

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Vórtices BPS com fluxo magnético fracionário
no modelo padrão estendido**

Guillermo Lazar Mentech

ORIENTADOR: RODOLFO ALVÁN CASANA SIFUENTES

SÃO LUÍS, ABRIL DE 2013

Vórtices BPS com fluxo magnético fracionário no modelo padrão estendido

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

Orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes
Doutor em Física - UFMA

SÃO LUÍS, ABRIL DE 2013

Mentech, Guillermo Lazar.

Vórtices BPS com fluxo magnético fracionário

no modelo padrão estendido./ Guillermo Lazar Mentech - 2013
68 f.

Impresso por computador.

Orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós Graduação em Física
Universidade Federal do Maranhão.

1. Simetria de Lorentz 2. Defeitos Topológicos 3. Vórtices. I Título

CDU 532.527

GUILLERMO LAZAR MENTECH

Vórtices BPS com fluxo magnético fracionário no modelo padrão estendido

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

BANCA EXAMINADORA

Rodolfo Alván Casana Sifuentes (*Orientador*)
Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Júlio Marny Hoff da Silva
Doutor em Física - UNESP-Guaratinguetá

Adalto Rodrigues Gomes dos Santos
Doutor em Física - Instituto Federal do Maranhão (IFMA)

a Daniel, meu filho

Agradecimentos

À minha esposa e ao meu filho pelo carinho.

À minha família, em particular a Dona Aldenir pelo apoio incondicional de sempre.

Ao professor Rodolfo Casana, pela dedicação, atenção, comprometimento, amizade, sem ele este trabalho não teria sido possível.

Ao professor Manoel Messias, coordenador da Pós-Graduação em Física, pelo suporte oferecido durante o Mestrado.

Aos professores Edilberto Oliveira Silva e Carlos Eduardo da Hora Santos pelas correções.

Ao companheiro Frederico, pela força.

Ao povo brasileiro, que por meio da CAPES financiou minha bolsa de estudos.

-Quando a gente anda sempre em frente, não pode mesmo ir longe...

Trecho do livro “*O Pequeno Príncipe*”, do autor Antoine de Saint-Exupéry.

Resumo

Estudamos a existência de vórtices BPS tipo Abrikosov-Nielsen-Olesen no contexto do Modelo Padrão Estendido (MPE). Especialmente, analisamos o modelo de Maxwell-Higgs suplementado por termos de violação de Lorentz (VL) em ambos os setores. Os termos de VL no setor de Higgs são CPT-par, por outro lado, o setor de *gauge* inclui termos de VL CPT-par e CPT-ímpar. Uma consequência importante do efeito dos coeficientes de VL do setor de Higgs é a fracionalização do fluxo magnético. Além de outros efeitos, os coeficientes de VL são responsáveis por controlar a amplitude e a extensão espacial dos defeitos topológicos. O primeiro modelo estudado inclui o termo CPT-ímpar de violação de Lorentz, ou termo de Carroll-Field-Jackiw no setor de gauge. As equações BPS, após uma transformação de escala nas coordenadas e uma redefinição apropriada dos campos, coincidem com as equações BPS para o modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs. A diferença aparece na lei de Gauss, a qual contém um parâmetro dependendo dos coeficientes de VL do setor de Higgs. Quando este parâmetro é fixado no valor 1, reproduzimos a lei de Gauss do modelo de MCSH. O segundo modelo estudado contém o termo de violação de Lorentz CPT-par no setor eletromagnético. Este termo provê uma nova classe de vórtices topológicos. Neste caso os coeficientes de paridade ímpar acoplam os setores elétrico e magnético ainda no regime estacionário. Com o potencial BPS apropriado o modelo fornece vórtices BPS eletricamente carregados. Estas novas soluções para vórtices BPS também suportam inversão de campo elétrico e reversão do fluxo magnético localizada.

Palavras chave: Defeitos topológicos, teorias de campo com violação da simetria de Lorentz.

Abstract

We study the existence of Abrikosov-Nielsen-Olesen-like BPS vortices in the context of the Standard Model Extension (SME). Specifically, we analyze the Maxwell-Higgs model supplemented by Lorentz-violating (LV) terms in both sectors. The LV terms of the Higgs sector are CPT-even, on the other hand, the gauge sector includes CPT-even and CPT-odd LV terms. One important consequence is the effect of the LV coefficients of the Higgs sector on the magnetic flux, it now is fractional. Among other effects, the LV coefficients are accounted by the control of the amplitude and the spatial extension of the topological defects. The first model analyzed includes a Lorentz-violating CPT-odd or Carroll-Field-Jackiw term in the gauge sector. The BPS equations under appropriated coordinate rescaling and field redefinition are the ones of the Maxwell-Chern-Simons-Higgs (MCSH) model. However, the difference appears in Gauss's law which contains a parameter dependent on LV coefficients of the Higgs sector. Such parameter when fixed to be 1 reproduces the Gauss law of the MCSH model. The second model studied contains the LV CPT-even term in the electromagnetic sector. It provides a new class of BPS vortices. Here the parity-odd coefficients couple the magnetic and electric sectors yet in stationary regimen. Then, with the appropriate BPS potential the model engenders electrically charged BPS vortices. This new BPS vortex solutions also supports electric field inversion and localized magnetic flux reversion.

Keywords: Topological defects, Lorentz-violating field theories.

Sumário

Introdução	1
I Revisão de defeitos topológicos: Vórtices abelianos	5
1 Conceitos preliminares	6
1.1 Quebra espontânea de simetria	6
1.2 Equações de Bogomol'nyi	8
1.3 Defeitos topológicos tipo kink num modelo ϕ^4	10
2 Vórtices no modelo de Maxwell-Higgs	12
2.1 <i>Ansatz</i> dos vórtices	13
2.2 Obtenção do potencial BPS	14
2.3 Densidade de energia e equações BPS	16
2.4 Comportamento assintótico	17
2.5 Soluções numéricas para vórtices no modelo de MH	19
3 Vórtices carregados no modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs	21
3.1 Cálculo do potencial BPS no modelo de MCSH	22
3.2 Energia estacionária e equações BPS	24
3.3 Comportamento assintótico	25
3.4 Soluções numéricas	26
II Vórtices carregados e fracionários em modelos abelianos com violação da simetria de Lorentz	29
4 Vórtices no modelo abeliano de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Higgs	33
4.1 Cálculo do potencial BPS no modelo de MCFJH	35
4.2 Energia BPS do modelo de MCFJH	38
4.3 Comportamento assintótico	40
4.4 Análise numérica	41

5	Modelo abeliano de Maxwell-Higgs com violação da simetria de Lorentz	45
5.1	Cálculo do potencial BPS	46
5.2	Formalismo BPS e energia BPS	47
5.3	Comportamento assintótico	48
5.4	Análise numérica	49
5.4.1	Configuração de vórtices carregados: $\lambda_r = 0$, $s = 2\kappa$, $\Delta = 1$	50
6	Conclusões e perspectivas	54
A	Cálculo da energia BPS do modelo de MCFJH	57
B	Cálculo da energia BPS do modelo de Maxwell-Higgs com violação da simetria de Lorentz	61
	Referências Bibliográficas	65

Introdução

A primeira observação de um sóliton foi realizada por J. Scott Russell em agosto de 1834 na Escócia, quando constatou que ondas produzidas por um barco na superfície de um canal, viajaram por aproximadamente três quilômetros mantendo sua velocidade e conservando a sua forma. Posteriormente, no ano de 1844, ele denominaria este fenômeno de *ondas de translação* [1]. Primeiramente, o trabalho de Russell não foi bem aceito pela comunidade científica da época, devido a que este parecia em desacordo com a teoria para a hidrodinâmica de Bernoulli. O suporte teórico para explicar as experiências de Russell somente veio anos depois com o trabalho de Korteweg e de Vries no ano de 1895 [2], no qual, por meio de uma equação conhecida como equação KdV, incorporaram termos não lineares e efeitos dispersivos para a propagação de ondas em superfícies de líquidos com pouca profundidade. Neste modelo os efeitos da dispersão são balanceados pela não linearidade. O termo sóliton caracteriza ondas não dispersivas que preservam sua forma durante a propagação e após colisões. A partir destas características poderia se pensar em sólitons como a estrutura matemática ideal para a descrição de partículas.

Como sabemos, as partículas elementares são descritas pela Teoria Quântica de Campos (TQC) e são fruto de pequenas excitações elementares de um campo quantizado. A TQC é uma teoria muito bem estabelecida que a décadas fornece resultados extremamente satisfatórios no que se refere às interações entre partículas. Notamos que em nenhum momento se fez necessária a inclusão do conceito do sóliton para o desenvolvimento da TQC, não entanto, as dificuldades encontradas na descrição perturbativa em determinados fenômenos de partículas, especialmente no domínio da interação forte, levou muitos físicos de partículas a reconsiderar, desde uma nova perspectiva, as consequências da não linearidade nas equações de movimento. Neste contexto, as soluções tipo-sólitons foram redescobertas na década de 70'. Estas soluções tipo-partícula não substituem as partículas elementares tradicionais, mas contribuem na descrição teórica em virtude da sua natureza não linear. Mas, de que forma estas soluções tipo-partículas, advindas de equações de campos clássicos, poderiam ser incluídas no contexto das interações elementares, conhecendo-se a natureza quântica do universo sub-microscópico? A quantização dos sólitons, aparece naturalmente em alguns tipos particulares de soluções, onde a configuração do campo ao redor do sóliton, apresenta propriedades topológicas não triviais. Portanto, o argumento que leva à quantização dos sólitons são de natureza diferente ao conceito de quantização empregado na descrição das partículas elementares. Em muitos casos o caráter topológico do campo é dado por um único número inteiro, n , chamado de carga topológica [3]. A partícula básica descrita

por $n = 1$ é a configuração de mínima energia e é portanto uma solução estável. A densidade de energia é bem comportada e concentrada em uma região finita do espaço, como veremos no decorrer deste trabalho. Dita configuração de campo é chamada de sóliton topológico.

Em um sentido estritamente matemático, um defeito é uma solução com energia finita de uma equação diferencial não linear. Por outro lado, fisicamente, podemos dizer que um defeito topológico é a região de transição entre as fases distintas de um sistema, ou a região em que o sistema muda suas características.

Considerando sistemas unidimensionais, surgem os seguintes defeitos topológicos: ondas solitárias, kinks e sólitons de sine-Gordon [4]. A estabilidade do kink se deve a que este conecta dois valores de vácuo diferentes e é impossível realizar uma deformação contínua ou *deformação homotópica* na solução do kink para um único valor de vácuo, sem violar a condição essencial de termos energia finita. Se o campo clássico $\phi(x)$, não pode ser deformado continuamente para o vácuo clássico, dizemos que o campo $\phi(x)$ pertence ao setor topológico diferente ao setor do vácuo.

No caso de modelos bidimensionais, consideramos igualmente argumentos topológicos para a existência de soluções estáveis tipo-sólitons. A situação mais elementar ocorre quando o estado de vácuo do sistema é caracterizado pelo campo complexo ϕ , não nulo e com módulo $|\phi| = \phi_0$. Esta equação, admite uma infinita variedade de soluções na forma $\phi = e^{i\theta}\phi_0$, obtendo assim um contínuo de vácuos degenerados formando um círculo. Novamente, estamos frente a uma topologia não trivial, o que faz impossível deformar a configuração do campo em um estado de vácuo global, sem superar uma barreira de energia finita. O conjunto de todas as configurações de campo com energia finita é dividido em setores topológicos não equivalentes, onde cada setor terá um valor diferente para n , o qual, para este caso, representa a vorticidade da solução.

Sólitons em duas dimensões, são realizados na física da matéria condensada, especificamente na teoria da supercondutividade. Dentro da teoria da supercondutividade, o fenômeno conhecido como efeito Meissner [5], proíbe a entrada de campo magnético de baixa intensidade dentro do supercondutor. Podemos dizer que o supercondutor blindava o campo magnético externo. Experimentalmente, verifica-se que, quando a intensidade do campo magnético é aumentada, a supercondutividade é quebrada. A partir deste mecanismo os supercondutores são divididos em dois tipos. Nos supercondutores tipo-I, a supercondutividade é quebrada via uma transição de fase de primeira ordem, quando a intensidade do campo externo ultrapassa o valor crítico H_C . Por outro lado, a supercondutividade tipo-II é caracterizada pela formação de vórtices magnéticos quando um campo magnético externo, com valor acima de H_{C1} , é aplicado. Pode ser verificado, que à medida que aumenta o campo magnético externo, aumenta a densidade de vórtices no supercondutor. Para um valor acima de um campo crítico H_{C2} , a supercondutividade é destruída completamente. Esta classificação, foi proposta inicialmente no trabalho de Ginzburg-Landau (GL) [6], onde construíram uma teoria efetiva para a supercondutividade, com interação entre o campo escalar e complexo ϕ e o campo de gauge A_μ correspondendo ao grupo $U(1)$. Vale aqui ressaltar que a teoria de GL foi incorporada por uma teoria mais geral

para a descrição da supercondutividade, denominada de teoria BCS [7]. Estudando o modelo de GL, Abrikosov descobriu que a função energia de GL carregava sólitons topológicos [8], sendo estes, vórtices de gauge com fluxo magnético quantizado.

Posteriormente, no contexto das teorias de campos, Nielsen e Olesen [9], fazendo uma analogia com as linhas de vórtices em supercondutores tipo-II, partiram de uma lagrangiana onde os campos de Maxwell e de Higgs abelianos são acoplados minimamente, construindo assim, uma teoria de campos para cordas duais. No limite de baixas energias, é recuperada a expressão para a função energia de GL.

No estudo de vórtices abelianos, pode ser construído um modelo no qual o campo de gauge seja governado pelo termo de Chern-Simons, substituindo o termo de Maxwell na lagrangiana [10]. A dinâmica do campo de gauge neste caso, será dada pelo acoplamento existente com o campo de matéria de Higgs. Generalizando, também são encontrados vórtices de fluxo magnético quantizado no modelo abeliano de Maxwell-Chern-Simons-Higgs.

Nas últimas duas décadas, dentro do contexto das teorias de cordas, surgiram teorias nas quais, a invariância de Lorentz poderia ter sido quebrada na escala de energia de Planck [11]-[16], nos primórdios do Universo. Teorias além do Modelo Padrão (MP), são enquadradas no contexto do Modelo Padrão Estendido (MPE) [17]-[19], o qual incorpora os termos de violação de Lorentz (VL), gerados como valores esperados não nulos de tensores de Lorentz em todos os setores de interação do MP. Diversas teorias físicas têm sido estudadas dentro do contexto de violação de simetria da Lorentz, especificamente, dentro do setor fermiônico [20]-[21] e do setor fotônico [22]-[25].

Recentemente, foram estudados vórtices BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfeld) dentro do contexto de teorias com VL [26, 27]. No primeiro destes dois trabalhos, são estudadas soluções de vórtices descarregados, no modelo de Maxwell-Higgs modificado pelos termos de VL e CPT-par, no setor de gauge abeliano e no setor de Higgs. Já o trabalho seguinte, trata de soluções de vórtices carregados no modelo de Maxwell-Higgs, onde os termos de VL com paridade ímpar, são os responsáveis pelo aparecimento de vórtices carregados, na ausência de um termo tipo Chern-Simons.

Começamos esta dissertação, com uma revisão de defeitos topológicos, tratando especificamente o caso de vórtices abelianos. Primeiramente, serão apresentados um conjunto de conceitos preliminares em relação ao estudo de vórtices, tais como, quebra espontânea de simetria e equações de Bogomol'nyi. Aplicaremos estes conceitos ao caso de um defeito topológico unidimensional, denominado de kink. Nos dois capítulos seguintes, são estudadas soluções de vórtices BPS em modelos abelianos, especificamente, nos modelos de Maxwell-Higgs e Maxwell-Chern-Simons-Higgs.

A segunda parte do trabalho apresenta contribuições originais, onde são estudados dois modelos, com soluções tipo-vórtices BPS em teorias abelianas, com violação da simetria de Lorentz. O primeiro destes, consiste no estudo de vórtices no modelo de Maxwell-Higgs, provido de termos de VL nos setores de gauge e de Higgs. O termo de VL no setor de gauge é o

termo CPT-ímpar, conhecido como termo de Carroll-Field-Jackiw, por outro lado, no setor de Higgs, a VL se deve à introdução de um termo CPT-par. Como resultado principal, a introdução de um termo de VL no setor de Higgs, leva a obtermos soluções de vórtices com fluxo magnético quantizado e fracionalizado. Por último, estenderemos o trabalho [26], para o caso de vórtices eletricamente carregados, onde novamente obteremos fluxo magnético quantizado e fracionário, devido ao termo de quebra da simetria de Lorentz no setor de Higgs. Em todos os casos analisados se verifica que o tamanho e as propriedades dos vórtices são controladas pelos coeficientes da quebra de Lorentz. Por último, apresentamos as nossas conclusões e perspectivas.

Parte I

Revisão de defeitos topológicos: Vórtices abelianos

Capítulo 1

Conceitos preliminares

1.1 Quebra espontânea de simetria

Considerando uma densidade de lagrangiana descrevendo n campos escalares reais $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ no espaço-tempo de Minkowski. Supondo o potencial $U(\phi)$ com um valor mínimo $U_{\min} = 0$, e denotamos por v o subespaço de \mathbb{R}^n onde U alcança o seu mínimo, e o chamamos de subespaço de vácuo da teoria. Se os campos adquirem um valor constante no espaço e no tempo neste subespaço, denominamos esta configuração de configuração de vácuo, ou simplesmente, vácuo. Neste caso, teremos uma solução estável para o campo e a sua energia total será nula. Para melhor visualização do fenômeno da quebra espontânea de simetria abordamos o seguinte exemplo [28]:

Uma conta de massa m desliza ao longo de uma haste cilíndrica lisa ligada a uma mola com constante de força k e comprimento natural l , conforme a figura 1.1. Para descrever o sistema definimos a coordenada generalizada como sendo o deslocamento horizontal x , e escrevemos a

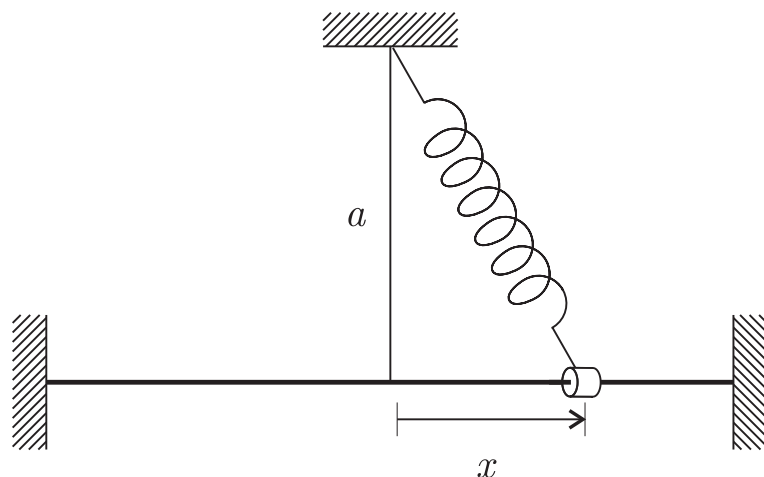


Figura 1.1: Conta de massa m sobre trilho presa a uma mola de comprimento l e constante k .

lagrangiana da seguinte maneira:

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} \left(\sqrt{a^2 + x^2} - l \right)^2. \quad (1.1)$$

As posições de equilíbrio satisfazem $dU/dx = 0$, cujas soluções são $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{l^2 - a^2}$ (se $l > a$). A estabilidade é determinada estudando o sinal de d^2U/dx^2 nos pontos de equilíbrio. Visivelmente teremos duas situações.

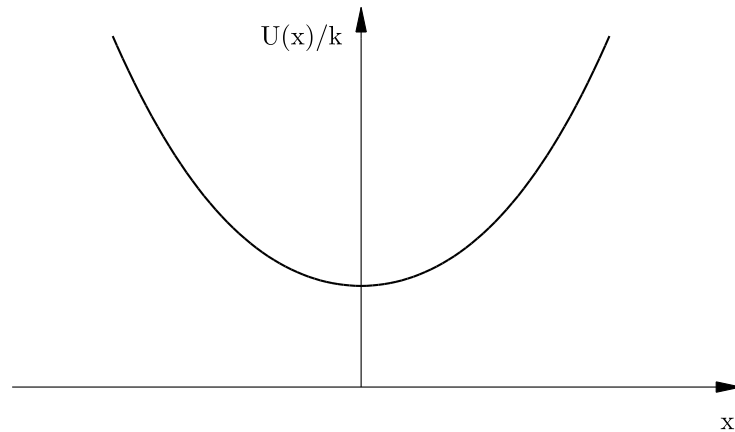


Figura 1.2: Potencial ϕ^4 com um mínimo na origem.

No caso em que $a > l$, somente $x = 0$ é ponto de equilíbrio, o qual é estável, pois

$$\left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x=0} = k \left(1 - \frac{l}{a} \right) > 0, \quad (1.2)$$

e a frequência para pequenas oscilações em torno de $x = 0$ é dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l}{a} \right)}. \quad (1.3)$$

Para o caso em que $a < l$, há três posições de equilíbrio, sendo estas: $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{l^2 - a^2}$. O ponto $x = 0$ agora é ponto de equilíbrio instável porque $U''(0) < 0$. Por outro lado, as posições $x = \pm\sqrt{l^2 - a^2}$ são de equilíbrio estável porque,

$$\left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x=\pm\sqrt{l^2-a^2}} = k \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right) > 0, \quad (1.4)$$

sendo a frequência agora dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right)}. \quad (1.5)$$

Note que a lagrangiana (1.1) é invariante sob a transformação $x \rightarrow -x$. Se $a > l$ a solução de mínima energia é $x = 0$, com esta única configuração de equilíbrio estável exibindo a mesma

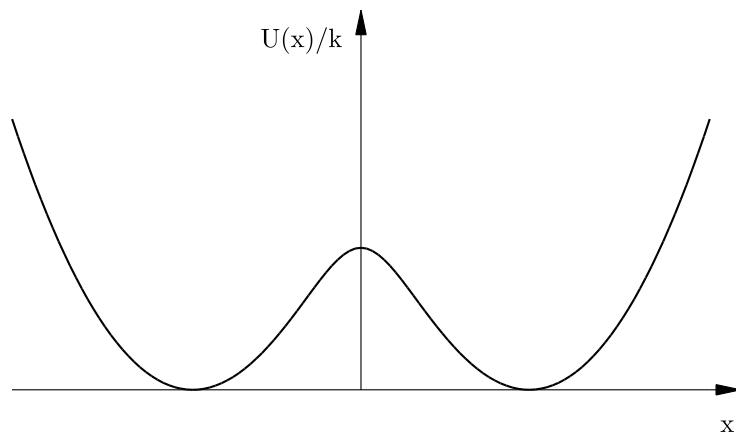


Figura 1.3: Potencial ϕ^4 com dois mínimos.

propriedade de invariância que a lagrangiana. No entanto, para $a < l$ a posição $x = 0$ não é mais a de menor energia e torna-se instável. Temos aqui uma degenerescência dos estados de mais baixa energia ($x = \pm\sqrt{l^2 - a^2}$) e a simetria é quebrada, pois a transformação $x \rightarrow -x$ leva um estado de equilíbrio estável no outro. A instabilidade em $x = 0$ quando a decresce e passa pelo valor crítico $a = l$ é análoga a uma transição de fase de segunda ordem em mecânica estatística, com o parâmetro a desempenhando o papel da temperatura. Surpreende ver como um modelo mecânico tão simples encerra todas as características essenciais do fenômeno da quebra espontânea de simetria, uma das idéias centrais da moderna física das partículas elementares e ingrediente fundamental do modelo unificado da interação eletrofraca.

1.2 Equações de Bogomol'nyi

Uma descoberta chave que tem auxiliado no estudo de sólitons topológicos em muitas teorias de campos é aquela em que as equações diferenciais parciais dos campos podem ser reduzidas de segunda para primeira ordem. Esta descoberta surge do trabalho seminal de Bogomol'nyi [29]. Geralmente, as equações de primeira ordem são chamadas de equações de Bogomol'nyi. Estas equações nunca envolvem derivadas temporais e suas soluções são portanto estáticas. Bogomol'nyi mostrou que neste tipo especial de teorias de campos a energia é limitada inferiormente por um múltiplo do módulo da carga topológica n , com igualdade quando os campos satisfazem as equações de Bogomol'nyi. Portanto, soluções das equações de Bogomol'nyi com uma certa carga terão todas a mesma energia, e devido ao fato do campo minimizar a energia, elas serão soluções estáveis. Estas equações automaticamente satisfazem as equações de segunda ordem de Euler-Lagrange, sendo as de primeira ordem bem mais fáceis de serem resolvidas.

Temos no caso unidimensional, que os Kinks são soluções de uma equação de Bogomol'nyi. A redução das equações de Ginzburg-Landau para vórtices de campo de gauge em um par de

equações acopladas de Bogomol'nyi ocorre para o valor crítico do acoplamento que separa os regimes Tipo-I e Tipo-II nos supercondutores. Monopólos magnéticos satisfazem às equações de Bogomol'nyi se o campo de Higgs for não-massivo e instantons satisfazem as equações de Yang-Mills autoduais, que é uma equação tipo-Bogomol'nyi num espaço (1+3)-dimensional [3].

Como já foi dito, o mais elementar dos sólitons topológicos ocorre em uma dimensão espacial envolvendo somente um campo escalar real, sendo este modelo representado pela seguinte densidade de lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - U(\phi), \quad (1.6)$$

onde $U(\phi)$ é uma função real e positiva de ϕ . A equação de movimento para o campo escalar é uma equação de onda não linear, dada pela expressão

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{dU}{d\phi} = 0. \quad (1.7)$$

Assumindo que o mínimo de potencial seja $U_{\min} = 0$, a energia estacionária será dada por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + U(\phi) \right) dx. \quad (1.8)$$

Simbolizamos com ν o vácuo da teoria e este será alcançado pelos campos $\nu = \phi_0$ quando $\phi'_0 = \dot{\phi}_0 = 0$, e $U(\phi_0) = U_{\min}$. A existência de sólitons topológicos depende da existência de múltiplos vácuos, de modo que ν contenha mais de um componente. Uma configuração de campo com energia finita é classificada como topológica por um elemento (ϕ_-, ϕ_+) quando $\phi_\pm = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x)$. As soluções que conectam vácuos diferentes, ou seja, $\phi_+ \neq \phi_-$, são geralmente chamadas de kinks.

Podemos reescrever a equação (1.8) em termos quadráticos como

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\phi' \mp \sqrt{2U(\phi)} \right)^2 \pm \sqrt{2U(\phi)} \phi' \right]. \quad (1.9)$$

Com o intuito de minimizar a energia, zeramos o termo quadrático na expressão anterior, de modo que impomos

$$\phi' = \pm \sqrt{2U(\phi)}. \quad (1.10)$$

Assim, as soluções de mínima energia satisfazem a equação diferencial de primeira ordem (1.10), e a energia passa a ser escrita como

$$E \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{2U(\phi)} \phi' \right| = \left| \int_{\phi_-}^{\phi_+} \sqrt{2U(\phi)} d\phi \right|. \quad (1.11)$$

Sendo $U(\phi) \geq 0$, podemos introduzir o superpotencial $U(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2$, e posteriormente integramos o termo à direita na equação (1.11) obtendo assim o limite inferior para a energia na forma

$$E \geq |W(\phi_+) - W(\phi_-)|. \quad (1.12)$$

Este tipo de limite inferior para a energia, onde esta é limitada somente em função de parâmetros topológicos é conhecido como limite de Bogomol'nyi. De fato para termos igualdade no limite de Bogomol'nyi, os campos devem ser estáticos ($\dot{\phi} = 0$), e desta forma satisfazer a equação de Bogomol'nyi de primeira ordem (1.10), onde as soluções com o sinal positivo são chamadas de *kinks*, e aquelas com sinal negativo são chamadas de *antikinks*. As duas contribuições para a energia produzem um efeito de balanceamento, e para o caso do equilíbrio o teorema do virial será satisfeito resultando na igualdade das duas contribuições

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \phi'^2 = \int_{-\infty}^{\infty} U(\phi) dx. \quad (1.13)$$

As soluções da equação (1.10) são mínimos globais da energia para uma certa classe topológica dos campos, portanto, serão pontos críticos da função energia e automaticamente satisfazem as equações de segunda ordem para os campos (1.7). Isto é confirmado diferenciando explicitamente (1.10),

$$\phi'' = \pm \frac{1}{\sqrt{2U}} \frac{dU}{d\phi} \phi' = \frac{dU}{d\phi}. \quad (1.14)$$

Observamos também que a partir de uma solução estática para o campo $\phi(x)$, a solução $\phi(x, t)$ correspondente pode ser obtida aplicando um “boost” de Lorentz na forma $x \rightarrow \gamma(x - vt)$ com $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$.

1.3 Defeitos topológicos tipo kink num modelo ϕ^4

Nesta seção, vamos discutir um modelo simples para kinks, onde somente teremos dois estados de vácuo diferentes. Para obter dois valores de vácuo o potencial requer termos de ordem quatro nos campos, resultando na seguinte densidade de lagrangiana para o modelo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \lambda (a^2 - \phi^2)^2, \quad (1.15)$$

da qual surge a equação de movimento correspondente

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - 4\lambda (a^2 - \phi^2) \phi = 0. \quad (1.16)$$

A energia de Bogomol'nyi segundo (1.11) será dada por

$$E \geq \left| \int_{\phi_-}^{\phi_+} \sqrt{2\lambda} (a^2 - \phi^2) d\phi \right| = \left| \sqrt{2\lambda} \left[a^2 \phi - \frac{1}{3} \phi^3 \right]_{\phi_-}^{\phi_+} \right| = \frac{4}{3} a^3 \sqrt{2\lambda} |n|, \quad (1.17)$$

sendo

$$n = \frac{\phi_+ - \phi_-}{2a} = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \phi' dx, \quad (1.18)$$

onde ϕ_\pm são os valores do campo para $x = \pm\infty$. Os possíveis valores para a carga topológica são $n \in \{0, 1, -1\}$. Para o caso em que $n = 0$, significa que o campo conecta um único vácuo e o

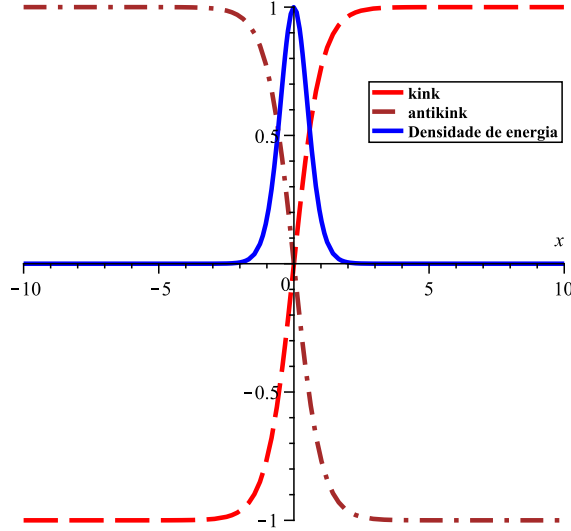


Figura 1.4: As soluções *kink*, *antikink*, e a densidade de energia BPS para $\lambda = 1/2$, $a = 1$, $x_0 = 0$.

defeito formado é dito não-topológico. Por outro lado a solução de mínima energia com $n = 1$, corresponde ao *kink*, onde o campo conecta dois estados de vácuo diferentes ν_- e ν_+ à medida que x aumenta de $-\infty$ para $+\infty$. Substituindo $\phi \rightarrow -\phi$ na solução para o *kink* obtemos o *antikink* com carga topológica $n = -1$. Neste caso, se $n = 1$, obtemos

$$E \geq \frac{4}{3}a^3\sqrt{2\lambda}, \quad (1.19)$$

onde a igualdade é satisfeita para a condição (1.10), resultando na seguinte equação de Bogomol'nyi

$$\phi' = \sqrt{2\lambda}(a^2 - \phi^2). \quad (1.20)$$

Integrando esta equação obtemos a solução do campo

$$\phi(x) = \pm a \tanh \left[\sqrt{2\lambda}a(x - x_0) \right], \quad (1.21)$$

onde x_0 é uma constante de integração. O sinal (+) corresponde a solução chamada de *kink* e o sinal (-) é a solução para o *antikink* (vide Fig. 1.4). Ambas soluções possuem a mesma densidade de energia BPS dada por

$$\varepsilon = 2\lambda a^4 \operatorname{sech}^4 \left[\sqrt{2\lambda}a(x - x_0) \right]. \quad (1.22)$$

A partir das duas últimas equações vemos que no ponto $x = x_0$ o valor do campo será nulo, isto é, $\phi(x_0) = 0$ e o valor para a energia será máximo com valor $\varepsilon = 2\lambda m^4$. Portanto, o ponto x_0 pode ser considerado a posição do defeito topológico, sendo este um parâmetro livre, correspondendo a invariância translacional da lagrangiana.

Capítulo 2

Vórtices no modelo de Maxwell-Higgs

O artigo publicado por H.B. Nielsen e P. Olesen no ano de 1973 [9] foi o pioneiro na descrição de vórtices via uma teoria de campos. Eles queriam construir uma teoria de campos para cordas duais e com este propósito trabalharam com um campo de gauge abeliano acoplado a um campo escalar carregado. Este modelo foi utilizado por Higgs para ilustrar o mecanismo de geração da massa através do processo conhecido como *Mecanismo de Higgs*.

O modelo abeliano de Maxwell-Higgs é descrito pela seguinte densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu\phi|^2 - U(|\phi|), \quad (2.1)$$

onde definimos, aqui e para o restante deste trabalho, a derivada covariante como sendo

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (2.2)$$

o parâmetro e representa a constante de acoplamento entre os campos de gauge e de Higgs. Definimos também o tensor do campo eletromagnético,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.3)$$

Por último, $U(|\phi|)$ é um potencial tipo de $|\phi|^4$ que provê as soluções tipo vórtices BPS.

A equação de Euler-Lagrange para o campo de calibre,

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0, \quad (2.4)$$

fornece a seguinte equação de movimento

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = eJ^\mu, \quad (2.5)$$

com a seguinte expressão para a corrente, J^μ ,

$$J_\mu = i[\phi(D_\mu\phi)^* - \phi^*D_\mu\phi] = i(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi) - 2eA^\mu|\phi|^2. \quad (2.6)$$

A respectiva equação de Euler-Lagrange para o campo de Higgs,

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi^*)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = 0, \quad (2.7)$$

proporciona a equação de movimento para o campo escalar complexo

$$D^\mu D_\mu \phi + \frac{\partial U}{\partial \phi^*} = 0. \quad (2.8)$$

Das equações de Maxwell (2.5), expressas no regime estacionário, obtemos a lei de Gauss

$$\nabla^2 A_0 = 2e^2 A_0 |\phi|^2, \quad (2.9)$$

e a lei de Ampère

$$\epsilon_{ijk} \partial_j B_k + ie\phi^* \partial_i \phi - ie\phi \partial_i \phi^* + 2e^2 A_i |\phi|^2 = 0, \quad (2.10)$$

respectivamente.

A equação estacionária para o campo escalar complexo é obtida a partir da Eq. (2.8),

$$\nabla^2 \phi - i2eA_j \partial_j \phi - e^2 (A_j)^2 \phi + e^2 (A_0)^2 \phi - \frac{\partial U}{\partial \phi^*} = 0. \quad (2.11)$$

A lei de Gauss (2.9) é satisfeita trivialmente pela condição de calibre $A_0 = 0$ (gauge ou calibre temporal), isso implica na obtenção de soluções tipo vórtices sem carga elétrica.

2.1 *Ansatz* dos vórtices

As soluções tipo vórtices, de interesse, possuem simetria rotacional por tanto utilizamos o *ansatz* padrão em coordenadas polares (r, θ) ,

$$\phi = vg(r) e^{in\theta}, \quad A_\theta = -\frac{a(r) - n}{er}, \quad (2.12)$$

sendo similar ao proposto por Abrikosov na obtenção de vórtices em supercondutores de alta temperatura crítica T_c [8].

As funções $a(r)$ e $g(r)$ são regulares na origem e no infinito e satisfazem as seguintes condições de contorno

$$g(0) = 0, \quad a(0) = n, \quad (2.13)$$

$$g(\infty) = 1, \quad a(\infty) = 0.$$

O número inteiro n , chamado de vorticidade, ou em língua inglesa de *winding number*, engloba o caráter topológico do campo devido a que a carga topológica é sempre proporcional a n . O

caráter inteiro do número n está ligado a termos um campo de Higgs univocamente definido no plano complexo,

$$\begin{aligned}\phi(r, 0) &= \phi(r, 2\pi n) \\ 1 &= e^{i2\pi n},\end{aligned}\tag{2.14}$$

a segunda equação somente é satisfeita se os valores de n são os inteiros positivos ou negativos.

No *ansatz* (2.12) o gauge de Coulomb, $\partial_i A_i = 0$, é satisfeito automaticamente e o campo magnético expresso por

$$B(r) = -\frac{a'}{er},\tag{2.15}$$

onde o apóstrofe ($'$) simboliza a derivada em relação a variável r .

Considerando os *ansatz* (2.12) e as expressões que transformam um vetor e o operador derivada, de coordenadas cartesianas para polares, respectivamente escritos como,

$$\begin{aligned}A_1 &= A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta & , & & A_2 &= A_r \sin \theta + A_\theta \cos \theta, \\ \partial_1 &= \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta & , & & \partial_2 &= \sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta,\end{aligned}\tag{2.16}$$

podemos reescrever a lei de Ampère (2.10) e equação do campo de Higgs (2.11), da seguinte forma

$$B' + 2ev^2 \frac{ag^2}{r} = 0,\tag{2.17}$$

$$g'' + \frac{g'}{r} - \frac{a^2 g}{r^2} - \frac{1}{2v^2} \frac{d}{dg} U(g) = 0.\tag{2.18}$$

2.2 Obtenção do potencial BPS

Na lagrangiana (2.1) que define nossa teoria o potencial $U(|\phi|)$ ainda não foi especificado. Mostraremos aqui o procedimento para calcular explicitamente a forma do potencial que conduz à obtenção de soluções tipo vórtices no modelo de Maxwell-Higgs. Este procedimento pode ser estendido a outros modelos similares com pequenas mudanças no procedimento aqui estabelecido.

Em teorias de calibre abelianas, envolvendo o campo de Higgs, uma das equações BPS que sempre aparece é a seguinte condição de auto-dualidade,

$$D_\pm \phi = D_1 \phi \pm i D_2 \phi = 0,\tag{2.19}$$

os sinais são usados da seguinte maneira: (+) para $n > 0$ e (-) para $n < 0$.

A idéia básica para obter o potencial BPS é assumir que a condição de dualidade acima seja satisfeita e a expressamos em coordenadas polares usando o *ansatz* (2.12) e as transformações (2.16). Desse modo obtemos

$$g' = \epsilon \frac{ag}{r},\tag{2.20}$$

com $\epsilon = \pm$.

O seguinte passo é usar a equação de autodualidade na equação de movimento do campo de Higgs e estabelecer uma equação diferencial para o potencial. Com esse propósito, derivamos a equação (2.20) e obtemos

$$g'' = \epsilon \frac{a'g}{r} + \epsilon \frac{ag'}{r} - \epsilon \frac{ag}{r^2}, \quad (2.21)$$

que ainda pode ser reescrita usando (2.20), assim temos

$$g'' + \frac{g'}{r} - \frac{a^2g}{r^2} = \epsilon \frac{a'g}{r}. \quad (2.22)$$

Se comparamos as expressões (2.18) e (2.22) conseguimos obter a seguinte equação para o potencial.

$$\frac{1}{2v^2} \frac{d}{dg} U(g) = \epsilon \frac{a'g}{r}. \quad (2.23)$$

O terceiro passo do nosso algoritmo, consiste em utilizarmos a condição de auto-dualidade (2.20) para ver se é possível integrar a lei de Ampère. Para este caso, a equação (2.17) resulta expressa como

$$B' + \epsilon ev^2 (g^2)' = 0, \quad (2.24)$$

e podemos realizar a integração em r , resultando na seguinte expressão

$$B + \epsilon ev^2 g^2 = C_1, \quad (2.25)$$

onde C_1 é uma constante de integração a ser determinada. Reescrevemos equação acima usando a equação (2.15) para o campo magnético e temos a equação

$$\frac{a'}{r} = \epsilon e^2 v^2 g^2 - e C_1, \quad (2.26)$$

que resultará ser, após a escolha de C_1 , a segunda equação BPS do modelo.

Agora, introduzimos a equação (2.26) na expressão (2.23) para obter uma equação diferencial para o potencial como uma função explícita do campo g :

$$\frac{1}{2v^2} \frac{d}{dg} U(g) = e^2 v^2 g^3 - \epsilon e C_1 g, \quad (2.27)$$

cuja integração é

$$U(g) = \frac{1}{2} e^2 v^4 \left(\frac{\epsilon C_1}{e v^2} - g^2 \right)^2 - \frac{1}{2} (C_1)^2 + 2v^2 C_2, \quad (2.28)$$

com C_2 outra constante de integração. Escolhemos as constantes de integração de maneira tal que, o potencial seja positivo e o valor de g no estado de vácuo seja igual a 1, assim obtemos

$$C_1 = \epsilon ev^2, \quad C_2 = \frac{1}{4} \frac{(C_1)^2}{v^2}. \quad (2.29)$$

Com esses valores obtemos a expressão para o potencial BPS

$$U(g) = \frac{1}{2} e^2 v^4 (1 - g^2)^2, \quad (2.30)$$

ou, expresso em termos do campo de Higgs resulta no bem conhecido potencial

$$U(|\phi|) = \frac{1}{2}e^2 (v^2 - |\phi|^2)^2, \quad (2.31)$$

o qual possui infinitos vácuos formando um círculo de raio $|\phi| = v$.

Uma vez que a constante C_1 foi fixada, a equação (2.26) resulta ser

$$-\frac{a'}{er} = B = \epsilon v^2 (1 - g^2). \quad (2.32)$$

Na seguinte seção, veremos que as equações (2.20) e (2.32), são as equações BPS que minimizam a densidade de energia do modelo.

Com o potencial em mãos escrevemos explicitamente a densidade lagrangiana que descreve o modelo de Maxwell-Higgs

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu\phi|^2 - \frac{1}{2}e^2 (v^2 - |\phi|^2)^2. \quad (2.33)$$

2.3 Densidade de energia e equações BPS

A densidade de energia, obtida a partir da hamiltoniana canônica é dada pela seguinte expressão

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(F_{0k})^2 + \frac{1}{4}(F_{ij})^2 + |D_0\phi|^2 + |D_j\phi|^2 + \frac{1}{2}e^2 (v^2 - |\phi|^2)^2. \quad (2.34)$$

As soluções tipo vórtices são estudadas no regime estacionário onde como já observamos a condição de gauge $A_0 = 0$ é válida, e implica em ter soluções sem carga elétrica. No gauge temporal, a densidade de energia se reduz à seguinte forma

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}B^2 + |D_j\phi|^2 + \frac{1}{2}e^2 (v^2 - |\phi|^2)^2, \quad (2.35)$$

e a energia total será dada por

$$E = \int d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}B^2 + |D_j\phi|^2 + \frac{e^2}{2} (v^2 - |\phi|^2)^2 \right]. \quad (2.36)$$

Aplicando o método de Bogomol'nyi escrevemos a energia como uma soma de quadrados

$$E = \int d\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} [B \mp e (v^2 - |\phi|^2)]^2 \pm eB (v^2 - |\phi|^2) + |D_j\phi|^2 \right\}. \quad (2.37)$$

O termo $|D_j\phi|^2$ pode ser reescrito usando a seguinte identidade

$$|D_j\phi|^2 = |D_\pm\phi|^2 \pm eB |\phi|^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon_{jk}\partial_j J_k, \quad (2.38)$$

onde $D_\pm\phi$ foi definido em (2.19) e J_k é a componente espacial da densidade de corrente (2.6). A substituição desta identidade na expressão (2.37) resulta em

$$E = \int d\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} [B \mp e (v^2 - |\phi|^2)]^2 \pm ev^2 B + |D_\pm\phi|^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon_{jk}\partial_j J_k \right\}. \quad (2.39)$$

Desta equação podemos extrair as condições BPS que minimizam a energia, sendo estas

$$D_{\pm}\phi = 0, \quad (2.40)$$

$$B = \pm e (v^2 - |\phi|^2), \quad (2.41)$$

as quais correspondem com as equações (2.19) e (2.32) encontradas no cálculo do potencial BPS (2.31).

Neste ponto, é importante observar que a partir da equação BPS (2.41), podemos verificar que ela faz parte de uma relação geral entre o campo magnético e o potencial BPS gerador do defeito topológico. Essa relação é dada pela seguinte expressão

$$B = -\frac{a'}{er} = \pm\sqrt{2U}, \quad (2.42)$$

que é a versão planar da condição BPS obtida para (anti)-kinks na Eq. (1.10).

Se consideramos que as condições BPS são satisfeitas, a equação (2.39) fornece a energia BPS do sistema

$$E_{BPS} = \int d\mathbf{x} \mathcal{E}_{BPS} = \int d\mathbf{x} \left(\pm ev^2 B \pm \frac{1}{2} \epsilon_{jk} \partial_j J_k \right), \quad (2.43)$$

onde definimos a densidade de energia BPS \mathcal{E}_{BPS} . A integração do segundo termo terá resultado nulo, se condições de contorno adequadas são impostas sobre os campos, não contribuindo para a energia total do sistema. Deste modo, a energia BPS resulta proporcional ao fluxo magnético

$$E_{BPS} = \pm ev^2 \int d\mathbf{x} B = \pm ev^2 \Phi_B = \pm 2\pi v^2 n, \quad (2.44)$$

onde definimos o fluxo magnético como

$$\Phi_B = \int d\mathbf{x} B = \pm \frac{2\pi}{e} n, \quad (2.45)$$

que integrado usando as condições de contorno (2.13) resulta proporcional a n e dizemos que o fluxo magnético é quantizado.

2.4 Comportamento assintótico

A modo de verificação das condições de contorno propostas em (2.13), estudamos o comportamento dos campos na origem $r = 0$ e no infinito $r \rightarrow \infty$, a partir das equações BPS expressas no *ansatz*:

$$g' = \epsilon \frac{ag}{r}, \quad (2.46)$$

$$-\frac{a'}{er} = \epsilon ev^2 (1 - g^2), \quad (2.47)$$

Para o estudo do comportamento assintótico na origem ($r \rightarrow 0$) usaremos o método das séries de potências. Mediante o uso das condições de contorno na origem (2.13), as séries descrevendo os campos $g(r)$ e $a(r)$ são expressas como

$$g(r) = \sum_{j=1}^{\infty} G_j r^j \quad , \quad a(r) = n - \sum_{j=1}^{\infty} A_j r^j, \quad (2.48)$$

cujos primeiros termos são mostrados a seguir,

$$\begin{aligned} g(r) &= G_n r^{|n|} - \frac{e^2 v^2 G_n}{4} r^{|n|+2} + \dots, \\ a(r) &= n - \frac{e^2 v^2}{2} r^2 + \frac{e^2 v^2 (G_n)^2}{2(|n|+1)} r^{2|n|+2} + \dots \end{aligned} \quad (2.49)$$

Com isso verificamos que as condições de contorno em $r = 0$ são compatíveis com as equações BPS do modelo.

A continuação estudamos o comportamento em $r \rightarrow \infty$, para isso, consideramos as condições de contorno (2.13) estabelecidas neste limite e expressamos os campos da seguinte maneira,

$$a = \delta a_1 \quad , \quad g = 1 - \delta g_1, \quad (2.50)$$

onde δa e δg se anulam no limite $r \rightarrow \infty$. A substituição nas equações BPS, (2.46) e (2.47) e a consideração de somente os termos lineares em δa e δg permite obter

$$\begin{aligned} \frac{(\delta a_1)'}{r} &= -2e^2 v^2 (\delta g_1) \quad , \\ (\delta g_1)' &= -\frac{(\delta a_1)}{r}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

As soluções adequadas com as condições no infinito são

$$\begin{aligned} \delta g_1(r) &\sim K_0 \left(ev\sqrt{2}r \right) \sim r^{-1/2} \exp \left(-rev\sqrt{2} \right) \quad , \\ \delta a_1(r) &\sim r K_1 \left(ev\sqrt{2}r \right) \sim r^{1/2} \exp \left(-rev\sqrt{2} \right) \quad , \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde K_0 e K_1 são as funções modificadas de Bessel de segunda classe de ordem zero e um, respectivamente. O comportamento acima é exatamente o comportamento típico dos vórtices de Abrikosov.

A quantidade $ev\sqrt{2}$ no argumento das funções de Bessel ou das exponenciais na equação (2.52), representa a escala de massa dos bósons no modelo de Maxwell-Higgs, e no limite de Bogomol'nyi será dada por,

$$m_G = m_H = \sqrt{2}ev. \quad (2.53)$$

2.5 Soluções numéricas para vórtices no modelo de MH

Para realizar a análise numérica transformamos as equações BPS em equações adimensionais via a mudança de variável $\rho = evr$ e as seguintes redefinições

$$g(r) \rightarrow \bar{g}(\rho) \quad , \quad a(r) \rightarrow \bar{a}(\rho) \quad , \quad g(r) \rightarrow \bar{g}(\rho) \quad , \quad (2.54)$$

$$B(r) \rightarrow ev^2\bar{B}(\rho) \quad , \quad \mathcal{E}_{BPS}(r) \rightarrow v^2\bar{\mathcal{E}}_{BPS}(\rho) \quad . \quad (2.55)$$

As equações BPS (2.46) e (2.47) na versão adimensional resultam

$$\bar{g}' = \pm \frac{\bar{a}\bar{g}}{\rho} \quad , \quad (2.56)$$

$$\frac{a'}{\rho} = \mp (1 - \bar{g}^2) \quad .$$

A densidade de energia BPS definida na equação (2.43) é expressa como

$$\bar{\mathcal{E}}_{BPS}(\rho) = \bar{B}^2 + 2 \left(\frac{\bar{a}\bar{g}}{\rho} \right)^2 \quad . \quad (2.57)$$

As figuras 2.1–2.4 mostram os perfis das soluções para diferentes valores de n , obtidas a partir das equações BPS adimensionais (2.56).

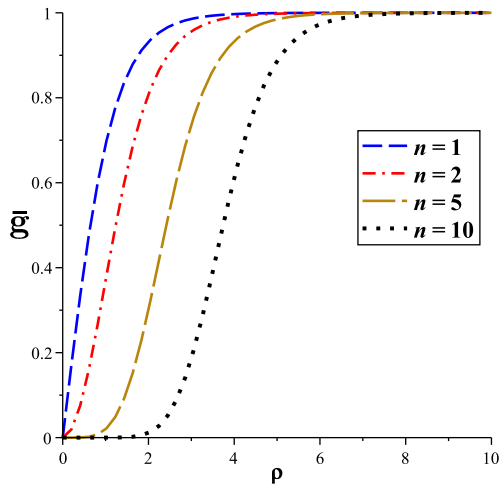


Figura 2.1: Campo de Higgs $\bar{g}(\rho)$.

Figura 2.1. A partir do gráfico para \bar{g} , vemos claramente que o campo escalar ϕ tende para o estado de vácuo à medida que nos afastamos do centro do vórtice. Por outro lado, o campo escalar é nulo na origem. Observamos também que à medida que n aumenta, o campo escalar vai se afastando gradativamente da origem, convergindo de forma menos pronunciada para o valor do vácuo.

Figura 2.2. Vemos no gráfico para \bar{a} um comportamento inverso ao do campo ϕ , já que o potencial vetor tem um valor finito na origem mas tende para zero à medida que nos afastamos da origem. Neste caso quanto maior for o valor de n , maior será o valor do campo de gauge na origem.

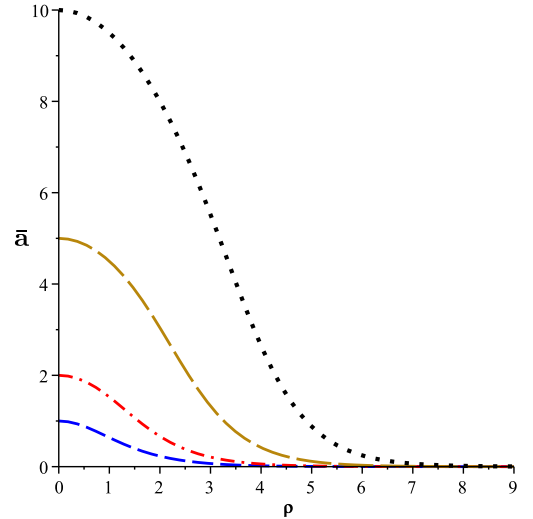


Figura 2.2: Campo vetorial $\bar{a}(\rho)$.

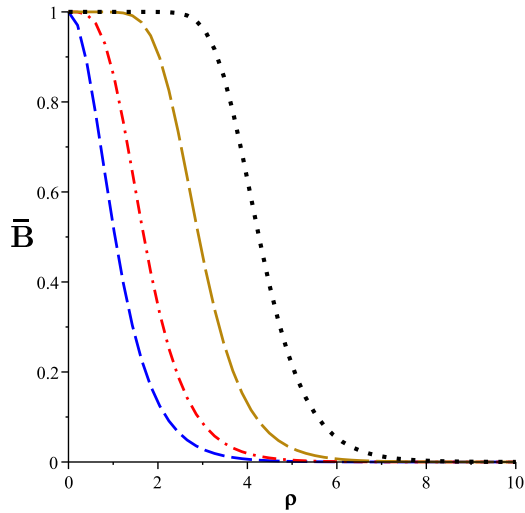


Figura 2.3: Campo magnético $\bar{B}(\rho)$.

Figura 2.3. No perfil para o campo magnético, vemos que este alcança o seu valor máximo (ev^2) na origem, sendo este comportamento independente do valor do n . O campo magnético é bem localizado, possuindo um decaimento acentuado. À medida que n aumenta o campo magnético abarca uma área maior, aumentando assim o fluxo magnético.

Figura 2.4. Vemos que somente para o caso de $n = 1$ teremos uma densidade de energia localizada na origem. Para soluções com $n > 1$, a densidade de energia se transforma em um anel, convergindo para um mesmo valor na origem. A densidade de energia se alarga à medida que n aumenta e a energia total será incrementada em múltiplos do valor $2\pi v^2$.

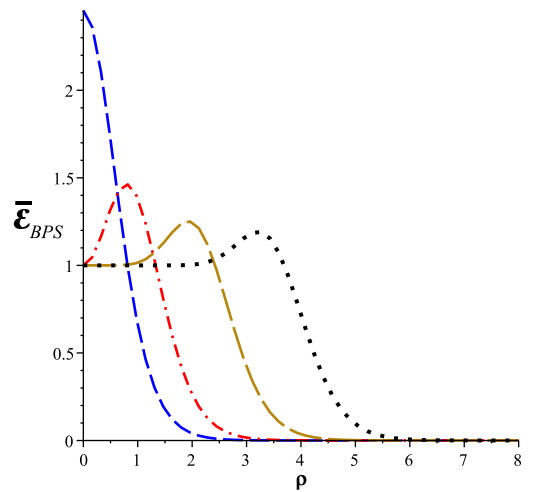


Figura 2.4: Densidade de energia BPS $\bar{\mathcal{E}}_{BPS}(\rho)$.

Capítulo 3

Vórtices carregados no modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs

Nesta capítulo, vamos procurar a existência de vórtices BPS carregados em um modelo planar, onde contemplamos o modelo de Maxwell-Chern-Simons acoplado ao campo escalar complexo de Higgs. Veremos que o termo de Chern-Simons será o responsável pelo aparecimento de vórtices carregados, à diferença do modelo de Maxwell-Higgs onde a condição $A_0 = 0$ é facilmente satisfeita, resultando assim na configuração de vórtices descarregados. O modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs é descrito pela seguinte densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\kappa\epsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\alpha F_{\beta\gamma} + |D_\mu\phi|^2 - U(|\phi|). \quad (3.1)$$

As equações de movimento para os campo de gauge e de Higgs são dados respectivamente por

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} + \frac{1}{2}\kappa\epsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\nu\alpha} = eJ^\mu, \quad (3.2)$$

$$D_\mu D^\mu\phi + \frac{\partial U}{\partial\phi^*} = 0, \quad (3.3)$$

onde lembramos que a corrente J^μ (2.6) é dada pela expressão

$$J^\mu = i[\phi(D^\mu\phi)^* - \phi^*(D^\mu\phi)] = i(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi) - 2eA^\mu|\phi|^2.$$

Lei de Gauss no regime estacionário

$$\nabla^2 A_0 - \kappa B = 2e^2 A_0 |\phi|^2, \quad (3.4)$$

na qual definimos $F_{ij} = \epsilon_{ij}B$. A lei de Ampère estacionária

$$\epsilon_{kj}\partial_j B - \kappa\epsilon_{kj}\partial_j A_0 = ei(\phi\partial_k\phi^* - \phi^*\partial_k\phi) - 2e^2 A_k |\phi|^2, \quad (3.5)$$

e por último a equação para o campo de Higgs independente do tempo

$$\nabla^2\phi - i2eA_j\partial_j\phi + e^2(A_0)^2 - e^2(A_j)^2\phi = \frac{\partial U}{\partial\phi^*}. \quad (3.6)$$

3.1 Cálculo do potencial BPS no modelo de MCSH

Na lagrangeana (3.1) que define nossa teoria o potencial $U(|\phi|)$ não é especificado. Mostraremos aqui o procedimento para calcular o potencial gerador de soluções tipo vórtices no modelo de MCSH. Levando em consideração que as soluções tipo-vórtices possuem simetria rotacional, é natural trabalharmos em coordenadas polares (r, θ) , recorrendo ao *ansatz* já apresentado no modelo anterior

$$\phi = vg(r) e^{in\theta} \quad , \quad A_\theta = -\frac{a(r) - n}{er} \quad , \quad A_0 = \omega(r) \quad , \quad (3.7)$$

onde $a(r)$, $g(r)$ e $\omega(r)$, são funções escalares regulares na origem. Na procura de vórtices tipo-Abrikosov, impomos que os campos satisfazem as seguintes condições de contorno:

$$a(0) = n \quad , \quad g(0) = 0 \quad , \quad \omega'(0) = 0 \quad , \quad (3.8)$$

$$a(\infty) = 0 \quad , \quad g(\infty) = 1 \quad , \quad \omega(\infty) = 0 \quad . \quad (3.9)$$

A escolha das condições de contorno para o potencial escalar será justificada no estudo do comportamento assintótico deste campo.

Considerando que o *ansatz* (3.7) esta representado em coordenadas polares e lembrando que as expressões que relacionam os vetores e os operadores derivadas, em ambas coordenadas, são dadas pela equação (2.16), reescrevemos as equações estacionárias (3.4)–(3.6). Desta maneira obtemos a lei de Gauss

$$\omega'' + \frac{\omega'}{r} + \kappa \frac{a'}{er} = 2e^2 v^2 g^2 \omega \quad , \quad (3.10)$$

a lei de Ampère

$$B' - \kappa \omega' + 2ev^2 \frac{g^2 a}{r} = 0 \quad , \quad (3.11)$$

e a equação que rege o campo de Higgs

$$g'' + \frac{g'}{r} - \frac{a^2}{r^2} g + e^2 \omega^2 g = \frac{1}{2v^2} \frac{dU(g)}{dg} \quad . \quad (3.12)$$

Continuamos o procedimento impondo a condição de auto-dualidade

$$g' = \epsilon \frac{ag}{r} \quad , \quad (3.13)$$

tomamos a sua derivada

$$g'' = \epsilon \frac{a'g}{r} + \epsilon \frac{ag'}{r} - \epsilon \frac{ag}{r^2} \quad , \quad (3.14)$$

e introduzindo (3.13) podemos escrever

$$g'' + \frac{g'}{r} - \frac{a^2}{r^2} g = \epsilon \frac{a'g}{r} \quad . \quad (3.15)$$

Podemos substituir esta última expressão na equação de movimento para o campo de Higgs em coordenadas polares (3.12), resultando

$$\frac{1}{2v^2} \frac{dU(g)}{dg} - e^2 \omega^2 g = \epsilon \frac{a'g}{r} \quad . \quad (3.16)$$

Agora, utilizando a condição de auto-dualidade (3.13), na lei de Ampère (3.11)

$$B' - \kappa\omega' + \epsilon v^2 (g^2)' = 0, \quad (3.17)$$

vemos que esta última equação pode ser facilmente integrada, fornecendo

$$B - \kappa\omega + \epsilon v^2 g^2 = C_1, \quad (3.18)$$

ou,

$$\frac{a'}{r} = \epsilon e^2 v^2 g^2 - e\kappa\omega - eC_1, \quad (3.19)$$

substituindo este último resultado em (3.16), escrevemos

$$\frac{1}{2v^2} \frac{dU(g)}{dg} = e^2 v^2 g^3 - \epsilon e\kappa\omega g - \epsilon eC_1 g + e^2 \omega^2 g. \quad (3.20)$$

Realizando uma nova integração

$$\frac{1}{2v^2} U(g) = \frac{1}{4} e^2 v^2 g^4 - \frac{1}{2} \epsilon e\kappa\omega g^2 - \frac{1}{2} \epsilon eC_1 g^2 + \frac{1}{2} e^2 \omega^2 g^2 + C_2, \quad (3.21)$$

e completando os quadrados escrevemos

$$\frac{1}{2v^2} U(g) = \frac{v^2}{4} \left(\frac{\epsilon C_1 + \epsilon\kappa\omega}{v^2} - e g^2 \right)^2 - \frac{v^2}{4} \left(\frac{\epsilon C_1 + \epsilon\kappa\omega}{v^2} \right)^2 + \frac{1}{2} e^2 \omega^2 g^2 + C_2.$$

Pelo mesmo argumento empregado no modelo de Maxwell-Higgs, fixamos as constantes de integração da seguinte maneira

$$C_1 = \epsilon v^2 \quad , \quad C_2 = \frac{1}{4v^2} (e v^2 + \epsilon\kappa\omega)^2, \quad (3.22)$$

com as quais poderemos finalmente escrever o potencial BPS procurado, sendo dado pela seguinte expressão

$$U(g) = e^2 v^2 \omega^2 g^2 + \frac{1}{2} [e v^2 (1 - g^2) + \epsilon\kappa\omega]^2. \quad (3.23)$$

Veremos, na próxima seção que as equações (3.13) e (3.19), coincidem com as equações BPS que minimizam a densidade de energia do modelo.

O potencial (3.23) em termos dos campos originais pode ser escrito

$$U = e^2 (A_0)^2 |\phi|^2 + \frac{1}{2} [e (v^2 - |\phi|^2) + \epsilon\kappa A_0]^2. \quad (3.24)$$

A presença de A_0 no potencial BPS quebra a simetria abeliana de gauge local do modelo. Podemos contornar este problema introduzindo na lagrangiana do modelo um campo escalar neutro N satisfazendo a seguinte condição BPS

$$A_0 = -\epsilon N. \quad (3.25)$$

Escrevemos uma nova densidade de lagrangiana para o modelo em estudo, introduzindo um termo dinâmico para o campo N ,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\kappa\epsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\alpha F_{\beta\gamma} + |D_\mu\phi|^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu N)^2 - e^2N^2|\phi|^2 - \bar{U}(|\phi|, N), \quad (3.26)$$

onde

$$\bar{U}(|\phi|, N) = \frac{1}{2}[ev^2 - e|\phi|^2 - \kappa N]^2. \quad (3.27)$$

Este potencial de acoplamento revela que o modelo possui dois vácuos degenerados: um simétrico em $\phi = 0$ e $N = \frac{ev^2}{\kappa}$ e outro assimétrico em $|\phi| = v$ e $N = 0$. Ressaltando que defeitos topológicos, conectam vácuos diferentes e os defeitos não-topológicos, são aqueles nos quais os campos tendem para um único valor do vácuo.

3.2 Energia estacionária e equações BPS

No regime estacionário a densidade de energia do sistema é dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}(ev^2 - e|\phi|^2 - \kappa N)^2 + |D_k\phi|^2 + \\ & \frac{1}{2}(\partial_k A_0)^2 + \frac{1}{2}(\partial_k N)^2 + e^2(A_0)^2|\phi|^2 + e^2N^2|\phi|^2, \end{aligned} \quad (3.28)$$

na qual vemos que o parâmetro de Chern-Simons não aparece, isto se deve ao caráter topológico deste termo.

Usando a condição BPS (3.25) e aplicando o método de Bogomol'nyi, a densidade de energia pode ser escrita como uma soma de termos quadráticos

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}[B \mp (ev^2 - e|\phi|^2 \pm \kappa A_0)]^2 + |D_\pm\phi|^2 \pm ev^2B + \partial_j \left(A_0\partial_j A_0 \pm \frac{1}{2}\epsilon_{jk}J_k \right), \quad (3.29)$$

onde usamos a identidade (2.38). Os termos quadráticos quando nulos permitem minimizar a densidade de energia e fornecem as equações BPS que, explicitamente, são expressas como

$$D_\pm\phi = 0, \quad (3.30)$$

$$B = \pm (ev^2 - e|\phi|^2) + \kappa A_0. \quad (3.31)$$

Escrevendo as equações BPS nos *ansatz*, obtemos respectivamente as equações (3.13) e (3.19), com a devida substituição $C_1 = \epsilon v^2$.

Aqui, podemos observar a relação (2.42) também é satisfeita pela modelo,

$$B = \sqrt{2\bar{U}(|\phi|, \mp A_0)}. \quad (3.32)$$

Com as equações BPS obtemos a densidade de energia mínima (BPS) para o modelo de MCSH

$$\mathcal{E}_{BPS} = \pm ev^2B + \partial_j \left(A_0\partial_j A_0 \pm \frac{1}{2}\epsilon_{jk}J_k \right). \quad (3.33)$$

A energia total será dada pela integral espacial da expressão anterior, na qual o termo divergente será nulo, resultando em:

$$E_{BPS} = \pm ev^2 \int d^2\mathbf{x}B = \pm 2\pi v^2 n. \quad (3.34)$$

3.3 Comportamento assintótico

Reescrevendo as equações BPS e a lei de Gauss usando *ansatz*

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (3.35)$$

$$\frac{a'}{r} = \mp e^2 v^2 (1 - g^2) - e\kappa\omega, \quad (3.36)$$

$$\omega'' + \frac{\omega'}{r} + \kappa \frac{a'}{er} = 2e^2 v^2 g^2 \omega. \quad (3.37)$$

Lembrando que o sinal superior (inferior) corresponde a $n > 0$ ($n < 0$). Note que se fazemos $\kappa \rightarrow -\kappa$ as soluções mudam da seguinte maneira: $g \rightarrow g$, $a \rightarrow a$, $\omega \rightarrow -\omega$.

De modo similar ao modelo anterior, estudamos o comportamento das funções em $r \rightarrow 0$ via o método das séries de potências, assim expressamos eles como

$$g(r) = \sum_{j=1}^{\infty} G_j r^j, \quad a(r) = n - \sum_{j=1}^{\infty} A_j r^j, \quad \omega(r) = \omega_0 + \sum_{j=1}^{\infty} W_j r^j, \quad (3.38)$$

e substituídas nas equações (3.35)–(3.37), obtemos o seguinte comportamento

$$\begin{aligned} g &= G_n r^n + \dots, \\ a &= n - \frac{1}{2} (\epsilon e^2 v^2 + e\kappa\omega_0) r^2 - \frac{1}{16} \kappa^2 (\epsilon e^2 v^2 + e\kappa\omega_0) r^4 \dots, \\ \omega &= \omega_0 + \frac{1}{4} \kappa (\epsilon e v^2 + \kappa\omega_0) r^2 + \frac{1}{64} \kappa^3 (\epsilon e v^2 + \kappa\omega_0) r^4 \dots, \end{aligned} \quad (3.39)$$

que são compatíveis com as condições de contorno impostas em (3.8). Observamos, da equação para a , que fazendo $\kappa = 0$ e $\epsilon = +1$, recuperamos o mesmo comportamento obtido no modelo de Maxwell-Higgs.

Para obter o comportamento das funções em $r \rightarrow \infty$, definimos o comportamento dos campos por

$$a = \delta a, \quad g = 1 - \delta g, \quad \omega = \delta \omega, \quad (3.40)$$

onde δg , δa e $\delta \omega$ são funções infinitesimais, as quais linearizam as equações (3.35)–(3.37):

$$\begin{aligned} (\delta g)' + \epsilon \frac{\delta a}{r} &= 0, \\ \frac{(\delta a)'}{r} + 2\epsilon e^2 v^2 (\delta g) + e\kappa (\delta \omega) &= 0, \\ (\delta \omega)'' + \frac{(\delta \omega)'}{r} + \frac{\kappa (\delta a)'}{e r} - 2e^2 v^2 (\delta \omega) &= 0, \end{aligned} \quad (3.41)$$

cujas soluções se comportam como

$$\delta g \sim r^{-1/2} e^{-\beta r}, \quad \delta a \sim r^{1/2} e^{-\beta r}, \quad \delta \omega \sim r^{1/2} e^{-\beta r}, \quad (3.42)$$

e são compatíveis com as condições de contorno impostas em (3.9), onde β define a escala de massa ou alcance do vórtice

$$\beta = \frac{\sqrt{\kappa^2 + 8(ev)^2} - \kappa}{2}. \quad (3.43)$$

No limite quando $\kappa \rightarrow \infty$, obtemos

$$\beta \simeq \frac{2(ev)^2}{\kappa},$$

que representa o comportamento das soluções do modelo de Chern-Simons-Higgs [10].

3.4 Soluções numéricas

As equações BPS (3.35), (3.36) e a lei de Gauss (3.37), podem ser escritas em uma estrutura adimensional via a introdução da variável adimensional, $\rho = evr$, tal que

$$g(r) \rightarrow \bar{g}(\rho) \ , \quad a(r) \rightarrow \bar{a}(\rho) \ , \quad \omega(r) \rightarrow v\bar{\omega}(\rho) \ , \quad (3.44)$$

$$\kappa \rightarrow ev\bar{\kappa} \ , \quad B(r) \rightarrow ev^2\bar{B}(\rho) \ , \quad \mathcal{E}_{BPS}(r) \rightarrow v^2\bar{\mathcal{E}}_{BPS}(\rho). \quad (3.45)$$

Dessa forma, as equações (3.35)–(3.37) que resolvem o sistema são escritas como

$$\bar{g}' = \pm \frac{\bar{a}\bar{g}}{\rho}, \quad (3.46)$$

$$\frac{\bar{a}'}{\rho} = \mp (1 - \bar{g}^2) - \bar{\kappa}\bar{\omega}, \quad (3.47)$$

$$\bar{\omega}'' + \frac{\bar{\omega}'}{\rho} + \bar{\kappa}\frac{\bar{a}'}{\rho} = 2\bar{g}^2\bar{\omega}. \quad (3.48)$$

A densidade de energia BPS (3.33) resulta em

$$\bar{\mathcal{E}}_{BPS}(\rho) = \bar{B}^2 + 2 \left(\frac{\bar{a}\bar{g}}{\rho} \right)^2 + 2 (\bar{\omega}\bar{g})^2 + (\bar{\omega}')^2. \quad (3.49)$$

As figuras 3.1–3.6 mostram os perfis das soluções para diferentes valores de n , obtidas a partir das equações adimensionais (3.46)–(3.48).

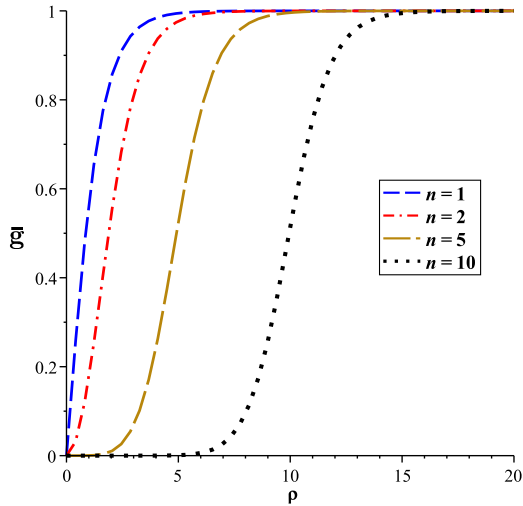


Figura 3.1: Campo de Higgs $\bar{g}(\rho)$.

Figura 3.2. O campo $\bar{a}(\rho)$ tende assintoticamente para zero à medida que nos afastamos da origem, e para o valor n na origem. Uma diferença importante em relação ao modelo anterior é que o campo de gauge se mantém no seu máximo numa área maior. Este fenômeno é bem apreciável para valores de n grandes. Por outro lado o decaimento é muito mais acentuado para estes valores.

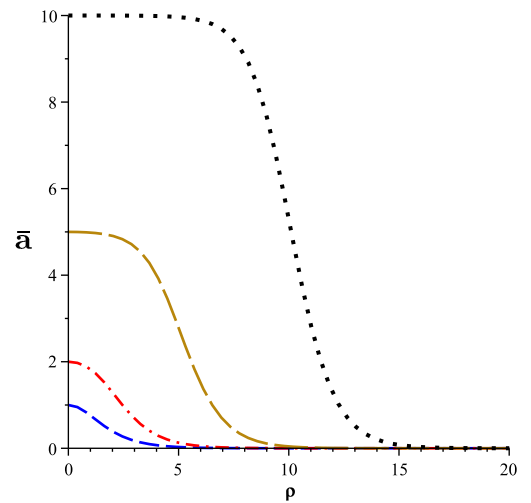


Figura 3.2: Campo vetorial $\bar{a}(\rho)$.

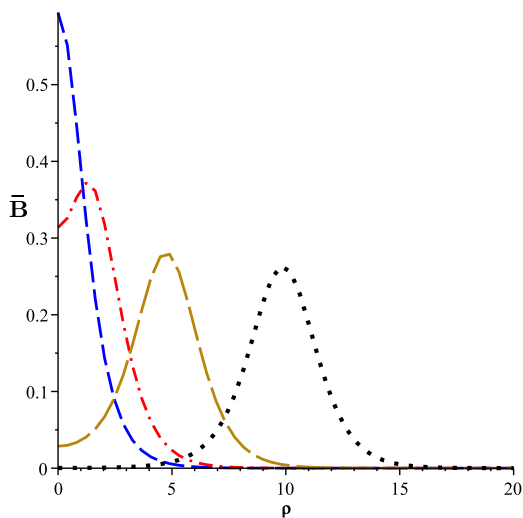


Figura 3.3: Campo magnético $\bar{B}(\rho)$.

Figura 3.1. Neste gráfico, vemos que o campo de Higgs tem um comportamento similar ao do modelo de MH, tendendo para o valor do vácuo à medida que nos afastamos da origem, e convergindo assintoticamente para zero na origem. Uma diferença notória com o modelo anterior é que neste modelo os vórtices tem largura maior, abarcando uma área significativamente maior.

Figura 3.3. O perfil do campo magnético é bem diferenciado neste modelo. Somente para $n = 1$ teremos um perfil localizado na origem (*lump*), enquanto que para valores de $n > 1$ o campo magnético forma um anel ao redor da origem sendo o raio deste maior à medida que n aumenta.

Figura 3.4. Lembrando que o modelo de MCSH resulta na obtenção de vórtices carregados, teremos um potencial escalar finito na origem, sendo o seu valor maior à medida que n aumenta. A partir da escala adotada para os gráficos obtemos a relação $\bar{B} = 1 + \bar{\omega}$, entre o campo magnético e o potencial escalar.

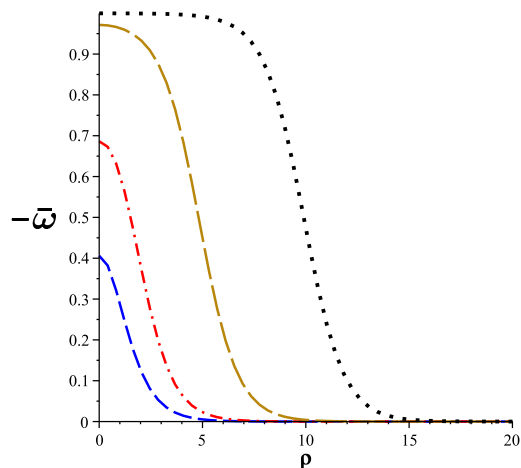


Figura 3.4: Potencial escalar $-\bar{\omega}(\rho)$.

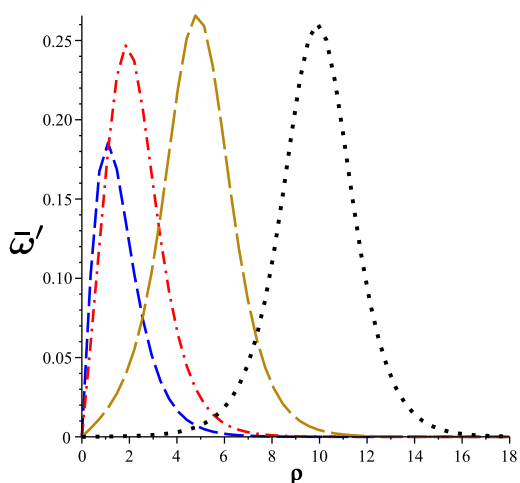


Figura 3.5: Campo elétrico $\bar{\omega}'(\rho)$.

Figura 3.5. Identificamos neste gráfico o campo elétrico como sendo a derivada na direção radial do potencial escalar, sendo este maior e mais afastado da origem para valores de n grandes.

Figura 3.6. A densidade de energia se apresenta como um máximo pronunciado e centrado na origem para $n = 1$, enquanto que para valores de $n > 1$ são formados anéis, bem localizados, cujo raio aumenta à medida que n aumenta. O valor na origem para a energia será nulo para valores de $n > 2$.

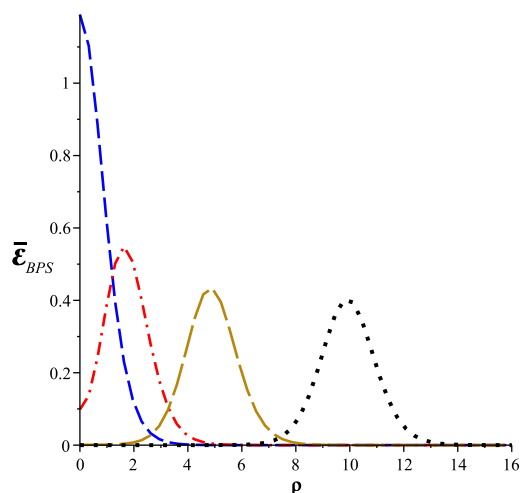


Figura 3.6: Densidade de energia BPS $\bar{\mathcal{E}}_{BPS}(\rho)$.

Parte II

Vórtices carregados e fracionários em modelos abelianos com violação da simetria de Lorentz

O Modelo Padrão (MP) foi desenvolvido baseado nas duas teorias revolucionárias de começo do século XX, sendo estas a Teoria da Relatividade Restrita (TRR), que traz a simetria de Lorentz como uma simetria fundamental da natureza, para qualquer referencial inercial, e a Mecânica Quântica, responsável pela descrição dinâmica da matéria em escala atômica. A partir delas, foram desenvolvidas três teorias que descrevem o comportamento das partículas e as suas interações fundamentais. Estas são a Eletrodinâmica Quântica (QED), teoria encarregada de explicar a interação eletromagnética desde o ponto de vista quântico. A Cromodinâmica Quântica (QCD), que trata da interação forte entre quarks dentro do núcleo atômico e a Teoria Eletrofraca, que explica o decaimento beta de partículas, mediante a interação denominada de *interação fraca*. Fica excluída, deste modelo padrão das interações fundamentais, a interação gravitacional, devido a problemas de quantização e renormalização do campo gravitacional.

Uma outra simetria fundamental da natureza é a CPT. Em resumo, esta simetria nos diz que sistemas físicos permanecem invariantes perante a operação conjunta de três operadores: conjugação de carga (C), o qual substitui uma partícula pela sua anti-partícula, sendo esta da mesma massa que a partícula mas com carga oposta. Paridade (P), está relacionada à simetria perante uma reflexão espacial. Reversão temporal (T), que inverte o sentido da evolução temporal de um sistema. Experimentalmente, observa-se violações individuais destas simetrias, ou violação aos pares no caso de CP. Mas, até agora, a violação da simetria CPT nunca foi observada.

Apesar do sucesso do MP como ferramenta teórica para explicar as interações fundamentais da natureza, sendo todas elas invariantes perante transformações de Lorentz, simétricas perante transformações CPT, além de serem teorias invariantes de *gauge* sobre o grupo de invariância $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, o MP ainda não conseguiu incorporar a gravitação como uma Teoria Quântica de Campos. A partícula que carrega a interação gravitacional, denominada gráviton, nunca foi encontrada, apesar de inúmeros experimentos de extrema precisão. Neste contexto, surgem as teorias de cordas, como tentativa de encontrar uma teoria que explique a física na escala de Planck ($\approx 10^{19} GeV$), onde prevaleceriam os efeitos quânticos da gravitação.

No contexto das teorias de cordas, as quais envolvem dimensões extras, há possibilidade de que a invariância de Lorentz e a simetria CPT tenham sido quebradas no começo do Universo, ou seja na escala da energia de Planck. Por outro lado, os efeitos da invariância de Lorentz, no contexto da física de sistemas com energia menor à energia de Planck, tem sido estudados e procurados como um resíduo remanescente dos primórdios do Universo.

Atualmente, o marco teórico que governa as pesquisas nesta área da física é o chamado Modelo Padrão Estendido (MPE), o qual envolve os coeficientes de violação de Lorentz em todos os setores de interação do nosso modelo padrão usual. Neste contexto de violação da simetria de Lorentz, surge a eletrodinâmica modificada, sobre a qual diversos trabalhos de grande relevância tem sido desenvolvidos ao longo das duas últimas décadas. Um dos trabalhos pioneiros nesta direção foi realizado por Carroll-Field-Jackiw (CFJ) no início da década de 1990 [22] onde foi adicionado na densidade lagrangiana de Maxwell um termo do tipo Chern-Simons

para quatro dimensões espaço-temporais.

A densidade lagrangiana da eletrodinâmica de MCFJ é escrita da seguinte forma,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(k_{AF})_{\mu}A_{\nu}F_{\alpha\beta}, \quad (3.50)$$

onde $(k_{AF})_{\mu}$ é um campo vetorial de fundo com dimensionalidade +1, responsável pela violação das simetria de Lorentz e CPT. A equação de movimento para o campo de gauge é dada por

$$\partial_{\nu}F^{\nu\mu} + \frac{1}{2}(k_{AF})_{\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = 0. \quad (3.51)$$

O termo de CFJ tem paridade ímpar perante uma transformação CPT, por isso, é chamado de setor de gauge CPT-ímpar do MPE. Este campo de fundo está fortemente limitado, $((k_{AF})_{\mu} \leq 10^{-33}eV)$ por dados de birrefringência da luz (fótons com polarização diferentes se propagam com velocidades diferentes) advinda de fontes astrofísicas distantes [23, 24]. Desde a sua proposta, esta eletrodinâmica tem sido intensamente estudada em diferentes aspectos, havendo consistência na sua quantização [30], e nas suas soluções clássicas [31, 32], como em estudos a respeito da radiação Cerenkov [33] e correções induzidas à radiação cósmica de fundo [34].

Por outro lado, com os trabalhos posteriores de Kostelecky e Mewes [23, 24], influenciados pelo trabalho pioneiro de CFJ, foram introduzidos termos de violação de Lorentz em todos os setores de interação do MP. Diversos trabalhos em relação ao setor CPT-par podem ser encontrados nas referências [24, 35, 36, 37, 38]. O termo CPT-par apresenta o tensor adimensional $(k_F)^{\alpha\nu\rho\varphi}$ representado por 19 parâmetros independentes, sendo nove destes pertencentes ao setor não-birrefringente. Este tensor apresenta as mesmas simetrias que o tensor de Riemann

$$(k_F)_{\alpha\nu\rho\varphi} = -(k_F)_{\nu\alpha\rho\varphi} \quad , \quad (k_F)_{\alpha\nu\rho\varphi} = -(k_F)_{\alpha\nu\varphi\rho} \quad , \quad (k_F)_{\alpha\nu\rho\varphi} = (k_F)_{\rho\varphi\alpha\nu} \quad , \quad (3.52)$$

$$(k_F)_{\alpha\nu\rho\varphi} + (k_F)_{\alpha\rho\varphi\nu} + (k_F)_{\alpha\varphi\nu\rho} = 0, \quad (3.53)$$

apresentando também duplo traço nulo,

$$(k_F)^{\rho\varphi}_{\rho\varphi} = 0. \quad (3.54)$$

A densidade lagrangiana descrevendo a eletrodinâmica CPT-par é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(k_F)^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}. \quad (3.55)$$

Nesta dissertação, analisaremos o setor não-birrefringente, descrito somente por nove componentes do tensor $(k_F)^{\mu\nu\alpha\beta}$, contidas num tensor simétrico e de traço nulo $\kappa^{\mu\alpha}$, definido pela contração $\kappa^{\mu\alpha} = (k_F)^{\mu\nu\alpha}_{\nu}$, tal que satisfazem a seguinte relação

$$(k_F)^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g^{\mu\alpha}\kappa^{\nu\beta} - g^{\nu\alpha}\kappa^{\mu\beta} + g^{\nu\beta}\kappa^{\mu\alpha} - g^{\mu\beta}\kappa^{\nu\alpha}). \quad (3.56)$$

Desse modo, a densidade lagrangiana descrevendo a eletrodinâmica CPT-par e não birrefringente é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\kappa^{\rho\alpha}F_{\rho\sigma}F_{\alpha}{}^{\sigma}, \quad (3.57)$$

proporcionando a seguinte equação de movimento

$$\partial_{\nu}F^{\nu\mu} + \partial_{\nu}(\kappa^{\mu\alpha}F^{\nu}_{\alpha}) - \partial_{\nu}(\kappa^{\nu\alpha}F^{\mu}_{\alpha}) = J^{\mu}. \quad (3.58)$$

Os primeiros estudos sobre vórtices topológicos, em teorias de campo de calibre abelianas, envolvendo a quebra da simetria de Lorentz no contexto do MPE, foram realizados nos trabalhos [26, 27]. No primeiro destes dois trabalhos [26], são estudadas soluções de vórtices descarregados, no modelo de Maxwell-Higgs modificado pelos termos de VL e CPT-par, no setor de gauge abeliano e no setor de Higgs. Já o segundo trabalho [27], mostra a existência de vórtices carregados no modelo de Maxwell-Higgs suplementado com o termo CPT-par no setor de gauge. Identificando o coeficiente de paridade-ímpar como sendo o responsável pelo acoplamento dos setores elétrico e magnético. Os vórtices possuem propriedades interessantes como a reversão localizada de fluxo magnético e inversão do campo elétrico.

Nos próximos dois capítulos estenderemos e completaremos a análise estudando as modificações na estrutura dos vórtices devido aos termos da quebra da simetria de Lorentz no setor de calibre e no setor de Higgs. Estenderemos primeiramente o estudo de vórtices BPS estudando a influência do termo CPT-ímpar ou de Carroll-Field-Jackiw no modelo de Maxwell-Higgs. Por último abordamos o modelo de Maxwell-Higgs suplementado pelo termo de violação de Lorentz CPT-par do setor de gauge e, estudamos os efeitos sobre os vórtices carregados (encontrados na referencia [27]) dos termos da VL inseridos no setor de Higgs.

Capítulo 4

Vórtices no modelo abeliano de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Higgs

Estamos interessados em soluções tipo-vórtices BPS dentro do modelo eletrodinâmico de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ) acoplado ao um campo escalar e complexo de Higgs. Além do termo de CFJ no setor eletromagnético, implementaremos, neste modelo, termos com quebra de simetria no setor de Higgs.

A seguinte densidade de lagrangiana descreve o modelo a ser desenvolvido em sequência

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(1+3)} = & -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}(\kappa_{AF})_{\alpha}A_{\beta}F_{\rho\sigma} + |D_{\mu}\phi|^2 \\ & + (k_{\phi\phi})^{\mu\nu}(D_{\mu}\phi)^*(D_{\nu}\phi) - \frac{1}{2}(k_{\phi F})^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\phi^*\phi - U(|\phi|), \end{aligned} \quad (4.1)$$

na qual assumimos que $(k_{\phi\phi})^{\mu\nu}$ é uma matriz simétrica real e $(k_{\phi F})^{\mu\nu}$ é uma matriz antisimétrica também real. O potencial $U(|\phi|)$ deverá ser determinado por um mecanismo análogo ao desenvolvido nos modelos até aqui estudados.

No apêndice A é mostrado que os coeficientes $(k_{\phi F})_{ij}$ são nulos para garantir a positividade da hamiltoniana [vide Eq. (A.23)].

Escrevemos a equação de movimento para o campo de gauge

$$\partial_{\nu}F^{\nu\mu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\alpha\rho\sigma}(k_{AF})_{\alpha}F_{\rho\sigma} + (k_{\phi F})^{\nu\mu}\partial_{\nu}(\phi^*\phi) = e[g^{\mu\alpha} + (k_{\phi\phi})^{\mu\alpha}]J_{\alpha}, \quad (4.2)$$

onde a corrente J_{α} é definida pela equação (2.6). Escrevemos a lei de Gauss do modelo

$$\partial_j F_{0j} + \frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}(k_{AF})_i F_{jk} + (k_{\phi F})_{0j}\partial_j(\phi^*\phi) = e[1 + (k_{\phi\phi})_{00}]J_0 - e(k_{\phi\phi})_{0i}J_i, \quad (4.3)$$

e levando em consideração que estamos procurando por soluções de mínima energia, estas deverão ser independentes do tempo, ou seja, soluções estacionárias. Assim, escrevemos a lei de Gauss estacionária da seguinte maneira

$$\partial_j\partial_j A_0 - (k_{AF})_3 B - \partial_j[(k_{\phi F})_{0j}\phi^*\phi] = -e[1 + (k_{\phi\phi})_{00}]J_0 + e(k_{\phi\phi})_{0i}J_i. \quad (4.4)$$

Lembrando que vórtices são estruturas bidimensionais é natural escrever as equações que descrevem o sistema projetadas no plano. Então, é conveniente escrever a lei de Gauss estacionária do modelo em coordenadas polares, levando em consideração os *ansatz* usuais adotados nos modelos anteriores, resultando na seguinte expressão

$$A_0'' + \frac{A_0'}{r} - (k_{AF})_3 B - v^2 (k_{\phi F})_{0r} \frac{(rg^2)'}{r} = 2e^2 v^2 [1 + (k_{\phi\phi})] A_0 g^2 + 2ev^2 (k_{\phi\phi})_{0\theta} \frac{g^2 a}{r}. \quad (4.5)$$

A lei de Ampère estacionária do modelo é dada por

$$eJ_i - e(k_{\phi\phi})_{ij} J_j + e(k_{\phi\phi})_{0i} J_0 = \epsilon_{ij} \partial_j B - \frac{1}{2} \epsilon^{i\alpha j\beta} \partial_j [(k_{AF})_\alpha A_\beta] - \frac{1}{4} \epsilon^{i\alpha\rho\sigma} (k_{AF})_\alpha F_{\rho\sigma}, \quad (4.6)$$

e após transforma-la em coordenadas polares, a lei de Ampère fornece o seguinte par de equações

$$\frac{a}{r} g^2 (k_{\phi\phi})_{r\theta} + e(k_{\phi\phi})_{0r} A_0 g^2 = 0, \quad (4.7)$$

$$B' - (k_{AF})_3 A_0' = -2ev^2 \frac{ag^2}{r} [1 - (k_{\phi\phi})_{\theta\theta}] + 2e^2 v^2 (k_{\phi\phi})_{0\theta} A_0 g^2. \quad (4.8)$$

O aparecimento de duas equações se deve a que em coordenadas polares, teremos uma soma de senos e cossenos, e, como as equações de movimento deverão ser válidas para qualquer valor de θ , os coeficientes nas funções trigonométricas deverão ser identicamente nulos.

A equação de movimento para o campo de Higgs resulta em

$$D_\mu D^\mu \phi + D_\mu [(k_{\phi\phi})^{\mu\alpha} D_\alpha \phi] + \frac{1}{2} (k_{\phi F})^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \phi + \frac{\partial U}{\partial \phi^*} = 0. \quad (4.9)$$

Escrevendo a equação anterior no regime estacionário, temos

$$\begin{aligned} 0 = & e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] A_0^2 \phi + D_j D_j \phi - D_i [(k_{\phi\phi})_{ij} D_j \phi] - ie(k_{\phi\phi})_{0j} A_0 D_j \phi \\ & - ie D_j [(k_{\phi\phi})_{0j} A_0 \phi] - (k_{\phi F})_{0i} \phi \partial_i A_0 - \frac{\partial U}{\partial \phi^*}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

O próximo passo é representar a equação de movimento para o campo de Higgs em coordenadas polares. Pelo mesmo motivo explicado anteriormente para a lei de Ampère, obteremos duas expressões

$$(k_{\phi\phi})_{r\theta} \frac{a'g + 2ag'}{r} + e(k_{\phi\phi})_{0r} \left(\frac{A_0 g}{r} + A_0' g + 2A_0 g' \right) = 0, \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} 0 = & [1 - (k_{\phi\phi})_{rr}] \left(g'' + \frac{g'}{r} - \Lambda^2 \frac{a^2}{r^2} g \right) + 2e(k_{\phi\phi})_{0\theta} \frac{A_0 g a}{r} \\ & + e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] A_0^2 g - (k_{\phi F})_{0r} A_0' g - \frac{1}{2v^2} \frac{\partial U}{\partial g}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde Λ é definido pela expressão

$$\Lambda = \left(\frac{1 - (k_{\phi\phi})_{\theta\theta}}{1 - (k_{\phi\phi})_{rr}} \right)^{1/2}. \quad (4.13)$$

Reescrevendo as equações (4.7) e (4.11) respectivamente da seguinte maneira

$$ag^2 (k_{\phi\phi})_{r\theta} + e (k_{\phi\phi})_{0r} r A_0 g^2 = 0, \quad (4.14)$$

$$(k_{\phi\phi})_{r\theta} (ag^2)' + e (k_{\phi\phi})_{0r} (r A_0 g^2)' = 0, \quad (4.15)$$

percebemos que estas duas expressões representam a mesma equação, e serão válidas para qualquer a , g e A_0 não nulos, se e somente se

$$(k_{\phi\phi})_{r\theta} = 0 = (k_{\phi\phi})_{0r}. \quad (4.16)$$

Caso estes coeficientes forem não nulos, deveríamos ter uma relação entre os campos, mas desta forma os campos não satisfariam as equações de movimento. Portanto, com esta última condição sendo satisfeita, resumimos abaixo as equações de movimento estacionárias.

A lei de Gauss

$$A_0'' + \frac{A_0'}{r} + (k_{AF})_3 B - v^2 (k_{\phi F})_{0r} \frac{(rg^2)'}{r} = 2e^2 v^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] A_0 g^2 + 2ev^2 (k_{\phi\phi})_{0\theta} \frac{ag^2}{r}, \quad (4.17)$$

lei de Ampère

$$B' - (k_{AF})_3 A_0' = -2ev^2 \frac{ag^2}{r} [1 - (k_{\phi\phi})_{\theta\theta}] + 2e^2 v^2 (k_{\phi\phi})_{0\theta} A_0 g^2, \quad (4.18)$$

campo de Higgs

$$\begin{aligned} 0 = & [1 - (k_{\phi\phi})_{rr}] \left(g'' + \frac{g'}{r} - \Lambda^2 \frac{a^2}{r^2} g \right) + 2e (k_{\phi\phi})_{0\theta} \frac{A_0 g a}{r} \\ & + e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] A_0^2 g - (k_{\phi F})_{0r} A_0' g - \frac{1}{2v^2} \frac{\partial U}{\partial g}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

4.1 Cálculo do potencial BPS no modelo de MCFJH

Na lagrangiana do modelo (4.1) não foi especificada a forma do potencial. Vamos procurar um potencial BPS que fornece soluções tipo-vórtices estáveis para o nosso modelo. Para isto, partimos impondo uma relação de autodualidade modificada do tipo

$$g' = \epsilon \Lambda \frac{ag}{r}. \quad (4.20)$$

Derivando esta expressão obtemos

$$g'' + \frac{g'}{r} - \Lambda^2 \frac{a^2}{r^2} g = \epsilon \Lambda \frac{a'g}{r}. \quad (4.21)$$

Note-se que a equação (4.19) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} 0 = & \epsilon \eta \frac{a'g}{r} + \frac{1}{e} (k_{\phi F})_{r\theta} \frac{a'g}{r} + 2e (k_{\phi\phi})_{0\theta} \frac{A_0 g a}{r} \\ & + e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] A_0^2 g - (k_{\phi F})_{0r} A_0' g - \frac{1}{2v^2} \frac{\partial U}{\partial g}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde definimos o parâmetro η como sendo

$$\eta = [1 - (k_{\phi\phi})_{rr}] \Lambda = \sqrt{[1 - (k_{\phi\phi})_{\theta\theta}] [1 - (k_{\phi\phi})_{rr}]}. \quad (4.23)$$

Deste modo, podemos obter a expressão

$$\frac{1}{2v^2} \frac{\partial U}{\partial g} = \epsilon\eta \frac{a'g}{r} + e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] (A_0)^2 g + 2 \frac{\epsilon e}{\Lambda} (k_{\phi\phi})_{0\theta} A_0 g' - e (k_{\phi F})_{0r} A'_0 g. \quad (4.24)$$

Agora, inserindo a equação (4.21) na lei de Ampère (4.8),

$$B' - (k_{AF})_3 A'_0 + \epsilon\eta e v^2 (g^2)' = 2e^2 v^2 (k_{\phi\phi})_{0\theta} A_0 g^2. \quad (4.25)$$

Esta equação pode ser integrada se

$$(k_{\phi\phi})_{0\theta} = 0, \quad (4.26)$$

é satisfeita. Desse modo, obtemos

$$\frac{a'}{r} = -e (k_{AF})_3 A_0 + \epsilon\eta e^2 v^2 g^2 - e C_1, \quad (4.27)$$

onde C_1 é uma constante de integração.

Multiplicando esta última equação pelo fator $\epsilon\eta g$ e igualando os termos da direita nas equações (4.22) e (4.27), temos

$$\frac{1}{2v^2} \frac{\partial U}{\partial g} = e^2 v^2 \eta^2 g^3 - \epsilon\eta (k_{AF})_3 A_0 g - \epsilon\eta e C_1 g + e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] (A_0)^2 g - e (k_{\phi F})_{0r} A'_0 g. \quad (4.28)$$

Integrando novamente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} U &= \frac{1}{2} e^2 v^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] (A_0)^2 g^2 + \frac{1}{4} \left[\epsilon\eta v^2 g^2 - \epsilon C_1 + \epsilon (k_{AF})_3 A_0 + \frac{(k_{\phi F})_{0r} A'_0}{\eta} \right]^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[C_1 + (k_{AF})_3 A_0 + \frac{\epsilon (k_{\phi F})_{0r} A'_0}{\eta} \right]^2 + v^2 C_2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Fixando as constantes de integração, encontramos

$$C_1 = \epsilon e v^2, \quad C_2 = \frac{1}{4v^2} \left[C_1 + (k_{AF})_3 A_0 + \frac{\epsilon (k_{\phi F})_{0r} A'_0}{\eta} \right]^2, \quad (4.30)$$

de modo que o potencial é escrito da seguinte maneira

$$U = e^2 v^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] (A_0)^2 g^2 + \frac{1}{2} \bar{U}, \quad (4.31)$$

onde

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \left[e v^2 (1 - \eta g^2) + \epsilon (k_{AF})_3 A_0 + \frac{(k_{\phi F})_{0r} A'_0}{\eta} \right]^2.$$

Com isso, a equação (4.27) resulta

$$-\frac{a'}{er} = B = \epsilon e v^2 (1 - \eta g^2) + (k_{AF})_3 A_0. \quad (4.32)$$

Na próxima seção veremos que a equação (4.32), corresponde com a equação BPS para o campo magnético. Levando em consideração que o formalismo BPS garante que devemos ter a seguinte relação entre o potencial e a equação BPS

$$-\frac{a'}{er} = \epsilon\sqrt{2\bar{U}} = \epsilon ev^2 (1 - \eta g^2) + (k_{AF})_3 A_0 + \frac{\epsilon (k_{\phi F})_{0r} A'_0}{\eta}, \quad (4.33)$$

comparando com a equação (4.32) vemos que esta igualdade somente será satisfeita se

$$(k_{\phi F})_{0r} = 0. \quad (4.34)$$

Sob essa condição, escrevemos o potencial em termos dos campos originais

$$U = e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] (A_0)^2 |\phi|^2 + \frac{1}{2} [ev^2 - e\eta |\phi|^2 + \epsilon (k_{AF})_3 A_0]^2. \quad (4.35)$$

Assim como no modelo de MCSH a presença de A_0 no potencial BPS quebra a simetria abeliana de gauge local do modelo. Introduzimos na densidade lagrangiana o campo escalar neutro Ψ , satisfazendo a condição BPS

$$\Psi = -\epsilon A_0, \quad (4.36)$$

resultando na seguinte densidade lagrangiana que descreve o modelo

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} (k_{AF})_\alpha A_\beta F_{\rho\sigma} + |D_\mu \phi|^2 + (k_{\phi\phi})^{\mu\nu} (D_\mu \phi)^* (D_\nu \phi) \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu \Psi \partial^\mu \Psi - e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] \Psi^2 |\phi|^2 - \bar{U}(|\phi|, \Psi). \end{aligned} \quad (4.37)$$

O potencial BPS é dado por

$$\bar{U}(|\phi|, \Psi) = \frac{1}{2} [ev^2 - e\eta |\phi|^2 - (k_{AF})_3 \Psi]^2. \quad (4.38)$$

Este potencial possui dois vácuos, um simétrico

$$\phi = 0, \quad \Psi = \frac{ev^2}{(k_{AF})_3}, \quad (4.39)$$

e outro assimétrico

$$\Psi = 0, \quad |\phi| = \frac{v}{\eta^{1/2}}. \quad (4.40)$$

Este último será o responsável pela geração de vórtices BPS topológicos. Vemos, claramente, que o valor esperado no vácuo do setor de Higgs é modificado devido às contribuições dos termos que violam a simetria de Lorentz.

Na densidade lagrangiana (4.37) excluimos o tensor $(k_{\phi F})^{\mu\nu}$ pois $(k_{\phi F})_{ij}$ é nulo e a condição $(k_{\phi F})_{0r} = 0$ implica que $(k_{\phi F})_{01} = 0 = (k_{\phi F})_{02}$. Por último o coeficiente $(k_{\phi F})_{03}$ não aparece nas equações que descrevem os vórtices.

4.2 Energia BPS do modelo de MCFJH

Agora, vamos calcular a densidade de energia mínima (BPS) armazenada na configuração dos vórtices para o modelo em estudo. Para isto, seguiremos o procedimento realizado nos modelos anteriores, ou seja, procuramos uma expressão para a hamiltoniana canônica. Com a finalidade de facilitar a leitura deste trabalho, o desenvolvimento completo do cálculo da energia BPS está especificado passo a passo no Apêndice A.

A hamiltoniana canônica do modelo (4.37) é dada pela expressão calculada na equação (A.24) e escrita no regime estacionário provê a densidade de energia do modelo

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} (\partial_k A_0)^2 + \frac{1}{4} (F_{jk})^2 + |D_j \phi|^2 + \frac{1}{2} (\partial_j \Psi)^2 \\ & - (k_{\phi\phi})_{jk} (D_j \phi)^* (D_k \phi) + e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] (A_0)^2 |\phi|^2 \\ & + e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] \Psi^2 |\phi|^2 + \frac{1}{2} [ev^2 - e\eta |\phi|^2 - (k_{AF})_3 \Psi]^2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Para a obtermos a configuração de vórtices adotamos um *ansatz* modificado, dado pelas seguintes configurações

$$\phi = \frac{v}{\eta^{1/2}} g(r) \exp\left(i\theta \frac{n}{\Lambda}\right), \quad A_\theta = -\frac{1}{er} \left[a(r) - \frac{n}{\Lambda} \right], \quad A_0 = \omega(r), \quad (4.42)$$

onde $a(r)$, $g(r)$ e $\omega(r)$ são funções escalares regulares na origem, satisfazendo condições de contorno adequadas, as quais garantem que a energia total seja finita (vide equações (4.60) e (4.65)). Com os *ansatz* modificados obtemos o hamiltoniano em coordenadas polares

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2} [ev^2 (1 - g^2) - (k_{AF})_3 \Psi]^2 \\ & + [1 - (k_{\phi\phi})_{rr}] \frac{v^2}{\eta} (g')^2 + [1 - (k_{\phi\phi})_{\theta\theta}] \frac{v^2}{\eta} \left(\frac{ag}{r}\right)^2 \\ & + \frac{1}{2} (A_0')^2 + \frac{1}{2} (\Psi')^2 + e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] [(A_0)^2 + \Psi^2] \frac{v^2}{\eta} g^2. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Impondo a condição BPS $\Psi = -\epsilon A_0$ obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2} [ev^2 (1 - g^2) + \epsilon (k_{AF})_3 A_0]^2 + \frac{v^2}{\Lambda} \left[(g')^2 + \Lambda^2 \left(\frac{ag}{r}\right)^2 \right] \\ & + (A_0')^2 + 2e^2 \frac{v^2}{\eta} [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] (A_0)^2 g^2. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Agora, para calcular a energia mínima (BPS) completamos os quadrados de (4.44), ficando escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} \left\{ B \mp [ev^2 (1 - g^2) \pm (k_{AF})_3 A_0] \right\}^2 + \frac{v^2}{\Lambda} \left(g' \mp \Lambda \frac{ag}{r} \right)^2 \\ & \pm B [ev^2 - ev^2 g^2 \pm (k_{AF})_3 A_0] \pm \frac{av^2}{r} (g^2)' + (A_0')^2 + 2e^2 \frac{v^2}{\eta} [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] (A_0)^2 g^2. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Podemos escrever a lei de Gauss usando as restrições $(k_{\phi\phi})_{0\theta} = 0 = (k_{\phi F})_{0r}$ obtidas no cálculo do potencial

$$A_0'' + \frac{A_0'}{r} - (k_{AF})_3 B = 2e^2 \frac{v^2}{\eta} [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] A_0 g^2, \quad (4.46)$$

e escrevemos

$$2e^2 \frac{v^2}{\eta} [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] (A_0)^2 g^2 = A_0 A_0'' + \frac{A_0 A_0'}{r} - (k_{AF})_3 B A_0,$$

que substituída na equação da densidade de energia permite obter

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \{B \mp [ev^2 (1 - g^2) \pm (k_{AF})_3 A_0]\}^2 + \frac{v^2}{\Lambda} \left(g' \mp \Lambda \frac{ag}{r}\right)^2 \\ &\quad \pm ev^2 B \pm v^2 \frac{(ag^2)'}{r} + \frac{(rA_0 A_0')'}{r}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Impondo que os termos quadráticos sejam nulos, obtemos as equações BPS

$$g' = \pm \Lambda \frac{ag}{r}, \quad (4.48)$$

$$-\frac{a'}{er} = B = \pm ev^2 (1 - g^2) + (k_{AF})_3 A_0. \quad (4.49)$$

A primeira delas, foi proposta em (4.20). Inserindo as equações BPS no hamiltoniano obtemos a densidade de energia BPS

$$\mathcal{E}_{BPS} = \pm ev^2 B \pm v^2 \frac{(ag^2)'}{r} + \frac{(rA_0 A_0')'}{r}. \quad (4.50)$$

Integrando em todo o espaço e aplicando o teorema da divergência de Gauss, obtemos a energia BPS total armazenada na configuração dos vórtices

$$E_{BPS} = \pm ev^2 \int d^2r B = \pm 2\pi v^2 \frac{n}{\Lambda}, \quad (4.51)$$

onde as condições de contorno (4.60) e (4.65) foram usadas. Observamos neste trabalho, o aparecimento da fracionalização do fluxo magnético, sendo este dependente dos parâmetros diagonais do tensor de quebra no setor de Higgs.

Utilizando as equações BPS e a lei de Gauss podemos expressar a hamiltoniana como uma soma de quadrados,

$$\mathcal{E}_{BPS} = B^2 + 2\Lambda v^2 \left(\frac{ag}{r}\right)^2 + 2e^2 v^2 \frac{1 + (k_{\phi\phi})_{00}}{\eta} (A_0)^2 g^2 + (A_0')^2, \quad (4.52)$$

onde,

$$\Lambda > 0 \quad , \quad \frac{1 + (k_{\phi\phi})_{00}}{\eta} > 0.$$

4.3 Comportamento assintótico

O comportamento assintótico é estudado resolvendo os campos em $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$. Para isto utilizamos as equações BPS juntamente com a lei de Gauss

$$g' = \pm \Lambda \frac{ag}{r}, \quad (4.53)$$

$$-\frac{a'}{er} = \pm ev^2 (1 - g^2) + (k_{AF})_3 A_0, \quad (4.54)$$

$$A_0'' + \frac{A_0'}{r} - (k_{AF})_3 B = 2e^2 v^2 \frac{1 + (k_{\phi\phi})_{00}}{\eta} A_0 g^2. \quad (4.55)$$

Para estudar comportamento dos campos em $r \rightarrow 0$ usamos as expansões

$$g(r) = \sum_{j=1}^{\infty} G_j r^j, \quad a(r) = a_0 - \sum_{j=1}^{\infty} A_j r^j, \quad \omega(r) = \omega_0 + \sum_{j=1}^{\infty} W_j r^j, \quad (4.56)$$

de tal modo que após substituídas nas equações (4.53)–(4.55), obtemos as expressões:

$$g(r) = G_n r^n + \dots, \quad (4.57)$$

$$a(r) = \frac{n}{\Lambda} - \frac{1}{2} [e^2 v^2 + e (k_{AF})_3 \omega_0] r^2 + \dots, \quad (4.58)$$

$$A_0(r) = \omega_0 + \frac{1}{4} [ev^2 + (k_{AF})_3 \omega_0] (k_{AF})_3 r^2 + \dots. \quad (4.59)$$

A segunda equação descrevendo o comportamento do campo $a(r)$ na origem justifica a escolha do novo *ansatz* imposto na equação (4.42). A terceira equação, permite impor a seguinte condição de contorno para o potencial escalar $A_0'(0) = 0$. Então, as condições de contorno em $r = 0$ para os campos são

$$g(0) = 0, \quad a(0) = \frac{n}{\Lambda}, \quad A_0'(0) = 0. \quad (4.60)$$

Na sequência, analisamos o comportamento assintótico em $r \rightarrow \infty$, para o qual os campos tem a seguinte forma

$$g = 1 - \delta g_1, \quad a = \delta a_1, \quad A_0 = \delta \omega_1. \quad (4.61)$$

Resolvendo o sistema de equações diferenciais linearizadas, obtemos

$$\delta g_1 = C_g r^{-1/2} e^{-\beta r}, \quad \delta \omega_1 = C_\omega r^{-1/2} e^{-\beta r}, \quad \delta a_1 = C_a r^{1/2} e^{-\beta r}, \quad (4.62)$$

que é o comportamento esperado para vórtices do tipo ANO (Abrikosov-Nielsen-Olesen), onde o parâmetro β está relacionado com a extensão espacial dos vórtices no espaço. Este parâmetro é dado pelo determinante formado a partir do sistema de três equações diferenciais lineares de primeira ordem, envolvendo as constantes nas equações (4.62), e para este modelo será dado por

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{[(k_{AF})_3]^2 + 2e^2 v^2 \Lambda (1 + \sqrt{\Delta})^2} - \frac{1}{2} \sqrt{[(k_{AF})_3]^2 + 2e^2 v^2 \Lambda (1 - \sqrt{\Delta})^2}, \quad (4.63)$$

com Δ sendo

$$\Delta = \frac{1 + (k_{\phi\phi})_{00}}{\Lambda\eta} = \frac{1 + (k_{\phi\phi})_{00}}{1 - (k_{\phi\phi})_{\theta\theta}} > 0. \quad (4.64)$$

A escala de massa β depende explicitamente dos parâmetros da VL que advém do setor de Higgs, e assim também são os responsáveis por controlar o comportamento assintótico dos campos no infinito. Portanto, as condições de contorno satisfeitas pelos campos em $r \rightarrow \infty$ são

$$g(\infty) = 1 \quad , \quad a(\infty) = 0 \quad , \quad A_0(\infty) = 0. \quad (4.65)$$

4.4 Análise numérica

Com a finalidade de fazer a análise numérica e deixar as equações numa forma adimensional, usamos a seguinte mudança de escala

$$\rho = ev\Lambda^{1/2}r \quad ,$$

com a qual reescrevemos os campos e as funções a serem “plotadas”, a saber

$$g(r) \rightarrow \bar{g}(\rho) \quad , \quad a(r) \rightarrow \frac{\bar{a}(\rho)}{\Lambda} \quad , \quad A_0(r) \rightarrow \frac{v}{\Lambda^{1/2}}\bar{\omega}(\rho) \quad , \quad (4.66)$$

$$(k_{AF})_3 \rightarrow ev\Lambda^{1/2}\kappa \quad , \quad B(r) \rightarrow ev^2\bar{B}(\rho) \quad , \quad \mathcal{E}_{BPS}(r) \rightarrow \frac{v^2}{\Lambda}\bar{\mathcal{E}}_{BPS}(\rho). \quad (4.67)$$

Com esta mudança de escala, podemos escrever as equações BPS e a lei de Gauss em uma forma adimensional

$$\bar{g}' = \pm \frac{\bar{a}\bar{g}}{\rho}, \quad (4.68)$$

$$-\frac{\bar{a}'}{\rho} = \pm (1 - \bar{g}^2) + \kappa\bar{\omega}, \quad (4.69)$$

$$\bar{\omega}'' + \frac{\bar{\omega}'}{\rho} + \kappa\frac{\bar{a}'}{\rho} = 2\Delta\bar{\omega}\bar{g}^2. \quad (4.70)$$

Este conjunto de equações seria exatamente igual ao que descreve os vórtices do modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs se $\Delta = 1$.

As equações adimensionais serão resolvidas utilizando as seguintes condições de contorno

$$\bar{g}(0) = 0 \quad , \quad \bar{a}(0) = n \quad , \quad \bar{\omega}'(0) = 0 \quad , \quad (4.71)$$

$$\bar{g}(\infty) = 1 \quad , \quad \bar{a}(\infty) = 0 \quad , \quad \bar{\omega}(\infty) = 0. \quad (4.72)$$

A densidade de energia BPS adimensional é identificada como

$$\bar{\mathcal{E}}_{BPS}(\rho) = \bar{B}^2 + 2 \left(\frac{\bar{a}\bar{g}}{\rho} \right)^2 + 2\Delta(\bar{\omega}\bar{g})^2 + (\bar{\omega}')^2. \quad (4.73)$$

As figuras 4.1–4.6 mostram os perfis das soluções para $n = 1$ obtidas a partir das equações adimensionais (4.68)–(4.70). Em todos os gráficos, a linha sólida preta corresponde a $\Delta = 1$ que representa as soluções BPS similares às obtidas no modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs.

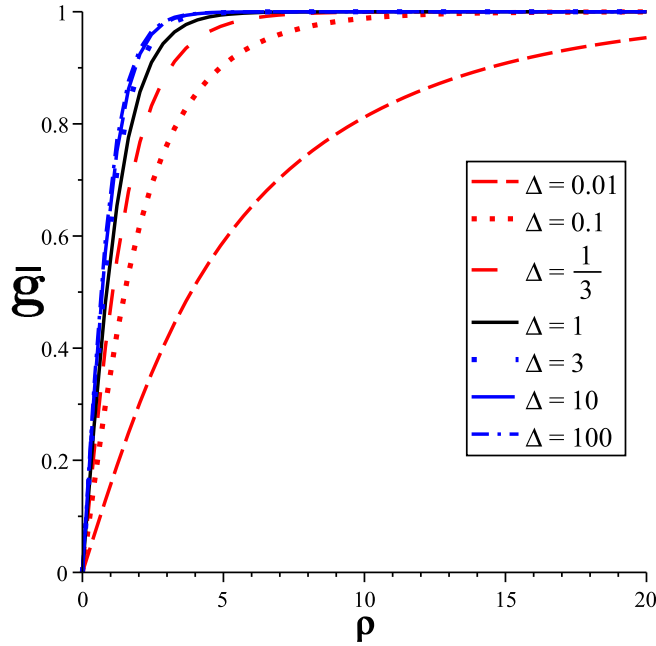


Figura 4.1: Campo de Higgs $\bar{g}(\rho)$.

Figura 4.1. Note-se que o campo de Higgs alcança o estado de vácuo mais rapidamente para valores de $\Delta \gg 1$, já para valores de $\Delta \rightarrow 0$ ele satura mais lentamente, alcançando o estado de vácuo para distâncias radiais maiores. Também, observa-se que existe um estreitamento máximo para valores de $\Delta \gg 1$, quando os perfis começam se sobrepor.

Figura 4.2. No perfil para o potencial vetor pode ser visto claramente como o campo de gauge é estreitado por valores grandes de Δ . Por outro lado, para $\Delta \rightarrow 0$, o potencial vetor decai de forma menos acentuada e o campo de gauge ocupa uma área maior. Lembrando que para estes *plots* foi fixado $n = 1$, independentemente do valor de Δ , na origem todos os campos adquirem o mesmo valor.

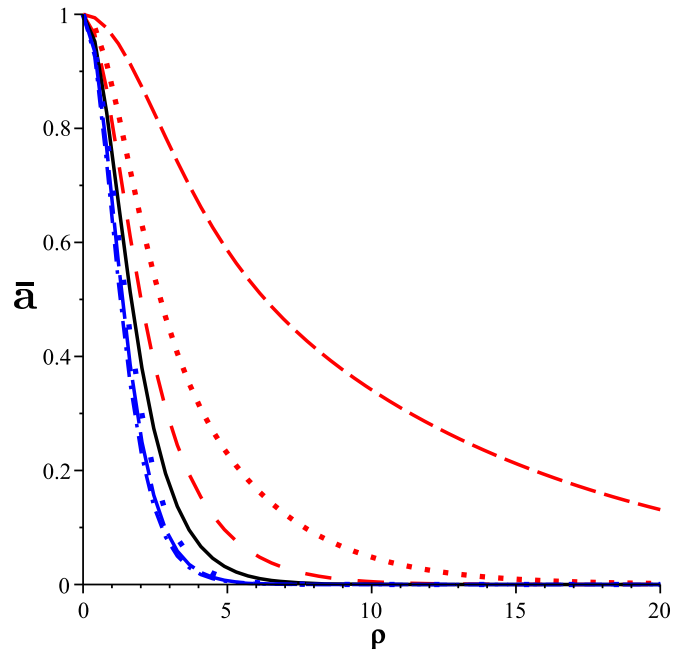


Figura 4.2: Campo vetorial $\bar{a}(\rho)$.

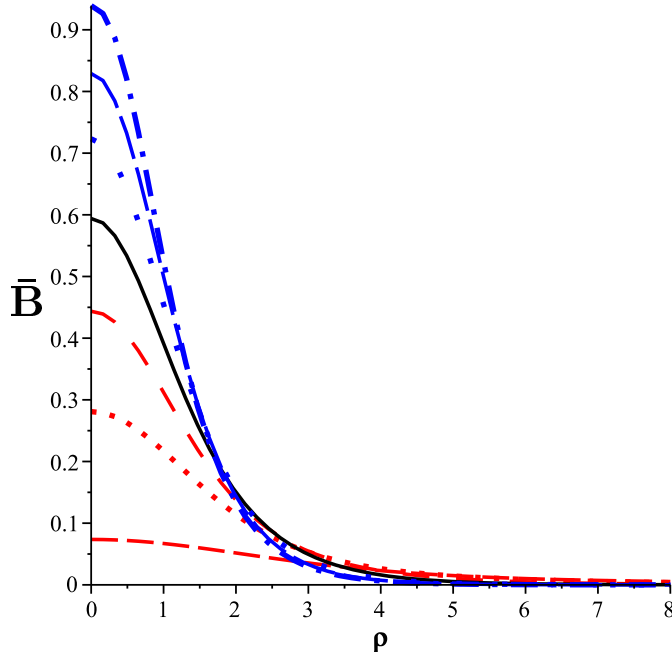


Figura 4.3: Campo magnético $\bar{B}(\rho)$.

Figura 4.3. Observamos que o campo magnético é mais intenso na origem para valores de $\Delta \gg 1$, e tem um decaimento acentuado quando comparado com a solução $\Delta = 1$. Já para valores de $\Delta \rightarrow 0$ temos pouca intensidade na origem e o campo decai lentamente de modo que se torna mais espalhado.

Figura 4.4. Os perfis do potencial escalar se tornam cada vez menores para valores de $\Delta \gg 1$ e para valores menores que 1 o perfil é mais alargado. O fato interessante acontece quando $\Delta \gg 1$, pois parece que neste limite, o parâmetro $(k_{AF})_3$ perde sua influência e o potencial escalar fica muito pequeno. Isso implica que os vórtices se tornam descarregados tal como os do modelo de Maxwell-Higgs.

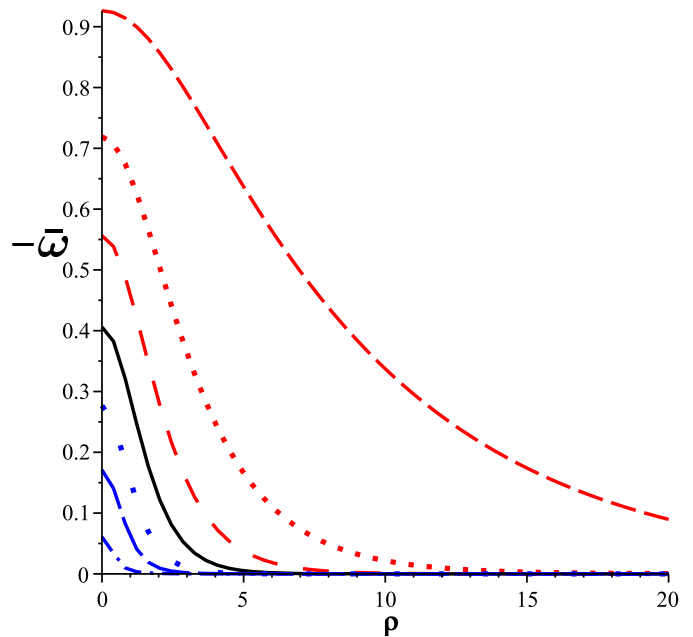


Figura 4.4: Potencial escalar $-\bar{\omega}(\rho)$.

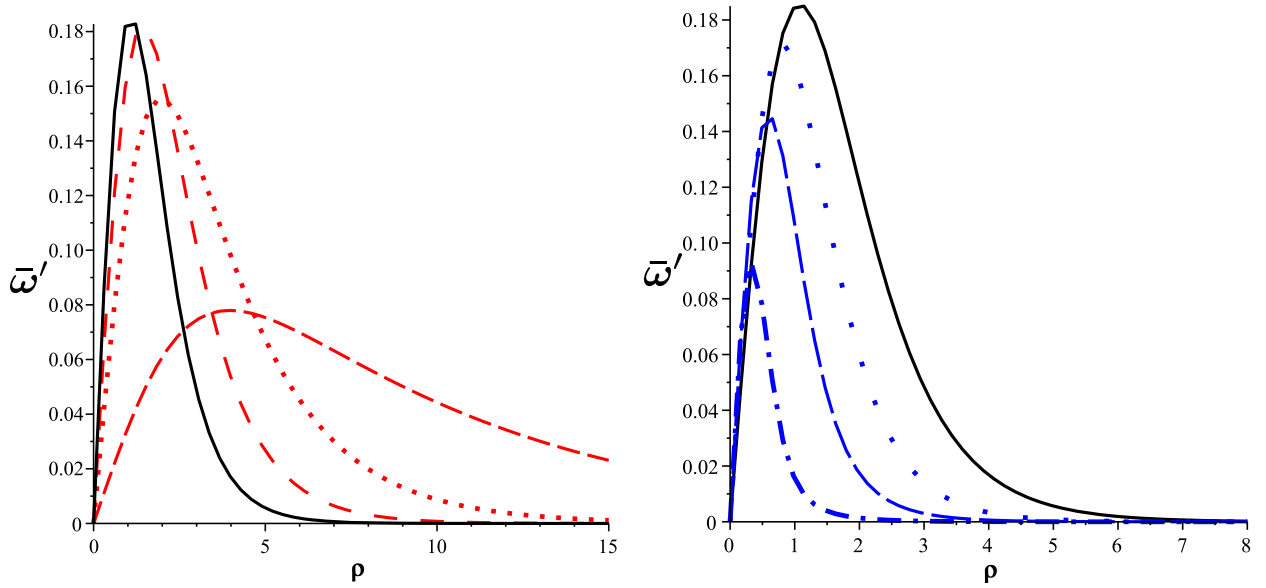


Figura 4.5: Campo elétrico $\bar{\omega}'(\rho)$.

Figura 4.5. Nestes dois gráficos para o campo elétrico pode ser visualizado o deslocamento provocado pela quebra da simetria de Lorentz no setor de Higgs. O campo elétrico alcança o máximo para $\Delta = 1$, correspondendo ao modelo de MCSH.

Na figura 4.6 ao lado, podemos observar que o perfil da densidade de energia BPS para $n = 1$, os valores de $\Delta \gg 1$ concentram a energia na origem e esta decai abruptamente, correspondendo a um vórtice bem localizado na origem. Por outro lado, quando temos $\Delta \rightarrow 0$, a amplitude da energia, na origem, diminui para zero lentamente, e a energia se distribui por uma região maior.

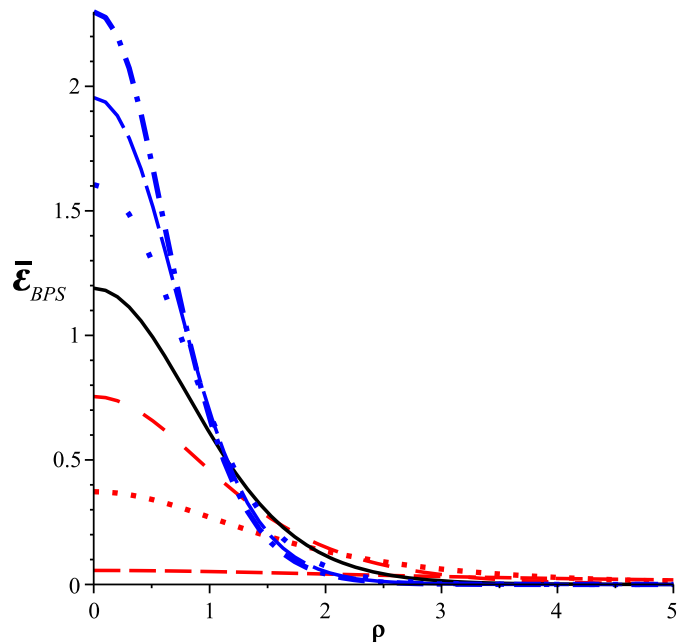


Figura 4.6: Densidade de energia BPS $\bar{\mathcal{E}}_{BPS}(\rho)$.

Capítulo 5

Modelo abeliano de Maxwell-Higgs com violação da simetria de Lorentz

Neste capítulo investigaremos a formação de vórtices eletricamente carregados e com fluxo magnético fracionário num modelo de Maxwell-Higgs, em que tanto o campo eletromagnético como o campo de Higgs, contém termos de violação de Lorentz que preservam a simetria CPT. Especificamente, o termos da VL que modificam o campo eletromagnético pertencem ao setor não birrefringente do MPE.

O modelo é dado pela seguinte densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\kappa^{\rho\alpha}F_{\rho\sigma}F_{\alpha}{}^{\sigma} + |D_{\mu}\phi|^2 + (k_{\phi\phi})^{\mu\nu} (D_{\mu}\phi)^* (D_{\nu}\phi) - U(|\phi|), \quad (5.1)$$

onde novamente $U(|\phi|)$ é o potencial gerador de vórtices a ser determinado. Não foi incluído neste modelo o termo com $(k_{\phi F})_{\mu\nu}$, o qual aparece no modelo estudado no capítulo anterior. Desta forma, não carregamos o problema de termos uma densidade de energia não positiva-definida.

A equações de movimento do campo de calibre proporcionam as leis de Gauss e de Ampère, as quais, no regime estacionário, são dadas pelas seguintes expressões: Primeiro a lei Gauss é

$$L_{ij}\partial_i\partial_j A_0 + \epsilon_{ija}\kappa_{0i}\partial_j B_a = 2e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] A_0 |\phi|^2 + e (k_{\phi\phi})_{0i} J_i, \quad (5.2)$$

onde definimos a matriz L_{ij} definida positiva e simétrica

$$L_{ij} = (1 + \kappa_{00})\delta_{ij} - \kappa_{ij}, \quad (5.3)$$

a qual carrega os coeficientes CPT-par de paridade-par da quebra de Lorentz. A lei de Ampère é escrita como

$$(\epsilon_{jbc} - \epsilon_{jac} \kappa_{ab} - \kappa_{ja}\epsilon_{abc})\partial_b B_c - \kappa_{0i}\partial_j\partial_j A_0 + \kappa_{0j}\partial_j\partial_i A_0 = e\mathcal{J}_i, \quad (5.4)$$

onde a corrente \mathcal{J}_i é dada por

$$\mathcal{J}_i = J_i - (k_{\phi\phi})_{ij} J_j + (k_{\phi\phi})_{0i} J_0, \quad (5.5)$$

com J_μ definida em (2.6). Observamos que o coeficiente κ_{0i} de paridade-ímpar é o responsável pela mistura dos setores elétrico e magnético.

Escrevemos por último a equação de movimento para o campo de Higgs no regime estacionário

$$0 = \left[\delta_{ij} - (k_{\phi\phi})_{ij} \right] D_i D_j \phi - ie (k_{\phi\phi})_{0j} A_0 D_j \phi \quad (5.6)$$

$$- ie (k_{\phi\phi})_{0j} D_j (A_0 \phi) + e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] A_0^2 \phi - \frac{\partial U}{\partial \phi^*}.$$

5.1 Cálculo do potencial BPS

Para a obtenção de configuração de vórtices adotamos o *ansatz* modificado definido em (4.42), com $a(r)$, $g(r)$ e $A_0(r)$ funções regulares tanto na origem como no infinito, satisfazendo condições de contorno adequadas garantindo que energia BPS total seja finita (vide subseção 5.3). Com estes *ansatz* a lei de Gauss (5.2) é escrita da seguinte forma

$$(1 + \kappa_{00} - \kappa_{rr}) \frac{(rA_0)'}{r} - \kappa_{0\theta} \frac{(rB)'}{r} = 2e^2 v^2 \frac{1 + (k_{\phi\phi})_{00}}{\eta} A_0 g^2 + 2 \frac{e^2 v^2}{\eta} (k_{\phi\phi})_{0\theta} \frac{ag^2}{r}. \quad (5.7)$$

Do mesmo modo, substituímos o *ansatz* (4.42) na lei de Ampère (5.4) e na equação para o campo de Higgs (5.6), das quais obtemos as condições sob os coeficientes da VL

$$(k_{\phi\phi})_{r\theta} = 0, \quad (k_{\phi\phi})_{0r} = 0. \quad (5.8)$$

Com os *ansatz* escrevemos a lei de Ampère projetada no plano

$$(1 - s) B' + \kappa_{0\theta} A_0'' + 2ev^2 \Lambda \frac{ag^2}{r} = 2 \frac{e^2 v^2}{\eta} (k_{\phi\phi})_{0\theta} A_0 g^2, \quad (5.9)$$

juntamente com a equação de movimento para o campo de Higgs

$$0 = [1 - (k_{\phi\phi})_{rr}] \left(g'' + \frac{g'}{r} - \Lambda^2 \frac{a^2}{r^2} g \right) + 2e (k_{\phi\phi})_{0\theta} \frac{A_0 g a}{r} \quad (5.10)$$

$$+ e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] (A_0)^2 g - \frac{\eta}{2v^2} \frac{\partial U}{\partial g}.$$

Impondo a condição de autodualidade modificada ou primeira equação BPS

$$g' = \epsilon \Lambda \frac{ag}{r}, \quad \epsilon = \pm, \quad (5.11)$$

a equação para o campo de Higgs pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{\eta}{2v^2} \frac{\partial U}{\partial g} = \epsilon \eta \frac{a'g}{r} + 2e (k_{\phi\phi})_{0\theta} \frac{A_0 g a}{r} + e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] (A_0)^2 g. \quad (5.12)$$

Utilizando (5.11) na lei de Ampère, esta poderá ser integrada somente se

$$(k_{\phi\phi})_{0\theta} = 0,$$

o que nos leva à segunda equação BPS para o campo magnético

$$B = -\frac{a'}{er} = \epsilon \frac{ev^2}{1-s} (1-g^2) - \frac{\kappa_{0\theta}}{1-s} A'_0, \quad (5.13)$$

onde definimos

$$s = \kappa_{rr} + \kappa_{\theta\theta}. \quad (5.14)$$

Substituindo (5.13) em (5.12) obtemos o potencial BPS

$$U = e^2 v^2 \frac{[1 + (k_{\phi\phi})_{00}]}{\eta} (A_0)^2 g^2 + \frac{1}{2} \frac{[ev^2 (1-g^2) - \epsilon \kappa_{0\theta} A'_0]^2}{(1-s)}, \quad (5.15)$$

o qual pode ser escrito em função dos campo originais da forma

$$U = e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] (A_0)^2 |\phi|^2 + \frac{1}{2} \frac{[ev^2 - e\eta |\phi|^2 + \epsilon \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j A_0]^2}{(1-s)}. \quad (5.16)$$

Novamente observamos que a presença de A_0 no potencial BPS quebra a simetria abeliana de gauge local do modelo. Logo, introduzimos na lagrangiana o campo escalar neutro Ψ , satisfazendo a seguinte condição BPS

$$\Psi = -\epsilon A_0, \quad (5.17)$$

de modo que o potencial BPS é reescrito da seguinte maneira em função dos campos originais,

$$U(|\phi|, \Psi) = e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] \Psi^2 |\phi|^2 + \frac{1}{2} \frac{[ev^2 - e\eta |\phi|^2 - \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j \Psi]^2}{(1-s)}. \quad (5.18)$$

Desse modo o modelo completo que proporciona soluções BPS é dado pela seguinte densidade de lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \kappa^{\rho\alpha} F_{\rho\sigma} F_\alpha^\sigma + |D_\mu \phi|^2 + (k_{\phi\phi})^{\mu\nu} (D_\mu \phi)^* (D_\nu \phi) \\ & + \frac{1}{2} (1 + \kappa_{00}) \partial_\mu \Psi \partial^\mu \Psi + \frac{1}{2} \kappa^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi - e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] \Psi^2 |\phi|^2 - \bar{U}(|\phi|, \Psi), \end{aligned} \quad (5.19)$$

onde definimos,

$$\bar{U}(|\phi|, \Psi) = \frac{1}{2(1-s)} [ev^2 - e\eta |\phi|^2 - \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j \Psi]^2. \quad (5.20)$$

5.2 Formalismo BPS e energia BPS

Para facilitar a leitura deste trabalho, o cálculo da hamiltoniana canônica do modelo foi inserida no Apêndice B. Aplicando o método de Bogomol'nyi e realizando algumas manipulações algébricas a expressão para a densidade de energia pode ser obtida e sua expressão é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} (1-s) \left[B \mp \frac{ev^2 (1-g^2) \mp \kappa_{0\theta} A'_0}{1-s} \right]^2 + \frac{v^2}{\Lambda} \left[g' \mp \Lambda \frac{ag}{r} \right]^2 \\ & \pm B e v^2 \pm v^2 \frac{(ag^2)'}{r} + (1 + \kappa_{00} - \kappa_{rr}) \frac{(r A_0 A'_0)'}{r} - \kappa_{0\theta} \frac{(r A_0 B)'}{r}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Os termos quadráticos quando nulos minimizam a densidade de energia e correspondem as equações BPS já calculadas em (5.11) e (5.13). Desta forma, obtemos soluções estáticas de mínima densidade de energia (densidade de energia BPS), sendo esta dada pela expressão,

$$\mathcal{E}_{BPS} = \pm B e v^2 \pm v^2 \frac{(ag^2)'}{r} + (1 + \kappa_{00} - \kappa_{rr}) \frac{(rA_0A_0')'}{r} - \kappa_{0\theta} \frac{(rA_0B)'}{r}. \quad (5.22)$$

Integrando em todo o espaço os termos contendo derivadas totais serão nulos. Assim, podemos escrever a energia BPS total armazenada na configuração dos vórtices

$$E_{BPS} = \pm e v^2 \int B d^2x = e v^2 \Phi, \quad (5.23)$$

sendo esta proporcional ao fluxo magnético, que é o resultado esperado para vórtices de Abrikosov

$$\Phi = \int B d^2x = \frac{2\pi n}{e \Lambda}. \quad (5.24)$$

Dadas as condições de contorno satisfeitas pelos campos (vide seção 5.3) pode ser observado que além da energia ser quantizada pela carga topológica n , ela também será fracionária. Os elementos diagonais da matriz de quebra de simetria no setor de Higgs $(k_{\phi\phi})_{rr}$ e $(k_{\phi\phi})_{\theta\theta}$, são os responsáveis pela fracionalização da energia. Obviamente, quando zeramos estes elementos de matriz recuperamos o modelo de MH, como é de esperar-se.

5.3 Comportamento assintótico

As equações BPS e a lei de Gauss do modelo são dadas respectivamente, por:

$$g' = \epsilon \Lambda \frac{ag}{r}, \quad (5.25)$$

$$B = -\frac{a'}{er} = \epsilon \frac{ev^2}{1-s} (1-g^2) - \frac{\kappa}{1-s} A_0', \quad (5.26)$$

$$(1 + \lambda_r) \left(A_0'' + \frac{A_0'}{r} \right) - \kappa \frac{(rB)'}{r} = 2e^2 v^2 \sigma A_0 g^2, \quad (5.27)$$

onde

$$\kappa = \kappa_{0\theta} \quad , \quad s = \kappa_{rr} + \kappa_{\theta\theta} \quad , \quad \lambda_r = \kappa_{00} - \kappa_{rr} \quad , \quad \sigma = \frac{1 + (k_{\phi\phi})_{00}}{\eta}.$$

O comportamento dos campos na origem ($r = 0$)

$$g(r) = G_n r^n + \dots, \quad (5.28)$$

$$a(r) = \frac{n}{\Lambda} - \frac{1}{2} \frac{e^2 v^2 (1 + \lambda_r)}{\kappa^2 + (1-s)(1 + \lambda_r)} r^2 + \dots, \quad (5.29)$$

$$A_0(r) = \omega_0 + \frac{ev^2 \kappa}{\kappa^2 + (1-s)(1 + \lambda_r)} r + \dots \quad (5.30)$$

Essas equações permitem impor as seguintes condições de contorno em $r = 0$

$$g(0) = 0, \quad a(0) = \frac{n}{\Lambda}, \quad A'_0(0) = \frac{ev^2\kappa}{\kappa^2 + (1-s)(1+\lambda_r)}. \quad (5.31)$$

Isso mostra que a existência de vórtices carregados somente é possível se $\kappa = \kappa_{0\theta}$ for não nulo.

Comportamento dos campos no infinito ($r = \infty$)

Com a seguinte forma funcional para os campos no infinito

$$g = 1 - \delta g, \quad a = \delta a, \quad A_0 = \delta\omega,$$

juntamente com o decaimento exponencial proposto por Abrikosov

$$\delta g \sim r^{-1/2} \exp(-\beta r) \sim \delta\omega, \quad (5.32)$$

$$\delta a \sim r^{1/2} \exp(-\beta r), \quad (5.33)$$

obtemos o parâmetro β , dado por

$$\beta = ev\Lambda^{1/2} \sqrt{\frac{(1+\lambda_r) + \Delta(1-s) \pm \sqrt{[(1+\lambda_r) - \Delta(1-s)]^2 - 4\Delta\kappa^2}}{(1-s)(1+\lambda_r) + \kappa^2}}, \quad (5.34)$$

o sinal $+$ ($-$) corresponde a $(1+\lambda_r) - \Delta(1-s) > 0$ (< 0), respectivamente. Renomeamos

$$\Delta = \frac{\sigma}{\Lambda} = \frac{1 + (k_{\phi\phi})_{00}}{\Lambda\eta}. \quad (5.35)$$

No limite para $\kappa = 0$, obtemos o comportamento assintótico de vórtices BPS descarregados

$$\beta = ev\Lambda^{1/2} \sqrt{\frac{2}{1-s}}. \quad (5.36)$$

5.4 Análise numérica

Com a finalidade de efetuar a análise numérica e deixar as equações numa forma adimensional, novamente, efetuamos a seguinte mudança de escala

$$\rho = ev\Lambda^{1/2}r, \quad ,$$

a qual permite-nos reescrever os campos e os parâmetros da VL na forma

$$g(r) \rightarrow \bar{g}(\rho), \quad a(r) \rightarrow \frac{\bar{a}(\rho)}{\Lambda}, \quad A_0(r) \rightarrow \frac{v}{\Lambda^{1/2}}\bar{\omega}(\rho), \quad (5.37)$$

$$B(r) \rightarrow ev^2\bar{B}(\rho), \quad \mathcal{E}_{BPS}(r) \rightarrow \frac{v^2}{\Lambda}\bar{\mathcal{E}}_{BPS}(\rho). \quad (5.38)$$

As equações (5.25)–(5.27) que são as equações BPS e a lei de Gauss para o modelo, podem ser reescritas em uma forma adimensional:

$$\bar{g}' = \epsilon \frac{\bar{a}\bar{g}}{\rho}, \quad (5.39)$$

$$-\frac{\bar{a}'}{\rho} = \bar{B} = \epsilon \frac{(1 - \bar{g}^2)}{1 - s} - \frac{\kappa}{1 - s} \bar{\omega}', \quad (5.40)$$

$$(1 + \lambda_r) \left(\bar{\omega}'' + \frac{\bar{\omega}'}{\rho} \right) - \kappa \frac{(\rho \bar{B})'}{\rho} = 2\Delta \bar{g}^2 \bar{\omega}. \quad (5.41)$$

Do mesmo modo, a densidade de energia BPS na forma adimensional é dada por

$$\bar{\mathcal{E}}(\rho) = (1 - s) \bar{B}^2 + 2 \left(\frac{\bar{a}\bar{g}}{\rho} \right)^2 + 2\Delta (\bar{g}\bar{\omega})^2 + (1 + \lambda_r) (\bar{\omega}')^2, \quad (5.42)$$

e será positiva-definida se

$$s < 1, \quad \lambda_r > -1, \quad \Delta > 0. \quad (5.43)$$

Observando a equação para β (5.34), notamos que para certas combinações dos parâmetros, poderíamos obter um decaimento amortecido. Nesta situação teríamos um comportamento assintótico oscilante no infinito, sendo este descrito por uma combinação de senos e cossenos. Levando em consideração que estamos interessados somente em vórtices do tipo Abrikosov, ou seja, em vórtices que decaem exponencialmente, fixamos os parâmetro de forma tal que β seja real. Uma destas possíveis combinações é estudada a seguir.

5.4.1 Configuração de vórtices carregados: $\lambda_r = 0$, $s = 2\kappa$, $\Delta = 1$.

Os comportamentos apropriados para os campos em $\rho = 0$ são

$$\bar{g}(\rho) = G\rho^n + \dots, \quad (5.44)$$

$$\bar{a}(\rho) = n - \frac{1}{2} \frac{1}{(1 - \kappa)^2} \rho^2 + \dots, \quad (5.45)$$

$$\bar{\omega}(\rho) = \omega_0 + \frac{\kappa}{(1 - \kappa)^2} \rho + \dots. \quad (5.46)$$

O parâmetro β é dado por

$$\beta = ev\Lambda^{1/2} \sqrt{\frac{2}{1 - \kappa}}, \quad (5.47)$$

e a densidade de energia BPS pode ser reescrita como

$$\bar{\mathcal{E}} = (1 - 2\kappa) \bar{B}^2 + 2 \frac{\bar{a}^2 \bar{g}^2}{\rho^2} + 2\bar{g}^2 \bar{\omega}^2 + (\bar{\omega}')^2, \quad (5.48)$$

que é positiva-definida para $\kappa < \frac{1}{2}$.

As figuras 5.1–5.6 mostram os perfis das soluções BPS para $n = 1$ obtidas a partir das equações adimensionais (5.39)–(5.41). Mostramos a mudança nos perfis para diferentes valores do parâmetro κ . Em todos os gráficos a linha sólida preta ($\kappa = 0$) correspondente ao perfil das soluções do modelo de Maxwell-Higgs.

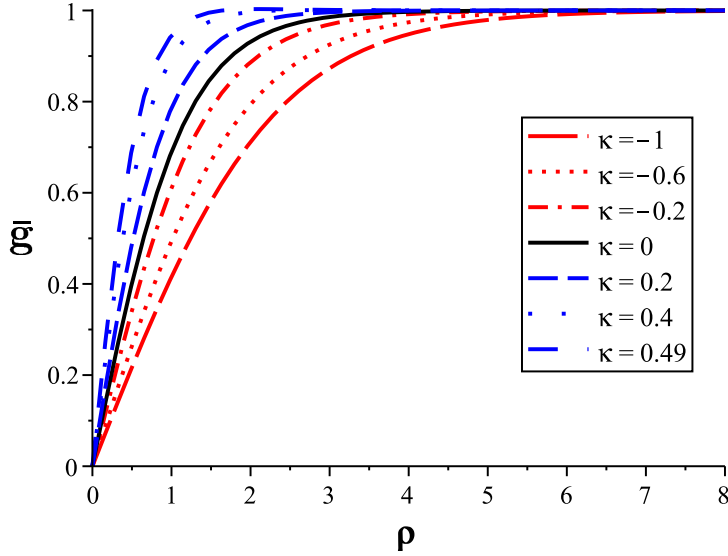


Figura 5.1: Campo de Higgs $\bar{g}(\rho)$.

Vale ressaltar aqui a novidade de que no intervalo $0 < \kappa < 1/2$ o potencial vetor assume valores negativos dentro de uma pequena região do eixo radial (veja inserção na Fig. 5.2), que obviamente está associado a uma inversão local do fluxo magnético. Esta inversão se torna mais pronunciada para valores de κ perto de $1/2$. Além disso, a região que apresenta a inversão do fluxo magnético encontra-se um pouco deslocada em direção à origem quando κ tende a $1/2$.

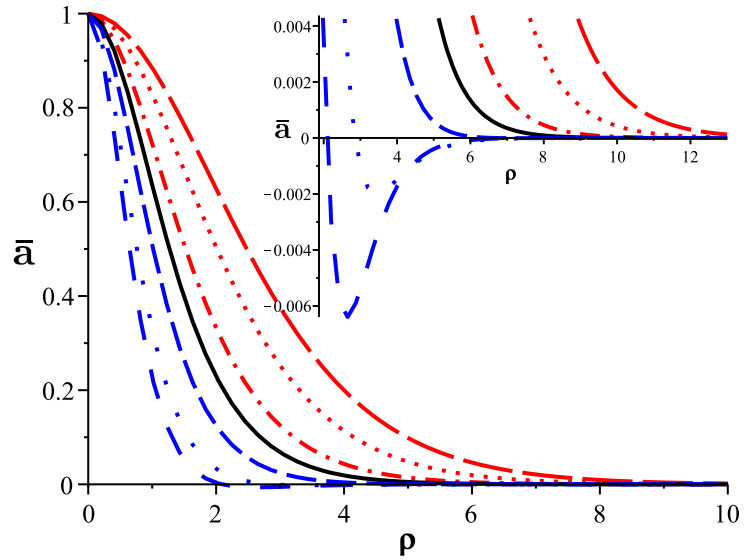


Figura 5.2: Campo vetorial $\bar{a}(\rho)$.

As Figs. 5.1 e 5.2 descrevem o resultado numérico obtido para o campo de Higgs e para o potencial vetor, cujos perfis são mostrados em torno ao perfil correspondente ao modelo de Maxwell-Higgs representado pela linha sólida preta ($\kappa = 0$). Os perfis se alargam para valores com $\kappa < 0$ e $|\kappa|$ aumentando, alcançando mais lentamente a respectiva região de saturação. Por outro lado para valores $0 < \kappa < 1/2$ os perfis se estreitam continuamente, aproximando-se ao mínimo quando κ tende ao valor $1/2$.

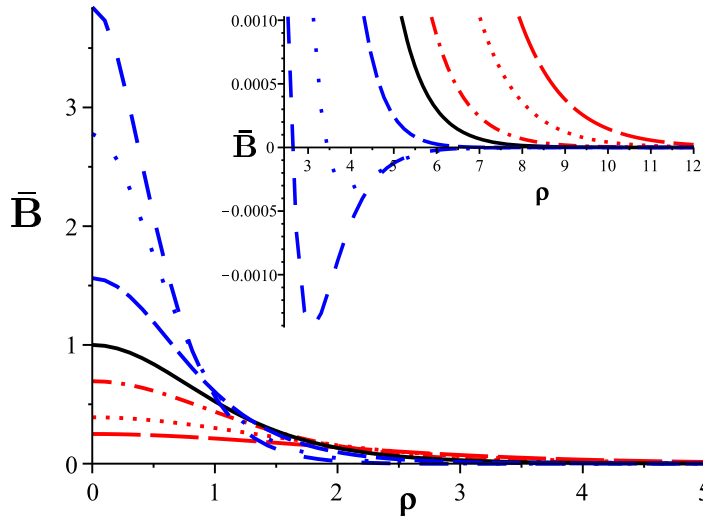


Figura 5.3: Campo magnético $\bar{B}(\rho)$.

revela que o campo magnético muda de sinal, mostrando explicitamente uma reversão localizada do fluxo magnético.

A Fig. 5.3 mostra o comportamento do campo magnético. Os perfis são *lumps* centrados na origem cujas amplitudes são proporcionais a $(1 - \kappa)^{-2}$. Para $\kappa < 0$ e aumentando $|\kappa|$, os perfis do campo magnético são cada vez mais largos, mas diminuem continuamente a sua amplitude. Para $0 < \kappa < 1/2$, os perfis se estreitam e aumentam sua amplitude à medida que κ aumenta, alcançando o valor máximo em $\kappa = 1/2$. Realizando uma ampliação na figura correspondente a valores de κ perto de $1/2$ (veja inserção na Fig. 5.3)

A Fig. 5.4 mostra o comportamento do potencial escalar. Para $\kappa < 0$ e aumentando $|\kappa|$, os perfis do potencial escalar são positivos na origem e terão o seu sinal invertido perto do limite assintótico. Para $0 < \kappa < 1/2$, o potencial escalar tem valores negativos na origem e decaem mais abruptamente à medida que se afastam do centro do vórtice, aparecendo igualmente inversão do sinal perto do limite assintótico.

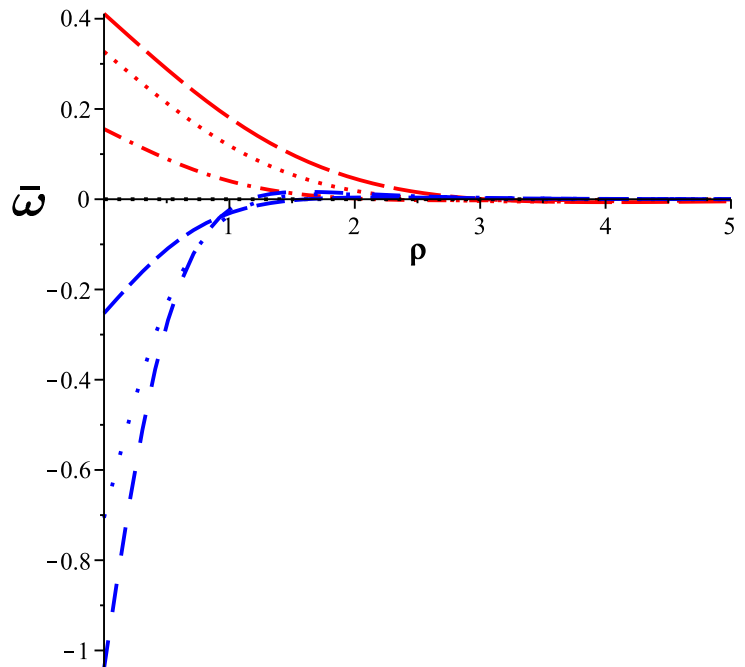


Figura 5.4: Potencial escalar $\bar{\omega}(\rho)$.

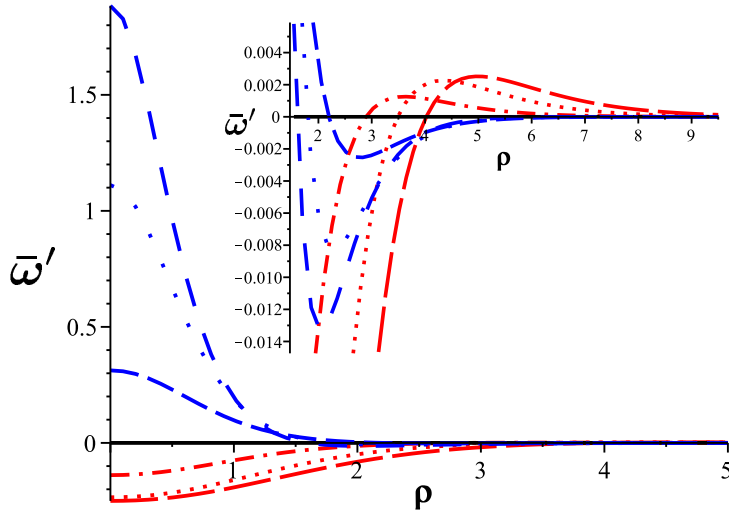


Figura 5.5: Campo elétrico $\bar{w}'(\rho)$.

o gráfico revela que o campo elétrico sofre inversão de sinal tanto para valores positivos como para valores negativos de κ . Essa reversão está presente em todos os perfis.

A Fig. 5.6 descreve o perfil da densidade de energia BPS, tendo esta um comportamento similar ao obtido para o campo magnético, à diferença de termos perfis mais localizados e com maior amplitude. Como a densidade de energia BPS é positiva-definida, obviamente, não são observadas regiões com inversão de sinal.

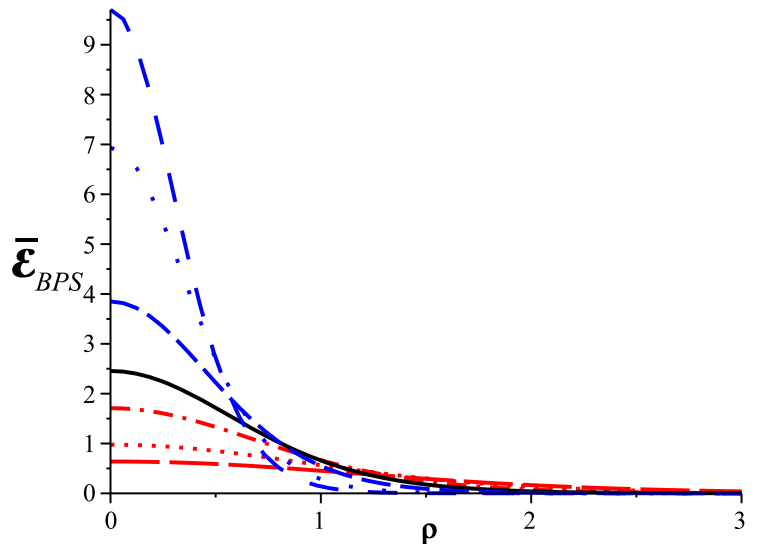


Figura 5.6: Densidade de energia BPS $\bar{\mathcal{E}}_{BPS}(\rho)$.

A Fig. 5.5 mostra os perfis para o campo elétrico como sendo também *lumps* centrados na origem e com amplitudes proporcionais a $\kappa/(1 - \kappa)^2$, tendo um mínimo para o valor $\kappa = -1$ e um máximo para o valor $\kappa = 1/2$. Igualmente ao ocorrido para o campo magnético, os perfis do campo elétrico tornam se estreitos e maiores à medida que κ aumenta tendendo ao valor limite $1/2$. A diferença agora é que para $\kappa < 0$, os perfis tornam se negativos (como predito nas equações BPS). Fazendo uma aproximação no eixo $-\rho$ (veja inserção na Fig. 5.5),

Capítulo 6

Conclusões e perspectivas

Nesta dissertação, foi realizado um amplo estudo de vórtices abelianos, dentro da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs modificada no contexto do Modelo Padrão Estendido. Neste estudo, abordamos primeiramente a relação histórica existente entre os diferentes modelos de defeitos topológicos e a física das partículas elementares. Ainda no primeiro capítulo, introduzimos o conceito da quebra espontânea de simetria, fundamental na descrição dos defeitos topológicos, tomando como exemplo um sistema mecânico simples e didático. Logo, apresentamos o método de Bogomol'nyi, um formalismo que permite obter soluções de mínima energia para a dinâmica dos campos. Estas soluções, no regime estacionário, são descritas por equações não lineares de primeira ordem, chamadas de equações BPS. As soluções BPS também satisfazem as equações de segunda ordem de Euler-Lagrange para os campos. A modo de exemplo, fizemos uma aplicação deste formalismo para o caso de um campo escalar real unidimensional, no qual obtivemos as soluções chamadas de *kink* e *anti-kink*, consideradas as mais simples entre os defeitos topológicos conhecidos.

Abordamos o estudo de defeitos topológicos em modelos planares, os quais resultam em soluções com simetria rotacional denominadas de vórtices. Revisamos primeiramente o modelo abeliano de Maxwell-Higgs, no qual, o campo de gauge é acoplado minimamente com o campo escalar complexo de Higgs, e sob influência de um potencial do tipo $\lambda\phi^4$. Vimos que a lei de Gauss é satisfeita trivialmente pelo calibre temporal $A_0 = 0$, implicando na obtenção de soluções tipo vórtices sem carga elétrica. Soluções tipo vórtice, são obtidas usando o ansatz proposto por Abrikosov e verificamos o comportamento dos campos nos limites assintóticos. Aplicando o formalismo BPS, obtivemos a energia total dos vórtices, sendo esta quantizada e linearmente dependente da vorticidade n , caracterizando a topologia do campo de gauge.

O segundo modelo estudado, a modo de revisão, foi o modelo abeliano de Maxwell-Chern-Simons-Higgs, devido a ele apresentar estrutura similar aos modelos estudados nos capítulos seguintes. O modelo se torna interessante devido ao fato de que o parâmetro de Chern-Simons κ , acopla os setores elétrico e magnético nas equações de movimento, ainda no regime estacionário, resultando no aparecimento de vórtices portadores de carga elétrica. O modelo foi construído inicialmente com um campo de gauge e o campo de Higgs. Das equações estacionárias e usando

a equação de autodualidade para o campo de Higgs, conseguimos calcular o potencial BPS. Para manter a invariância de calibre local no modelo vimos a necessidade de introduzir na densidade Lagrangiana original um campo escalar neutro N . Observando que para termos soluções BPS de mínima energia o campo neutro deve obedecer à mesma dinâmica que o potencial escalar.

Na segunda parte deste trabalho foram apresentados os modelos com quebra de simetria de Lorentz no contexto do MPE. Analisamos primeiramente vórtices carregados no modelo abeliano de Maxwell modificado pelo termo CPT-ímpar de Carroll-Field-Jackiw acoplado ao campo escalar de Higgs contendo termos de violam a simetria de Lorentz e preservam a simetria CPT. Procedemos de modo similar ao caso do modelo de MCSH para obter o potencial BPS. Contudo existe uma diferença crucial na estrutura da equação de autodualidade do campo de Higgs, que resulta modificada pelos parâmetros de violação de Lorentz advindos da diagonal do tensor de quebra no setor de Higgs. Os mesmos coeficientes são responsáveis pelo aparecimento da fracionalização do fluxo magnético e, conseqüentemente, da energia do sistema. Após, uma mudança de coordenadas e um *rescaling* apropriado dos campos, as equações BPS resultam iguais aos do modelo de MCSH mas a lei de Gauss apresenta uma diferença devido a contribuições de termos de quebra vindo do setor de Higgs. Estes coeficientes definem o parâmetro Δ que, para um κ fixo, controla o comportamento assintótico dos campos no infinito. O incremento deste parâmetro leva a termos vórtices com energia maior e mais localizados na origem. Ainda para κ fixo, no limite $\Delta \rightarrow \infty$ os vórtices se comportam de modo similar aos do modelo de Maxwell-Higgs devido ao fato de que o campo elétrico se anula nesse limite. Os gráficos para $\Delta = 1$ coincidem com os do modelo de MCSH. E observando os gráficos do campo magnético e da densidade de energia podemos notar que as amplitudes são maiores que aqueles correspondentes a MCSH para $\Delta > 1$ e menores para $\Delta < 1$.

Por último foi estudado também o aparecimento de vórtices de fluxo magnético fracionário no modelo abeliano de Maxwell-Higgs suplementado com termos de quebra de Lorentz, de caráter CPT-par, pertencentes aos setores de *gauge* e de Higgs do MPE. A partir das equações de movimento para o campo de *gauge* observamos que o coeficiente de paridade-ímpar, κ_{0i} , é o responsável pelo acoplamento dos setores elétrico e magnético, fazendo papel similar ao do termo de Chern-Simons, implicando no aparecimento de vórtices carregados mesmo na ausência de dito termo. Como no caso do modelo anterior os termos de quebra do setor de Higgs são responsáveis pelo aparecimento de fluxo magnético fracionário. De modo similar ao modelo anterior, o alcance dos vórtices é controlado por todos os coeficientes de paridade par pertencentes ao setores de *gauge* e de Higgs, juntamente com o coeficiente de paridade ímpar $\kappa_{0\theta}$. Além disso, estes vórtices apresentam inversão do campo elétrico e reversão localizada do fluxo magnético.

Ressaltamos que as configurações de vórtices obtidas no contexto de teoria com violação de Lorentz, são de certo modo equivalentes aquelas obtidas através de teorias efetivas para à eletrodinâmica de Maxwell-Higgs [39, 40], que descreve configurações de vórtices em meios dielétricos contínuos. Notamos que neste contexto não faz sentido considerar limites superiores

para o valor esperado do vácuo nos coeficientes de VL, devido a que neste caso a função dos coeficientes de VL é determinar que estamos na presença de um meio dielétrico com direções privilegiadas de propagação.

No âmbito da física da matéria condensada, vórtices com fluxo magnético fracionário não são encontrados em supercondutores comuns. Estes se tornam possíveis em sistemas não homogêneos, como por exemplo, vórtices encontrados na interface entre dois supercondutores (conhecido em física de partículas como modelo do *dubleto de Higgs* [41]) levemente interligados, comumente denominada de *junção de Josephson*. Em supercondutividade, se denomina como *fase de Josephson* à diferença de fase entre as funções de onda de dois eletrodos supercondutores [42] que formam uma junção. Em este tipo de junções, existe uma descontinuidade na fase e vórtices formados nesta região de interface, tem vorticidade fracionária [43].

Estudos imediatos a serem feitos incluem a inserção destes modelos teóricos no marco de sistemas onde temos fracionalização de carga elétrica, como no caso do efeito Hall quântico e estatísticas fracionárias relacionadas com anyons.

O estudo de defeitos topológicos dentro do Modelo Padrão Estendido é uma área de pesquisa recentemente iniciada e ainda existem muitos problemas a serem estudados. Nessa direção podem ser estudadas a formação de vórtices fermiônicos modificados por parâmetros de violação de Lorentz. Uma outra ampla gama de trabalhos podem ser desenvolvidos a partir de modelos não abelianos, abordando vórtices e monopólos dentro da teoria de Yang-Mills no contexto do MPE.

Apêndice A

Cálculo da energia BPS do modelo de MCFJH

Lembrando a forma da lagrangiana para o modelo de MCFJH

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1+3} = & -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}(\kappa_{AF})_{\alpha}A_{\beta}F_{\rho\sigma} + |D_{\mu}\phi|^2 \\ & + (k_{\phi\phi})^{\mu\nu}(D_{\mu}\phi)^*(D_{\nu}\phi) - \frac{1}{2}(k_{\phi F})^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\phi^*\phi + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\Psi)^2 - U(|\phi|), \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

junto com o respectivo potencial BPS

$$U = e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] \Psi^2 |\phi|^2 + \frac{1}{2} [ev^2 - e\eta |\phi|^2 - (k_{AF})_3 \Psi]^2.$$

O momento canônico conjugado ao campo de gauge é dado pela expressão

$$\Pi_A^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_{\mu}} = F^{\mu 0} - \frac{1}{2}\epsilon^{0\mu\alpha\beta}(k_{AF})_{\alpha}A_{\beta} - (k_{\phi F})^{0\mu}\phi^*\phi, \quad (\text{A.2})$$

da qual obtemos as seguintes equações

$$\Pi_A^0 = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\Pi_A^k = F^{k0} - \frac{1}{2}\epsilon^{0kij}(k_{AF})_i A_j - (k_{\phi F})^{0k}\phi^*\phi. \quad (\text{A.4})$$

O termo na hamiltoniana, pertencente ao campo neutro Ψ é facilmente calculado, sendo este

$$\Pi_{\Psi}\dot{\Psi} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}}\right)\dot{\Psi} = (\dot{\Psi})^2. \quad (\text{A.5})$$

Os momentos canônicos para o campo de Higgs são dados por

$$\Pi_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} = [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] D_0\phi - (k_{\phi\phi})_{0i} D_i\phi, \quad (\text{A.6})$$

e o seu respectivo complexo conjugado

$$\Pi_{\phi}^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] (D_0\phi)^* - (k_{\phi\phi})_{0i} (D_i\phi)^*. \quad (\text{A.7})$$

A partir das duas expressões anteriores, escrevemos as seguintes equações, que serão de utilidade para expressar a hamiltoniana como uma função somente dos momentos

$$\dot{\phi} = \frac{\Pi_\phi + (k_{\phi\phi})_{0i} D_i \phi}{1 + (k_{\phi\phi})_{00}} + ie A_0 \phi, \quad (\text{A.8})$$

$$\dot{\phi}^* = \frac{\Pi_\phi^* + (k_{\phi\phi})_{0i} (D_i \phi)^*}{1 + (k_{\phi\phi})_{00}} - ie A_0 \phi^*. \quad (\text{A.9})$$

Escrevemos a lagrangiana do modelo, substituindo nela as expressões para os momentos canônicos obtidos anteriormente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1+3} = & \frac{1}{2} (\Pi_A^k)^2 - \Pi_A^k (k_{\phi F})_{0k} (\phi^* \phi) + \frac{1}{2} [(k_{\phi F})_{0k} (\phi^* \phi)]^2 - \frac{1}{8} [\epsilon^{0kij} (k_{AF})_i A_j]^2 \\ & - \frac{1}{4} (F_{jk})^2 - \frac{1}{4} \epsilon^{0ijk} (k_{AF})_0 A_i F_{jk} + \frac{1}{4} \epsilon^{0ijk} (k_{AF})_i A_0 F_{jk} \\ & + [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] |D_0 \phi|^2 - (k_{\phi\phi})_{0j} (D_j \phi) (D_0 \phi)^* - (k_{\phi\phi})_{0j} (D_j \phi)^* (D_0 \phi) \\ & - |D_j \phi|^2 + (k_{\phi\phi})_{jk} (D_j \phi)^* (D_k \phi) + (k_{\phi F})_{0j} F_{0j} \phi^* \phi - \frac{1}{2} (k_{\phi F})_{ij} F_{ij} \phi^* \phi \\ & + \frac{1}{2} (\Pi_\Psi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_j \Psi)^2 - U, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

onde foi utilizada a seguinte igualdade

$$F_{0k} - \epsilon^{0kij} (k_{AF})_i A_j = \Pi_A^k - \frac{1}{2} \epsilon^{0kij} (k_{AF})_i A_j - (k_{\phi F})_{0k} (\phi^* \phi). \quad (\text{A.11})$$

Os termos na terceira linha em (A.10) podem ser substituídos pela expressão

$$\frac{\Pi_\phi^* \Pi_\phi - (k_{\phi\phi})_{0i} (k_{\phi\phi})_{0j} (D_i \phi)^* (D_j \phi)}{[1 + (k_{\phi\phi})_{00}]}. \quad (\text{A.12})$$

Com a lagrangiana já definida, podemos escrever a expressão para a hamiltoniana

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_C = & \frac{1}{2} (\Pi_A^k)^2 + \frac{1}{4} (F_{jk})^2 + |D_j \phi|^2 - (k_{\phi\phi})_{jk} (D_j \phi)^* (D_k \phi) \\ & + [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] |D_0 \phi|^2 + \frac{1}{2} \Pi_A^k \epsilon^{0kij} (k_{AF})_i A_j - (k_{\phi F})_{0i} F_{0i} \phi^* \phi \\ & + \frac{1}{2} (k_{\phi F})_{ij} F_{ij} \phi^* \phi + ie A_0 (\Pi_\phi^* \phi - \Pi_\phi \phi^*) + \Pi_A^k \partial_k A_0 \\ & - \frac{1}{2} [(k_{\phi F})_{0k} (\phi^* \phi)]^2 + \frac{1}{8} [\epsilon^{0kij} (k_{AF})_i A_j]^2 + \frac{1}{4} \epsilon^{0ijk} (k_{AF})_0 A_i F_{jk} \\ & - \frac{1}{4} \epsilon^{0ijk} (k_{AF})_i A_0 F_{jk} + \frac{1}{2} (\dot{\Psi})^2 + \frac{1}{2} (\partial_j \Psi)^2 + U, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

na qual foi utilizada a expressão,

$$[1 + (k_{\phi\phi})_{00}] |D_0 \phi|^2 = \frac{[\Pi_\phi + (k_{\phi\phi})_{0i} (D_i \phi)] [\Pi_\phi^* + (k_{\phi\phi})_{0j} (D_j \phi)^*]}{[1 + (k_{\phi\phi})_{00}]}. \quad (\text{A.14})$$

Introduzindo a seguintes identidades

$$ieA_0 (\Pi_\phi^* \phi - \Pi_\phi \phi^*) = e [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] A_0 J_0 - eA_0 (k_{\phi\phi})_{0i} J_i, \quad (\text{A.15})$$

$$A_0 \partial_k \Pi_A^k = e [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] A_0 J_0 - e (k_{\phi\phi})_{0k} A_0 J_k - \frac{1}{4} \epsilon^{0kij} (k_{AF})_k A_0 F_{ij}, \quad (\text{A.16})$$

reescrevemos a hamiltoniana da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_C &= \frac{1}{2} (\Pi_A^k)^2 + \frac{1}{4} (F_{jk})^2 + |D_j \phi|^2 - (k_{\phi\phi})_{jk} (D_j \phi)^* (D_k \phi) \\ &+ [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] |D_0 \phi|^2 + \frac{1}{2} \Pi_A^k \epsilon^{0kij} (k_{AF})_i A_j - (k_{\phi F})_{0i} F_{0i} \phi^* \phi \\ &+ \frac{1}{2} (k_{\phi F})_{ij} F_{ij} \phi^* \phi - \frac{1}{2} [(k_{\phi F})_{0k} (\phi^* \phi)]^2 + \frac{1}{8} [\epsilon^{0kij} (k_{AF})_i A_j]^2 \\ &+ \frac{1}{4} \epsilon^{0ijk} (k_{AF})_0 A_i F_{jk} + \Pi_A^k \partial_k A_0 + \frac{1}{2} (\dot{\Psi})^2 + \frac{1}{2} (\partial_j \Psi)^2 + U \\ &+ e [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] A_0 J_0 - eA_0 (k_{\phi\phi})_{0i} J_i - \frac{1}{4} \epsilon^{0ijk} (k_{AF})_i A_0 F_{jk}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Os últimos três termos na equação anterior podem ser substituídos com o auxílio da lei de Gauss

$$\begin{aligned} A_0 \partial_k F_{0k} + \frac{1}{2} \epsilon^{0kij} (k_{AF})_k A_0 F_{ij} + (k_{\phi F})_{0k} A_0 \partial_k (\phi^* \phi) &= e [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] A_0 J_0 - e (k_{\phi\phi})_{0k} A_0 J_k, \\ A_0 \partial_k \Pi_A^k &= e [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] A_0 J_0 - e (k_{\phi\phi})_{0k} A_0 J_k - \frac{1}{4} \epsilon^{0kij} (k_{AF})_k A_0 F_{ij}, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

podendo desta forma reescrever

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_C &= \frac{1}{2} (\Pi_A^k)^2 + \frac{1}{4} (F_{jk})^2 + \frac{1}{2} (\dot{\Psi})^2 + \frac{1}{2} (\partial_j \Psi)^2 \\ &+ |D_j \phi|^2 - (k_{\phi\phi})_{jk} (D_j \phi)^* (D_k \phi) + [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] |D_0 \phi|^2 \\ &- (k_{\phi F})_{0i} F_{0i} \phi^* \phi + \frac{1}{2} (k_{\phi F})_{ij} F_{ij} \phi^* \phi + \frac{1}{8} [\epsilon^{0kij} (k_{AF})_i A_j]^2 \\ &+ \frac{1}{2} \epsilon^{0kij} (k_{AF})_i \Pi_A^k A_j - \frac{1}{2} [(k_{\phi F})_{0k} (\phi^* \phi)]^2 + \frac{1}{4} \epsilon^{0ijk} (k_{AF})_0 A_i F_{jk} + U(|\phi|), \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

onde o termo com a derivada total $\partial_k (\Pi_A^k A_0)$ foi eliminado devido a que este não contribui para a energia total.

Na expressão anterior somamos e subtraímos a quantidade

$$\Pi_A^k (k_{\phi F})_{0k} |\phi|^2 - \frac{1}{2} \epsilon^{0kij} (k_{AF})_i A_j (k_{\phi F})_{0k} |\phi|^2 + \frac{1}{2} [(k_{\phi F})_{0k} |\phi|^2]^2,$$

com a qual identificamos e substituímos as seguintes expressões dentro da hamiltoniana

$$F_{0k} = \Pi_A^k + \frac{1}{2} \epsilon^{0kij} (k_{AF})_i A_j - (k_{\phi F})_{0k} \phi^* \phi, \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (F_{0k})^2 &= \frac{1}{2} (\Pi_A^k)^2 + \frac{1}{2} \Pi_A^k \epsilon^{0kij} (k_{AF})_i A_j + \frac{1}{8} [\epsilon^{0kij} (k_{AF})_i A_j]^2 \\ &- \Pi_A^k (k_{\phi F})_{0k} |\phi|^2 - \frac{1}{2} \epsilon^{0kij} (k_{AF})_i A_j (k_{\phi F})_{0k} |\phi|^2 + \frac{1}{2} [(k_{\phi F})_{0k} |\phi|^2]^2, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

podendo a hamiltoniana ser reescrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_C = & \frac{1}{2} (F_{0k})^2 + \frac{1}{4} (F_{jk})^2 + \frac{1}{2} (\dot{\Psi})^2 + \frac{1}{2} (\partial_j \Psi)^2 \\
& + |D_j \phi|^2 - (k_{\phi\phi})_{jk} (D_j \phi)^* (D_k \phi) + [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] |D_0 \phi|^2 + U(|\phi|) \\
& + \frac{1}{2} (k_{\phi F})_{ij} F_{ij} |\phi|^2 + \frac{1}{4} \epsilon^{0ijk} (k_{AF})_0 A_i F_{jk}.
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Vemos que a hamiltoniana não é definida positiva devido à presença dos dois últimos termos da equação anterior, para garantir a positividade impomos

$$(k_{\phi F})_{ij} = 0 \quad , \quad (k_{AF})_0 = 0. \tag{A.23}$$

Desse modo a hamiltoniana positiva definida é

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_C = & \frac{1}{2} (F_{0k})^2 + \frac{1}{4} (F_{jk})^2 + \frac{1}{2} (\dot{\Psi})^2 + \frac{1}{2} (\partial_j \Psi)^2 \\
& + |D_j \phi|^2 - (k_{\phi\phi})_{jk} (D_j \phi)^* (D_k \phi) + [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] |D_0 \phi|^2 + U(|\phi|),
\end{aligned} \tag{A.24}$$

com a condição sobre $(k_{\phi\phi})_{00}$:

$$(k_{\phi\phi})_{00} > -1. \tag{A.25}$$

Apêndice B

Cálculo da energia BPS do modelo de Maxwell-Higgs com violação da simetria de Lorentz

Para o cálculo da hamiltoniana canônica começamos calculando os momentos canônicos conjugados a cada campo.

O momento canônico para o campo de gauge é dado pela seguinte expressão

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -F^{0\mu} - \kappa^{\mu\alpha} F_\alpha^0 + \kappa^{0\alpha} F_\alpha^\mu, \quad (\text{B.1})$$

resultando em

$$\pi^0 = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$\pi^k = (1 + \kappa_{00}) F_{0k} - \kappa_{kj} F_{0j} + \kappa_{0j} F_{kj} = L_{kj} F_{0j} + \kappa_{0j} F_{kj}, \quad (\text{B.3})$$

onde definimos a matriz

$$L_{kj} = (1 + \kappa_{00}) \delta_{kj} - \kappa_{kj}, \quad (\text{B.4})$$

$$F_{jk} = \epsilon_{jk} B. \quad (\text{B.5})$$

Para o campo escalar obtemos as equações

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*}, \quad \pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}, \\ \pi &= \dot{\phi} - ie A_0 \phi + (k_{\phi\phi})^{0\alpha} \partial_\alpha \phi - ie (k_{\phi\phi})^{0\alpha} A_\alpha \phi, \\ \pi &= [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] \dot{\phi} - ie [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] A_0 \phi - (k_{\phi\phi})_{0j} D_j \phi, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\pi = [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] (D_0 \phi) - (k_{\phi\phi})_{0j} (D_j \phi), \quad (\text{B.7})$$

e o seu conjugado complexo

$$\pi^* = [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] (D_0 \phi)^* - (k_{\phi\phi})_{0j} (D_j \phi)^*, \quad (\text{B.8})$$

com as quais podemos escrever

$$\dot{\phi} = \frac{\pi}{1 + (k_{\phi\phi})_{00}} + ieA_0\phi + \frac{(k_{\phi\phi})_{0j}}{1 + (k_{\phi\phi})_{00}} D_j\phi, \quad (\text{B.9})$$

$$\dot{\phi}^* = \frac{\pi^*}{1 + (k_{\phi\phi})_{00}} - ieA_0\phi^* + \frac{(k_{\phi\phi})_{0j}}{1 + (k_{\phi\phi})_{00}} (D_j\phi)^*. \quad (\text{B.10})$$

Finalmente escrevemos o momento correspondente ao campo Π como sendo

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}} = (1 + 2\kappa_{00}) \dot{\Psi} - \kappa_{0j} \partial_j \Psi, \quad (\text{B.11})$$

$$\dot{\Psi} = \frac{\Pi}{(1 + 2\kappa_{00})} + \frac{\kappa_{0j}}{(1 + 2\kappa_{00})} \partial_j \Psi. \quad (\text{B.12})$$

Substituindo os resultados obtidos anteriormente escrevemos a hamiltoniana do modelo

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & (L_{kj}F_{0j} + \kappa_{0j}F_{kj}) F_{0k} + (L_{kj}F_{0j} + \kappa_{0j}F_{kj}) \partial_k A_0 + (1 + 2\kappa_{00}) \dot{\Psi}^2 \\ & - \kappa_{0j} \dot{\Psi} \partial_j \Psi + [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] (D_0\phi) \dot{\phi}^* - (k_{\phi\phi})_{0j} (D_j\phi) \dot{\phi}^* \\ & + [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] (D_0\phi)^* \dot{\phi} - (k_{\phi\phi})_{0j} (D_j\phi)^* \dot{\phi} - \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

A densidade lagrangiana (5.19) pode ser reescrita efetuando o somatório de Einstein em cada um dos seus termos, e após este exercício obtemos a expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} L_{ij} F_{0i} F_{0j} - \frac{1}{4} (F_{ij})^2 + \frac{1}{2} \kappa_{ij} F_{ic} F_{jc} - \kappa_{0i} F_{0j} F_{ij} \\ & + [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] |D_0\phi|^2 - |D_j\phi|^2 + (k_{\phi\phi})_{ij} (D_i\phi)^* (D_j\phi) \\ & - (k_{\phi\phi})_{0j} (D_0\phi)^* (D_j\phi) - (k_{\phi\phi})_{0j} (D_j\phi)^* (D_0\phi) \\ & + \frac{1}{2} (1 + 2\kappa_{00}) \dot{\Psi}^2 - \frac{1}{2} L_{ij} \partial_i \Psi \partial_j \Psi - \kappa_{0j} \dot{\Psi} \partial_j \Psi \\ & - e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] \Psi^2 |\phi|^2 - \bar{U}(|\phi|, \Psi). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Inserindo a lagrangiana na expressão para a hamiltoniana obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2} L_{ij} F_{0i} F_{0j} + \frac{1}{4} (F_{ij})^2 - \frac{1}{2} \kappa_{ij} F_{ic} F_{jc} + (L_{ij} F_{0j} + \kappa_{0j} F_{ij}) \partial_i A_0 \\ & + |D_j\phi|^2 - (k_{\phi\phi})_{ij} (D_i\phi)^* (D_j\phi) - [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] |D_0\phi|^2 \\ & + \frac{1}{2} (1 + 2\kappa_{00}) \dot{\Psi}^2 + \frac{1}{2} L_{ij} \partial_i \Psi \partial_j \Psi + e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] \Psi^2 |\phi|^2 \\ & + [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] \left[(D_0\phi) \dot{\phi}^* + (D_0\phi)^* \dot{\phi} \right] \\ & + (k_{\phi\phi})_{0j} (D_j\phi) \left[(D_0\phi)^* - \dot{\phi}^* \right] + (k_{\phi\phi})_{0j} (D_j\phi)^* \left[(D_0\phi) - \dot{\phi} \right] + \bar{U}(|\phi|, \Psi). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Manipulando a expressão para o campo escalar, juntamente com a corrente, encontramos a relação

$$(D_0\phi) \dot{\phi}^* + (D_0\phi)^* \dot{\phi} = 2 |D_0\phi|^2 + eA_0 J_0, \quad (\text{B.16})$$

com a equação (B.3), e substituindo a expressão para a densidade de corrente estacionária, na lei de Gauss estacionária do modelo (5.2)

$$\partial_i \pi^i = e [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] J_0 - e (k_{\phi\phi})_{0i} J_i, \quad (\text{B.17})$$

escrevemos a hamiltoniana eliminando a derivada total $\partial_i (A_0 \pi^i)$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2} L_{ij} F_{0i} F_{0j} + \frac{1}{2} (1 - \kappa_{ii}) B^2 + [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] |D_0 \phi|^2 \\ & + |D_j \phi|^2 - (k_{\phi\phi})_{ij} (D_i \phi)^* (D_j \phi) + \frac{1}{2} (1 + 2\kappa_{00}) \dot{\Psi}^2 \\ & + \frac{1}{2} L_{ij} \partial_i \Psi \partial_j \Psi + e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] \Psi^2 |\phi|^2 + \bar{U}(|\phi|, \Psi), \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

com o potencial sendo dado por

$$\bar{U}(|\phi|, \Psi) = \frac{\eta^2}{2(1-s)} \left(\frac{ev^2}{\eta} - e|\phi|^2 - \frac{1}{\eta} \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j \Psi \right)^2. \quad (\text{B.19})$$

Agora passamos a escrever a hamiltoniana no regime estacionário eliminando as derivadas temporais dos campos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2} L_{ij} (\partial_i A_0) (\partial_j A_0) + \frac{1}{2} (1 - \kappa_{ii}) B^2 + [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] e^2 (A_0)^2 |\phi|^2 + |D_j \phi|^2 \\ & - (k_{\phi\phi})_{ij} (D_i \phi)^* (D_j \phi) + \frac{1}{2} L_{ij} \partial_i \Psi \partial_j \Psi + e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] \Psi^2 |\phi|^2 + \bar{U}(|\phi|, \Psi). \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

e introduzindo a condição BPS

$$\Psi = \mp A_0,$$

escrevemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2} (1-s) B^2 + \frac{\eta^2}{2(1-s)} \left(\frac{ev^2}{\eta} - e|\phi|^2 \pm \frac{1}{\eta} \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j A_0 \right)^2 + |D_j \phi|^2 \\ & - (k_{\phi\phi})_{ij} (D_i \phi)^* (D_j \phi) + L_{ij} \partial_i (A_0 \partial_j A_0) + \epsilon_{ij} \kappa_{0i} A_0 \partial_j B - e (k_{\phi\phi})_{0i} A_0 J_i. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Lembrando que a partir do cálculo do potencial obtivemos as seguintes condições

$$(k_{\phi\phi})_{r\theta} = (k_{\phi\phi})_{\theta\theta} = (k_{\phi\phi})_{0r} = 0 \Rightarrow (k_{\phi\phi})_{0i} = 0.$$

Quadramos a hamiltoniana do modelo e escrevemos termos em forma de derivada total

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2} (1-s) \left[B \mp \frac{ev^2 - e\eta |\phi|^2 \pm \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j A_0}{(1-s)} \right]^2 + |D_j \phi|^2 - (k_{\phi\phi})_{ij} (D_i \phi)^* (D_j \phi) \\ & \pm B e v^2 \mp B e \eta |\phi|^2 + \partial_i (A_0 L_{ij} \partial_j A_0) + \partial_j (\epsilon_{ij} \kappa_{0i} A_0 B). \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Passamos os campos para coordenadas cilíndricas utilizando os *ansatz* modificados

$$\phi = \frac{v}{\eta^{1/2}} g(r) \exp\left(i\theta \frac{n}{\Lambda}\right), \quad A_\theta = -\frac{a(r) - \frac{n}{\Lambda}}{er}, \quad A_0 = A_0(r), \quad (\text{B.23})$$

juntamente com a expressão

$$|D_{\pm}\phi|^2 = |D_k\phi|^2 \mp eB|\phi|^2 \mp \frac{1}{2}\epsilon_{jk}\partial_j J_k.$$

Desta forma reescrevemos a hamiltoniana projetada no plano

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2}(1-s) \left[B \mp \frac{ev^2(1-g^2) \mp \kappa_{0\theta}A'_0}{1-s} \right]^2 + \frac{v^2}{\Lambda} \left[g' \mp \Lambda \frac{ag}{r} \right]^2 \\ & \pm Bev^2 \pm v^2 \frac{(ag^2)'}{r} + (1 + \kappa_{00} - \kappa_{rr}) \frac{(rA_0A'_0)'}{r} - \kappa_{0\theta} \frac{(rA_0B)'}{r}. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Nesta expressão para a hamiltoniana será implementado o formalismo BPS.

Referências Bibliográficas

- [1] J. Scott Russell, *Report on waves*, Proc. of the British Association for the Advancement of Science, London, p. 311 (1845).
- [2] D. J. Korteweg and G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Phil. Mag. 39 (1895).
- [3] Nicholas Manton and Paul Sutcliffe, *Topological Solitons*, Cambridge University Press, (2004).
- [4] Zyun F. Ezawa, *Quantum Hall Effects*, second edition, World Scientific (2008).
- [5] W. Meissner, R. Ochsenfeld, *Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit*, Naturwissenschaften, 21 (44) 787–788 (1933).
- [6] V. L. Ginzburg and L. D. Landau, *On the theory of superconductivity*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 20, 1064 (1950).
- [7] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, *Theory of superconductivity*, Phys. Rev. 108, 1175 (1957).
- [8] A. Abrikosov, *On the magnetic properties of superconductors of the second group*, Sov. Phys. JETP 5, 1174 (1957).
- [9] H. B. Nielsen and P. Olesen, *Vortex line models for dual strings*, Nucl. Phys. B 61, 45 (1973).
- [10] R. Jackiw and Erick J. Weinberg. *Self-Dual Chern-Simons Vortices*, Phys. Rev. Lett. 64, 2234 (1990).
- [11] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *Phenomenological gravitational constraints on strings and higher-dimensional*, Phys. Rev. Lett. 63, 224 (1989).
- [12] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory*, Phys. Rev. D 39, 683 (1989).
- [13] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *Gravitational phenomenology in higher-dimensional theories and strings*, Phys. Rev. D 40, 1886 (1989).

- [14] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *Photon and graviton masses in string theories*, Phys. Rev. Lett. 66, 1811 (1991).
- [15] V. A. Kostelecky and R. Potting, *CPT and strings*, Nucl. Phys. B 359, 545 (1991).
- [16] V. A. Kostelecky and R. Potting, *CPT, strings, and meson factories*, Phys. Rev. D 51, 3923 (1995).
- [17] D. Colladay and V. A. Kostelecky, *CPT violation and the standard model*, Phys. Rev. D 55, 6760 (1997).
- [18] D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Lorentz-violating extension of the standard model*, Phys. Rev. D 58, 116002 (1998).
- [19] S. R. Coleman and S. L. Glashow, *High-energy tests of Lorentz invariance*, Phys. Rev. D 59, 116008 (1999).
- [20] D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Cross sections and Lorentz violation*, Phys. Lett. B 511, 209 (2001).
- [21] V. A. Kostelecký and R. Lehnert, *Stability, causality, and Lorentz and CPT violation*, Phys. Rev. D 63, 065008 (2001).
- [22] S.M. Carroll, G.B. Field, and R. Jackiw, *Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics*, Phys. Rev. D 41, 1231 (1990).
- [23] V. A. Kostelecky and M. Mewes, *Cosmological constraints on Lorentz violation in electrodynamics*, Phys. Rev. Lett. 87, 251304 (2001).
- [24] V. A. Kostelecky and M. Mewes, *Signals for Lorentz violation in electrodynamics*, Phys. Rev. D 66, 056005 (2002)
- [25] V. A. Kostelecky and M. Mewes, *Sensitive Polarimetric Search for Relativity Violations in Gamma-Ray Bursts*, Phys. Rev. Lett. 97, 140401 (2006).
- [26] C. Miller, R. Casana, M. M. Ferreira Jr. and E. da Hora, *Uncharged compactlike and fractional Lorentz-violating BPS vortices in the CPT-even sector of the standard model extension*, Phys. Rev. D 86, 065011 (2012).
- [27] R. Casana, M. M. Ferreira Jr, E. da Hora, C. Miller, *Magnetic flux inversion in Charged BPS vortices in a Lorentz-violating Maxwell-Higgs framework*, Phys. Lett. B 718, 620 (2012).
- [28] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica*, segunda edição, Livraria da Física (2007).
- [29] E. B. Bogomol'nyi, *The stability of classical solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. 23, 355 (1976).

- [30] A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo, and J. A. Helayel-Neto, *Aspects of causality and unitarity and comments on vortexlike configurations in an Abelian model with a Lorentz-breaking term*, Phys.Rev. D 67, 085021 (2003).
- [31] R. Casana, M. M. Ferreira, Jr., and C. E. H. Santos, *Classical solutions for the Carroll-Field-Jackiw-Proca electrodynamics*, Phys. Rev. D 78, 025030 (2008).
- [32] H. Belich, M. M. Ferreira, Jr., J. A. Helayel-Neto, and M. T. D. Orlando, *Classical solutions in a Lorentz-violating Maxwell-Chern-Simons electrodynamics*, Phys. Rev. D 68, 025005 (2003); H. Belich, Jr., T. Costa-Soares, M. M. Ferreira, Jr., and J. A. Helayel-Neto, *Classical Solutions in a Lorentz-violating Scenario of Maxwell-Chern-Simons-Proca Electrodynamics*, Eur. Phys. J. C 42, 127 (2005).
- [33] R. Lehnert and R. Potting, *Vacuum Cerenkov Radiation*, Phys. Rev. Lett. 93, 110402 (2004); R. Lehnert and R. Potting, *Cerenkov effect in Lorentz-violating vacua*, Phys. Rev. D 70, 125010 (2004); B. Altschul, *Vacuum Cerenkov Radiation in Lorentz-Violating Theories Without CPT Violation*, Phys. Rev. Lett. 98, 041603 (2007); *Cerenkov radiation in a Lorentz-violating and birefringent vacuum*, Phys. Rev. D 75, 105003 (2007); *Finite duration and energy effects in Lorentz-Violating vacuum Cerenkov radiation*, Nucl. Phys. B796, 262 (2008).
- [34] J. M. Fonseca, A. H. Gomes, and W. A. Moura-Melo, *Emission and absorption of photons and the black-body spectra in Lorentz-odd Electrodynamics*, Phys. Lett. B 671, 280-283 (2009). R. Casana, M. M. Ferreira, Jr., and J. S. Rodrigues, *Lorentz-violating contributions of the Carroll-Field-Jackiw model to the CMB anisotropy*, Phys.Rev.D 78, 125013 (2008).
- [35] A. Kobakhidze and B. H. J. McKellar, *Particle interference as a test of Lorentz-violating electrodynamics*, Phys. Rev. D 76, 093004 (2007).
- [36] C. Kaufhold and F. R. Klinkhamer, *Vacuum Cherenkov radiation in spacelike Maxwell-Chern-Simons theory*, Phys. Rev. D 76,025024 (2007); F. R. Klinkhamer and M. Risse, *Ultrahigh-energy cosmic-ray bounds on nonbirefringent modified Maxwell theory*, Phys. Rev. D 77, 016002 (2008).
- [37] F. R. Klinkhamer and M. Risse, *Addendum: Ultrahigh-energy cosmic-ray bounds on non-birefringent modified Maxwell theory*, Phys. Rev. D 77, 117901 (2008).
- [38] Q. G. Bailey and V. A. Kostelecky, *Lorentz-violating electrostatics and magnetostatics*, Phys. Rev. D 70, 076006 (2004).
- [39] J. Lee and S. Nam, *Bogomol'nyi equations of Chern-Simons Higgs theory from a generalized abelian Higgs model*, Phys. Lett. B 261, 437 (1991).
- [40] D. Bazeia, *Vortices in a generalized Higgs model*, Phys. Rev. D 46, 1879 (1992).

- [41] T. D. Lee, *A theory of spontaneous T violation*, Phys. Rev. D 8, 1226 (1973).
- [42] A. J. Leggett, *Number-phase fluctuations in two-band superconductors*, Progress of Theoretical Physics, 36, 5 (1966).
- [43] Egor Babaev, *Vortices with Fractional Flux in Two-Gap Superconductors and in Extended Faddeev Model*, Phys. Rev. Lett. 89, 067001 (2002).