

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FERNANDO MARQUES DE OLIVEIRA MOUCHEREK

INFLUÊNCIA DA VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ
SOBRE A EQUAÇÃO DE DIRAC E O ESPECTRO DE
HIDROGÊNIO.

São Luís

2006

FERNANDO MARQUES DE OLIVEIRA MOUCHEREK

INFLUÊNCIA DA VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ
SOBRE A EQUAÇÃO DE DIRAC E O ESPECTRO DE
HIDROGÊNIO.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em FÍSICA da UFMA, como requisito para a obtenção
do grau de MESTRE em FÍSICA.

Orientador: Manoel Messias Ferreira Júnior

Doutor em Física - UFMA

São Luís

2006

Moucherek, Fernando Marques de Oliveira

INFLUÊNCIA DA VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ
SOBRE A EQUAÇÃO DE DIRAC E O ESPECTRO DE
HIDROGÊNIO. / Fernando Marques de Oliveira Moucherek - 2006
59.p

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Física,
Universidade Federal do Maranhão.

Orientador: Manuel Messias Ferreira Junior

1.Relatividade 2.Violação de Lorentz 3.Equação de Dirac . I.Título.

CDU 530.12

FERNANDO MARQUES DE OLIVEIRA MOUCHEREK

INFLUÊNCIA DA VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ
SOBRE A EQUAÇÃO DE DIRAC E O ESPECTRO DE
HIDROGÊNIO.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em FÍSICA da UFMA, como requisito para a obtenção
do grau de MESTRE em FÍSICA.

Aprovado em 20 de outubro de 2006

BANCA EXAMINADORA

Manoel Messias Ferreira Júnior

Doutor em Física - UFMA

Adalto Rodrigues Gomes

Doutor em Física - CEFET

Carlos Alberto Santos Almeida

Doutor em Física - UFC

Aos meus familiares.

Aos amigos, pelo apoio e companheirismo.

Resumo

Neste trabalho, busca-se investigar a influência de termos violadores de Lorentz e CPT (em acoplamentos "vetoriais" e "axiais") sobre a equação de Dirac, e seu limite não-relativístico. Primeiramente, são obtidas as suas soluções de onda-plana, relação de dispersão e autovalores. Em seguida, o limite de baixas energias é trabalhado e o Hamiltoniano não-relativístico determinado. No caso do acoplamento vetorial, os termos de violação não induzem qualquer modificação sobre o espectro do hidrogênio (na presença ou ausência de campo magnético externo), o que está de acordo com o fato deste *background* determinar apenas um deslocamento no momento do sistema. No caso do acoplamento pseudo-vetorial, entretanto, o Hamiltoniano não-relativístico possui um termo que modifica o espectro, induzindo uma alteração de energia similar ao efeito Zeeman (na ausência de campo magnético externo). Tal efeito é então usado para estabelecer um limite superior sobre a magnitude do *background*: $b_z < 10^{-10} eV$. Na segunda parte deste trabalho, é analisada a influência de um *background* fixo, violador de Lorentz, em acoplamento não-mínimo sobre o setor de férmions, sobre a equação de Dirac. O regime não-relativístico é considerado e o Hamiltoniano estabelecido. O efeito deste Hamiltoniano sobre o espectro do hidrogênio é determinado em cálculos de primeira ordem (na ausência de campo magnético externo), revelando a presença de desvios de energia que modificam a estrutura fina do espectro e possibilitam a imposição de um limite superior sobre o produto de violação: $gv_z < 10^{-14} (eV)^{-1}$. Na presença de campo magnético externo, uma correção de energia é também obtida, implicando no limite: $gv_z < 10^{-25} (eV)^{-1}$. No caso em que o acoplamento não-mínimo é do tipo torção, nenhuma correção de primeira ordem é exibida na ausência de campo externo; na presença de um campo externo, um segundo efeito Zeeman é observado, implicando em $gv_z < 10^{-25} (eV)^{-1}$. Tais resultados mostram que o efeito de violação de Lorentz pode ser mais sensivelmente investigado em meio à presença de um campo externo.

Palavras-chaves: Violação de Lorentz, Limite não-relativístico.

Abstract

In this work, one searches to investigate the influence of violating terms of Lorentz and CPT (in "vectorial" and "axial" couplings) on the equation of Dirac, and its non-relativistic limit. Firstly, its solutions of wave-planes, relation of dispersion and eigenvalues are gotten. After that, the limit of low energies is worked and determined the non-relativistic Hamiltonian. In the case of the vectorial coupling, the breaking terms do not induce any modification on the spectrum of hydrogen (in the presence or absence of external magnetic field), what it is in accordance with the fact of this background only to determine the displacement at the momentum of the system. In the case of the pseudo-vectorial coupling, however, the non-relativistic Hamiltonian possesses a term that modifies the spectrum, inducing an alteration of energy similar to Zeeman effect (in the absence of external magnetic field). Such effect is then used to establish the upper limit on the magnitude of background: $b_z < 10^{-10} eV$. In the second part of this work, is analyzed the influence of a fixed background, violating of Lorentz, in a non-minimum coupling on the sector of fermions, on the equation of Dirac. The non-relativistic regime is considered and the Hamiltonian accomplished. The effect of this Hamiltonian on the spectrum of hydrogen is determined in calculations of first order (in the absence of external magnetic field), revealing the presence of energy shifting that modifies the fine structure of the spectrum and makes possible the imposition of a upper limit on the breaking product: $gv_z < 10^{-14} (eV)^{-1}$. In the presence of external magnetic field, a correction of energy also is gotten, implying in the limit: $gv_z < 10^{-25} (eV)^{-1}$. In the case where the non-minimum coupling is of the type torsion, no first order correction is shown in the absence of external field; in the presence of a external field, a second Zeeman effect is observed, implying in: $gv_z < 10^{-25} (eV)^{-1}$. Such results show that the effect of Lorentz violating can more significantly be investigated in way to the presence of a external field.

Keywords: Lorentz Symmetry, Non-Relativistic limit

Agradecimentos

A todos os meus parentes, pelo encorajamento e apoio.

Ao professor Manoel Messias Ferreira Junior pela orientação, amizade e principalmente, pela paciência, sem a qual este trabalho não se realizaria.

Aos professores do Departamento de Física pelos seus ensinamentos e aos funcionários do curso, que durante esses anos, contribuíram de algum modo para o nosso enriquecimento pessoal e profissional.

*“A minha equação foi mais importante
do que eu”.*

Paul Dirac.

Sumário

1	Introdução	8
2	Influência de termos Lorentz e CPT-ímpares na equação de Dirac	14
2.1	Introdução	14
2.2	Lagrangiana de Dirac com violação de Lorentz (acoplamento vetorial) . . .	17
2.2.1	Soluções de onda-plana, relação de dispersão e auto-energias	17
2.2.2	Análise das simetrias C, P e T	20
2.2.3	Limite Não-Relativístico	22
2.2.4	Cálculo das correções de primeira ordem na ausência de campo externo	24
2.2.5	Cálculo das correções na presença de um campo externo	27
2.3	Lagrangiana de Dirac na presença do <i>background</i> em acoplamento axial vetorial	27
2.3.1	Soluções de onda-plana, relação de dispersão e auto-energias	28
2.3.2	Análise das simetrias C, P e T	30
2.3.3	Limite Não-relativístico	31
2.3.4	Cálculo das correções na ausência de um campo externo	32
2.3.5	Cálculo das correções na presença de um campo magnético externo	34
2.3.6	Conclusão	35
3	Correções sobre o espectro de hidrogênio induzidas por um <i>background</i> violador de Lorentz em acoplamento não-mínimo	37
3.1	Introdução	37
3.2	Acoplamento não-mínimo com o <i>background</i>	39
3.2.1	Cálculo das correções na ausência de um campo magnético externo	41

3.2.2	Cálculo das correções na presença de um campo magnético externo fixo	45
3.3	Acoplamento não-mínimo tipo torção	46
3.3.1	Correções na ausência de um campo externo fixo	47
3.3.2	Correções na presença de um campo externo fixo	47
3.4	Comentários Finais	48
4	Conclusão	50
	Referências Bibliográficas	52

1 Introdução

Em 1905, Einstein publicou dois artigos [1] que lançaram as bases da chamada Teoria da Relatividade Restrita (TRR), teoria que se notabilizou inicialmente pela flexibilização dos conceitos de espaço e tempo absolutos e, principalmente, pela proposição de um novo princípio da relatividade, válido para toda a Física, em substituição ao princípio da relatividade de Galileo (válido apenas para a mecânica newtoniana). No fundo, o que o princípio da relatividade da TRR propõe é que toda a Física seja invariante perante uma transformação de coordenadas representativa de uma mudança de referencial inercial (transformação de Lorentz), o que efetivamente estabelece a indistinguibilidade de todos os referenciais inerciais. Com o passar dos anos, a TRR revelou-se como uma das teorias mais bem-sucedidas já formuladas. Não há registro de experimentos que se contraponham ou coloquem sob dúvida as previsões e os pressupostos da TRR, o que eleva esta teoria ao status de verdade de natureza. Interessante destacar que a formulação da TRR apontou a existência de uma nova simetria da natureza: a covariância ou invariância de Lorentz, que se reflete na invariância das leis físicas perante as transformações de Lorentz.

Atualmente, a TRR, juntamente com a Mecânica Quântica constituem a base das modernas teorias relativísticas de campos quânticos, formuladas a partir dos anos 30 para descrever as interações das partículas elementares. O desenvolvimento das teorias quântico-relativísticas foi iniciado de maneira efetiva por P. Dirac, ao conseguir formular uma versão relativística para a equação de Schrödinger, capaz de descrever o elétron incorporando naturalmente o conceito de spin. Com o passar dos anos, foram desenvolvidas as chamadas teorias de campos, onde todas as interações (exceto a gravitação) são representadas por campos relativísticos quantizados. Tais teorias, que englobam a Eletrodinâmica Quântica (QED), a Cromodinâmica Quântica (QCD), a teoria de Gauge para a interação eletrofraca, constituem o denominado Modelo Padrão das Interações Fundamentais, uma das maiores realizações da Física do século XX. Sabendo que o edifício da física teórica de partículas e campos foi erguido sobre os pressupostos da TRR e da MQ, o sucesso do Modelo Padrão na descrição da natureza pode ser entendido de forma categórica como uma evidência da validade da TRR e da MQ. Consequentemente, de uma forma geral, pode-se tomar toda fenomenologia da física de partículas, que é bem explicada pelas teorias do

Modelo Padrão, como comprovação indireta da validade da simetria de Lorentz.

Tal modelo explica as interações entre todas as partículas elementares, excluindo-se do seu bojo apenas a interação gravitacional, para a qual ainda não foi desenvolvida uma teoria de campo quantizável e renormalizável. Neste sentido, pode-se afirmar que apenas a gravidade não é tratável como uma teoria quântica de campos. Conseguir construir uma versão quantizável para interação gravitacional, inserindo-o no contexto teórico do Modelo Padrão, é uma tarefa de primeira grandeza, que tem se mantido na vanguarda da física teórica há algumas décadas. Atualmente, muitas são as candidatas a teorias para descrever a gravitação quântica, incluído-se neste rol as chamadas teorias de cordas e super-cordas, propostas para descrever a física na escala da energia de Planck ($\simeq 10^{19}$ GeV), onde os efeitos quânticos da gravitação tornam-se muitos significativos. Tais teorias são rotuladas de Física além do Modelo Padrão. A busca pela inserção da gravitação no contexto das teorias quânticas de campos é assunto das teorias de unificação (GUT).

As modernas teorias de campos satisfazem uma outra invariância fundamental, conhecida como simetria CPT. Esta é uma propriedade pela qual os sistemas físicos permanecem invariantes perante a ação conjunta das operações de conjugação de carga C, paridade P, e reversão temporal T. Este é o resultado do chamado teorema CPT, demonstrável para todas as teorias de campos locais. É fato conhecido a observação de violações individuais das simetrias C, P, T, incluindo a violação também de CP. Entretanto, não há registro consensual da violação de CPT na física de partículas.

Uma das propriedades obrigatórias das teorias que compõem o Modelo Padrão, além da renormalizabilidade, da invariância de Gauge e da simetria CPT, é a covariância de Lorentz, que emerge como uma consequência direta do primeiro postulado de Einstein da TRR. Com o passar dos anos, a simetria de Lorentz foi sendo atestada como uma confirmação da validade da TRR. São inúmeras as evidências de que esta é uma simetria da natureza em elevado nível de precisão. Se assim não fosse, as previsões da TRR e do Modelo Padrão - construídos em cima da covariância de Lorentz - simplesmente não seriam verificadas. No entanto, permanece a pergunta se a simetria de Lorentz corresponde a uma simetria exata da natureza, ou seja, se tal simetria é realmente válida de maneira perfeita, ou se é apenas aproximadamente válida. Para investigar até que ponto a simetria de Lorentz representa uma realidade dos sistemas físicos, é que alguns teóricos começaram a propor modelos em que a violação de Lorentz é característica presente, a fim de determinar as consequências de tal quebra em diversos cenários conhecidos. O

trabalho pioneiro nesta direção foi realizado por Carroll-Field-Jackiw [2] no início dos anos 90. No caso, tais autores consideraram a eletrodinâmica de Maxwell na presença de um termo tipo Chern-Simons em (1+3) dimensões, $\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}A^\mu V^\nu F^{\kappa\lambda}$, onde V^ν representa um *background* fixo, responsável pela quebra da simetria de Lorentz. Em seguida, estudaram a eletrodinâmica resultante, na qual observaram que fótons com estados de polarização diferentes se propagam com velocidades diferentes, configurando um efeito de birefringência. Usaram então dados observacionais da luz emitida de galáxias distantes para verificar a existência do efeito previsto, nada observando que o confirmasse. Baseados neste tipo de comparação com dados astronômicos, os autores conseguiram estabelecer um limite superior na magnitude do *background* violador: $|V^\nu| < 10^{-33}\text{eV}$. Este foi o primeiro trabalho que procurou estabelecer até que ponto a simetria de Lorentz é válida no contexto da eletrodinâmica de Maxwell, ou seja, estabelecer limites superiores sobre a magnitude do parâmetro de quebra de Lorentz (V^ν).

No início dos anos 90, surgiram trabalhos na literatura mostrando a possibilidade da quebra espontânea de Lorentz e do teorema CPT no contexto de teorias de cordas, uma consequência das condições para validade do teorema CPT não serem satisfeitas para objetos extensos, tais como as cordas. Como resultado, foi descoberto um mecanismo em teoria de cordas que determina a violação espontânea da simetria CPT acompanhada de quebra parcial da simetria de Lorentz [3].

Motivados pelo trabalho de Carroll-Field-Jackiw e da quebra espontânea da covariância de Lorentz em teorias de cordas, Colladay & Kostelecky [4] decidiram tentar responder a pergunta da precisão da validade da covariância de Lorentz na física de uma maneira mais ampla e minuciosa. Para isto, construíram uma ferramenta teórica que incorpora termos de violação de Lorentz em todos os setores de interação do modelo padrão, chamada de Modelo Padrão Estendido. Tal teoria é concebida como um modelo efetivo a baixas energias, correspondente à fase de simetria espontaneamente quebrada de uma teoria mais fundamental, válida na escala de energia de Planck. Esta teoria fundamental é invariante de Lorentz e CPT, estando apta para descrever a quantização da gravitação e propor a unificação das quatro interações fundamentais. Tal teoria, entretanto, tem formulação desconhecida. O ponto essencial é supor a ocorrência de uma quebra espontânea da simetria (QES) de Lorentz no contexto desta teoria fundamental, que gera como valores esperados no vácuo coeficientes tensoriais de violação de Lorentz, incorporados na teoria efetiva (Modelo Padrão Estendido). Tais coeficientes determinam a quebra explícita da

simetria de Lorentz. Importante destacar que, como a violação de Lorentz ocorre de maneira espontânea, a covariância de Lorentz permanece como uma simetria da teoria fundamental subjacente. Isto implica que várias características físicas desejáveis sejam preservadas na teoria efetiva, tais como: causalidade, estabilidade (positividade), conservação do tensor de energia-momento, a estrutura de Gauge $SU(3) \times SU(2) \times SU(1)$ da teoria usual, além da possibilidade de aplicar os métodos usuais de quantização dos campos.

Outra informação relevante concernente ao MPE é que a simetria de Lorentz é violada apenas no referencial das partículas¹ permanecendo válida do ponto de vista do referencial do observador². Isto também é uma decorrência do fato da violação de Lorentz se dar na teoria fundamental subjacente como uma quebra espontânea. Portanto, podemos dizer que, sob a perspectiva de uma transformação de Lorentz do observador, a covariância de Lorentz permanece como uma simetria válida, uma vez que os coeficientes tensoriais presentes na lagrangeana de fato transformam-se como tensores de Lorentz. Sob a ação de transformações de Lorentz de partícula, entretanto, tais coeficientes tensoriais transformam-se como um conjunto de escalares independentes, gerando termos na lagrangeana que não se comportam como bilineares, o que implica na violação de Lorentz. A observação de efeitos de violação da simetria de Lorentz no âmbito da física cotidiana pode ser encarada como uma possível assinatura das teorias válidas na escala de Planck a baixas energias. A constatação deste efeito, além de estabelecer a covariância de Lorentz como uma simetria aproximada, seria relevante para definição de eventuais propriedades da chamada teoria fundamental. Atualmente, busca-se investigar a quebra da simetria de Lorentz a nível de observação de evidências da física válidas na escala de energia de Planck. Possíveis evidências de violações na simetria de Lorentz podem ser entendidas como sinais para uma nova física, que certamente seria de interesse para resolver problemas teóricos importantes, pertencentes ao contexto da Física da grande unificação. Portanto, podemos

¹Uma transformação de Lorentz no referencial das partículas equivale a uma transformação que ocorre ao nível das coordenadas das partículas ou dos campos associados às mesmas. Tais transformações não atuam no *background* atrelado aos coeficientes tensoriais advindos da QES. Tais quantidades não se transformam como 4-vetores e tensores.

²Uma transformação de Lorentz do observador corresponde a uma transformação de Lorentz tradicional: boost ou rotação, onde a transformação se dá sobre as coordenadas do referencial (observador). Importante entender que uma mudança de observador implica em transformações tensoriais sobre o 4-vetor de fundo. Isto implica que cada um dos termos violadores de Lorentz da lagrangeana se transformem como um bilinear, o que é compatível com a covariância de Lorentz.

afirmar que estas são as duas principais motivações para realização de desenvolvimentos teóricos no âmbito do Modelo Padrão Estendido de Colladay & Kostelecky.

O presente trabalho de dissertação de mestrado está inicialmente situado no contexto teórico do setor de férmions do MPE, seguindo a filosofia geral de tentar determinar até que extensão a covariância de Lorentz funciona como uma boa simetria da natureza. Em sua primeira parte, o ponto de partida é a lagrangeana do setor fermiônico do MPE, onde todos os coeficientes tensoriais são devidamente considerados em acoplamento com o campo espinorial, como mostrado na eq.(2.1).

Em seguida, são analisados apenas os termos CPT-ímpares: $v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$, $b_\mu \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi$. Como um primeiro caso, é estudado o efeito do *background*, em acoplamento vetorial, $v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$, sobre a equação de Dirac. São determinadas soluções de onda plana, relação de dispersão e auto-energias correspondentes. Uma análise das operações discretas C, P, T na presença deste termo é também realizada. O limite não-relativístico é estudado, implicando na determinação da equação de Pauli modificada e do Hamiltoniano não-relativístico. Por fim, as implicações deste Hamiltoniano sobre o espectro do átomo de hidrogênio são calculadas, demonstrando que o acoplamento vetorial não implica em nenhuma correção de energia para o espectro de hidrogênio (na ausência ou presença de um campo magnético externo). Em seguida, é analisado o efeito do *background*, em acoplamento vetorial-axial, $b_\mu \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi$, sobre a equação de Dirac. As soluções espinoriais, relação de dispersão, e auto-energias, apesar de mais complicadas, são também determinadas. O limite não-relativístico é implementado, sendo a equação de Pauli modificada e o Hamiltoniano não-relativístico calculados. Neste caso, é observado que tal Hamiltoniano induz modificações sobre o espectro do hidrogênio de uma maneira similar ao efeito Zeeman. Ainda é mostrado que, na presença de um campo magnético externo, não são gerados novos efeitos de quebra de Lorentz. As modificações espectrais obtidas são então utilizadas para estabelecer um limite superior na magnitude do *background* violador de Lorentz.

O Cap. III é dedicado ao estudo da influência de um *background* violador de Lorentz, considerando um acoplamento não-mínimo com o campo de Gauge e o campo espinorial, sobre o limite não-relativístico da equação de Pauli, focalizando principalmente nas suas implicações sobre o espectro do hidrogênio [18]. Neste sentido, o termo de acoplamento não-mínimo é introduzido no setor fermiônico através da inserção de um termo adicional na expressão da derivada covariante. A equação de Dirac modificada

é determinada, juntamente com seu limite não-relativístico, conduzindo a uma intrincada expressão para o Hamiltoniano não-relativístico. Em seguida, são calculadas as implicações deste Hamiltoniano sobre o espectro do hidrogênio na ausência e na presença de um campo magnético externo. São obtidas três correções (na ausência de campo externo), com as quais é estipulado o seguinte limite máximo sobre o produto dos parâmetros de violação de Lorentz: $(gv_z) \leq 10^{-14}(eV)^{-1}$. Na presença de campo magnético externo, é obtida uma correção não-nula sobre o espectro, que permite estabelecer o seguinte limite superior sobre os parâmetros: $(gv_z) \leq 10^{-25}(eV)^{-1}$. Neste caso, observa-se que uma comparação espectral cuidadosa pode impor limites superiores rigorosos sobre a magnitude dos parâmetros de quebra de Lorentz, principalmente se tal comparação for realizada na presença de um campo magnético externo.

No Cap. IV, são apresentadas as observações finais e conclusões da dissertação.

2 Influência de termos Lorentz e CPT-ímpares na equação de Dirac

2.1 Introdução

O estudo da violação de Lorentz passou a ser sistematizado com a formulação do Modelo Padrão Estendido (MPE), onde os termos de quebra da simetria de Lorentz advêm de uma quebra espontânea que ocorre no contexto de uma teoria primordial, válida em altas energias. Consequentemente, os parâmetros representativos da violação de Lorentz são obtidos como valores esperados no vácuo de operadores tensoriais pertencentes à teoria fundamental. O MPE incorpora todos os termos de contração tensorial (dos coeficientes como os campos) que resultam em escalares genuínos no referencial do observador. É no âmbito do setor fermiônico do MPE que o presente capítulo é desenvolvido.

Neste momento, é oportuno destacar a existência de outros mecanismos que também têm como efeito (direto ou indireto) a quebra de Lorentz. As teorias de campo não-comutativas [5] geram termos violadores de Lorentz de estrutura semelhante e que acarretam efeitos similares aos termos do MPE. Um outro mecanismo interessante é o da variação das constantes de acoplamento [6], que também conduz à incorporação de termos violadores de Lorentz na ação do sistema. De fato, a variação de constantes leva à quebra da translação temporal e espacial, o que pode ser visto como um caso particular da quebra de Lorentz. Em um contexto cosmológico, este assunto pode ser usado para investigar teorias candidatas a descrever uma física mais fundamental contendo um campo escalar com valor esperado no vácuo variável no espaço-tempo, (uma vez que os efeitos da quebra de Lorentz podem ser tomados como uma assinatura da teoria fundamental). A violação de Lorentz aparece ainda em outros contextos teóricos, envolvendo as teorias de gravitação quântica [7].

O setor de Gauge do MPE já foi exaustivamente estudado em vários trabalhos em (1+3) e (1+2) dimensões [19]-[38] com diversos resultados interessantes. No que concerne ao setor fermiônico do MPE, Colladay & Kostelecky [4] conceberam termos

violadores de Lorentz compatíveis com a simetria de Gauge U(1) e a renormalizibilidade do modelo. Estes termos são explicitamente escritos abaixo:

$$\mathcal{L} = -v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - b_\mu \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi - \frac{1}{2} H_{\mu\nu} \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi + \frac{i}{2} c_{\mu\nu} \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \overleftrightarrow{D}^\nu \psi + \frac{i}{2} d_\mu \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}^\nu \psi \quad (2.1)$$

onde os coeficientes que quebram Lorentz ($v_\mu, b_\mu, H_{\mu\nu}, c_{\mu\nu}, d_{\mu\nu}$) surgem como valores esperados do vácuo de quantidades tensoriais definidas na teoria fundamental. Todos os termos de contração tensorial presentes na lagrangeana (2.1) comportam-se como bilineares de Lorentz no referencial do observador. Os primeiros dois termos são CPT-ímpares e os outros são CPT-pares. Primeiramente, o setor fermiônico do MPE foi investigado em uma maneira geral (discutindo aspectos como relação de dispersão, soluções de ondas planas, e auto-valores de energia)[8]. Mais tarde, tal setor foi estudado em conexão com experimentos para avaliar a extensão da violação da simetria CPT, que envolvem estudos comparativos de frequências de cíclotron de átomos aprisionados [15], testes de comparação de relógios atômicos [16], comparação espectroscópica do hidrogênio e anti-hidrogênio [13], análise do momento magnético anômalo do múon [12], estudo de amostras de sólidos macroscópicos com spin polarizados [14], etc... Todos estes estudos foram destinados a estabelecer um limite superior (máximo) sobre a magnitude dos parâmetros de quebra de Lorentz da lagrangeana (2.1).

O interesse do presente capítulo reside nos dois termos CPT-ímpares, nos quais o *background* (v_μ ou b_μ) está acoplado ao campo fermiônico por meio de termos de acoplamento "vetorial" ($v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$) e "vetorial axial" ($b_\mu \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi$), respectivamente. O objetivo principal consiste em examinar o efeito do *background* violador de Lorentz na equação de Dirac e suas soluções, concentrando-se em seu regime não-relativístico e em possíveis implicações sobre o espectro de hidrogênio, cujos resultados constam na ref.[17]. Alguns resultados prévios referentes a esse estudo já foram discutidos na literatura. De fato, o Hamiltoniano não-relativístico associado com a lagrangeana 2.1 já foi calculado por meio da expansão Foldy-Wouthuysen nas refs.[8]. Além disso, os correspondentes desvios dos níveis atômicos foram obtidos por meio de cálculos perturbativos e realizados em uma perspectiva mais ampla nas refs.[9], [13].

No presente capítulo, a análise da influência dos termos CPT-ímpares sobre o espectro do hidrogênio é realizado de forma diferente (mais específica, direta e mais simples), incluindo-se também a presença de um campo magnético externo constante. O ponto de partida é a lagrangeana de Dirac suplementada pelos termos violadores de

Lorentz e CPT. As relações de dispersão, soluções de onda-plana e auto-energias são calculadas para cada um dos acoplamentos considerados. Na sequência, a investigação do limite não-relativístico é realizada. Este é um ponto de grande interesse devido a sua eventual conexão com sistemas reais da Física da Matéria Condensada, onde a presença de um *background* pode ser naturalmente testada. Neste sentido, o efeito do *background* sobre o espectro do átomo de hidrogênio é avaliado, inicialmente para o caso do acoplamento vetorial, depois para o acoplamento pseudo-vetorial. Foi observado que o termo $(v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi)$ não implica em correção para o espectro de hidrogênio (na ausência ou presença de um campo magnético externo constante). No caso do acoplamento axial, as soluções espinoriais e o limite não-relativístico revelam-se mais complicados. A equação de Pauli é modificada por termos que efetivamente alteram o espectro do hidrogênio em uma maneira similar ao efeito Zeeman convencional. Na presença de um campo magnético externo, entretanto, não são gerados novos efeitos advindos da quebra de Lorentz. As modificações induzidas podem ser combinadas com comparações espectrais para impor um limite na magnitude máxima do coeficiente violador de Lorentz. Supondo que os experimentos espectroscópicos atuais conseguem detectar alterações no espectro tão diminutas quanto 10^{-10} eV, é possível estabelecer que: $b_z < 10^{-10}$ eV.

Este capítulo pode ser resumido da seguinte forma: na Sec. II, é considerada a presença do termo $(v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi)$ na lagrangeana de Dirac. A equação de Dirac modificada, relações de dispersão, soluções de onda plana, e autovalores de energia são calculados. O limite não-relativístico é analisado e o correspondente Hamiltoniano é trabalhado. Em cálculos de primeira ordem, é mostrado que os termos violadores de Lorentz não modificam o espectro do hidrogênio. Na Sec.III, a presença do termo axial $(b_\mu \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi)$, no setor de Dirac é considerada. Novamente, equação de Dirac modificada, relação de dispersão, soluções em onda plana e autovalores são calculados. Finalmente, o limite de baixas energias é estudado e Hamiltoniano determinado. Usando perturbação de primeira ordem, observa-se que os termos violadores de Lorentz contribuem para o espectro de hidrogênio, causando uma separação Zeeman das linhas espectrais. Na Sec.IV, apresentamos a conclusão e considerações finais.

2.2 Lagrangeana de Dirac com violação de Lorentz (acoplamento vetorial)

O presente trabalho tem como objetivo principal estudar os efeitos do *background* violador da simetria de Lorentz na equação de Dirac e suas soluções, com atenção centrada sobre o regime não-relativístico e possíveis implicações. O ponto de partida é a lagrangeana de Dirac na presença de termos violadores da simetria de Lorentz e CPT, advindos do Modelo Padrão Estendido (MPE). A forma mais simples de acoplar um *background* fixo [$v^\mu = (v_0, \vec{v})$] a um campo espinorial, consiste em definir um acoplamento vetorial, que é dado da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_{Dirac} - v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (2.2)$$

onde o termo \mathcal{L}_{Dirac} representa a lagrangeana usual de Dirac ($\mathcal{L}_{Dirac} = (1/2)i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_e\bar{\psi}\psi$) e v_μ é o parâmetro violador de Lorentz e da simetria CPT, advindo do MPE que faz o papel do *background* fixo. É importante destacar que a quebra só ocorre no referencial das partículas. De fato, o termo $v_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ comporta-se como um escalar apenas no referencial do observador, onde v_μ é um 4-vetor genuíno.

2.2.1 Soluções de onda-plana, relação de dispersão e auto-energias

A equação de Euler-Lagrange, aplicada a eq. (2.2), fornece a equação de Dirac modificada

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - v_\mu\gamma^\mu - m)\psi = 0, \quad (2.3)$$

que é a equação usual de Dirac suplementada pelo termo de violação de Lorentz associado ao *background*. Inicialmente, investigaremos as soluções de onda plana, que podem ser obtidas ao escrevermos o espinor em função da decomposição de onda plana:

$$\psi = N e^{-ix \cdot p} w(p_\mu), \quad (2.4)$$

onde N é a constante de normalização, $w(p_\mu)$ é um espinor (4×1) escrito no espaço do momento. Em termos desse espinor (dado acima), a eq.(2.3) é reescrita como segue:

$$(\gamma^\mu p_\mu - v_\mu \gamma^\mu - m)w(p) = 0, \quad (2.5)$$

Fazendo uso da notação de Feynman, $\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu$, a eq. (2.5) assume a forma:

$$(\not{p} - m - \not{v})w(p) = 0, \quad (2.6)$$

que ao ser multiplicada por $(\not{p} + m - \not{v})$, resulta:

$$(\vec{p} \cdot \vec{p} - 2\vec{p} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{v} - m_e^2) = 0, \quad (2.7)$$

Esta é a relação de dispersão, cujas soluções para a energia são:

$$E_{\pm} = v_0 \pm \sqrt{(m_e^2 + (\vec{p} - \vec{v})^2)}, \quad (2.8)$$

Fazendo uma análise das soluções, fica notório que $E_+ \neq E_-$, fato que evidencia a quebra da conjugação de carga. Assunto que trataremos em detalhes mais adiante. Agora, retomando as soluções de onda plana, reescrevemos os espinores $w(p)$ na forma de dois espinores de duas componentes, $w(p) = \begin{pmatrix} w_A \\ w_B \end{pmatrix}$, de modo que a eq.(2.5) implica em:

$$w_A = \frac{1}{E - m - v_0} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \vec{v}) w_B, \quad (2.9)$$

$$w_B = \frac{1}{E + m - v_0} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \vec{v}) w_A, \quad (2.10)$$

A construção das soluções espinoriais destas equações em uma forma explícita segue o procedimento usual: primeiramente, propõe-se uma solução para w_A do tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, que ao ser substituído na eq.(2.10) conduz à solução correspondente para w_B . Na sequência, eles são agrupados em um único espinor (4×1) e normalizados. Em seguida, o mesmo procedimento é repetido tomando a solução inicial para w_B em vez de w_A . Obtemos, assim, quatro soluções espinoriais independentes:

$$u_1(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{(p_z - v_z)}{E + m_e - v_0} \\ \frac{(p_x - v_x) + i(p_y - v_y)}{E + m_e - v_0} \end{pmatrix} \quad u_2(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{(p_x - v_x) + i(p_y - v_y)}{E + m_e - v_0} \\ \frac{-(p_z - v_z)}{E + m_e - v_0} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

$$v_1(p) = \begin{pmatrix} \frac{(p_z - v_z)}{E + m_e - v_0} \\ \frac{(p_x - v_x) + i(p_y - v_y)}{E + m_e - v_0} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2(p) = \begin{pmatrix} \frac{(p_x - v_x) + i(p_y - v_y)}{E + m_e - v_0} \\ \frac{-(p_z - v_z)}{E + m_e - v_0} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

onde N é a constante de normalização. Os resultados (2.11) e (2.12) representam soluções de partículas e anti-partículas. Porém, vale ressaltar que, para o caso das anti-partículas,

as soluções já foram reinterpretadas de acordo com o procedimento usual, em que $E \rightarrow -E$, $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, o que produz uma solução de energia positiva.

Nas soluções (2.11), (2.12), um dos efeitos do *background* é manifesto: deslocar a energia e o momento por uma constante: $E \rightarrow E - v_0$, $\vec{p} \rightarrow (\vec{p} - \vec{v})$. Também é instrutivo exibir os autovalores de energia associados com as quatro soluções acima. Neste caso, podemos escrever duas equações de autovalores: $Hu_i = E_i^{(u)}u_i$, $Hv_i = E_i^{(v)}v_i$ e $E_i^{(u)} = v_0 + [m_e^2 + (\vec{p} - \vec{v})^2]^{1/2}$, $E_i^{(v)} = [m_e^2 + (\vec{p} + \vec{v})^2]^{1/2} - v_0$, com $i=1,2$. No caso, $E_i^{(u)}$ representa a energia das partículas, enquanto que $E_i^{(v)}$ representa a energia das anti-partículas. No procedimento da reinterpretação, obviamente, foi assumido que a magnitude do *background* é muito pequena perto da massa do elétron ($v_0 \ll m_e$), considerado assim como um efeito de correção. Esta é uma suposição razoável, uma vez que muitos experimentos demonstram a validade da covariância de Lorentz com alta precisão. Deve ainda ser salientado que esses resultados estão de acordo com os obtidos nas ref. [4], [8]. A obtenção de energias diferentes para partículas e anti-partículas ($E_i^{(v)} \neq E_i^{(u)}$) é uma evidência de que a simetria de conjugação de carga (C) foi quebrada. Realmente, o termo $v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ é C -ímpar e PT -par, isto é, implica na quebra da conjugação de carga, e conservação da operação PT combinada, como veremos em detalhes na próxima seção.

Podemos agora questionar a respeito da interpretação do spin das soluções. Obviamente, tais soluções não apresentam a mesma projeção de spin da equação de Dirac livre. Mas em casos particulares, é possível mostrar que tais soluções exibem a mesma projeção de spin. Por exemplo, quando o *background* e o momento estão alinhados ao longo do eixo- z , os espinores assumem a forma:

$$u_1(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{(p_z - v_z)}{E + m_e - v_0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-(p_z - v_z)}{E + m_e - v_0} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$$v_1(p) = \begin{pmatrix} \frac{(p_z - v_z)}{E + m_e - v_0} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-(p_z - v_z)}{E + m_e - v_0} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Tais soluções são autoestados do operador helicidade, $\vec{S} \cdot \vec{p} = S_z = (1/2)\Sigma_z$, com:

$\Sigma_z = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$. Assim, podemos dizer que os espinores u_1 e v_1 têm autovalor de helicidade $+1$ (spin up), enquanto que os espinores u_2 e v_2 apresentam autovalores -1 (spin down). Portanto, a presença do *background* fixo não necessariamente conduz à mudança da polarização de spin dos novos estados. Um estudo detalhado dessas projeções de spin somente pode ser obtido por meio da construção dos operadores projetores de spin. Este ponto foi abordado por Lehnert na ref.[8].

2.2.2 Análise das simetrias C, P e T

Diferentemente de que é observado no caso das transformações contínuas, que são construídas por meio de transformações infinitesimais, as simetrias discretas são definidas em termos de transformações que não podem ser reproduzidas por uma sucessão de operações infinitesimais. Existem três tipos de transformações discretas, que representam as operações de Paridade (\hat{P}), Reversão Temporal (\hat{T}) e Conjugação de Carga (\hat{C}). Cada uma destas operações representa uma simetria do sistema quando o mesmo permanece inalterado perante a sua ação. Sabe-se que para modelos teóricos não-interagentes (livres) as operações \hat{C} , \hat{P} e \hat{T} mantêm o sistema invariante e, por isso, constituem (cada uma delas) uma simetria do sistema. No momento, o nosso interesse está em analisar o comportamento da teoria de Dirac, suplementada pelo termo $v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$, perante as operações conjugação de carga, paridade e reversão temporal. É fato conhecido que a teoria de Dirac livre goza das simetrias \hat{P} , \hat{T} e \hat{C} . Cabe então investigar quais destas simetrias permanecem na presença do termo $v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$. Dentro do contexto da teoria de Dirac, está definido o operador conjugação de carga (\hat{C}), que atua sobre o espinor de partícula, transformando-o no espinor de anti-partícula, ou seja: $\psi \rightarrow C\psi^*$, sendo \hat{C} dado abaixo:

$$C = i\gamma^0\gamma^2, \quad (2.15)$$

antes de aplicar o operador \hat{C} sobre a equação de Dirac, é importante questionar sobre a forma da eq.(2.3) que seria válida para o espinor de anti-partícula. Primeiramente, é necessário escrever a eq.(2.3) na presença de um campo eletromagnético externo, ou seja:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - v_\mu \gamma^\mu - m)\psi = 0. \quad (2.16)$$

Considerando que a anti-partícula tem carga oposta, a equação da anti-partícula deve diferir da anterior apenas pelo sinal da carga, ou seja, $(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu + v_\mu \gamma^\mu - m)\psi^c =$

0, sendo ψ^c o espinor carga-transformado. Vamos agora aplicar o operador \widehat{C} sobre eq.(2.16). Para tanto, devemos primeiro escrever o complexo conjugado desta equação, aplicando depois sobre ela o operador $U = C\gamma^0 = i\gamma^2$. Considerando que $\psi_c = U\psi$ e $U\gamma^{\mu*}U\gamma^1 = -\gamma^\mu$, obtemos a versão carga-conjugada da eq.(2.16) na forma:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu + v_\mu\gamma^\mu - m)\psi^c = 0. \quad (2.17)$$

Comparando-se as eq.(2.16), (2.17), verifica-se que o sinal do termo $v_\mu\gamma^\mu$ sofre uma inversão em relação ao caso inicial, deixando claro a quebra da simetria da conjugação de carga, uma vez que a troca do sinal implica numa equação diferente, que reflete a não invariância do sistema perante a operação de conjugação de carga (\widehat{C}). Procedimento similar pode ser implementado tanto para a operação de paridade (\widehat{P}) quanto para a reversão temporal (\widehat{T}).

Consideraremos agora o caso da operação da reversão temporal, (\widehat{T}) que consiste em fazer $t \rightarrow -t$, mantendo $\vec{r} \rightarrow \vec{r}$. A operação \widehat{T} pertence ao conjunto das transformações impróprias do grupo de Lorentz. Fisicamente, diz-se que \widehat{T} constitui uma operação de simetria quando a dinâmica do sistema permanece inalterada e o sistema temporalmente revertido apresenta-se como uma opção tão viável quanto o sistema original. Novamente, para efeito de maior clareza, é instrutivo discutir a ação do operador \widehat{T} sobre a equação de Dirac na presença do campo externo A_μ . A equação de Dirac minimamente acoplada ao campo A_μ , $(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x, t) = 0$, com $D_\mu = (\partial_\mu + ieA_\mu)$, pode ser escrita em termos do hamiltoniano de Dirac, H:

$$i\partial_t\psi = H\psi, \quad (2.18)$$

com $H = [\vec{\alpha} \cdot (-i\vec{\nabla} - e\vec{A}) + eA_0 + \beta m]$. A ação do operador \widehat{T} sobre o espinor ψ conduz a $\psi^T(x, t') = T\psi(x, t)$ sendo $t' = -t$. O operador \widehat{T} é construído numa forma explícita exigindo-se a invariância da eq.(2.18) perante a ação do operador \widehat{T} , ou seja, a equação de Dirac temporalmente revertida deve ser igual à equação de Dirac original, isto é: $i\partial_{t'}\psi(x, t') = H\psi(x, t')$. Uma vez que tal exigência é feita, obtemos $T = i\gamma^1\gamma^3K$, sendo K o operador da conjugação complexa: $\psi^T(x, t') = T\psi(x, t) = i\gamma^1\gamma^3\psi^*(x, t)$. Podemos realizar a mesma análise, chegando no mesmo resultado, partindo da equação de Dirac modificada. Aplicando o operador \widehat{T} sobre a eq.(2.16) pela esquerda e considerando as seguintes relações:

$$T\gamma^{\mu*}T^1 = (\gamma^0, -\gamma^i), \quad (2.19)$$

$$TA^\mu T^{-1} = (A_0, -A_i), \quad (2.20)$$

obtemos:

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m - (v_0\gamma^0 - v_i\gamma^i)]\psi^T(x, t') = 0, \quad (2.21)$$

onde $\psi^T(x, t') = T\psi(x, t)$ é o espinor temporalmente-revertido. Dado que essa última equação é diferente da equação original, temos uma quebra da simetria \hat{T} . Seguindo procedimento similar ao adotado no caso da operação conjugação de carga, aplicamos o operador paridade $P = i\gamma^0$ pela esquerda na eq.(2.16); fazendo uso das relações:

$$P\gamma^0 P^{-1} = \gamma^0, \quad (2.22)$$

$$P\gamma^i P^{-1} = -\gamma^i, \quad (2.23)$$

obtemos:

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m - (v_0\gamma^0 - v_i\gamma^i)]\psi^P(x', t) = 0, \quad (2.24)$$

onde $\psi^P(x', t) = P\psi(x, t)$ é o espinor paridade-transformado. Observamos que essa última equação também é diferente da equação original, constituindo uma quebra da simetria de paridade. Devemos ainda analisar o comportamento da eq.(2.16) sob ação das transformações \hat{P} e \hat{T} conjuntamente. Neste caso, basta aplicar o operador \hat{P} sobre a eq. (2.21) (pela esquerda), considerando as relações (2.22) e (2.23), o que nos leva diretamente a $[i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m - v_\mu\gamma^\mu]\psi^{PT}(x', t') = 0$, sendo $\psi^{PT}(x', t') = PT\psi(x, t)$. Tal equação exhibe a mesma forma da equação modificada original, o que implica na conservação da operação $\hat{P}\hat{T}$ conjunta.

Em resumo, vemos que a eq.(2.16) é simétrica (invariante) perante a operação $\hat{P}\hat{T}$ conjunta e não-invariante perante as operações \hat{C} , \hat{P} e \hat{T} aplicadas individualmente; dizemos então que esta equação é C-ímpar, P-ímpar, T-ímpar, e PT-par. Conseqüentemente, a operação CPT conjunta deixa de representar uma simetria do sistema, configurando quebra do teorema CPT.

2.2.3 Limite Não-Relativístico

Toda boa teoria relativística deve apresentar um regime de baixas velocidades bem definido, no qual os seus resultados devem reproduzir as previsões de teorias tipicamente não-relativísticas. Tal exigência estabelece a correspondência entre uma teoria intrinsecamente relativística, como a equação de Dirac, e uma não-relativística, como a

teoria quântica de Schrödinger. Desta forma, é de se esperar que o limite não-relativístico da equação de Dirac, na presença de campo externo, conduza à equação de Pauli, que consiste na equação de Schrödinger suplementada pelo termo de interação spin-órbita. Então, trabalhar o limite não-relativístico permite investigar características quânticas de um sistema sem perder de vista efeitos relativísticos (como o spin) da teoria original. No caso atual, onde a teoria de Dirac está sendo corrigida por um termo de acoplamento que viola a simetria de Lorentz, espera-se que o regime não-relativístico seja descrito pela equação de Pauli na presença de termos de violação de Lorentz.

Para corretamente analisar o limite não-relativístico desse modelo a Lagrangeana (2.2) é considerada na presença de um campo eletromagnético externo (A_μ), sendo reescrita na seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m_e\bar{\psi}\psi - v_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (2.25)$$

onde $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. O campo externo é implementado nas equações anteriores por meio da substituição direta: $p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu$, que ao ser implementado nas eqs. (2.9) e (2.10), conduz a:

$$w_A = \frac{1}{E - eA^0 - m_e - v^0}\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A} - \vec{v})w_B, \quad (2.26)$$

$$w_B = \frac{1}{E - eA^0 - m_e + v^0}\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A} - \vec{v})w_A. \quad (2.27)$$

No limite de baixas velocidades, obviamente temos $(p)^2 \ll m_e^2$, $eA_0 \ll m_e$, condições que impõem o quão pequeno a energia cinética e potencial devem ser comparativamente com a energia relativística de repouso (m_e). Com isso, a energia do sistema é escrita como $E = m_e + H$, onde H representa o Hamiltoniano não-relativístico. Das eqs.(2.26) e (2.27), os espinores w_A , w_B são rotulados como componentes *large* e *small*, uma vez que a magnitude de w_A é muito maior que w_B . Ao substituirmos a eq. (2.27) na eq. (2.26) e implementarmos a condição de baixas energias, obtemos a equação para a componente forte (w_A),

$$(H - eA^0 - v^0)w_A = \frac{1}{2m_e + v^0}\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A} - \vec{v})\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A} - \vec{v}), \quad (2.28)$$

que descreve a física no limite não-relativístico. Usando a identidade, $(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$, eq. (2.28) é reduzida à forma,

$$Hw_A = \left\{ \frac{(\vec{p} - e\vec{A} - \vec{v})^2}{(2m_e)} + \frac{1}{(2m_e)} \vec{\sigma} \cdot [\nabla \times (\vec{A} - \vec{v})] + (eA^0 + v^0) \right\} w_A, \quad (2.29)$$

onde H é o Hamiltoniano não-relativístico. Especificamente, pode-se ver que tal background não gera qualquer modificação sobre a interação spin-órbita, uma vez que $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$. Agora, comparando a Eq. (2.29) com a equação de Pauli, o Hamiltoniano assume a forma mais familiar:

$$H = \left\{ \left[\frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m_e} - \frac{e\hbar}{2m_e} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + eA^0 \right] + \left[-\frac{2(\vec{p} - e\vec{A}) \cdot \vec{v}}{2m_e} + v^0 + \frac{\vec{v}^2}{2m_e} \right] \right\}. \quad (2.30)$$

O primeiro termo entre parênteses contém o Hamiltoniano de Pauli, e o segundo é a correção do Hamiltoniano que surge do background violador da simetria de Lorentz. Este termo específico, objeto de nossa atenção, é reescrito abaixo:

$$H_{LV} = \frac{2i\vec{v} \cdot \vec{\nabla}}{2m_e} + \frac{2e\vec{A} \cdot \vec{v}}{2m_e} + v^0 + \frac{(\vec{v})^2}{2m_e}. \quad (2.31)$$

Da eq. (2.31), observamos que os últimos dois termos mudam o Hamiltoniano não-relativístico somente por uma constante, o que não representa qualquer mudança física (apenas desloca os níveis como um todo, não modificando as transições de energias). Vemos então que apenas o primeiro e o segundo são aptos a eventualmente induzir modificações físicas no espectro.

2.2.4 Cálculo das correções de primeira ordem na ausência de campo externo

A proposta agora é investigar a contribuição dos dois primeiros termos do Hamiltoniano H_{LV} sobre os níveis de energia do hidrogênio. De início, deve ser levado em conta somente o primeiro termo, uma vez que o átomo de hidrogênio é inicialmente considerado como um sistema livre da ação de campos externos ($\vec{A} = 0$). Espera-se que tal contribuição seja nula, tendo em vista que representa uma média do momento linear sobre um estado atômico ligado. Explicitamente, esta quantidade de energia é corretamente trabalhada como uma perturbação de primeira ordem sobre a função de

onda de 1-partícula, ou seja:

$$\Delta E = \frac{i}{m_e} \langle nlm | \vec{v} \cdot \vec{\nabla} | nlm \rangle, \quad (2.32)$$

onde n,l,m são os números quânticos que indexam as funções de onda de 1-partícula do átomo de hidrogênio,

$$\Psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) \Theta_{lm}(\theta) \Phi_m(\phi). \quad (2.33)$$

Onde $R_{nl}(r)$ representa os polinômios de Laguerre associados, e $\Theta_{lm}(\theta)$ representa os polinômios de Legendre associados. Ao substituirmos tal forma em ΔE , escrito em termos de uma média sobre as funções Ψ_{nlm} , com o operador gradiente escrito em coordenadas esféricas, obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta E = & \int \left\{ R_{nl}(r)^* \frac{\partial R_{nl}(r)}{\partial r} |\Theta_{lm}(\theta)|^2 |\Phi_m(\phi)|^2 \vec{v} \cdot \hat{r} + \frac{|R_{nl}(r)|^2 |\Phi_m(\phi)|^2}{r} \Theta_{lm}(\theta)^* \frac{\partial \Theta_{lm}(\theta)}{\partial \theta} \vec{v} \cdot \hat{\theta} + \right. \\ & \left. + im \frac{|R_{nl}(r)|^2 |\Theta_{lm}(\theta)|^2 |\Phi_m(\phi)|^2}{r \sin \theta} \vec{v} \cdot \hat{\phi} \right\} d^3r. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Para efeito de cálculos explícitos, tomamos o vetor \vec{v} alinhado ao longo do eixo-z, de modo que: $\vec{v} \cdot \hat{r} = v_z \cos \theta$, $\vec{v} \cdot \hat{\theta} = -v_z \sin \theta$, $\vec{v} \cdot \hat{\phi} = 0$. Então, notamos que os dois termos resultantes exibem a presença de fatores angulares adicionais ($\cos \theta$, $\sin \theta$). O primeiro termo é escrito explicitamente na forma:

$$\Delta E_1 = \frac{iv_z}{m_e} \int \left[R_{nl}(r)^* \frac{\partial R_{nl}}{\partial r} |\Theta_{lm}(\theta)|^2 \cos \theta \right] r^2 \sin \theta d\theta. \quad (2.35)$$

A relação de normalização da função associada de Legendre é dada por:

$$\int_0^\pi \Theta_{lm}^*(\theta) \Theta_{lm}(\theta) \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 \Theta_{lm}^*(z) \Theta_{lm}(z) dz = 1, \quad (2.36)$$

onde foi realizada a seguinte substituição $z = \cos \theta$. Voltando à eq.(2.35), podemos escrever a sua integral azimutal na forma:

$$\int 0^\pi \Theta_{lm}^*(\theta) \Theta_{lm}(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 \Theta_{lm}^*(z) \Theta_{lm}(z) z dz, \quad (2.37)$$

que conduz a um resultado nulo, uma vez que estamos integrando uma função ímpar em um intervalo simétrico. Portanto, $\Delta E_1 = 0$. Em seguida, temos o segundo termo,

$$\Delta E2 = -\frac{iv_z}{m_e} \int_0^\infty \left[|R_{nl}(r)|^2 r dr \right] \int_0^\pi \left[\Theta_{lm}(\theta)^* \frac{\partial \Theta_{lm}(\theta)}{\partial \theta} \right] \sin\theta \sin\theta d\theta. \quad (2.38)$$

Fazendo uso da relação de recorrência:

$$(1 - z^2)^{(1/2)} \frac{d}{dz} \Theta_{lm}(z) = \frac{1}{2} \Theta_{l,m+1}(z) - \frac{1}{2} (l+m)(l-m+1) \Theta_{l,m-1}(z), \quad (2.39)$$

e da relação de ortogonalidade $\int_{-1}^1 \Theta_{lm}(z) \Theta_{pm}(z) dz = 0$, é possível mostrar que $\Delta E2 = 0$.

Conseqüentemente, a correção total de energia é nula, isto é: $\Delta E = \Delta E1 + \Delta E2 = 0$. Isto significa que a presença do *background* não implica em qualquer alteração sobre o espectro de hidrogênio. É instrutivo afirmar que essa correção nula está em plena concordância com o papel desempenhado pelo termo $v_\mu \bar{\psi} \delta^\mu \psi$: determina somente uma mudança no 4-momento, $p^\mu \rightarrow p^\mu - v^\mu$, sem qualquer consequência física no espectro do sistema. Também é possível entender este fato lendo o efeito do *background* como uma transformação de gauge. De fato, fazendo uso da redefinição do campo, $\psi \rightarrow \psi(x) = \psi(x) e^{-iv\Delta x}$, é possível remover o background da teoria, de modo que a Lagrangeana (2.2) assuma a forma livre usual (escrita em termos do campo ψ), ou seja:

$$\mathcal{L}' = \frac{i}{2} \bar{\Psi} (\gamma^\mu \partial_\mu - m_e) \Psi, \quad (2.40)$$

isto é verdade em qualquer teoria contendo somente uma família de campo de fermiônico. Para esse resultado permanecer válido no caso de teorias multifermiônicas, as famílias de férmions devem estar desacopladas uma da outra (férmions não interagentes) e estar acopladas ao mesmo parâmetro violador de Lorentz (v_μ) [4].

O resultado geral fornecido pelo espectro relativístico do hidrogênio pode ser obtido como uma solução exata da equação de Dirac modificada (2.3), tomado na presença do potencial Coulombiano. Essa solução, entretanto, não resultará em nada novo, uma vez que isso corresponde exatamente à solução relativística convencional alterada de acordo com $p^\mu \rightarrow p^\mu - v^\mu$. Finalmente, deve ser notado que o resultado nulo aqui obtido não é devido uma escolha específica da orientação espacial do *background*, $v^\mu = (v0, 0, 0, v_z)$; adotando o background ao longo de uma direção arbitrária, $v = (v_x, v_y, v_z)$, cálculos idênticos levam ao mesmo resultado nulo, ou seja, $\Delta E = 0$.

2.2.5 Cálculo das correções na presença de um campo externo

Até o momento, o espectro de hidrogênio foi investigado somente na ausência de campos externos. Na presença de um campo magnético externo, nota-se que o termo $e\vec{A} \cdot \vec{v}/m_e$ da eq. (2.31) pode implicar numa contribuição de energia em primeira ordem:

$$\Delta E_{A \cdot v} = \frac{e}{m_e} \int \psi^* (\vec{A} \cdot \vec{v}) \psi d^3r. \quad (2.41)$$

Sabendo que $\vec{A} = -\vec{r} \times \vec{B}/2$, para um campo magnético externo ao longo do eixo-z, $\vec{B} = B_0 \hat{z}$, resulta: $\vec{A} = -B_0(y/2, -x/2, 0)$. Isso implica em:

$$\Delta E_{A \cdot v} = \frac{e}{m_e} \int \psi^* (yv_x - xv_y) \psi d^3r, \quad (2.42)$$

cujos cálculos explícitos levam a $\Delta E_{A \cdot v} = 0$. Então, conclui-se que a presença de um campo magnético externo fixo não conduz a qualquer contribuição de violação de Lorentz para o espectro de hidrogênio, além do efeito Zeeman usual. É instrutivo observar que esses cálculos valem equivalentemente para o caso do pósitron, para o qual a equação modificada de Pauli é derivada de $(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu + v_\mu \gamma^\mu - m)\psi_c = 0$. Em comparação com a eq. (2.30), o Hamiltoniano não-relativístico do pósitron exibe carga oposta e parâmetro v^μ oposto, implicando um Hamiltoniano com a presença de termos violadores de Lorentz na forma: $H_{LV} = [-i\vec{v} \cdot \nabla/m_e + e(\vec{A} \cdot \vec{v})/m_e - v_0 + \vec{v}^2/2m_e]$. Entretanto, como no caso do elétron, este Hamiltoniano implica em correções de energia indetectáveis. Este caso está obviamente relacionado à análise espectroscópica do hidrogênio e anti-hidrogênio, efetuado de forma mais ampla e geral na ref. [13]. Neste mesmo trabalho, também é levado em conta o efeito do background sobre a estrutura hiperfina (considerando o spin do próton) do espectro.

2.3 Lagrangeana de Dirac na presença do *background* em acoplamento axial vetorial

Entre os possíveis coeficientes envolvidos na quebra da simetria de Lorentz no setor fermiônico do MPE, mostrado na eq. (2.1), nosso interesse agora volta-se para um outro que também é CPT-ímpar, $b_\mu \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi$. Este termo, do tipo torção [42], está ligado

ao *background* fixo por meio de um acoplamento vetorial axial. Inserindo-o na lagrangeana de Dirac, obtemos:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_e\bar{\psi}\psi - b_\mu\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi. \quad (2.43)$$

Tal lagrangeana é o ponto de partida para todos os desenvolvimentos desta seção.

2.3.1 Soluções de onda-plana, relação de dispersão e auto-energias

O primeiro passo é determinar a nova equação de Dirac, derivada da Lagrangeana anterior, ou seja:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - b_\mu\gamma_5\gamma^\mu - m_e)\psi = 0, \quad (2.44)$$

equação esta reescrita no espaço dos momentos,

$$(\gamma^\mu p_\mu - b_\mu\gamma_5\gamma^\mu - m_e)w(p) = 0. \quad (2.45)$$

Com o intuito de obtermos a relação de dispersão associada com tal equação, a mesma deve ser multiplicado por $(\gamma^\mu p_\mu - b_\mu\gamma_5\gamma^\mu + m_e)$, resultando em: $[p^2 - m_e^2 - b^2 + \gamma^5(\not{p}\not{b} - \not{b}\not{p})]w(p) = 0$ Esta expressão apresenta contribuições fora da diagonal principal do espaço espinorial. Com a finalidade de obtermos uma expressão totalmente contida na diagonal principal, válida para todas as componentes do espinor w , a equação anterior deve ser agora multiplicado por: $(p^2 - m_e^2 - b^2 - \gamma_5(\not{p}\not{b} - \not{b}\not{p}))$, resulta na seguinte relação de dispersão:

$$(p^2 - m_e^2 - b^2)^2 + 4p^2b^2 - 4(p \cdot b)^2 = 0. \quad (2.46)$$

Esta é uma relação em quarta ordem na energia, que pode ser exatamente resolvida somente em casos particulares. No caso de um background puramente tipo tempo, $b^\mu = (b_0, 0)$, obtemos:

$$E = \pm\sqrt{(\vec{p})^2 + m_e^2 + b_0^2 \pm 2b_0|\vec{p}|} \quad (2.47)$$

Já no caso de um background puramente tipo espaço, $b^\mu = (0, \vec{b})$, resulta:

$$E = \pm\sqrt{(\vec{p})^2 + m_e^2 + (\vec{b})^2 \pm 2[m_e^2(\vec{b})^2 + (\vec{b} \cdot \vec{p})^2]^{1/2}}. \quad (2.48)$$

Perceba que não há quebra da conjugação de carga nesse caso. De fato, após a reinterpretação, tanto partícula quanto anti-partícula exibem o mesmo valor de energia, isto é, as raízes positivas dadas nas eqs. (2.47), (2.48). Portanto, a Lagrangeana (2.43) não implica na violação de C. Isto pode ser explicitamente demonstrado por meio do procedimento empregado na próxima seção.

Levando em conta as matrizes γ , definidas na seção anterior, obtemos duas equações espinoriais acopladas para w_A e w_B :

$$(E - \vec{\sigma} \cdot \vec{b} - m_e)w_A + (b^0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p})w_B = 0, \quad (2.49)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p} - b^0)w_A + (-E + \vec{\sigma} \cdot \vec{b} - m_e)w_B = 0, \quad (2.50)$$

para resolver este sistema de equações espinoriais acopladas, é necessário primeiramente escrever o espinor w_A em termos de w_B e vice-versa, ou seja :

$$w_A = \frac{1}{E_2^2} \left[(E - m_e)(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) - (E - m_e)b^0 - b^0(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) + \vec{b} \cdot \vec{p} + i\vec{b} \cdot \vec{\sigma} \right] w_B, \quad (2.51)$$

$$w_B = \frac{1}{E_1^2} \left[(E + m_e)(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) - (E + m_e)b^0 - b^0(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) + \vec{b} \cdot \vec{p} + i\vec{b} \cdot \vec{\sigma} \right] w_A, \quad (2.52)$$

onde: $\vec{c} = \vec{b} \times \vec{p}$, $E_1^2 = [(E + m_e)^2 - b \cdot b]$, $E - 2^2 = [(E - m_e)^2 - b \cdot b]$.

Para construir as soluções em onda plana, segue-se o procedimento geral adotado na seção anterior. As soluções dos espinores 4×1 resultantes são dadas abaixo:

$$u_1 = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ [(E + m_e)(p_z - b^0) - b^0 b_z + \vec{b} \cdot \vec{p} + i c_z]/E_1^2 \\ [(E + m_e)(p_x + i p_y) - b^0(b_x + i b_y) + i(c_x + i c_y)]/E_1^2 \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

$$u_2 = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ [(E + m_e)(p_x + i p_y) - b^0(b_x + i b_y) + i(c_x + i c_y)]/E_1^2 \\ [-(E + m_e)(p_z - b^0) - b^0 b_z + \vec{b} \cdot \vec{p} + i c_z]/E_1^2 \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

$$v_1 = N \begin{pmatrix} [(E + m_e)(p_z + b^0) + b^0 b_z + \vec{b} \cdot \vec{p} - i c_z]/E_2^2 \\ [(E + m_e)(p_x + i p_y) - b^0(b_x + i b_y) - i(c_y + i c_z)]/E_2^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

$$v_2 = N \begin{pmatrix} [(E + m_e)(p_x - ip_y) + b^0(b_x - ib_y) - i(c_x + ic_y)]/E_2^2 \\ [-(E + m_e)(p_z - b^0) - b^0 b_z + \vec{b} \cdot \vec{p} + ic_z]/E_2^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

onde N é a constante de normalização. Os autovalores de energia são os calculados nas eqs.(2.47), (2.48), que agora são exibidos nas seguintes relação de autoenergias: $Hu_i = E_i^{(u)}u_i$, com $E_i^{(u)} = [p^2 + m_e^2 + b_0^2 + (-1)^i 2b_0|\vec{p}|]^{1/2}$, para $b^\mu = (b_0, 0)$, e $E_i^{(v)} = [\vec{p}^2 + m_e^2 + \vec{b}^2 + (-1)^i 2[m_e^2 \vec{b}^2 + (\vec{b} \cdot \vec{p})^2]^{1/2}]^{1/2}$, para $b^\mu = (0, \vec{b})$, e $i = 1, 2$. Aqui, $E_i^{(u)}$ representa a energia da partícula e da anti-partícula. Apesar da forma complicada desses espinores, é possível mostrar que no caso de $b^\mu = (b_0, 0, 0, b_z)$ and $\vec{p} = (0, 0, p_z)$, tais soluções são auto-estados do operador de spin Σ_z com auto-valores ± 1 , da mesma maneira que foi observado em seções anteriores.

2.3.2 Análise das simetrias C, P e T

Nesta seção, analisamos o comportamento da equação de Dirac modificada, em acoplamento pseudo-vetorial, sob ação dos operadores C, P e T. Da mesma forma que realizado para o caso do acoplamento vetorial, a análise consiste em determinar o comportamento do termo pseudoescalar, $b_\mu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi$, perante ação dos operadores C, P e T. Inicialmente, consideramos a ação do operador conjugação de carga ($C = i\gamma^2 \gamma^0$) sobre a equação de Dirac modificada na presença do campo eletromagnético, escrita abaixo:

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m - b_\mu \gamma_5 \gamma^\mu] \psi = 0. \quad (2.57)$$

Tomando o complexo conjugado da eq.(2.57) e, levando em conta a relação $U\gamma^{\mu*}U^{-1} = -\gamma^\mu$, conseguimos reescrever a equação na seguinte forma:

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m - b_\mu \gamma_5 \gamma^\mu] \psi_c = 0, \quad (2.58)$$

tal equação tem a mesma forma da equação modificada original, revelando que a operação C constitui uma simetria do sistema.

No que concerne à operação de reversão temporal(T), o operador $T = i\gamma^1 \gamma^3 K$, quando aplicado na eq.(2.57) pela esquerda, conduz ao seguinte resultado:

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m - \gamma_5(b_0 \gamma^0 - b_i \gamma^i)] \psi^T(x, t') = 0, \quad (2.59)$$

onde foi usado:

$$\gamma_5 T \gamma^{\mu*} T^{-1} = (\gamma^0, -\gamma^i). \quad (2.60)$$

No caso da operação de paridade, o operador $P = i\gamma^0$, quando aplicado sobre a equação de Dirac modificada, conduz a:

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m + \gamma_5(b_0\gamma^0 - b_i\gamma^i)]\psi^P(x', t) = 0, \quad (2.61)$$

onde foram usadas as relações (2.22) e (2.23). Vemos assim que as operações P e T não constituem simetrias do sistema quando tomadas isoladamente. Quando consideradas em conjunto sobre a equação de Dirac modificada, conduzem a:

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m + \gamma_5 b_\alpha \gamma^\alpha]\psi^{PT}(x', t') = 0, \quad (2.62)$$

o que mostra que a operação PT conjunta também não constitui uma simetria do sistema. Em resumo, vemos que a lagrangeana (2.43) é C-par, P-ímpar, T-ímpar, PT-ímpar, e CPT-ímpar.

2.3.3 Limite Não-relativístico

O limite não-relativístico do modelo descrito pela Lagrangeana (2.43) é trabalhado da mesma forma que no capítulo anterior. O objetivo é identificar o Hamiltoniano não-relativístico e possíveis desvios induzidos sobre o espectro de energia do hidrogênio (na presença e ausência de um campo magnético externo). Iniciamos considerando a lagrangeana de Dirac, na presença de um campo eletromagnético externo minimamente acoplado ao campo espinorial, e na presença do termo de violação pseudo-vetorial:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m_e\bar{\psi}\psi - b_\mu\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi, \quad (2.63)$$

onde $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. Levando em conta o campo externo, as eqs. (2.49) e (2.50) assumem a forma:

$$[E - \vec{\sigma} \cdot \vec{b} - m_e - eA_0]w_A + [b^0 - \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A})]w_B = 0, \quad (2.64)$$

$$[\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) - b^0]w_A - [E - \vec{\sigma} \cdot \vec{b} + m_e - eA_0]w_B = 0. \quad (2.65)$$

O limite de baixas velocidades é implementado pelas seguintes condições: $(\vec{p})^2 \ll m_e^2$, $eA_0 \ll m_e$, $E = m_e + H$. Ademais, assume-se que o fator $\vec{\sigma} \cdot \vec{b}$ deve ser

ignorado na eq. (2.65), uma vez que o *background* é considerado pequeno quando comparado com a massa do elétron. Implementando todas essas condições, encontramos a seguinte equação para a componente forte:

$$Hw_A = \left\{ [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A})\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) - 2b_0\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) + b_0^2]/2m_e + eA_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{b} \right\} w_A, \quad (2.66)$$

Após alguns cálculos algébricos, obtemos:

$$H = H_{Pauli} + [\vec{\sigma} \cdot \vec{b} - 2b_0\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A})/2m_e + b_0^2/2m_e]. \quad (2.67)$$

Este é o Hamiltoniano modificado, composto pela parte de Pauli e pela parte de violação de Lorentz (H_{LV}), onde reside nosso interesse.

2.3.4 Cálculo das correções na ausência de um campo externo

Observando que H_{LV} tem dois novos termos (o terceiro é constante), deve-se tentar achar quais desses termos realmente implica em correções sobre o espectro do hidrogênio. Levando em conta essa informação, o Hamiltoniano que gera a quebra de simetria de Lorentz reduz-se a forma: $H_{LV} = \vec{\sigma} \cdot \vec{b} - 2b_0(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})/2m_e$, onde inicialmente consideramos $\vec{A} = 0$. Começamos, então, analisando o termo $\vec{\sigma} \cdot \vec{b}$, que conduz a seguinte contribuição em primeira ordem:

$$\Delta E_{\sigma \cdot b} = \langle nljm_jm_s | \vec{\sigma} \cdot \vec{b} | nljm_jm_s \rangle. \quad (2.68)$$

Aqui, n, l, j, m_j são os números quânticos adequados para tratar uma situação em que ocorre adição de momento angular (L a S). Para solucionar esse cálculo, é necessário escrever os kets $|jm_j\rangle$ em termos dos auto-estados de spin $|mm_s\rangle$, o que é feito por meio da expressão geral: $|jm_j\rangle = \sum_{m, m_s} \langle mm_s | jm_j \rangle |mm_s\rangle$, onde $\langle mm_s | jm_j \rangle$ são os coeficientes de Clebsch-Gordon. Calculando tais coeficientes para o caso $j = l + 1/2$, $m_j = m + 1/2$, temos:

$$|jm_j\rangle = \alpha_1 |m \uparrow\rangle + \alpha_2 |m + 1 \downarrow\rangle, \quad (2.69)$$

por outro lado, para $j = l - 1/2$, $m_j = m + 1/2$, resulta:

$$|jm_j\rangle = \alpha_2 |m \uparrow\rangle - \alpha_1 |m + 1 \downarrow\rangle, \quad (2.70)$$

com: $\alpha_1 = \sqrt{(l+m+1)/(2l+1)}$, $\alpha_2 = \sqrt{(l-m)/(2l+1)}$. Agora, levando em conta a relação de ortonormalização $\langle m'm'_s | mm_s \rangle = \delta_{m'm} \delta_{m'_s m_s}$, é possível mostrar que a eq.

(3.27) reduz-se simplesmente a $\Delta E_{s,b} = \langle jm_j | s_z b_z | jm_j \rangle$, cujos cálculos explícitos levam ao resultado:

$$\Delta E_{\sigma,b} = \pm \frac{b_z m_j}{2l+1}, \quad (2.71)$$

onde os sinais positivo e negativo correspondem a $j = l + 1/2$ e $j = l - 1/2$, respectivamente. Vemos assim que nesse cálculo de primeira ordem a energia é corrigida por uma quantidade dependente em $\pm m_j$, em uma forma muito similar ao que ocorre no efeito Zeeman tradicional. Com efeito, cada linha do espectro é dividida em $(2j + 1)$ linhas, com uma separação linear em $b_z/(2l + 1)$. Uma vez que a magnitude de tal separação depende diretamente no módulo do *background*, esse resultado teórico pode ser usado para estabelecer um limite superior no parâmetro de quebra (b^μ). De fato, considerando-se que as técnicas espectroscópicas atuais estejam aptas a detectar efeitos da ordem de 10^{-10} eV, podemos supor que, para que o efeito previsto na eq. (2.71) não seja detectável, tal correção deve ser menor que 10^{-10} eV. Como a ordem de magnitude da correção (2.71) equivale à ordem de magnitude do próprio *background*, obtemos:

$$b_z < 10^{-10} \text{eV}. \quad (2.72)$$

Esta última relação estabelece um limite superior na magnitude do *background* para que o efeito previsto pela eq. (2.71) não seja detectável dentro da precisão experimental atual. Se o limite de detecção for aprimorado para valores inferiores a 10^{-10} eV, mais rigoroso será o limite superior imposto à magnitude do *background*.

Na sequência, calcula-se a contribuição de primeira ordem do segundo termo de H_{LV} para o espectro de hidrogênio,

$$\Delta E_{\sigma,b} = \frac{ib_0}{m_e} \langle nljm_j m_s | \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} | nljm_j m_s \rangle. \quad (2.73)$$

A função de onda de 1-partícula, $\Psi_{nljm_j m_s} = \psi_{nljm_j}(r, \theta, \phi) \chi_{sm_s}$, agora contém a função de spin. Com o intuito de solucionar a eq.(2.73), sabe-se que o operador gradiente atua na função espacial ψ_{nljm_j} , e que o operador $\vec{\sigma}$, por sua vez, opera na função de spin, dessa forma temos:

$$= \frac{ib_0}{m_e} \int \left[R_{nl}^*(r) \frac{\partial R_{nl}(r)}{\partial r} |\Theta_{lm}(\theta)|^2 |\Phi_{lm}(\phi)|^2 \langle jm_j | \vec{\sigma} \cdot \hat{r} | lm_j \rangle + \frac{|R_{nl}(r)|^2 |\Phi_{lm}(\phi)|^2}{r} \Theta_{lm}^*(\theta) \right] \quad (2.74)$$

Escrevendo os versores esféricos em coordenadas cartesianas, resulta:

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{r} = \sin \theta \cos \phi \sigma_x + \sin \theta \sin \phi \sigma_y + \cos \theta \sigma_z, \quad (2.75)$$

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \sigma_x + \cos \theta \sin \phi \sigma_y - \sin \theta \sigma_z, \quad (2.76)$$

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{\phi} = -\sin \phi \sigma_x + \cos \theta \sigma_y. \quad (2.77)$$

É claro que somente os termos proporcionais a σ_z resultam em valores esperados não nulos sobre os kets $|jm_j\rangle$. Com isso, encontramos:

$$\Delta E_{\sigma,p} = \frac{\pm i b_0 m_j}{(2l+1)m_e} \int \left[R_{nl}^*(r) \frac{\partial R_{nl}(r)}{\partial r} |\Theta_{lm}(\theta)|^2 \cos \theta - \frac{|R_{nl}|^2}{r} \Theta_{lm}^*(\theta) \frac{\partial \Theta_{lm}}{\partial \theta} \sin \theta \right] d^3 r. \quad (2.78)$$

Essas são as mesmas integrais que aparecem nas expressões de ΔE_1 e ΔE_2 , já calculadas na seção anterior. Então, é obvio que: $\Delta E_{\sigma,p} = 0$. Portanto, única correção de primeira ordem sobre o espectro do hidrogênio é a separação Zeeman originada do termo de correção $\vec{\sigma} \cdot \vec{b}$.

2.3.5 Cálculo das correções na presença de um campo magnético externo

Um outro ponto que merece atenção está relacionado com o termo de correção $2eb_0 \vec{\sigma} \cdot \vec{A}$, presente na eq. (2.67). Este termo é obviamente nulo para o átomo de hidrogênio "livre" (onde $\vec{A} = 0$). Para o caso em que o átomo está sujeito à influência de um campo magnético externo, entretanto, este termo deve ser levado em conta. Para um campo magnético externo fixo ao longo do eixo-z, $\vec{B} = B_0 \hat{z}$, temos $\vec{A} = -B_0(y/2, -x/2, 0)$, de modo que a correção pode ser escrita como se segue:

$$\Delta E_{s,A} = \frac{b_0 e}{m_e} \langle nljm_j m_s | \vec{\sigma} \cdot \vec{A} | nljm_j m_s \rangle = -\frac{B_0 b_0 e}{2m_e} \langle nljm_j m_s | y \sigma_x - x \sigma_y | nljm_j m_s \rangle. \quad (2.79)$$

Considerando o efeito do operador de spin nos kets $|jm_j\rangle$, uma correção nula ($\delta E_{s,A} = 0$) é encontrada. Deve-se notar que esse resultado permanece nulo para a orientação arbitrária do campo magnético. Então, a conclusão é que um campo fixo externo não implica em qualquer correção adicional sobre o efeito Zeeman usual. Neste caso, o efeito da violação de Lorentz, dada na eq. (2.71), corrige o efeito Zeeman usual por uma pequena quantidade proporcional a $|\vec{b}|$.

O resultado geral fornecido pelo espectro relativístico do hidrogênio pode ser examinado através da solução exata da equação modificada de Dirac (2.3) na presença

de um potencial Columbiano. Este caso deve implicar em modificações qualitativas no espectro relativístico do hidrogênio, tanto no caso do background ser puramente tipo-tempo quanto puramente tipo espaço.

2.3.6 Conclusão

Nesse capítulo, foram estudados os efeitos dos termos violadores das simetrias de Lorentz e CPT (advindos do MPE) sobre equação de Dirac. Esta análise considerou dois tipos de acoplamentos do background com o campo fermiônico. Começamos com o acoplamento vetorial, para o qual foram determinadas a equação de Dirac modificada com suas correspondentes soluções e autoenergias, assim como seu comportamento perante as simetrias C, P, T. Os resultados aqui obtidos estão de acordo com os já conhecidos na literatura [4], [8]. O regime não-relativístico foi estudado. Verificou-se que o background induz modificações na equação de Pauli, porém elas não resultam em alterações de energia sobre o espectro do hidrogênio. Este é um resultado esperado, uma vez que o acoplamento vetorial pode ser entendido apenas como um deslocamento no momento ($p^\mu \rightarrow p^\mu - v^\mu$), incapaz de acarretar modificações físicas, ou ainda como uma transformação de gauge que absorve inteiramente todo o background, conduzindo a uma teoria de Dirac livre. Na sequência, analisamos o caso em que o *background* é acoplado ao campo espinorial em uma forma axial. Novamente, foram determinadas as soluções de partícula livre, relações de dispersão e autoenergias, e comportamento perante as simetrias C, P, T. Em seguida, o limite não-relativístico foi discutido, sendo observado que os termos de correção (violadores de Lorentz), que aparecem na equação de Pauli modificada, fornecem novos efeitos sobre o espectro de hidrogênio. De fato, foi mostrado que o *background* pode induzir uma separação do tipo Zeeman nas linhas espectrais (originada da interação com o spin). Este efeito pode ser usado para estabelecer limites na magnitude do coeficiente violador de Lorentz, b^μ , de acordo com observações precisas no espectro do hidrogênio. A presença de um campo magnético externo foi considerada, porém não implicando em qualquer correção adicional ao efeito Zeeman usual além das já associadas com o coeficiente b_μ .

Comentários adicionais referem-se à possibilidade da indução de fases topológicas na função de onda do elétron pelos termos violadores de Lorentz considerados. Em trabalho recente [39], foi mostrado que o *background* fixo, em acoplamento não-mínimo com os campos de gauge e espinorial, é capaz de induzir uma fase Aharonov-Casher na função

de onda do elétron. Isto ocorre quando o momento canônico é alterado por um termo cujo rotacional é não nulo. No caso dos termos violadores de Lorentz e CPT investigados nesse trabalho, nenhuma fase topológica é gerada, pois em ambos os casos o momento canônico é alterado por uma quantidade constante ($\vec{p} \rightarrow \vec{p} - v$) ou permanece invariante.

Uma possível continuação para esta linha de investigação, consiste em examinar a solução completa (regime relativístico) da equação de Dirac modificada para caso do potencial Coulombiano. Nesse caso, é considerado somente o acoplamento axial, uma vez que o acoplamento vetorial apenas implica num deslocamento do momento, incapaz de induzir modificações nas soluções. Espera-se que a solução relativística possa revelar novos efeitos, e ao mesmo tempo restabelecer os resultados aqui calculados no regime não-relativístico.

Uma outra direção que representa um continuação interessante dos desenvolvimentos realizados neste capítulo consiste em investigar os possíveis efeitos induzidos por um background violador de Lorentz sobre o espectro do hidrogênio, quando o mesmo está não-minimamente acoplado ao campo de gauge e fermiônico, como considerado na ref. [39]. Este assunto foi recentemente discutido na ref. [18], e constitui o tema do próximo capítulo.

3 Correções sobre o espectro de hidrogênio induzidas por um *background* violador de Lorentz em acoplamento não-mínimo

3.1 Introdução

Em relação ao setor de gauge do MPE, muitos estudos foram desenvolvidos focando em diversos aspectos de interesse [19]-[38]. O setor fermiônico também começou a ser investigado, inicialmente considerando características gerais da teoria de Dirac (relações de dispersão, soluções em onda plana, e autovalores de energia) [4], e mais tarde detalhando aspectos de experimentos concebidos para investigar a violação da simetria CTP e até que extensão a violação de Lorentz pode se manifestar nas teorias de campos usuais. Neste sentido, tais experimentos são usados para estabelecer limites superiores nos parâmetros indutores da violação dessa simetria. O teorema do CPT, válido para qualquer teoria de quântica de campos local, prevê a igualdade de algumas quantidades (meia-vida, massa, razão giromagnética, razão carga-massa) de partículas e anti-partículas. Dessa forma, no contexto da eletrodinâmica quântica, pode-se dizer que os testes mais precisos e sensíveis da invariância de Lorentz e CPT envolvem a medida comparativa dessas quantidades para partícula e anti-partícula. Um exemplo bem conhecido deste tipo de teste envolve medidas de alta precisão da razão giromagnética [10] e da frequência de cíclotron [15] para o elétron e pósitron confinados em uma armadilha de Penning por um longo tempo. A inadequação da "figura de mérito" adotada nestes trabalhos, baseada na diferença do fator-g do elétron e do pósitron, foi demonstrado na ref.[11], na qual uma "figura de mérito" alternativa foi proposta, capaz de limitar o coeficiente de violação de Lorentz em 1 parte em 10^{20} (resultado válido para o setor leptônico: elétrons e pósitrons). Outros testes interessantes e precisos, também concebidos para estabelecer limites sobre a violação de Lorentz, propuseram novas "figuras de mérito" envolvendo a análise da estrutura hiperfina do estado fundamental do muônio [12], experimentos comparativos envolvendo relógios atômicos [16], espectroscopia hiperfina do hidrogênio

e anti-hidrogênio [13], e experimentos com amostras de materiais com spins polarizados [14].

A influência da violação de Lorentz e de termos CPT-ímpares especificamente sobre a equação de Dirac foi estudado na ref.[8], envolvendo o cálculo do Hamiltoniano no limite não-relativístico e as conseqüente alterações nos níveis de energia. Uma investigação similar em busca de desvios no espectro de hidrogênio foi recentemente efetuada na ref. [17], cujos resultados estão apresentados no Cap. II, onde o hamiltoniano não-relativístico foi derivado a partir da equação modificada de Pauli. Alguns desvios interessantes dos níveis de energia foram observados, tal como uma separação do tipo Zeeman. Esses resultados foram usados para estabelecer limites nos parâmetros da violação de Lorentz. Em um outro trabalho envolvendo o setor fermiônico [39], foi estudada a influência do background violador de Lorentz (em acoplamento não-mínimo com o tensor $F^{\mu\nu}$ sobre a equação de Dirac. Foi mostrado que tal acoplamento, dado na forma $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu v^\nu F^{\alpha\beta}$, é capaz de induzir fases topológicas (Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher [43]) na função de onda do elétron (em interação com o campo de gauge e na presença do background fixo). Recentemente, em conexão com esse efeito particular, foi mostrado que partículas e anti-partículas desenvolvem fases A-Casher opostas[40]. Este fato, no contexto de experimentos precisos, pode ser usado para obter limites superiores sobre o parâmetro de violação de Lorentz. Nestes trabalhos sobre fases topológicas, entretanto, em nenhum momento foi discutida a questão das correções de energia induzidas por este tipo de acoplamento sobre um sistema atômico.

Este capítulo tem como principal objetivo examinar os efeitos decorrentes da violação da simetria de Lorentz induzida por um *background* fixo sobre equação de Dirac, quando tal background é tomado em acoplamento não-mínimo com o campo de gauge, tal como dado nas ref.[39], [40] ou seja, $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu v^\nu F^{\alpha\beta}$. Neste caso, temos especial interesse no regime não-relativístico e suas possíveis implicações sobre o espectro de hidrogênio. O ponto inicial é a Lagrangeana de Dirac suplementada pelo termo violador de Lorentz e simetria CPT. A investigação do limite não-relativístico é efetuado e o Hamiltoniano não-relativístico estabelecido. O efeito do *background* no espectro do átomo de hidrogênio é calculado considerando perturbação de primeira ordem. Na ausência do campo magnético externo, são obtidas três correções diferentes, capazes de modificar a estrutura fina do espectro (quebrando a degenerescência acidental). Tais correções conduzem ao seguinte limite superior $gv_z \leq 10^{-14}(eV)^{-1}$. Na presença de um campo magnético externo, também

é obtida uma correção sobre os níveis de energia, que conduz a um limite superior mais rigoroso sobre o produto de violação de Lorentz: $gv_z \leq 10^{-25}(eV)^{-1}$. Já no caso do acoplamento não-mínimo tipo torção, $g_a \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^5 \gamma^\mu v^\nu F^{\alpha\beta}$, nenhuma correção foi encontrada na ausência de campo magnético. Na presença de um campo externo, este termo resulta em uma separação do tipo Zeeman proporcional à magnitude do background, que conduzem ao seguinte limite: $gv_z = 10^{-20}(eV)^{-1}$. Os resultados apresentados neste capítulo estão publicados na ref. [18]. Este capítulo está disposto como se segue: na Sec. II, é analisada a influência do acoplamento não-mínimo sobre o limite não-relativístico da equação de Dirac modificada, centrando atenção na obtenção do Hamiltoniano não-relativístico; em seguida, são calculadas as correções induzidas por tais termos sobre o espectro do átomo de hidrogênio; na Sec. III, é analisado o caso do acoplamento não-mínimo do tipo torção. O mesmo procedimento é aplicado, culminando na obtenção de correções dos níveis de energia do átomo de hidrogênio (na presença e ausência de campo magnético externo). Por fim, apresentamos nossas observações finais.

3.2 Acoplamento não-mínimo com o *background*

O acoplamento não-mínimo de partículas com o background violador de Lorentz é aqui considerado em duas versões: caso sem torção e com torção (por envolver a matriz γ^5). Começamos analisando o caso livre de torção, que é implementado definindo uma derivada covariante suplementada com um termo de acoplamento não-mínimo do background com o campo eletromagnético e o campo fermiônico, dada na forma:

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + igv^\nu F_{\mu\nu}^*, \quad (3.1)$$

onde $F_{\mu\nu}^*$ é o tensor eletromagnético dual ($F_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$) e v^μ é o *background* fixo, responsável pela quebra da simetria de Lorentz [2]. A dimensão de massa do campo de gauge e da constante de acoplamento são:

$$[A_\mu] = 1, [g] = -2, [v^\mu] = 1, [gv^\mu] = -1. \quad (3.2)$$

A equação de Dirac para esse acoplamento,

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m_e)\psi = 0, \quad (3.3)$$

é tomada como ponto de partida para investigar a influência desse background na dinâmica das partículas fermiônicas. Trabalhando com a representação de Dirac¹ das matrizes- γ , e escrevendo ψ em termos de espinores com duas componentes, $\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$, temos duas equações acopladas para ϕ e χ no espaço dos momentos:

$$(E - m_e - eA_0 + g\vec{v} \cdot \vec{B})\phi - \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A} + gv^0\vec{B} - g\vec{v} \times \vec{E})\chi = 0, \quad (3.4)$$

$$-(E + m_e - eA_0 + g\vec{v} \cdot \vec{B})\chi + \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A} + gv^0\vec{B} - g\vec{v} \times \vec{E})\phi = 0. \quad (3.5)$$

Para investigar o comportamento de baixas energias do sistema, a opção natural é estudar o limite não-relativístico, onde a energia é dada como $E = m_e + H$, sendo H o Hamiltoniano não-relativístico. Escrevendo a componente fraca (χ) em termos da forte (ϕ), obtemos a seguinte equação para ϕ :

$$(H - eA^0 + g\vec{v} \cdot \vec{B})\phi = \frac{1}{2m_e}(\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi})\phi, \quad (3.6)$$

onde o momento canônico generalizado é definido por:

$$\vec{\Pi} = (\vec{p} - e\vec{A} + gv^0\vec{B} - g\vec{v} \times \vec{E}). \quad (3.7)$$

Após alguns procedimentos algébricos, obtemos o Hamiltoniano não-relativístico para o sistema:

$$\begin{aligned} H &= \left[\frac{1}{2m_e}(\vec{p} + e\vec{A})^2 + eA^0 - \frac{e}{2m_e}(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) + \frac{1}{2m_e}gv_0 \right] + \frac{g^2}{2m_e}(\vec{v} \times \vec{E})^2 + \\ &+ \frac{1}{2m_e}gv_0\vec{\sigma} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \frac{g}{2m_e}\vec{\sigma} \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{E})] + \frac{gv_0}{m_e}(\vec{p} - e\vec{A}) \cdot \vec{B} + \\ &- \frac{g}{m_e}(\vec{p} - e\vec{A}) \cdot (\vec{v} \times \vec{E}) - \frac{g^2v_0}{m_e}\vec{B} \cdot (\vec{v} \times \vec{E}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Na expressão acima, aparece o Hamiltoniano de Pauli (entre colchetes) corrigido pelos termos que compõem o Hamiltoniano violador de Lorentz, H_{LV} , que constitui nosso objeto de interesse na próxima seção.

¹Tais representações, as matrizes de Dirac são escritas como: $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$,

$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ onde $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ são as matrizes de Pauli.

3.2.1 Cálculo das correções na ausência de um campo magnético externo

A proposta é investigar a contribuição do Hamiltoniano (H_{LV}) sobre os níveis de energia do átomo de hidrogênio. Estes cálculos serão inicialmente efetuados para o caso do átomo de hidrogênio livre (sem campo externo, $\vec{A} = 0$), no qual somente os três termos independentes de B contribuem. Para todos os termos que não envolvem o operador de spin, usaremos as funções de onda de 1-partícula para o átomo de hidrogênio (ψ) indexados em termos dos números quânticos n, l, m , $\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)\Theta_{lm}(\theta)\Phi_m(\phi)$, enquanto que no cálculo dos termos envolvendo $\vec{\sigma}$ fazemos uso da função de onda $\psi_{nljm_jm_s}$, onde j, m_j são os números quânticos associados à adição do momento angular. Aqui, r, θ, ϕ são coordenadas esféricas.

Importante destacar que estaremos realizando todos os nossos cálculos no sistema de unidades naturais, onde $c = \hbar = 1$. Como etapa inicial, consideramos a correção de primeira ordem induzida pelo termo $g^2(\vec{v} \times \vec{E})^2/2m$, ou seja:

$$\Delta E_1 = \frac{g^2}{2m_e} \int \Psi_{nlm}^* (\vec{v} \times \vec{E})^2 \Psi_{nlm} d^3r. \quad (3.9)$$

Para solucioná-la, escrevemos $(\vec{v} \times \vec{E})^2 = \vec{v}^2 \vec{E}^2 - (\vec{v} \cdot \text{vec} E)^2$, onde substituímos a expressão do campo elétrico coulombiano, $\vec{E} = -e\hat{r}/r^2$, que conduz a:

$$\Delta E_1 = \frac{g^2 e^2}{2m_e} \left[v^2 \langle nlm | 1/r^4 | nlm \rangle - \langle nlm | (\vec{v} \cdot \vec{r})^2 / r^4 | nlm \rangle \right]. \quad (3.10)$$

Em coordenadas esféricas, temos: $\vec{v} \cdot \vec{r} = v_x \sin\theta \cos\phi + v_y \sin\theta \sin\phi + v_z \cos\theta$, o que implica em:

$$\Delta E_1 = \frac{g^2 e^2}{4m_e} \left[\left(\frac{1}{r^4} \right) (v_x^2 + v_y^2 + 2v_z^2) + (v_x^2 + v_y^2 - 2v_z^2) \langle nlm | \frac{\cos^2\theta}{r^4} | nlm \rangle \right]. \quad (3.11)$$

Considerando o resultado intermediário,

$$\langle nlm | \frac{\cos^2\theta}{r^4} | nlm \rangle = \left(\frac{1}{r^4} \right) \left[\frac{(l^2 - m^2)}{(2l - 1)(2l + 1)} + \frac{(l^2 - m^2 + 2l + 1)}{(2l + 3)(2l + 1)} \right], \quad (3.12)$$

a seguinte correção da energia é obtida para o caso em que o background está alinhado com o eixo-z ($v = v_z \hat{z}$):

$$\Delta E_1 = \frac{g^2 e^2 v_z^2}{4m_e} \left(\frac{1}{r^4} \right) \left[1 - \left(\frac{(l^2 - m^2)}{(2l - 1)(2l + 1)} + \frac{(l^2 - m^2 + 2l + 1)}{(2l + 3)(2l + 1)} \right) \right], \quad (3.13)$$

onde:

$$\overline{(1/r^4)} = 3[1 - l(l+1)/3n^2]/[n^3 a_0^4 (l+3/2)(l+1)(l+1/2)l(l-1/2)], \quad (3.14)$$

é um resultado bem conhecido para o sistema do hidrogênio. Aqui, $a_0 = 1/e^2 m_e$ é o raio de Bohr ($a_0 = 0.0529 nm = 2.69 \times 10^4 (eV)^{-1}$). Este resultado mostra que o acoplamento não-mínimo remove a degenerescência acidental, mesmo sem levar em consideração a interação spin-órbita. Este efeito, portanto, implica na modificação da estrutura fina do espectro. A ordem de magnitude dessa correção é dada pela razão $g^2 v_z^2 e^2 / (m_e a_0^4)$, que numericamente vale $\simeq 10^6 (g v_z)^2 eV$. Considerando que os experimentos espectroscópicos são aptos a detectar efeitos de uma parte em 10^{10} no espectro, a correção (3.13) não pode ser maior que $10^{-10} eV$, o que implica em um limite superior para a magnitude do produto $g v_z$, ou seja:

$$g v_z \leq 10^{-9} (eV)^{-1}. \quad (3.15)$$

Na ausência de um campo magnético externo, o próximo termo a ser considerado é $\frac{g}{m_e} (\vec{p} - e\vec{A}) \cdot (\vec{v} \times \vec{E})$, cuja parte não-trivial é $\frac{g}{m_e} \vec{p} \cdot (\vec{v} \times \vec{E})$. Portanto, a correção em primeira ordem de energia é:

$$\Delta E_2 = -i \frac{g}{m_e} \int \psi_{nlm}^* \nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{E}) \psi_{nlm} d^3 r, \quad (3.16)$$

$$\Delta E_2 = -i \frac{g}{m_e} \int \psi_{nlm}^* \nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{E}) \psi_{nlm} d^3 r - i \frac{g}{m_e} \int \psi_{nlm}^* (\vec{v} \times \vec{E}) \cdot \nabla \psi d^3 r, \quad (3.17)$$

Tomando o gradiente de ψ em coordenadas esféricas, e o produto escalar com $(\vec{v} \times \vec{E})$, muitos termos são obtidos que dependem linearmente em $\sin \phi$, $\cos \phi$ ou $\sin 2\phi$, como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} \psi^* (\vec{v} \times \vec{E}) \cdot \nabla \psi = & \left[\frac{\partial R_{nl}}{\partial r} \Theta_{lm}(\theta) \Phi_m(\phi) (\vec{v} \times \vec{E}) \cdot \hat{r} + \right. \\ & \left. \frac{1}{r} R_{nl}(r) \frac{\partial \Theta_{lm}}{\partial \theta} \Phi_m(\phi) (\vec{v} \times \vec{E}) \cdot \hat{\theta} + \frac{im}{r \sin \theta} \psi (\vec{v} \times \vec{E}) \cdot \hat{\phi} \right], \end{aligned} \quad (3.18)$$

considerando os produtos:

$$(\vec{v} \times \vec{E}) \cdot \hat{r} = \sin \theta \cos \phi (\vec{v} \times \vec{E})_x + \sin \theta \sin \phi (\vec{v} \times \vec{E})_y + \cos \theta (\vec{v} \times \vec{E})_z, \quad (3.19)$$

$$(\vec{v} \times \vec{E}) \cdot \hat{\theta} = \cos \theta \sin \phi (\vec{v} \times \vec{E})_x + \cos \theta \cos \phi (\vec{v} \times \vec{E})_y - \sin \theta (\vec{v} \times \vec{E})_z, \quad (3.20)$$

$$(\vec{v} \times \vec{E}) \cdot \hat{\phi} = -\sin \phi (\vec{v} \times \vec{E})_x + \cos \phi (\vec{v} \times \vec{E})_y. \quad (3.21)$$

onde:

$$\vec{v} \times \vec{E} = -\frac{e}{r^2} \left[(v_y \cos \theta - v_z \sin \theta \sin \phi) \hat{i} + (v_z \sin \theta \cos \phi - v_x \cos \theta) \hat{j} + (v_x \sin \theta \sin \phi + v_y \sin \theta \cos \phi) \hat{k} \right] \quad (3.22)$$

Ao longo da integração angular, os únicos termos que permanecem são os dois que não apresentam dependência linear em $\sin \phi$, $\cos \phi$ ou $\sin 2\phi$. A expressão remanescente é:

$$\Delta E_2 = \frac{egv_z m}{m_e} \int R_{nl}^*(r) \Theta_{lm}^*(\theta) \frac{1}{r^3} R_{nl}(r) \Theta_{lm}(\theta) r^2 dr \sin \theta d\theta = \frac{egv_z m}{m_e} \left(\overline{\frac{1}{r^3}} \right), \quad (3.23)$$

que pode ser escrita na forma:

$$\Delta E_2 = \frac{egv_z}{m_e} \frac{m}{a_0^3 n^3 l(l+1/2)(l+1)}, \quad (3.24)$$

considerando o resultado bem conhecido

$$\left(\overline{\frac{1}{r^3}} \right) = \frac{1}{a_0^3 n^3 l(l+1/2)(l+1)}. \quad (3.25)$$

Um exame superficial da eq.(3.16) poderia nos levar à conclusão de que a correção ΔE_2 seria nula, uma vez que consiste numa média da função do momento linear (p) no estado ψ . Contudo, no desenvolvimento dessa expressão, surge o momento angular, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, cujo valor esperado no estado ligado é, em geral, não nulo, justificando o resultado da eq. (3.24). A ordem de magnitude dessa correção é $egv_z/(m_e a_0^3)$, cujo valor numérico é $\simeq 104(gv_z)\text{eV}$. Levando em conta a impossibilidade de detecção de um efeito maior que 10^{-10}eV , chegamos no seguinte valor limite superior para o produto:

$$gv_z \leq 10^{-14}(\text{eV})^{-1}. \quad (3.26)$$

Com o intuito de calcular a correção associada com os termos envolvendo o operador de spin, é necessário trabalhar com a função de onda $\psi_{nljm_j m_s} = \psi_{nljm_j}(r, \theta, \phi) \chi_{sm_s}$, adequada para tratar situações onde ocorre adição do momento angular ($J = L + S$), com n, l, j, m_j sendo os números quântico associados. Considerando o átomo de hidrogênio livre, o primeiro termo de spin não nulo é $\vec{\sigma} \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{E})]$, que implica na seguinte correção de primeira ordem:

$$\Delta E_3 = \frac{g}{2m_e} \langle nljm_j m_s | \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{E})) | nljm_j m_s \rangle. \quad (3.27)$$

Para o caso do campo elétrico coulombiano, temos $\vec{\sigma} \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{E})] = 2e(\vec{\sigma} \cdot \vec{v})/r^3 - e(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\vec{s} \cdot \vec{r})/r^3$. Após algumas manipulações algébricas, resulta:

$$\Delta E_3 = \frac{ge}{m_e} \langle nljm_j m_s | (\vec{\sigma} \cdot \vec{v})/r^3 - (\vec{f} \cdot \vec{\sigma}) | nljm_j m_s \rangle, \quad (3.28)$$

com:

$$f_x = e(-v_x + 3v_x \sin^2 \theta \cos^2 \phi + 3v_y \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi + 3v_z \sin \theta \cos \theta \cos \phi)/r^3, \quad (3.29)$$

$$f_y = e(-v_y + 3v_y \sin^2 \theta \sin^2 \phi + 3v_x \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi + 3v_z \sin \theta \cos \theta \cos \phi)/r^3, \quad (3.30)$$

$$f_z = e(-v_z + 3v_z \cos^2 \theta + 3v_x \sin \theta \cos \phi + 3v_y \sin \theta \cos \theta \sin \phi)/r^3. \quad (3.31)$$

Para finalizar este calculo, é necessário escrever os kets $|jm_j\rangle$ em termos de auto-estados de spin $|mm_s\rangle$, o que é feito por meio da expressão geral: $|jm_j\rangle = \sum_{m,m_s} \langle mm_s | jm_j \rangle |mm_s\rangle$, já apresentada no capítulo anterior. Neste caso, considerando as eqs. (2.69), (2.70), juntamente com a relação de ortonormalização $\langle m'm'_s | mm_s \rangle = \delta_{m'm} \delta_{m'_s m_s}$, é possível mostrar que a eq. (3.27) nos leva a:

$$\begin{aligned} \Delta E_3 = & \pm \frac{3egv_z}{2m_e} \frac{m_j}{a_0^3 n^3 l(1+1/2)(l+1)(2l+1)} \left[1 - \left(\frac{l^2 - m^2}{(2l-1)(2l+1)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(l^2 - m^2 + 2l + 1)}{(2l+3)(2l+1)} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde os sinais positivos e negativos correspondem a $j = l + 1/2$ e $j = l - 1/2$, respectivamente; aqui também foi usado:

$$\langle nljm_j m_s | \sigma_z | nljm_j m_s \rangle = \pm m_j / (2l + 1), \quad (3.33)$$

$$\langle nljm_j m_s | \sigma_x | nljm_j m_s \rangle = \langle nljm_j m_s | \sigma_y | nljm_j m_s \rangle = 0, \quad (3.34)$$

e a expressão para $\overline{(1/r^3)}$. A ordem de magnitude dessa correção é $gv_z e / (m_e a_0^3)$, implicando no mesmo limite superior para o produto (gv_z) dado pela eq. (3.26).

Portanto, a correção de energia total é $\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3$, com os dois últimos termos sendo as contribuições dominantes. Desse modo, o primeiro termo é quadrático em (gv_z) , o que determina sua pequenez perante os dois termos lineares em (gv_z) . Como um resultado esperado, foi observado que os termos lineares implicam em limites mais rigorosos sobre o produto (gv_z) do que o termo quadrático. Um aparato experimental concebido para calcular esse efeito medirá a correção total da energia, dada

por $\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3 \simeq \Delta E_2 + \Delta E_3$, ao invés de cada contribuição isolada. Isso parece indicar a inadequação do procedimento do cálculo individual de correções aqui adotado. Contudo, não é este o caso. Como o nosso objetivo final é estabelecer a ordem de magnitude superior para o produto (gv_z), tal que a violação de Lorentz não seja observada dentro da sensibilidade dos experimentos espectroscópicos, os cálculos individuais das contribuições funcionam como uma ferramenta efetiva para a realização do que se propõe.

3.2.2 Cálculo das correções na presença de um campo magnético externo fixo

Na sequência, consideraremos um campo magnético externo fixo e calculamos as correções induzidas pelo mesmo sobre o espectro, partindo dos termos de correção existentes no Hamiltoniano (3.8). Em princípio, três termos desse Hamiltoniano resultam em contribuições não nulas na presença de um campo magnético, ou seja:

$$\Delta E_{1B} = \frac{gv_0}{m_e} \langle nlm | (\vec{p} - e\vec{A}) \cdot \vec{B} | nlm \rangle, \quad (3.35)$$

$$\Delta E_{2B} = -\frac{g^2 v_0}{m_e} \langle nlm | \vec{B} \cdot (\vec{v} \times \vec{E}) | nlm \rangle, \quad (3.36)$$

$$\Delta E_{3B} = -\frac{eg}{m_e} \langle nlm | \vec{A} \cdot (\vec{v} \times \vec{E}) | nlm \rangle. \quad (3.37)$$

Para um campo fixo disposto ao longo do eixo-z, $\vec{B} = B_0 \hat{z}$, o vetor potencial no gauge simétrico tem a forma: $\vec{A} = -B_0(y/2, -x/2, 0)$. Com respeito ao primeiro termo, ΔE_{1B} , somente o produto $\vec{A} \cdot \vec{B}$ poderia fornecer uma contribuição não-trivial, uma vez que o cálculo do produto $\vec{p} \cdot \vec{B}$ na função de onda se anula (cálculo da média do momento linear sobre um estado ligado). Após simples inspeção, obtemos: $\Delta E_{1B} = \frac{egv_0}{m_e} \langle nlm | \vec{A} \cdot \vec{B} | nlm \rangle = 0$. Para resolver o segundo e terceiro termos, devemos escrever o produto $(\vec{v} \times \vec{E})$ explicitamente:

$$\begin{aligned} (\vec{v} \times \vec{E}) &= -\frac{e}{r^2} \left[(v_y \cos \theta - v_z \sin \theta \sin \phi) \hat{i} + (v_z \sin \theta \cos \phi - v_x \cos \theta) \hat{j} + \right. \\ &\quad \left. + (v_z \sin \theta \sin \phi - v_y \sin \theta \cos \phi) \hat{k} \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

No que concerne ao segundo termo, ΔE_{2B} , o produto $\vec{B} \cdot (\vec{v} \times \vec{E})$ gera apenas termos lineares em $\sin \phi$ e $\cos \phi$, o que implica num resultado nulo: $\Delta E_{2B} = 0$. Finalmente, no caso do terceiro termo, obtemos:

$$\Delta E_{3B} = -\frac{eB_0 g v_z}{m_e} \langle nlm | \frac{\sin^2 \theta}{r} | nlm \rangle, \quad (3.39)$$

cujos cálculo explícito conduz a:

$$\Delta E_{3B} = -\frac{e^2 B_0 (g v_z)}{m_e} \overline{\left(\frac{1}{r}\right)} \left[1 - \left(\frac{(l^2 - m^2)}{(2l-1)(2l+1)} + \frac{(l^2 - m^2 + 2l + 1)}{(2l+3)(2l+1)} \right) \right], \quad (3.40)$$

onde: $\overline{(1/r)} = [a_0 n^2]^{-1}$. Portanto, a ordem de magnitude dessa correção é de $e^2 B_0 (g v_z) / (m_e a_0)$.

Assim, observamos que o campo externo é capaz de induzir uma correção de energia que altera a estrutura fina do espectro. Para que a correção associada a um campo de magnitude de 1 G seja indetectável (experimentalmente), a mesma não deve acarretar alteração maior que 10^{-10} eV nos níveis de energia. Com isto, o seguinte limite é obtido:

$$(g v_z) \leq 10^{-25} (eV)^{-1}, \quad (3.41)$$

onde foi usada a seguinte conversão: $1G = 7 \times 10^{-11} (eV)^2$. Este resultado mostra que os limites mais rigorosos sobre o produto $(g v_z)$ são obtidos na presença de um campo magnético externo. Este é o cenário montado no caso do acoplamento não-mínimo livre de torção.

3.3 Acoplamento não-mínimo tipo torção

Uma outra maneira de acoplar o background violador da simetria de Lorentz (v^μ) com o campo fermiônico, é propondo um acoplamento não-mínimo do tipo torção, dado por:

$$D_\mu = \partial_\mu + eA_\mu + i g_a \gamma_5 b^\nu F_{\mu\nu}^*, \quad (3.42)$$

que também foi examinado na ref.[39].

Escrevendo o espinor ψ em termos das componentes *large* e *small* de forma similar ao realizado no caso anterior, obtemos as duas equações para os espinores de 2-componentes ϕ , χ :

$$\left[(E - m_e - eA_0) - g_a \vec{\sigma} \cdot (b^0 \vec{B} - \vec{b} \times \vec{E}) \right] \phi - \left[\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) - g_a \vec{b} \cdot \vec{B} \right] \chi, \quad (3.43)$$

$$\left[\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) + g_a \vec{b} \cdot \vec{B} \right] \phi - \left[(E + m_e - eA_0) - g_a \vec{\sigma} \cdot (b^0 \vec{B} - \vec{b} \times \vec{E}) \right] \chi, \quad (3.44)$$

das quais podemos escrever a componente fraca em termos da componente forte, $\chi = \frac{1}{2m_e} \left[\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) + g_a \vec{b} \cdot \vec{B} \right] \phi$. Substituindo a componente fraca na eq. (3.43), obtemos a equação de Pauli,

$$\left[H - eA_0 - g_a \vec{\sigma} \cdot (b^0 \cdot B - \vec{b} \times \vec{E}) \right] \phi = \left[\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) - g_a \vec{b} \cdot \vec{B} \right] \times \frac{1}{2m_e} \left[\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) + g_a \vec{b} \cdot \vec{B} \right] \phi, \quad (3.45)$$

cuja estrutura revela o momento generalizado canonico, $\vec{\Pi} = (\vec{p} - e\vec{A})$. Simplificando a equação acima, o Hamiltoniano não-relativístico assume a forma:

$$H = \left[\frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m_e} + eA_0 - \frac{e}{2m_e} (\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) \right] + g_a b_0 \vec{\sigma} \cdot \vec{B} - g_a \vec{\sigma} \cdot (\vec{b} \times \vec{E}) - \frac{g_a}{2m_e} (\vec{b} \cdot \vec{B})^2. \quad (3.46)$$

Este Hamiltoniano tem dois termos adicionais, $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{b} \cdot \vec{B}) - (\vec{b} \cdot \vec{B})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})$, que são iguais (se cancelam) para o caso do campo magnético uniforme. Portanto, não serão considerados aqui.

3.3.1 Correções na ausência de um campo externo fixo

Na ausência do campo magnético externo, somente o termo $\vec{\sigma} \cdot (\vec{b} \times \vec{E})$ contribui para a energia, implicando na seguinte correção:

$$\Delta E_\sigma = g_a \langle nljm_j m_s | \vec{\sigma} \cdot (\vec{b} \times \vec{E}) | nljm_j m_s \rangle. \quad (3.47)$$

Considerando que $\vec{\sigma} \cdot (\vec{b} \times \vec{E}) = -\frac{e}{r^2} [(b_y \cos \theta - b_z \sin \theta \sin \phi) \sigma_x + (b_z \sin \theta \cos \phi - b_x \cos \theta) \sigma_y + (b_z \sin \theta \sin \phi - b_y \sin \theta \cos \phi) \sigma_z]$, e a ação do operador de spin nos kets $|nljm_j m_s\rangle$, nota-se que: $\Delta E_\sigma = 0$. Portanto, o acoplamento não-mínimo tipo torção não gera nenhuma contribuição sobre os níveis de energia na ausência de campo externo.

3.3.2 Correções na presença de um campo externo fixo

Agora, o mesmo problema é considerado na presença de um campo magnético externo. Neste caso, aparece uma contribuição nova, não nula, associada com o termo $g_a b_0 \vec{\sigma} \cdot \vec{B}$, que gera uma separação tipo Zeeman nos níveis, cuja magnitude é linear no produto $g_a b_0$. Para o caso do campo magnético estar alinhado com o eixo-z, a correção de energia é $\Delta E_{1B} = g_a b_0 B_0 \langle nljm_j m_s | \sigma_z | nljm_j m_s \rangle$, que resulta em:

$$\Delta E_{1B} = \pm g_a b_0 B_0 \frac{m_j}{2l + 1}, \quad (3.48)$$

onde os sinais positivos e negativo correspondem a $j = l + 1/2$ e $j = l - 1/2$, respectivamente. Isto é exatamente o mesmo padrão da separação do efeito Zeeman, aqui com magnitude dada como $g_a b_0 B_0$. Desse modo, além do efeito Zeeman usual ocorre esse efeito Zeeman secundário, que implica numa correção à separação efetiva. O último termo da eq. (3.46) implica somente em uma correção constante sobre todos os níveis, o que não representa mudança no espectro. A magnitude da correção da eq. (3.48) é proporcional a $g_a b_0 B_0$. Se tal efeito não é perceptível para um campo magnético de intensidade de $1G$, o mesmo não deve implicar numa correção maior que $10^{-10}eV$. Com isto, obtemos o seguinte limite superior:

$$g_a b_0 \leq 10^{-20}(eV)^{-1}. \quad (3.49)$$

Ests resultado, juntamente com o advindo da eq.(3.40), mostra que a presença de um campo externo serve para estabelecer os limites superiores mais rigorosos sobre os parâmetros de violação de Lorentz neste modelo com acoplamento não-mínimo.

3.4 Comentários Finais

Neste capítulo, estudamos os efeitos de baixas energias de um *background* violador da simetria de Lorentz (em acoplamento não-mínimo com os campos de gauge e fermiônico) sobre a equação de Dirac. Neste sentido, foi estudado o limite não-relativístico desta equação, sendo obtido o Hamiltoniano não-relativístico, composto por termos violadores de Lorentz (advindos do acoplamento não-mínimo). As correções de primeira ordem induzidas por estes termos sobre os níveis de energia do átomo de hidrogênio foram determinadas. Como resultado, observamos desvios efetivos no espectro do hidrogênio, tanto na presença quanto na ausência do campo magnético externo. Na ausência do campo magnético externo, o termo $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu v^\nu F^{\alpha\beta}$ induz três diferentes correções, implicando em modificações na estrutura fina do espectro. Estes resultados indicam a quebra da degenerescência acidental, com a energia dependendo nos números quânticos l, m . Estipulando $10^{-10}eV$ como a magnitude máxima de uma alteração indetectável no espectro, estabelecemos um limite superior nos produtos dos parâmetros de violação: $gv_z \leq 10^{-25}(eV)^{-1}$.

No caso do acoplamento não-mínimo com torção, nenhuma correção é induzida na ausência de campo magnético externo; por outro lado, na presença de tal campo fixo,

um efeito Zeeman secundário é obtido. Considerando que tais correções devem ser menores que 10^{-10}eV (a fim de não serem detectáveis), um limite superior é estabelecido para o produto: $g_a b_0 \leq 10^{-20}(\text{eV})^{-1}$. Os resultados obtidos evidenciam que a violação de Lorentz no contexto do acoplamento não-mínimo estudado pode ser mais sensivelmente investigado na presença de um campo magnético externo.

4 Conclusão

A proposição do Modelo Padrão Estendido, por Colladay e Kostelecky, representa o estabelecimento de um ferramental teórico apropriado para investigar a violação das simetrias de Lorentz e CPT no contexto das teorias campos tradicionais. Neste sentido, a violação da simetria de Lorentz no Modelo Padrão pode ser entendida como uma assinatura, um traço remanescente de uma teoria mais fundamental, válida na escala de Planck. O procedimento de análise consiste em incorporar termos de quebra explícita da simetria de Lorentz na lagrangeana do Modelo Padrão usual, observando as alterações induzidas sobre a fenomenologia de diversos sistemas físicos diferentes. A comparação entre tais previsões teóricas e os dados experimentais serve como ferramenta para estabelecimento de rigorosos limites superiores sobre os parâmetros de violação da simetria de Lorentz, uma vez que a covariância de Lorentz mostra-se válida com grande nível de precisão. Seguindo esta linha de atuação, muitas análises já foram realizadas envolvendo sistemas fermiônicos e o setor de gauge do MPE, implicando em severas limitações sobre os correspondentes parâmetros de quebra.

Os desenvolvimentos teóricos e resultados obtidos neste trabalho enquadram-se exatamente nesta linha de procedimento. Considerando-se de início a inserção de termos violadores de Lorentz na lagrangeana de Dirac, são analisada as consequências induzidas por tais termos nas soluções da equação de Dirac e, principalmente, no seu limite não-relativístico, passando também pelas implicações sobre o espectro do hidrogênio. Inicialmente, consideramos o background violador de Lorentz ligado ao setor fermiônico por dois termos de acoplamento: um vetorial e outro pseudo-vetorial. Em ambos os casos, são obtidos os Hamiltonianos não-relativísticos, que apresentam termos de correção dependentes do background. No caso do acoplamento vetorial, tais termos não induzem qualquer modificação sobre o espectro do hidrogênio (na presença ou ausência de campo magnético externo), o que está de acordo com fato deste background determinar apenas um deslocamento no momento do sistema. No caso do acoplamento pseudo-vetorial, entretanto, o Hamiltoniano não-relativístico possui um termo que modifica o espectro, induzindo uma alteração de energia similar ao efeito Zeeman (na ausência de campo magnético externo). Tal efeito é então usado para estabelecer um limite superior sobre o

magnitude do background: $b_z < 10^{-10}eV$. Em seguida, no capítulo III deste trabalho foi considerado o acoplamento não-mínimo do background com o campo fermiônico e o campo de gauge, procedendo-se à investigação dos possíveis efeitos induzidos por tal acoplamento (introduzido dentro da derivada covariante) sobre o limite não-relativístico da equação de Dirac e sobre o espectro do hidrogênio. Primeiramente, a análise foi realizada para o caso do acoplamento sem torção. Similarmente ao que fora feito antes, o limite não-relativístico foi calculado, e o Hamiltoniano obtido. Em seguida, foi avaliada a influência de tal Hamiltoniano sobre os níveis de energia do átomo de hidrogênio. Estes cálculos foram efetuados, num primeiro momento, para o caso do átomo de hidrogênio livre (sem campo externo, $\vec{A} = 0$), no qual somente os três termos independentes de \vec{B} contribuem. Três correções de energia foram então determinadas, sendo então utilizadas para impor limites superiores sobre os parâmetros de quebra. Nesta etapa, o limite mais rigoroso encontrado foi $(gv_z) < 10^{-14}(eV)^{-2}$. Em meio a presença de um campo magnético externo, um dos termos conduziu a uma correção não-nula, com a qual o seguinte limite superior foi estabelecido: $(gv_z) < 10^{-25}(eV)^{-2}$. Na sequência, foi analisado o caso do acoplamento não-mínimo com torção, para o qual foi obtido uma correção de energia não-nula apenas na presença de um campo magnético externo. Com esta correção, um novo limite foi estabelecido: $(gv_z) < 10^{-25}(eV)^{-2}$. Como consequência, concluímos que os mais sensíveis teste de violação de Lorentz neste modelo devem ser feitos na presença de uma campo magnético externo.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, *Ann.der Physik* 17, 981 (1905).
- [2] S.M. Carroll, G.B. Field, R. Jackiw, *Phys. Rev. D* 41, 1231 (1990).
- [3] V. A. Kostelecky, S. Samuel, *Phys. Rev. D* 39, 683 (1989); *Phys. Rev. Lett.* 63, 224 (1989); *Phys. Rev. D* 40, 1886 (1989); *Phys. Rev. Lett.* 66, 1811 (1991); V. A. Kostelecky, R. Potting, *Nucl. Phys. B* 359, 545 (1991); *ibid*, *Phys. Lett. B* 381, 89 (1996); *ibid*, *Phys. Rev. D* 51, 3923 (1995).
- [4] D. Colladay and V. A. Kostelecký, *Phys. Rev. D* 55,6760 (1997); D. Colladay and V. A. Kostelecký, *Phys. Rev. D* 58, 116002 (1998).
- [5] S.M. Carroll et al., *Phys. Rev. Lett.* 87, 141601 (2001); A. Anisimov et al., *Phys. Rev. D* 65, 085032 (2002); C.E. Carlson et al., *Phys. Lett. B* 518, 201 (2001); J. L. Hewett, F.J. Petriello, T. G. Rizzo, *Phys. Rev. D* 64, 075012 (2001); O. Bertolami and L. Guisado, *JHEP* 0312 (2003) 013.
- [6] V.A. Kostelecky, R. Lehnert, M. Perry, *Phys. Rev. D* 68, 123511 (2003); O. Bertolami, R. Lehnert, R. Potting, A. Ribeiro, *Phys. Rev. D* 68, 083513 (2004); O. Bertolami, *Class.Quant.Grav.*14, 2785 (1997).
- [7] J. Alfaro, H.A. Morales-Tecotl, and L.F.Urrutia, *Phys. Rev. Lett.* 84, 2318 (2000); J. Alfaro, H.A. Morales-Tecotl, L.F.Urrutia, *Phys. Rev. D* 65, 103509 (2002).
- [8] V.A. Kostelecky, C. D. Lane, *J. Math. Phys.* 40, 6245 (1999); R. Lehnert, *J. Math. Phys.* 45, 3399 (2004).
- [9] V.A. Kostelecky, C. D. Lane, *Phys. Rev. D* 60, 116010 (1999).
- [10] R. S. Van Dyck Jr., P. B. Schwinberg and H. G. Dehmelt, *Phys. Rev. Lett.* 59, 26 (1987); -*ibid*, *Phys. Rev. D* 34, 722 (1986); L.S. Brown and G. Gabrielse, *Rev. Mod. Phys.* 58, 233 (1986).
- [11] R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and N. Russell, *Phys. Rev. Lett.* 79, 1432 (1997); R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and N. Russell, *Phys. Rev. D* 57, 3932 (1998).

- [12] R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and C. Lane, Phys. Rev. Lett. 84, 1098 (2000).
- [13] R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and N. Russell, Phys. Rev. Lett. 82, 2254 (1999).
- [14] R. Bluhm and V.A. Kostelecky, Phys. Rev. Lett. 84, 1381 (2000).
- [15] R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and N. Russell, Phys. Rev. Lett. 79, 1432 (1997); R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and N. Russell, Phys. Rev. D 57, 3932 (1998).
- [16] V.A. Kostelecky and C. Lane, Phys. Rev. D 60, 116010 (1999); R. Bluhm, V.A. Kostelecky, C. D. Lane, and N. Russell, Phys. Rev. Lett. 88, 090801 (2002).
- [17] M. M. Ferreira Jr and F. M. O. Mouchereck, hep-th/0601018, "Influence of Lorentz- and CPT-violating terms on the Dirac equation", aceito para publicação no Int. J. Mod . Phys. A. (2006).
- [18] H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., J. A. Helayël-Neto, and F. M. O. Mouchereck, hep-th/0604149, "Lorentz-violation corrections on the hydrogen spectrum induced by a non-minimal coupling", aceito para publicação no Phys. Rev. D (2006).
- [19] S.R. Coleman and S.L. Glashow, Phys. Rev. D 59, 116008 (1999).
- [20] V. A. Kostelecký and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. 87, 251304 (2001); V. A. Kostelecký and M. Mewes, Phys. Rev. D 66, 056005 (2002).
- [21] C. Adam and F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B 607, 247 (2001); C. Adam and F.R. Klinkhamer, Phys. Lett. B 513, 245 (2001).
- [22] V.A. Kostelecky and R. Lehnert, Phys. Rev. D 63, 065008 (2001).
- [23] R. Lehnert, Phys. Rev. D 68, 085003 (2003).
- [24] R. Montemayor and L.F. Urrutia, Phys. Rev. D 72, 045018 (2005); Q. G. Bailey and V. Alan Kostelecky, Phys. Rev. D 70, 076006 (2004).
- [25] B. Altschul, Phys. Rev. D 72, 085003 (2005); B. Altschul, Phys. Rev. D 70 (2004) 056005.
- [26] P. A. Bolokhov, S. G. Nibbelink, M.Pospelov, Phys. Rev. D72, 015013 (2005).

- [27] A.A. Andrianov and R. Soldati, Phys. Rev. D 51, 5961 (1995); A.A. Andrianov and R. Soldati, Phys. Lett. B 435, 449 (1998); A.A. Andrianov, R. Soldati and L. Sorbo, Phys. Rev. D 59, 025002 (1999).
- [28] R. Jackiw and V. A. Kostelecký, Phys. Rev. Lett. 82, 3572 (1999); J. M. Chung and B. K. Chung Phys. Rev. D 63, 105015 (2001); J.M. Chung, Phys.Rev. D 60, 127901 (1999); G. Bonneau, Nucl.Phys. B 593, 398 (2001); M. Perez-Victoria, Phys. Rev. Lett. 83, 2518 (1999); M. Perez-Victoria, JHEP 0104, 032 (2001); A. P. Baêta Scarpelli, M. Sampaio, M. C. Nemes, and B. Hiller, Phys. Rev. D 64, 046013 (2001); F.A. Brito et al., JHEP 0510 (2005) 019.
- [29] R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. Lett. 93, 110402 (2004); R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. D 70, 125010 (2004).
- [30] O. Bertolami, Gen.Rel.Grav. 34, 707 (2002); O.Bertolami and C.S. Carvalho, Phys.Rev. D 61, 103002 (2000).
- [31] A. P. Baêta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo, J.A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D 67, 085021 (2003).
- [32] H. Belich M. M. Ferreira Jr, J.A. Helayel-Neto, M. T. D. Orlando, Phys. Rev. D 67, 125011 (2003); -ibid, Erratum to Phys. Rev. D 67, 125011 (2003).
- [33] H. Belich, M. M. Ferreira Jr, J.A. Helayel-Neto, M. T. D. Orlando, Phys. Rev. D 68, 025005 (2003).
- [34] H. Belich et al., Phys. Rev. D 68, 065030 (2003); -ibid, Nucl. Phys. B Suppl. 127, 105 (2004).
- [35] H. Belich, M. M. Ferreira Jr and J. A. Helayel-Neto, Eur. Phys. J. C 38, 511 (2005).
- [36] H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., J. A. Helayel-Neto, Eur. Phys. J. C 42, 127 (2005).
- [37] H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., J. A. Helayel-Neto, Eur. Phys. J. C 41, 421 (2005).
- [38] M. M. Ferreira Jr, Phys. Rev. D 70, 045013 (2004); M. M. Ferreira Jr, Phys. Rev. D 71, 045003 (2005).

- [39] H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr. and J. A. Helayël-Neto, Eur. Phys. J. C 42, 127 (2005); H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., J. A. Helayël-Neto and M.T.D. Orlando, Int. J. Mod. Phys. A 21, 2415 (2006).
- [40] H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., J. A. Helayël-Neto, and M.T. D. Orlando, Phys. Lett. B 639, 675 (2006).
- [41] G.M. Shore, Nucl. Phys. B 717, 86 (2005).
- [42] L. H. Ryder and I.L. Shapiro, Phys. Lett. A 247, 21 (1998); I.L. Shapiro, Phys. Reports 357, 113 (2002).
- [43] Y. Aharonov and A. Casher, Phys. Rev. Lett. 53, 319 (1984); J. Anandan, Phys. Lett. B 138, 347, (1989); Erik Sjöqvist, Phys. Rev. Lett. 89, 210401 (2002)