varphi} e^{-iEt}. \quad (3.2.3)$$

Fazendo a substituição direta deste ansatz na equação (3.2.2), obtemos

$$\frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} + \left[ (E - V_v(\rho))^2 - (m + V_S(\rho))^2 - \frac{l^2 - \frac{1}{4}}{\rho^2} + m\omega - m^2\omega^2\rho^2 \right] u(\rho) = 0. \quad (3.2.4)$$

Esta é a equação radial que descreve o movimento de uma partícula escalar submetida a um potencial oscilador de Klein-Gordon acoplado a uma mistura de potenciais de natureza escalar e vetorial em (2+1) dimensões.

### 3.2.1 Potencial escalar-vetorial misto do tipo Cornell

O potencial do tipo Cornell é a combinação de dois potenciais, um termo tipo Coulomb mais um tipo linear. A parte linear é responsável pelo confinamento. A natureza dos potenciais pode ser interpretado como segue: o potencial escalar  $V_S(\rho)$  pode ser interpretado como uma massa dependente da posição e o potencial vetor como a componente  $A^0$  do quadripotencial eletromagnético. Considerando estes dois potenciais como

$$V_v(\rho) = a_1\rho + \frac{a_2}{\rho}, \quad (3.2.5a)$$

$$V_S(\rho) = b_1\rho + \frac{b_2}{\rho}, \quad (3.2.5b)$$

onde  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  são constantes. Substituindo (3.2.5) em (3.2.4), obtemos

$$\frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} + \left[ \mathcal{E}_0 - \frac{l'(l'+1)}{\rho^2} + \frac{\Lambda}{\rho} + 2\xi\rho - \Omega^2 \rho^2 \right] u(\rho), \quad (3.2.6)$$

com

$$\mathcal{E}_0 = E^2 - m^2 + 2(a_1 a_2 - b_1 b_2) + 2m\omega, \quad (3.2.7a)$$

$$l'(l'+1) = b_2^2 + l^2 - \frac{1}{4} - a_2^2, \quad (3.2.7b)$$

$$\Lambda = -2(a_2 E + b_2 m), \quad (3.2.7c)$$

$$\Xi = -(a_1 E + b_1 m), \quad (3.2.7d)$$

$$\Omega^2 = m^2 \omega^2 - a_1^2 + b_1^2, \quad (3.2.7e)$$

onde  $\mathcal{E}_0$ ,  $l'$ ,  $\Lambda$ ,  $\Xi$  e  $\Omega$  são todas grandezas reais. Neste ponto, vale a pena ressaltar que a solução da equação diferencial (3.2.6), com  $\Omega$  real, é a solução da equação de Schrödinger para o oscilador harmônico tridimensional mais um potencial de Cornell.

A fim de obter uma melhor interpretação física do problema vamos introduzir a constante

$$\rho_e = \frac{\Xi}{\Omega^2}, \quad (3.2.8)$$

de maneira que podemos escrever a equação (3.2.6) como:

$$\frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} + \left[ \mathcal{E} - \Omega^2 (\rho - \rho_e)^2 + \frac{\Lambda}{\rho} - \frac{l'(l'+1)}{\rho^2} \right] u(\rho), \quad (3.2.9)$$

onde

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \frac{\Xi^2}{\Omega^2}. \quad (3.2.10)$$

Esta equação pode ser obtida de um sistema de duas partículas interagindo através de uma força do tipo Coulomb e confinada a um potencial externo parabólico.

Se  $\Omega = 0$  e  $\Lambda > 0$ , a equação descreve duas partículas de cargas opostas interagindo (por exemplo, positrônio ou átomo de hidrogênio). Se  $\Omega = 0$  e  $\Lambda < 0$ , o problema descreve o espalhamento de duas partículas com cargas de mesmo sinal, logo não haverá nenhum nível de energia discreto para esta situação (não há estado ligado). Se  $\Lambda = 0$ , a interação do tipo Coulomb é excluída, e a (3.2.9) se reduz à equação do oscilador harmônico tridimensional mais um termo linear. Para  $\Omega > 0$ , independentemente do valor dos outros parâmetros, todo o espectro de energia obtida da equação (3.2.6) é discreto.

Como feito na seção anterior, a análise do comportamento assintótico da equação (3.2.6)

é o prerequisite para que a solução desta equação obedeça as condições (3.1.11) e (3.1.12). Isto implica que a solução próxima da origem deve ser proporcional a  $\rho^{l'+1}$ , com  $l' + 1 = 1/2 + \sqrt{l^2 + b_2^2 - a_2^2}$ , e ter comportamento igual a  $e^{-\Omega(\rho-\rho_e)^2/2}$  quando  $\rho \rightarrow \infty$ , com  $\Omega > 0$ , de modo que a solução para todo  $\rho$  pode ser expressa como

$$u(\rho) \sim \rho^{l'+1} e^{-\Omega(\rho-\rho_e)^2/2} H(\rho). \quad (3.2.11)$$

A função  $H(\rho)$  deve ser quadrada integrável e ortogonal em relação a função peso

$$w(\rho) = (\rho^2)^{l'+1} e^{-\Omega(\rho-\rho_e)^2}, \quad (3.2.12)$$

ou seja,

$$\int_0^\infty w(\rho)[H(\rho)]^2 d\rho = C, \quad (3.2.13)$$

onde  $C$  é uma constante positiva.

Substituindo diretamente (3.2.11) na (3.2.9), obtemos

$$\frac{d^2 H(\rho)}{d\rho^2} + \left[ \frac{2l' + 2}{\rho} + 2\Omega\rho_e - 2\Omega\rho \right] \frac{dH(\rho)}{d\rho} + \left[ \mathcal{E} - \Omega(2l' + 3) - \frac{\Omega(2l' + 2)\rho_e + \Lambda}{\rho} \right] H(\rho). \quad (3.2.14)$$

Definindo:

$$x = \sqrt{\Omega}\rho, \quad (3.2.15a)$$

$$x_e = \sqrt{\Omega}\rho_e, \quad (3.2.15b)$$

$$\alpha = 2l' + 1, \quad (3.2.15c)$$

$$\beta = -2x_e, \quad (3.2.15d)$$

$$\gamma = \frac{\mathcal{E}}{\Omega}, \quad (3.2.15e)$$

$$\delta = -2\frac{\Lambda}{\sqrt{\Omega}}, \quad (3.2.15f)$$

podemos reescrever (3.2.14) como

$$x \frac{d^2 H(x)}{dx^2} + [\alpha + 1 - \beta x - 2x^2] \frac{dH(x)}{dx} + \left[ (\gamma - \alpha - 2)x - \frac{1}{2}(\delta + \beta(\alpha + 1)) \right] H(\rho), \quad (3.2.16)$$

onde  $x_e$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  são todos valores reais. Esta é a equação biconfluente de Heun [30]. A solução geral desta equação é dada por

$$H(x) = AN(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x) + Bx^{-\alpha}N(-\alpha, \beta, \gamma, \delta, x). \quad (3.2.17)$$

Como o segundo termo da solução (3.2.17) diverge em  $x = 0$ , então devemos fazer  $B = 0$ . A solução finita em  $x = 0$ , fazendo  $A = 1$  é definida por  $H(x) = N(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x)$  e denominada *função biconfluyente de Heun*. Tal função é usualmente expressa como

$$N(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k(\alpha, \beta, \gamma, \delta)}{(1 + \alpha)_k} \frac{x^k}{k!}. \quad (3.2.18)$$

onde

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{1}{2} [\delta + \beta(\alpha + 1)], \quad (3.2.19a)$$

$$A_{k+2} = \left\{ \beta(k + 1) + \frac{1}{2} [\delta + \beta(\alpha + 1)] \right\} A_{k+1} - (k + 1)(k + \alpha + 1)(\gamma - \alpha - 2 - 2k)A_k, \quad (3.2.19b)$$

$$(1 + \alpha)_k = \frac{\Gamma(1 + \alpha + k)}{\Gamma(1 + \alpha)}. \quad (3.2.19c)$$

Quando  $x \rightarrow \infty$ , a função  $N(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x)$  admite o seguinte comportamento assintótico[30]:

$$N(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x) \sim K(\alpha, \beta, \gamma, \delta) x^{-(\gamma+2+\alpha)} e^{\beta x + x^2}, \quad (3.2.20)$$

onde  $K(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  é uma constante. Usando as definições da (3.2.15), a (3.2.20) se transforma em

$$N(l', \rho_e, \mathcal{E}, s, \rho) \sim K(l', \rho_e, \mathcal{E}, s) \rho^{-(\mathcal{E}/\Omega + 2l + 3)} e^{\Omega(\rho - \rho_e)^2}. \quad (3.2.21)$$

Com

$$s = \frac{\Lambda}{\sqrt{\Omega}}. \quad (3.2.22)$$

Das equações (3.2.12) e (3.2.13) temos que  $N(l', \rho_e, \mathcal{E}, s, \rho)$  não é quadrado integrável. A alternativa para que tenhamos a solução desejada é impor que a série (3.2.18) se torne um polinômio de grau  $n$ . Isto ocorre quando fixamos:

$$\gamma - \alpha - 2 = 2n, \quad (3.2.23a)$$

$$A_{n+1} = 0, \quad (3.2.23b)$$

com  $n = 0, 1, 2, \dots$

Desta forma a solução (3.2.18) se transforma em

$$N_{nl}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{(1 + \alpha)_k} \frac{x^k}{k!}. \quad (3.2.24)$$

Da definição (3.2.15e) temos que  $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}_{nl} = \Omega\gamma_{nl}$ , logo

$$\mathcal{E}_{nl} = \Omega(2n + 2l' + 3), \quad (3.2.25)$$

onde  $\mathcal{E}_{nl}$  é uma grandeza real e maior que zero, isso implica que  $a_1^2 - b_1^2 < m^2\omega$  ( $\Omega > 0$ ) e  $a_2^2 - b_2^2 < l^2$  (garante que  $l'$  seja real).

Definindo  $\mathcal{E}_0 \equiv \mathcal{E}_{0(nl)}$ , obtemos

$$\Omega^2 \mathcal{E}_{0(nl)} = \Omega^3(2n + 2l' + 3) - \Xi^2, \quad (3.2.26)$$

Esta equação certifica que  $\Omega$  deve ser diferente de zero, pois sob esta condição teremos valores infinitos para  $\mathcal{E}_0(nl)$ , ao menos que  $\Xi$  seja nulo. Mesmo que  $\Xi$  seja nulo, ainda teremos problemas com o valor de  $s$  da (3.2.22) que também torna infinito com  $\Omega$  nulo. Uma saída seria fazer  $\Lambda = 0$ , mas isso excluiria a interação Coulombiana. Logo, fica provado que só podemos considerar valores de  $a_1$  e  $b_1$  que garantam a desigualdade  $a_1^2 - b_1^2 < m^2\omega$  ( $\Omega > 0$ ).

Usando as equações (3.2.7a), (3.2.7d) e (3.2.26) chegamos a

$$(\Omega^2 + a_1^2)E^2 + 2a_1b_1mE - m^2\Omega^2 + 2(a_1a_2 - b_1b_2)\Omega^2 + 2m\omega\Omega^2 + b_1^2m^2 - \Omega^3(2n + 2l' + 3) = 0. \quad (3.2.27)$$

Da equação (3.2.7e) temos que (3.2.27) se transforma em

$$(m^2\omega^2 + b_1^2)E^2 + 2a_1b_1mE + [m^2(a_1^2 - m^2\omega^2) + 2(a_1a_2 - b_1b_2)\Omega^2 + 2m\omega\Omega^2 - (2n + 2l' + 3)\Omega^3] = 0. \quad (3.2.28)$$

Para resolver a Eq.(3.2.28) usaremos a formula de Bhaskara, assim

$$\Delta_{nl} = 4a_1^2b_1^2m^2 - 4(m^2\omega^2 + b_1^2)[m^2(a_1^2 - m^2\omega^2) + 2(a_1a_2 - b_1b_2)\Omega^2 + 2m\omega\Omega^2 - (2n + 2l' + 3)\Omega^3].$$

Fazendo

$$\Delta_{nl} = 4\Delta'_{nl},$$

onde

$$\Delta'_{nl} = a_1^2b_1^2m^2 - (m^2\omega^2 + b_1^2)[m^2(a_1^2 - m^2\omega^2) + 2(a_1a_2 - b_1b_2)\Omega^2 + m\omega\Omega^2 - (2n + 2l' + 3)\Omega^3],$$

obtemos

$$E_{nl} = \frac{1}{m^2\omega^2 + b_1^2} \left[ -a_1b_1m \pm \sqrt{\Delta'_{nl}} \right]. \quad (3.2.29)$$

A equação (3.2.29) nos mostra que a energia do sistema é quantizada e devido a restrição dada por (3.2.23).



Agora vamos verificar se o estado fundamental deste sistema é definido pelo número quântico  $n = 0$ . Para isso devemos fazer  $A_1 = 0$ , de forma que obtemos

$$\delta = -\beta(\alpha + 1). \quad (3.2.30)$$

Manipulando as equações (3.2.7) e (3.2.30) chegamos à equação

$$(m^2\omega^2 + b_1^2)E^2 + 2a_1b_1mE + (a_1^2 - m^2\omega^2)m^2 + 2(a_1a_2 - b_1b_2)\Omega^2 + m\omega\Omega^2 - (2l' + 3)\Omega^3, \quad (3.2.31)$$

que difere da (3.2.28) pelo um fator de  $2n$ . Desta forma, podemos usar a (3.2.29) para obter a energia do estado fundamental ( $n = 0$ ). Assim, temos que

$$E_{0l} = \frac{1}{m^2\omega^2 + b_1^2} \left[ -a_1b_1m \pm \sqrt{\Delta'_{0,l}} \right]. \quad (3.2.32)$$

Está é a expressão da energia para  $n = 0$ . Agora devemos verificar se o número quântico  $n = 0$  não viola nenhum vínculo entre os parâmetro da equação (3.2.6).

Substituindo as equações (3.2.15c), (3.2.15d) e (3.2.15f) na (3.2.30), obtemos

$$\Lambda = -\rho_e(2l' + 2)\Omega_{0,l}. \quad (3.2.33)$$

Para obter a expressão de  $\Lambda$  em função dos parâmetros dos potenciais devemos substituir as definições (3.2.8) e (3.2.7d) na equação (3.2.33), obtendo

$$\Lambda = \frac{a_1E_{0l} + b_1m}{\Omega_{0,l}}(2l' + 2). \quad (3.2.34)$$

Substituindo a (3.2.7d) na (3.2.34) obtemos para  $\Omega_{0,l}$  a seguinte expressão

$$\Omega_{0,l} = -\frac{a_1E_{0l} + b_1m}{2(a_2E_{0,l} + b_2m)}(2l' + 2), \quad (3.2.35)$$

logo o sinal de  $\Omega_{0,l}$  depende dos parâmetros  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$  e da energia  $E$ , pois  $m > 0$ . Devido a (3.2.11) o  $\Omega_{0,l}$  deve ser um número positivo. Logo, a expressão

$$\frac{a_1E_{0,l} + b_1m}{2(a_2E_{0,l} + b_2m)}, \quad (3.2.36)$$

deve ser menor que zero. Assim, o primeiro prerequisite para expressão (3.2.35) é que ao menos um dos dois potenciais de confinamento da equação (3.2.5) não seja nulo. Se as expressões  $a_1E + b_1m$  e  $a_2E_{0,l} + b_2m$  tiverem o mesmo sinal,  $\Omega_{0,l} < 0$  e a solução  $u(\rho)$  em

(3.2.11) seria divergente para  $\rho \rightarrow \infty$ . Logo, para que  $\Omega_{0,l}$  seja válido,  $a_1 E + b_1 m > 0$  e  $a_2 E_{0,l} + b_2 m$  devem ter o sinais opostos.

### 3.2.2 Oscilador de Klein-Gordon submetido a um potencial escalar linear e a um potencial vetorial do tipo Coulomb

Vamos particularizar os potenciais de (3.2.1) considerando  $a_1 = b_2 = 0$ , de modo que o potencial escalar e o vetorial tornam [31]

$$V_v(\rho) = \frac{a_2}{\rho}, \quad (3.2.37a)$$

$$V_S(\rho) = b_1 \rho. \quad (3.2.37b)$$

$V_v(\rho)$  se transforma em potencial exclusivamente do tipo Coulombiano e  $V_S(\rho)$  se transforma em potencial linear, ou seja, exclusivamente de confinamento e, as relações (3.2.7) se transformam em

$$\mathcal{E}_0 = E^2 - m^2 + 2m\omega, \quad (3.2.38a)$$

$$l'(l' + 1) = l^2 - \frac{1}{4} - a_2^2, \quad (3.2.38b)$$

$$\Lambda = -2a_2 E, \quad (3.2.38c)$$

$$\Xi = -b_1 m, \quad (3.2.38d)$$

$$\Omega^2 = m^2 \omega^2 + b_1^2. \quad (3.2.38e)$$

Os parâmetros  $\mathcal{E}_0$ ,  $l'$ ,  $\Lambda$ ,  $\Xi$  e  $\Omega$  não se anulam com as novas definições. Logo, a equação (3.2.9) não tem sua forma alterada. Assim, temos que

$$\frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} + \left[ \mathcal{E} - \Omega^2 (\rho - \rho_e)^2 + \frac{\Lambda}{\rho} - \frac{l'(l' + 1)}{\rho^2} \right] u(\rho), \quad (3.2.39)$$

onde

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \frac{\Xi^2}{\Omega^2} \quad (3.2.40)$$

Então podemos iniciar nossa discussão sobre este problema a partir da solução e das condições imposta para que ela seja válida, vista na seção anterior. Como já sabemos a solução desta equação é dada por

$$u(\rho) = \rho^{l'+1} e^{-(\rho - \rho_e)^2/2} H(\rho), \quad (3.2.41)$$

com

$$H(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{(1+\alpha)_k} \frac{\rho^k}{k!}, \quad (3.2.42)$$

onde  $A_k$  é dada por (3.2.19). A função  $H(\rho)$  diverge quando  $\rho \rightarrow \infty$ . Para que se torne bem comportada no infinito devemos transformar a série infinita em polinômios. Para que isto ocorra devemos utilizar as condições (3.2.23a) e (3.2.23b). Portanto, substituindo (3.2.23a) na (3.2.15e), obtemos

$$\mathcal{E}_{nl} = \Omega(2n + 2l' + 3). \quad (3.2.43)$$

Assim, substituindo está equação e a (3.2.38d) na (3.2.40), obtemos:

$$\mathcal{E}_{0(nl)} = \Omega(2n + 2l' + 3) - \frac{b_1^2 m^2}{\Omega^2}. \quad (3.2.44)$$

Substituindo esta equação na (3.2.38a), obtemos

$$E_{nl}^2 = m^2 - 2m\omega + (2n + 2l' + 3)\Omega - \frac{b_1^2 m^2}{\Omega^2}, \quad (3.2.45)$$

a expressão da energia válida para todo  $n > 0$ .

Agora devemos verificar se  $n = 0$  é o estado fundamental deste problema. Para este caso obtemos a expressão da energia dada por

$$E_{0l}^2 = m^2 - 2m\omega + (2l' + 3)\Omega - \frac{b_1^2 m^2}{\Omega^2}, \quad (3.2.46)$$

que difere da (3.2.45) apenas por um fator  $2n$  que é justamente o termo que se anula quando  $n = 0$ . A expressão para  $\Omega_{0l}$  é obtida a partir da equação (3.2.35) fazendo  $a_1 = 0$  e  $b_2 = 0$ . Assim, podemos escrevê-la como:

$$\Omega_{0,l} = -\frac{b_1 m}{2a_2 E_{0l}} (2l' + 2). \quad (3.2.47)$$

Como  $\Omega_{0,l} > 0$ , a (3.2.47) só é válida quando

$$\frac{b_1 m}{2a_2 E_{0,l}} < 0, \quad (3.2.48)$$

já que o termo  $2l' + 2$  é sempre maior que zero. Logo, o estado fundamental será descrito pelo número quântico  $n = 0$  se e somente se os parâmetros  $a_2$  e  $b_1$  tiverem o mesmo sinal (sinal oposto) junto com  $E < 0$  ( $E > 0$ ). Este resultado é contrário ao que foi divulgado na literatura pelos autores da referência [31].

### 3.2.3 Oscilador de Klein-Gordon submetido a um potencial vetorial do tipo Coulomb

Vamos particularizar o problema fazendo  $a_1 = b_1 = b_2 = 0$  em (3.2.1), ou seja, vamos excluir a interação de massa (potencial escalar  $V_S(\rho) = 0$ ), e o problema fica submetido apenas a um potencial vetorial do tipo coulombiano [31]. Com a ausência da interação escalar a energia do problema para  $n > 0$  é dada por

$$E_{nl}^2 = m^2 - 2m\omega + (2n + 2l' + 3)\Omega, \quad (3.2.49)$$

e para  $n = 0$ , temos

$$E_{0l} = E_{nl}^2 = m^2 - 2m\omega + (2l' + 3)\Omega. \quad (3.2.50)$$

Por outro lado, para  $n = 0$ , de (3.2.34) temos a expressão

$$\Lambda\Omega_{0,l} = 0, \quad (3.2.51)$$

onde  $\Omega_{0,l} = m\omega$  e  $\Lambda = -2a_2E$ . A única possibilidade de satisfazer essa condição seria  $a_2 = 0$ , pois a energia é diferente de zero. Mas fazendo  $a_2 = 0$  sumiria a interação do tipo Coulomb e o problema apresentaria uma inconsistência. Desta forma, o número quântico  $n = 0$  não descreve o estado fundamental do sistema porque nós leva a um resultado inconsistente. Portanto, o estado fundamental para este caso terá o número quântico  $n = 1$ . Este resultado já é conhecido de [31] na investigação dos efeitos do potencial tipo Coulomb introduzido via acoplamento mínimo.

# Conclusão

Neste trabalho estudamos a dinâmica de uma partícula escalar de spin-zero sujeita a um potencial do tipo oscilador de Klein-Gordon acoplado a uma mistura de potenciais de natureza escalar e vetorial do tipo Cornell em (2+1) dimensões. Esta dissertação poderia ser interpretado como o estudo da influência do potencial de Cornell e o oscilador de Klein-Gordon sobre uma partícula relativística carregada eletricamente com uma massa dependente da posição, em que a modificação da expressão de massa é dada por um potencial escalar também do tipo Cornell. Vale a pena ressaltar que este estudo é a generalização de vários trabalhos difundidos na literatura.

Vimos que usando o método de separação de variáveis, a equação diferencial radial do nosso problema é equivalente à equação de Schrödinger com um potencial efetivo composto de dois termos: um oscilador harmônico tridimensional mais um potencial do tipo Cornell. Esta equação diferencial radial nos forneceu uma solução expressa em termo da função biconfluente de Heun, multiplicada pelos fatores deduzidos do comportamento assintótico da equação nos limites 0 e  $\infty$ .

Analisando corretamente as condições de contorno, demonstramos que estas funções não são convergentes quando  $\rho \rightarrow \infty$ , assim teríamos como solução uma função de onda não normalizável. Logo, aplicando a condição de convergência da função de onda, chegamos à conclusão que a função biconfluente de Heun deve virar uma solução do tipo polinômio, mais especificamente os polinômios de Heun. Para isso acontecer, aplicamos duas condições, das quais conseguimos determinar a quantização da energia do sistema e uma condição adicional que vincula os parâmetros dos potenciais externos.

Analisando em detalhe a condição de quantização da energia do sistema, observamos que o estado fundamental é definido pelo número quântico  $n = 0$ , restringindo os parâmetros dos potenciais e a energia para certos valores, os quais tornem o termo  $\Omega_{0,l}$  positivo. Em particular para  $a_1 = b_2 = 0$  (seção 3.2.2), o potencial escalar com apenas o termo linear e a interação vetorial só com a parte Coulombiana, demonstramos que a energia também é quantizada e depende do conjunto de números quânticos  $\{n, l\}$ . Como no caso geral, o estado fundamental também é definido pelo número quântico  $n = 0$  restringindo os parâmetros dos

potencias e energia a certos valores que tornem o  $\Omega_{0,l}$  positivo. Este resultado é contrário ao que foi divulgado na literatura pelos autores da referência [31], onde eles alegam que o estado fundamental é descrito pelo número quântico  $n = 1$ . Analisando outro caso particular, onde  $a_1 = b_1 = b_2 = 0$  (seção 3.2.3), o potencial externo reduz-se apenas a um potencial vetorial do tipo Coulomb. Neste caso particular, mostramos que o estado fundamental é descrito pelo número quântico  $n = 1$ , já que considerando  $n = 0$  a interação do tipo Coulomb sumiria e o problema apresentaria uma inconsistência. Neste caso particular, o nosso resultado está em plena concordância com os resultados dos autores [31].

Além de investigar a dinâmica de uma partícula escalar de spin-zero sujeita a interações externas em (2+1) dimensões, os resultados apresentados aqui podem servir como um passo inicial para estudar novos fenômenos na física da matéria condensada, como por exemplo o efeito Hall quântico [20] e isolantes topológicos [21] para sistemas bosônicos. Finalmente, vale a pena mencionar que a extensão natural da presente dissertação é a de considerar espaços curvos, por exemplo podemos considerar uma métrica de corda cósmica. A analogia entre cordas cósmicas e disclinações em sólidos é bem conhecida [23], e está associada ao fato que a métrica que descreve uma disclinação corresponde à parte espacial do elemento de linha da corda cósmica.

# Referências Bibliográficas

- 1 BABUSCI, D. et al. Relativistic harmonic oscillator. *arXiv preprint arXiv:1209.2876*, 2012.
- 2 MOSHINSKY, M.; SMIRNOV, Y. F. *The harmonic oscillator in modern physics*. Amsterdã: Taylor & Francis, 1996. v. 9.
- 3 FAIMAN, D.; HENDRY, A. W. Harmonic-oscillator model for baryons. *Physical Review*, APS, v. 180, n. 5, p. 1609, 1969.
- 4 BAKKE, K.; FURTADO, C. On the klein-gordon oscillator subject to a coulomb-type potential. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 355, p. 48–54, 2015.
- 5 SADURNI, E. The dirac-moshinsky oscillator: theory and applications. *arXiv preprint arXiv:1101.3011*, 2011.
- 6 MOSHINSKY, M.; SZCZEPANIAK, A. The dirac oscillator. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 22, n. 17, p. L817, 1989.
- 7 ANDRADE, F. M.; SILVA, E. O. Effects of spin on the dynamics of the 2d dirac oscillator in the magnetic cosmic string background. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 74, n. 12, p. 1–8, 2014.
- 8 DUTTA, D.; PANELLA, O.; ROY, P. Pseudo-hermitian generalized dirac oscillators. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 331, p. 120–126, 2013.
- 9 BERMUDEZ, A.; MARTIN-DELGADO, M. A.; LUIS, A. Chirality quantum phase transition in the dirac oscillator. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 77, p. 063815, Jun 2008. Disponível em: (<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.77.063815>).
- 10 BERMUDEZ, A.; MARTIN-DELGADO, M. A.; SOLANO, E. Exact mapping of the 2 + 1 dirac oscillator onto the jaynes-cummings model: Ion-trap experimental proposal. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 76, p. 041801, Oct 2007. Disponível em: (<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.76.041801>).
- 11 ROMERO, R. Martínez-y; SALAS-BRITO, A. Conformal invariance in a dirac oscillator. *Journal of mathematical physics*, AIP Publishing, v. 33, n. 5, p. 1831–1836, 1992.
- 12 BENTEZ, J. et al. Solution and hidden supersymmetry of a dirac oscillator. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 64, p. 1643–1645, Apr 1990. Disponível em: (<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.64.1643>).

- 13 NOS, O. C. et al. Soluble extensions of the dirac oscillator with exact and broken supersymmetry. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 43, p. 544–547, Jan 1991. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.43.544>.
- 14 GRINEVICIUTE, J.; HALDERSON, D. Dirac oscillators and the relativistic  $r$  matrix. *Phys. Rev. C*, American Physical Society, v. 80, p. 044607, Oct 2009. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.80.044607>.
- 15 RODRIGUES, R. de L. On the dirac oscillator. *Physics Letters A*, v. 372, n. 15, p. 2587 – 2591, 2008. ISSN 0375-9601. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960107017914>.
- 16 CRAWFORD, J. P. The dirac oscillator and local automorphism invariance. *Journal of mathematical physics*, AIP Publishing, v. 34, n. 10, p. 4428–4435, 1993.
- 17 VEGA, F. Oscillators in a (2+1)-dimensional noncommutative space. *Journal of Mathematical Physics*, v. 55, n. 3, 2014. Disponível em: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jmp/55/3/10.1063/1.4866914>.
- 18 NE, J. A. F.-V. et al. First experimental realization of the dirac oscillator. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 111, p. 170405, Oct 2013. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.170405>.
- 19 BRUCE, S.; MINNING, P. The klein-gordon oscillator. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, Springer, v. 106, n. 5, p. 711–713, 1993.
- 20 SENTHIL, T.; LEVIN, M. Integer quantum hall effect for bosons. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 110, p. 046801, Jan 2013. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.046801>.
- 21 STERDYNIAK, A.; COOPER, N. R.; REGNAULT, N. Bosonic integer quantum hall effect in optical flux lattices. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 115, p. 116802, Sep 2015. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.116802>.
- 22 PALUMBO, G.; MEICHANETZIDIS, K. Two-dimensional chern semimetals on the lieb lattice. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 92, p. 235106, Dec 2015. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.92.235106>.
- 23 NELSON, D. R. *Defects and geometry in condensed matter physics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- 24 CASANA, R. et al. Bose–einstein condensation and free DKP field. *Physics Letters A*, v. 316, n. 1–2, p. 33 – 43, 2003. ISSN 0375-9601. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960103010181>.
- 25 ABREU, L. et al. Galilean DKP theory and bose–einstein condensation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 419, p. 612 – 621, 2015. ISSN 0378-4371. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437114008875>.



- 26 MEWES, M.-O. et al. Output coupler for bose-einstein condensed atoms. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 78, p. 582–585, Jan 1997. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.582>.
- 27 REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. *Fundamentos da teoria eletromagnética*. 3. ed. [S.l.]: Ed. Campus, Rio de Janeiro, 1982.
- 28 GREINER, W. *Relativistic Quantum Mechanics*. 3. ed. Berlim: Springer, 2000. v. 3.
- 29 DICK, R. *Advanced Quantum Mechanics: Materials and Photons*. New York: Springer Science & Business Media, 2012.
- 30 KARWOWSKI, J.; WITEK, H. A. Biconfluent Heun equation in quantum chemistry: Harmonium and related systems. *Theoretical Chemistry Accounts*, v. 133, n. 7, p. 1–11, 2014. ISSN 1432-2234. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s00214-014-1494-5>.
- 31 VITÓRIA, R.; FURTADO, C.; BAKKE, K. On a relativistic particle and a relativistic position-dependent mass particle subject to the klein–gordon oscillator and the coulomb potential. *Annals of Physics*, Elsevier, 2016.

# Apêndices

## Apêndice A

### Valor Esperado do Momento $p_r^2$ para a Função de Onda $u(r) = \Omega r^{-1/2 \pm i\vartheta}$

A expressão para o  $p_r^2$  é dada por

$$p_r^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (\text{A.0.1})$$

aplicando na função

$$u(r) = \Omega r^{-1/2 \pm i\vartheta}, \quad (\text{A.0.2})$$

obtemos

$$p_r^2 u(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u(r)}{\partial r} \right) = (1/4 \pm \vartheta^2) \Omega r^{-5/2 \pm i\vartheta}. \quad (\text{A.0.3})$$

Tomando a o conjugado da função  $u(r)$ , obtemos

$$u(r)^* = \Omega^* r^{-1/2 \mp i\vartheta}. \quad (\text{A.0.4})$$

Substituindo (A.0.3) e (A.0.4) na equação

$$\langle p_r^2 \rangle = \lim_{r \rightarrow 0} \int_r^\infty u(r)^* p_r^2 u(r) r^2 dr, \quad (\text{A.0.5})$$

obtemos

$$\langle p_r^2 \rangle = (1/4 \pm \vartheta^2) |\Omega|^2 \lim_{r \rightarrow 0} r^{-2}. \quad (\text{A.0.6})$$

Para a função  $u(r)$  encontramos o valor médio do  $p_r^2$  proporcional a  $r^{-2}$ . Portanto, ele diverge quando  $r \rightarrow 0$ .