

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Localização de férmions em um Anel imerso em  $(3,1)$   
dimensões**

**Genilson Vieira Martins**

**ORIENTADOR: ADALTO RODRIGUES GOMES DOS SANTOS FILHO**

**CO-ORIENTADOR: RODOLFO ALVÁN CASANA SIFUENTES**

SÃO LUÍS, AGOSTO DE 2012

# Localização de férmions em um Anel imerso em $(3,1)$ dimensões

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre em física.

Orientador: Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho  
Doutor em Física - IFMA

SÃO LUÍS, AGOSTO DE 2012

Martins, Genilson Vieira

**Localização de férmions**

**em um Anel imerso em (3,1) dimensões/** Genilson Vieira Martins - 2012

82.f

Orientador: Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho

Co-orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Maranhão,

Programa de Pós-Graduação em Física, 2012

1.Defeitos topológicos 2. Mecânica quântica supersimétrica 3.Localização de férmions. I Título

CDU 519.115.5

GENILSON VIEIRA MARTINS

**Localização de férmions  
em um Anel imerso em (3,1) dimensões**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre em física.

BANCA EXAMINADORA

---

Rodolfo Alván Casana Sifuentes (*CO-ORIENTADOR*)  
Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

---

Manoel Messias Ferreira Junior  
Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

---

Carlos Alberto Santos Almeida  
Doutor em Física - Universidade Federal do Ceará (UFC)



## Agradecimentos

Agradeço ao meu Deus o Senhor da minha vida por ter me dado força e ânimo nos momentos de dificuldades e por estar sempre comigo.

Agradeço ao meu orientador Prof. Adalto Rodrigues Gomes por sua orientação, pois desde o primeiro ano do curso de física no IFMA tem sido de fundamental importância na minha formação. Agradeço a ele pela paciência, pelas pressões, pelas broncas, pelas palavras de animo, de confiança e de motivação. Agradeço ao Prof. Adalto Rodrigues Gomes por ser um profissional por excelência.

Agradeço ao Professor Rodolfo Casana pela Co-orientação, pelas conversas que tivemos que muito me ajudaram no desenvolvimento dessa dissertação.

Aos Profs. do Departamento de Pós Graduação da UFMA, em especial ao Prof. Manoel Messias por sua colaboração.

Agradeço também aos colegas do mestrado da UFMA: Alysson, Carlisson, Roemir, João Elias, Kleber, Wesdney, Mauro, Diego, Célio, Girlane, Guilherme .

Aos grandes amigos de longas jornadas, Raoni, Walisson Leiliane, Thiago, Daniele e Fabiano, pelas conversas, discussões, risadas e pelas pressões que suportamos juntos.

Agradeço ao Fabiano Simas pela colaboração e pelas boas discussões que tivemos. Agradeço principalmente a sua contribuição na parte numérica desenvolvida neste trabalho.

Agradeço aos meus irmãos que sempre confiaram em mim e me apoiaram nas minhas escolhas: José Maria Filho, Francinalda, Joanice, Jailson, Gilvan, Josenaldo. Aos meu sobrinhos, Rafael, Francinara, Milena, André, Franckson, Amister, Yasmin, Éric e Larissa pelo carinho que sempre tiveram por mim.

A meus pais José Maria Martins e Francisca de Assis, pois são as pessoas mais importantes na minha vida e sem eles nenhuma linha dessa dissertação teria sido escrita, pois sempre me apoiaram nas decisões e sempre me ajudaram quando eu mais precisei.

À Isaelma Cristina por seu carinho, compreensão, amor e por sempre estar ao meu lado me incentivando em todos os momentos.

Agradeço a FAPEMA pelo suporte financeiro, que possibilitou a realização deste trabalho.

*Aprendo um pouco a cada dia e cada  
dia percebo que nunca saberei de tudo.*

G.V.Martins

## Resumo

Estudamos a localização de campos fermiônicos num defeito topológico tipo anel construído com um campo escalar real  $\phi$  e imerso no espaço-tempo de  $(3, 1)$ -dimensões. O processo de localização de férmions no anel é analisado estudando um acoplamento tipo Yukawa  $\bar{\Psi}F(\phi)\Psi$ , onde  $F(\phi)$  é uma função do campo escalar real. Utilizando as matrizes  $\Gamma$  usuais em  $(1, 1)$  dimensões, dividimos o espinor de Dirac em termos das duas componentes de quiralidade de mão-esquerda e mão-direita. As amplitudes dos férmions suportam equações tipo-Schrödinger possibilitando uma interpretação probabilística das mesmas. Em nosso caso específico, para analisarmos a existência de ressonâncias consideramos o acoplamento  $F(\phi) = (1 - \phi^2)^2$ . As equações de autovalores são solucionadas usando procedimentos numéricos. Os autovalores que caracterizam as ressonâncias são obtidas para as duas quiralidades que se mostram exatamente iguais confirmando a análise qualitativa dos potenciais serem parceiros supersimétricos.

**Palavras Chaves:** Defeitos topológicos, Mecânica quântica supersimétrica, Localização de férmions.



## Abstract

We studied the localization of fermionic fields in a ring-like topological defect constructed with a real scalar field  $\phi$  and immersed in  $(3, 1)$ -dimensional spacetime. The process of localization of fermions in the ring is analyzed by studying a Yukawa-like coupling  $\bar{\Psi}F(\phi)\Psi$ , where  $F(\phi)$  is a function of the real scalar field. Using the usual  $\gamma$ -matrices in  $(1, 1)$ -dimensions, we express the Dirac spinor in terms of its chiral left-handed and right-handed components. The amplitudes of fermions support Schrödinger-like equations allowing a probabilistic interpretation of them. In our case, to analyze the existence of resonances, we consider the coupling  $F(\phi) = (1 - \phi^2)^2$ . The eigenvalue equations are solved using numerical procedures. The eigenvalues that characterize the resonances are obtained for the two chiralities that show exactly the same, confirming the qualitative analysis of the potential are supersymmetric partners.

**Keywords:** Topological defects, Supersymmetric Quantum Mechanics, Fermion localization.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Estruturas de defeitos em teoria de campos</b>	<b>5</b>
2.1 Quebra espontânea de simetria . . . . .	6
2.2 Sólitons . . . . .	9
2.3 Modelos de um campo com dinâmica padrão . . . . .	11
2.3.1 Modelo $\lambda\phi^4$ . . . . .	12
2.3.2 Estados BPS . . . . .	18
2.3.3 Estabilidade Linear . . . . .	19
2.4 Sobre o Teorema de Derrick . . . . .	21
2.4.1 O modelo $O(3)$ não-linear . . . . .	23
2.4.2 Dependência explícita com a distância na Lagrangiana . . . . .	24
2.5 Modelos com Dinâmica generalizada . . . . .	27
2.5.1 Estabilidade Linear . . . . .	29
<b>3 Teoria dos espinores</b>	<b>34</b>
3.1 Álgebra de Clifford e as matrizes de Dirac . . . . .	34
3.2 Soluções da Equação de Klein - Gordon . . . . .	35
3.3 A equação de Dirac . . . . .	36
3.4 Quiralidade e Helicidade . . . . .	37
3.5 Espinores . . . . .	38

3.5.1	Espinores de Weyl . . . . .	38
3.6	Espinores de Majorana . . . . .	40
3.7	Representação de Weyl . . . . .	40
3.8	Espinores de Dirac . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Localização de férmions em um anel em <math>(3,1)</math>-dimensões</b>	<b>42</b>
4.1	Anel com um campo escalar . . . . .	43
4.2	Localização de férmions . . . . .	45
4.3	Ressonâncias . . . . .	48
4.3.1	Férmions de mão esquerda . . . . .	48
4.3.2	Férmions de mão direita . . . . .	50
4.4	Resultados Numéricos . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>55</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>67</b>

## Introdução

Observando minuciosamente a história da física é fácil concluir que equações diferenciais lineares são amplamente utilizadas para o estudo de diversos sistemas físicos naturais. Entretanto, existe uma classe de importantes sistemas físicos que apresentam uma não linearidade intrínseca, que tem sido objeto de crescente interesse da comunidade científica. Em razão da não linearidade, em geral pode-se perder a propriedade de se obter soluções completas. Explorando com certa profundidade tais sistemas ou ainda modelos não lineares vê-se uma importância crescente das soluções solitônicas, apropriadas por terem importantes características como por exemplo comportamento topológico, energia finita e localizada e uma extensa variedade de aplicações. O caráter topológico dessas configurações de campo tem se mostrado adequado para o tratamento de algumas soluções e modelos da teoria de campos e também no contexto das teorias de unificação. Alguns modelos descritos por campos escalares reais em  $(1,1)$  dimensões do espaço-tempo, estão entre os sistemas que suportam soluções topológicas [1].

Os defeitos topológicos decorrem da quebra espontânea de simetria causada por algumas formas de perturbações, descritas em vários modelos e teorias. Acredita-se que durante as primeiras fases do Universo as componentes materiais estavam em estados físicos caracterizados por elevados graus de simetria e pensa-se que as interações estariam unificadas. Com esfriamento do Universo, causado por sua expansão, que promove as condições para que algumas dessas simetrias se quebrem espontaneamente. Observando pelo ponto de vista teórico, a realização dos defeitos topológicos decorre a partir da quebra de simetria, onde a Lagrangiana que descreve um sistema, assim como o estado de menor energia do sistema pode ser realizado em diversas configurações distintas. Essa liberdade de escolha da configuração de menor energia dá margem a formação de regiões com propriedades distintas que obedecem a mesma Lagrangiana. O objeto assim formado tem energia finita e localizada. De acordo

com os tipos de simetrias que são quebradas podem formar-se vários tipos de defeitos topológicos. O tipo de defeito formado é determinado pelas propriedades de simetria da matéria e pela natureza da transição de fase.

O estudo dos defeitos topológicos tem sido intenso também, no cenário da física com dimensões extras, pois, mesmo não havendo nenhuma comprovação experimental de que o universo em que vivemos possui mais de quatro dimensões, cada vez mais surgem novos trabalhos com modelos de dimensões extras com o objetivo de resolver problemas de física de altas energias. O estudo de dimensões extras é consequência do esforço de unificar em uma única teoria, a gravidade e as outras forças fundamentais. A teoria de Kaluza-Klein, que surgiu a partir dos trabalhos do matemático Theodor Kaluza [2] e O.Klein [3], são um exemplo de que grandes esforços já vinham sendo anteriormente realizados na tentativa de unificação da gravidade com o eletromagnetismo. Nessa teoria, a relatividade geral foi estendida para um espaço-tempo a cinco dimensões e as equações resultantes podem ser separadas em conjuntos nos quais são equivalentes às equações de campo de Einstein, equações de Maxwell e um campo escalar extra.

Modelos de dimensões extras também surgem da quebra espontânea de simetria. Neste cenário surge o que conhecemos como teoria de Branas-Mundo. Esta teoria multidimensional é uma vertente originada da teoria  $M$ , que têm recebido grande atenção da comunidade científica por abordar problemas importantes, tais como a hierarquia de calibre [4-6], que está relacionado ao fato de que a massa do Bóson de Higgs é instável sob correções radiativas e o problema da constante cosmológica [7,8], que ainda é um dos grandes mistérios da física, pois trata-se de entender porque o valor esperado para a densidade de energia no vácuo, relacionada com a constante cosmologia  $\Lambda = 8\Pi G\rho$ , é muitas ordens de grandeza maior do que o valor observado.

Em 1999, Lisa Randall e Raman Sundrum [9], apresentaram uma solução mais completa para o problema de hierarquia. O espaço-tempo em torno da brana de Randall-Sundrum é anti-de Sitter (AdS5) e vários modelos de branas espessas, que apresentam assintoticamente esta característica, foram construídos. Segundo esse novo modelo teórico, todos os campos do modelo padrão ficam confinados à membrana. Essa nova maneira de entender o universo com dimensões extras, motivou a publicação de vários trabalhos científicos com o objetivo de analisar a localização de campos tensoriais na membrana. Como exemplo podemos citar o trabalho [10], onde são estudados modos fermiônicos, acoplados a um campo de Higgs com uma estrutura de parede de domínio em um espaço-tempo 5– dimensional anti-de Sitter. Após resolver a equação de Dirac, mostrou-se que existem estados fermiônicos presos na parede. Em [11] é estudado a localização de férmions não massivos utilizando

o acoplamento de Yukawa. O estudo de localização de férmions em branas tem atraído a atenção de muitos pesquisadores nos últimos anos. A localização de férmions em branas exige um acoplamento dos espinores (campo de Dirac) e os campos escalares na brana [12-14]. Na Ref. [15], Jackiw e Rebbi, estudaram localização de férmions em sólitons no espaço-tempo plano comprovando que tal localização era possível utilizando o acoplamento de Yukawa.

Em [16], foram estudados modos fermiônicos em um kink Sine-Gordon em teorias de campo escalares (1 + 1) dimensão. Em [17] foram consideradas branas (4, 1)-D construídas com dois campos escalares  $\phi$  e  $\chi$  acoplados com um campo de Dirac, por meio de um acoplamento de Yukawa. Nesse trabalho foi considerado o acoplamento mais simples  $\bar{\Psi}\phi\chi\Psi$  para o modelo de brana Bloch e a localização de férmions foi estudada numericamente. Modos ressonantes foram encontrados em branas com estrutura interna e solução de modo zero para férmions com quiralidade esquerda. Não foram obtidas soluções de modo-zero para férmions de mão-direita, pois, em teoria de branas, férmions não-massivos devem ter uma única quiralidade. A vida média das ressonâncias foi relacionada com um parâmetro  $a$  que controla a aparência de branas com estrutura interna. Foi demonstrado que branas com estrutura interna são mais efetivas em localizar férmions de mão-esquerda.

Em [18] os autores investigam modelos de branas com dinâmica generalizada. Escolheu-se um modelo específico

$$\mathcal{L} = K(X) - V(\phi), \tag{1.1}$$

onde  $K(X) = X + \alpha|X|X$ . Considerando  $\alpha$  pequeno, investigou-se a contribuição do termo cinético fora do padrão, no problema de localização de férmions. Verificou-se que para um acoplamento simples  $\eta\bar{\Psi}\phi\Psi$  e sob alguns valores para a constante de acoplamento  $\eta$ , é possível localizar modos zero na brana.

Inspirados no vasto número de trabalhos que estudam localização de campos de matéria em branas, na ref.[19] os autores investigam uma classe de defeitos topológicos construídos por um campo escalar real  $\phi$  com simetria radial, imerso nas (3,1) dimensões usuais  $(t, x, y, z)$ . A lagrangiana desse defeito tem dependência explícita com  $r$ , onde  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ . A localização de campos de spin-0 foi analisada. Um dos pontos de interesse foi a análise de estados ressonantes e sua dependência sobre o raio do anel  $r_0$  e um parâmetro de acoplamento do modelo. Nesta proposta, analisamos as probabilidades de localização de campos fermiônicos com uma determinada massa dentro do defeito tipo anel variando alguns parâmetros, como o raio do anel e a constante de acoplamento. Analisamos o tempo de vida das partículas dentro da estrutura de defeito antes do vazamento para a região exterior.

De acordo com o descrito à cima, este trabalho está desenvolvido da seguinte forma: No capítulo 2

fizemos uma breve revisão do estudo de defeitos em teoria de campos, explicando de maneira sucinta a definição de quebra espontânea de simetria e como a mesma se origina. Fizemos uma análise de modelos com um campo escalar real em  $(1, 1)$  dimensões com dinâmica padrão e com dinâmica generalizada. Para o estudo de defeitos com dinâmica generalizada, levando em consideração o estudo de soluções de defeitos em dimensões superiores, fez-se necessário um breve estudo sobre o teorema de Derrick. Este teorema limita a existência de soluções tipo sólitons quando trabalhamos em cenários com dimensões espaciais maiores que 2, ou seja, as soluções são instáveis em  $D > 2$ . Mas, nós sabemos que sistemas reais são estudados de maneira mais abrangente em  $D > 2$ . Logo, formas de contornar esse teorema serão mostrados de acordo com a utilização neste trabalho.

No capítulo 3 estudamos a teoria dos espinores e a álgebra de Clifford em dimensões arbitrárias. Estudamos as matrizes de Dirac e sua formulação em  $D$  dimensões, bem como o operador de Dirac. Estudo este, importante devido a utilização do mesmo no cerne deste trabalho.

Finalmente, no capítulo 4, analisamos de forma inédita a localização de férmions (partículas de spin-1/2) em um defeito tipo anel. Considerando uma dependência explícita com a distância na lagrangiana, defeitos imersos em um espaço tempo quadridimensional são construídos e analisamos a capacidade de localização de campos de spin-1/2 em tais estruturas. Obtemos uma equação tipo-Schrödinger para modos massivos e estudamos os modos ressonantes.

## Estruturas de defeitos em teoria de campos

O conceito de defeito em um sistema físico, pode ser descrito como o resultado da quebra de simetria deste [20]. Usualmente a noção de simetria está associada a alguma lei de conservação do sistema físico. Como exemplo, podemos citar que a conservação do momento angular orbital em um movimento de uma partícula sob a ação de uma força central está associada à noção de simetria do sistema sob a rotação no espaço ordinário. De um modo mais geral, essa simetria pode ser expressa como a invariância de um sistema de equações ou de uma grandeza física do sistema sob um dado conjunto de transformações espaço-temporais. Logo, um sistema físico só apresentará um defeito se ele tiver uma determinada simetria e esta puder ser quebrada.

Uma quebra de simetria resultará num defeito topológico, quando, não for possível eliminar o defeito e conseqüentemente restaurar a simetria do meio sem modificar completamente as propriedades e características topológicas do sistema físico que o contém. Como exemplo de defeitos topológicos podemos citar as paredes de domínio em matéria condensada. De fato, em um sistema ferromagnético aquecido, as direções dos spins distribuem-se de modo aleatório, pois cada spin tem liberdade de apontar para qualquer direção. Contudo, quando o material é resfriado, a liberdade de orientação dos spins é quebrada e a orientação de um determinado spin é fortemente influenciada pela orientação do spin vizinho. Desse efeito surge a parede de domínio como uma interface de espessura finita que interpola entre duas configurações distintas de spin (os chamados domínios magnéticos).

Segundo algumas teorias, no começo da formação do universo, existiam regiões com diversas configurações ou em fases diferentes, sendo os limites entre essas regiões, ou diferentes fases, denominados como defeitos topológicos [20-23].



## 2.1 Quebra espontânea de simetria

Para entendermos o conceito de quebra de simetria, consideremos um sistema físico constituído de um número infinito de agulhas em um plano conforme a fig.(2.1). Essas agulhas têm liberdade para girar em torno de seus próprios eixos e, na presença de um campo magnético externo, todas as agulhas buscarão se orientar na direção do campo.

Agora, supomos que esse campo magnético externo seja afastado ou desligado. Nessas condições, as agulhas continuarão apontando na mesma direção Fig.(2.2). O estado de orientação das agulhas é o estado de menor energia do sistema ou estado fundamental. Na ausência de qualquer campo magnético externo, há infinitos estados fundamentais, cada um deles correspondendo a uma direção, à qual todos os magnetos estão colocados paralelamente. Todos têm a mesma energia e todos são fundamentais. A interação que descreve magnetos com este comportamento é invariante por rotações, logo, isotrópica. Isto se reflete no fato de que a orientação dos magnetos é esta, mas poderia ser qualquer outra. A isotropia do sistema é uma simetria escondida [24].

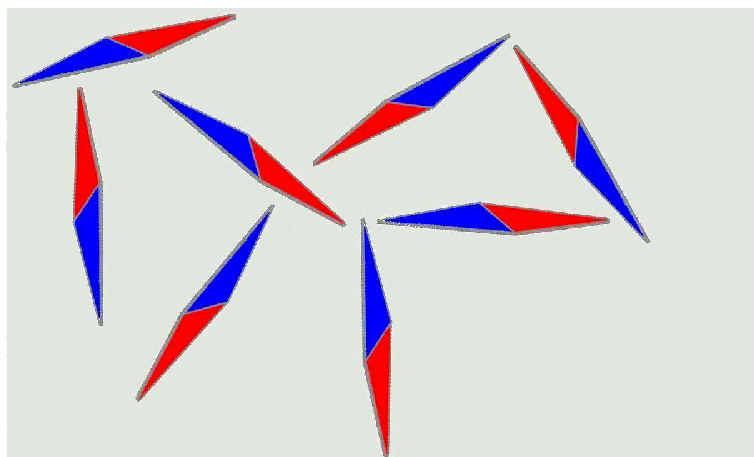


Figura 2.1: Agulhas imantadas na ausência de campo magnético externo. Elas têm liberdade de orientação e podem movimentar-se em torno de seus pontos médios

Quando o sistema descrito pelas agulhas magnetizadas não está no estado fundamental, tem a sua disposição um número infinito de estados de menor energia, pois, a escolha de orientação é inumerável. A quebra de simetria ocorre quando um desses estados é escolhido. Se essa escolha for feita sem a interferência de nenhum agente externo, dizemos que ocorreu uma quebra espontânea de simetria.

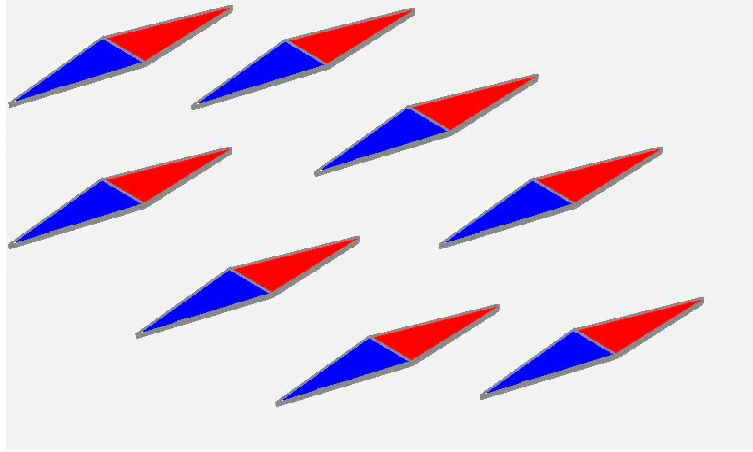


Figura 2.2: Agulhas imantadas na presença de de campo magnético externo. Todas buscam orientar-se na direção do campo.

Pode-se ter quebra espontânea de simetria em uma teoria com um campo escalar, dependendo do sistema descrito pela teoria em questão. A lagrangiana nessa teoria pode assumir a forma [25,26]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}\phi^2\left(\mu^2 - \frac{\lambda}{2}\phi^2\right). \quad (2.1)$$

esta lagrangiana é invariante sob uma transformação de simetria  $Z_2 \phi \rightarrow -\phi$ , e o estado fundamental não quebra a simetria do modelo. Em (2.1),  $\mu$  é a massa do campo escalar e  $\lambda$  é o termo de acoplamento, sendo  $\lambda \gg 0$  com vácuo da teoria em  $\phi = 0$ , e essa configuração é estável. Considerando  $\mu^2 < 0$ , temos um modelo com campo escalar massivo, mas o termo de massa não pode ser interpretado por  $\mu$  pois, esta seria imaginária. Contudo, podemos escrever um potencial

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\phi^2\left(\mu^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^2\right) \quad (2.2)$$

no qual a configuração de menor energia, é aquela que minimiza  $V(\phi)$ . Com isto, a lagrangiana não possui mínimos em  $\phi_0 = 0$ . Os mínimos agora são  $\phi_0 = \pm\frac{\mu}{\lambda}$ . Neste caso, se o sistema estiver no estado  $\phi = 0$ , ocorreria uma transição para o estado estável  $\phi = \phi_0$ , ou seja ele cairá em um dos mínimos mencionados sem que saibamos qual dos mínimos será escolhido. Uma questão relevante é sabermos que tipo de teoria resultará após a quebra de simetria. Para uma análise mais detalhada, introduzimos uma mudança de variável, que é uma transformação do campo  $\phi$  num campo  $\varphi$  sendo uma perturbação em torno do mínimo  $\phi_0$ . Logo, temos

$$\phi = \phi_0 + \varphi. \quad (2.3)$$

Dessa transformação na equação (2.1), obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - \mu^2\varphi^2 \pm \mu\lambda\phi^3 - \frac{\lambda^2}{4}\phi^4 + \frac{1}{4}\left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^2 \quad (2.4)$$

Em (2.4) percebe-se uma quebra de simetria, pois a lagrangiana agora, não possui simetria  $Z_2$ . A teoria continua dependendo dos parâmetros  $\mu$  e  $\lambda$  e o campo  $\phi$  é massivo na fase de simetria quebrada.

Para uma teoria que descreva uma quebra de simetria contínua, podemos utilizar a teoria  $\phi^4$  com um campo escalar com duas componentes. Considerando, então, a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) - m^2\phi\phi^* + \lambda(\phi^*\phi)^2, \quad (2.5)$$

temos uma quebra de simetria do potencial pelas soluções que além de ter um campo com massa, exibem uma outra partícula não massiva.

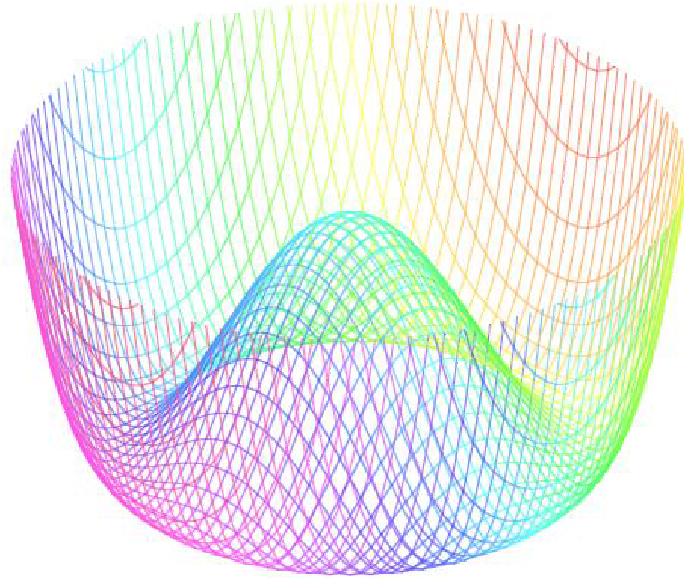


Figura 2.3: Potencial tipo chapéu mexicano de uma teoria com dois campos escalares. Depois de quebrar a simetria e escolher uma direção no espaço interno, não há perda de energia para a partícula em seu movimento no vale do chapéu.

A lagrangiana para este modelo é invariante sob uma transformação global

$$\phi \rightarrow e^{i\Lambda}\phi. \quad (2.6)$$

Minimizando o potencial, obtemos o estado fundamental de modo que  $m^2 > 0$ , o mínimo é  $\phi^* =$

$\phi = 0$ . Tomando  $m^2 < 0$ , temos um mínimo

$$|\phi|^2 = -\frac{m^2}{2\lambda} = a. \quad (2.7)$$

Os mínimos do potencial estão localizados ao longo do círculo  $|\phi| = a$  e as excitações sobre o vácuo são realizadas por perturbações também em  $|\phi| = a$ . Podemos representar o campo complexo em termos de dois campos escalares reais  $\rho$  e  $\alpha$

$$\phi(x) = \rho(x)e^{i\alpha(x)}, \quad (2.8)$$

o que possibilita analisar a densidade lagrangiana após uma perturbação na forma  $\phi(x) = [\rho^{i\alpha(x)}]$ . Logo,

$$V = \lambda(\phi^*\phi - a^2)^2 - \lambda a^4 \quad (2.9)$$

e obtém-se para o campo  $\rho'$  uma massa dada por

$$m_{\rho'}^2 = 4\lambda a^2 \quad (2.10)$$

enquanto,  $\alpha$  é um campo sem massa chamado de bóson de Goldstone que se movimenta em torno dos mínimos, ou seja, o bóson de Goldstone pode ser pensado como uma partícula que se propaga no vale do chapéu mexicano Fig.(2.3) sem gastar energia.

## 2.2 Sólitons

Após descrevermos os conceitos básicos de defeitos topológicos e quebra espontânea de simetria vamos analisar uma classe de soluções de equações diferenciais não-lineares, os sólitons, que são modelos passíveis de serem utilizados para a descrição de defeitos topológicos. Por serem estáveis, os defeitos topológicos podem ser caracterizados por modelos quase-estáticos, esta que é outra característica marcante dos sólitons.

Os sólitons, são um tipo específico de ondas solitárias. Ambos obtiveram muita atenção nos últimos trinta anos e aparecem em diversas áreas, tais como ondas em águas rasas e profundas, comunicações ópticas e modelos biológicos. As ondas solitárias são ondas que mantêm a sua forma quase inalterada a medida que se propagam, devido a baixa atenuação e dispersão que sofrem. Geralmente surgem de alguns tipos de equações diferenciais parciais. Os sólitons, mas especificamente, são ondas solitárias que interagem elasticamente, ou seja, preservam a sua forma em colisões[27].

O primeiro relato de observação de uma onda solitária foi feito em 1834 pelo engenheiro náutico John Scott Russell, que observando um barco sendo puxado por dois cavalos no canal de Edinburgh,

Glasgow, verificou que quando o mesmo era subitamente freado, surgia uma grande onda solitária com uma forma arredondada bem definida. Seguindo a onda formada, ele observou que a mesma continuava seu curso ao longo do canal sem mudar a sua forma e sem diminuir sua velocidade por um longo trecho. Russell relatou tal observação em um jornal da Associação Britânica em 1844:

*”Acredito poder melhor introduzir o fenômeno descrevendo as circunstâncias em que se procederam o meu primeiro contato com ele. Eu estava observando o movimento de um barco que foi rapidamente retirado do canal por um par de cavalos, quando o barco parou de repente, mas não a massa de água do canal que este havia colocado em movimento; ela se acumulou ao redor da proa da embarcação em estado de agitação violenta, e então subitamente, deixando-o para trás, deslizou com grande velocidade, assumindo a forma de uma grande onda solitária, uma elevação arredondada, suave e com um pico bem definido, que continuou o seu curso ao longo do canal aparentemente sem mudar de forma ou diminuir a velocidade. Eu segui montado no cavalo, e alcancei-o ainda viajando a umas oito ou nove milhas por hora, preservando sua forma a uns trinta pés de distância. Sua altura diminuiu gradativamente, e após uma perseguição de uma ou duas milhas perdeu-o numa das sinuosidades do canal.”*

Após observar esse fenômeno, Russell realizou várias experiências e foi capaz de verificar empiricamente que a velocidade  $v$  da onda era dada por:

$$v = \sqrt{g(h + A)}, \quad (2.11)$$

onde  $A$  era a amplitude da onda,  $h$  a profundidade do canal não-perturbado e  $g$  a aceleração da gravidade. A partir da expressão da velocidade, conclui-se que quanto maior for a amplitude da onda, maior será sua velocidade de translação. Como a velocidade depende da amplitude da onda, então a equação é não-linear. Da equação clássica de onda, temos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.12)$$

Na equação acima a velocidade da onda,  $v$ , não depende da amplitude, pois a equação de onda é linear: se  $u(x; t)$  é uma solução, então também  $Au(x; t)$  será, para qualquer valor de  $A$  e o mesmo valor de  $v$ . Ondas solitárias que sempre se recompõem após colidirem entre si são conhecidas como sólitons [28,29]. devido essa característica estável os sólitons têm grande utilidade no estudo dos defeitos topológicos. Como exemplo, podemos citar a teoria sine-Gordon que exhibe o comportamento de onda solitária (em um processo de colisão kink-antikink ocorre apenas uma mudança de fase nas soluções que caracterizam kink ou antikink) e a teoria  $\lambda - \phi^4$ , que exhibe o comportamento solitônico de densidade de energia localizada, mas o processo de colisão é intrincado, acarretando apenas mudança de fase.

Podemos também, descrever os sólitons como soluções de uma classe de equações diferenciais não-lineares e como já mencionamos neste trabalho, a importância do estudo dessas soluções se dá porque muitos sistemas físicos complexos podem ser aproximadamente descritos por estas equações, e mesmo sendo não-lineares, possuem soluções analíticas [30]. Para exemplificarmos equações desta classe citamos KdV (Korteweg-de Vries Equation):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 6\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}, \quad (2.13)$$

De maneira geral, sólitons podem representar fenômenos de características não-lineares, localizados e estáveis [1]. Essas características mencionadas, são as características principais de defeitos topológicos.

O modelo  $\phi^4$  é exemplo de modelo tipo sóliton [1]. podemos encontrar esse tipo de solução, de duas maneiras diferentes: postulando a equação diferencial para um dos modelos mencionados acima ou então podemos lançar mão de uma lagrangiana para descrever o sistema físico em questão.

### 2.3 Modelos de um campo com dinâmica padrão

Em mecânica clássica, a formulação lagrangiana que descreve sistemas discretos de partículas é estabelecida pelo princípio variacional. Para a descrição de sistemas contínuos, as funções de coordenadas  $q_i(t), i = 1, 2 \dots n$ , que descrevem o movimento do sistema físico em consideração, são trocadas por uma função  $q(x; t)$  mediante a substituição da variável discreta  $i$  pela variável contínua  $x$ . Essa função descreve um sistema com uma quantidade infinita e inumerável de graus de liberdade e denomina-se campo. Há uma variedade de sistemas físicos que são descritos por campos, como exemplo temos o eletromagnetismo, onde as interações entre cargas e correntes são descritas em termos de um campo designado campo eletromagnético. E há vários tipos de campo. Por exemplo, a densidade  $\rho(x; t)$  de um fluido escoando é um campo escalar. O campo eletromagnético é um campo vetorial [31]. Há também campos tensoriais como o campo gravitacional na relatividade geral; campos espinoriais como o campo de Dirac, etc., cada um caracterizado por uma lei de transformação específica frente a um grupo de transformações espaço-temporais apropriado ao contexto da teoria em questão. Por exemplo o grupo de Lorentz no caso de teorias relativísticas. Os campos escalares são notavelmente os mais simples, do ponto de vista da lei de transformação, pois são invariantes. E vários sistemas físicos estudados em dinâmica não-linear podem ser descritos em termos de campos escalares.

A lagrangiana em teoria de campos em (1,1)-dimensões que descreve a dinâmica padrão de um sistema físico com um campo escalar é [1]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (2.14)$$

Onde  $\phi$  é um campo real e  $V(\phi)$  é uma função não negativa de  $\phi$ , o potencial. A lagrangiana é invariante sobre uma transformação  $\phi \rightarrow -\phi$ , conhecida como simetria  $Z_2$ . Aplicando o princípio de mínima ação, encontramos uma equação diferencial que possibilita determinar o campo  $\phi$ :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad (2.15)$$

Aqui temos uma equação diferencial parcial de segunda ordem e nosso interesse é encontrar as soluções dessa equação que representam os mínimos do potencial. Como um defeito topológico apresenta estabilidade, é natural estudar a equação (2.15) sem dependência temporal. Logo, considerando apenas as configurações de campos estáticos, ou seja,  $\phi = \phi(x)$  a Eq. (2.15) fica

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = \frac{dV(\phi)}{d\phi} \quad (2.16)$$

Utilizando o método de quadratura na equação, obtemos a equação de primeira ordem

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = \pm \sqrt{2V}. \quad (2.17)$$

O potencial  $V(\phi)$  deve ser essencialmente positivo pois trabalhamos com campos escalares reais.

Agora, definimos a corrente topológica por

$$j_\mu = \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi. \quad (2.18)$$

Nessa equação, o termo  $\epsilon_{\mu\nu}$  é dado em 1 + 1 dimensões e representa pseudo-tensor de Levi-Civita anti-simétrico. A conservação da corrente topológica  $\partial_\mu j^\mu = 0$  é um fator importante, pois, favorece a existência de uma carga  $Q$  que depende das propriedades assintóticas do campo

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx j^0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi(x \rightarrow \infty) - \phi(x \rightarrow -\infty) \quad (2.19)$$

Aqui,  $Q$  depende das propriedades assintóticas do campo. Quando  $Q = 0$  temos soluções não topológicas e para soluções topológicas devemos ter  $Q \neq 0$ . As soluções que tenham  $Q \neq 0$  devem apresentar comportamento  $\phi(x \rightarrow \infty) \neq \phi(x \rightarrow -\infty)$ . A existência de energia finita está limitada ao comportamento assintótico do campo. Esse comportamento assintótico deve levar aos mínimos do potencial, logo o potencial necessariamente deve ter mais de um mínimo

### 2.3.1 Modelo $\lambda\phi^4$

Quando propomos um modelo para o estudo de defeitos topológicos, o que fazemos é propor a função  $V(\phi)$ , o potencial. No modelo  $\lambda\phi^4$  o potencial é expresso da seguinte forma[1]:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \lambda (a^2 - \phi^2)^2. \quad (2.20)$$

Observa-se que a função  $V(\phi)$  é não-linear em  $\phi$  e quando usada na lagrangiana, fornecerá uma solução chamada defeito topológico, pois apresenta uma solução que tem as características de um sóliton. Como se pode ver na figura (2.4), o potencial da equação (2.20) tem os estados estacionários degenerados, ou seja, uma transformação  $\phi \rightarrow -\phi$  leva um estado de equilíbrio estável no outro[28].

O potencial da equação (2.20) terá mínimos em  $\phi = \pm a$  somente se  $\lambda > 0$ , ou seja, a constante  $\lambda$  é um parâmetro que determina a configuração do modelo. Se substituirmos na equação do potencial  $\lambda < 0$ , o modelo não apresentará quebra espontânea de simetria, já que irá apresentar apenas um estado de equilíbrio estável, em  $\phi = 0$ . A constante  $a$ , sendo real, não terá papel decisivo na configuração do modelo, influenciando somente na forma da solução da equação (2.21), com o potencial do modelo  $\lambda\phi^4$ .

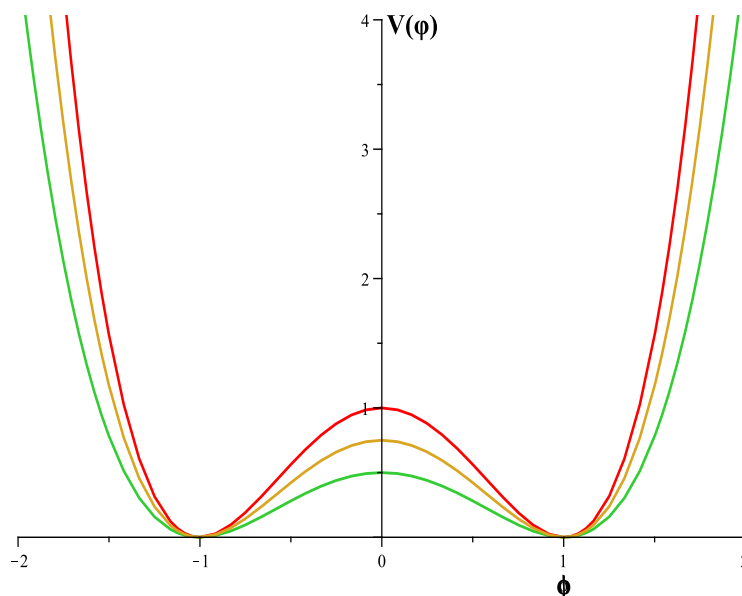


Figura 2.4: Gráfico do potencial do modelo  $\lambda\phi^4$ , para diversos valores de  $\lambda > 0$

O modelo  $\lambda\phi^4$  possui características bem específicas, como:

- (i) invariância  $\phi \rightarrow -\phi$ , ou seja, esta é a simetria do modelo, relacionada aos estados de equilíbrio estável;
- (ii) a constante  $\lambda$  tem papel importante na configuração do modelo. Pode assumir apenas valores positivos para que apresente quebra espontânea de simetria;
- (iii) representa um modelo tipo sóliton, pois apresenta não linearidade em  $\phi$ .

Para verificarmos que tipo de sóliton o modelo fornece, primeiro vamos escolher o sinal positivo



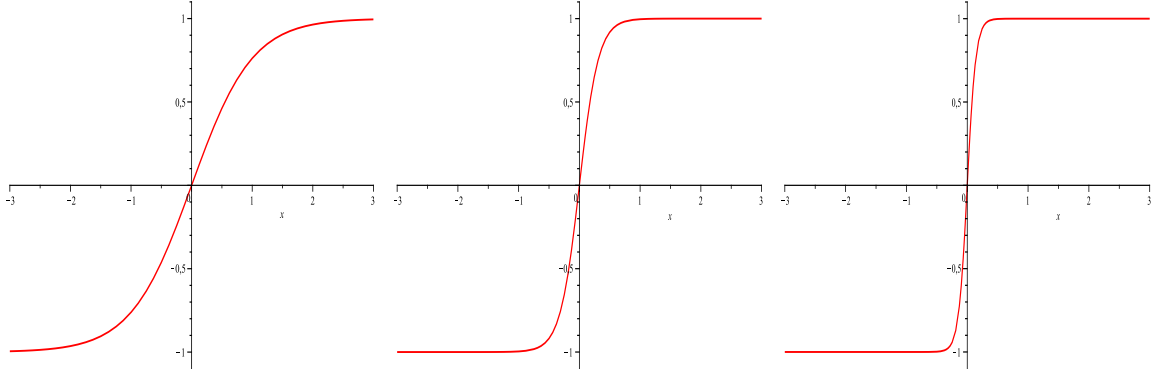


Figura 2.5: (esquerda) Solução do Kink para  $\lambda = 1$ ; (centro) Solução do Kink para  $\lambda = 10$  e (direita) Solução do Kink para  $\lambda = 50$ .

na equação (2.17). Encontramos para o campo  $\phi$  a seguinte solução:

$$\phi(x) = \tanh(a\sqrt{\lambda}x + K), \quad (2.21)$$

Por conveniência, será tomado o valor de  $K = 0$ . Dessa forma, a equação (2.21) é reduzida na forma:

$$\phi(x) = \tanh(a\sqrt{\lambda}x). \quad (2.22)$$

Essa solução denomina-se “kink”. Na figura (2.5) observa-se que a variação do campo  $\phi$  ocorre apenas em uma faixa do eixo  $x$ . Esta faixa é denominada região de transição e o “kink” é a transição entre dois estados de mínima energia. O modelo  $\phi^4$  é utilizado para descrever defeitos, tais como as paredes de domínio em cosmologia [21,23,32].

Para uma teoria de campos como a (2.14), considerando apenas soluções estáticas, a densidade de energia é descrita pela equação:

$$\epsilon(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi(x)}{dx} \right)^2 + V(\phi). \quad (2.23)$$

Considerando o potencial do modelo  $\phi^4$ , temos para a densidade de energia

$$\epsilon(x) = a^4 \lambda \operatorname{sech}^4(a\sqrt{\lambda}x). \quad (2.24)$$

e atribuindo  $a = 1$  e  $\lambda = 1$ ,  $\epsilon(x)$  fica:

$$\epsilon(x) = \operatorname{sech}(x)^4. \quad (2.25)$$

A equação para a energia total, utilizando (2.24) é

$$\begin{aligned} E_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \epsilon(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx (a^4 \lambda \operatorname{sech}^4(a\sqrt{\lambda}x)) \end{aligned} \quad (2.26)$$

E tem como solução

$$E_0 = \frac{4a^3\sqrt{\lambda}}{3}. \quad (2.27)$$

Este resultado é uma demonstração de que a energia total para o kink e o anti-kink é mínima e se considerarmos o caso mais geral onde  $a = 1$  e  $\lambda = 1$ , o resultado obtido é  $E_0 = \frac{4}{3}$ .

Agora vamos analisar a invariância relativística dessa teoria. Para isso, primeiro vamos submeter a solução  $\phi(x)$  a uma transformação de Lorentz [28]. Nessa transformação,  $x \rightarrow \gamma(x - vt)$  e  $\gamma = \frac{1}{1-v^2}$ . Logo, a solução fica

$$\phi(x, t) = a \tanh\{a\sqrt{\lambda}\gamma(x - vt)\} \quad (2.28)$$

A partir desta expressão, podemos encontrar a densidade de energia

$$\epsilon(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi). \quad (2.29)$$

onde  $\phi$  tem dependência em  $x$  e  $t$ , e é expresso por (2.28). Logo, a equação para a densidade de energia torna-se

$$\begin{aligned} \epsilon(x) &= \frac{1}{2} \left[ -a^2 [1 - \tanh(a\sqrt{\lambda}\gamma(x - vt))]^2 \sqrt{\lambda}\gamma v \right]^2 + \frac{1}{2} \left[ a^2 (1 - \tanh(a\sqrt{\lambda}\gamma(x - vt)))^2 \sqrt{\lambda}\gamma \right]^2 + V(\phi) \\ &= \frac{1}{2} a^4 \lambda \gamma v^2 \operatorname{sech}^4(a\sqrt{\lambda}\gamma(x - vt))^2 + \frac{1}{2} a^4 \lambda \gamma \operatorname{sech}^4(a\sqrt{\lambda}\gamma(x - vt))^2 + \frac{1}{2} a^4 \lambda^2 \operatorname{sech}^4(a\sqrt{\lambda}\gamma(x - vt))^2 \\ &= \frac{1}{2} a^4 \lambda \operatorname{sech}^4[a\sqrt{\lambda}\gamma(x - vt)] \left[ \frac{v^2\gamma^2 + \gamma^2 + 1}{2} \right]. \end{aligned}$$

E rearrumando os termos, obtemos para a densidade de energia,

$$\epsilon(x) = \gamma a^4 \lambda \operatorname{sech}^4[a\sqrt{\lambda}\gamma(x - vt)]. \quad (2.30)$$

De posse da densidade de energia desta teoria, vamos analisar como se comporta a energia total quando submetida a uma transformação de Lorentz. A energia total é escrita como:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma a^4 \lambda \operatorname{sech}^4[a\sqrt{\lambda}\gamma(x - vt)] dx \quad (2.31)$$

Para resolver essa integral, faz-se a seguinte mudança de variáveis

$$\rho(x) = a\sqrt{\lambda}\gamma(x - vt) \quad (2.32)$$

Da derivada de  $\rho(x)$  em relação a  $x$  encontramos uma expressão para  $dx$ :

$$dx = \frac{d\rho}{a\sqrt{\lambda}\gamma} \quad (2.33)$$

Substituindo (2.30) e (2.33) em (2.31), temos

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} a^4\gamma\lambda \frac{d\rho}{a\sqrt{\lambda}\gamma} \operatorname{sech}^4(\rho) \quad (2.34)$$

$$= \frac{a^3\lambda}{1-v^2} \frac{1}{\sqrt{\lambda}\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{\cosh^4(\rho)} \quad (2.35)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{4a^3\sqrt{\lambda}}{3}, \quad (2.36)$$

ou seja, a energia total é

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (2.37)$$

Algumas observações devem ser feitas a partir deste resultado. Primeiramente, percebe-se que a estabilidade deste modelo está no fato de que a onda solitária ou sólton se comporta como uma partícula relativística. Quando aplicamos uma transformação de Lorentz em sua energia total, a mesma se transforma como a energia total de uma partícula livre.

Agora, para uma comparação, consideremos o modelo conhecido com  $\phi^4$  invertido, cujo potencial é dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{2}\phi^4. \quad (2.38)$$

Aqui, consideramos as constantes  $\lambda = 1$  e  $a = 1$  para obtermos resultados mais simples. Este potencial apresenta uma solução constante  $\phi = 0$ . Esse fato implica na existência de um mínimo local com  $V(\phi) = 0$ .

Esse modelo tem para soluções estáticas a seguinte equação de movimento

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \phi - 2\phi^3 \quad (2.39)$$

Nessas condições, as soluções para o campo  $\phi$

$$\phi(x) = \pm \operatorname{sech}^4(x) \quad (2.40)$$

são soluções não-topológicas chamadas lumps. A solução deste modelo não representa transição entre estados de mínima energia, o que pode ser visto na figura (2.6). Uma importante aplicação nesse tipo

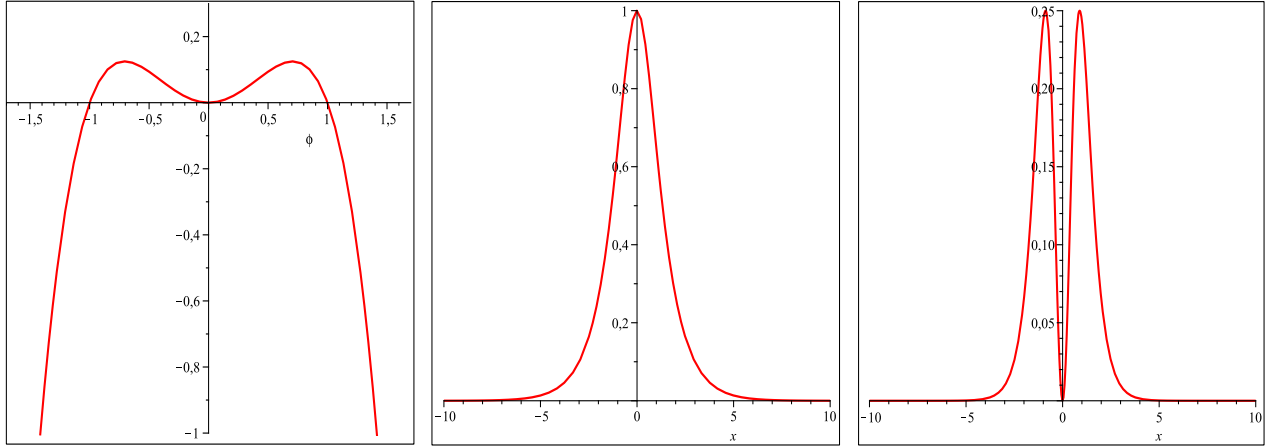


Figura 2.6: (esquerda) Potencial do modelo  $\phi^4$  invertido. Este modelo não apresenta dois mínimos o que não o caracteriza como defeito topológico. Este modelo é chamado de  $\phi^4$  invertido pois apresenta uma inversão do potencial  $\phi^4$ . (centro) Gráfico de  $\phi$  do modelo  $\phi^4$  invertido. Representando solução não-topológica. (direita) Densidade de energia do modelo  $\phi^4$  invertido.

de solução está no uso de lumps para a descrição da teoria de branas com uma única dimensão extra. Nesse caso, recentes investigações mostram a presença de estados taquiônicos presentes na brana [25].

A densidade de energia

$$\epsilon(x) = \text{sech}^2(x) \tanh^2(x) \quad (2.41)$$

obtida para este modelo não é localizada.

E para uma comparação entre as soluções Kinks e lumps, temos

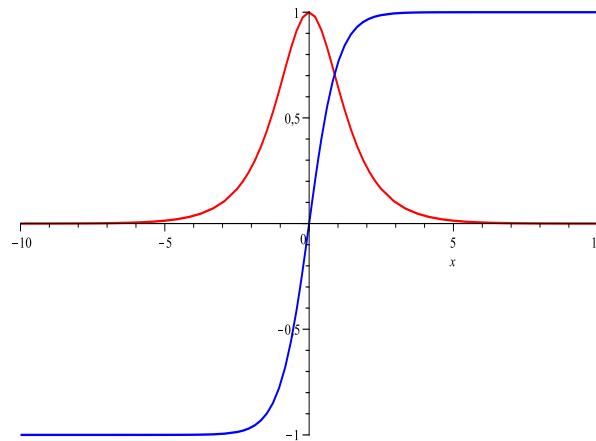


Figura 2.7: Kink e lump para  $a = \lambda = 1$ .

A solução tipo-lump, apresenta apenas um mínimo o que caracteriza como uma solução não-topológica e, este fato também pode ser observado no gráfico do potencial  $\phi^4$  invertido. Observa-se também que a densidade de energia do lump é nula no centro e em seguida atinge valores máximos.

### 2.3.2 Estados BPS

Os estados PBS foram obtidos após considerar uma maneira alternativa de procurar soluções para defeitos topológicos a partir do princípio de que o potencial é essencialmente positivo. Este princípio foi formulado por Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfeld [52].

Escolhendo uma função  $W$ , tal que

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2. \quad (2.42)$$

A derivada deste potencial tem a forma

$$\frac{dV(\phi)}{dx} = W_\phi W_{\phi\phi}, \quad (2.43)$$

que substituída na equação de movimento para soluções estáticas, temos

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\phi}. \quad (2.44)$$

A partir das soluções de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi, \quad (2.45)$$

podemos perceber que estas equações de primeira ordem são soluções das equações de segunda ordem pois, a partir da equação de primeira ordem, aplicando a segunda derivada em função de  $x$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(W_\phi) \\ &= \frac{d(W_\phi)}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} \\ &= W_{\phi\phi} W_\phi. \end{aligned} \quad (2.46)$$

As soluções das equações de primeira ordem são chamados de estados BPS. A densidade de energia para campos estáticos é escrita por

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dW}{d\phi} \right)^2 \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} dx \left( \frac{d\phi}{dx} \mp \sqrt{2V(\phi)} \right)^2 \pm \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \sqrt{2V(\phi)} \frac{d\phi}{dx} \right). \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} dx \left( \frac{d\phi}{dx} \mp W_\phi \right)^2 \pm \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( W_\phi \frac{d\phi}{dx} \right) \end{aligned} \quad (2.47)$$

O primeiro termo da Eq.(2.47) não pode ser negativo. Logo, a energia mínima para este modelo corresponde ao segundo termo de Eq.(2.47).

$$E_{min} = \pm \left( W(\phi(x \rightarrow \infty)) - W(\phi(x \rightarrow -\infty)) \right) = |\Delta W| \quad (2.48)$$

Esta expressão representa simplesmente o limite na energia que pode ser alcançada para as soluções estáticas que obedecem as equações de primeira ordem. Os estados BPS aparecem muito naturalmente no ambiente supersimétrico, preservando a supersimetria. Na presença da supersimetria,  $W$  é nomeado superpotencial.

### 2.3.3 Estabilidade Linear

Nesta subseção, faremos uma breve revisão da estabilidade linear. Aqui, mostraremos que a equação de movimento (2.15) é estável considerando o espaço-tempo em que estamos trabalhando, ou seja, uma dimensão espacial e uma dimensão temporal.

Primeiramente vamos utilizar a equação de movimento (2.15) e introduziremos uma pequena perturbação  $\eta(x, t)$  [1]. Usaremos  $\bar{\phi}$  para a solução estática e  $\eta(x, t)$  tem dependência temporal, ou seja,

$$\phi(x, t) = \bar{\phi} + \eta(x, t) \quad (2.49)$$

Substituindo em (2.15), temos

$$\frac{\partial^2(\bar{\phi} + \eta)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2(\bar{\phi} + \eta)}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2.50)$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.51)$$

Expandindo em série de Taylor o termo  $\frac{dV}{d\phi}$ ,

$$\left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=\phi(x,t)} = \left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=\bar{\phi}} + \left. \frac{\eta d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\bar{\phi}} + \left. \frac{\frac{\eta^2}{2} d^3 V}{d\phi^3} \right|_{\phi=\bar{\phi}} + \dots \quad (2.52)$$

Considerando apenas potências de primeira ordem em  $\eta$ , a eq.(2.51) fica

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\bar{\phi}} + \eta \frac{d^2 V}{d\bar{\phi}^2} = 0. \quad (2.53)$$

Substituindo (2.16) na equação acima, obtemos

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \eta \frac{d^2 V}{d\bar{\phi}^2} = 0. \quad (2.54)$$

Escrevendo a solução desta equação como

$$\eta = \eta(x) \cos(wt), \quad (2.55)$$

A equação (2.54) pode ser reescrita como:

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2V}{d\bar{\phi}^2} \right) \eta = w^2 \eta^2. \quad (2.56)$$

Fazendo,

$$u(x) = \frac{d^2V}{d\bar{\phi}^2}, \quad (2.57)$$

temos:

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} + u(x) \right) \eta = w^2 \eta^2. \quad (2.58)$$

Essa, é uma equação tipo-Schrödinger onde,

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x) \quad (2.59)$$

Sendo assim,

$$\hat{H}\eta(x) = w^2\eta(x). \quad (2.60)$$

Pode ser visto que  $w^2$  são os auto-valores da equação e  $\eta(x)$  são os auto-vetores. Como  $w$  é real,  $w^2$  deve ser maior que zero ( $w^2 > 0$ ), o que garante a estabilidade das soluções tipo kink. Ao contrário, as soluções tipo lump o menor auto-valor é menor que zero, logo, lumps são instáveis.

Agora, vamos analisar a estabilidade dos estados BPS. Fazendo isso, estaremos mostrando que existe uma conexão entre as teorias de campo em uma dimensão e a mecânica quântica supersimétrica. Como já foi dito anteriormente, o potencial  $W$  aparece no cenário da supersimetria.

Primeiramente, derivamos duas vezes a eq.(2.42) e obtemos:

$$\frac{d^2V}{d\bar{\phi}^2} = W_{\bar{\phi}\bar{\phi}}^2 + W_{\bar{\phi}}W_{\bar{\phi}\bar{\phi}\bar{\phi}}. \quad (2.61)$$

Essa equação pode ser reescrita como

$$u(x) = W_{\bar{\phi}\bar{\phi}}^2 + W_{\bar{\phi}}W_{\bar{\phi}\bar{\phi}\bar{\phi}}. \quad (2.62)$$

Logo, podemos escrever um Hamiltoniano de acordo com (2.59), ou seja,

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\bar{\phi}\bar{\phi}}^2 + W_{\bar{\phi}}W_{\bar{\phi}\bar{\phi}\bar{\phi}}, \quad (2.63)$$

onde  $\phi = \bar{\phi}$ , para soluções estáticas.

Esse operador hamiltoniano é bem conhecido na mecânica quântica supersimétrica e pode ser fatorado em um produto de dois operadores  $\hat{H}_\pm = S_\pm^\dagger S_\pm$ , onde  $S$  e  $S^\dagger$  são operadores auto-adjuntos descritos por

$$S_\pm = -\frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi}, \quad (2.64)$$

e

$$S_\pm^\dagger = \frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi}. \quad (2.65)$$

É importante lembrar que pelo fato do operador hamiltoniano ser descrito em termos de dois operadores auto-adjuntos, garante que seus autovalores sejam positivos.

Podemos agora, obter os operadores  $\hat{H}_\pm$ , aplicando-os em um auto estado  $\Psi$ , da seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{H}_+ \Psi &= (S_+^\dagger S_+) \Psi \\ &= \left[ \left( \frac{d}{dx} + W_{\phi\phi} \right) \left( -\frac{d}{dx} + W_{\phi\phi} \right) \right] \\ &= \left( -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\phi\phi}^2 + W_\phi \right) \Psi \end{aligned} \quad (2.66)$$

Igualmente para  $\hat{H}_+$ , temos

$$\begin{aligned} \hat{H}_- \Psi &= (S_-^\dagger S_-) \Psi \\ &= \left[ \left( \frac{d}{dx} - W_{\phi\phi} \right) \left( -\frac{d}{dx} - W_{\phi\phi} \right) \right] \\ &= \left( -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\phi\phi}^2 - W_\phi \right) \Psi \end{aligned} \quad (2.67)$$

Das equações (2.66) e (2.67), obtém-se os seguintes resultados:

$$\hat{H}_+ = \left( -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\phi\phi}^2 + W_\phi \right), \quad (2.68)$$

$$\hat{H}_- = \left( -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\phi\phi}^2 - W_\phi \right). \quad (2.69)$$

Os dois hamiltonianos acima são parceiros supersimétricos. Isso significa que quando propomos uma teoria de campos, podemos encontrar um parceiro supersimétrico, ou seja, uma teoria espelho em mecânica quântica supersimétrica.

## 2.4 Sobre o Teorema de Derrick

Na seção anterior discutimos o formalismo de campos escalares em apenas (1, 1) dimensões. Mas, podemos estudar modelos de campos escalares mais complexos com mais dimensões. O teorema de



Derrick-Hobart nos diz que soluções de ondas solitárias estáticas não podem existir em  $D$ -dimensões ( $D > 1$ ) [34,35] e quando a ação que descreve o sistema tem a seguinte forma,

$$S = \int d^{d+1}x \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\partial_\mu \phi_i)^2 - V(\phi_i) \right) \quad (2.70)$$

e o potencial  $V(\phi_i)$  é essencialmente positivo. Considerando a existência de soluções estáticas e com energia finita dadas por  $\phi_i(x)$ , define-se uma família de parâmetros de configurações de campos dadas por  $\phi(x, \lambda) = \phi_i(x\lambda)$  onde  $\lambda$  é um número positivo. Para o cálculo da energia dos campos, considerando a família de parâmetros, utilizamos a expressão:

$$E(\phi_i(\lambda x)) = \int d^D x \left( \frac{1}{2} (\nabla \phi_i(\lambda x))^2 + V(\phi_i(\lambda x)) \right). \quad (2.71)$$

A equação acima pode ser escrita em termos da energia gradiente e da energia potencial,

$$E(\phi_i \lambda x) = \int d^D x V_g(\phi_i(\lambda x)) + \int d^D x V_p(\phi_i(\lambda x)), \quad (2.72)$$

onde  $V_g = (\frac{1}{2} \int d^D x (\nabla \phi_i(\lambda x))^2)$  é a energia gradiente e  $\int d^D x V_p(\phi_i(\lambda x))$  é a energia potencial.

Por uma mudança de variável  $y = \lambda x$ , temos:

$$E(\phi_i(y)) = \int d^D y \left( \frac{\lambda^{2-d}}{2} (\nabla \phi_i(y))^2 + \lambda^{-d} V(\phi_i(y)) \right). \quad (2.73)$$

e finalmente,

$$E(\phi_i(y)) = \lambda^{2-d} V_g(\phi_i(x)) + \lambda^{-d} V_p(\phi_i(x)). \quad (2.74)$$

Derivando a energia em relação ao parâmetro  $\lambda$  e considerando  $\lambda = 1$ , podemos estudar a estabilidade das soluções. Dessa forma, temos

$$\frac{\partial E_{\lambda x}}{\partial \lambda} = (2 - D)V_g(\phi_i(x)) - DV_p(\phi_i(x)) = 0 \quad (2.75)$$

Daí conclui-se que

$$(2 - D)V_g(\phi_i(x)) = DV_p(\phi_i(x)) \quad (2.76)$$

Deste resultado, percebe-se não obtemos soluções estáveis para  $D \geq 2$ . O que podemos afirmar deste teorema é que só existem soluções estáveis em uma dimensão espacial. Logo,

- $D = 1$ . soluções estáticas são possíveis com  $V_g = V_p$  e são soluções tipo kink;
- $D = 2$ . soluções estáticas são possíveis com  $V_p = 0$ . Isso ainda pode levar a teorias de campo não-lineares. Estes modelos serão estudados mais adiante;

Aqui, uma observação importante deve ser feita: este resultado é válido apenas para soluções estáticas e para lagrangeanas usuais como a descrita na ação (2.70). Logo, podemos encontrar formas de contornar esse teorema, na busca de soluções estáveis em (3, 1)-dimensões. Existem várias formas de contornar o teorema de Derrick. Mencionaremos aqui o modelo  $O(3)$  não-linear que consiste em incluir vínculos entre os campos escalares [33] e dependência explícita da distância na lagrangiana [36-37].

### 2.4.1 O modelo $O(3)$ não-linear

O modelo  $O(3)$  não-linear consiste de três campos escalares reais, ou seja, as componentes  $\Phi \equiv (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ , descrevendo assim um tripleto de campos escalares. O campo  $\phi$  pode ser considerado como um vetor em um espaço interno de 3 dimensões.

A Lagrangiana para este modelo em D dimensões espaciais é escrito por [35,38,39]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi) \cdot (\partial_\mu \Phi) \quad (2.77)$$

com vínculo  $\Phi \cdot \Phi = 1$ . A Lagrangiana e o vínculo são invariantes sob rotações globais  $O(3)$  no espaço interno. Em duas dimensões o modelo admite soluções chamadas skyrmions. Essas soluções possuem energia finita e localizada. Em [40], Belavin e Polyakov estudaram a natureza topológica desse modelo em referência aos magnetos de Heisenberg clássicos.

A ação é descrita por

$$S(\phi) = \int dx \int dt \left[ \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi) \cdot (\partial_\mu \Phi) + \lambda(\Phi \cdot \Phi - 1) \right] \quad (2.78)$$

e a equação de movimento obtida a partir do princípio variacional é

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi + \lambda \Phi = 0. \quad (2.79)$$

Para soluções estáticas e restringindo-nos ao espaço bidimensional a equação de movimento assume a forma

$$\nabla^2 \Phi - (\Phi \cdot \nabla^2 \Phi) \Phi = 0, \quad (2.80)$$

onde usamos

$$\lambda(x, t) \equiv \lambda \Phi \cdot \Phi = -\Phi \cdot \square \Phi = 0 \quad (2.81)$$

para eliminar o multiplicador de Lagrange. Essa equação gera interessantes soluções não singulares em duas dimensões.

Consideremos primeiro as soluções da energia-zero. Para todo  $x$ , elas devem satisfazer a condição  $\partial_\mu \Phi = 0$ . Isto significa que qualquer vetor unitário no espaço interno poderá apontar em qualquer direção. Logo, temos uma família contínua de soluções degeneradas com energia  $E = 0$  correspondentes às diferentes direções em que o vetor pode apontar.

Para soluções tipo sólitons com energia diferente de zero, usando coordenadas polares  $(r, \theta)$ , essas soluções devem satisfazer a condição

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(x) = \Phi_0 \quad (2.82)$$

onde  $\Phi_0$  é um vetor unitário no espaço interno. Quando  $r \rightarrow \infty$  no espaço de coordenadas em direções diferentes,  $\Phi(x)$  deve aproximar ao mesmo limite de  $\Phi_0$  e dependerá da coordenada angular  $\theta$  mesmo quando  $r = \infty$

A carga topológica de  $\Phi$  é escrita como

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int \epsilon_{\mu\nu} \Phi \cdot (\partial_\mu \times \partial_\nu) d^2x. \quad (2.83)$$

Soluções topológicas para a ação euclidiana, que correspondem a soluções estáticas para o modelo O(3) não-linear em 3D são chamadas de instantons.

## 2.4.2 Dependência explícita com a distância na Lagrangiana

Na lagrangiana padrão em teoria de campos, substituímos o potencial por [41, 42]

$$U(\phi) = \frac{1}{2r^N} W_\phi^2. \quad (2.84)$$

Percebe-se no potencial acima, a dependência explícita da distância. Logo, a lagrangiana também terá dependência explícita da distância e é descrita por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2r^N} W_\phi^2. \quad (2.85)$$

Aqui, coordenada radial  $r = (x_1^2 + x_2^2 + \dots x_D^2)^{1/2}$ . A equação de movimento obtida para o campo escalar  $\phi$  a partir do princípio variacional é

$$\nabla^2 \phi = \ddot{\phi} + \frac{1}{r^N} W_\phi W_{\phi\phi}. \quad (2.86)$$

E para as soluções estáticas, temos:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^N} W_\phi W_{\phi\phi}. \quad (2.87)$$

Para o cálculo da energia, consideramos na integral a soma da energia gradiente com a energia potencial, ou seja:

$$E = \int \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2r^N} W_\phi^2 \right) r^{D-1} dr \quad (2.88)$$

O próximo passo é escrevermos a energia considerando a seguinte transformação

$$\phi^\lambda(r) = \phi(\lambda r). \quad (2.89)$$

O que resulta em

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int \lambda^2 (\nabla \phi)^2 d^D r + \int \frac{1}{r^N} V(\lambda \phi) d^D r \\ &= \lambda^{2-D} V_g^D + \lambda^{N-D} V_p^D. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Agora, fazendo a derivada de primeira ordem de (2.90) em relação a  $\lambda$ ,

$$\frac{dE}{d\lambda} = (2-D)\lambda^{(1-D)} V_g^D + (N-D)\lambda^{(N-D-1)} V_p^D \quad (2.91)$$

obtemos a seguinte condição

$$(2-D)V_g^D + (N-D)V_p^D = 0 \quad (2.92)$$

E derivando duas vezes (2.90) em relação a  $\lambda$ ,

$$\frac{d^2 E}{d\lambda^2} = (2-D)(1-D)\lambda^{-D} V_g^D + (N-D)(N-D-1)\lambda^{(N-D-2)} V_p^D \quad (2.93)$$

obtemos a condição

$$(2-D)(1-D)E_c^D + (N-D)(N-D-1)E_p^D \geq 0. \quad (2.94)$$

Vamos analisar a estabilidade das soluções de acordo com as condições acima:

- $D = 1$  e  $N = 0$ . As soluções estáveis são obtidas. Aqui temos o caso padrão. Tal modelo, nos garante a igualdade das energias gradiente e potencial, ou seja,  $V_g = V_p$ ;
- $D = 2$  e  $N = 2$ . Neste caso, não existe relação entre  $V_g^D$  e  $V_p^D$ ;
- $D \geq 3$ . Existe a igualdade  $V_g = V_p$  apenas para  $N = 2(D-1)$ .

Agora vamos obter a energia total a partir do método de Bogomol'nyi. Já vimos que a equação para a energia é escrita por

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dW}{d\phi} \right)^2 \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left[ \left( \frac{d\phi}{dr} \mp \frac{1}{r^{N/2}} \frac{dW}{d\phi} \right)^2 \pm \frac{2}{r^{N/2}} \frac{dW}{d\phi} \frac{d\phi}{dr} \right] r^{D-1} dr \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$= \int \frac{dW}{dr} r^{D-1-N/2} dr. \quad (2.96)$$

Na eq.(2.95), consideramos o primeiro termo igual a zero para obtermos (2.96). Logo, a energia de Bogomol'nyi obtida é

$$\begin{aligned} E &= \int \frac{dW}{dr} dr \\ &= |\Delta W| \\ &= |W[\phi(\infty)] - W[\phi(0)]|, \end{aligned}$$

para  $N = 2(D - 1)$ . Considerando a equação de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{1}{r^{N/2}} \frac{dW}{d\phi}. \quad (2.97)$$

Substituindo  $N = 2(D - 1)$ , obtemos a equação

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{1}{r^{D-1}} \frac{dW}{d\phi}. \quad (2.98)$$

Esta equação corresponde a energia de Bogomol'nyi. Aqui,  $D$  representa as dimensões espaciais e  $W$  é o superpotencial.

Vamos investigar a presença de defeitos, considerando  $D = 1$ . A equação de movimento agora é:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dW}{d\phi} \frac{d^2W}{d\phi^2} \quad (2.99)$$

Precisamos escolher a forma da função superpotencial para substituir na equação acima. Então, vamos usar a seguinte expressão para  $W$  que é bastante conhecida na literatura:

$$W(\phi) = p \left( \frac{\phi^{(2p-1)/p}}{2p-1} - \frac{\phi^{(2p+1)/p}}{2p+1} \right) \quad (2.100)$$

Calculando a primeira derivada do superpotencial acima em relação a  $\phi$ , obtemos

$$W_\phi = \phi \left( \phi^{-1/p} - \phi^{1/p} \right). \quad (2.101)$$

Logo, a equação do potencial (2.84), para este modelo de superpotencial e considerando  $N = 2(D - 1)$  fica

$$U(\phi) = \frac{1}{2r^{2(D-1)}} \phi^2 \left( \phi^{-1/p} - \phi^{1/p} \right)^2 \quad (2.102)$$

$$= \frac{1}{2r^{2(D-1)}} W_\phi^2. \quad (2.103)$$

É possível perceber que assumindo  $p = 1$  em (2.102), o potencial obtido representa o modelo  $\phi^4$ . Observe que o parâmetro  $p$  assume apenas valores ímpares, pois, para valores pares, o modelo torna-se instável devido ao modo zero ser não-normalizável. As equações de primeira ordem são

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \phi^{(p-1)/p} \mp \phi^{(p+1)/p},$$

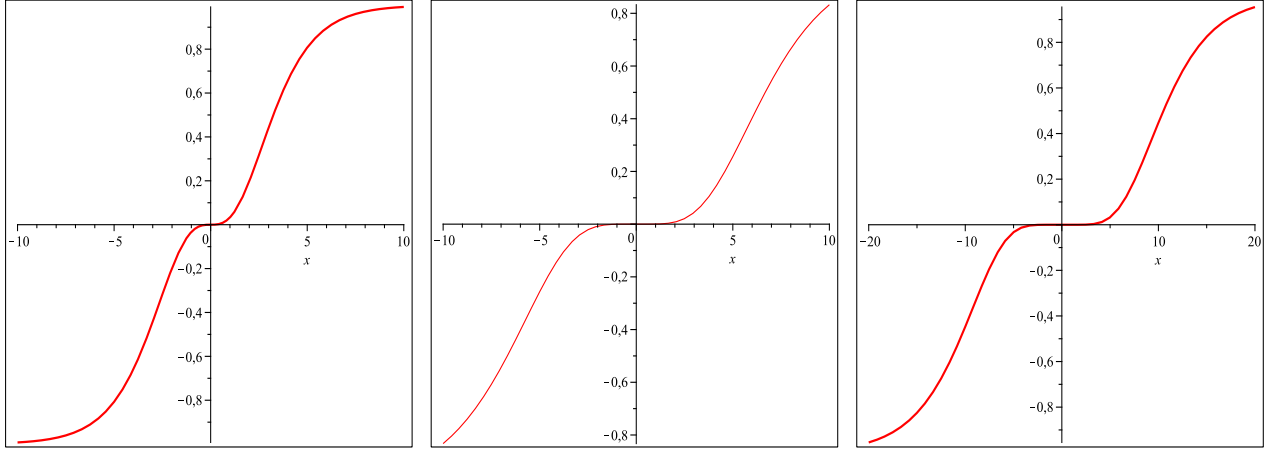


Figura 2.8: Soluções topológicas para (esquerda)  $p = 3$ , (centro)  $p = 5$  e (direita)  $p = 7$ .

cujas soluções assumem a forma

$$\phi(x) = \pm \tanh^p\left(\frac{x}{p}\right). \quad (2.104)$$

O gráfico obtido no Maple para essas soluções, assumindo  $p = 3, 5$  e  $7$ , é exposto em fig.(2.8):

Quando assume os valores  $p = 3, 5$  e  $7$  nós obtemos soluções denominados 2-kink. Essa nomenclatura origina-se pelo fato dessas soluções serem uma composição de dois kinks. Observa-se ainda, que considerando  $p = 3, 5, \dots$  são encontrados novos modelos capazes de suportar os mínimos  $\pm 1$ , tendo como centro do defeito  $x = 0$ .

## 2.5 Modelos com Dinâmica generalizada

Para um único campo escalar real  $\phi$  com dinâmica padrão a lagrangiana é governada por

$$\mathcal{L} = X - V(\phi), \quad (2.105)$$

onde  $X = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$  representa o termo cinético e  $V(\phi)$  o potencial. Devido aos resultados inspirados em teorias de supercordas, o campo escalar também pode evoluir sob a dinâmica taquiônica. Neste caso, a lagrangiana é modificada para [43]

$$L = V(\phi)\sqrt{1 - 2X}. \quad (2.106)$$

A partir destas duas possibilidades, são investigados na literatura especializada, duas classes distintas de modelos. No primeiro caso, são consideradas extensões da dinâmica taquiônica:

$$\mathcal{L} = -V(\phi)F(X), \quad (2.107)$$

onde  $F(X)$  é, em princípio, uma função arbitrária de  $X$  e considera-se também extensões da dinâmica padrão, isto é, modelos formulados por

$$\mathcal{L} = F(X) - V(\phi). \quad (2.108)$$

A análise que será feita a seguir é uma revisão dos trabalhos [44-45]. Aqui, faremos uma breve revisão de extensões da dinâmica padrão.

A ação mais geral que preserva simetria de Lorentz é

$$S = \int d^2x \mathcal{L}(\phi, X), \quad (2.109)$$

pois a lagrangiana é uma função dos campos e das derivadas dos campos. A variação da ação é expressa por

$$\delta S = \int dt dx \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} \delta X + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi \right], \quad (2.110)$$

$$\delta S = \int dt dx \left[ \mathcal{L}_X \delta \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi \right], \quad (2.111)$$

aplicando a métrica  $g^{\mu\nu}$  na variação do termo cinético  $\delta X = \delta \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right)$  obtemos

$$\delta X = \partial^\mu \phi \partial_\mu (\delta \phi) \quad (2.112)$$

e substituindo em (2.111) encontramos

$$\delta S = \int dt dx \left[ -\partial_\mu \left( \mathcal{L}_X \partial^\mu \phi \right) + \mathcal{L}_\phi \right] \delta \phi. \quad (2.113)$$

Do princípio variacional  $\delta S = 0$ , encontramos a equação de movimento na forma

$$\partial_\mu (\mathcal{L}_X \partial^\mu \phi) = \mathcal{L}_\phi, \quad (2.114)$$

onde usamos  $\mathcal{L}_X = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X}$  e  $\mathcal{L}_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$ . Expandindo esta equação obtemos:

$$\partial_\mu (\mathcal{L}_X) \partial^\mu \phi + \mathcal{L}_X \square \phi = \mathcal{L}_\phi, \quad (2.115)$$

que consequentemente pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}_{X\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \mathcal{L}_{XX} \partial_\mu X \partial^\mu + \mathcal{L}_X \square \phi = \mathcal{L}_\phi. \quad (2.116)$$

Sabendo que a derivada  $\partial_\mu X = \partial_\mu \left( \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi \right) = \partial_\mu \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi$ , a eq.(2.116) assume a forma

$$\mathcal{L}_{X\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \mathcal{L}_{XX} \partial^\mu \phi \partial^\alpha \phi \partial_\mu \partial_\alpha \phi + \mathcal{L}_X \square \phi = \mathcal{L}_\phi. \quad (2.117)$$

O Tensor Energia-Momento é escrito na forma

$$T^{\mu\nu} = \mathcal{L}_X \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.118)$$

A densidade de energia  $T^{00}$  então

$$T^{00} = \rho = \mathcal{L}_X \dot{\phi}^2 - \mathcal{L}. \quad (2.119)$$

Para modelos gerais precisamos impor a condição de energia nula que faz o modelo obedecer a relação

$$\mathcal{L}_X \geq 0. \quad (2.120)$$

A equação de movimento (2.117), considerando as configurações estáticas, pode ser escrita em termos de  $X_s = -\frac{\phi'^2}{2}$ , logo

$$(2\mathcal{L}_{X_s X_s} X_s + \mathcal{L}_{X_s}) \phi'' = 2\mathcal{L}_{X_s \phi} X_s - \mathcal{L}_\phi. \quad (2.121)$$

Para a energia total, usamos o teorema de Derrick. Isso será importante para análise da estabilidade das soluções estáticas e introduzimos  $\phi^\lambda = \phi(\lambda x)$ . Logo, a energia total  $E_\lambda$  é escrita como

$$E_\lambda = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathcal{L} \left[ \phi^\lambda, -\frac{1}{2} \left( \frac{d\phi^\lambda}{dx} \right) \right]. \quad (2.122)$$

Derivando  $E_\lambda$  em relação a  $\lambda$  e considerando  $\lambda = 1$ , a energia total é minimizada garantindo a condição

$$\mathcal{L}_s - 2\mathcal{L}_{X_s} X_s = 0. \quad (2.123)$$

A equação de primeira ordem acima é necessária para estabilidade.

### 2.5.1 Estabilidade Linear

Para análise da estabilidade linear, são introduzidas flutuações gerais para o campo escalar na forma  $\phi(x, t) = \phi(x) + \eta(x, t)$  e para uma notação mais compacta, usamos  $\phi \rightarrow \bar{\phi} + \eta$ . Aqui  $\phi(x)$  representa a solução estática. A partir das flutuações para o campo escalar, o termo cinético  $X$  assume a forma

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \partial_\mu (\bar{\phi} + \eta) \partial^\mu (\bar{\phi} + \eta) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \bar{\phi} + \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \eta + \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta \\ &= \bar{X} + \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \eta + \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta \end{aligned} \quad (2.124)$$



Usando as flutuações e a equação acima, obtém-se por expansão em série a seguinte ação

$$S = \int d^2x \left\{ \mathcal{L}(\bar{\phi}, \bar{X}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\bar{\phi}} \eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi=\bar{\phi}} \eta^2 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} \Big|_{X=\bar{X}} (X - \bar{X}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial X^2} (X - \bar{X})^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \phi \partial X} \Big|_{\phi=\bar{\phi}} (\phi - \bar{\phi})(X - \bar{X}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial X \partial \phi} (\phi - \bar{\phi})(X - \bar{X}) \right\}, \quad (2.125)$$

que resulta em

$$S = \int d^2x \left\{ \mathcal{L}(\bar{\phi}, \bar{X}) + \mathcal{L}_\phi \eta + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\phi\phi} \eta^2 + \mathcal{L}_X (\partial_\mu \phi \partial^\mu \eta + \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{XX} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \eta + \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta)^2 + \mathcal{L}_{\phi X} \eta (\partial_\mu \phi \partial^\mu \eta + \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta) \right\} \quad (2.126)$$

Mantendo apenas os termos de segunda ordem

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ \mathcal{L}_X \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \mathcal{L}_{XX} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \eta)^2 + [\mathcal{L}_{\phi\phi} - \partial_\mu (\mathcal{L}_{\phi X} \partial^\mu \phi)] \eta^2 \right\}. \quad (2.127)$$

A equação de movimento resultante para  $\eta$  é dada por

$$\partial_\mu (\mathcal{L}_X \partial^\mu \eta + \mathcal{L}_{XX} \partial^\mu \phi \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \eta) = [\mathcal{L}_{\phi\phi} - \partial_\mu (\mathcal{L}_{\phi X} \partial^\mu \phi)] \eta. \quad (2.128)$$

Novamente o nosso interesse está nas soluções para  $\phi$  independente do tempo. Logo, a equação de movimento torna-se

$$\mathcal{L}_X \ddot{\eta} - \left[ (2X \mathcal{L}_{XX} + \mathcal{L}_X) \eta' \right]' = \left[ \mathcal{L}_{\phi\phi} + (\mathcal{L}_{\phi X} \phi')' \right] \eta. \quad (2.129)$$

Em (2.129)  $\eta = \eta(x, t)$ . Podemos fazer a seguinte transformação:

$$\eta(x, t) = \eta(x) \cos(\omega t), \quad (2.130)$$

que substituindo em (2.129), obtemos

$$- \left[ (2X) \mathcal{L}_{XX} + \mathcal{L}_X \eta' \right]' = \left[ \mathcal{L}_{\phi\phi} + (\mathcal{L}_{\phi X} \phi')'^2 \mathcal{L}_X \right] \eta. \quad (2.131)$$

Fazendo mudanças apropriadas, definimos

$$dx = Adz, \quad (2.132)$$

$$\eta = \frac{u}{\sqrt{\mathcal{L}_{XA}}}. \quad (2.133)$$

Essas transformações de variáveis nos permitem escrever uma equação de primeira ordem tipo-Schrödinger

$$-u_{zz} + U(z)u = \omega^2 u. \quad (2.134)$$

O potencial  $U(z)$  dado por

$$U(z) = \frac{(\sqrt{A\mathcal{L}_X})_{zz}}{(A\mathcal{L}_X)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\mathcal{L}_X} \left[ \mathcal{L}_{\phi\phi} + \frac{1}{A} \left( \mathcal{L}_{\phi X} \frac{\phi_z}{A} \right)_z \right] \quad (2.135)$$

é do tipo Schrödinger. Para estabilidade, os autovalores  $\omega^2$  não podem ser negativos.

Consideremos o modelo descrito pela densidade lagrangiana expressa por

$$\mathcal{L} = F(X) - V(\phi). \quad (2.136)$$

Nessa equação, o termo cinético é representado por uma função de  $X$  a ser escolhida. É fácil perceber que, se  $F(X) = X$ , nós voltamos ao modelo com dinâmica padrão.

A equação de movimento para este modelo assume a forma

$$\partial_\mu (F' \partial^\mu \phi) + V_\phi = 0. \quad (2.137)$$

Novamente, o interesse aqui é pelas soluções estáticas. Logo, expandindo a equação acima e considerando  $\phi = \phi(x)$ , temos

$$(F'_s - F''_s \phi'^2) \phi'' = V_\phi. \quad (2.138)$$

Para a equação de primeira ordem, precisamos considerar (2.123) que é uma condição geral para qualquer modelo. A equação de primeira ordem nessas condições torna-se

$$F_s - 2F'_s X_s = V(\phi) \quad (2.139)$$

A densidade de energia  $T^{00}$  é obtida a partir de (2.119):

$$T^{00} = V(\phi) - F(X_s) \quad (2.140)$$

$$= (F_s - 2F'_s X_s) - F_s$$

$$= F'_s \phi'^2 \quad (2.141)$$

Para resolver este problema de forma menos complicada, partimos da equação de primeira ordem

$$\phi' = W(\phi) \quad (2.142)$$

Logo, o potencial deve ser escrito por

$$V(\phi) = F + F'^2 W^2 \quad (2.143)$$

para  $W = W(\phi)$ . Como  $F = F(X)$ , faz-se a mudança  $F = F(-W^2/2)$ . Uma forma de exemplificar a situação geral, é fazendo uma escolha para a função  $F$ . Vamos analisar a seguinte escolha

$$F(X) = X - \alpha X^2 \quad (2.144)$$

Aqui, o valor do parâmetro  $\alpha$  a ser escolhido, controla a extensão do modelo e quando  $\alpha$  tende para zero voltamos ao modelo padrão.

A equação de primeira ordem pode ser escrita por

$$\frac{1}{2}\phi'^2 - \frac{3}{4}\alpha\phi'^4 = V(\phi)$$

Para o modelo estendido, o potencial efetivo assume a forma

$$V_{eff}(\phi) = \frac{1}{6\alpha} - \frac{\sqrt{1 - 12\alpha V(\phi)}}{6\alpha} \quad (2.145)$$

A estrutura topológica do potencial  $V(\phi)$  permanece preservada no potencial efetivo. Esse fato ocorre, porque os zeros de  $V(\phi)$  também são zeros de  $V_{eff}$ .

Para a solução kinklike conectar dois mínimos do potencial, o centro da torção, que corresponde à de campo com mais elevada inclinação, está no máximo do potencial  $V_0$ , entre os dois mínimos. Em geral, a espessura da solução depende do máximo valor de  $V_0$ , portanto, será certamente afetada pelo parâmetro  $\alpha$ . Se o potencial efetivo é escolhido como o potencial para a teoria padrão, ambas as teorias padrão e estendidas terão as mesmas soluções.

Vamos agora considerar  $\alpha$  muito pequeno. Neste caso, obtemos o potencial efetivo escrito na a forma

$$V_{eff} = V(\phi) + 3\alpha V(\phi)^2.$$

Se escolhermos o modelo  $\phi^4$ , o potencial efetivo é reescrito na forma,

$$V_{eff} = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2 + \frac{3}{4}\alpha(1 - \phi^2)^4.$$

É possível observar que quando  $\alpha \rightarrow 0$  voltamos ao caso padrão.

Para  $\alpha$  muito pequeno, a solução fica

$$\phi = \pm \tanh(x) \left( 1 + \frac{1}{4}\alpha \operatorname{sech}^2(x)(2 + \operatorname{sech}^2(x)) \right), \quad (2.146)$$

e a densidade de energia tem solução aproximada

$$\rho = \operatorname{sech}^4(x) \left[ 1 - \alpha \left( 2 - \operatorname{sech}^2(x) - \frac{3}{2}\operatorname{sech}^4(x) \right) \right]. \quad (2.147)$$

Agora, considerando  $\alpha$  genérico, e novamente,  $V(\phi)$  como o potencial do modelo  $\phi^4$ , o potencial efetivo torna-se

$$V_{eff}(\phi) = \frac{1}{6\alpha} - \frac{\sqrt{1 - 6\alpha(1 - \phi^2)^2}}{6\alpha}, \quad (2.148)$$

onde a condição  $\alpha < 1$  deve ser satisfeita para que a densidade de energia seja positiva.

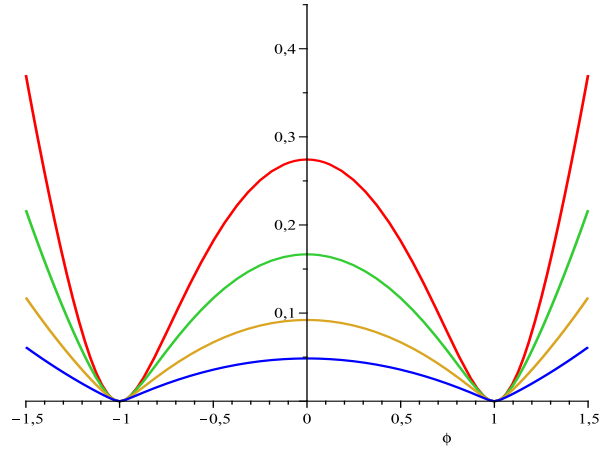


Figura 2.9: Gráfico do potencial efetivo para vários valores de  $\alpha$ , todos negativos.

Recentemente, a modificação do termo cinético na lagrangeana padrão, tem sido aplicado no cenário de teoria das branas, com o objetivo de localização de campos em modelos com dinâmica generalizada. Após a descrição de estruturas de defeitos em teorias de campo, onde fizemos uma breve revisão de modelos com dinâmica padrão e dinâmica generalizada, no próximo capítulo faremos um breve estudo sobre espinores em várias dimensões. Os espinores são uma maneira de descrever matematicamente os férmions e, esse estudo se faz importante devido ao tratamento que será realizado nos capítulos seguintes sobre localização de férmions em defeitos tipo anel.

## Teoria dos espinores

Em 1913 Eli Cartan desenvolveu uma teoria de espinores após descobrir que os mesmos eram entidades que carregavam a representação dos grupos de rotações em um espaço de dimensão finita [46]. Por outro lado, os espinores foram introduzidos em física teórica com o objetivo de descrever sistemas quânticos com spin. Em 1926, W Pauli, descreveu a função de onda de um elétron com spin por um espinor de duas componentes em sua teoria não relativística. Em 1928 Dirac utilizou um espinor de quatro componentes para descrever sua teoria relativística. Espinores são entidades fundamentais em física para descrever a matéria, já que os léptons e os quarks são férmions de spin-1/2 e férmions são descritos por funções de onda que são, essencialmente, espinores.

### 3.1 Álgebra de Clifford e as matrizes de Dirac

A álgebra de Clifford leva o nome de seu criador, William Kingdon Clifford. Nascido em 1845, Clifford foi um matemático britânico que teve várias contribuições matemáticas encontrados principalmente no campo da geometria. Boa parte de seu trabalho teve como base os estudos anteriores de William Hamilton, em particular seus quatérnios. Algumas de suas idéias são precursores para a geometria da relatividade geral. Hoje, ele é mais conhecido pela álgebra que leva seu nome. Aqui trataremos da álgebra de Clifford em várias dimensões espaço-temporais. De maneira geral, todos os grupos de rotação independente da dimensão, tem uma estrutura associada a eles, chamada álgebra de Clifford.

Se temos os números  $\kappa_i$ , tais que  $i = 1, 2, \dots, N$  e esses números satisfazem a relação

$$\{\kappa_i, \kappa_j\} = 2\delta_{ij}, \quad (3.1)$$

então podemos chamá-los de números de Clifford [47]. Esses números são responsáveis por gerar a álgebra de Clifford. Como exemplo de números de Clifford, temos as matrizes de Dirac, pois o índice  $\mu$  da matriz  $\gamma^\mu$  indica  $D$  matrizes geradoras da álgebra de Clifford. Para expressar os  $2^N$  elementos da base que expande a álgebra de Clifford utilizamos uma representação mínima [48] de matrizes  $2^{\frac{N}{2}} \times 2^{\frac{N}{2}}$ , onde  $N$  é par.

Para o espaço-tempo de dimensionalidade par inicialmente consideramos a métrica de Minkowski do espaço-tempo  $N = t + s$  representada por

$$g_{\mu\nu} = (+ + \dots - \dots -) \quad (3.2)$$

Aqui, representamos por  $+1$  as direções tipo-tempo que são também representadas por " $t$ " e as componentes  $-1$  representam as direções tipo-espaço que também são representadas por " $s$ ". Considerando primeiramente que  $N$  é um número par. As matrizes  $\Gamma$  podem ser representadas por matrizes complexas  $2^{\frac{N}{2}} \times 2^{\frac{N}{2}}$  que satisfazem a relação de anticomutação chamada de álgebra de Clifford,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

Podemos escrever as matrizes  $\Gamma$  na forma de produtos tensoriais da identidade  $2 \times 2$  e pelas matrizes unitárias de Pauli. Logo, as matrizes  $\Gamma$  também serão unitárias. As matrizes  $\Gamma^{\mu+}$ ,  $\Gamma^{\mu*}$  e  $\Gamma^{\mu T}$ , a menos de fatores  $+1$  ou  $-1$ , também satisfazem a álgebra de Clifford, então podemos ter:

$$\Gamma^{\mu+} = -(-1)^t A \Gamma^\mu A^{-1}, \quad (3.4)$$

$$\Gamma^{\mu*} = \eta B \Gamma^\mu B^{-1}, \quad (3.5)$$

$$\Gamma^{\mu T} = -\eta(-1)^t C \Gamma^\mu C^{-1}, \quad (3.6)$$

onde a matriz  $A$  é representada pelo produto de todas as matrizes  $\Gamma^\mu$  que satisfazem a relação  $(\Gamma^\mu)^2 = 1$ . Estas são as matrizes  $\Gamma$  tipo-tempo. Aqui, não importa a ordem em que o produto é escrito, pois, a matriz  $A$  sempre é definida a menos de uma fase. As matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  também são unitárias, já que podemos escreve-la na forma de produtos tensoriais da identidade e pelas matrizes de Pauli.

## 3.2 Soluções da Equação de Klein - Gordon

A equação de Klein-Gordon, às vezes chamada de equação de Klein-Fock-Gordon é a versão relativista da equação de Schrödinger.

É a equação de movimento de um campo escalar que descreve partículas sem spin. Todas soluções da equação de Dirac são soluções da equação de Klein-Gordon, mas o inverso é falso.

Usando a definição relativística, o Hamiltoniano de uma partícula livre de massa  $m$  satisfaz a seguinte relação

$$H = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (3.7)$$

Considerando as unidades  $c = 1$  e  $\hbar = 1$ , e levando em conta que  $H$  e o momento  $p$  tornam-se operadores  $H = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  e  $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  atuando sobre a função de onda  $\psi$ , obtém-se a equação de Klein-Gordon, uma equação para a função de onda escrita na forma

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 \right] \psi = 0. \quad (3.8)$$

A sua forma é obtida desde que as soluções de ondas planas

$$\psi = e^{-ik^\mu x_\mu} \quad (3.9)$$

satisfaçam à relação entre a energia e o momento linear da relatividade restrita

$$p^\mu p_\mu = m^2. \quad (3.10)$$

Na busca por soluções reais, usa-se a expansão de Fourier

$$\psi(x) = \int_p (a(p)e^{-ip \cdot x} + a^*(p)e^{-ip \cdot x}), \quad (3.11)$$

onde os coeficientes  $a(p)$  e  $a^*(p)$  são operadores hermitianos.

### 3.3 A equação de Dirac

Na mecânica quântica, equação de Dirac é uma equação de onda relativística proposta por Paul Dirac em 1928 que descreve com sucesso partículas elementares de spin semi-inteiro, como o elétron. Anteriormente, a equação de Klein-Gordon (uma equação de segunda ordem nas derivadas temporais e espaciais) foi proposta para a mesma função, mas apresentou severos problemas na definição de densidade de probabilidade. A equação de Dirac é uma equação de primeira ordem, o que eliminou este tipo de problema. A equação de Dirac tem a forma

$$\left( i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \Psi = 0. \quad (3.12)$$

Essa equação surgiu a partir da equação de Schrödinger para uma partícula livre

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi, \quad (3.13)$$

onde o Hamiltoniano é descrito por

$$H = \gamma^0(\gamma^i p^i + m). \quad (3.14)$$

A lagrangiana para o campo de Dirac pode ser descrita por

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi, \quad (3.15)$$

com  $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0$  e as matrizes  $\gamma$  são da ordem  $4 \times 4$  e obedecem a álgebra de Clifford.

Qualquer solução da equação (3.12) será chamado de campo de férmions e é representado por  $\Psi(x)$ .

### 3.4 Quiralidade e Helicidade

A quiralidade de uma partícula está relacionada com a orientação do seu momento angular. A quiralidade é uma propriedade essencialmente quanto-mecânica na qual uma partícula pode ser esquerda ou direita. Se girarmos um espinor em um ângulo de  $2\pi$ , não obtemos o mesmo estado quântico: obtemos o mesmo estado com um sinal de menos. A quiralidade de um férmion nos mostra como chegar-mos nesse sinal de menos no plano complexo. O que acontece quando você roda um férmion quiral esquerdo contra um direito por 360 graus ao redor da sua direção de movimento. Ambas partículas terminam com um sinal negativo, mas o férmion de quiralidade esquerda vai por um caminho no plano complexo, enquanto o férmion de quiralidade direita vai por outro. Rodar a partícula 360 graus só nos leva até metade de um círculo no plano complexo por uma direção que depende da quiralidade do férmion. O sentido físico dessa fase está na função de onda da partícula. Quando giramos um férmion, sua função de onda quântica é deslocada numa maneira que depende da quiralidade do férmion. Rodar um férmion desloca sua função de onda quântica. Férmions quirais esquerdos e direitos são deslocados em direções opostas. Esse é um efeito puramente quanto-mecânico.

A noção de quiralidade, também depende de uma outra propriedade denominada helicidade. Para uma partícula com momento  $p$ , a helicidade pode ser definida como

$$h \equiv \frac{2J \cdot p}{|p|}. \quad (3.16)$$

Aqui,  $J$  representa o momento angular da partícula. O momento angular orbital não contribui para a helicidade de uma partícula, pois é perpendicular a direção do momento, ou seja, a helicidade pode, portanto, ser descrito como duas vezes o valor da componente de spin de uma partícula ao longo da direção do seu movimento.

Para férmions que obedecem a equação de Dirac, escreve-se a helicidade na forma

$$h = \frac{\Sigma p}{|p|}, \quad (3.17)$$



com  $\frac{1}{2}\Sigma$  sendo as matrizes de rotação dadas por

$$\Sigma^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\sigma_{jk}, \quad (3.18)$$

Para uma partícula livre, a helicidade é conservada, ou seja, não muda com o tempo.

### 3.5 Espinores

Os espinores são entidades físicas que sob uma transformação  $SO(s, t)$ , assumem

$$\Psi \rightarrow e^{\Omega}\Psi \quad (3.19)$$

onde usamos  $\Omega = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ ,  $\epsilon_{\mu\nu}$  são parâmetros de transformação e  $\sigma^{\mu\nu}$  é descrito por

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu]. \quad (3.20)$$

Para uma representação espinorial, aquelas que possuem  $2^{\frac{N}{2}}$  componentes são as mais simples e o espinor adjunto assume a forma

$$\bar{\Psi}' = \bar{\Psi}'e^{-\Omega}. \quad (3.21)$$

#### 3.5.1 Espinores de Weyl

Considerando  $N$  par, tal representação é irredutível, pois, neste caso pode-se definir operadores de projeções  $P_L$  e  $P_R$  que dividem  $\psi$  em duas partes com transformações uma independente da outra. Os projetores  $P_L$  e  $P_R$  possuem duas propriedades gerais que são a complementariedade e ortogonalidade e ainda possuem uma outra propriedade relacionada ao espaço espinorial. Essa propriedade são descritas na forma:

$$P_L + P_R = 1, \quad (3.22)$$

$$P_L P_R = P_R P_L = 0, \quad (3.23)$$

$$[P_L, \Omega] = [P_R, \Omega] = 0, \quad (3.24)$$

A equação (3.19) pode ser reescrita, utilizando-se da equação (3.22). Logo, temos

$$\Psi'_L + \Psi'_R e^{\Omega_R + \Omega_L} (\Psi_L + \Psi_R), \quad (3.25)$$

Aqui,  $\Psi_{L,R} \equiv P_{L,R}\Psi$  e  $\Omega_{L,R} \equiv P_{L,R}\Omega$ . De posse das eq.(3.23) e (3.24), temos  $[\Omega_L, \Omega_R] = 0$ . Isso nos leva a

$$\Psi'_L + \Psi'_R e^{\Omega_L} \Psi_L + e^{\Omega_R} \Psi_R. \quad (3.26)$$

Para dividirmos o espinor  $\Psi$  em duas partes, aplicamos os projetores  $P_{L,R}$  na eq. (3.26). Fazendo isto, obtemos o espinor em termos de suas quiralidades. Agora temos dois espinores de Weyl, que são as quiralidades esquerda e direita (left-handed e right-handed):

$$\Psi_L^{\Omega_L} \Psi_L, \quad (3.27)$$

e

$$\Psi_R^{\Omega_R} \Psi_R. \quad (3.28)$$

O importante é entendermos que partículas com quiralidades diferentes são realmente partículas diferentes. Se nós temos uma partícula com helicidade esquerda, então nós sabemos que deve existir também uma versão da partícula com helicidade direita. Contudo, uma partícula com quiralidade esquerda não precisa ter um parceiro com quiralidade direita.

Outro fato que é importante salientar é que qualquer projetor que satisfaça as propriedades de ortogonalidade, complementariedade e a propriedade relacionada ao espaço espinorial, pode ser reescrita em termos de um único operador  $\Gamma_{N+1}$ . Este operador pertence ao espaço de Clifford das matrizes- $\Gamma$ , e para um espaço-tempo de dimensão par, os projetores são definidos por:

$$P_L = \frac{1}{2}(1 + \Gamma_{N+1}), P_R = \frac{1}{2}(1 - \Gamma_{N+1}). \quad (3.29)$$

O operador  $\Gamma_{N+1}$  é chamado operador de quiralidade.

Os espinores de Weyl  $\Psi_L$  e  $\Psi_R$  podem ser obtidos pelas projeções  $P_R$  e  $P_L$  e são escritos como:

$$\Psi_L = \frac{1}{2}(1 + \Gamma_{N+1})\Psi \quad (3.30)$$

e

$$\Psi_R = \frac{1}{2}(1 - \Gamma_{N+1})\Psi. \quad (3.31)$$

De posse das propriedades do operador quiralidade  $(\Gamma_{N+1})^2 = 1$  e  $\{\Gamma_{N+1}, \Gamma^\nu\} = 0$ , chegamos as seguintes relações:

$$\Gamma_{N+1}\Psi_L = \Psi_L \quad (3.32)$$

e

$$\Gamma_{N+1}\Psi_R = -\Psi_R \quad (3.33)$$

### 3.6 Espinores de Majorana

Considerando a equação

$$\Psi \rightarrow e^{\Omega} \Psi, \quad (3.34)$$

Obtemos a seguinte relação

$$B^{-1} \Omega^* B = \Omega \quad (3.35)$$

Para um operador conjugação de carga sendo definido por  $\Psi^c = B^1 \Psi^*$  onde é válida a relação

$$\Psi^c = e^{\Omega} \Psi^c \quad (3.36)$$

podemos chegar a conclusão que o espinor  $\Psi^c$  quando submetido a uma transformação de  $SO(s, t)$ , transforma-se como o espinor  $\Psi$ . Logo, os espinores que obedecerem a condição  $\Psi^c = \Psi$ , são chamados espinores de Majorana.

### 3.7 Representação de Weyl

Podemos encontrar uma representação para a matriz  $\Gamma_{N+1}$  da seguinte forma

$$\Gamma_{N+1} = \begin{pmatrix} 1_{N-2} & 0 \\ 0 & -1_{N-2} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Esta é a representação de Weyl, onde:

$$\{\Gamma^\mu \Gamma_{N+1}, \Gamma_{N+1} \Gamma^\mu\} = 0. \quad (3.38)$$

As equações acima garantem para as matrizes  $\Gamma^\mu$  a seguinte forma

$$\Gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

onde

$$\Omega = \frac{1}{8} \omega_{\mu\nu} [\Gamma^\mu, \Gamma^\nu]. \quad (3.40)$$

Que resulta em

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_R & 0 \\ 0 & \omega_L \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Logo, escrevemos o espinor  $\Psi$  na forma

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Na equação acima,  $\Psi_L$  e  $\Psi_R$  representam os espinores de Weyl. Cada espinor é independente e possuem  $2^{\frac{n}{2}}$  componentes complexas cada um.

Se, na representação de Weyl, trocarmos  $\Gamma_{N+1}$  por uma das matrizes  $\Gamma$ , obtemos uma outra representação conhecida como representação dual de Weyl.

### 3.8 Espinores de Dirac

Os espinores de Dirac são campos complexos construídos a partir de ambas as quiralidades dos espinores de Weyl, ou seja, se tomarmos duas quiralidades independentes do campo de Weyl  $\psi_1(x)$  e  $\psi_2(x)$ , e fizermos a combinação

$$\Psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x), \quad (3.43)$$

Essa relação define o que chamamos de campo de Dirac ou férmions de Dirac. O campo de Dirac é uma solução sem restrições da equação de Dirac.

## Localização de férmions em um anel em $(3, 1)$ -dimensões

A idéia de que vivemos em um mundo com várias dimensões além das conhecidas (mundo-brana)[2] tem sido aplicada para questão de defeitos topológicos. Com aceleradores de partículas cada vez mais eficientes, produzindo colisões de altíssimas energias, motivou a publicação de vários trabalhos científicos com o objetivo de analisar o processo de localização de campos tensoriais na membrana[49]. Na formulação original, os campos de matéria ficam confinados à membrana, enquanto a gravidade é livre para se propagar em todas as dimensões. Em geral, branas espessas, formadas a partir do acoplamento do campo escalar com a gravidade, são possivelmente capazes de localizar campos de spin-0. Para a localização de férmions em branas, exige-se um acoplamento dos espinores (campo de Dirac) e os campos escalares que formam a brana [12-14]. A solução para este campo escalar pode ser por exemplo tipo Kink. Logo, os resultados com modelo Randal-Sundrum indicam que branas espessas (thick) são mais adequadas para localizar campos fermiônicos. Na ref.[15] de Jackiw e Rebbi, o acoplamento de Yukawa é condição essencial para localização de férmions em sólitons no espaço-tempo plano. Em [16], foram estudados modos fermiônicos em um kink Sine-Gordon em teorias de campo escalares  $(1 + 1)$  dimensão. Em [17] foram consideradas branas  $(4, 1)$  construídas com dois campos escalares acoplados com um campo de Dirac, por meio de um acoplamento de Yukawa. Nesse trabalho, foi considerado o acoplamento mais simples para o modelo de brana Bloch e a localização de férmions foi estudada numericamente. Para branas com estrutura interna, foram encontradas ressonâncias e solução de modo zero para férmions com quiralidade esquerda.

Neste capítulo nós estamos interessados em modelos construídos somente com campos escalares

reais. Como já foi mostrado neste trabalho, a simplicidade de campos escalares levou à busca de um limite para a dimensionalidade das teorias de campos escalares capazes de descrever defeitos topológicos. Para resolver este problema, o conhecido teorema de Derrick-Hobart diz que, para  $D \geq 2$ , onde  $D$  representa apenas as dimensões espaciais, não existem soluções estáveis e não-triviais. Este teorema tem como ponto de partida uma densidade Lagrangiana padrão em  $(D, 1)$ -dimensões da forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi - V(\phi), \quad (4.1)$$

onde o potencial  $V(\phi)$  é uma função não-negativa, que deve ser zero em seus mínimos absolutos. No presente trabalho estamos interessados na estratégia a considerar dependência explícita com a distância na densidade lagrangiana. Em particular, no artigo [19], defeitos construídos com um campo escalar em  $(2, 1)$  dimensões são obtidos, que são anéis com raio e espessura característica. Aqui, tais anéis são imersos no espaço-tempo de Minkowski  $(3, 1)$  formando uma outra classe de defeitos que pode ser estudada no que diz respeito à sua propriedade para localizar campos de matéria, em particular férmions.

## 4.1 Anel com um campo escalar

Para a construção de defeitos em sistemas com apenas campos escalares em dimensões maiores é necessário contornar o teorema Derrick. Para isso consideramos modelos descritos por um lagrangiana com dependência explícita nas coordenadas.

A densidade lagrangiana em qualquer dimensionalidade é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi - \frac{1}{2r^{2(D-1)}} W_\phi^2, \quad (4.2)$$

onde  $r$  é a coordenada radial  $D$ -dimensional dada por  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_D^2}$  e  $M, N$  correspondem a  $(3, 1)$ -dimensões.

Em nossa proposta, estamos interessados em soluções com simetria radial, tais como defeitos tipo anel (assumindo  $D = 2$ ) imerso num espaço-tempo de Minkowski. Portanto, a ação que descreve um tal sistema é dada por:

$$S_{Anel} = \int dt d^3x \left( \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi - \frac{1}{2r^2} W_\phi^2 \right). \quad (4.3)$$

A equação de movimento para soluções estáticas deve assumir a forma:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} W_\phi^2, \quad (4.4)$$

onde restringe-se para configurações que possuem simetria esférica, i.e., o campo  $\phi = \phi(r)$  depende somente de  $r$ .

Usando o formalismo de Bogomol'nyi, onde soluções do tipo BPS são atingidas podemos reduzir a equação de movimento para

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{1}{r} W_\phi, \quad (4.5)$$

que são as equações de primeira ordem e também soluções da Eq (4.4).

Podemos interpretar a ação (4.3) como uma teoria efetiva de um modelo mais fundamental. Uma possibilidade é uma teoria em que um fio carregado é imerso em um meio dielétrico cuja permissividade elétrica  $g(\phi)$  é dependente do campo  $\phi$ . Essa ação pode ser escrita da seguinte forma

$$S = \int dt dx dy dz \left( \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi - \frac{g(\phi)}{4} F_{MN} F^{MN} - e A_M J^M \right). \quad (4.6)$$

Aqui,  $J_M = (\delta(r), 0, 0, 0)$  representa a carga. Para obtermos a Lei de Coulomb para o campo elétrico radial, partimos da equação de Maxwell  $\partial_M (g(\phi) F^{MN}) = e J^N$ . Logo, a Lei de Coulomb assume a forma

$$E = \frac{1}{r} \frac{e}{g(\phi)}, \quad (4.7)$$

e a equação de movimento para o campo escalar estático é dada

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{2} g_\phi E^2. \quad (4.8)$$

Fazendo uma mudança de variável na forma  $d\xi = r^{-1} dr$ , a equação de primeira ordem (4.5) é reescrita na forma

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \pm W_\phi(\phi). \quad (4.9)$$

Dessa forma nosso problema antes bidimensional é mapeado em um efetivo 1-dimensional.

Considerando uma simples escolha, o potencial  $\phi^4$  onde a primeira derivada do superpotential pode ser escrita como

$$W_\phi = \sqrt{\lambda} (a^2 - \phi^2) \quad (4.10)$$

e tem como solução

$$\phi(\xi) = a \tanh(a\sqrt{\lambda}(\xi - \xi_0)), \quad (4.11)$$

com  $\xi = \ln r$  e  $\xi_0 = \ln r_0$  nós temos

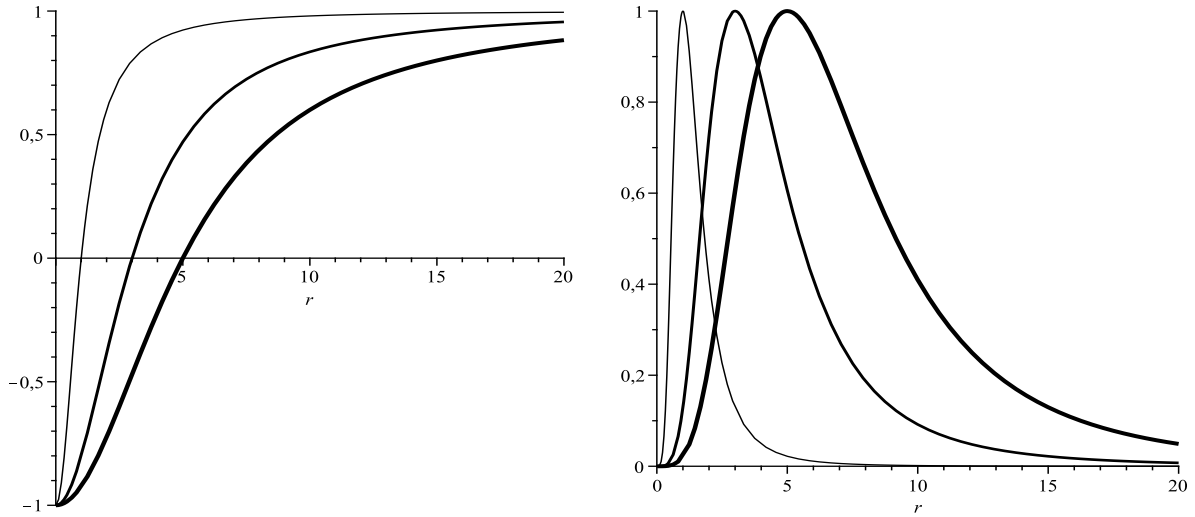


Figura 4.1: a) (esquerdo) Solução para o campo  $\phi(r)$  interpolando entre os vácuos do potencial. b) (direito) Densidade de energia como função de  $r$ . Nas duas figuras temos  $r_0 = 1$  (linha fina),  $r_0 = 3$  e  $r_0 = 5$  (linha grossa).

$$\phi(r) = a \tanh(a\sqrt{\lambda} \ln(r/r_0)), \quad (4.12)$$

onde  $r_0$  é o raio do anel e  $a$  corresponde ao vácuo do potencial. A Fig 4.1a nos mostra a solução tipo anel (com  $a = \lambda = 1$ ). A densidade de energia (Fig 4.1b)

$$T_{00} = \lambda a^4 \operatorname{sech}^4(a\sqrt{\lambda} \ln(r/r_0)) \quad (4.13)$$

determina a espessura do anel, que cresce linearmente com o seu raio e tem energia finita dada por  $E_{D=2} = 8\pi/3$ .

## 4.2 Localização de férmions

A análise de localização de férmions em defeitos, parte da ação

$$S_{ferm} = \int dt dx dy dz \left[ \bar{\psi} \Gamma^M \partial_M \psi - \eta F(\phi) \bar{\psi} \psi \right], \quad (4.14)$$

onde  $F(\phi)$  representa a função do campo escalar a ser escolhida, e  $\eta$  é a constante de acoplamento. O acoplamento de Yukawa, que representa a interação do campo escalar com o espinor é uma condição fundamental para a análise de localização de férmions em defeitos. Usamos os índices  $M, N$  para as



(3, 1) dimensões. A equação de movimento dos férmions é obtida na forma

$$\Gamma^M \partial_M \psi - \eta F(\phi) \psi = 0 \quad (4.15)$$

ou explicitamente,

$$\Gamma^\mu \partial_\mu \psi + \Gamma^a \partial_a \psi - \eta F(\phi) \psi = 0 \quad (4.16)$$

onde as letras gregas  $\mu, \nu \dots$  são para as coordenadas  $(t, x)$ , e as letras latinas  $a, b, \dots$  corresponderam as coordenadas  $(y, z)$ .

As matrizes  $\Gamma^0, \Gamma^1$  são dadas por

$$\Gamma^0 = i\gamma^0 = i\sigma^1, \quad \Gamma^1 = i\gamma^1 = \sigma^2, \quad (4.17)$$

e  $\Gamma^2, \Gamma^3$  são convenientemente escolhidas para fornecer equações de Schrödinger no plano  $y-z$ , cujos potenciais são parceiros supersimétricos. Assim, equação de movimento obtida é reescrita como

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \partial_\mu \psi + \Gamma^a \partial_a \psi - \eta F(\phi) \psi = 0. \quad (4.18)$$

Por conveniência, consideramos as coordenadas polares  $(r, \theta)$  no plano- $yz$ , com as matrizes  $\Gamma$  correspondentes escolhidas como

$$\Gamma^r = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^\theta = i\mathbf{1} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Desse modo, a equação de movimento (4.18) resulta ser

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + \begin{pmatrix} \partial_r + \frac{1}{r} \partial_\theta & 0 \\ 0 & -(\partial_r + \frac{1}{r} \partial_\theta) \end{pmatrix} \psi - \eta F(\phi) \psi = 0. \quad (4.20)$$

Agora, lançamos mão do mesmo método utilizado em localização de férmions em branas. Fazemos a decomposição quirial com o objetivo de dividir o espinor em termos de suas quiralidades

$$\psi(t, x, y, z) = \sum_n \begin{bmatrix} R_n(r, \theta) \psi_{Rn}(t, x) \\ L_n(r, \theta) \psi_{Ln}(t, x) \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

A equação de movimento é expressa como

$$\begin{pmatrix} L_n i(\partial_0 - \partial_1) \psi_{Ln} \\ R_n i(\partial_0 + \partial_1) \psi_{Rn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_{Rn} (\partial_r + \frac{i}{r} \partial_\theta) R_n \\ -\psi_{Ln} (\partial_r - \frac{i}{r} \partial_\theta) L_n \end{pmatrix} - \eta F(\phi) \begin{pmatrix} R_n \psi_{Rn} \\ L_n \psi_{Ln} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.22)$$

Agora, impondo que  $\psi_{Rn}$  e  $\psi_{Ln}$  são as componentes quirais do férmion de Dirac em 2D satisfazendo a equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \begin{bmatrix} \psi_{Rn} \\ \psi_{Ln} \end{bmatrix} = 0, \quad (4.23)$$

ou explicitamente,

$$\begin{aligned} i(\partial_0 - \partial_1) \psi_{L_n} &= m_n \psi_{R_n}, \\ i(\partial_0 + \partial_1) \psi_{R_n} &= m_n \psi_{L_n}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Em seguida, a eq.(4.22) se transforma em

$$\begin{pmatrix} L_n m_n \psi_{R_n} \\ R_n m_n \psi_{L_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_{R_n} (\partial_r + \frac{i}{r} \partial_\theta) R_n \\ -\psi_{L_n} (\partial_r - \frac{i}{r} \partial_\theta) L_n \end{pmatrix} - \eta F(\phi) \begin{pmatrix} R_n \psi_{R_n} \\ L_n \psi_{L_n} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.25)$$

O que fizemos foi dividir o espinor de Dirac em termos de suas duas componentes. Assim, obtemos duas equações acopladas para  $R_n(r, \theta)$  e  $L_n(r, \theta)$ :

$$\begin{aligned} -\left(\partial_r + \frac{i}{r} \partial_\theta\right) R_n + \eta F(\phi) R_n &= m L_n, \\ \left(\partial_r - \frac{i}{r} \partial_\theta\right) L_n + \eta F(\phi) L_n &= m R_n. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Aqui, temos

$$H_+ R_n = m_n L_n \quad (4.27)$$

$$H_- L_n = m_n R_n,$$

onde

$$(H_+)^\dagger = H_- , \quad (4.28)$$

$$(H_-)^\dagger = H_+.$$

Nosso objetivo é encontrar modos localizados, por isso é necessário transformar a equação para férmions em uma equação tipo-Schrödinger para as funções de onda  $R_n$  e  $L_n$ , reescrevendo as eq.(26) como

$$H_R R_n = m_n^2 R_n, \quad (4.29)$$

$$H_L L_n = m_n^2 L_n. \quad (4.30)$$

onde  $H_R = H_- H_+$  e  $H_L = H_+ H_-$  são operadores hermitianos. Isso garante  $m_n^2 > 0$  e a impossibilidade da existência de modos taquiônicos.

A ação dada por Eq (4.14) pode ser integrada para obtermos uma ação "standard" para férmions quirais massivos

$$S_{ferm} = \sum_n \int dt dx \bar{\psi}_n [\gamma^\mu \partial_\mu - m_n] \psi_n, \quad (4.31)$$

onde são necessárias as seguintes condições de ortonormalização para  $L_n$  e  $R_n$

$$\int r dr L_m L_n = \int r dr R_m R_n = \delta_{mn}, \quad (4.32)$$

$$\int r dr L_m R_n = 0. \quad (4.33)$$

Modos taquiônicos são proibidos por causa do hamiltoniano garantir que o termo de massa é real. Assim, adotamos uma interpretação probabilística para encontrar modos massivos de ambas as quiralidades no anel. Precisamos resolver a equação de Schrödinger para estudarmos o confinamento dos modos quirais.

Na próxima seção, vamos considerar separadamente os estados ressonantes para férmions de mão-esquerda e mão-direita.

### 4.3 Ressonâncias

Finalmente, podemos estudar a localização de férmions em um anel imerso em um espaço-tempo 4-dimensional. Sabemos que, variando o valor de  $m^2$ , obtemos funções de onda, isto é, soluções da equação Schrödinger que se comportam como onda plana. Este comportamento é caracterizado pela presença de amplitude no defeito, seguido do vazamento desses modos, devido ao seu caráter massivo. Podemos interpretar estas amplitudes dentro do defeito como estados ressonantes.

#### 4.3.1 Férmions de mão esquerda

Iremos primeiro estudar o caso de férmions de mão-esquerda com a variação de alguns parâmetros tais como o raio do anel e do momento angular.

A equação (4.30) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 L_n}{\partial r^2} - \frac{i}{r^2} \partial_\theta L_n - \eta \partial_r F(\phi) L_n - \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 L_n \\ - \frac{2i\eta F(\phi)}{r} \partial_\theta L_n + \eta^2 F(r)^2 L_n = m_n^2 L_n. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Fazemos a seguinte decomposição

$$L(r, \theta) = \sum_{n, \ell} \chi_n(r) e^{i\ell\theta}, \quad (4.35)$$

que ao ser substituída na eq.(4.34) leva à equação tipo-Schrödinger para o modo escalar  $\chi_n(r)$ :

$$-\frac{d^2\chi_n(r)}{dr^2} + V_{sch}^L(\phi(r))\chi_n(r) = m_n^2\chi_n(r), \quad (4.36)$$

onde o potencial  $V_{sch}^L(\phi(r))$  é dado por

$$V_{sch}^L(\phi(r)) = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2\eta\ell F(\phi(r))}{r} - \eta\partial_r F(\phi(r)) + \eta^2 F(\phi(r))^2. \quad (4.37)$$

Em (4.37),  $\phi(r)$  representa a solução anel (Eq.4.12). Outras decomposições podem ser encontrados noutros contextos, como por exemplo na referência [55]. Devemos ressaltar que este resultado é geral para a solução do anel e se aplica a qualquer função de acoplamento  $F(\phi)$ .

Neste trabalho, como exemplo, consideramos o  $\phi^4$  dado por  $F(\phi) = (1 - \phi(r)^2)^2$ . Construímos os gráficos no programa Maple (Fig.4.2) que retrata a o potencial tipo-Schrödinger  $V_{sch}^L(r)$  como uma função de  $r$  para alguns valores de  $r_0$ ,  $\eta$ ,  $\lambda$  e  $\ell$ . Notamos que para  $\ell$  fixo e maiores valores de  $\lambda/\eta$  e  $r_0$ , favorecem o aparecimento de estados ressonantes.

Outro fator importante foi observado na (Fig 4.2b). Aqui, vemos que o aumento do raio do anel favorece o aparecimento de ressonâncias dentro dele, porque o potencial  $V_{sch}$  é um potencial tipo barreira com o pico localizado em torno  $r = r_0$ . Pode ser observado também que, reduzindo os valores de  $r_0$  podemos reduzir e até mesmo destruir as possibilidades de encontrar modos ressonantes dentro do anel.

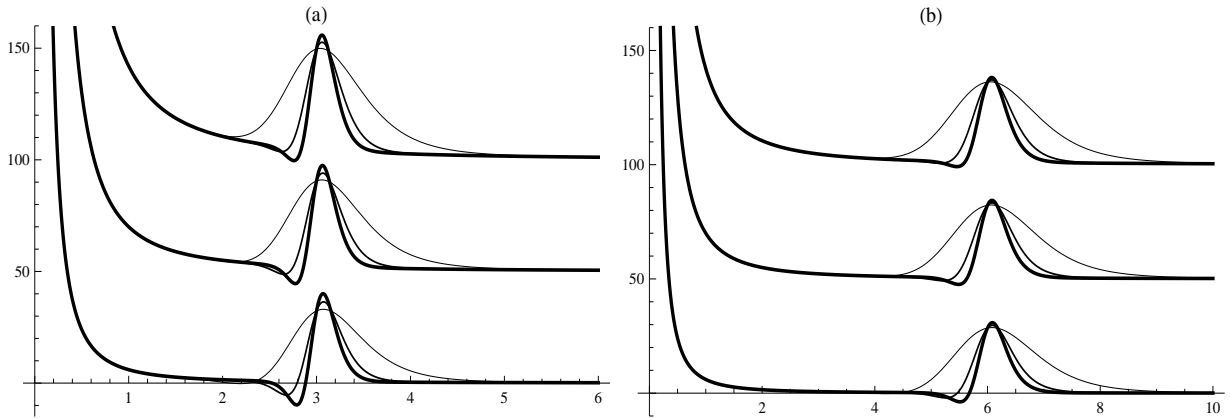


Figura 4.2: a) Potencial tipo-Schrödinger  $V_{sch}^L$  para  $\ell = 2$  (curvas mais baixas),  $50+V_{sch}^L$  para  $\ell = 4$  e  $100+V_{sch}^L$  para  $\ell = 6$ . As curvas são para  $\lambda = 10$  (traço fino),  $50$  e  $100$  (traços mais grossos). Em todas as figuras  $\eta = 5$  e  $r_0 = 3$ . b) O mesmo que em (a), com  $r_0 = 6$ .

### 4.3.2 Férmiões de mão direita

Aqui, vamos estudar uma equação tipo-Schrödinger para férmiões de mão direita a partir dos parâmetros já discutidos. A eq.(4.29) é escrita como:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2} + \frac{i}{r^2} \partial_\theta R_n + \eta \partial_r F(\phi) R_n - \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 R_n \\ & - \frac{2i\eta F(\phi)}{r} \partial_\theta R_n + \eta^2 F(r)^2 R_n = m_n^2 R_n. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Fazendo a decomposição

$$R(r, \theta) = \sum_{n, \ell} \rho_n(r) e^{i\ell\theta} \quad (4.39)$$

Obtemos uma equação tipo Schrödinger para o modo escalar  $\rho_n(r)$ :

$$-\frac{d^2 \rho_n(r)}{dr^2} + V_{sch}^R(\phi(r)) \rho_n(r) = m_n^2 \rho_n(r), \quad (4.40)$$

A escolha para a função  $F$  já é conhecida, ou seja, o acoplamento é dado por  $F(\phi) = (1 - \phi(r)^2)^2$ . Assim, temos o potencial tipo-Schrödinger unidimensional  $V_{sch}^R(\phi(r))$  dado por

$$V_{sch}^R(\phi(r)) = \frac{\ell(\ell-1)}{r^2} + \frac{2\eta\ell F(\phi(r))}{r} + \eta^2 F(\phi(r))^2 \quad (4.41)$$

A Fig.(4.3) descreve o potencial tipo-Schrödinger  $V_{sch}^R(\phi(r))$  como uma função de  $r$  para alguns valores de  $r_0$ ,  $\eta$ ,  $\lambda$  e  $\ell$ , onde estamos interessados em obter ressonâncias.

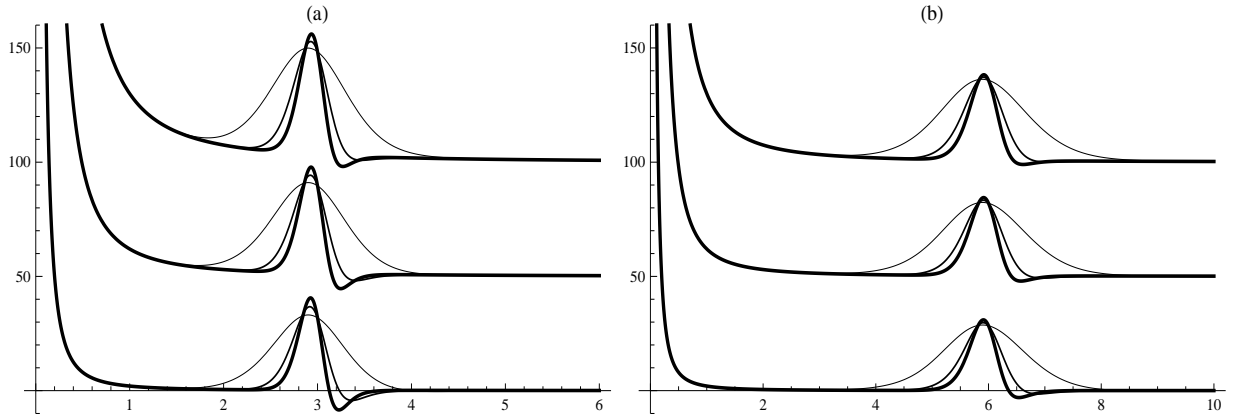


Figura 4.3: a) Potencial tipo-Schrödinger  $V_{sch}^R$  para  $\ell = 2$  (curvas mais baixas),  $50 + V_{sch}^R$  para  $\ell = 4$  e  $100 + V_{sch}^R$  para  $\ell = 6$ . As curvas são para  $\lambda = 10$  (traço fino), 50 e 100 (traços mais grossos). Em todas as figuras  $\eta = 5$  e  $r_0 = 3$ . b) O mesmo que em (a), com  $r_0 = 6$ .

Além disso, podemos observar que  $V_{sch}^L(\phi(r))$  e  $V_{sch}^R(\phi(r))$  são parceiros supersimétricos. Desta forma  $V_{sch}^L(\ell)$  e  $V_{sch}^R(\ell)$  devem ter o mesmo espectro.

## 4.4 Resultados Numéricos

A fim de investigar numericamente os estados massivos, podemos ver que numa região próxima da origem do defeito, o potencial é dominado pelo termo  $1/r^2$ , levando a

$$\tilde{V}_{sch}(r) = \frac{\ell^2 \pm \ell}{r^2}, \quad r \ll r_0, \quad (4.42)$$

onde a partir de agora, o sinal superior e inferior representa a quiralidade esquerda e direita, respectivamente. As soluções finitas em  $r = 0$  são

$$\psi_n(r) = A\sqrt{r}J_{\ell \pm \frac{1}{2}}(m_n r) + B\sqrt{r}Y_{\ell \pm \frac{1}{2}}(m_n r), \quad \ell \geq 0, \quad (4.43)$$

$$\psi_n(r) = A\sqrt{r}J_{|\ell \mp \frac{1}{2}}(m_n r) + B\sqrt{r}Y_{|\ell \mp \frac{1}{2}}(m_n r), \quad \ell \leq -1.$$

Devemos satisfazer a exigência física:  $\psi_n(r = 0) = 0$  and  $\psi'_n(r = 0) = 0$ . Isto implica que estabelecemos  $B = 0$  e por conveniência tomamos  $A = 1$  antes da normalização. Assim, consideramos as seguintes condições aproximadas para  $r \ll r_0$ :

$$\psi_n(r) \simeq \sqrt{r}J_{\ell \pm \frac{1}{2}}(m_n r), \quad \ell = 2, 3, 4, \dots, \quad (4.44)$$

$$\psi_n(r) \simeq \sqrt{r}J_{|\ell \mp \frac{1}{2}}(m_n r), \quad \ell = -2, -3, -4, \dots, \quad (4.45)$$

Já que para os valores  $\ell = -1, 0, 1$  as condições de contorno em  $r = 0$  não são satisfeitas.

Definimos a probabilidade de encontrar férmions dentro do anel,  $P_{Anel}$ , através da seguinte expressão

$$P_{Anel} = \frac{\int_{r_{min}}^{r_0} dr |\psi_n(r)|^2}{\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr |\psi_n(r)|^2}. \quad (4.46)$$

Utilizamos essa expressão para analisarmos as probabilidades de encontrar férmions de Dirac com uma determinada massa, dentro do defeito tipo anel. A Fig. 4.4 mostra alguns resultados para  $\ell = 2$ ,  $r_0 = 3$  e  $\eta = 5$  e vários valores de  $\lambda$ , para as quiralidades esquerda e direita. Notamos que o aumento no auto-acoplamento  $\lambda$  do campo escalar, conduz a um aumento no número e duração das ressonâncias. Essa análise é feita, observando cada pico nos gráficos. Quanto mais fino é o pico, maior é o tempo de vida da ressonância correspondente. O espectro de ambas as quiralidades coincidem, como esperado para parceiros supersimétricos.

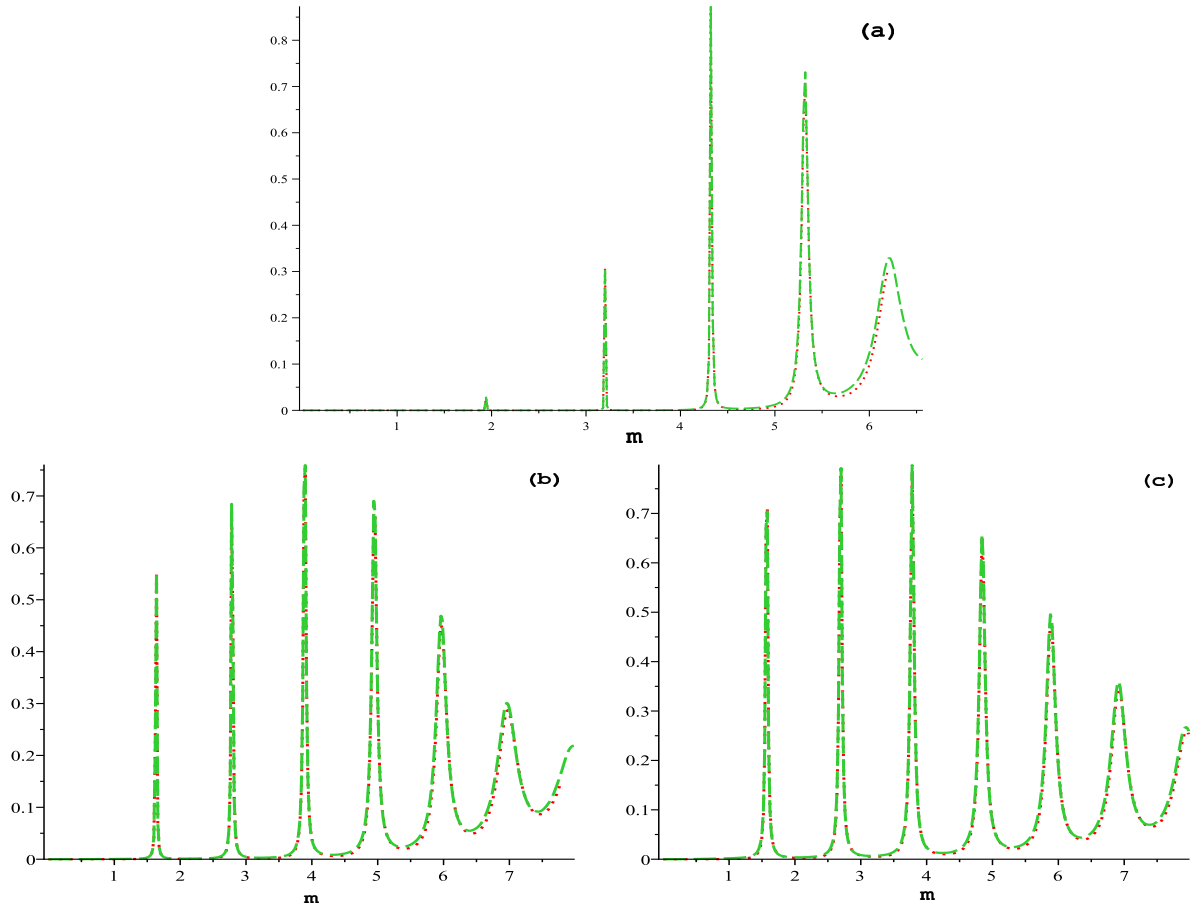


Figura 4.4:  $P_{Anel}^{(\ell, m)}$  versus  $m$  com  $\ell = 2$  fixo,  $r_0 = 3$  e  $\eta = 5$ , para a)  $\lambda = 10$ , b)  $\lambda = 50$  e c)  $\lambda = 100$ . Os gráficos são para as quiralidades esquerda (linhas pontilhadas) e direita (tracejadas). Usamos  $\epsilon = 0.001$ ,  $r_{min} = 0.005$  e  $r_{max} = 20$ .

Agora, a Fig. 4.5a mostra uma função de onda para  $m = 4.324$ , correspondendo ao pico mais alto da figura Fig. 4.4a. Notamos que a função de onda oscila como ondas planas longe do anel, mas tem uma amplitude muito maior na região  $r < r_0$ . A maior amplitude de oscilação mostra que o estado vive mais dentro do anel antes do vazamento na região exterior. Isso caracteriza um estado de ressonância.

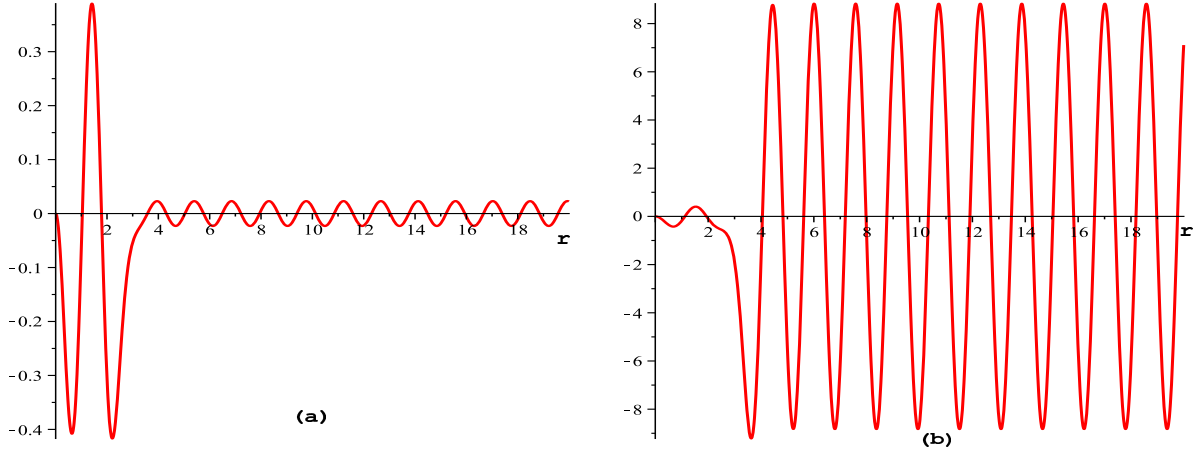


Figura 4.5:  $\psi(r)$  Para a quiralidade direita,  $\ell = 2$ ,  $r_0 = 3$ ,  $\eta = 5$  e  $\lambda = 10$  e a)  $m = 4.324$  (estado ressonante) e b)  $m = 4.0$  (estado não-ressonante). Usamos  $\epsilon = 0.001$ ,  $r_{min} = 0.005$  e  $r_{max} = 20$ .

A Fig. 4.5b mostra a função de onda para  $m = 4.0$ , correspondendo a  $P_{Anel} \simeq 0$  na Fig. 4.4a. Notamos que a função de onda oscila como ondas planas longe do anel, e tem uma amplitude muito menor na região  $r < r_0$ . Isso mostra que esse estado massivo não pode viver dentro do anel e é expulso para a região exterior, caracterizando um modo massivo livre e, não um estado de ressonância.

Nós também variamos o valor do acoplamento  $\eta > 1$  e verificamos que para  $\lambda$ ,  $\ell$  e  $r_0$  fixos, os picos de ressonância são mais pronunciados para maiores valores do acoplamento  $\eta$ . O aumento de  $r_0$  com outros parâmetros fixos também levam um aumento no número e do tempo de vida das ressonâncias, como pode ser visto comparando Fig.4.4c e Fig.4.6. Por outro lado, pequenos valores de  $r_0$ , conduzem a ausência de ressonâncias, o que significa que os estados fermiônicos são mais facilmente expulsos do anel.



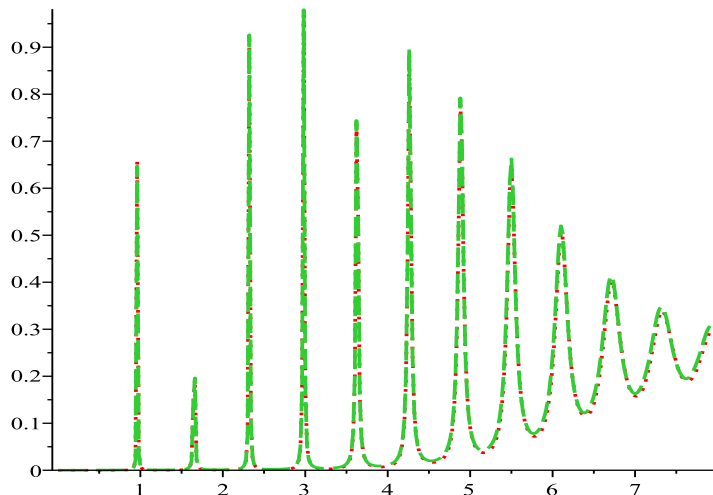


Figura 4.6:  $P_{Anel}^{(\ell,m)}$  versus  $m$  com  $\lambda = 100$  fixo,  $\ell = 2$ ,  $\eta = 5$  e  $r_0 = 5$ . Os gráficos são para as quiralidades esquerda (linha pontilhada) e direita (linha tracejada). Usamos  $\epsilon = 0.001$ ,  $r_{min} = 0.005$  e  $r_{max} = 20$ .

Observamos na Fig.4.7, que para  $\eta = 0.5$  não existem ressonâncias.

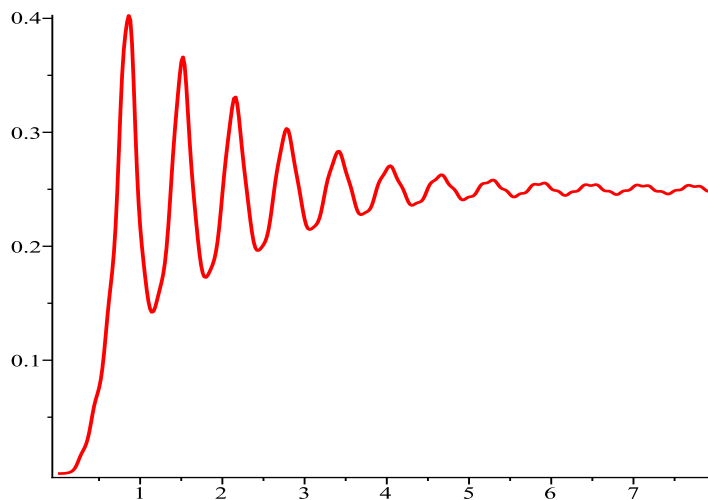


Figura 4.7:  $P_{Anel}^{(\ell,m)}$  versus  $m$  com  $\lambda = 100$ ,  $\ell = 2$ ,  $r_0 = 5$  e  $\eta = 0.5$  fixos. O gráfico é para a quiralidade direita. Nós usamos  $\epsilon = 0.001$ ,  $r_{min} = 0.005$  e  $r_{max} = 20$ .

Dessa forma, nossos resultados numéricos concordam com nossa análise qualitativa para o potencial Schrödinger. A melhor opção para encontrar ressonâncias é então, considerar  $\lambda/\eta \gg 1$ , with  $\eta > 1$ .

## Conclusões e Perspectivas

Uma parte deste trabalho está baseado em revisões de atividades já desenvolvidas por outros pesquisadores e livros textos que concentram informações sobre os conteúdos aqui abordados. Outra parte está relacionada a uma pesquisa inédita feita pelos autores, envolvendo localização de férmions em um anel imerso em  $(3, 1)$  dimensões.

Nosso objetivo principal nos primeiros capítulos foi abordar de forma clara e sucinta os princípios fundamentais de defeitos topológicos, bem como, sua origem, características e os teoremas envolvidos. Isso, para que no capítulo 4 pudéssemos analisar o processo de localização de férmions num defeito, sem precisar voltar aos conceitos fundamentais, já expostos.

No capítulo 2 estudamos a quebra espontânea de simetria, utilizando exemplos já conhecidos. Explicamos que em tais situações surgem os chamados defeitos topológicos. Ainda neste capítulo, vimos que sólitons são soluções de uma classe de equações diferenciais não-lineares e por serem localizados e estáveis são amplamente utilizados nos estudos de defeitos topológicos. Estudamos modelos em  $(1, 1)$  dimensões com dinâmica padrão, encontramos a equações de movimento, fizemos comparações entre o modelo  $\phi^4$  que apresenta solução tipo kink e o modelo  $\phi^4$  invertido que apresenta solução tipo lump. O confronto entre essas duas soluções foi feita através da análise gráfica do potencial, solução para o campo e densidade de energia. Os gráficos foram gerados no programa Maple e confrontado com trabalhos publicados na literatura especializada.

Para o estudo de defeitos em dimensões maiores, ainda no capítulo 2, estudamos o teorema de Derrick que limita soluções solitônicas para 2-dimensões. Mostramos duas formas de contornar esse teorema e em seguida fizemos uma revisão de modelos com dinâmica generalizada.

No capítulo 3 estudamos espinores em dimensões arbitrárias, bem como, as matrizes- $\Gamma$  e o operador

de Dirac. Esse estudo se fez importante devido sua utilização no capítulo seguinte.

Enfim, no capítulo 4 investigamos a ocorrência de estados ressonantes dos campos fermiônicos em um defeito construído a partir de um campo escalar imerso em um espaço-tempo de Minkowski, possuindo dependência explícita com a distância radial  $r$  em sua densidade Lagrangiana. O estudo de ressonâncias nos fornecem detalhes importantes sobre o acoplamento com o anel, por este motivo, o número e o tempo de vida do espectro dependem do raio do anel e dos parâmetros do modelo. A fim de obter os modos massivos fermiônicos, é essencial transformar a equação para férmions em uma equação que nos forneça uma interpretação probabilística para ambas as quiralidades. A equação de Schrödinger, responsável por lidar com o problema quanto-mecânico pode fornecer modos ressonantes, que foram resolvidos numericamente. Aqui, consideramos no acoplamento  $F(\phi) = (1 - \phi^2)^2$ , e nós analisamos sua influência no estudo de localização de férmions. O estudo qualitativo do potencial indica que, para um momento angular conveniente, grandes valores de  $r_0 \hat{=} \lambda/\eta$  favorece o aparecimento de estados ressonantes. Podemos também afirmar que o potencial para ambas as quiralidades decai assintoticamente longe do defeito e tem uma barreira em torno da região do raio do anel. Um conjunto de picos de ressonâncias são obtidos devido ao caráter supersimétrico do potencial proporcionando a coincidência nos espectros, demonstrando a realização de férmions de Dirac.

Depois de utilizar uma solução aproximada para uma região dentro do anel, conseguimos férmions massivos com tempo de vida finitos e, por meio de um número de condições de contorno necessárias em  $r = 0$  os valores para o momento angular  $\ell = \pm 1$  e  $0$  são automaticamente extintos. Percebemos um maior número de picos e no tempo de vida das ressonâncias com base no crescimento do auto-acoplamento- $(\lambda)$  da solução, o acoplamento  $\eta > 1$ , desde que satisfaça  $\lambda/\eta$  e do raio do anel. No entanto, os valores mais baixos de  $r_0$ , contribuem para a ausência de estados massivos dentro do anel, caracterizando férmions livres.

Uma possível extensão deste trabalho e que será investigada futuramente é a análise de localização de campos de Gauge nesta classe de defeitos.

# Apêndice A

## Lagrangiana em teoria de campos

A lagrangeana em uma teoria com um campo escalar real é descrita por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (5.1)$$

A expressão para o potencial depende do modelo a ser estudado. No sistema natural, as dimensões de tempo e espaço são iguais, logo a ação é descrita como

$$S = \int \mathcal{L} d^{N+1}x \quad (5.2)$$

Aplicando o princípio de mínima ação temos,

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L} d^{N+1}x = 0. \quad (5.3)$$

A ação é uma função do campo  $\phi$  e de suas derivadas, logo temos:

$$\delta S = \int d^{N+1}x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right] = 0. \quad (5.4)$$

Trocando a ordem dos termos  $\delta$  e  $\partial_\mu$  no segundo termo e, aplicando a regra da cadeia na equação acima, chega-se à seguinte expressão

$$\delta S = \int d^{N+1}x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta \phi + \int d^{N+1}x \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) = 0. \quad (5.5)$$

Considerando que  $\delta \phi$  nos extremos é nula, resta apenas a primeira integral na equação acima:

$$\delta S = \int d^{N+1}x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta \phi = 0, \quad (5.6)$$

e a equação de Euler-Lagrange obtida é

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0. \quad (5.7)$$

Vamos agora, calcular o segundo termo da eq.(5.7). Aplicando a métrica  $g^{\mu\nu}$  na lagrangiana (5.1), obtém-se

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi).$$

Derivando essa lagrangiana em relação as derivadas do campo  $\phi$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \phi)} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left[ \partial_\nu \phi \frac{\partial_\mu \phi}{\partial (\partial_\rho \phi)} + \partial_\mu \phi \frac{\partial_\nu \phi}{\partial (\partial_\rho \phi)} \right] \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left[ \partial_\nu \phi \delta_\mu^\rho + \partial_\mu \phi \delta_\nu^\rho \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \partial^\mu \phi \delta_\mu^\rho + \partial^\nu \phi \delta_\nu^\rho \right] \\ &= \frac{1}{2} \partial^\rho \phi + \frac{1}{2} \partial^\rho \phi. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \phi)} = \partial_\rho \partial_\rho \phi. \quad (5.8)$$

E para o primeiro termo da eq.(5.7), temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\frac{dV}{d\phi}. \quad (5.9)$$

De (5.8) e (5.9) obtém-se a equação de movimento

$$\partial_\mu \partial_\mu \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (5.10)$$

onde fizemos a mudança dos índices  $\rho$  por  $\mu$ , pois são índices mudos.

# Apêndice B

## Localização de férmions em branas

A análise e localização de férmions em branas é feita considerando a equação de Dirac massiva. Primeiramente realiza-se a seguinte transformação de coordenadas:

$$dz = e^{-A(y)} dy, \quad (5.11)$$

onde a métrica é dada por

$$ds^2 = e^{2A}(\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu). \quad (5.12)$$

Em cinco dimensões as matrizes- $\Gamma$  satisfazem a relação  $\Gamma^M = e^{\frac{M}{\bar{M}}}\Gamma^{\bar{M}}$  com  $\Gamma^M, \Gamma^N = 2g^{MN}$ . Por conveniência,  $\bar{M}, \bar{N}, \dots$  representam os índices locais de Lorentz e  $\Gamma^{\bar{M}}$ , as matrizes- $\Gamma$  em cinco dimensões.

Com a nova métrica as matrizes- $\Gamma$  assumem a forma

$$\Gamma^M = (e^{-A}\gamma^\mu, e^{-A}\gamma^5), \quad (5.13)$$

e as derivadas covariantes

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{\partial_z A}{2}\gamma_\mu\gamma^5, D_5 = \partial_5. \quad (5.14)$$

onde  $\gamma^\mu$  e  $\gamma^5$  são as matrizes- $\Gamma$  usuais na representação de Dirac. A ação de Dirac para spins  $\frac{1}{2}$  acoplados com um campo escalar e gravidade em  $5D$  é

$$S_\Psi = \int dx^4 dy \sqrt{-g} \left( \bar{\Psi} \Gamma^M D_M \Psi - \eta \bar{\Psi} F \Psi \right), \quad (5.15)$$

onde  $\Phi$  é o campo escalar que constitui a brana,  $\eta$  é a constante de acoplamento. O campo  $\Psi$  é o espinor de Dirac que definimos:

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

A partir da equação de Eule-Lagrange, encontramos a equação de movimento para o campo  $\Phi$ , chamada de equação de Dirac:

$$(\Gamma^M D_M \Psi - \eta F(\phi)) \Psi = 0. \quad (5.17)$$

Decompondo a equação de Dirac em relação a dimensão extra, temos

$$(\Gamma^\mu D_\mu + \Gamma^5 D_5 - \eta F(\phi)) \Psi = 0, \quad (5.18)$$

que resulta em,

$$(e^{-A} \gamma^\mu [\partial_\mu + \frac{1}{2} (\partial_z A) \gamma_\mu \gamma^5] + e^{-A} \gamma^5 \partial_5 - \eta F(\phi)) \psi = 0 \quad (5.19)$$

Agora utilizamos a igualdade  $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4 \cdot \mathbf{1}_{4 \times 4}$  para obtermos

$$[\gamma^\mu \partial_\mu + \gamma^5 (\partial_z + 2\partial_z A) - e^A \eta F(\phi)] \Psi = 0. \quad (5.20)$$

Para decompor o espinor  $\Psi$  em termos de suas componentes quirais, aplica-se um mecanismo de decomposição quiral geral

$$\Psi(x, z) = \sum \psi_L(x) \alpha_L(z) + \sum \psi_R(x) \alpha_R(z), \quad (5.21)$$

com  $\psi_L(x) = -\gamma^5 \psi_L(x)$  e  $\psi_R(x) = \gamma^5 \psi_R(x)$  que são as componentes de quiralidade esquerda e direita para o campo de Dirac 4-dimensional com massa  $m$ . Para que os campos de spin- $\frac{1}{2}$  localizados na brana conectem as duas quiralidades, devem satisfazer as equações de Dirac massivas,

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L(x) = m \psi_R(x), \quad (5.22)$$

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R(x) = m \psi_L(x). \quad (5.23)$$

A partir das equações acima, encontramos as equações acopladas para  $\alpha_L(z)$  e  $\alpha_R(z)$ :

$$\partial_z + 2\partial_z A + \eta e^A F(\phi) \alpha_L(z) = m \alpha_R(z), \quad (5.24)$$

$$\partial_z + 2\partial_z A - \eta e^A F(\phi) \alpha_R(z) = -m \alpha_L(z). \quad (5.25)$$

Implementamos as mudanças de variáveis  $\tilde{\alpha}_L = e^{2A} \alpha_L$  e  $\tilde{\alpha}_R = e^{2A} \alpha_R$  afim de obtermos equações tipo Schrödinger para os férmions de quiralidades de mão esquerda e mão direita que são escritas na forma

$$[-\partial_z^2 + V_L(z)] \tilde{\alpha}_L = m^2 \tilde{\alpha}_L \quad (5.26)$$

$$[-\partial_z^2 + V_R(z)]\tilde{\alpha}_R = m^2\tilde{\alpha}_R. \quad (5.27)$$

Aqui, os potenciais efetivos são dados por

$$V_L = e^{2A}\eta^2 F^2(\phi) - e^A\eta\partial_z F(\phi) - (\partial_z A)e^A\eta F(\phi), \quad (5.28)$$

$$V_R = e^{2A}\eta^2 F^2(\phi) + e^A\eta\partial_z F(\phi) + (\partial_z A)e^A\eta F(\phi), \quad (5.29)$$



# Apêndice C

## Potenciais supersimétricos

**Potencial supersimétrico: Para  $\ell \geq 0$**

Primeiro consideramos que  $V_{sch}^L$  tem o estado fundamental do sistema. Escrevemos o Hamiltoniano na forma

$$H_{sch}^{(L)}\psi = m_n^2\psi,$$

podemos reescrevê-lo como um produto de operadores auto-adjuntos,

$$H_{sch}^{(L)} = -\frac{d^2}{dr^2} + V_{sch}^L = A^\dagger A$$

dados por

$$A = \frac{d}{dr} + W,$$

$$A^\dagger = -\frac{d}{dr} + W.$$

Isso nos garante que seus auto valores sejam positivos. Para obtermos o hamiltoniano  $H_{sch}^{(L)}$ , vamos aplicá-lo em um auto-estado  $\psi$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} H_{sch}^{(L)}\psi &= \left(-\frac{d}{dr} + W\right) \left(\frac{d\psi}{dr} + W\psi\right) \\ &= -\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{dW}{dr}\psi + W^2\psi. \end{aligned}$$

Logo, operador Hamiltoniano assume a forma

$$H_{sch}^{(L)} = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{dW}{dr} + W^2, \tag{5.30}$$

onde o potencial  $V_{sch}^L$  é dado por

$$V_{sch}^L = W^2 - \frac{dW}{dr}. \quad (5.31)$$

Para férmions de mão-direita temos o seguinte operador Hamiltoniano

$$H_{sch}^{(R)} = -\frac{d^2}{dr^2} + V_{sch}^R = AA^\dagger$$

Aplicando novamente esse operador sobre um auto-estado  $\psi$ , obtemos

$$\begin{aligned} H_{sch}^{(R)} \psi &= \left( \frac{d}{dr} + W \right) \left( -\frac{d\psi}{dr} + W\psi \right) \\ &= -\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{dW}{dr}\psi + W^2\psi, \end{aligned}$$

que resulta em

$$H_{sch}^{(R)} = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{dW}{dr} + W^2, \quad (5.32)$$

onde

$$V_{sch}^R = W^2 + \frac{dW}{dr}. \quad (5.33)$$

Consideramos  $W$  o potencial supersimétrico e tomando (5.31) e (5.33), obtemos

$$W^2 = \frac{V_{sch}^R + V_{sch}^L}{2}. \quad (5.34)$$

E para a derivada,

$$\frac{dW}{dr} = \frac{V_{sch}^R - V_{sch}^L}{2}. \quad (5.35)$$

Utilizando (4.37) e (4.41) é fácil verificar que o superpotencial é

$$W = \left( \frac{\ell}{r} + \eta F \right) \quad (5.36)$$

E o modo de zero é obtido para  $A\psi_0 = 0$ ,

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \exp \left\{ -\int_0^r dr' W(r') \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \exp \left\{ -\int_\epsilon^r dr' \frac{\ell}{r'} + \eta F(r') \right\} \\ &= \left[ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\epsilon}{r} \right)^\ell \right] \exp \left\{ -\eta \int_0^r dr' F(r') \right\} \end{aligned}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\epsilon}{r} \right)^\ell = \begin{cases} 1 & , \ell = 0 \\ 0 & , \ell > 0 \end{cases}$$

Aqui,  $\psi_0$  é normalizado apenas para  $\ell = 0$ .

Agora considerando que  $V_{sch}^R$  tem o estado fundamental do sistema.

O operador Hamiltoniano tem o produto de operadores auto-adjuntos dado por

$$H_{sch}^{(R)} = -\frac{d^2}{dr^2} + V_{sch}^R = A^\dagger A.$$

Aplicando esse operador num auto-estado  $\psi$ , obtemos

$$\begin{aligned} H_{sch}^{(R)} \psi &= \left( -\frac{d}{dr} + W \right) \left( \frac{d\psi}{dr} + W\psi \right) \\ &= -\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{dW}{dr}\psi + W^2\psi, \end{aligned}$$

que resulta em

$$H_{sch}^{(R)} \psi = -\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{dW}{dr}\psi + W^2\psi \quad (5.37)$$

onde o potencial  $V_{sch}^R$  é dado por

$$V_{sch}^R = W^2 - \frac{dW}{dr} \quad (5.38)$$

Para férmions de mão-esquerda temos o seguinte operador hamiltoniano

$$H_{sch}^{(L)} = -\frac{d^2}{dr^2} + V_{sch}^L = AA^\dagger$$

E após aplicarmos esse Hamiltoniano sobre um auto-estado qualquer, obtemos

$$H_{sch}^{(L)} \psi = -\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{dW}{dr}\psi + W^2\psi \quad (5.39)$$

Onde

$$V_{sch}^L = W^2 + \frac{dW}{dr} \quad (5.40)$$

Com estes resultados, verificamos que o superpotencial, agora assume a forma

$$W = -\frac{\ell}{r} - \eta F. \quad (5.41)$$

E o modo de zero é obtido para  $A\psi_0 = 0$

$$\begin{aligned} \psi_0(r) &= \exp \left\{ -\int_0^r dr' W(r') \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \exp \left\{ \int_\epsilon^r dr' \frac{\ell}{r'} + \eta F(r') \right\} \\ \psi_0(r) &= \left[ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{r}{\epsilon} \right)^\ell \right] \exp \left\{ \eta \int_0^r dr' F(r') \right\} \end{aligned}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{r}{\epsilon} \right)^\ell = \begin{cases} 1 & , \ell = 0 \\ \infty & , \ell > 0 \end{cases}$$

Novamente  $\psi_0$  é normalizado apenas para  $\ell = 0$ .

## Condições iniciais

A fim de investigar numericamente os estados massivos, primeiramente, podemos ver que, em uma região próxima à origem para  $\ell \geq 1$  o potencial é dominado pelo termo proporcional a  $1/r^2$ , levando a

$$\tilde{V}_{sch}(r) = \frac{\ell^2 \pm \ell}{r^2}, \quad r \ll r_0$$

For  $\ell \geq 1$

Assim a equação de Schrodinger é

$$-\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{\ell(\ell \pm 1)}{r^2}\psi = m^2\psi \quad (5.42)$$

Fazendo a seguinte mudança  $u = mr$ , obtemos

$$\frac{d^2\psi}{du^2} + \left[1 - \frac{\ell(\ell \pm 1)}{u^2}\right]\psi = 0 \quad (5.43)$$

Agora tomando  $\psi = u^{1/2}\varphi$ , obtemos a equação

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{d\varphi}{du} + \left[1 - \frac{1}{u^2}\left(\ell \pm \frac{1}{2}\right)^2\right]\varphi = 0 \quad (5.44)$$

cuja solução é

$$\varphi(u) = AJ_{\ell \pm \frac{1}{2}}(u) + BY_{\ell \pm \frac{1}{2}}(u) \quad (5.45)$$

E pode ser reescrita como

$$\psi(r) = (mr)^{1/2} J_{\ell \pm \frac{1}{2}}(u) \quad (5.46)$$

Para  $\ell \leq -1$ ,  $\ell = -|\ell|$

Neste caso temos o potencial

$$\tilde{V}_{sch}(r) = \frac{|\ell|^2 \mp |\ell|}{r^2}, \quad r \ll r_0$$

E a equação de Schrodinger torna-se

$$-\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{|\ell|(|\ell| \mp 1)}{r^2}\psi = m^2\psi$$

Novamente fazendo a mudança  $u = mr$  obtemos

$$\frac{d^2\psi}{du^2} + \left[1 - \frac{|\ell|(|\ell| \mp 1)}{u^2}\right]\psi = 0$$

Agora através de  $\psi = u^{1/2}\varphi$  chegamos a seguinte equação

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varphi}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{d\varphi}{du} + \left[1 - \frac{|\ell|(|\ell| \mp 1)}{u^2} - \frac{1}{4u^2}\right] \varphi &= 0 \\ \frac{d^2\varphi}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{d\varphi}{du} + \left[1 - \frac{1}{u^2} \left(|\ell| \mp \frac{1}{2}\right)^2\right] \varphi &= 0\end{aligned}$$

que tem como solução

$$\varphi(u) = AJ_{|\ell| \mp \frac{1}{2}}(u) + BY_{|\ell| \mp \frac{1}{2}}(u) \quad (5.47)$$

ou

$$\psi(r) = (mr)^{1/2} J_{|\ell| \mp \frac{1}{2}}(mr) \quad (5.48)$$

## Supepotencial para $\ell \leq 0$

Considerando que  $V_{sch}^L$  tem o estado fundamental do sistema

Aqui os potenciais tipo-Schrodinger, e que são parceiros supersimétricos são dados por

$$\begin{aligned}V_{sch}^L &= \frac{|\ell|(|\ell| - 1)}{r^2} - 2|\ell|\eta \frac{F}{r} - \eta \frac{dF}{dr} + \eta^2 F^2 \\ V_{sch}^R &= \frac{|\ell|(|\ell| + 1)}{r^2} - 2|\ell|\eta \frac{F}{r} + \eta \frac{dF}{dr} + \eta^2 F^2\end{aligned}$$

onde

$$W^2 = \frac{V_{sch}^L + V_{sch}^R}{2}, \quad \frac{dW}{dr} = \frac{V_{sch}^R - V_{sch}^L}{2}$$

Apartir destas condições, o superpotencial encontrado é

$$W = -\frac{|\ell|}{r} + \eta F. \quad (5.49)$$

E a obtenção de modo zero é obtido apartir de

$$\begin{aligned}\psi_0(r) &= \exp\left\{-\int_0^r dr' W(r')\right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \exp\left\{\int_\epsilon^r dr' \frac{|\ell|}{r'} - \eta F(r')\right\} \\ \psi_0(r) &= \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{r}{\epsilon}\right)^{|\ell|}\right] \exp\left\{-\eta \int_0^r dr' F(r')\right\}\end{aligned}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{r}{\epsilon}\right)^{|\ell|} = \begin{cases} 1 & , \ell = 0 \\ \infty & , \ell < 0 \end{cases}$$

onde  $\psi_0$  é normalizado apenas para  $\ell = 0$ .

Considerando que  $V_{sch}^R$  tem o estado fundamental do sistema

Agora o superpotencial é escrito na forma

$$W = \frac{|\ell|}{r} - \eta F \quad (5.50)$$

E o modo zero é obtido a partir de

$$\begin{aligned} \psi_0(r) &= \exp \left\{ - \int_0^r dr' W(r') \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \exp \left\{ \int_\epsilon^r dr' - \frac{|\ell|}{r'} + \eta F(r') \right\} \\ \psi_0(r) &= \left[ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\epsilon}{r} \right)^{|\ell|} \right] \exp \left\{ \eta \int_0^r dr' F(r') \right\} \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\epsilon}{r} \right)^{|\ell|} &= \begin{cases} 1 & , \ell = 0 \\ 0 & , \ell < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Daí conclui-se que existem modos zero normalizados apenas quando  $\ell = 0$  e esta condição não está dentro do interesse do estudo aqui realizado. Logo, dentro das condições de interesse, não existem modos normalizados, o que leva a uma quebra espontânea de supersimetria.

# Referências Bibliográficas

- [1] Bazeia, D. Defect structures in Field Theory. arXiv:hep-th/0507188, v1, jul. 2005.
- [2] T. Kaluza, Zum unitatsproblem der physick, Sztz, Preuss, Akad, Wzss. K1, 966-972 (1921).
- [3] O. Klein, Quantetheorie und funf dimensionale relativitats theorie, Zeit. Phys. 37, 805-906 (1926).
- [4] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. 83, 3370 (1999), arXiv: hep-ph/9905221.
- [5] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, Phys. Lett.B 429, 263 (1998), arXiv: hep th/9803315.
- [6] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, Phys. Lett. B 436, 257 (1998), arXiv: hep-ph/9804398.
- [7] V.A. Rubakov and M.E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B 125, 139 (1983).
- [8] J. Erlich, C. Grojean, and T.J. Hollowood, Nucl. Phys. B 584, 359 (2000), arXiv: hep-th/0004133.
- [9] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. 83, 4690 (1999), arXiv: hep-th/9906064.
- [10] C. Ringeval, P. Peter and J.-P. Uzan, Phys. Rev. D 65, 044016 (2002), arXiv: hep-th/0109194.
- [11] S. L. Dubovsky, V. A Rubakov and P. G. Tinyakov, Phys. Rev. D 62, 105011 (2000).
- [12] Yu-Xiao Liu, Li-Da Zhang, Li-Jie Zhang, Yi-Shi Duan, Phys. Rev. D 78 (2008) 065025, arXiv:
- [13] Y.-X. Liu, X.-H. Zhang, L.-D. Zhang and Y.-S. Duan, J. High Energy Phys. 0802 (2008) 067, arXiv: 0708.0065 [hep-th].
- [14] Y.-X. Liu, L.-D. Zhang, S.-W. Wei and Y.-S. Duan, J. High Energy Phys. 0808 (2008) 041, arXiv: 0803.0098 [hep-th].

- [15] R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. D 13, 3398 (1976).
- [16] Yu-Xiao Liu, Li-Da Zhang, Li-Jie Zhang, Yi-Shi Duan, Phys. Rev. D, 78 (2008) 065025, arXiv:0804.4553[hep-th]
- [17] C. A. S. Almeida, R. Casana, M. M. Ferreira, Jr., A. R. Gomes, Phys. Rev. D 79, 125022 (2009).
- [18] D. Bazeia, A. R. Gomes, L. Losano, R. Menezes, Phys. Lett. B 671, 402 (2009).
- [19] R. Casana, A. R. Gomes, R. Menezes, F. C. Simas, *Trapping of Fermion on a Ring Embedded in (3, 1) Dimensions..* Submetido para publicação.
- [20] Moraes, F. Condensed matter physics as a laboratory for Gravitation and Cosmology. Brazilian Journal of Physics, v.30, n.2, p.304-308, jun. 2000.
- [21] Vachaspati, T. Lectures on cosmic topological defects. arXiv:hep-ph/0101270, v2, fev. 2001.
- [22] SrivastavaR, A. Topological defects in Cosmology. PRAMANA Journal of Physics, v.53, n6, p. 1069-1076, dez. 1999.
- [23] Poletti, S. Topological defects. World Scientific, Singapore, 1996.
- [24] S. Coleman, Secret Symmetry in A. Zichichi (ed.), Laws of Hadronic Matter (Academic Press, New York, 1975).
- [25] J. E. Horvath, G. Lugones, S. Scarano Jr, R. Teixeira, M.P. Allen, Cosmologia Física - do micro ao Macro cosmos e virse-versa. LF editorial, São Paulo 2011.
- [26] Lewis Ryder, Quantum Field Theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1990.
- [27] Mondaini, Leonardo. Sólitos quânticos em teorias com simetrias  $Z(N)$ : Aplicações a fenômenos críticos e de transporte, Rio de Janeiro,2006.
- [28] Lemos, N. A. Mecânica analítica. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física. 2004.
- [29] Keller, F. J., Gettys, W., Skove, M. J. Física. São Paulo: Makron Books. v. 2, 1999.
- [30] Ymay, L.H et al. Ondas do tipo sóliton em guias dielétricos. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 25, 2003.
- [31] J.C.Jackson, Classical Eletrodynamics, Wiley. 1998.



- [32] Bazeia, D.; Brito, F. A. ; Gomes, A. R., Locally Localized Gravity and Geometric Transitions, *Journal of High Energy Physics*, 11, 070, 2004c; hep-th/0411088.
- [33] A. A. Belavin and A. M. Polyakov, "Metastable states of thwo dimensional isotropics ferromagnets", *JETP Lett.* 22, 245 (1975).
- [34] Elcio Abdalla, *Teoria Quântica da Gravitação: Cordas e Teoria M*, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v 27, n 1, p 147-155, (2005).
- [35] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [36] D. Bazeia, J. Menezes, and R. Menezes, *Phys. Rev. Lett.* 91, 241601 (2003).
- [37] Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho , *Estrutura Interna e Localização de Gravidade em Branas*, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2005. Tese de Doutorado
- [38] Mike Guidry, *Gauge Fields Theories: An Introduction with Applications*, Weiley-Interscience.
- [39] A. R. Pereira e A. S. T. Pires, "Teoria quântica de campos em sistemas magnéticos de baixas dimensões. Departamento de Física, UFV, Viçosa, MG (2008).
- [40] Belavin, A. A.; Polyakov, A. M. *JETP Letters*, v. 22, p. 245, 1975.
- [41] R. Hobart, *Proc. Phys. Soc. Lond.*82, 201(1963); G. H. Derrick *J. Math. Phys.* 5, 1252 (1964); R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [42] G. 'tHooft, *Nucl. Phys. B* 79, 276 (1974); A. M. Polyakov, *JETP Lett.* 20, 194 (1974); H. Aratyn, L.A. Ferreira and A.H. Zimerman, *Phys.Rev.Lett.* 83, 1723 (1999); T. D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, *Contemporary Concepts in Physics*, vol.1, Harwood Acad. Publ., Chur, Switzerland, 1988; T. D. Lee, *Phys. Rep.* 23, 254 (1976); M. Barriola and A. Vilenkin, *Phys. Rev. Lett.* 63, 341 (1989); D. Harari and C. Loust'ó, *Phys. Rev. D* 42, 2626 (1990); I. Cho and A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* 59, 063510 (1999).
- [43] A. Sen, *Phys. Rev. D* 68, 066008 (2003) [arXiv:hep-th/0303057]; A. Sen, *Int. J. Mod. Phys. A* 20, 5513 (2005) [arXiv:hep-th/0410103].
- [44] D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes, and J.C.R. Oliveira, *Eur. Phys. J. C* 51, 953 (2007) [arXiv:hep-th/0702052].
- [45] D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes, *Eur. Phys. J.* (2008) [arXiv:hep-th/08070213].

- [46] E. Cartan, The theory of spinors. Herman, Paris(1966).
- [47] M. A. de Andrade, "Espinore e álgebra de Clifford em qualquer espaço tempo". Preprint CBPF-MO-002/99;
- [48] L.P. Colatto, M.A. De Andrade and F. Toppan, "Matrix-Spacetimes and a 2D Calculus in Any Even Dimension", Preprint CBPF-NF-063/98, hep-th/9810145; M.A. De Andrade, Mod. Phys. Lett. A 10 (1995) 161; J.J. Sakurai, "Advanced Quantum Mechanics", Addison Wesley 10th printing (1967) USA; M.A. De Andrade and F. Toppan, "Real Structures in Clifford Algebras and Majorana Conditions in Any Space-Time". Preprint CBPF-NF-013/99, hep-th/9904134; Jeong-Hyuck Park, Lectures on Gamma Matrix and Supersymmetry. Jangan-gu, Suwon 440-746, Korea; Wolfgang Muck; U. Gran, Gamma: A mathematica package for performing gamma-matrix algebra and fierz transformations in arbitrary dimensions, hep-th/0105086;
- [49] Y. X. Liu, J. Yang, Z. H. Zhao, Chun-E Fu and Y. S. Duan, Phys. Rev. D 80, 065019 (2009); Y. X. Liu, H. T. Li, Z. H. Zhao, J. X. Li and J. R. Ren, JHEP 0910, 091 (2009); I. Oda, Phys. Lett. B 496, 113 (2000); C.A.S. Almeida, R. Casana, M.M. Ferreira and A.R. Gomes, Phys. Rev. D 79, 125022 (2009).
- [50] D. Bazeia, F.A. Brito and J.R. Nascimento, Phys.Rev. D 68 (2003) 085007, arXiv:hep-th/0306284; D. Bazeia, C. Furtado and A.R. Gomes, JCAP 0402 (2004) 002, arXiv:hep-th/0308034; D. Bazeia, F.A. Brito and A.R. Gomes, JHEP 0411 (2004) 070, arXiv:hep-th/0411088; D. Bazeia and A.R. Gomes, JHEP 0405 (2004) 012, arXiv:hep-th/0403141; D. Bazeia, F.A. Brito and L. Losano, JHEP 0611 (2006) 064, arXiv:hep-th/0610233; D. Bazeia, A.R. Gomes and L. Losano, Gravity localization on thick branes: a numerical approach, arXiv:0708.3530.
- [51] R. Koley and S. Kar, Class. Quantum Grav. 22 (2005) 753, arXiv:hep-th/0407158.
- [52] E.B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. 24, 449 (1976).
- [53] E. R. Bezerra de Mello, J. High Energy Phys. 06 (2004) 016.