

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Efeitos da quebra espontânea da simetria-CPT
e da invariância de Lorentz no fenômeno
da condensação de Bose-Einstein**

Kleber Anderson Teixeira da Silva

ORIENTADOR: RODOLFO ALVÁN CASANA SIFUENTES

SÃO LUÍS, ABRIL DE 2011

**Efeitos da quebra espontânea da simetria-CPT
e da invariância de Lorentz no fenômeno
da condensação de Bose-Einstein**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

Orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes

Doutor em Física - UFMA

SÃO LUÍS, ABRIL DE 2011

Silva, Kleber Anderson Teixeira da.

Efeitos da quebra espontânea da simetria-CPT e da invariância de Lorentz no fenômeno da condensação de Bose-Einstein./ Kleber Anderson Teixeira da Silva - 2011
62.p

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Física

Universidade Federal do Maranhão.

Orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes

1. Condensação de Bose-Einstein
2. Teoria de campos à temperatura finita
3. Quebra da simetria de Lorentz. I. Título

CDU 538.9

KLEBER ANDERSON TEIXEIRA DA SILVA

**Efeitos da quebra espontânea da simetria-CPT
e da invariância de Lorentz no fenômeno
da condensação de Bose-Einstein**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

BANCA EXAMINADORA

Rodolfo Alván Casana Sifuentes (*ORIENTADOR*)

Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Manoel Messias Ferreira Junior

Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Edilberto Oliveira Silva

Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Ao Senhor Jesus Cristo, meu Salvador!

Agradecimentos

Dedico este trabalho ao Criador de todas as coisas: À Jesus Cristo, sem Ele esse trabalho não seria possível.

À minha família, principalmente minha mãe Nelcir e minha irmã Kerline que sempre acreditaram em mim! À minha Igreja, BATISTA BASILÉIA. Aos meus pastores Ivanildo e Teresa pelas incessantes orações! À minha princesa: Carla Costa Sousa. EU TE AMO! Muito obrigado pelo seu amor!

Ao meu orientador Rodolfo Alván Casana Sifuentes pela orientação, amizade e, principalmente, pela paciência que teve comigo nestes dois anos que se seguiram: Muito obrigado professor! eu aprendi muito com o senhor!

À todos os professores do Departamento de Física da UFMA pelos seus ensinamentos, pelas inúmeras conversas sobre essa bela ciência. Quero agradecer também aos meus grandes amigos do mestrado que muito me ajudaram: Eduardo Santos, Fabiano Simas, Wesley Melo, Mauro Bogéa!

À Capes pelo auxílio financeiro durante a execução do trabalho.

A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.

Albert Einstein

Resumo

A condensação de Bose-Einstein (CBE), também conhecida como o quinto estado da matéria, foi prevista teoricamente por Albert Einstein em 1925 e verificado experimentalmente 70 anos depois, em 1995. Esta dissertação aborda os efeitos da quebra espontânea da simetria-CPT e da invariância de Lorentz (também chamada simplesmente de violação da simetria de Lorentz) na condensação de Bose-Einstein de um gás ideal bosônico nos limites não relativístico e ultrarelativístico. O trabalho é baseado em um modelo de teoria de campos descrito por um campo escalar complexo massivo no marco da quebra espontânea da simetria-CPT e da invariância de Lorentz. Primeiro estudamos a CBE no limite não relativístico partindo da versão não relativística do nosso modelo. Desse modo, a existência da CBE impõe restrições severas sobre alguns parâmetros que regem a violação da invariância de Lorentz (VIL). Observamos que somente a temperatura crítica é modificada pela VIL. Também, usamos dados experimentais para obter limites superiores para os coeficientes que controlam a VIL. Pelo fato do nosso modelo descrever de modo consistente a CBE no limite não relativístico podemos usá-lo para estudar a CBE ultrarelativística de um gás ideal bosônico carregado. Assim, mostramos que a construção de uma função de partição bem definida, para descrever o gás ideal relativístico, impõe restrições severas sobre dois parâmetros que controlam a VIL. A análise da CBE no limite ultrarelativístico mostra que tanto a temperatura crítica como o potencial químico são afetados pela quebra espontânea da invariância de Lorentz.

Palavras Chaves: Condensação de Bose-Einstein, Teoria de campos à temperatura finita, Quebra da simetria de Lorentz.

Abstract

The Bose-Einstein condensate (BEC), also known as the fifth state of the matter, was predicted theoretically by Albert Einstein in 1925 and verified experimentally 70 years later in 1995. This dissertation addresses the effects of spontaneous broken of the CPT-symmetry and of the invariance Lorentz (also called simply the violation of Lorentz symmetry) in the Bose-Einstein condensation of an ideal bosonic gas in the limits nonrelativistic and will ultrarelativístico. The work is based on a model of fields theory described by a massive complex scalar field in the framework of spontaneous breaking of the CPT-symmetry and of the Lorentz invariance. First we study the CBE in the nonrelativistic limit starting from the non relativistic version of our model. Thus, the existence of the CBE imposes strong restrictions on some parameters governing the breach of Lorentz invariance (VIL). We observed that only the critical temperature is modified by the VIL. Also, we use experimental data to obtain limits upper for the coefficients that control the VIL. Because of our model describe consistently the CBE in the non relativistic limit We can use it to study the CBE ultrarelativística of an ideal bosonic gas loaded. Thus, we show that the construction of a partition function well defined to describe the relativistic ideal gas, imposes strong restrictions on two parameters that control the VIL. The analysis of the CBE in the ultrarelativístico limit shows that both the critical temperature as the chemical potential are affected by the spontaneous breaking of the invariance of Lorentz.

Keywords: Bose-Einstein condensation, Finite-Temperature Field Theory, Lorentz symmetry breaking.

Sumário

1	Introdução	3
1.1	Condensados de Bose-Einstein	3
1.2	Condensados de Bose-Einstein no contexto da violação da simetria-CPT e da invariância de Lorentz	4
2	Campo escalar à temperatura finita	9
2.1	Campo escalar real	9
2.1.1	A função de partição	9
2.1.2	Propriedades termodinâmicas	13
3	Estudo da condensação de Bose-Einstein: Modelo teórico	14
3.1	Campo escalar complexo	14
3.1.1	A função de partição	16
3.1.2	A condensação de Bose-Einstein no limite ultrarelativístico	20
3.2	Campo escalar complexo no limite não relativístico	22
3.2.1	A função de partição	23
3.2.2	A condensação de Bose-Einstein no limite não relativístico	25
4	Campo escalar complexo no contexto da violação da invariância de Lorentz	27
4.1	O gás ideal não relativístico sob os efeitos CPT-par e violando a invariância de Lorentz	28
4.1.1	A função de partição	30
4.1.2	A CBE de um gás ideal não relativístico sob os efeitos CPT-par e violando a invariância de Lorentz	35
5	O gás ideal relativístico sob os efeitos da quebra espontânea da invariância de Lorentz	37
5.1	A função de partição	38
5.2	A CBE no limite ultrarelativístico no marco da violação da invariância de Lorentz .	43

6	Conclusões e perspectivas	46
A	Notação e algumas relações úteis	49
	Referências Bibliográficas	49

Capítulo 1

Introdução

1.1 Condensados de Bose-Einstein

A condensação de Bose-Einstein foi proposta como um fenômeno teórico em 1925 por Albert Einstein em um artigo intitulado *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases II* (Teoria Quântica do gás Monoatômico II) [1]. Esse trabalho foi inspirado em uma formulação da estatística quântica desenvolvida pelo físico indiano Satyendra Nath Bose com o intuito de explicar a radiação do corpo negro [2]. Nesse trabalho, Einstein considerou um gás de bósons massivos não interagentes e previu que a partir de uma certa densidade crítica as partículas se condensam no estado fundamental, um fenômeno de origem puramente quântico. Einstein relatou a descoberta desse fenômeno, em carta a seu amigo Paul Ehrenfest, da seguinte maneira: “*A partir de uma certa temperatura, as partículas se condensam, sem forças atrativas, ou seja, elas se acumulam no estado de velocidade zero. A teoria é bonita, mas haverá nela alguma verdade?*” [3].

A característica crucial dos condensados de Bose-Einstein é que as muitas partes que compõem o sistema ordenado não só se comportam como um todo, mas se tornam o todo. Suas identidades se fundem, ou se entrelaçam de tal forma a perder completamente suas características individuais. Uma boa analogia seria as muitas vozes de um coro, que se fundem para se tornar “uma voz” a certos níveis da harmonia, ou o cindir de muitas cordas de muitos violinos para se tornarem “o som de violinos...” (Danah Zohar) [4, 5].

Para observarmos os efeitos quânticos em sistemas diluídos, como é o caso da CBE, a temperatura deve ser da ordem de 10^{-5} K ou menor. Por outro lado, no caso de sólidos e líquidos os efeitos quânticos são observados a temperaturas maiores. Nos sólidos, os efeitos quânticos chegam a ser fortes para os elétrons em metais abaixo da temperatura de Fermi, que é da ordem de 10^4 - 10^5 K; para os fótons, esses efeitos são observados abaixo da temperatura de Debye, que é da ordem de 10^2 K. Para o hélio líquido, os fenômenos quânticos são observados a temperaturas da ordem de

1K. Em um núcleo atômico, devido a densidade de partículas muito elevada, o estado degenerado surge a temperatura da ordem de 10^{11} K [6].

A evidência experimental da condensação de Bose-Einstein foi obtida, 70 anos mais tarde, em 1995 por dois grupos de pesquisa: O primeiro, da Colorado University e dirigido por Eric Cornell e Carl Wieman. Eles criaram um condensado de Bose-Einstein usando um gás de átomos de Rubídio (^{87}Rb) arrefecido (resfriado) a 170 nK. Quatro meses depois, um segundo grupo, pertencente ao Massachusetts Institute of Technology (MIT) dirigido por Wolfgang Ketterle, observou a formação de um condensado de átomos de Sódio (^{23}Na). Em virtude destes acontecimentos eles ganharam o prêmio Nobel de Física em 2001.

1.2 Condensados de Bose-Einstein no contexto da violação da simetria-CPT e da invariância de Lorentz

A simetria-CPT consiste na combinação de três simetrias discretas: a conjugação de carga (C), a inversão espacial ou paridade (P) e a reversão temporal (T). A simetria de conjugação de carga transforma estados de partículas em estados de anti-partículas ou vice-versa. Por exemplo: Um elétron transformando-se em um pósitron¹. Esta simetria supõe que para cada partícula existe uma anti-partícula correspondente. Já a simetria de paridade é caracterizada por um sistema que é invariante sob a inversão das coordenadas espaciais, ou seja, $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$. Por exemplo, uma esfera homogênea colocada diante de um espelho. A reversão temporal porém, consiste em inverter o sentido da evolução temporal do sistema, isto é, $t \rightarrow -t$. Por exemplo, assistindo um filme do começo ao fim e, logo em seguida, do fim ao início, observaremos as imagens retrocedendo e contando uma história diferente da contada no sentido natural do filme. Neste caso não há simetria. Agora, se filmarmos uma bola de bilhar ricocheteando contra a lateral de uma mesa de bilhar e retornando ao seu ponto inicial e, em seguida, retrocedermos as imagens veremos exatamente às mesmas cenas do filme no sentido natural sem, contudo, determinarmos o sentido real do filme. Neste caso há simetria de inversão temporal.

Importante mencionar que na natureza foram observadas violações de modo individual das simetrias C, P², T e até CP, mas até o momento não existe nenhuma comprovação experimental da violação das simetrias PT e CPT. A simetria CP é o produto das simetrias de conjugação de carga e paridade. Esta simetria foi proposta por Landau em 1957 e descoberta posteriormente em 1964 pelos norte-americanos James Cronin e Val Fitch os quais ganharam o prêmio Nobel de

¹Descoberto em 1931 por Carl Anderson, o pósitron possui mesma massa e spin do elétron, porém carga oposta.

²Por exemplo, decaimento Beta

Física de 1980. A quebra espontânea da simetria CP, proposta pelo físico teórico japonês Yoichiro Nambu quando estudava decaimento de káons³, implica na possibilidade de explicar o porque do universo ter mais matéria que anti-matéria. A violação da simetria CP nos diz que um dado processo físico constituído de matéria na frente de um espelho não é equivalente ao processo visto com anti-matéria atrás do espelho [7]. Devido a estas contribuições Yoichiro Nambu foi um dos laureados com o prêmio Nobel de Física em 2008.

Diferentemente da simetria-CPT, as transformações de Lorentz são contínuas e são constituídas pelas rotações espaciais e *boosts*. Os *boosts* são transformações que envolvem “rotações” misturando as coordenadas espaciais e temporais. Assim, um sistema físico possui simetria de Lorentz se as leis físicas que o descrevem não são afetadas, ou seja, permanecem invariantes sob estas transformações.

As simetrias de Lorentz e CPT estão intimamente ligadas por um resultado teórico muito geral, denominado teorema CPT. Este teorema afirma que as teorias com simetria de Lorentz também devem ter simetria-CPT. Por exemplo, a eletrodinâmica quântica (QED), a cromodinâmica quântica (QCD) e o modelo padrão das partículas elementares [8, 9].

A construção das teorias quânticas de campos descrevendo as partículas elementares e suas interações são restritas pelo teorema CPT que estabelece que toda teoria quântica de campos, além de ter simetria-CPT na sua estrutura, deve satisfazer as seguintes propriedades: princípio de localidade, invariância sobre a simetria de Lorentz e analiticidade das representações dos grupos de Lorentz com respeito aos parâmetros de rotação e boosts [10]. Em resumo, a simetria-CPT prevê que, um relógio substituído pelo seu equivalente de anti-matéria, com paridade invertida e andando para trás no tempo, manterão horários idênticos [11].

O Modelo Padrão (MP) é, até o momento, a mais sofisticada teoria matemática sobre a natureza. O Modelo Padrão, cujo grupo de simetria é o $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, é uma teoria compreensiva que identifica as partículas elementares e especifica como elas interagem através da interação forte, $SU(3)$, a interação fraca, $SU(2)$ e a interação eletromagnética $U(1)$. Dessa forma, tudo o que acontece em nosso mundo (exceto os efeitos da gravidade) resulta das interações das partículas contidas no MP segundo suas regras e equações [12].

O Modelo Padrão Estendido (MPE), proposto por Colladay e Kostelecky [13], é uma generalização do conhecido Modelo Padrão (MP) das partículas elementares. O MPE contém, além das três interações fundamentais (eletromagnética, forte e fraca), interações que violam as simetrias CPT e Lorentz que são controladas por coeficientes⁴ que são quantidades tensoriais genuínas no

³São mésons que possuem um quark do tipo *s* (*strange*), composto de partículas subatômicas K^+ , K^- , K^0 e anti- K^0 . Possuem spin nulo.

⁴Gerados via a quebra espontânea da simetria de Lorentz numa teoria quântica fundamental definida na escala de Planck

referencial do observador. A quebra espontânea da simetria de Lorentz garante que ela ainda permaneça tanto como uma simetria da teoria fundamental como também da teoria efetiva (no referencial do observador) emergente abaixo da escala de Planck. Por outro lado, no referencial da partícula esses coeficientes tensoriais resultantes da quebra ou violação espontânea da simetria de Lorentz não seguem as regras de transformação impostas pela covariância de Lorentz.

Uma forte motivação para estudar o MPE é a necessidade de conseguir alguma informação sobre a física fundamental que aparece na escala de Planck⁵, onde se cogita que a simetria de Lorentz pode ser quebrada espontaneamente devido aos efeitos quânticos gerados pela gravidade quântica. Essa procura é feita principalmente no setor fotônico do MPE que tem sido amplamente estudado com dois propósitos: a determinação de novos efeitos eletromagnéticos induzidos pela interação do campo eletromagnético de Maxwell com os campos tensoriais gerados pela quebra espontânea da simetria de Lorentz e a imposição de limites superiores rigorosos para as magnitudes dos coeficientes tensoriais que regem os efeitos da violação da simetria de Lorentz a baixa energia [15, 16, 17]. Neste contexto, em um recente trabalho [18], estudou-se as consequências do termo violador tipo $-\frac{1}{4}W_{\mu\nu\sigma\lambda}F^{\mu\nu}F^{\sigma\lambda}$, na eletrodinâmica resultante, com o objetivo de analisar até que ponto a simetria de Lorentz é uma simetria exata da natureza. Na referência [19], estudou-se, via formalismo de teoria quântica de campos à temperatura finita (Mecânica Estatística Quântica), os possíveis efeitos do termo de Carroll-Field-Jackiw, $-\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}(k_{AF})_{\mu}A_{\nu}F_{\sigma\lambda}$, nas propriedades termodinâmicas do campo eletromagnético de Maxwell. Os efeitos da violação da invariância de Lorentz nas propriedades termodinâmicas da eletrodinâmica CPT-par do modelo padrão estendido (MPE) foram estudadas em [20].

A quebra espontânea de uma simetria ocorre em um sistema físico cuja lagrangiana (ou hamiltoniana) possui uma simetria que não é compartilhada pelo vácuo ou estado de menor energia.

A quebra espontânea de simetria foi observada primeiramente no estudo dos ferromagnetos e apresentada por Werner Heisenberg em 1927 (prêmio Nobel de 1932). Esse é um tipo de sistema de infinitos dipolos magnéticos de spin $\frac{1}{2}$ [7] cuja hamiltoniana é invariante sob a simetria de rotação. Então, para temperaturas acima da temperatura crítica, T_c , o sistema não possui uma direção preferível (fase desordenada) e sua magnetização é nula. Já para temperaturas abaixo da temperatura de transição, o sistema apresenta uma magnetização espontânea (fase ordenada), pelo fato dos dipolos magnéticos se alinharem numa direção particular. Desse modo, a simetria rotacional $SO(3)$ é quebrada para $SO(2)$.

Para ilustrar o que vem a ser uma quebra espontânea de simetria apresentaremos o seguinte

⁵A escala de Planck, equivale a distância ($L_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-35}$ m), ou ao intervalo temporal ($t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 10^{-44}$ s) ou a massa ($M_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 10^{-5}$ g). Veja [14].

exemplo:



Figura 1.

Considere um lápis em equilíbrio pela ponta, sendo a ponta um ponto de equilíbrio instável (vide Figura 1). Contudo, nesta situação, o lápis possui uma simetria $O(2)$ ao longo do seu eixo. O lápis têm uma infinidade de direções para cair, ou seja, ele pode cair para frente, para trás, para esquerda, para direita, etc. Porém, no instante que ele for “solto” cairá ao longo de uma direção em particular, atingindo seu estado de menor energia e ficando estável. O lápis ao cair e escolher uma direção em particular quebra a simetria $O(2)$ pois, no plano esta simetria não existe mais [7].

Recentemente, tem-se investigado os efeitos da quebra espontânea da simetria-CPT e da invariância de Lorentz na mecânica estatística e, especificamente, na condensação de Bose-Einstein não relativística dentro do arcabouço teórico do modelo padrão estendido [21, 22]. Com este objetivo em mente, analisamos os possíveis efeitos decorrentes da violação da invariância de Lorentz e da simetria-CPT na condensação de Bose-Einstein de um sistema bosônico, descrito por um campo escalar complexo nos limites não relativístico e ultrarelativístico.

A grande motivação para o estudo da condensação de Bose-Einstein no marco da violação da invariância de Lorentz é o fato deste fenômeno poder abrir um novo caminho à procura de pequenos efeitos, produzidos por tal quebra, nos sistemas da matéria condensada devido as refinadas técnicas experimentais já encontradas nos laboratórios.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma. No capítulo **2**, apresentamos os conceitos básicos da teoria de campos à temperatura finita estudando o campo escalar real a fim de apresentar, de forma totalmente didática o formalismo do tempo imaginário no contexto da integração funcional para encontrarmos a função de partição do sistema. O formalismo do tempo imaginário é apropriado para descrever sistemas em equilíbrio termodinâmico. Neste formalismo, a dimensão temporal fica completamente associada à temperatura, caracterizando a inexistência de evolução do tempo físico. A partir da função de partição podemos obter as propriedades termodinâmicas do nosso sistema, tais como: Pressão, entropia e energia. No capítulo **3**, estudamos o fenômeno da condensação de Bose-Einstein do gás ideal descrito por um campo escalar complexo massivo. Partindo da lagrangiana relativística do campo escalar estudamos a CBE para o gás ultrarelativístico. O caso

não relativístico é abordado a partir do limite não relativístico da lagrangiana original. O objetivo principal, além de generalizar o método aplicado no capítulo anterior, é mostrar como este fenômeno se comporta sem os termos que controlam os efeitos da quebra espontânea da invariância de Lorentz. No capítulo 4, apresentamos um modelo para o campo escalar complexo no contexto da quebra espontânea da simetria-CPT e da invariância de Lorentz. Usando o limite não relativístico do modelo estudamos os possíveis efeitos da violação da invariância de Lorentz no fenômeno da CBE no limite não relativístico. No capítulo 5, estudamos o gás ideal relativístico e sua condensação no limite ultrarelativístico sob os efeitos da violação da invariância de Lorentz. No final, apresentamos nossas conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

Campo escalar à temperatura finita

Neste capítulo apresentaremos a construção da função de partição, ente fundamental na descrição das propriedades termodinâmicas de um dado sistema físico. Para tal propósito e com caráter meramente didático estudaremos o campo escalar real massivo, o qual possui apenas um grau de liberdade.

2.1 Campo escalar real

A densidade lagrangiana para o campo escalar real massivo é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (2.1)$$

onde m é a massa do campo. O momento canônico conjugado é dado por

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} = \dot{\phi}. \quad (2.2)$$

Pelo fato da velocidade $\dot{\phi}$ ser expressa em termos do momento canônico conjugado, o modelo descrito por (2.1) não possui vínculos. A densidade hamiltoniana canônica resulta ser:

$$\mathcal{H}_C = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (2.3)$$

2.1.1 A função de partição

O modelo descrevendo o campo escalar não possui vínculos, logo a função de partição é simplesmente definida segundo o método desenvolvido por Faddeev-Senjanovic [23]. Desse modo, a função de partição para o campo real massivo em equilíbrio termodinâmico é dado por

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} e^{-\beta H_C} = N \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \exp \left\{ \int_\beta dx [i\pi \partial_\tau \phi - \mathcal{H}_C] \right\}, \quad (2.4)$$

onde \mathcal{H}_C é a densidade hamiltoniana canônica dada em (2.3) e

$$\int_{\beta} dx = \int_0^{\beta} d\tau \int d^3\mathbf{x},$$

é a medida de integração no espaço de configuração. A integração funcional do campo escalar deve ser realizada sobre as configurações de campo satisfazendo a condição de periodicidade:

$$\phi(0, \mathbf{x}) = \phi(\beta, \mathbf{x}). \quad (2.5)$$

Então, substituindo a equação (2.3) em (2.4), encontramos:

$$\mathcal{Z} = N \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[i\pi \partial_{\tau} \phi - \frac{1}{2} \pi^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \right\}. \quad (2.6)$$

Agora, realizando a integração sobre o momento canônico conjugado, ou seja,

$$A_{\pi}(\phi) = N \int \mathcal{D}\pi \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left(i\pi \partial_{\tau} \phi - \frac{1}{2} \pi^2 \right) \right\}, \quad (2.7)$$

é necessário completar quadrado na exponencial. Assim, ficamos com,

$$A_{\pi}(\phi) = N \int \mathcal{D}\pi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\beta} dx \left[(\pi - i\partial_{\tau} \phi)^2 + (\partial_{\tau} \phi)^2 \right] \right\}. \quad (2.8)$$

Agora, fazendo uma translação em π :

$$\pi \rightarrow \pi + i\partial_{\tau} \phi,$$

a medida de integração não muda, isto é,

$$\mathcal{D}\pi \rightarrow \mathcal{D}\pi,$$

encontramos,

$$A_{\pi}(\phi) = N'(\beta) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\beta} dx (\partial_{\tau} \phi)^2 \right\}, \quad (2.9)$$

em que,

$$N'(\beta) = N \int \mathcal{D}\pi \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left(-\frac{1}{2} \pi^2 \right) \right\}. \quad (2.10)$$

Substituindo (2.9) na (2.6), obtemos

$$\mathcal{Z} = N'(\beta) \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[-\frac{1}{2} (\partial_{\tau} \phi)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \right\}. \quad (2.11)$$

Realizando uma integração por partes nos dois primeiros termos que aparecem na exponencial, encontramos

$$\int_{\beta} dx \left[-\frac{1}{2} (\partial_{\tau} \phi)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right] = - \int_{\beta} dx \frac{1}{2} \phi \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \nabla^2 \right] \phi = - \int_{\beta} dx \frac{1}{2} \phi \square \phi, \quad (2.12)$$

onde definimos o operador D'Alambertiano no espaço euclideano como:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \nabla^2. \quad (2.13)$$

Assim, a equação (2.11) torna-se

$$\mathcal{Z} = N'(\beta) \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\beta} dx \phi (-\square + m^2) \phi \right\}. \quad (2.14)$$

Devido a periodicidade do campo escalar, é preferível calcular a função de partição no espaço de Fourier [24], ou seja,

$$\phi(\mathbf{x}, \tau) = \left(\frac{\beta}{V} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n, \mathbf{k}} \phi_n(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega_n \tau)}, \quad (2.15)$$

onde $\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ são as frequências bosônicas de Matsubara [25]. Os campos $\phi_n(\mathbf{k})$ são adimensionais e, devido ao fato de $\phi(\mathbf{x}, \tau)$ ser real, satisfazem a seguinte condição

$$\phi_{-n}(-\mathbf{k}) = \phi_n^*(\mathbf{k}).$$

Sob a transformação (2.15), a medida de integração em (2.14) transforma-se como [26],

$$\mathcal{D}\phi \rightarrow \prod_{n, \mathbf{k}} d\phi_n(\mathbf{k}), \quad (2.16)$$

onde a medida de integração se torna riemanniana e os limites de integração para $\phi_n(\mathbf{k})$ passam a ser de menos infinito ($-\infty$) a mais infinito ($+\infty$).

Agora, calculando primeiramente o termo na exponencial da equação (2.14), encontramos

$$\int_{\beta} dx \phi (-\square + m^2) \phi = \frac{\beta}{V} \int_{\beta} dx \sum_{n', n, \mathbf{k}', \mathbf{k}} (\omega_n^2 + \omega^2) \phi_{n'}(\mathbf{k}') \phi_n(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} e^{i(\omega_n + \omega_{n'}) \tau}, \quad (2.17)$$

onde definimos $\omega^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$.

Usando as relações de ortogonalidade para as bases de Fourier,

$$\int_0^{\beta} d\tau e^{-i(\omega_n - \omega_{n'}) \tau} = \beta \delta_{n, n'}, \quad \int d^3 \mathbf{x} e^{-i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')} = V \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (2.18)$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \int_{\beta} dx \phi (-\square + m^2) \phi &= \beta^2 \sum_{n, \mathbf{k}} (\omega_n^2 + \omega^2) \phi_{-n}(-\mathbf{k}) \phi_n(\mathbf{k}), \\ &= \beta^2 \sum_{n, \mathbf{k}} (\omega_n^2 + \omega^2) \phi_n(\mathbf{k}) \phi_n^*(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Substituindo (2.16) e (2.19) em (2.14), obtemos

$$\mathcal{Z} = N'(\beta) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{n, \mathbf{k}} d\phi_n(\mathbf{k}) \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \beta^2 \sum_{n, \mathbf{k}} (\omega_n^2 + \omega^2) \phi_n(\mathbf{k}) \phi_n^*(\mathbf{k}) \right\}, \quad (2.20)$$

que pode ainda ser escrita como

$$\mathcal{Z} = N'(\beta) \prod_{n,\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_n(\mathbf{k}) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \beta^2 (\omega_n^2 + \omega^2) \phi_n(\mathbf{k}) \phi_n^*(\mathbf{k}) \right\}. \quad (2.21)$$

Realizando a integração gaussiana, encontramos

$$\mathcal{Z} = N'(\beta) \prod_{n,\mathbf{k}} \left[\frac{2\pi}{\beta^2 (\omega_n^2 + \omega^2)} \right]^{1/2}, \quad (2.22)$$

ou ainda,

$$\mathcal{Z} = N''(\beta) \prod_{n,\mathbf{k}} [\beta^2 (\omega_n^2 + \omega^2)]^{-1/2}, \quad (2.23)$$

onde N'' representa a constante $N'(\beta)$ multiplicado pelo valor $\prod_{n,\mathbf{k}} (2\pi)^{1/2}$.

Observando a função de partição (2.23), notamos que os números $\beta^2 (\omega_n^2 + \omega^2)$ são os autovalores do operador definido como,

$$D = \beta^2 (-\square + m^2). \quad (2.24)$$

Em virtude disso, podemos expressar (2.23) formalmente como

$$\mathcal{Z} = N''(\beta) [\det D]^{-1/2}, \quad (2.25)$$

onde o fator $N''(\beta)$ é escolhido tal que a função de partição resulta finita para todo β e volume V [27].

As propriedades termodinâmicas do sistema em questão são obtidas a partir da função de partição $\ln \mathcal{Z}$. Então, de (2.23) temos que

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z} &= \ln N''(\beta) - \frac{V}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln[\beta^2 (\omega_n^2 + \omega^2)] \\ &= \ln N''(\beta) - \frac{1}{2} V \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln[(2\pi n)^2 + (\beta\omega)^2]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

O somatório nesta expressão é um resultado conhecido, dado por:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln[(2\pi n)^2 + \beta^2 \omega^2] = \beta\omega + 2 \ln [1 - e^{-\beta\omega}]. \quad (2.27)$$

Então, a função de partição (2.26), torna-se:

$$\ln \mathcal{Z} = \ln N''(\beta) - V \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \beta\omega - V \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln (1 - e^{-\beta\omega}). \quad (2.28)$$

Note-se que a primeira integral na expressão acima dá uma quantidade infinita dependente de β e V , o que deixa a função de partição sem significado físico. Porém, a liberdade na escolha de $N''(\beta)$ nos permite contornar esse problema gravíssimo se escolhermos:

$$\ln N''(\beta) = V \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \beta\omega. \quad (2.29)$$

Assim, a função de partição finita e bem definida do campo escalar real massivo resulta ser,

$$\ln \mathcal{Z} = -V \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln \left(1 - e^{-\beta\omega} \right). \quad (2.30)$$

2.1.2 Propriedades termodinâmicas

Uma vez obtida a forma correta para a função de partição $\ln \mathcal{Z}$, podemos determinar as propriedades termodinâmicas tais como: pressão, entropia e a densidade de energia. A energia livre de Helmholtz é dada pela expressão:

$$\mathcal{F} = \frac{V}{\beta} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln \left[1 - e^{-\beta\omega} \right]. \quad (2.31)$$

Por conseguinte, a pressão é dada por,

$$P = \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln \left[1 - e^{-\beta\omega} \right], \quad (2.32)$$

a entropia por,

$$S = V \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{\beta\omega}{e^{\beta\omega} - 1} - \ln \left(1 - e^{-\beta\omega} \right) \right], \quad (2.33)$$

e a densidade de energia por,

$$U = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{\omega}{e^{\beta\omega} - 1} \right]. \quad (2.34)$$

Capítulo 3

Estudo da condensação de Bose-Einstein: Modelo teórico

3.1 Campo escalar complexo

Um sistema mais interessante é obtido considerando um campo escalar Φ complexo massivo. O campo Φ descreve bósons com cargas positivas e negativas ou um sistema de partículas e antipartículas ou ainda um sistema de dois campos com simetria global $O(2)$. A densidade lagrangiana descrevendo o campo escalar complexo massivo é dada por:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi, \quad (3.1)$$

a qual é invariante perante a transformação global:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi e^{-i\alpha}, \quad \Phi^* \rightarrow \Phi'^* = \Phi^* e^{i\alpha}, \quad (3.2)$$

onde α é uma constante real qualquer que independe das coordenadas do espaço-tempo. Esta é uma simetria global chamada tipo $U(1)$ ou de fase. O teorema de Noether nos diz que para cada simetria contínua da lagrangiana existe uma corrente conservada definida como [28]:

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^*} \delta \Phi^*. \quad (3.3)$$

Em nosso caso, para α infinitesimal temos que,

$$\delta \Phi = -i\alpha \Phi, \quad \delta \Phi^* = i\alpha \Phi^*, \quad (3.4)$$

de modo que a corrente conservada vale,

$$J^\mu = -i\alpha \Phi \partial_\mu \Phi^* + i\alpha \Phi^* \partial_\mu \Phi = \alpha i (\Phi^* \partial^\mu \Phi - \Phi \partial_\mu \Phi^*). \quad (3.5)$$

Como o parâmetro α é arbitrário, por conveniência, definimos a corrente da seguinte forma:

$$j^\mu = i(\Phi^* \partial^\mu \Phi - \Phi \partial_\mu \Phi^*), \quad (3.6)$$

e usando as equações de movimento, é fácil mostrar que a corrente é conservada:

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (3.7)$$

Para simplificar os cálculos vamos decompor o campo escalar complexo em duas partes, uma real e outra imaginária, ou seja,

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \quad , \quad \Phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2). \quad (3.8)$$

Então, reescrevendo a densidade lagrangiana (3.1) em função destes novos campos, encontramos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - \frac{1}{2} m^2 \phi_1^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_2^2. \quad (3.9)$$

A lagrangiana possui a simetria global $O(2)$, ou seja, é invariante sob as rotações no espaço bidimensional dos campos. Os momentos canônicos conjugados aos novos campos ϕ_1 e ϕ_2 são:

$$\pi_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_1} = \dot{\phi}_1 \quad , \quad \pi_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_2} = \dot{\phi}_2, \quad (3.10)$$

respectivamente. Pelo fato de expressarmos as velocidades em termos dos momentos canônicos, o modelo não possui vínculos. Portanto, a densidade hamiltoniana canônica resulta,

$$\mathcal{H}_C = \frac{1}{2} \pi_1^2 + \frac{1}{2} \pi_2^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi_1)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi_2)^2 + \frac{1}{2} m^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2). \quad (3.11)$$

A corrente conservada, equação (3.6), expressa em termos dos novos campos (3.8), adquire a seguinte forma:

$$j^\mu = \phi_2 \partial^\mu \phi_1 - \phi_1 \partial^\mu \phi_2. \quad (3.12)$$

A carga conservada é obtida da relação

$$\mathcal{Q} = \int j^0 d^3 \mathbf{x}, \quad (3.13)$$

onde j^0 é a densidade de carga conservada e pode ser escrita, em termos dos campos e dos momentos canônicos, como:

$$j^0 = \phi_2 \pi_1 - \phi_1 \pi_2. \quad (3.14)$$

Assim, a carga conservada é igual a:

$$\mathcal{Q} = \int (\phi_2 \pi_1 - \phi_1 \pi_2) d^3 \mathbf{x}. \quad (3.15)$$

Uma vez obtida a hamiltoniana do sistema, os momentos canônicos e a densidade de carga conservada podemos montar a função de partição para o campo escalar complexo e analisar o fenômeno da condensação de Bose-Einstein no limite ultrarelativístico.

3.1.1 A função de partição

Para montarmos a função de partição para o campo escalar complexo procederemos de modo similar ao caso apresentado para o campo escalar real. Analisando a equação (3.10) observamos que o modelo não possui vínculos e, portanto, a função de partição é simplesmente definida segundo o método desenvolvido por Faddeev-Senjanovic [23]. Desse modo, a função de partição do campo escalar complexo, em equilíbrio termodinâmico, é dado por:

$$\mathcal{Z} = N \int \mathcal{D}\phi_1 \mathcal{D}\phi_2 \mathcal{D}\pi_1 \mathcal{D}\pi_2 \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[i\pi_1 \partial_{\tau} \phi_1 + i\pi_2 \partial_{\tau} \phi_2 - \mathcal{H}_C + \mu (\phi_2 \pi_1 - \phi_1 \pi_2) \right] \right\}, \quad (3.16)$$

onde inserimos o potencial químico μ associado à carga conservada. A integração deve ser realizada sobre todos os campos satisfazendo a seguinte condição de contorno periódica na variável τ :

$$\phi_1(0, \mathbf{x}) = \phi_1(\beta, \mathbf{x}) \quad , \quad \phi_2(0, \mathbf{x}) = \phi_2(\beta, \mathbf{x}), \quad (3.17)$$

dado o caráter bosônico dos campos $\phi_{1,2}$.

Substituindo a densidade hamiltoniana (3.11) na (3.16), encontramos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= N \int \mathcal{D}\phi_1 \mathcal{D}\phi_2 \mathcal{D}\pi_1 \mathcal{D}\pi_2 \times \\ &\times \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[i\pi_1 \partial_{\tau} \phi_1 + i\pi_2 \partial_{\tau} \phi_2 - \frac{1}{2} \pi_1^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi_1)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_1^2 \right] \right\} \\ &\times \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[-\frac{1}{2} \pi_2^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi_2)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_2^2 + \mu (\phi_2 \pi_1 - \phi_1 \pi_2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Resolvendo primeiro a integral nos momentos canônicos conjugados resulta

$$\mathcal{Z} = N \int \mathcal{D}\phi_1 \mathcal{D}\phi_2 A_{\pi_1} A_{\pi_2} \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[-\frac{1}{2} (\nabla \phi_1)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi_2)^2 - \frac{1}{2} m^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) \right] \right\}, \quad (3.19)$$

onde,

$$\begin{aligned} A_{\pi_1} &= \int \mathcal{D}\pi_1 \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left(i\pi_1 \partial_{\tau} \phi_1 - \frac{1}{2} \pi_1^2 + \mu \phi_2 \pi_1 \right) \right\}, \\ A_{\pi_2} &= \int \mathcal{D}\pi_2 \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left(i\pi_2 \partial_{\tau} \phi_2 - \frac{1}{2} \pi_2^2 - \mu \phi_1 \pi_2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

As integrais em (3.20) são resolvidas de modo análogo ao capítulo anterior. Primeiro, completamos o quadrado e em seguida fazemos as seguintes translações:

$$\pi_1 \rightarrow \pi_1 + i(\partial_{\tau} \phi_1 - i\mu \phi_2) \quad , \quad \pi_2 \rightarrow \pi_2 + i(\partial_{\tau} \phi_2 + i\mu \phi_1). \quad (3.21)$$

As medidas de integração são mantidas,

$$\mathcal{D}\pi_1 \rightarrow \mathcal{D}\pi_1 \quad , \quad \mathcal{D}\pi_2 \rightarrow \mathcal{D}\pi_2. \quad (3.22)$$

Assim, obtemos

$$A_{\pi_1} = N'_1(\beta) \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{\beta} dx (\partial_{\tau} \phi_1 - i\mu \phi_2)^2 \right], \quad (3.23)$$

$$A_{\pi_2} = N'_2(\beta) \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{\beta} dx (\partial_{\tau} \phi_2 + i\mu \phi_1)^2 \right],$$

onde,

$$N'_1(\beta) = \int \mathcal{D}\pi_1 \exp \left[\int_{\beta} dx \left(-\frac{1}{2} \pi_1^2 \right) \right], \quad (3.24)$$

$$N'_2(\beta) = \int \mathcal{D}\pi_2 \exp \left[\int_{\beta} dx \left(-\frac{1}{2} \pi_2^2 \right) \right].$$

Uma vez determinado os valores das integrais funcionais dos momentos canônicos conjugados, podemos substituí-los na função de partição (3.19). Assim, a função de partição torna-se

$$\mathcal{Z} = N''(\beta) \int \mathcal{D}\phi_1 \mathcal{D}\phi_2 \exp \{ -\mathcal{S} \}, \quad (3.25)$$

onde temos definido $N''(\beta) = N'_1(\beta)N'_2(\beta)$ e a ação \mathcal{S} por:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int_{\beta} dx \left[(\partial_{\tau} \phi_1 - i\mu \phi_2)^2 + (\partial_{\tau} \phi_2 + i\mu \phi_1)^2 + (\nabla \phi_1)^2 + (\nabla \phi_2)^2 + m^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) \right]. \quad (3.26)$$

Integrando por partes, obtemos:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int_{\beta} dx \left\{ \phi_1 \mathbf{D} \phi_1 + \phi_2 \mathbf{D} \phi_2 + 2i\mu (\phi_1 \partial_{\tau} \phi_2 - \phi_2 \partial_{\tau} \phi_1) \right\}, \quad (3.27)$$

em uma forma mais compacta,

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int_{\beta} dx \Phi^T \mathbb{D} \Phi, \quad (3.28)$$

onde o vetor Φ e o operador matricial \mathbb{D} são definidos por:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & 2i\mu \partial_{\tau} \\ -2i\mu \partial_{\tau} & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

onde o operador \mathbf{D} é definido como:

$$\mathbf{D} = -\partial_{\tau}^2 - \nabla^2 + m^2 - \mu^2. \quad (3.30)$$

Note-se que o operador \mathbb{D} possui um modo zero não trivial, ou seja, um estado cuja função de onda no espaço de configuração é uma função constante:

$$\mathbb{D}\Phi_0 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} m^2 - \mu^2 & 0 \\ 0 & m^2 - \mu^2 \end{pmatrix} \Phi_0 = 0. \quad (3.31)$$

Logo, se $|\mu| = m$ o modo zero, Φ_0 , é não nulo e se $|\mu| \neq m$ teremos que $\Phi_0 = 0$.

Expandindo $\phi_1(\tau, \mathbf{x})$ e $\phi_2(\tau, \mathbf{x})$ em séries de Fourier, temos:

$$\phi_1(\tau, \mathbf{x}) = \sqrt{2}\xi \cos \theta + \left(\frac{\beta}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n, \mathbf{k}} \phi_{1n}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega_n \tau)}, \quad (3.32)$$

$$\phi_2(\tau, \mathbf{x}) = \sqrt{2}\xi \sin \theta + \left(\frac{\beta}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n, \mathbf{k}} \phi_{2n}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega_n \tau)},$$

onde o parâmetro real ξ , o modo zero, carrega o comportamento infravermelho dos campos ϕ_1 e ϕ_2 , ou seja, ele leva em conta a contribuição das partículas condensadas no estado fundamental $n = 0$ e $\mathbf{p} = 0$. Os campos $\phi_{1n}(\mathbf{k})$ e $\phi_{2n}(\mathbf{k})$ são adimensionais e satisfazem as seguintes condições:

$$\phi_{10}(\mathbf{0}) = \phi_{20}(\mathbf{0}) = 0, \quad (3.33)$$

e

$$\phi_{1,-n}(-\mathbf{k}) = \phi_{1n}^*(\mathbf{k}), \quad \phi_{2,-n}(-\mathbf{k}) = \phi_{2n}^*(\mathbf{k}). \quad (3.34)$$

As quantidades $\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, são as frequências bosônicas de Matsubara.

A medida funcional em (3.25), sob a transformação (3.32), muda como:

$$\mathcal{D}\phi_1 \mathcal{D}\phi_2 \rightarrow \prod_{n, \mathbf{k}} d\phi_{1n}(\mathbf{k}) d\phi_{2n}(\mathbf{k}). \quad (3.35)$$

Substituindo (3.32) em (3.27) e usando as relações de ortogonalidade estabelecidas em (2.12), encontramos:

$$\frac{1}{2} \int_{\beta} dx \phi_1 \mathbf{D} \phi_1 = -\beta V (\mu^2 - m^2) \xi^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sum_{n, \mathbf{k}} \beta^2 \tilde{\mathbf{D}}(n, \mathbf{k}) \phi_{1n}(\mathbf{k}) \phi_{1n}^*(\mathbf{k}), \quad (3.36)$$

$$\frac{1}{2} \int_{\beta} dx \phi_2 \mathbf{D} \phi_2 = -\beta V (\mu^2 - m^2) \xi^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sum_{n, \mathbf{k}} \beta^2 \tilde{\mathbf{D}}(n, \mathbf{k}) \phi_{2n}(\mathbf{k}) \phi_{2n}^*(\mathbf{k}), \quad (3.37)$$

$$i\mu \int_{\beta} dx (\phi_1 \partial_{\tau} \phi_2 - \phi_2 \partial_{\tau} \phi_1) = \beta^2 \sum_{n, \mathbf{k}} (\mu \omega_n) [\phi_{2n}^*(\mathbf{k}) \phi_{1n}(\mathbf{k}) - \phi_{2n}(\mathbf{k}) \phi_{1n}^*(\mathbf{k})], \quad (3.38)$$

onde temos definido,

$$\tilde{\mathbf{D}}(n, \mathbf{k}) = \omega_n^2 + \omega^2 - \mu^2. \quad (3.39)$$

com

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 + m^2. \quad (3.40)$$

Portanto, a ação no espaço dos momentos é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & -\beta V (\mu^2 - m^2) \xi^2 + \frac{1}{2} \sum_{n, \mathbf{k}} \beta^2 \tilde{\mathbf{D}}(n, \mathbf{k}) \phi_{1n}(\mathbf{k}) \phi_{1n}^*(\mathbf{k}) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n, \mathbf{k}} \beta^2 \tilde{\mathbf{D}}(n, \mathbf{k}) \phi_{2n}(\mathbf{k}) \phi_{2n}^*(\mathbf{k}) + \sum_{n, \mathbf{k}} \beta^2 (\mu \omega_n) [\phi_{2n}^*(\mathbf{k}) \phi_{1n}(\mathbf{k}) - \phi_{1n}^*(\mathbf{k}) \phi_{2n}(\mathbf{k})], \end{aligned} \quad (3.41)$$

ou na forma matricial,

$$\mathcal{S} = -\beta V(\mu^2 - m^2)\xi^2 + \frac{1}{2} \sum_{n,\mathbf{k}} \Phi_n^{*T}(\mathbf{k}) \mathbb{D}(n, \mathbf{k}) \Phi_n(\mathbf{k}), \quad (3.42)$$

onde definimos o vetor $\Phi_n(\mathbf{k})$ e a matriz $\mathbb{D}(n, \mathbf{k})$ por:

$$\Phi_n(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \phi_{1n}(\mathbf{k}) \\ \phi_{2n}(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D}(n, \mathbf{k}) = \beta^2 \begin{pmatrix} \tilde{\mathbb{D}}(n, \mathbf{k}) & -2\mu\omega_n \\ 2\mu\omega_n & \tilde{\mathbb{D}}(n, \mathbf{k}) \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Conseqüentemente, a função de partição fica expressa como

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= N''(\beta) \exp[\beta V(\mu^2 - m^2)\xi^2] \times \\ &\times \int \left[\prod_{n,\mathbf{k}} d\phi_{1n}(\mathbf{k}) d\phi_{2n}(\mathbf{k}) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{n,\mathbf{k}} \Phi_n^{*T}(\mathbf{k}) \mathbb{D}(n, \mathbf{k}) \Phi_n(\mathbf{k}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Agora realizando a integral sobre os campos $\phi_{1n}(\mathbf{k})$ e $\phi_{2n}(\mathbf{k})$, a função de partição (3.25) resulta ser:

$$\mathcal{Z} = N''(\beta) \exp[\beta V(\mu^2 - m^2)\xi^2] \prod_{n,\mathbf{k}} \left[\det \mathbb{D}(n, \mathbf{k}) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.45)$$

com

$$\det \mathbb{D}(n, \mathbf{k}) = \beta^4 \left[\omega_n^2 + (\omega - \mu)^2 \right] \left[\omega_n^2 + (\omega + \mu)^2 \right]. \quad (3.46)$$

A função de partição (3.45) torna-se

$$\mathcal{Z} = N''(\beta) \exp[\beta V(\mu^2 - m^2)\xi^2] \prod_{n,\mathbf{k}} \beta^{-2} \left[\omega_n^2 + (\omega - \mu)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \left[\omega_n^2 + (\omega + \mu)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.47)$$

Aplicando o logaritmo na equação (3.47), encontramos:

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z} &= \ln N'' + \beta V(\mu^2 - m^2)\xi^2 - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{n,\mathbf{k}} \ln \left[(2\pi n)^2 + \beta^2(\omega - \mu)^2 \right] - \frac{1}{2} \sum_{n,\mathbf{k}} \ln \left[(2\pi n)^2 + \beta^2(\omega + \mu)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Para calcularmos os somatórios acima usaremos a relação:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln[(2\pi n)^2 + \beta^2(\omega \pm \mu)^2] = \beta\omega + 2 \ln \left[1 - e^{-\beta(\omega \pm \mu)} \right].$$

Substituindo esta relação na equação (3.48), encontramos:

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z} &= \ln N'' + \beta V(\mu^2 - m^2)\xi^2 - \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} (\beta\omega) - \\ &- \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \left(\ln \left[1 - e^{-\beta(\omega + \mu)} \right] + \ln \left[1 - e^{-\beta(\omega - \mu)} \right] \right). \end{aligned} \quad (3.49)$$

A primeira integral dá uma quantidade infinita que depende de β e V , o que tornaria a função de partição sem significado físico. Contudo, a liberdade na escolha de $N''(\beta)$ nos permite contornar esse problema gravíssimo. Assim, impondo que,

$$\ln N''(\beta) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k}(\beta\omega), \quad (3.50)$$

obtemos uma função de partição bem definida

$$\ln \mathcal{Z} = \beta V(\mu^2 - m^2)\xi^2 - \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \left(\ln \left[1 - e^{-\beta(\omega+\mu)} \right] + \ln \left[1 - e^{-\beta(\omega-\mu)} \right] \right). \quad (3.51)$$

que descreve um gás ideal bosônico carregado e permitirá estudar a condensação de Bose-Einstein no limite ultrarelativístico.

3.1.2 A condensação de Bose-Einstein no limite ultrarelativístico

As integrais que definem a função de partição (3.51) convergem somente se $|\mu| \leq m$. Note-se ainda, que somente o parâmetro ξ aparece na função de partição (3.51); a ausência do ângulo θ é devido a simetria $O(2)$ da densidade lagrangiana (3.9). O parâmetro ξ não é determinado *a priori*. Usando o fato de que a função de partição deve ser independente de ξ , ele será tratado como um parâmetro variacional e, como veremos, será identificado como a densidade das partículas condensadas. Assim, mantendo β e μ fixos, calculamos os extremos de $\ln \mathcal{Z}$ em relação ao parâmetro ξ :

$$\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \xi} = 2\beta V(\mu^2 - m^2)\xi = 0. \quad (3.52)$$

Note-se da equação (3.52) que se $\xi = 0$ implica que $|\mu| \neq m$, a menos que $|\mu| = m$ caso em que $\xi \neq 0$; neste último caso ξ é indeterminado [24]. Este resultado é o mesmo obtido quando analisamos o modo zero (3.31) do operador (3.28) que define a função de partição (3.25). De posse desses resultados concluímos que a condensação de Bose-Einstein no limite ultrarelativístico ocorrerá quando $\xi \neq 0$, isto é, se $|\mu| = m$.

A partir da função de partição (3.51), podemos calcular a densidade de carga por unidade de volume do sistema,

$$\rho = \frac{1}{\beta V} \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \mu} = 2\mu\xi^2 + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{e^{\beta(\omega-\mu)} - 1} - \frac{1}{e^{\beta(\omega+\mu)} - 1} \right\}. \quad (3.53)$$

Primeiro consideramos a situação em que $|\mu| < m$. Nesse caso, temos $\xi = 0$ e a densidade de carga (3.53) é expressa como:

$$\rho = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{e^{\beta(\omega-\mu)} - 1} - \frac{1}{e^{\beta(\omega+\mu)} - 1} \right), \quad (3.54)$$

que dá o potencial químico μ como uma função implícita de ρ e T . Para uma temperatura T maior que a temperatura crítica T_C podemos sempre encontrar um valor de μ tal que a equação (3.54) é válida. Supondo que a densidade de carga ρ é mantida fixa e a temperatura é diminuída, o potencial químico μ aumentará até atingir o valor $|\mu| = m$ em $T = T_C$. Logo, na região $T \geq T_C \gg m$ temos:

$$|\rho| \approx \frac{1}{3}mT^2. \quad (3.55)$$

Quando $|\mu| = m$ e a temperatura é diminuída ainda mais, tal que $T < T_C$, a densidade de carga é escrita como:

$$\rho = \frac{1}{\beta V} \left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \mu} \right)_{\mu=m} = \rho_0 + \rho^*(\beta, \mu = m), \quad (3.56)$$

onde $\rho_0 = 2m\xi^2$ é a densidade de carga das partículas condensadas (de momento nulo) e $\rho^*(\beta, \mu = m)$ é a contribuição proveniente das partículas excitadas (de momento não nulo),

$$\rho^*(\beta, \mu = m) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{e^{\beta(\omega-m)} - 1} - \frac{1}{e^{\beta(\omega+m)} - 1} \right) = \frac{1}{3}mT^2. \quad (3.57)$$

A temperatura crítica T_C é definida quando o potencial químico atinge seu valor máximo, ou seja, $|\mu| = m$, mas o parâmetro ξ é ainda mantido nulo, isto é,

$$\rho = \rho^*(\beta_C, \mu = m). \quad (3.58)$$

Então, a equação (3.57) implica em,

$$T_C = \left(\frac{3|\rho|}{m} \right)^{1/2}. \quad (3.59)$$

Na temperatura $T < T_C$, $|\mu| = m$, (3.56) é a equação para a densidade de carga $\rho - \rho_0$ dos estados com $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$,

$$\rho - \rho_0 = \frac{1}{3}mT^2, \quad (3.60)$$

que combinada com (3.59) proporciona a densidade de carga das partículas condensadas ($\mathbf{k} = \mathbf{0}$):

$$\rho_0 = \rho \left(1 - \left[\frac{T}{T_C} \right]^2 \right). \quad (3.61)$$

A densidade de carga das partículas condensadas (estado $\mathbf{k} = \mathbf{0}$) pode aumentar até atingir a densidade total do sistema no limite $T \rightarrow 0$. Nota-se que a (3.59) nos leva a um importante resultado: a condição necessária para que um gás ideal de Bose de massa m se condense numa temperatura relativística ($T_C \gg m$) é que $\rho \gg m^3$.

3.2 Campo escalar complexo no limite não relativístico

Para estudarmos a condensação de Bose-Einstein não relativística partiremos da densidade lagrangiana não relativística para o campo escalar complexo obtida a partir do limite não relativístico da lagrangiana definida em (3.1). O procedimento para calcular o limite não relativístico da lagrangiana (3.1) é apresentado a seguir: Primeiro fazemos a seguinte transformação do campo escalar complexo Φ :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{e^{-imt}}{\sqrt{2m}} \varphi(\mathbf{x}, t), \quad (3.62)$$

e consideramos os termos até ordem m^{-1} , os quais correspondem a seguinte condição:

$$|i\partial_t\varphi| \approx E_{\text{cinética}}\varphi \ll m\varphi. \quad (3.63)$$

Desse modo, a densidade lagrangiana não relativística do nosso modelo é dada por:

$$\mathcal{L}_{nr} = \varphi^* i\partial_t\varphi - \frac{1}{2m} \nabla\varphi^* \cdot \nabla\varphi, \quad (3.64)$$

e a equação de movimento para o campo φ implica na equação de Schrödinger:

$$-\frac{1}{2m} \nabla^2\varphi - i\partial_t\varphi = 0. \quad (3.65)$$

A lagrangiana não relativística (3.64) é invariante sob a transformação de fase $U(1)$:

$$\varphi \rightarrow e^{-i\alpha}\varphi \quad , \quad \varphi^* \rightarrow e^{i\alpha}\varphi^*,$$

levando a densidade de carga conservada,

$$j^0 = \varphi^*\varphi. \quad (3.66)$$

Os momentos canônicos conjugados são:

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}^*} = 0 \quad , \quad \pi^* = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = i\varphi^*, \quad (3.67)$$

os quais geram um conjunto de vínculos de segunda classe:

$$\theta = \pi \quad , \quad \theta^* = \pi^* - i\varphi^*. \quad (3.68)$$

A hamiltoniana canônica definida pela transformação de Legendre

$$\mathcal{H}_C = \pi^*\dot{\varphi} + \pi\dot{\varphi}^* - \mathcal{L},$$

é dada por:

$$\mathcal{H}_C = \frac{1}{2m} \nabla\varphi^* \cdot \nabla\varphi, \quad (3.69)$$

a qual, após integração por partes, fica

$$\mathcal{H}_C = -\frac{1}{2m} \varphi^* \nabla^2\varphi. \quad (3.70)$$

3.2.1 A função de partição

O sistema não relativístico possui vínculos de segunda classe. Logo, a função de partição é corretamente definida usando o método desenvolvido por Faddeev-Senjanovic [23]. Assim, a função de partição descrevendo um gás ideal bosônico não relativístico no equilíbrio termodinâmico é dado por

$$\mathcal{Z}(\beta) = N \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^* \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\pi^* \delta(\pi) \delta(\pi^* - i\varphi^*) \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left(i\pi^* \partial_{\tau} \varphi + i\pi \partial_{\tau} \varphi^* - \mathcal{H}_C + \mu \varphi^* \varphi \right) \right\}, \quad (3.71)$$

onde introduzimos o potencial químico μ associado a densidade de carga $\varphi^* \varphi$. A integração é realizada sobre os campos e satisfaz as condições de contorno periódicas na variável τ :

$$\varphi(\tau, \mathbf{x}) = \varphi(\tau + \beta, \mathbf{x}) \quad , \quad \varphi^*(\tau, \mathbf{x}) = \varphi^*(\tau + \beta, \mathbf{x}). \quad (3.72)$$

Integrando nos momentos canônicos conjugados e, em seguida, integrando por partes nos campos, obtemos a seguinte expressão para a função de partição (3.71):

$$\mathcal{Z}(\beta) = N \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^* \exp \left\{ - \int_{\beta} dx \varphi^* \mathbf{D} \varphi \right\}, \quad (3.73)$$

onde definimos o operador \mathbf{D} ,

$$\mathbf{D} = \partial_{\tau} - \frac{1}{2m} \nabla^2 - \mu. \quad (3.74)$$

Note-se que o operador \mathbf{D} possui um modo zero não trivial, ou seja, um estado cuja função de onda no espaço de configuração é uma função constante:

$$\mathbf{D} \varphi_0 = 0 \rightarrow \mu \varphi_0 = 0. \quad (3.75)$$

Logo se $\mu = 0$ o modo zero, φ_0 , é não nulo e se $\mu \neq 0$ teremos que $\varphi_0 = 0$.

Os campos, contudo, podem ser expressos em séries de Fourier,

$$\begin{aligned} \varphi &= \xi + (2V)^{-1/2} \sum_{n, \mathbf{p}} \left[e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + i\omega_n \tau} \chi_n(\mathbf{p}) + e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - i\omega_n \tau} \psi_n^*(\mathbf{p}) \right], \\ \varphi^* &= \xi + (2V)^{-1/2} \sum_{n, \mathbf{p}} \left[e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + i\omega_n \tau} \psi_n(\mathbf{p}) + e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - i\omega_n \tau} \chi_n^*(\mathbf{p}) \right], \end{aligned} \quad (3.76)$$

onde $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ são as frequências bosônicas de Matsubara. O parâmetro real ξ , o qual caracteriza o modo zero, carrega o comportamento infravermelho dos campos φ e φ^* , ou seja, ele leva em conta as contribuições das partículas condensadas no estado fundamental $n = 0$ e $\mathbf{p} = 0$. Os campos $\chi_n(\mathbf{p})$ e $\psi_n(\mathbf{p})$ satisfazem as seguintes condições:

$$\chi_0(\mathbf{0}) = \psi_0(\mathbf{0}) = 0, \quad (3.77)$$

e

$$\chi_{-n}(-\mathbf{p}) = \psi_n^*(\mathbf{p}) \quad , \quad \psi_{-n}(-\mathbf{p}) = \chi_n^*(\mathbf{p}) \quad . \quad (3.78)$$

Logo, substituindo (3.76) na exponencial em (3.73) e usando as condições (3.77) e (3.78) obtemos:

$$\int_{\beta} dx \varphi^* \mathbf{D} \varphi = -\xi^2 \mu V \beta + \sum_{n, \mathbf{p}} \beta \tilde{\mathbf{D}}^{(+)}(n, \mathbf{p}) \chi_n^*(\mathbf{p}) \chi_n(\mathbf{p}) + \sum_{n, \mathbf{p}} \beta \tilde{\mathbf{D}}^{(-)}(n, \mathbf{p}) \psi_n^*(\mathbf{p}) \psi_n(\mathbf{p}), \quad (3.79)$$

onde,

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(+)}(n, \mathbf{p}) = i\omega_n + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu \quad , \quad \tilde{\mathbf{D}}^{(-)}(n, \mathbf{p}) = -i\omega_n + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu \quad . \quad (3.80)$$

A medida $\int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^*$, sob a transformação (3.76), muda da seguinte forma:

$$\mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^* \rightarrow \prod_{n, \mathbf{p}} d\chi_n(\mathbf{p}) d\psi_n(\mathbf{p}) \quad . \quad (3.81)$$

Então, a função de partição torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\beta) &= N \exp(\xi^2 \mu V \beta) \int \prod_{n, \mathbf{p}} d\chi_n(\mathbf{p}) \exp \left\{ - \sum_{n, \mathbf{p}} \beta \tilde{\mathbf{D}}^{(+)}(n, \mathbf{p}) \chi_n^*(\mathbf{p}) \chi_n(\mathbf{p}) \right\} \times \\ &\times \int \prod_{n, \mathbf{p}} d\psi_n(\mathbf{p}) \exp \left\{ - \sum_{n, \mathbf{p}} \beta \tilde{\mathbf{D}}^{(-)}(n, \mathbf{p}) \psi_n^*(\mathbf{p}) \psi_n(\mathbf{p}) \right\} \quad . \end{aligned} \quad (3.82)$$

Realizando as integrações, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\beta) &= N \exp(\xi^2 \mu V \beta) \prod_{n, \mathbf{p}} \left[i\beta\omega_n + \frac{1}{2m}\beta\mathbf{p}^2 - \beta\mu \right]^{-1/2} \left[-i\beta\omega_n + \frac{1}{2m}\beta\mathbf{p}^2 - \beta\mu \right]^{-1/2}, \\ &= N \exp(\xi^2 \mu V \beta) \prod_{n, \mathbf{p}} \left\{ \beta^2 \left[(\omega_n)^2 + \left(\frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 - \mu \right)^2 \right] \right\}^{-1/2} \quad . \end{aligned} \quad (3.83)$$

Tomando o logaritmo da função de partição resulta

$$\ln \mathcal{Z}(\beta) = \ln N + \xi^2 V \beta \mu - \frac{1}{2} V \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_n \ln \beta^2 \left[(\omega_n)^2 + \left(\frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 - \mu \right)^2 \right] \quad . \quad (3.84)$$

Realizando a soma, a função de partição fica escrita como

$$\ln \mathcal{Z}(\beta) = \xi^2 V \beta \mu - V \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left[1 - e^{-\beta(\epsilon - \mu)} \right] \quad . \quad (3.85)$$

Contudo, para a integral convergir o potencial químico deve ser negativo: $\mu < 0$. O símbolo $\epsilon = \epsilon(\mathbf{p})$ denota a energia cinética das partículas,

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 \quad . \quad (3.86)$$

A integral em (3.85) é dada por,

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln [1 - e^{-\beta(\epsilon-\mu)}] = - \left(\frac{m}{2\pi\beta} \right)^{3/2} \text{Li}_{5/2} \left(e^{\beta\mu} \right), \quad (3.87)$$

onde $\text{Li}_a(z)$ é a função polilogaritmo, definida por,

$$\text{Li}_a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^a}, \quad (3.88)$$

a qual para $z = 1$, implica na função *zeta de Riemann*,

$$\zeta(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}. \quad (3.89)$$

A função de partição assume agora a seguinte forma:

$$\ln \mathcal{Z}(\beta) = \xi^2 V \beta \mu + V \left(\frac{m}{2\pi\beta} \right)^{3/2} \text{Li}_{5/2} \left(e^{\beta\mu} \right). \quad (3.90)$$

Admitindo que a função de partição independe do parâmetro ξ , podemos calcular os extremos em relação a este parâmetro isto é,

$$\frac{\partial \ln \mathcal{Z}(\beta)}{\partial \xi} = 2\xi V \beta \mu = 0, \quad (3.91)$$

o que implica em $\xi = 0$ se $\mu \neq 0$. Portanto, o parâmetro ξ será arbitrário (e não nulo) se e somente se $\mu = 0$. Este resultado é o mesmo obtido quando analisamos o modo zero em (3.75) do operador (3.74), o qual define a função de partição (3.73).

Portanto, a condensação de Bose-Einstein no regime não relativístico ocorre se $\mu = 0$. Assim, estamos interessados no caso quando $\xi \neq 0$ e $\mu = 0$.

3.2.2 A condensação de Bose-Einstein no limite não relativístico

A densidade de partículas do sistema é obtida da equação (3.90) da seguinte forma:

$$\rho = \frac{1}{\beta V} \left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \mu} \right) = \xi^2 + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dp \frac{p^2}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}. \quad (3.92)$$

Calculando a integral, obtemos:

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dp \frac{p^2}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} = \left(\frac{m}{2\pi\beta} \right)^{3/2} \text{Li}_{3/2} \left(e^{\beta\mu} \right). \quad (3.93)$$

Assim, a densidade de partícula do gás ideal (3.92) é dada por:

$$\rho = \xi^2 + \left(\frac{m}{2\pi\beta} \right)^{3/2} \text{Li}_{3/2} \left(e^{\beta\mu} \right). \quad (3.94)$$

A equação (3.94) fornece uma fórmula implícita para μ como uma função de ρ e T . Assim, para uma temperatura T acima da temperatura crítica T_C , podemos sempre encontrar um valor

para o potencial químico μ tal que a equação (3.94) seja satisfeita. Se fixarmos a densidade ρ e diminuirmos a temperatura tal que $\mu \rightarrow 0^-$ e $\xi = 0$, então, na região $T \geq T_C > 0$, a densidade de partículas comporta-se como:

$$\rho \approx \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \zeta(3/2). \quad (3.95)$$

Quando $\mu = 0$ e $\xi \neq 0$ a temperatura é diminuída ainda mais, tal que $T < T_C$. Logo, a densidade de partícula é expressa como:

$$\rho = \rho_0 + \rho^*(\beta, \mu = 0), \quad (3.96)$$

onde $\rho_0 = \xi^2$ é a densidade de partículas condensadas e $\rho^*(\beta, \mu = 0)$ é a densidade de partículas com momento não nulo,

$$\rho^*(\beta, \mu = 0) = \rho - \rho_0 = \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \zeta(3/2). \quad (3.97)$$

A temperatura crítica é definida quando o potencial químico atinge seu valor máximo, $\mu = 0$, mas o parâmetro ξ ainda é nulo. Assim, da equação (3.95) encontramos:

$$\rho = \rho^*(\beta_C, \mu = 0) = \left(\frac{mT_C}{2\pi} \right)^{3/2} \zeta(3/2), \quad (3.98)$$

que proporciona a temperatura crítica,

$$T_C = \frac{2\pi}{m} \left(\frac{\rho}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3}. \quad (3.99)$$

Para a temperatura $T < T_C$ e $\mu = 0$, (3.97) é uma equação para a densidade $\rho - \rho_0$ dos estados com $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$,

$$\rho - \rho_0 = \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \zeta(3/2). \quad (3.100)$$

Logo, combinando (3.100) com (3.99) obtemos a densidade de partículas condensadas ($\mathbf{p} = \mathbf{0}$):

$$\rho_0 = \rho \left(1 - \left[\frac{T}{T_C} \right]^{3/2} \right).$$

A densidade de partículas condensadas atinge seu valor máximo $\rho_0 = \rho$ quando $T \rightarrow 0$. Usando a equação (3.99) a condição necessária para que um gás ideal bosônico de massa m se condense numa temperatura não relativística ($T_C \ll m$) é que $\rho \ll m^3$.

Capítulo 4

Campo escalar complexo no contexto da violação da invariância de Lorentz

A densidade lagrangiana mais simples do campo escalar complexo incluindo os efeitos da quebra espontânea da simetria-CPT e da invariância de Lorentz em $(1 + 3)$ - dimensões é dada por:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi + i\kappa^\mu (\Phi^* \partial_\mu \Phi - \Phi \partial_\mu \Phi^*) + \lambda^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi, \quad (4.1)$$

onde κ^μ é um vetor com dimensão de massa que viola a simetria de Lorentz e é CPT-ímpar, $\lambda^{\mu\nu}$ é um tensor simétrico adimensional que viola a simetria de Lorentz e é CPT-par.

O último termo na densidade lagrangiana já foi usado para estudar os efeitos da violação da invariância de Lorentz em defeitos topológicos generalizados gerados por campos escalares em $(1 + 1)$ -dimensões [29]. Um termo similar também tem sido adaptado para estudar a influência da violação da simetria de Lorentz sobre a versão relativística da acústica de buracos negro generalizado num modelo de Higgs abeliano [30].

Por outro lado, o termo κ^μ pode ser cancelado através de uma redefinição canônica dos campos, ou seja,

$$\Phi \rightarrow e^{i\hat{\kappa}\cdot x} \varphi, \quad \Phi^* \rightarrow e^{-i\hat{\kappa}\cdot x} \varphi^*, \quad (4.2)$$

de modo que $\hat{\kappa}^\mu$ é escolhido como $\hat{\kappa}^\mu = (g^{\mu\nu} + \lambda^{\mu\nu})^{-1} \kappa_\nu$. Note-se que a inversa da expressão entre parênteses existe, pois o parâmetro $\lambda^{\mu\nu}$ é pequeno comparado a unidade. Expressando a lagrangiana (4.1) em termos dos novos campos φ e φ^* , encontramos

$$\mathcal{L} \rightarrow \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi + \lambda^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi^* \partial_\nu \varphi - (m^2 + \hat{\kappa}_\mu \kappa^\mu) \varphi^* \varphi, \quad (4.3)$$

ele não exibiu o termo violando CPT, governado por κ^μ , porém o termo de massa adquiriu uma pequena correção. Se o termo $i\kappa^\mu (\Phi^* \partial_\mu \Phi - \Phi \partial_\mu \Phi^*)$ pode ser removido através de uma redefinição

de campos, este não é um verdadeiro termo que viola a invariância de Lorentz e, conseqüentemente, o vetor κ^μ não pode ser medido.

Devido as considerações feitas acima sobre o parâmetro CPT-ímpar, nós definimos:

$$\kappa^\mu = 0, \quad (4.4)$$

e a lagrangiana (4.1) toma a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi + \lambda^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi. \quad (4.5)$$

A motivação principal para propor a lagrangiana (4.5) foi o estudo da condensação de Bose-Einstein nos limites não relativístico e ultrarelativístico num modelo contendo campos de fundo controlando os efeitos da quebra espontânea da invariância de Lorentz. Para esse propósito vamos seguir o roteiro implementado no capítulo **3** onde usamos a lagrangiana (3.1) do campo escalar complexo na situação em que a invariância de Lorentz é mantida para descrever a condensação de Bose-Einstein de um gás ideal bosônico livre tanto no limite ultrarelativístico como no limite não relativístico.

4.1 O gás ideal não relativístico sob os efeitos CPT-par e violando a invariância de Lorentz

A lagrangiana (4.5) foi testada estudando os efeitos da quebra espontânea da invariância de Lorentz na condensação de Bose-Einstein de um gás ideal bosônico livre não relativístico.

Obtivemos o limite não relativístico da lagrangiana (4.5) seguindo a receita mostrada na seção **3.2** fazendo a seguinte transformação no campo escalar Φ :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{e^{-imt}}{\sqrt{2m}} \varphi(\mathbf{x}, t), \quad (4.6)$$

onde foi considerado os termos até ordem m^{-1} , os quais correspondem a condição:

$$|i\partial_t \varphi| \approx E_{\text{cinética}} \varphi \ll m\varphi. \quad (4.7)$$

Desse modo, a versão não relativística da densidade lagrangiana (4.5) é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{nr} = & i(1 + \lambda_{00}) \varphi^* \partial_t \varphi - \frac{1}{2m} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi^* + \frac{1}{2m} \lambda_{jk} \partial_j \varphi^* \partial_k \varphi - \\ & - i\lambda_{0j} \varphi^* \partial_j \varphi + \left(-\frac{m\lambda_{00}}{2} \right) \varphi \varphi^*. \end{aligned} \quad (4.8)$$

A equação de Euler-Lagrange para o campo φ^* implica na equação de movimento,

$$-i(1 + \lambda_{00}) \partial_t \varphi - \frac{1}{2m} \nabla^2 \varphi + \left[\frac{1}{2m} \lambda_{jk} \partial_j \partial_k + i\lambda_{0j} \partial_j + \frac{m}{2} \lambda_{00} \right] \varphi = 0, \quad (4.9)$$

que é a equação de Schrödinger modificada por termos contendo os campos de fundo que regem os efeitos da quebra espontânea da invariância de Lorentz.

O fator $(1 + \lambda_{00})$, no primeiro termo da equação (4.9), desempenha o papel da constante de Planck (h) modificada pelo campo de fundo λ_{00} de tal forma que λ_{00} pode ser limitado pela incerteza relativa $\left(\frac{\Delta h}{h}\right)$, ou seja,

$$\lambda_{00} \leq \frac{\Delta h}{h} = 3,6 \times 10^{-8}, \quad (4.10)$$

onde $3,6 \times 10^{-8}$ é o melhor valor para $\left(\frac{\Delta h}{h}\right)$ fornecido pela CODATA 2006 [31].

Contudo, podemos redefinir o campo $\varphi \rightarrow (1 + \lambda_{00})^{-1} \varphi$ na equação de movimento (4.9), de modo que ficamos com:

$$-i\partial_t\varphi - \frac{1}{2m(1 + \lambda_{00})} \nabla^2\varphi + \frac{1}{(1 + \lambda_{00})} \left[\frac{1}{2m} \lambda_{jk} \partial_j \partial_k + i\lambda_{0j} \partial_j + \frac{m}{2} \lambda_{00} \right] \varphi = 0. \quad (4.11)$$

Observando o segundo termo, vemos que o parâmetro λ_{00} modifica o fator $\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)$ na equação de Schrödinger usual, o que permite impor um outro limite superior para λ_{00} usando a incerteza relativa de $\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)$ que pode ser obtida usando as respectivas incertezas relativas de $\left(\frac{h}{m}\right)$ e (h):

$$\lambda_{00} \leq \frac{\Delta \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)}{\frac{\hbar^2}{2m}}. \quad (4.12)$$

Como exemplo disso, temos:

- Para o átomo de rubídio (^{87}Rb):

$$\lambda_{00} \leq 4.9 \times 10^{-8}. \quad (4.13)$$

- Para o elétron:

$$\lambda_{00} \leq 3.79 \times 10^{-8}. \quad (4.14)$$

Ambos os resultados são compatíveis com o limite de λ_{00} dado pela equação (4.10).

A densidade lagrangiana não relativística, equação (4.8), é invariante sobre a transformação global $U(1)$:

$$\varphi \rightarrow e^{-i\alpha} \varphi, \quad \varphi^* \rightarrow e^{i\alpha} \varphi^*, \quad (4.15)$$

cuja densidade de carga conservada é,

$$j^0 = (1 + \lambda_{00}) \varphi^* \varphi. \quad (4.16)$$

Os momentos canônicos conjugados para φ^* e φ são:

$$\pi = 0, \quad \pi^* = i(1 + \lambda^{00}) \varphi^*, \quad (4.17)$$

respectivamente. Note-se ainda, que os momentos canônicos conjugados que aparecem na equação (4.17) formam um conjunto de vínculos de segunda classe.

A densidade hamiltoniana canônica do sistema é escrita como,

$$\mathcal{H}_C = \frac{1}{2m} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi^* - \frac{1}{2m} \lambda_{jk} \partial_j \varphi^* \partial_k \varphi + i \lambda_{0j} \varphi^* \partial_j \varphi + \left(\frac{m \lambda_{00}}{2} \right) \varphi \varphi^*. \quad (4.18)$$

De posse da densidade de carga conservada, dos momentos canônicos conjugados e da densidade hamiltoniana passaremos para a construção da função de partição.

4.1.1 A função de partição

Procedendo de modo similar ao caso sem violação da invariância de Lorentz, o sistema não relativístico possui vínculos de segunda classe. Definimos a função de partição corretamente segundo o método desenvolvido por Faddeev-Senjanovic [23]. Assim, a função de partição descrevendo um gás ideal bosônico não relativístico no equilíbrio termodinâmico no marco da violação da invariância de Lorentz é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\beta) &= N(\beta) \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^* \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\pi^* \delta[\pi] \delta[\pi^* - i(1 + \lambda^{00})\varphi^*] \times \\ &\times \exp \left\{ \int_{\beta} dx \, i\pi^* \partial_{\tau} \varphi + i\pi \partial_{\tau} \varphi^* - \mathcal{H}_C + \mu(1 + \lambda_{00})\varphi^* \varphi \right\}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde o potencial químico μ é associado a densidade de carga $(1 + \lambda_{00})\varphi^* \varphi$. A integração é realizada sobre os campos satisfazendo condições de contorno periódicas na variável τ :

$$\varphi(\tau, \mathbf{x}) = \varphi(\tau + \beta, \mathbf{x}) \quad , \quad \varphi^*(\tau, \mathbf{x}) = \varphi^*(\tau + \beta, \mathbf{x}). \quad (4.20)$$

Integrando nos momentos canônicos, a função de partição fica escrita na forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\beta) &= N(\beta) \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^* \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[-(1 + \lambda_{00})\varphi^* \partial_{\tau} \varphi + \frac{1}{2m} \varphi^* \nabla^2 \varphi + \mu(1 + \lambda_{00})\varphi^* \varphi \right] \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[-\frac{1}{2m} \lambda_{jk} \varphi^* \partial_j \partial_k \varphi - i \lambda_{0j} \varphi^* \partial_j \varphi + \left(-\frac{1}{2} \lambda_{00} m \right) \varphi^* \varphi \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Redefinindo os campos como

$$\varphi \rightarrow (1 + \lambda_{00})^{-1/2} \varphi \quad , \quad \varphi^* \rightarrow (1 + \lambda_{00})^{-1/2} \varphi^* \quad ,$$

a função de partição pode ser expressa numa forma mais compacta,

$$\mathcal{Z}(\beta) = N(\beta) \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^* e^{-S(\beta)}, \quad (4.22)$$

onde, à temperatura finita, $S(\beta)$ e o operador \mathbf{D} são definidos por:

$$S(\beta) = \int_{\beta} dx \varphi^* \mathbf{D} \varphi, \quad (4.23)$$

$$\mathbf{D} = \partial_{\tau} - \frac{1}{2m\gamma} \nabla^2 + \frac{1}{2m\gamma} \lambda_{jk} \partial_j \partial_k + \frac{i}{\gamma} (\lambda_{0j}) \partial_j - \bar{\mu}, \quad (4.24)$$

com

$$\gamma = 1 + \lambda_{00} \quad , \quad \bar{\mu} = \mu - \frac{\lambda_{00} m}{2\gamma}. \quad (4.25)$$

A existência de um modo zero para o operador \mathbf{D} , definido em (4.24), requer que:

$$\bar{\mu} = 0 \rightarrow \mu - \frac{m\lambda_{00}}{2\gamma} = 0. \quad (4.26)$$

Contudo, o potencial químico medido no laboratório é $\mu = 0$ onde começa o fenômeno da condensação de Bose-Einstein. Então, para garantir a existência da condensação de Bose-Einstein no contexto da quebra espontânea da invariância de Lorentz devemos impor a seguinte restrição sobre o parâmetro λ_{00} :

$$\lambda_{00} = 0. \quad (4.27)$$

Devido a restrição (4.27) o fator γ , dado por (4.25), se reduz a unidade, ou seja, $\gamma = 1$.

Assim como no caso do condensado de Bose-Einstein usual, podemos expandir os campos em séries de Fourier:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, t) &= \xi + \left(\frac{1}{2V}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n,p} \left[\chi_n(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \omega_n \tau)} + \psi_n^*(\mathbf{p}) e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \omega_n \tau)} \right], \\ \varphi^*(\mathbf{x}, t) &= \xi + \left(\frac{1}{2V}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n,p} \left[\psi_n(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \omega_n \tau)} + \chi_n^*(\mathbf{p}) e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \omega_n \tau)} \right], \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ são as frequências bosônicas de Matsubara. O parâmetro real ξ carrega o comportamento infravermelho dos campos φ e φ^* , ou seja, ele leva em conta a contribuição das partículas condensadas no estado fundamental $n = 0$ e $\mathbf{p} = 0$. Os campos $\chi_n(\mathbf{p})$ e $\psi_n(\mathbf{p})$ são adimensionais e satisfazem as relações dadas por (3.77) e (3.78):

$$\chi_0(\mathbf{0}) = \psi_0(\mathbf{0}) = 0,$$

e

$$\chi_{-n}(-\mathbf{p}) = \psi_n^*(\mathbf{p}) \quad , \quad \psi_{-n}(-\mathbf{p}) = \chi_n^*(\mathbf{p}) \quad .$$

Por causa da transformação (4.28) a medida funcional em (4.22) muda da seguinte maneira:

$$\mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^* \rightarrow \prod_{n,\mathbf{p}} d\chi_n(\mathbf{p}) d\psi_n(\mathbf{p}). \quad (4.29)$$

Por outro lado, a transformação (4.28) permite escrever a ação euclidiana (4.23) como:

$$\int_{\beta} dx \varphi^* \mathbf{D} \varphi = -\xi^2 \mu V \beta + \sum_{n, \mathbf{p}} \left[\beta \tilde{\mathbf{D}}^{(+)}(n, \mathbf{p}) \right] \chi_n^*(\mathbf{p}) \chi_n(\mathbf{p}) + \sum_{n, \mathbf{p}} \left[\beta \tilde{\mathbf{D}}^{(-)}(n, \mathbf{p}) \right] \psi_n^*(\mathbf{p}) \psi_n(\mathbf{p}), \quad (4.30)$$

com $\tilde{\mathbf{D}}^{(+)}(n, \mathbf{p})$ e $\tilde{\mathbf{D}}^{(-)}(n, \mathbf{p})$ definidos pelas expressões:

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(+)}(n, \mathbf{p}) = i\omega_n + \frac{1}{2m} \mathbf{p} \cdot \mathbb{N} \mathbf{p} - \frac{1}{m} \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{p} - \mu, \quad (4.31)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(-)}(n, \mathbf{p}) = -i\omega_n + \frac{1}{2m} \mathbf{p} \cdot \mathbb{N} \mathbf{p} + \frac{1}{m} \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{p} - \mu, \quad (4.32)$$

onde a restrição (4.27) foi usada. Além disso, definimos a matriz simétrica \mathbb{N} e o vetor $\boldsymbol{\vartheta}$ cujas componentes são:

$$N_{jk} = \delta_{jk} - \lambda_{jk}, \quad \boldsymbol{\vartheta}_j = m \lambda_{0j}, \quad (4.33)$$

respectivamente. A matriz \mathbb{N} será definida-positiva para λ_{jk} suficientemente pequeno.

Substituindo (4.29) e (4.30) na função de partição (4.22), resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\beta) &= N(\beta) \exp \left[\xi^2 \mu V \beta \right] \int \prod_{n, \mathbf{p}} d\chi_n(\mathbf{p}) \exp \left\{ - \sum_{n, \mathbf{p}} \left[\beta \tilde{\mathbf{D}}^{(+)}(n, \mathbf{p}) \right] \chi_n^*(\mathbf{p}) \chi_n(\mathbf{p}) \right\} \times \\ &\times \int \prod_{n, \mathbf{p}} d\psi_n(\mathbf{p}) \exp \left\{ - \sum_{n, \mathbf{p}} \left[\beta \tilde{\mathbf{D}}^{(-)}(n, \mathbf{p}) \right] \psi_n^*(\mathbf{p}) \psi_n(\mathbf{p}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Realizando as integrações funcionais encontramos,

$$\mathcal{Z} = N(\beta) \exp \left[\xi^2 \mu V \beta \right] \prod_{n, \mathbf{p}} \left[\beta \tilde{\mathbf{D}}^{(+)}(n, \mathbf{p}) \right]^{-\frac{1}{2}} \left[\beta \tilde{\mathbf{D}}^{(-)}(n, \mathbf{p}) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.35)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= N(\beta) \exp \left[\xi^2 \mu V \beta \right] \prod_{n, \mathbf{p}} \left[\beta i\omega_n + \frac{\beta}{2m} \mathbf{p} \cdot \mathbb{N} \mathbf{p} - \frac{\beta}{m} \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{p} - \beta\mu \right]^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \prod_{n, \mathbf{p}} \left[-\beta i\omega_n + \frac{\beta}{2m} \mathbf{p} \cdot \mathbb{N} \mathbf{p} + \frac{\beta}{m} \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{p} - \beta\mu \right]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Desde que a quantidade de interesse é o logaritmo da função de partição, temos:

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z} &= \xi^2 \mu V \beta + \ln N(\beta) - \frac{V}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_n \ln \left[\beta i\omega_n + \frac{\beta}{2m} \mathbf{p} \cdot \mathbb{N} \mathbf{p} - \frac{\beta}{m} \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{p} - \beta\mu \right] - \\ &- \frac{V}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_n \ln \left[-\beta i\omega_n + \frac{\beta}{2m} \mathbf{p} \cdot \mathbb{N} \mathbf{p} + \frac{\beta}{m} \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{p} - \beta\mu \right]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Note-se que o primeiro e o segundo termo na expressão acima não são conjugados complexos um do outro. Porém, podemos manipular o segundo termo de tal forma a simplificar ainda mais a equação (4.37). Fazendo a seguinte mudança:

$$\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}.$$

Assim, a função de partição (4.37), torna-se:

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z} = & \xi^2 \mu V \beta + \ln N(\beta) - \frac{V}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_n \ln \beta \left[i\omega_n + \frac{1}{2m} \mathbf{p} \cdot \mathbb{N} \mathbf{p} - \frac{1}{m} \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{p} - \mu \right] - \\ & - \frac{V}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_n \ln \beta \left[-i\omega_n + \frac{1}{2m} \mathbf{p} \cdot \mathbb{N} \mathbf{p} - \frac{1}{m} \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{p} - \mu \right], \end{aligned} \quad (4.38)$$

que resulta em,

$$\ln \mathcal{Z} = \xi^2 \mu V \beta + \ln N(\beta) - \frac{V}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_n \ln \beta^2 \left[(\omega_n)^2 + \left(\frac{1}{2m} \mathbf{p} \cdot \mathbb{N} \mathbf{p} - \frac{1}{m} \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{p} - \mu \right)^2 \right], \quad (4.39)$$

Podemos ainda fazer algumas manipulações adicionais no espaço dos momentos: Primeiro fazemos a seguinte translação:

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \mathbb{N}^{-1} \boldsymbol{\vartheta}, \quad (4.40)$$

tal que

$$d^3 \mathbf{p} \rightarrow d^3 \mathbf{p},$$

de modo que a função de partição toma a seguinte forma:

$$\ln \mathcal{Z} = \xi^2 \mu V \beta + \ln N(\beta) - \frac{V}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_n \ln \beta^2 \left[(\omega_n)^2 + \left(\frac{1}{2m} \mathbf{p} \cdot \mathbb{N} \mathbf{p} - \frac{1}{2m} \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbb{N}^{-1} \boldsymbol{\vartheta} - \mu \right)^2 \right]. \quad (4.41)$$

A segunda operação no espaço dos momentos é uma rotação, ou seja,

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbb{R} \mathbf{p}.$$

A rotação \mathbb{R} , por sua vez, é escolhida como aquela que diagonaliza \mathbb{N} :

$$\mathbb{R}^T \mathbb{N} \mathbb{R} = \mathbb{D},$$

onde \mathbb{D} é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de \mathbb{N} .

A medida do espaço dos momentos não muda, ou seja, $d^3 \mathbf{p} \rightarrow d^3 \mathbf{p}$, pelo fato do Jacobiano da transformação: $|\det \mathbb{R}| = 1$. Então a função de partição (4.41) é expressa como

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z} = & \xi^2 \mu V \beta + \ln N(\beta) - \\ & - \frac{V}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_n \ln \beta^2 \left[(\omega_n)^2 + \left(\frac{1}{2m} \mathbf{p} \cdot \mathbb{D} \mathbf{p} - \frac{1}{2m} \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbb{N}^{-1} \boldsymbol{\vartheta} - \mu \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

A terceira operação é uma dilatação ou contração no espaço dos momentos, isto é,

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbb{D}^{-1/2} \mathbf{p},$$

de modo que a medida muda como

$$d^3 \mathbf{p} \rightarrow \left| \det \mathbb{D}^{-1/2} \right| d^3 \mathbf{p} = |\det \mathbb{N}|^{-1/2} d^3 \mathbf{p}.$$

Assim, a função de partição (4.42) torna-se:

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z} = & \xi^2 \mu V \beta + \ln N(\beta) - \\ & - \frac{V}{2} |\det \mathbb{N}|^{-1/2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_n \ln \beta^2 \left[(\omega_n)^2 + \left(\frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 - \frac{1}{2m} \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbb{N}^{-1} \boldsymbol{\vartheta} - \mu \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Observe que o termo no logaritmo é semelhante aquele que aparece na função de partição (3.84) do caso não relativístico na ausência da quebra da invariância de Lorentz. No entanto, se considerarmos a existência da condensação de Bose-Einstein, que é garantida por um modo zero trivial quando $\mu = 0$, devemos impor que o vetor $\boldsymbol{\vartheta}$ seja nulo, ou seja, $\vartheta_j = 0$, que leva a seguinte restrição sobre o campo de fundo λ_{0j} :

$$\lambda_{0j} = 0. \quad (4.44)$$

Sob essa última restrição, a função de partição (4.43) resulta em:

$$\ln \mathcal{Z} = \xi^2 \mu V \beta + \ln N(\beta) - \frac{V}{2} |\det \mathbb{N}|^{-1/2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_n \ln \beta^2 \left[(\omega_n)^2 + \left(\frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 - \mu \right)^2 \right]. \quad (4.45)$$

Calculando o somatório obtemos,

$$\ln \mathcal{Z} = \xi^2 \mu V \beta - V (\det \mathbb{N})^{-1/2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left[1 - e^{-\beta \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu \right)} \right], \quad (4.46)$$

onde fizemos a seguinte escolha:

$$\ln N(\beta) = \frac{1}{2} V (\det \mathbb{N})^{-1/2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2m} \beta. \quad (4.47)$$

Logo, realizando a integração em (4.46), obtemos a função de partição para um gás ideal bosônico não relativístico sob os efeitos da violação da invariância de Lorentz. Logo,

$$\ln \mathcal{Z}(\beta) = \xi^2 V \beta \mu + V (\det \mathbb{N})^{-1/2} \left(\frac{m}{2\pi\beta} \right)^{3/2} \text{Li}_{5/2} \left(e^{\beta\mu} \right). \quad (4.48)$$

Se compararmos a função de partição (4.48), a qual contém os efeitos da violação da invariância de Lorentz, com a da equação (3.90) que permite descrever a condensação de Bose-Einstein usual podemos dizer que os efeitos da violação da invariância de Lorentz estão contidos no fator,

$$(\det \mathbb{N})^{-1/2}. \quad (4.49)$$

4.1.2 A CBE de um gás ideal não relativístico sob os efeitos CPT-par e violando a invariância de Lorentz

A densidade de partículas do sistema é obtida da equação (4.48),

$$\rho = \frac{1}{\beta V} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} \right) = \xi^2 + \left(\frac{m}{2\pi\beta} \right)^{3/2} (\det \mathbb{N})^{-1/2} \text{Li}_{3/2} \left(e^{\beta\mu} \right). \quad (4.50)$$

Procedendo de modo similar ao caso do regime não relativístico sem quebra de simetria discutido na subseção 3.2.1, a condensação de Bose-Einstein deve ocorrer quando $\mu = 0$. Portanto, estamos interessados na situação quando $\xi \neq 0$ e $\mu = 0$.

Seguiremos em detalhe a análise da condensação de Bose-Einstein desenvolvida na subseção 3.2.1. O potencial químico deve ser $\mu < 0$ para que a densidade de partículas seja não negativa. Assim, dada uma densidade ρ a uma dada temperatura T acima da temperatura crítica T_C , podemos sempre encontrar um valor para o potencial químico μ tal que a equação (4.50) seja satisfeita. Por outro lado, se fixarmos a densidade ρ e diminuirmos a temperatura de tal modo que $\mu \rightarrow 0^-$, mas mantendo $\xi = 0$, na região $T \geq T_C > 0$ a densidade de partículas se comporta como:

$$\rho \approx \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \zeta(3/2) (\det \mathbb{N})^{-1/2}. \quad (4.51)$$

Quando $\mu = 0$ e $\xi \neq 0$, a temperatura é diminuída ainda mais de modo que $T < T_C$, a densidade de partículas fica expressa como:

$$\rho = \rho_0 + \rho^*(\beta, \mu = 0), \quad (4.52)$$

onde $\rho_0 = \xi^2$ é a densidade de partículas condensadas e $\rho^*(\beta, \mu = 0)$ é a densidade de partículas com momento não nulo, dada por

$$\rho^*(\beta, \mu = 0) = \rho - \rho_0 = \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \zeta(3/2) (\det \mathbb{N})^{-1/2}. \quad (4.53)$$

A temperatura crítica é definida quando o potencial químico atinge seu valor máximo, $\mu = 0$, mas o parâmetro ξ é mantido nulo. Assim, temos que

$$\rho = \rho^*(\beta_C, \mu = 0) = \left(\frac{mT_C}{2\pi} \right)^{3/2} \zeta(3/2) (\det \mathbb{N})^{-1/2}, \quad (4.54)$$

de modo que podemos extrair a temperatura crítica,

$$T_C = T^{(BEC)} (\det \mathbb{N})^{1/3}, \quad (4.55)$$

onde $T^{(BEC)}$ é a temperatura da transição de fase na ausência da quebra ou violação espontânea da invariância de Lorentz,

$$T^{(BEC)} = \frac{2\pi}{m} \left(\frac{\rho}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3}.$$

Para observar mais de perto as contribuições dos parâmetros que regem a violação da invariância de Lorentz devemos expandir (4.55) nesses coeficientes, até primeira ordem, ou seja,

$$T_C = T^{(BEC)} \left[1 - \frac{1}{3} \text{tr}(\lambda_{ij}) + \dots \right]. \quad (4.56)$$

Observamos que no caso não relativístico os parâmetros CPT-par tipo espaço, λ_{ij} , fornecem contribuições que modificam a temperatura crítica $T^{(BEC)}$ da condensação de Bose-Einstein usual.

No laboratório, a temperatura da condensação de Bose-Einstein, $T^{(BEC)}$, é experimentalmente determinada na faixa de $0,5\text{-}2\mu\text{K}$ [32]. Todavia, experimentos mais sofisticados são capazes de obter temperaturas da ordem de $0,5 \times 10^{-10}\text{K}$ [33]. Se considerarmos 10^{-11}K como a temperatura mais baixa detectada, a incerteza relativa para a temperatura da condensação de Bose-Einstein seria $5 \times 10^{-6} - 2 \times 10^{-5}$. Então, pela equação (4.56), podemos estabelecer um limite superior para $\frac{1}{3}\text{tr}(\lambda_{ij})$ usando a menor incerteza relativa da temperatura da condensação de Bose-Einstein. Estabelecemos o limite superior:

$$\text{tr}(\lambda_{ij}) < 3 \times 10^{-6}. \quad (4.57)$$

Para a temperatura $T < T_C$ e $\mu = 0$, a (4.53) é uma equação para a densidade $\rho - \rho_0$ dos estados com $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, ou seja,

$$\rho - \rho_0 = \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \zeta(3/2) (\det \mathbb{N})^{-1/2}. \quad (4.58)$$

Logo, combinando (4.58) com (4.55) obtemos a densidade de partículas condensadas ($\mathbf{p} = \mathbf{0}$):

$$\rho_0 = \rho \left(1 - \left[\frac{T}{T_C} \right]^{3/2} \right).$$

Portanto, a fração das partículas condensadas não é modificada pelos termos que regem a violação da invariância de Lorentz. A condição para a existência da condensação de Bose-Einstein no regime não relativístico $\rho \ll m^3$ é mantida.

Assim, o limite não relativístico (4.8) do nosso modelo (4.5), com as restrições (4.27) e (4.44), permite-nos descrever de modo consistente a condensação de Bose-Einstein de um gás ideal não relativístico sob os efeitos CPT-par e violando a invariância de Lorentz. De posse desse resultado, vamos usar o modelo (4.5) para construir de modo consistente a função de partição de um gás ideal relativístico e, conseqüentemente, analisar a condensação de Bose-Einstein no limite ultrarelativístico sob os efeitos da violação da invariância de Lorentz.

Capítulo 5

O gás ideal relativístico sob os efeitos da quebra espontânea da invariância de Lorentz

Neste capítulo, estudaremos a condensação de Bose-Einstein com os termos que violam a invariância de Lorentz no limite ultrarelativístico.

A densidade lagrangiana mais simples do campo escalar complexo incluindo os efeitos da quebra espontânea da invariância de Lorentz em $(1 + 3)$ - dimensões é dada por (4.5),

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi + \lambda^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi, \quad (5.1)$$

cujas equações de movimento são:

$$(\square + \lambda^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2) \Phi = 0, \quad (5.2)$$

$$(\square + \lambda^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2) \Phi^* = 0.$$

A densidade lagrangiana (5.1) é invariante perante a simetria global $U(1)$, ou seja,

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi e^{-i\alpha}, \quad \Phi^* \rightarrow \Phi'^* = \Phi^* e^{i\alpha}, \quad (5.3)$$

onde α é uma constante real qualquer que independe das coordenadas do espaço-tempo. Esta é uma simetria global chamada tipo $U(1)$ ou de fase. Novamente, pelo teorema de Noether, a corrente conservada é dada por:

$$J^\mu = \alpha \left\{ i (\Phi^* \partial^\mu \Phi - \Phi \partial^\mu \Phi^*) + i \lambda^{\mu\nu} (\Phi^* \partial_\nu \Phi - \Phi \partial_\nu \Phi^*) \right\}. \quad (5.4)$$

Sendo α arbitrário, definimos a densidade de corrente por:

$$j^\mu = i(\Phi^* \partial^\mu \Phi - \Phi \partial^\mu \Phi^*) + i\lambda^{\mu\nu} (\Phi^* \partial_\nu \Phi - \Phi \partial_\nu \Phi^*), \quad (5.5)$$

e usando as equações de movimento é fácil mostrar que a corrente é conservada, ou seja,

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (5.6)$$

Calculando os momentos canônicos conjugados aos campos Φ e Φ^*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = \pi^* = (1 + \lambda_{00}) \dot{\Phi}^* - \lambda_{0j} \partial_j \Phi^*, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}^*} = \pi = (1 + \lambda_{00}) \dot{\Phi} - \lambda_{0j} \partial_j \Phi,$$

respectivamente. O modelo não possui vínculos e a densidade hamiltoniana canônica é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_C = & \gamma [\pi^* \pi + \lambda_{0j} (\pi^* \partial_j \Phi + \pi \partial_j \Phi^* + \lambda_{0k} \partial_k \Phi^* \partial_j \Phi)] + \\ & + \nabla \Phi^* \cdot \nabla \Phi + m^2 \Phi^* \Phi - \lambda_{jk} \partial_j \Phi^* \partial_k \Phi, \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde,

$$\gamma = (1 + \lambda_{00})^{-1}.$$

A densidade hamiltoniana será definida positiva para valores de $\lambda^{\mu\nu}$ suficientemente pequeno.

A densidade de carga, componente j^0 da densidade de corrente (5.5), expressa em termos dos campos e dos respectivos momentos canônicos conjugados é dada por:

$$j^0 = i(\Phi^* \pi - \Phi \pi^*). \quad (5.9)$$

Note-se que a densidade de carga acima possui a mesma estrutura canônica quando a invariância de Lorentz é preservada.

5.1 A função de partição

Procedendo de modo similar ao caso sem violação da invariância de Lorentz, o sistema relativístico não possui vínculos. Assim, definimos a função de partição corretamente segundo o método desenvolvido por Faddeev-Senjanovic [23]. Esta função de partição descreverá um gás ideal bosônico relativístico no equilíbrio termodinâmico no marco da violação da invariância de Lorentz e é escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^* \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\pi^* \exp \left\{ \int_\beta dx \left[i\pi^* \partial_\tau \Phi + i\pi \partial_\tau \Phi^* - \mathcal{H}_C + i\mu (\Phi^* \pi - \Phi \pi^*) \right] \right\}, \quad (5.10)$$

onde μ é o potencial químico associado a carga conservada. A integração será realizada sobre todos os campos, os quais satisfazem as seguintes condições de contorno periódica na variável τ :

$$\Phi(0, \mathbf{x}) = \Phi(\beta, \mathbf{x}) \quad , \quad \Phi^*(0, \mathbf{x}) = \Phi^*(\beta, \mathbf{x}), \quad (5.11)$$

dado o caráter bosônico dos campos Φ e Φ^* .

Realizaremos primeiro a integração dos momentos canônicos π e π^* :

$$\begin{aligned} I_{\pi\pi^*} &= \int \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\pi^* \exp \left[\int_{\beta} dx \left\{ i\pi^* \left[i\gamma\pi + (\partial_{\tau}\Phi - \mu\Phi) + i\gamma\lambda_{0j}\partial_j\Phi \right] \right\} \right] \times \\ &\times \exp \left[\int_{\beta} dx \left\{ i\pi \left[(\partial_{\tau}\Phi^* + \mu\Phi^*) + i\gamma\lambda_{0j}\partial_j\Phi^* \right] \right\} \right], \end{aligned} \quad (5.12)$$

o qual fornece a contribuição $\mathcal{H}^{(1)}$ para a exponencial em (5.10),

$$I_{\pi\pi^*} = \exp \left\{ \int_{\beta} dx \mathcal{H}^{(1)} \right\}, \quad (5.13)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(1)} &= -\gamma^{-1} (\partial_{\tau}\Phi - \mu\Phi) (\partial_{\tau}\Phi^* + \mu\Phi^*) - \gamma (i\lambda_{0j}\partial_j\Phi) (i\lambda_{0k}\partial_k\Phi^*) + \\ &- (\partial_{\tau}\Phi^* + \mu\Phi^*) (i\lambda_{0j}\partial_j\Phi) - (\partial_{\tau}\Phi - \mu\Phi) (i\lambda_{0j}\partial_j\Phi^*). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Por causa desta contribuição, a função de partição (5.10) fica escrita como

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^* \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[\mathcal{H}^{(1)} - \mathcal{H}^{(2)} \right] \right\}, \quad (5.15)$$

onde $\mathcal{H}^{(2)}$ é a densidade hamiltoniana canônica (5.8) sem a contribuição dos momentos canônicos,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(2)} &= \nabla\Phi^* \cdot \nabla\Phi - \lambda_{jk}\partial_j\Phi^*\partial_k\Phi + m^2\Phi^*\Phi + \\ &- \gamma (i\lambda_{0j}\partial_j\Phi) (i\lambda_{0k}\partial_k\Phi^*). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Calculando explicitamente a quantidade $\mathcal{H}^{(1)} - \mathcal{H}^{(2)}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(1)} - \mathcal{H}^{(2)} &= -\gamma^{-1} (\partial_{\tau}\Phi - \mu\Phi) (\partial_{\tau}\Phi^* + \mu\Phi^*) - \nabla\Phi^* \cdot \nabla\Phi + \\ &+ \lambda_{jk}\partial_j\Phi^*\partial_k\Phi - m^2\Phi^*\Phi \\ &- (\partial_{\tau}\Phi^* + \mu\Phi^*) (i\lambda_{0j}\partial_j\Phi) - (\partial_{\tau}\Phi - \mu\Phi) (i\lambda_{0j}\partial_j\Phi^*). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Fazendo as seguintes redefinições:

$$\lambda_{00} = -\lambda_{\tau\tau} \quad , \quad \lambda_{0j} = i\lambda_{\tau j} \quad , \quad \eta = 1 - \lambda_{\tau\tau} \quad , \quad (5.18)$$

encontramos que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{(1)} - \mathcal{H}^{(2)} &= -\eta(\partial_\tau \Phi - \mu\Phi)(\partial_\tau \Phi^* + \mu\Phi^*) - \nabla\Phi^* \cdot \nabla\Phi + \\
&+ \lambda_{jk}\partial_j\Phi^*\partial_k\Phi - m^2\Phi^*\Phi + \\
&+ (\partial_\tau\Phi^* + \mu\Phi^*)(\lambda_{\tau j}\partial_j\Phi) + (\partial_\tau\Phi - \mu\Phi)(\lambda_{\tau j}\partial_j\Phi^*).
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Inserindo (5.19) em (5.15) e integrando por partes, a função de partição fica escrita numa forma mais compacta:

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}\Phi\mathcal{D}\Phi^* \exp\left\{-\int_\beta dx \Phi^*\mathbf{D}\Phi\right\}, \tag{5.20}$$

onde o operador diferencial \mathbf{D} é definido da seguinte maneira:

$$\mathbf{D} = -\eta(\partial_\tau - \mu)^2 + 2(\lambda_{\tau k}\partial_k)(\partial_\tau - \mu) - (\delta_{jk} - \lambda_{jk})\partial_j\partial_k + m^2. \tag{5.21}$$

Novamente, expandindo os campos, Φ e Φ^* , numa série de Fourier temos:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \left(\frac{\beta}{2V}\right)^{1/2} \sum_{n,\mathbf{p}} [e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+i\omega_n\tau}\varphi_n(\mathbf{p}) + e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-i\omega_n\tau}\psi_n^*(\mathbf{p})], \\
\Phi^* &= \left(\frac{\beta}{2V}\right)^{1/2} \sum_{n,\mathbf{p}} [e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+i\omega_n\tau}\psi_n(\mathbf{p}) + e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-i\omega_n\tau}\varphi_n^*(\mathbf{p})],
\end{aligned} \tag{5.22}$$

onde $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ são as frequências bosônicas de Matsubara. Os campos $\varphi_n(\mathbf{p})$ e $\psi_n(\mathbf{p})$ são adimensionais e satisfazem as relações dadas por (3.77) e (3.78):

$$\chi_0(\mathbf{0}) = \psi_0(\mathbf{0}) = 0,$$

e

$$\chi_{-n}(-\mathbf{p}) = \psi_n^*(\mathbf{p}) \quad , \quad \psi_{-n}(-\mathbf{p}) = \chi_n^*(\mathbf{p}) \quad .$$

Por causa da transformação (5.22) a medida funcional em (5.20) muda da seguinte forma:

$$\mathcal{D}\Phi\mathcal{D}\Phi^* \rightarrow \prod_{n,\mathbf{p}} d\varphi_n(\mathbf{p})d\psi_n(\mathbf{p}). \tag{5.23}$$

Substituindo a transformação (5.22) no fator exponencial da equação (5.20) obtemos:

$$\int_\beta dx \Phi^*\mathbf{D}\Phi = \beta^2 \sum_{n,\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{D}}^{(+)}(n,\mathbf{p})\varphi_n^*(\mathbf{p})\varphi_n(\mathbf{p}) + \beta^2 \sum_{n,\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{D}}^{(-)}(n,\mathbf{p})\psi_n^*(\mathbf{p})\psi_n(\mathbf{p}), \tag{5.24}$$

onde $\tilde{\mathbf{D}}^{(+)}(n,\mathbf{p})$ e $\tilde{\mathbf{D}}^{(-)}(n,\mathbf{p})$ são os respectivos autovalores do operador \mathbf{D} definido em (5.21), ou seja,

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(+)}(n,\mathbf{p}) = \eta(\omega_n + i\mu)^2 - 2(\lambda_{\tau k}p_k)(\omega_n + i\mu) + (\delta_{jk} - \lambda_{jk})p_jp_k + m^2, \tag{5.25}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(-)}(n,\mathbf{p}) = \eta(\omega_n - i\mu)^2 - 2(\lambda_{\tau k}p_k)(\omega_n - i\mu) + (\delta_{jk} - \lambda_{jk})p_jp_k + m^2.$$

Substituindo (5.23) e (5.24) na função de partição (5.20), encontramos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \prod_{n, \mathbf{p}} d\varphi_n(\mathbf{p}) \exp \left\{ -\beta^2 \sum_{n, \mathbf{p}} \tilde{\mathbf{D}}^{(+)}(n, \mathbf{p}) \varphi_n^*(\mathbf{p}) \varphi_n(\mathbf{p}) \right\} \times \\ &\times \int \prod_{n, \mathbf{p}} d\psi_n(\mathbf{p}) \exp \left\{ -\beta^2 \sum_{n, \mathbf{p}} \tilde{\mathbf{D}}^{(-)}(n, \mathbf{p}) \psi_n^*(\mathbf{p}) \psi_n(\mathbf{p}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Calculando a integração funcional dos campos φ_n e ψ_n , encontramos para a função de partição o seguinte resultado:

$$\mathcal{Z} = \left(\prod_{n, \mathbf{p}} \left[\beta^2 \tilde{\mathbf{D}}^{(+)}(n, \mathbf{p}) \right]^{-1/2} \right) \times \left(\prod_{n, \mathbf{p}} \left[\beta^2 \tilde{\mathbf{D}}^{(-)}(n, \mathbf{p}) \right]^{-1/2} \right). \quad (5.27)$$

Tomando o logaritmo, obtemos:

$$\ln \mathcal{Z} = -\frac{V}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_n \ln \left[\beta^2 \tilde{\mathbf{D}}^{(+)}(n, \mathbf{p}) \right] - \frac{V}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_n \ln \left[\beta^2 \tilde{\mathbf{D}}^{(-)}(n, \mathbf{p}) \right]. \quad (5.28)$$

Fazendo

$$n \rightarrow -n,$$

e

$$\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p},$$

na segunda integral obtemos:

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_n \ln \left[\beta^2 \tilde{\mathbf{D}}^{(-)}(-n, -\mathbf{p}) \right] = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_n \ln \left[\beta^2 \tilde{\mathbf{D}}^{(+)}(n, \mathbf{p}) \right].$$

Logo, a função de partição torna-se

$$\ln \mathcal{Z} = -V \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_n \ln \left[\beta^2 \tilde{\mathbf{D}}^{(+)}(n, \mathbf{p}) \right]. \quad (5.29)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(+)}(n, \mathbf{p}) = \eta (\omega_n + i\mu)^2 - 2 (\lambda_{\tau k} p_k) (\omega_n + i\mu) + (\delta_{jk} - \lambda_{jk}) p_j p_k + m^2.$$

Para calcular o somatório, usaremos a seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} \sum_n \ln \left[a (2\pi n + i\mu)^2 - 2b (2\pi n + i\mu) + c^2 \right] &= -\ln 2 + \frac{1}{a} \sqrt{ac^2 - b^2} + \\ &+ \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{1}{a} \sqrt{ac^2 - b^2} - \mu - i\frac{b}{a} \right) \right] + \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{1}{a} \sqrt{ac^2 - b^2} + \mu + i\frac{b}{a} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.30)$$

onde definimos os parâmetros a, b, c por

$$a = \eta, \quad b = \beta (\lambda_{\tau j} p_j), \quad c^2 = \beta^2 [(\delta_{jk} - \lambda_{jk}) p_j p_k + m^2]. \quad (5.31)$$

Na equação (5.30) observamos que o potencial químico adquire uma parte imaginária que mudaria o caráter bosônico do campo dando-lhe uma estatística indefinida. Porém, como o nosso propósito é descrever a condensação ultrarelativística de um gás ideal bosônico no marco da violação da invariância de Lorentz, isso somente será possível se impormos que o parâmetro $\lambda_{\tau k}$ seja nulo:

$$\lambda_{\tau k} = 0. \quad (5.32)$$

Sob tais requerimentos físicos a equação (5.30) torna-se mais simples

$$\sum_n \ln \left[a (2\pi n + i\mu)^2 + c^2 \right] = \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{c}{\sqrt{a}} + \mu \right) \right] + \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{c}{\sqrt{a}} - \mu \right) \right]. \quad (5.33)$$

Desse modo, a função de partição descreverá de modo consistente um gás ideal relativístico composto de partículas carregadas.

De posse deste resultado, a função de partição (5.29) fica expressa por,

$$\ln \mathcal{Z} = -V \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_n \ln \left\{ \eta (2\pi n + i\beta\mu)^2 + \beta^2 [\mathbf{p} \cdot \mathbb{N} \mathbf{p} + m^2] \right\}, \quad (5.34)$$

onde definimos a matriz simétrica \mathbb{N} ,

$$N_{jk} = \delta_{jk} - \lambda_{jk}. \quad (5.35)$$

Realizando o somatório, encontramos:

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z} = & -V \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left[1 - \exp \left(-\beta\eta^{-1/2} \sqrt{\mathbf{p} \cdot \mathbb{N} \mathbf{p} + m^2} + \beta\mu \right) \right] - \\ & -V \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left[1 - \exp \left(-\beta\eta^{-1/2} \sqrt{\mathbf{p} \cdot \mathbb{N} \mathbf{p} + m^2} - \beta\mu \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Podemos ainda fazer a seguinte rotação no espaço dos momentos:

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbb{R} \mathbf{p}. \quad (5.37)$$

A rotação \mathbb{R} , contudo, é escolhida como sendo aquela que diagonaliza \mathbb{N} , ou seja,

$$\mathbb{R}^T \mathbb{N} \mathbb{R} = \mathbb{D},$$

onde \mathbb{D} é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de \mathbb{N} . A medida do espaço de momentos não muda, ou seja,

$$d^3 \mathbf{p} \rightarrow d^3 \mathbf{p},$$

por causa do Jacobiano da transformação: $|\det \mathbb{R}| = 1$. Então a função de partição (5.36) é expressa da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z} = & -V \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left[1 - \exp \left(-\beta \sqrt{\mathbf{p} \cdot (\eta^{-1} \mathbb{D}) \mathbf{p} + \eta^{-1} (m^2)} + \beta\mu \right) \right] - \\ & -V \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left[1 - \exp \left(-\beta \sqrt{\mathbf{p} \cdot (\eta^{-1} \mathbb{D}) \mathbf{p} + \eta^{-1} (m^2)} - \beta\mu \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.38)$$

A segunda operação é uma dilatação ou contração no espaço dos momentos, dada por,

$$\mathbf{p} \rightarrow \eta^{1/2} \mathbb{D}^{-1/2} \mathbf{p}, \quad (5.39)$$

de modo que a medida muda da seguinte forma:

$$d^3 \mathbf{p} \rightarrow \eta^{3/2} \left| \det \mathbb{D}^{-1/2} \right| d^3 \mathbf{p} = \eta^{3/2} (\det \mathbb{N})^{-1/2} d^3 \mathbf{p}.$$

Portanto, a função de partição (5.38) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z} = & -V \eta^{3/2} (\det \mathbb{N})^{-1/2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln [1 - \exp(-\beta\omega + \beta\mu)] - \\ & -V \eta^{3/2} (\det \mathbb{N})^{-1/2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln [1 - \exp(-\beta\omega - \beta\mu)], \end{aligned} \quad (5.40)$$

onde definimos,

$$\omega = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}. \quad (5.41)$$

Note-se ainda, que os parâmetros que controlam os efeitos da violação da invariância de Lorentz modificam a massa da partícula segundo a equação,

$$M^2 = \eta^{-1} (m^2). \quad (5.42)$$

As integrais em (5.40) convergem se $-M \leq \mu \leq M$ e, com isso, a condensação de Bose-Einstein ocorrerá quando $\mu = \pm M$, ou seja, os campos de fundo mudam o valor do potencial químico crítico.

5.2 A CBE no limite ultrarelativístico no marco da violação da invariância de Lorentz

Para descrever a condensação de Bose-Einstein no limite ultrarelativístico no contexto da violação da invariância de Lorentz seguiremos a referência [34]. A densidade de carga vale:

$$\rho = \eta^{3/2} (\det \mathbb{N})^{-1/2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{e^{\beta(\omega-\mu)} - 1} - \frac{1}{e^{\beta(\omega+\mu)} - 1} \right]. \quad (5.43)$$

Esta equação é uma fórmula implícita para o potencial químico μ como uma função da densidade ρ e da temperatura T . Para temperatura T acima da temperatura crítica T_c , podemos sempre encontrar um valor para μ de tal forma que restrinja a equação (5.43). Se a densidade ρ é mantida fixada e a temperatura é diminuída de tal modo que o potencial químico $|\mu| \rightarrow M$, então, na região $T \geq T_c \gg M$, temos que:

$$|\rho| \approx \frac{1}{3} M (\det \mathbb{N})^{-1/2} \eta^{3/2} T^2. \quad (5.44)$$

Quando $|\mu| = M$ e a temperatura é diminuída ainda mais, de tal modo que $T < T_c$, a densidade de carga fica escrita como,

$$\rho = \frac{1}{\beta V} \left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \mu} \right) \Big|_{\mu=M} = \rho_0 + \rho^*(\beta, \mu = M), \quad (5.45)$$

onde ρ_0 é a contribuição de carga do condensado (modo de momento nulo) e o termo $\rho^*(\beta, \mu = M)$ fornece a contribuição das excitações térmicas das partículas (modo de momento não nulo) que é dado pela equação (5.44) com $|\mu| = M$,

$$\rho - \rho_0 = \rho^*(\beta, \mu = M) = \frac{1}{3} M (\det \mathbb{N})^{-1/2} \eta^{3/2} T^2. \quad (5.46)$$

A temperatura crítica T_c em que a condensação de Bose-Einstein ocorre é atingida quando $|\mu| = M$, mantendo $\rho_0 = 0$, e é determinada implicitamente pela equação $\rho = \rho^*(\beta_c, \mu = M)$. Desse modo, a equação (5.46) fornece,

$$T_c = \left(\frac{3|\rho|}{M} \right)^{1/2} (\det \mathbb{N})^{1/4} \eta^{-1/4}. \quad (5.47)$$

Explicitando o valor de M , dado pela equação (5.42),

$$M = m\eta^{-1/2},$$

e substituindo este resultado em (5.47), encontramos para a temperatura crítica:

$$T_c = T^{(BEC)} (\det \mathbb{N})^{1/4} \eta^{-1/2}, \quad (5.48)$$

onde,

$$T^{(BEC)} = (3|\rho|/m)^{1/2}, \quad (5.49)$$

é a temperatura crítica da condensação de Bose-Einstein [34] na ausência dos termos que violam a simetria de Lorentz.

Admitindo que os termos responsáveis pela violação da invariância de Lorentz são muito pequenos em magnitude, podemos expandir a (5.48) em termos desses coeficientes. Assim, obtemos:

$$T_c = T^{(BEC)} \left[1 + \frac{1}{2} \lambda_{\tau\tau} - \frac{1}{4} \text{tr}(\lambda_{ij}) + \frac{3}{8} (\lambda_{\tau\tau})^2 - \frac{1}{8} \lambda_{\tau\tau} \text{tr}(\lambda_{ij}) - \frac{1}{8} \text{tr}(\lambda_{ik} \lambda_{kj}) + \frac{1}{32} [\text{tr}(\lambda_{ij})]^2 + \dots \right]. \quad (5.50)$$

Para temperaturas $T < T_c$, a equação (5.46) é uma equação para a densidade de carga $\rho - \rho_0$ dos estados de momento não nulo ($\mathbf{p} \neq 0$), que juntamente com a equação (5.48) permite obter a densidade de carga das partículas condensadas ($\mathbf{p} = 0$):

$$\rho_0 = \rho \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]. \quad (5.51)$$

Assim, diferentemente da temperatura crítica e do potencial químico, a fração da carga condensada não é modificada pelos campos de fundo que controlam os efeitos da violação da invariância de Lorentz. Lembremos ainda que na ausência dos efeitos provenientes da violação da invariância de Lorentz a condição necessária para um gás de Bose ideal de massa m sofrer a condensação de Bose-Einstein em uma temperatura ultrarelativística ($T_c \gg m$) é que $\rho \gg m^3$. Tal condição é levemente modificada para,

$$\rho \gg M^3 \approx m^3 \left(1 + \frac{3}{2} \lambda_{\tau\tau} + \dots \right), \quad (5.52)$$

pelos termos responsáveis pela violação da invariância de Lorentz.

Capítulo 6

Conclusões e perspectivas

A presente dissertação estudou os possíveis efeitos da quebra espontânea da invariância de Lorentz no fenômeno da condensação de Bose-Einstein, também conhecido como o quinto estado da matéria. Observamos que a existência do fenômeno impõe severas restrições sobre os coeficientes responsáveis pela violação da invariância de Lorentz. A ferramenta essencial para o nosso estudo é a teoria quântica de campos à temperatura finita (Estatística Quântica) no formalismo da integração funcional para descrição de sistemas em equilíbrio termodinâmico (formalismo do tempo imaginário).

A lagrangiana (4.8), obtida tomando o limite não relativístico do modelo (4.5), é usada para estudar os efeitos da violação da invariância de Lorentz na condensação de um gás ideal bosônico não relativístico. De posse desta lagrangiana observamos que a densidade de carga conservada e, conseqüentemente, a carga conservada são modificadas pelo parâmetro λ_{00} que preserva CPT e viola a invariância de Lorentz, ou seja,

$$\rho = (1 + \lambda_{00}) \varphi \varphi^*,$$

$$\mathcal{Q} = (1 + \lambda_{00}) \int \varphi \varphi^* d^3x.$$

A existência do modo zero do operador que define a função de partição do sistema esta intimamente ligada a existência do fenômeno da condensação de Bose-Einstein (CBE). Assim, mostramos que tal fenômeno somente será possível se os parâmetros λ_{00} e λ_{0j} satisfazem as seguintes restrições:

$$\lambda_{00} = 0, \tag{6.1}$$

e

$$\lambda_{0j} = 0. \tag{6.2}$$

Ambas relações mostram que os parâmetros, em princípio, independem da massa da partícula que compõe o gás.

Observamos ainda, que a temperatura crítica do condensado de Bose-Einstein é ligeiramente modificada pelos coeficientes CPT-par tipo espaço, λ_{ij} , da seguinte forma:

$$T_C = T^{(BEC)} \left[1 - \frac{1}{3} \text{tr}(\lambda_{ij}) + \dots \right].$$

Admitindo que as contribuições provenientes da violação da invariância de Lorentz são menores que a menor incerteza relativa da temperatura crítica da CBE observada no laboratório, podemos estabelecer um limite superior para o termo,

$$\frac{1}{3} \text{tr}(\lambda_{ij}) < 10^{-6},$$

logo,

$$\text{tr}(\lambda_{ij}) < 3 \times 10^{-6}.$$

Observamos também da equação (4.48) que todas as contribuições dos termos responsáveis pela VII estão contidas no fator $(\det \mathbb{N})^{-1/2}$, onde a matriz \mathbb{N} é definida na equação (4.33).

Por outro lado, para obtermos uma função de partição real e bem definida para descrever o gás ideal relativístico devemos impor que o parâmetro $\lambda_{0\tau}$ seja nulo, ou seja,

$$\lambda_{0\tau} = 0.$$

Isso é suficiente para descrever a CBE no limite ultrarelativístico sob os efeitos da violação da invariância de Lorentz. Desse modo, os coeficientes responsáveis pela violação da invariância de Lorentz modificam tanto a temperatura crítica como o potencial químico crítico, ou seja,

$$T_C = T^{(BEC)} \left[1 + \frac{1}{2} \lambda_{\tau\tau} - \frac{1}{4} \text{tr}(\lambda_{ij}) + \dots \right] \quad (6.3)$$

e

$$|\mu| = m \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_{\tau\tau} + \dots \right). \quad (6.4)$$

Observamos que somente os coeficientes CPT-par fornecem contribuições de primeira ordem tanto para a temperatura crítica como para o potencial químico crítico.

Observamos ainda, da equação (5.40), que todas as contribuições dos termos responsáveis pela VII estão contidas no fator $\eta^{3/2} (\det \mathbb{N})$, onde a matriz \mathbb{N} é definida semelhantemente ao caso do limite não relativístico e $\eta = 1 - \lambda_{\tau\tau}$.

A perspectiva mais imediata é estudar a condensação de Bose-Einstein do ^{87}Rb usando um campo vetorial massivo (campo de Proca).

Entre outras perspectivas que seguem do presente trabalho podemos considerar o estudo da condensação de férmions e vórtices no marco da violação da invariância de Lorentz. Também, podemos incluir os efeitos da quebra espontânea da simetria-CPT e da invariância de Lorentz nos fenômenos da supercondutividade e a superfluidez.

Apêndice A

Notação e algumas relações úteis

No decorrer desta dissertação usamos o sistema de unidades naturais:

$$c = \hbar = k_B = 1. \quad (\text{A.1})$$

Os vetores 3D aparecem escritos em negrito. Por exemplo, \mathbf{p} , \mathbf{k} , $\boldsymbol{\kappa}$, \mathbf{x} .

O tensor métrico é definido como

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

As propriedades termodinâmicas obtidas a partir da função de partição são:

- A energia livre de Helmholtz,

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}. \quad (\text{A.3})$$

- A pressão,

$$P = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial V}\right). \quad (\text{A.4})$$

- A entropia,

$$S = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}\right)_V. \quad (\text{A.5})$$

- A densidade de energia,

$$U = -\frac{1}{V\beta} \left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta}\right). \quad (\text{A.6})$$

- A densidade de carga,

$$\rho = \frac{1}{\beta V} \left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \mu}\right). \quad (\text{A.7})$$

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, *Quantentheorie des einatomigen idealen GasesII*, Sitz. Ber. Preus. Akad. Wissens 3 (1925). A tradução deste artigo pode ser encontrada na RBEF **27**, n1, p.113-120, (2005).
- [2] S. N. Bose, *Zeit. Phys.* **26**, 178 (1924).
- [3] S. R. Dahmen; *Bose e Einstein: Do nascimento da estatística quântica à condensação sem interação II*, Revista brasileira do ensino de física, **v.27**,n.2, p.283-298, (2005). Dahmen, Sílvio R.; *Einstein e a Teoria Quântica de Gases*, Revista brasileira de ensino de física, **v.27**, n1, p.109-111, (2005)
- [4] http://inorgan221.iq.unesp.br/quimgeral/boseeinstein/condensado_bose_einstein.html
- [5] Condensado Bose-Einstein:
http://www.youtube.com/watch?v=dXiQMmqeLOQ&feature=player_embedded.
- [6] C. J. Pethick, H. Smith. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gás*, University Press Cambridge, second edition, 2004.
- [7] V. Pleitez, *A física das partículas elementares e o prêmio nobel de física 2008*, Revista brasileira do ensino de física, **30**, 4301 (2008).
- [8] <http://www.physics.indiana.edu/~kostelec/faq.html>.
- [9] M. N. B. Silva; *Violação das simetrias de Lorentz e CPT em sistemas de campos escalares*, UFPB, Julho de 2006.
- [10] R. F. Streater and A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That*, Princeton University Press (2000); F. Strocchi, *Selected Topics on the General Properties of Quantum Field Theory, Lecture Notes in Physics*, **v 51**, World Scientific Publishing Company (1993).
- [11] V. A. Kostelecky, *Scientific American* 291, 75 (2004).

- [12] G. Kane, Scientific American 288, **56** (2003). M. A. Moreira; *O Modelo Padrão da Física de Partícula*; Revista brasileira de ensino de física, **v.31**, n.1, 1306 (2009)
- [13] D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997); D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998).
- [14] G. E. A. Matsas; *Gravitação semi-clássica*, Revista brasileira de ensino de física, **v27**, n.1, p.137-145, (2005).
- [15] A. P. Baeta Scarpelli and J. A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **73**, 105020 (2006); N.M. Barraz, Jr., J.M. Fonseca, W.A. Moura-Melo, and J.A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **76**, 027701 (2007); H. Belich, J.L. Boldo, L.P. Colatto, J.A. Helayel-Neto, A.L.M.A. Nogueira, Phys.Rev. D **68**, 065030 (2003); G. de Berredo-Peixoto and I.L. Shapiro, Phys. Lett. B **642**, 153 (2006); A.P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J.L. Boldo, L.P. Colatto, J.A. Helayel-Neto, A.L.M.A. Nogueira, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **127**, 105 (2004); J.W. Moffat, Int. J. Mod. Phys. D **12** 1279 (2003); F. W. Stecker and S.T. Scully, Astropart. Phys. **23**, 203 (2005); E. O. Iltan, Eur. Phys. J. C **40**, 269 (2005); Mod. Phys. Lett. A **19**, 327 (2004); J. High. Energy Phys. **0306** (2003) 016; O. Bertolami and D.F. Mota, Phys. Lett. B **455**, 96 (1999);
- [16] M. B. Cantcheff, C.F.L. Godinho, A. P. Baeta Scarpelli, J.A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **68**, 065025 (2003); H. Belich, T. Costa-Soares, J.A. Helayel-Neto M.T.D. Orlando, R.C. Paschoal, Phys. Lett. A **370**, 126 (2007); H. Belich, L.P. Colatto, T. Costa-Soares, J.A. Helayel-Neto, M.T.D. Orlando, Eur. Phys. J. C **62**, 425 (2009); F.A. Brito, J.R. Nascimento, E. Passos, A.Yu. Petrov, Phys. Lett. B **664**, 112 (2008); M. Gomes, T. Mariz, J.R. Nascimento, A.J. da Silva, Phys. Rev. D **77**, 105002 (2008); F.A. Brito, L.S. Grigorio, M.S. Guimaraes, E. Passos, C. Wotzasek, Phys. Rev. D **78**, 125023 (2008).
- [17] T. Jacobson, S. Liberati, and D. Mattingly, Ann. Phys. **321**, 150 (2006); T. Jacobson, S. Liberati, D. Mattingly and F.W. Stecker, Phys. Rev. Lett. **93**, 021101 (2004); T. Jacobson, S. Liberati, and D. Mattingly, Nature **424**, 1019 (2003).
- [18] R. Casana, M. M. Ferreira Jr, A. R. Gomes, P. R. D. Pinheiro, Phys. Rev. D **80**, 125040 (2009).
- [19] R. Casana, M. M. Ferreira Jr. and Josberg S. Rodrigues, Phys. Rev. D **78**, 125013 (2008).
- [20] R. Casana, M. M. Ferreira Jr., J. S. Rodrigues, Madson R. O. Silva, Phys. Rev. D **80**, 085026 (2009); R. Casana, M. M. Ferreira Jr., Madson R. O. Silva, Phys. Rev. D **81**, 105015 (2010).
- [21] D. Colladay and P. McDonald, Phys. Rev. D **70**, 125007 (2004).

- [22] D. Colladay and P. McDonald, *Phys. Rev. D* **73**, 105006 (2006).
- [23] L. D. Faddeev, *Theor. Math. Phys.* **1**, 1 (1970); P. Senjanovic, *Ann. Phys.* **100**, 227 (1976);
Erratum by Y.-G. Miao, *Ann. Phys.* **209**, 248 (1991).
- [24] J. I. Kapusta, *Finite-Temperature Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989;
M. Le Bellac, *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [25] A. Das, *Finite Temperature Field Theory*, University of Rochester USA, World Scientific.
- [26] W. Greiner, J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer, 1993
- [27] C. W. Bernard, *Phys. Rev. D* **12**, 02138 (1974).
- [28] V. Rubakov translated by Stephen S. Wilson, *Classical Theory of Gauge Fields*, Princeton University Press, Princeton e Oxford.
- [29] D. Bazeia, M. M. Ferreira Jr., A. R. Gomes and R. Menezes, *Physica D* **239**, 942 (2010); M. N. Barreto, D. Bazeia and R. Menezes, *Phys. Rev. D* **73**, 065015 (2006).
- [30] M. A. Anacleto, F. A. Brito, E. Passos, *Phys. Lett. B* **694**, 149 (2010).
- [31] P. J. Mohr, B. N. Taylor, and D. B. Newell, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 633 (2008).
- [32] J. F. Annett, *Superconductivity, Superfluids, and Condensates*, oxford University Press, 2009.
- [33] D. M. Weld, P. Medley, H. Miyake, D. Hucul, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 245301 (2009).
- [34] H. E. Haber and H. A. Weldon, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 1497 (1981); H. E. Haber and H. A. Weldon, *Phys. Rev. D* **25**, 502 (1982).
- [35] L. F. D. Palhares, *Matéria Densa e Fria: Termodinâmica, Transições de Fase e Renormalização*, UFRJ, 2008.
- [36] S. R. A. Salinas, *Introdução à Física Estatística*, Edusp, São Paulo 2008.
- [37] K. Huang, *Statistical Mechanics*, Massachusetts Institute of Technology, 2^a ed. Jonh Wiley & Sons, 1963.
- [38] V. A. Kostelecky and N. Russell, *Data Tables for Lorentz and CPT Violation*,
arXiv:0801.0287.
- [39] <http://www.sprace.org.br/AventuraDasParticulas/frames.html>

- [40] M. C. B. Abdalla, *O discreto charme das partículas elementares*. Ed. Unesp, São Paulo, 2006
- [41] V. S. Bagnato, *A Condensação de Bose-Einstein*, Revista Brasileira de Ensino de Física, **19**, pag (1997)
- [42] H. Belich *et al.*; *Violação da simetria de Lorentz*. Revista brasileira de ensino de física, **v. 29**, nº. 1, p. 57-64. (2007)
- [43] J. R. Silva; *Propriedades termodinâmicas do campo eletromagnético no setor CPT-ímpar do modelo padrão estendido*. UFMA, 2009
- [44] M. R. O. Silva; *Alguns resultados exatos à temperatura finita da eletrodinâmica CPT-par do modelo padrão estendido*. UFMA, 2010