

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Alguns resultados exatos a Temperatura Finita da  
Eletrodinâmica *CPT*-par do Modelo Padrão Estendido**

**Madson Rubem Oliveira Silva**

ORIENTADOR: RODOLFO ALVÁN CASANA SIFUENTES

SÃO LUÍS, ABRIL DE 2010

# Alguns resultados exatos a Temperatura Finita da Eletrodinâmica *CPT*-par do Modelo Padrão Estendido

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

Orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes

Doutor em Física - UFMA

SÃO LUÍS, ABRIL DE 2010

Silva, Madson Rubem Oliveira

**ALGUNS RESULTADOS EXATOS A TEMPERATURA FINITA DA  
ELETRODINÂMICA *CPT*-PAR DO MODELO PADRÃO ESTENDIDO.**

/ Madson Rubem Oliveira Silva - 2010

85.f

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós Graduação em Física

Universidade Federal do Maranhão.

Orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes

1. Simetria de Lorentz 2. Teoria de Campos à Temperatura finita 3. Radiação do Corpo negro.

I Título

CDU 538.3

MADSON RUBEM OLIVEIRA SILVA

**Alguns resultados exatos a Temperatura Finita da  
Eletrodinâmica *CPT*-par do Modelo Padrão Estendido**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

BANCA EXAMINADORA

---

Rodolfo Alván Casana Sifuentes (*ORIENTADOR*)  
Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

---

Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos  
Doutor em Física - Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

---

Manoel Messias Ferreira Junior  
Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

*À minha Mãe*

## Agradecimentos

À minha família, essencialmente a minha mãe.

À minha namorada Luzia Oliveira Aranha por está sempre presente na minha vida.

À minha filha Ingrid por existir na minha vida e ser a motivação para continuar estudando.

Ao Professor Rodolfo Alván Casana Sifuentes pela orientação, amizade e pelas excelentes conversas sobre física.

À todos os professores do Departamento de Física da UFMA, em especial ao Prof. Pinto por acreditar em meu potencial.

Ao Prof. Manoel Messias por me aceitar no grupo de teoria de campos.

Aos amigos do GFTPC, Josberg, Paulo, Alex, Guillermo,...

Ao amigo Fernando Moucherek por me incentivar a estudar Teoria de Campos

À todos da secretaria da Pós-graduação em Física.

*”Mas, se ergues da justiça a clava forte. Verás  
que um filho teu não foge à luta. Nem teme,  
quem te adora, a própria morte”.*

Trecho do Hino Nacional Brasileiro

## Resumo

A eletrodinâmica de Maxwell é uma teoria de campo que contém em sua estrutura três tipos de simetrias fundamentais na física: A simetria de Lorentz, a simetria  $CPT$  e a simetria de calibre local. A covariância de Lorentz e a simetria  $CPT$  são fundamentais na construção de qualquer teoria de campo que descreva partículas elementares e não elementares. Ambas simetrias juntamente com a simetria de calibre local são os pilares na construção do Modelo Padrão e de outras modernas teorias de campo. No entanto, cogita-se que ambas, a covariância de Lorentz e a simetria  $CPT$ , poderiam sofrer uma quebra espontânea de simetria na escala de energia de Planck (ou no Universo primordial quando as energias eram da ordem de magnitude) devido aos efeitos produzidos pela gravidade quântica. Os possíveis efeitos residuais dessa quebra espontânea, tanto da covariância de Lorentz como da simetria  $CPT$ , são estudados dentro da estrutura do Modelo Padrão Estendido (MPE). Assim, o setor de simetria de calibre local  $U(1)$  do MPE descreve os efeitos sofridos pela eletrodinâmica de Maxwell devido à violação da covariância de Lorentz e da quebra espontânea da invariância  $CPT$ .

O intuito da Dissertação é estudarmos as propriedades à temperatura finita da eletrodinâmica  $CPT$ -par do MPE representada pelo termo  $(k_F)_{\alpha\nu\rho\varphi}F^{\alpha\nu}F^{\rho\varphi}$ . O primeiro passo é construir uma função de partição, bem definida e invariante de gauge, para uma configuração arbitrária do tensor  $(k_F)_{\alpha\nu\rho\varphi}$ . Como estamos interessados em conhecer efeitos não perturbativos ou exatos da quebra espontânea da simetria de Lorentz, concentramos nossa atenção nas componentes do tensor  $(k_F)$  cujas contribuições, em primeira ordem não nula, para as relações de dispersão da eletrodinâmica de Maxwell ainda as mantém não birrefringentes. Para uma maior clareza ou um melhor entendimento, estudamos separadamente esses coeficientes não birrefringentes pertencentes aos setores de paridade-par e de paridade-ímpar do tensor  $(k_F)$ . Consequentemente, para ambos os setores, mostramos que a função de partição é calculada exatamente e resulta ser uma potência da função de partição de Maxwell. Tal potência é uma função explícita somente dos respectivos parâmetros que controlam a violação da simetria de Lorentz (VSL). Esse resultado demonstra que as propriedades termodinâmicas, do setor não birrefringente da eletrodinâmica  $CPT$ -par do MPE, como densidade de energia, pressão, entropia, etc, sejam as mesmas da eletrodinâmica de Maxwell multiplicadas por uma função que depende somente nos respectivos coeficientes não birrefringentes. Desse modo, a lei de radiação de Planck mantém a mesma dependência funcional na frequência e a lei de Stefan-Boltzmann conserva-



se proporcional a  $T^4$ . Entretanto, a constante de Stefan-Boltzmann usual sofre uma mudança, pois resulta multiplicada justamente por um fator global que contém as contribuições da VSL. No entanto, observa-se que, em geral, os coeficientes do VSL induzem uma anisotropia na distribuição angular da densidade de energia emitida pelo corpo negro.

**Palavras Chaves:** Violação da simetria de Lorentz, Teoria de campos à temperatura finita, Radiação do corpo negro.

## Abstract

Maxwell's electrodynamics is a field theory which contains in its structure three fundamental physical symmetries: The Lorentz symmetry, the *CPT*-symmetry and the local gauge symmetry. The Lorentz covariance and the *CPT*-symmetry are fundamental in the construction of any field theory describing elementary (or not elementary) particles. Both together with the local gauge symmetry are the cornerstones in the construction of the Standard Model and of others modern field theories. However, it is cogitate that as much the Lorentz covariance as the *CPT*-symmetry can be spontaneously broken at Planck energy scale (or in the very early Universe when energies are close to the Planck scale) due to quantum gravity effects. The possible residual effects of such spontaneous symmetry breaking are studied within the structure of the Standard Model Extension (SME). The  $U(1)$ -local gauge symmetry sector of the SME describes the effects produced in Maxwell's electrodynamics due to the Lorentz-covariance violation and the spontaneous symmetry breaking of the *CPT*-invariance.

Here, we study the finite temperature properties of the *CPT*-even electrodynamics of SME, represented by the term  $(k_F)_{\alpha\nu\rho\varphi}F^{\alpha\nu}F^{\rho\varphi}$ . First, we construct a well-defined and gauge invariant partition function in the functional integration formalism for an arbitrary tensor  $(k_F)$ . Then, we specialize for the *leading-order-nonbirefringent* coefficients of the tensor  $(k_F)$  and we study in separate the parity-even and the parity-odd sectors. Consequently, for both sectors, the partition function is exactly caculated by showing that it is a power of Maxwell's partition function. Such power is an explicit function of the respective parameters ruling the Lorentz-covariance violation. This way, Planck's radiation law retains its frequency dependence and the Stefan-Boltzmann law is maintained, except for a change in Stefan-Boltzmann's constant that is multiplied by a global factor containing all the LIV contributions. Nevertheless, in general, it is observed that the LIV coefficients induce an anisotropy in the angular distribution of the black body energy density.

**Keywords:** Lorentz symmetry breaking, Finite Temperature Field Theory, Black body radiation.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Campo escalar à temperatura zero</b>	<b>10</b>
2.1	Mecânica Clássica . . . . .	10
2.2	Campo escalar massivo . . . . .	11
2.2.1	Amplitude de transição vácuo–vácuo . . . . .	12
2.2.2	O gerador funcional das funções de Green completas . . . . .	13
2.2.2.1	Cálculo exato do gerador funcional para o campo escalar . . . . .	15
2.2.3	O gerador funcional das funções de Green conexas . . . . .	17
2.2.3.1	$W[J]$ para o campo escalar . . . . .	19
2.2.4	Ação efetiva . . . . .	19
2.2.4.1	$\Gamma[\phi]$ para o campo escalar . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Campo escalar à temperatura finita</b>	<b>22</b>
<b>4</b>	<b>Campo eletromagnético livre</b>	<b>26</b>
4.1	Formulação hamiltoniana e análise de vínculos . . . . .	27
4.1.1	Equações de movimento e as condições de calibre . . . . .	29
4.1.2	Calibre de Coulomb . . . . .	31
4.2	A função de partição $Z(\beta)$ . . . . .	32
<b>5</b>	<b>A eletrodinâmica <math>CPT</math>-par do modelo padrão estendido</b>	<b>37</b>
5.1	Estrutura hamiltoniana . . . . .	40
5.2	Equações de movimento e as condição de calibre . . . . .	41
5.3	A função de partição $Z(\beta)$ . . . . .	43
5.4	O setor não birrefringente da eletrodinâmica $CPT$ -par do MPE . . . . .	46

5.4.1	O setor de paridade-par . . . . .	46
5.4.1.1	A contribuição isotrópica . . . . .	47
5.4.1.2	A contribuição anisotrópica . . . . .	49
5.4.2	O setor de paridade-ímpar . . . . .	53
<b>Conclusões e perspectivas</b>		<b>56</b>
<b>A Notação e algumas relações úteis</b>		<b>60</b>
<b>B As relações de dispersão</b>		<b>61</b>
B.1	Decomposição do tensor ( $k_F$ ) a temperatura zero . . . . .	61
B.2	As equações de movimento . . . . .	63
B.3	As relações de dispersão . . . . .	63
B.3.1	Relações de dispersão do setor de paridade-par . . . . .	64
B.3.1.1	Componentes não birrefringentes de paridade-par . . . . .	64
B.3.1.1.1	Contribuição isotrópica . . . . .	64
B.3.1.1.2	Contribuição anisotrópica . . . . .	65
B.3.2	Relações de dispersão do setor de paridade-ímpar . . . . .	66
B.3.2.1	Componentes não birrefringentes de paridade-ímpar . . . . .	67
<b>C Primeiro artigo publicado no Physical Review D</b>		<b>69</b>
<b>D Segundo artigo publicado no Physical Review D</b>		<b>70</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>		<b>71</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Em Teoria de Campos constantemente ouvimos falar em quebra de simetria, quebra espontânea de simetria, violação da simetria Lorentz, quebra de simetrias discretas, etc. Então, o que vem a ser uma quebra de simetria? Ou uma quebra espontânea de simetria? Para responder estas perguntas, primeiramente devemos aprender o que é uma simetria. Como primeiro exemplo, imaginamos uma bola de sinuca branca girando sobre uma superfície plana, este sistema possui uma simetria de rotação, ou seja, a qualquer momento que olharmos à bola sempre iremos observar a mesma superfície esférica branca. Entretanto, se escrevermos a palavra física sobre a superfície da bola branca perderemos a simetria de rotação. Como segundo exemplo, consideramos uma barra circular na posição vertical sobre um plano, neste caso, o sistema possui uma simetria cilíndrica (ver fig. 1).

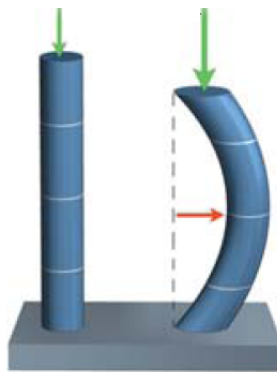


Figura 1: Exemplo de quebra espontânea de simetria.

Contudo, se aplicarmos uma força, na direção vertical e no sentido descendente sobre a barra, a simetria também será perdida, uma vez que a força aplicada dobra a barra de modo arbitrário. Nestes dois exemplos, dizemos que houve uma quebra de simetria.

Quando ocorre a quebra espontânea de simetria? No segundo exemplo, a força aplicada sobre a barra provocou uma curvatura. Como a barra pode dobrar para qualquer lado, ou seja, a escolha é aleatória, é espontânea, constitui uma quebra espontânea de simetria. Um outro exemplo é o ferromagnetismo: Seja um sistema de spins em movimento aleatório e desordenado que apresenta isotropia espacial. A medida que resfriamos o material, os spins adquirem uma determinada direção, gerando dessa forma um campo magnético não nulo ao longo dessa direção, ocorrendo uma quebra espontânea da isotropia espacial na transição de fase [1, 2].

E, sobre a violação da simetria Lorentz? A resposta para esta indagação requer um pouco mais de conhecimento matemático. Sendo assim, façamos a seguinte revisão.

Dado dois sistemas de referência, sobreposto e com origens coincidentes,  $O(x, y)$  e  $O'(x', y')$ . Localizamos uma partícula no ponto  $P$  desse dois sistemas. E, em seguida rotacionamos o sistema  $O'(x', y')$  por ângulo  $\phi$  e mantendo fixo uma partícula neste ponto. Relacionamos as coordenadas de  $O(x, y)$  com  $O'(x', y')$  segundo a transformação de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

na visão da partícula. Entretanto, podemos manter os dois sistemas fixo e girar apenas a partícula, tal que a transformação de coordenadas seja:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

na visão do observador. Os dois tipos de transformações descrevem a mesma rotação de maneira equivalente [1]. Então, uma partícula pode descrever a mesma rotação por essas duas transformações de coordenadas, deste que no segundo caso o ângulo seja de  $-\phi$ . Implicando na mesma matriz de rotação.

Essas duas transformações são classificadas como: a transformação de Lorentz do observador e a transformação de Lorentz da partícula, respectivamente.

O que acontece com a simetria de Lorentz se colocarmos um background ou campo de fundo? Para responder esta inquietação seguiremos o seguinte exemplo. Seja um elétron dentro de um capacitor de placas paralelas e considerando o campo elétrico  $\vec{E}$  na direção do eixo- $z$  como um campo de fundo. O vetor posição  $\vec{r}$  do elétron é perpendicular ao campo elétrico  $\vec{E}$ . Na transformação de Lorentz da partícula, façamos o ângulo de rotação ser  $\phi = +\frac{\pi}{2}$ . Como neste caso apenas as coordenadas irão rotacionar, o elétron permanecerá na mesma posição  $\vec{r}$ . Logo, o campo elétrico  $\vec{E}$  é perpendicular ao

vetor posição  $\vec{r}$ ,  $\vec{E} \perp \vec{r}$  (ver fig. 2).

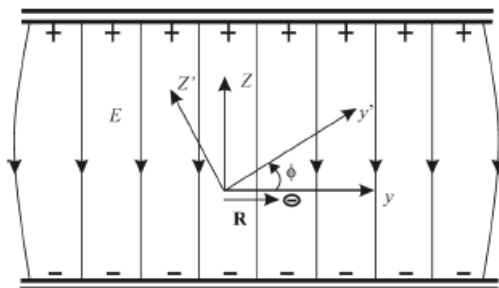


Figura 2: Rotação por um ângulo  $\phi$  na presença do background.

Para a transformação de Lorentz do observador devemos, obrigatoriamente, fazer o elétron girar de  $\phi = -\frac{\pi}{2}$  para manter a equivalência das transformações, o campo elétrico  $\vec{E}$  é paralelo ao vetor posição  $\vec{r}$ ,  $\vec{E} \parallel \vec{r}$  (ver fig. 3).

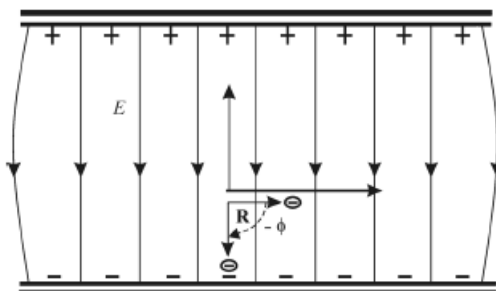


Figura 3: Rotação por um ângulo  $-\phi$  na presença do background.

Portanto, a simetria de Lorentz no referencial da partícula na presença do campo de fundo é quebrada. Desse modo, a violação ou quebra espontânea da simetria de Lorentz pode ser representada por campos de fundo vetoriais ou tensoriais permeando o espaço-tempo. Partículas e forças têm interações com esses backgrounds de modo semelhante à interação de partículas carregadas com um campo elétrico.

A qualidade imutável, ou invariância, das leis físicas para diferentes observadores representa uma simetria do espaço-tempo chamada de simetria de Lorentz. Tal simetria começou a ser estudada nos anos de 1890 pelo o físico teórico holandês Hendrik Antoon Lorentz [3]. Em 1904, ele apresentou suas famosas transformações de coordenadas, hoje conhecidas como transformações de Lorentz, termo

cunhado por Poincaré em 1905, assim:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (1.3)$$

$$y' = y, \quad (1.4)$$

$$z' = z, \quad (1.5)$$

$$t' = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.6)$$

Maxwell, em 1873 no seu trabalho seminal [4], propôs que a luz requeria de um meio material para se propagar fazendo analogia com as experiências envolvendo a propagação de ondas num fluido. Maxwell era adepto da idéia aristotélica de que a luz se propagava através de um meio material: o éter, meio que tinha densidade desprezível e que não interagia com a matéria. Em vista das propriedades da luz, já observadas naquela época, acreditava-se que o éter permeava todo o universo. Entretanto, a questão do éter foi abandonada com o advento da Teoria da Relatividade Restrita [5], a qual estabelece a covariância de Lorentz como uma simetria fundamental da natureza. A teoria da relatividade restrita está baseada em dois princípios básicos: O primeiro nos diz que as leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais e o segundo que a velocidade da luz é a mesma em relação a qualquer referencial inercial.

A covariância de Lorentz é a pedra fundamental na construção de todas as Teorias de Campos que descrevem as interações fundamentais e, sobretudo responsáveis pela construção das modernas teorias da física de altas energias. Os experimentos mais recentes confirmam a invariância de Lorentz com uma alta precisão, numa escala de energia que vai até 2 TeV. Contudo, na atualidade, é discutida a possibilidade de que a simetria de Lorentz possa ter sido quebrada na escala de Planck ou equivalentemente no início do universo quando a energia alcançada era dessa ordem de magnitude. Tal cenário é sugerido pela teoria das cordas [6] e, constitui a chave para o estudo de teorias de campos não-comutativos [7]. Os novos experimentos que se iniciarão no LHC (Large Hadron Collider), poderão estender a escala de energia até aproximadamente 14 TeV. Nessa escala de energia, a simetria de Lorentz (SL) deve ser testada e confirmada se realmente ainda é válida ou eventualmente possa ser observada a sua quebra.

Ainda existem na natureza um conjunto de simetrias discretas, que são chamadas de CPT: que corresponde à conjugação de carga (C), à inversão espacial ou paridade (P) e à inversão temporal (T). A conjugação da carga supõe que para cada partícula existe uma anti-partícula com a mesma massa mas de carga oposta. A simetria de paridade caracteriza um sistema que é invariante sob a inversão das coordenadas. Um exemplo simples que mostra essa simetria é colocarmos uma bola branca de



sinuca diante de um espelho.

A composição das simetrias de conjugação de carga e de paridade conhecida como a simetria CP, foi proposta por Landau em 1957 e descobertas em 1964 pelos norte-americanos James Cronin e Val Fitch os quais foram laureados com o prêmio Nobel de Física em 1980. O mecanismo da quebra espontânea da simetria CP foi proposta pelo físico japonês Yiochiro Nambu quando estudava decaimento de káons<sup>1</sup>. E, sendo uns dos laureados do prêmio Nobel de Física em 2008. A importância da quebra espontânea da simetria CP implica na possibilidade de explicar porque o universo contém mais matéria do que anti-matéria.

Para compreender a inversão temporal assistiremos um filme qualquer do início ao fim e, em seguida, do fim ao início. Veremos todas imagens retrocedendo o que não concorda com o sentido do filme. Neste caso, não há simetria. E, se assistimos um filme sobre sinuca? A situação é a seguinte: temos um jogador, uma mesa de sinuca e apenas o capitão (a bola branca). O jogador aplica uma tacada sobre o capitão. Este adquire uma velocidade, choca-se contra um lado da mesa e retorna para o mesmo ponto de partida. Assistindo este filme no sentido contrário (retrocedendo as imagens), não teremos condição de determinar o sentido real do filme por que as imagens são as mesmas independentemente do sentido do filme, esta simetria é denotada por inversão temporal. Note que embora a simetria de inversão temporal tenha esta denominação, não significa que o tempo esteja retrocedendo e sim as imagens geradas em cada instante.

Em resumo, a simetria CPT prevê que, se um relógio é substituído por seu equivalente de anti-matéria com paridade invertida e anda para trás no tempo, os dois manterão horário idêntico [3].

Na natureza existe a violação de modo individual das simetrias C, P, T e CP, mas até o momento não existe nenhuma comprovação experimental da violação das simetrias PT e CPT. A construção das Teorias Quânticas de Campos descrevendo as partículas elementares e suas interações são restritas pelo teorema CPT, que estabelece que toda Teoria Quântica de Campos além de ter a simetria CPT na sua estrutura, deve satisfazer as seguintes propriedades: princípio de localidade, invariância sob a simetria de Lorentz e analiticidade das representações do grupo de Lorentz com respeito aos parâmetros de translação e rotação [8].

O Modelo Padrão (MP) é, até o momento, a mais sofisticada teoria matemática sobre a natureza. O Modelo Padrão, cujo grupo de simetria é o  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , é uma teoria compreensiva que identifica as partículas elementares e especifica como elas interagem através da interação forte,  $SU(3)$ ,

---

<sup>1</sup>São mesóns que possuem um quark  $s$  composto de partículas subatômicas  $K^+$ ,  $K^-$ ,  $K^0$  e anti- $K^0$ . Possuem spins nulos, portanto são bósons.

a interação fraca,  $SU(2)$  e a interação eletromagnética  $U(1)$ . Dessa forma, tudo o que acontece em nosso mundo (exceto os efeitos gravitacionais) resulta das interações das partículas contidas no MP segundo suas regras e equações [9].

As pesquisas que estudam as conseqüências da quebra da simetria de Lorentz e da simetria CPT são freqüentemente desenvolvidas sob o arcabouço teórico do Modelo Padrão Estendido (MPE), primeiramente proposto por Colladay e Kostelecky [10].

O MPE contém, além das interações que definem o atual MP, interações que violam as simetrias de Lorentz e de CPT que são controladas por coeficientes (gerados via a quebra espontânea da simetria de Lorentz numa teoria quântica fundamental definida na escala de Planck) que são quantidades tensoriais genuínas no referencial do observador. A quebra espontânea da simetria de Lorentz garante que ela ainda permanece tanto como uma simetria da teoria fundamental como também da teoria efetiva emergente abaixo da escala de Planck no referencial do observador. Contudo, no referencial da partícula esses coeficientes tensoriais resultantes da quebra ou violação da simetria de Lorentz (VSL) não seguem as regras de transformação impostas pela covariância de Lorentz.

Uma forte motivação para estudar o MPE é a necessidade de conseguir alguma informação sobre a física fundamental que rege na escala de Planck onde cogita-se que a simetria de Lorentz pode ser quebrada espontaneamente devido aos efeitos quânticos gerados pela gravitação (gravidade quântica). Essa procura é feita principalmente no setor fotônico do MPE que tem sido amplamente estudado com dois propósitos: a determinação de novos efeitos eletromagnéticos induzidos pela interação do campo eletromagnético de Maxwell com os campos tensoriais gerados pela quebra espontânea da simetria de Lorentz e, a imposição de rigorosos limites superiores para as magnitudes dos coeficientes tensoriais que regem os efeitos da violação da simetria de Lorentz a baixa energia [11, 12, 13].

Os estudos dos efeitos da violação da simetria de Lorentz no eletromagnetismo foram iniciados por Carroll-Field-Jackiw (CFJ) no início dos anos 90 [14], quando eles incluíram na densidade lagrangiana da eletrodinâmica de Maxwell um termo do tipo Chern-Simons,  $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} (k_{AF})_\mu A_\nu F_{\kappa\lambda}$ , que além de quebrar a simetria de Lorentz também quebra a simetria CPT. Nesse termo, o vetor constante  $(k_{AF})_\mu$  é o responsável por fixar um campo de fundo que rege os efeitos da violação da simetria de Lorentz e da simetria CPT.

O setor fotônico do MPE além do termo do tipo Chern-Simons inclui um termo CPT-par da forma  $(k_F)^{\mu\nu\kappa\lambda} F_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda}$ . O tensor constante  $(k_F)$  têm as mesmas simetrias que o tensor de Riemann além de possuir duplo traço nulo. A eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ) é causal, estável e unitária [15] somente se o campo de fundo é puramente tipo-espaço,  $(k_{AF})_\mu = (0, \vec{k}_{AF})$ . Enquanto,

a eletrodinâmica que leva em consideração somente o termo CPT-par é causal, unitária e estável para valores suficientemente pequenos dos elementos do tensor  $(k_F)$  [16].

Uma característica marcante da eletrodinâmica do MPE é o fato de apresentar o fenômeno da birrefringência do vácuo [14, 17, 18], ou seja, a velocidade da luz depende do modo de propagação assim como da rotação do plano de polarização. Considerando que a birrefringência cresce linearmente com a distância, a análise deste efeito sob escala cosmológica oferece um bom cenário para a busca de indícios da violação da simetria de Lorentz. A análise de luz polarizada de fontes astrofísicas [14, 17, 18], tem a vantagem de que pequenos efeitos são acumulados devido ao tempo muito grande de propagação da luz e podem produzir resultados de alta sensibilidade comparados com aqueles obtidos com matéria [19]. Nesse contexto a radiação cósmica de fundo (RCF), sendo a radiação mais antiga e limpa disponível para observação, oferece uma oportunidade única para a pesquisa dos efeitos da violação da simetria de Lorentz envolvendo fótons. Na referência [20], foram desenvolvidas ferramentas teóricas para extrair, das observações polarimétricas da RCF e da análise dos dados observacionais, medidas altamente sensíveis das magnitudes dos parâmetros que controlam a quebra da simetria de Lorentz.

Como os termos ou os coeficientes que controlam a quebra das simetrias de Lorentz e CPT alteram a propagação da luz, é natural supor que também as propriedades termodinâmicas do campo eletromagnético sejam modificadas. Nesse contexto, num recente trabalho [21], foi investigado a influência do setor CPT-ímpar ou termo CFJ nas propriedades termodinâmicas do campo de Maxwell via o formalismo de teoria de campos à temperatura finita [22]. Primeiramente, analisaram a estrutura hamiltoniana do modelo usando o formalismo de Dirac para definir a função de partição desta teoria sem ambigüidade. Na sequência, foram analisadas as correções induzida pelos coeficientes que regem a VSL no fenômeno da radiação do corpo negro. Observaram-se que a lei de radiação de Planck e a lei de Stefan-Boltzmann sofrem correções em ordem quadrático pelos coeficientes da VSL. O efeito mais importante acontece na distribuição angular da densidade de energia do corpo negro que torna-se anisotrópica. Tais anisotropias geradas pela VSL foram relacionadas com as anisotropias da radiação cósmica de fundo.

Na presente Dissertação de Mestrado, estudamos as propriedades termodinâmicas campo fotônico do setor CPT-par do MPE. Especializamos nossa análise às componentes não birrefringentes do tensor  $(k_F)$  com o intuito de ganhar informações não perturbativas sobre a influência da VSL nas propriedades termodinâmicas do campo eletromagnético. Com esse motivo particularizamos nossos estudos, separadamente, aos setores de paridade-par e de paridade-ímpar. Os resultados obtidos tem um caráter

global para o setor não birrefringente do tensor ( $k_F$ ), ou seja, a função de partição, tanto do setor de paridade-par como de paridade-ímpar, é uma potência da função de partição da eletrodinâmica de Maxwell, onde a potência é uma função pura dos respectivos coeficientes não birrefringentes. A nova função de partição nos casos analisados, contém todos os efeitos não perturbativos oriundos da violação da simetria de Lorentz. Obtemos como resultado desta análise as mesmas propriedades termodinâmicas da eletrodinâmica de Maxwell, tais como densidade de energia, pressão, entropia, etc., multiplicadas por uma função que depende somente dos respectivos coeficiente não birrefringentes. Em geral, a distribuição angular da densidade de energia ganha um comportamento anisotrópico devido aos efeitos da VSL, tal como ocorre na eletrodinâmica CPT-ímpar [21]. Vale a pena ressaltar que os resultados obtidos para o setor não birrefringente de paridade-par foram publicados na revista *Physical Review D* no final de 2009 [23]. E, os resultados referentes ao setor não birrefringente de paridade-ímpar serão publicados em breve (maio de 2010) *Physical Review D* [24].

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos. O primeiro é a introdução. O segundo capítulo é composto de duas seções, uma sobre revisão da formulação lagrangiana e hamiltoniana da mecânica clássica. A outra retrata o campo escalar massivo, abordando a amplitude de transição vácuo-vácuo, gerador funcional das funções de Green completas e conexas e a ação efetiva. No terceiro capítulo, temos um tratamento do campo escalar à temperatura finita no formalismo de tempo imaginário. No quarto, com caráter puramente didático, estudamos o campo eletromagnético de Maxwell com o intuito de ganharmos experiência no tratamento de sistemas vinculados proposto por Dirac [25]. Assim, apresentamos a formulação hamiltoniana da técnica de quantização conhecida como integração funcional ou integral de trajetória de Dirac-Feynman. Logo, que conhecemos a estrutura de vínculos ou estrutura hamiltoniana, estaríamos em posição de quantizá-la tanto a temperatura zero (Teoria Quântica de Campos usual) via o cálculo do gerador funcional das funções de Green, ou estudá-lo à temperatura finita segundo a construção da função de partição (Mecânica Estatística Quântica). Em nosso caso, calculamos a função de partição para obtermos as propriedades termodinâmicas do campo, tais como as leis de radiação de Planck e a de Stefan-Boltzmann. No quinto capítulo, utilizamos o mesmo procedimento do capítulo 4 para analisarmos as propriedades termodinâmicas da eletrodinâmica CPT -par do MPE, especialmente os efeitos dos coeficientes não birrefringentes. Além disso, incluímos 4 apêndices: no apêndice A estabelecemos como padrão as unidades naturais, o tensor métrico e algumas relações úteis. O apêndice B apresenta a decomposição do tensor ( $k_F$ ) a temperatura zero, e as relações de dispersão das componentes não birrefringentes da eletrodinâmica CPT-par tanto nos setores de paridade-par como o de paridade-ímpar. O apêndice C apresenta o primeiro

artigo publicado na revista Physical Review D, e o apêndice D apresenta o segundo artigo publicado na revista Physical Review D.

## Capítulo 2

# Campo escalar à temperatura zero

### 2.1 Mecânica Clássica

Na mecânica clássica a quantidade fundamental para a descrição de um determinado sistema físico é conhecido como a *ação*,  $S$ , definida pela seguinte funcional:

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt L [q, \dot{q}, t], \quad (2.1)$$

em que  $L [q, \dot{q}, t]$  é a lagrangiana do sistema, definida por:

$$L [q, \dot{q}, t] = T - V, \quad (2.2)$$

onde  $T$  e  $V$  são as energias cinética e potencial do sistema, respectivamente.

Para um sistema unidimensional composto de  $N$  partículas descritas pelas coordenadas  $q_i$  e energia potencial independente do tempo, temos:

$$L = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 - V (q_i) \right]. \quad (2.3)$$

Definimos o momento canonicamente conjugado às coordenadas  $q_i$  como:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.4)$$

Para uma teoria definida em (2.3), o momento canônico conjugado é:

$$p_i = m \dot{q}_i. \quad (2.5)$$

A definição do parênteses de Poisson é:

$$\{A(p, q), B(p, q)\} = \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right). \quad (2.6)$$

Logo, os parênteses de Poisson entre variáveis canonicamente conjugadas será:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}. \quad (2.7)$$

A Hamiltoniana canônica do sistema é definida via a seguinte transformação de Legendre:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i(p, q) - L[q, \dot{q}(p, q), t], \quad (2.8)$$

em que:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (2.9)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (2.10)$$

As equações (2.9) e (2.10) são conhecidas como as equações Hamiltonianas.

Em geral, a evolução temporal de uma quantidade  $A = A(p, q, t)$  é dada por:

$$\frac{d}{dt}A = \dot{A} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (2.11)$$

## 2.2 Campo escalar massivo

A densidade lagrangiana para o campo escalar massivo é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (2.12)$$

Calculando o momento canonicamente conjugado, temos:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}. \quad (2.13)$$

Observando que este modelo não tem vínculos, podemos passar ao formalismo hamiltoniano sem nenhuma preocupação.

A densidade hamiltoniana canônica será:

$$\mathcal{H}_C = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \geq 0. \quad (2.14)$$

A hamiltoniana canônica é definida como:

$$H_C = \int d^3 \vec{x} \mathcal{H}_C = \int d^3 \vec{x} \left[ \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]. \quad (2.15)$$

As equações hamiltonianas são:

$$\dot{\phi} = \{\phi, H_C\} = \pi. \quad (2.16)$$

De maneira análoga a dedução da eq.(2.16), temos:

$$\dot{\pi} = \{\pi, H_C\} = -m^2\phi + \nabla^2\phi. \quad (2.17)$$

Derivando mais uma vez (2.16), teremos:

$$\ddot{\phi} = \dot{\pi}, \quad (2.18)$$

e substituindo em (2.17) obtemos a equação de Klein-Gordon-Fock:

$$(\square + m^2)\phi = 0. \quad (2.19)$$

### 2.2.1 Amplitude de transição vácuo-vácuo

Define-se a amplitude de transição como:

$$\begin{aligned} Z &= \langle 0 | 0 \rangle \\ &= \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \exp \left\{ i \int d^4x \left( \pi \dot{\phi} - \mathcal{H}_C \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Substituindo na eq.(2.20) a densidade Hamiltoniana da pela eq.(2.14), teremos:

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \pi \dot{\phi} - \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right] \right\} \quad (2.21)$$

completando o quadrado no expoente:

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \exp \left\{ i \int d^4x \left[ -\frac{1}{2}(\pi - \dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right] \right\} \quad (2.22)$$

fazendo a translação  $\pi \rightarrow \pi + \dot{\phi}$  e considerando que  $\mathcal{D}\pi \rightarrow \mathcal{D}\pi$ , obtemos:

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\pi \exp \left\{ i \int d^4x \left[ -\frac{1}{2}\pi^2 \right] \right\} \\ &\quad \times \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Assim, as integrações em  $\pi$  e  $\phi$  fatoram-se. A integração em  $\pi$  é independente do campo  $\phi$ , logo sua contribuição será uma constante e teremos que amplitude vácuo-vácuo torna-se-á:

$$Z = N_\pi \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right] \right\}, \quad (2.24)$$

onde:

$$N_\pi = \int \mathcal{D}\pi \exp \left\{ i \int d^4x \left[ -\frac{1}{2}\pi^2 \right] \right\}. \quad (2.25)$$



## 2.2.2 O gerador funcional das funções de Green completas

A partir da eq.(2.24), que expressa a amplitude de transição vácuo-vácuo correta, definimos o gerador funcional das funções de Green completas para o campo escalar descrito pela equação de Klein-Gordon-Fock como:

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J\phi \right] \right\}, \quad (2.26)$$

onde  $J(x)$  é a fonte externa acoplada linearmente ao campo escalar  $\phi(x)$  e  $N$  é uma constante de normalização tal que  $Z[0] = 1$ , desse modo temos que:

$$N^{-1} = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \right\}. \quad (2.27)$$

Vejamos a utilidade do gerador funcional  $Z[J]$  no cálculo dos valores esperados dos produtos de campos temporalmente ordenados, ou seja, das funções de Green.

Em primeiro lugar, lembramos que valor esperado do operador  $\hat{\phi}(x)$  é dado por:

$$G^{(1)}(x) = \langle 0 | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{\phi}(0) | 0 \rangle, \quad (2.28)$$

devido à invariância sob translações espaço-temporais. Em termos da integração funcional podemos escrever:

$$\langle 0 | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x) \exp \left\{ i \int d^4x' \mathcal{L} \right\}}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x' \mathcal{L} \right\}}, \quad (2.29)$$

observando que dentro da integração funcional o campo  $\phi(x)$  é uma função escalar.

Naturalmente podemos obter a expressão (2.29) a partir do gerador funcional (2.26). Portanto, calculamos a derivada funcional de  $Z[J]$  em relação a corrente externa  $J(x)$

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = N \int \mathcal{D}\phi i\phi(x) \exp \left\{ i \int d^4x' \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J\phi \right] \right\}, \quad (2.30)$$

fazendo  $J = 0$  e substituindo o valor da constante de normalização  $N$ , teremos:

$$\left. \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} \right|_{J=0} = i \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x) \exp \left\{ i \int d^4x' \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \right\}}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x' \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \right\}}, \quad (2.31)$$

que reproduz exatamente a equação (2.29), dessa forma:

$$\left. \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} \right|_{J=0} = i \langle 0 | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle, \quad (2.32)$$

ou seja,

$$\langle 0 | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle = \left\langle \hat{\phi}(x) \right\rangle = \left. \frac{\delta Z[J]}{\delta iJ(x)} \right|_{J=0}. \quad (2.33)$$

Em segundo lugar, determinamos o propagador ou função de Green de 2-pontos do campo escalar,  $G^{(2)}(x-y)$ , definido como:

$$G^{(2)}(x-y) = \left\langle 0 \left| T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) \right| 0 \right\rangle, \quad (2.34)$$

onde definimos o operador ordenamento temporal:

$$T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) = \theta(x^0 - y^0) \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) + \theta(y^0 - x^0) \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(x), \quad (2.35)$$

onde  $\theta(x)$  é a função escada dada por

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}. \quad (2.36)$$

Podemos mostrar que o propagador (2.34) quando escrito em termos da integração funcional será:

$$\langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x) \phi(y) \exp\left(i \int d^4x' \mathcal{L}\right)}{\int \mathcal{D}\phi \exp\left(i \int d^4x' \mathcal{L}\right)}. \quad (2.37)$$

A presença de dois campos no numerador do lado direito da equação (2.37) sugere que devemos calcular a segunda derivada funcional de  $Z[J]$  em relação a corrente  $J$ , com esse intuito, calculamos a derivada funcional em relação a  $J(y)$  partindo de (2.30):

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J(y)} \left( \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} \right) &= N \int \mathcal{D}\phi [i\phi(x)] \frac{\delta}{\delta J(y)} \exp\left(i \int d^4x' [\mathcal{L} + J\phi]\right) \\ \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} &= N \int \mathcal{D}\phi [i\phi(x)] [i\phi(y)] \exp\left(i \int d^4x' [\mathcal{L} + J\phi]\right) \\ &= (i)^2 N \int \mathcal{D}\phi \phi(x) \phi(y) \exp\left(i \int d^4x' [\mathcal{L} + J\phi]\right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Para  $J = 0$ , vem:

$$\left. \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta iJ(x) \delta iJ(y)} \right|_{J=0} = \langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle, \quad (2.39)$$

ou seja,

$$\langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle = \left. \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta iJ(x) \delta iJ(y)} \right|_{J=0}. \quad (2.40)$$

Estendemos este procedimento ao valor esperado do produto ordenado temporalmente de  $n$ -campos, ou seja, a função de Green de  $n$ -pontos,  $G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , dada por:

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \left\langle 0 \left| T \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \cdots \hat{\phi}(x_n) \right| 0 \right\rangle, \\ &= \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_n) \cdots \delta J(x_2) \delta J(x_1)} \Big|_{J=0}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

### 2.2.2.1 Cálculo exato do gerador funcional para o campo escalar

Em geral, o cálculo do gerador funcional de um dado modelo é feito seguindo alguma técnica perturbativa, embora, neste caso, devido a lagrangiana que define o modelo de Klein-Gordon-Fock ser quadrática nos campos, o gerador funcional poderá ser calculado exatamente. Para este fim, primeiramente faremos uma mudança de variável no gerador funcional (2.26)

$$\phi \rightarrow \phi + \phi_C, \quad \mathcal{D}\phi \rightarrow \mathcal{D}\phi, \quad (2.42)$$

sob tal translação a medida funcional não muda e, o campo  $\phi_C$  é solução da equação de movimento ou equação de Euler-Lagrange para o campo  $\phi$ :

$$-(\square + m^2)\phi_C + J = 0. \quad (2.43)$$

Então, substituindo (2.42) em (2.26) e usando a equação de movimento (2.43) o gerador funcional será expresso como:

$$Z[J] = \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^4x J(x) \phi_C(x) \right\}. \quad (2.44)$$

Para calcular a expressão  $\phi_C$ , em termos da fonte  $J$ , devemos solucionar eq.(2.43). Usando as representações de Fourier dos campos.

Para  $\phi_C$ :

$$\phi_C(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{\phi}_C(p) e^{-ip \cdot x}, \quad (2.45)$$

e para  $J$ :

$$J(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{J}(p) e^{-ip \cdot x}, \quad (2.46)$$

substituindo em (2.43), obtemos:

$$\tilde{\phi}_C(p) = -\frac{\tilde{J}(p)}{p^2 - m^2}, \quad (2.47)$$

que inserida em (2.45) proporciona o campo  $\phi_C$  em termos da fonte ou corrente  $J$ :

$$\phi_C(x) = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{J}(p)}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot x}. \quad (2.48)$$

A transformada de Fourier,  $\tilde{J}(p)$ , é expressa como:

$$\tilde{J}(p) = \int d^4y J(y) e^{ip \cdot y}, \quad (2.49)$$

e substituindo em (2.48), teremos:

$$\phi_C(x) = - \int d^4y G(x-y) J(y), \quad (2.50)$$

onde definimos a função  $G(x-y)$  como:

$$G(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (2.51)$$

que representa a função de Green da equação de Klein-Gordon-Fock:

$$(\square_x + m^2) G(x-y) = -\delta(x-y). \quad (2.52)$$

A prescrição  $+i\epsilon$  na definição da função de Green (2.51) garante que o gerador funcional (2.26) seja bem definido:

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} (m^2 - i\epsilon) \phi^2 + J\phi \right] \right\}. \quad (2.53)$$

Substituindo (2.50) em (2.44) obtemos a expressão do gerador funcional somente em termos da corrente  $J$ :

$$Z[J] = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) G(x-y) J(y) \right\}. \quad (2.54)$$

Calculando o valor esperado do operador  $\hat{\phi}$  via a equação (2.33) obtemos:

$$\langle \hat{\phi}(x) \rangle = 0, \quad (2.55)$$

tal resultado garante que estamos em um modelo sem quebra espontânea de simetria.

Calculando o propagador do campo escalar dado pela equação (2.40):

$$G^{(2)}(x-y) = \langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle = iG(x-y), \quad (2.56)$$

que no espaço dos momentos resulta em:

$$\tilde{G}^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (2.57)$$

que retrata o propagador de Feynman para o campo escalar:

$$\Delta_F(x-y) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (2.58)$$

### 2.2.3 O gerador funcional das funções de Green conexas

A partir do gerador funcional das funções de Green completas definimos o gerador funcional das funções de Green conexas,  $Z[J]$ , por:

$$Z[J] = \exp(iW[J]). \quad (2.59)$$

O seguinte passo é expressar as funções de Green completas em termos das funções de Green conexas. Assim, começamos com as funções de Green de ordem menor, ou seja:

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta iJ(x)} = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} Z[J], \quad (2.60)$$

logo, fazendo  $J = 0$ , obtemos o valor esperado do campo  $\phi$ :

$$\langle \hat{\phi}(x) \rangle = \left. \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \right|_{J=0} = \langle \hat{\phi}(x) \rangle_C, \quad (2.61)$$

onde o subíndice  $C$  indica às funções de Green conexas.

Calculamos o propagador derivando (2.60) em relação a  $iJ(y)$ :

$$\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta iJ(y) \delta iJ(x)} = -i \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y) \delta J(x)} Z[J] + \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} Z[J], \quad (2.62)$$

e fazendo  $J = 0$ , obteremos o propagador para o campo  $\phi$ :

$$\langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle = -i \langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle_C + \langle \hat{\phi}(x) \rangle_C \langle \hat{\phi}(y) \rangle_C, \quad (2.63)$$

onde definimos a função de Green conexa de 2-pontos como:

$$\langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle_C = \left. \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y) \delta J(x)} \right|_{J=0}. \quad (2.64)$$

Derivando a eq. (2.62) em relação a  $iJ(z)$ , obtemos a função de Green completa de 3-pontos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3 Z[J]}{\delta iJ(z) \delta iJ(y) \delta iJ(x)} &= -\frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(z) \delta J(y) \delta J(x)} Z[J] - i \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y) \delta J(x)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(z)} Z[J] \\ &\quad - i \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(z) \delta J(x)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} Z[J] - i \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(z) \delta J(y)} Z[J] \\ &\quad + \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(z)} Z[J], \end{aligned} \quad (2.65)$$

fazendo  $J = 0$ :

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(z) | 0 \rangle &= -\langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(z) | 0 \rangle_C - i \langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle_C \langle \hat{\phi}(z) \rangle_C \\ &\quad - i \langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(z) | 0 \rangle_C \langle \hat{\phi}(y) \rangle_C - i \langle 0 | T \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(z) | 0 \rangle_C \langle \hat{\phi}(x) \rangle_C \\ &\quad + \langle \hat{\phi}(x) \rangle_C \langle \hat{\phi}(y) \rangle_C \langle \hat{\phi}(z) \rangle_C. \end{aligned} \quad (2.66)$$

sendo  $\langle 0 | T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(z) | 0 \rangle_C$  a função de Green conexa de 3-pontos definida como:

$$\langle 0 | T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(z) | 0 \rangle_C = \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(z)\delta J(y)\delta J(x)} \Big|_{J=0}. \quad (2.67)$$

Para obtermos a função de Green completa de 4-pontos, devemos calcular a quarta derivada do gerador funcional  $Z[J]$  em termos das derivadas do gerador funcional  $W[J]$  ou derivar a eq.(2.65) com respeito a  $iJ(x_4)$ , desde que substituimos  $x, y$  e  $z$  por  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , respectivamente, assim:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^4 Z[J]}{\delta iJ(x_4)\delta iJ(x_3)\delta iJ(x_2)\delta iJ(x_1)} &= i \frac{\delta^4 W[J]}{\delta J(x_4)\delta J(x_3)\delta J(x_2)\delta J(x_1)} Z[J] \\ &- \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x_3)\delta J(x_2)\delta J(x_1)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_4)} Z[J] - \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x_4)\delta J(x_2)\delta J(x_1)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_3)} Z[J] \\ &- \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_2)\delta J(x_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_4)\delta J(x_3)} Z[J] - i \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_2)\delta J(x_1)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_3)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_4)} Z[J] \\ &- \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x_4)\delta J(x_3)\delta J(x_1)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_2)} Z[J] - \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_3)\delta J(x_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_4)\delta J(x_2)} Z[J] \\ &- i \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_3)\delta J(x_1)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_2)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_4)} Z[J] - \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_4)\delta J(x_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_3)\delta J(x_2)} Z[J] \\ &- \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1)} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x_4)\delta J(x_3)\delta J(x_2)} Z[J] - i \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_3)\delta J(x_2)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_4)} Z[J] \\ &- i \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_4)\delta J(x_1)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_2)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_3)} Z[J] - i \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_4)\delta J(x_2)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_3)} Z[J] \\ &- i \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_2)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_4)\delta J(x_3)} Z[J] + \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_2)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_3)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_3)} Z[J] \end{aligned}$$

e para  $J = 0$ , vem:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)\hat{\phi}(x_4) | 0 \rangle_C &= i \langle 0 | T\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)\hat{\phi}(x_4) | 0 \rangle_C \\ &- \langle 0 | T\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3) | 0 \rangle_C \langle \hat{\phi}(x_4) \rangle_C - \langle 0 | T\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_4) | 0 \rangle_C \langle \hat{\phi}(x_3) \rangle_C \\ &- \langle 0 | T\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_3)\hat{\phi}(x_4) | 0 \rangle_C \langle \hat{\phi}(x_2) \rangle_C - \langle 0 | T\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)\hat{\phi}(x_4) | 0 \rangle_C \langle \hat{\phi}(x_1) \rangle_C \\ &- \langle 0 | T\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2) | 0 \rangle_C \langle 0 | T\hat{\phi}(x_3)\hat{\phi}(x_4) | 0 \rangle_C - \langle 0 | T\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_3) | 0 \rangle_C \langle 0 | T\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_4) | 0 \rangle_C \\ &- \langle 0 | T\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_4) | 0 \rangle_C \langle 0 | T\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3) | 0 \rangle_C - i \langle 0 | T\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2) | 0 \rangle_C \langle \hat{\phi}(x_3) \rangle_C \langle \hat{\phi}(x_4) \rangle_C \\ &- i \langle 0 | T\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_3) | 0 \rangle_C \langle \hat{\phi}(x_2) \rangle_C \langle \hat{\phi}(x_4) \rangle_C - i \langle 0 | T\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_4) | 0 \rangle_C \langle \hat{\phi}(x_2) \rangle_C \langle \hat{\phi}(x_3) \rangle_C \\ &- i \langle 0 | T\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3) | 0 \rangle_C \langle \hat{\phi}(x_1) \rangle_C \langle \hat{\phi}(x_4) \rangle_C - i \langle 0 | T\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_4) | 0 \rangle_C \langle \hat{\phi}(x_1) \rangle_C \langle \hat{\phi}(x_3) \rangle_C \\ &- i \langle 0 | T\hat{\phi}(x_3)\hat{\phi}(x_4) | 0 \rangle_C \langle \hat{\phi}(x_1) \rangle_C \langle \hat{\phi}(x_2) \rangle_C + \langle \hat{\phi}(x_1) \rangle_C \langle \hat{\phi}(x_2) \rangle_C \langle \hat{\phi}(x_3) \rangle_C \langle \hat{\phi}(x_4) \rangle_C. \end{aligned}$$

Se a teoria não tem quebra espontânea de simetria  $\langle \hat{\phi}(x_i) \rangle_C = \langle \hat{\phi}(x_i) \rangle = 0$  com  $n = 1, 2, 3, 4$ , a função de Green completa de 4-pontos torna-se:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \hat{\phi}(x_3) \hat{\phi}(x_4) | 0 \rangle &= i \langle 0 | T \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \hat{\phi}(x_3) \hat{\phi}(x_4) | 0 \rangle_C \\ &\quad - \langle 0 | T \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) | 0 \rangle_C \langle 0 | T \hat{\phi}(x_3) \hat{\phi}(x_4) | 0 \rangle_C \\ &\quad - \langle 0 | T \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_3) | 0 \rangle_C \langle 0 | T \hat{\phi}(x_2) \hat{\phi}(x_4) | 0 \rangle_C \\ &\quad - \langle 0 | T \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_4) | 0 \rangle_C \langle 0 | T \hat{\phi}(x_2) \hat{\phi}(x_3) | 0 \rangle_C. \end{aligned}$$

Desse modo podemos expressar as funções de Green completas de  $n$ -pontos como uma composição de funções de Green conexas de  $m$ -pontos, sendo  $1 \leq m \leq n$ .

### 2.2.3.1 $W[J]$ para o campo escalar

Para a teoria do campo escalar, o gerador funcional das funções de Green conexas pode ser obtido, explicitamente, a partir da equação (2.54):

$$W[J] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) G(x-y) J(y), \quad (2.68)$$

e a única função de Green conexa não nula é a função de 2-pontos:

$$\langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle_C = -G(x-y). \quad (2.69)$$

### 2.2.4 Ação efetiva

Como  $Z[J]$  e  $W[J]$  são os funcionais geradores das funções de Green completas e conexas, respectivamente, poderemos introduzir a ação efetiva,  $\Gamma[\phi]$ , ou funcional gerador das funções irreduzíveis a uma partícula (IIP), via transformação de Legendre

$$\Gamma[\phi] = W[J] - \int d^4x J(x) \phi(x), \quad (2.70)$$

de tal modo que as seguintes relações funcionais sejam satisfeitas:

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi(x)} = -J(x), \quad \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \phi(x). \quad (2.71)$$

A importância da ação efetiva reside em conter todas as correções quânticas a teoria clássica. Em outras palavras nos revela como os efeitos quânticos corrigem a teoria clássica de partida. Sendo

de fundamental quando tratamos o processo de renormalização de uma teoria de campos ou quando queremos obter uma teoria de campos efetiva válida num determinado regime de energia.

As funções IIP são obtidas via a derivação funcional da ação efetiva em relação ao campo  $\phi$ , assim, a função IIP de  $n$ -pontos,  $\Gamma^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , é dada por

$$\Gamma^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\delta^n \Gamma[\phi]}{\delta\phi(x_n) \cdots \delta\phi(x_2) \delta\phi(x_1)} \Big|_{J=0}. \quad (2.72)$$

Expressando a ação efetiva como:

$$\Gamma[\phi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n). \quad (2.73)$$

Calculamos algumas funções irreduzíveis a uma partícula. Por exemplo, a função IIP de 1-ponto:

$$\Gamma^{(1)}(x) = \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi(x)} \Big|_{\phi=0}, \quad (2.74)$$

se (2.74) for nula, teremos uma teoria sem quebra de simetria. Porém, se for não nula estaremos numa situação em que há uma quebra de simetria.

A função IIP de 2-pontos,  $\Gamma^{(2)}(x, y)$ :

$$\Gamma^{(2)}(x, y) = \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta\phi(y) \delta\phi(x)} \Big|_{\phi=0}, \quad (2.75)$$

que expressa os termos quadráticos dos campos que constituem a ação, ou seja, proporciona a parte cinética da teoria, tanto a clássica como as suas correções quânticas.

As funções IIP de ordem superior, em geral, representam as interações entre os campos, já presentes ao nível clássico, e suas respectivas correções quânticas. Além das novas interações que surgem devido aos efeitos quânticos. No caso das teorias efetivas é de interesse as novas interações que surgem como produto de tais efeitos quânticos.

#### 2.2.4.1 $\Gamma[\phi]$ para o campo escalar

A partir do gerador funcional das funções de Green conexas dada pela equação (2.68) e usando a segunda equação em (2.71) encontramos  $\phi(x)$  como uma funcional da fonte externa  $J(x)$ :

$$\phi(x) = - \int d^4y G(x-y) J(y). \quad (2.76)$$

Aplicando o operador  $(\square + m^2)$ , na equação acima:

$$(\square_x + m^2) \phi(x) = - \int d^4y (\square_x + m^2) G(x-y) J(y),$$



da equação de movimento (2.52), obtemos a explícita dependência da fonte externa  $J$  em termos do campo  $\phi$ :

$$(\square_x + m^2) \phi(x) = J(x). \quad (2.77)$$

Substituindo (2.76) em (2.68), temos:

$$W[J] = \frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) J(x), \quad (2.78)$$

que substituído na ação efetiva (2.70) resulta em:

$$\Gamma[\phi] = -\frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) J(x), \quad (2.79)$$

usando a expressão (2.77) para a corrente  $J$ , vem que:

$$\Gamma[\phi] = -\frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) (\square_x + m^2) \phi(x),$$

e após uma integração por partes, obtemos a ação efetiva para o campo escalar  $\phi$ :

$$\Gamma[\phi(x)] = \int d^4x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right), \quad (2.80)$$

que simplesmente representa a ação clássica do campo de Klein-Gordon-Fock.

Devemos observar que em geral para uma teoria quadrática nos campos, a ação efetiva coincide com a ação clássica de partida.

Calculamos as funções IIP deste modelo. A função IIP de 1-ponto é nula, logo:

$$\left. \frac{\delta \Gamma(\phi)}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi=0} = 0. \quad (2.81)$$

como esperado pois estamos numa situação sem quebra espontânea de simetria.

A função IIP de 2-pontos resulta em:

$$\left. \frac{\delta^2 \Gamma(\phi)}{\delta \phi(y) \delta \phi(x)} \right|_{\phi=0} = -(\square_x + m^2) \delta(x - y), \quad (2.82)$$

que expressa a parte cinética da teoria.

As funções IIP de ordens superiores ( $n \geq 3$ ) são explicitamente nulas.

## Capítulo 3

# Campo escalar à temperatura finita

Seja uma teoria quântica de campos descrita por uma densidade Hamiltoniana  $\mathcal{H}(\pi, \phi)$ , onde  $\phi(\vec{x}, t)$  e  $\pi(\vec{x}, t)$  são os operadores do campo e do momento canônico conjugado, respectivamente. Na visão de Schrödinger,  $|\phi_0\rangle$  e  $|\phi\rangle$  são autoestados de  $\phi(\vec{x}, 0)$  e  $\phi(\vec{x}, t)$  com autovalores  $\phi_0(\vec{x})$  e  $\phi(\vec{x})$  [26], assim:

$$\phi(\vec{x}, 0)|\phi_0\rangle = \phi_0(\vec{x})|\phi_0\rangle, \quad (3.1)$$

e

$$\phi(\vec{x}, t)|\phi\rangle = \phi(\vec{x})|\phi\rangle. \quad (3.2)$$

No formalismo funcional de Feynman podemos escrever a amplitude de transição de um estado evoluir  $|\phi_0\rangle$  em  $t = 0$  para  $|\phi\rangle$  no instante  $t = t_f$ , como:

$$\langle\phi|e^{-iHt}|\phi_0\rangle = \int \mathcal{D}\pi\mathcal{D}\phi \exp\left\{i \int_0^{t_f} dt \int d^3\vec{x} \left(\pi \frac{\partial\phi}{\partial t} - \mathcal{H}(\pi, \phi)\right)\right\}, \quad (3.3)$$

onde a integração é realizada sobre os campos clássicos indo  $\phi_0(\vec{x})$  em  $t = 0$  até  $\phi(\vec{x})$  no tempo  $t = t_f$ .

Para descrever a teoria à temperatura finita, devemos fazer:

$$it_f = \beta, \quad it = \tau \quad \text{e} \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} = i \frac{\partial\phi}{\partial\tau}, \quad (3.4)$$

onde  $\beta$  é o inverso da temperatura. Substituindo em eq. (3.3), teremos:

$$\langle\phi|e^{-\beta H}|\phi_0\rangle = \int \mathcal{D}\pi\mathcal{D}\phi \exp\left\{\int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \left[i\pi\partial_\tau\phi - \mathcal{H}(\pi, \phi)\right]\right\}, \quad (3.5)$$

onde  $\partial_\tau\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\tau}$ .

A função de partição é definida como  $Z(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta H}$  e para calcularmos o traço usamos como base os autoestados  $|\phi\rangle$ , desse modo, a função de partição resulta em:

$$Z(\beta) = \sum_{\phi} \langle \phi | e^{-\beta H} | \phi \rangle, \quad (3.6)$$

que no formalismo de integração funcional é representado pela seguinte expressão:

$$Z[\beta] = \int \mathcal{D}\pi \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int_0^{\beta} dt \int d^3\vec{x} \left[ i\pi \frac{\partial\phi}{\partial\tau} - \mathcal{H}(\pi, \phi) \right] \right\} \quad (3.7)$$

sendo a integração realizada sobre todos os campos satisfazendo a seguinte condição de contorno periódica na variável  $\tau$ :

$$\phi(0, \vec{x}) = \phi(\beta, \vec{x}) \quad (3.8)$$

dado o caráter bosônico do campo  $\phi$ .

Estudaremos as propriedades do campo escalar real (estudado no capítulo anterior) à temperatura finita, em outras palavras, as suas propriedades termodinâmicas.

Substituindo a densidade Hamiltoniana, dada pela eq.(2.14), em (3.7), teremos:

$$Z[\beta] = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \exp \left\{ \int_0^{\beta} d\tau \int d^3\vec{x} \left( i\pi \partial_{\tau}\phi - \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right) \right\}, \quad (3.9)$$

ou

$$Z[\beta] = \int \mathcal{D}\phi I_{\pi}[\phi] \exp \int_0^{\beta} d\tau \int d^3\vec{x} \left[ -\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right], \quad (3.10)$$

onde

$$I_{\pi}[\phi] = \int \mathcal{D}\pi \exp \int_0^{\beta} d\tau \int d^3\vec{x} \left( i\pi \partial_{\tau}\phi - \frac{1}{2}\pi^2 \right). \quad (3.11)$$

Para integrar a eq.(3.11), temos que completar o quadrado dentro do parênteses, assim:

$$I_{\pi}[\phi] = \int \mathcal{D}\pi \exp \int_0^{\beta} d\tau \int d^3\vec{x} \left\{ -\frac{1}{2}(\pi - i\partial_{\tau}\phi)^2 - \frac{1}{2}\partial_{\tau}\phi^2 \right\}, \quad (3.12)$$

fazendo uma translação em  $\pi$ :  $\pi \rightarrow \pi - i\partial_{\tau}\phi$  e considerando que a medida funcional não muda  $\mathcal{D}\pi \rightarrow \mathcal{D}\pi$ , a eq.(3.12) torna-se:

$$I_{\pi} = N'(\beta) \exp \int_0^{\beta} d\tau \int d^3\vec{x} \left( -\frac{1}{2}\partial_{\tau}\phi^2 \right), \quad (3.13)$$

onde

$$N'(\beta) = \int \mathcal{D}\pi \exp \int_0^{\beta} d\tau \int d^3\vec{x} \left( -\frac{1}{2}\pi^2 \right). \quad (3.14)$$

Substituindo a eq.(3.13) na eq.(3.10), obtemos a função de partição para o campo escalar real será:

$$Z[\beta] = N'(\beta) \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int_0^{\beta} d\tau \int d^3\vec{x} \frac{1}{2}\phi(-\square + m^2)\phi \right\} \quad (3.15)$$

onde o operador  $\square$  expresso no espaço euclidiano é escrito como:

$$\square = \partial_\tau^2 + (\nabla\phi)^2 \quad (3.16)$$

A integral da exponencial (3.15) é a ação euclideana:

$$S = \int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} \phi (-\square + m^2) \phi. \quad (3.17)$$

O cálculo da função de partição é feito no espaço de Fourier, logo, escrevendo  $\phi(\vec{x}, \tau)$  como:

$$\phi(\vec{x}, \tau) = \left(\frac{\beta}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_n \sum_{\vec{p}} \exp(i\omega_n\tau + i\vec{p}\cdot\vec{x}) \tilde{\phi}_n(\vec{p}), \quad (3.18)$$

note que a normalização do campo é tal que as amplitudes de Fourier  $\tilde{\phi}_n(\vec{p})$  são adimensionais. As bases satisfazem as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\begin{aligned} \int_0^\beta d\tau \exp(-i\omega_n\tau) \exp(i\omega_{n'}\tau) &= \beta\delta_{nn'}, \\ \int d^3\vec{x} \exp(-i\vec{p}\cdot\vec{x}) \exp(i\vec{p}'\cdot\vec{x}) &= V\delta(\vec{p}-\vec{p}'). \end{aligned} \quad (3.19)$$

A condição de periodicidade dos campos impõe que as frequências  $\omega_n$  sejam:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{\beta}n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.20)$$

chamadas de frequências bosônicas de Matsubara.

Após a substituição de (3.18) em (3.17), obtemos a ação euclidiana no espaço de Fourier como:

$$S = \frac{1}{2} \sum_n \sum_{\vec{p}} \tilde{\phi}_{-n}(-\vec{p}) \left[ (\beta\omega_n)^2 + (\beta\omega)^2 \right] \tilde{\phi}(\vec{p}), \quad (3.21)$$

onde  $\omega = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ , e usamos o fato que  $\tilde{\phi}_n^*(\vec{p}) = \tilde{\phi}_{-n}(-\vec{p})$ .

A função de partição dada pela eq.(3.15) será:

$$Z[\beta] = N'(\beta) \int \prod_n \prod_{\vec{p}} \mathcal{D}\tilde{\phi}_n(\vec{p}) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_n \sum_{\vec{p}} \tilde{\phi}_n^*(\vec{p}) \left[ (\beta\omega_n)^2 + (\beta\omega)^2 \right] \tilde{\phi}(\vec{p}) \right\}, \quad (3.22)$$

onde a medida funcional na representação de Fourier é expressa como  $\mathcal{D}\phi = \prod_n \prod_{\vec{p}} \mathcal{D}\tilde{\phi}_n(\vec{p})$ . Logo,

$$Z[\beta] = N'(\beta) \prod_n \prod_{\vec{p}} \int \mathcal{D}\tilde{\phi}_n(\vec{p}) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \tilde{\phi}_n^*(\vec{p}) \left[ (\beta\omega_n)^2 + (\beta\omega)^2 \right] \tilde{\phi}(\vec{p}) \right\}, \quad (3.23)$$

a integração em  $\tilde{\phi}_n(\vec{p})$  é quadrática ou gaussiana, assim a função de partição é expressa como produto infinito dos autovalores do operador  $\beta^2(-\square + m^2)$  [22]:

$$Z[\beta] = N(\beta) \prod_n \prod_{\vec{p}} [(\beta\omega_n)^2 + (\beta\omega)^2]^{-\frac{1}{2}} = N(\beta) [\det \beta^2(-\square + m^2)]^{-1/2}. \quad (3.24)$$

o fator  $N(\beta)$  é escolhido tal que a função de partição resulta finita para todo  $\beta$  e volume  $V$  [26].

A partir da quantidade  $\ln Z(\beta)$  obtemos as propriedades termodinâmicas, desse modo, a eq. (3.24) torna-se:

$$\ln Z[\beta] = \ln N(\beta) - \frac{1}{2}V \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \ln [(\beta\omega_n)^2 + (\beta\omega)^2]. \quad (3.25)$$

A soma em  $n$  é realizada através da identidade [22, 26],

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln [(2\pi n)^2 + (\beta\omega)^2] = \beta\omega + 2 \ln [1 - e^{-\beta\omega}], \quad (3.26)$$

que substituído em (3.25) teremos:

$$\ln Z[\beta] = \ln N(\beta) - \frac{1}{2}V \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \beta\omega - V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \ln (1 - e^{-\beta\omega}). \quad (3.27)$$

A primeira integral é uma quantidade infinita dependente em  $\beta$  e  $V$ , o que torna a função de partição sem sentido físico. Contudo, a liberdade na escolha de  $N(\beta)$  permite contornar esse problema gravíssimo. Então podemos escolher [26]:

$$N(\beta) = \exp \left\{ \frac{1}{2}V \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \beta\omega \right\}, \quad (3.28)$$

de tal modo que a função de partição seja finita e simplesmente a expressarmos como:

$$\ln Z[\beta] = -V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \ln (1 - e^{-\beta\omega}). \quad (3.29)$$

Esta equação descreve um campo bosônico massivo em equilíbrio termodinâmico. A partir de (3.29) podemos determinar as grandezas termodinâmicas do sistema, tais como pressão, entropia e densidade de energia. Para alcançar esse objetivo devemos primeiramente calcular a energia livre de Helmholtz:

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z[\beta] = \frac{V}{\beta} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \ln (1 - e^{-\beta\omega}), \quad (3.30)$$

logo, a pressão será:

$$P = -\frac{\partial F}{\partial V} = T \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \ln (1 - e^{-\beta\omega}), \quad (3.31)$$

a entropia:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta} = V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\beta\omega}{e^{\beta\omega} - 1} - V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \ln (1 - e^{-\beta\omega}), \quad (3.32)$$

e a densidade de energia

$$E = -\left( \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right) = V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\omega}{e^{\beta\omega} - 1}. \quad (3.33)$$

## Capítulo 4

# Campo eletromagnético livre

Na segunda metade do século XIX, Maxwell formulou a teoria do campo eletromagnético, um dos pilares da física moderna, estabelecendo dois resultados extremamente importantes, a saber: o primeiro foi mostrar que a radiação eletromagnética propaga-se com a velocidade da luz  $c$  e segundo, unificou a óptica ao eletromagnetismo mostrando o caráter ondulatório da luz [4].

A eletrodinâmica de Maxwell é regida por quatro equações: duas não-homogêneas

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (4.1)$$

e duas homogêneas

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (4.2)$$

sendo invariantes perante as transformações de Lorentz. A introdução dos potenciais escalar e vetorial permite reescrever as equações numa forma explicitamente covariante, em que as quatro equações são reduzidas em apenas duas:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu, \quad \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (4.3)$$

onde os tensores  $F_{\mu\nu}$  e  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  são definidos como:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (4.4)$$

e o potencial vetor e a densidade de corrente como:

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}), \quad j^\mu = (\rho, \vec{J}). \quad (4.5)$$

O campo eletromagnético, na ausência de fontes, é descrito pela seguinte densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (4.6)$$

sendo que a equação de Euler-Lagrange nos fornece a seguinte equação de movimento:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0. \quad (4.7)$$

Além da simetria de Lorentz e da simetria-*CPT*, o eletromagnetismo de Maxwell admite uma simetria de calibre<sup>2</sup> local. Esta simetria estabelece que os campos elétricos e magnéticos, expressos em termos do potencial escalar e vetorial, são invariantes se os potenciais mudam como  $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$ , com  $\Lambda(x)$  sendo uma função escalar arbitrária.

A presença da simetria de calibre implica que a teoria é um sistema vinculado, o que nos motiva a estudar a sua estrutura hamiltoniana segundo o formalismo de Dirac [25]. Essa análise é de extrema importância se visamos a posterior quantização do modelo, podendo ser realizada tanto no formalismo canônico operatorial ou no formalismo de integração funcional.

À temperatura zero, o estudo do campo eletromagnético e suas interações com as partículas carregadas se realiza numa teoria de campos chamada de eletrodinâmica quântica (QED).

O presente capítulo trata da construção da função de partição no formalismo de integração funcional visando o estudo das propriedades inerentes ao problema da radiação do corpo negro (campo eletromagnético em equilíbrio termodinâmico), tais como: a densidade de energia, a pressão de radiação, a função de distribuição de Bose-Einstein, entropia, etc.

## 4.1 Formulação hamiltoniana e análise de vínculos

Para analisar a estrutura hamiltoniana, definimos o momento canônico conjugado ao campo  $A_\mu$  como:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -F^{0\mu}. \quad (4.8)$$

Assim escrevemos os parênteses de Poisson fundamentais entre as variáveis canônicas conjugadas:

$$\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.9)$$

De (4.8), se  $\mu = 0$  obtemos que  $\pi^0 = 0$ , desse modo teremos um vínculo primário<sup>3</sup> que denotaremos por  $\phi_1$ :

$$\phi_1 = \pi^0 \approx 0. \quad (4.10)$$

<sup>2</sup>O termo *gauge* é traduzido como calibre, qual utilizaremos nesta dissertação.

<sup>3</sup>Se a partir da definição (4.8) dos momentos canônicos conjugados não é possível expressar todas velocidades em termos dos momentos e dos campos, então, teremos um ou mais vínculos primários.

O símbolo  $\approx$  representa uma igualdade fraca dentro do espaço de fase.

Se  $\mu = k$ , (4.8) proporciona a seguinte relação dinâmica para as componentes espaciais do momento canônico:

$$\pi^k = \dot{A}_k - \partial_k A_0, \quad (4.11)$$

note que a eq.(4.12) não representa um vínculo uma vez que a velocidade  $\dot{A}_k$  pode ser expressa em termos dos momentos e dos campos:

$$\dot{A}_k = \pi^k + \partial_k A_0, \quad (4.12)$$

A densidade hamiltoniana canônica é:

$$\mathcal{H}_C = \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\pi^k)^2 + \frac{1}{4} (F_{ij})^2 + \pi^k \partial_k A_0. \quad (4.13)$$

E a hamiltoniana canônica,  $H_C$ , é dada por:

$$H_C = \int d\vec{y} \left[ \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} \right] = \int d\vec{y} \left[ \frac{1}{2} (\pi^k)^2 + \frac{1}{4} (F_{ij})^2 - A_0 \partial_k \pi^k \right] \quad (4.14)$$

notamos que  $A_0$  não tem dinâmica definida. Logo,  $H_C$  não é bem definido.

A construção de uma hamiltoniana bem definida deve levar em consideração que o vínculos primários sejam preservados no tempo, em outras palavras, permaneçam constantes ou invariantes sobre a evolução temporal gerada pela hamiltoniana.

Com esse intuito Dirac introduziu a hamiltoniana primária,  $H_P$ , definida por:

$$H_P = H_C + \int d\vec{y} C \pi^0, \quad (4.15)$$

onde  $C$  é multiplicador de Lagrange correspondente ao vínculo primário. Vale ressaltar que  $H_P$  governa a evolução temporal do sistema.

A imposição de que um vínculo,  $\phi$ , seja preservado no tempo (*condição de consistência*) é estabelecida como:

$$\dot{\phi} = \{\phi, H_P\} \approx 0, \quad (4.16)$$

porém, esta condição pode resultar em uma das seguintes situações:

- i) gerar novos vínculos, que chamaremos de vínculos secundários;
- ii) gerar equações que determinem um o mais multiplicadores de Lagrange;
- iii) ou ser identicamente nulo.



O próximo passo é calcular a condição de consistência dos vínculos secundários, novamente voltaremos às três situações listadas acima. Esse processo iterativo é realizado até que as condições de consistência resultem ser identicamente nulas.

Em nosso caso, a condição de consistência do vínculo primário resulta em:

$$\dot{\pi}^0 = \{\pi^0, H_P\} = \partial_k \pi^k \approx 0 \quad (4.17)$$

resultado que independe do multiplicador de Lagrange, e constitui um vínculo secundário que denotamos por  $\phi_2$ :

$$\phi_2 = \partial_k \pi^k \approx 0. \quad (4.18)$$

A condição de consistência de  $\phi_2 = \partial_k \pi^k$  resulta ser identicamente nula:

$$\dot{\phi}_2(x) = \{\phi_2(x), H_P\} = 0. \quad (4.19)$$

Logo, a teoria não possui mais vínculos e o processo iterativo está concluído. Então, o campo eletromagnético possui dois vínculos:

$$\pi^0 \approx 0, \quad \partial_k \pi^k \approx 0. \quad (4.20)$$

Porém, o multiplicador de Lagrange  $C$  permanece indeterminado, logo a teoria permanece indefinida.

A indeterminação de  $C$  está ligada à existência de uma simetria de calibre gerada por vínculos de primeira classe<sup>4</sup>.

Neste caso temos que,  $\{\pi^0, \partial_k \pi^k\} = 0$ , logo  $\pi^0$  e  $\partial_k \pi^k$  são de primeira classe. Note que  $\partial_k \pi^k \approx 0$  é exatamente a lei de Gauss sem fontes:  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ .

Após, termos determinado a estrutura hamiltoniana do eletromagnetismo de Maxwell como sendo de primeira classe, a teoria permanece indeterminada, pois desconhecemos a forma do multiplicador de Lagrange  $C$ . Para podermos quantizar a teoria, tanto no formalismo canônico operatorial como no funcional, tal arbitrariedade deve ser fixada de algum modo.

A seguinte seção mostra como fixar a teoria clássica e deixá-la pronta para sua quantização.

#### 4.1.1 Equações de movimento e as condições de calibre

Na conjectura de Dirac, os vínculos de primeira classe são os geradores da simetria de calibre. Dessa forma, eles devem estar contidos na hamiltoniana do sistema que gera a evolução temporal do

---

<sup>4</sup>Seja o conjunto  $\{\phi_i\}$  formado pelos vínculos primários mais secundários, etc. Então, um subconjunto  $\{\chi_i\} \subset \{\phi_i\}$  é de primeira classe se  $\{\chi_i, \phi_j\} = 0$ , qualquer que seja  $i \neq j$ . Os outros vínculos que não satisfazem essa condição são chamados de segunda classe.

mesmo. Com esse intuito, Dirac introduziu a hamiltoniana estendida  $H_E$ , que definimos somando à hamiltoniana primária todos os vínculos de primeira classe, assim:

$$H_E = H_C + \int d\vec{y} \left( C\pi^0 + D\partial_k\pi^k \right), \quad (4.21)$$

onde  $C$  e  $D$  são os respectivos multiplicadores de Lagrange.

Segundo Dirac,  $H_E$  governará a evolução temporal do sistema físico. Logo, devemos calcular a evolução das variáveis canônicas.

Para o campo  $A_\mu$ : se  $\mu = 0$ , temos:

$$\dot{A}_0 = \{A_0, H_E\} = C, \quad (4.22)$$

e se  $\mu = k$ , vem que:

$$\dot{A}_k = \{A_k, H_E\} = \pi^k + \partial_k A_0 - \partial_k D, \quad (4.23)$$

mostrando que a dinâmica tanto de  $A_0$  como de  $A_k$  permanece indeterminada, pois ainda depende dos parâmetros arbitrários  $C$  e  $D$ .

E, para o momento canônico conjugado  $\pi^\mu$ : se  $\mu = 0$ , temos:

$$\dot{\pi}^0 = \{\pi^0, H_E\} = \partial_k\pi^k \approx 0, \quad (4.24)$$

e se  $\mu = k$ , vem:

$$\dot{\pi}^k = \{\pi^k, H_E\} = -\partial_l F_{kl}, \quad (4.25)$$

note que essas duas últimas equações quando combinadas reproduzem a equação de Euler-Lagrange (4.7),  $\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ .

Podemos notar que a Eq. (4.23) será igual a equação lagrangiana (4.12) se e somente se  $\partial_k D = 0$  ou  $D = 0$ . Portanto, devemos impor uma condição de calibre de tal forma que fixe  $D$  convenientemente. O algoritmo de Dirac diz que devemos impor um número de condições de calibre igual ao número de vínculos de primeira classe na teoria. Entretanto, estas condições devem ser compatíveis com as equações de Euler-Lagrange. Devemos observar que se as condições de calibre fixam corretamente os multiplicadores de Lagrange então, o conjunto formado pelas condições de calibre mais os vínculos de primeira classe é de segunda classe.

Logo, precisamos fixar os multiplicadores de Lagrange  $C$  e  $D$  de tal modo que as equações de movimento hamiltonianas sejam equivalentes às equações de movimento lagrangianas, para garantir que a Física descrita por ambos os formalismos seja a mesma.

### 4.1.2 Calibre de Coulomb

O modo mais simples de obter pelo menos uma condição de calibre é olhar a equação de movimento lagrangiana para a componente do campo eletromagnético cujo o momento conjugado é de primeira classe. Em nosso caso  $\pi^0 \approx 0$ , assim da equação (4.7) temos que  $A_0$  satisfaz :

$$\nabla^2 A_0 - \partial_0 (\partial_k A_k) = 0. \quad (4.26)$$

Se escolhermos como a primeira condição de calibre :

$$\chi_1 = \partial_k A_k \approx 0. \quad (4.27)$$

devemos obter  $\nabla^2 A_0 = 0$ , que na ausência de fontes e a condição de contorno nula no infinito, leva a ter  $A_0 = 0$ . Então, escolhemos como segunda condição de calibre :

$$\chi_2 = A_0 \approx 0. \quad (4.28)$$

A condição de consistência de  $\chi_1$ ,  $\{\partial_k A_k, H_E\} \approx 0$ , proporciona a seguinte equação:

$$\partial_k \pi^k + \nabla^2 A_0 - \nabla^2 D \approx 0, \quad (4.29)$$

e usando o fato que  $\partial_k \pi^k \approx 0$  e  $A_0 \approx 0$ , obtemos  $\nabla^2 D \approx 0$ , ou seja,  $D$  é uma função harmônica que pela equação (4.23) deve ter gradiente nulo. Logo  $D$  é uma constante, e usando a condição de contorno que os campos se anulam no infinito, obtemos que  $D = 0$ .

A condição de consistência de  $\chi_2$ ,  $\{A_0, H_E\} \approx 0$ , fixa o multiplicador  $C = 0$ .

Com a determinação dos multiplicadores de Lagrange via a imposição da condição de calibre de Coulomb,  $\chi_1 = \partial_k A_k \approx 0$  e  $\chi_2 = A_0 \approx 0$ , a teoria torna-se bem definida.

A matriz formada pelos parênteses de Poisson dos vínculos de primeira classe mais as condições de calibre é dada por:

$$M(\vec{x} - \vec{y}) = \begin{pmatrix} & \phi_1(y) & \phi_2(y) & \chi_1(y) & \chi_2(y) \\ \phi_1(x) & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \phi_2(x) & 0 & 0 & \nabla_x^2 & 0 \\ \chi_1(x) & 0 & -\nabla_x^2 & 0 & 0 \\ \chi_2(x) & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.30)$$

cujo determinante funcional não nulo é:

$$\det M(\vec{x} - \vec{y}) = [\det(-\nabla^2)]^2, \quad (4.31)$$

dessa forma, o conjunto de vínculos  $\Sigma_a = \{\pi^0, \partial_k \pi^k, \partial_k A_k, A_0\}$  é de segunda classe (agora são igualdades fortes ou identidades).

Então, a hamiltoniana estendida torna-se a hamiltoniana física do campo eletromagnético:

$$H_E = \int d\vec{y} \left[ \frac{1}{2} (\pi^k)^2 + \frac{1}{4} (F_{ij})^2 \right] \quad (4.32)$$

Com a estrutura hamiltoniana determinada podemos estudar suas propriedades termodinâmicas via o cálculo da função de partição no formalismo de integração funcional.

## 4.2 A função de partição $Z(\beta)$

Havendo determinado a estrutura hamiltoniana do campo eletromagnético, o seguinte passo é definir a função de partição. O método desenvolvido por Faddeev-Senjanovic [27] permite definir de modo consistente a função de partição do sistema composto por fótons em equilíbrio termodinâmico. Assim, a função de partição para o campo eletromagnético, no calibre de Coulomb, é dado por

$$Z_A(\beta) = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\pi^\mu \delta(\Sigma_a) |\det M(\vec{x} - \vec{y})|^{1/2} \exp \left\{ \int_\beta dx (i\pi^\mu \partial_\tau A_\mu - \mathcal{H}_C) \right\}, \quad (4.33)$$

onde  $|\det M(\vec{x} - \vec{y})|^{1/2}$  é o determinante da matriz de vínculos definida em (4.31),  $\delta(\Sigma_a)$  é o conjunto de vínculos de segunda classe formado pelos vínculos de primeira classe e as condições de calibre,  $\mathcal{H}_C$  é a densidade hamiltoniana canônica dada em (4.13) e  $\int_\beta dx = \int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x}$  é a medida de integração no espaço de configuração.

A integração funcional do campo eletromagnético deve ser realizada sobre as configurações de campo satisfazendo a seguinte condição de periodicidade no intervalo  $0 \leq \tau \leq \beta$ :

$$A_\mu(\tau, \vec{x}) = A_\mu(\tau + \beta, \vec{x}). \quad (4.34)$$

Substituindo (4.10), (4.13), (4.18), (4.27), (4.28) e (4.30) em (4.33), teremos:

$$\begin{aligned} Z_A(\beta) = & \int \mathcal{D}A_0 \mathcal{D}\pi^0 \mathcal{D}A_k \mathcal{D}\pi^k \delta(\pi^0) \delta(A_0) \delta(\partial_k \pi^k) \delta(\partial_k A_k) |\det(-\nabla^2)| \\ & \times \exp \left\{ \int_\beta dx \left[ i\pi^0 \partial_\tau A_0 - \pi^k \partial_k A_0 \right] \right\} \exp \left\{ \int_\beta dx \left[ i\pi^k \partial_\tau A_k - \frac{1}{2} (\pi^k)^2 - \frac{1}{4} (F_{ij})^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

integrando em  $A_0$  e depois em  $\pi^0$  obtemos:

$$Z_A(\beta) = \int \mathcal{D}A_k \mathcal{D}\pi^k \delta(\partial_k \pi^k) \delta(\partial_k A_k) |\det(-\nabla^2)| \quad (4.36)$$

$$\times \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[ i\pi^k \partial_{\tau} A_k - \frac{1}{2} (\pi^k)^2 - \frac{1}{4} (F_{ij})^2 \right] \right\}.$$

Usando a representação funcional da  $\delta$ -Dirac:

$$\delta(\partial_k \pi^k) = \int \mathcal{D}\Lambda \exp \left\{ \int_{\beta} dx i\Lambda \partial_k \pi^k \right\}, \quad (4.37)$$

podemos integrar no momento canônico  $\pi^k$  e fazendo  $\Lambda = A_{\tau}$ , a função de partição do campo eletromagnético livre no calibre de Coulomb será

$$Z_A(\beta) = \int \mathcal{D}A_a |\det(-\nabla^2)| \delta(\partial_k A_k) \exp \left\{ \int_{\beta} dx -\frac{1}{4} F_{ab} F_{ab} \right\}, \quad (4.38)$$

onde  $a, b = \tau, 1, 2, 3$ . A função de partição (4.38) não é explicitamente covariante devido ao calibre de Coulomb não ser covariante. Contudo, podemos passar a um calibre covariante (como o calibre de Lorenz  $\partial_a A_a = 0$ ) via o ansatz de Faddeev-Popov [28] que é definido como:

$$\int D\omega(x) \delta(\mathcal{G}[A_a^{\omega}]) \det \left| \frac{\delta \mathcal{G}[A_a^{\omega}]}{\delta \omega} \right|_{\omega=0} \equiv 1, \quad (4.39)$$

onde  $\omega(x)$  é o parâmetro de calibre,  $D\omega(x)$  é a medida do grupo de gauge,  $\mathcal{G}[A_a]$  é alguma condição de calibre covariante,  $A_{\mu}^{\omega}$  é o campo transformado, que no caso abeliano é  $A_a^{\omega} = A_a + \partial_a \omega$ ,  $\det \left| \frac{\delta \mathcal{G}[A_a^{\omega}]}{\delta \omega} \right|_{\omega=0}$  é o chamado determinante de Faddeev-Popov e é invariante de calibre.

Então, introduzindo o ansatz de Faddeev-Popov na função de partição (4.38) e fazendo a transformação de calibre  $A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} - \partial_{\mu} \omega$ , temos:

$$Z_A(\beta) = \int DA_a \delta(G[A_a]) \det \left| \frac{\delta G[A_a^{\omega}]}{\delta \omega} \right|_{\omega=0} \exp \left\{ \int_{\beta} dx -\frac{1}{4} (F_{ab})^2 \right\} \quad (4.40)$$

$$\times \int D\omega |\det(-\nabla^2)| \delta(\partial_k A_k - \nabla^2 \omega).$$

A integração funcional em  $\omega$  é simplesmente o ansatz de Faddeev-Popov no calibre de Coulomb, ou seja, e igual a unidade. Então, a função de partição, num calibre covariante arbitrário, é:

$$Z_A(\beta) = \int DA_a \delta(G[A_a]) \det \left| \frac{\delta G[A_a^{\omega}]}{\delta \omega} \right|_{\omega=0} \exp \left\{ \int_{\beta} dx -\frac{1}{4} (F_{ab})^2 \right\}. \quad (4.41)$$

Escolhemos como condição de calibre covariante o calibre de Lorenz:

$$G[A_a] = -\frac{1}{\sqrt{\xi}} \partial_a A_a + f, \quad (4.42)$$

sendo  $f$  uma função escalar arbitrária e  $\xi$  um parâmetro (chamado de *parâmetro de calibre*) real arbitrário, tais que:

$$G[A_a^\omega] = G[A_a] - \frac{1}{\sqrt{\xi}} \square \omega \quad \rightarrow \quad \det \left| \frac{\delta G[A_a^\omega]}{\delta \omega} \right|_{\omega=0} = \det \left| \frac{-\square}{\sqrt{\xi}} \right|, \quad (4.43)$$

onde  $\square = \partial_a \partial_a = (\partial_\tau)^2 + \nabla^2$ .

Substituindo (4.42) e (4.43) em (4.41), teremos:

$$Z_A(\beta) = \int DA_a \delta \left( -\frac{1}{\sqrt{\xi}} \partial_a A_a + f \right) \det \left| \frac{-\square}{\sqrt{\xi}} \right| \exp \left\{ \int_\beta dx \left[ -\frac{1}{4} (F_{ab})^2 \right] \right\}. \quad (4.44)$$

Posto que a função de partição deve ser independente de  $f$ , podemos eliminar a dependência na função  $f$  multiplicando por  $\exp \left( -\frac{1}{2} \int_\beta dx f^2 \right)$ , e integrando em  $f$ , assim, obtemos

$$Z_A(\beta) = \int DA_a \det \left| \frac{-\square}{\sqrt{\xi}} \right| \exp \left\{ \int_\beta dx \left[ -\frac{1}{4} (F_{ab})^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial_a A_a)^2 \right] \right\}, \quad (4.45)$$

que fazendo uma integração por partes na exponencial resulta em:

$$Z_A(\beta) = \int DA_a \det \left| \frac{-\square}{\sqrt{\xi}} \right| \exp \left\{ \int_\beta dx -\frac{1}{2} A_a \left[ -\square \delta_{ab} - \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) \partial_a \partial_b \right] A_b \right\}. \quad (4.46)$$

A integração no campo de calibre proporciona

$$\int DA_a \exp \left\{ \int_\beta dx -\frac{1}{2} A_a \left[ -\square \delta_{ab} - \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) \partial_a \partial_b \right] A_b \right\} = \det \left| -\square \delta_{ab} - \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) \partial_a \partial_b \right|^{-1/2}, \quad (4.47)$$

tal que

$$\det \left| -\square \delta_{ab} - \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) \partial_a \partial_b \right| = \det \left| \frac{(-\square)^4}{\xi} \right|.$$

Então, a função de partição resulta ser

$$Z_A(\beta) = \det \left| \frac{-\square}{\sqrt{\xi}} \right| \det \left| \frac{(-\square)^4}{\xi} \right|^{-1/2}, \quad (4.48)$$

e após uma simplificação, obtemos a função de partição para o campo eletromagnético:

$$Z_A(\beta) = \det (-\square)^{-1} = \exp [-\text{Tr} \ln (-\square)], \quad (4.49)$$

vemos explicitamente que ela é invariante de calibre pois ela independe do parâmetro de calibre  $\xi$ , como esperado.

Calculamos o traço funcional em (4.49) na base de Fourier que expande o campo vetorial:

$$A_\mu(\tau, \vec{x}) = \left( \frac{\beta}{V} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n, \mathbf{p}} e^{i(\omega_n \tau + \vec{x} \cdot \vec{p})} \tilde{A}_\mu(n, \vec{p}), \quad (4.50)$$

onde  $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) são as frequências bosônicas de Matsubara. Então, o logaritmo da função de partição é expresso como:

$$\ln Z_A(\beta) = - \sum_{n, \vec{p}} \ln \left[ (\beta\omega_n)^2 + (\beta\omega)^2 \right], \quad (4.51)$$

onde  $\omega = \|\vec{p}\|$ .

A soma em  $n$  é realizada de maneira análoga a (3.26). Desse modo, podemos finalmente escrever função de partição para o campo eletromagnético:

$$\ln Z_A = -2V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta\omega}), \quad (4.52)$$

que ignorando a contribuição do vácuo, esta equação descreve um campo bosônico sem massa com 2 estados de polarização em equilíbrio termodinâmico, isto é, a radiação de um corpo negro.

Escrevendo a eq. (4.52) em coordenadas esféricas:

$$\ln Z_A = -\frac{V}{4\pi^3} \int d\Omega \int_0^\infty d\omega \omega^2 \ln(1 - e^{-\beta\omega}), \quad (4.53)$$

onde  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$  é o elemento de ângulo sólido. No caso do campo eletromagnético, a função de partição é calculada explicitamente:

$$\ln Z_A = -\frac{V}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \ln(1 - e^{-\beta\omega}) = \frac{V\pi^2}{45\beta^3}. \quad (4.54)$$

A densidade de energia será:

$$u(\beta) = -\frac{1}{V} \frac{\partial \ln Z_A}{\partial \beta} = \frac{1}{4\pi^3} \int d\Omega \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1}. \quad (4.55)$$

Se integrarmos na frequência  $\omega$ , obtemos:

$$u = \int \frac{\pi}{60\beta^4} d\Omega, \quad (4.56)$$

cujo integrando define a densidade de energia por ângulo sólido:

$$u(\beta, \Omega) = \frac{\pi}{60\beta^4}, \quad (4.57)$$

observamos que a distribuição angular da densidade energia é isotrópica.

Se em (4.55) integrarmos os ângulos, teremos:

$$u = \int_0^\infty d\omega \frac{1}{\pi^2} \frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1}, \quad (4.58)$$

cujo integrando corresponde a lei de radiação de Planck:

$$u(\beta, \omega) = \frac{1}{\pi^2} \frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1}. \quad (4.59)$$

Enquanto que se calcularmos todas as integrais em (4.55), obteremos a densidade de energia da cavidade ou do corpo negro:

$$u(T) = \frac{\pi^2}{15\beta^4} = \frac{\pi^2}{15} T^4, \quad (4.60)$$

que representa a lei de Stefan-Boltzmann.

A pressão da radiação será:

$$P = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z_A}{\partial V} = \frac{\pi^2}{45\beta^4}. \quad (4.61)$$

Da equação (4.58), concluímos que a função distribuição dos fótons é

$$n(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}, \quad (4.62)$$

que é a função de distribuição de Bose-Einstein para um sistema com potencial químico nulo.

No seguinte capítulo, aplicaremos o conhecimento adquirido para estudar as propriedades termodinâmicas da eletrodinâmica *CPT*-par do Modelo Padrão Estendido (MPE).



## Capítulo 5

# A eletrodinâmica *CPT*-par do modelo padrão estendido

A forma mais geral de uma eletrodinâmica renormalizável, contendo termos que quebram tanto a simetria de Lorentz como a simetria-*CPT*, contida no Modelo Padrão Estendido é expressa pela seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\nu}F^{\alpha\nu} - \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta\rho\varphi}(k_{AF})_{\alpha}A_{\beta}F_{\rho\varphi} - \frac{1}{4}(k_F)^{\alpha\beta\rho\varphi}F_{\alpha\beta}F_{\rho\varphi}, \quad (5.1)$$

onde  $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$  é o tensor de antisimétrico de Levi-Civita ( $\epsilon^{0123} = 1$ ),  $F_{\mu\nu}$  é o tensor campo eletromagnético,  $A^{\mu}$  é o vetor potencial,  $(k_{AF})_{\mu}$  um background vetorial possuindo dimensão de massa e descreve um acoplamento super-renormalizável de dimensão 3,  $(k_F)^{\alpha\beta\rho\varphi}$  um background tensorial adimensional descrevendo um acoplamento renormalizável de dimensão 4. O tensor  $(k_F)^{\alpha\beta\rho\varphi}$  tem as mesmas simetrias do tensor de Riemann:

$$(k_F)_{\alpha\beta\rho\varphi} = -(k_F)_{\beta\alpha\rho\varphi}, \quad (k_F)_{\alpha\beta\rho\varphi} = -(k_F)_{\alpha\beta\varphi\rho}, \quad (k_F)_{\alpha\beta\rho\varphi} = (k_F)_{\rho\varphi\alpha\beta}, \quad (5.2)$$

$$(k_F)_{\alpha\beta\rho\varphi} + (k_F)_{\alpha\rho\varphi\beta} + (k_F)_{\alpha\varphi\beta\rho} = 0 \quad (5.3)$$

e um duplo traço nulo  $(k_F)^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta} = 0$ , o que permite ele ter apenas 19 componentes independentes. O termo  $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}(k_{AF})_{\mu}A_{\nu}F_{\kappa\lambda}$  corresponde ao setor *CPT*-ímpar e foi primeiramente introduzido por Carroll, Field and Jackiw (CFJ) [14], quando estudaram as modificações produzidas por este termo na eletrodinâmica clássica de Maxwell.

Como os termos ou coeficientes que controlam a quebra das simetrias de Lorentz e de *CPT* alteram a propagação da luz, é natural supor que também as propriedades termodinâmicas do campo eletromagnético sejam modificadas. Nesse contexto, num recente trabalho [21], investigaram a influência

do setor  $CPT$ -ímpar ou termo CFJ na termodinâmica do campo de Maxwell usando o formalismo de teoria de campos à temperatura finita [22]. Primeiramente, foi estabelecida a estrutura hamiltoniana do modelo via o formalismo de Dirac e logo, via o método de Faddeev-Senjanovic definiu-se a função de partição. Na seqüência, foram calculadas as correções induzidas pela VSL nas propriedades termodinâmicas do corpo negro tais como a distribuição angular da densidade de energia, a lei de radiação de Planck e a lei Stefan-Boltzmann. Observou-se que a VSL induz anisotropias na distribuição angular da densidade de energia e a lei de Stefan-Boltzmann sofre correções que modificam a sua dependência na temperatura. Esses resultados foram relacionados com as anisotropias ou flutuações na distribuição de temperatura da radiação cósmica de fundo.

Neste capítulo, realizaremos uma investigação das propriedades termodinâmicas do campo de calibre abeliano do setor  $CPT$ -par do MPE. Para este fim, consideraremos somente as contribuições do setor  $CPT$ -par descrita pelo tensor  $(k_F)$ , desse modo o setor  $CPT$ -ímpar é considerado nulo:  $(k_{AF}) = 0$ .

A eletrodinâmica do setor  $CPT$ -par do MPE é descrita pela seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\nu}F^{\alpha\nu} - \frac{1}{4}(k_F)^{\alpha\nu\rho\varphi}F_{\alpha\nu}F_{\rho\varphi}, \quad (5.4)$$

obtida a partir da lagrangiana (5.1).

As equações de movimento para o campo de calibre são:

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} - (k_F)^{\alpha\nu\rho\varphi} \partial_\nu F_{\rho\varphi} = 0. \quad (5.5)$$

Note que as as equações de Maxwell não-homogêneas (na ausência de fontes) são modificadas. Entretanto, as equações de Maxwell homogêneas permanecem inalteradas:

$$\partial_\beta \tilde{F}^{\beta\alpha} = 0, \quad (5.6)$$

onde  $\tilde{F}^{\beta\alpha}$  é o tensor dual a  $F^{\beta\alpha}$ , definido como:

$$\tilde{F}^{\beta\alpha} = \frac{1}{2}\epsilon^{\beta\alpha\rho\varphi}\partial_\beta F_{\rho\varphi}. \quad (5.7)$$

A lagrangiana (5.4) pode ser expressa em termos das componentes do tensor  $(k_F)$  e seus respectivos acoplamentos com os campos elétricos e magnéticos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}E^2 - \frac{1}{2}\vec{B}^2 + \frac{1}{2}E_j \left[ -2(k_F)_{0j0k} \right] E_k \\ & - \frac{1}{2}B_j \left[ \frac{1}{2}\epsilon_{j pq} (k_F)_{pq lm} \epsilon_{lmk} \right] B_k + E_j \left[ (k_F)_{0j pq} \epsilon_{pqk} \right] B_k. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Segundo [17, 18], as componentes do tensor  $(k_F)$  podem ser escritas em termos de quatro matrizes  $\kappa_{DE}$ ,  $\kappa_{HB}$ ,  $\kappa_{DB}$  e  $\kappa_{HE}$  de ordem  $3 \times 3$ : As matrizes  $\kappa_{DE}$  e  $\kappa_{HB}$  são simétricas e têm paridade-par, assim

$$(\kappa_{DE})_{jk} = -2(k_F)_{0j0k} \quad , \quad (\kappa_{HB})_{jk} = \frac{1}{2}\epsilon_{j pq}\epsilon_{klm}(k_F)_{pqlm} \quad . \quad (5.9)$$

Para essas matrizes, a condição de duplo traço nulo,  $(k_F)^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0$ , leva a seguinte relação:

$$\text{tr}(\kappa_{DE} + \kappa_{HB}) = 0 \quad , \quad (5.10)$$

desse modo, o setor de paridade-par descrito pelas matrizes  $\kappa_{DE}$  e  $\kappa_{HB}$  suportam 11 parâmetros independentes

As matrizes  $\kappa_{DB}$  e  $\kappa_{HE}$  têm paridade-ímpar e estão relacionados com as componentes do tensor  $(k_F)$  pela seguinte relação:

$$(\kappa_{DB})_{jk} = -(\kappa_{HE})_{kj} = \epsilon_{kpq}(k_F)_{0j pq} \quad . \quad (5.11)$$

A equação (5.3) implica que  $\kappa_{DB}$  e  $\kappa_{HE}$  são de traço nulo, assim, o setor de paridade-ímpar suporta 8 parâmetros independentes.

Então, via as definições (5.9) e (5.11) a densidade lagrangiana (5.8) é reescrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\vec{E}^2 - \frac{1}{2}\vec{B}^2 + \frac{1}{2}\vec{E} \cdot (\kappa_{DE}) \cdot \vec{E} - \frac{1}{2}\vec{B} \cdot (\kappa_{HB}) \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot (\kappa_{DB}) \cdot \vec{B} \quad . \quad (5.12)$$

Também, segundo [17] e com finalidade de fazer análises comparativas com os dados experimentais, os 19 coeficientes independentes podem ser parametrizados em termos de quatro matrizes de traço nulo,  $\tilde{\kappa}_{e+}$ ,  $\tilde{\kappa}_{e-}$ ,  $\tilde{\kappa}_{o-}$ ,  $\tilde{\kappa}_{o+}$  e um parâmetro simples  $\tilde{\kappa}_{\text{tr}}$ : O setor de paridade-par será parametrizado como

$$\begin{aligned} (\tilde{\kappa}_{e+})_{jk} &= \frac{1}{2}(\kappa_{DE} + \kappa_{HB})_{jk} \quad , \\ (\tilde{\kappa}_{e-})_{jk} &= \frac{1}{2}(\kappa_{DE} - \kappa_{HB})_{jk} - \delta_{jk}\kappa_{\text{tr}} \quad , \\ \tilde{\kappa}_{\text{tr}} &= \frac{1}{3}\text{tr}(\kappa_{DE}) \quad , \end{aligned} \quad (5.13)$$

sendo as novas matrizes  $\tilde{\kappa}_{e+}$  e  $\tilde{\kappa}_{e-}$  simétricas.

Enquanto, o setor de paridade-ímpar é parametrizado segundo

$$\begin{aligned} (\tilde{\kappa}_{o+})_{jk} &= \frac{1}{2}(\kappa_{DB} + \kappa_{HE})_{jk} \quad , \\ (\tilde{\kappa}_{o-})_{jk} &= \frac{1}{2}(\kappa_{DB} - \kappa_{HE})_{jk} \quad , \end{aligned} \quad (5.14)$$

neste caso, a matriz  $\tilde{\kappa}_{o-}$  é simétrica e a matriz  $\tilde{\kappa}_{o+}$  é antisimétrica.

Usando a nova parametrização, a densidade lagrangiana (5.12) torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} (1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \vec{E}^2 - \frac{1}{2} (1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \vec{B}^2 + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot (\tilde{\kappa}_{e+} + \tilde{\kappa}_{e-}) \cdot \vec{E} \\ & - \frac{1}{2} \vec{B} \cdot (\tilde{\kappa}_{e+} - \tilde{\kappa}_{e-}) \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot (\tilde{\kappa}_{o+} + \tilde{\kappa}_{o-}) \cdot \vec{B} . \end{aligned} \quad (5.15)$$

## 5.1 Estrutura hamiltoniana

O primeiro passo na análise da estrutura hamiltoniana é definir o momento canônico conjugado ao campo de calibre:

$$\pi^\mu = -F^{0\mu} - (k_F)^{0\mu\rho\varphi} F_{\rho\varphi}, \quad (5.16)$$

que permite escrever os parênteses de Poisson fundamentais:

$$\{A_\mu(\vec{x}), \pi^\nu(\vec{y})\} = \delta_\mu^\nu \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (5.17)$$

Fazendo  $\mu = 0$  na eq.(5.16), teremos  $\pi^0 = 0$  que corresponde a um vínculo primário que denotaremos por

$$\phi_1 = \pi^0 \approx 0. \quad (5.18)$$

Para as componentes espaciais do momento teremos a seguinte relação dinâmica para  $\pi^k$ :

$$\pi^k = D_{kj} F_{0j} - (k_F)^{0kjl} F_{jl}, \quad (5.19)$$

onde  $D_{kj}$  é uma matriz simétrica e não singular, definida como:

$$D_{kj} = \delta_{kj} - 2(k_F)_{0k0j}. \quad (5.20)$$

Da eq.(5.19) podemos obter as velocidades  $\dot{A}_k$  em termos dos campos e os momentos:

$$\dot{A}_k = \partial_k A_0 + (D^{-1})_{kj} \left[ \pi^j + (k_F)^{0jmn} F_{mn} \right]. \quad (5.21)$$

A densidade hamiltoniana canônica é:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_C = & \frac{1}{2} \left[ \pi^k + (k_F)^{0kmn} F_{mn} \right] (D^{-1})_{kj} \left[ \pi^j + (k_F)^{0jmn} F_{mn} \right] \\ & + \pi^k \partial_k A_0 + \frac{1}{4} (F_{jk})^2 + \frac{1}{4} (k_F)^{kjlm} F_{kj} F_{lm}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Seguindo o procedimento de Dirac, introduzimos a hamiltoniana primária,

$$H_P = H_C + \int d^3\vec{y} C \pi^0, \quad (5.23)$$

onde  $C$  é um multiplicador de Lagrange bosônico.

A condição de consistência do vínculo primário,  $\dot{\pi}^0 = \{\pi^0, H_P\} \approx 0$ , nos fornece um vínculo secundário

$$\phi_2 = \partial_k \pi^k \approx 0, \quad (5.24)$$

Comparando este vínculo com a eq.(4.18), veremos que a estrutura da lei de Gauss não é modificada pelo background que controla a quebra da simetria de Lorentz. Entretanto, se expressarmos a eq.(5.24) em termos dos campos elétrico e magnético, notaremos o acoplamento explícito entre eles ainda no regime eletrostático<sup>5</sup> [17, 29, 30, 31].

A condição de consistência do vínculo secundário é identicamente nula:  $\dot{\phi}_2 = \{\partial_k \pi^k, H_P\} = 0$ , ou seja, o vínculo secundário é automaticamente conservado e não teremos mais vínculos neste modelo. O multiplicador bosônico  $C$  ainda permanece indeterminado, sendo uma evidência para existência de vínculos de primeira classe, a qual podemos verificar calculando os parênteses de Poisson entre os vínculos:

$$\{\pi^0, \partial_k \pi^k\} = 0. \quad (5.25)$$

Assim, os vínculos  $\phi_1 = \pi^0 \approx 0$  e  $\phi_2 = \partial_k \pi^k \approx 0$  são de primeira classe e revelam que a eletrodinâmica  $CPT$ -par do MPE tem uma estrutura de vínculos similar à eletrodinâmica de Maxwell.

## 5.2 Equações de movimento e as condição de calibre

Seguindo a conjectura de Dirac, definimos a hamiltoniana estendida ( $H_E$ ) pela adição de todos vínculos de primeira classe a hamiltoniana primária:

$$H_E = H_C + \int d\vec{y} [C\phi_1 + E\phi_2], \quad (5.26)$$

que governará a evolução do sistema, em especial a evolução temporal dos campos, assim temos

$$\dot{A}_0 = \{A_0, H_E\} = C, \quad (5.27)$$

e

$$\dot{A}_k = \{A_k, H_E\} = (D^{-1})_{kj} \left[ \pi^j + (k_F)^{0jmn} F_{mn} \right] + \partial_k A_0 - \partial_k E. \quad (5.28)$$

---

<sup>5</sup>Para maiores detalhes consultar o apêndice B.2

Ambas equações mostram que a dinâmica do campo de calibre  $A_\mu$  permanece arbitrária. Entretanto, observamos que a segunda equação somente será igual a equação lagrangiana (5.21) se e somente se  $\partial_k E = 0$  ou  $E = 0$ . Portanto, devemos impor uma condição de calibre de tal forma que fixe o multiplicador  $E$  convenientemente. É de nosso conhecimento que o algoritmo de Dirac requer um número de condições de calibre igual ao número de vínculo de primeira classe da teoria. Contudo, as condições de calibre devem ser compatíveis com as equações de Euler-Lagrange. De modo que as condições de calibre juntamente com os vínculos de primeira classe formem um conjunto de vínculos de segunda classe.

Como observamos no capítulo anterior,  $\pi^0$  é um vínculo de primeira classe, logo, podemos procurar possíveis condições de calibre na equação de movimento do campo  $A_0$ :

$$D_{jk}\partial_j\partial_k A_0 - (k_F)_{0ijk}\partial_i F_{jk} - \partial_0(D_{jk}\partial_j A_k) = 0, \quad (5.29)$$

Assim, definimos nossas condições de calibre como:

$$\chi_1 = D_{jk}\partial_j A_k \approx 0; \quad (5.30)$$

$$\chi_2 = D_{jk}\partial_j\partial_k A_0 - (k_F)_{0ijk}\partial_i F_{jk} \approx 0.$$

A condição de consistência  $\chi_1$ ,  $\{D_{jk}\partial_j A_k, H_E\} \approx 0$ , fornece  $D_{jk}\partial_j\partial_k E = 0$ , que fixa  $E = 0$ . A condição de consistência para  $\chi_2$  oferece uma equação para o multiplicador  $C$ :

$$D_{jk}\partial_j\partial_k C - (k_F)_{0ijk}\partial_i \dot{F}_{jk} \approx 0. \quad (5.31)$$

Consequentemente, temos determinado todos multiplicadores de Lagrange. Portanto, o conjunto  $\Sigma_a = \{\phi_1, \phi_2, \chi_1, \chi_2\}$  é de segunda classe e, cuja correspondente matriz de parênteses de Poisson é:

$$M(x, y) = \{\Sigma_a(x), \Sigma_b(y)\} \quad (5.32)$$

$$= \begin{pmatrix} & \phi_1 & \phi_2 & \chi_1 & \chi_2 \\ \phi_1 & 0 & 0 & 0 & -D_{jk}\partial_j\partial_k \\ \phi_2 & 0 & 0 & D_{jk}\partial_j\partial_k & 0 \\ \chi_1 & 0 & -D_{jk}\partial_j\partial_k & 0 & 0 \\ \chi_2 & D_{jk}\partial_j\partial_k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}),$$

é não singular com determinante não nulo igual a  $\det(-D_{jk}\partial_j\partial_k)^4$ .

Desse modo, hamiltoniana canônica (5.22) se torna a hamiltoniana física e toma a seguinte forma

$$H = \int d\vec{y} \left\{ \frac{1}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2} E_j \left[ -2(k_F)_{0j0k} \right] E_k + \frac{1}{2} \vec{B}^2 + \frac{1}{4} (k_F)^{kjlm} F_{kj} F_{lm} \right\}, \quad (5.33)$$

ou

$$H = \int d\vec{y} \left[ \frac{1}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot (\kappa_{DE}) \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \vec{B}^2 + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot (\kappa_{HB}) \cdot \vec{B} \right]. \quad (5.34)$$

Observamos que as matrizes  $\kappa_{DE}$  e  $\kappa_{HB}$  representam o setor de paridade-par do tensor  $(k_F)$ , ou seja, os coeficientes correspondentes ao setor de paridade-ímpar do tensor  $(k_F)$  não contribuem a energia do sistema.

Em geral, as componentes  $(k_F)^{\mu\nu\rho\sigma}$  são suficientemente pequenas para garantir que a hamiltoniana seja positiva-definida, proporcionando uma teoria quântica estável e uma função de partição bem definida para a eletrodinâmica *CPT*-par do MPE.

A seguir calcularemos a função de partição no formalismo de integração funcional para estudarmos as conseqüências dos parâmetros que controlam a quebra da simetria de Lorentz nas propriedades termodinâmicas do campo eletromagnético.

### 5.3 A função de partição $Z(\beta)$

A análise hamiltoniana realizada na seção anterior permite definir a função de partição dentro da integração funcional segundo o método de Faddeev-Senjanovic [27]:

$$\begin{aligned} Z(\beta) = & \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\pi^\mu \delta(\phi_1) \delta(\phi_2) \delta(\chi_1) \delta(\chi_2) \\ & \times |\det \{ \Sigma_a(x), \Sigma_b(y) \}|^{1/2} \exp \left\{ \int_\beta dx (i\pi^\mu \partial_\tau A_\mu - \mathcal{H}_C) \right\}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

onde  $\Sigma_a = \{ \phi_1, \phi_2, \chi_1, \chi_2 \}$  é o conjunto de vínculos de segunda classe formado pelos vínculos de primeira classe e as condição de calibre,  $M_{ab}(x, y) = \{ \Sigma_a(x), \Sigma_b(y) \}$  é a matriz de vínculos definida em (5.32) cujo determinante funcional é  $\det(-D_{jk}\partial_j\partial_k)^4$  e  $\mathcal{H}_C$  é a densidade hamiltoniana canônica dada em (5.22). A expressão  $\int_\beta dx$  denota  $\int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x}$ , e  $\beta = 1/T$ .

Como o campo de calibre tem caráter bosônico, a integração funcional deve ser calculada sobre todos os campos satisfazendo a seguinte condição de contorno periódica na variável  $\tau$ :

$$A_\mu(\tau, \vec{x}) = A_\mu(\tau + \beta, \vec{x}). \quad (5.36)$$

Para determinar a função de partição, primeiro calculamos a integração sobre o campo  $\pi^0$ , logo usamos a representação da delta de Dirac para  $\delta(\partial_k \pi^k)$

$$\delta(\partial_k \pi^k) = \int \mathcal{D}\Lambda \exp \left\{ i \int_{\beta} dx \Lambda \partial_k \pi^k \right\} = \int \mathcal{D}\Lambda \exp \left\{ -i \int_{\beta} dx \pi^k \partial_k \Lambda \right\}, \quad (5.37)$$

na função de partição (5.35) e obtemos:

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int \mathcal{D}A_{\mu} \mathcal{D}\Lambda \delta(D_{jk} \partial_j A_k) \delta(D_{jk} \partial_j \partial_k A_0 - (k_F)_{0ijk} \partial_i F_{jk}) \det(-D_{jk} \partial_j \partial_k)^2 \\ &\quad \times \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[ -\frac{1}{2} (D^{-1})_{kj} (k_F)^{0k pq} (k_F)^{0j mn} F_{mn} F_{pq} - \frac{1}{4} (F_{jk})^2 - \frac{1}{4} (k_F)^{kjlm} F_{kj} F_{lm} \right] \right\} \\ &\quad \times \int \mathcal{D}\pi^k \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[ -\frac{1}{2} \pi^k (D^{-1})_{kj} \pi^j + i \pi^k [\partial_{\tau} A_k - \partial_k (\Lambda - i A_0)] - (D^{-1})_{kj} \pi^k (k_F)^{0j mn} F_{mn} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

fazendo a translação  $\Lambda \rightarrow \Lambda + i A_0$  (5.38), obtemos:

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int \mathcal{D}A_k \mathcal{D}\Lambda \delta(D_{jk} \partial_j A_k) \det(-D_{jk} \partial_j \partial_k)^2 \\ &\quad \times \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[ -\frac{1}{2} (D^{-1})_{kj} (k_F)^{0k pq} (k_F)^{0j mn} F_{pq} F_{mn} - \frac{1}{4} (F_{jk})^2 - \frac{1}{4} (k_F)^{kjlm} F_{kj} F_{lm} \right] \right\} \\ &\quad \times \int \mathcal{D}\pi^k \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[ -\frac{1}{2} \pi^k (D^{-1})_{kj} \pi^j + i \pi^k (\partial_{\tau} A_k - \partial_k \Lambda) - (D^{-1})_{kj} \pi^k (k_F)^{0j mn} F_{mn} \right] \right\} \\ &\quad \times \int \mathcal{D}A_0 \delta(D_{jk} \partial_j \partial_k A_0 - (k_F)_{0ijk} \partial_i F_{jk}). \end{aligned} \quad (5.39)$$

A integração sobre o campo  $A_0$  é:

$$\int \mathcal{D}A_0 \delta(D_{jk} \partial_j \partial_k A_0 + (k_F)^{0ijk} \partial_i F_{jk}) = \det(-D_{jk} \partial_j \partial_k)^{-1}, \quad (5.40)$$

e substituindo em (5.39), obtemos:

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int \mathcal{D}A_k \mathcal{D}\Lambda \delta(D_{jk} \partial_j A_k) \det(-D_{jk} \partial_j \partial_k) \\ &\quad \times \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[ -\frac{1}{2} (D^{-1})_{kj} (k_F)^{0k pq} (k_F)^{0j mn} F_{pq} F_{mn} - \frac{1}{4} (F_{jk})^2 - \frac{1}{4} (k_F)^{kjlm} F_{kj} F_{lm} \right] \right\} \\ &\quad \times \int \mathcal{D}\pi^k \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[ -\frac{1}{2} \pi^k (D^{-1})_{kj} \pi^j + i \pi^k (\partial_{\tau} A_k - \partial_k \Lambda) - (D^{-1})_{kj} \pi^k (k_F)^{0j mn} F_{mn} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Chamando  $\Lambda = A_{\tau}$  e definindo  $F_{\tau k} = \partial_{\tau} A_k - \partial_k \Lambda = -F_{k\tau}$  podemos reescrever a equação acima como

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int \mathcal{D}A_k \mathcal{D}A_{\tau} \delta(D_{jk} \partial_j A_k) \det(-D_{jk} \partial_j \partial_k) \\ &\quad \times \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[ -\frac{1}{2} (D^{-1})_{kj} (k_F)^{0k pq} (k_F)^{0j mn} F_{pq} F_{mn} - \frac{1}{4} (F_{jk})^2 - \frac{1}{4} (k_F)^{kjlm} F_{kj} F_{lm} \right] \right\} \\ &\quad \times \int \mathcal{D}\pi^k \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[ -\frac{1}{2} \pi^k (D^{-1})_{kj} \pi^j + i \pi^k F_{\tau k} - (D^{-1})_{kj} \pi^k (k_F)^{0j mn} F_{mn} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.42)$$



Resolvendo a integração sobre o campo  $\pi^k$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{\pi^k} &= \int \mathcal{D}\pi^k \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[ -\frac{1}{2} \pi^k (D^{-1})_{kj} \pi^j - (D^{-1})_{kj} \pi^k (k_F)^{0jmn} F_{mn} + i \pi^k F_{\tau k} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[ -\frac{1}{2} F_{\tau k} D_{kj} F_{\tau j} - i (k_F)^{0kmn} F_{\tau k} F_{mn} + \frac{1}{2} (D^{-1})_{kj} (k_F)^{0kpq} (k_F)^{0jmn} F_{pq} F_{mn} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.43)$$

que substituindo na eq.(5.42), leva a:

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int \mathcal{D}A_k \mathcal{D}A_{\tau} \delta(D_{jk} \partial_j A_k) \det(-D_{jk} \partial_j \partial_k) \\ &\quad \times \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[ -\frac{1}{2} F_{\tau k} D_{kj} F_{\tau j} - \frac{1}{4} (F_{jk})^2 - \frac{1}{4} (k_F)^{kjlm} F_{kj} F_{lm} - i (k_F)^{0kmn} F_{\tau k} F_{mn} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Fazendo as seguintes redefinições, à temperatura finita, para as componentes do tensor  $(k_F)$ :

$$(k_F)_{0k0j} = - (k_F)_{\tau k \tau j}, \quad (k_F)_{0kmn} = i (k_F)_{\tau kmn}, \quad (5.45)$$

a função de partição para o setor eletromagnético *CPT*-par do MPE é expressa como:

$$Z(\beta) = N \det(-D_{jk} \partial_j \partial_k) \int \mathcal{D}A_a \delta(D_{jk} \partial_j A_k) \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[ -\frac{1}{4} F_{ab} F_{ab} - \frac{1}{4} (k_F)_{abcd} F_{ab} F_{cd} \right] \right\}, \quad (5.46)$$

onde  $a, b, c, d = \tau, 1, 2, 3$ . Como a função de partição não é explicitamente covariante, passaremos a um calibre covariante via o *ansatz de Faddeev-Popov* [28]. Então, escolhendo o calibre de Lorenz generalizado:

$$G[A_a] = -\frac{1}{\sqrt{\xi}} \partial_a A_a + f \quad (5.47)$$

onde  $f$  é uma função escalar arbitrária e  $\xi$  o parâmetro de gauge. Depois de alguma álgebra (similarmente à realizada no capítulo 4 para o campo eletromagnético livre), expressamos a função de partição como:

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}A_a \det \left( \frac{-\square}{\sqrt{\xi}} \right) \exp \left\{ \int_{\beta} dx -\frac{1}{2} A_a \left[ -\square \delta_{ab} - \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) \partial_a \partial_b + S_{ab} \right] A_b \right\}, \quad (5.48)$$

onde  $\square = \partial_a \partial_a = (\partial_{\tau})^2 + \nabla^2$ . Definimos o operador simétrico  $S_{ab}$ , contendo os parâmetros responsáveis pela quebra da simetria de Lorentz:

$$S_{ab} = 2 (k_F)_{acdb} \partial_c \partial_d = S_{ba}. \quad (5.49)$$

Como observamos no capítulo anterior, a função de partição é invariante de calibre, ou seja, independe do parâmetro de calibre  $\xi$ , então, por comodidade aqui escolhemos  $\xi = 1$ , denominado calibre de Feynman. Assim, a integração sobre o campo de calibre fornece a seguinte função de partição para a eletrodinâmica *CPT*-par do MPE:

$$Z(\beta) = \det(-\square) [\det(-\square \delta_{ab} + S_{ab})]^{-1/2}. \quad (5.50)$$

Vale a pena ressaltar que este resultado é análogo ao obtido para eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw [21], onde  $S_{ab} = \epsilon_{acdb}(\kappa_{AF})_c \partial_d = -S_{ba}$ .

Na próxima seção, calcularemos o determinante do operador  $(-\square\delta_{ab} + S_{ab})$  para as 9 componentes não birrefringentes do tensor  $(k_F)$ : 6 componentes de paridade-par e 3 de paridade-ímpar.

## 5.4 O setor não birrefringente da eletrodinâmica *CPT*-par do MPE

Devido a alta complexidade do tensor  $(k_F)$  que rege a eletrodinâmica *CPT*-par do MPE, em geral, o cálculo exato da função de partição é inviável e somente teríamos acesso às contribuições perturbativas do tensor  $(k_F)$ . Contudo, usando os dados de birrefringência [17, 18] é possível obter algumas configurações mais simples [16, 23, 29, 31] para o tensor  $(k_F)$  a fim de tornar factível o cálculo exato das relações de dispersão<sup>6</sup> ou da função de partição.

A prescrição proposta em [17, 18] para a decomposição do tensor  $(k_F)$  é estendida à temperatura finita via as redefinições impostas em (5.45), assim temos, para o setor de paridade-par:

$$(\kappa_{DE})_{kj} = 2(k_F)_{\tau k \tau j} \ , \quad (\kappa_{HB})_{kj} = \frac{1}{2}\epsilon_{kpq}\epsilon_{jmn}(k_F)_{pqmn} \ , \quad (5.51)$$

e para o setor de paridade-ímpar:

$$(\kappa_{DB})_{kj} = -(\kappa_{HE})_{jk} = (k_F)_{\tau k p q} \epsilon_{j p q} \ . \quad (5.52)$$

### 5.4.1 O setor de paridade-par

Estudaremos a influência das 6 componentes não birrefringentes de paridade-par do tensor  $(k_F)$  parametrizadas pela matriz  $\tilde{\kappa}_{e-}$  e pelo coeficiente  $\tilde{\kappa}_{\text{tr}}$ . Com o intuito de isolar as contribuições do setor de paridade-par anulamos os coeficientes de paridade-ímpar:  $\kappa_{DB} = 0$  e  $\kappa_{HE} = 0$ . Levando em consideração que os cinco elementos contidos na matriz  $\tilde{\kappa}_{e+}$  são restritos pelos dados de birrefringência [17, 18] na ordem de  $10^{-32}$ :

$$(\tilde{\kappa}_{e+})_{jk} = \frac{1}{2}(\kappa_{DE} + \kappa_{HB})_{jk} \leq 10^{-32} \ , \quad (5.53)$$

podemos considerar  $\tilde{\kappa}_{e+} = 0$  e permite obter  $\kappa_{HB} = -\kappa_{DE}$  e junto com a segunda e terceira equação em (5.13) leva às seguintes relações entre as componentes não birrefringentes:

$$(\kappa_{DE})_{jk} = (\tilde{\kappa}_{e-})_{jk} + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}\delta_{jk} \ , \quad \tilde{\kappa}_{\text{tr}} = \frac{1}{3}\text{tr}(\kappa_{DE}) \ . \quad (5.54)$$

---

<sup>6</sup>Para maiores detalhes ver o apêndice (B)

onde  $(\tilde{\kappa}_{e-})$  corresponde a contribuição anisotrópica e  $\tilde{\kappa}_{\text{tr}}$  à isotrópica, a seguir analisaremos separadamente cada uma das contribuições.

#### 5.4.1.1 A contribuição isotrópica

Primeiramente, isolamos a contribuição da componente isotrópica  $\tilde{\kappa}_{\text{tr}}$  impondo  $(\tilde{\kappa}_{e-}) = 0$  na eq.(5.54). Então:

$$(\kappa_{DE})_{jk} = \tilde{\kappa}_{\text{tr}}\delta_{jk} , \quad (\kappa_{HB})_{jk} = -\tilde{\kappa}_{\text{tr}}\delta_{jk} . \quad (5.55)$$

E substituindo nas eqs.(5.13), obtemos os elementos não nulos do tensor  $(k_F)$ :

$$(k_F)_{\tau j \tau k} = \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{2}\delta_{jk} , \quad (k_F)_{pqmn} = -\frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{2} [\delta_{pm}\delta_{qn} - \delta_{pn}\delta_{qm}] . \quad (5.56)$$

O operador  $(-\square\delta_{ab} + S_{ab})$  expresso no espaço dos momentos resulta ser  $(p^2\delta_{ab} - \tilde{S}_{ab})$ , onde a matriz  $\tilde{S}_{ab} = 2(k_F)_{acdb}p_c p_d$  é simétrica e via as componentes de  $(k_F)$  definidas em (5.56) possui as seguintes componentes:

$$\tilde{S}_{\tau\tau} = -\tilde{\kappa}_{\text{tr}}\vec{p}^2 , \quad \tilde{S}_{\tau k} = \tilde{\kappa}_{\text{tr}}p_\tau p_k , \quad \tilde{S}_{jk} = -\delta_{jk}\tilde{\kappa}_{\text{tr}}p^2 + 2\delta_{jk}\tilde{\kappa}_{\text{tr}}\vec{p}^2 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}p_j p_k , \quad (5.57)$$

Com isso, calculamos o determinante da matriz  $(p^2\delta_{ab} - \tilde{S}_{ab})$ :

$$\det(p^2\delta_{ab} - \tilde{S}_{ab}) = (\tilde{\kappa}_{\text{tr}} + 1)^3 (p^2)^2 \left[ p^2 - \frac{2\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}\vec{p}^2 \right]^2 , \quad (5.58)$$

então, o determinante funcional do operador  $(-\square\delta_{ab} + S_{ab})$  é:

$$\det(-\square\delta_{ab} + S_{ab}) = \det[(1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}})^3(-\square)^2] \det\left[-\square + \frac{2\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}\nabla^2\right]^2 . \quad (5.59)$$

Assim, a função de partição (5.50) torna-se:

$$\ln Z(\beta) = -\text{Tr} \ln \left[ -\square + \frac{2\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}\nabla^2 \right] . \quad (5.60)$$

Observamos que os dois modos do campo de calibre abeliano tem a mesma relação de dispersão e apresentam não birrefringência.

O traço funcional de (5.60) é calculado na base de Fourier que expande o campo de calibre :

$$A_a(\tau, \vec{x}) = \left(\frac{\beta}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n, \vec{p}} e^{i(\omega_n \tau + \vec{x} \cdot \vec{p})} \tilde{A}_a(n, \vec{p}) , \quad (5.61)$$

onde  $V$  designa o volume do sistema e  $\omega_n = \frac{2\pi}{\beta}n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) são as frequências bosônicas de Matsubara.

Desse modo, a contribuição dos dois modos do campo de calibre é expressa como:

$$\ln Z(\beta) = -V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \beta^2 \left[ (\omega_n)^2 + \frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \vec{p}^2 \right], \quad (5.62)$$

onde  $|\tilde{\kappa}_{\text{tr}}| < 1$  para garantir uma função de partição bem definida.

Fazendo a seguinte transformação nos momentos:

$$p_i \rightarrow p_i \sqrt{\frac{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}} \quad (5.63)$$

na eq.(5.62), obteremos:

$$\ln Z(\beta) = -\frac{V}{(2\pi)^3} \left( \frac{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \right)^{\frac{3}{2}} \int d^3\vec{p} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \left[ (2\pi n)^2 + (\beta\omega)^2 \right] \quad (5.64)$$

onde  $\omega = \|\vec{p}\|$ . realizando a soma em  $n$ , teremos:

$$\ln Z(\beta) = - \left( \frac{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \right)^{3/2} 2V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \ln \left[ 1 - e^{-\beta\omega} \right] \quad (5.65)$$

que podemos reescrever como:

$$\ln Z(\beta) = \alpha(\tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \ln Z_A \quad (5.66)$$

onde  $Z_A$  é a função de partição da eletrodinâmica de Maxwell definida em (4.52) e a função  $\alpha(\tilde{\kappa}_{\text{tr}})$  é uma função explícita do parâmetro  $\tilde{\kappa}_{\text{tr}}$ :

$$\alpha(\tilde{\kappa}_{\text{tr}}) = \left( \frac{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \right)^{3/2} \approx 1 + 3\tilde{\kappa}_{\text{tr}} + \frac{9}{2} (\tilde{\kappa}_{\text{tr}})^2 + \dots, \quad (5.67)$$

a expansão demonstra que as correções de menor ordem às propriedades termodinâmicas são lineares em  $\tilde{\kappa}_{\text{tr}}$ .

De (5.66), vemos que a função de partição do setor não birrefringente e isotrópico de paridade-par é obviamente uma potência de  $Z_A$ ,

$$Z(\beta) = (Z_A)^{\alpha(\tilde{\kappa}_{\text{tr}})}. \quad (5.68)$$

Isso terá como consequência que todas as propriedades termodinâmicas do setor não birrefringente e isotrópico de paridade-par serão as mesmas da eletrodinâmica de Maxwell multiplicadas pelo função  $\alpha(\tilde{\kappa}_{\text{tr}})$ , inclusive a distribuição angular da densidade de energia, como mostraremos a seguir.

Escrevendo a eq.(5.65) em coordenadas esféricas:

$$\ln Z(\beta) = -\alpha(\tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \frac{V}{4\pi^3} \int d\Omega \int_0^\infty d\omega \omega^2 \ln \left[ 1 - e^{-\beta\omega} \right], \quad (5.69)$$

logo, a energia interna ou energia média do sistema por unidade de volume será:

$$u(\beta) = \alpha(\tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \frac{1}{4\pi^3} \int d\Omega \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1}. \quad (5.70)$$

Resolvendo a integral em  $\omega$  temos

$$u(\beta) = \alpha(\tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \int \frac{\pi}{60\beta^4} d\Omega,$$

cujo integrando é a distribuição angular da densidade de energia ou densidade de energia por ângulo sólido

$$u(\beta, \Omega) = \alpha(\tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \frac{\pi}{60\beta^4}, \quad (5.71)$$

que permanece isotrópica.

Integrando os ângulos em (5.70) obtemos:

$$u(\beta) = \alpha(\tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \int_0^\infty d\omega \frac{1}{\pi^2} \frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1}, \quad (5.72)$$

onde o integrando corresponde a lei de radiação de Planck:

$$u(\omega) = \alpha(\tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \frac{1}{\pi^2} \frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1}. \quad (5.73)$$

Enquanto, que realizando todas as integrações em (5.70), obteremos a densidade de energia da cavidade ou lei de Stefan-Boltzmann modificada:

$$u(T) = \alpha(\tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \frac{\pi^2}{15} T^4. \quad (5.74)$$

#### 5.4.1.2 A contribuição anisotrópica

Os coeficientes anisotrópicos do setor de paridade-par são representados pelos elementos da matriz  $(\tilde{\kappa}_{e-})$  em (5.54) e, isolamos sua contribuição impondo  $\tilde{\kappa}_{\text{tr}} = 0$ . Assim, da eq.(5.54) obtemos

$$(\kappa_{DE})_{jk} = (\tilde{\kappa}_{e-})_{jk}, \quad (\kappa_{HB})_{jk} = -(\tilde{\kappa}_{e-})_{jk}, \quad (5.75)$$

que substituindo nas equações (5.13) obtemos os elementos não nulos do tensor  $(k_F)$ :

$$(k_F)_{\tau j \tau k} = \frac{1}{2} (\tilde{\kappa}_{e-})_{jk}, \quad (k_F)_{pqmn} = -\frac{1}{2} \epsilon_{jpq} \epsilon_{kmn} (\tilde{\kappa}_{e-})_{jk}. \quad (5.76)$$

Logo as componentes de  $\tilde{S}_{ab}$  serão:

$$\tilde{S}_{\tau\tau} = -\vec{p} \cdot (\tilde{\kappa}_{e-}) \cdot \vec{p}, \quad \tilde{S}_{\tau k} = p_\tau (\tilde{\kappa}_{e-})_{kj} p_j, \quad (5.77)$$

$$\tilde{S}_{jk} = -\delta_{jk} \vec{p} \cdot (\tilde{\kappa}_{e-}) \cdot \vec{p} - (\tilde{\kappa}_{e-})_{jk} p^2 + p_j (\tilde{\kappa}_{e-})_{ki} p_i + p_k (\tilde{\kappa}_{e-})_{ji} p_i,$$

Entretanto, podemos escolher uma representação mais conveniente para a matriz  $(\tilde{\kappa}_{e-})$ . Posto que é uma matriz simétrica e de traço nulo podemos representá-la em termos de dois vetores 3D,  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , ortogonais:

$$(\tilde{\kappa}_{e-})_{ij} = \frac{1}{2} (a_i b_j + a_j b_i) , \quad (5.78)$$

vemos que satisfaz a condição de traço nulo  $\text{tr}(\tilde{\kappa}_{e-}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  e, nessa parametrização  $\det(\tilde{\kappa}_{e-}) = 0$ .

Assim, as componentes (5.77) de  $\tilde{S}_{ab}$  serão expressas como:

$$\tilde{S}_{\tau\tau} = -(\vec{a} \cdot \vec{p}) (\vec{b} \cdot \vec{p}) , \quad \tilde{S}_{\tau k} = \frac{1}{2} p_\tau a_k (\vec{b} \cdot \vec{p}) + \frac{1}{2} p_\tau b_k (\vec{a} \cdot \vec{p}) , \quad (5.79)$$

$$\tilde{S}_{jk} = -\delta_{jk} (\vec{a} \cdot \vec{p}) (\vec{b} \cdot \vec{p}) - \frac{1}{2} (a_i b_j + a_j b_i) p^2 + \frac{1}{2} (\vec{b} \cdot \vec{p}) [p_j a_k + p_k a_j] + \frac{1}{2} (\vec{a} \cdot \vec{p}) [p_j b_k + p_k b_j]$$

Logo, calculando o determinante da matriz  $(p^2 \delta_{ab} - \tilde{S}_{ab})$  obtemos:

$$\det(p^2 \delta_{ab} - \tilde{S}_{ab}) = \left[ 1 - \frac{1}{4} \vec{a}^2 \vec{b}^2 \right] (p^2)^2 (p^2 - p_+^2) (p^2 - p_-^2) , \quad (5.80)$$

onde definimos:

$$p_+^2 = -\frac{\vec{a}^2 (\vec{b} \cdot \vec{p})^2 + \vec{b}^2 (\vec{a} \cdot \vec{p})^2 + 4 (\vec{a} \cdot \vec{p}) (\vec{b} \cdot \vec{p})}{4 - \vec{a}^2 \vec{b}^2} , \quad (5.81)$$

$$p_-^2 = -(\vec{a} \cdot \vec{p}) (\vec{b} \cdot \vec{p}) .$$

O que leva ao determinante funcional do operador  $(-\square \delta_{ab} + S_{ab})$  a ser expresso como:

$$\det(-\square \delta_{ab} + S_{ab}) = \det \left[ \left( 1 - \frac{1}{4} \vec{a}^2 \vec{b}^2 \right) (-\square)^2 \right] \det(-\square - \nabla_+^2) \det(-\square - \nabla_-^2) . \quad (5.82)$$

onde temos definido:

$$\nabla_+^2 = \frac{4 (\vec{a} \cdot \nabla) (\vec{b} \cdot \nabla) + \vec{b}^2 (\vec{a} \cdot \nabla)^2 + \vec{a}^2 (\vec{b} \cdot \nabla)^2}{4 - \vec{a}^2 \vec{b}^2} , \quad (5.83)$$

$$\nabla_-^2 = (\vec{a} \cdot \nabla) (\vec{b} \cdot \nabla) . \quad (5.84)$$

Assim, a função de partição (5.50) torna-se:

$$\ln Z(\beta) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln[-\square - \nabla_+^2] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln[-\square - \nabla_-^2] , \quad (5.85)$$

Se consideramos somente as contribuições de primeira ordem na matriz  $(\tilde{\kappa}_{e-})$ , teremos:

$$\nabla_+^2 \approx \nabla_-^2 = (\vec{a} \cdot \nabla) (\vec{b} \cdot \nabla) , \quad (5.86)$$

ou seja, em primeira ordem, ambos os modos de polarização do campo de calibre têm a mesma relação de dispersão fornecendo a mesma contribuição à função de partição. Isso, está inteiramente conectado com o fenômeno da não birrefringência observada a primeira ordem para estes coeficientes em [17, 32].

Calculando os traços funcionais em (5.85) via a expansão de Fourier do campo de calibre dada pela eq.(5.61), assim, as contribuições de ambos os modos são expressos como

$$\begin{aligned} \ln Z_+(\beta) &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln[-\square - \nabla_+^2] \\ &= -\frac{1}{2} V \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \left[ (\beta\omega_n)^2 + (\beta\vec{p})^2 + \beta^2 \frac{\vec{b}^2 (\vec{a} \cdot \vec{p})^2 + \vec{a}^2 (\vec{b} \cdot \vec{p})^2 + 4 (\vec{a} \cdot \vec{p}) (\vec{b} \cdot \vec{p})}{4 - \vec{a}^2 \vec{b}^2} \right], \end{aligned} \quad (5.87)$$

e

$$\begin{aligned} \ln Z_-(\beta) &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln[-\square - \nabla_-^2] \\ &= -\frac{1}{2} V \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \left[ (\beta\omega_n)^2 + (\beta\vec{p})^2 + \beta^2 (\vec{a} \cdot \vec{p}) (\vec{b} \cdot \vec{p}) \right], \end{aligned} \quad (5.88)$$

Com o objetivo de calcular a integração sobre os momentos, consideremos o seguinte sistema de coordenadas: o vetor  $\vec{a}$  está alinhado com o eixo  $x$ , o vetor  $\vec{b}$  com o eixo  $y$ , assim o vetor  $\vec{a} \times \vec{b}$  está ao longo do eixo  $z$ . Passando a coordenadas esféricas  $[\vec{p} = \omega (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)]$ , encontramos as seguintes contribuições dos modos :

$$\ln Z_+(\beta) = -\frac{1}{2} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\Omega \int_0^\infty d\omega \omega^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \left[ (2\pi n)^2 + (\beta\omega)^2 \left( 1 + \frac{\lambda^2 \sin^2 \theta + 2\lambda \sin^2 \theta \sin 2\phi}{4 - \lambda^2} \right) \right], \quad (5.89)$$

e

$$\ln Z_-(\beta) = -\frac{1}{2} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\Omega \int_0^\infty d\omega \omega^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \left[ (2\pi n)^2 + (\beta\omega)^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \lambda \sin^2 \theta \sin 2\phi \right) \right], \quad (5.90)$$

onde  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  é o elemento do ângulo sólido, e temos definido  $\lambda = ab$  com  $a = |\vec{a}|$  e  $b = |\vec{b}|$ .

Fazendo as seguintes mudanças de variáveis:

$$\omega \rightarrow \omega \left( 1 + \frac{\lambda^2 \sin^2 \theta + 2\lambda \sin^2 \theta \sin 2\phi}{4 - \lambda^2} \right)^{-1/2}, \quad (5.91)$$

na eq.(5.89) e

$$\omega \rightarrow \omega \left( 1 + \frac{1}{2} \lambda \sin^2 \theta \sin 2\phi \right)^{-1/2}, \quad (5.92)$$

na eq.(5.90 ), obtemos:

$$\ln Z_+(\beta) = -\frac{1}{2} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\Omega \left( 1 + \frac{\lambda^2 \sin^2 \theta + 2\lambda \sin^2 \theta \sin 2\phi}{4 - \lambda^2} \right)^{-3/2} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \left[ (2\pi n)^2 + (\beta\omega)^2 \right], \quad (5.93)$$

e

$$\ln Z_-(\beta) = -\frac{1}{2} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\Omega \left( 1 + \frac{1}{2} \lambda \sin^2 \theta \sin 2\phi \right)^{3/2} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \left[ (2\pi n)^2 + (\beta\omega)^2 \right]. \quad (5.94)$$

Realizando ambas as somas, obtemos que função de partição para os coeficientes não birrefringentes e anisotrópicos de paridade-par é:

$$\ln Z(\beta) = \frac{1}{8\pi} \int d\Omega \left[ \left( 1 + \frac{\lambda^2 \sin^2 \theta + 2\lambda \sin^2 \theta \sin 2\phi}{4 - \lambda^2} \right)^{-3/2} + \left( 1 + \frac{1}{2} \lambda \sin^2 \theta \sin 2\phi \right)^{-3/2} \right] \ln Z_A. \quad (5.95)$$

Levando em conta que  $\ln Z_A$  é a função de partição de Maxwell (4.54), e notando que a integração angular pode ser calculada exatamente, teremos a função de partição para as componentes não birrefringentes e anisotrópicas do setor de paridade-par:

$$\ln Z(\beta) = \delta(\lambda) \ln Z_A(\beta), \quad (5.96)$$

onde

$$\delta(\lambda) = \frac{1}{4} (4 - \lambda^2)^{1/2} + (4 - \lambda^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{128} \lambda^4 + \frac{1}{512} \lambda^6 + \dots \quad (5.97)$$

Observe que para termos uma função de partição bem definida  $0 \leq \lambda = ab < 2$ . A expansão demonstra que a contribuição anisotrópica da matriz ( $\tilde{\kappa}_{e-}$ ) somente é manifestado em quarta ordem.

Escrevendo a função de partição como uma potência da função de partição da eletrodinâmica de Maxwell, teremos:

$$Z(\beta) = (Z_A)^{\delta(\lambda)}. \quad (5.98)$$

Isso terá como consequência que todas as propriedades termodinâmicas do setor não birrefringente e anisotrópico de paridade-par serão as mesmas da eletrodinâmica de Maxwell multiplicadas pelo função  $\delta(\lambda)$ . Enquanto, a distribuição angular da densidade de energia torna-se anisotrópica devido as contribuições oriundas da VSL como mostraremos a seguir.

A partir da função de partição (5.95) calculamos a densidade de energia por ângulo sólido irradiada pelo corpo negro:

$$u(\beta, \Omega) = \frac{\pi}{60\beta^4} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \lambda \sin^2 \theta \sin 2\phi \right)^{-3/2} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\lambda^2 \sin^2 \theta + 2\lambda \sin^2 \theta \sin 2\phi}{4 - \lambda^2} \right)^{-3/2} \right], \quad (5.99)$$



revelando um alto grau de anisotropia, via a explícita dependência em  $\phi$  e  $\theta$ , induzida pelos coeficientes  $(\tilde{\kappa}_{e-})_{ij}$  que controlam a quebra da simetria de Lorentz. A anisotropia é manifesta a primeira ordem em  $(\tilde{\kappa}_{e-})_{ij}$ , ou seja:

$$u(\beta, \Omega) \approx \frac{\pi}{60\beta^4} \left[ 1 - \frac{3}{4}\lambda \sin 2\phi \sin^2 \theta + \dots \right]. \quad (5.100)$$

A dependência linear em  $\lambda$  da distribuição angular da densidade de energia pode conduzir à obtenção de algum limite superior muito restritivo para os coeficientes da matriz  $(\kappa_{e-})$  via os dados da polarização da radiação cósmica de fundo.

Similarmente ao caso isotrópico, observamos que a lei de radiação de Planck e a lei de Stefan-Boltzmann são as correspondentes da eletrodinâmica de Maxwell, desta vez, multiplicadas pelo fator  $\delta(\lambda)$ , assim, a lei de radiação de Planck modificada é:

$$u(\omega) = \delta(\lambda) \frac{1}{\pi^2} \frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1}, \quad (5.101)$$

e a lei de Stefan-Boltzmann modificada será:

$$u(T) = \delta(\lambda) \frac{\pi^2}{15} T^4. \quad (5.102)$$

#### 5.4.2 O setor de paridade-ímpar

Estudaremos as modificações introduzidas pelos 3 coeficientes não birrefringentes de paridade-ímpar do tensor  $(k_F)$  nas propriedades termodinâmicas do campo eletromagnético de Maxwell. Para isolar o setor de paridade-ímpar, anulamos o setor de paridade-par definido em (5.13):  $\kappa_{DE} = 0$  e  $\kappa_{HB} = 0$ . Levando em consideração a restrição imposta pelos dados da birrefrigência [17, 18, 29] para os elementos  $(\tilde{\kappa}_{o-})_{ij}$ :

$$(\tilde{\kappa}_{o-})_{ij} = \frac{1}{2}(\kappa_{DB} - \kappa_{HE})_{ij} \leq 10^{-32}, \quad (5.103)$$

podemos impor que  $(\tilde{\kappa}_{o-}) = 0$ , assim, obtemos a equação  $\kappa_{DB} = \kappa_{HE}$  que junto a condição  $\kappa_{DB} = -(\kappa_{HE})^T$  nos dizem que a matriz  $\kappa_{DB}$  é antisimétrica, o que implica em 3 coeficientes independentes. Desse modo, obtemos que neste limite  $\kappa_{DB} = (\tilde{\kappa}_{o+})$  e, como  $(\tilde{\kappa}_{o+})$  é antisimétrico podemos parametrizar em termos um vetor 3D,  $\vec{\kappa}$  [29]:

$$(\tilde{\kappa}_{o+})_{mn} = (\kappa_{DB})_{mn} = \epsilon_{mnj} \kappa_j. \quad (5.104)$$

Que substituídos em (5.52) permitem obter as componentes não nulas do tensor  $(k_F)$  em termos das componentes do vetor  $\vec{\kappa}$ :

$$(k_F)_{\tau imn} = \frac{1}{2} [\kappa_m \delta_{in} - \kappa_n \delta_{im}]. \quad (5.105)$$

As componentes do operador  $\tilde{S}_{ab}$  no espaço de Fourier são segundo a prescrição (5.105), dadas por:

$$\tilde{S}_{\tau\tau} = 0, \quad \tilde{S}_{\tau j} = (\vec{\kappa} \cdot \vec{p}) p_j - \vec{p}^2 \kappa_j, \quad (5.106)$$

e

$$\tilde{S}_{ij} = -2(\vec{\kappa} \cdot \vec{p}) p_\tau \delta_{ij} + p_\tau (\kappa_i p_j + \kappa_j p_i). \quad (5.107)$$

O determinante da matriz  $(p^2 \delta_{ab} - \tilde{S}_{ab})$  é:

$$\det(p^2 \delta_{ab} - \tilde{S}_{ab}) = (p^2)^2 \left[ p^2 + 2p_\tau (\vec{\kappa} \cdot \vec{p}) - \vec{\kappa}^2 \vec{p}^2 + (\vec{\kappa} \cdot \vec{p})^2 \right] \left[ p^2 + 2p_\tau (\vec{\kappa} \cdot \vec{p}) \right], \quad (5.108)$$

o que leva ao determinante funcional do operador  $(-\square \delta_{ab} + S_{ab})$  igual a:

$$\det(-\square \delta_{ab} + S_{ab}) = \det(-\square)^2 \det \left[ -\square - 2(\vec{\kappa} \cdot \nabla) \partial_\tau + \vec{\kappa}^2 \nabla^2 - (\vec{\kappa} \cdot \nabla)^2 \right] \det \left[ -\square - 2(\vec{\kappa} \cdot \nabla) \partial_\tau \right], \quad (5.109)$$

Assim, a função de partição (5.50) torna-se:

$$\ln Z(\beta) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[ -\square - 2(\vec{\kappa} \cdot \nabla) \partial_\tau + \vec{\kappa}^2 \nabla^2 - (\vec{\kappa} \cdot \nabla)^2 \right] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[ -\square - 2(\vec{\kappa} \cdot \nabla) \partial_\tau \right], \quad (5.110)$$

e representa as contribuições dos dois modos de polarização do campo fotônico modificado. Observe que se considerarmos somente os termos de primeira ordem nos coeficientes parametrizados pelo vetor  $\vec{\kappa}$ , ambos os modos forneceriam a mesma contribuição para a função de partição. Em primeira ordem, as relações de dispersão associadas tornam-se iguais  $p^2 + 2p_0 (\vec{\kappa} \cdot \vec{p}) = 0$  que produz a não birrefringência. Este resultado está de acordo com a literatura que mostra e segue a prescrição [17, 18, 29, 30, 32]. O cálculo das relações de dispersão e suas respectivas análises estão calculadas em [16] (ver o apêndice B).

Calculamos os traços funcionais em (5.110) escrevendo o campo de calibre no espaço de Fourier (5.61). Deste modo, a contribuição dos dois modos são:

$$\begin{aligned} \ln Z_\kappa^{(1)}(\beta) &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[ -\square - 2(\vec{\kappa} \cdot \nabla) \partial_\tau + \vec{\kappa}^2 \nabla^2 - (\vec{\kappa} \cdot \nabla)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{2} V \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \ln \beta^2 \left[ (\omega_m)^2 + \vec{p}^2 + 2(\vec{\kappa} \cdot \vec{p}) \omega_m - \vec{\kappa}^2 \vec{p}^2 + (\vec{\kappa} \cdot \vec{p})^2 \right], \end{aligned} \quad (5.111)$$

e

$$\begin{aligned} \ln Z_\kappa^{(2)}(\beta) &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[ -\square - 2(\vec{\kappa} \cdot \nabla) \partial_\tau \right] \\ &= -\frac{1}{2} V \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \ln \beta^2 \left[ (\omega_m)^2 + \vec{p}^2 + 2(\vec{\kappa} \cdot \vec{p}) \omega_m \right], \end{aligned} \quad (5.112)$$

Fazendo a seguinte translação  $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \omega_m \vec{\kappa}$  em ambas as integrais (5.111) e (5.112), obtemos:

$$\ln Z_\kappa^{(1)} = -\frac{1}{2}V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \beta^2 \left[ (\omega_n)^2 + \vec{p}^2 + \frac{(\vec{\kappa} \cdot \vec{p})^2}{1 - \kappa^2} \right], \quad (5.113)$$

e

$$\ln Z_\kappa^{(2)} = -\frac{1}{2}V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \beta^2 \left[ (\omega_n)^2 + \frac{\vec{p}^2}{1 - \kappa^2} \right], \quad (5.114)$$

onde na primeira integral temos desprezado um termo infinito irrelevante.

Escrevendo as integrais (5.113) e (5.114) em coordenadas esféricas:  $\vec{\kappa} \cdot \vec{p} = \kappa\omega \cos\theta$ ,  $\omega = |\vec{p}|$ ,  $\kappa = |\vec{\kappa}|$ ,  $\vec{p} = \omega (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$ , teremos:

$$\ln Z_\kappa^{(1)} = -\frac{1}{2} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\Omega \int_0^\infty d\omega \omega^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \left[ (\beta\omega_n)^2 + (\beta\omega)^2 \frac{1 - \kappa^2 \sin^2\theta}{1 - \kappa^2} \right], \quad (5.115)$$

e

$$\ln Z_\kappa^{(2)} = -\frac{1}{2} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\Omega \int_0^\infty d\omega \omega^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \left[ (\beta\omega_n)^2 + (\beta\omega)^2 \frac{1}{1 - \kappa^2} \right], \quad (5.116)$$

onde  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$  é o elemento de ângulo sólido.

Fazendo as seguintes mudanças de variáveis:

$$\omega \rightarrow \omega \left( \frac{1 - \kappa^2}{1 - \kappa^2 \sin^2\theta} \right)^{1/2} \quad (5.117)$$

na eq.(5.115) e

$$\omega \rightarrow \omega (1 - \kappa^2)^{1/2} \quad (5.118)$$

(5.116), obteremos:

$$\ln Z_\kappa^{(1)} = -\frac{1}{2} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\Omega \frac{(1 - \kappa^2)^{3/2}}{(1 - \kappa^2 \sin^2\theta)^{3/2}} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \left[ (\beta\omega_n)^2 + (\beta\omega)^2 \right], \quad (5.119)$$

e

$$\ln Z_\kappa^{(2)} = -\frac{1}{2} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\Omega (1 - \kappa^2)^{3/2} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \beta^2 \left[ (\beta\omega_n)^2 + (\beta\omega)^2 \right]. \quad (5.120)$$

Realizando a soma em  $n$ , teremos a função de partição para a eletrodinâmica *CPT*-par do MPE descrita pelos coeficientes não birrefringentes de paridade-ímpar

$$\ln Z(\beta) = \frac{1}{8\pi} (1 - \kappa^2)^{3/2} \int d\Omega \left[ 1 + \frac{1}{(1 - \kappa^2 \sin^2\theta)^{3/2}} \right] \ln Z_A. \quad (5.121)$$

onde  $Z_A$  é a função de partição da eletrodinâmica de Maxwell dada em (4.54).

Realizando a integração angular em (5.121), encontramos a função de partição igual a:

$$\ln Z(\beta) = \gamma(\kappa) \ln Z_A, \quad (5.122)$$

onde  $\gamma(\kappa)$  é uma função pura dos parâmetros de quebra:

$$\gamma(\kappa) = (1 - \kappa^2)^{1/2} \left( 1 - \frac{1}{2}\kappa^2 \right) \approx 1 - \kappa^2 + \frac{1}{8}\kappa^4 + \dots \quad (5.123)$$

mostrando que as correções providas pela matriz ( $\tilde{\kappa}_{o+}$ ) são de segundo ordem.

Assim, novamente conseguimos expressar a função de partição como uma potência da função de partição do campo eletromagnético de Maxwell:

$$Z(\beta) = (Z_A)^{\gamma(\kappa)}. \quad (5.124)$$

Como já observado no setor não birrefringente de paridade-par, todas as propriedades termodinâmicas do setor não birrefringente de paridade-ímpar serão aquelas da eletrodinâmica de Maxwell multiplicadas pela função  $\gamma(\kappa)$ . A exceção a é a distribuição angular da densidade de energia torna-se anisotrópica devido as contribuições vindas da VSL como mostraremos a seguir.

A partir de (5.121), obtemos facilmente a densidade de energia por ângulo sólido:

$$u(\beta, \Omega) = \frac{\pi}{120\beta^4} (1 - \kappa^2)^{3/2} \left[ 1 + \frac{1}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \right]. \quad (5.125)$$

A dependência em  $\theta$  mostra que a quebra de simetria de Lorentz neste setor proporciona um caráter anisotrópico para distribuição angular da densidade de energia. Note que a contribuição dos coeficientes de quebra, é máxima no plano perpendicular ao vetor  $\vec{\kappa}$ . Em primeira ordem, a anisotropia ganha uma contribuição quadrática nos coeficientes não birrefringentes de paridade-ímpar que controlam a quebra da simetria de Lorentz:

$$u(\beta, \Omega) \approx \frac{\pi}{60\beta^4} \left[ 1 + \kappa^2 \left( \frac{3}{4} \sin^2 \theta - \frac{3}{2} \right) \right], \quad (5.126)$$

essa contribuição anisotrópica resulta ser irrelevante quando comparada com a contribuição linear (5.100) induzida pelos coeficientes não birrefringentes ( $\tilde{\kappa}_{e-}$ ) de paridade-par .

A partir da equação (5.121) ou (5.122), podemos obter a lei de radiação de Planck modificada:

$$u(\omega) = \gamma(\kappa) \frac{1}{\pi^2} \frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1}, \quad (5.127)$$

e a lei de Stefan-Boltzmann modificada:

$$u(T) = \gamma(\kappa) \frac{\pi^2}{15} T^4. \quad (5.128)$$

A partir dos resultados (5.68), (5.98) e (5.124) observamos que a função de partição gerada pelos componentes não birrefringentes do tensor ( $k_F$ ) são análogas. Ou seja, todas elas são uma potência da função de partição do campo eletromagnético de Maxwell e, sendo essa potência uma função pura dos respectivos coeficientes não birrefringentes.

# Conclusões e perspectivas

A presente Dissertação teve como objetivo estudar a influência dos coeficientes não birrefringentes do tensor  $(k_F)$ , que caracteriza a eletrodinâmica  $CPT$ -par do Modelo Padrão Estendido, nas propriedades termodinâmicas do campo eletromagnético de Maxwell.

Primeiramente, estabelecemos a estrutura hamiltoniana da eletrodinâmica  $CPT$ -par do MPE por meio do método de Dirac para sistemas vinculados, ou seja, estabelecemos os vínculos de primeira classe e suas respectivas condições de calibre. Logo, construímos uma função de partição bem-definida e invariante de calibre via o método de Faddeev-Senjanovic [27] no formalismo de integrais de caminho. A função de partição (5.50) representa, em princípio, a função de partição da eletrodinâmica  $CPT$ -par do MPE para um tensor  $(k_F)$  arbitrário, entretanto, deve-se garantir que as componentes  $(k_F)_{abcd}$  do tensor  $(k_F)$  sejam suficientemente pequenas para garantir uma hamiltoniana definida-positiva e uma função de partição bem-definida.

Com o intuito de ganhar informações não perturbativas sobre a influência da violação da simetria de Lorentz nas propriedades termodinâmicas do campo eletromagnético de Maxwell, especializamos nossa análise às 9 componentes não birrefringentes do tensor  $(k_F)$  e estudamos separadamente ambos os setores de paridade-par e paridade-ímpar.

Assim, a partir dos resultados (5.68), (5.98) e (5.124) observamos que as funções de partição geradas pelas componentes não birrefringentes do tensor  $(k_F)$  são similares. Ou seja, todas elas são uma potência da função de partição do campo eletromagnético de Maxwell, onde essa potência é uma função pura dos respectivos coeficientes não birrefringentes, o que resulta nas propriedades termodinâmicas como densidade de energia, pressão, entropia, etc, sejam as mesmas da eletrodinâmica de Maxwell multiplicadas por uma função que depende somente dos respectivos coeficientes não birrefringentes. Em geral, a exceção à regra é a densidade de energia por unidade de ângulo sólido devido aos coeficientes que controlam a quebra ou violação da simetria de Lorentz (VSL) induzirem anisotropias na distribuição angular da densidade de energia do corpo negro. Essa característica anisotrópica da

distribuição angular da radiação reflete-se numa mudança ou variação local se relacionada ao comportamento isotrópico da distribuição angular da densidade de energia do campo eletromagnético de Maxwell. Apesar de tal diferença, a lei de Stefan-Boltzmann mantém a sua dependência na temperatura proporcional a  $T^4$ . Contudo, toda a informação sobre os coeficientes da VSL está contida na constante de Stefan-Boltzmann modificada, ou seja, temos que a constante de Stefan-Boltzmann  $\sigma$  muda como:

$$\sigma \rightarrow \sigma f(VSL) \quad (5.129)$$

onde  $f(VSL)$  é alguma função dos coeficientes que controlam a violação da simetria de Lorentz satisfazendo a seguinte condição  $\lim_{VSL \rightarrow 0} f(VSL) = 1$ .

Como os coeficientes da VSL estão fortemente restritos por rigorosos limites superiores, então, as contribuições não nulas de menor ordem, na sua serie perturbativa entorno a eletrodinâmica de Maxwell, devem proporcionar uma boa informação sobre as propriedades termodinâmicas do setor não birrefringente do tensor  $(k_F)$ . Desse modo, no setor não birrefringente de paridade-par observamos que a contribuição isotrópica fornece uma correção linear em  $\tilde{\kappa}_{tr}$  como mostrado na eq.(5.67), entretanto, a contribuição anisotrópica da matriz  $(\tilde{\kappa}_{e-})$  somente é manifestado em quarta ordem, como é mostrado na eq.(5.97). Então, a contribuição anisotrópica é irrelevante comparada com a isotrópica. Porém no setor não birrefringente de paridade-ímpar, as correções providas pela matriz  $(\tilde{\kappa}_{o+})$  são de segunda ordem como pode ser rapidamente observado na eq.(5.123) .

A seguir, destacamos as diferenças entre as propriedades termodinâmicas da eletrodinâmica *CPT*-par e *CPT*-ímpar, primeiramente investigado na Ref.[21]. Tais diferenças decorrem da álgebra de Dirac para os graus de liberdade físicos como mostrada nas referências [21] e [23]. Para eletrodinâmica do *CPT*-ímpar [21], no calibre de Coulomb, temos que os parênteses de Dirac não nulos são:

$$\{A_k(x), \pi_j(y)\}_D = - \left[ \delta_{kj} - \frac{\partial_k \partial_j}{\nabla^2} \right] \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.130)$$

e

$$\{\pi^k(x), \pi^j(y)\}_D = \frac{1}{2} \left[ \epsilon^{0kli} (k_{AF})_l \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\nabla^2} - \epsilon^{0jli} (k_{AF})_l \frac{\partial_i^x \partial_k^x}{\nabla^2} \right] \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (5.131)$$

Enquanto, para a eletrodinâmica *CPT*-par, a álgebra de Dirac entre os graus de liberdade físicos, também no calibre de Coulomb, proporciona a seguinte relação de comutação

$$\{A_k(x), \pi^j(y)\}_D = \left( \delta_{kj} - \frac{\partial_k^x \partial_j^x}{\nabla_x^2} \right) \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.132)$$

sendo os outros nulos.

A não comutatividade dos momentos expressa pela eq.(5.131), é uma das razões fundamentais para a eletrodinâmica *CPT*-ímpar tenha propriedades termodinâmicas diferentes da sua contra parte, a eletrodinâmica *CPT*-par. Uma outra razão que contribui nessa diferença é o vetor  $k_{AF}$  ter dimensão de massa 1. A dependência na temperatura do logaritmo da função de partição em ordem  $(k_{AF})^{2n}$  é  $T^{3-2n}$ , isso implica que a função de partição *CPT*-ímpar não pode ser expressa como uma potência da função de partição de Maxwell tal como acontece no caso *CPT*-par analisado.

Entre as perspectivas imediatas, pretendemos continuar a estudar os efeitos da violação da simetria de Lorentz em outros sistemas ou fenômenos termodinâmicos como por exemplo, sistemas fermiônicos, condensação de Bose-Einstein, sistemas de campos não-comutativos, Chern-Simons gravitacional com violação da simetria de Lorentz, CFJ não abeliano, etc.

# Apêndice A

## Notação e algumas relações úteis

Ao longo da Dissertação usamos as unidades naturais:

$$c = \hbar = k_B = 1 \quad (\text{A.1})$$

O tensor métrico é assumido da seguinte forma

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \left[ (2\pi n)^2 + b^2 \right] = b - \ln 2 + 2 \ln \left( 1 - e^{-b} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\int_0^\infty d\omega \, \omega^2 \ln \left( 1 - e^{-\beta\omega} \right) = -\frac{\pi^4}{45\beta^3} \quad (\text{A.4})$$

$$\int_0^\infty d\omega \, \ln \left( 1 - e^{-\beta\omega} \right) = -\frac{\pi^2}{6\beta} \quad (\text{A.5})$$

$$\int d^D \vec{x} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{x} \right\} = (2\pi)^{\frac{D}{2}} [\det \mathbb{A}]^{-1/2} = (2\pi)^{\frac{D}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} \ln \mathbb{A} \right\} \quad (\text{A.6})$$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \quad (\text{A.7})$$



## Apêndice B

# As relações de dispersão

### B.1 Decomposição do tensor $(k_F)$ a temperatura zero

Para o caso *CPT*-par temos  $(k_F)_\beta = 0$  e a densidade lagrangiana, torna-se:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\nu}F^{\alpha\nu} - \frac{1}{4}(k_F)^{\alpha\nu\rho\varphi}F_{\alpha\nu}F_{\rho\varphi}. \quad (\text{B.1})$$

Definindo os campos elétrico e magnético como:

$$E_k = F^{k0} = -\partial_k A_0 + \partial_0 A_k = F_{0k}, \quad B_k = \left(\nabla \times \vec{A}\right)_k = \frac{1}{2}\epsilon_{kab}F_{ab}, \quad (\text{B.2})$$

podemos expressar os termos da lagrangiana como:

$$F_{\alpha\nu}F^{\alpha\nu} = -2(F_{0k})^2 + (F_{jk})^2 = -2\vec{E}^2 + 2\vec{B}^2, \quad (\text{B.3})$$

e

$$(k_F)^{\alpha\nu\rho\varphi}F_{\alpha\nu}F_{\rho\varphi} = 4E_j(k_F)_{0j0m}E_m - 4E_m(k_F)_{ij0m}\epsilon_{ijn}B_n + B_p\epsilon_{ijp}(k_F)_{ijkm}\epsilon_{kmq}B_q. \quad (\text{B.4})$$

Substituindo (B.3) e (B.4) em (B.1), teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}E^2 - \frac{1}{2}\vec{B}^2 + \frac{1}{2}E_j \left[ -2(k_F)_{0j0k} \right] E_k \\ & - \frac{1}{2}B_j \left[ \frac{1}{2}\epsilon_{j pq}W_{pqlm}\epsilon_{lmk} \right] B_k + E_j \left[ (k_F)_{0j pq} \epsilon_{pqk} \right] B_k. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Segundo a prescrição estabelecida em [17], a densidade lagrangiana pode ser escrita como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\vec{E}^2 - \frac{1}{2}\vec{B}^2 + \frac{1}{2}\vec{E} \cdot (\kappa_{DE}) \cdot \vec{E} - \frac{1}{2}\vec{B} \cdot (\kappa_{HB}) \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot (\kappa_{DB}) \cdot \vec{B}, \quad (\text{B.6})$$

onde as componentes do tensor  $(k_F)$  podem ser escritos em termos de quatro matrizes de ordem  $3 \times 3$ ,  $\kappa_{DE}$ ,  $\kappa_{HB}$ ,  $\kappa_{DB}$  e  $\kappa_{HE}$ : As matrizes  $\kappa_{DE}$  e  $\kappa_{HB}$  são simétricas e têm paridade-par, assim:

$$(\kappa_{DE})_{jk} = -2(k_F)_{0j0k}, \quad (\kappa_{HB})_{jk} = \frac{1}{2}\epsilon_{j pq}\epsilon_{klm}(k_F)_{pqlm}. \quad (\text{B.7})$$

Para essas matrizes, a condição de duplo traço nulo,  $(k_F)^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0$ , leva a seguinte relação:

$$\text{tr}(\kappa_{DE} + \kappa_{HB}) = 0, \quad (\text{B.8})$$

desse modo, o setor de paridade-par descrito pelas matrizes  $\kappa_{DE}$  e  $\kappa_{HB}$  suportam 11 parâmetros independentes

As matrizes  $\kappa_{DB}$  e  $\kappa_{HE}$  são de traço nulo e têm paridade-ímpar e estão relacionados com as componentes do tensor  $(k_F)$  pela seguinte relação:

$$(\kappa_{DB})_{jk} = -(\kappa_{HE})_{kj} = \epsilon_{kpq}(k_F)_{0j pq} \quad (\text{B.9})$$

desse modo, o setor de paridade-ímpar suporta 8 parâmetros independentes.

Segundo [17] e com finalidade de fazer comparações com os dados experimentais de birrefringência, os 19 coeficientes independentes do tensor  $(k_F)_{\alpha\nu\rho\varphi}$  podem ser parametrizados em termos de quatro matrizes de traço nulo,  $\tilde{\kappa}_{e+}$ ,  $\tilde{\kappa}_{e-}$ ,  $\tilde{\kappa}_{o+}$ ,  $\tilde{\kappa}_{o-}$  e um parâmetro simples  $\tilde{\kappa}_{\text{tr}}$ : O setor de paridade-par é então parametrizado da seguinte maneira

$$\begin{aligned} (\tilde{\kappa}_{e+})_{jk} &= \frac{1}{2}(\kappa_{DE} + \kappa_{HB})_{jk}, \\ (\tilde{\kappa}_{e-})_{jk} &= \frac{1}{2}(\kappa_{DE} - \kappa_{HB})_{jk} - \delta_{jk}\tilde{\kappa}_{\text{tr}}, \\ \tilde{\kappa}_{\text{tr}} &= \frac{1}{3}\text{tr}(\kappa_{DE}), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

onde as matrizes  $\tilde{\kappa}_{e+}$  e  $\tilde{\kappa}_{e-}$  são simétricas. Enquanto, o setor de paridade-ímpar é parametrizado segundo

$$\begin{aligned} (\tilde{\kappa}_{o+})_{jk} &= \frac{1}{2}(\kappa_{DB} + \kappa_{HE})_{jk}, \\ (\tilde{\kappa}_{o-})_{jk} &= \frac{1}{2}(\kappa_{DB} - \kappa_{HE})_{jk}, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

neste caso, a matriz  $(\tilde{\kappa}_{o+})$  é antisimétrica e a matriz  $(\tilde{\kappa}_{o-})$  é antisimétrica.

Usando esta nova parametrização, a densidade lagrangiana (B.6) torna-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}})\vec{E}^2 - \frac{1}{2}(1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}})\vec{B}^2 + \frac{1}{2}\vec{E} \cdot (\tilde{\kappa}_{e+} + \tilde{\kappa}_{e-}) \cdot \vec{E} \\ &\quad - \frac{1}{2}\vec{B} \cdot (\tilde{\kappa}_{e+} - \tilde{\kappa}_{e-}) \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot (\tilde{\kappa}_{o+} + \tilde{\kappa}_{o-}) \cdot \vec{B}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

## B.2 As equações de movimento

A partir da equação de movimento (5.5), obtemos as equações de Maxwell não homogêneas (na ausência de fontes) em termos dos campos elétricos, magnéticos e das matrizes (B.7) e (B.9). Desse modo, a lei de Gauss modificada resulta em:

$$\partial_j E_j + (\kappa_{DE})_{ja} \partial_j E_a - (\kappa_{DB})_{ja} \partial_j B_a = 0, \quad (\text{B.13})$$

entretanto, a equação de Ampere-Maxwell modificada é expressa como:

$$\begin{aligned} \partial_0 E_k + (\kappa_{DE})_{kj} \partial_0 E_j - (\kappa_{DB})_{ab} \epsilon_{bkj} \partial_j E_a \\ - (\kappa_{DB})_{kb} \partial_0 B_b - \epsilon_{kja} \partial_j B_a - (\kappa_{HB})_{ab} \epsilon_{bkj} \partial_j B_a = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Por outro lado, as equações homogêneas de Maxwell permanecem as mesmas:

$$\partial_0 B_k + \epsilon_{kab} \partial_a E_b = 0, \quad \partial_a B_a = 0 \quad (\text{B.15})$$

A partir dessas quatro equações, obtemos a equação de onda para o campo elétrico

$$\begin{aligned} (\partial_0)^2 E_k + (\kappa_{DE})_{ka} (\partial_0)^2 E_a - \nabla^2 E_k + \text{tr}(\kappa_{DE}) \nabla^2 E_k + (\kappa_{HB})_{ab} \partial_a \partial_b E_k \\ + \partial_k \partial_a E_a - \text{tr}(\kappa_{DE}) \partial_k \partial_a E_a - (\kappa_{HB})_{kb} \partial_b \partial_a E_a + (\kappa_{HB})_{ka} \nabla^2 E_a \\ - (\kappa_{HB})_{ba} \partial_b \partial_k E_a + (\kappa_{DB})_{kc} \epsilon_{cba} \partial_0 \partial_b E_a - (\kappa_{DB})_{ab} \epsilon_{bkc} \partial_c \partial_0 E_a = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

## B.3 As relações de dispersão

As relações de dispersão podem ser obtidas a partir da transformada de Fourier da equação de onda (B.16) do campo elétrico. Em geral, esse cálculo não fornece de modo exato e explícito as relações de dispersão. Contudo, existem algumas configurações do tensor  $(k_F)$  que permitem obter de modo exato as relações de dispersão do campo de gauge. Em nosso caso, tais configurações são representadas pelos coeficientes do tensor  $(k_F)$  cujas contribuições, à primeira ordem não nula, não produzem birrefringência nas relações de dispersão do campo eletromagnético de Maxwell.

### B.3.1 Relações de dispersão do setor de paridade-par

Para isolar o setor de paridade-par anulamos as matrizes que representam o setor de paridade-ímpar (B.9):  $\kappa_{DB} = 0$  e  $\kappa_{HE} = 0$ , desse modo, a equação de onda (B.16) do campo elétrico resulta em:

$$\begin{aligned} & (\partial_0)^2 E_k + (\kappa_{DE})_{ka} (\partial_0)^2 E_a - \nabla^2 E_k + \text{tr}(\kappa_{DE}) \nabla^2 E_k + (\kappa_{HB})_{ab} \partial_a \partial_b E_k + \partial_k \partial_a E_a \\ & - \text{tr}(\kappa_{DE}) \partial_k \partial_a E_a - (\kappa_{HB})_{kb} \partial_b \partial_a E_a + (\kappa_{HB})_{ka} \nabla^2 E_a - (\kappa_{HB})_{ba} \partial_b \partial_k E_a = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

#### B.3.1.1 Componentes não birrefringentes de paridade-par

Dados de birrefrigência [17, 18] permitem impor que  $(\tilde{\kappa}_{e+})_{ab} = 0$ , então, a primeira equação em (B.10) estabelece a seguinte condição  $\kappa_{DE} = -\kappa_{HB}$ , que substituída na segunda equação em eq.(B.10), proporciona

$$(\kappa_{DE})_{ab} = (\tilde{\kappa}_{e-})_{ab} + \tilde{\kappa}_{\text{tr}} \delta_{ab} = -(\kappa_{HB})_{ab}, \quad (\text{B.18})$$

com

$$\tilde{\kappa}_{\text{tr}} = \frac{1}{3} \text{tr}(\kappa_{DE}). \quad (\text{B.19})$$

Substituindo ambas em (B.17), obtemos:

$$\begin{aligned} & (1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}})(\partial_0)^2 E_k + (\tilde{\kappa}_{e-})_{ka} (\partial_0)^2 E_a - (1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \nabla^2 E_k - (\tilde{\kappa}_{e-})_{ka} \nabla^2 E_a \\ & - (\tilde{\kappa}_{e-})_{ab} \partial_a \partial_b E_k + (1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \partial_k \partial_a E_a + (\tilde{\kappa}_{e-})_{kb} \partial_b \partial_a E_a + (\tilde{\kappa}_{e-})_{ba} \partial_b \partial_k E_a = 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

##### B.3.1.1.1 Contribuição isotrópica

Isolando a componente isotrópica:  $\tilde{\kappa}_{\text{tr}} \neq 0$  e  $(\tilde{\kappa}_{e-}) = 0$ , teremos que (B.20) resulta em:

$$\left[ (1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}) (\partial_t)^2 - (1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \nabla^2 \right] E_k + (1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \partial_k \partial_a E_a = 0. \quad (\text{B.21})$$

Usando a primeira equação de Maxwell (B.13),  $(1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \partial_a E_a = 0$ , obtemos:

$$\left[ (1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}) (\partial_t)^2 - (1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \nabla^2 \right] E_k = 0, \quad (\text{B.22})$$

que no espaço de Fourier, torna-se:

$$\left[ (1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}) p_0^2 - (1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \vec{p}^2 \right] \tilde{E}_k = 0, \quad (\text{B.23})$$

produzindo a seguinte relação de dispersão:

$$(1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}) p_0^2 - (1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \vec{p}^2 = 0, \quad (\text{B.24})$$

que é a mesma expressão contida nas eqs. (5.60) e (5.62), confirmando nossos resultados previstos:

$$\omega_{\pm} = \pm |\vec{p}| \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}}. \quad (\text{B.25})$$

Note que a velocidade de fase associada com ambos os modos do campo fotônico é a mesma, mostrando explicitamente o caráter não birrefringente do coeficiente isotrópico do setor de paridade-par, o qual está em completa concordância com a Ref. [32].

### B.3.1.1.2 Contribuição anisotrópica

Considerando as componentes anisotrópicas não nulas:  $(\tilde{\kappa}_{e-}) \neq 0$  e  $\tilde{\kappa}_{\text{tr}} = 0$ . Dessa forma, a eq. (B.20) torna-se:

$$\begin{aligned} & (\partial_t)^2 E_k - \nabla^2 E_k + (\tilde{\kappa}_{e-})_{ka} (\partial_t)^2 E_a - (\tilde{\kappa}_{e-})_{ka} \nabla^2 E_a \\ & - (\tilde{\kappa}_{e-})_{ab} \partial_a \partial_b E_k + \partial_k \partial_a E_a + (\tilde{\kappa}_{e-})_{kb} \partial_b \partial_a E_a + (\tilde{\kappa}_{e-})_{ba} \partial_b \partial_k E_a = 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Usando a relação (B.13):  $\partial_a E_a + (\tilde{\kappa}_{e-})_{ba} \partial_b E_a = 0$ , obtemos a seguinte equação de onda para o campo elétrico:

$$[\square \delta_{ka} + (\tilde{\kappa}_{e-})_{ka} \square] E_a - [(\tilde{\kappa}_{e-})_{cb} \partial_c \partial_b \delta_{ka} - (\tilde{\kappa}_{e-})_{kb} \partial_b \partial_a] E_a = 0. \quad (\text{B.27})$$

No espaço dos momentos, temos:

$$\left\{ [p^2 - (\tilde{\kappa}_{e-})_{cb} p_c p_b] \delta_{ka} + (\tilde{\kappa}_{e-})_{kb} [p^2 \delta_{ab} + p_b p_a] \right\} E_a = 0. \quad (\text{B.28})$$

Dado que  $(\tilde{\kappa}_{e-})$  é uma matriz simétrica de traço nulo usaremos a mesma parametrização (5.78) para calcular as relações de dispersão:

$$(\tilde{\kappa}_{e-})_{ij} = \frac{1}{2} (a_i b_j + a_j b_i), \quad (\text{B.29})$$

onde  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são dois vetores 3D ortogonais. Assim, temos que

$$(\tilde{\kappa}_{e-})_{cb} p_c p_b = (\vec{a} \cdot \vec{p}) (\vec{b} \cdot \vec{p}) \quad (\text{B.30})$$

$$(\tilde{\kappa}_{e-})_{kc} [p^2 \delta_{jc} + p_c p_j] = \frac{1}{2} (a_k b_j + a_j b_k) p^2 + \frac{1}{2} a_k p_j (\vec{b} \cdot \vec{p}) + \frac{1}{2} b_k p_j (\vec{a} \cdot \vec{p}),$$

e a eq. (B.28) resulta escrita como

$$\mathbb{M}\vec{E} = 0. \quad (\text{B.31})$$

onde definimos a matriz  $M = [M_{kj}]$  com

$$M_{kj} = \left[ p^2 - (\vec{a}\cdot\vec{p}) (\vec{b}\cdot\vec{p}) \right] \delta_{kj} + \frac{1}{2} (a_k b_j + a_j b_k) p^2 + \frac{1}{2} a_k p_j (\vec{b}\cdot\vec{p}) + \frac{1}{2} b_k p_j (\vec{a}\cdot\vec{p}).$$

As relações de dispersão são obtidas a partir da condição

$$\det \mathbb{M} = 0. \quad (\text{B.32})$$

Calculando o determinante, obtemos:

$$\det \mathbb{M} = \left( 1 - \frac{1}{4} \vec{a}^2 \vec{b}^2 \right) p^2 \left[ p^2 - (\vec{a}\cdot\vec{p}) (\vec{b}\cdot\vec{p}) \right] \left[ p^2 - \frac{4 (\vec{a}\cdot\vec{p}) (\vec{b}\cdot\vec{p}) + (\vec{a}\cdot\vec{p})^2 \vec{b}^2 + \vec{a}^2 (\vec{b}\cdot\vec{p})^2}{4 - \vec{a}^2 \vec{b}^2} \right], \quad (\text{B.33})$$

desse modo, obtemos as relações de dispersão exatas:

$$p_+^2 = \frac{4 (\vec{a}\cdot\vec{p}) (\vec{b}\cdot\vec{p}) + (\vec{a}\cdot\vec{p})^2 \vec{b}^2 + \vec{a}^2 (\vec{b}\cdot\vec{p})^2}{4 - \vec{a}^2 \vec{b}^2}, \quad (\text{B.34})$$

$$p_-^2 = (\vec{a}\cdot\vec{p}) (\vec{b}\cdot\vec{p}), \quad (\text{B.35})$$

que são exatamente as mesmas relações que aparecem na função de partição, veja a equação (5.81).

Podemos observar que as relações de dispersão, (B.34) e (B.35), em primeira ordem, reduzem-se a:

$$\omega = \pm |\vec{p}| \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}\cdot(\tilde{\kappa}_{e-})\vec{p}}{|\vec{p}|^2} \right], \quad (\text{B.36})$$

mostrando a ausência de birrefringência nessa ordem tal qual foi estabelecido na Ref. [32].

### B.3.2 Relações de dispersão do setor de paridade-ímpar

Isolamos o setor de paridade-ímpar anulando as matrizes que descrevem o setor de paridade-par (B.7):  $\kappa_{DE} = 0$  e  $\kappa_{HB} = 0$ . Desse modo, a equação de onda para o campo elétrico (B.16) resulta em:

$$\square E_k + \partial_k \partial_a E_a + (\kappa_{DB})_{kc} \epsilon_{cba} \partial_0 \partial_b E_a - (\kappa_{DB})_{ab} \epsilon_{bkc} \partial_c \partial_0 E_a = 0, \quad (\text{B.37})$$

que no espaço dos momentos é expresso como:

$$\left\{ (p^2 \delta_{kj} + p_k p_j) - p_0 \left[ (\kappa_{DB})_{kc} \epsilon_{cji} p_i + (\kappa_{DB})_{jc} \epsilon_{cki} p_i \right] \right\} \tilde{E}_j = 0. \quad (\text{B.38})$$

Reescrevemos esta equação como

$$\mathbb{M}\vec{E} = \vec{0}. \quad (\text{B.39})$$

onde definimos a matriz  $M = N - p_0 D$  em termos das matrizes simétricas  $\mathbb{N} = [N_{kj}]$  e  $\mathbb{D} = [D_{kj}]$  expressas como

$$N_{kj} = p^2 \delta_{kj} + p_k p_j \quad , \quad D_{kj} = (\kappa_{DB})_{kc} \epsilon_{cji} p_i + (\kappa_{DB})_{jc} \epsilon_{cki} p_i. \quad (\text{B.40})$$

As relações de dispersão são obtidas da condição  $\det \mathbb{M} = 0$ , desse modo, o cálculo exato do determinante fornece:

$$\begin{aligned} \frac{\det \mathbb{M}}{(p_0)^2} &= (p_0)^4 - (p_0)^3 \text{tr} \mathbb{D} - (p_0)^2 \left[ 2\vec{p}^2 + \frac{1}{2} \text{tr} (\mathbb{D}^2) - \frac{1}{2} (\text{tr} \mathbb{D})^2 \right] \\ &+ (p_0) \left[ \vec{p}^2 \text{tr} \mathbb{D} - \det \mathbb{D} \right] + \vec{p}^4 + \vec{p} \cdot \mathbb{D}^2 \vec{p} \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

É fácil notar que o termo  $\text{tr} \mathbb{D}$  proporciona uma contribuição de primeira ordem dos parâmetros da VSL, enquanto os termos  $\text{tr} (\mathbb{D}^2)$ ,  $(\text{tr} \mathbb{D})^2$ ,  $\vec{p} \cdot \mathbb{D}^2 \vec{p}$  apresentam contribuições de segunda ordem da VSL e,  $\det \mathbb{D}$  fornece contribuições de terceira ordem da VSL.

### B.3.2.1 Componentes não birrefringentes de paridade-ímpar

Usando a parametrização (B.11) e usando os dados da birrefringência [17, 18] podemos impor  $(\tilde{\kappa}_{o-}) = 0$ , desse modo, obtemos a condição  $\kappa_{DB} = \kappa_{HE}$  que junto a  $\kappa_{DB} = -(\kappa_{HE})^T$  diz que  $\kappa_{DB}$  é antisimétrica e igual a  $(\tilde{\kappa}_{o+})$ :

$$\kappa_{DB} = \tilde{\kappa}_{o+}, \quad (\text{B.42})$$

e São parametrizadas em termos das componentes de um vetor 3D,  $\vec{\kappa}$ ,

$$(\kappa_{DB})_{ij} = (\tilde{\kappa}_{o+})_{ij} = \epsilon_{ija} \kappa_a, \quad (\text{B.43})$$

Com essa informação, calculamos as diferentes quantidades aparecendo no determinante (B.41) acima:

$$\begin{aligned} \text{tr} \mathbb{D} &= -4 (\vec{\kappa} \cdot \vec{p}) \quad , \quad \text{tr} (\mathbb{D}^2) = 6 (\vec{\kappa} \cdot \vec{p})^2 + 2 \vec{\kappa}^2 \vec{p}^2, \\ \det \mathbb{D} &= 2 (\vec{\kappa} \cdot \vec{p}) \left[ \vec{\kappa}^2 \vec{p}^2 - (\vec{\kappa} \cdot \vec{p})^2 \right] \quad , \quad \vec{p} \cdot \mathbb{D}^2 \vec{p} = \vec{p}^2 \left[ \vec{\kappa}^2 \vec{p}^2 - (\vec{\kappa} \cdot \vec{p})^2 \right], \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

que substituídos em (B.41) proporcionam

$$\det \mathbb{M} = (p_0)^2 \left[ p^2 + 2p_0 (\vec{\kappa} \cdot \vec{p}) - \vec{\kappa}^2 \vec{p}^2 + (\vec{\kappa} \cdot \vec{p})^2 \right] \left[ p^2 + 2p_0 (\vec{\kappa} \cdot \vec{p}) \right], \quad (\text{B.45})$$

o que leva as seguintes relações de dispersão:

$$\begin{aligned} p^2 + 2p_0 (\vec{\kappa} \cdot \vec{p}) - \vec{\kappa}^2 \vec{p}^2 + (\vec{\kappa} \cdot \vec{p})^2 &= 0, \\ p^2 + 2p_0 (\vec{\kappa} \cdot \vec{p}) &= 0, \end{aligned} \tag{B.46}$$

que resultam as mesmas aparecendo na função de partição do setor não birrefringente de paridade ímpar expressa na equação (5.110).



## Apêndice C

# Primeiro artigo publicado no Physical Review D

A publicação mostra os resultados obtidos para o setor de paridade-par no capítulo 5.

PHYSICAL REVIEW D **80**, 085026 (2009)

### **Finite temperature behavior of the *CPT*-even and parity-even electrodynamics of the standard model extension**

Rodolfo Casana, Manoel M. Ferreira Jr, Josberg S. Rodrigues, and Madson R. O. Silva

*Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão (UFMA),*

*Campus Universitário do Bacanga, São Luís - Maranhão, 65085-580, Brasil*

(Received 10 July 2009; revised manuscript received 6 September 2009; published 28 October 2009)

In this work, we examine the finite temperature properties of the *CPT*-even and Lorentz-invariance-violating (LIV) electrodynamics of the standard model extension, represented by the term  $W_{\alpha\nu\rho\varphi}F^{\alpha\nu}F^{\rho\varphi}$ . We begin analyzing the Hamiltonian structure following the Dirac's procedure for constrained systems and construct a well-defined and gauge invariant partition function in the functional integral formalism. Next, we specialize for the nonbirefringent coefficients of the tensor  $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$ . In the sequel, the partition function is explicitly carried out for the parity-even sector of the tensor  $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$ . The modified partition function is a power of the Maxwell's partition function. It is observed that the LIV coefficients induce an anisotropy in the black body angular energy density distribution. The Planck's radiation law, however, retains its frequency dependence and the Stefan-Boltzmann law keeps the usual form, except for a change in the Stefan-Boltzmann constant by a factor containing the LIV contributions.

DOI: 10.1103/PhysRevD.80.085026

PACS numbers: 11.30.Cp, 12.60.-i, 44.40.+a, 98.70.Vc

## Apêndice D

# Segundo artigo publicado no Physical Review D

A publicação mostra os resultados obtidos para o setor de paridade-ímpar no capítulo 5.

PHYSICAL REVIEW D **81**, 105015 (2010)

### **Parity-odd and *CPT*-even electrodynamics of the standard model extension at finite temperature**

Rodolfo Casana, Manoel M. Ferreira, Jr., and Madson R. O. Silva

*Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão (UFMA), Campus Universitário do Bacanga, São Luís-MA, 65085-580, Brazil*

(Received 19 October 2009; published 13 May 2010)

This work examines the finite temperature properties of the *CPT*-even and parity-odd electrodynamics of the standard model extension. The starting point is the partition function computed for an arbitrary and sufficiently small tensor  $(k_F)_{\alpha\nu\rho\varphi}$  [see R. Casana, M. M. Ferreira, Jr., J. S. Rodrigues, and M. R. O. Silva, *Phys. Rev. D* **80**, 085026 (2009)]. After specializing the Lorentz-violating tensor  $(k_F)_{\alpha\nu\rho\varphi}$  for the leading-order-nonbirefringent and parity-odd coefficients, the partition function is explicitly carried out, showing that it is a power of the Maxwell partition function. Also, it is observed that the Lorentz invariance violation coefficients induce an anisotropy in the black-body angular energy density distribution. Planck's radiation law retains its usual frequency dependence and the Stefan-Boltzmann law keeps the same form, except for a global proportionality constant.

DOI: [10.1103/PhysRevD.81.105015](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.105015)

PACS numbers: 11.30.Cp, 12.60.-i, 44.40.+a

# Referências Bibliográficas

- [1] H. Belich, *Rev. Brasil. Fís.* **29**, 57 (2007).
- [2] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [3] V. A. Kostelecky, *Scientific American* **291**, 75 (2004).
- [4] J. C. Maxwell, *Treatise on electricity and magnetism*, 3rd edition, 2 vols. reprint by Dover, New York (1954).
- [5] A. Einstein, *Ann. Phys. (Leipzig)* **322**, 891 (1905); reprinted in **14**, 194 (2005).
- [6] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 224 (1989); **66**, 1811 (1991); *Phys. Rev. D* **39**, 683 (1989); **40**, 1886 (1989); V. A. Kostelecky and R. Potting, *Nucl. Phys. B* **359**, 545 (1991); *Phys. Lett. B* **381**, 89 (1996); V. A. Kostelecky and R. Potting, *Phys. Rev. D* **51**, 3923 (1995).
- [7] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane and T. Okamoto, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 141601 (2001); Z. Guralnik, R. Jackiw, S. Y. Pi, A. P. Polychronakos, *Phys. Lett. B* **517**, 450 (2001); A. Anisimov, T. Banks, M. Dine and M. Graesser, *Phys. Rev. D* **65**, 085032 (2002).
- [8] R. F. Streater and A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That*, Princeton University Press (2000); F. Strocchi, *Selected Topics on the General Properties of Quantum Field Theory*, Lecture Notes in Physics, Vol. 51, World Scientific Publishing Company (1993).
- [9] G. Kane, *Scientific American* 288, 56 (2003).
- [10] D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997); D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998).
- [11] A. P. Baeta Scarpelli and J. A. Helayel-Neto, *Phys. Rev. D* **73**, 105020 (2006); N.M. Barraz, Jr., J.M. Fonseca, W.A. Moura-Melo, and J.A. Helayel-Neto, *Phys. Rev. D* **76**, 027701 (2007); H.

- Belich, J.L. Boldo, L.P. Colatto, J.A. Helayel-Neto, A.L.M.A. Nogueira, Phys.Rev. D **68**, 065030 (2003); G. de Berredo-Peixoto and I.L. Shapiro, Phys. Lett. B **642**, 153 (2006); A.P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J.L. Boldo, L.P. Colatto, J.A. Helayel-Neto, A.L.M.A. Nogueira, Nucl. Phys. Proc. Suppl.**127**, 105 (2004); J.W. Moffat, Int. J. Mod. Phys. D **12** 1279 (2003); F. W. Stecker and S.T. Scully, Astropart. Phys. **23**, 203 (2005); E. O. Iltan, Eur. Phys. J. C **40**, 269 (2005); Mod. Phys. Lett. A **19**, 327 (2004); J. High. Energy Phys. **0306** (2003) 016; O. Bertolami and D.F. Mota, Phys. Lett. B **455**, 96 (1999);
- [12] M. B. Cantcheff, C.F.L. Godinho, A. P. Baeta Scarpelli, J.A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **68**, 065025 (2003); H. Belich, T. Costa-Soares, J.A. Helayel-Neto M.T.D. Orlando, R.C. Paschoal, Phys. Lett. A **370**, 126 (2007); H. Belich, L.P. Colatto, T. Costa-Soares, J.A. Helayel-Neto, M.T.D. Orlando, Eur. Phys. J. C **62**, 425 (2009); F.A. Brito, J.R. Nascimento, E. Passos, A.Yu. Petrov, Phys. Lett. B **664**, 112 (2008); M. Gomes, T. Mariz, J.R. Nascimento, A.J. da Silva, Phys. Rev. D **77**, 105002 (2008); F.A. Brito, L.S. Grigorio, M.S. Guimaraes, E. Passos, C. Wotzasek, Phys. Rev. D **78**, 125023 (2008).
- [13] T. Jacobson, S. Liberati, and D. Mattingly, Ann. Phys. **321**, 150 (2006); T. Jacobson, S. Liberati, D. Mattingly and F.W. Stecker, Phys. Rev. Lett. **93**, 021101 (2004); T. Jacobson, S. Liberati, and D. Mattingly, Nature **424**, 1019 (2003).
- [14] S. M. Carroll, G. B. Field, and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).
- [15] C. Adam and F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B **607**, 247 (2001); Phys. Lett. B **513**, 245 (2001); H. Belich, M. M. Ferreira Jr, J.A. Helayel-Neto, M. T. D. Orlando, Phys. Rev. D **67**, 125011 (2003); Phys. Rev. D **69**, 109903 (E) (2004).
- [16] R. Casana, M. M. Ferreira Jr, A. R. Gomes, P. R. D. Pinheiro, Phys. Rev. D **80**, 125040 (2009).
- [17] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001); V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D **66**, 056005 (2002).
- [18] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **97**, 140401 (2006); Astrophys. J. Lett. **689**, L1 (2008).
- [19] D. Bear *et al.*, Phys. Rev. Lett. **85**, 5038 (2000); M. A. Humphrey *et al.*, Phys. Rev. A **68**, 063807 (2003); F. Cane *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 230801 (2004); P. Wolf *et al.*, Phys. Rev. Lett. **96**, 060801 (2006); B. R. Heckel *et al.*, Phys. Rev. Lett. **97**, 021603 (2006).

- [20] V. A. Kostelecky and Matthew Mewes, Phys. Rev. Lett. **99**, 011601 (2007); Arthur Lue, Limin Wang and Marc Kamionkowski, Phys. Rev. Lett. **83**, 1506 (1999).
- [21] Rodolfo Casana, Manoel M. Ferreira Jr and J. S. Rodrigues, Phys. Rev. D **78**, 125013 (2008).
- [22] J. I. Kapusta, *Finite-Temperature Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989; M. Le Bellac, *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [23] R. Casana, M. M. Ferreira Jr, J. S. Rodrigues and M. R. O. Silva, Phys. Rev. D **80**, 085026 (2009).
- [24] R. Casana, M. M. Ferreira Jr. and M. R. O. Silva, *Parity-odd and CPT-even electrodynamics of the SME at Finite Temperature*, arxiv: 0910.3709 [hep-th]. A ser publicado na revista Physical Review D (2010).
- [25] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science,(Yeshiva University, New York, 1964). P. A. M. Dirac, *Generalized Hamiltonian Dynamics*, Canadian Journal of Mathematics, **2**, 129 (1950); P. A. M. Dirac , *The Hamiltonian form of field dynamics*, Canadian Journal of Mathematics **3**, 1 (1951); Kurt Sundermeyer, *Constrained Dynamics: Lecture notes in Physics*, Springer-Verlag (1982); Andrew Hanson, Tullio Regge, Claudio Teitelboin, *Constrained Hamiltonian Systems*, Academia Nazionale de Lincei (1976).
- [26] C. W. Bernard, Phys. Rev. D **9**, 3312 (1974).
- [27] L. D. Faddeev, Teoret. i Mat. Fiz. **1**, 3 (1969); [Trans. Theor. Math. Phys. **1**, 1 (1970).] P. Senjanovic, Ann. Phys. **100**, 227 (1976); Erratum by Y.-G. Miao, Ann. Phys. **209**, 248 (1991).
- [28] L. D. Faddeev and V. N. Popov, Phys. Lett. B **25**, 29 (1967); B. S. DeWitt, Phys. Rev. **160**, 1113 (1967).
- [29] A. Kobakhidze and B.H.J. McKellar, Phys. Rev. D **76**, 093004 (2007).
- [30] Rodolfo Casana, Manoel M. Ferreira Jr and Carlos E. H. Santos, Phys. Rev. D **78**, 105014 (2008).
- [31] Rodolfo Casana, Manoel M. Ferreira Jr, A. R. Gomes and Paulo R. D. Pinheiro, Eur. Phys. J. C **62**, 573 (2009).
- [32] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D **80**, 015020 (2009).