



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PPGMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ESTABILIDADE LINEAR NO PROBLEMA DE ROBE

FRANCISCO JOSÉ DOS SANTOS NASCIMENTO

São Luís - MA

2017

ESTABILIDADE LINEAR NO PROBLEMA DE ROBE

FRANCISCO JOSÉ DOS SANTOS NASCIMENTO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho.

São Luís-MA

2017

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Nascimento, Francisco José dos Santos.

Estabilidade Linear no Problema de Robe / Francisco José dos Santos Nascimento. - 2017.

68 f.

Orientador(a): AdeCarlos Costa Carvalho.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2017.

1. Estabilidade. 2. Problema de Robe. 3. Problema restrito dos três corpos. 4. Sistemas Hamiltonianos. I. Carvalho, AdeCarlos Costa. II. Título.

ESTABILIDADE LINEAR NO PROBLEMA DE ROBE

FRANCISCO JOSÉ DOS SANTOS NASCIMENTO

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Colegiado da Pós-Graduação em Matemática
da Universidade Federal do Maranhão como
requisito parcial para obtenção do título de
Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho (Orientador)
Universidade Federal do Maranhão

Prof.^a Dra. Vanessa Ribeiro Ramos (Examinador Interno)
Universidade Federal do Maranhão

Prof.Dr. Felix Silva Costa (Examinador Externo)
Universidade Estadual do Maranhão

A minha família.

Agradecimentos

- Agradeço, primeiramente a Deus, que com sua infinita graça me conduziu a mais esta vitória.
- Aos meus pais, Pedro F. Nascimento e Francisca I. Santos, pelo amor, apoio e incentivo.
- Aos meus irmãos Ricardo, Marcos, Daniella e Keylla, pela amizade e companheirismo.
- A Cláudia Ferreira, por sempre estar do meu lado me incentivando e apoiando em tudo
- Aos meus amigos Franciyell Moura, Washington, Luís Carlos e Kecilandia Sá, pela amizade e incentivo.
- Ao Professor Adecarlos C. Carvalho, por sua orientação e contribuições relevantes para minha formação acadêmica.
- A todos os professores do PPGMAT, em especial aos professores Marcos Araújo, Renata Limeira e Marão.
- Aos colegas e amigos do PPGMAT, em especial Jadevilson Cruz, Jadevaldo, João Coelho, Caio Renan, Ronaldo, Leomar e Geilson, pela amizade e pelos momentos de descontração e encorajamento.
- Aos professores Felix Silva e Vanessa Ribeiro, por comporem a banca examinadora.
- E não menos importante, à CAPES pelo fomento da bolsa de mestrado.

Resumo

Nesse trabalho, dissertamos sobre o artigo “The Existence and Stability of Equilibrium Points in the Robe Restricted Three-Body Problem” devido a Hallan e Rana. Para isso apresentamos definições e resultados básicos sobre sistemas Hamiltonianos tais como estabilidade de equilíbrios de sistemas Hamiltonianos lineares. Enunciamos o problema restrito dos três corpos e mostramos alguns resultados clássicos do problema. Por fim apresentamos o problema de Robe e discutimos os principais resultados usando a teoria de sistemas Hamiltonianos.

Palavras-chave: Sistemas Hamiltonianos, Estabilidade, Problema restrito dos três corpos, Problema de Robe.

Abstract

In this work, we discuss the article The Existence and Stability of Equilibrium Points in the Robe Restricted Three-Body Problem due to Hallan and Rana. For this we present some basic definitions and results about Hamiltonian systems such as equilibrium stability of linear Hamiltonian systems. We set out the restricted problem of the three bodies and show some classic results of the problem. Finally we present the Robe's problem and discuss the main results using Hamiltonian systems theory.

Keywords: Hamiltonian systems, Stability, Restricted tree body problem, Robe's problem.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Teoremas e Definições Básicas de E.D.O	3
1.2 Estabilidade de Soluções	4
1.2.1 Estabilidade no Sentido de Lyapunov	4
1.2.2 Sistemas Lineares com Coeficientes Constantes	6
1.3 Sistemas Hamiltonianos	8
1.3.1 Sistemas Hamiltonianos Lineares	9
1.3.2 Sistemas mecânicos	11
1.3.3 Exemplos de Sistemas Hamiltonianos	12
1.4 Transformações Simpléticas	14
1.4.1 Matrizes Simpléticas	14
1.5 Estabilidade de Equilíbrios em Sistemas Hamiltonianos Lineares.	18
2 O Problema Restrito dos Três Corpos	20
2.1 Descrição do Problema de n Corpos	20
2.2 O Problema restrito dos Três Corpos	22
2.2.1 Equações de Movimento do Problema Restrito	23
2.2.2 Soluções de Equilíbrios	26
2.2.3 Estabilidade Linear dos Pontos de Libração	30
3 O Problema de Robe	35
3.1 Descrição do Problema de Robe	35
3.1.1 Exposição dos Principais Teoremas do Problema de Robe	36
3.1.2 Formulação do Problema de Robe	37
3.2 Equilíbrios	47
3.2.1 Demonstrações dos Teoremas A e B	49
3.3 Estabilidade	54

3.3.1	Demonstração dos Teoremas C e D	57
3.3.2	Demonstração das Proposições A e B	62
Referências		68

Introdução

O problema restrito de três corpos consiste no estudo de um caso limite do problema de três corpos, no qual fazemos a suposição que a massa m_3 é infinitesimal de tal forma que ela não influencia no movimento dos corpos de m_1 e m_2 (chamados de primários) mas é afetada por eles de forma usual. Isto é uma sensível aproximação da realidade, somente se a trajetória de m_3 não chegar muito próxima de m_1 ou m_2 . Este problema foi extensivamente estudado, não só porque é uma versão simplificada do problema geral dos três corpos mas porque também tem aplicações práticas, por exemplo, a transferência de uma nave espacial da terra para a lua ou a descoberta da existência de asteróides perto do ponto de Lagrange no sistema Sol Júpiter. Tal problema possui cinco pontos de equilíbrio os quais três são colineares, sobre o eixo do x e dois formando triângulos equiláteros com as primárias. Os três pontos colineares são instáveis para qualquer valor do parâmetro de massa. Já os triangulares são estáveis em um certo intervalo deste parâmetro. Em 1977 H.A.G Robe [1] considerou um novo tipo do problema restrito dos três corpos, em que o primários m_1 é uma casca esférica cheia com um fluido incompressível e homogêneo de densidade ρ_1 . O segundo primário é um ponto de massa m_2 fora da casca e o terceiro corpo m_3 é uma pequena esfera sólida de densidade ρ_3 no interior do reservatório, com o pressuposto de que a massa e o raio de m_3 são infinitesimais. Segundo Robe, a justificativa em se considerar tal problema é obter uma modelagem afim de estudar o efeito gravitacional da Lua no interior da Terra. Robe mostrou a existência de um ponto de equilíbrio com m_3 no centro da casca esférica enquanto m_2 descreve uma órbita kepleriana em volta de m_1 . Além disso, ele discutiu a estabilidade linear do ponto de equilíbrio, a saber em dois casos: no primeiro caso considerou que a órbita de m_2 em volta de m_1 é circular e, no segundo caso, a órbita é elíptica, mas com o reservatório vazio ou as densidades de m_1 e m_3 iguais. Shrivastava e Garain [5] (1991) estudaram como uma perturbação na força de Coriolis e na força centrífuga afetam a localização do equilíbrio central, novamente considerando a órbita circular. Plastino e Plastino [4] (1995) estudaram o problema alterando o formato do reservatório para o de um elipsoide. Giordano, Plastino e Plastino [3] (1997) discutem o efeito que uma força de arrasto causa

na estabilidade do equilíbrio central. Hallan e Rana [2] (2001) fazem um estudo completo sobre a quantidade de equilíbrios existente no problema original, e apresentam resultados sobre sua estabilidade linear.

Objetivo desse trabalho é dissertar sobre a estabilidade linear no problema de Robe. Estudaremos os resultados do artigo [2] que tem como título “The Existence and Stability of Equilibrium Points in the Robe Restricted Three-Body Problem”.

No primeiro capítulo apresentamos de forma sucinta algumas definições básicas sobre equações diferenciais e outros resultados da teoria de sistemas Hamiltonianos tais como estabilidade de equilíbrios de sistemas Hamiltonianos.

No segundo capítulo apresentamos o problema central da mecânica celeste, que é o problema dos n corpos e damos ênfase a um caso particular deste, que é o problema restrito dos três corpos que se faz necessário para uma boa compreensão do próximo capítulo do trabalho.

No terceiro e último capítulo enunciamos e provamos os resultados do artigo “The Existence and Stability of Equilibrium Points in the Robe Restricted Three-Body Problem”.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo forneceremos de forma sucinta algumas definições e resultados da teoria básica de Sistemas Hamiltonianos e outros resultados que se faz necessário para uma boa compreensão do texto. Nessa primeira parte do texto seguiremos basicamente as seguintes referências [6] e [10].

1.1 Teoremas e Definições Básicas de E.D.O

Muitos problemas matemáticos, físicos, mecânicos, biológicos, químicos, etc.. podem ser modelados por meio de um sistema de equações diferenciais ordinárias, por tal motivo o estudo destes sistemas é uma área de pesquisa muito importante na matemática. Consideramos em geral uma equação diferencial ordinária (E.D.O) definida pelo sistema de equações de primeira ordem

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t) \quad (1.1)$$

onde o ponto significa a derivada com respeito a variável t . Além disso, f é uma função diferenciável definida num aberto U contido em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Definição 1.1.1. *Uma solução da equação (1.1) é uma função diferenciável $\mathbf{x} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida em um intervalo J tal que;*

- $(\mathbf{x}(t), t) \in U \times J$, para todo $t \in J$ e
- $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), t)$ para todo $t \in J$.

Definição 1.1.2 (Problema de Cauchy). *Quando especificamos uma condição inicial, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, temos seguinte problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

também conhecido como Problema de Cauchy.

O primeiro problema que nos deparamos é o da existência e unicidade de (1.2). A respeito desse questão temos o seguinte teorema

Teorema 1.1.3 (Teorema de Picard ou de Existência e unicidade). *Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e localmente Lipschitziana. Então, para cada $(\mathbf{x}(t_0), t_0) \in U$, existem um número $\alpha > 0$ e uma única solução de (1.2) no intervalo $|t - t_0| \leq \alpha$.*

Definição 1.1.4. *Uma função diferenciável $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma integral primeira para o sistema (1.1) se ela é constante ao longo do movimento, isto é, $\frac{d}{dt}\phi(\mathbf{x}(t), t) = 0$ para todo $\mathbf{x}(t)$ solução de (1.1).*

Muitas vezes estamos interessados em reduzir nosso sistema de equações, no sentido de eliminar variáveis, neste caso precisamos do seguinte resultado importante:

Definição 1.1.5. *Dada uma aplicação diferenciável $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida em um conjunto aberto U de $\mathbb{R}^n$, dizemos que $p \in U$ é um ponto crítico de F se a diferencial $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ não é uma aplicação sobrejetiva. A imagem $F(p) \in \mathbb{R}^m$ de um ponto crítico é chamado um valor crítico de F . Um ponto de $\mathbb{R}^m$ que não é um valor crítico é chamado valor regular de F .*

Teorema 1.1.6 (Teorema do Valor Regular). *Seja $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável definida sobre a variedade diferenciável M . Se 0 é um valor regular de F , então $F^{-1}(\{0\})$ é uma sub-variedade diferenciável de M de dimensão $m - 1$ onde m é a dimensão de M .*

1.2 Estabilidade de Soluções

Sabe-se da teoria básica de EDO que cada solução $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ em U depende continuamente de t e das condições iniciais $(\mathbf{x}_0, t_0)$. Em particular, prova-se que pequenas mudanças ou perturbações em $\mathbf{x}_0$ provocam pequenas mudanças em $\mathbf{x}(t)$ num intervalo em torno de t_0 . Mostra-se também que duas soluções que se iniciam próximas, permanecem próximas durante um intervalo de tempo suficientemente grande, porém finito. Uma questão que surge naturalmente é a seguinte: cada solução que está próxima de $\mathbf{x}_0$ em t_0 permanece próxima de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ para todo tempo, ou existem soluções que eventualmente afastam-se de $\mathbf{x}(t)$ independentemente de quão próximas estiverem de $\mathbf{x}_0$? Questões como estas pertencem ao ramo da Matemática conhecido como Teoria da Estabilidade.

1.2.1 Estabilidade no Sentido de Lyapunov

Definição 1.2.1. *Um ponto $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0 \in U$ é dito um equilíbrio ou solução de equilíbrio de (1.1) se, $f(\mathbf{x}_0, t) = 0$ para todo $t \geq 0$.*

Definição 1.2.2. Seja $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ é uma solução de equilíbrio de (1.1). Dizemos que $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ é:

1. *estável segundo Lyapunov, em $t = t_0$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que para qualquer $\mathbf{x} \in B_\delta(\tilde{\mathbf{x}}(t))$, a solução $\mathbf{x}(t)$ que se inicia em $\mathbf{x}$ quando $t = t_0$, está definida para todo $t \geq t_0$ e satisfaz a desigualdade $\|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\| \leq \varepsilon$, para todo $t \geq t_0$;*
2. *assintoticamente estável, no sentido de Lyapunov, se ela é estável e além disso existe um número positivo $\delta_1 < \delta$ tal que $\|\mathbf{x}\| < \delta_1$ implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\| = 0$;*
3. *instável quando não é estável*

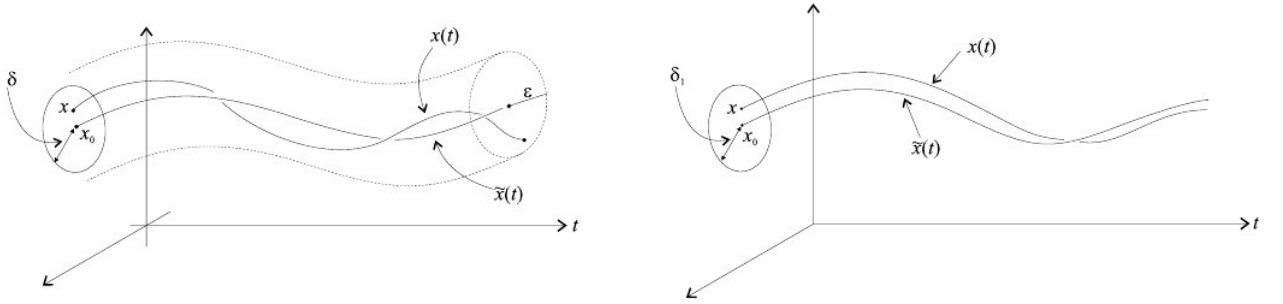


Figura 1.1: Estabilidade estável e assintoticamente estável respectivamente da solução $\tilde{\mathbf{x}}(t)$

Observação 1.2.3. Se δ na definição acima não depende de t_0 , dizemos que a estabilidade é uniforme.

Seja $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ uma solução de (1.1). Então fazendo a mudança de coordenadas no tempo $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \tilde{\mathbf{x}}(t)$ temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' + \tilde{\mathbf{x}}'(t) &= f(\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{x}}, t) \\ \mathbf{z}' &= f(\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{x}}, t) - \tilde{\mathbf{x}}'(t) \\ \mathbf{z}' &= f(\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{x}}, t) - f(\tilde{\mathbf{x}}(t), t). \end{aligned}$$

Segue que $\mathbf{x}(t)$ é solução de (1.1) se, e somente se, $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)$ é solução de

$$\mathbf{z} = g(\mathbf{z}, t) \tag{1.3}$$

onde $g(\mathbf{z}, t) = f(\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{x}}, t) - f(\tilde{\mathbf{x}}(t), t)$. Assim a solução $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ de (??) corresponde à solução de equilíbrio, $\tilde{\mathbf{z}} = 0$ do sistema (1.3). Logo, o estudo da estabilidade de uma solução qualquer reduz-se ao da estabilidade de um equilíbrio.

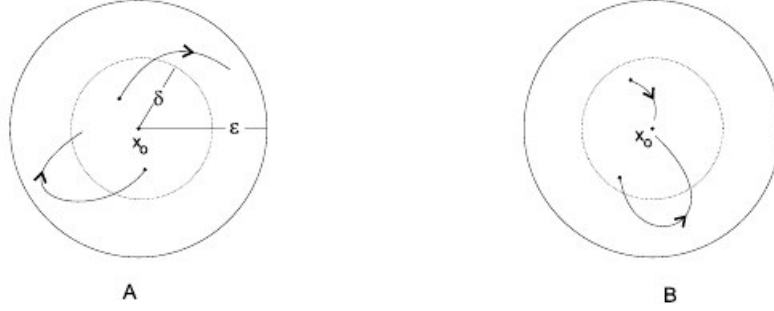


Figura 1.2: A: Estabilidade do equilíbrio $\mathbf{x}_0$; B: Estabilidade assintótica da solução de equilíbrio $\mathbf{x}_0$

1.2.2 Sistemas Lineares com Coeficientes Constantes

Nessa seção vamos estudar a estabilidade da solução de equilíbrio $\mathbf{x}(t) = 0$, do sistema de equações diferenciais linear

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.4)$$

onde $\mathbf{A} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$ é uma matriz constante.

A matriz $\mathbf{A}$ pode ser vista como um operador linear no $\mathbb{R}^n$, $x \mapsto \mathbf{A}x$, o qual pode ser estendido a um operador complexo $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}$ no espaço complexo $\mathbb{C}^n$ definido por $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}(x + iy) = \mathbf{A}x + i\mathbf{A}y$. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ todos os autovalores distintos da matriz $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}$ e $\{z_{11}, \dots, z_{m_1 1}, \dots, z_{1k}, \dots, z_{m_k k}\}$ uma base de Jordan de $\mathbb{C}^n$ tal que

$$\mathbf{A}_{\mathbb{C}}(z_{ij}) = \begin{cases} \lambda_j z_{ij} + z_{j+1j}, & j = 1, \dots, k, \quad \eta = 1, \dots, m_k - 1 \\ \lambda_j z_{ij}, & j = 1, \dots, k, \quad \eta = m_k, \end{cases}$$

onde m_k é a dimensão do bloco de Jordan associado a λ_j .

Uma condição necessária e suficiente para que

$$z(t) = \zeta_{11}(t)z_{11} + \dots + \zeta_{m_1 1}(t)z_{m_1 1} + \dots + \zeta_{1k}(t)z_{1k} + \dots + \zeta_{m_k k}(t)z_{m_k k}$$

seja uma solução da equação $\dot{z}(t) = \mathbf{A}_{\mathbb{C}}z(t)$ é que

$$\dot{\zeta}_{1j} = \lambda_j \zeta_{1j}, \quad \dot{\zeta}_{2j} = \lambda_j \zeta_{2j} + \zeta_{1j}, \dots, \dot{\zeta}_{m_j j} = \lambda_j \zeta_{m_j j} + \zeta_{m_j - 1 j}$$

para $j = 1, \dots, k$. Assim, a solução fica

$$z(t) = \sum_{j=1}^k e^{\lambda_j t} [\zeta_{1j} z_{1j} + (\zeta_{1j} t + \zeta_{2j}) z_{2j} + \dots + (\frac{1}{m_j!} t_j^m \zeta_{1j} + \dots + \frac{1}{1!} t \zeta_{m_j-1} + \zeta_{m_j}) z_{m_j j}].$$

é fácil ver que

$$\bar{z}(t) = \sum_{j=1}^k e^{\bar{\lambda}_j t} [\bar{\zeta}_{1j} \bar{z}_{1j} + (\bar{\zeta}_{1j} t + \bar{\zeta}_{2j}) \bar{z}_{2j} + \dots + (\frac{1}{m_j!} t_j^m \bar{\zeta}_{1j} + \dots + \frac{1}{1!} t \bar{\zeta}_{m_j-1} + \bar{\zeta}_{m_j}) \bar{z}_{m_j j}]$$

também é uma solução de $\dot{z}(t) = \mathbf{A}_{\mathbb{C}} z(t)$. Assim as partes real $x(t) = \frac{z(t) + \bar{z}(t)}{2}$ e imaginária $y(t) = \frac{z(t) - \bar{z}(t)}{2}$ são soluções reais do sistema $\dot{x}(t) = \mathbf{A} x(t)$. Assim fica demonstrado o seguinte

Teorema 1.2.4. Uma solução geral do sistema (1.4) é da forma

$$z(t) = \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^{m_j-1} (\mathbf{A}_{lj} t^l e^{\alpha_j t} \cos(b_j t) + \mathbf{B}_{lj} t^l e^{\alpha_j t} \sin(b_j t))$$

onde $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ são os autovalores de $\mathbf{A}$, m_j é a dimensão do bloco de Jordan associado ao autovalor λ_j e $\mathbf{A}_{lj}$ e $\mathbf{B}_{lj}$ são vetores fixos do $\mathbb{R}^n$ para $j = 1, \dots, k$ e $l = 1, \dots, m_j$.

Teorema 1.2.5. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ e suponha que $\mathbf{J}_{\lambda}$ é o bloco de Jordan (em $\mathbb{C}$) associado a λ . Tem-se para a solução nula do sistema $\dot{x} = \mathbf{A} x$ as seguintes afirmações:

1. Se $\mathbf{A}$ é uma matriz não singular:

a) Assintoticamente estável no sentido Lyapunov se, e somente se, $\text{Re}(\lambda_k) < 0$ para todo $k = 1, \dots, n$;

b) Estável, mas não assintoticamente estável, no sentido Lyapunov, se, e somente se, $\mathbf{A}$ tem pelo menos um par de autovalores imaginários puros e sempre que cada bloco de Jordan $\mathbf{J}_{\lambda}$ (em $\mathbb{C}$) associado a cada autovalor imaginário puro λ é diagonal e o resto dos autovalores possui parte real negativa;

c) Instável nos demais casos.

2. Se $\mathbf{A}$ é uma matriz singular:

a) Estável no sentido Lyapunov se os autovalores não nulos tem parte real negativa e o bloco de Jordan associado ao autovalor nulo é diagonal;

b) Estável no sentido Lyapunov no caso em que $\mathbf{A}$ tem ao menos um par de autovalores imaginários puros, sempre que cada bloco de Jordan J_λ (em $\mathbb{C}$) associado a cada autovalor imaginário puro λ seja diagonal, o bloco de Jordan associado ao autovalor nulo é diagonal e o resto dos autovalores possui parte real negativa;

c) Instáveis nos casos.

Demonstração: Ver em [11]

□

1.3 Sistemas Hamiltonianos

Nessa seção nosso objetivo é introduzir às equações diferenciais que admitem uma forma particular, mas não menos importante devido a sua grande importância na formulação de muitos problemas, as quais são chamados Sistemas Hamiltonianos.

Definição 1.3.1. Um Hamiltoniano é uma função real $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um aberto de $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$. Dizemos que o sistema diferencial de primeira ordem

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \\ \dot{p}_j = \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \end{cases} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (1.5)$$

de primeira ordem, é o Sistema Hamiltoniano associado a $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. As variáveis $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ e $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ são chamadas de posição e momento, respectivamente. O número natural n é dito grau de liberdade do sistema.

Um caso especial é quando a função H não depende de t , nesse caso, o sistema (1.5) é chamado autônomo. O conjunto onde a variável posição está definida é chamado de espaço das configurações, já o conjunto onde posição versus momento estão definidos é dito espaço de fase do sistema.

Quando a função Hamiltoniana H , não depende de t , isto é, o sistema (1.5) é autônomo, então H é uma integral primeira. De fato,

$$\frac{dH}{dt}(q_j(t), p_j(t)) = \frac{dH}{dq_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{dH}{dp_j} \frac{dp_j}{dt} = \frac{dH}{dq_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{dH}{dp_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0.$$

Assim, H é uma quantidade conservada ou uma constante do movimento. Nesse caso o sistema Hamiltoniano (1.5) é dito conservativo, e dizemos simplesmente que H representa a energia do sistema. Ainda nesse caso, o conjunto definido por

$$\Sigma_h = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in U \mid H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h\} \quad (1.6)$$

para um valor arbitrário de $h \in \mathbb{R}$, denota a superfície (ou variedade) de energia. Observe que o fato de H ser uma integral primeira implica que as soluções estão contidas em alguma superfície de energia, isto é, se $(\mathbf{q}(\mathbf{t}), \mathbf{p}(\mathbf{t}))$ denota uma solução de (1.5) então $H(\mathbf{q}(\mathbf{t}), \mathbf{p}(\mathbf{t})) = h$, onde o valor de h pode ser negativo, nulo ou positivo dependendo da solução.

Para uma discussão geral, considere o $2n$ -vetor $\mathbf{z}$, a matriz anti-simétrica $\mathbf{J}$ de $2n \times 2n$ e o gradiente de H definidos respectivamente por

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad e \quad \nabla_{\mathbf{z}} H = \nabla H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial z_{2n}} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

onde $\mathbf{0}$ é a matriz nula de $n \times n$ e $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de $n \times n$. Assim com essa notação o sistema (1.5) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \nabla H(\mathbf{z}, t). \quad (1.8)$$

Observe que

$$\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T = -\mathbf{J}, \quad e \quad \mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}$$

1.3.1 Sistemas Hamiltonianos Lineares

Um caso particular de sistemas Hamiltonianos são os lineares. Um sistema Hamiltoniano linear é um sistema de $2n$ equações diferenciais ordinárias

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \nabla H(\mathbf{z}, t) = \mathbf{J} \mathbf{S}(t) \mathbf{z} = \mathbf{A}(t) \mathbf{z} \quad (1.9)$$

onde $\mathbf{A}(t) = \mathbf{J} \mathbf{S}(t)$ e $\mathbf{S}(t)$ é uma matriz simétrica para todo t . Nesse caso, o Hamiltoniano é uma forma quadrática em $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n}$ com coeficientes que são contínuos em t , definido por

$$H = H(\mathbf{z}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{S}(t) \mathbf{z} \quad (1.10)$$

Definição 1.3.2. Uma matriz $\mathbf{A} \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é dita Hamiltoniana se $\mathbf{A}^T \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{A} = 0$

Observação 1.3.3. A matriz $\mathbf{A}(t)$ do sistema (1.9) é Hamiltoniana.

De fato,

$$\mathbf{JA}(t) = \mathbf{J}^2 \mathbf{S}(t) = -\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}(t) \mathbf{J}^2 = \mathbf{S}^T \mathbf{J} \mathbf{J} = -(\mathbf{JS}(t))^T \mathbf{J} = -\mathbf{A}(t)^T \mathbf{J}.$$

□

Teorema 1.3.4. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\mathbf{A}$ é Hamiltoniana;
2. $\mathbf{A} = \mathbf{JA}^T \mathbf{J}$;
3. $\mathbf{A} = \mathbf{JR}$ onde $\mathbf{R}$ é simétrica;
4. $\mathbf{JA}$ é simétrica.

Demonstração: (1 $\Rightarrow$ 2) Temos que $\mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}$ e pela definição anterior temos que $\mathbf{A}^T \mathbf{J} + \mathbf{JA} = 0$. Logo $\mathbf{A}^T \mathbf{J} = -\mathbf{JA} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{A}$. segue o resultado.

(2 $\Rightarrow$ 3) Basta tomar $\mathbf{R} = \mathbf{A}^T \mathbf{J}$, assim

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{J}^T \mathbf{A} = -\mathbf{J}(\mathbf{JA}^T \mathbf{J}) = -\mathbf{J}^2(\mathbf{A}^T \mathbf{J}) = \mathbf{A}^T \mathbf{J} = \mathbf{R}.$$

(3 $\Rightarrow$ 4) Suponhamos que $\mathbf{A} = \mathbf{JA}$, com $\mathbf{R}$ simétrica. Então, $\mathbf{JA} = \mathbf{J}^2 \mathbf{R} = -\mathbf{R}$. Logo, $\mathbf{JA}$ é simétrica.

(4 $\Rightarrow$ 1) Como $\mathbf{JA}$ é simétrica, segue que $\mathbf{JA} = (\mathbf{JA})^T = \mathbf{A}^T \mathbf{J}^T = -\mathbf{A}^T \mathbf{J}$. Dessa forma, $\mathbf{A}^T \mathbf{J} + \mathbf{JA} = 0$ e pela definição (1.1.1) $\mathbf{A}$ é Hamiltoniana. □

Proposição 1.3.5. *A matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é Hamiltoniana se, e somente se, $a^T + d = 0$ e b e c são simétricos. Onde a, b, c e d são matrizes em bloco de ordem $n \times n$*

Demonstração: Escrevendo a matriz $\mathbf{A}$ em forma de blocos $2n \times 2n$ isto é, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ temos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{J} + \mathbf{JA} = 0 & \iff \begin{pmatrix} c-c^T & a^T+d \\ -a-d^T & b^T-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \iff c - c^T = 0, b^T - b = 0, a^T + d = 0 \\ & \iff c = c^T, b = b^T, a^T + d = 0 \end{aligned}$$

□

Quando $n = 1$, as condições se reduzem a dizer que o traço é nulo.

1.3.2 Sistemas mecânicos

Uma classe importante de sistemas Hamiltonianos correspondem aos chamados sistemas mecânicos os quais são sistemas conservativos dados por

$$\ddot{\mathbf{q}} = \nabla V(\mathbf{q}) \quad (1.11)$$

onde $V : \mathbb{R}^n \setminus S \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e S denota o conjunto das singularidades de V . Nesse caso, V é chamado de função potencial. Definindo o momento linear $p = \dot{q}$, o sistemas (1.16) equivale ao sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = \nabla V(\mathbf{q}) \end{cases} \quad (1.12)$$

onde a função Hamiltoniana é dada por

$$H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{p}\|^2 - V(\mathbf{q}). \quad (1.13)$$

A varável $\mathbf{p}$ é chamada de momento. O conjunto $\mathbb{R}^n \setminus S$ é chamado espaço de configuração ou espaço das posições e $M = \mathbb{R}^n \setminus S \times \mathbb{R}^n$ é chamado de espaço de fase e corresponde ao fibrado cotangente da variedade $\mathbb{R}^n \setminus S$. A função Hamiltoniana (1.13) é uma integral primeira para o movimento, logo define um conjunto conjunto invariante

$$\Sigma_h = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in (\mathbb{R}^n \setminus S) \times \mathbb{R}^n \mid H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h\} \quad (1.14)$$

para cada constante real h . Se cada $h \in \mathbb{R}$ é um valor regular para a função diferenciável H , temos pelo Teorema do Valor Regular que o conjunto definido acima é uma variedade diferenciável de dimensão $2n - 1$, a qual chamaremos de superfície de energia constante. Assim, podemos reduzir a dimensão em uma unidade considerando as equações definidas pelo Hamiltoniano dado em (1.13) como um campo vetorial sobre Σ_h . Como a energia cinética é não negativa, segue-se que sobre Σ_h temos $-V(\mathbf{q}) \leq h$. A projeção de Σ_h sobre o espaço das configurações é a chamada região de Hill, ou seja os pontos $\mathbf{q}$ que satisfazendo a desigualdade anterior formam a região de Hill. Logo se $(\mathbf{q}(\mathbf{t}), \mathbf{p}(\mathbf{t}))$ é uma curva solução do sistema Hamiltoniano associado a H sobre Σ_h , então $\mathbf{q}(\mathbf{t})$ deve estar para todo tempo na correspondente região de Hill. A fronteira desta região ($V=h$) quando $h < 0$ é chamada o conjunto de velocidade zero, pois aqui as coordenadas do momento são todas nulas. Observemos que sobre cada ponto $\mathbf{q}$ no interior da região de Hill, temos uma esfera na coordenada momento definida por

$$0 \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{p}\|^2 = h + V(\mathbf{q}). \quad (1.15)$$

Proposição 1.3.6. *As soluções de equilíbrio de um sistema mecânico (1.12) são dadas por $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ onde $\mathbf{q}_0$ é um ponto crítico de V e $\mathbf{p}_0 = \mathbf{0}$.*

Demonstração: De $\nabla H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{p}, \nabla V(q))$ segue que $DH(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \equiv 0$ se, e só se, $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ e $\nabla V(q) = 0$, isto é, $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ é uma solução de equilíbrio de (1.12). $\square$

1.3.3 Exemplos de Sistemas Hamiltonianos

Mostraremos alguns problemas que podem ser colocados na forma Hamiltoniana.

1. O oscilador harmônico simples. Considere uma massa m amarrada a uma mola como mostra a figura abaixo. Pela lei de Hooke a força F , que a mola exerce sobre a massa é proporcional a quantidade d que a mola é esticada e é dirigida em sentido contrário ao esticamento, isto é, $F = -Kd$. A constante $K > 0$ mede o comprimento da mola.

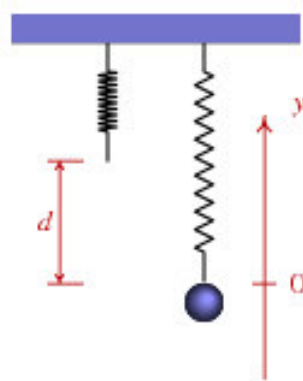


Figura 1.3: Pontos de libração do problema restrito dos três corpos

Pela segunda lei de Newton temos

$$F = mg = kd \Rightarrow d = \frac{mg}{k}$$

Em função do eixo y , a força elástica da mola é

$$F_e = k(d - y)$$

e portanto, a força resultante sobre a massa é dada por:

$$F_r = k(d - y) - mg = ky$$

Aceleração instantânea é dada por:

$$\ddot{y} = -\frac{F_r}{m} = -\omega^2 y$$

logo

$$\ddot{y} = -\omega^2 y \quad (1.16)$$

onde $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Definindo $x = \frac{\dot{y}}{\omega}$ O sistemas (1.16) equivale ao sistemas hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y \\ \dot{y} = \omega x \end{cases} \quad (1.17)$$

cuja função Hamiltoniana associada é dada por

$$H = \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2).$$

Perceba que o único ponto de equilíbrio do oscilador harmônico simples é a origem, visto que $(H_x, H_y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$

2. O problema de Kepler ou problema de força central. Consiste em estudar o movimento de uma partícula sendo atraída por um centro atrator. Este modelo serve para estudar o movimento de um planeta (ou de um satélite) em torno do sol (em torno de um planeta), sendo este o centro atrator.

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mu \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} \quad (1.18)$$

onde μ é uma constante positiva e $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. O sistema Hamiltoniano associado é dado por

$$H = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2 - \frac{\mu}{\|\mathbf{q}\|}.$$

3. O problema de n-corpos. Este problema consiste em estudar a dinâmica de n-partículas materiais de massa $m_i > 0$ no espaço sujeitos unicamente a lei da gravitação Newtoniana. Portanto, ele obedece às equações:

$$M\ddot{\mathbf{q}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \quad (1.19)$$

$$U = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|}$$

onde $M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, \dots, m_n, m_n, m_n)$ e $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$. O sistema Hamiltoniano associado a este sistema é dado por

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{2m_i} - U,$$

onde $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{q}}_i$ são os momentos associados a cada partícula.

1.4 Transformações Simpléticas

As transformações simpléticas fazem um papel importante na teoria de Sistemas Hamiltonianos, pois são um tipo de mudança de coordenadas que preservam a estrutura Hamiltoniana.

1.4.1 Matrizes Simpléticas

Iniciamos o estudo das transformações simpléticas no caso mais simples, isto é, quando a transformação de coordenadas é linear.

Definição 1.4.1. Uma matriz $\mathbf{T} \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é chamada simplética com multiplicador μ , ou μ -simplética se

$$\mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} = \mu \mathbf{J} \quad (1.20)$$

onde $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$ é uma constante e $\mathbf{J}$ é a matriz anti-simétrica.

Observação 1.4.2. Quando $\mu = 1$, $\mathbf{T}$ é dita simplética. Segue da definição que toda matriz simplética $\mathbf{T}$, satisfaz $\det \mathbf{T}^2 = 1$

De fato,

$$\begin{aligned} \det \mathbf{J} &= \det(\mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T}) \\ \det \mathbf{J} &= \det \mathbf{T}^T \cdot \det \mathbf{J} \cdot \det \mathbf{T} \\ 1 &= \det \mathbf{T}^T \cdot \det \mathbf{T} \\ 1 &= (\det \mathbf{T})^2. \end{aligned}$$

□

Observação 1.4.3. O conjunto de todas as matrizes simpléticas em $M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é denotado por $Sp(n, \mathbb{R})$.

Teorema 1.4.4. Se $\mathbf{T}$ é simplética com multiplicidade μ , então $\mathbf{T}$ é não singular e $\mathbf{T}^{-1} = -\mu \mathbf{J} \mathbf{T}^T \mathbf{J}$. Se $\mathbf{T}$ e $\mathbf{R}$ são μ e ν simpléticas, respectivamente, então $\mathbf{T}^T$, $\mathbf{T}^{-1}$ e $\mathbf{TR}$ são simpléticas com multiplicador μ , μ^{-1} e $\mu\nu$, respectivamente.

Demonstração: Como $\mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} = \mu \mathbf{J}$, então

$$\begin{aligned}
\det(\mu \mathbf{J}) &= \det(\mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T}) \\
\mu^{2n} \det \mathbf{J} &= \det \mathbf{T}^T \cdot \det \mathbf{J} \cdot \det \mathbf{T} \\
\mu^{2n} &= (\det \mathbf{T})^2 \\
\pm |\mu|^n &= \det \mathbf{T}
\end{aligned}$$

segue que $\det \mathbf{T} \neq 0$, portanto $\mathbf{T}$ é não singular.

Para mostrar que $\mathbf{T}^{-1} = -\mu \mathbf{J} \mathbf{T}^T \mathbf{J}$ observe que

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} = \mu \mathbf{J} &\Rightarrow \mathbf{T}^T \mathbf{J} = \mu \mathbf{J} \mathbf{T}^{-1} \\
&\Rightarrow \mathbf{J} \mathbf{T}^T \mathbf{J} = \mu \mathbf{J}^2 \mathbf{T}^{-1} \\
&\Rightarrow \mathbf{J} \mathbf{T}^T \mathbf{J} = -\mu \mathbf{T}^{-1} \\
&\Rightarrow \mathbf{T}^{-1} = -\mu^{-1} \mathbf{J} \mathbf{T}^T \mathbf{J}
\end{aligned}$$

Para concluir a demonstração observe que

$$(\mathbf{T}^T)^T \mathbf{J} \mathbf{T}^T = \mathbf{T} \mathbf{J} \mathbf{T}^T = \mathbf{T} \mathbf{J} (-\mu \mathbf{J} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J}) = -\mu \mathbf{T} \mathbf{J}^2 \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J} = -\mu \mathbf{T} (-1) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J} = \mu \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J} = \mu \mathbf{J}.$$

Seque que $\mathbf{T}^T$ é simplética com multiplicador μ . Analogamente temos

$$\begin{aligned}
(\mathbf{T}^{-1})^T \mathbf{J} \mathbf{T}^{-1} &= (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{J} \mathbf{T}^{-1} = [(\mathbf{T} \mathbf{J}^{-1}) \mathbf{T}^T]^{-1} = [-\mathbf{T} \mathbf{J} \mathbf{T}^T]^{-1} = -(\mu \mathbf{J})^{-1} = -\mu^{-1} \mathbf{J}^{-1} \\
&= -\mu \mu^{-1} (-\mathbf{J}) = -\mu \mathbf{J}.
\end{aligned}$$

Segue que $\mathbf{T}^{-1}$ é simplética com multiplicador μ^{-1} . De forma análoga temos

$$\mathbf{T} \mathbf{R}^T \mathbf{J} (\mathbf{T} \mathbf{R}) = \mathbf{R}^T \mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} \mathbf{R} = \mu \mathbf{R}^T \mathbf{J} \mathbf{R} = \mu \nu \mathbf{J}.$$

Segue que $\mathbf{T} \mathbf{R}$ é simplética com multiplicador $\mu \nu$

□

Em seguida mencionamos condições para que uma matriz seja μ -simplética.

No caso de uma matriz 2×2 , $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, temos que

$$\mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\delta - \beta\gamma \\ -\alpha\delta + \beta\gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo uma matriz 2×2 é μ -simplética se, e somente se, tem determinante μ .

No caso $2n \times 2n$, com a matriz $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ escrita na forma de blocos, temos

$$\mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} a^T c - c^T a & a^T d - c^T b \\ b^T c - d^T a & b^T d - d^T b \end{pmatrix}.$$

Assim, segue a seguinte proposição

Proposição 1.4.5. $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é simplética com multiplicador μ se, e somente se, $a^T d - c^T b = \mu \mathbf{I}$ e $a^T c$ e $b^T d$ são simétricas.

De fato,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} &= \begin{pmatrix} a^T c - c^T a & a^T d - c^T b \\ b^T c - d^T a & b^T d - d^T b \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ a^T d - c^T b &= \mu \mathbf{I}, \quad a^T c - c^T a = 0, \quad b^T d - d^T b = 0 \end{aligned}$$

Logo

$$(a^T c)^T = c^T (a^T)^T = c^T a \quad \text{e} \quad (b^T d)^T = d^T (b^T)^T = d^T b$$

□

Verifica-se também que, $\mathbf{T}^{-1} = \mu^{-1} \begin{pmatrix} d^T & -b^T \\ -c^T & a^T \end{pmatrix}$.

Consideramos o Hamiltoniano linear dado por (1.9), isto é, $\mathbf{A}(t)$ é uma matriz Hamiltoniana. Então considerando a mudança de coordenadas induzida pela matriz μ -simplética $\mathbf{T}$, da forma $\xi = \mathbf{T}z$, então

$$\dot{\xi} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} \xi.$$

Afirmamos que a matriz $\mathbf{B} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}$ também é Hamiltoniana

De fato,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^T + \mathbf{J} \mathbf{B} &= (\mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1})^T \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} \\ &= (\mathbf{T})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{T}^T \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} \\ &= \mu (\mathbf{J} \mathbf{T}^T \mathbf{J})^T \mathbf{A}^T \mathbf{T}^T \mathbf{J} - \mu \mathbf{J} \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{J}^T \mathbf{T}^T \mathbf{J} \\ &= -\mu \mathbf{J} \mathbf{T} \mathbf{A}^T \mathbf{T}^T \mathbf{J} - \mu \mathbf{J} \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^T \mathbf{J} \\ &= -\mu \mathbf{J} \mathbf{T} (\mathbf{J} \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \mathbf{J}) \mathbf{T}^T \mathbf{J} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dessa forma provamos que uma mudança de coordenadas induzida por uma matriz μ -simplética leva sistemas Hamiltonianos lineares em sistemas Hamiltoniano lineares.

Um primeiro resultado importante que caracteriza a matriz fundamental de um sistema Hamiltoniano linear é o seguinte.

Teorema 1.4.6. *A matriz fundamental $\mathbf{Z}(t, t_0)$ do sistema Hamiltoniano linear (1.9) é simplética para todo $t, t_0 \in I$. Reciprocamente, se $\mathbf{Z}(t, t_0)$ é uma função diferenciável de matrizes simpléticas, onde $\mathbf{Z}(t_0, t_0) = \mathbf{I}$, então $\mathbf{Z}$ é a matriz solução fundamental de um sistema Hamiltoniano linear.*

Demonstração: Seja $U(t) = \mathbf{Z}(t, t_0)^T \mathbf{J} \mathbf{Z}(t, t_0)$. Como $\mathbf{Z}(t_0, t_0) = \mathbf{I}$, segue que $U(t_0) = \mathbf{J}$. Por outro lado, $\dot{U}(t) = \dot{\mathbf{Z}} \mathbf{J} \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{A}) \mathbf{Z} = 0$; assim $U(t) = \mathbf{J}$ para todo $t \in I$. Se $\mathbf{Z}^T \mathbf{J} \mathbf{Z} = \mathbf{J}$ para todo $t \in I$, então $\dot{\mathbf{Z}} \mathbf{J} \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{Z}} = 0$; assim $(\dot{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}^{-1})^T + \mathbf{J}(\dot{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}^{-1}) = 0$. Isto mostra que $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}^{-1}$ é Hamiltoniana e $\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{A} \mathbf{Z}$. $\square$

Corolário 1.4.7. *A matriz $\mathbf{A}$ é Hamiltoniana se, e somente se, $e^{t\mathbf{A}}$ é simplética para todo $t \in \mathbb{R}$. No caso de $\mathbf{A}$ constante, a solução fundamental é da forma $\mathbf{Z}(t) = e^{t\mathbf{A}}$.*

Um resultado importante na caracterização de uma matriz solução fundamental de um sistema Hamiltoniano linear é o seguinte:

Proposição 1.4.8. *Seja $\mathbf{T}$ uma matriz simplética. Se λ é um autovalor de $\mathbf{T}$, então $\frac{1}{\lambda}$ é também um autovalor de $\mathbf{T}$ com a mesma multiplicidade algébrica.*

Demonstração: Se $\mathbf{T}$ é simplética, temos $\mathbf{T}^T = -\mathbf{J} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J}$, e se λ é autovalor de $\mathbf{T}$, temos que

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) \\ &= \det(\mathbf{T}^T - \lambda \mathbf{I}) \\ &= \det(-\mathbf{J} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J} + \lambda \mathbf{J} \mathbf{J}) \\ &= \det \mathbf{J} \det(-\mathbf{T}^{-1} + \lambda \mathbf{I}) \det \mathbf{J} \\ &= \det[\lambda \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{T} - \frac{1}{\lambda} \mathbf{I})] \\ &= \lambda^{2n} \det \mathbf{T}^{-1} \det(\mathbf{T} - \frac{1}{\lambda} \mathbf{I}) \\ &= \pm \lambda^{2n} p(\frac{1}{\lambda}). \end{aligned}$$

Portanto a multiplicidade algébrica de λ é a mesma de $\frac{1}{\lambda}$ $\square$

Da proposição acima segue que se conhecemos um autovalor λ da matriz real simplética, então conhecemos mais três autovalores, a saber, $\frac{1}{\lambda}$, $-\lambda$ e $-\frac{1}{\lambda}$. Em particular se 1 e -1 são autovalores, então eles possuem multiplicidade par. Além disso, desde que λ é autovalor então $\frac{1}{\lambda}$ também é autovalor com a mesma multiplicidade, então segue que

Proposição 1.4.9. *O determinante de uma matriz simplética é 1.*

Demonstração: A demonstração desse fato pode se encontrada na página 51 da referência [6]. $\square$

Definição 1.4.10. *Uma aplicação $F : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é uma aplicação simplética, quando seu jacobiano, $\frac{\partial F}{\partial z}$ é uma matriz simplética para todo $(z, t) \in U$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^{2n}$.*

Proposição 1.4.11. *Uma mudança de coordenadas simplética transforma um sistema Hamiltoniano em um sistema Hamiltoniano.*

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada na página 62 da referência [10].

1.5 Estabilidade de Equilíbrios em Sistemas Hamiltonianos Lineares.

Nesta seção nos dedicaremos ao estudo da estabilidade de uma solução de equilíbrio para um sistema Hamiltoniano linear autônomo.

Considere o seguinte sistema Hamiltoniano linear

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1.21)$$

onde $\mathbf{A} = \mathbf{JS}$, $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n})$ e $\mathbf{S}$ é simétrica, com entradas constantes e de ordem $2n$.

Um resultado muito importante no estudo de um sistema Hamiltoniano linear é o seguinte:

Proposição 1.5.1. *O polinômio característico de um matriz Hamiltoniano é uma função par.*

Demonstração: Seja $p(\lambda)$ o polinômio característico da matriz Hamiltoniana $\mathbf{A}$, isto é,

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{JS} - \lambda \mathbf{I}_{2n}), \quad (1.22)$$

onde $\mathbf{A} = \mathbf{JS}$ com $\mathbf{S}$ simétrica. Para provar a paridade observamos que

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(\mathbf{JS} - \lambda \mathbf{I}_{2n}) \\
&= \det(\mathbf{JS} - \lambda \mathbf{I}_{2n})^T \\
&= \det(\mathbf{S}^T \mathbf{J}^T - \lambda \mathbf{I}_{2n}) \\
&= \det(-\mathbf{SJ} - \lambda \mathbf{I}_{2n}) \\
&= \det(\mathbf{J}^2 \mathbf{SJ} + \lambda \mathbf{JI}_{2n} \mathbf{J}) \\
&= \det \mathbf{J}(\mathbf{JS} + \lambda \mathbf{I}_{2n}) \mathbf{J} \\
&= \det \mathbf{J} \det(\mathbf{JS} + \lambda \mathbf{I}_{2n}) \det \mathbf{J} \\
&= \det(\mathbf{JS} + \lambda \mathbf{I}_{2n}) \\
&= p(-\lambda)
\end{aligned}$$

□

Assim, a equação (1.22) só tem potências pares de λ . Portanto, se ela tem uma raiz do tipo $\lambda = \mu + i\nu$ ela terá necessariamente, a raiz $\lambda = -\mu - i\nu$. E se $\lambda = 0$ for um autovalor ele terá multiplicidade par. Por outro lado, desde que $\mathbf{A}$ é uma matriz com coeficientes reais, então $\bar{\lambda}$ também será um autovalor de $\mathbf{A}$. Em suma temos que se λ é um autovalor de $\mathbf{A}$, então $-\lambda, \bar{\lambda}$ e $-\bar{\lambda}$ também são. Com isso e pelo teorema (1.2.5) segue o seguinte teorema:

Teorema 1.5.2. *Seja o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$, onde $\mathbf{A}$ é uma matriz Hamiltoniana constante. A solução de equilíbrio nula desse sistema é:*

1. *Se $\mathbf{A}$ é uma matriz não singular, nunca pode ser assintoticamente estável e só é estável se todos os autovalores são imaginários puros e a matriz $\mathbf{A}$ for diagonalizável;*
2. *Se $\mathbf{A}$ é uma matriz singular, nunca pode ser assintoticamente estável e só é estável se a matriz $\mathbf{A}$ for diagonalizável.*

Demonstração: A demonstração desse teorema é uma consequência imediata do teorema (1.2.5), em virtude do polinômio característico da Hamiltoniana ser par. □

Observação 1.5.3. *Em suma temos:*

- *A condição necessária para que o sistema (1.21) seja estável é as raízes do polinômio característico sejam números imaginários puros.*
- *A condição suficiente é garantida quando $\mathbf{A} = \mathbf{JS}$ é redutível a uma forma diagonal.*

Com esse teorema fica caracterizado a questão da estabilidade de um sistema Hamiltoniano linear autônomo.

Capítulo 2

O Problema Restrito dos Três Corpos

Nesse capítulo apresentamos de forma resumida o problema central da Mecânica Celeste, que é o problema dos n corpos e o problema restrito dos três corpos, o qual é um caso particular do problema dos n corpos é de suma importância, visto que o problema de Robe é um caso particular deste. Nesse capítulo seguiremos de perto as referências [9] e [10].

2.1 Descrição do Problema de n Corpos

Considere n partículas de massas, $m_1, \dots, m_n$ e posições $q_1, \dots, q_n$, respectivamente movendo-se em $\mathbb{R}^3$ sujeitas apenas às forças gravitacionais mútuas. O problema de n corpos consiste em descrever o movimento de cada uma dessas partículas, dadas as posições $q_i(t_0)$ e velocidades $\dot{q}_i(t_0)$ de todas as partículas num instante inicial $t_0 \in \mathbb{R}$, satisfazendo $q_i(t_0) \neq q_j(t_0)$, para $i \neq j$. Pela segunda lei de Newton e a Lei da gravitação universal, também devido a Newton, as equações que regem o movimento são

$$m_i \ddot{q}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{G m_i m_j}{|q_i - q_j|^3} (q_j - q_i) = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.1)$$

onde G é a constante gravitacional e $U : \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, é a função potencial newtoniana, que é dada por

$$U = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{G m_i m_j}{|q_i - q_j|} \quad e \quad \Delta = \{q = (q_1, \dots, q_n); q_i \neq q_j, i \neq j\}$$

Temos então um problema de valor inicial, onde (2.1) é um sistema de equações de segunda ordem $3n$ dimensional. Uma vez que a função potencial U é analítica, o teorema de

existência e unicidade garante que existe uma única solução dependendo das posições e velocidades iniciais .

O caso mais simples é o problema de dois corpos, ou seja, quando $n = 2$, e as equações de movimento são dadas por

$$\begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 = \frac{Gm_1m_2}{|q_1 - q_2|^3}(q_2 - q_1) \\ m_2 \ddot{q}_2 = \frac{Gm_2m_1}{|q_2 - q_1|^3}(q_1 - q_2) \end{cases} \quad (2.2)$$

O problema de dois corpos é equivalente ao Problema Kepler cuja solução é a secção cônica

$$q = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta},$$

onde q é a distância entre os dois corpos, $p = \frac{c^2}{G(m_1 + m_2)}$, ϵ é a excentricidade da cônica definida pelos primários m_1 e m_2 e θ a anomalia verdadeira.

Dependendo do valor a excentricidade podemos ter as seguintes órbitas:

- Se $\epsilon = 0$ a órbita é uma Circunferência
- Se $0 < \epsilon < 1$ a órbita é uma Elipse
- se $\epsilon = 1$ a órbita é uma Parábola
- se $\epsilon > 1$ a órbita é uma Hipérbole

Para $n = 3$ temos o problema de 3 corpos o qual é descrito pelo sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem abaixo

$$\begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 = \frac{Gm_1m_2}{q_{12}^3}(q_2 - q_1) + \frac{Gm_1m_3}{q_{13}^3}(q_3 - q_1) \\ m_2 \ddot{q}_2 = \frac{Gm_2m_1}{q_{12}^3}(q_1 - q_2) + \frac{Gm_2m_3}{q_{23}^3}(q_3 - q_2) \\ m_3 \ddot{q}_3 = \frac{Gm_3m_1}{q_{13}^3}(q_1 - q_3) + \frac{Gm_3m_2}{q_{23}^3}(q_2 - q_3) \end{cases} \quad (2.3)$$

Apesar de possuir solução, o problema de n corpos para $n \geq 3$ tem resistido às tentativas de soluções explícitas, e apesar de, à primeira vista, isto parecer um ponto final na questão, ocorreu que uma série de soluções particulares do problema foram descobertas. Em particular, soluções homográficas do problema despertaram grande interesse matemático, pois apesar de serem as soluções mais simples do problema dos n corpos, elas conduzem ao estudo das configurações centrais, tema de pesquisa não trivial que requer a contribuição de muitas áreas da matemática, entre as quais álgebra, análise, geometria e topologia.

2.2 O Problema restrito dos Três Corpos

O problema restrito de três corpos consiste no estudo de um caso limite do problema de três corpos, no qual fazemos a suposição que a massa m_3 é infinitesimal de tal forma que ela não influencia no movimento dos corpos de m_1 e m_2 (chamados de primários) mas é afetada por eles de forma usual. Isto é uma sensível aproximação da realidade, somente se a trajetória de m_3 não chegar muito próxima de m_1 ou m_2 . Matematicamente o que fazemos é considerar $m_3 = 0$, assim temos que o centro de massa do sistema é o centro de massa dos binários e a equação do movimento do corpo de massa m_3 é dada pela última equação de (2.3), isto é,

$$\ddot{q}_3 = \frac{Gm_1}{q_{13}^3}(q_1 - q_3) + \frac{Gm_2}{q_{23}^3}(q_2 - q_3) \quad (2.4)$$

e o movimento do corpo m_2 relativamente ao corpo m_1 é definido pelo problema de dois corpos conseguido da seguinte forma. Subtraindo a primeira equação da segunda equação em (2.3) obtemos

$$\ddot{\mathbf{q}}_2 - \ddot{\mathbf{q}}_1 = -\frac{G(m_1 + m_2)}{q_{12}^3}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + Gm_3 \left(\frac{1}{q_{23}^3(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2)} - \frac{1}{q_{13}^3}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1) \right)$$

Fazendo $m_3 = 0$ e denotando $\mathbf{q} = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1$ obtemos

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{|\mathbf{q}|^3}\mathbf{q} \quad (2.5)$$

o que corresponde a um problema de Kepler ou problema de força central, onde as soluções são completamente conhecidas.

Se o corpo de massa infinitesimal m_3 permanece para todo tempo, no plano do movimento de m_1 e m_2 , dizemos que o problema restrito correspondente é planar; se o corpo m_3 , em seu movimento sai do plano de m_1 e m_2 falamos de problema restrito espacial.

Dois exemplos servem para ilustrar a importância do problema restrito. Sabe-se que depois do Sol, o planeta mais pesado é Júpiter, o qual move-se numa elipse de excentricidade pequena, podemos assumir como primeira aproximação que ela é um círculo. Além disso, existem dois grupos de pequenos planetas, os asteróides Trojanos e Gregos, cujo movimento é controlado principalmente pelo Sol e Júpiter, uma primeira aproximação de seu movimento é dada por uma solução do problema restrito circular com o Sol e Júpiter

como os primários.

O segundo importante exemplo diz respeito à teoria lunar, onde consideramos o movimento da Terra ao redor do Sol como circular. O corpo de massa infinitesimal aqui corresponde a Lua.

As primeiras contribuições sobre o problema restrito foram feitas por Euler em 1772 em conexão com sua teoria lunar. Sua principal contribuição foi a introdução de um sistema sinódico (rotatório), do qual se desprende a existência de uma integral de movimento, chamada integral de Jacobi. Euler não descobriu esta integral, pois primeiro tinha sido dada por Jacobi (1836), que como Wintner diz que “re-descobriu” o sistema sinódico.

2.2.1 Equações de Movimento do Problema Restrito

Para obter a forma conveniente das equações de movimento do corpo m_3 , introduzimos um sistema de coordenadas $Oxyz$, com origem no centro de massas dos corpos m_1 e m_2 e com o plano Oxy coincidindo com o plano da órbita dos binários. Tomamos o eixo Ox ao longo da reta que liga m_1 a m_2 , na direção do corpo m_1 , com a menor mudança do eixo Ox para o eixo Oz coincidindo com o sentido da rotação m_2 relativamente ao corpo m_1 . O eixo $O\zeta$ forma com os eixos Ox e Oy um sistema de coordenadas com a regra da mão direita.

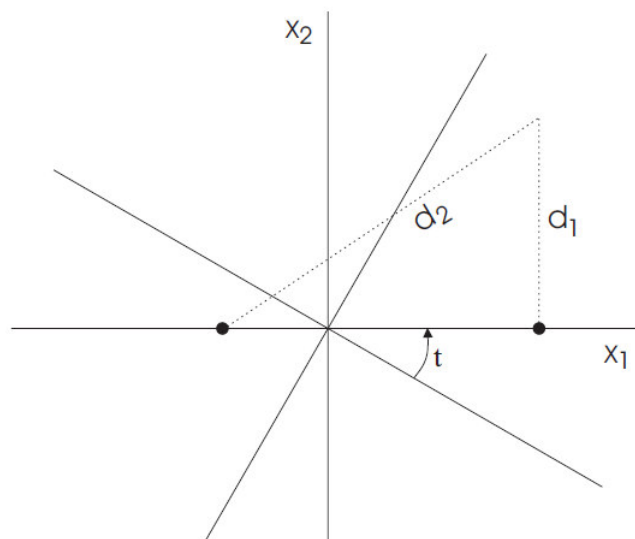


Figura 2.1: Sistema de coordenadas giratórias

Defina o referencial móvel:

$$e_1 = \frac{\mathbf{q}}{q}, \quad e_2 = e_1 \times e_3 \quad e \quad e_3 = \frac{\mathbf{C}}{c} \quad (2.6)$$

onde $\mathbf{q} = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1$, $\mathbf{C} \neq 0$ é o momento angular, $q = \|\mathbf{q}\|$ e $c = \|\mathbf{C}\|$. Derivando essas relações obtemos

$$\dot{e}_1 = \dot{\theta}e_2, \quad \dot{e}_2 = -\dot{\theta}e_1, \quad \dot{e}_3 = 0 \quad (2.7)$$

onde θ representa o ângulo formado pelo vetor $\mathbf{q}$ e o eixo das abscissas do sistema inercial fixado, logo temos que $\dot{\theta}$ representa a velocidade angular associado aos binários $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$, ou seja $\frac{c}{q^2}$. Por outro lado, temos que $m_1\mathbf{q}_1 + m_2\mathbf{q}_2 = 0$ e $q = \|\mathbf{q}_1\| + \|\mathbf{q}_2\|$, assim $\mathbf{q}_1 = -\|\mathbf{q}_1\|e_1$, $\mathbf{q}_2 = \|\mathbf{q}_2\|e_2$. Logo

$$\|\mathbf{q}_1\| = \frac{m_2}{m_1 + m_2}q, \quad \|\mathbf{q}_2\| = \frac{m_1}{m_1 + m_2}q \quad (2.8)$$

Seja $\mathbf{q}_3 = xe_1 + ye_2 + ze_3$ o vetor posição do corpo de massa infinitesimal. Logo, pelas equações (3.8) temos

$$\dot{\mathbf{q}}_3 = (\dot{x} - \dot{\theta}y)e_1 + (\dot{\theta}x + \dot{y})e_2 + \dot{z}e_3 \quad (2.9)$$

e

$$\ddot{\mathbf{q}}_3 = (\ddot{x} - 2\dot{\theta}\dot{y} - \ddot{\theta}y - \dot{\theta}^2x)e_1 + (\ddot{y} + 2\dot{\theta}\dot{x} + \ddot{\theta}x - \dot{\theta}^2y)e_2 + \ddot{z}e_3 \quad (2.10)$$

Também verifica-se que

$$\nabla_{\mathbf{q}_3}U = \frac{\partial U}{\partial x}e_1 + \frac{\partial U}{\partial y}e_2 + \frac{\partial U}{\partial z}e_3$$

segue que

$$(\ddot{x} - 2\dot{\theta}\dot{y} - \ddot{\theta}y - \dot{\theta}^2x)e_1 + (\ddot{y} + 2\dot{\theta}\dot{x} + \ddot{\theta}x - \dot{\theta}^2y)e_2 + \ddot{z}e_3 = \frac{\partial U}{\partial x}e_1 + \frac{\partial U}{\partial y}e_2 + \frac{\partial U}{\partial z}e_3$$

Fazendo o produto interno na igualdade acima por e_j , $j = 1, 2, 3$ obtemos

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{\theta}\dot{y} - \ddot{\theta}y - \dot{\theta}^2x = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{\theta}\dot{x} + \ddot{\theta}x - \dot{\theta}^2y = \frac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

com

$$U = U(x, y, z) = G\left(\frac{m_1}{d_1} + \frac{m_2}{d_2}\right)$$

onde

$$d_1 = q_{13} = \sqrt{(x + \|\mathbf{q}_1\|)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\left(x + \frac{m_2}{M}q\right)^2 + y^2 + z^2}$$

$$d_2 = q_{23} = \sqrt{(x - \|\mathbf{q}_2\|)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\left(x - \frac{m_1}{M}q\right)^2 + y^2 + z^2}$$

com $M = m_1 + m_2$.

Agora, façamos a mudança de coordenadas, devido a Nashville

$$t = t(\theta), \quad x = q\xi, \quad y = q\eta, \quad z = q\zeta$$

onde $t = t(\theta)$ é a relação entre o tempo e a anomalia verdadeira θ . Assim, tomando como nova variável independente a anomalia verdadeira θ , as equações do movimento assumem a forma

$$\begin{cases} \xi'' - 2\eta' = \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \\ \eta'' + 2\xi' = \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \\ \zeta'' = \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} \end{cases} \quad (2.11)$$

onde

$$\Omega = \Omega(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{2}\epsilon \cos \theta + U + \frac{1}{2}\mu(1 - \mu),$$

$$U = \frac{1 - \mu}{d_1} + \frac{\mu}{d_2},$$

$$d_1 = \sqrt{(\xi + \mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad d_2 = \sqrt{(\xi + \mu - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

$$(\cdot)' = \frac{d}{d\theta}, \quad \mu = \frac{m_2}{M}, 0 < \mu \leq \frac{1}{2}$$

Fazendo a transformação canônica de coordenadas

$$x_1 = \xi, \quad x_2 = \eta, \quad x_3 = \zeta, \quad y_1 = \xi' - \eta, \quad y_2 = \eta' + \xi, \quad y_3 = \zeta'$$

o sistema definido por (2.11) é equivalente ao sistema não autônomo na variável θ

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x_2 + y_1 \\ x'_2 = -x_1 + y_2 \\ x'_3 = y_3 \\ y'_1 = y_2 - x_1 + \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \\ y'_2 = -y_1 - x_2 + \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} \\ y'_3 = \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \frac{\partial \Omega}{\partial x_3} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

o qual é equivalente ao sistema Hamiltoniano não autônomo

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_j = H_{y_j} \\ y'_j = -H_{x_j} \end{array} \right. \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.13)$$

onde

$$\begin{aligned} H &= H(x_1, x_2, y_1, y_2, \theta) = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + y_1 x_2 - x_1 y_2 + \frac{\epsilon \cos \theta}{2(1 + \epsilon \cos \theta)} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \Omega, \\ \Omega &= \Omega(x_1, x_2, x_3, \theta) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2} \epsilon \cos \theta + U + \frac{1}{2} \mu (1 - \mu), \\ U &= U(x_1, x_2, x_3) = \frac{1 - \mu}{\sqrt{(x_1 + \mu)^2 + x_2^2 + x_3^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x_1 + \mu - 1)^2 + x_2^2 + x_3^2}}. \end{aligned}$$

A função H definida acima é a função Hamiltoniana associada ao sistema Hamiltoniano (2.13).

2.2.2 Soluções de Equilíbrios

As soluções de equilíbrios do problema restrito são os pontos críticos da função Hamiltoniana H , isto é, os pontos (x_1, x_2, x_3) tais que $\nabla H(x_1, x_2, x_3) = 0$. Temos que

$$\nabla H = (H_{x_1}, H_{x_2}, H_{x_3}, H_{y_1}, H_{y_2}, H_{y_3}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

onde

$$\begin{aligned} H_{x_1} &= -y'_1 = x_1 - y_1 + \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = 0 \\ H_{x_2} &= -y'_2 = y_1 + x_2 + \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = 0 \\ H_{x_3} &= -y'_3 = \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \frac{\partial \Omega}{\partial x_3} = 0 \\ H_{y_1} &= x'_1 = y_1 + x_2 = 0 \Rightarrow y_1 = -x_2 \\ H_{y_2} &= x'_2 = y_2 - x_1 \Rightarrow y_2 = x_1 \\ H_{y_3} &= x'_3 = y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = 0 \end{aligned}$$

as equações acima equivale ao sistema de equações

$$\begin{cases} \Omega_{x_1} = 0 \\ \Omega_{x_2} = 0 \\ \Omega_{x_3} = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

onde

$$\begin{aligned} \Omega_{x_1} &= x_1 + V_{x_1} \\ \Omega_{x_2} &= x_2 + V_{x_2} \\ \Omega_{x_3} &= V_{x_3} \end{aligned}$$

Assim para encontrar os equilíbrios temos que resolver o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} V_{x_1} = -x_1 \\ V_{x_2} = -x_2 \\ V_{x_3} = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Calculando $V_{x_1}, V_{x_2}, V_{x_3}$ obtemos

$$\begin{aligned} V_{x_1} &= -\frac{(1-\mu)(x_1+\mu)}{[(x_1+\mu)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu(x_1+\mu-1)}{[(x_1+\mu-1)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} \\ V_{x_2} &= -\frac{(1-\mu)x_2}{[(x_1+\mu)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu x_2}{[(x_1+\mu-1)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} \\ V_{x_3} &= -\frac{(1-\mu)x_3}{[(x_1+\mu)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu x_3}{[(x_1+\mu-1)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

substituindo essas equações em (2.15) obtemos um novo sistema

$$\begin{cases} -\frac{(1-\mu)(x_1+\mu)}{[(x_1+\mu)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu(x_1+\mu-1)}{[(x_1+\mu-1)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} = -x_1 \\ -\frac{(1-\mu)x_2}{[(x_1+\mu)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu x_2}{[(x_1+\mu-1)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} = -x_2 \\ -\frac{(1-\mu)x_3}{[(x_1+\mu)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu x_3}{[(x_1+\mu-1)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Notemos que a ultima equação de (2.16) tem solução se e somente se, $x_3 = 0$. Sendo assim o sistema se reduz a o novo sistema de equações

$$\begin{cases} -\frac{(1-\mu)(x_1+\mu)}{[(x_1+\mu)^2+x_2^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu(x_1+\mu-1)}{[(x_1+\mu-1)^2+x_2^2]^{\frac{3}{2}}} = -x_1 \\ -\frac{(1-\mu)}{[(x_1+\mu)^2+x_2^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu}{[(x_1+\mu-1)^2+x_2^2]^{\frac{3}{2}}} = -1 \end{cases} \quad (2.17)$$

A primeira equação de (2.17) pode ser reescrita como

$$\left[\frac{(1-\mu)}{[(x_1+\mu)^2+x_2^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{[(x_1+\mu-1)^2+x_2^2]^{\frac{3}{2}}} \right] (x_1+\mu) - \frac{\mu}{[(x_1+\mu-1)^2+x_2^2]^{\frac{3}{2}}} = x_1$$

e usando a segunda equação obtemos

$$(x_1+\mu) - \frac{\mu}{[(x_1+\mu-1)^2+x_2^2]^{\frac{3}{2}}} = x_1$$

segue que

$$\mu = \frac{\mu}{[(x_1+\mu-1)^2+x_2^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Dai temos que

$$(x_1+\mu-1)^2+x_2^2=1 \quad (2.18)$$

Substituindo (2.18) na primeira equação de (2.17) obtemos que

$$(x_1+\mu)^2+x_2^2=1 \quad (2.19)$$

Finalmente subtraindo (2.18) de (2.19) membro a membro temos

$$(x_1+\mu)^2-(x_1+\mu-1)^2=0 \Rightarrow (x_1-1+\mu+x_1+\mu-1)(x_1+\mu-x_1-\mu+1)=0 \Rightarrow 2x_1+2\mu-1=0 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{1-2\mu}{2}$$

Substituindo x_1 em (2.19) obtemos que

$$x_2 = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$$

Assim encontramos dois pontos de equilíbrios, que são

$$\left(\frac{1-2\mu}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \quad e \quad \left(\frac{1-2\mu}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$$

Voltando ao sistema (2.16) e fazendo $x_2 = x_3 = 0$ obtemos

$$-\frac{(1-\mu)(x_1+\mu)}{|(x_1+\mu)|^3} - \frac{\mu(x_1+\mu-1)}{|(x_1+\mu-1)|^3} = -x_1$$

que equivale a função

$$f(x_1) = x_1 - (1-\mu)\frac{|1-\mu|}{(x_1+\mu)^3} - \mu\frac{|x_1+\mu-1|}{(x_1+\mu-1)^3} = 0 \quad (2.20)$$

A função $f(x_1)$ é contínua e limitada em todo o eixo real, exceto nos valores de x_1 iguais a $\pm\infty$, $-\mu$ e $1-\mu$, onde ela se torna infinita. Calculando a derivada da função $f(x_1)$. Temos

$$f'(x_1) = 1 + 2(1-\mu)\frac{|x_1+\mu|}{(x_1+\mu)^4} + 2\mu\frac{|x_1+\mu-1|}{(x_1+\mu-1)^4} \quad (2.21)$$

Em cada um dos intervalos

$$(-\infty, -\mu), \quad (-\mu, 1-\mu), \quad (1-\mu, +\infty),$$

em que o eixo numérico é decomposto pelos pontos de descontinuidade, a função f é estritamente crescente, pois $f'(x_1)$ é sempre positiva. Além disso temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} f(x_1) &= -\infty, & \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} f(x_1) &= +\infty \\ \lim_{x_1 \rightarrow \mu^-} f(x_1) &= +\infty, & \lim_{x_1 \rightarrow \mu^+} f(x_1) &= -\infty \\ \lim_{x_1 \rightarrow (1-\mu)^-} f(x_1) &= +\infty, & \lim_{x_1 \rightarrow (1-\mu)^+} f(x_1) &= -\infty \end{aligned}$$

Assim concluímos que, em cada intervalo acima existe uma única solução $x_1 = x_0$, de (2.21).

Em suma o problema restritos dos três corpos possui cinco soluções de equilíbrio, a qual, três delas L_1, L_2 e L_3 estão situados na reta que passa pelos corpos primários e os outros dois pontos L_4 e L_5 formam com os primários triângulos equiláteros. Os cinco pontos críticos são conhecidos como os pontos de libração. Os três primeiros, L_1, L_2 e L_3 são chamados os equilíbrios de Euler e por tradição é estabelecido que $L_3 \in (-\infty, -\mu)$, $L_1 \in (-\mu, 1-\mu)$ e $L_2 \in (1-\mu, +\infty)$ os dois últimos, L_4 com coordenadas $\left(\frac{1-2\mu}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ e L_5 com coordenadas $\left(\frac{1-2\mu}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, são os equilíbrios de Lagrange.

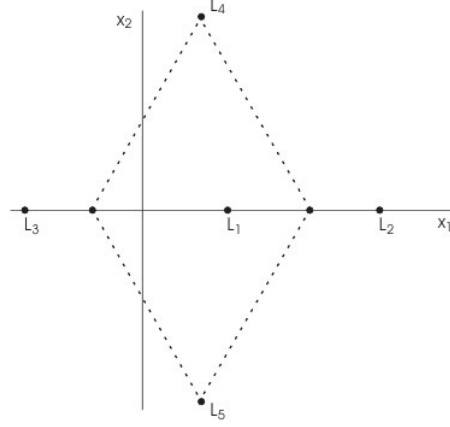


Figura 2.2: Pontos de libração do problema restrito dos três corpos

2.2.3 Estabilidade Linear dos Pontos de Libração

Nessa seção vamos analisar a estabilidade linear dos pontos de libração L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5 no caso planar circular, isto é no caso em que $\epsilon = 0$. Nesse caso o Hamiltoniano do problema é autônomo em relação a variável independente θ , e é dado por

$$H = H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + y_1x_2 - x_1y_2 - U \quad (2.22)$$

onde

$$\begin{aligned} U &= U(x_1, x_2) = \frac{1-\mu}{d_1} + \frac{\mu}{d_2}, \\ \Omega &= \Omega(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + U(x_1, x_2), \\ d_1 &= \sqrt{(x_1 + \mu)^2 + x_2^2} \quad e \quad d_2 = \sqrt{(x_1 + \mu - 1)^2 + x_2^2} \end{aligned}$$

Seja (ξ_1, ξ_2) um dos cinco pontos de libração L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 . Para estudar o movimento próximo deste ponto de equilíbrio, introduzimos as novas coordenadas (X_1, X_2, Y_1, Y_2) dadas por

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 - \xi_1 & Y_1 &= y_1 + \xi_2 \\ X_2 &= x_2 - \xi_2 & Y_2 &= y_2 - \xi_1 \end{aligned}$$

Essa mudança de coordenadas é simplética e portanto (pela proposição (1.4.11)) preserva a estrutura do Hamiltoniano (2.22). Fazendo a expansão de H em série de Taylor até a segunda ordem em torno do ponto de equilíbrio (ξ_1, ξ_2) , obtemos

$$H = \frac{1}{2}(Y_1^2 + Y_2^2) + X_2Y_1 - X_1Y_2 - \frac{1}{2}(U_{x_1x_1}X_1^2 + 2U_{x_1x_2}X_1X_2 + U_{x_2x_2}X_2^2) + \dots \quad (2.23)$$

Na expansão foi omitido o termo constante $H(\xi_1, \xi_2)$ por não contribuir na formação correspondente de equações diferenciais e $\nabla H(\xi_1, \xi_2) = 0$ pois (ξ_1, ξ_2) é um ponto critico de H . As derivadas parciais de H são

$$\begin{aligned} H_{X_1 X_1} &= -U_{x_1 x_1}, & H_{X_1 X_2} &= -U_{x_1 x_2}, & H_{X_1 Y_1} &= 0, & H_{X_1 Y_2} &= -1 \\ H_{X_2 X_1} &= -U_{x_2 x_1}, & H_{X_2 X_2} &= -U_{x_2 x_2}, & H_{X_2 Y_1} &= 1, & H_{X_2 Y_2} &= 0 \\ H_{Y_1 X_1} &= 0, & H_{Y_1 X_2} &= 1, & H_{Y_1 Y_1} &= 1, & H_{Y_1 Y_2} &= 0 \\ H_{Y_2 X_1} &= -1, & H_{Y_2 X_2} &= 0, & H_{Y_2 Y_1} &= 0, & H_{Y_2 Y_2} &= 1 \end{aligned}$$

Assim a matriz Hessiana de H é dada por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -U_{x_1 x_1} & -U_{x_1 x_2} & 0 & -1 \\ -U_{x_2 x_1} & -U_{x_2 x_2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

consequentemente a matriz Hamiltoniana é dada por

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ U_{x_1 x_1} & U_{x_1 x_2} & 0 & 1 \\ U_{x_2 x_1} & U_{x_2 x_2} & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

onde

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto o sistema Hamiltoniano linear autônomo é dado por

$$\frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ U_{x_1 x_1} & U_{x_1 x_2} & 0 & 1 \\ U_{x_2 x_1} & U_{x_2 x_2} & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

Os autovalores da matriz (2.25) determinam o comportamento do sistema linearizado.

O polinômio característico de $\mathbf{A}$ é dado por

$$p(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^4 + (4 - \Omega_{x_1 x_1} - \Omega_{x_2 x_2}) \lambda^2 + \Omega_{x_1 x_1} \Omega_{x_2 x_2} - \Omega_{x_1 x_2}^2 \quad (2.26)$$

onde

$$\begin{aligned}\Omega_{x_1x_1} &= 1 + (1 - \mu) \frac{3(x_1 + \mu)^2 - d_1^2}{d_1^5} + \mu \frac{3(x_1 + \mu - 1)^2 - d_2^2}{d_2^5}, \\ \Omega_{x_1x_2} &= 3x_1x_2 \left(\frac{1 - \mu}{d_1^5} + \frac{\mu}{d_2^5} \right), \\ \Omega_{x_2x_2} &= 1 + (1 - \mu) \frac{3x_2^2 - d_1^2}{d_1^5} + \mu \frac{3x_2^2 - d_2^2}{d_2^5}\end{aligned}$$

Nos pontos L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 obtemos a seguinte tabela

	$\Omega_{x_1x_1}$	$\Omega_{x_1x_2}$	$\Omega_{x_2x_2}$	$\Omega_{x_1x_2}\Omega_{x_2x_2} - \Omega_{x_1x_2}^2$
L_1	$1 + 2s$	0	$1 - s$	$(1 + 2s)(1 - s)$
L_2	$1 + 2s$	0	$1 - s$	$(1 + 2s)(1 - s)$
L_3	$1 + 2s$	0	$1 - s$	$(1 + 2s)(1 - s)$
L_4	$\frac{3}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{4}\mu(1 - \mu)$
L_5	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{4}\mu(1 - \mu)$

onde $s = (1 - \mu)d_1^{-3} + \mu d_2^{-3} > 0$

Proposição 2.2.1. *Nos pontos colineares, a matriz (2.25) tem dois autovalores reais e dois imaginários puros.*

Demonstração: Da tabela acima segue que num equilíbrio colinear temos

$$\Omega_{x_1x_1} > 0 \quad e \quad \Omega_{x_1x_2} = 0$$

Vamos mostrar que $\Omega_{x_2x_2} < 0$. Analisaremos apenas o ponto L_1 e os outros dois casos são feitos de forma análoga. Seja $(\xi, 0)$ a posição de L_1 , dessa forma temos que

$$d_1 = \xi + \mu \quad e \quad d_2 = \xi + \mu - 1$$

$$\begin{aligned}\Omega_{x_2x_2} &= 1 + (1 - \mu) \frac{3x_2^2 - d_1^2}{d_1^5} + \mu \frac{3x_2^2 - d_2^2}{d_2^5} \\ &= \frac{\mu}{d_1} (1 + d_2^{-2} - d_1 d_2^{-3}) \\ &= \frac{\mu}{d_1} (1 - d_2^{-3}) < 0\end{aligned}$$

pois $d_1 = 1 + d_2$ com $0 < d_2 < 1$.

Definido $A = 2 - \frac{1}{2}(\Omega_{x_1x_1} + \Omega_{x_2x_2})$ e $B = -\Omega_{x_1x_1}\Omega_{x_2x_2}$ o polinômio característico toma a seguinte forma

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2A\lambda^2 - B$$

Calculando as raízes de

$$\lambda^4 + 2A\lambda^2 - B = 0$$

obtemos

$$\lambda^2 = -A \pm \sqrt{A^2 + B}$$

Como $B > 0$ Segue o resultado □

Da proposição acima e do teorema (1.5.2) segue o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Os pontos de libração L_1, L_2 e L_3 do problema restrito planar circular dos três corpos, são linearmente instáveis.*

No caso das soluções de equilíbrio Lagrangeanos, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.2. *Os pontos de libração L_4 e L_5 do problema restrito planar circular dos três corpos, são linearmente estáveis se μ estiver no intervalo $(0, \mu^*)$ e linearmente instáveis se $[\mu^*, \frac{1}{2})$, onde $\mu^* = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{69}}{9})$.*

Demonstração: Vamos averiguar apenas o ponto L_4 , visto que para o ponto L_5 se faz de forma análoga. Da tabela acima temos que

$$\Omega_{x-1x_1} = \frac{3}{4}, \quad \Omega_{x_1x_2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu), \quad \Omega_{x_2x_2} = \frac{9}{4} \quad e \quad \Omega_{x_1x_2}\Omega_{x_2x_2} - \Omega_{x_1x_2}^2$$

Assim o polinômio característico tem a seguinte forma

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu)$$

Calculando as raízes de

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0$$

obtemos

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{1 - \pm \sqrt{1 - \sigma(\mu)}}{2}} \tag{2.27}$$

onde $\sigma(\mu) = 27\mu(1 - \mu)$. Analisaremos os seguintes casos $\sigma(\mu) < 1$, $\sigma(\mu) > 1$ e $\sigma(\mu) = 1$.

Se $\sigma(\mu) < 1$, isto é, $\mu \in (0, \mu^*)$, então os autovalores em (2.27) são imaginários puros e distintos, donde pelo teorema (1.5.2), temos L_4 é linearmente estável.

Se $\sigma(\mu) > 1$, isto é, $\mu \in (\mu^*, \frac{1}{2})$, temos dois pares de autovalores complexos com parte real não nula, e portanto, pelo teorema (1.5.2) temos que L_4 é linearmente instável.

Finalmente, se $\sigma(\mu) = 1$, temos que $\mu = \mu^* = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{69}}{9})$ é uma raiz positiva da equação $27\mu(1 - \mu) = 1$. Nesse caso temos dois autovalores imaginários puros, a saber, $\lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$. Nesse caso a matriz da parte linear é dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{23}}{4} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{23}}{4} & \frac{5}{4} & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

e os autovetores associados são

$$e_1 = \left(-\frac{\sqrt{23}}{5}, 1, -\frac{1}{5}, -\frac{\sqrt{23}}{5} \right) + i \left(-\frac{4\sqrt{2}}{5}, 0, -\frac{\sqrt{46}}{10}, -\frac{3\sqrt{2}}{10} \right)$$

$$e_2 = \left(-\frac{\sqrt{23}}{5}, 1, -\frac{1}{5}, -\frac{\sqrt{23}}{5} \right) + i \left(\frac{4\sqrt{2}}{5}, 0, \frac{\sqrt{46}}{10}, \frac{3\sqrt{2}}{10} \right)$$

Logo $\mathbf{A}$ não é diagonalizável e, portanto, pelo teorema (1.5.2) L_4 é instável. $\square$

Afim de enfatizar a importância do problema restrito, vejamos o caso particular em que o primeiro primário de massa m_1 é o Sol, o segundo primário de massa m_2 é a Terra e o corpo de massa infinitesimal é a Lua.

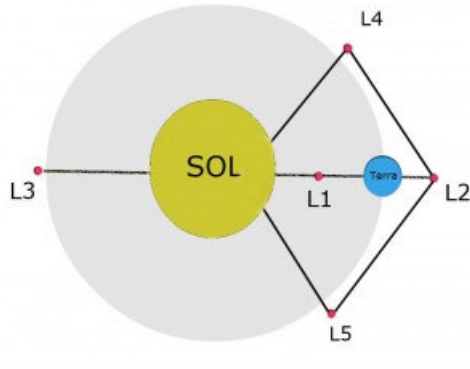


Figura 2.3: Os 5 pontos de Lagrange Terra-Sol.

Satellites Lagrange points EARTH/SUN	Date	L1	L2	L3	L4	L5
ISEE-3	1978	•				
WIND	1994	•				
SOHO	1995	•				
ACE	1997	•				
WMAP	2001		•			
GENESIS	2001	•				
PLANCK	2009		•			
HERSCHEL	2009		•			
GAIA	2013		•			
JWST	2018		•			

Figura 2.4: Satélites em pontos de Lagrange Terra-Sol.

Capítulo 3

O Problema de Robe

Esse capítulo é dedicado a dissertar sobre a estabilidade linear no problema de Robe, a saber estudaremos os principais resultados do artigo [2].

3.1 Descrição do Problema de Robe

Em 1976, H.A.G. Robe propôs uma variação do problema restrito dos três corpos, o qual ficaria conhecido como problema de Robe. O problema consiste em considerar a dinâmica de três corpos, a saber: uma casca esférica centrado em M_1 na posição q_1 , com massa m_1 e raio R , preenchida com um fluido incompressível e homogêneo de densidade ρ_1 ; o segundo corpo, centrado em M_2 , na posição q_2 , com massa m_2 e fora da esfera, finalmente o terceiro corpo, centrado em M_3 na posição q_3 , é uma esfera de raio infinitesimal e densidade ρ_3 com massa m_3 localizada no interior do primeiro corpo (ver figura 2.1)

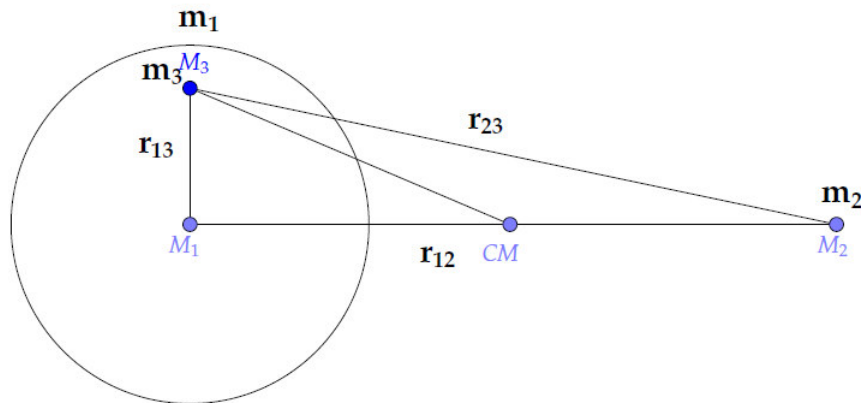


Figura 3.1: Problema de Robe

onde $r_{ij} = |q_i - q_j|$ $j = 1, 2, 3$. Segundo Robe, a justificativa em se considerar tal

problema é obter uma modelagem a fim de estudar o efeito gravitacional da Lua no interior da Terra.

3.1.1 Exposição dos Principais Teoremas do Problema de Robe

Afim de enunciarmos os principais resultados que discutiremos nesse capítulo, fixamos os seguintes parâmetros

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, 0 < \mu < 1, \quad K = \left(\frac{a}{R}\right)^3 (1 - \mu) \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right), \epsilon.$$

Teorema A (Robe). *O ponto $p_0 = (-\mu, 0, 0)$ é um ponto de equilíbrio do problema de Robe para todo valor de ϵ .*

Teorema B (Hallan e Rana). *O problema de Robe apresenta as seguintes soluções de equilíbrios:*

1. *O ponto $p_0 = (-\mu, 0, 0)$ para quaisquer valores de K e ϵ ;*
2. *Um segundo ponto $p_1 = (x_0, 0, 0)$ quando $K > 1$ e $\epsilon = 0$;*
3. *Dois pontos formando triângulos com o centro da esfera e o segundo primário no plano $x_1 - x_3$ equidistantes do eixo x_1 , quando $K < 0$, $K + \mu > 0$ e $\epsilon = 0$;*
4. *Uma infinidade de pontos da circunferência de raio 1, centrada no segundo primário, e que esteja dentro da casca esférica, no caso em que $K = 1 - \mu$ e $\epsilon = 0$.*

Teorema C (Robe). *O ponto $p_0 = (-\mu, 0, 0)$ é estável na região do plano $\mu - K$ definida pelas desigualdades*

- $K + \mu > 0$
- $2 - \mu + 2K > 0$;
- $(1 + 2\mu - K)(1 - \mu - K) > 0$;
- $9\mu^2 - 8\mu + 16K > 0$.

Teorema D (Hallan e Rana). *O ponto de equilíbrio $p_1 = (x_0, 0, 0)$ é estável apenas na região do plano $\mu - K$ definida pela desigualdade*

$$16\mu(K - 1)^2 < \left(\mu + \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}\right)^3.$$

Proposição A (Hallan e Rana). *Os pontos de equilíbrios triangulares são linearmente instáveis.*

Proposição B (Hallan e Rana). *Os pontos circulares são instáveis.*

3.1.2 Formulação do Problema de Robe

Equações do Movimento

Forças que atuam em M_3 :

1. Atração de M_2 .

$$F_1 = \frac{Gm_2m_3}{|q_2 - q_3|^2} \frac{(q_2 - q_3)}{|q_2 - q_3|} = -\frac{Gm_2m_3}{|q_2 - q_3|^3} (q_3 - q_2) \quad (3.1)$$

2. A força gravitacional exercida pelo fluido de densidade ρ_1

Por definição, a gravidade que atua em um ponto de massa m e raio r dentro da casca esférica de raio R é dada por $g = -\frac{Gm.r}{R^3}$ com $r < R$.

Seja $\rho_1 = \frac{m_1}{V_1}$ onde $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$ isto implica que $m_1 = \rho_1 V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1$

Então a gravidade em M_3 é dada por

$$g = -\frac{4}{3}\pi G\rho_1 |q_1 - q_2|$$

Segue que

$$F_2 = m_3 g = -\left(\frac{4}{3}\right) \pi G \rho_1 m_3 (q_3 - q_1) \quad (3.2)$$

3. Empuxo ($E = \rho V g$) gerado pelo líquido de densidade ρ_1

$F_3 = -E = -\rho_1 V_3 g$ onde $V_3 = \frac{m_3}{\rho_3}$ e $g = -\left(\frac{4}{3}\right) \pi G \rho_1 (q_3 - q_1)$. Então

$$F_3 = \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{\rho_1^2}{\rho_3}\right) \pi G m_3 (q_3 - q_1) \quad (3.3)$$

Logo a força resultante que atua em M_3 é

$F_r = \sum_{j=1}^3 F_j$ onde $F_r = m_3 \ddot{q}_3$ segue que

$$\begin{aligned} m_3 \ddot{q}_3 &= -\frac{Gm_2m_3}{|q_2 - q_3|^3} (q_3 - q_2) - \left(\frac{4}{3}\right) \pi G \rho_1 m_3 (q_3 - q_1) + \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{\rho_1^2}{\rho_3}\right) \pi G m_3 (q_3 - q_1) \\ &= \frac{Gm_2m_3}{|q_2 - q_3|^3} (q_2 - q_3) + \left(\frac{4}{3}\right) \pi G \rho_1 m_3 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right) (q_1 - q_3) \\ &= \frac{Gm_2m_3}{|q_2 - q_3|^3} (q_2 - q_3) + \left(\frac{4}{3}\right) \pi G \rho_1 m_3 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right) (q_1 - q_3) \end{aligned}$$

As equações de movimento para q_3 são dadas por

$$\ddot{q}_3 = \left(\frac{4}{3}\right) \pi G \rho_1 m_3 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right) (q_1 - q_3) + \frac{G m_2 m_3}{|q_2 - q_3|^3} (q_2 - q_3) \quad (3.4)$$

ou por

$$\ddot{q}_3 = \frac{\partial V}{\partial q_3}$$

onde

$$V = -\frac{4}{6} G \rho_1 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right) |q_1 - q_2|^2 + \frac{G m_2}{|q_2 - q_3|} \quad (3.5)$$

Para obter uma forma conveniente das equações de movimento do corpo m_3 , introduzimos um sistema de coordenadas $O\xi\eta\zeta$, com origem no centro de massas dos corpos m_1 e m_2 e com o plano $O\xi\eta$ coincidindo com o plano da órbita dos binários. Tomamos o eixo $O\xi$ ao longo da reta que liga m_1 a m_2 , na direção do corpo m_1 , com a menor mudança do eixo $O\xi$ para o eixo $O\eta$ coincidindo com o sentido da rotação m_2 relativamente ao corpo m_1 . O eixo $O\zeta$ forma com os eixos $O\xi$ e $O\eta$ um sistema de coordenadas com a regra da mão direita (veja gura 2.2).

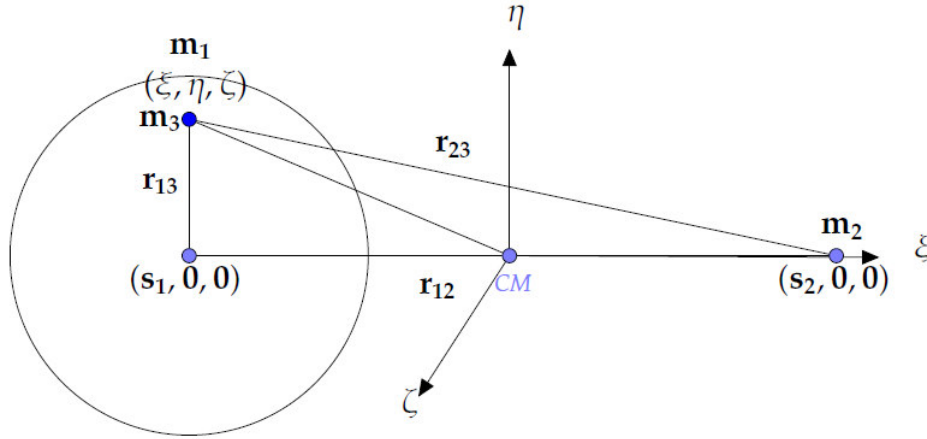


Figura 3.2: Problema de Robe

O movimento de m_2 ao redor de m_1 é definido pelo problema de dois corpos, cujas as soluções são conhecidas.

Nesse contexto vamos considerar que o movimento de m_2 ao redor de m_1 é elíptico. Seja q a distância entre os primários, ϵ a excentricidade da órbita elíptica que m_2 descreve ao redor de m_1 , a o semi-eixo maior da órbita e ν a anomalia verdadeira. Então

$$q = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \nu} \quad \text{onde} \quad p = a(1 - \epsilon^2) \quad , \quad p = \frac{c^2}{G(m_1 + m_2)} \quad e \quad \dot{\nu} = \frac{c}{p^2}$$

temos

$$q = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \nu} \quad (3.6)$$

Como no problema restrito dos três corpos, definimos o referencial móvel dado por

$$e_1 = \frac{\mathbf{q}}{q}, \quad e_2 = e_1 \times e_3 \quad e \quad e_3 = \frac{\mathbf{C}}{c} \quad (3.7)$$

onde $\mathbf{q} = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1$, $\mathbf{C} \neq 0$ é o momento angular, $q = \|\mathbf{q}\|$ e $c = \|\mathbf{C}\|$. Derivando essas relações obtemos

$$\dot{e}_1 = \dot{\nu}e_2, \quad \dot{e}_2 = -\dot{\nu}e_1, \quad \dot{e}_3 = 0 \quad (3.8)$$

onde ν representa o ângulo formado pelo vetor $\mathbf{q}$ e o eixo das abscissas do sistema inercial fixado, logo temos que $\dot{\nu}$ representa a velocidade angular associado aos binários $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$, ou seja $\frac{c}{q^2}$.

Uma vez que q é distancia entre m_1 e m_2 e que o centro de massa $C = \frac{m_1q_1 + m_2q_2}{m_1 + m_2}$ está na origem, temos que

$$m_1q_1 + m_2q_2 = 0 \quad e \quad q = |q_1| + |q_2|$$

segue que

$$q = |q_1| + \frac{m_1}{m_2}|q_1| = |q_1| \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) = |q_1| \frac{m_1 + m_2}{m_2}$$

e

$$q = |q_2| + \frac{m_2}{m_1}|q_2| = |q_2| \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) = |q_2| \frac{m_1 + m_2}{m_1}$$

em suma temos

$$s_1 = |q_1| = \frac{m_2}{m_1 + m_2}q \quad e \quad s_2 = |q_2| = \frac{m_1}{m_1 + m_2}q$$

Escrevendo q_3 nessa base obtemos

$$q_3 = \xi e_1 + \eta e_2 + \zeta e_3 \quad (3.9)$$

Derivando 3.9 obtemos;

$$\begin{aligned} \dot{q}_3 &= \dot{\xi}e_1 + \xi\dot{e}_1 + \dot{\eta}e_2 + \eta\dot{e}_2 + \dot{\zeta}e_3 + \zeta\dot{e}_3 = \dot{\xi}e_1 + \xi\dot{\nu}e_2 + \dot{\eta}e_2 - \eta\dot{\nu}e_1 + \dot{\zeta}e_3 \\ \dot{q}_3 &= (\dot{\xi} - \eta\dot{\nu})e_1 + (\xi\dot{\nu} + \dot{\eta})e_2 + \dot{\zeta}e_3 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Derivando 3.10 obtemos;

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_3 &= [\ddot{\xi} - (\dot{\eta}\dot{\nu} + \eta\ddot{\nu})]e_1 + (\dot{\xi} - \eta\dot{\nu})\dot{e}_1 + (\dot{\xi}\dot{\nu} + \xi\ddot{\nu} + \ddot{\eta})e_2 + (\xi\dot{\nu} + \dot{\eta})\dot{e}_2 + \ddot{\zeta}e_3 + \dot{\zeta}\dot{e}_3 \\
 &= (\ddot{\xi} - \dot{\eta}\dot{\nu} - \eta\ddot{\nu})e_1 + (\dot{\xi} - \eta\dot{\nu})\dot{\nu}e_2 + (\dot{\xi}\dot{\nu} + \xi\ddot{\nu} + \ddot{\eta})e_2 - (\xi\dot{\nu} + \dot{\eta})\dot{\nu}e_1 + \ddot{\zeta}e_3 \\
 \ddot{q}_3 &= (\ddot{\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\nu} - \eta\ddot{\nu} - \xi\dot{\nu}^2)e_1 + (2\dot{\xi}\dot{\nu} - \eta\dot{\nu}^2 + \xi\ddot{\nu} + \ddot{\eta})e_2 + \ddot{\zeta}e_3 \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

Pela figura 3.2 segue que

$$\begin{cases} r_{23}^2 = (\xi - s_2)^2 + \eta^2 + \zeta^2 \\ r_{13}^2 = (\xi - s_1)^2 + \eta^2 + \zeta^2 \end{cases} \quad (3.12)$$

Substituindo 3.11 em 3.4 temos;

$$\begin{aligned}
 (\ddot{\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\nu} - \eta\ddot{\nu} - \xi\dot{\nu}^2)e_1 + (2\dot{\xi}\dot{\nu} - \eta\dot{\nu}^2 + \xi\ddot{\nu} + \ddot{\eta})e_2 + \ddot{\zeta}e_3 &= \frac{Gm_2}{r_{23}^3}(q_2 - q_3) - \left(\frac{4}{3}\right) \pi G \rho_1 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right) (q_3 - q_1) \\
 q_1 &= s_1 e_1 + 0e_2 + 0e_3 = s_1 e_1 \quad q_2 = s_2 e_1 + 0e_2 + 0e_3 = s_2 e_1 \\
 (\ddot{\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\nu} - \eta\ddot{\nu} - \xi\dot{\nu}^2)e_1 + (2\dot{\xi}\dot{\nu} - \eta\dot{\nu}^2 + \xi\ddot{\nu} + \ddot{\eta})e_2 + \ddot{\zeta}e_3 &= \frac{Gm_2}{r_{23}^3}[(s_2 - \xi)e_1 - \eta e_2 - \zeta e_3] \\
 &\quad - \left(\frac{4}{3}\right) \pi G \rho_1 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right) [(\xi - s_1)e_1 + \eta e_2 + \zeta e_3]
 \end{aligned}$$

Fazendo o produto interno na igualdade acima por e_j , $j = 1, 2, 3$ obtemos

$$\begin{cases} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\nu} - \eta\ddot{\nu} - \xi\dot{\nu}^2 = \frac{Gm_2}{r_{23}^3}(s_2 - \xi) - \left(\frac{4}{3}\right) \pi G \rho_1 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right) (\xi - s_1) \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi}\dot{\nu} + \xi\ddot{\nu} - \eta\dot{\nu}^2 = -\frac{Gm_2}{r_{23}^3}\eta - \left(\frac{4}{3}\right) \pi G \rho_1 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right) \eta \\ \ddot{\zeta} = -\frac{Gm_2}{r_{23}^3}\zeta - \left(\frac{4}{3}\right) \pi G \rho_1 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right) \zeta \end{cases} \quad (3.13)$$

ou, ainda,

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = \frac{Gm_2}{r_{23}^3}(s_2 - \xi) - \left(\frac{4}{3}\right) \pi G \rho_1 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right) (\xi - s_1) + 2\dot{\eta}\dot{\nu} + \eta\ddot{\nu} + \xi\dot{\nu}^2 \\ \ddot{\eta} = -\left[\frac{Gm_2}{r_{23}^3} + \left(\frac{4}{3}\right) \pi G \rho_1 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right)\right] \eta - 2\dot{\xi}\dot{\nu} + \eta\dot{\nu}^2 - \xi\ddot{\nu} \\ \ddot{\zeta} = -\left[\frac{Gm_2}{r_{23}^3} + \left(\frac{4}{3}\right) \pi G \rho_1 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right)\right] \zeta \end{cases} \quad (3.14)$$

Afim de eliminar o movimento homotético fazemos a seguinte mudança de variáveis

$$t = t(\nu)$$

$$\xi = q(\nu)x$$

$$\eta = q(\nu)y$$

$$\zeta = q(\nu)z$$

onde $t = t(\nu)$ é a relação entre o tempo e a anomalia verdadeira ν . No que segue vamos precisar de

$$\dot{q} = \frac{c\epsilon}{p} \sin \nu, \quad \dot{\nu} = \frac{c}{p^2}(1 + \epsilon \cos \nu)^2, \quad \ddot{\nu} = -\frac{2c^2\epsilon}{p^4}(1 + \epsilon \cos \nu)^3 \sin \nu$$

onde

$$p = a(1 - \epsilon^2)$$

Considere o re-escalamento no tempo associado a anomalia verdadeira ν , $(\)' = \frac{d}{d\nu}$ temos;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\nu} \frac{d\nu}{dt} = x' \dot{\nu} \\ \frac{d(x')}{dt} &= \frac{d(x')}{d\nu} \frac{d\nu}{dt} = x'' \dot{\nu} \end{aligned}$$

Derivando em $\xi = q(\nu)x$ relação ao tempo obtemos

$$\dot{\xi} = \dot{q}(\nu)x + q(\nu)\dot{x}$$

Segue que

$$\dot{\xi} = \frac{c\epsilon}{p} \sin \nu x + q \dot{\nu} x' = \frac{c\epsilon}{p} \sin \nu x + p(1 + \epsilon \cos \nu)^{-1} \frac{c}{p^2} (1 + \epsilon \cos \nu)^2 x' \text{ segue que}$$

$$\dot{\xi} = \frac{c}{p} [(1 + \epsilon \cos(\nu))x' + \epsilon \sin(\nu)x] \quad (3.15)$$

Derivando a expressão 3.15 temos

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= \frac{c}{p} \left[-\epsilon \dot{\nu} \sin(\nu) x' + (1 + \epsilon \cos(\nu)) \frac{(x')}{dt} + \epsilon \dot{\nu} \cos(\nu) x + \epsilon \sin(\nu) \dot{x} \right] \\ &= \frac{c}{p} [-\epsilon \dot{\nu} \sin(\nu) x' + (1 + \epsilon \cos(\nu)) \dot{\nu} x'' + \epsilon \dot{\nu} \cos(\nu) x + \epsilon \sin(\nu) \dot{\nu} x'] \\ &= \frac{c}{p} [(1 + \epsilon \cos(\nu)) \dot{\nu} x'' + \epsilon \dot{\nu} \cos(\nu) x] \\ &= \frac{c \dot{\nu}}{p} [(1 + \epsilon \cos(\nu)) x'' + \epsilon \cos(\nu) x] \end{aligned}$$

logo

$$\ddot{\xi} = \frac{c^2}{p^3} [(1 + \epsilon \cos(\nu)) x'' + \epsilon \cos(\nu) x] (1 + \epsilon \cos(\nu))^2 \quad (3.16)$$

De forma análoga temos

$$\dot{\eta} = \frac{c}{p} [(1 + \epsilon \cos(\nu))y' + \epsilon \sin(\nu)y] \quad (3.17)$$

$$\ddot{\eta} = \frac{c^2}{p^3} [(1 + \epsilon \cos(\nu))y'' + \epsilon \cos(\nu)y] (1 + \epsilon \cos(\nu))^2 \quad (3.18)$$

$$\dot{\zeta} = \frac{c}{p} [(1 + \epsilon \cos(\nu))z' + \epsilon \sin(\nu)z] \quad (3.19)$$

$$\ddot{\zeta} = \frac{c^2}{p^3} [(1 + \epsilon \cos(\nu))z'' + \epsilon \cos(\nu)z] (1 + \epsilon \cos(\nu))^2 \quad (3.20)$$

O próximo passo é colocar as equações que rege o movimento em função das novas variáveis. Para isso prosseguimos da seguinte forma. Começamos pondo as equações do primeiro membro de (3.13) nas novas variáveis

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\nu} - \eta\ddot{\nu} - \xi\dot{\nu}^2 &= \frac{c^2}{p^3} [(1 + \epsilon \cos \nu)x'' + \epsilon \cos \nu] (1 + \epsilon \cos \nu)^2 \\ &\quad - \frac{2c^2}{p^2} (1 + \epsilon \cos \nu)^2 [(1 + \epsilon \cos \nu)y' + \epsilon \sin \nu y] \\ &\quad + \frac{2\epsilon c^2}{p^3} (1 + \epsilon \cos \nu)^2 y - \frac{c^2}{p^3} (1 + \epsilon \cos \nu)^3 \\ \ddot{\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\nu} - \eta\ddot{\nu} - \xi\dot{\nu}^2 &= \frac{c^2}{p^3} (1 + \epsilon \cos \nu)^3 \left[x'' - 2y' - x + \frac{\epsilon \cos \nu}{1 + \epsilon \cos \nu} x \right] \end{aligned}$$

segue que

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\nu} - \eta\ddot{\nu} - \xi\dot{\nu}^2 = \frac{c^2}{p^3} (1 + \epsilon \cos \nu)^3 \left[x'' - 2y' - \frac{x}{1 + \epsilon \cos \nu} \right] \quad (3.21)$$

de forma análoga obtemos que

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi}\dot{\nu} + \xi\ddot{\nu} - \eta\dot{\nu}^2 = \frac{c^2}{p^3} (1 + \epsilon \cos \nu)^3 \left[y'' + 2x' - \frac{y}{1 + \epsilon \cos \nu} \right] \quad (3.22)$$

e

$$\ddot{\zeta} = \frac{c^2}{p^3}(1 + \epsilon \cos \nu)^3 \left[z'' + \frac{\epsilon \cos \nu z}{1 + \epsilon \cos \nu} \right] \quad (3.23)$$

O passo seguinte é colocar as equações do segundo membro de (3.13) nas novas variáveis. Antes temos que

$$r_{23}^3 = \sqrt{\left[\left(qx - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 + (qy)^2 + (qz)^2 \right]^3} = q^3 \sqrt{[(\mu + x - 1)^2 + y^2 + z^2]^3}$$

onde

$$s_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}q = \mu q \quad e \quad s_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}q = (1 - \mu)q$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

sejam

$$\begin{aligned} A &= \frac{Gm_2}{r_{23}^3}(s_2 - \xi) - \left(\frac{4}{3} \right) \pi G \rho_1 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3} \right) (\xi - s_1) \\ B &= -\frac{Gm_2}{r_{23}^3}\eta - \left(\frac{4}{3} \right) \pi G \rho_1 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3} \right) \eta \\ C &= -\frac{Gm_2}{r_{23}^3}\zeta - \left(\frac{4}{3} \right) \pi G \rho_1 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3} \right) \zeta \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} A &= \frac{Gm_2[q(1 - \mu) - qx]}{l^3 \sqrt{[(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2]^3}} - \frac{4\pi G \rho_1}{3} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3} \right) (qx - q\mu) \\ &= \frac{Gm_2[(1 - \mu) - x]}{l^2 \sqrt{[(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2]^3}} - \frac{4\pi G \rho_1}{3} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3} \right) (x - \mu)q \end{aligned}$$

logo

$$A = \frac{(1 + \epsilon \cos \nu)}{p^2} \frac{Gm_2(1 - \mu - x)}{\sqrt{[(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2]^3}} - \frac{p}{1 + \epsilon \cos \nu} \frac{4\pi G \rho_1}{3} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3} \right) (x - \mu) \quad (3.24)$$

De forma análoga temos que

$$\begin{aligned} B &= -\frac{Gm_2 qy}{q^3 \sqrt{[(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2]^3}} - \frac{4\pi G \rho_1}{3} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3} \right) qy \\ &= -\frac{Gm_2 y}{q^2 \sqrt{[(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2]^3}} - \frac{4\pi G \rho_1}{3} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3} \right) qy \end{aligned}$$

$$B = -\frac{(1 + \epsilon \cos \nu)}{p^2} \frac{Gm_2 y}{\sqrt{[(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2]^3}} - \frac{p}{1 + \epsilon \cos \nu} \frac{4\pi G \rho_1}{3} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right) y \quad (3.25)$$

e

$$\begin{aligned} C &= -\frac{Gm_2 q z}{l^3 \sqrt{[(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2]^3}} - \frac{4\pi G \rho_1}{3} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right) q z \\ &= -\frac{Gm_2 z}{l^2 \sqrt{[(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2]^3}} - \frac{4\pi G \rho_1}{3} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right) q z \\ C &= -\frac{(1 + \epsilon \cos \nu)}{p^2} \frac{Gm_2 z}{\sqrt{[(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2]^3}} - \frac{p}{1 + \epsilon \cos \nu} \frac{4\pi G \rho_1}{3} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right) z \quad (3.26) \end{aligned}$$

onde

$$q = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \nu} \quad e \quad \frac{1}{q^2} = \frac{(1 + \epsilon \cos \nu)^2}{p^2}$$

Por 3.13 temos que

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{p^3} (1 + \epsilon \cos \nu)^3 \left[x'' - 2y' - \frac{x}{1 + \epsilon \cos \nu} \right] &= \frac{(1 + \epsilon \cos \nu)}{p^2} \frac{Gm_2(1 - \mu - x)}{\sqrt{[(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2]^3}} \\ &\quad - \frac{p}{1 + \epsilon \cos \nu} \frac{4\pi G \rho_1}{3} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right) (x - \mu) \\ x'' - 2y' - \frac{x}{1 + \epsilon \cos \nu} &= \frac{p}{c^2(1 + \epsilon \cos \nu)} \frac{Gm_2(1 - \mu - x)}{\sqrt{[(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2]^3}} \\ &\quad - \frac{p^4}{c^2(1 + \epsilon \cos \nu)^4} \frac{4\pi G \rho_1}{3} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right) (x - \mu) \\ x'' - 2y' &= \frac{x}{1 + \epsilon \cos \nu} + \frac{p}{c^2(1 + \epsilon \cos \nu)} \frac{Gm_2(1 - \mu - x)}{\sqrt{[(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2]^3}} \\ &\quad - \frac{p^4}{c^2(1 + \epsilon \cos \nu)^4} \frac{4\pi G \rho_1}{3} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right) (x - \mu) \end{aligned}$$

Definindo

$$\Gamma = \frac{4\pi G \rho_1}{3} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right)$$

Finalmente

$$x'' - 2y' = \frac{1}{1 + \epsilon \cos \nu} \left[x + \frac{p}{c^2} \frac{Gm_2(1 - \mu - x)}{\sqrt{[(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2]^3}} - \frac{p^4}{c^2(1 + \epsilon \cos \nu)^3} \Gamma (x - \mu) \right]$$

De forma análoga obtemos

$$y'' + 2x' = \frac{1}{1 + \epsilon \cos \nu} \left[y - \frac{p}{c^2} \frac{Gm_2 y}{\sqrt{[(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2]^3}} - \frac{p^4}{c^2(1 + \epsilon \cos \nu)^3} \Gamma y \right]$$

e

$$z'' + z = \frac{1}{1 + \epsilon \cos \nu} \left[z - \frac{p}{c^2} \frac{Gm_2 z}{\sqrt{[(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2]^3}} - \frac{p^4}{c^2(1 + \epsilon \cos \nu)^3} \Gamma z \right]$$

Definimos uma função V de tal forma que

$$\left\{ \begin{array}{l} x + \frac{p}{c^2} \frac{Gm_2(1 - \mu - x)}{\sqrt{[(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2]^3}} - \frac{p^4}{c^2(1 + \epsilon \cos \nu)^3} \Gamma(x - \mu) = \frac{\partial V}{\partial x} \\ y - \frac{p}{c^2} \frac{Gm_2}{\sqrt{[(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2]^3}} - \frac{p^4}{c^2(1 + \epsilon \cos \nu)^3} \Gamma y = \frac{\partial V}{\partial y} \\ z - \frac{p}{c^2} \frac{Gm_2}{\sqrt{[(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2]^3}} - \frac{p^4}{c^2(1 + \epsilon \cos \nu)^3} \Gamma z = \frac{\partial V}{\partial z} \end{array} \right. \quad \text{Ou seja}$$

$$V = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{p}{c^2} \frac{Gm_2}{[(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \frac{p^4}{c^2(1 + \epsilon \cos \nu)^3} K [(x - \mu)^2 + y^2 + z^2]$$

Pelo problema de 2 corpos temos

$$G = \frac{c^2}{p} \frac{1}{(m_1 + m_2)} \quad e \quad Gm_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{c^2}{p} = \mu \frac{c^2}{p}$$

Segue

$$V = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{\mu}{[(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{K}{2} \left(\frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \nu} \right)^3 ((x + \mu)^2 + y^2 + z^2)$$

Com

$$\begin{aligned} K &= \frac{4\pi\rho_1 a^3}{3(m_1 + m_2)} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3} \right) = \frac{4\pi R^3 \rho_1 a^3}{3(m_1 + m_2) R^3} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3} \right) \\ &= \left(\frac{a}{R} \right)^3 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3} \right) = \left(\frac{a}{R} \right)^3 (1 - \mu) \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3} \right) \end{aligned}$$

Portanto as equações do movimento são escritas da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' - 2y' = (1 + \epsilon \cos \nu)^{-1} V_x \\ y'' + 2x' = (1 + \epsilon \cos \nu)^{-1} V_y \\ z'' + z = (1 + \epsilon \cos \nu)^{-1} V_z \end{array} \right. \quad (3.27)$$

onde a derivada está sendo tomada com relação a anomalia verdadeira e V é dada por

$$V = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{\mu}{[(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{K}{2} \left(\frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \nu} \right)^3 ((x + \mu)^2 + y^2 + z^2)$$

com

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad K = \left(\frac{a}{R} \right)^3 (1 - \mu) \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3} \right)$$

O próximo passo é converter o sistema de equações diferenciais de segunda ordem (3.27) para um sistema hamiltoniano. Para isso, fazemos a transformação canônica de coordenadas

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad y_1 = x' - y = x'_1 - x_2, \quad y_2 = y' + x = x'_1 + x_1, \quad y_3 = z = x'_3$$

Assim temos que

$$\begin{aligned} y'_1 - y' &= x'' - 2y = (1 + \epsilon \cos \nu)^{-1} V_x = (1 + \epsilon \cos \nu)^{-1} V_{x_1} \\ y'_2 + x' &= y'' + 2x' = (1 + \epsilon \cos \nu)^{-1} V_y = (1 + \epsilon \cos \nu)^{-1} V_{x_2} \\ y'_3 + z &= z'' + z = (1 + \epsilon \cos \nu)^{-1} V_z = (1 + \epsilon \cos \nu)^{-1} V_{x_3} \end{aligned}$$

e

$$V = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \frac{\mu}{[(x_1 + \mu - 1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{K}{2} \left(\frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \nu} \right)^3 ((x_1 + \mu)^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

Definindo a função

$$H = \frac{1}{2} (y_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2} (y_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} (x_3^2 + y_3^2) - (1 + \epsilon \cos \nu)^{-1} V$$

temos que

$$\begin{aligned} H_{y_1} &= y_1 + x_2 = x'_1 \\ H_{y_2} &= y_2 - x_1 = x'_2 \\ -H_{x_1} &= y_2 - x_1 + (1 + \epsilon \cos \nu)^{-1} V_{x_1} = x'_2 + (1 + \epsilon \cos \nu)^{-1} V_{x_1} = y'_1 \\ -H_{x_2} &= -x_2 - y_1 + (1 + \epsilon \cos \nu)^{-1} V_{x_2} = -x'_1 + (1 + \epsilon \cos \nu)^{-1} V_{x_2} = y'_2 \\ -H_{x_3} &= -x_3 + (1 + \epsilon \cos \nu)^{-1} V_{x_3} = y'_3 \end{aligned}$$

Em resumo temos que a mudança de coordenadas feita acima transforma o sistema (1.33) no sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} x'_j = H_{y_j} \\ y'_j = -H_{x_j} \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.28)$$

onde a função hamiltoniana H é dada por

$$H = \frac{1}{2} (y_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2} (y_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} (x_3^2 + y_3^2) - (1 + \epsilon \cos \nu)^{-1} V$$

Observações

1. O Hamiltoniano foi obtido sob a condição de que $|q_1 - q_3| < R$, onde R é o raio da esfera.
2. O reservatório não deve incluir a massa m_2 , de modo que $R < a$ é um limite superior no tamanho do reservatório, isto significa que $(x_1 + \mu)^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ de modo que as equações de movimento derivadas de (3.28) tenham um significado físico.
3. É permitido que m_2 situa-se no próprio reservatório desde que $R = a$ mas isto pode levar a um sistema degenerado como será visto mais na frente
4. Os parâmetros para o problema dado são μ com $0 < \mu < 1$, $\alpha = \frac{a}{R}$ com $\alpha \geq 1$ e $\rho = \frac{\rho_1}{\rho_3}$, onde a é o eixo maior da órbita elíptica. Assim pode-se esperar que um ponto de equilíbrio é instável quando tivermos $\rho_1 > \rho_3$, pois a flutuabilidade pode empurrar o corpo m_3 para a fronteira do reservatório. No entanto K pode assumir qualquer valor por diferentes escolhas dos parâmetros independentes.
5. O sistema de equações diferenciais (3.28) é não autônomo na variável independente ν .

3.2 Equilíbrios

Um ponto de equilíbrio do sistema (3.28) é um ponto crítico $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ de H , ou seja um zero de ∇H .

$$\nabla H = (H_{x_1}, H_{x_2}, H_{x_3}, H_{y_1}, H_{y_2}, H_{y_3}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

temos

$$\begin{aligned} H_{x_1} &= -y_2 + x_1 - (1 + \epsilon \cos \nu)^{-1} V_{x_1} = 0 \\ H_{x_2} &= y_1 + x_2 - (1 + \epsilon \cos \nu)^{-1} V_{x_2} = 0 \\ H_{x_3} &= x_3 - (1 + \epsilon \cos \nu)^{-1} V_{x_3} = 0 \\ H_{y_1} &= y_1 + x_2 = 0 \Rightarrow y_1 = -x_2 \\ H_{y_2} &= y_2 - x_1 = 0 \Rightarrow y_2 = x_1 \\ H_{y_3} &= y_3 = 0 \end{aligned}$$

Dai segue que para calcular os pontos críticos de H basta resolver o sistema

$$\begin{cases} V_{x_1} = 0 \\ V_{x_2} = 0 \\ V_{x_3} - (1 + \epsilon \cos \nu)x_3 = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

Onde

$$\begin{aligned} V_{x_1} &= x_1 + \frac{\mu(1 - \mu - x_1)}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} - K \left(\frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \nu} \right)^3 (x_1 + \mu) \\ V_{x_2} &= x_2 - \frac{\mu x_2}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} - K \left(\frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \nu} \right)^3 x_2 \\ V_{x_3} &= x_3 - \frac{\mu x_3}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} - K \left(\frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \nu} \right)^3 x_3 \end{aligned}$$

Portanto, os pontos de equilíbrio são as soluções reais dos seguintes sistemas de equações desde que se encontrem dentro da concha esférica.

$$\begin{cases} x_1 + \frac{\mu(1 - \mu - x_1)}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_1^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} - K \left(\frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \nu} \right)^3 (x_1 + \mu) = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{\mu(1 - \mu - x_1)}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} - K \left(\frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \nu} \right)^3 (x_1 + \mu) = 0 \\ x_2 = 0 \\ \epsilon \cos \nu + \frac{\mu}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} + K \left(\frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \nu} \right)^3 = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{\mu(1 - \mu - x_1)}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} - K \left(\frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \nu} \right)^3 (x_1 + \mu) = 0 \\ 1 - \frac{\mu}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} - K \left(\frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \nu} \right)^3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{\mu(1 - \mu - x_1)}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} - K \left(\frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \nu} \right)^3 (x_1 + \mu) = 0 \\ 1 - \frac{\mu}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} - K \left(\frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \nu} \right)^3 = 0 \\ \epsilon \cos \nu + \frac{\mu}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} + K \left(\frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \nu} \right)^3 = 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

3.2.1 Demonstrações dos Teoremas A e B

Teorema A (Robe). *O ponto $p_0 = (-\mu, 0, 0)$ é um ponto de equilíbrio do problema de Robe para todo valor de ϵ .*

Demonstração: De fato, note que o ponto $(-\mu, 0, 0)$ satisfaz as equações (3.29) para qualquer valor de ϵ , pois

$$V_{x_1}(-\mu, 0, 0) = V_{x_2}(-\mu, 0, 0) = V_{x_3}(-\mu, 0, 0) - (1 + \epsilon \cos \nu)0 = 0$$

Portanto, $p_0 = (-\mu, 0, 0)$ é um equilíbrio do problema de Robe para todo valor de μ . $\square$

Teorema B (Hallan e Rana). *O problema de Robe apresenta as seguintes soluções de equilíbrios:*

1. *O ponto $p_0 = (-\mu, 0, 0)$ para quaisquer valores de K e ϵ ;*
2. *Um segundo ponto $p_1 = (x_0, 0, 0)$ quando $K > 1$ e $\epsilon = 0$;*
3. *Dois pontos formando triângulos com o centro da esfera e o segundo primário no plano $x_1 - x_3$ equidistantes do eixo x_1 , quando $K < 0$, $K + \mu > 0$ e $\epsilon = 0$;*
4. *Uma infinidade de pontos da circunferência de raio 1, centrada no segundo primário, e que esteja dentro da casca esférica, no caso em que $K = 1 - \mu$ e $\epsilon = 0$.*

Demonstração: Note inicialmente que sistema de equações (3.30) equivale a;

$$x_1 + \frac{\mu}{(1 - \mu - x_1)^2} - K \left(\frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \nu} \right)^3 (x_1 + \mu) = 0 \quad (3.34)$$

A demonstração do teorema segue das afirmações abaixo:

1. Se $K \neq 0$ e $\epsilon \neq 0$, $p_0 = (-\mu, 0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio de (3.34).

De fato, (3.34) é satisfeita para todos valores de ν se e somente se,

$$x_1 + \frac{\mu}{(1 - \mu - x_1)^2} = 0 \text{ e } x_1 + \mu = 0 \Rightarrow x_1 = -\mu. \text{ Logo } (-\mu, 0, 0) \text{ é o único ponto de equilíbrio.} \quad \square$$

2. Se $K = 0$, então $p_0 = (-\mu, 0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio de (3.34) para todo valor de ϵ

De fato, a equação (3.34) se reduz a

$$x_1 + \frac{\mu}{(1 - \mu - x_1)^2} = 0 \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (1 - \mu - x_1)^2 x_1 + \mu = 0 \\ &\Rightarrow [(1 - \mu)^2 - (1 - 2\mu)x_1 + x_1^2] x_1 + \mu = 0 \\ &\Rightarrow (1 - \mu)^2 x_1 - 2(1 - \mu)x_1^2 + x_1^3 + \mu = 0 \\ &\Rightarrow x_1 - 2\mu x_1 + \mu^2 x_1 - 2x_1^2 + 2\mu x_1^2 + x_1^3 + \mu = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 + \mu) - 2x_1(\mu + x_1) + x_1\mu(\mu + x_1) + x_1^2(\mu + x_1) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 + \mu)[x_1^2 + \mu x_1 - 2x_1] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{logo } x_1 + \mu = 0 \Rightarrow x_1 = -\mu.$$

Para concluir a demonstração basta mostrar que nenhuma raiz da equação

$$x_1^2 + \mu x_1 - 2x_1 = 0$$

satisfaz a equação (3.35). De fato,

$$x_1^2 + \mu x_1 - 2x_1 = 0 \Rightarrow (\mu + x_1 - 2)x_1 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ e } x_1 = 2 - \mu$$

substituindo esses valores em (3.35) chegamos a um absurdo. Logo $p_0 = (-\mu, 0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio. $\square$

3. Se $K \neq 0$ e $\epsilon = 0$ então $p_0 = (-\mu, 0, 0)$ é ponto de equilíbrio. Além disso, para $K > 1$ existe um segundo ponto de equilíbrio.

seja $K \neq 0$ e $\epsilon = 0$ então (3.34) equivale a

$$x_1 + \frac{\mu}{(1 - \mu - x_1)^2} - K(x_1 + \mu) = 0$$

Dai temos

$$\begin{aligned}
0 &= x_1 (1 - \mu - x_1)^2 + \mu - K (x_1 + \mu) (1 - \mu - x_1)^2 \\
&= x_1 [(1 - \mu)^2 - 2(1 - \mu)x_1 + x_1^2] + \mu - K(x_1 + \mu) [(1 - \mu)^2 - 2(1 - \mu)x_1 + x_1^2] \\
&= (x_1 + \mu) [1 - 2x_1 + x_1\mu + x_1^2 - K + 2K\mu - K\mu^2 + 2Kx_1 - Kx_1^2]
\end{aligned}$$

segue que

$$(x_1 + \mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\mu$$

e

$$(1 - K)x_1^2 + (-2 + \mu + 2K - 2\mu K)x_1 + 1 - K + 2K\mu - K\mu^2 = 0$$

A equação acima é do segundo grau na variável x_1 . Assim

$$\begin{aligned}
\Delta &= (-2 + \mu + 2K - 2\mu K)^2 - 4(1 - K) [1 - K + 2\mu K - K\mu^2] \\
&= (\mu - 2)^2 + 2(\mu - 2)2K(1 - \mu) + 4K^2(1 - \mu)^2 \\
&\quad - 4(1 - K)(1 - K) [1 - K + 2K\mu - K\mu^2] \\
&= \mu^2 - 4\mu + 4 + 4K\mu - 4K\mu^2 - 8K + 8K\mu + 4K^2 - 8K^2 - 8K^2\mu + 4K^2\mu^2 \\
&\quad - 4 + 8K - 4K^2 - 8K\mu + 4\mu^2 K + 8K^2\mu - 4K^2\mu^2 \\
&= -4\mu + 4K\mu + \mu^2 \\
&= \mu(-4 + 4K + \mu)
\end{aligned}$$

segue que,

$$x_1 = -\frac{(-2 + \mu + 2K - 2\mu K) \pm \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}}{2(1 - K)}$$

dai temos,

$$\begin{aligned}
x_0 &= -\frac{(-2 + \mu + 2K - 2\mu K) + \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}}{2(1 - K)} \\
&= \frac{(-2 + \mu + 2K - 2\mu K) - \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}}{2(K - 1)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
x_{00} &= -\frac{(-2 + \mu + 2K - 2\mu K) - \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}}{2(1 - K)} \\
&= \frac{(-2 + \mu + 2K - 2\mu K) + \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}}{2(K - 1)}
\end{aligned}$$

Logo temos duas soluções as quais são reais se e somente se, $\Delta \geq 0$ ou seja

$$\mu(-4 + 4K + \mu) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad K \geq 1 - \frac{\mu}{4}.$$

Devemos verificar se as soluções não viola a condição $x_1 + \mu < 1$ ou seja, não estão fora da casca esférica. Para isso prosseguimos da seguinte forma

$$\begin{aligned} x_1 + \mu - 1 &= \frac{(-2 + \mu + 2K - 2\mu K) \pm \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}}{2(K - 1)} + \mu - 1 \\ &= \frac{(-2 + \mu + 2K - 2\mu K) \pm \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)} - 2K + 2K\mu - 2\mu + 2}{2(K - 1)} \\ &= \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}}{2(K - 1)} \end{aligned}$$

assim

$$\text{i)} \quad \frac{-\mu + \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}}{2(K - 1)} \geq 0 \text{ para todo } K \neq 1$$

$$\text{ii)} \quad \frac{-\mu - \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}}{2(K - 1)} = \frac{-(\mu + \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)})}{2(K - 1)}$$

como $\mu + \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}$ é sempre positivo, desde que $K \geq 1 - \frac{\mu}{4}$ temos

$$\frac{-\mu - \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}}{2(K - 1)} = \frac{-(\mu + \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)})}{2(K - 1)} \geq 0 \quad \text{se } K < 1 \quad \text{e}$$

$$\frac{-\mu - \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}}{2(K - 1)} = \frac{-(\mu + \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)})}{2(K - 1)} < 0 \quad \text{se } K > 1$$

Em suma temos que se $1 - \frac{\mu}{4} \leq K \leq 1$ as soluções estão fora da casca esférica e quando $K > 1$ a seguinte solução está dentro da casca esférica e portanto é considerada

$$x_0 = \frac{(-2 + \mu + 2K - 2\mu K) - \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}}{2(K - 1)}$$

□

4. Afirmação: Os sistemas (3.31) e (3.32) tem solução apenas se $\Gamma \neq 0$ e $\epsilon = 0$.

Suponha que $K = 0$ então (3.31) fica

$$\begin{cases} x_1 + \frac{\mu(1 - \mu - x_1)}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} = 0 \\ x_2 = 0 \\ \epsilon \cos \nu + \frac{\mu}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} = 0 \end{cases}$$

Note que a terceira equação não possui solução qualquer que seja o valor de ϵ . Portanto, para que o sistema (3.31) possua solução, é necessário que $K \neq 0$. Assim a terceira equação de (3.31) é

$$\epsilon \cos \nu + \frac{\mu}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} + K \left(\frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \nu} \right)^3 = 0$$

que não tem solução caso ϵ seja diferente de zero, pois $\cos \nu$ não é constante. Logo é necessário que $\epsilon = 0$. De forma análoga se faz para o sistema (3.32).

5. Segue da Afirmação que podemos escrever (3.31) da seguinte forma

$$\begin{cases} x_1 + \frac{\mu(1 - \mu - x_1)}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} - K(x_1 + \mu) = 0 \\ \frac{\mu}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} + K = 0 \end{cases}$$

Isolando a segunda equação e substituindo na primeira temos

$$\begin{aligned} x_1 - K(1 - \mu - x_1) - K(x_1 + \mu) &= 0 \Rightarrow \\ x_1 - K + K\mu + Kx_1 - Kx_1 - K\mu &= 0 \Rightarrow \\ x_1 &= K \end{aligned}$$

Substituindo $x_1 = K$ na segunda equação do sistema acima obtemos

$$\begin{aligned} \mu + K[(1 - \mu - K)^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}} &= 0 \Rightarrow \\ [(1 - \mu - K)^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}} &= -\frac{\mu}{K} \Rightarrow \\ (1 - \mu - x)^2 + x_3^2 &= \left(-\frac{\mu}{K}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \\ x_3^2 &= \left(-\frac{\mu}{K}\right)^{\frac{2}{3}} - (1 - \mu - x)^2 \Rightarrow \\ x_3 &= \pm \sqrt{\left(-\frac{\mu}{K}\right)^{\frac{2}{3}} - (1 - \mu - x)^2} \end{aligned}$$

Os pontos triangulares são dados por

$$x_1 = K, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \pm \sqrt{b^2 - a^2},$$

onde

$$a = 1 - \mu - K, \quad b = \left(-\frac{\mu}{K}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Quando $K + \mu = 0$ o sistema tem apenas a solução $p_0 = (-\mu, 0, 0)$, e quando $K + \mu < 0$ o sistema não possui solução.

6. O sistema (3.32) tem como solução cada ponto da circunferência

$$(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 = 1 \text{ quando } K = 1 - \mu$$

Pela Afirmação o sistema (3.32) equivale a

$$\begin{cases} x_1 + \frac{\mu(1 - \mu - x_1)}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2]^{\frac{3}{2}}} - K(x_1 + \mu) = 0 \\ 1 - \frac{\mu}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2]^{\frac{3}{2}}} - K = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação temos

$$\frac{\mu}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2]^{\frac{3}{2}}} = 1 - K, \text{ substituindo na primeira equação obtemos}$$

$$x_1 + (1 - K)(1 - \mu - x_1) - Kx_1 - K\mu = 0 \Rightarrow K = 1 - \mu$$

Substituindo $K = 1 - \mu$ na segunda equação obtemos

$$\begin{aligned} [(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2]^{\frac{3}{2}} \mu - \mu &= 0 \Rightarrow \\ [(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2]^{\frac{3}{2}} &= 1 \Rightarrow \\ (1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 &= 1. \end{aligned}$$

Por fim o sistema (3.33) não possui solução seja qual for o valor de K e ϵ , e portanto a demonstração do **Teorema B** está concluída $\square$

3.3 Estabilidade

A partir do **Teorema B** conclui-se que com exceção do equilíbrio $p_0 = (-\mu, 0, 0)$, o qual existe para quaisquer valores de K e ϵ , outros equilíbrios existem apenas se $\epsilon = 0$. Nessa seção vamos abordar a questão da estabilidade linear consideramos apenas o caso circular, isto é, quando $\epsilon = 0$, e analisamos a estabilidade linear de todos os possíveis equilíbrios. Fazendo $\epsilon = 0$, o hamiltoniano do problema de Robe é dado por

$$H = H(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + y_1x_2 - x_1y_2 - U \quad (3.36)$$

onde

$$U = \frac{\mu}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{K}{2} [(x_1 + \mu)^2 + x_2^2 + x_3^2] \quad (3.37)$$

É importante ressaltar que a função Hamiltoniana definida em (3.36) não depende da variável independente ν , ou seja o sistema Hamiltoniano nesse caso é autônomo.

Seja (ξ_1, ξ_2, ξ_3) um dos pontos de equilíbrio do problema de Robe. A fim de estudar o movimento próximo deste ponto de equilíbrio, introduzimos as novas coordenadas $(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3)$ dadas por

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 - \xi_1 & X_2 &= x_2 - \xi_2 & X_3 &= x_3 - \xi_3 \\ Y_1 &= y_1 + \xi_1 & Y_2 &= y_2 - \xi_2 & Y_3 &= y_3 - \xi_3 \end{aligned}$$

Essa mudança de coordenadas é simplética e portanto (pela proposição (1.4.11)) preserva a estrutura do Hamiltoniano (3.36). Fazendo a expansão de H em série de Taylor até a segunda ordem em torno do ponto de equilíbrio (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , obtemos

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2) + X_2Y_1 - X_1Y_2 - \frac{1}{2}(U_{x_1x_1}X_1^2 + 2U_{x_1x_2}X_1X_2 + 2U_{x_1x_3}X_1X_3 \\ &+ U_{x_2x_2}X_2^2 + 2U_{x_2x_3}X_2X_3 + U_{x_3x_3}X_3^2) + \dots \end{aligned}$$

Na expansão foi omitido o termo constante $H(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ por não contribuir na formação correspondente de equações diferenciais e $\nabla H(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ pois (ξ_1, ξ_2, ξ_3) é um ponto crítico de H . As derivadas parciais de H são

$$\begin{aligned} H_{X_1X_1} &= -U_{x_1x_1}, & H_{X_1X_2} &= -U_{x_1x_2}, & H_{X_1X_3} &= -U_{x_1x_3}, & H_{X_1Y_1} &= 0, & H_{X_1Y_2} &= -1 \\ H_{X_1Y_3} &= 0 \\ H_{X_2X_1} &= -U_{x_2x_1}, & H_{X_2X_2} &= -U_{x_2x_2}, & H_{X_2X_3} &= -U_{x_2x_3}, & H_{X_2Y_1} &= 1, & H_{X_2Y_2} &= 0, \\ H_{X_2Y_3} &= 0 \\ H_{X_3X_1} &= -U_{x_3x_1}, & H_{X_3X_2} &= -U_{x_3x_2}, & H_{X_3X_3} &= -U_{x_3x_3}, & H_{X_3Y_1} &= 0, & H_{X_3Y_2} &= 0, \\ H_{X_3Y_3} &= 0 \\ H_{Y_1X_1} &= 0, & H_{Y_1X_2} &= 1, & H_{Y_1X_3} &= 0, & H_{Y_1Y_1} &= 1, & H_{Y_1Y_2} &= 0, & H_{Y_1Y_3} &= 0 \\ H_{Y_2X_1} &= -1, & H_{Y_2X_2} &= 0, & H_{Y_2X_3} &= 0, & H_{Y_2Y_1} &= 0, & H_{Y_2Y_2} &= 1, & H_{Y_2Y_3} &= 0 \\ H_{Y_3X_1} &= 0, & H_{Y_3X_2} &= 0, & H_{Y_3X_3} &= 0, & H_{Y_3Y_1} &= 0, & H_{Y_3Y_2} &= 0, & H_{Y_3Y_3} &= 1 \end{aligned}$$

Segue que a matriz Hessiana de H é dada por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -U_{x_1x_1} & -U_{x_1x_2} & -U_{x_1x_3} & 0 & -1 & 0 \\ -U_{x_2x_1} & -U_{x_2x_2} & -U_{x_2x_3} & 1 & 0 & 0 \\ -U_{x_3x_1} & -U_{x_3x_2} & -U_{x_3x_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

e a matriz Hamiltoniana é dada por

$$\mathbf{A} = \mathbf{JS} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ U_{x_1x_1} & U_{x_1x_2} & U_{x_1x_3} & 0 & 1 & 0 \\ U_{x_2x_1} & U_{x_2x_2} & U_{x_2x_3} & -1 & 0 & 0 \\ U_{x_3x_1} & U_{x_3x_2} & U_{x_3x_3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

onde

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é a matriz simplética canônica de ordem seis.

Logo o sistema Hamiltoniano linear autônomo é dado por

$$\frac{d}{d\nu} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ U_{x_1x_1} & U_{x_1x_2} & U_{x_1x_3} & 0 & 1 & 0 \\ U_{x_2x_1} & U_{x_2x_2} & U_{x_2x_3} & -1 & 0 & 0 \\ U_{x_3x_1} & U_{x_3x_2} & U_{x_3x_3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Onde

$$U_{x_1x_1} = -\Gamma - \frac{\mu}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\mu(1 - \mu - x_1)^2}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{5}{2}}} \quad (3.41)$$

$$U_{x_1x_2} = U_{x_2x_1} = -\frac{3\mu(1 - \mu - x_1)x_2}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{5}{2}}} \quad (3.42)$$

$$U_{x_1x_3} = U_{x_3x_1} = -\frac{3\mu(1 - \mu - x_1)x_3}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{5}{2}}} \quad (3.43)$$

$$U_{x_2x_2} = -K - \frac{\mu}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\mu x_2^2}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{5}{2}}} \quad (3.44)$$

$$U_{x_2x_3} = U_{x_3x_2} = \frac{3\mu x_2x_3}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{5}{2}}} \quad (3.45)$$

$$U_{x_3x_3} = -K - \frac{\mu}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\mu x_3^2}{[(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{5}{2}}} \quad (3.46)$$

3.3.1 Demonstração dos Teoremas C e D

Teorema C (Robe). *O ponto $p_0 = (-\mu, 0, 0)$ é estável na região do plano $\mu - K$ definida pelas desigualdades*

- $K + \mu > 0$
- $2 - \mu + 2K > 0$;
- $(1 + 2\mu - K)(1 - \mu - K) > 0$;
- $9\mu^2 - 8\mu + 16K > 0$.

Demonstração: De fato, no ponto $p_0 = (-\mu, 0, 0)$ temos:

$$U_{x_1x_1} = 2\mu - K, \quad U_{x_2x_2} = -\mu - K \quad U_{x_3x_3} = -\mu - K \quad U_{x_1x_2} = U_{x_1x_3} = U_{x_2x_3} = 0$$

Substituindo esses valores em 3.39 obtemos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2\mu - K & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\mu - K & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu - K & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ -a & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

onde

$$a = 2\mu - k \quad e \quad b = -\mu - k$$

O polinômio Característico de $\mathbf{A}$ é dado por

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \\
&= (-1)^{3+3} \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 & 0 \\ -a & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -b & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} + (-1)^{3+6} (-1) \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ -a & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -b & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & -b & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \lambda \left(\lambda (-1)^{5+5} \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 \\ -a & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -b & 1 & \lambda \end{vmatrix} \right) + (-1)^{5+3} (-b) \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 \\ -a & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -b & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2 [\lambda^4 + (2 - a - b)\lambda^2 + a + ab + b + 1] - b[\lambda^4 + (2 - a - b)\lambda^2 + a + ab + b + 1] \\
&= [\lambda^4 + (2 - a - b)\lambda^2 + a + ab + b + 1](\lambda^2 - b) \\
&= [\lambda^4 + (2 - \mu + 2K)\lambda^2 + (\mu + K - 1)(K - 2\mu - 1)](\lambda^2 + K + \mu)
\end{aligned}$$

Para garantir a estabilidade linear em p_0 , o teorema (1.5.2) exige que as raízes de $p(\lambda)$ sejam imaginárias puras. Fazendo $p(\lambda) = 0$ temos

$$[\lambda^4 + (2 - \mu + 2K)\lambda^2 + (\mu + K - 1)(K - 2\mu - 1)](\lambda^2 + K + \mu) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + K + \mu = 0 \quad (3.48)$$

$$\lambda^4 + (2 - \mu + 2K)\lambda^2 + (\mu + K - 1)(K - 2\mu - 1) = 0 \quad (3.49)$$

Pela equação 3.48 temos $\lambda = \pm \sqrt{-(K + \mu)}$ e para termos raízes imaginárias puras devemos exigir que $\mu + K$ seja positivo, isto é, $K > -\mu$. Portanto $K > -\mu$ é a primeira condição para a estabilidade de p_0 .

Fazendo $\gamma = \lambda^2$ em 3.49 temos

$$\gamma^2 + (2 - \mu + 2K)\gamma + (\mu + K - 1)(K - 2\mu - 1)$$

$$\Delta = (2 - \mu + 2K)^2 - 4(\mu + K - 1)(K - 2\mu - 1) = 9\mu^2 - 8\mu + 16K$$

segue que

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{-(2 - \mu + 2K) \pm \sqrt{\Delta}}{2} \Rightarrow \\
\lambda^2 &= \frac{\mu - 2K - 2 \pm \sqrt{\Delta}}{2} \Rightarrow 2\Delta = \mu - 2K - 2 \pm \sqrt{\Delta}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2 - \mu + 2K \quad e \quad \lambda_1^2 \lambda_2^2 = (1 + 2\mu - K)(1 - \mu - K)$$

Para que o equilíbrio ρ_0 seja estável, devemos ter λ_1^2 e λ_2^2 reais e negativos, ou seja, a região de estabilidade linear do equilíbrio $p_0 = (-\mu, 0, 0)$ no plano $\mu - K$ é definida pelas desigualdades

- $K + \mu > 0$;
- $2 - \mu + 2K > 0$;
- $(1 + 2\mu - K)(1 - \mu - K) > 0$;
- $9\mu^2 - 8\mu + 16K > 0$.

□

A figura abaixo esboça essa região de estabilidade (regiões **I** e **II**).

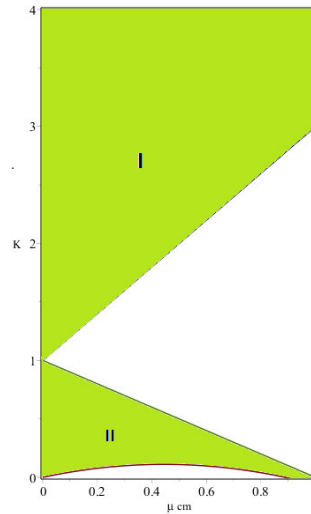


Figura 3.3: Regiões de Estabilidade

Teorema D (Hallan e Rana). *O ponto de equilíbrio $p_1 = (x_0, 0, 0)$ é estável apenas na região do plano $\mu - K$ definida pela desigualdade*

$$16\mu(K - 1)^2 < \left(\mu + \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)} \right)^3.$$

Demonstração: No ponto $(x_2, 0, 0)$ temos:

$$U_{x_1 x_1} = -K + \frac{2\mu}{(1 - \mu - x_{10})^3}, \quad U_{x_2 x_2} = -K - \frac{\mu}{(1 - \mu - x_{10})^3}, \quad U_{x_3 x_3} = -K - \frac{\mu}{(1 - \mu - x_{10})^3}$$

$$U_{x_1 x_2} = V_{x_1 x_3} = V_{x_2 x_3} = 0$$

Onde
$$x_{10} = \frac{-2 + \mu + 2K - 2K\mu - \sqrt{(-4 + 4K + \mu)}}{2(K - 1)}$$

$$\begin{aligned} (1 - \mu - x_{10}) &= 1 - \mu + \frac{2 - \mu - 2K + 2K\mu + \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}}{2(K - 1)} \\ &= \frac{\mu + \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}}{2(K - 1)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(1 - \mu - x_{10})^3} = \frac{8(K - 1)^3}{\left(\mu + \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}\right)^3}$$

segue que

$$U_{x_1 x_1} = -K + 2 \frac{8\mu(K - 1)^3}{\left(\mu + \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}\right)^3} = -K + 2L$$

$$U_{x_2 x_2} = -K - \frac{8\mu(K - 1)^3}{\left(\mu + \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}\right)^3} = -K - L$$

$$U_{x_3 x_3} = -K - \frac{8\mu(K - 1)^3}{\left(\mu + \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}\right)^3} = -K - L$$

com
$$L = \frac{8\mu(K - 1)^3}{\left(\mu + \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}\right)^3}$$

Substituindo essas expressões em 3.39 obtemos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2L - K & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -L - K & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L - K & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ -a & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

onde

$$a = 2L - K \quad e \quad b = -L - k$$

O polinômio característico de $\mathbf{A}$ é dado por

$$\begin{aligned}
 p(\lambda) &= \det(\lambda I - JG) \\
 &= (-1)^{3+3} \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 & 0 \\ -a & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -b & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} + (-1)^{3+6}(-1) \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ -a & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -b & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & -b & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \lambda \left(\lambda(-1)^{5+5} \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 \\ -a & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -b & 1 & \lambda \end{vmatrix} \right) + (-1)^{5+3}(-b) \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 \\ -a & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -b & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\
 &= \lambda^2 [\lambda^4 + (2 - a - b)\lambda^2 + a + ab + b + 1] - b[\lambda^4 + (2 - a - b)\lambda^2 + a + ab + b + 1] \\
 &= [\lambda^4 + (2 - a - b)\lambda^2 + a + ab + b + 1](\lambda^2 - b)
 \end{aligned}$$

Novamente pelo teorema (1.5.2) devemos exigir que as raízes de $p(\lambda)$ sejam imaginárias puras.

De $(\lambda^2 + K + L) = 0$ obtemos $K + L > 0$, e isso mostra que o movimento paralelo ao eixo z é sempre estável. Podemos portanto restringir nosso estudo à equação

$$\lambda^4 + (2K - L + 2)\lambda^2 + (K - 2L - 1)(K + L - 1) = 0$$

Resolvendo para λ^2 temos as raízes

$$\lambda_1^2 = \frac{-(2K - L + 2) + \sqrt{\Delta}}{2} \quad e \quad \lambda_2^2 = \frac{-(2K - L + 2) - \sqrt{\Delta}}{2}$$

onde $\Delta = 9L^2 - 8L + 16K$.

Segue que

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = -(2K - L + 2) \quad e \quad \lambda_1^2 \lambda_2^2 = (K - 2L - 1)(K + L - 1)$$

Para que o equilíbrio seja estável, devemos ter λ_1^2 e λ_2^2 reais e negativos, ou seja;

- $9L^2 - 8L + 16K > 0$;
- $L - 2K - 2 < 0$;
- $(K - 2L - 1)(K + L - 1) > 0$.

Observe que o primeiro item é sempre verdadeiro, visto que, a expressão é uma função do segundo grau em L , cujo o discriminante é menor que zero.

De fato, $\Delta = 64 - 576K < 0$ visto que $K > 1$. Como $9 > 0$, temos uma parábola com concavidade voltada para cima a qual não toca o eixo real. Portanto

$$9L^2 - 8L + 16K > 0.$$

Para verificar o terceiro item, partimos do fato que $K > 1$ e $L > 0$ donde $K + L > 1$ ou $K + L - 1 > 0$.

Logo para que $(K - 2L - 1)(K + L - 1) > 0$ devemos exigir que $K + 2L - 1 > 0$. Note que essa condição implica no segundo item, pois $L - 2K - 2 < 0 \Leftrightarrow -(L - 2K - 2 > 0)$ mas $-(L - 2K - 2) = 2K - L + 2 > K - 2L - 1 > 0$. Portanto tal equilíbrio é estável se, e somente se,

$$K - 2L - 1 > 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2L < K - 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{16\mu(K - 1)^3}{\left(\mu + \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}\right)^3} < (K - 1) \\ &\Leftrightarrow 16\mu(K - 1)^3 < (K - 1) \left(\mu + \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}\right)^3 \\ &\Leftrightarrow 16\mu(K - 1)^2 < \left(\mu + \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)}\right)^3 \end{aligned}$$

□

3.3.2 Demonstração das Proposições A e B

Proposição A (Hallan e Rana). *Os pontos de equilíbrios triangulares são linearmente instáveis.*

Demonstração: Nos pontos de equilíbrio triangulares, $(K, 0, \sqrt{b^2 - a^2})$, onde

$$a = 1 - \mu - K, \quad b = \left(-\frac{\mu}{K}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad K < 0 \quad e \quad K + \mu > 0,$$

segue que

$$\begin{aligned} U_{x_1x_1} &= -\frac{3a^2K}{b^2} & U_{x_2x_2} &= 1 & U_{x_3x_3} &= \frac{3K(b^2 - a^2)}{b^2} & U_{x_1x_3} &= \pm \frac{3aK\sqrt{b^2 - a^2}}{b^2} \\ U_{x_1x_2} &= U_{x_2x_3} & &= 0 \end{aligned}$$

Substituindo essas expressões em 3.39 obtemos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3a^2K}{b^2} & 0 & \pm \frac{3aK\sqrt{b^2-a^2}}{b^2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \pm \frac{3aK\sqrt{b^2-a^2}}{b^2} & 0 & \frac{3K(b^2-a^2)}{b^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ -\hat{a} & 0 & -\hat{b} & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \lambda & 0 \\ -\hat{b} & 0 & -\hat{c} & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

onde

$$\hat{a} = -\frac{3a^2K}{b^2}, \quad \hat{b} = \pm \frac{3aK\sqrt{b^2-a^2}}{b^2} \quad e \quad \hat{c} = \frac{3K(b^2-a^2)}{b^2}$$

O polinômio característico de $\mathbf{A}$ é dado por

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ &= (-1)^{3+3} \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 & 0 \\ -\hat{a} & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \lambda & 0 \\ -\hat{b} & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} + (-1)^{3+6} (-1) \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ -\hat{a} & 0 & -\hat{b} & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \lambda \\ -\hat{b} & 0 & -\hat{c} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 \\ -\hat{a} & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} - \hat{b} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\hat{b} & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} - \hat{c} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 \\ -\hat{a} & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^6 + (1 - \hat{a} - \hat{c})\lambda^4 + (2 + 2\hat{a} - \hat{a}\hat{c} - \hat{b}^2 + \hat{c})\lambda^2 + 2\hat{b}^2 + 2\hat{a}\hat{c} + 2\hat{c} \\ &= \lambda^6 + (3K + 2)\lambda^4 + \left(\frac{3(b^2 - 3a^2)K + 2b^2}{b^2} \right) \lambda^2 + \frac{6K}{b^2}(b^2 - a^2) \end{aligned}$$

Note que

$$p(0) = \frac{6K}{b^2}(b^2 - a^2) = 6K \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] < 0 \quad \text{pois} \quad K < 0 \quad e \quad 1 - \left(\frac{a}{b} \right)^2 > 0.$$

Por outro lado temos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\lambda^6 + (3K + 2)\lambda^4 + \left(\frac{3(2b^2 - 3a^2)K + b^2}{b^2} \right) \lambda^2 + \frac{3K}{b^2}(b^2 - a^2) \right] = \infty$$

Portanto existe pelo menos uma raiz real. Pelo teorema (1.5.2) segue o resultado. $\square$

Proposição B (Hallan e Rana). *Os pontos circulares são instáveis.*

Demonstração: Para os pontos circulares devemos ter $K = 1 - \mu$. Tais pontos estão na circunferência unitária de raio 1 centrada no ponto $(1 - \mu, 0, 0)$ no plano $x_3 = 0$, ou seja, satisfazem

$$(1 - \mu - x_1)^2 + x_2^2 = 1$$

Escrevendo $x_1 = \cos \theta$ e $x_2 = \sin \theta$, os pontos da circunferência assume a seguinte forma $(1 - \mu - \cos \theta, \sin \theta, 0)$ segue que

$$U_{x_1 x_1} = -1 + 3\mu \cos^2 \theta \quad U_{x_2 x_2} = -1 + 3\mu \sin^2 \theta \quad U_{x_1 x_2} = -3\mu \sin \theta \cos \theta \quad U_{x_3 x_3} = -1$$

$$U_{x_1 x_3} = U_{x_2 x_3} = 0$$

Substituindo essas expressões em 3.39 obtemos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 + 3\mu \cos^2 \theta & -3\mu \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3\mu \sin \theta \cos \theta & -1 + 3\mu \sin^2 \theta & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ -a & -b & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ -b & -c & 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

onde

$$a = -1 + 3\mu \cos^2 \theta, \quad b = -3\mu \sin \theta \cos \theta \quad e \quad c = -1 + 3\mu \sin^2 \theta$$

Segue que o polinômio característico é dado por

$$\begin{aligned}
 p(\lambda) &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \\
 &= (-1)^{6+3}(1) \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -a & -b & \lambda & -1 & 0 \\ -b & -c & 1 & \lambda & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{6+6}\lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ -a & -b & 0 & \lambda & -1 \\ -b & -c & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 \\ -a & -b & \lambda & -1 \\ -b & -c & 1 & \lambda \end{vmatrix} + \lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 \\ -a & -b & \lambda & -1 \\ -b & -c & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\
 &= \lambda^6 + (3 - a - c)\lambda^4 + (3 - b^2 - ac)\lambda^2 + a + c + ac - b^2 + 1 \\
 &= \lambda^6 + (5 - 3\mu)\lambda^4 + (4 - 3\mu)\lambda^2 \\
 &= \lambda^2 [\lambda^2(5 - 3\mu) + (4 - 3\mu)]
 \end{aligned}$$

Note que o polinômio característico tem dois autovalores iguais a zero, e portanto possui um bloco da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

o qual da origem as soluções $x(t) = k_1 v_1 + (tK_1 + K_2)v_2 \longrightarrow \infty$ quando $t \longrightarrow \infty$. $\square$

Conclusão

A parte principal desse trabalho, ou seja, a que se trata do problema de Robe, teve como referência principal o artigo ([2]). Foi constatado que no problema restrito de três corpos de Robe, o ponto $(-\mu, 0, 0)$ localizado no centro do primeiro primário, é um ponto de equilíbrio para todos os valores dos parâmetros K, μ e ϵ . Além disso, outros pontos de equilíbrios existe somente quando $K \neq 0$ e $\epsilon = 0$, que é quando o segundo primário se move em torno do primeiro em órbita circular. Quando $K > 1$, há mais um ponto de equilíbrio $(x_{10}, 0, 0)$ colinear com o centro da casca esférica e o segundo primário. Quando K e μ satisfazem a igualdade $K + \mu = 1$, há um número infinito de pontos de equilíbrio no plano $x_1 - x_2$ sobre um círculo de raio 1 e centro $1 - \mu, 0, 0$ no segundo primário, desde que estejam dentro da casca esférica. Quando $K < 0$ e $K + \mu > 0$, existem mais dois pontos de equilíbrio, os quais se encontram no plano $x_1 - x_3$ formando triângulos com o centro da casca esférica e o segundo primário.

Quanto a estabilidade constatamos que quando a excentricidade é zero ($\epsilon = 0$), isto é, quando o movimento é circular, o sistema hamiltoniano é autônomo, e a questão da estabilidade linear foi resolvida, a saber, o ponto $p_0 = (-\mu, 0, 0)$ é estável para certos valores de K e μ , os pontos circulares e triangulares são sempre estáveis, e o ponto de equilíbrio colinear com o centro da casca e o segundo primário, é estável quando μ e K satisfaz a desigualdade

$$16\mu(K - 1)^2 < \left(\mu + \sqrt{\mu(-4 + 4K + \mu)} \right)^3.$$

Quando tomamos a excentricidade perto de zero, mas diferente de zero, perdemos o caráter autônomo da equação, e o estudo da estabilidade linear do equilíbrio $p_0 = (-\mu, 0, 0)$ torna-se mais complicado. Porém se considerarmos como tempo a anomalia verdadeira, o Hamiltoniano é periódico e portanto é possível estudar a estabilidade do equilíbrio estratificando o espaço dos parâmetros μ e K em regiões de estabilidade e instabilidade.

A estabilidade nesse caso (Estabilidade paramétrica) foi discutida em [7] (2016) por Lucas Valeriano. Recentemente Dieter Schmidt e Lucas Valeriano [8] (2016) estudaram a estabilidade não linear do ponto de equilíbrio localizado no centro do recipiente no problema circular planar como proposto por Robe, para isso eles colocaram o Hamiltoniano do problema em sua forma normal e em seguida usaram os teoremas de Arnold e Markeev.

Contribuições Relevantes

- ROBE (1977) formulou o problema, mostrou a existência do ponto $(-\mu, 0, 0)$ enquanto m_2 descreve uma órbita Kepleriana em volta de m_1 e discutiu a estabilidade linear desse ponto de equilíbrio no caso circular e no caso elíptico, mas com o reservatório vazio ou as densidades de m_1 e m_3 iguais.
- HLLAN e RANA (2001) fizeram um estudo completo sobre a quantidade de equilíbrios existente no problema de Robe e apresentaram resultados sobre a estabilidade linear de tais pontos.
- CABRAL e VALERIANO (2015) deram uma formulação hamiltoniana para o problema e estudaram a estabilidade linear paramétrica no ponto $(-\mu, 0, 0)$.
- SCHMIDT e VALERIANO (2016) estudaram a estabilidade não linear do ponto $(-\mu, 0)$ no caso circular planar.

Referências

- [1] ROBE, H. A. G. *A new kind of three body problem*, Celest. Mech. Dyn. Astr. v. 16, p. 197-206, 1977.
- [2] HALLAN, P. P.; RANA N. *The existence and stability of equilibrium points in the Robe's restricted three-body problem*, Celest. Mech. Dyn. Astr. v. 79, p.145-155, 2001.
- [3] GIORDANO, C. M.; PLASTINO, A. R.; PLASTINO, A. *Robe's restricted three body-problem with drag*, Celest. Mech. Dyn. Astr. v. 66, p. 229-242, 1997.
- [4] PLASTINO, A. R.; PLASTINO A. *Robe's restricted three body-problem revisited*, Celest. Mech. Dyn. Astr. v. 61, p. 197-206, 1995.
- [5] SHRIVASTAVA, A. K.; GARAIN, D. *Effect of pertubation on the location of libration point in the Robe restricted problem of three bodies*, Celest. Mech. Dyn. Astr. v. 51, p. 67-73, 1991.
- [6] MEYER, K. R.; HALL, G. R.; OFFIN, D. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Second Edition, Springer-Verlag, 2009.
- [7] L. R. VALERIANO.; *Parametric stability in Robe's problem*, Regular and Chaotic Dynamics. v. 21, p. 126-135, 2016.
- [8] D. S. SCHMIDT.; L. R. VALERIANO.; *Nonlinear Stability of Stationary Points in the Problem of Robe*, Discrete Continuous Dynamical Systems-Series B. v.21, p. 1917-1936, 2016.
- [9] VIDAL, J.C.; CABRAL H.; *Introdução À Mecânica Celeste*, Notas de Aulas UFPE, Recife, 1999.
- [10] VIDAL, J.C.; *Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos Hamiltonianos*, Notas de Aulas UFPE, Recife, 2003.
- [11] BRAUER, Fred.; *The qualitative theory of ordinary differential equations: an introduction*, New York: W. A. Benjamin, 1969.