

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA - PPGEE

RODRIGO POSSIDÔNIO NORONHA

**Controle *Fuzzy* T-S Tipo-2 Intervalar por Modos Deslizantes Adaptativo Acionado por
Eventos e com Garantia de Passividade Robusta para Sistemas com Atraso de Tempo**

São Luís - MA

2026

RODRIGO POSSIDÔNIO NORONHA

Controle *Fuzzy* T-S Tipo-2 Intervalar por Modos Deslizantes Adaptativo Acionado por Eventos e com Garantia de Passividade Robusta para Sistemas com Atraso de Tempo

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica, na área de concentração em Automação e Controle.

São Luís - MA

2026

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Noronha, Rodrigo Possidônio.

Controle Fuzzy T-S Tipo-2 Intervalar por Modos Deslizantes Adaptativo Acionado por Eventos e com Garantia de Passividade Robusta para Sistemas com Atraso de Tempo / Rodrigo Possidônio Noronha. - 2026.

167 f.

Orientador(a): Ginalber Luiz de Oliveira Serra.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2026.

1. Controle Adaptativo. 2. Controle Acionado Por Eventos. 3. Controle Fuzzy Por Modos Deslizantes. 4. Sistemas Com Atraso de Tempo. 5. Sistemas Dissipativos. I. Serra, Ginalber Luiz de Oliveira. II. Título.

RODRIGO POSSIDÔNIO NORONHA

Controle *Fuzzy* T-S Tipo-2 Intervalar por Modos Deslizantes Adaptativo Acionado por Eventos e com Garantia de Passividade Robusta para Sistemas com Atraso de Tempo

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica, na área de concentração em Automação e Controle.

Trabalho aprovado em São Luís - MA, 19 de junho de 2026.

Prof. Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra
(UFMA)
Orientador

Prof. Dr. Francisco das Chagas de Souza
(UFMA)
Primeiro Membro da Banca

Prof. Dr. João Viana da Fonseca Neto
(UFMA)
Segundo Membro da Banca

Prof^ª. Dra. Patrícia Helena Moraes Rêgo
(UEMA)
Terceiro Membro da Banca

Prof. Dr. Walbermark Marques dos Santos
(UFES)
Quarto Membro da Banca

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me iluminado e guiado por este caminho repleto de desafios, oferecendo-me saúde, força e todas as condições para superar as dificuldades. Sou profundamente grato por Sua presença constante ao longo de toda a minha vida, não apenas durante estes anos na universidade, demonstrando ser o maior Pai que alguém poderia ter. Louvo ao Senhor pela dádiva da Salvação, concedida de graça por meio de Cristo Jesus, e pela ação diária do Espírito Santo, que pacientemente me molda, capacita e aprimora a cada dia.

Aos meus amados pais, Erivan e Joseana, e ao meu amado irmão, Pedro Henrique, por serem o meu porto seguro, pelo amor incondicional, pelas orações constantes e por sustentarem cada passo meu com incentivo e dedicação. Aos meus queridos avós maternos (José e Ana) e paternos (Edmundo e Evani), bem como aos meus tios e tias. Por fim, agradeço do fundo do coração pelo amor puro, pela alegria sincera e pela companhia leal dos meus bichinhos de estimação, que trouxeram e trazem leveza e conforto aos meus dias.

Ao meu querido orientador, Prof. Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra, pela impecável orientação, pelos ensinamentos, pela extrema paciência, pelo incentivo e por todo o suporte oferecido ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

A todos os professores que aceitaram compor a banca examinadora desta tese de doutorado, pelas valiosas contribuições, pelas sugestões e pelo tempo dedicado à avaliação deste trabalho.

Aos professores Edson, Luís Miguel e Selmo, pelo apoio com a estrutura do laboratório, por abrirem as portas para o meu ingresso na pós-graduação da UFMA, por terem me apresentado ao Prof. Ginalber para a realização do mestrado e por me introduzirem a temas fundamentais, como a Teoria de Controle e os Sistemas Fuzzy.

Aos professores que me servem de inspiração e que despertaram e continuam despertando o meu amor pela Teoria de Controle.

À Universidade Federal do Maranhão (UFMA), pela excelência do ensino e pelo suporte institucional.

A todos os membros, técnicos-administrativos, técnicos de laboratório e corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE/UFMA), pela convivência, suporte e estrutura oferecidos.

À Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão (FAPEMA), pelo apoio financeiro concedido.

Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte desta jornada. O meu sincero muito obrigado.

"Porque dEle, e por Ele, e para Ele são todas as coisas; glória, pois, a Ele eternamente.

Amém."

(Romanos 11:36)

RESUMO

Esta tese aborda o projeto de controle *fuzzy* Takagi–Sugeno (T–S) tipo-2 intervalar por modos deslizantes adaptativo acionado por eventos para sistemas não lineares com atraso de tempo variante, sujeitos a perturbações casadas com limite superior desconhecido e perturbações não casadas, com matrizes de entrada distintas entre os sistemas locais lineares. São propostos dois métodos de controle, denominados método de controle 1 e método de controle 2, que compartilham a mesma estrutura de estabilização prática e passividade robusta, diferindo na lei adaptativa do ganho de chaveamento. Em ambos os métodos, a estabilização prática e a passividade robusta na região de modos deslizantes prático são obtidas a partir da desigualdade de passividade robusta, com função de armazenamento definida por um funcional de Lyapunov–Krasovskii *fuzzy*, da qual se derivam condições na forma de desigualdades matriciais lineares dependentes do atraso máximo, dos limites superiores das taxas de variação do atraso e dos graus de pertinência, e do coeficiente de passividade robusta. A factibilidade dessas condições determina a matriz da variável deslizante e fornece as variáveis de decisão necessárias à dedução das condições de estabilização prática, cujo raio da região de estabilidade prática, para ambos os métodos, é determinado independentemente da estimativa do limite superior da perturbação casada, bem como o limite superior da região de modos deslizantes prático. O método de controle 1 emprega uma lei adaptativa baseada em crescimento monotônico, que dispensa o conhecimento desse limite e força a convergência do ganho ao atingir a região de modos deslizantes prático. O método de controle 2 emprega uma lei adaptativa baseada em função de barreira, que flexibiliza a dominância do ganho sobre a perturbação casada e não casada por meio de uma região de relaxamento, permitindo crescimento e decrescimento do ganho e produzindo uma ação de controle menos agressiva que a estratégia monotônica. Para ambos os métodos, a invariância positiva da região de modos deslizantes prático é estabelecida sob a presença simultânea de atraso variante, perturbações casadas e não casadas, e controle acionado por eventos, com instantes de alcance independentes da estimativa do limite superior da perturbação casada. O mecanismo de acionamento por eventos é formulado com garantia analítica de ausência do comportamento Zeno, e a certificação do atraso máximo admissível é realizada por bisseção desacoplada do projeto de controle. Deriva-se ainda, para cada método, um limite superior para o limiar de acionamento em função do coeficiente de passividade robusta, estabelecendo um vínculo energético entre o mecanismo de eventos e a dissipatividade em malha fechada, além de assegurar, por esse mesmo coeficiente, um limite energético para a influência da perturbação não casada sobre a saída. Os resultados são validados por simulações computacionais que demonstram a eficácia e as vantagens comparativas dos métodos propostos frente às abordagens existentes na literatura.

Palavras-chave: Controle Adaptativo; Controle Acionado por Eventos; Controle *Fuzzy* por Modos Deslizantes; Sistemas com Atraso de Tempo; Sistemas Dissipativos.

ABSTRACT

This thesis addresses the design of event-triggered adaptive sliding mode control for interval type-2 Takagi–Sugeno (T–S) fuzzy nonlinear systems with time-varying delay, subject to matched perturbations with unknown upper bound and unmatched perturbations, with distinct input matrices among the local linear subsystems. Two control methods are proposed, denoted control method 1 and control method 2, which share the same practical stabilization and robust passivity framework while differing in the adaptive law governing the switching gain. In both methods, practical stabilization and robust passivity within the practical sliding mode region are obtained from the robust passivity inequality, with the storage function defined by a fuzzy Lyapunov–Krasovskii functional, from which conditions in the form of delay-dependent linear matrix inequalities are derived, dependent on the maximum delay, the upper bounds on the rates of variation of the delay and of the membership degrees, and the robust passivity coefficient. The feasibility of these conditions determines the sliding variable matrix and provides the decision variables required to derive the practical stabilization conditions, whose practical stability region radius, for both methods, is determined independently of the estimate of the upper bound of the matched perturbation, as is the upper bound of the practical sliding mode region. Control method 1 employs an adaptive law based on monotonic growth, which dispenses with knowledge of this bound and forces the gain to converge once the practical sliding mode region is reached. Control method 2 employs an adaptive law based on a barrier function, which relaxes the dominance of the gain over the matched and unmatched perturbations through a relaxation region, allowing the gain to both increase and decrease and yielding a less aggressive control action than the monotonic strategy. For both methods, the positive invariance of the practical sliding mode region is established under the simultaneous presence of time-varying delay, matched and unmatched perturbations, and event-triggered control, with reaching instants independent of the estimate of the upper bound of the matched perturbation. The event-triggering mechanism is formulated with an analytical guarantee of the absence of Zeno behavior, and certification of the maximum admissible delay is carried out via bisection decoupled from the control design. An upper bound for the triggering threshold is further derived, for each method, as a function of the robust passivity coefficient, establishing an energy-based link between the triggering mechanism and the closed-loop dissipativity, while this same coefficient bounds the impact of the unmatched perturbation on the output. The results are validated through computational simulations that demonstrate the effectiveness and comparative advantages of the proposed methods over existing approaches in the literature.

Key-words: Adaptive Control; Dissipative Systems; Event-Triggered Control; Fuzzy Sliding Mode Control; Time-Delay Systems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Diagrama de blocos geral de um sistema chaveado.	45
Figura 2 – Método de Filippov.	55
Figura 3 – Método de Controle Equivalente.	58
Figura 4 – Evolução da variável deslizante: (a) trajetória de estados $\mathbf{x}(t)$ convergindo para a região de modos deslizantes; (b) detalhe do fenômeno de <i>chattering</i>	64
Figura 5 – Resultados temporais: (a) trajetória do estado $x_1(t)$; (b) trajetória do estado $x_2(t)$; (c) entrada de controle $u(t)$	64
Figura 6 – Comportamento assintótico das funções de barreira. Em ambos os casos, $K_b(s(t)) \rightarrow +\infty$ quando $ s(t) \rightarrow \gamma^-$, garantindo a invariância positiva do domínio $\mathcal{D}$. A função positiva definida K_b satisfaz $K_b(0) = \bar{F}$, enquanto a positiva semidefinida K_b satisfaz $K_b(0) = 0$, permitindo que o ganho decresça a zero quando $s(t) \rightarrow 0$	69
Figura 7 – Trajetórias das variáveis deslizantes $s^{M1}(t)$ e $s^{M2}(t)$. O detalhe ampliado evidencia o confinamento estrito de ambas as trajetórias dentro de $ s(t) \leq 0,0084$, raio comum às duas regiões de modos deslizantes prático.	137
Figura 8 – Trajetórias de estado $x_1^{M1}(t)$ e $x_1^{M2}(t)$	137
Figura 9 – Trajetórias de estado $x_2^{M1}(t)$ e $x_2^{M2}(t)$	138
Figura 10 – Trajetórias de estado no plano de fase (x_1, x_2) , com as respectivas regiões de modos deslizantes prático $\bar{\mathcal{S}}^{M1}$ e $\bar{\mathcal{S}}^{M2}$, ambas com limite superior igual a 0,0084, e o ponto inicial $\mathbf{x}_0 = [0,1 \quad -0,1]^\top$. O detalhe ampliado exhibe o confinamento das trajetórias dentro do modo deslizante prático.	138
Figura 11 – Evolução temporal das entradas de controle $u^{M1}(t)$ e $u^{M2}(t)$	139
Figura 12 – Evolução temporal do ganho de chaveamento adaptativo $K^{M1}(t)$	139
Figura 13 – Evolução temporal do ganho de chaveamento adaptativo $K^{M2}(t_k)$	140
Figura 14 – Tempo entre eventos T_k^{M1} . A linha tracejada indica o valor médio, $\bar{T}_k^{M1} = 0,0070$ s.	140
Figura 15 – Tempo entre eventos T_k^{M2} . A linha tracejada indica o valor médio, $\bar{T}_k^{M2} = 0,0310$ s.	141

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Comparação entre os trabalhos mais próximos da proposta desta tese.	23
Tabela 2	– Varredura no coeficiente de passividade robusta η : limiares teóricos e adotados, métricas de acionamento por eventos (número de eventos N_{ev} e tempo médio entre eventos $\bar{T}_k$), energias de estado e controle (E_x , E_u), tempo de alcance t_1 à região de modos deslizantes prático, e redução percentual do Método 2 em relação ao Método 1 (ΔN_{ev} , ΔE_u , ΔE_x), para cada valor de η testado. As linhas $\tilde{\Phi}_{M1}^*$ e δ_{M2}^* correspondem aos limites superiores analíticos dos limiares de acionamento (Corolários 3.13 e 3.14); $\tilde{\Phi}_{M1}$ e δ_{M2} são os valores efetivamente adotados na simulação.	135
Tabela 3	– Varredura no atraso de projeto τ_M (com η mantido igual a 0,3): atraso máximo admissível certificado τ_M^* e margem percentual em relação ao atraso de projeto, limiares teóricos e adotados pelo Método 1 e Método 2 ($\tilde{\Phi}_{M1}^*$, $\tilde{\Phi}_{M1}$, δ_{M2}^* , δ_{M2}), métricas de acionamento por eventos (número de eventos N_{ev} e tempo médio entre eventos $\bar{T}_k$), energias de estado e controle (E_x , E_u), e tempo de alcance t_1 à região de modos deslizantes prático, para cada atraso de projeto τ_M testado.	136
Tabela 4	– Comparação de métricas entre o Método 1, o Método 2 e Li <i>et al.</i> (2016) no cenário do Exemplo 1 (LI et al., 2016a): mesmo sistema e condição inicial $\mathbf{x}_0 = [0, 2 \ -0, 1]^\top$, sem atraso e sem perturbação casada e não casada. . . .	142
Tabela 5	– Comparação de métricas entre o Método 1, o Método 2 e Li <i>et al.</i> (2016), sob a adição do atraso variante e perturbações casada e não casada.	143
Tabela 6	– Comparação de métricas entre o Método 1, o Método 2 e Su <i>et al.</i> (2019) no primeiro cenário, com atraso de rede e acionamento por eventos comuns aos três métodos e ausência de perturbação não casada.	146
Tabela 7	– Comparação de métricas entre o Método 1, o Método 2 e Su <i>et al.</i> (2019), sob a adição de perturbação não casada.	147

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>FOU</i>	<i>Footprint of Uncertainty</i> - Região de Incerteza.
<i>ISS</i>	<i>Input-to-State Stability</i> - Estabilidade Entrada-Estado.
<i>LMF</i>	<i>Lower Membership Function</i> - Função de Pertinência Inferior.
<i>LMI</i>	<i>Linear Matrix Inequality</i> - Desigualdade Matricial Linear.
<i>SMC</i>	<i>Sliding Mode Control</i> - Controle por Modos Deslizantes.
T-S	Takagi–Sugeno.
<i>UMF</i>	<i>Upper Membership Function</i> - Função de Pertinência Superior.
<i>UUB</i>	<i>Uniform Ultimate Boundedness</i> - Limitação Uniforme e Final.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \dots$	Representam matrizes.
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \dots$	Representam vetores.
$a, b, \alpha, \beta, \dots$	Representam escalares.
$\mathbf{P}^\top$	Transposta da matriz $\mathbf{P}$.
$\mathbf{P}^{-1}$	Inversa da matriz $\mathbf{P}$.
$\text{He}(\mathbf{P})$	denota a soma matricial $\mathbf{P} + \mathbf{P}^\top$.
$\mathbf{I}$	Matriz identidade.
$\mathbf{0}$	Matriz nula.
$\mathbf{P} \prec \mathbf{0}$	Matriz $\mathbf{P}$ simétrica negativa definida.
$\mathbf{P} \succ \mathbf{0}$	Matriz $\mathbf{P}$ simétrica positiva definida.
$\mathbf{P} \preceq \mathbf{0}$	Matriz $\mathbf{P}$ simétrica semipositiva definida.
$\mathbf{P} \preceq \mathbf{0}$	Matriz $\mathbf{P}$ simétrica seminegativa definida.
$\mathbb{Z}_{>0}$	Conjunto dos números inteiros positivos.
$\mathbb{Z}_{\geq 0}$	Conjunto dos números inteiros não negativos.
$\mathbb{R}_{>0}$	Conjunto dos números reais positivos.
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	Conjunto dos números reais não negativos.
$\mathbb{R}^n$	Espaço vetorial de dimensão n com entradas reais.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Espaço das matrizes reais de dimensão $n \times m$ com entradas reais.
$\ \mathbf{p}\ $	Norma euclidiana de um vetor $\mathbf{p}$.
$\ \mathbf{P}\ $	Norma euclidiana matricial induzida de uma matriz $\mathbf{P}$.
$\mathcal{L}_2$	Espaço das funções $\mathbf{f}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ quadraticamente integráveis, com $\ \mathbf{f}\ _{\mathcal{L}_2} = \left(\int_0^\infty \mathbf{f}^\top(t) \mathbf{f}(t) dt \right)^{1/2} < \infty$.
$\sup$	Supremo de um conjunto.
$\inf$	Ínfimo de um conjunto.

$\mathcal{C}$	Espaço funcional de funções contínuas.
$\mathcal{C}^1$	Espaço funcional de funções continuamente diferenciáveis.
$\mathcal{K}$	Classe de funções contínuas $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$, para algum $a > 0$, estritamente crescentes e tais que $\alpha(0) = 0$.
$\mathcal{K}_\infty$	Classe de funções contínuas $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, estritamente crescentes, com $\alpha(0) = 0$ e $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$.
$\partial \mathcal{D}$	Fronteira do conjunto $\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{R} : s \leq \varepsilon\}$, dada por $\partial \mathcal{D} = \{s \in \mathbb{R} : s = \varepsilon\}$.

SUMÁRIO

1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	17
1.1	Introdução	17
1.2	Motivação e Relevância	20
1.3	Objetivos da Pesquisa	25
1.3.1	Objetivo Geral	25
1.3.2	Objetivos Específicos	25
1.4	Contribuições	26
1.5	Produção Bibliográfica	27
1.6	Organização da Tese	28
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	31
2.1	Fundamentos de Controle Baseado em Sistemas <i>Fuzzy</i> T–S Tipo-2 Inter- valares	31
2.1.1	Projeto de Controle Baseado em Sistema <i>Fuzzy</i> T–S Tipo-2 Intervalar	33
2.1.1.1	<i>Sistema Nebuloso T–S Tipo-2 Intervalar</i>	33
2.1.1.2	<i>Projeto de Controle Fuzzy T–S Tipo-2 Intervalar</i>	34
2.1.1.3	<i>Estabilização do Sistema Fuzzy T–S Tipo-2 Intervalar</i>	35
2.2	Fundamentos de Sistemas com Atraso de Tempo	37
2.2.1	Classificação das Equações Diferenciais com Atraso de Tempo no Estado . .	37
2.2.1.1	<i>Classificação quanto à Estrutura do Lado Direito da Equação Diferencial com Atraso de Tempo no Estado</i>	38
2.2.2	Classificação quanto ao Tipo de Atraso de Tempo no Estado	38
2.2.2.1	<i>Classificação quanto ao Número de Atrasos</i>	38
2.2.3	Análise de Estabilidade Baseada em Lyapunov	39
2.2.4	Abordagem de Lyapunov–Krasovskii	40
2.2.4.1	<i>Exemplo: Sistema Não Linear com Atraso de Tempo</i>	41
2.2.5	Condições de Estabilidade Independentes de Atraso	41
2.2.6	Condições de Estabilidade Dependentes de Atraso	42
2.3	Fundamentos de Sistemas Chaveados	44
2.3.1	Classificação das Funções de Chaveamento	46
2.3.1.1	<i>Função de Chaveamento Estritamente Dependente do Tempo</i>	47
2.3.1.2	<i>Função de Chaveamento Orientada pelo Tempo</i>	47
2.3.1.3	<i>Função de Chaveamento Orientada por Eventos</i>	47
2.3.1.4	<i>Função de Chaveamento por Realimentação Pura de Estado (ou Saída) . . .</i>	48
2.3.2	Boa Definição de uma Função de Chaveamento	49

2.3.3	Boa Posição de um Sistema Chaveado	50
2.3.4	Sequência de Chaveamento	51
2.3.5	Solução de Sistemas Lineares Chaveados	51
2.4	Fundamentos de Controle por Modos Deslizantes	52
2.4.1	Dinâmica de Modo Deslizante pelo Método de Filippov	54
2.4.2	Dinâmica de Modo Deslizante pelo Método de Controle Equivalente	57
2.4.3	Projeto de Controle por Modos Deslizantes de Primeira Ordem	58
2.4.3.1	<i>Projeto da Região de Modos Deslizantes</i>	<i>59</i>
2.4.3.2	<i>Projeto da Função de Controle por Modos Deslizantes</i>	<i>61</i>
2.4.4	O Fenômeno do <i>Chattering</i>	62
2.4.5	Exemplo: Projeto de Controle de um Sistema Duplo Integrador	63
2.5	Fundamentos de Controle por Modos Deslizantes Adaptativo	64
2.5.1	Formulação do Problema de Adaptação	65
2.5.2	Adaptação por Crescimento Monotônico	66
2.5.3	Adaptação de Dupla Camada	66
2.5.4	Adaptação Baseada em Função de Barreira	67
2.6	Fundamentos de Controle por Modos Deslizantes Acionado por Eventos 70	
2.6.1	Estratégias de Monitoração	71
2.6.2	Condição de Acionamento por Eventos	71
2.6.3	Comportamento Zeno	74
2.6.4	Exemplo: Projeto de Controle Acionado por Eventos	75
2.6.5	Controle por Modos Deslizantes Acionado por Eventos	76
2.6.5.1	<i>Formulação do Problema</i>	<i>77</i>
2.6.5.2	<i>Projeto de Controle por Modos Deslizantes Acionado por Eventos</i>	<i>78</i>
2.6.5.3	<i>Estabilidade Prática do Sistema na Região de Modos Deslizantes Prático . .</i>	<i>79</i>
2.6.5.4	<i>Garantia de Ausência do Comportamento Zeno</i>	<i>81</i>
2.7	Fundamentos da Teoria de Dissipatividade e Passividade	82
2.7.1	Sistemas Dissipativos	82
2.7.1.1	<i>Funções de Armazenamento</i>	<i>85</i>
2.7.2	Sistemas Passivos	86
2.7.2.1	<i>Sistemas Robustamente Passivos</i>	<i>87</i>
3	DESCRIÇÃO DOS MÉTODOS DE CONTROLE PROPOSTOS	90
3.1	Formulação do Problema de Controle	90
3.2	Método de Controle 1	94
3.2.1	Convergência das Trajetórias de Estado para a Região de Modos Deslizantes Prático	94
3.2.2	Ausência do Comportamento Zeno	101
3.2.3	Estabilização Prática e Passividade Robusta	102
3.3	Método de Controle 2	115

3.3.1	Convergência das Trajetórias de Estado para a Região de Modos Deslizantes Prático	115
3.3.2	Ausência do Comportamento Zeno	123
3.3.3	Estabilização Prática e Passividade Robusta	124
3.4	Vínculo Energético entre os Limiares de Acionamento e o Coeficiente de Passividade Robusta	127
3.4.1	Passo 1: Limite Inferior para a Taxa de Suprimento	127
3.4.2	Passo 2: Condição Algébrica entre $\phi_{\max}$ e η	128
3.4.3	Passo 3: Vínculo Analítico entre $\phi_{\max}$ e η	129
3.4.4	Limites de Projeto para Cada Método de Controle	129
4	RESULTADOS COMPUTACIONAIS	132
4.1	Comparação de Desempenho entre os Métodos Propostos	132
4.1.1	Descrição do Sistema e Parâmetros de Simulação	132
4.1.2	Resultados de Simulação	133
4.2	Comparação de Desempenho entre os Métodos Propostos e a Literatura	141
4.2.1	Comparação com Li <i>et al.</i> (2016)	141
4.2.1.1	<i>Primeiro Cenário</i>	142
4.2.1.2	<i>Segundo Cenário</i>	143
4.2.2	Comparação com Su <i>et al.</i> (2019)	145
4.2.2.1	<i>Primeiro Cenário</i>	145
4.2.2.2	<i>Segundo Cenário</i>	146
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	149
5.1	Conclusão	149
5.2	Limitações do Trabalho	150
5.3	Trabalhos Futuros	151
	REFERÊNCIAS	154

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este capítulo apresenta as considerações iniciais que fundamentam e contextualizam a pesquisa desenvolvida nesta tese. Inicialmente, a Seção 1.1 situa o problema no contexto da literatura, identificando as lacunas científicas que motivam o trabalho. A Seção 1.2 aprofunda a relevância das complexidades consideradas, evidencia por que sua ocorrência simultânea constitui um problema ainda sem solução unificada, enuncia o problema de pesquisa e delimita as hipóteses de trabalho adotadas. Os objetivos geral e específicos são apresentados na Seção 1.3. As contribuições originais são detalhadas na Seção 1.4. A Seção 1.5 lista a produção bibliográfica resultante do trabalho, e a Seção 1.6 descreve a organização dos capítulos subsequentes.

1.1 Introdução

Sistemas dinâmicos não lineares estão presentes em uma ampla gama de aplicações práticas de engenharia, como robótica, sistemas de energia, veículos autônomos e processos industriais (ISIDORI, 1985). A complexidade inerente a esses sistemas impõe desafios tanto para a análise de sua dinâmica quanto para o projeto de controle que garantam estabilidade e desempenho desejados (KHALIL, 2002). Uma abordagem consolidada para tratar essa complexidade consiste em aproximar a dinâmica não linear por uma combinação convexa de sistemas lineares locais, ponderada por graus de pertinência, princípio que fundamenta os sistemas *fuzzy* Takagi–Sugeno (T–S). Esses sistemas possuem a mesma estrutura de sistemas politópicos variantes no tempo e, por isso, herdam todo o desenvolvimento matemático de análise e projeto de controle na forma de desigualdade matricial linear (*Linear Matrix Inequality – LMI*), com tratabilidade computacional bem estabelecida (SALA, 2009; MOZELLI; SOUZA; PALHARES, 2011; LEE et al., 2023).

Os sistemas *fuzzy* T–S tipo-1 assumem que os graus de pertinência que ponderam a dinâmica de cada sistema local linear são valores precisos no intervalo $[0, 1]$, o que os torna suscetíveis a incertezas associadas à definição das próprias funções de pertinência. Essa limitação motivou o desenvolvimento dos sistemas *fuzzy* T–S tipo-2 intervalares, nos quais os graus de pertinência passam a pertencer a um intervalo delimitado por graus de pertinência inferior e superior (MENDEL et al., 2014; NAMADCHIAN et al., 2023). Com isso, incorpora-se à modelagem uma camada adicional de representação da incerteza para análise e projeto de controle, tornando essa classe de sistemas *fuzzy* T–S mais adequada a situações em que há imprecisão na definição da fronteira dos conjuntos *fuzzy* (JAHANSHAH et al., 2026). Por manterem a estrutura politópica variante no tempo dos sistemas *fuzzy* T–S tipo-1, os sistemas *fuzzy* T–S tipo-2 intervalares permitem que os resultados de análise e projeto de controle baseados em *LMIs* sejam diretamente estendidos a essa classe de sistemas dinâmicos, sem perda de tratabilidade computacional (CHEN; TAN, 2013; DELMOTTE; GUERRA; KSANTINI,

2007; BERNAL et al., 2022). Essa classe de sistemas tem sido aplicada a problemas de controle por realimentação de saída sob saturação (XIE et al., 2022), controle de sistemas multiagentes (WANG et al., 2021) e controle de sistemas de energia (HAMDAN; YOUSSEF; NOURELDEEN, 2023), entre outros.

No mundo real, a dinâmica dos sistemas raramente depende apenas de variáveis que evoluem de forma instantânea. Atrasos de tempo estão presentes em praticamente toda aplicação real, decorrendo de canais de comunicação, de processos de aquisição e processamento de dados, da dinâmica intrínseca de atuadores e sensores, ou de propriedades físicas, químicas ou biológicas inerentes ao próprio sistema (FRIDMAN, 2014; PARK; KWON; PARK, 2022; LIU et al., 2025a). Tais sistemas pertencem à classe de sistemas de dimensão infinita, uma vez que sua descrição no espaço de estados requer não apenas o estado instantâneo atual, mas todo um segmento de trajetória de estado definido em um espaço funcional (FRIDMAN, 2014). Essa característica impede a aplicação direta das abordagens clássicas de análise e de projeto de controle, formuladas estritamente para sistemas de dimensão finita (PARK; KWON; PARK, 2022; LIU et al., 2025a). Quando associados a sistemas *fuzzy* T–S tipo-2 intervalares, os atrasos de tempo degradam o desempenho e a estabilidade, exigindo formulações matemáticas substancialmente mais complexas (KHARITONOV, 2012). Nesse contexto, condições de análise e de projeto que incorporam informações sobre os graus de pertinência e o atraso de tempo têm sido propostas para mitigar o conservadorismo dos resultados (SHARMILA; RAKKIYAPPAN, 2022), expandindo a região de factibilidade das *LMI*s resultantes e maximizando o atraso máximo admissível (GASSARA et al., 2018; SOUZA; MOZELLI; PALHARES, 2009). Ademais, atrasos variantes no tempo requerem tratamentos substancialmente distintos daqueles dispensados a atrasos constantes, apresentando desafios analíticos significativamente maiores (FENG; YANG; LAM, 2023; ZHANG; HAN; GE, 2020; LV et al., 2025; EFIMOV et al., 2016).

Diante desse cenário, projetar leis de controle capazes de garantir robustez frente a incertezas paramétricas, perturbações externas e atrasos de tempo constitui um dos desafios centrais da teoria de controle (IOANNOU; SUN, 1996; ZHOU; DOYLE, 1998). Dentre os métodos desenvolvidos para essa finalidade, destaca-se o controle por modos deslizantes (*Sliding Mode Control* – *SMC*) (UTKIN, 1992; SHTESSEL et al., 2014). Essa abordagem fundamenta-se em uma ação de controle chaveada que força as trajetórias de estado a alcançarem, em tempo finito, uma região de chaveamento projetada do espaço de estados, denominada região de modos deslizantes, na qual permanecem confinadas (CRUZ-ZAVALA; MORENO, 2017; RUDERMAN et al., 2026). Uma vez atingido esse regime, o sistema exhibe insensibilidade a perturbações casadas e passa a ser governado por uma dinâmica de ordem reduzida (DRAŽENović, 1969; UTKIN, 1992; SHTESSEL et al., 2014). Tais propriedades tornam o controle por modos deslizantes uma estratégia de controle não linear robusto e atrativa para o contexto de sistemas *fuzzy* T–S tipo-2 intervalares sujeitos a atrasos variantes no tempo (NGUYEN; BUI et al., 2025; VIDAL-MARTÍNEZ et al., 2025; WANG et al., 2025). Essa robustez, contudo, depende de hipóteses de implementação que raramente são satisfeitas na prática. Seja em simulações computacionais, devido aos erros de

integração numérica, ou em sistemas físicos, em razão da presença de dinâmicas não modeladas, incertezas e perturbações, as trajetórias de estado ficam confinadas em uma vizinhança da região de modos deslizantes ideal, denominada região de modos deslizantes prático, em vez de atingi-la e nela permanecer exatamente (FRIDMAN, 2007; RUDERMAN et al., 2026; LEVANT, 2010).

Quando o sistema é simultaneamente submetido a perturbações casadas com limite superior desconhecido (visto que o ganho de chaveamento deve superar esse limite para garantir o alcance, mas, por não ser conhecido a priori, impede a determinação prévia do ganho antes da execução do controlador (UTKIN; POZNYAK, 2013; OBEID; LAGHROUCHE; FRIDMAN, 2021; OVALLE et al., 2026)), a perturbações não casadas, cujos efeitos persistem em regime de modo deslizante por atuarem fora do espaço vetorial gerado pela matriz de entrada (YAN; SPURGEON; EDWARDS, 2005; YANG; LI; YU, 2012; ZHOU et al., 2023; ZHAO; LI; SONG, 2021; ZHANG; SHI; XIA, 2010; SUN et al., 2024; FERRARA; INCREMONA; VECCHIO, 2023; BOO; CHWA, 2023), o projeto de controle torna-se substancialmente mais complexo. A ocorrência simultânea dessas complexidades em sistemas *fuzzy* T-S tipo-2 intervalares impõe restrições adicionais à síntese de controle, dificultando a certificação analítica da estabilidade prática e da rejeição de perturbações em malha fechada.

No projeto de controle por modos deslizantes, assume-se tradicionalmente uma atualização contínua da entrada de controle, premissa que se torna computacionalmente onerosa e, por vezes, inviável em sistemas digitais e em rede (BEHERA et al., 2021). O controle acionado por eventos supera essa limitação ao condicionar a atualização da entrada a uma condição de acionamento definida em função do erro de acionamento, atualizando a entrada de controle apenas quando estritamente necessário (MAZO; TABUADA, 2008; TABUADA, 2007), com impacto direto na redução do consumo de recursos computacionais, de comunicação e de energia (HEEMELS; JOHANSSON; TABUADA, 2012; PAN; WU; LAM, 2022; SONG et al., 2023b; SHI et al., 2023). Na literatura, o limiar é tipicamente de forma proporcional à trajetórias de estado do sistema (TABUADA, 2007), de forma combinada com um termo absoluto para mitigar o comportamento Zeno (HEEMELS; JOHANSSON; TABUADA, 2012), ou de forma dinâmica que introduz uma variável auxiliar no limiar para reduzir a frequência de acionamentos (GIRARD, 2014). A escolha do limiar não é trivial: valores excessivamente pequenos aumentam a frequência de acionamentos, aproximando o comportamento do sistema ao da atualização contínua e comprometendo o desempenho do mecanismo de acionamento por eventos, e consequente, as vantagens da abordagem de controle acionado por eventos (HEEMELS; JOHANSSON; TABUADA, 2012; TABUADA, 2007); valores excessivamente grandes reduzem a frequência de acionamentos, mas ampliam os termos residuais introduzidos na derivada do funcional de Lyapunov–Krasovskii, comprometendo o desempenho do sistema na região de modos deslizantes prático (BEHERA; BANDYOPADHYAY, 2016b; MONDAL; BEHERA, 2023).

A teoria da dissipatividade surge como a abordagem capaz de responder a essa questão, ao formalizar um vínculo energético entre o mecanismo de acionamento por eventos e a dissipa-

tividade sistema em malha fechada. Introduzida originalmente por J. C. Willems (WILLEMS, 1972a; WILLEMS, 1972b; SCHAFT, 2022), essa teoria caracteriza o comportamento de sistemas dinâmicos por meio de seu balanço energético, estabelecendo condições sob as quais a energia armazenada pelo sistema é limitada pela energia fornecida externamente (WILLEMS; TAKABA, 2007). Como um caso particular, a passividade impõe que a taxa de variação da energia armazenada nunca excede a potência fornecida externamente (HILL; LIU, 2022). A extensão para a passividade robusta incorpora explicitamente a influência das perturbações não casadas nesse balanço energético, quantificando, por meio de um coeficiente de passividade robusta, a margem de dissipação disponível do sistema frente à energia dessas perturbações (WU; ZHENG, 2009; GAO; SUN; LU, 2011; FUJIMOTO et al., 2021; CHE et al., 2019). É justamente a presença explícita desse coeficiente na condição de passividade robusta que permite, por um lado, derivar analiticamente um limite superior para limiar máximo em função do coeficiente de passividade robusta, estabelecendo um vínculo energético entre o mecanismo de acionamento por eventos e o comportamento dissipativo do sistema em malha fechada; e, por outro, limitar o impacto da perturbação não casada na saída do sistema pelo próprio coeficiente (WU; ZHENG, 2009).

É nesse cenário que se insere esta tese. A combinação de sistemas *fuzzy* T–S tipo-2 intervalares, atraso de tempo variante, perturbações casadas com limite superior desconhecido, perturbações não casadas, controle por modos deslizantes adaptativo acionado por eventos e garantia de passividade robusta configura um problema de elevada complexidade teórica, para o qual ainda não há solução unificada na literatura. O desafio central que motiva esta tese consiste em garantir, de forma simultânea e com fundamentação energética rigorosa, a estabilidade do sistema em malha fechada na presença de atraso de tempo variante e a robustez frente às perturbações, sem recorrer a condições excessivamente conservadoras. Diante disso, o problema de pesquisa investigado pode ser formulado da seguinte forma: *para a classe de sistemas fuzzy T–S tipo-2 intervalares sujeitos a atrasos de tempo variantes no estado, perturbações casadas com limite superior desconhecido e perturbações não casadas, é possível projetar um controlador por modos deslizantes adaptativo acionado por eventos capaz de garantir a estabilidade prática do sistema e a convergência em tempo finito das trajetórias de estado para a região de modos deslizantes prático, estabelecendo, por meio de um limite superior para o limiar de acionamento como função do coeficiente de passividade robusta prescrito, um vínculo energético analítico entre o mecanismo de acionamento por eventos e o comportamento dissipativo do sistema em malha fechada, além de assegurar, por esse mesmo coeficiente, um limite energético para a influência da perturbação não casada sobre a saída?*

1.2 Motivação e Relevância

Sistemas de controle em aplicações reais raramente operam em condições ideais. Em sistemas robóticos, a dinâmica de elos flexíveis e a variação de inércia ao longo da trajetória exigem que o controlador lide com uma diversidade de condições operacionais sem perda de

desempenho (SLOTINE, 1985; KHAN et al., 2022). Em sistemas de energia, oscilações de carga alteram continuamente o regime de operação (HAMDAN; YOUSSEF; NOURELDEEN, 2023; ARRIFANO et al., 2007; HUERTA; LOUKIANOV; CAÑEDO, 2018). Em veículos autônomos e sistemas de controle conectados em rede, atrasos de comunicação variantes e incertezas de modelagem impõem restrições severas ao projeto de controle (FRIDMAN, 2014; LV et al., 2025; KHANESAR et al., 2014). Em todos esses casos, o modelo matemático disponível é apenas uma aproximação do sistema real: parâmetros variam, perturbações estão presentes e há informação incompleta sobre os limites dessas variações (ZHOU et al., 2023). A ocorrência simultânea dessas complexidades em sistemas de controle por modo deslizante para modelos *fuzzy* T-S tipo-2 intervalares impõe desafios significativos ao projeto do controlador, comprometendo a qualidade do regime de modo deslizante prático e a capacidade de rejeição de perturbações em malha fechada (MARTÍNEZ-FUENTES; PÉREZ-VENTURA; FRIDMAN, 2021; FRIDMAN, 2002; BOIKO et al., 2007).

As abordagens existentes tratam essas fontes de dificuldade de forma fragmentada. Quanto ao tratamento do ganho de chaveamento na ausência do conhecimento do limite superior da perturbação casada, duas famílias de estratégias adaptativas foram propostas na literatura. A primeira baseia-se na estimação da perturbação via controle equivalente (LEE; UTKIN, 2007; UTKIN; POZNYAK, 2013), exigindo o uso de um filtro passa-baixas e, tipicamente, o conhecimento do limite superior da perturbação para o projeto do filtro. A segunda família baseia-se na adaptação do ganho de chaveamento sem estimação direta da perturbação (HUANG; KUO; CHANG, 2008; PLESTAN et al., 2010; OBEID et al., 2018): a adaptação por crescimento monotônico (INCREMONA; CUCUZZELLA; FERRARA, 2016), formulação original dessa família, resulta em sobrestimação persistente do ganho sem garantia de convergência das trajetórias a uma vizinhança da região de modos deslizantes; a adaptação de dupla camada (PLESTAN et al., 2010) introduz uma estratégia de decrescimento nessa vizinhança, mas sem assegurar de forma construtiva que sua fronteira nunca será cruzada; e a adaptação baseada em função de barreira (OBEID et al., 2018; RODRIGUES et al., 2022) permite tanto o crescimento quanto o decrescimento do ganho nessa vizinhança, assegurando construtivamente sua invariância positiva e realizando uma sobrestimação controlada do ganho. Contudo, nenhuma dessas estratégias havia sido estendida a sistemas *fuzzy* T-S tipo-2 intervalares sujeitos simultaneamente a atraso de tempo variante e a perturbações não casadas, tampouco articulada com garantias de passividade robusta (NORONHA; SERRA, 2026a), e a hipótese restritiva de matrizes de entrada idênticas entre os sistemas locais, adotada na maioria dos trabalhos da literatura, impõe uma restrição estrutural raramente satisfeita na prática.

A teoria de sistemas *fuzzy* trata a presença de incertezas nas funções de pertinência por meio, por exemplo, da classe de sistemas *fuzzy* T-S tipo-2 intervalares (MENDEL et al., 2014; NAMADCHIAN et al., 2023; JOHN; MENDEL, 2023), na qual os graus de pertinência pertencem a intervalos delimitados por limites inferior e superior conhecidos, tornando o controlador robusto a toda variação dentro desse intervalo. Contudo, essa classe ainda não havia

sido considerada simultaneamente com perturbações casadas com limite superior desconhecido, perturbações não casadas, atraso de tempo variante e acionamento por eventos num mesmo procedimento de projeto.

No que diz respeito ao atraso de tempo variante, as condições de estabilidade disponíveis na literatura tornam-se progressivamente menos conservadoras (ZHANG et al., 2017; ZHANG; HAN; GE, 2020), mas poucos trabalhos obtêm o atraso máximo admissível sem recorrer a um procedimento de *co-design* que acopla a síntese de controle à certificação do atraso máximo admissível, aumentando a complexidade computacional e o conservadorismo das *LMIs* resultantes (ZHAO; ZHAO, 2025). Entre as exceções, (NORONHA; SERRA, 2026b) certifica o atraso máximo admissível de forma desacoplada da síntese de controle, porém para sistemas *fuzzy* T-S tipo-2 sem adaptação por função de barreira, sem tratamento de perturbações não casadas e sem passividade robusta.

Quanto ao acionamento por eventos, embora a literatura de sistemas de controle em rede já tenha explorado o vínculo entre o mecanismo de acionamento e propriedades dissipativas do sistema (YU; ANTSAKLIS, 2011; RAHNAMA; XIA; ANTSAKLIS, 2016; DONKERS; HEEMELS, 2012), e embora a limitação do impacto de perturbações não casadas na saída por meio de passividade robusta seja um resultado consolidado (GAO; SUN; LU, 2011; MADEIRA, 2021), nenhum desses resultados foi desenvolvido no contexto do controle por modos deslizantes adaptativo para sistemas *fuzzy* T-S tipo-2 intervalares com matrizes de entrada distintas entre os sistemas locais, sujeitos simultaneamente a atraso de tempo variante, perturbações casadas com limite superior desconhecido, perturbações não casadas e acionamento por eventos com limiar definido por meio de uma relação analítica com o comportamento dissipativo do sistema.

Nenhum trabalho da literatura reúne, sob um único procedimento de projeto, o tratamento simultâneo dessas complexidades em uma formulação matemática unificada, o que caracteriza a lacuna central que esta tese se propõe a preencher. Para tanto, são propostos dois métodos de controle, denominados Método 1 e Método 2, que compartilham a mesma estrutura de estabilização prática e passividade robusta desenvolvida nesta tese, mas empregam, respectivamente, a adaptação do ganho de chaveamento por crescimento monotônico e por função de barreira, estendendo ambas as famílias à classe de sistemas *fuzzy* T-S tipo-2 intervalares sob as demais complexidades consideradas. A Tabela 1 evidencia essa lacuna ao comparar os trabalhos mais próximos da literatura. Nenhum deles reúne simultaneamente: modelo *fuzzy* T-S tipo-2 intervalar com matrizes de entrada distintas entre os sistemas locais; atraso variante com maximização do atraso admissível sem *co-design*; controle por modos deslizantes adaptativo por crescimento monotônico e por função de barreira para perturbações casadas com limite superior desconhecido; perturbações não casadas com limitação do impacto na saída pelo coeficiente de passividade robusta; acionamento por eventos com garantia analítica da ausência do comportamento Zeno; e passividade robusta como critério de vínculo energético entre o mecanismo de acionamento e a dissipação do sistema em malha fechada, ao estabelecer um limite superior para o limiar de

acionamento em função do coeficiente de passividade robusta. Ainda que a combinação entre acionamento por eventos e passividade já tenha sido explorada em sistemas de controle em rede genéricos (DONKERS; HEEMELS, 2012; RAHNAMA; XIA; ANTSAKLIS, 2016), essa abordagem não havia sido, até o presente momento, integrada ao controle por modos deslizantes, tampouco aplicada à definição analítica do limiar de acionamento em sistemas *fuzzy* T-S tipo-2 intervalares com atraso.

Tabela 1 – Comparação entre os trabalhos mais próximos da proposta desta tese.

Referência	Sistema fuzzy T-S tipo-2 intervalar	Matrizes de entrada distintas	Atraso variante	Máximo atraso admissível	SMC adapt. – crescimento monotônico	SMC adapt. – função de barreira	Perturbação não casada	Acionamento por eventos	Passividade robusta
(HUANG; KUO; CHANG, 2008)	×	×	×	×	✓	×	×	×	×
(PLESTAN et al., 2010)	×	×	×	×	✓	×	×	×	×
(GAO; SUN; LU, 2011)	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓
(SHTESEL; TALEB; PLESTAN, 2012)	×	×	×	×	✓	×	×	×	×
(DONKERS; HEEMELS, 2012)	×	×	×	×	×	×	×	✓	×
(INCREMONA; CUCUZZELLA; FERRARA, 2016)	×	×	×	×	✓	×	×	×	×
(LI et al., 2016a)	✓	×	×	×	×	×	×	×	×
(BEHERA; BANDYOPADHYAY, 2016b)	×	×	×	×	×	×	×	✓	×
(RAHNAMA; XIA; ANTSAKLIS, 2016)	×	×	×	×	×	×	×	✓	✓
(OBEID et al., 2018)	×	×	×	×	×	✓	×	×	×
(CHEN; PARK; XU, 2018)	✓	×	✓	×	×	×	×	×	×
(SU et al., 2019)	×	×	✓	×	×	×	×	✓	×
(WANG; FAN; SHI, 2020)	✓	×	×	×	×	×	×	✓	×
(MADEIRA, 2021)	×	×	×	×	×	×	×	×	✓
(ZHAO; LI; SONG, 2021)	×	×	×	×	×	×	✓	×	×
(PARK; KWON; PARK, 2022)	×	×	✓	✓	×	×	×	×	×
(CHOPRA et al., 2022)	×	×	×	×	×	×	×	×	✓
(RODRIGUES et al., 2022)	×	×	×	×	×	✓	×	×	×
(XIE et al., 2022)	✓	×	×	×	×	×	×	×	×
(YAO; LI; SHI, 2022)	×	×	×	×	✓	×	×	✓	×
(LIU et al., 2022)	✓	×	✓	×	×	×	✓	×	×
(KAVIKUMAR et al., 2022)	✓	×	✓	×	×	×	✓	×	×
(MOBAYEN et al., 2023)	×	×	×	×	×	✓	×	×	×
(MONDAL; BEHERA, 2023)	×	×	×	×	✓	×	×	✓	×
(SHI et al., 2023)	✓	×	✓	×	×	×	×	✓	×
(SHEN et al., 2023)	✓	×	×	×	×	×	×	✓	×
(ZHANG et al., 2024)	×	✓	×	×	×	×	×	×	×
(LIU et al., 2025b)	✓	×	✓	×	×	×	×	×	✓
(ZHAO; ZHAO, 2025)	✓	×	✓	✓	×	×	✓	×	×
(NORONHA; SERRA, 2026a)	✓	✓	×	×	✓	×	×	✓	×
(NORONHA; SERRA, 2026b)	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	✓	×
Esta tese	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Legenda: ✓ = presente; × = ausente.

A relevância desta tese pode ser aferida pelo que ela oferece aos pesquisadores e projetistas que lidam com a classe de sistemas considerada. No que diz respeito ao projeto de controle, torna-se possível certificar o atraso máximo admissível de forma desacoplada da síntese de controle, sem a necessidade de reformular as *LMI*s de projeto, ao estender o procedimento de

bisseção introduzido em (NORONHA; SERRA, 2026b) à classe de sistemas *fuzzy* T–S tipo-2 intervalares considerada. Essa abordagem dispensa o uso de estratégias de *co-design* (ZHAO; ZHAO, 2025), superando o acoplamento matemático inerente a tais métodos e eliminando a necessidade de técnicas iterativas de otimização ou estratégias de relaxação para viabilizar a solução do problema. Quanto à robustez a perturbações, o projetista passa a dispor de garantias analíticas que não exigem o conhecimento prévio do limite superior das perturbações casadas nem do perfil temporal das perturbações não casadas, propriedades que, até então, não estavam disponíveis de forma unificada para sistemas *fuzzy* T–S tipo-2 intervalares (OBEID et al., 2018; GAO; SUN; LU, 2011; MADEIRA, 2021).

No que se refere às estratégias de adaptação do ganho de chaveamento, o Método 1, cuja estratégia de adaptação é baseada em crescimento monotônico, oferece uma lei de adaptação simples, de fácil implementação e de baixo custo computacional, garantindo que o ganho de chaveamento converge para um valor fixo, em vez de crescer indefinidamente. Já o Método 2, cuja estratégia de adaptação é baseada em função de barreira, oferece um ganho de chaveamento mais próximo do estritamente necessário para manter as trajetórias na região de modos deslizantes prático, pois permite tanto o crescimento quanto o decrescimento do ganho, assegurando de forma construtiva que ele nunca ultrapassa um limite superior predefinido. Essa característica reduz o esforço de controle e o efeito de *chattering* associados a um ganho excessivamente elevado, tornando-o mais adequado a aplicações em que o consumo de energia ou o desgaste dos atuadores é uma preocupação relevante. Ao disponibilizar ambas as estratégias, esta tese permite escolher a adaptação mais adequada ao compromisso desejado entre simplicidade de projeto e eficiência no uso do esforço de controle, sem abrir mão das demais garantias analíticas desenvolvidas.

No que concerne ao acionamento por eventos, passa-se a dispor de um critério analítico para a escolha do limiar de acionamento baseado no comportamento dissipativo do sistema em malha fechada, em vez de recorrer a escolhas empíricas ou conservadoras (YU; ANTSAKLIS, 2011; RAHNAMA; XIA; ANTSAKLIS, 2016). Do ponto de vista da teoria de controle, esse vínculo energético é relevante pelo seguinte motivo: o acionamento por eventos introduz um erro de acionamento entre o estado medido no último instante de acionamento e o estado atual do sistema, e esse erro insere uma quantidade adicional de energia na malha fechada a cada intervalo entre acionamentos. Se o limiar de acionamento for escolhido de forma arbitrária, essa energia adicional pode superar a margem de dissipação garantida pela passividade robusta, comprometendo a estabilidade e a capacidade de atenuação energética das perturbações do sistema. Ao definir o limite superior do limiar como função do coeficiente de passividade robusta, a energia máxima introduzida pelo erro de acionamento fica delimitada por uma quantidade que a própria margem de dissipação do sistema é capaz de absorver, de modo que a dissipatividade é preservada por construção, mesmo com a lei de controle atualizada apenas quando um evento é gerado. Esse mesmo coeficiente assegura, adicionalmente, uma atenuação energética do efeito da perturbação não casada sobre a saída, de modo que a escolha do limiar de acionamento e a

robustez a essa perturbação passam a ser tratadas de forma unificada por um único parâmetro de projeto. Como a estabilização prática e a atenuação energética das perturbações não casadas nesta tese são obtidas justamente a partir da desigualdade de passividade robusta, garantir que o acionamento por eventos não viole essa desigualdade significa preservar, ao mesmo tempo, todas as propriedades que dela derivam. Isso possibilita reduzir a frequência de atualização da lei de controle, economizando recursos computacionais, de comunicação e de energia, sem abrir mão das garantias certificadas de estabilidade e de atenuação energética das perturbações. Esse resultado é particularmente relevante em aplicações com restrições de largura de banda e energia, nas quais a escolha inadequada do limiar compromete diretamente o desempenho do sistema.

A relevância prática estende-se diretamente às classes de sistemas mencionadas no início desta seção. Robôs com elos flexíveis estão sujeitos tanto a perturbações estruturadas com limite superior desconhecido quanto a perturbações não estruturadas não modeladas (KHAN et al., 2022). Sistemas de energia enfrentam incertezas paramétricas que se propagam como imprecisão nas funções de pertinência, além de perturbações não casadas oriundas de flutuações na rede (HAMDAN; YOUSSEF; NOURELDEEN, 2023; ARRIFANO et al., 2007; HUERTA; LOUKIANOV; CAÑEDO, 2018). Veículos autônomos e sistemas em rede operam sob atraso de comunicação variante e sob restrições de largura de banda e energia que tornam a atualização contínua da entrada de controle impraticável (FRIDMAN, 2014; HEEMELS; JOHANSSON; TABUADA, 2012; DONG et al., 2024; SHI et al., 2023). Em todos esses casos, a metodologia proposta oferece uma via de projeto com garantias analíticas de desempenho e eficiência no uso de recursos, sem abrir mão do rigor exigido por aplicações críticas.

1.3 Objetivos da Pesquisa

1.3.1 Objetivo Geral

Desenvolver metodologias de controle *fuzzy* T-S tipo-2 intervalar por modos deslizantes adaptativas, acionadas por eventos e com garantia de passividade robusta, para sistemas não lineares com atraso de tempo variante, com matrizes de entrada distintas entre os sistemas locais lineares e sujeitos a perturbações casadas com limite superior desconhecido e perturbações não casadas, de forma a garantir analiticamente a estabilidade prática do sistema em malha fechada, a ausência do comportamento Zeno e o estabelecimento de um vínculo energético analítico entre o mecanismo de acionamento por eventos e o comportamento dissipativo em malha fechada, ao limitar superiormente o limiar de acionamento em função do coeficiente de passividade robusta prescrito, além de assegurar a atenuação energética da influência da perturbação não casada na saída por esse mesmo coeficiente, com eficiência no uso de recursos computacionais, de comunicação e energéticos evidenciada por avaliação computacional.

1.3.2 Objetivos Específicos

Para o alcance do objetivo geral, estabelecem-se as seguintes metas específicas:

1. Propor um procedimento de projeto da região de modos deslizantes prático para sistemas *fuzzy* T–S tipo-2 intervalares com atraso de tempo variante, matrizes de entrada distintas entre os subsistemas locais e sujeitos a perturbações casadas e não casadas, sob controle por modos deslizantes acionado por eventos.
2. Desenvolver uma lei de controle adaptativo por modos deslizantes baseada em crescimento monotônico sem sobrestimação para sistemas *fuzzy* T–S tipo-2 intervalares.
3. Desenvolver uma lei de controle adaptativo por modos deslizantes baseada em função de barreira para sistemas *fuzzy* T–S tipo-2 intervalares.
4. Formular um mecanismo de acionamento por eventos com garantia analítica de ausência do comportamento Zeno na sequência de instantes de acionamento.
5. Desenvolver um procedimento pós-projeto desacoplado, por bisseção, para certificação do atraso máximo admissível, sem necessidade de *co-design*.
6. Incorporar a condição de passividade robusta ao procedimento de projeto, de modo a estabelecer um vínculo energético analítico entre o mecanismo de acionamento por eventos e o comportamento dissipativo do sistema em malha fechada por limitar superiormente o limiar de acionamento como função do coeficiente de passividade robusta, além de assegurar, por esse mesmo coeficiente, um limite energético para o impacto da perturbação não casada sobre a saída.

1.4 Contribuições

As contribuições originais desta tese são apresentadas a seguir.

1. Estabelecem-se, para a classe de sistemas *fuzzy* T–S tipo-2 intervalares considerada, com matrizes de entrada distintas entre os subsistemas locais, na região de modos deslizantes prático, condições de estabilização prática e de passividade robusta a partir da desigualdade de passividade robusta, com função de armazenamento dada por um funcional de Lyapunov–Krasovskii *fuzzy*, da qual se derivam condições na forma de *LMIs* dependentes do atraso máximo, dos limites superiores das taxas de variação do atraso e dos graus de pertinência, e do coeficiente de passividade robusta. A factibilidade dessas condições, além de determinar a matriz da variável deslizante, certifica a passividade robusta e fornece as variáveis de decisão necessárias à dedução das condições de estabilidade prática, cujo raio da região de estabilidade prática, para ambos os métodos, é determinado independentemente da estimativa do limite superior da perturbação casada, bem como o limite superior da região de modos deslizantes prático.
2. Desenvolve-se uma lei adaptativa baseada no crescimento monotônico do ganho de chaveamento, que dispensa o conhecimento do limite superior da perturbação casada para garantir

a convergência das trajetórias de estado para a região de modos deslizantes prático, com convergência forçada do ganho assim que as trajetórias atingem essa região. O instante de alcance é independente da estimativa do limite da referida perturbação.

3. Desenvolve-se uma lei adaptativa baseada em função de barreira para o ganho de chaveamento. A estratégia flexibiliza a condição de dominância desse ganho sobre o limite superior da perturbação casada por meio de uma região de relaxamento na qual a dominância não é imposta. Por permitir o crescimento e o decrescimento do ganho, a abordagem produz uma ação de controle menos agressiva dentro da região de modos deslizantes prático, em comparação ao mecanismo monotônico. O instante de alcance dessa região é igualmente independente da estimativa do limite superior da perturbação.
4. Estabelece-se a invariância positiva da região de modos deslizantes prático tanto para o método baseado em crescimento monotônico quanto para o caso com função de barreira, sob a presença simultânea de atraso variante no tempo, perturbações casadas e não casadas, e controle acionado por eventos.
5. Formula-se o mecanismo de acionamento por eventos, assegurando-se a ausência do comportamento de Zeno na sequência de instantes de acionamento.
6. Propõe-se um procedimento desacoplado para a certificação do atraso máximo admissível sem recorrer a estratégias de *co-design*, o que supera o acoplamento sintático entre o projeto de controle e a determinação da margem de atraso, dispensando rotinas iterativas de relaxação e permitindo avaliar o comportamento do sistema sem a necessidade de re-projetar o controle, fornecendo uma margem de robustez com respeito ao atraso de projeto.
7. Deriva-se analiticamente um limite superior para o limiar de acionamento, estabelecendo um vínculo energético explícito entre o mecanismo de eventos e a dissipatividade em malha fechada, além de assegurar, por esse mesmo coeficiente, a atenuação energética para o impacto da perturbação não casada sobre a saída.

1.5 Produção Bibliográfica

A seguir são apresentados os artigos publicados, aceitos e submetidos ao longo do desenvolvimento desta tese:

- NORONHA, R. P.; SERRA, G. L. de O. Estabilidade e estabilização robusta de sistemas positivos chaveados variantes no tempo na presença de atrasos na função de estados. In: *Congresso Brasileiro de Automática – CBA*. [S.l.: s.n.], 2022. v. 3, n. 1.

- NORONHA, R. P.; SERRA, G. L. de O. Estabilização poliquadrática de sistemas positivos chaveados com incertezas politópicas variantes no tempo e alocação regional de autovalores. In: *Congresso Brasileiro de Automática – CBA*. [S.l.: s.n.], 2022. v. 3, n. 1.
- NORONHA, R. P.; SERRA, G. L. de O. Polyquadratic stability of positive switched systems with time-varying polytopic uncertainties via structured Lyapunov functions. In: *2022 Australian & New Zealand Control Conference (ANZCC)*. [S.l.: IEEE, 2022. p. 237–242.
- NORONHA, R. P.; SERRA, G. L. de O. Controle por modos deslizantes adaptativo *event-triggered* para sistemas nebulosos tipo-2 intervalares. In: *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente – SBAI*. [S.l.: s.n.], 2023. v. 1, n. 2.
- NORONHA, R. P.; SERRA, G. L. de O. Estabilidade e estabilização poliquadrática com desempenho $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas positivos nebulosos tipo-2 intervalares chaveados. In: *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente – SBAI*. [S.l.: s.n.], 2023. v. 1, n. 2.
- NORONHA, R. P.; SERRA, G. L. de O. Event-Triggered Adaptive Sliding Mode Control for Interval Type-2 T–S Fuzzy Systems with Time-Varying Delay. Publicado em: *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 2026.
- NORONHA, R. P.; SERRA, G. L. de O. Adaptive Sliding Mode Control Design for Interval Type-2 T–S Fuzzy Systems with Time Delay: An Event-Triggered Approach. Publicado em: *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2026.
- NORONHA, R. P.; SERRA, G. L. de O. Event-Triggered Barrier Function-Based Adaptive Sliding Mode Control for Delayed IT2 T–S Fuzzy Systems. Submetido para publicação: *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2026.

1.6 Organização da Tese

Com o intuito de apresentar o desenvolvimento metodológico e os resultados alcançados de forma clara e estruturada, esta tese encontra-se organizada em cinco capítulos, descritos a seguir.

- **Capítulo 1 (Considerações Iniciais):** Apresenta a contextualização do problema de pesquisa, a motivação e relevância do trabalho, os objetivos geral e específicos, as contribuições originais e a produção bibliográfica resultante.
- **Capítulo 2 (Fundamentação Teórica):** Apresenta a base conceitual necessária ao desenvolvimento da tese, abordando os fundamentos de sistemas *fuzzy* T–S tipo-2 intervalares, os fundamentos de sistemas com atraso de tempo e a análise de estabilidade por meio da

abordagem de Lyapunov–Krasovskii, os fundamentos de sistemas chaveados, os fundamentos de controle por modos deslizantes de primeira ordem, sua extensão adaptativa (por crescimento monotônico, por dupla camada e por função de barreira) e acionada por eventos (incluindo as estratégias de monitoração, a condição de acionamento e a garantia de ausência do comportamento Zeno), e os fundamentos da teoria de dissipatividade e de passividade robusta.

- **Capítulo 3 (Descrição dos Métodos de Controle Propostos):** Formula o problema de controle e descreve as duas metodologias propostas, denominadas Método 1 e Método 2, cujos ganhos de chaveamento são adaptados por crescimento monotônico e por função de barreira, respectivamente. Para cada método, demonstram-se a convergência das trajetórias de estado à região de modos deslizantes prático, a garantia analítica de ausência do comportamento Zeno e as condições de estabilização prática e de passividade robusta. A partir da desigualdade de passividade robusta, tomando como função de armazenamento um funcional candidato de Lyapunov–Krasovskii *fuzzy*, derivam-se *LMIs* dependentes do atraso máximo admissível, dos limites superiores das taxas de variação do atraso e dos graus de pertinência, e do coeficiente de passividade robusta, de modo que a factibilidade dessas *LMIs* certifica a passividade robusta para o coeficiente especificado e fornece as variáveis de decisão necessárias à dedução das condições de estabilização prática. O capítulo estabelece ainda, em três passos, o vínculo energético analítico entre o mecanismo de acionamento por eventos e o comportamento dissipativo do sistema, definindo o limite superior para o limiar de acionamento por eventos em função do coeficiente de passividade robusta para cada método de controle.
- **Capítulo 4 (Resultados Computacionais):** Apresenta a avaliação computacional dos métodos propostos, dividida em duas frentes. A primeira compara o Método 1 e o Método 2 entre si, descrevendo o sistema e os parâmetros de simulação adotados e analisando o desempenho resultante. A segunda compara os métodos propostos com abordagens consolidadas da literatura, especificamente os métodos de Li *et al.* (2016) e de Su *et al.* (2019), cada comparação conduzida em dois cenários de complexidade crescente.
- **Capítulo 5 (Considerações Finais):** Apresenta as conclusões gerais da tese, discute as limitações do trabalho e aponta direções para trabalhos futuros. Entre as extensões identificadas, destacam-se: a generalização da condição de passividade robusta para funções de suprimento QSR mais ricas, como caso particular da dissipatividade QSR generalizada, permitindo critérios de projeto mais flexíveis e potencialmente relações analíticas mais completas entre os parâmetros de projeto e o comportamento do sistema na região de modos deslizantes prático; a formalização analítica da relação entre o coeficiente de passividade robusta e os parâmetros do *chattering*, cuja caracterização requer abordagens baseadas em função descritiva ou análise de sistemas de Filippov, não contempladas nesta tese; a extensão da abordagem proposta para modelos *fuzzy* T–S tipo-2 intervalares com

consequentes polinomiais via soma de quadrados; o emprego de desigualdades integrais menos conservadoras que a de Jensen, como as desigualdades de Wirtinger, de Bessel–Legendre de ordem superior ou abordagens baseadas em matrizes livres, na construção de funcionais de Lyapunov–Krasovskii *fuzzy* menos conservadores; e a proposição de uma estratégia de monitoração não contínua, que eliminaria a exigência de verificação ininterrupta da condição de acionamento e ampliaria a aplicabilidade dos métodos propostos a plataformas embarcadas com restrições severas de energia e de capacidade de processamento.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo reúne os fundamentos teóricos necessários ao desenvolvimento dos métodos de controle propostos nesta tese. A Seção 2.1 apresenta os fundamentos de controle baseado em sistemas *fuzzy* T-S tipo-2 intervalares, abrangendo a estrutura do modelo, o projeto da função de controle e as condições de estabilização por meio de *LMIs*. A Seção 2.2 introduz os fundamentos de sistemas com atraso de tempo, com ênfase na classificação das equações diferenciais com atraso, na análise de estabilidade baseada em funcionais de Lyapunov–Krasovskii e nas condições de estabilidade independentes e dependentes do atraso. A Seção 2.3 trata dos fundamentos de sistemas chaveados, discutindo as principais classes de funções de chaveamento, as condições de boa definição e boa posição, a sequência de chaveamento e a construção da solução em forma fechada para sistemas lineares chaveados. A Seção 2.4 expõe os fundamentos de controle por modos deslizantes, cobrindo a dinâmica de modo deslizante pelos métodos de Filippov e do controle equivalente, o procedimento de projeto da região de modos deslizantes e da função de controle por modos deslizantes, e o fenômeno do *chattering*. A Seção 2.5 estende esses conceitos ao controle por modos deslizantes adaptativo, apresentando a formulação do problema de adaptação do ganho de chaveamento na ausência do conhecimento do limite superior da perturbação casada e as três formulações consolidadas na literatura: adaptação por crescimento monotônico, adaptação de dupla camada e adaptação baseada em função de barreira, com ênfase nas propriedades de invariância e nas limitações de cada abordagem. A Seção 2.6 trata do controle por modos deslizantes acionado por eventos, abordando as estratégias de monitoração, as principais classes de condições de acionamento por eventos, o comportamento Zeno, a região de modos deslizantes prático e as condições de estabilidade prática e de ausência do comportamento Zeno. Por fim, a Seção 2.7 apresenta os fundamentos da teoria da dissipatividade e passividade, incluindo sistemas dissipativos, suas funções de armazenamento, sistemas passivos e sistemas robustamente passivos, com a caracterização da passividade robusta via funcional de Lyapunov–Krasovskii.

2.1 Fundamentos de Controle Baseado em Sistemas *Fuzzy* T-S Tipo-2 Intervalares

Problemas de controle para sistemas *fuzzy* T-S tipo-1 têm recebido muita atenção pela comunidade de sistemas dinâmicos (SALA, 2009; MAGOSSİ et al., 2022; FARIA et al., 2022; BERNAL et al., 2022; PRECUP; NGUYEN; BLAŽIČ, 2024). Com o uso de sistemas *fuzzy* T-S tipo-1, é possível representar dinâmicas complexas por meio da decomposição do espaço de estados em regiões sobrepostas, associadas a sistemas locais (MOZELLI; SOUZA; PALHARES, 2011). Cada sistema local é ponderado por um grau de pertinência, e a dinâmica global do sistema é obtida por uma combinação convexa das dinâmicas locais, sendo os coeficientes dessa combinação definidos pelos respectivos graus de pertinência (ARRIFANO et al., 2007). Dessa

forma, sistemas *fuzzy* T–S tipo-1 podem ser interpretados como uma classe particular de sistemas politópicos, os quais possuem um formalismo teórico consolidado na literatura de controle robusto e de sistemas variantes no tempo (SALA, 2009).

Contudo, as funções de pertinência de conjuntos *fuzzy* tipo-1 apresentam limitações no tratamento de incertezas intrínsecas aos próprios graus de pertinência. Tal cenário é comum em situações práticas nas quais os parâmetros do sistema são desconhecidos ou oscilam dentro de intervalos não determinados com precisão, e nas quais a definição das funções de pertinência tipo-1 é, por si só, sujeita a imprecisões (LAM et al., 2013). Para melhor compreender essa limitação, considere um conjunto *fuzzy*, denotado por $\mathcal{A}$, contido no universo de discurso X . Em tal estrutura, cada elemento $x \in X$ recebe um grau de pertinência $\mu_{\mathcal{A}}(x) \in [0, 1]$, mapeado pela função $\mu_{\mathcal{A}} : X \rightarrow [0, 1]$, que quantifica o nível de pertencimento de x ao conjunto $\mathcal{A}$. No entanto, essa formulação não é capaz de considerar incertezas sobre o próprio valor do grau de pertinência (MENDEL et al., 2014).

Os sistemas *fuzzy* T–S tipo-2 estendem o conceito dos sistemas *fuzzy* T–S tipo-1, permitindo que os próprios graus de pertinência sejam representados como conjuntos *fuzzy* (MENDEL et al., 2014). Formalmente, para um sistema *fuzzy* tipo-2, um conjunto *fuzzy*, denotado por $\mathcal{B}$ contido no universo de discurso X , a função de pertinência é um mapa $\mu_{\mathcal{B}} : X \rightarrow \mathcal{F}([0, 1])$, onde $\mathcal{F}([0, 1])$ denota o conjunto de todas as funções de pertinências definidas sobre $[0, 1]$. Assim, para cada $x \in X$, $\mu_{\mathcal{B}}(x)$ é, em si, um conjunto *fuzzy* sobre $[0, 1]$, denominado conjunto de incerteza primário, cujo grau de pertinência é denominado função de pertinência secundária (MENDEL et al., 2014; NAMADCHIAN et al., 2023). Do ponto de vista de sistemas dinâmicos, os sistemas *fuzzy* T–S tipo-2 também podem ser interpretados como sistemas politópicos em que os pesos da combinação convexa são variantes no tempo, oferecendo uma abordagem mais abrangente para o projeto de controle para sistemas incertos, sendo especialmente relevantes quando as funções de pertinência e os limites dos conjuntos *fuzzy* não podem ser definidos com exatidão (CHEN; TAN, 2013).

Uma classe de sistemas *fuzzy* tipo-2 que se destaca pela sua viabilidade computacional é a dos sistemas *fuzzy* T–S tipo-2 intervalares. Em um conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar, a função de pertinência secundária assume valor unitário para todo elemento pertencente à região de incerteza (*Footprint of Uncertainty* – FOU), e zero fora dela (JOHN; MENDEL, 2023). A FOU é delimitado por duas funções de pertinência, denominadas função de pertinência inferior (*Lower Membership Function* – LMF) e superior (*Upper Membership Function* – UMF), denotadas por $\underline{\mu}_{\tilde{\mathcal{A}}}(x)$ e $\bar{\mu}_{\tilde{\mathcal{A}}}(x)$, respectivamente, as quais satisfazem a condição $0 \leq \underline{\mu}_{\tilde{\mathcal{A}}}(x) \leq \bar{\mu}_{\tilde{\mathcal{A}}}(x) \leq 1$ para todo $x \in X$ (MENDEL, 2024a). Essa estrutura simplifica significativamente os processos de inferência e de redução de tipo, viabilizando o projeto de controle por meio de *LMIs* (MENDEL, 2024b; LAM; LEUNG, 2011).

2.1.1 Projeto de Controle Baseado em Sistema *Fuzzy* T-S Tipo-2 Intervalar

Nesta seção, um sistema *fuzzy* T-S tipo-2 intervalar é empregado para modelar um sistema dinâmico não linear sujeito a incertezas paramétricas. O objetivo é derivar condições de estabilidade e uma função de controle por realimentação de estados que estabilize o sistema em malha fechada, expressas na forma de *LMIs*.

2.1.1.1 Sistema Nebuloso T-S Tipo-2 Intervalar

Seja o sistema de regras de inferência *fuzzy* para o sistema não linear representado por um modelo *fuzzy* T-S tipo-2 intervalar, em que o antecedente de cada regra é formado por conjuntos *fuzzy* e o consequente é um sistema local linear (LAM; LEUNG, 2011):

$$\text{Regra } i: \text{ SE } f_1(\mathbf{x}(t)) \in \tilde{M}_1^i \text{ e } \dots \text{ e } f_\Psi(\mathbf{x}(t)) \in \tilde{M}_\Psi^i \text{ ENTÃO } \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t), \quad (2.1)$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, onde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ denota o estado e $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ a entrada de controle. Cada regra de inferência possui, em seu antecedente, $\Psi \leq n_x$ variáveis de premissa $f_\alpha(x_\alpha(t))$, para todo $\alpha \in \{1, \dots, \Psi\}$, cada uma pertencente ao conjunto *fuzzy* $\mathbf{M}_\alpha^i$ com um determinado grau de pertinência. As matrizes $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, denominadas matriz de estado e matriz de entrada, definem o i -ésimo sistema local linear.

Em virtude da estrutura intervalar da classe de sistemas *fuzzy* T-S tipo-2 consideradas nesta tese (LI et al., 2016b), o grau de pertinência de ativação normalizado da i -ésima regra não assume um valor pontual, mas pertence a um intervalo fechado:

$$\omega_i(\mathbf{x}(t)) \in [\underline{\omega}_i(\mathbf{x}(t)), \bar{\omega}_i(\mathbf{x}(t))] \subset [0, 1], \quad (2.2)$$

onde os limites inferior e superior desse intervalo são calculados, respectivamente, por:

$$\underline{\omega}_i(\mathbf{x}(t)) = \frac{\prod_{\alpha=1}^{\Psi} \underline{\eta}_{\mathbf{M}_\alpha^i}(f_\alpha(\mathbf{x}(t)))}{\sum_{l=1}^r \prod_{\alpha=1}^{\Psi} \underline{\eta}_{\mathbf{M}_\alpha^l}(f_\alpha(\mathbf{x}(t)))} \geq 0, \quad \bar{\omega}_i(\mathbf{x}(t)) = \frac{\prod_{\alpha=1}^{\Psi} \bar{\eta}_{\mathbf{M}_\alpha^i}(f_\alpha(\mathbf{x}(t)))}{\sum_{l=1}^r \prod_{\alpha=1}^{\Psi} \bar{\eta}_{\mathbf{M}_\alpha^l}(f_\alpha(\mathbf{x}(t)))} \geq 0, \quad (2.3)$$

em que $\underline{\omega}_i(\mathbf{x}(t))$ e $\bar{\omega}_i(\mathbf{x}(t))$ são os graus de pertinência de ativação inferior e superior normalizados da i -ésima regra *fuzzy*, mapeados pela *LMF* $\underline{\eta}_{\mathbf{M}_\alpha^i}$ e pela *UMF* $\bar{\eta}_{\mathbf{M}_\alpha^i}$, respectivamente (LAM; LEUNG, 2011). Por definição, essas funções satisfazem:

$$0 \leq \underline{\eta}_{\mathbf{M}_\alpha^i}(f_\alpha(\mathbf{x}(t))) \leq \bar{\eta}_{\mathbf{M}_\alpha^i}(f_\alpha(\mathbf{x}(t))) \leq 1, \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, \Psi\} \text{ e } i \in \{1, \dots, r\}, \quad (2.4)$$

o que implica diretamente que $0 \leq \underline{\omega}_i(\mathbf{x}(t)) \leq \bar{\omega}_i(\mathbf{x}(t)) \leq 1$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, além de satisfazerem as seguintes propriedades:

$$\sum_{i=1}^r \underline{\omega}_i(\mathbf{x}(t)) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^r \bar{\omega}_i(\mathbf{x}(t)) \geq 1. \quad (2.5)$$

O procedimento de redução de tipo-2 para tipo-1 consiste em mapear o intervalo (2.2) em um escalar $\omega_i(\mathbf{x}(t))$, obtido pela combinação convexa dos limites inferior e superior (LAM et al., 2013; MENDEL et al., 2014). O grau de pertinência de ativação normalizado resultante satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\omega_i(\mathbf{x}(t)) &= \underline{v}_i(\mathbf{x}(t)) \underline{\omega}_i(\mathbf{x}(t)) + \bar{v}_i(\mathbf{x}(t)) \bar{\omega}_i(\mathbf{x}(t)), \\ 0 \leq \underline{v}_i(\mathbf{x}(t)) \leq 1, \quad 0 \leq \bar{v}_i(\mathbf{x}(t)) \leq 1, \quad \underline{v}_i(\mathbf{x}(t)) + \bar{v}_i(\mathbf{x}(t)) &= 1, \\ \omega_i(\mathbf{x}(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r \omega_i(\mathbf{x}(t)) &= 1,\end{aligned}\tag{2.6}$$

onde $\underline{v}_i(\mathbf{x}(t))$ e $\bar{v}_i(\mathbf{x}(t))$ são os pesos da combinação convexa entre os graus de pertinência inferior e superior normalizados. Note que as restrições (2.6) garantem que $\omega_i(\mathbf{x}(t)) \in [\underline{\omega}_i(\mathbf{x}(t)), \bar{\omega}_i(\mathbf{x}(t))]$.

O modelo *fuzzy* T–S tipo-2 intervalar é obtido pela combinação convexa dos r sistemas locais lineares, ponderada pelos graus de pertinência de ativação normalizados, resultando na seguinte representação em espaço de estados:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \underline{v}_i(\mathbf{x}(t)) \underline{\omega}_i(\mathbf{x}(t)) (\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)) + \sum_{i=1}^r \bar{v}_i(\mathbf{x}(t)) \bar{\omega}_i(\mathbf{x}(t)) (\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)) \\ &= \sum_{i=1}^r \omega_i(\mathbf{x}(t)) (\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Comentário 2.1. Como o sistema não linear está sujeito a incertezas paramétricas, os coeficientes de combinação convexa $\underline{v}_i(\mathbf{x}(t))$ e $\bar{v}_i(\mathbf{x}(t))$ podem depender dessas incertezas. No entanto, tal dependência não é necessariamente conhecida nem precisa ser considerada explicitamente no projeto de controle. Isso constitui uma das vantagens práticas da abordagem tipo-2 intervalar: embora o modelo (2.7) dependa implicitamente de $\underline{v}_i$ e $\bar{v}_i$ através de ω_i , as condições de estabilidade derivadas a seguir são independentes desses coeficientes, sendo válidas para quaisquer valores admissíveis de $\underline{v}_i, \bar{v}_i \in [0, 1]$ satisfazendo (2.6) (LAM; LEUNG, 2011).

2.1.1.2 Projeto de Controle Fuzzy T–S Tipo-2 Intervalar

Para estabilizar o sistema (2.7), (LAM; LEUNG, 2011) propôs um método de controle, por realimentação de estados, com o seguinte sistema de regras de inferência *fuzzy*:

$$\textbf{Regra } j: \textbf{SE } f_1(\mathbf{x}(t)) \in \tilde{M}_1^j \textbf{ e } \dots \textbf{ e } f_\Psi(\mathbf{x}(t)) \in \tilde{M}_\Psi^j \textbf{ ENTÃO } \mathbf{u}(t) = \mathbf{G}_j \mathbf{x}(t), \tag{2.8}$$

para todo $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, onde $\mathbf{G}_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ são as matrizes de ganho de realimentação de estados da j -ésima função de controle, a serem determinadas pelo projeto de controle.

A função de controle *fuzzy* T–S tipo-2 intervalar inferida é obtida pela ponderação das r funções de controle pelos graus de pertinência inferior e superior de ativação normalizados. Particularmente para o método proposto por (LAM; LEUNG, 2011), diferentemente do modelo

em (2.7), a função de controle *fuzzy* T-S tipo-2 intervalar inferida não incorpora os pesos de combinação convexa $\underline{v}_j$ e $\bar{v}_j$, uma vez que estes podem depender de incertezas não mensuráveis. A função de controle *fuzzy* T-S tipo-2 intervalar é, portanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \sum_{j=1}^r \underline{\omega}_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{G}_j \mathbf{x}(t) + \sum_{j=1}^r \bar{\omega}_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{G}_j \mathbf{x}(t) \\ &= \sum_{j=1}^r \hat{\omega}_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{G}_j \mathbf{x}(t), \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde $\hat{\omega}_j(\mathbf{x}(t)) = \underline{\omega}_j(\mathbf{x}(t)) + \bar{\omega}_j(\mathbf{x}(t))$ é o grau de pertinência normalizado de ativação da j -ésima regra de controle, satisfazendo $\sum_{j=1}^r \hat{\omega}_j(\mathbf{x}(t)) = \sum_{j=1}^r (\underline{\omega}_j(\mathbf{x}(t)) + \bar{\omega}_j(\mathbf{x}(t))) = 1$ por construção.

Comentário 2.2. A escolha de ponderar a função de controle (2.9) diretamente pelos graus de pertinência inferior e superior, sem os coeficientes $\underline{v}_j$ e $\bar{v}_j$, é deliberada. Uma vez que esses coeficientes dependem das incertezas do sistema e não são necessariamente mensuráveis em tempo real, sua inclusão na lei de controle tornaria a implementação impraticável. A formulação (2.9) contorna essa dificuldade mantendo tratabilidade computacional, ao custo de introduzir uma diferença estrutural entre o modelo e o controlador, o que é explicitamente considerado na análise de estabilidade a seguir (LAM; LEUNG, 2011).

2.1.1.3 Estabilização do Sistema Fuzzy T-S Tipo-2 Intervalar

A seguir, as condições de estabilização do sistema (2.7) são derivadas. Substituindo a função de controle *fuzzy* T-S tipo-2 intervalar (2.9) em (2.7), e utilizando a propriedade de partição da unidade $\sum_{j=1}^r \hat{\omega}_j(\mathbf{x}(t)) = 1$, obtém-se a dinâmica em malha fechada:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \omega_i(\mathbf{x}(t)) \left(\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \sum_{j=1}^r \hat{\omega}_j \mathbf{G}_j \mathbf{x}(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\mathbf{x}(t)) \hat{\omega}_j(\mathbf{x}(t)) (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{G}_j) \mathbf{x}(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r (\mathbf{x}(t)) \omega_i(\mathbf{x}(t)) \hat{\omega}_j \mathbf{H}_{ij} \mathbf{x}(t), \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde $\mathbf{H}_{ij} = \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{G}_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ é a matriz de estados de malha fechada associada ao par de regras (i, j) . Pelas propriedades de partição da unidade em (2.6) e (2.9), tem-se que:

$$\sum_{i=1}^r \omega_i(\mathbf{x}(t)) = 1, \quad \sum_{j=1}^r \hat{\omega}_j(\mathbf{x}(t)) = 1, \quad \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\mathbf{x}(t)) \hat{\omega}_j(\mathbf{x}(t)) = 1. \quad (2.11)$$

Para analisar a estabilidade do sistema (2.10), considera-se a seguinte função $V \in \mathcal{C}^1$ candidata de Lyapunov:

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^\top(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}^\top \succ \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad (2.12)$$

Diferenciando-se $V(\mathbf{x}(t))$ ao longo das trajetórias do sistema (2.10), obtém-se:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= \dot{\mathbf{x}}^\top(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^\top(t) \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\mathbf{x}(t)) \hat{\omega}_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{x}^\top(t) [\mathbf{H}_{ij}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{H}_{ij}] \mathbf{x}(t) \\ &= \mathbf{x}^\top(t) \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x}(t),\end{aligned}\tag{2.13}$$

onde $\boldsymbol{\Phi} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\mathbf{x}(t)) \hat{\omega}_j(\mathbf{x}(t)) [\mathbf{H}_{ij}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{H}_{ij}]$.

Para derivar condições de síntese na forma de *LMIs*, introduz-se a mudança de variável $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1} \succ \mathbf{0}$, com $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$. Pré e pós-multiplicando (2.13) por $\mathbf{X}$, e definindo a mudança de variável $\mathbf{N}_j = \mathbf{G}_j \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ para todo $j \in \{1, \dots, r\}$, tem-se que $\mathbf{H}_{ij} \mathbf{X} = \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{B}_i \mathbf{N}_j$. Definindo $\mathbf{z}(t) = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{x}(t) = \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$ e substituindo, obtém-se:

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\mathbf{x}(t)) \hat{\omega}_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{z}^\top(t) \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{z}(t) = \mathbf{z}^\top(t) \boldsymbol{\Pi} \mathbf{z}(t),\tag{2.14}$$

onde

$$\boldsymbol{\Pi} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\mathbf{x}(t)) \hat{\omega}_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{Q}_{ij},\tag{2.15}$$

e

$$\mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_i^\top + \mathbf{B}_i \mathbf{N}_j + \mathbf{N}_j^\top \mathbf{B}_i^\top \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}.\tag{2.16}$$

De acordo com o método direto de Lyapunov (KHALIL, 2002), para que $V(\mathbf{x}(t))$ se configure como uma função de Lyapunov efetiva e garanta que a origem do sistema seja globalmente assintoticamente estável, requer-se que ela seja radialmente não limitada, continuamente diferenciável, estritamente positiva para todo $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$ com $V(\mathbf{0}) = 0$, e que sua derivada temporal satisfaça $\dot{V}(t) < 0$. No caso da estrutura proposta em (2.12), as propriedades sobre $V(\mathbf{x}(t))$ são intrinsecamente satisfeitas por construção devido a $\mathbf{P} \succ \mathbf{0}$, de modo que a garantia de estabilidade global assintótica reduz-se à imposição de $\boldsymbol{\Pi} \prec \mathbf{0}$. Uma vez que os coeficientes $\omega_i(\mathbf{x}(t))$ e $\hat{\omega}_j(\mathbf{x}(t))$ satisfazem as propriedades de combinação convexa em (2.11), uma condição suficiente para garantir $\boldsymbol{\Pi} \prec \mathbf{0}$ independentemente dos graus de pertinência é impor que cada matriz local $\mathbf{Q}_{ij}$ seja estritamente negativa definida. Isso conduz ao seguinte resultado.

Teorema 2.1 (Estabilização via *LMIs* (LAM; LEUNG, 2011)). *O sistema nebuloso T-S tipo-2 intervalar em malha fechada (2.10) é assintoticamente estável na origem se existirem uma matriz simétrica definida positiva $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e matrizes $\mathbf{N}_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, para todo $j \in \{1, \dots, r\}$, tais que as seguintes *LMIs* sejam satisfeitas:*

$$\mathbf{X} \succ \mathbf{0},\tag{2.17}$$

$$\mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_i^\top + \mathbf{B}_i \mathbf{N}_j + \mathbf{N}_j^\top \mathbf{B}_i^\top \prec \mathbf{0}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, r\}.\tag{2.18}$$

Uma vez que as *LMIs* (2.17)–(2.18) sejam factíveis, os ganhos de realimentação de estados são recuperados por:

$$\mathbf{G}_j = \mathbf{N}_j \mathbf{X}^{-1}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}.\tag{2.19}$$

Comentário 2.3. As condições do Teorema 2.1 constituem um problema de factibilidade de *LMIs* nas variáveis $\mathbf{X}$ e $\{\mathbf{N}_j\}_{j=1}^r$, que pode ser resolvido eficientemente por métodos de programação semidefinida, tais como o método de pontos interiores (BOYD et al., 1994). O número total de *LMIs* em (2.18) é r^2 , crescendo quadraticamente com o número de regras r . Para sistemas com grande número de regras, abordagens de relaxação das condições de estabilidade, baseadas em propriedades de combinações convexas dos graus de pertinência, podem ser empregadas para reduzir o conservadorismo das condições suficientes (SALA, 2009; LAM et al., 2013).

2.2 Fundamentos de Sistemas com Atraso de Tempo

Sistemas com atraso de tempo também são conhecidos como sistemas com pós-efeito, sistemas com retardo, sistemas hereditários, equações com argumento desviado ou equações diferenciais-diferenciais (KHARITONOV, 2012). Comparadas com equações diferenciais ordinárias, que são de dimensão finita, sistemas com atraso de tempo pertencem à classe das equações diferenciais funcionais, que são de dimensão infinita (FRIDMAN, 2014).

O exemplo mais simples de um sistema com atraso é:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t - \tau), \quad (2.20)$$

onde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ e $\tau > 0$ denota o atraso de tempo constante. Atrasos de tempo podem estar presentes no estado (XU; LI; STOJANOVIC, 2021), na entrada de controle (FRIDMAN; SEURET; RICHARD, 2004) ou na saída (YANG; WANG; ZHU, 2022). Esses atrasos podem ser de transporte, de comunicação ou de medição (FRIDMAN, 2014).

2.2.1 Classificação das Equações Diferenciais com Atraso de Tempo no Estado

Equações diferenciais com atraso de tempo no estado são generalizações das equações diferenciais ordinárias nas quais a dinâmica depende não apenas do valor presente das variáveis, mas também de seus estados passados. De acordo com (FRIDMAN, 2014), a correta classificação dessas formulações é essencial para determinar a abordagem teórica e numérica adequada. Sistemas com múltiplos atrasos ou atrasos variantes no tempo impõem desafios adicionais, tanto na análise de estabilidade quanto na implementação computacional (GU; CHEN; KHARITONOV, 2003). Por sua vez, as equações do tipo neutro exigem condições iniciais mais regulares e podem apresentar comportamento dinâmico significativamente mais complexo, tornando necessária uma análise criteriosa da existência e unicidade de suas soluções (KHARITONOV, 2012).

A forma geral de uma equação diferencial com atraso nos estados é

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau_1), \dots, \mathbf{x}(t - \tau_k), \dot{\mathbf{x}}(t - \theta_1), \dots, \dot{\mathbf{x}}(t - \theta_m)), \quad (2.21)$$

com $\tau_i, \theta_j > 0$ representando os respectivos atrasos.

2.2.1.1 Classificação quanto à Estrutura do Lado Direito da Equação Diferencial com Atraso de Tempo no Estado

- **Equações com Retardo:** o lado direito depende de valores passados de $\mathbf{x}(t)$, mas não dos valores passados do estado. Exemplo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -a\mathbf{x}(t - \tau), \quad a > 0. \quad (2.22)$$

- **Equações Neutras:** o lado direito depende também dos valores passados do estado. Exemplo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -a\dot{\mathbf{x}}(t - \tau) - b\mathbf{x}(t), \quad a, b > 0. \quad (2.23)$$

2.2.2 Classificação quanto ao Tipo de Atraso de Tempo no Estado

- **Atraso de Tempo Constante:** o valor do atraso τ é fixo e conhecido. Exemplo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -a\mathbf{x}(t - \tau). \quad (2.24)$$

- **Atraso de Tempo Variável:** o atraso é uma função do tempo ou do estado do sistema. Exemplos:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -a\mathbf{x}(t - \tau(t)), \quad (2.25)$$

em que o atraso $\tau(t)$ é variante no tempo, ou

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -a\mathbf{x}(t - \tau(\mathbf{x}(t))), \quad (2.26)$$

no qual o atraso $\tau(\mathbf{x}(t))$ depende do estado.

- **Atraso de Tempo Distribuído:** o efeito dos estados passados é acumulado continuamente por meio de uma integral convolucional, com uma função de peso denominada núcleo de memória. Exemplo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -a \int_0^h K(s) \mathbf{x}(t - s) ds, \quad (2.27)$$

onde $K(s)$ define como os estados passados influenciam a dinâmica presente (FRIDMAN, 2014).

2.2.2.1 Classificação quanto ao Número de Atrasos

- **Atraso de Tempo Simples:** apenas um tempo de atraso afeta a dinâmica. Exemplo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)). \quad (2.28)$$

- **Múltiplos Atrasos de Tempo:** a equação envolve dois ou mais atrasos distintos. Exemplo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau_1), \mathbf{x}(t - \tau_2)). \quad (2.29)$$

2.2.3 Análise de Estabilidade Baseada em Lyapunov

Seja o seguinte sistema não linear com atraso de tempo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}_t), \quad \mathbf{x}(\theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0], \quad (2.30)$$

onde $f : \mathbb{R} \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua em ambos os argumentos e localmente é um função de Lipschitz no segundo argumento.

Define-se o estado funcional $\mathbf{x}_t \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ como o segmento de trajetória de estado:

$$\mathbf{x}_t(\theta) = \mathbf{x}(t + \theta), \quad \theta \in [-\tau, 0], \quad (2.31)$$

o qual encapsula a trajetória de estado no intervalo $[t - \tau, t]$. A condição inicial, denominada histórico de estado, é dada denotada por $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, isto é, $\mathbf{x}_{t_0} = \phi$, e a norma do supremo em $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ é definida por $\|\phi\|_C = \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\phi(\theta)\|$ (KHARITONOV, 2012). Por fim, assume-se que $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, garantindo-se que o sistema (2.30) admite a solução de equilíbrio trivial.

Caso a solução de equilíbrio $\mathbf{y}(t)$ não seja trivial, realiza-se a mudança de variável $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)$, obtendo-se o sistema:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = f(\mathbf{z}_t + \mathbf{y}_t) - f(\mathbf{y}_t), \quad (2.32)$$

com solução trivial $\mathbf{z}(t) = \mathbf{0}$. Assim, a análise de estabilidade da solução de equilíbrio não trivial do sistema (2.30) reduz-se à análise da solução de equilíbrio trivial do sistema (2.32) (FRIDMAN, 2014).

Definição 2.1 (Estabilidade de Sistemas com Atraso de Tempo (FRIDMAN, 2014)). A solução de equilíbrio do sistema (2.30) é:

- *Estável* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\|\mathbf{x}_{t_0}\|_C < \delta$ implica $|\mathbf{x}(t)| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$;
- *Assintoticamente estável* se for estável e existir $\delta_a > 0$ tal que $\|\mathbf{x}_{t_0}\|_C < \delta_a$ implica $|\mathbf{x}(t)| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$;
- *Globalmente assintoticamente estável* se δ_a puder ser tomado arbitrariamente grande.

Os métodos de análise de estabilidade no domínio da frequência são restritos a sistemas com atraso de tempo lineares e invariantes no tempo (FRIDMAN, 2014). Assim como nos sistemas sem atraso, o método direto de Lyapunov constitui uma abordagem eficaz para a análise de estabilidade e desempenho de sistemas com atraso de tempo gerais. Para essa classe de sistemas, destacam-se duas formulações principais:

- **Método de funcionais de Lyapunov–Krasovskii** (KRASOVSKII, 1963): emprega-se funcionais que dependem do segmento de trajetória de estado $\mathbf{x}_t$. Essa abordagem constitui uma generalização natural do método de Lyapunov clássico para equação diferenciais ordinárias, sendo particularmente adequada ao contexto de sistemas com atraso de tempo.
- **Método de funções de Lyapunov–Razumikhin** (RAZUMIKHIN, 1956): utiliza-se funções de Lyapunov definidas apenas sobre o estado presente. Embora possa ser mais simples de aplicar em certas situações, não explora diretamente o segmento de trajetória de estado, o que o torna, em geral, mais conservador do que a abordagem de Krasovskii.

Ambas as abordagens têm sido amplamente empregadas na literatura para estabelecer condições de estabilidade assintótica em sistemas com atraso de tempo. Contudo, o uso de funcionais de Lyapunov–Krasovskii permite a formulação de condições de estabilidade na forma de *LMIs*, mesmo em sistemas incertos, com múltiplos atrasos, ou com atrasos variáveis e distribuídos, tratáveis de forma eficiente por métodos de programação semidefinida (KHARITONOV, 2012). Portanto, a adoção dos funcionais de Lyapunov–Krasovskii ao longo deste trabalho justifica-se não apenas por sua sólida fundamentação teórica, mas também por sua flexibilidade prática e capacidade de representar com precisão os efeitos do retardo na estabilidade do sistema.

2.2.4 Abordagem de Lyapunov–Krasovskii

Seja $V : C[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}_+$ um funcional contínuo, e seja $\mathbf{x}(t; t_0, \phi)$ a solução de (2.30) para $t \geq t_0$ com condição inicial $\mathbf{x}_{t_0} = \phi$. A derivada temporal superior direita de V ao longo das trajetórias do sistema (2.30) é definida como:

$$\dot{V}(\phi) = \limsup_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} \left[V(\mathbf{x}_{t+\Delta t}(t_0, \phi)) - V(\phi) \right]. \quad (2.33)$$

Teorema 2.2 (Teorema de Lyapunov–Krasovskii). *Suponha que $f : C[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e que u, v, w sejam funções de classe $\mathcal{K}$. A solução trivial do sistema (2.30) é estável se existe um funcional contínuo $V : C[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}_+$, positivo definido, que verifica:*

$$u(|\phi(0)|) \leq V(\phi) \leq v(\|\phi\|_C), \quad (2.34)$$

tal que sua derivada temporal ao longo das trajetórias de (2.30) satisfaz:

$$\dot{V}(\phi) \leq -w(|\phi(0)|). \quad (2.35)$$

Se $w(s) > 0$ para $s > 0$, então a solução trivial é assintoticamente estável. Se, adicionalmente, $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$, então ela é globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Ver (FRIDMAN, 2014). □

2.2.4.1 Exemplo: Sistema Não Linear com Atraso de Tempo

Considere o sistema não linear com atraso de tempo constante:

$$\dot{x}(t) = -ax^3(t) - a_1x^3(t - \tau), \quad a > 0, \quad a_1 \in \mathbb{R}. \quad (2.36)$$

Propõe-se o funcional candidato de Lyapunov–Krasovskii:

$$V(\phi) = \frac{\phi^4(0)}{2a} + \int_{-\tau}^0 \phi^6(s) ds. \quad (2.37)$$

Supondo $|a_1| < a$, tem-se ao longo das trajetórias de (2.36):

$$V(x_t) = \frac{x^4(t)}{2a} + \int_{t-\tau}^t x^6(s) ds. \quad (2.38)$$

A derivada temporal de V ao longo das trajetórias do sistema (2.36) é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= \frac{2x^3(t)}{a} \dot{x}(t) + x^6(t) - x^6(t - \tau) \\ &= -\left[x^6(t) + \frac{2a_1}{a} x^3(t) x^3(t - \tau) + x^6(t - \tau) \right] \\ &= \begin{bmatrix} x^3(t) & x^3(t - \tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \frac{-a_1}{a} \\ \frac{-a_1}{a} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^3(t) \\ x^3(t - \tau) \end{bmatrix} \leq -\alpha |x(t)|^6, \end{aligned} \quad (2.39)$$

para algum $\alpha > 0$. Portanto, o sistema (2.36) é assintoticamente estável independentemente do atraso quando $|a_1| < a$ (FRIDMAN, 2014).

2.2.5 Condições de Estabilidade Independentes de Atraso

As condições de estabilidade independentes de atraso são amplamente utilizadas pela simplicidade estrutural que oferecem (LIU; TZOUNAS; MILANO, 2019). Por não dependerem diretamente do valor de τ , garantem estabilidade para qualquer atraso $\tau \geq 0$ (XUE; XU; XU, 2020), o que as torna especialmente úteis em sistemas cujo atraso é desconhecido, altamente variável ou difícil de estimar com precisão (BENJELLOUN; BOUKAS, 1997). Além disso, suas formulações via *LMIs* costumam ser menos exigentes em termos computacionais, com menor número de variáveis matriciais e menor complexidade na construção dos funcionais de Lyapunov (FRIDMAN, 2014).

Contudo, essa generalidade tem um custo: o conservadorismo. Por não incorporarem informação sobre o valor específico de τ , essas condições impõem restrições mais rígidas ao sistema, podendo indicar instabilidade mesmo quando, na prática, o sistema permanece estável para valores reais e limitados de τ . Em problemas de controle sensíveis ao desempenho ou com atraso bem caracterizado, isso pode conduzir a soluções excessivamente conservadoras (FRIDMAN; ORLOV, 2007).

Seja o sistema linear e invariante com atraso de tempo variável:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t - \tau(t)), \quad \mathbf{x}(\theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0], \quad (2.40)$$

onde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$, com atraso variável $\tau(t) \in [0, h]$, e matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$.

Seja o seguinte funcional candidato de Lyapunov–Krasovskii:

$$V(\mathbf{x}_t) = \mathbf{x}^\top(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t) + \int_{t-\tau(t)}^t \mathbf{x}^\top(s) \mathbf{Q} \mathbf{x}(s) ds, \quad (2.41)$$

onde $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \succ 0$. Assume-se que $\tau(t)$ é diferenciável e satisfaz $\dot{\tau}(t) \leq d < 1$, caracterizando-o como pertencente à classe dos atrasos com variação lenta. Diferenciando-se (2.41) com respeito ao tempo ao longo das trajetórias do sistema (2.40):

$$\dot{V}(\mathbf{x}_t) = 2\mathbf{x}^\top(t) \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}^\top(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) - (1 - \dot{\tau}) \mathbf{x}^\top(t - \tau) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t - \tau). \quad (2.42)$$

Substituindo a dinâmica de (2.40) em (2.42):

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}_t) &\leq 2\mathbf{x}^\top(t) \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}^\top(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) - (1 - d) \mathbf{x}^\top(t - \tau) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t - \tau) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}^\top(t) & \mathbf{x}^\top(t - \tau) \end{bmatrix} \mathbf{W} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t - \tau) \end{bmatrix} \leq -\alpha \|\mathbf{x}(t)\|^2, \end{aligned} \quad (2.43)$$

para algum $\alpha > 0$, desde que:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} & \mathbf{P} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1^\top \mathbf{P} & -(1 - d) \mathbf{Q} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.44)$$

Nota-se que a *LMI* (2.44) é independente do atraso, embora dependa do limite superior da taxa de variação do atraso variante. A factibilidade de (2.44) constitui uma condição suficiente para a estabilidade assintótica independente do atraso do sistema (2.40). Esse resultado é enunciado formalmente no teorema a seguir.

Teorema 2.3. *O sistema (2.40) é assintoticamente estável para todo atraso variante no tempo $\tau(t)$ com $\dot{\tau}(t) \leq d < 1$ se existem matrizes $\mathbf{0} < \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $\mathbf{0} < \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ tais que (2.44) é factível.*

2.2.6 Condições de Estabilidade Dependentes de Atraso

As condições de estabilidade dependentes de atraso têm sido preferidas em análises modernas justamente serem dependentes de atraso τ (FAN; ZHU; ZHENG, 2023). Ao incluir essa dependência na formulação das *LMIs*, essas condições representam com maior fidelidade a dinâmica do sistema, reduzindo o conservadorismo e ampliando os limites máximos de atraso toleráveis. Outro ponto favorável é a compatibilidade com funcionais de Lyapunov–Krasovskii mais sofisticados e com técnicas avançadas, tais como as desigualdades integrais de Jensen, de Wirtinger, e de Bessel–Legendre (FRIDMAN, 2014).

Por outro lado, as condições dependentes de atraso exigem maior esforço computacional e formulação mais elaborada: as *LMIs* resultantes apresentam maior número de variáveis matriciais, o que pode aumentar significativamente o tempo de processamento (KHARITONOV, 2012). Além disso, por dependerem de informações precisas do atraso, tornam-se sensíveis a variações ou incertezas não previstas na formulação. Quando bem aplicadas, entregam resultados superiores e mais aderentes à realidade dos sistemas com atraso (MILOŠEVIĆ, 2013).

A seguir, são apresentadas as condições de estabilidade dependentes de atraso para o sistema (2.30). Diferenciando temporalmente $\mathbf{x}^\top(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$ ao longo das trajetórias de (2.40) e aplicando o método do produto nulo (FRIDMAN, 2014), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\mathbf{x}^\top(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t) \right) &= 2\mathbf{x}^\top(t)\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}(t) + 2 \left(\mathbf{x}^\top(t)\mathbf{P}_2^\top + \dot{\mathbf{x}}^\top(t)\mathbf{P}_3^\top \right) \left((\mathbf{A} + \mathbf{A}_1)\mathbf{x}(t) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{A}_1 \int_{t-\tau(t)}^t \dot{\mathbf{x}}(s) ds - \dot{\mathbf{x}}(t) \right), \end{aligned} \quad (2.45)$$

com matrizes auxiliares $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$. Note que o lado direito de (2.45) é obtido adicionando-se o produto nulo $2(\mathbf{x}^\top(t)\mathbf{P}_2^\top + \dot{\mathbf{x}}^\top(t)\mathbf{P}_3^\top)(\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t)) = 0$ e usando a identidade $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - \tau(t)) = \int_{t-\tau(t)}^t \dot{\mathbf{x}}(s) ds$, de modo que $(\mathbf{A} + \mathbf{A}_1)\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}_1 \int_{t-\tau(t)}^t \dot{\mathbf{x}}(s) ds - \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$ ao longo das trajetórias de (2.40). Para limitar superiormente o termo $\int_{t-\tau(t)}^t \dot{\mathbf{x}}(s) ds$ em (2.45), introduz-se o funcional com dupla integral (FRIDMAN; SHAKED, 2003):

$$V_R(\dot{\mathbf{x}}_t) = \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\mathbf{x}}^\top(s) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}(s) ds d\theta, \quad (2.46)$$

onde $\mathbf{R} \succ 0$. Diferenciando-se temporalmente (2.46) e decompondo o intervalo de integração $[t-h, t]$ em $[t-h, t-\tau(t)]$ e $[t-\tau(t), t]$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_R(\dot{\mathbf{x}}_t) &= h \dot{\mathbf{x}}^\top(t) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}(t) - \int_{t-h}^t \dot{\mathbf{x}}^\top(s) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}(s) ds \\ &= h \dot{\mathbf{x}}^\top(t) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}(t) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{\mathbf{x}}^\top(s) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}(s) ds - \int_{t-h}^{t-\tau(t)} \dot{\mathbf{x}}^\top(s) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}(s) ds. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Definição 2.2 (Desigualdade Integral de Jensen (FRIDMAN, 2014)). Seja $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ contínua e integrável por partes, e seja $Q \succ 0$. Então:

$$\int_a^b \varphi^\top(s) Q \varphi(s) ds \geq \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b \varphi(s) ds \right)^\top Q \left(\int_a^b \varphi(s) ds \right). \quad (2.48)$$

Aplicando a desigualdade de Jensen (2.48) ao primeiro termo integral de (2.47) e usando $\tau(t) \leq h$, obtém-se o limite superior:

$$\begin{aligned} - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{\mathbf{x}}^\top(s) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}(s) ds &\leq - \frac{1}{\tau(t)} \left(\int_{t-\tau(t)}^t \dot{\mathbf{x}}(s) ds \right)^\top \mathbf{R} \left(\int_{t-\tau(t)}^t \dot{\mathbf{x}}(s) ds \right) \\ &\leq - \frac{1}{h} \left(\int_{t-\tau(t)}^t \dot{\mathbf{x}}(s) ds \right)^\top \mathbf{R} \left(\int_{t-\tau(t)}^t \dot{\mathbf{x}}(s) ds \right). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Considerando-se o funcional candidato de Lyapunov–Krasovskii:

$$V(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}_t) = \mathbf{x}^\top(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t) + V_R(\dot{\mathbf{x}}_t), \quad (2.50)$$

e combinando (2.45), (2.47) e (2.49), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}_t) &\leq 2\mathbf{x}^\top(t) \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}(t) + h \dot{\mathbf{x}}^\top(t) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}(t) - \frac{1}{h} \left(\int_{t-\tau(t)}^t \dot{\mathbf{x}}(s) ds \right)^\top \mathbf{R} \left(\int_{t-\tau(t)}^t \dot{\mathbf{x}}(s) ds \right) \\ &\quad + 2 \left(\mathbf{x}^\top(t) \mathbf{P}_2^\top + \dot{\mathbf{x}}^\top(t) \mathbf{P}_3^\top \right) \left((\mathbf{A} + \mathbf{A}_1) \mathbf{x}(t) - \mathbf{A}_1 \int_{t-\tau(t)}^t \dot{\mathbf{x}}(s) ds - \dot{\mathbf{x}}(t) \right). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Definindo-se o vetor aumentado:

$$\eta(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \frac{1}{h} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{\mathbf{x}}(s) ds \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

a expressão (2.51) pode ser reescrita de forma compacta como:

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}_t) \leq \eta^\top(t) \Psi \eta(t) \leq -\alpha \|\mathbf{x}(t)\|^2, \quad (2.53)$$

para algum $\alpha > 0$, desde que:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_2^\top (\mathbf{A} + \mathbf{A}_1) + (\mathbf{A} + \mathbf{A}_1)^\top \mathbf{P}_2 & \mathbf{P} - \mathbf{P}_2^\top + (\mathbf{A} + \mathbf{A}_1)^\top \mathbf{P}_3 & -h \mathbf{P}_2^\top \mathbf{A}_1 \\ \star & -\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_3^\top & -h \mathbf{P}_3^\top \mathbf{A}_1 \\ \star & \star & -h \mathbf{R} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (2.54)$$

Nota-se que a *LMI* (2.54) é dependente do atraso, pois sua derivação faz uso explícito do limite superior de $\tau(t)$. Segundo (FRIDMAN, 2014), a factibilidade de (2.54) constitui condição suficiente para a estabilidade assintótica do sistema (2.40) para qualquer $\tau(t) \in [0, h]$, sem restrição sobre $\dot{\tau}(t)$. Esse resultado é enunciado no teorema a seguir.

Teorema 2.4. *O sistema (2.40) é assintoticamente estável para todo atraso variante no tempo $\tau(t) \in [0, h]$ se existem matrizes $\mathbf{P}$, $\mathbf{R} \succ 0$, $\mathbf{P}_2 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $\mathbf{P}_3 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ tais que a *LMI* (2.54) é factível.*

2.3 Fundamentos de Sistemas Chaveados

Um sistema chaveado, é definido pela composição de uma família de subsistemas e uma função de chaveamento que determina qual subsistema estará ativo em cada instante de tempo (SUN, 2006; LI; FU, 2017). De forma geral, um sistema chaveado é definido como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= f_{\sigma(t)}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_{\sigma(t)}(t), \mathbf{d}_{\sigma(t)}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) &= g_{\sigma(t)}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_{\sigma(t)}(t), \mathbf{w}_{\sigma(t)}(t)), \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ denota o estado e $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ denota a saída. A função de chaveamento, representada por σ , é constante por partes e mapeia um conjunto finito de índices de chaveamento $\mathcal{M} = \{1, \dots, m\} \subset \mathbb{Z}_{>0}$. A cada índice pertencente a $\mathcal{M}$ associa-se um subsistema específico da família $\mathcal{F} = \{(f_1, g_1), \dots, (f_m, g_m)\}$. Nessa família, para todo $k \in \mathcal{M}$, a dupla (f_k, g_k) define a dinâmica do k -ésimo subsistema (modo de operação ou estrutura) do sistema chaveado. Sendo assim, sob a condição $\sigma(t) = k$, define-se que $\mathbf{u}_k(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ denota a entrada de controle, enquanto $\mathbf{d}_k(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$ e $\boldsymbol{\omega}_k(t) \in \mathbb{R}^{n_\omega}$ representam as perturbações do k -ésimo modo. Esse arranjo estrutural tem seu diagrama de blocos ilustrado na Figura 1.

Para classes específicas de sistemas chaveados, o chaveamento pode ocorrer tanto entre as funções de controle quanto entre os próprios subsistemas (SUN; GE, 2011). No caso geral definido em (2.55), como cada subsistema possui uma lei de controle própria, o chaveamento atua diretamente sobre o conjunto formado pela dinâmica e por sua respectiva função de controle. De todo modo, um sistema chaveado não possui uma dinâmica global única, mas sim um conjunto de modos de operação. Cada configuração pode possuir sua própria lei de controle e perfis distintos de perturbação, sendo a transição entre esses regimes ditada por uma função de chaveamento específica (SUN, 2006).

Essa flexibilidade estrutural e a capacidade de assumir diferentes configurações são, precisamente, os fatores que viabilizam a aplicação desses sistemas em uma vasta gama de áreas tecnológicas (CHITOUR; MASON; SIGALOTTI, 2025). Na eletrônica de potência, por exemplo, essa abordagem descreve os modos de condução de semicondutores em conversores estáticos; em sistemas de energia, ela é essencial para modelar o comportamento da rede elétrica sob contingências ou falhas. Além disso, a modelagem por sistemas chaveados é vital em setores como o controle automotivo e o gerenciamento de tráfego aéreo, nos quais a alternância entre diferentes regimes dinâmicos é intrínseca à operação e à segurança do sistema (SUN, 2006; LIBERZON, 2005).

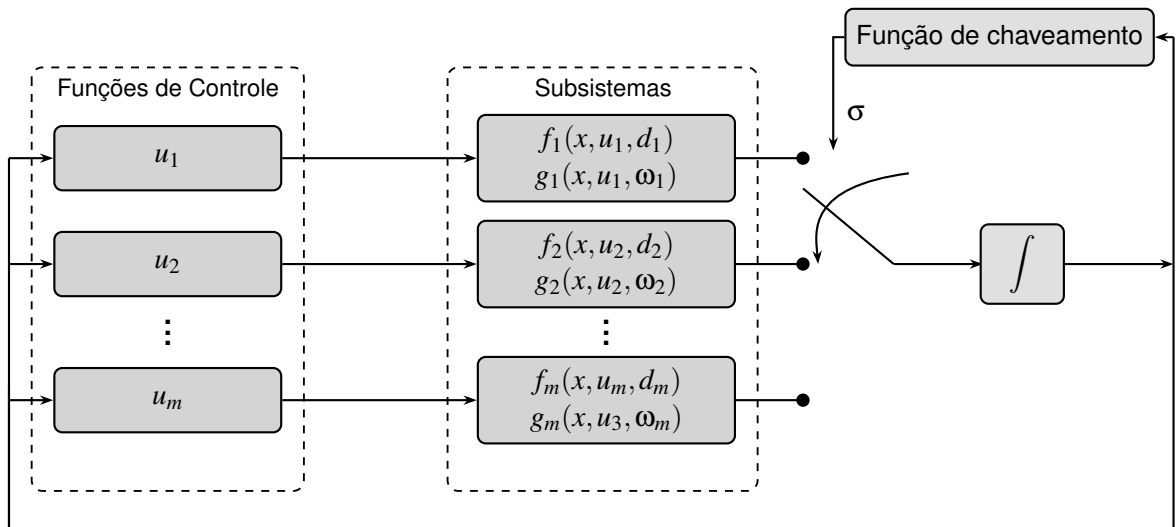


Figura 1 – Diagrama de blocos geral de um sistema chaveado.

Como apenas um subsistema atua por vez, a dinâmica do sistema chaveado corresponde àquela do subsistema ativo no instante atual (XIE; ZHENG; WANG, 2002). Dessa forma, com respeito à dinâmica do sistema chaveado, os subsistemas têm a função de contribuir com as dinâmicas locais, enquanto a função de chaveamento produz o chaveamento entre as dinâmicas locais (SUN, 2006). Comparado com sistemas não chaveados, a interação entre o chaveamento de dinâmicas locais pode originar propriedades no sistema chaveado que não estão presentes em nenhum dos subsistemas individualmente (LIBERZON, 2005).

De forma geral, de acordo com (SUN, 2006), a função de chaveamento pode apresentar dependência explícita do tempo, de seu valor presente $\sigma(t)$, do estado $\mathbf{x}(t)$, da saída $\mathbf{y}(t)$ ou de perturbações $\mathbf{d}_{\sigma(t)}(t)$ e $\mathbf{w}_{\sigma(t)}(t)$. Para formalizar essas dependências, adota-se a seguinte notação:

$$\sigma(t^+) = \varphi(t, \sigma(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{d}_{\sigma(t)}(t), \mathbf{w}_{\sigma(t)}(t)) \in \mathcal{M}, \quad (2.56)$$

em que $\sigma(t^+) = \lim_{s \rightarrow t^+} \sigma(s)$. A introdução da função auxiliar φ é fundamental para evitar o abuso de notação em relação à variável t e à própria função σ , permitindo expressar a regra de chaveamento como um mapa da sêxtupla $(t, \sigma(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{d}_{\sigma(t)}(t), \mathbf{w}_{\sigma(t)}(t))$. Essa construção torna explícito que o valor em t^+ é o índice mapeado com base nas informações disponíveis até o instante t . Tal distinção é estritamente necessária por dois motivos: (i) caso a função de chaveamento dependesse de σ , o índice associado à dinâmica local no instante t dependeria do valor mapeado por σ nesse mesmo instante, gerando uma dependência circular; (ii) caso a função de chaveamento dependesse da saída, o índice resultante dependeria de um valor de saída ainda não calculado.

Seja uma dupla de funções $(\mathbf{x}, \sigma)$ definidas no intervalo de tempo $[t_0, t_1)$, onde $\mathbf{x} : [t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ é absolutamente contínua. A função $\mathbf{x}$ é dita ser solução do sistema chaveado (2.55) no intervalo de tempo $[t_0, t_1)$, se satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, e para quase todo $t \in [t_0, t_1)$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= f_{\sigma(t)}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_{\sigma(t)}(t), \mathbf{d}_{\sigma(t)}(t)), \\ \mathbf{y}(t) &= g_{\sigma(t)}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_{\sigma(t)}(t), \mathbf{w}_{\sigma(t)}(t)), \\ \sigma(t^+) &= \varphi(t, \sigma(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{d}_{\sigma(t)}(t), \mathbf{w}_{\sigma(t)}(t)). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Considerando que os subsistemas são lineares, o sistema chaveado (2.55) é denominado sistema linear chaveado, sendo definido como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_{\sigma(t)}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{\sigma(t)}\mathbf{u}_{\sigma(t)}(t) + \mathbf{E}_{\sigma(t)}\mathbf{d}_{\sigma(t)}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_{\sigma(t)}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{\sigma(t)}\mathbf{u}_{\sigma(t)}(t) + \mathbf{F}_{\sigma(t)}\mathbf{w}_{\sigma(t)}(t), \end{aligned} \quad (2.58)$$

em que a sêxtupla $(\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k, \mathbf{D}_k, \mathbf{E}_k, \mathbf{F}_k)$ define a dinâmica do k -ésimo sistema local linear.

2.3.1 Classificação das Funções de Chaveamento

As propriedades dinâmicas de um sistema chaveado dependem diretamente da função de chaveamento (GEROMEL; COLANERI; BOLZERN, 2008). Para uma mesma família de

subsistemas, diferentes funções de chaveamento geram sistemas chaveados com propriedades dinâmicas distintas (LIBERZON; HESPANHA; MORSE, 1999). Por exemplo, o chaveamento entre subsistemas instáveis pode resultar em um sistema chaveado assintoticamente estável, sendo a recíproca também verdadeira. Essa característica permite a obtenção de propriedades dinâmicas complexas, típicas de sistemas não lineares, tais como caos, múltiplos ciclos limite e convergência ou divergência em tempo finito, mesmo quando todos os subsistemas constituintes são estritamente lineares (LIBERZON, 2005; SUN, 2006). Por isso, faz-se necessária a classificação dos tipos mais comuns de funções de chaveamento, excluindo-se a possibilidade de relações não causais (SUN, 2006).

2.3.1.1 Função de Chaveamento Estrictamente Dependente do Tempo

Uma função de chaveamento é classificada como estritamente dependente do tempo se for definida apenas em função dessa variável. Os membros dessa classe mapeiam o domínio $[t_0, t_f)$ no conjunto de índices $\mathcal{M}$, com $t_0 < t_f < \infty$, sob a seguinte notação:

$$\sigma : [t_0, t_f) \rightarrow \mathcal{M}. \quad (2.59)$$

Vale ressaltar que a ausência de dependência do seu valor presente $\sigma(t)$, do estado $\mathbf{x}(t)$ ou da saída $\mathbf{y}(t)$ implica que o valor assumido por essa lei no instante t é determinado exclusivamente pela variável temporal. Desse modo, o mapeamento realizado por σ caracteriza-se como independente da dinâmica do sistema (SUN, 2006).

2.3.1.2 Função de Chaveamento Orientada pelo Tempo

Uma função de chaveamento é classificada como orientada ao tempo se for definida em função da variável temporal e de seu valor presente $\sigma(t)$. Os membros dessa classe de funções mapeiam o domínio $[t_0, t_f) \times \mathcal{M}$ no conjunto de índices $\mathcal{M}$, com $t_0 < t_f < \infty$, adotando a seguinte notação:

$$\sigma : [t_0, t_f) \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}. \quad (2.60)$$

É importante notar que, para os membros dessa classe de funções, devido à dependência do seu valor presente $\sigma(t)$, denota-se $\sigma(t^+) = \varphi(t, \sigma(t)) \in \mathcal{M}$.

2.3.1.3 Função de Chaveamento Orientada por Eventos

Uma função de chaveamento é classificada como orientada por eventos se sua definição não depender explicitamente da variável temporal. Como casos particulares de interesse, destacam-se:

- **Realimentação de estados:** A função é definida a partir do seu valor presente $\sigma(t)$ e do estado $\mathbf{x}(t)$. Os membros dessa subclasse mapeiam o domínio $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^{n_x}$ no conjunto de

índices $\mathcal{M}$, sob a seguinte notação:

$$\sigma : \mathcal{M} \times \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathcal{M}. \quad (2.61)$$

É importante notar que, para os membros dessa classe de funções, devido à dependência do seu valor presente $\sigma(t)$ e do estado $\mathbf{x}(t)$, denota-se $\sigma(t^+) = \varphi(\sigma(t), \mathbf{x}(t)) \in \mathcal{M}$.

- **Realimentação de saída:** A função é definida a partir de seu valor presente $\sigma(t)$ e da saída $\mathbf{y}(t)$. Os membros dessa subclasse mapeiam o domínio $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^{n_y}$ no conjunto de índices $\mathcal{M}$, sob a notação:

$$\sigma : \mathcal{M} \times \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathcal{M}. \quad (2.62)$$

É importante notar que, para os membros dessa classe de funções, devido à dependência do seu valor presente $\sigma(t)$ e da saída $\mathbf{y}(t)$, denota-se $\sigma(t^+) = \varphi(\sigma(t), \mathbf{y}(t)) \in \mathcal{M}$.

- **Realimentação dinâmica de saída:** A função é definida a partir do seu valor presente $\sigma(t)$, da saída $\mathbf{y}(t)$ e, possivelmente, das perturbações $\mathbf{d}_{\sigma(t)}(t)$ e $\mathbf{z}_{\sigma(t)}(t)$. Os membros dessa subclasse mapeiam o domínio composto $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_d} \times \mathbb{R}^{n_\omega}$ no conjunto de índices $\mathcal{M}$, sob a notação:

$$\sigma : \mathcal{M} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_d} \times \mathbb{R}^{n_\omega} \rightarrow \mathcal{M}. \quad (2.63)$$

É importante notar que, para os membros dessa classe de funções, devido à dependência do valor presente $\sigma(t)$ e da saída $\mathbf{y}(t)$, denota-se $\sigma(t^+) = \varphi(\sigma(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{d}(t), \boldsymbol{\omega}(t)) \in \mathcal{M}$.

Dados o estado inicial $\mathbf{x}_0$ e um sistema chaveado (2.55), o fato de uma função de chaveamento orientada por eventos gerar uma única função de chaveamento estritamente dependente do tempo decorre da existência e da unicidade de solução do sistema (2.55). Contudo, ainda que a existência e a unicidade de solução sejam satisfeitas, é importante notar que, fixada a condição inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$, diferentes funções de chaveamento podem ser geradas com respeito a distintos sistemas chaveados.

2.3.1.4 Função de Chaveamento por Realimentação Pura de Estado (ou Saída)

Uma função de chaveamento é classificada como orientada por realimentação pura de estados (ou saída) se for definida apenas em função do estado $\mathbf{x}(t)$ (ou da saída $\mathbf{y}(t)$). Os membros dessa classe de funções mapeiam o domínio $\mathbb{R}^{n_x}$ (ou $\mathbb{R}^{n_y}$) no conjunto de índices $\mathcal{M}$, sob a seguinte notação:

$$\sigma : \mathbb{R}^{n_x} \text{ (ou } \mathbb{R}^{n_y}) \rightarrow \mathcal{M}. \quad (2.64)$$

É importante notar que, para os membros dessa classe de funções, devido à dependência do estado $\mathbf{x}(t)$ (ou $\mathbf{y}(t)$), denota-se $\sigma(t^+) = \varphi(\mathbf{x}(t)) \in \mathcal{M}$ (ou $\sigma(t^+) = \varphi(\mathbf{y}(t)) \in \mathcal{M}$).

Um exemplo típico de função de chaveamento por realimentação de estados é a lei de chaveamento de mínima energia, dada por:

$$\sigma(t^+) = \arg \min_{i \in \mathcal{M}} \{ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}_i \mathbf{x}(t) \}, \quad (2.65)$$

que seleciona o índice do subsistema pertencente a $\mathcal{F}$ que minimiza o valor da função de Lyapunov quadrática entre os m subsistemas.

Uma função de chaveamento por realimentação de estado (ou de saída) é dita determinante em $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$ no intervalo $[t_0, t_f)$ dados e fixados, com respeito a um sistema chaveado (2.55) igualmente fixado, se ela gera uma única função de chaveamento estritamente dependente do tempo definida em $[t_0, t_f)$. Adicionalmente, tal função é classificada como completamente determinante sobre $[t_0, t_f)$ se, para qualquer condição inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$ e qualquer instante inicial $t'_0 \in [t_0, t_f)$ dados e fixados, ela gerar uma única função de chaveamento estritamente dependente do tempo definida sobre $[t'_0, t_f)$. Como caso especial, uma função de chaveamento estritamente dependente do tempo definida em $[t_0, t_f)$ gera a si mesma. Sendo um mapa puramente temporal, ela se classifica, por definição, como completamente determinante sobre o referido intervalo (SUN, 2006).

2.3.2 Boa Definição de uma Função de Chaveamento

De acordo com (SUN, 2006), uma função de chaveamento estritamente dependente do tempo é dita bem definida em $[t_0, t_f)$ se for definida em todo esse intervalo e se, para todo $t \in [t_0, t_f)$, os limites laterais $\lim_{s \rightarrow t^+} \sigma(s)$ e $\lim_{s \rightarrow t^-} \sigma(s)$ existirem. Adicionalmente, em qualquer subintervalo finito de $[t_0, t_f)$, deve haver apenas um número finito de instantes de chaveamento.

Definição 2.3 ((SUN, 2006)). Para o sistema chaveado (2.55), um instante de tempo t é denominado instante de chaveamento se $\lim_{s \rightarrow t^-} \sigma(s) \neq \lim_{s \rightarrow t^+} \sigma(s)$.

Sendo assim, para uma função de chaveamento σ bem definida, o conjunto de instantes de chaveamento, definido por:

$$\{t \in [t_0, t_f) : \lim_{s \rightarrow t^-} \sigma(s) \neq \lim_{s \rightarrow t^+} \sigma(s)\}, \quad (2.66)$$

é finito em qualquer subintervalo finito de $[t_0, t_1)$.

Em sistemas chaveados de tempo contínuo, a ocorrência de um instante de chaveamento implica, necessariamente, um instante de descontinuidade. Essa relação, contudo, configura apenas uma condição suficiente, mas não necessária (SUN, 2006). Tome como contraexemplo a função:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in \mathbb{N} \\ 2, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.67)$$

a qual exibe infinitos pontos de descontinuidade no intervalo $[t_0, \infty)$. Dado que tais pontos temporais isolados não caracterizam instantes de chaveamento, conclui-se que a função de chaveamento em questão é bem definida.

A propriedade de boa definição para funções de chaveamento genéricas subdivide-se em três níveis: pontual, local e global. No contexto pontual, sob um sistema chaveado fixo, a função é dita bem definida em um estado inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$ sobre um intervalo $[t_0, t_f)$ dados e fixados se, além de ser determinante nesse estado inicial, a função de chaveamento estritamente dependente do tempo por ela gerada for bem definida sobre $[t_0, t_f)$. A transição para o nível local ocorre quando essa mesma propriedade é satisfeita para todo $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$, qualificando a função como bem definida sobre o intervalo $[t_0, t_f)$. Por fim, atinge-se o nível global (ou completamente bem definido) se a validação local estender-se a qualquer intervalo temporal $[t_0, t_f)$ arbitrado dentro dos limites $-\infty < t_0 < t_f \leq \infty$ (SUN, 2006).

2.3.3 Boa Posição de um Sistema Chaveado

A garantia de existência e unicidade de soluções é um requisito fundamental para determinar a propriedade de bom posicionamento de uma estrutura chaveada. No contexto pontual, sob uma função de chaveamento fixa, diz-se que o sistema é bem posto em um estado $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$ e intervalo $[t_0, t_f)$ dados e fixados se, para toda entrada $\mathbf{u}$ contínua por partes e localmente integrável, a respectiva função de chaveamento associada mantiver-se bem definida, assegurando simultaneamente uma única trajetória de solução para o sistema sobre o referido intervalo. A transição para o nível local ocorre quando essa exigência é atendida sobre $[t_0, t_f)$ para toda condição inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$, qualificando o sistema como bem posto sobre o intervalo. Por fim, atinge-se o nível global (ou completamente bem posto) se a validação local for observada para todo intervalo $[t_0, t_f)$ concebível dentro dos limites $-\infty < t_0 < t_f \leq \infty$ (SUN, 2006).

Considere o seguinte sistema linear chaveado:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_{\sigma(t)}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{\sigma(t)}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_x}, \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_{\sigma(t)}\mathbf{x}(t),\end{aligned}\tag{2.68}$$

onde a entrada de controle é contínua por partes e globalmente integrável, e a função de chaveamento é definida por:

$$\sigma(t^+) = \varphi(t, \sigma(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)).\tag{2.69}$$

Particularmente no cenário dos sistemas lineares chaveados representados por (2.68) e sob a lei de chaveamento (2.69), estabelece-se uma relação de equivalência fundamental. Conforme demonstrado em (SUN, 2006), a propriedade de bom posicionamento pontual do sistema em $\mathbf{x}_0$ sobre o intervalo $[t_0, t_f)$ é equivalente ao fato de a função de chaveamento ser bem definida nesse mesmo contexto pontual. Por conseguinte, ambas as condições são indissociáveis da existência e unicidade de um par único $(\mathbf{x}, \sigma)$ sobre $[t_0, t_f)$, em que a função

de estado $\mathbf{x} : [t_0, t_f) \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ caracteriza-se como uma função absolutamente contínua e a função de chaveamento $\sigma : [t_0, t_f) \rightarrow \mathcal{M}$ mostra-se bem definida. Esse par satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ e valida o conjunto de equações dinâmicas do sistema para quase todo instante $t \in [t_0, t_f)$.

2.3.4 Sequência de Chaveamento

Seja uma função de chaveamento estritamente dependente do tempo e bem definida no intervalo $[t_0, t_f)$. Ao se considerar o conjunto de instantes de chaveamento de σ em $[t_0, t_f)$, dado por $\{t_0, t_1, \dots, t_l\}$ com $t_0 < t_1 < \dots < t_l < t_f$, este pode ser escrito na forma compacta $\{t_i\}_{i=0}^l$, sendo caracterizado pela sequência de instantes de chaveamento t_i para todo $i \in \{0, 1, \dots, l\}$ (SUN, 2006). Adicionalmente, o conjunto de índices de chaveamento $\{\sigma(t_0), \sigma(t_1^+), \dots, \sigma(t_l^+)\}$ pode ser denotado compactamente por $\{\sigma(t_0)\} \cup \{\sigma(t_i^+)\}_{i=1}^l$.

A partir dessas definições, o conjunto $\{(t_0, \sigma(t_0)), (t_1, \sigma(t_1^+)), \dots, (t_l, \sigma(t_l^+))\}$, denominado conjunto de chaveamento, admite a escrita compacta $\{(t_0, \sigma(t_0))\} \cup \{(t_i, \sigma(t_i^+))\}_{i=1}^l$. Caso a função de chaveamento seja gerada por uma lei que possua o estado como um de seus argumentos, o respectivo conjunto de chaveamento pode ser estendido para incorporar a condição inicial, sendo expresso na forma $\{\mathbf{x}_0, (t_0, \sigma(t_0))\} \cup \{(t_i, \sigma(t_i^+))\}_{i=1}^l$ (SUN, 2006).

2.3.5 Solução de Sistemas Lineares Chaveados

Especificamente, como consideramos que os subsistemas de controle por modos deslizantes são lineares e invariantes no tempo, é necessário agora apresentar o procedimento para a obtenção da solução para tal classe de sistemas chaveados. Embora a obtenção de soluções analíticas para sistemas não lineares chaveados represente um desafio complexo e, frequentemente, intransponível, o cenário para sistemas lineares chaveados que cumprem a propriedade de bom posicionamento é consideravelmente mais favorável, permitindo a dedução de uma solução em forma fechada (SUN, 2006). Para ilustrar essa formulação, considere o sistema linear chaveado descrito por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_\sigma \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_\sigma \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_x}. \quad (2.70)$$

Considere que a função de chaveamento seja bem definida e que seu respectivo conjunto de chaveamento seja $\{\mathbf{x}_0, (t_0, i_0), (t_1, i_1), \dots, (t_l, i_l)\}$, em que $\{i_0, i_1, \dots, i_l\}$ denota o conjunto de índices de chaveamento. Durante o subintervalo $[t_0, t_1)$, o subsistema com índice i_0 está ativo, estabelecendo o seguinte problema de valor inicial para o sistema linear chaveado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{i_0} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{i_0} \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_x}. \quad (2.71)$$

A função de estado, que satisfaz o problema de valor inicial (2.71) para todo $t \in [t_0, t_1)$, é a solução do sistema linear chaveado dada por:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_{i_0}(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}_{i_0}(t-\tau)} \mathbf{B}_{i_0} \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (2.72)$$

No limite superior do intervalo $[t_0, t_1)$, denotado por $t = t_1$, a continuidade imposta à trajetória de estado exige que:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1) = e^{\mathbf{A}_{i_0}(t_1-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{\mathbf{A}_{i_0}(t_1-\tau)}\mathbf{B}_{i_0}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \quad (2.73)$$

Subsequentemente, ao longo do intervalo $[t_1, t_2)$, o subsistema com índice i_1 está ativo, de modo que o problema de valor inicial para o sistema linear chaveado é dado por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{i_1}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{i_1}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_x}. \quad (2.74)$$

Ao mapear a solução para esse novo intervalo, incorpora-se o estado alcançado no modo anterior, $\mathbf{x}_1$. Sendo assim, para todo $t \in [t_1, t_2)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}_{i_1}(t-t_1)}\mathbf{x}_1 + \int_{t_1}^t e^{\mathbf{A}_{i_1}(t-\tau)}\mathbf{B}_{i_1}\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}_{i_1}(t-t_1)}\left(e^{\mathbf{A}_{i_0}(t_1-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{\mathbf{A}_{i_0}(t_1-\tau)}\mathbf{B}_{i_0}\mathbf{u}(\tau)d\tau\right) + \int_{t_1}^t e^{\mathbf{A}_{i_1}(t-\tau)}\mathbf{B}_{i_1}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (2.75)$$

De maneira análoga, no limite superior do intervalo $[t_1, t_2)$, denotado por $t = t_2$, a continuidade imposta à trajetória de estado exige que:

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t_2) = e^{\mathbf{A}_{i_1}(t_2-t_1)}\mathbf{x}_1 + \int_{t_1}^{t_2} e^{\mathbf{A}_{i_1}(t_2-\tau)}\mathbf{B}_{i_1}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \quad (2.76)$$

Seguindo essa estratégia iterativa para os intervalos subsequentes, a generalização analítica da solução do problema de valor inicial para qualquer instante contido em um subintervalo arbitrário, $t \in [t_k, t_{k+1})$, pode ser expressa em forma fechada como (SUN, 2006):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}_{i_k}(t-t_k)}e^{\mathbf{A}_{i_{k-1}}(t_k-t_{k-1})}\dots e^{\mathbf{A}_{i_1}(t_2-t_1)}e^{\mathbf{A}_{i_0}(t_1-t_0)}\mathbf{x}_0 \\ &\quad + e^{\mathbf{A}_{i_k}(t-t_k)}\dots e^{\mathbf{A}_{i_1}(t_2-t_1)}\int_{t_0}^{t_1} e^{\mathbf{A}_{i_0}(t_1-\tau)}\mathbf{B}_{i_0}\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ &\quad + \dots + e^{\mathbf{A}_{i_k}(t-t_k)}\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\mathbf{A}_{i_{k-1}}(t_k-\tau)}\mathbf{B}_{i_{k-1}}\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_{t_k}^t e^{\mathbf{A}_{i_k}(t-\tau)}\mathbf{B}_{i_k}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (2.77)$$

2.4 Fundamentos de Controle por Modos Deslizantes

No controle por modos deslizantes, o chaveamento atua diretamente nas funções de controle. Assim, embora o sistema em malha aberta não possua uma natureza chaveada, em malha fechada ele se torna um sistema chaveado, cujo comportamento de alternância entre os subsistemas (também denominados modos de operação ou estruturas) é definido de acordo com a posição da trajetória de estado com respeito à região de chaveamento pré-definida no espaço de estados (UTKIN, 1992)¹. O enfoque dado ao mecanismo de chaveamento nesta tese tem

¹ Devido a essa alternância de estruturas, o controle por modos deslizantes é seminalmente conhecido na literatura clássica como uma abordagem de controle por sistemas de estrutura variável (UTKIN, 1992).

por objetivo deixar claro que o controle por modos deslizantes constitui, fundamentalmente, um método de controle chaveado. De fato, a abordagem por modos deslizantes constitui uma técnica de controle chaveado que pertence a uma classe mais ampla e robusta de modelagem e análise, denominada controle de sistemas híbridos (GOEBEL; SANFELICE; TEEL, 2012; LIBERZON, 2003). O objetivo do controle por modos deslizantes é forçar deliberadamente a convergência das trajetórias de estados para a região de chaveamento, denominada região de modos deslizantes (UTKIN et al., 2020). Sendo assim, o modo deslizante é o movimento da trajetória de estado realizado nessa região. A existência do modo deslizante é garantida se, de todos os lados dessa região, os campos vetoriais dos subsistemas estiverem direcionados para a região de modos deslizantes (UTKIN, 1992). Essa condição garante que a entrada de controle force a convergência das trajetórias de estados para a região de modos deslizantes (MORENO, 2011).

Seja o seguinte sistema não linear:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), u(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad (2.78)$$

onde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ denota o estado e $u(t) \in \mathbb{R}$ denota a entrada. Para uma maior interpretabilidade dos fundamentos de controle por modos deslizantes, adota-se que a entrada pertence ao espaço euclidiano unidimensional.

O campo vetorial $f : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$, que define o sistema (2.78), é assumido como contínuo no sentido de Lipschitz com respeito ao seu primeiro argumento². A região de modos deslizantes é definida como:

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : s(\mathbf{x}(t)) = 0\}, \quad (2.79)$$

onde $s(\mathbf{x}(t)) \in \mathbb{R}$ denota a variável deslizante. A região de modos deslizantes $\mathcal{S}$ divide o espaço de estados em duas regiões: $\mathcal{S}^+ = \{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : s(\mathbf{x}(t)) > 0\}$ e $\mathcal{S}^- = \{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : s(\mathbf{x}(t)) < 0\}$ (SHTESEL et al., 2014).

A função de controle por modos deslizantes é definida como:

$$u(t) = \begin{cases} u^+(t), & \text{se } s(\mathbf{x}(t)) > 0 \\ u^-(t), & \text{se } s(\mathbf{x}(t)) < 0, \end{cases} \quad (2.80)$$

onde as funções de controle u^+ e u^- , com $u^+ \neq u^-$, são contínuas em seus respectivos domínios, $\mathcal{S}^+$ e $\mathcal{S}^-$. Como a função de controle u é definida por partes, o campo vetorial em malha fechada $f_c(\mathbf{x}(t))$ é expresso como:

$$f_c(\mathbf{x}(t)) = \begin{cases} f_c^+(\mathbf{x}(t)), & \text{se } s(\mathbf{x}(t)) > 0 \\ f_c^-(\mathbf{x}(t)), & \text{se } s(\mathbf{x}(t)) < 0. \end{cases} \quad (2.81)$$

² Mais especificamente, assume-se que a função vetorial f seja localmente contínuo no sentido de Lipschitz em relação ao estado $\mathbf{x}(t)$, o que assegura, antes da convergência à região de modos deslizantes, o cumprimento das condições de regularidade para a aplicação dos teoremas clássicos de existência e unicidade de soluções (UTKIN, 1992).

De acordo com (2.80), a função de controle u torna-se descontínua na região de modos deslizantes $\mathcal{S}$, a qual constitui o conjunto de descontinuidade do sistema (UTKIN, 1992). Consequentemente, o campo vetorial $f_c(\mathbf{x}(t))$ também é descontínuo em $\mathcal{S}$, caracterizando o sistema em malha fechada como descontínuo sobre essa região (SHTESSSEL et al., 2014). Dessa forma, a existência e a unicidade de soluções do sistema (2.78) em malha fechada não podem ser garantidas por meio dos teoremas clássicos que garantem tais propriedades comportamentais³ (FILIPPOV, 1967). Para analisar as soluções na região de modos deslizantes, existem as abordagens axiomática e física, que solucionam o sistema em uma vizinhança dessa região por meio da regularização da função de controle (UTKIN, 1992). Adicionalmente, para solucionar o sistema exatamente sobre a região de descontinuidade, as soluções podem ser compreendidas no sentido de Filippov ou por meio do método do controle equivalente de Utkin (UTKIN, 1992).

2.4.1 Dinâmica de Modo Deslizante pelo Método de Filippov

Existem diversas abordagens para tratar sistemas com descontinuidade no lado direito⁴ (UTKIN, 1992). No entanto, a proposta de Filippov assume explicitamente a presença da descontinuidade no sistema em malha fechada (FILIPPOV, 1988). O seu método considera que a dinâmica do sistema em malha fechada pertence a uma inclusão diferencial, denominada inclusão diferencial de Filippov:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \in \mathcal{F}(\mathbf{x}(t)). \quad (2.82)$$

Uma justificativa para substituir a dinâmica em malha fechada (2.81) pela inclusão diferencial $\mathcal{F}$ é que esta contém todos os vetores do campo vetorial do sistema em malha fechada em uma δ -vizinhança de cada ponto de $\mathcal{S}$ (FILIPPOV, 1988). Fora da região de modos deslizantes $\mathcal{S}$, a inclusão diferencial $\mathcal{F}$ torna-se degenerada, consistindo apenas no campo vetorial f_c^+ se $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{S}^+$, ou no campo f_c^- se $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{S}^-$ (UTKIN, 1992).

Seja $\mathbf{x}^0$ um ponto arbitrário de $\mathcal{S}$. Uma vez que todos os vetores de uma δ -vizinhança suficientemente pequena de $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{S}$ pertencem a $\mathcal{F}$, essa inclusão diferencial é definida pela combinação convexa dos limites dos campos vetoriais f_c^+ e f_c^- quando a trajetória de estado se aproxima de $\mathbf{x}^0$ (SHTESSSEL et al., 2014). Esses limites são expressos como:

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}(t) \in \mathcal{S}^+ \\ \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}^0}} f_c^+(\mathbf{x}(t)) = f_c^{+0}, \quad \lim_{\substack{\mathbf{x}(t) \in \mathcal{S}^- \\ \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}^0}} f_c^-(\mathbf{x}(t)) = f_c^{-0}. \quad (2.83)$$

³ Os teoremas clássicos referidos incluem o Teorema de Picard–Lindelöf (ou Cauchy–Lipschitz), que exige continuidade de Lipschitz local para garantir existência e unicidade, e o Teorema de Peano, que assegura apenas a existência sob a hipótese de continuidade estrita do campo vetorial. Ademais, falha também o Teorema de Existência de Carathéodory; embora este flexibilize as condições de regularidade permitindo descontinuidades isoladas no tempo, ele ainda pressupõe a continuidade do campo vetorial em relação ao estado $\mathbf{x}$ (KHALIL, 2002; FILIPPOV, 1988). Como o controle por modos deslizantes introduz uma lei de controle descontínua em $\mathcal{S}$, todas essas formulações clássicas são violadas.

⁴ A expressão "descontinuidade no lado direito" refere-se à falta de continuidade na função vetorial f que define o membro direito da equação diferencial ordinária $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), u(t))$. Em sistemas de controle por modos deslizantes, essa característica é introduzida intencionalmente por meio de leis de controle descontínuas, o que viola o teorema clássico de Picard–Lindelöf para a existência e unicidade de soluções (UTKIN, 1992).

Toda trajetória em $\mathcal{S}^+$ cruza $\mathcal{S}$ antes de alcançar $\mathcal{S}^-$, e a recíproca também é verdadeira. Essa observação implica que o segmento de reta que conecta os vetores f_c^{+0} e f_c^{-0} intersecta $\mathcal{S}$, como pode ser visto na Figura 2 (SHTESSEL et al., 2014). Mais ainda, seja o espaço tangente $T_{\mathbf{x}^0}\mathcal{S}$ à região $\mathcal{S}$ no ponto $\mathbf{x}^0$ (BANDYOPADHYAY; BEHERA, 2018). O segmento de reta que conecta f_c^{+0} e f_c^{-0} também intersecta o espaço tangente $T_{\mathbf{x}^0}\mathcal{S}$ (UTKIN, 1992). O ponto de interseção define o vetor de modo deslizante f_c^0 , que possui duas propriedades fundamentais:

$$f_c^0 \in \text{conv}\{f_c^{+0}, f_c^{-0}\}, \quad \text{e} \quad f_c^0 \in T_{\mathbf{x}^0}\mathcal{S}, \quad (2.84)$$

onde $\text{conv}\{f_c^{+0}, f_c^{-0}\}$ denota o fecho convexo da dupla (f_c^{+0}, f_c^{-0}) , ou seja, denota o conjunto convexo definido por todas as combinações convexas de f_c^{+0} e f_c^{-0} , que é o segmento de reta que conecta esses dois vetores. De acordo com (FILIPPOV, 1988), esse segmento define o conjunto de todos os vetores da inclusão diferencial $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ em uma δ -vizinhança.

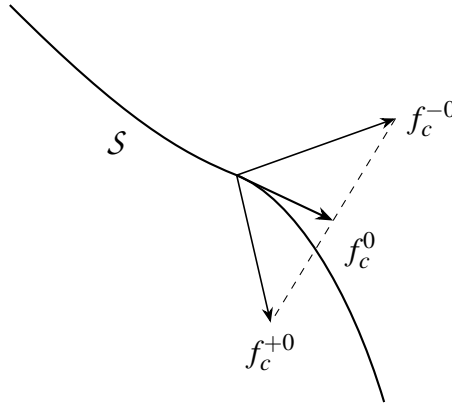


Figura 2 – Método de Filippov.

O vetor f_c^0 é a única combinação convexa dos vetores f_c^{+0} e f_c^{-0} que permanece tangente à região $\mathcal{S}$ (SHTESSEL et al., 2014). A interseção entre $\text{conv}\{f_c^{+0}, f_c^{-0}\}$ e o espaço tangente $T_{\mathbf{x}^0}\mathcal{S}$ representa, portanto, a dinâmica viável para descrever o sistema em $\mathcal{S}$ e bem-definida no sentido de Filippov (FILIPPOV, 1988). Portanto, para todo $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{S}$, adotando a mesma notação utilizada para $\mathbf{x}^0$ (visto que este foi definido de forma arbitrária), define-se que:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f_c^0(\mathbf{x}(t)) \quad (2.85)$$

é a equação do sistema na região de modos deslizantes.

A solução de (2.85) é a solução do sistema (2.78) em malha fechada na região de modos deslizantes, no sentido de Filippov (FILIPPOV, 1967). Uma vez que $f_c^{-0} \neq f_c^0$ e $f_c^{+0} \neq f_c^0$, o campo vetorial f_c^0 permanece tangente a $\mathcal{S}$ e é denominado dinâmica de modo deslizante (BANDYOPADHYAY; BEHERA, 2018). Tal campo vetorial define as propriedades do sistema enquanto ele evolui sobre $\mathcal{S}$. A construção de soluções no sentido de Filippov é essencial na teoria de sistemas de controle por modos deslizantes, pois garante a existência de soluções do sistema (2.78) em malha fechada na região de modos deslizantes.

A seguir, discute-se o procedimento para a obtenção de f_c^0 . Previamente, contudo, é necessário garantir a existência do modo deslizante. No ponto $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{S}$, o vetor normal a $\mathcal{S}$ é dado por $n(\mathbf{x}^0) = \nabla s(\mathbf{x}^0)$. As projeções dos vetores f_c^{+0} e f_c^{-0} na direção normal $n(\mathbf{x}^0)$ são definidas como:

$$(f_c^{+0})^N = \nabla s(\mathbf{x}^0) \cdot f_c^{+0}, \quad (f_c^{-0})^N = \nabla s(\mathbf{x}^0) \cdot f_c^{-0}. \quad (2.86)$$

Se os sinais dessas projeções forem opostos, satisfazendo a condição $(f_c^{+0})^N \cdot (f_c^{-0})^N < 0$, a existência do modo deslizante em $\mathcal{S}$ é garantida (SHTESSSEL et al., 2014).

Após garantida a existência do modo deslizante, o vetor f_c^0 é obtido, para cada $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{S}$, pela combinação convexa de f_c^{+0} e f_c^{-0} :

$$f_c^0(\mathbf{x}^0) = (1 - \alpha)f_c^{-0} + \alpha f_c^{+0}, \quad \text{com } \alpha \in [0, 1], \quad (2.87)$$

que é perpendicular ao vetor normal a $\mathcal{S}$, ou seja:

$$\nabla s(\mathbf{x}^0) \cdot f_c^0 = 0. \quad (2.88)$$

Substituindo (2.87) em (2.88):

$$\nabla s(\mathbf{x}^0) \cdot [(1 - \alpha)f_c^{-0} + \alpha f_c^{+0}] = 0. \quad (2.89)$$

Solucionando (2.89) para α :

$$\alpha = \frac{\nabla s(\mathbf{x}^0) \cdot f_c^{-0}}{\nabla s(\mathbf{x}^0) \cdot f_c^{-0} - \nabla s(\mathbf{x}^0) \cdot f_c^{+0}}. \quad (2.90)$$

Portanto, o campo vetorial do sistema (2.78) em malha fechada na região de modos deslizantes $\mathcal{S}$, no sentido de Filippov, é obtido por (2.87), com o parâmetro α definido em (2.90). Assim, garante-se que f_c^0 permaneça tangente a $\mathcal{S}$ para cada $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{S}$, mantendo, consequentemente, a trajetória de estados nessa região (SHTESSSEL et al., 2014).

Agora, a inclusão diferencial de Filippov é definida formalmente.

Definição 2.4 (Inclusão Diferencial de Filippov (SHTESSSEL et al., 2014)). A inclusão diferencial $\dot{\mathbf{x}}(t) \in \mathcal{F}(\mathbf{x}(t))$, com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, é chamada de inclusão diferencial de Filippov se o conjunto de vetores $\mathcal{F}(\mathbf{x}(t))$ for não vazio, fechado, convexo, localmente limitado e semicontínuo superiormente.

As soluções compreendidas no sentido de Filippov são funções absolutamente contínuas, sendo diferenciáveis em quase todos os instantes. Embora seja garantida a existência de soluções no sentido de Filippov, a unicidade não é garantida (SHTESSSEL et al., 2014).

Para $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{S}$, a inclusão diferencial de Filippov corresponde ao menor conjunto convexo que contém todos os valores-limite do campo vetorial $f_c(\mathbf{x}(t))$ quando $\mathbf{x}(t)$, pertencente a uma

δ -vizinhança de $\mathbf{x}^0$, tende a $\mathbf{x}^0$, de modo que $\mathbf{x}(t) \notin \mathcal{S}$ (SHTESSSEL et al., 2014; FILIPPOV, 1988). Esse conjunto é expresso como:

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}^0) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu(N)=0} \overline{\text{co}}\{f_c(\mathbf{x}(t)) : \mathbf{x}(t) \in B(\mathbf{x}^0, \delta) \setminus N\}, \quad (2.91)$$

onde $\mu(N) = 0$ indica que N é um conjunto de medida de Lebesgue nula (SHTESSSEL et al., 2014) e $B(\mathbf{x}^0, \delta)$ denota a δ -vizinhança de $\mathbf{x}^0$.

2.4.2 Dinâmica de Modo Deslizante pelo Método de Controle Equivalente

Uma outra forma de descrever a solução do sistema (2.78) em malha fechada na região de modos deslizantes é devida a V. I. Utkin, sendo denominada método de controle equivalente (UTKIN, 1992). De acordo com Utkin, durante o movimento deslizante existe uma entrada de controle equivalente, $u_{eq}(t)$, tal que o campo vetorial $f(\mathbf{x}(t), u_{eq}(t))$ é tangente à região $\mathcal{S}$ para todo $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{S}$. Logo,

$$\nabla s(t) \cdot f(\mathbf{x}(t), u_{eq}(t)) = 0. \quad (2.92)$$

Qualquer função $\mathbf{x}(t)$ absolutamente contínua que satisfizer $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), u_{eq}(t))$ e verificar (2.92) é também uma solução do sistema (2.78) em malha fechada na região de modos deslizantes, de acordo com o método de controle equivalente (UTKIN, 1992). Assim como a definição da inclusão diferencial é fundamental para o método de Filippov, no método do controle equivalente é essencial definir o campo vetorial $f(\mathbf{x}(t), u_{eq}(t))$ (UTKIN et al., 2020).

Seja $\mathbf{x}^0$ um ponto arbitrário de $\mathcal{S}$. A imagem de $\mathbf{x}^0$ por f_c é obtida ao variar a entrada de controle por modos deslizantes de $u^-(\mathbf{x}^0)$ a $u^+(\mathbf{x}^0)$, obtendo-se, por meio de uma ação afim, um arco de pontos. O vetor correspondente à entrada de controle equivalente, $f(\mathbf{x}^0, u_{eq}(\mathbf{x}^0))$, estará contido nesse campo vetorial e será tangente à região de modos deslizantes $\mathcal{S}$ em $\mathbf{x}^0$. O vetor $f(\mathbf{x}^0, u_{eq}(\mathbf{x}^0))$ pode ser geometricamente representado de modo que seu ponto de aplicação esteja em $\mathbf{x}^0$ e o seu ponto final esteja em um determinado ponto desse arco, conforme ilustrado na Figura 3 (UTKIN, 1992).

Comparando os métodos de Filippov e de Utkin, observa-se que ambos coincidem em dois casos fundamentais:

- Quando a extremidade do vetor $f(\mathbf{x}^0, u_{eq}(\mathbf{x}^0))$ situa-se no segmento de reta que conecta os campos vetoriais f_c^- e f_c^+ ;
- Quando o sistema é linear em relação à entrada de controle u , visto que, nessa condição, o conjunto de vetores admissíveis gerado por ambos os métodos reduz-se ao segmento de reta que une f_c^- a f_c^+ .

Nessas situações, as soluções obtidas via método de Filippov e via controle equivalente de Utkin são equivalentes, isto é, $f(\mathbf{x}^0, u_{eq}(\mathbf{x}^0)) = f_c^0(\mathbf{x}^0)$, onde $f_c^0(\mathbf{x}^0)$ pertence ao conjunto

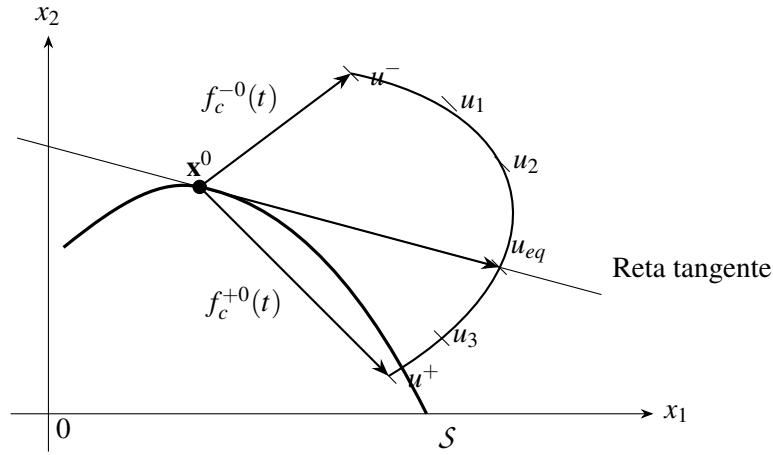


Figura 3 – Método de Controle Equivalente.

multivalorado da inclusão diferencial de Filippov. Fora desses cenários, as duas abordagens podem produzir dinâmicas distintas, sendo a formulação de Filippov mais geral, porém de aplicação analítica mais complexa (BANDYOPADHYAY; BEHERA, 2018).

2.4.3 Projeto de Controle por Modos Deslizantes de Primeira Ordem

Uma vez que o objetivo desta tese é propor uma abordagem de controle por modos deslizantes de primeira ordem, torna-se necessário definir essa classe de controle.

Definição 2.5 (Controle por Modos Deslizantes de Primeira Ordem (SHTESSEL et al., 2014; LEVANT, 1993)). Considere a variável deslizante $s(t)$ (a ser definida na Seção 2.4.3.1). O controle por modos deslizantes é dito de primeira ordem quando a entrada de controle $u(t)$, descontínua, possui grau relativo unitário em relação a $s(t)$, isto é, $u(t)$ aparece explicitamente em $\dot{s}(t)$, de modo que $\dot{s}(t)$ é descontínua nos instantes em que $s(t) = 0$, embora $s(t)$ permaneça contínua para todo t .

Comentário 2.4. A Definição 2.5 distingue o controle por modos deslizantes de primeira ordem das formulações de ordem superior, nas quais a descontinuidade é deslocada para derivadas de ordem mais elevada de $s(t)$, com o objetivo de atenuar o fenômeno de *chattering*⁵.

A operação do controle por modos deslizantes de primeira ordem compreende duas fases distintas. Na fase de alcance, a trajetória de estados, partindo de uma condição inicial, é conduzida em direção à região de modos deslizantes. Uma vez atingida essa região, tem início a fase deslizante, na qual a trajetória permanece confinada a ela, e sua dinâmica torna-se de ordem reduzida, invariante às incertezas e perturbações casadas, característica que confere ao método sua robustez essencial (SHTESSEL et al., 2014). Sendo assim, de acordo com (SHTESSEL et al., 2014), o projeto do controle por modos deslizantes de primeira ordem é realizado em duas etapas fundamentais:

⁵ O fenômeno do *chattering* é discutido na Seção 2.4.4

1. Projeto da região de modos deslizantes;
2. Projeto da função de controle por modos deslizantes.

2.4.3.1 Projeto da Região de Modos Deslizantes

Considere o sistema linear e invariante no tempo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{M}d(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad (2.93)$$

onde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_x}$. O termo $d(t) \in \mathbb{R}$ denota a perturbação casada e possui um limite superior conhecido, dado por $\sup_{t \geq 0} |d(t)| = d_{\max}$. A matriz $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n_x \times 1}$ satisfaz a condição de casamento e pode ser expressa como $\mathbf{M} = b\mathbf{B}$, na qual $b \in \mathbb{R}$ (EDWARDS; SPURGEON, 1998).

Definição 2.6 (Perturbação Casada (EDWARDS; SPURGEON, 1998)). A perturbação $d(t)$ é dita casada se o espaço imagem da matriz $\mathbf{M}$ estiver contido no espaço imagem da matriz $\mathbf{B}$, isto é, $I_m(\mathbf{M}) \subseteq I_m(\mathbf{B})$.

Comentário 2.5. Uma perturbação é dita não casada se não satisfizer a Definição 2.6.

A função deslizante $s : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como:

$$s(t) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t), \quad (2.94)$$

onde $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{1 \times n_x}$ é a matriz da variável deslizante e $s(t)$ é denominada variável deslizante. A região de modos deslizantes é definida como:

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : s(t) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t) = 0\}. \quad (2.95)$$

Antes de avançar com o restante do texto, é necessário definir formalmente o que é a propriedade denominada modo deslizante e de conjunto positivamente invariante.

Definição 2.7 (Modo Deslizante (SHTESSEL et al., 2014)). Os modos deslizantes são definidos como os movimentos das trajetórias de estado $\mathbf{x}(t)$ restritos a um conjunto positivamente invariante, denominado região de modos deslizantes em (2.95). Esse comportamento ocorre após $\mathbf{x}(t)$ convergir para $\mathcal{S}$ em tempo finito $t_r \geq 0$. Em outras palavras, a variável deslizante $s(t)$ alcança a condição $s(t) = 0$ em tempo finito $t_r \geq 0$ e nela permanece para todo $t \geq t_r$.

Comentário 2.6. Tendo em vista (2.95), afirmar que as trajetórias de estado $\mathbf{x}(t)$ convergem para a região de modos deslizantes $\mathcal{S}$ em tempo finito t_r é equivalente a dizer que as trajetórias da variável deslizante $s(t)$ convergem para $s(t) = 0$ nesse mesmo instante.

Comentário 2.7. Por meio de (2.95), nota-se que os modos deslizantes estão associados ao espaço nulo da matriz $\mathbf{G}$. Uma vez que a dimensão desse espaço nulo é $n_x - 1$, a dinâmica de modos deslizantes é de ordem reduzida (EDWARDS; SPURGEON, 1998).

Definição 2.8 (Conjunto Positivamente Invariante (KHALIL, 2002)). Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_x}$ é dito positivamente invariante em relação ao sistema dinâmico $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t))$ se, para qualquer condição inicial $\mathbf{x}(t_0) \in \Omega$, a solução correspondente $\mathbf{x}(t)$ satisfizer $\mathbf{x}(t) \in \Omega, \forall t \geq t_0$.

Supondo que a trajetória de estados esteja na região de modos deslizantes ideal, ou seja, $s(t) = \dot{s}(t) = 0$ para todo $t \geq t_r$, a substituição de $\dot{\mathbf{x}}(t)$ em $\dot{s}(t) = 0$ resulta em:

$$\dot{s}(t) = \mathbf{G}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{B}u(t) + \mathbf{G}\mathbf{B}d(t) = 0, \quad (2.96)$$

onde, para a simplificação dos resultados, definiu-se o escalar $b = 1$ (isto é, $\mathbf{M} = \mathbf{B}$).

Comentário 2.8. A matriz $\mathbf{G}$ deve ser projetada de modo que o produto matricial $\mathbf{G}\mathbf{B}$ seja não singular.

Solucionando (2.96) para $u(t)$ e considerando a relação estrutural $\mathbf{M} = b\mathbf{B}$, obtém-se a lei de controle equivalente:

$$u_{eq}(t) = -(\mathbf{G}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) - d(t). \quad (2.97)$$

Comentário 2.9. Note que a construção geométrica apresentada na Seção 2.4.2, baseada na variação contínua da entrada de controle entre u^- e u^+ , fundamenta a existência do controle equivalente por meio do fecho convexo dos campos vetoriais f_c^+ e f_c^- . Entretanto, a solução algébrica de $\dot{s}(t) = 0$ apresenta-se como uma forma alternativa e simplificada de obter $u_{eq}(t)$. Essa abordagem dispensa a análise exaustiva do arco de pontos ao longo de toda a região $\mathcal{S}$, permitindo que a dinâmica equivalente seja determinada diretamente a partir das matrizes de estado do sistema e da geometria da região de modos deslizantes (UTKIN, 1992).

Comentário 2.10. A utilização do controle equivalente destaca-se como uma ferramenta de projeto simplificadora, pois permite contornar a complexidade das inclusões diferenciais em favor de uma solução algébrica. Sob o ponto de vista físico, essa abordagem fundamenta a implementação prática do controle por modos deslizantes, uma vez que $u_{eq}(t)$ representa a componente de baixa frequência do termo descontínuo da função de controle, podendo ser extraída através de filtros passa-baixas para mitigar os efeitos do chaveamento de alta frequência (SHTESSEL et al., 2014).

Substituindo (2.97) em (2.93), obtém-se a dinâmica de modos deslizantes:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{G}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{G})\mathbf{A}\mathbf{x}(t). \quad (2.98)$$

Comentário 2.11. Em modo deslizante, o sistema torna-se, idealmente, completamente insensível à perturbação $d(t)$, desde que esta seja casada. Tal propriedade decorre do fato de o controle equivalente atuar diretamente no cancelamento das perturbações que agem no espaço imagem da matriz $\mathbf{B}$ (DRAŽENOVIC, 1969).

2.4.3.2 Projeto da Função de Controle por Modos Deslizantes

Partindo da equivalência apresentada no Comentário 2.6, pode-se afirmar que o objetivo do controle por modos deslizantes é forçar a convergência das trajetórias da variável deslizante para $s(t) = 0$ (SHTESSEL et al., 2014; EDWARDS; SPURGEON, 1998). Para tanto, considera-se a função candidata de Lyapunov:

$$V(t) = \frac{1}{2}s^2(t). \quad (2.99)$$

Diferenciando $V(t)$ com respeito ao tempo ao longo das trajetórias de estado do sistema (2.78), obtém-se:

$$\dot{V}(t) = s(t)\dot{s}(t) = s(t) (\mathbf{GAx}(t) + \mathbf{GB}u(t) + \mathbf{GB}d(t)). \quad (2.100)$$

A lei de controle por modos deslizantes é definida como:

$$u(t) = -(\mathbf{GB})^{-1}\mathbf{GAx}(t) - K(\mathbf{GB})^{-1}\text{sign}(s(t)), \quad (2.101)$$

onde $\text{sign}(\cdot)$ ⁶ denota a função sinal. Em (2.101), o termo $-(\mathbf{GB})^{-1}\mathbf{GAx}(t)$ corresponde à entrada de controle equivalente desconsiderando o termo da perturbação casada, visto que, em problemas reais, essa parcela é desconhecida (SHTESSEL et al., 2014). Por sua vez, o termo $K(\mathbf{GB})^{-1}\text{sign}(s(t))$ corresponde ao controle descontínuo, responsável por realizar o chaveamento entre os subsistemas (SHTESSEL et al., 2014).

Considerando que $\sup_{t \geq 0} |d(t)| = d_{\max}$, para que $\dot{V}(t)$ seja negativamente definida, o ganho de chaveamento K deve satisfazer $K > \|\mathbf{G}\|\|\mathbf{B}\|d_{\max} + \bar{\varphi}$, com $\bar{\varphi} > 0$ constante (SHTESSEL et al., 2014). Substituindo (2.101) em (2.100), obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= s(t)\dot{s}(t) \\ &= s(t) (\mathbf{GAx}(t) - \mathbf{GAx}(t) - K\text{sign}(s(t)) + \mathbf{GB}d(t)) \\ &= -K|s(t)| + s(t)\mathbf{GB}d(t) \\ &\leq -K|s(t)| + |s(t)|\|\mathbf{G}\|\|\mathbf{B}\|d_{\max} \\ &\leq -(K - \|\mathbf{G}\|\|\mathbf{B}\|d_{\max})|s(t)| \leq -\bar{\varphi}|s(t)| = -\sqrt{2}\bar{\varphi}V^{1/2}(t), \end{aligned} \quad (2.102)$$

para todo $s(t) \neq 0$.

A partir de (2.102), a desigualdade diferencial pode ser reescrita como $V^{-1/2}(t)\dot{V}(t) \leq -\sqrt{2}\bar{\varphi}$. Integrando ambos os membros no intervalo $[0, t_r]$ e considerando que $V(t_r) = 0$, obtém-se o tempo de alcance t_r até a região de modos deslizantes ideal, o qual é limitado superiormente por:

$$t_r \leq \frac{\sqrt{2}V^{1/2}(0)}{\bar{\varphi}}. \quad (2.103)$$

⁶ Para garantir a existência de soluções sobre a região de modos deslizantes ideal, a função sinal é estendida como um mapeamento multívoco, tal que $\text{sign}(0) \in [-1, 1]$.

2.4.4 O Fenômeno do *Chattering*

Apesar das propriedades de robustez determinística e rejeição total a perturbações casadas que tornam o controle por modos deslizantes uma das abordagens mais consagradas na teoria de controle não linear, a sua implementação enfrenta um obstáculo conhecido como *chattering* (LEE; UTKIN, 2007). O *chattering* define-se como um fenômeno de oscilações indesejadas de alta frequência e amplitude finita que se manifesta nas trajetórias de estado e na entrada de controle do sistema, quando em modos deslizantes (BARTOLINI; FERRARA; USAI, 2002). A compreensão analítica desse fenômeno exige a distinção clara entre a sua origem (física e computacional), a sua manifestação fenomenológica na malha fechada e a sua formalização matemática como uma propriedade de estabilidade orbital, historicamente tratada na literatura por meio do método da função descritiva e de abordagens correlatas no domínio da frequência (BOIKO; FRIDMAN; IRIARTE, 2005; JOHANSSON; BARABANOV; ÅSTRÖM, 2002). Sob essa perspectiva, a caracterização do *chattering* como um fenômeno e, simultaneamente, como uma propriedade comportamental da malha fechada, pode ser estruturada em três níveis fundamentais:

1. **As Causas Físicas e Computacionais:** Em ambientes de simulação, o *chattering* surge computacionalmente devido ao erro de solução numérica da equação diferencial, o qual é uma função direta do passo de integração (WANG; YU; CHEN, 2009). Já na prática, o fenômeno possui origem estritamente ligada à presença de dinâmicas parasitas, atrasos de tempo e perturbações não modeladas, as quais impossibilitam que a trajetória de estado permaneça estritamente na região de modos deslizantes ideal (SHITESSEL et al., 2014).
2. **A Resposta da Entrada de Controle:** Diante do desvio inevitável das trajetórias de estado com relação à região de modos deslizantes, a entrada de controle atua forçando as trajetórias de volta à região de modos deslizantes, com uma frequência de chaveamento que idealmente deveria tender ao infinito (LEVANT, 1993). Contudo, a eficácia dessa ação restauradora é severamente prejudicada por:
 - *Fatores Computacionais:* O período de amostragem finito e os atrasos de processamento e de comunicação de dispositivos digitais impedem a atualização contínua da lei de controle, impossibilitando que a frequência de chaveamento tenda ao infinito (SHITESSEL et al., 2014);
 - *Fatores Físicos:* Os limites de operação, os atrasos de transporte e de comunicação, e as bandas passantes limitadas de atuadores e sensores reais tornam impraticável o chaveamento em frequência infinita (FRIDMAN, 2001).

Portanto, devido aos fatores descritos, a entrada de controle opera sob uma frequência finita de chaveamento. Para reconduzir as trajetórias o mais rápido possível à região de modos deslizantes, esse chaveamento deve ocorrer em alta frequência (UTKIN, 1992).

3. **A Manifestação Final e a Propriedade Matemática:** Como a entrada de controle não chaveia com frequência que tende ao infinito devido aos fatores citados acima, a ação corretiva perde a robustez ideal diante dos desvios das trajetórias de estado, gerando um efeito contínuo de oscilação em torno da região de modos deslizantes. Sob a ótica comportamental do sistema dinâmico, o resultado em malha fechada é o estabelecimento de ciclos-limite de alta frequência e amplitude finita, confinando as trajetórias de estado a uma vizinhança delimitada da região de modos deslizantes ideal. A existência, a frequência e a amplitude dessa oscilação orbital podem ser formalmente previstas por meio do método da função descritiva (BOIKO; FRIDMAN; IRIARTE, 2005; BOIKO et al., 2007; JOHANSSON; BARABANOV; ÅSTRÖM, 2002).

2.4.5 Exemplo: Projeto de Controle de um Sistema Duplo Integrador

Considere o sistema de duplo integrador definido por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u(t) + d(t)), \quad (2.104)$$

em que $d(t) = 3 \sin(t)$ representa uma perturbação casada com limite superior conhecido.

O objetivo de controle consiste em forçar a convergência da trajetória de estados à região de modos deslizantes e, subsequentemente, garantir a estabilidade assintótica da origem. Para tanto, define-se a variável deslizante como:

$$s(t) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t), \quad (2.105)$$

onde $\mathbf{G} = [\lambda \ 1]$, com $\lambda > 0$. A lei de controle por modos deslizantes é projetada, a partir de (2.101), como:

$$u(t) = -(\mathbf{GB})^{-1}\mathbf{GA}\mathbf{x}(t) - k(\mathbf{GB})^{-1}\text{sgn}(s(t)) = -\lambda x_2(t) - k\text{sgn}(s(t)), \quad k > 0. \quad (2.106)$$

As simulações foram realizadas com os parâmetros $\lambda = 1$ e $k = 10 > \sup_{t \geq 0} |d(t)| = 3$, partindo da condição inicial $\mathbf{x}_0 = [2 \ -1]^T$. Adotou-se o método de integração de Euler com tamanho de passo fixo (10^{-3} s) para a solução numérica.

A trajetória exibida na Figura 4(a) ilustra a fase de alcance, na qual o estado inicial é forçado em direção à $s(t) = 0$. Uma vez atingida a superfície, a Figura 4(b) revela a presença do *chattering*, caracterizado por oscilações de alta frequência sobre a região de modos deslizantes.

Durante a fase deslizante, a dinâmica reduzida de primeira ordem governa a convergência dos estados para a origem, como verificado nas Figuras 5(a) e 5(b). Por fim, a Figura 5(c) apresenta a entrada de controle $u(t)$, evidenciando o esforço de chaveamento necessário para manter o sistema sobre a região de modos deslizantes e rejeitar a perturbação $d(t)$.

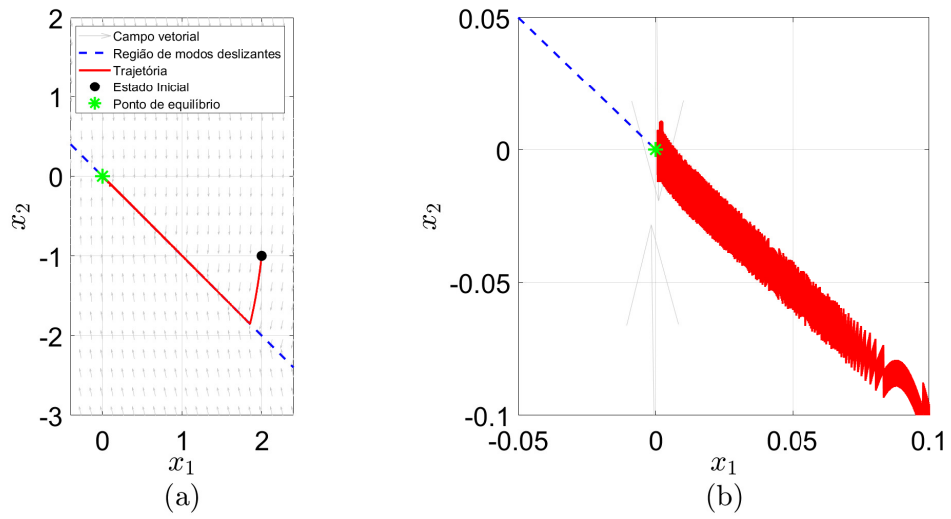


Figura 4 – Evolução da variável deslizante: (a) trajetória de estados $\mathbf{x}(t)$ convergindo para a região de modos deslizantes; (b) detalhe do fenômeno de *chattering*.

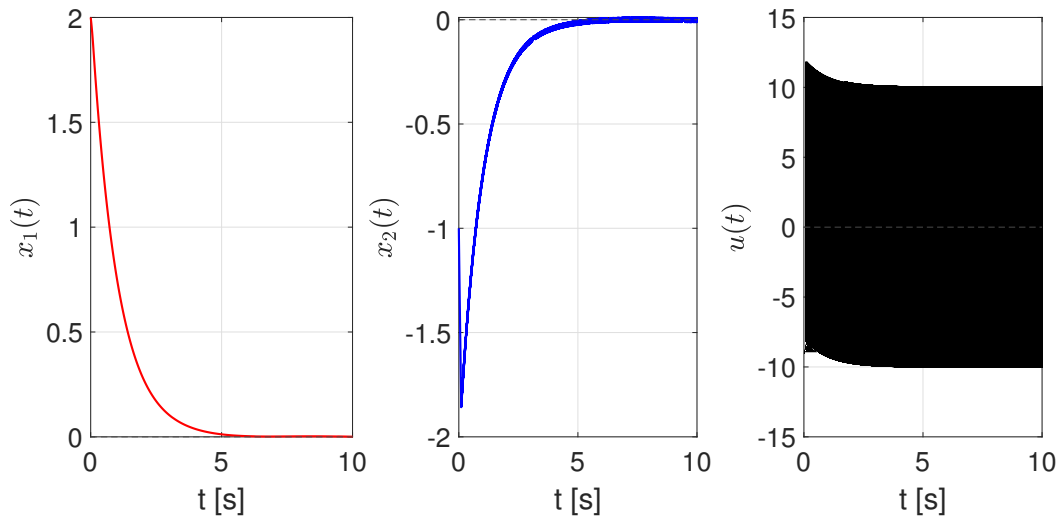


Figura 5 – Resultados temporais: (a) trajetória do estado $x_1(t)$; (b) trajetória do estado $x_2(t)$; (c) entrada de controle $u(t)$.

2.5 Fundamentos de Controle por Modos Deslizantes Adaptativo

Como discutido na Seção 2.4.3.2, o projeto da lei de controle por modos deslizantes (2.101) exige o conhecimento a priori de um limite superior $d_{\max}$ para a perturbação casada $d(t)$, de forma que o ganho de chaveamento K seja escolhido de modo a satisfazer $K > \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{B}\| d_{\max} + \bar{\varphi}$, com $\mathbf{M} = b\mathbf{B}$, $b \in \mathbb{R}$, conforme a (2.93). Particularizando essa relação para $b = 1$ (isto é, $\mathbf{M} = \mathbf{B}$), tem-se $K > \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{B}\| d_{\max} + \bar{\varphi}$. Em cenários práticos, contudo, esse limite superior é frequentemente desconhecido, conservador ou variante no tempo, o que impõe duas dificuldades fundamentais ao projeto (PLESTAN et al., 2010): (i) a subestimação de $d_{\max}$ compromete a existência dos modos deslizantes; e (ii) a sobre-estimação de $d_{\max}$, estratégia comumente adotada por precaução, amplifica desnecessariamente a amplitude do fenômeno de *chattering* discutido na Seção 2.4.4, além de agravar o desgaste de atuadores e o consumo energético (BOIKO, 2008).

A literatura de controle por modos deslizantes contorna essa dificuldade ao adotar estratégias de ganho de chaveamento adaptativo, historicamente organizadas em duas famílias (OBEID et al., 2018). A primeira família baseia-se na estimação da perturbação via controle equivalente (LEE; UTKIN, 2007; UTKIN; POZNYAK, 2013), exigindo o uso de um filtro passa-baixas e, tipicamente, o conhecimento do limite superior da perturbação para o projeto do filtro, razão pela qual não é adotada nesta tese. A segunda família, na qual se inserem as três formulações apresentadas nesta seção, baseia-se na adaptação do ganho de chaveamento sem estimação direta da perturbação (HUANG; KUO; CHANG, 2008; PLESTAN et al., 2010; OBEID et al., 2018): (i) a adaptação por crescimento monotônico, formulação original dessa família, na qual, no contexto de modos deslizantes reais, ocorre a sobre-estimação persistente do ganho e não há garantia de que as trajetórias de estados convergirão para uma vizinhança da região de modos deslizantes; (ii) a adaptação de dupla camada, proposta para corrigir essa limitação ao introduzir uma estratégia de decrescimento em uma vizinhança da região de modos deslizantes, porém sem assegurar de forma construtiva que a fronteira dessa vizinhança nunca será cruzada; e (iii) a adaptação baseada em uma função de barreira, empregada nesta tese, que permite tanto o crescimento quanto o decrescimento do ganho em uma vizinhança da região de modos deslizantes, além de assegurar de forma construtiva a invariância positiva dessa vizinhança. Cabe destacar que, para todas as estratégias citadas, devido ao fenômeno do *chattering*, não há garantia de convergência à região de modos deslizantes, mas sim de alcance a ela ou a uma vizinhança.

2.5.1 Formulação do Problema de Adaptação

Considere o sistema com incerteza casada com limite superior desconhecido:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(u(t) + d(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad (2.107)$$

onde $d(t)$ satisfaz $\sup_{t \geq 0} |d(t)| = d_{\max}$, com $d_{\max} > 0$ desconhecido. Adotando a variável deslizante $s(t) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t)$, definida em (2.94), e a lei de controle equivalente $u_{\text{eq}}(t)$ dada em (2.97), a função de controle por modos deslizantes adaptativa assume a estrutura:

$$u(t) = -(\mathbf{GB})^{-1}\mathbf{GA}\mathbf{x}(t) - K(t)(\mathbf{GB})^{-1} \text{sign}(s(t)), \quad (2.108)$$

em que $K \geq 0$ é o ganho de chaveamento. Substituindo (2.108) em $\dot{s}(t) = \mathbf{G}\dot{\mathbf{x}}(t)$, obtém-se:

$$\dot{s}(t) = -K(t) \text{sign}(s(t)) + \mathbf{GB}d(t). \quad (2.109)$$

A equação diferencial (2.109) corresponde exatamente à estrutura $\dot{s}(t) = u(t) + \delta(t)$ considerada em (PLESTAN et al., 2010; OBEID et al., 2018), com $\delta(t) = \mathbf{GB}d(t)$ e $|\delta(t)| \leq \delta_{\max} = \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{B}\| d_{\max}$ desconhecido, uma vez cancelada a parte conhecida da dinâmica pelo termo u_{eq} . Essa identificação permite transportar diretamente, com a notação da tese, os resultados originais de (PLESTAN et al., 2010; OBEID et al., 2018).

2.5.2 Adaptação por Crescimento Monotônico

A formulação mais simples de adaptação do ganho de chaveamento consiste em fazê-lo crescer enquanto a variável deslizante não atingir a região de modos deslizantes. Segundo a lei de adaptação reportada e discutida por (PLESTAN et al., 2010) com base em (HUANG; KUO; CHANG, 2008):

$$\dot{K}(t) = \bar{K} |s(t)|, \quad K(0) > 0, \quad \bar{K} > 0. \quad (2.110)$$

Teorema 2.5 ((HUANG; KUO; CHANG, 2008), conforme reportado em (PLESTAN et al., 2010)). *Considere o sistema (2.109) sob a entrada de controle (2.108) com o ganho de chaveamento definido pela lei de adaptação (2.110). Então, existe um instante finito $t_F \geq 0$ tal que $s(t) = 0$ para todo $t \geq t_F$.*

Demonstração. Ver (HUANG; KUO; CHANG, 2008; PLESTAN et al., 2010) □

Comentário 2.12 (Limitação estrutural (PLESTAN et al., 2010)). Esse resultado apresenta uma limitação estrutural importante, discutida em detalhe por (PLESTAN et al., 2010): uma vez $s(t) = 0$, a lei de adaptação (2.110) resulta em $\dot{K}(t) = 0$, de modo que o ganho permanece constante no valor atingido no instante de alcance t_r , valor este que, por construção da prova do Teorema 2.5, já satisfaz $K(t_r) > \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{B}\| d_{\max}$, isto é, já domina $\|\mathbf{G}\| \|\mathbf{B}\| d_{\max}$ ao longo de toda a fase de alcance. Contudo, essa dominância não implica que $K(t_r)$ seja o menor ganho suficiente para tanto: como $K(t)$ cresce continuamente enquanto $s(t) \neq 0$, o valor retido tipicamente excede esse mínimo necessário, sem que exista um mecanismo de correção subsequente, o que caracteriza a sobrestimação persistente do ganho, discutida no texto original de (PLESTAN et al., 2010).

Além disso, essa formulação é aplicável apenas no contexto de modos deslizantes ideal. Devido ao *chattering*, não é possível manter $s(t) = 0$ para $t \geq t_1$, o que faz com que $K(t)$ cresça indefinidamente ao longo do tempo. Esse comportamento intensifica progressivamente a frequência do *chattering*.

2.5.3 Adaptação de Dupla Camada

Para superar a limitação descrita no *Comentário 2.12*, (PLESTAN et al., 2010) propõe duas leis de adaptação que combinam uma fase de crescimento com uma fase de decrescimento do ganho de chaveamento, permitindo que $K(t)$ se reduza quando a magnitude efetiva da perturbação diminui. Apresenta-se aqui a segunda formulação de (PLESTAN et al., 2010), por não exigir o uso de controle equivalente nem de filtro passa-baixas, vantagem esta destacada pelos próprios autores para fins de implementação prática.

Formalmente, sejam $\varepsilon > 0$ um limiar de projeto e $\mu > 0$ uma constante pequena introduzida por razões técnicas para manter $K(t) > 0$. A lei de adaptação de dupla camada é definida

por:

$$\dot{K}(t) = \begin{cases} \bar{K} |s(t)| \text{sign}(|s(t)| - \epsilon), & \text{se } K(t) > \mu, \\ \mu, & \text{se } K(t) \leq \mu, \end{cases} \quad (2.111)$$

com $K(0) > 0$ e $\bar{K} > 0$ (PLESTAN et al., 2010).

Comentário 2.13. Note que $\text{sign}(|s(t)| - \epsilon)$ é positivo quando $|s(t)| > \epsilon$, o que faz o ganho crescer, e negativo quando $|s(t)| < \epsilon$, o que faz o ganho decrescer, de modo que a lei (2.111) alterna automaticamente entre as duas dinâmicas de operação, crescimento e decrescimento, sem exigir um mecanismo de comutação explícito entre regras distintas (PLESTAN et al., 2010).

Lema 2.6 ((PLESTAN et al., 2010)). *O ganho $K(t)$ definido pela lei (2.111) é uniformemente limitado, isto é, existe uma constante positiva K^* tal que $K(t) \leq K^*$ para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. Ver (PLESTAN et al., 2010). □

Teorema 2.7 (Estabilidade Prática sob Adaptação de Dupla Camada (PLESTAN et al., 2010)). *Considere o sistema (2.109) sob a entrada de controle (2.108) com o ganho de chaveamento definido pela lei de adaptação (2.111). Então, existe um instante finito $t_1 > 0$ tal que, para todo $t \geq t_1$:*

$$|s(t)| < \delta, \quad \delta = \sqrt{\epsilon^2 + \frac{(\|\mathbf{G}\| \|\mathbf{B}\| d_{\max})^2}{\bar{K}}}. \quad (2.112)$$

Demonstração. Ver (PLESTAN et al., 2010). □

Comentário 2.14. Diferentemente do Teorema 2.5, a adaptação de dupla camada não garante convergência para $s(t) = 0$, mas apenas o alcance de uma vizinhança $|s(t)| < \delta$, com δ dado explicitamente em (2.112) (PLESTAN et al., 2010). Verifica-se que $\delta \geq \epsilon$, com igualdade apenas no caso limite $d_{\max} = 0$: para toda perturbação não nula, δ excede estritamente o limiar de projeto ϵ , uma vez que δ é definido pela soma de dois termos positivos sob a raiz em (2.112). Constata-se também que o parâmetro ϵ que define o limiar entre as fases de crescimento e decrescimento em (2.111) é o mesmo que compõe δ em (2.112), de modo que sua escolha influencia, embora não determine exatamente, o tamanho final da vizinhança de convergência. Além disso, δ depende de $d_{\max}$, ainda que este permaneça desconhecido no projeto, o que significa que a vizinhança final de convergência não pode ser prescrita a priori, apenas o limiar ϵ que a compõe, sem controle sobre o quanto δ o excederá.

2.5.4 Adaptação Baseada em Função de Barreira

Na adaptação por crescimento monotônico (Comentário 2.12), embora o ganho de chaveamento sempre cresça enquanto a variável deslizante permanecer fora de $s(t) = 0$, não é definida nenhuma vizinhança positivamente invariante para a convergência das trajetórias de $s(t)$, de tal forma que se garanta que os estados possuam a propriedade de limitação uniforme

e final (*Uniform Ultimate Boundedness – UUB*)⁷ com respeito à região de modos deslizantes ideal. Já na adaptação de dupla camada (Comentário 2.14), uma vizinhança de convergência de $s(t) = 0$ é de fato definida e efetivamente positivamente invariante, na qual o limite superior é dado por δ em (2.112). Contudo, a região de decrescimento do ganho de chaveamento cujo limite superior é dado por ε não é, ela própria, positivamente invariante, pois nessa região não há dominância de $K(t)$ sobre $\|\mathbf{G}\|\|\mathbf{B}\|d_{\max}$. A caracterização de quanto $|s(t)|$ pode exceder ε , isto é, o próprio valor de γ , depende de $d_{\max}$, ainda que este permaneça desconhecido no projeto.

Diferentemente da adaptação de dupla camada (PLESTAN et al., 2010), a adaptação baseada em função de barreira, introduzida por (OBEID et al., 2018), não exige o conhecimento prévio de $d_{\max}$ nem para a definição dessa função, nem para a delimitação da vizinhança de $s(t) = 0$. No interior da γ -vizinhança prescrita, distinguem-se duas sub-regiões: uma sub-região relaxada, próxima à origem, na qual a dominância do ganho sobre a perturbação não é imposta; e uma sub-região adjacente à fronteira γ , na qual essa dominância é assegurada pela divergência do ganho de chaveamento conforme $|s(t)| \rightarrow \gamma^-$. Embora a localização exata dessa fronteira interna dependa da dominância do ganho de chaveamento sobre $d_{\max}$, como revelado em (OBEID et al., 2018), essa dependência não precisa ser conhecida nem calculada: a invariância positiva de γ é assegurada de forma construtiva para qualquer valor (desconhecido) de $d_{\max} > 0$.

Definição 2.9 (Função de Barreira Positiva Definida (OBEID et al., 2018)). Uma função de barreira $K_b : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, definida sobre o domínio aberto $\mathcal{D} = \{s(t) \in \mathbb{R} : |s(t)| < \gamma\}$, é dita positiva definida se satisfizer simultaneamente às seguintes propriedades:

- (i) $K_b(s(t)) > 0$ para todo $s(t) \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$;
- (ii) $K_b(s(t)) \rightarrow +\infty$ quando $s(t) \rightarrow \partial\mathcal{D}$ (isto é, quando $|s(t)| \rightarrow \gamma^-$);
- (iii) $K_b(s(t)) = 0$ se e somente se $s(t) = 0$.

Um exemplo canônico de função de barreira positiva definida é:

$$K_b(s(t)) = \frac{\gamma\bar{F}}{\gamma - |s(t)|}, \quad \bar{F} > 0, \quad (2.113)$$

com $K_b(0) = \bar{F} > 0$.

Definição 2.10 (Função de Barreira Positiva Semidefinida (OBEID et al., 2018)). Uma função de barreira $K_b : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, definida sobre o domínio aberto $\mathcal{D} = \{s(t) \in \mathbb{R} : |s(t)| < \gamma\}$, é dita positiva semidefinida se satisfizer simultaneamente às seguintes propriedades:

- (i) $K_b(s(t)) \geq 0$ para todo $s(t) \in \mathcal{D}$;
- (ii) $K_b(s(t)) \rightarrow +\infty$ quando $s(t) \rightarrow \partial\mathcal{D}$ (isto é, quando $|s(t)| \rightarrow \gamma^-$);

⁷ A definição de trajetórias *UUB* é apresentada na Definição 2.13.

(iii) $K_b(s(t)) = 0$ se e somente se $s(t) = 0$.

Um exemplo canônico de função de barreira positiva semidefinida é:

$$K_b(s(t)) = \frac{|s(t)|}{\gamma - |s(t)|}, \quad (2.114)$$

com $K_b(0) = 0$.

A lei de adaptação proposta por (OBEID et al., 2018) combina, em duas fases sucessivas, a lei de crescimento monotônico (2.110), utilizada apenas para conduzir a variável deslizante a uma primeira vizinhança de $\gamma/2$, com a função de barreira propriamente dita, ativada a partir desse instante:

$$K(t) = \begin{cases} K_a(t), & \dot{K}_a(t) = \bar{K}|s(t)|, \quad \text{se } 0 < t \leq \bar{t}, \\ K_b(s(t)), & \text{se } t > \bar{t}, \end{cases} \quad (2.115)$$

onde $\bar{K} > 0$ é uma constante arbitrária, $K_b(\cdot)$ pode ser escolhida como uma função de barreira positiva definida (Definição 2.9) ou como uma função de barreira positiva semidefinida $K_{psb}(\cdot)$ (Definição 2.10), e $\bar{t}$ é o menor instante de tempo tal que $s(\bar{t}) = 0$ (OBEID et al., 2018).

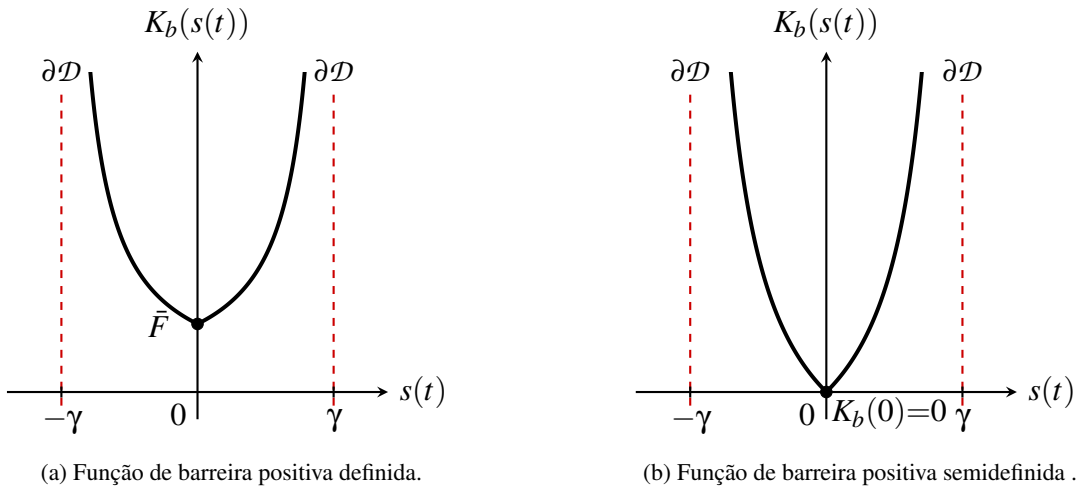


Figura 6 – Comportamento assintótico das funções de barreira. Em ambos os casos, $K_b(s(t)) \rightarrow +\infty$ quando $|s(t)| \rightarrow \gamma^-$, garantindo a invariância positiva do domínio $\mathcal{D}$. A função positiva definida K_b satisfaz $K_b(0) = \bar{F}$, enquanto a positiva semidefinida K_b satisfaz $K_b(0) = 0$, permitindo que o ganho decresça a zero quando $s(t) \rightarrow 0$.

Teorema 2.8 (Adaptação por Função de Barreira (OBEID et al., 2018)). *Considere o sistema (2.109) sob a entrada de controle (2.108) com o ganho definido por (2.115). Então, para todo $s(0)$ e todo $\gamma > 0$, existe $\bar{t}$, a menor raiz da equação $|s(t)| \leq \gamma/2$, tal que, para todo $t \geq \bar{t}$, a desigualdade $|s(t)| < \gamma$ é satisfeita.*

Demonstração. Ver (OBEID et al., 2018). □

Comentário 2.15 (Função de barreira positiva definida versus positiva semidefinida (OBEID et al., 2018)). As duas classes de barreira apresentam *trade-offs* distintos. Com a função positiva definida, $K_{pb}(0) = \bar{F} > 0$ constitui um limite inferior do ganho de chaveamento: quando $\|\mathbf{G}\|\|\mathbf{B}\|d_{\max} < \bar{F}$, o ganho é sobrestimado, garantindo o modo deslizante, mas ao custo de uma entrada de controle com oscilações, devido ao chaveamento, de amplitude proporcional a $\bar{F}$. Com a função positiva semidefinida, $K_{psb}(0) = 0$, de modo que, se a perturbação casada e $s(t)$ tendem monotonicamente a zero, o ganho também tende a zero e os chaveamentos da entrada de controle são eliminados nesse regime, ao custo de perder a garantia de modo deslizante quando a perturbação não decresce.

Comentário 2.16 (Sobre a Condição de Dominância do Ganho de Chaveamento). Em ambas as classes de funções de barreira, a condição $K_B(s(t)) > \|\mathbf{G}\|\|\mathbf{B}\|d_{\max}$, isto é, a dominância do ganho de chaveamento sobre o limite superior da perturbação casada, não precisa ser satisfeita para todo $t \geq \bar{t}$, mas apenas fora de uma sub-região interna $|s(t)| \leq s^* < \gamma$. Dentro dessa sub-região, a ausência momentânea de dominância não compromete a invariância do domínio $|s(t)| < \gamma$, uma vez que $s^* < \gamma$ por construção e $K_b(s(t)) \rightarrow +\infty$ conforme $|s(t)| \rightarrow \gamma^-$ impede, em qualquer caso, o cruzamento da fronteira $\partial\mathcal{D}$ (OBEID et al., 2018).

2.6 Fundamentos de Controle por Modos Deslizantes Acionado por Eventos

Para a implementação de métodos de controle em sistemas digitais e dispositivos embarcados, a escolha do paradigma de acionamento para a atualização da entrada de controle é determinante para a eficiência no uso de recursos computacionais, energéticos e de comunicação (ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 2002). Nesse contexto, com base nas teorias de controle por dados amostrados e de sistemas em tempo real, as estratégias de acionamento orientado ao tempo e acionado por eventos consolidaram-se como campos de pesquisa ativos (YUE; BALDI; CAO, 2022).

No acionamento orientado ao tempo, a entrada de controle é atualizada de forma periódica, de acordo com o período de amostragem do sistema, sendo uma abordagem inspirada na amostragem de Riemann (MA; ZHANG, 2022). Uma etapa crítica no projeto desses métodos é a escolha adequada do período de amostragem, visto que ele determina a demanda sobre os recursos computacionais e a viabilidade dos canais de comunicação entre os instantes de atualização periódica (ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 1999).

Por outro lado, no acionamento por eventos, a atualização da entrada de controle é aperiódica, sendo inspirada na amostragem de Lebesgue (ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 2002). Nessa abordagem, a atualização ocorre apenas quando uma condição de acionamento específica é satisfeita, a qual é avaliada em função da evolução temporal do estado do sistema (TABUADA, 2007; HEEMELS; JOHANSSON; TABUADA, 2012; WANG; ZHANG, 2014). Assim, a atualização da entrada de controle é disparada pela ocorrência de eventos, e não por intervalos de tempo periódicos (PERSIS; POSTOYAN; TESI, 2023).

De forma análoga ao papel do período de amostragem no acionamento orientado ao tempo, a definição do mecanismo de acionamento por eventos, composto pela estratégia de monitoração e pela respectiva condição de acionamento, é fundamental para que os objetivos de controle sejam satisfeitos (HEEMELS; JOHANSSON; TABUADA, 2012). Esse mecanismo é o componente responsável por determinar os instantes em que é disparada a atualização da entrada de controle e disparar a atualização da entrada de controle.

2.6.1 Estratégias de Monitoração

Com relação à estratégia de monitoração, as principais abordagens consolidadas na literatura são:

- **Monitoração contínua:** a condição de acionamento por eventos é verificada de forma contínua no tempo. Essa abordagem proporciona a maior eficiência ao mecanismo de acionamento em termos de número de atualizações, pois permite verificar a condição de acionamento por eventos no exato instante em que o limiar estabelecido é atingido. No entanto, a monitoração em tempo contínuo é impraticável em dispositivos digitais, os quais operam de forma inerentemente discreta (HEEMELS; JOHANSSON; TABUADA, 2012);
- **Monitoração periódica:** a condição de acionamento por eventos é verificada em intervalos periódicos (HEEMELS; DONKERS; TEEL, 2012). Essa estratégia é compatível com a natureza discreta de processadores e dispositivos embarcados, reduzindo significativamente o número de atualizações em comparação com o acionamento orientado ao tempo;
- **Monitoração assíncrona:** a verificação da condição de acionamento por eventos é vinculada a interrupções de hardware, como o cruzamento de um limiar por um sinal analógico detectado por comparadores integrados. Embora permita tempos de resposta rápidos, sua implementação impõe maior complexidade de projeto por depender estritamente da arquitetura de hardware utilizada (MAZO; CAO, 2014; FU; MAZO, 2016).

2.6.2 Condição de Acionamento por Eventos

Antes de apresentar as principais classes de condições de acionamento por eventos consolidadas na literatura, cumpre estabelecer formalmente como ela restringe o impacto da discrepância entre o estado atual e o estado retido. O objetivo central é garantir que a entrada de controle, embora mantida constante entre os instantes de amostragem, permaneça capaz de conduzir o sistema aos seus objetivos de desempenho e estabilidade.

Formalmente, seja o instante de acionamento por evento t_k , o próximo instante t_{k+1} é definido como:

$$t_{k+1} = \inf\{t \in \mathbb{R} : t > t_k \text{ and } f(\mathbf{e}(t)) \geq r(\tilde{\Phi})\}, \quad (2.116)$$

onde $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t)$ é o erro de acionamento, definido como a diferença entre o estado amostrado no último instante de acionamento $\mathbf{x}(t_k)$ e o estado no instante atual $\mathbf{x}(t)$, ao passo

que $f(\mathbf{e}(t)) \geq 0$ representa a função de acionamento por eventos e $r(\tilde{\varphi})$ denota o limiar de acionamento por eventos (TABUADA, 2007). A condição $f(\mathbf{e}(t)) \geq r(\tilde{\varphi})$ é definida como condição de acionamento por eventos. Entre dois instantes de acionamento consecutivos t_k e t_{k+1} , a entrada de controle permanece constante, isto é, $u(t) = u(t_k)$ para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$ (GHODRAT; MARQUEZ, 2022).

A definição (2.116), no entanto, não especifica como a função de acionamento f e o limiar $r(\tilde{\varphi})$ devem ser escolhidos para que a estabilidade e desempenho do sistema em malha fechada sejam preservados, inclusive nos intervalos em que a entrada de controle permanece constante. Para tanto, considere o sistema não linear:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), u(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad (2.117)$$

em que a função f é localmente contínua no sentido de Lipschitz em relação a ambos os argumentos, e assume-se a existência de uma lei de controle por realimentação de estados tal que o sistema (2.117) em malha fechada seja assintoticamente estável na origem.

Assume-se que o sistema (2.117) é estável no sentido entrada-estado (*Input-to-State Stability — ISS*) com respeito ao erro de acionamento $\mathbf{e}(t)$ definido em (2.116), o que implica a existência de uma função de Lyapunov $V : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisfaz:

$$\underline{\alpha}(\|\mathbf{x}(t)\|) \leq V(t) \leq \bar{\alpha}(\|\mathbf{x}(t)\|), \quad (2.118a)$$

$$\dot{V}(t) = \nabla V(t) \cdot f(\mathbf{x}(t), u(\mathbf{x}(t) + \mathbf{e}(t))) < -\alpha(\|\mathbf{x}(t)\|) + \gamma(\|\mathbf{e}(t)\|), \quad (2.118b)$$

onde α , $\underline{\alpha}$ e $\bar{\alpha}$ são funções de classe $\mathcal{K}_{\infty}$, e γ é uma função de classe $\mathcal{K}$.

De acordo com (BANDYOPADHYAY; BEHERA, 2018), a partir de (2.118b), uma condição suficiente para assegurar que $\dot{V}(t)$ seja negativa definida é dada por:

$$\gamma(\|\mathbf{e}(t)\|) < \tilde{\varphi} \alpha(\|\mathbf{x}(t)\|), \quad \tilde{\varphi} \in (0, 1). \quad (2.119)$$

Assumindo que as funções inversas de classe $\mathcal{K}$ envolvidas sejam localmente contínuas no sentido de Lipschitz em subconjuntos compactos, a condição (2.119) pode ser reescrita em uma forma linearizada:

$$L_e \|\mathbf{e}(t)\| < \tilde{\varphi} \|\mathbf{x}(t)\|, \quad (2.120)$$

na qual $L_e > 0$ é uma constante de ganho apropriada (BANDYOPADHYAY; BEHERA, 2018). A desigualdade (2.120) constitui um caso particular da condição geral de acionamento dada em (2.116), na qual o limiar passa a depender explicitamente da norma do estado atual. Desse modo, a violação dessa condição determina o próximo instante de acionamento por evento segundo a relação:

$$t_{k+1} = \inf \{t > t_k \in \mathbb{R} : L_e \|\mathbf{e}(t)\| \geq \tilde{\varphi} \|\mathbf{x}(t)\|\}. \quad (2.121)$$

O desafio central no projeto de controle acionado por eventos não reside estritamente no instante em que a condição (2.121) é satisfeita. De fato, ao desconsiderar atrasos de comunicação

e de processamento, a entrada de controle é atualizada imediatamente após a ocorrência do evento, restaurando as condições de estabilidade e desempenho em malha fechada (BEHERA et al., 2015). O problema fundamental consiste, portanto, em assegurar, por exemplo, a estabilidade assintótica ao longo de todo o intervalo inter-eventos $[t_k, t_{k+1})$, para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, período no qual a relação $L_e \|\mathbf{e}(t)\| < \tilde{\varphi} \|\mathbf{x}(t)\|$ se mantém e a entrada de controle permanece constante (BANDYOPADHYAY; BEHERA, 2018). Ao longo desses intervalos, substituindo (2.119) em (2.118b), obtém-se a seguinte limitação superior:

$$\dot{V}(t) < -(1 - \tilde{\varphi})\alpha(\|\mathbf{x}(t)\|) \leq -(1 - \tilde{\varphi})(\alpha \circ \bar{\alpha}^{-1})V(t) < 0, \quad (2.122)$$

onde $\alpha \circ \bar{\alpha}^{-1} \in \mathcal{K}_{\infty}$ denota a composição funcional das funções de classe $\mathcal{K}_{\infty}$. Como $\dot{V}(t)$ permanece estritamente negativa em todo o intervalo $[t_k, t_{k+1})$, a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada é garantida mesmo nos intervalos em que a lei de controle não sofre atualizações (BANDYOPADHYAY; BEHERA, 2018).

A condição (2.116) constitui, portanto, a forma geral do qual derivam as diferentes classes de condição de acionamento por eventos adotadas na literatura, classificadas principalmente em quatro categorias (DOU et al., 2025):

- **Condição absoluta:** proposta em (LUNZE; LEHMANN, 2010), essa estratégia de monitoração avalia o erro de acionamento $\mathbf{e}(t)$ e gera um novo evento quando a norma desse desvio se torna maior ou igual ao limiar de acionamento por eventos $\tilde{\varphi} > 0$, isto é:

$$\|\mathbf{e}(t)\| \geq \tilde{\varphi}. \quad (2.123)$$

Embora simples de implementar, essa condição garante apenas que as trajetórias de estado sejam *UUB* com respeito a uma vizinhança da origem delimitada por $\tilde{\varphi}$.

- **Condição relativa ao estado:** proposta por (TABUADA, 2007), corresponde ao caso linear da condição geral (2.119): a norma admissível do erro de acionamento é definida proporcionalmente à norma do estado atual $\mathbf{x}(t)$. Na formulação original, a condição é expressa em termos de funções de classe $\mathcal{K}$; para sistemas lineares, essa condição se reduz a:

$$\|\mathbf{e}(t)\| \geq \tilde{\varphi} \|\mathbf{x}(t)\|, \quad \tilde{\varphi} \in (0, 1). \quad (2.124)$$

Essa abordagem garante que o erro de acionamento permaneça limitado em relação à magnitude do estado, assegurando a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada. No entanto, à medida que o estado converge para a origem, o limiar de acionamento por eventos tende a zero, o que pode induzir comportamento Zeno (ver Seção 2.6.3).

- **Condição combinada:** proposta por (HEEMELS; JOHANSSON; TABUADA, 2012), para mitigar o comportamento Zeno presente na condição relativa ao estado. Introduce-se um termo absoluto $\delta > 0$, adicional a (2.124), resultando em:

$$\|\mathbf{e}(t)\| \geq \tilde{\varphi} \|\mathbf{x}(t)\| + \delta, \quad \tilde{\varphi}, \delta > 0. \quad (2.125)$$

Essa combinação garante um intervalo mínimo entre acionamentos consecutivos, mesmo quando o estado se aproxima da origem. O custo dessa abordagem é a perda da estabilidade assintótica: o sistema converge para uma região em torno da origem, não necessariamente para a própria origem.

- **Condição dinâmica:** proposto por (GIRARD, 2014), introduz uma variável auxiliar dinâmica $\eta(t)$ no limiar. A condição de acionamento assume a forma:

$$\|\mathbf{e}(t)\|^2 \geq \tilde{\phi}\|\mathbf{x}(t)\|^2 + \eta(t), \quad \tilde{\phi} > 0, \quad (2.126)$$

onde $\eta(t)$ evolui segundo a equação diferencial auxiliar:

$$\dot{\eta}(t) = -\lambda\eta(t) + \mu\|\mathbf{x}(t)\|^2, \quad \lambda, \mu > 0. \quad (2.127)$$

A variável $\eta(t)$ atua como uma margem dinâmica no limiar: quando o sistema evolui de forma suave, $\eta(t)$ cresce, relaxando a condição de acionamento por eventos e aumentando o intervalo entre os instantes de amostragem; por outro lado, sob transientes acentuados ou crescimento do estado, $\eta(t)$ pode decrescer, tornando o limiar mais restritivo e forçando acionamentos mais frequentes. Essa abordagem permite reduzir ainda mais a frequência de acionamentos em comparação com os limiares estáticos, mantendo as garantias de estabilidade (GIRARD, 2014).

2.6.3 Comportamento Zeno

Um aspecto crítico no projeto do controle acionado por eventos é garantir a ausência do comportamento Zeno na sequência de instantes de acionamento por eventos $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$, caracterizado pela ausência de um limite inferior estritamente positivo para os intervalos entre acionamentos consecutivos, isto é, $\inf_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} T_k = 0$, com $T_k = t_{k+1} - t_k$ (HEEMELS; JOHANSSON; TABUADA, 2012). Esse comportamento implica que o sistema permanece congelado num único instante de tempo, sem que a trajetória de estado evolua, o que é incoerente com a natureza do modelo de tempo contínuo adotado e invalida qualquer garantia de estabilidade ou desempenho (ZHANG; JIN; SU, 2023). Na prática, a ausência de um espaçamento mínimo entre acionamentos sobrecarrega os recursos computacionais, energéticos e de comunicação, inviabilizando a implementação da estratégia de controle em sistemas digitais com recursos limitados (BEHERA, 2025). A exclusão do comportamento Zeno é, portanto, equivalente a garantir $T_k \geq a_T > 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, assegurando que as trajetórias de estado evoluam entre atualizações consecutivas. Vale ressaltar que a obtenção de uma função de Lyapunov que assegure a estabilidade do sistema não é suficiente por si só: é igualmente necessário demonstrar que a sequência de instantes de acionamento satisfaz essa condição para que as garantias de convergência sejam válidas na prática (HEEMELS; JOHANSSON; TABUADA, 2021).

O exemplo a seguir ilustra a aplicação dessa abordagem de controle, demonstrando simultaneamente a estabilidade assintótica e a exclusão do comportamento Zeno para um sistema não linear.

2.6.4 Exemplo: Projeto de Controle Acionado por Eventos

Considere o sistema não linear escalar:

$$\dot{x}(t) = x^2(t) + u(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \quad (2.128)$$

onde o estado está restrito ao intervalo compacto $x(t) \in [-c, c]$, com $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Seja $u(t) = -x^2(t) - kx(t)$, com $k > 0$, a lei de controle por realimentação de estados projetada em tempo contínuo. Como a entrada de controle é atualizada apenas nos instantes de acionamento por eventos, ela assume a forma:

$$u(t) = -x^2(t_k) - kx(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \text{ e } k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (2.129)$$

Seja $V(t) = \frac{1}{2}x^2(t)$ a função candidata de Lyapunov. Diferenciando $V(t)$ ao longo das trajetórias do sistema (2.128), considerando $|x(t)| \leq c$ e a relação $x(t_k) = e(t) + x(t)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= x(t)(x^2(t) - x^2(t_k) - kx(t_k)) \\ &= -x(t)(x(t) + x(t_k))e(t) - kx(t)x(t_k) \\ &\leq 2c|e(t)||x(t)| - kx(t)(e(t) + x(t)) \\ &\leq 2c|e(t)||x(t)| + k|x(t)||e(t)| - kx^2(t) \\ &\leq (2c + k)|e(t)||x(t)| - kx^2(t). \end{aligned} \quad (2.130)$$

Aplicando a desigualdade de Young⁸ ao primeiro termo de (2.130), resulta em:

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{k}{2}|x(t)|^2 + \frac{(2c+k)^2}{2k}|e(t)|^2 = -\alpha(|x(t)|) + \gamma(|e(t)|), \quad (2.131)$$

onde as funções de classe $\mathcal{K}_{\infty}$ são dadas por:

$$\alpha(r) = \frac{k}{2}r^2 \quad \text{e} \quad \gamma(r) = \frac{(2c+k)^2}{2k}r^2. \quad (2.132)$$

A condição de acionamento que estabiliza o sistema regionalmente, em conformidade com o formalismo estruturado em (2.121), é definida por:

$$|e(t)| \geq \tilde{\Phi} \frac{k}{2c+k} |x(t)|, \quad \tilde{\Phi} \in (0, 1). \quad (2.133)$$

Essa condição de acionamento por eventos garante que a relação $|e(t)| < \tilde{\Phi} \frac{k}{2c+k} |x(t)|$ se mantenha válida para todo instante $t \in [t_k, t_{k+1})$, o que implica que a derivada de Lyapunov $\dot{V}(t)$ permanece estritamente negativa em todo o intervalo entre eventos. Consequentemente, assegura-se a estabilidade assintótica regional do ponto de equilíbrio.

⁸ A desigualdade de Young com expoente 2 afirma que, para quaisquer $p, q \geq 0$ e $\varepsilon > 0$, vale a relação $pq \leq \frac{p^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon q^2}{2}$.

Resta demonstrar analiticamente que o sistema sob essa condição de acionamento por eventos é livre do comportamento Zeno. Para $x(t) \in [-c, c] \setminus \{0\}$, a derivada temporal da norma da razão entre o erro e o estado satisfaz a seguinte limitação superior:

$$\frac{d}{dt} \frac{|e(t)|}{|x(t)|} \leq \frac{1}{x^2(t)} (|x(t)| + |e(t)|) \left| \frac{d}{dt} x(t) \right|. \quad (2.134)$$

Como $|x(t)| \leq c$ e sabendo que a entrada de controle $u(t) = -x^2(t_k) - kx(t_k)$ permanece constante para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$, pode-se majorar a dinâmica como:

$$\left| \frac{d}{dt} x(t) \right| \leq (2c + k)(|e(t)| + |x(t)|). \quad (2.135)$$

Substituindo (2.135) em (2.134), obtém-se a desigualdade diferencial:

$$\frac{d}{dt} \frac{|e(t)|}{|x(t)|} < (2c + k) \left(\frac{|e(t)|}{|x(t)|} + 1 \right)^2. \quad (2.136)$$

Por meio do lema da comparação (KHALIL, 2002), definindo $\frac{|e(t)|}{|x(t)|} \leq \mu(t)$, as trajetórias das soluções de (2.136) são limitadas superiormente pelas trajetórias da solução de:

$$\dot{\mu}(t) = (2c + k)(\mu(t) + 1)^2, \quad \mu(t_k) = 0, \quad (2.137)$$

no qual a condição inicial nula provém do fato de que $e(t_k) = 0$. A partir da integração direta de (2.137), determina-se o tempo necessário para que a variável de comparação $\mu(t)$ evolua de zero até o limiar de acionamento $\tilde{\Phi} \frac{k}{2c+k}$. Desse modo, constata-se que o tempo mínimo entre eventos consecutivos é estritamente positivo e limitado inferiormente por:

$$T_k > \frac{\tilde{\Phi}k}{[2c + (1 + \tilde{\Phi})k](2c + k)} > 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (2.138)$$

A garantia de um limite inferior estritamente positivo para T_k assegura que o sistema é livre do comportamento Zeno, o que, em conjunto com a negatividade estrita de $\dot{V}(t)$ ao longo dos intervalos entre eventos por eventos, valida as garantias de estabilidade assintótica regional quanto à implementação da estratégia de controle em sistemas digitais de processamento.

2.6.5 Controle por Modos Deslizantes Acionado por Eventos

Em controle por modos deslizantes, sob a hipótese idealizada de chaveamento com frequência infinita, as trajetórias de estado permanecem restritas à região de modos deslizantes para todo instante subsequente ao instante de alcance (UTKIN, 1992). Em implementações reais, contudo, o chaveamento ocorre em frequência finita, tanto por fatores computacionais quanto por fatores físicos, o que impede o chaveamento ideal sobre a região de modos deslizantes, forçando as trajetórias a oscilar em uma vizinhança dessa região, caracterizando o fenômeno do *chattering* (FRIDMAN, 2001; MARTÍNEZ-FUENTES; PÉREZ-VENTURA; FRIDMAN, 2021).

Nesse contexto, o controle acionado por eventos substitui a atualização periódica da entrada de controle por uma atualização aperiódica, condicionada à satisfação de uma condição de acionamento, reduzindo significativamente o consumo de recursos computacionais, de comunicação e energéticos (BEHERA; BANDYOPADHYAY, 2016b). Nessa abordagem, desconsiderando a presença de atrasos de comunicação e processamento, os chaveamentos da entrada de controle somente ocorrem no instante em que a condição de acionamento por evento é satisfeita, reduzindo significativamente a frequência de chaveamento em relação às abordagens de controle com atualizações periódicas (BEHERA; BANDYOPADHYAY, 2016b).

Como consequência direta dessa reformulação, a trajetória de estado deixa de permanecer restrita à região de modos deslizantes e passa a oscilar dentro de uma vizinhança dela. Ao contrário do que ocorre em abordagens que propõem a redução ou eliminação do *chattering* (LEVANT, 2003; BOIKO et al., 2007), para o controle por modos deslizantes acionados por eventos, a amplitude dessas oscilações pode ser delimitada de forma explícita pela própria condição de acionamento, sem a necessidade de abordagens adicionais para determinar essa vizinhança (SONG et al., 2023a; FAN; WANG, 2021). Essa propriedade, denominada modos deslizantes prático (BANDYOPADHYAY; BEHERA, 2018), é inerente ao controle por modos deslizantes acionado por eventos e representa uma troca aceitável entre precisão e eficiência no uso de recursos. Essa abordagem oferece os seguintes benefícios práticos (HEEMELS; JOHANSSON; TABUADA, 2021):

- **Otimização computacional:** A lei de controle é processada exclusivamente sob demanda da dinâmica do erro, minimizando a sobrecarga nos núcleos de processamento digital;
- **Redução no uso de comunicação:** Em sistemas de controle em rede, o tráfego de dados é reduzido, mitigando problemas decorrentes de congestionamento de banda, atrasos de transporte e perda de pacotes;
- **Eficiência energética dos atuadores:** A redução na frequência média de chaveamento diminui o consumo de potência nos estágios de atuação, propriedade crítica em sistemas embarcados com restrições energéticas;

2.6.5.1 Formulação do Problema

Considere o sistema linear e invariante no tempo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(u(t) + d(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad (2.139)$$

onde $d(t)$ denota a perturbação casada. Em comparação com o sistema (2.91), a matriz $\mathbf{M}$ para o sistema (2.139) é definida como $\mathbf{M} = b\mathbf{B} = \mathbf{B}$, com $b = 1$.

A atualização aperiódica da entrada de controle introduz termos residuais na dinâmica da variável deslizante que impedem o confinamento estrito das trajetórias sobre a região de

modos deslizantes ideal. Diferentemente das formulações idealizadas na Seção 2.4, nas quais se assume que as trajetórias permanecem exatamente em $s(t) = 0$ após o instante de alcance, a estratégia acionada por eventos exige o relaxamento das condições de invariância dessa região. Torna-se necessário, portanto, formalizar as definições de modo deslizante ideal e de modo deslizante prático. Torna-se necessário, portanto, formalizar as definições de modo deslizante ideal e, sequencialmente, de modo deslizante prático.

A função deslizante $s : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$ é estabelecida por:

$$s(t) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t), \quad (2.140)$$

onde $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{1 \times n_x}$. A superfície de modo deslizante ideal é definida pelo conjunto:

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : s(t) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t) = 0\}. \quad (2.141)$$

Definição 2.11 (Modos Deslizantes Ideal (SHTESSEL et al., 2014)). Os modos deslizantes ideal são caracterizados pelos movimentos das trajetórias de estado confinadas a um conjunto positivamente invariante, denominado região de modos deslizantes ideal (2.141). Esse comportamento é estabelecido assim que as trajetórias da variável deslizante $s(t)$ alcançam $s(t) = 0$ em um instante de tempo finito $t_r \geq 0$, permanecendo em $s(t) = 0$ para todo $t \geq t_r$.

Comentário 2.17. Em vista de (2.141), a convergência das trajetórias de estado para a região de modos deslizantes ideal $\mathcal{S}$ em tempo finito t_r é equivalente à convergência das trajetória da variável deslizante $s(t)$ para $s(t) = 0$ no mesmo instante finito t_r .

Ao considerar o problema de controle por modos deslizantes acionado por eventos, a lei de controle assume a forma:

$$u(t) = -(\mathbf{GB})^{-1}\mathbf{GA}\mathbf{x}(t_k) - K(\mathbf{GB})^{-1}\text{sign}(s(\mathbf{x}(t_k))), \quad (2.142)$$

para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Definição 2.12 (Modos Deslizantes Prático (BEHERA; BANDYOPADHYAY, 2016a)). Os modo deslizante prático são caracterizados pelos movimentos das trajetórias de estado $\mathbf{x}(t)$ confinadas a uma vizinhança positivamente invariante da região de modos deslizantes ideal, denominada região de modos deslizantes prático. Este comportamento manifesta-se após as trajetórias atingirem tal vizinhança em um instante de tempo finito $t_1 \geq 0$. Em outras palavras, para um dado escalar $\varepsilon > 0$, as trajetórias da variável deslizante $s(t)$ alcança uma vizinhança- ε de $s(t) = 0$ em t_1 e nela permanece para todo $t \geq t_1$, de modo que a relação $|s(t)| \leq \varepsilon$ seja satisfeita.

2.6.5.2 Projeto de Controle por Modos Deslizantes Acionado por Eventos

O projeto do ganho de chaveamento K é fundamental para garantir a existência dos modo deslizante prático, ou seja, para garantir a convergência das trajetórias de estado para essa região.

Em comparação com o controle por modos deslizantes orientado pelo tempo, o projeto do ganho de chaveamento deve levar em consideração a condição de acionamento por eventos, pois o erro de acionamento $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t)$ introduz uma perturbação adicional na dinâmica da variável deslizante. Para tanto, é necessário apresentar a definição de trajetórias uniforme e final (*Uniform Ultimate Boundedness – UUB*).

Definição 2.13 (Trajetórias UUB (KHALIL, 2002)). Diz-se que as trajetórias de estados do sistema possuem limitação uniforme e final se, dado qualquer escalar $R > 0$, existem um escalar $r > 0$ e um tempo $T > 0$, ambos independentes da condição inicial, tais que, para toda condição inicial satisfazendo $\|\mathbf{x}_0\| \leq R$, a solução $\mathbf{x}(t)$ satisfaz

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq r, \quad \forall t \geq T. \quad (2.143)$$

Ou seja, todas as trajetórias com condições iniciais limitadas entram e mantêm-se em uma vizinhança de raio r da origem.

Teorema 2.9. Considere o sistema (2.139) com a entrada de controle (2.142). Seja $\alpha > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{G}\| \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{e}(t)\| < \alpha \quad (2.144)$$

para todo $t \geq 0$. Então, é garantida a convergência das trajetórias de estado para a região de modos deslizantes prático se:

$$K > \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{B}\| |d(t)| + \alpha, \quad (2.145)$$

com as trajetórias sendo UUB com respeito à região de modos deslizantes prático:

$$\tilde{\mathcal{S}} = \left\{ \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n : |s(t)| < \frac{\alpha}{\|\mathbf{A}\|} \right\}. \quad (2.146)$$

Demonstração. Ver (BEHERA; BANDYOPADHYAY, 2016b). □

2.6.5.3 Estabilidade Prática do Sistema na Região de Modos Deslizantes Prático

Uma vez assegurada a convergência das trajetórias de estado para a região de modos deslizantes prático pelo Teorema 2.9, é necessário garantir a estabilidade da dinâmica de ordem reduzida que governa o sistema durante esse comportamento. Para isso, aplica-se a transformação de similaridade $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t)$ (EDWARDS; SPURGEON, 1998), que leva o sistema (2.139) à forma regular:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(t) = \tilde{\mathbf{A}}_{11}\tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \tilde{\mathbf{A}}_{12}\tilde{\mathbf{x}}_2(t), \quad (2.147a)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2(t) = \tilde{\mathbf{A}}_{21}\tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \tilde{\mathbf{A}}_{22}\tilde{\mathbf{x}}_2(t) + \tilde{\mathbf{B}}_2(u(t) + d(t)), \quad (2.147b)$$

onde $\tilde{\mathbf{x}}_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\tilde{\mathbf{x}}_2 \in \mathbb{R}$, e as matrizes são particionadas em blocos como segue:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix},$$

com $\tilde{\mathbf{A}}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, $\tilde{\mathbf{A}}_{12} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\tilde{\mathbf{A}}_{21} \in \mathbb{R}^{1 \times (n-1)}$, $\tilde{\mathbf{A}}_{22} \in \mathbb{R}$ e $\tilde{\mathbf{B}}_2 \in \mathbb{R}$.

Considerando $\mathbf{G} = [\mathbf{G}_1^\top \ 1]$, com $\mathbf{G}_1 \in \mathbb{R}^{1 \times (n-1)}$, a variável deslizante pode ser escrita como:

$$s(t) = \mathbf{G}_1 \tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \tilde{x}_2(t), \quad (2.148)$$

de modo que, na região de modos deslizantes prático, $\tilde{x}_2(t)$ satisfaz a restrição algébrica:

$$\tilde{x}_2(t) = -\mathbf{G}_1 \tilde{\mathbf{x}}_1(t) + s(t). \quad (2.149)$$

Substituindo essa expressão em (2.147a), obtém-se o sistema de ordem reduzida que governa a dinâmica reduzida do sistema:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(t) = (\tilde{\mathbf{A}}_{11} - \tilde{\mathbf{A}}_{12} \mathbf{G}_1) \tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \tilde{\mathbf{A}}_{12} s(t), \quad (2.150a)$$

$$\tilde{x}_2(t) = -\mathbf{G}_1 \tilde{\mathbf{x}}_1(t) + s(t). \quad (2.150b)$$

Note-se que, na dinâmica de ordem reduzida (2.150a), o termo $\tilde{\mathbf{A}}_{12} s(t)$ atua como uma perturbação residual não nula sobre a dinâmica de $\tilde{\mathbf{x}}_1(t)$. Por essa razão, a origem não constitui um ponto de equilíbrio de (2.150a), o que motiva a adoção da estabilidade prática, definida a seguir, em substituição à estabilidade no sentido de Lyapunov.

Definição 2.14 (Estabilidade Prática (LAKSHMIKANTHAM; LEELA; MARTYNYUK, 1990)). Considere o sistema (3.2), no qual a origem não é, em geral, um ponto de equilíbrio, devido à presença de perturbações externas. O sistema é dito praticamente estável se existir uma região compacta e positivamente invariante $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_x}$, com $\mathbf{0} \in \Omega$, tal que, para toda condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$, exista um tempo finito $T(x_0) \geq 0$ (com $T(x_0) = 0$ se $x_0 \in \Omega$) a partir do qual a trajetória correspondente permanece em Ω para todo $t \geq T(x_0)$.

Comentário 2.18. Diferentemente da estabilidade no sentido de Lyapunov, a estabilidade prática não requer que a origem seja um ponto de equilíbrio do sistema (3.2); exige-se apenas que ela esteja contida na região Ω para a qual as trajetórias de estado convergem. Essa distinção é particularmente relevante quando o sistema está sujeito a entradas exógenas, como perturbações, ou a termos residuais do mecanismo de acionamento por eventos: por não dependerem do estado, tais termos não se anulam na origem, de modo que o campo vetorial do sistema perturbado é não nulo na origem e a convergência para esse ponto não pode, em geral, ser garantida. A estabilidade prática é, assim, precisamente a propriedade *UUB* (KHALIL, 2002) das trajetórias de estado em relação a Ω : é o fato de as trajetórias de estado apresentarem limitação uniforme e final a Ω que caracteriza o sistema como praticamente estável, e não a convergência para a origem. O tamanho de Ω depende dos limites superiores das entradas exógenas, como perturbações, e, no contexto do controle acionado por eventos, do limiar de acionamento adotado (BEHERA et al., 2015).

O restante desta subseção estabelece as condições sob as quais a dinâmica reduzida (2.150a) é praticamente estável, determinando explicitamente a região Ω correspondente em função dos parâmetros de projeto.

Teorema 2.10. *Considere o sistema de ordem reduzida (2.150a). Seja $\mathbf{A}_c = \tilde{\mathbf{A}}_{11} - \tilde{\mathbf{A}}_{12}\mathbf{G}_1$ uma matriz Hurwitz, e $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{(n_x-1) \times (n_x-1)}$ a solução positiva definida da equação de Lyapunov:*

$$\mathbf{A}_c^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_c = -\mathbf{Q}, \quad (2.151)$$

para alguma matriz $\mathbf{Q}$ positiva definida. Então, as trajetórias de $\tilde{\mathbf{x}}_1(t)$ são UUB com respeito à região:

$$\Omega = \{ \tilde{\mathbf{x}}_1(t) \in \mathbb{R}^{n_x-1} : \|\tilde{\mathbf{x}}_1(t)\| \leq \theta \}, \quad (2.152)$$

$$\text{onde } \theta = \frac{2\alpha \|\mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}_{12}\|}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})\|\mathbf{A}\|}.$$

Demonstração. Ver (BEHERA; BANDYOPADHYAY, 2016b). □

2.6.5.4 Garantia de Ausência do Comportamento Zeno

Com as condições de estabilidade prática do sistema na região de modos deslizantes prático apresentadas no Teorema 2.10, resta demonstrar que a sequência de instantes de acionamento por eventos $\{t_k\}_{k=0}^\infty$ é livre de comportamento Zeno. De acordo com (BEHERA; BANDYOPADHYAY, 2016b), Antes de enunciar o próximo teorema, de acordo com (BEHERA; BANDYOPADHYAY, 2016b) define-se a condição de acionamento por eventos:

$$\|\mathbf{G}\|\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{e}(t)\| \geq \tilde{\phi}, \quad (2.153)$$

onde $\tilde{\phi} \in (0, 1)$ é o limiar de acionamento por eventos.

Teorema 2.11. *Considere o sistema (2.139) sob a entrada de controle (2.142), atualizada de acordo com a condição de acionamento por eventos (2.153). Então, a sequência de acionamento por eventos $\{t_k\}_{k=0}^\infty$ é livre de comportamento Zeno, pois o intervalo entre acionamentos consecutivos $T_k = t_{k+1} - t_k$ admite, para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, um limite inferior estritamente positivo:*

$$T_k \geq \frac{1}{\|\mathbf{A}\|} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{\|\mathbf{G}\|(\rho(\|\mathbf{x}(t_k)\|) + \beta)} \right) > 0, \quad (2.154)$$

em que:

$$\rho(\|\mathbf{x}(t_k)\|) = \|\mathbf{A} - \mathbf{B}(\mathbf{GB})^{-1}\mathbf{GA}\| \|\mathbf{x}(t_k)\|, \quad (2.155)$$

e

$$\beta = \|\mathbf{B}(\mathbf{GB})^{-1}\|K + \|\mathbf{B}\|d_0. \quad (2.156)$$

Demonstração. Ver (BEHERA; BANDYOPADHYAY, 2016b). □

2.7 Fundamentos da Teoria de Dissipatividade e Passividade

A teoria da dissipatividade, proposta por J. C. Willems no início da década de 1970, nasce da tentativa de incorporar à teoria de estabilidade de Lyapunov os conceitos de armazenamento e dissipação de energia oriundos da teoria de circuitos elétricos, caracterizando sistemas dinâmicos com entrada e saída por meio da desigualdade de dissipação: a taxa de variação de uma função de armazenamento não negativa, ao longo de qualquer trajetória do sistema e em todo instante de tempo, nunca excede a taxa de suprimento de energia associada à entrada e à saída (WILLEMS, 1972a; WILLEMS, 1972b; SCHAFT, 2022). Sob condições adicionais, como a nulidade da taxa de suprimento na ausência de excitação externa e a observabilidade do estado nulo, essa desigualdade recupera o critério clássico de estabilidade assintótica de Lyapunov como caso particular (WILLEMS, 1972a; KHALIL, 2002).

Dentro dessa estrutura teórica, diversos conceitos clássicos da teoria de controle emergem como casos particulares, obtidos por meio de escolhas específicas da taxa de suprimento. O mais relevante deles é a passividade, correspondente ao caso em que essa taxa é dada pelo produto interno entre a entrada e a saída do sistema (WILLEMS, 1972b; HILL; MOYLAN, 1980), de modo que todo sistema passivo é necessariamente dissipativo, embora a recíproca não seja verdadeira: taxas de suprimento associadas ao ganho $\mathcal{L}_2$ ou à positividade real estrita, por exemplo, definem sistemas dissipativos que não são passivos. É justamente essa liberdade na escolha da taxa de suprimento que confere à dissipatividade um escopo de aplicação mais amplo que o da passividade, abrangendo sistemas para os quais esta última se mostra excessivamente restritiva ou simplesmente não é satisfeita (HILL; LIU, 2022).

No contexto do controle robusto e, em particular, do controle por modos deslizantes, a dissipatividade fornece condições analíticas que garantem, simultaneamente, a estabilidade e a robustez frente a incertezas, por meio de restrições impostas sobre a taxa de suprimento (GAO; SUN; LU, 2011). Nesta seção, são apresentados os fundamentos da teoria da dissipatividade e suas principais definições.

2.7.1 Sistemas Dissipativos

Do ponto de vista da física clássica, a dissipatividade está associada a sistemas nos quais ocorrem processos de perda de energia, fenômeno observado em uma ampla variedade de sistemas físicos reais (LOZANO et al., 2000). Circuitos elétricos com elementos resistivos ilustram bem esse fenômeno, já que, nesse caso, parte da potência elétrica fornecida ao circuito converte-se em calor por efeito Joule, sendo irreversivelmente perdida para o ambiente. Na teoria de sistemas dinâmicos, contudo, a dissipatividade não é uma propriedade absoluta do sistema, mas sim uma propriedade definida relativamente a uma taxa de suprimento específica, de modo que o sistema é dito dissipativo em relação a essa taxa quando existe uma função de armazenamento não negativa que satisfaz a correspondente desigualdade de dissipação (BAO; LEE, 2007; BROGLIATO et al., 2007).

O conceito foi inicialmente introduzido por J. C. Willems no âmbito da teoria de sistemas dinâmicos (WILLEMS, 1972a), sendo posteriormente estendido à teoria de controle por Hill e Moylan (HILL; MOYLAN, 1980), que o caracterizaram para sistemas afins e estabeleceram sua conexão com a estabilidade dessa classe de modelos. Desde então, a dissipatividade tem sido amplamente investigada por diversos autores (WU et al., 2017; LIU et al., 2019; FENG; ZHANG; LAM, 2021; CHEN et al., 2023). A motivação original de J. C. Willems foi estender as noções de passividade e dissipatividade, vindas do contexto da teoria de circuitos elétricos, para o arcabouço da teoria de estabilidade de Lyapunov. A abordagem adotada, contudo, não se restringiu à interpretação física do conceito: Willems formulou a dissipatividade em termos puramente matemáticos, o que possibilitou sua aplicação a uma classe ampla de sistemas dinâmicos, independentemente da natureza física do problema considerado. Para formalizar a dissipatividade nesse sentido, torna-se necessário definir duas funções: (1) a taxa de suprimento $w(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t))$, associada à taxa instantânea de energia trocada entre o sistema e seu ambiente externo, usualmente interpretada como potência nas aplicações físicas que motivaram a teoria; e (2) a função de armazenamento $V(\mathbf{x}(t))$, associada ao montante de energia acumulado internamente pelo sistema em cada instante.

Seja o sistema dinâmico não linear:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad (2.157a)$$

$$\mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (2.157b)$$

onde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ denota o estado, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ representa a entrada e $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ corresponde à saída.

A relação entre a taxa de suprimento $w(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t))$ e a função de armazenamento $V(\mathbf{x}(t)) \in \mathcal{C}^1$ é descrita pela desigualdade de dissipação, a qual impõe que, ao longo das trajetórias do sistema, a taxa de variação da energia armazenada nunca exceda a taxa de suprimento. Em termos práticos, o sistema não é capaz de acumular mais energia do que aquela que recebe do ambiente externo (MADEIRA, 2021). A desigualdade de dissipação é dada por:

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq w(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)). \quad (2.158)$$

Além disso, a propriedade de dissipatividade é preservada sob interconexões paralelas e de realimentação, desde que as taxas de suprimento individuais sejam compatíveis (MADEIRA; MACHADO, 2024). Adicionalmente, supondo que a origem seja um ponto de equilíbrio do sistema, se $V(\mathbf{x}(t))$ é uma função definida positiva e a taxa de suprimento satisfaz $w(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) \leq 0$ para entradas nulas, então a origem é um ponto de equilíbrio estável no sentido de Lyapunov (PAL; BELUR, 2009).

Definição 2.15 (Sistema Dissipativo (WILLEMS, 1972a)). O sistema (2.157) é dito dissipativo com respeito à taxa de suprimento $w(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t))$ se existir uma função de armazenamento

$V(\mathbf{x}(t)) \geq 0$ tal que, para toda entrada admissível $\mathbf{u}(\cdot)$ ⁹, para todo $t \geq t_0$ e ao longo de todas as trajetórias do sistema iniciadas em $\mathbf{x}_0$, a seguinte desigualdade de dissipação seja satisfeita em sua forma integral:

$$V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(t_0)) + \int_{t_0}^t w(\mathbf{u}(s), \mathbf{y}(s)) ds. \quad (2.159)$$

Ainda que historicamente o conceito de função de armazenamento tenha emergido a partir da analogia com a energia armazenada em sistemas físicos, no contexto formal da teoria de dissipatividade ela passa a ser tratada como um objeto matemático, sem vínculo obrigatório com nenhuma interpretação energética concreta. Isso permite que dissipatividade e estabilidade sejam caracterizadas de forma puramente analítica, o que estendeu o domínio de aplicação da teoria bem além dos sistemas de origem física, alcançando também formulações abstratas em espaços de estados quaisquer.

A desigualdade de dissipação (2.159) articula, portanto, a função de suprimento, associada à relação entre entrada e saída do sistema, com a função de armazenamento, dependente do estado, revelando-se um instrumento de grande utilidade na teoria de controle (BROGLIATO et al., 2007; MADEIRA, 2018). Supondo que a função de armazenamento seja positiva definida e decrescente ao longo das trajetórias do sistema, atuando, portanto, como uma função de Lyapunov, a desigualdade de dissipatividade garante estabilidade no sentido de Lyapunov (LOZANO et al., 2000). Esse formalismo constitui, portanto, um arcabouço rigoroso que viabilizou diversas aplicações em controle robusto, controle adaptativo e estabilização de sistemas não lineares, além de originar uma consolidada linha de pesquisa na teoria de sistemas (MADEIRA, 2021).

Uma outra categoria de sistemas dissipativos bastante utilizada, sobretudo no âmbito do controle por interconexão, é a dos sistemas ciclo-dissipativos (MADEIRA, 2021).

Definição 2.16 (Sistema Ciclo-Dissipativo (BROGLIATO et al., 2007)). Diz-se que o sistema (2.157) é ciclo-dissipativo em relação à taxa de suprimento $w(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t))$ quando, em qualquer intervalo de tempo $[t_0, t_1]$ e para toda trajetória que satisfaça $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_1)$, verifica-se a desigualdade:

$$\int_{t_0}^{t_1} w(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) dt \geq 0. \quad (2.160)$$

Segundo (MADEIRA, 2018), a distinção fundamental frente à noção clássica de dissipatividade está precisamente nesse requisito de ciclicidade: em vez de demandar a existência de uma função de armazenamento, basta que a energia fornecida ao sistema, ao longo de qualquer trajetória fechada no espaço de estados, não seja negativa. Dessa forma, um sistema ciclo-dissipativo nunca devolve ao ambiente, ao final de um ciclo fechado, mais energia do que recebeu dele. Trata-se, assim, de uma propriedade menos restritiva que a dissipatividade clássica: enquanto

⁹ Uma entrada $\mathbf{u}(\cdot) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n_u}$ é dita admissível se, para essa entrada, o problema de valor inicial associado a (2.157a) admitir solução única $\mathbf{x}(\cdot)$ definida em todo o intervalo $[t_0, t_1]$, garantindo que a saída $\mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ esteja bem definida para todo $t \in [t_0, t_1]$.

todo sistema dissipativo satisfaz também a ciclo-dissipatividade, o inverso nem sempre se verifica, como mostrado em (HILL; MOYLAN, 1980).

2.7.1.1 Funções de Armazenamento

Há uma ligação estreita entre a função de armazenamento $V(\mathbf{x}(t))$ e a construção de uma função de Lyapunov, uma vez que ambas quantificam uma noção de energia associada ao estado do sistema e satisfazem uma desigualdade de variação ao longo das trajetórias (HILL; LIU, 2022; MADEIRA, 2018). Um caso particular relevante, apresentado a seguir, é o da função de armazenamento disponível V_a , que corresponde ao maior valor de energia que o sistema consegue disponibilizar ao ambiente, dentre todas as trajetórias possíveis originadas de um mesmo estado inicial. Isto é, V_a quantifica o limite superior de energia extraível do sistema sem que sejam infringidas sua dinâmica própria e suas restrições. É justamente essa dupla conexão, com Lyapunov, de um lado, e com a energia extraível, de outro, que faz da função de armazenamento um objeto matemático essencial tanto para avaliar a dissipatividade quanto para caracterizar a estabilidade do sistema (HILL; MOYLAN, 2003).

Definição 2.17 (Função de Armazenamento Disponível (BROGLIATO et al., 2007)). A função de armazenamento disponível V_a associada ao sistema (2.157) é dada por:

$$V_a(\mathbf{x}(t_0)) = \sup_{\mathbf{u}(t), t \geq 0} \left(- \int_{t_0}^t w(\mathbf{u}(s), \mathbf{y}(s)) ds \right), \quad (2.161)$$

em que $V_a(\mathbf{x}(t_0))$ corresponde ao supremo de energia que o sistema é capaz de restituir ao ambiente a partir do estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$, tomando-se o conjunto de todas as entradas admissíveis $\mathbf{u}(t)$ e as respectivas trajetórias de estado associadas, para $t \geq t_0$.

No estudo de sistemas dissipativos, há uma função associada à função de armazenamento disponível, mas de interpretação complementar: trata-se da taxa de suprimento requerido, que quantifica a menor quantidade de energia necessária para que o sistema seja conduzido de um estado inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ até um estado $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}$, ao longo de alguma trajetória admissível¹⁰ (BROGLIATO et al., 2007).

Nesse contexto, um estado $\mathbf{x}$ é considerado alcançável a partir de $\mathbf{x}_0$ se for possível encontrar um instante $t \geq t_0$ e uma entrada admissível $\mathbf{u}(t)$ que levem o sistema de $\mathbf{x}_0$ até $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}$. Quando essa propriedade se verifica para quaisquer dois estados do espaço de estados, diz-se que o sistema é controlável (KHALIL, 2002).

Definição 2.18 (Taxa de Suprimento Requerido (BROGLIATO et al., 2007)). A taxa de suprimento requerido V_r do sistema (2.157) é definida por:

$$V_r(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u}(t), t \geq t_0} \left(\int_{-t}^0 w(\mathbf{u}(s), \mathbf{y}(s)) ds \right), \quad (2.162)$$

¹⁰ Entende-se por trajetória admissível aquela que constitui a solução única do problema de valor inicial correspondente ao sistema (2.157).

sujeito a $\mathbf{x}(-t) = \mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}$, admitindo-se que o sistema seja alcançável a partir de $\mathbf{x}_0$.

Diferentemente da função de armazenamento disponível, a taxa de suprimento requerido não apresenta, de modo geral, positividade definida. Contudo, no caso de sistemas reversíveis, ambas as funções passam a coincidir (WILLEMS, 1971). Com o intuito de caracterizar formalmente essa noção de reversibilidade de um sistema dinâmico, torna-se necessário introduzir uma terceira função de energia, conhecida como função de energia de ciclo.

Definição 2.19 (Função de Energia de Ciclo (BROGLIATO et al., 2007)). Define-se a função de energia de ciclo V_c do sistema (2.157) como:

$$V_c(\mathbf{x}) = \inf_{\substack{\mathbf{u}(t), t_1 \geq t_0 \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}}} \int_{t_0}^{t_1} w(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) dt, \quad (2.163)$$

tomando-se o ínfimo sobre todas as entradas admissíveis $\mathbf{u}(t)$ para as quais o sistema, partindo da origem $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$, alcança o estado $\mathbf{x}$ e a ela retorna ao final do intervalo considerado. Interpreta-se $V_c(\mathbf{x})$, dessa forma, como o menor gasto energético associado ao fechamento de um ciclo que passa pelo estado $\mathbf{x}$. Entre as três funções de energia apresentadas, verifica-se a relação:

$$V_r(\mathbf{x}) = V_a(\mathbf{x}) + V_c(\mathbf{x}). \quad (2.164)$$

2.7.2 Sistemas Passivos

Do ponto de vista conceitual, a passividade pode ser enquadrada como um caso específico dentro da estrutura mais ampla oferecida pela teoria da dissipatividade. Enquanto esta última comporta taxas de suprimento definidas livremente, a noção de passividade emerge quando se particulariza tal função para $w(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) = \mathbf{u}^\top(t) \mathbf{y}(t)$ (BAO; LEE, 2007; HILL; MOYLAN, 2003). Nessas condições, a energia injetada no sistema pela entrada $\mathbf{u}(t)$ acaba sendo, em algum grau, armazenada ou dissipada com o passar do tempo, sem que haja produção interna de energia. Por consequência, todos os resultados teóricos válidos para sistemas dissipativos permanecem válidos também para sistemas passivos, o que atribui a esse último conceito grande relevância tanto prática quanto física, por se tratar de um caso particular da teoria mais geral (BROGLIATO et al., 2007).

Definição 2.20 (Sistema Passivo (BROGLIATO et al., 2007)). O sistema (2.157) é classificado como passivo quando se mostra dissipativo em relação à taxa de suprimento $w(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) = \mathbf{u}^\top(t) \mathbf{y}(t)$, existindo para tanto uma função de armazenamento $V(\mathbf{x}(t)) \geq 0$, com $V(\mathbf{0}) = 0$, de modo que, para todo instante $t \geq t_0$, seja válida a desigualdade:

$$V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(0)) + \int_{t_0}^t \mathbf{u}^\top(s) \mathbf{y}(s) ds. \quad (2.165)$$

Definição 2.21 (Sistema Estritamente Passivo (BROGLIATO et al., 2007)). O sistema (2.157) recebe a classificação de estritamente passivo quando é dissipativo em relação à taxa de suprimento

$w(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) = \mathbf{u}^\top(t) \mathbf{y}(t)$, admite uma função de armazenamento $V(\mathbf{x}(t)) \geq 0$ com $V(\mathbf{0}) = 0$, e existe uma função definida positiva $S(\mathbf{x}(t))$ de modo que, para todo $t \geq t_0$, vale:

$$V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(t_0)) + \int_{t_0}^t \mathbf{u}^\top(s) \mathbf{y}(s) ds - \int_{t_0}^t S(\mathbf{x}(s)) ds. \quad (2.166)$$

Quando essa relação se verifica como igualdade e $S(\mathbf{x}(t)) \equiv 0$, o sistema recebe a denominação de sem perdas.

Existe ainda uma variante mais fraca desse conceito, denominada passividade estrita fraca, em que a função definida positiva $S(\mathbf{x}(t))$ dá lugar a uma função dissipativa $D(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \geq 0$, satisfazendo $D(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ (ISIDORI, 1999).

Teorema 2.12. *Considere que o sistema (2.157) seja sem perdas e admita um ponto de mínimo em $\mathbf{x}^*$ com $V(\mathbf{x}^*) = 0$. Sendo o espaço de estados alcançável a partir de $\mathbf{x}^*$ e controlável até $\mathbf{x}^*$, resulta que $V_a(\mathbf{x}) = V_r(\mathbf{x})$; consequentemente, a função de armazenamento é única e admite a representação*

$$V(\mathbf{x}) = \int_{t_1}^{t_0} w(\mathbf{u}(s), \mathbf{y}(s)) ds, \quad (2.167)$$

válida para qualquer $t_1 \leq 0$ e qualquer entrada admissível $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$ cuja trajetória parta de $\mathbf{x}^*$ em $t = t_1$ e chegue a $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$ em $t = t_0$. Equivalentemente,

$$V(\mathbf{x}) = - \int_{t_0}^{t_1} w(\mathbf{u}(s), \mathbf{y}(s)) ds, \quad (2.168)$$

para qualquer $t_1 \geq t_0$ e qualquer $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$ cuja trajetória parta de $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}$ em $t = t_0$ e alcance $\mathbf{x}^*$ em $t = t_1$.

Demonstração. Ver (WILLEMS, 1972b; MADEIRA, 2021). □

Quando o sistema (2.157) é passivo e sua função de armazenamento $V(\mathbf{x}(t))$ é definida positiva com $V(\mathbf{0}) = 0$, segue-se que o sistema é estável no sentido de Lyapunov. Essa conclusão vem diretamente da desigualdade de dissipação (2.159): tomando-se $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$, tem-se $w(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) \equiv 0$ e, consequentemente, $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq 0$ (MADEIRA, 2021).

Esse resultado assume papel central na teoria, ao estabelecer um elo direto entre passividade e estabilidade de Lyapunov. Trata-se de um princípio estruturante da teoria de controle, com aplicação imediata na estabilização de sistemas não lineares, em que a ideia consiste em projetar uma lei de controle que torne o sistema em malha fechada passivo, com função de armazenamento definida positiva, garantindo-se assim a estabilidade (MADEIRA, 2021).

2.7.2.1 Sistemas Robustamente Passivos

Quando o sistema está sujeito a perturbações externas e a incertezas paramétricas, não basta que a passividade seja verificada para um único cenário: ela deve se manter válida para todas

as perturbações admissíveis e para todo o conjunto de incertezas considerado, o que caracteriza a chamada passividade robusta. Ao contrário das variantes discutidas anteriormente, nas quais a taxa de suprimento é definida em termos da entrada de controle $\mathbf{u}(t)$, a passividade robusta é formulada com base na perturbação $\mathbf{w}(t)$, considerando-se a entrada de controle identicamente nula. A definição adotada neste trabalho segue (WU; ZHENG, 2009) e introduz um coeficiente de passividade robusta $\eta > 0$, responsável por quantificar a margem de dissipação do sistema frente à energia introduzida pela perturbação.

Definição 2.22 (Passividade Robusta (WU; ZHENG, 2009)). Considerando entrada de controle nula, isto é, $u(t) = 0$ para todo $t \geq 0$, o sistema é dito robustamente passivo se existir $\eta > 0$ tal que

$$2 \int_{t_0}^{t^*} \mathbf{y}^T(t) \mathbf{w}(t) dt \geq -\eta \int_{t_0}^{t^*} \mathbf{w}^T(t) \mathbf{w}(t) dt, \quad (2.169)$$

para todo $t^* > 0$, sob condições iniciais nulas e para todas as perturbações admissíveis $\mathbf{w}(t)$.

O termo à esquerda em (2.169) representa o fluxo de energia trocado entre a perturbação $\mathbf{w}(t)$ e a saída $\mathbf{y}(t)$ ao longo do intervalo $[t_0, t^*]$, ao passo que o termo à direita é proporcional à energia total contida na perturbação nesse mesmo intervalo. A desigualdade estabelece, assim, um limite para a energia que o sistema pode absorver: ainda que essa energia possa ser negativa (ou seja, o sistema pode devolver energia à perturbação), ela jamais excede, em módulo, $\eta \int_{t_0}^{t^*} \mathbf{w}^T(t) \mathbf{w}(t) dt$. Quanto maior o valor de η , maior a margem de energia que o sistema comporta antes de romper a condição de dissipação, o que corresponde, na prática, a uma atenuação mais acentuada do efeito de $\mathbf{w}(t)$ sobre $\mathbf{y}(t)$. Vale observar que essa formulação equivale à noção de passividade estrita pela entrada, aqui aplicada à perturbação, com o sinal do termo à direita invertido em relação à definição usual apresentada anteriormente.

O resultado a seguir relaciona a passividade robusta à existência de um funcional de Lyapunov–Krasovskii, oferecendo uma condição suficiente que pode ser verificada diretamente ao longo das trajetórias do sistema.

Teorema 2.13 (Passividade robusta via funcional de Lyapunov–Krasovskii (FRIDMAN, 2014; WILLEMS, 1972a; HILL; MOYLAN, 1980; SCHAFT, 2022)). *Considere um sistema de estado $\mathbf{x}(t)$, com atraso de tempo $\tau(t) \in [0, \tau_M]$, perturbação $\mathbf{w}(t)$, saída $\mathbf{y}(t)$ e entrada de controle nula. Denote por $\mathbf{x}_t(\theta) = \mathbf{x}(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau_M, 0]$, o segmento de trajetória de estado associado ao instante t . Suponha a existência de um funcional continuamente diferenciável $V : C([-\tau_M, 0], \mathbb{R}^{n_x}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, com $V(\mathbf{0}) = 0$, satisfazendo, ao longo das trajetórias do sistema,*

$$\dot{V}(\mathbf{x}_t) \leq 2\mathbf{y}^T(t) \mathbf{w}(t) + \eta \mathbf{w}^T(t) \mathbf{w}(t). \quad (2.170)$$

Nessas condições, o sistema é robustamente passivo com coeficiente $\eta > 0$.

Demonstração. Integrando (2.170) ao longo de $[t_0, t^*]$, tem-se

$$\int_{t_0}^{t^*} \dot{V}(\mathbf{x}_t) dt \leq 2 \int_{t_0}^{t^*} \mathbf{y}^T(t) \mathbf{w}(t) dt + \eta \int_{t_0}^{t^*} \mathbf{w}^T(t) \mathbf{w}(t) dt. \quad (2.171)$$

Pelo teorema fundamental do cálculo, o lado esquerdo pode ser reescrito como

$$\int_{t_0}^{t^*} \dot{V}(\mathbf{x}_t) dt = V(\mathbf{x}_{t^*}) - V(\mathbf{x}_0). \quad (2.172)$$

Como as condições iniciais são nulas, $\mathbf{x}_0(\theta) = \mathbf{0}$ para todo $\theta \in [-\tau_M, 0]$, e, por hipótese, $V(\mathbf{0}) = 0$, resulta $V(\mathbf{x}_0) = 0$. Logo,

$$V(\mathbf{x}_{t^*}) \leq 2 \int_{t_0}^{t^*} \mathbf{y}^T(t) \mathbf{w}(t) dt + \eta \int_{t_0}^{t^*} \mathbf{w}^T(t) \mathbf{w}(t) dt. \quad (2.173)$$

Uma vez que $V(\mathbf{x}_{t^*}) \geq 0$ para todo $t^* > 0$, conclui-se que

$$2 \int_{t_0}^{t^*} \mathbf{y}^T(t) \mathbf{w}(t) dt \geq -\eta \int_{t_0}^{t^*} \mathbf{w}^T(t) \mathbf{w}(t) dt, \quad (2.174)$$

que é exatamente a condição de passividade robusta (2.169), válida para todo $t^* > 0$ e para toda perturbação admissível $\mathbf{w}(t)$. $\square$

Comentário 2.19. Na ausência de perturbação, isto é, $\mathbf{w}(t) = \mathbf{0}$, a condição (2.170) se reduz a $\dot{V}(\mathbf{x}_t) \leq 0$, recuperando-se a noção usual de estabilidade no sentido de Lyapunov–Krasovskii. Dessa forma, o funcional $V(\mathbf{x}_t)$ desempenha simultaneamente o papel de certificado de estabilidade e de certificado de passividade robusta.

3 DESCRIÇÃO DOS MÉTODOS DE CONTROLE PROPOSTOS

Este capítulo descreve as duas metodologias de controle propostas nesta tese, denominadas Método 1 e Método 2. A Seção 3.1 apresenta a formulação do problema de controle, definindo a classe de sistemas *fuzzy* T–S tipo-2 intervalares considerada, as hipóteses adotadas e os objetivos de projeto. A Seção 3.2 apresenta o Método 1. Essa seção estabelece, nessa ordem, a convergência das trajetórias de estado para a região de modos deslizantes prático, em que a adaptação do ganho de chaveamento é realizada com base na estratégia de crescimento monotônico (Seção 3.2.1), a garantia analítica de ausência do comportamento Zeno na sequência de instantes de acionamento por eventos (Seção 3.2.2), e as condições de estabilização prática e passividade robusta da dinâmica reduzida na região de modos deslizantes prático (Seção 3.2.3). A Seção 3.3 apresenta o Método 2. Essa seção segue a mesma estrutura da anterior, estabelecendo a convergência para a região de modos deslizantes prático, em que a adaptação do ganho de chaveamento é realizada com base na estratégia de função de barreira (Seção 3.3.1), a ausência do comportamento Zeno (Seção 3.3.2) e as condições de estabilização prática e passividade robusta (Seção 3.3.3). Em ambos os métodos, as condições de estabilização prática e passividade robusta são obtidas a partir da desigualdade de passividade robusta, com função de armazenamento dada por um funcional de Lyapunov–Krasovskii *fuzzy*, da qual se derivam condições na forma de *LMIs* dependentes do atraso máximo, dos limites superiores das taxas de variação do atraso e dos graus de pertinência, e do coeficiente de passividade robusta. A factibilidade dessas condições, além de determinar a matriz da variável deslizante, certifica a passividade robusta e fornece as variáveis de decisão necessárias à dedução das condições de estabilização prática, cujo raio da região de estabilidade prática, para ambos os métodos, é determinado independentemente da estimativa do limite superior da perturbação casada, bem como o limite superior da região de modos deslizantes prático. Introduz-se, ainda, uma etapa de análise de robustez pós-projeto que certifica o atraso máximo admissível sem recorrer ao *co-design* e, conseqüentemente, sem exigir técnicas iterativas de relaxação das condições na forma de *LMIs*. Por fim, a Seção 3.4 deriva analiticamente um limite superior para o limiar de acionamento de cada método em função do coeficiente de passividade robusta, estabelecendo um vínculo energético explícito entre o mecanismo de eventos e a dissipatividade em malha fechada, ao mesmo tempo em que esse mesmo coeficiente limita energeticamente o impacto da perturbação não casada na saída.

3.1 Formulação do Problema de Controle

Os sistemas considerados neste trabalho pertencem à classe de sistemas dinâmicos não lineares sujeitos a um atraso de tempo variável modelados por um sistema *fuzzy* T–S tipo-2

intervalar. Para esse classe, o sistema de regras de inferência *fuzzy* é dado por:

Regrai : $\text{SE } f_1(x_1(t)) \in M_1^i \text{ e } \dots \text{ e } f_\Psi(x_\Psi(t)) \in M_\Psi^i \text{ ENTÃO}$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{d_i} \mathbf{x}(t - \tau(t)) + \mathbf{B}_i(u(t) + d(t)) + \mathbf{B}_{v_i} v(t) \\ y(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{C}_{d_i} \mathbf{x}_1(t - \tau(t)) + D_{v_i} v(t) \\ \mathbf{x}(\theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-\tau_m, 0], \end{cases} \quad (3.1)$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, onde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ denota o estado, $u(t) \in \mathbb{R}$ é a entrada de controle, $y(t) \in \mathbb{R}$ representa a saída, e $\mathbf{x}_1(t) \in \mathbb{R}^{n_x-1}$ corresponde às $n_x - 1$ primeiras componentes de $\mathbf{x}(t)$, de modo que $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1^\top(t) \ x_2(t)]^\top$ com $x_2(t) \in \mathbb{R}$. A dinâmica e a saída do i -ésimo sistema local linear são definidas pelas matrizes constantes conhecidas $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathbf{A}_{d_i} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n_x}$, $\mathbf{B}_{v_i} \in \mathbb{R}^{n_x}$, $D_{v_i} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{1 \times (n_x-1)}$ e $\mathbf{C}_{d_i} \in \mathbb{R}^{1 \times (n_x-1)}$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Cada regra de inferência possui, em seu antecedente, $\Psi \leq n_x$ variáveis de premissa $f_\alpha(x_\alpha(t))$, para todo $\alpha \in \{1, \dots, \Psi\}$, cada uma pertencente ao conjunto *fuzzy* M_α^i com um determinado grau de pertinência. A perturbação casada $d(t) \in \mathbb{R}$ atua no sistema por meio do espaço gerado por $\mathbf{B}_i$, e a perturbação não casada $v(t) \in \mathbb{R}$ por meio dos espaços gerados por $\mathbf{B}_{v_i}$ e D_{v_i} . O atraso variável no tempo $\tau(t) \in [0, \tau_m]$ varia com taxa $|\dot{\tau}(t)| \leq \mu < 1$, e $\tau_m > 0$ (KHARITONOV, 2012). A condição inicial é especificada pelo histórico de estado $\phi \in C([-\tau_m, 0], \mathbb{R}^{n_x})$, com segmento de trajetória de estado denotado por $\mathbf{x}_t(\theta) = \mathbf{x}(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau_m, 0]$, e $\mathbf{x}_0 = \phi$ (FRIDMAN, 2014).

Comentário 3.1. A partição do estado $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1^\top(t) \ x_2(t)]^\top$ com $\mathbf{x}_1(t) \in \mathbb{R}^{n_x-1}$ e $x_2(t) \in \mathbb{R}$ é adotada estrategicamente para garantir que a saída do sistema, em modo deslizante ideal, dependa exclusivamente da dinâmica de ordem reduzida $n_x - 1$ (SHTESSEL et al., 2014). Essa estrutura viabiliza que a condição de passividade robusta seja formulada de forma consistente durante a derivação das condições de estabilização prática.

De acordo com a Seção 2.1, o modelo *fuzzy* T-S tipo-2 intervalar é obtido pela combinação convexa dos r sistemas locais lineares, ponderada pelos graus de pertinência de ativação normalizados, resultando na seguinte representação:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \omega_i(t) [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{d_i} \mathbf{x}(t - \tau(t)) + \mathbf{B}_i(u(t) + d(t)) + \mathbf{B}_{v_i} v(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \omega_i(t) [\mathbf{C}_i \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{C}_{d_i} \mathbf{x}_1(t - \tau(t)) + D_{v_i} v(t)] \\ \mathbf{x}(\theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-\tau_m, 0]. \end{cases} \quad (3.2)$$

O desenvolvimento subsequente baseia-se nas seguintes hipóteses:

- **H₁.** Cada sistema local linear $(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_{d_i}, \mathbf{B}_i)$ é controlável para todo $i \in \{1, \dots, r\}$.
- **H₂.** A perturbação casada $d(t)$ satisfaz $\sup_{t \geq 0} |d(t)| = \rho$, onde $\rho > 0$ é um limite superior constante e desconhecido. Além disso, $\sum_{i=1}^r \omega_i(t) \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{B}_i\| |d(t)| \leq \sup_{t \geq 0} \bar{\mathbf{B}} |d(t)| = \bar{\rho}$,

onde $\bar{\mathbf{B}} = \sum_{i=1}^r \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{B}_i\|$ e $\bar{\rho} = \bar{\mathbf{B}}\rho$. Por simplicidade terminológica, $\bar{\rho}$ será denominado limite superior da perturbação casada.

- **H₃.** A perturbação não casada $v(t)$ satisfaz $\sup_{t \geq 0} |v(t)| = \vartheta$, onde $\vartheta > 0$ é um limite superior constante e conhecido. Além disso, $\sum_{i=1}^r \omega_i(t) \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{B}_{v_i}\| |v(t)| \leq \sup_{t \geq 0} \bar{\mathbf{B}}_v |v(t)| = \bar{\vartheta}$, onde $\bar{\mathbf{B}}_v = \sum_{i=1}^r \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{B}_{v_i}\|$ e $\bar{\vartheta} = \bar{\mathbf{B}}_v \vartheta$. Por simplicidade terminológica, $\bar{\vartheta}$ será denominado limite superior da perturbação não casada.
- **H₄.** As matrizes de entrada dos sistemas locais lineares são distintas, isto é, $\mathbf{B}_i \neq \mathbf{B}_j$ para todo $i, j \in \{1, \dots, r\}$ com $i \neq j$.
- **H₅.** Seguindo (LUK'YANOV; UTKIN, 1981), pela transformação de similaridade $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t)$, onde $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ é a matriz de transformação, o sistema (3.2) é reescrito na forma regular:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(t) = \tilde{\mathbf{A}}_{11,i} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \tilde{\mathbf{A}}_{12,i} \tilde{x}_2(t) + \tilde{\mathbf{A}}_{d_{11,i}} \tilde{\mathbf{x}}_1(t - \tau(t)) + \tilde{\mathbf{A}}_{d_{12,i}} \tilde{x}_2(t - \tau(t)) + \tilde{\mathbf{B}}_{v_{1,i}} v(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) = \tilde{\mathbf{A}}_{21,i} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \tilde{A}_{22,i} \tilde{x}_2(t) + \tilde{\mathbf{A}}_{d_{21,i}} \tilde{\mathbf{x}}_1(t - \tau(t)) + \tilde{A}_{d_{22,i}} \tilde{x}_2(t - \tau(t)) + \tilde{B}_{2,i}(u(t) + d(t)) + \tilde{B}_{v_{2,i}} v(t) \\ y(t) = \mathbf{C}_i \tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \mathbf{C}_{d_i} \tilde{\mathbf{x}}_1(t - \tau(t)) + D_{v_i} v(t) \\ \mathbf{x}(\theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-\tau_M, 0]. \end{cases} \quad (3.3)$$

onde $\tilde{\mathbf{x}}_1(t) \in \mathbb{R}^{n_x-1}$ corresponde às $n_x - 1$ primeiras componentes de $\mathbf{x}(t)$, de modo que $\tilde{\mathbf{x}}(t) = [\tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t) \tilde{x}_2(t)]^\top$ com $\tilde{x}_2(t) \in \mathbb{R}$. As matrizes particionadas são:

$$\tilde{\mathbf{A}}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11,i} & \tilde{\mathbf{A}}_{12,i} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21,i} & \tilde{A}_{22,i} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_{d_i} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{d_{11,i}} & \tilde{\mathbf{A}}_{d_{12,i}} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{d_{21,i}} & \tilde{A}_{d_{22,i}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{B}_{2,i} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{v_i} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{v_{1,i}} \\ \tilde{B}_{v_{2,i}} \end{bmatrix},$$

com $\tilde{\mathbf{A}}_{11,i}, \tilde{\mathbf{A}}_{d_{11,i}} \in \mathbb{R}^{(n_x-1) \times (n_x-1)}$, $\tilde{\mathbf{A}}_{12,i}, \tilde{\mathbf{A}}_{d_{12,i}} \in \mathbb{R}^{n_x-1}$, $\tilde{\mathbf{A}}_{21,i}, \tilde{\mathbf{A}}_{d_{21,i}} \in \mathbb{R}^{1 \times (n_x-1)}$, $\tilde{A}_{22,i}, \tilde{A}_{d_{22,i}} \in \mathbb{R}$, $\tilde{B}_{2,i} \in \mathbb{R}$, $\tilde{\mathbf{B}}_{v_{1,i}} \in \mathbb{R}^{n_x-1}$ e $\tilde{B}_{v_{2,i}} \in \mathbb{R}$.

- **H₆.** A taxa de variação do grau de pertinência normalizado $\omega_i(t)$ é limitada superiormente por uma constante conhecida $h_i > 0$, isto é, $\sup_{t \geq 0} |\dot{\omega}_i(t)| = h_i$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$.

A região no espaço de estado caracterizada por:

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : s(t) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t) = 0\} \quad (3.4)$$

é denominada região de modos deslizantes ideal, onde $s(t) \in \mathbb{R}$ é a variável deslizante e $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{1 \times n_x}$ é a matriz da variável deslizante. Para o projeto de controle por modos deslizantes, adota-se a hipótese clássica de (EDWARDS; SPURGEON, 1998):

- **H₇.** A matriz $\mathbf{G}\mathbf{B}_i$ é não singular para todo $i \in \{1, \dots, r\}$.

Comentário 3.2. As Hipóteses $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_7$ são padrão na literatura de controle por modos deslizantes e essenciais para o método proposto. Por um lado, a controlabilidade da tripla $(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_{d_i}, \mathbf{B}_i)$, garantida por $\mathbf{H}_1$, assegura a viabilidade de projetar uma matriz $\mathbf{G}$ tal que a dinâmica de ordem reduzida dentro da região de modos deslizantes prático seja praticamente estável (SHTESSEL et al., 2014), sendo essa condição necessária para que o projeto da região de modos deslizantes prático seja factível, independentemente do posto de $\mathbf{B}_i$. Por outro lado, a não singularidade de $\mathbf{GB}_i$, assegurada por $\mathbf{H}_7$, é um requisito para garantir que a lei de controle por modos deslizantes seja bem definida (EDWARDS; SPURGEON, 1998). Embora essa condição garanta o cancelamento exato das perturbações casadas em modo deslizante ideal, as perturbações não casadas atuam fora do espaço imagem de $\mathbf{B}_i$ e seus efeitos persistem mesmo após o alcance dessa região. A atenuação desses efeitos na saída do sistema é assegurada pela condição de passividade robusta incorporada ao projeto de controle.

Comentário 3.3. A Hipótese $\mathbf{H}_4$ elimina a restrição, comum na literatura de controle *fuzzy* T-S por modos deslizantes, de que as matrizes de entrada dos sistemas locais lineares sejam idênticas, isto é, $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Embora essa suposição simplifique o projeto de controle, ela raramente é satisfeita na prática, pois em sistemas não lineares reais a contribuição da entrada para a dinâmica do sistema tipicamente varia com o ponto de operação.

Comentário 3.4. A Hipótese $\mathbf{H}_5$ não constitui uma restrição sobre a classe de sistemas considerada, pois todo sistema que satisfaz $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_7$ admite a transformação para a forma regular por uma escolha adequada de $\mathbf{T}$. Trata-se, portanto, de uma hipótese de projeto. A matriz de similaridade é definida de modo a separar a dinâmica do sistema em duas partes, quais sejam: a dinâmica de ordem reduzida $\tilde{\mathbf{x}}_1(t) \in \mathbb{R}^{n_x-1}$, que governa o comportamento em modos deslizantes e sobre a qual a saída $y(t)$ é definida, e a dinâmica de $\tilde{\mathbf{x}}_2(t) \in \mathbb{R}$, diretamente acessível pela entrada de controle (SHTESSEL et al., 2014). Essa separação é essencial para que a condição de passividade robusta seja formulada de forma consistente durante a derivação das condições de estabilização prática, conforme discutido no Comentário 3.1.

Adotando o paradigma de controle acionado por eventos e seguindo a formulação proposta em (FENG; HAO, 2021), tem-se a seguinte definição da função de controle por modos deslizantes acionado por eventos:

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \omega_i(t_k) (\mathbf{GB}_i)^{-1} \left[\mathbf{GA}_i \mathbf{x}(t_k) + \mathbf{GA}_{d_i} \mathbf{x}(t_k - \tau(t_k)) + K(t) \text{sign}(s(t_k)) \right], \quad (3.5)$$

para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Como a entrada de controle (3.5) permanece constante em cada intervalo $[t_k, t_{k+1})$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, os erros de acionamento $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{e}(t - \tau(t)) = \mathbf{x}(t_k - \tau(t)) - \mathbf{x}(t - \tau(t))$ introduzem termos residuais na dinâmica da variável deslizante que impedem o confinamento estrito das trajetórias na região de modos deslizantes ideal. Consequentemente, apenas o modo deslizante prático pode ser estabelecido (BEHERA et al., 2021).

Além disso, o ganho de chaveamento deve ser projetado de modo a dominar os limites superiores da perturbação casada, condição necessária para garantir a convergência para a

região de modos deslizantes prático. Contudo, visto que, da Hipótese $\mathbf{H}_2$, o limite superior $\bar{\rho}$ é desconhecido a priori, faz-se necessário o desenvolvimento de estratégias de adaptação para o ganho de chaveamento. Adicionalmente, deve-se estabelecer, para a sequência de instantes de acionamento por eventos, a garantia analítica de ausência do comportamento Zeno. Resta, ainda, o problema de estabilização prática do sistema *fuzzy* T–S tipo-2 intervalar na região de modos deslizantes prático, na presença do atraso de tempo variante, bem como o problema de atenuação da perturbação não casada na saída, o qual é abordado por meio da condição de passividade robusta, garantindo a dissipação do sistema em malha fechada por meio de um coeficiente de passividade robusta especificado. A partir desse coeficiente, determina-se o limiar de acionamento por eventos, estabelecendo um vínculo energético entre ambos.

3.2 Método de Controle 1

3.2.1 Convergência das Trajetórias de Estado para a Região de Modos Deslizantes Prático

Nesta subseção, apresenta-se o Teorema 3.1, o qual garante que as trajetórias de estado do sistema *fuzzy* T–S tipo-2 intervalar (3.2) convergem para a região de modos deslizantes prático em tempo finito, sob um ganho de chaveamento adaptado de forma monotonicamente crescente, mesmo na presença de perturbações casadas e não casadas e de atraso variante no tempo, permanecendo nela de forma UBB para todo instante de tempo subsequente.

Teorema 3.1. *Considere o sistema (3.2) sujeito à entrada de controle (3.5), com os erros de acionamento $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{e}(t - \tau(t)) = \mathbf{x}(t_k - \tau(t)) - \mathbf{x}(t - \tau(t))$, e com $\bar{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^r \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{A}_i\|$ e $\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}} = \sum_{i=1}^r \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{A}_{\mathbf{d}i}\|$. Suponha que:*

- i) *A sequência de instantes de acionamento $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ é determinada pela condição de acionamento por eventos:*

$$\bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}} \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| \geq \tilde{\varphi}, \quad (3.6)$$

onde $\tilde{\varphi} > 0$ denota o limiar de acionamento por eventos.

- ii) *O ganho de chaveamento adaptativo é dado por:*

$$K(t) = \bar{\varphi} + \hat{\rho}(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad (3.7)$$

onde o escalar $\bar{\varphi}$ satisfaz $\bar{\varphi} > \tilde{\varphi} + \bar{\vartheta}$, $\bar{\varphi} > \bar{\vartheta}$ e $\bar{\varphi} > \hat{\rho}(t)$ para todo $t \geq 0$, com $\bar{\vartheta} = \sup_{t \geq 0} \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{v}} |\mathbf{v}(t)|$ e $\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^r \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{B}_{\mathbf{v}i}\|$.

- iii) *A estimativa do limite superior da perturbação casada $\hat{\rho}(t)$ é atualizada de acordo com a seguinte lei de atualização:*

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = \begin{cases} \gamma |s(t)|, & |s(t)| \geq \|\mathbf{G}\| \frac{\tilde{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}, \\ 0, & |s(t)| < \|\mathbf{G}\| \frac{\tilde{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}, \end{cases} \quad (3.8)$$

com $\gamma > 0$ e $\hat{p}(0) \geq 0$.

Então:

i) As trajetórias de estado $\mathbf{x}(t)$ alcançam a fronteira da região de modos deslizantes prático:

$$\partial\bar{\mathcal{S}} = \left\{ \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : |s(t)| = \|\mathbf{G}\| \frac{\bar{\Phi}}{\bar{\mathbf{A}}} \right\}, \quad (3.9)$$

em tempo finito t_1 , limitado superiormente por:

$$t_1 < \frac{\sqrt{2}V_1^{1/2}(0) - \|\mathbf{G}\| \frac{\bar{\Phi}}{\bar{\mathbf{A}}}}{\bar{\Phi} - \bar{\vartheta}}, \quad (3.10)$$

onde $V_1(0)$ é o valor inicial da função candidata de Lyapunov $V_1(t)$, sendo esse limite superior independente de $\hat{p}(t)$.

ii) Após t_1 , as trajetórias entram e permanecem, por invariância positiva, na região de modos deslizantes prático:

$$\bar{\mathcal{S}} = \left\{ \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : |s(t)| \frac{\|\mathbf{G}\| (\bar{\Phi} - \bar{\mathbf{A}}_d \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\|)}{\bar{\mathbf{A}}} < \|\mathbf{G}\| \frac{\bar{\Phi}}{\bar{\mathbf{A}}} \right\}, \quad (3.11)$$

para todo $t > t_1$.

iii) As trajetórias alcançam a região de modos deslizantes ideal:

$$\mathcal{S} = \{ \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : s(t) = 0 \}, \quad (3.12)$$

em tempo finito t_r , limitado superiormente por:

$$t_r < t_1 + \frac{\sqrt{2}V_1^{1/2}(t_1)}{\bar{\Phi} - \bar{\vartheta}}. \quad (3.13)$$

Demonstração. Considere a função candidata de Lyapunov:

$$V_1(t) = \frac{1}{2}s^2(t) + \frac{1}{2\gamma}\tilde{p}^2(t), \quad (3.14)$$

para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, onde $\tilde{p}(t) = \hat{p}(t) - \bar{p}$ é o erro de estimação do limite superior da perturbação casada.

A derivada temporal de V_1 ao longo das trajetórias de (3.2) resulta em:

$$\dot{V}_1(t) = s(t)\mathbf{G} \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \left[\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{d_i} \mathbf{x}(t - \tau(t)) + \mathbf{B}_i(u(t) + d(t)) + \mathbf{B}_{v_i} v(t) \right] + \frac{1}{\gamma} \tilde{p}(t) \dot{\hat{p}}(t). \quad (3.15)$$

Ao substituir a entrada de controle (3.5) em (3.15), a expressão expande-se para:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & s(t) \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \mathbf{G} \left[\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{d_i} \mathbf{x}(t - \tau(t)) \right. \\ & \left. + \mathbf{B}_i \sum_{j=1}^r \omega_j(t_k) (\mathbf{G} \mathbf{B}_j)^{-1} \left(-\mathbf{G} \mathbf{A}_j \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{G} \mathbf{A}_{d_j} \mathbf{x}(t_k - \tau(t_k)) - K(t) \text{sign}(s(t_k)) \right) \right] \\ & + s(t) \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \mathbf{G} \mathbf{B}_i d(t) + s(t) \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \mathbf{G} \mathbf{B}_{v_i} v(t) + \frac{1}{\gamma} \tilde{\rho}(t) \dot{\hat{\rho}}(t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Limitando o termo de ponderação cruzada $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(t) \omega_j(t_k) \|\mathbf{G} \mathbf{B}_i\| \|(\mathbf{G} \mathbf{B}_j)^{-1}\|$ em (3.16) via a desigualdade de norma matricial induzida, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) \leq & s(t) \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \left[\mathbf{G} \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{G} \mathbf{A}_{d_i} \mathbf{x}(t - \tau(t)) \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^r \omega_j(t_k) \|\mathbf{G} \mathbf{B}_i\| \|(\mathbf{G} \mathbf{B}_j)^{-1}\| \left(-\mathbf{G} \mathbf{A}_j \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{G} \mathbf{A}_{d_j} \mathbf{x}(t_k - \tau(t_k)) - K(t) \text{sign}(s(t_k)) \right) \right] \\ & + s(t) \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \mathbf{G} \mathbf{B}_i d(t) + s(t) \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \mathbf{G} \mathbf{B}_{v_i} v(t) + \frac{1}{\gamma} \tilde{\rho}(t) \dot{\hat{\rho}}(t). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Suponha que exista um escalar $\zeta > 0$ que satisfaça:

$$\omega_j(t_k) \|\mathbf{G} \mathbf{B}_i\| \|(\mathbf{G} \mathbf{B}_j)^{-1}\| \leq \zeta, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, r\}. \quad (3.18)$$

Disso decorre diretamente que:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(t) \omega_j(t_k) \|\mathbf{G} \mathbf{B}_i\| \|(\mathbf{G} \mathbf{B}_j)^{-1}\| \leq \zeta \sum_{i=1}^r \omega_i(t). \quad (3.19)$$

Comentário 3.5. O escalar $\zeta > 0$ em (3.18) consolida os produtos dos graus de pertinência com índices duplos em uma única combinação convexa, acomodando as distinções das matrizes de entrada $\mathbf{B}_i$ impostas pela Hipótese $\mathbf{H}_4$. A escolha $\zeta = 1$ é adotada sem restrição de generalidade: caso $\zeta \neq 1$, as conclusões de estabilidade do Teorema 3.1 são preservadas, visto que ζ entra de forma linear em todas as etapas subsequentes de limitação.

Aplicando (3.18) em (3.17) com $\zeta = 1$, e lembrando que $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{e}(t - \tau(t)) = \mathbf{x}(t_k - \tau(t_k)) - \mathbf{x}(t - \tau(t))$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) \leq & s(t) \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \left(-\mathbf{G} \mathbf{A}_i \mathbf{e}(t) - \mathbf{G} \mathbf{A}_{d_i} \mathbf{e}(t - \tau(t)) + \mathbf{G} \mathbf{B}_i d(t) + \mathbf{G} \mathbf{B}_{v_i} v(t) \right) \\ & - s(t) K(t) \text{sign}(s(t)) + \frac{1}{\gamma} \tilde{\rho}(t) \dot{\hat{\rho}}(t). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Limitando cada termo por meio de sua norma matricial induzida, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) \leq & |s(t)| \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \left(\|\mathbf{G}\| \|\mathbf{A}_i\| \|\mathbf{e}(t)\| + \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{A}_{d_i}\| \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| + \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{B}_i\| |d(t)| \right. \\ & \left. + \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{B}_{v_i}\| |v(t)| \right) - s(t) K(t) \text{sign}(s(t_k)) + \frac{1}{\gamma} \tilde{\rho}(t) \dot{\hat{\rho}}(t). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Antes de as trajetórias da variável deslizante alcançarem a fronteira $\partial\bar{\mathcal{S}}$ da região de modos deslizantes prático, uma vez que tanto $s(t)$ quanto $s(t_k)$ pertencem à mesma região de $\mathbb{R}$ ou ambas em $\left[\|\mathbf{G}\|\frac{\tilde{\Phi}}{\bar{\mathbf{A}}}, \infty\right)$ ou ambas em $\left(-\infty, -\|\mathbf{G}\|\frac{\tilde{\Phi}}{\bar{\mathbf{A}}}\right]$, tem-se que $\text{sign}(s(t)) = \text{sign}(s(t_k))$, condição sob a qual $-s(t)K(t)\text{sign}(s(t_k)) = -K(t)|s(t)|$. Sob essa condição, a desigualdade (3.21) simplifica-se para:

$$\dot{V}_1(t) \leq |s(t)| \left(\bar{\mathbf{A}}\|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}}\|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| + \bar{\mathbf{B}}|d(t)| + \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{v}}|\mathbf{v}(t)| - K(t) \right) + \frac{1}{\gamma}\tilde{\rho}(t)\dot{\rho}(t), \quad (3.22)$$

onde

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \omega_i(t)\|\mathbf{G}\|\|\mathbf{A}_i\| &\leq \sum_{i=1}^r \|\mathbf{G}\|\|\mathbf{A}_i\| = \bar{\mathbf{A}}, & \sum_{i=1}^r \omega_i(t)\|\mathbf{G}\|\|\mathbf{A}_{\mathbf{d}_i}\| &\leq \sum_{i=1}^r \|\mathbf{G}\|\|\mathbf{A}_{\mathbf{d}_i}\| = \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}}, \\ \sum_{i=1}^r \omega_i(t)\|\mathbf{G}\|\|\mathbf{B}_i\| &\leq \sum_{i=1}^r \|\mathbf{G}\|\|\mathbf{B}_i\| = \bar{\mathbf{B}}, & \sum_{i=1}^r \omega_i(t)\|\mathbf{G}\|\|\mathbf{B}_{\mathbf{v}_i}\| &\leq \sum_{i=1}^r \|\mathbf{G}\|\|\mathbf{B}_{\mathbf{v}_i}\| = \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{v}}. \end{aligned}$$

Comentário 3.6. A condição $\text{sign}(s(t)) = \text{sign}(s(t_k))$ é garantida enquanto tanto $s(t)$ quanto $s(t_k)$ pertencem à mesma região de $\mathbb{R}$. A violação dessa condição ocorre exclusivamente quando as trajetórias cruzam $s(t) = 0$ após o instante t_k .

Substituindo $K(t) = \bar{\Phi} + \hat{\rho}(t_k)$ em (3.22), e usando $\sup_{t \geq 0} \bar{\mathbf{B}}|d(t)| = \bar{\rho}$ e $\sup_{t \geq 0} \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{v}}|\mathbf{v}(t)| = \bar{\vartheta}$, obtém-se:

$$\dot{V}_1(t) \leq |s(t)| \left(\bar{\mathbf{A}}\|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}}\|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| + \bar{\rho} + \bar{\vartheta} - \bar{\Phi} - \hat{\rho}(t_k) \right) + \frac{1}{\gamma}\tilde{\rho}(t)\dot{\rho}(t). \quad (3.23)$$

Escrevendo $\bar{\rho} - \hat{\rho}(t_k) = -\tilde{\rho}(t) - (\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t_k))$, com $\tilde{\rho}(t) = \hat{\rho}(t) - \bar{\rho}$, e reagrupando $-|s(t)|\tilde{\rho}(t) + \gamma^{-1}\tilde{\rho}(t)\dot{\rho}(t) = \gamma^{-1}\tilde{\rho}(t)(\dot{\rho}(t) - \gamma|s(t)|)$, obtém-se:

$$\dot{V}_1(t) \leq |s(t)| \left(\bar{\mathbf{A}}\|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}}\|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| + \bar{\vartheta} - \bar{\Phi} \right) - |s(t)|(\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t_k)) + \gamma^{-1}\tilde{\rho}(t)(\dot{\rho}(t) - \gamma|s(t)|). \quad (3.24)$$

De acordo com (3.8), para todo $|s(t)| \geq \|\mathbf{G}\|\frac{\tilde{\Phi}}{\bar{\mathbf{A}}}$, decorre que $\dot{\rho}(t) = \gamma|s(t)| \geq 0$. Assim, $\hat{\rho}(t)$ é monotonicamente crescente, o que implica que $\hat{\rho}(t_k) \leq \hat{\rho}(t)$ para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Em (3.24), o termo $-|s(t)|(\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t_k)) \leq 0$ é não positivo e pode ser omitido, resultando em:

$$\dot{V}_1(t) \leq |s(t)| \left(\bar{\mathbf{A}}\|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}}\|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| - (\bar{\Phi} - \bar{\vartheta}) \right) + \gamma^{-1}\tilde{\rho}(t)(\dot{\rho}(t) - \gamma|s(t)|). \quad (3.25)$$

Substituindo $\dot{\rho}(t) = \gamma|s(t)|$, o último termo de (3.25) anula-se, e tendo em vista a hipótese $\bar{\Phi} > \bar{\vartheta} + \tilde{\Phi}$, a desigualdade reduz-se a:

$$\dot{V}_1(t) \leq |s(t)| \left(\bar{\mathbf{A}}\|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}}\|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| - (\bar{\Phi} - \bar{\vartheta}) \right). \quad (3.26)$$

Considerando a região $|s(t)| \geq \|\mathbf{G}\|\frac{\tilde{\Phi}}{\bar{\mathbf{A}}}$: a cada instante de acionamento por evento, os erros de acionamento tornam-se $\mathbf{e}(t_k) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{e}(t_k - \tau(t_k)) = \mathbf{0}$, de modo que (3.26) resulta em

$\dot{V}_1(t_k) < -(\bar{\varphi} - \bar{\vartheta})|s(t_k)| < 0$, pois $\bar{\varphi} > \bar{\vartheta}$ por hipótese estabelecida no enunciado do Teorema 3.1. Para todo $t \in (t_k, t_{k+1})$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, uma vez que a condição de acionamento (3.6) não é satisfeita, assegura-se que $\bar{\mathbf{A}}\|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}}\|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| < \tilde{\varphi} < \bar{\varphi} - \bar{\vartheta}$, pois $\bar{\varphi} > \bar{\vartheta} + \tilde{\varphi}$ por hipótese apresentada no enunciado do Teorema 3.1, garantindo que $\dot{V}_1(t) < -(\bar{\varphi} - \bar{\vartheta})|s(t)| < 0$ para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Sendo assim, garante-se que as trajetórias da variável deslizante alcancem a fronteira $|s(t)| = \|\mathbf{G}\|_{\bar{\mathbf{A}}} \frac{\tilde{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}$ em tempo finito t_1 , o que equivale a assegurar que as trajetórias de estado alcancem a fronteira $\partial\bar{\mathcal{S}}$ nesse mesmo instante.

Uma vez que as trajetórias da variável deslizante alcançaram a região $|s(t)| = \|\mathbf{G}\|_{\bar{\mathbf{A}}} \frac{\tilde{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}$, de (3.8) tem-se que $\dot{\hat{\rho}}(t) = 0$, impedindo o crescimento ilimitado do ganho de chaveamento. Considerando a hipótese de que $\bar{\varphi} > \hat{\rho}(t)$ para todo $t \geq 0$ estabelecida no enunciado do Teorema 3.1, e que os sinais $s(t)$ e $s(t_k)$ pertençam à mesma região de $\mathbb{R}$, sendo ambos em $\left(0, \|\mathbf{G}\|_{\bar{\mathbf{A}}} \frac{\tilde{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}\right)$ ou ambos em $\left(-\|\mathbf{G}\|_{\bar{\mathbf{A}}} \frac{\tilde{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}, 0\right)$, de modo que $\text{sign}(s(t)) = \text{sign}(s(t_k))$ e $-s(t)K(t)\text{sign}(s(t_k)) = -K(t)|s(t)|$, segue de (3.25) com $\dot{\hat{\rho}}(t) = 0$ que:

$$\dot{V}_1(t) \leq |s(t)|(\bar{\mathbf{A}}\|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}}\|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| - (\bar{\varphi} - \bar{\vartheta})) < 0, \quad (3.27)$$

para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. De fato, nos instantes de acionamento $\mathbf{e}(t_k) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{e}(t_k - \tau(t_k)) = \mathbf{0}$, tem-se $\dot{V}_1(t_k) \leq -|s(t_k)|(\bar{\varphi} - \bar{\vartheta}) < 0$, visto que $\bar{\varphi} - \bar{\vartheta} > 0$ por hipótese estabelecida no enunciado do Teorema 3.1. Adicionalmente, para os intervalos entre eventos, ou seja, para todo $t \in (t_k, t_{k+1})$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, verifica-se que $\dot{V}_1(t) < -|s(t)|(\bar{\varphi} - \bar{\vartheta}) < 0$, uma vez que $\bar{\varphi} - \bar{\vartheta} > \tilde{\varphi}$ decorre diretamente da hipótese $\bar{\varphi} > \tilde{\varphi} + \bar{\vartheta}$ estabelecida no enunciado do Teorema 3.1. Essa análise garante que as trajetórias da variável deslizante alcancem $s(t) = 0$ em tempo finito t_r , o que equivale a assegurar que as trajetórias de estado alcancem a região $\mathcal{S}$ nesse mesmo instante.

Comentário 3.7. As hipóteses $\bar{\varphi} > \tilde{\varphi} + \bar{\vartheta}$ e $\bar{\varphi} > \bar{\vartheta}$, declaradas no enunciado do Teorema 3.1, além de serem condições necessárias para garantir que as trajetórias de estado alcancem a fronteira $\partial\bar{\mathcal{S}}$, garantem simultaneamente que $\bar{\varphi}$ domina o limiar $\tilde{\varphi}$, impedindo que os termos residuais do acionamento por eventos comprometam a negatividade de $\dot{V}_1(t)$, e que $\bar{\varphi}$ domina $\bar{\vartheta}$, impedindo que o efeito da perturbação não casada comprometa essa negatividade. A hipótese $\bar{\varphi} > \hat{\rho}(t)$ para todo $t \geq 0$, após as trajetórias de estado alcançarem a fronteira $\partial\bar{\mathcal{S}}$, é condição necessária para que as trajetórias alcancem $\mathcal{S}$, embora a permanência nessa região não seja garantida em virtude dos termos residuais introduzidos pelo acionamento por eventos, os quais tornam a derivada $\dot{V}_1(t)$ menos negativa, porém ainda negativa, até que um novo evento seja gerado.

Comentário 3.8. Antes de as trajetórias alcançarem $\partial\bar{\mathcal{S}}$, tem-se que V_1 é estritamente decrescente sob as hipóteses $\bar{\varphi} > \tilde{\varphi} + \bar{\vartheta}$ e $\bar{\varphi} > \bar{\vartheta}$, e considerando que $s(t)$ e $s(t_k)$ pertençam à mesma região de $\mathbb{R}$, ambos em $\left[\|\mathbf{G}\|_{\bar{\mathbf{A}}} \frac{\tilde{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}, \infty\right)$ ou ambos em $\left(-\infty, -\|\mathbf{G}\|_{\bar{\mathbf{A}}} \frac{\tilde{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}\right]$. Esse resultado assegura que as trajetórias da variável deslizante alcancem em tempo finito t_1 a fronteira $|s(t)| = \|\mathbf{G}\|_{\bar{\mathbf{A}}} \frac{\tilde{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}$, o que equivale ao alcance da fronteira $\partial\bar{\mathcal{S}}$ pelas trajetórias de estado nesse mesmo instante.

Dado que $\dot{V}_1(t) < -(\bar{\varphi} - \bar{\vartheta})|s(t)|$ e $V_1(t) \geq \frac{1}{2}s^2(t)$, ao definir $w(t) = V_1^{1/2}(t)$ obtém-se $\dot{V}_1(t) < -(\bar{\varphi} - \bar{\vartheta})\sqrt{2}w$, o que implica em:

$$\dot{w}(t) < -\frac{\bar{\varphi} - \bar{\vartheta}}{\sqrt{2}}. \quad (3.28)$$

Integrando (3.28) de 0 a t_1 , tem-se:

$$V_1^{1/2}(t_1) < V_1^{1/2}(0) - \frac{\bar{\varphi} - \bar{\vartheta}}{\sqrt{2}}t_1. \quad (3.29)$$

Sabendo que $V_1(t_1) \geq \frac{1}{2}s^2(t_1)$ e que, por definição, $|s(t_1)| = \|\mathbf{G}\|_{\frac{\bar{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}}$, obtém-se $V_1^{1/2}(t_1) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\|\mathbf{G}\|_{\frac{\bar{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}}$. Substituindo em (3.29) e isolando t_1 , encontra-se:

$$t_1 < \frac{\sqrt{2}V_1^{1/2}(0) - \|\mathbf{G}\|_{\frac{\bar{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}}}{\bar{\varphi} - \bar{\vartheta}}, \quad (3.30)$$

sendo este limite superior completamente independente da estimativa do limite superior da perturbação casada.

Comentário 3.9. Após o alcance de $\partial\bar{\mathcal{S}}$, V_1 é estritamente decrescente sob as hipóteses $\bar{\varphi} > \bar{\varphi} + \bar{\vartheta}$, $\bar{\varphi} > \bar{\vartheta}$ e $\bar{\varphi} > \hat{\rho}(t)$, para todo $t \geq 0$, e sob a condição de que $s(t)$ e $s(t_k)$ pertençam à mesma região de $\mathbb{R}$, ou ambos em $\left(0, \|\mathbf{G}\|_{\frac{\bar{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}}\right)$ ou ambos em $\left(-\|\mathbf{G}\|_{\frac{\bar{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}}, 0\right)$. Esse resultado assegura que as trajetórias da variável deslizante alcancem $s(t) = 0$ em tempo finito t_r , o que equivale ao alcance da região $\mathcal{S}$ pelas trajetórias de estado nesse mesmo instante. Partindo de $\dot{V}_1(t) \leq -(\bar{\varphi} - \bar{\vartheta})|s(t)|$ e $V_1(t) = \frac{1}{2}s^2(t)$, obtém-se $|s(t)| = \sqrt{2}V_1^{1/2}(t)$, o que implica $-(\bar{\varphi} - \bar{\vartheta})|s(t)| \leq -(\bar{\varphi} - \bar{\vartheta})\sqrt{2}V_1^{1/2}(t)$. Definindo $w(t) = V_1^{1/2}(t)$ e aplicando a regra da cadeia, a desigualdade assume a forma:

$$\dot{w}(t) < -\frac{\bar{\varphi} - \bar{\vartheta}}{\sqrt{2}}. \quad (3.31)$$

Integrando sobre $[t_1, t_r]$ e impondo $s(t_r) = 0$, o que implica $V_1(t_r) = 0$, obtém-se:

$$t_r < t_1 + \frac{\sqrt{2}V_1^{1/2}(t_1)}{\bar{\varphi} - \bar{\vartheta}}, \quad (3.32)$$

sendo este limite superior completamente independente da estimativa do limite superior da perturbação casada. É importante notar que $t_1 < t_r$, uma vez que as trajetórias de estado convergem para $\bar{\mathcal{S}}$ antes de alcançarem $\mathcal{S}$. O instante t_r estabelece o limite superior para o momento em que as trajetórias alcançam a região $\mathcal{S}$ pela primeira vez.

Comentário 3.10. Considerando que a condição de acionamento (3.6) não é satisfeita em um instante arbitrário, a diferença $|s(t_k) - s(t)|$ é limitada superiormente por:

$$|s(t_k) - s(t)| = |\mathbf{G}\mathbf{e}(t)| \leq \|\mathbf{G}\|\|\mathbf{e}(t)\| < \frac{\|\mathbf{G}\|(\bar{\varphi} - \bar{\mathbf{A}}_d\|\mathbf{e}(t - \tau(t))\|)}{\bar{\mathbf{A}}} < \|\mathbf{G}\|_{\frac{\bar{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}}. \quad (3.33)$$

A definição da região de modos deslizantes prático é obtida impondo $s(t_k) = 0$ em (3.33), o que resulta em:

$$\bar{\mathcal{S}} = \left\{ \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : |s(t)| < \frac{\|\mathbf{G}\|(\bar{\varphi} - \bar{\mathbf{A}}_d\|\mathbf{e}(t - \tau(t))\|)}{\bar{\mathbf{A}}} < \|\mathbf{G}\|_{\frac{\bar{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}} \right\}. \quad (3.34)$$

O restante da prova estabelece a invariância positiva de $\bar{\mathcal{S}}$. Observa-se que as hipóteses $\bar{\varphi} > \tilde{\varphi} + \bar{\vartheta}$, $\bar{\varphi} > \bar{\vartheta}$ e $\bar{\varphi} > \hat{\rho}(t)$ para todo $t \geq 0$, por si sós, não são suficientes para provar essa propriedade. Portanto, o mecanismo de acionamento por eventos e a região de $\mathbb{R}$ à qual $s(t)$ e $s(t_k)$ pertencem tornam-se igualmente essenciais. Em particular, quando a condição de acionamento por eventos (3.6) não é satisfeita, obtém-se:

$$|s(t) - s(t_k)| \leq \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{e}(t)\| < \frac{\|\mathbf{G}\|(\tilde{\varphi} - \bar{\mathbf{A}}_d \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\|)}{\bar{\mathbf{A}}} < \|\mathbf{G}\| \frac{\tilde{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}, \quad (3.35)$$

o que fornece uma margem estrita para a atualização da entrada de controle antes que as trajetórias da variável deslizante alcancem a fronteira $|s(t)| = \|\mathbf{G}\| \frac{\tilde{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}$. As duas situações a seguir são consideradas:

1. *Hipóteses:* (i) as variáveis $s(t)$ e $s(t_k)$ pertencem a uma mesma região de $\mathbb{R}$, sendo ambas em $\left(0, \|\mathbf{G}\| \frac{\tilde{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}\right)$ ou ambas em $\left(-\|\mathbf{G}\| \frac{\tilde{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}, 0\right)$; (ii) as trajetórias alcançam a região $|s(t)| < \|\mathbf{G}\| \frac{\tilde{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}$; e (iii) nenhuma atualização da entrada de controle ocorreu desde que as trajetórias entraram nessa região. Sob as condições $\bar{\varphi} > \tilde{\varphi} + \bar{\vartheta}$, $\bar{\varphi} > \bar{\vartheta}$ e $\bar{\varphi} > \hat{\rho}(t)$ para todo $t \geq 0$, o decrescimento de $V_1(t)$ permanece válido mesmo que a entrada de controle não seja atualizada em $\bar{\mathcal{S}}$. Como $s(t)$ e $s(t_k)$ pertencem a uma mesma região de $\mathbb{R}$, garante-se que $\dot{V}_1(t) < 0$, de modo que as trajetórias da variável deslizante são conduzidas em direção a $s(t) = 0$.
2. *Hipótese:* (i) as variáveis $s(t)$ e $s(t_k)$ pertencem a regiões distintas de $\mathbb{R}$, ou seja, uma delas em $\left(0, \|\mathbf{G}\| \frac{\tilde{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}\right)$ e a outra em $\left(-\|\mathbf{G}\| \frac{\tilde{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}, 0\right)$. A análise de decrescimento de V_1 não se aplica. Sob as hipóteses do Comentário 3.11, a condição de acionamento por eventos (3.6) é satisfeita e um novo evento é gerado antes que as trajetórias alcancem $|s(t)| = \|\mathbf{G}\| \frac{\tilde{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}$, e a cadeia de desigualdades (3.35) fornece uma margem estrita para a atualização da entrada de controle. Com a atualização, $s(t)$ e $s(t_k)$ passam a pertencer a uma mesma região de $\mathbb{R}$, ou ambas em $\left(0, \|\mathbf{G}\| \frac{\tilde{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}\right)$ ou ambas em $\left(-\|\mathbf{G}\| \frac{\tilde{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}, 0\right)$, de modo que $\dot{V}_1(t) < 0$, conduzindo as trajetórias em direção a $s(t) = 0$.

Combinando os dois cenários, uma vez que $|s(t_1)| = \|\mathbf{G}\| \frac{\tilde{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}$, garante-se que $|s(t)| < \|\mathbf{G}\| \frac{\tilde{\varphi}}{\bar{\mathbf{A}}}$ para todo $t > t_1$, estabelecendo a invariância positiva de $\bar{\mathcal{S}}$.

Comentário 3.11. O Teorema 3.1 é demonstrado supondo-se que: (i) a função $\|\mathbf{e}(t)\|$ é contínua; (ii) a condição de acionamento (3.6) é monitorada continuamente; (iii) os eventos são gerados exatamente quando $\bar{\mathbf{A}}\|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_d\|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| = \tilde{\varphi}$; e (iv) não existem atrasos entre o monitoramento da condição de acionamento, a geração de um novo evento, a atualização da entrada de controle e a sua aplicação no atuador. Se um novo evento for gerado apenas quando $\bar{\mathbf{A}}\|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_d\|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| > \tilde{\varphi}$, então nem a invariância positiva de $\bar{\mathcal{S}}$ nem o alcance em tempo finito das trajetórias de estado à fronteira dessa região são garantidos.

□

3.2.2 Ausência do Comportamento Zeno

Nesta subseção, apresenta-se o Teorema 3.2, o qual garante que a sequência de instantes de acionamento por eventos $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ do Método 1 é livre do comportamento Zeno, estabelecendo analiticamente um limite inferior estritamente positivo para o intervalo entre acionamentos consecutivos sob a estratégia de ganho de chaveamento adaptativo baseado em função de barreira.

Teorema 3.2. *Considere o sistema (3.2) sob a entrada de controle (3.5), atualizada de acordo com a condição de acionamento por eventos (3.6). Então, a sequência de acionamento por eventos $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ é livre de comportamento Zeno, pois o intervalo entre dois acionamentos consecutivos t_k e t_{k+1} admite, para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, um limite inferior estritamente positivo:*

$$T_k \geq \frac{1}{\gamma_1} \ln \left(1 + \frac{\gamma_1 \bar{\mathbf{A}}^{-1} (\tilde{\Phi} - \bar{\mathbf{A}}_d \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\|)}{\gamma_3 \|\mathbf{x}(t_k)\| + \gamma_2} \right) > 0, \quad (3.36)$$

onde os escalares γ_1 , γ_2 e γ_3 são definidos como:

$$\gamma_1 = \sum_{i=1}^r (\|\mathbf{A}_i\| + q \|\mathbf{A}_{d_i}\|), \quad (3.37a)$$

$$\gamma_2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \|\mathbf{B}_i\| \|(\mathbf{G}\mathbf{B}_j)^{-1}\| |K(t_k)| + \bar{\rho} + \bar{\vartheta}, \quad (3.37b)$$

$$\gamma_3 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r (\|\mathbf{A}_i\| + q \|\mathbf{A}_{d_i}\| + q \|\mathbf{B}_i\| \|(\mathbf{G}\mathbf{B}_j)^{-1}\| \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{A}_{d_j}\| + \|\mathbf{B}_i\| \|(\mathbf{G}\mathbf{B}_j)^{-1}\| \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{A}_j\|). \quad (3.37c)$$

Demonstração. Defina o conjunto $\Gamma = \{t \in \mathbb{R} : \bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_d \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| = 0\}$. Para todo $t \in [t_k, t_{k+1}) \setminus \Gamma$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, a derivada temporal de $\|\mathbf{e}(t)\|$ satisfaz:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{e}(t)\| \leq \|\dot{\mathbf{e}}(t)\| = \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \leq & \left\| \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \left\{ \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{d_i} \mathbf{x}(t - \tau(t)) + \mathbf{B}_i d(t) + \mathbf{B}_{v_i} v(t) \right. \right. \\ & - \mathbf{B}_i \left[\sum_{j=1}^r \omega_j(t_k) (\mathbf{G}\mathbf{B}_j)^{-1} \left(\mathbf{G} \mathbf{A}_j \mathbf{x}(t_k) + \mathbf{G} \mathbf{A}_{d_j} \mathbf{x}(t_k - \tau(t_k)) \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + K(t_k) \text{sign}(s(t_k)) \right) \right] \right\} \right\|. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Expandindo $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{e}(t)$ e $\mathbf{x}(t - \tau(t)) = \mathbf{x}(t_k - \tau(t_k)) - \mathbf{e}(t - \tau(t))$ em (3.38), e aplicando o teorema de Razumikhin (FRIDMAN, 2014) (que garante a existência de $q > 1$ tal que $\|\mathbf{x}(t - \tau(t))\| \leq q \|\mathbf{x}(t)\|$ para todo $\tau(t) \in [0, \tau_m]$), juntamente com a desigualdade triangular

e os limites $\sup_{t \geq 0} \bar{\mathbf{B}}|d(t)| = \bar{\rho}$ e $\sup_{t \geq 0} \bar{\mathbf{B}}_0|v(t)| = \bar{\vartheta}$, e introduzindo os escalares γ_1 , γ_2 e γ_3 definidos em (3.37a)–(3.37c), obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{e}(t)\| \leq \gamma_1 \|\mathbf{e}(t)\| + \gamma_3 \|\mathbf{x}(t_k)\| + \gamma_2. \quad (3.39)$$

O lema de comparação (KHALIL, 2002), aplicado a (3.39) com condição inicial $\mathbf{e}(t_k) = \mathbf{0}$, fornece:

$$\|\mathbf{e}(t)\| \leq \frac{\gamma_3 \|\mathbf{x}(t_k)\| + \gamma_2}{\gamma_1} \left(e^{\gamma_1(t-t_k)} - 1 \right), \quad (3.40)$$

para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Impondo a condição de acionamento (3.6) por meio de (3.40), obtém-se:

$$\gamma_1 \bar{\mathbf{A}}^{-1} (\bar{\Phi} - \bar{\mathbf{A}}_d \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\|) \geq (\gamma_3 \|\mathbf{x}(t_k)\| + \gamma_2) (e^{\gamma_1 T_k} - 1). \quad (3.41)$$

Isolando T_k em (3.41):

$$T_k \geq \frac{1}{\gamma_1} \ln \left(1 + \frac{\gamma_1 \bar{\mathbf{A}}^{-1} (\bar{\Phi} - \bar{\mathbf{A}}_d \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\|)}{\gamma_3 \|\mathbf{x}(t_k)\| + \gamma_2} \right) > 0. \quad (3.42)$$

A positividade de (3.42) estabelece $T_k \geq \psi > 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, garantindo que a sequência $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ é livre do comportamento Zeno. $\square$

3.2.3 Estabilização Prática e Passividade Robusta

De acordo com o Teorema 3.1, devido à invariância positiva da região de modos deslizantes prático, após as trajetórias de estado alcançarem $\bar{\mathcal{S}}$ em $t > t_1$, elas permanecem nessa região para todo tempo posterior. Sendo assim, quando o sistema está em modo deslizante prático, as trajetórias da variável deslizante são superiormente limitadas por:

$$|s(t)| \leq \|\mathbf{G}\| \frac{\bar{\Phi} - \bar{\mathbf{A}}_d \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\|}{\bar{\mathbf{A}}} < \|\mathbf{G}\| \frac{\bar{\Phi}}{\bar{\mathbf{A}}}. \quad (3.43)$$

Particionando a matriz $\mathbf{G}$ e o estado $\mathbf{x}(t)$, respectivamente, como $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & G_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^\top(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^\top$, onde $\mathbf{G}_1 \in \mathbb{R}^{1 \times (n_x - 1)}$, $G_2 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_1(t) \in \mathbb{R}^{n_x - 1}$ e $x_2(t) \in \mathbb{R}$. Sob a transformação de similaridade $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t)$ introduzida para derivar a forma regular (3.3), segue diretamente que a variável deslizante admite a representação $s(t) = \mathbf{G}\mathbf{T}^{-1}\tilde{\mathbf{x}}(t)$.

Ao aplicar o limite superior da variável deslizante $s(t)$ estabelecido em (3.43), verifica-se que $\tilde{x}_2(t)$, dentro da região de modos deslizantes prático, satisfaz:

$$\tilde{x}_2(t) < -\mathcal{G}\tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \tilde{G}_2^{-1} \|\mathbf{G}\| \frac{\bar{\Phi}}{\bar{\mathbf{A}}}, \quad (3.44)$$

em que $\mathcal{G} = \tilde{G}_2^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_1$, obtido a partir da partição estrutural $\mathbf{G}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_1 & \tilde{G}_2 \end{bmatrix}$.

Para fins de simplificação algébrica, $\tilde{x}_2(t)$ pode ser expressa de forma compacta como:

$$\tilde{x}_2(t) = -\mathcal{G}\tilde{x}_1(t) + \delta_{\tilde{x}_2}(t), \quad (3.45)$$

na qual $\delta_{\tilde{x}_2}(t) = \tilde{G}_2^{-1}s(t)$ cumpre a condição de limitação uniforme dada por $\sup_{t \geq 0} |\delta_{\tilde{x}_2}(t)| = \tilde{G}_2^{-1}\phi_{\max}$, com $\phi_{\max} = \|\mathbf{G}\|_{\frac{\tilde{\Phi}}{\mathbf{A}}}$, recuperando-se diretamente a relação limite apresentada em (3.44).

A dinâmica de modo deslizante prático, que é de ordem reduzida $n_x - 1$, é dada por:

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \left[(\tilde{\mathbf{A}}_{11,i} - \tilde{\mathbf{A}}_{12,i}\mathcal{G})\tilde{x}_1(t) + (\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}11,i} - \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}12,i}\mathcal{G})\tilde{x}_1(t - \tau(t)) + \tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{v}1,i}\mathbf{v}(t) \right] + \mathbf{\Delta}_{\phi}(t), \quad (3.46)$$

onde $\tilde{\mathbf{A}}_i = (\tilde{\mathbf{A}}_{11,i} - \tilde{\mathbf{A}}_{12,i}\mathcal{G})$ e $\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}i} = (\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}11,i} - \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}12,i}\mathcal{G})$. O termo $\mathbf{\Delta}_{\phi}(t) = \sum_{i=1}^r \omega_i(t) [\tilde{\mathbf{A}}_{12,i}\delta_{\tilde{x}_2}(t) + \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}12,i}\delta_{\tilde{x}_2}(t - \tau(t))]$ satisfaz:

$$\|\mathbf{\Delta}_{\phi}(t)\| \leq \bar{M} \tilde{G}_2^{-1}\phi_{\max}, \quad \bar{M} = \sum_{i=1}^r \|\tilde{\mathbf{A}}_{12,i} + \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}12,i}\|. \quad (3.47)$$

Comentário 3.12. O termo $\sum_{i=1}^r \omega_i(t) [\tilde{\mathbf{A}}_i\tilde{x}_1(t) + \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}i}\tilde{x}_1(t - \tau(t)) + \tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{v}1,i}\mathbf{v}(t)] = \dot{\tilde{x}}_1^{\text{ideal}}(t)$ é a dinâmica do sistema na região de modos deslizantes ideal, obtida quando $\delta_{\tilde{x}_2}(t) = \tilde{G}_2^{-1}s(t) = 0$, que equivale a afirmar que $s(t) = 0$. O termo $\mathbf{\Delta}_{\phi}$ representa o desvio do modo deslizante prático em relação ao ideal.

Comentário 3.13. A matriz $\mathcal{G} = \tilde{G}_2^{-1}\tilde{\mathbf{G}}_1$ é obtida diretamente das partições da matriz da variável deslizante $\mathbf{G}$, após a transformação de similaridade realizada por $\mathbf{T}$. Na dinâmica de modo deslizante prático (3.46), as matrizes $\tilde{\mathbf{A}}_i = \tilde{\mathbf{A}}_{11,i} - \tilde{\mathbf{A}}_{12,i}\mathcal{G}$ e $\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}i} = \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}11,i} - \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}12,i}\mathcal{G}$ revelam que $\mathcal{G}$ atua como uma matriz de realimentação de estado sobre a dinâmica de ordem reduzida $n_x - 1$, razão pela qual será referida como matriz de realimentação de estado ao longo desta tese. Essa interpretação tem uma consequência direta para o projeto: garantir que a dinâmica de modo deslizante prático possua propriedades desejadas, como estabilidade e passividade robusta, é equivalente a projetar a matriz da variável deslizante $\mathbf{G}$, pois $\mathcal{G}$ é inteiramente determinada por $\mathbf{G}$ e pela matriz de transformação $\mathbf{T}$. Por sua vez, como a região de modos deslizantes prático é definida em função dessa matriz da variável deslizante, projetar $\mathbf{G}$ é também equivalente a projetar essa região, estabelecendo assim um vínculo direto entre o projeto da região de modos deslizantes prático e as propriedades dinâmicas do sistema em malha fechada.

Teorema 3.3. *Seja (3.46) a dinâmica do sistema em modo deslizante prático. Suponha que, dados os escalares $\tau_M > 0$, $\mu \in [0, 1)$, $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ e h_i , existam matrizes $\mathbf{X} \succ 0$, $\mathbf{W} \succ 0$, $\tilde{\mathbf{R}} \succ 0$, $\tilde{\mathbf{Q}}_i \succ 0$, $\tilde{\mathbf{S}}_i \succ 0 \in \mathbb{S}^{(n_x-1) \times (n_x-1)}$ e matrizes $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{1 \times (n_x-1)}$, $\tilde{\mathbf{Y}} \in \mathbb{R}^{(n_x-1) \times (n_x-1)}$, tais que para*

todo $i \in \{1, \dots, r\}$, sejam factíveis:

$$\begin{bmatrix} \text{He}(\bar{\mathbf{A}}_{c_i}) + \tilde{\mathbf{Q}}_i + \tilde{\Phi} - \tilde{\mathbf{R}} + \varepsilon_0 \mathbf{X} & \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}_{c_i}} + \tilde{\mathbf{R}} - \tilde{\mathbf{Y}} & \tilde{\mathbf{Y}} & \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{v}_{1,i}} - \mathbf{X}\mathbf{C}_i^\top & \tau_M \bar{\mathbf{A}}_{c_i}^\top \\ \star & \mathbf{\Gamma}_i - 2\tilde{\mathbf{R}} + \text{He}(\tilde{\mathbf{Y}}) & \tilde{\mathbf{R}} - \tilde{\mathbf{Y}} & -\mathbf{X}\mathbf{C}_{\mathbf{d}_i}^\top & \tau_M \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}_{c_i}}^\top \\ \star & \star & \tilde{\mathbf{S}}_i - \tilde{\mathbf{R}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -2D_{\mathbf{v}_i} - \eta & \tau_M \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{v}_{1,i}}^\top \\ \star & \star & \star & \star & -\mathbf{W} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.48)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.49)$$

onde os blocos de (3.48) são definidos por:

$$\bar{\mathbf{A}}_{c_i} = \tilde{\mathbf{A}}_{11,i} \mathbf{X} - \tilde{\mathbf{A}}_{12,i} \mathbf{V}, \quad \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}_{c_i}} = \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}_{11,i}} \mathbf{X} - \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}_{12,i}} \mathbf{V}, \quad (3.50)$$

$$\mathbf{\Gamma}_i = -(1 - \mu)(\tilde{\mathbf{Q}}_i + \tilde{\mathbf{S}}_i), \quad \tilde{\Phi} = \tau_M \sum_{j=1}^r h_j(\tilde{\mathbf{Q}}_j + \tilde{\mathbf{S}}_j), \quad (3.51)$$

com as transformações de congruência $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{Q}}_i = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q}_i \mathbf{P}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{S}}_i = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S}_i \mathbf{P}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{P}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{P}^{-1}$ e a matriz de ganho de realimentação de estado determinada por $\mathcal{G} = \mathbf{V} \mathbf{X}^{-1}$.

Então, garante-se a estabilidade prática do sistema (3.46) em conjunto com a passividade robusta com coeficiente $\eta > 0$, obtendo-se:

i) As trajetórias do estado funcional $\tilde{\mathbf{x}}_{1_t}$ são UUB com respeito à região de estabilidade prática funcional:

$$\mathcal{B}_{\text{stab}} = \{ \tilde{\mathbf{x}}_{1_t} \in C^1([- \tau_M, 0], \mathbb{R}^{n_x-1}) : \|\tilde{\mathbf{x}}_{1_t}\|_{C^1} \leq r_{\text{stab}} \}, \quad (3.52)$$

definida no espaço de funções de dimensão infinita $C^1([- \tau_M, 0], \mathbb{R}^{n_x-1})$, com raio funcional:

$$r_{\text{stab}} = \kappa_{\text{stab}} \frac{\|\mathbf{G}\| \tilde{\Phi}}{\bar{\mathbf{A}}}, \quad \kappa_{\text{stab}} = \frac{\delta_2 + \sqrt{\delta_2^2 + 4\lambda_\epsilon \delta_1}}{2\lambda_\epsilon}, \quad (3.53)$$

onde:

$$\delta_1 = [\varepsilon_0^{-1} \lambda_{\max}^2(\mathbf{P}) + (1 + \varepsilon_1) \tau_M^2 \lambda_{\max}(\mathbf{R})] \bar{M}^2 \tilde{G}_2^{-2}, \quad \delta_2 = 2\tau_M^2 \lambda_{\max}(\mathbf{R}) \bar{A}_c \bar{M} \tilde{G}_2^{-1}, \quad (3.54)$$

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^r \|\tilde{\mathbf{A}}_{12,i} + \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}_{12,i}}\|, \quad (3.55a)$$

$$\bar{A}_c = \sum_{i=1}^r (\|\bar{\mathbf{A}}_i\| + \|\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}_i}\| + \|\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{v}_{1,i}}\|), \quad (3.55b)$$

$$\lambda_{\epsilon} = \lambda_{\min} \left(- \sum_{i=1}^r \omega_i (\bar{\Phi}_i + \tau_M^2 \mathbf{F}_i^{\top} \mathbf{R} \mathbf{F}_i) \right) - \epsilon_0 \lambda_{\max}(\mathbf{P}), \quad (3.56)$$

com $\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i & \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}i} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{v}_{1,i}} \end{bmatrix}$ e:

$$\bar{\Phi}_i = \begin{bmatrix} \text{He}(\mathbf{P}\bar{\mathbf{A}}_i) + \mathbf{Q}_i + \Phi - \mathbf{R} & \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}i} + \mathbf{R} - \mathbf{Y} & \mathbf{Y} & \mathbf{P}\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{v}_{1,i}} - \mathbf{C}_i^{\top} \\ * & -(1-\mu)(\mathbf{Q}_i + \mathbf{S}_i) + \mathbf{\Gamma} & \mathbf{R} - \mathbf{Y} & -\mathbf{C}_{\mathbf{d}i}^{\top} \\ * & * & \mathbf{S}_i - \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -2D_{\mathbf{v}_i} - \eta \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

na qual $\Phi = \tau_M \sum_{j=1}^r h_j(\mathbf{Q}_j + \mathbf{S}_j)$ e $\mathbf{\Gamma} = -2\mathbf{R} + \text{He}(\mathbf{Y})$.

ii) A projeção de $\mathcal{B}_{\text{stab}}$ sobre $\mathbb{R}^{n_x-1}$ define a região de estabilidade prática geométrica:

$$\mathcal{R}_{\text{stab}} = \{ \tilde{\mathbf{x}}_1(t) \in \mathbb{R}^{n_x-1} : \|\tilde{\mathbf{x}}_1(t)\| \leq R_{\text{stab}} \}, \quad (3.58)$$

com raio geométrico:

$$R_{\text{stab}} = \sqrt{\frac{\bar{\nu}}{\underline{\nu}}} r_{\text{stab}}, \quad (3.59)$$

onde $\underline{\nu} = \lambda_{\min}(\mathbf{P})$ e:

$$\bar{\nu} = \lambda_{\max}(\mathbf{P}) + \tau_M \max_i \{ \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_i) \} + \tau_M \max_i \{ \lambda_{\max}(\mathbf{S}_i) \} + \tau_M^2 L^2 \lambda_{\max}(\mathbf{R}). \quad (3.60)$$

iii) Para toda perturbação admissível $\mathbf{v}(t)$ e todo $t^* > 0$, as trajetórias satisfazem a condição de passividade robusta:

$$2 \int_0^{t^*} y(t) \mathbf{v}(t) dt \geq -\eta \int_0^{t^*} \mathbf{v}^2(t) dt - V(\tilde{\mathbf{x}}_{1_0}), \quad (3.61)$$

que, sob condições iniciais nulas ($V(\tilde{\mathbf{x}}_{1_0}) = 0$), reduz-se exatamente à desigualdade integral de passividade robusta com coeficiente η .

Demonstração. Sejam $\mathbf{P}, \mathbf{R} \succ 0$, $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}(t)) = \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \mathbf{Q}_i \succ 0$ e $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t)) = \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \mathbf{S}_i \succ 0$. O funcional de Lyapunov–Krasovskii fuzzy de 4 termos $V : \mathcal{C}^1([- \tau_M, 0], \mathbb{R}^{n_x-1}) \rightarrow \mathbb{R}$ é definido como:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{x}}_{1_t}) = & \underbrace{\tilde{\mathbf{x}}_{1_t}^{\top}(0) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_{1_t}(0)}_{V_1} + \underbrace{\int_{-\tau(t)}^0 \tilde{\mathbf{x}}_{1_t}^{\top}(s) \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}(s)) \tilde{\mathbf{x}}_{1_t}(s) ds}_{V_2} + \underbrace{\int_{-\tau_M}^{-\tau(t)} \tilde{\mathbf{x}}_{1_t}^{\top}(s) \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t)) \tilde{\mathbf{x}}_{1_t}(s) ds}_{V_3} \\ & + \underbrace{\tau_M \int_{-\tau_M}^0 \int_{\theta}^0 \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{1_t}^{\top}(s) \mathbf{R} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{1_t}(s) ds d\theta}_{V_4}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

onde $\tilde{\mathbf{x}}_{1_t} \in \mathcal{C}^1([- \tau_M, 0], \mathbb{R}^{n_x-1})$, com $\tilde{\mathbf{x}}_{1_t}(\theta) = \tilde{\mathbf{x}}_1(t + \theta)$ para todo $\theta \in [- \tau_M, 0]$.

Reescrevendo (3.62) em função do tempo absoluto, mediante a mudança de variável $s = t + \theta$:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{x}}_1) &= \tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \int_{t-\tau(t)}^t \tilde{\mathbf{x}}_1^\top(s) \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}(s)) \tilde{\mathbf{x}}_1(s) ds + \int_{t-\tau_M}^{t-\tau(t)} \tilde{\mathbf{x}}_1^\top(s) \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t)) \tilde{\mathbf{x}}_1(s) ds \\ &\quad + \tau_M \int_{-\tau_M}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1^\top(s) \mathbf{R} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(s) ds d\theta. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Diferenciando cada parcela de (3.63) ao longo das trajetórias do sistema (3.46), obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \left[\tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t) \left(\bar{\mathbf{A}}_i^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \bar{\mathbf{A}}_i \right) \tilde{\mathbf{x}}_1(t) + 2\tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t) \mathbf{P} \bar{\mathbf{A}}_{d,i} \tilde{\mathbf{x}}_1(t - \tau(t)) + 2\tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t) \mathbf{P} \bar{\mathbf{B}}_{v_{1,i}} v(t) \right. \\ &\quad \left. + 2\tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t) \mathbf{P} (\tilde{\mathbf{A}}_{12,i} + \tilde{\mathbf{A}}_{d_{12,i}}) \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_2}(t) \right] + \tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t) \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}(t)) \tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \tau_M \sum_{j=1}^r \rho_j \tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t) (\mathbf{Q}_j + \mathbf{S}_j) \tilde{\mathbf{x}}_1(t) \\ &\quad + (1 - \mu) \tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t - \tau(t)) \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t)) \tilde{\mathbf{x}}_1(t - \tau(t)) - \tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t - \tau_M) \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t)) \tilde{\mathbf{x}}_1(t - \tau_M) \\ &\quad - (1 - \mu) \tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t - \tau(t)) \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}(t)) \tilde{\mathbf{x}}_1(t - \tau(t)) + \tau_M^2 \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1^\top(t) \mathbf{R} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(t) \\ &\quad - \tau_M \int_{t-\tau_M}^t \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1^\top(s) \mathbf{R} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(s) ds. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Lema 3.4 (Desigualdade de Jensen para Integrais (GU; CHEN; KHARITONOV, 2003)). *Seja a matriz $\mathbf{R} \succ 0$, $h > 0$ um escalar e $\mathbf{f}: [a, a+h] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função integrável. Então:*

$$h \int_a^{a+h} \mathbf{f}^\top(s) \mathbf{R} \mathbf{f}(s) ds \geq \left(\int_a^{a+h} \mathbf{f}(s) ds \right)^\top \mathbf{R} \left(\int_a^{a+h} \mathbf{f}(s) ds \right). \quad (3.65)$$

Lema 3.5 (Convexidade Recíproca (PARK; KO; JEONG, 2011)). *Sejam $\mathbf{R} \succ 0$, escalares $\alpha \in (0, 1)$ e $\beta = 1 - \alpha$, e $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Para qualquer matriz $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo $\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{Y} \\ \star & \mathbf{R} \end{bmatrix} \succeq 0$, a seguinte desigualdade é válida:*

$$\frac{1}{\alpha} \mathbf{a}^\top \mathbf{R} \mathbf{a} + \frac{1}{\beta} \mathbf{b}^\top \mathbf{R} \mathbf{b} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{Y} \\ \star & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

Aplicando o Lema de Jensen 3.4 separadamente em cada subintervalo da partição $[t - \tau_M, t - \tau(t)] \cup [t - \tau(t), t]$, obtém-se:

$$-\tau_M \int_{t-\tau_M}^t \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1^\top(s) \mathbf{R} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(s) ds \leq -\frac{\tau_M}{\tau(t)} \alpha^\top \mathbf{R} \alpha - \frac{\tau_M}{\tau_M - \tau(t)} \beta^\top \mathbf{R} \beta, \quad (3.67)$$

onde:

$$\alpha = \tilde{\mathbf{x}}_1(t) - \tilde{\mathbf{x}}_1(t - \tau(t)), \quad \beta = \tilde{\mathbf{x}}_1(t - \tau(t)) - \tilde{\mathbf{x}}_1(t - \tau_M). \quad (3.68)$$

Como $\tau(t) \in (0, \tau_M)$, os escalares $\alpha = \tau(t)/\tau_M$ e $\beta = (\tau_M - \tau(t))/\tau_M$ satisfazem $\alpha + \beta = 1$ com $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Identificando $\mathbf{a} = \alpha$, $\mathbf{b} = \beta$ e aplicando o Lema da Convexidade Recíproca 3.5

a (3.67), com variável livre $\mathbf{Y}$ satisfazendo $\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{Y} \\ \star & \mathbf{R} \end{bmatrix} \succeq 0$, chega-se a:

$$-\tau_M \int_{t-\tau_M}^t \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1^\top(s) \mathbf{R} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(s) ds \leq \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_1(t-\tau(t)) \\ \tilde{\mathbf{x}}_1(t-\tau_M) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -\mathbf{R} & \mathbf{R}-\mathbf{Y} & \mathbf{Y} \\ \star & -2\mathbf{R}+\text{He}(\mathbf{Y}) & \mathbf{R}-\mathbf{Y} \\ \star & \star & -\mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_1(t-\tau(t)) \\ \tilde{\mathbf{x}}_1(t-\tau_M) \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

Ao introduzir o vetor aumentado $\boldsymbol{\xi}^\top(t) = [\tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t) \quad \tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t-\tau(t)) \quad \tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t-\tau_M) \quad \mathbf{v}^\top(t)]$ e substituir as relações (3.69) e (3.46) em (3.64), a derivada superior do funcional de Lyapunov–Krasovskii *fuzzy* passa a ser limitada superiormente por:

$$\dot{V}(t) \leq \boldsymbol{\xi}^\top(t) \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\omega}(t)) \boldsymbol{\xi}(t) + \tau_M^2 (\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1^{\text{ideal}}(t))^\top \mathbf{R} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1^{\text{ideal}}(t) + T_0(t) + T_1(t) + T_2(t) + T_3(t), \quad (3.70)$$

em que a matriz $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\omega}(t)) = \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \boldsymbol{\Phi}_i$, tal que:

$$\boldsymbol{\Phi}_i = \begin{bmatrix} \text{He}(\mathbf{P}\bar{\mathbf{A}}_i) + \mathbf{Q}_i + \boldsymbol{\Phi} - \mathbf{R} & \mathbf{P}\bar{\mathbf{A}}_{d_i} + \mathbf{R} - \mathbf{Y} & \mathbf{Y} & \mathbf{P}\bar{\mathbf{B}}_{v_{1,i}} \\ \star & -(1-\mu)(\mathbf{Q}_i + \mathbf{S}_i) - 2\mathbf{R} + \text{He}(\mathbf{Y}) & \mathbf{R} - \mathbf{Y} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{S}_i - \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.71)$$

onde $\boldsymbol{\Phi} = \tau_M \sum_{j=1}^r h_j(\mathbf{Q}_j + \mathbf{S}_j)$.

Os termos $T_0(t)$, $T_1(t)$, $T_2(t)$, e $T_3(t)$ são definidos como:

$$T_0(t) = 2\tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t) \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{A}}_{12,i} + \tilde{\mathbf{A}}_{d_{12,i}}) \delta_{x_2}(t), \quad (3.72a)$$

$$T_1(t) = 2\tau_M^2 \boldsymbol{\Delta}_\phi^\top(t) \mathbf{R} \boldsymbol{\Delta}_{nc}(t), \quad (3.72b)$$

$$T_2(t) = 2\tau_M^2 (\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1^{\text{ideal}}(t))^\top \mathbf{R} \boldsymbol{\Delta}_\phi(t), \quad (3.72c)$$

$$T_3(t) = \tau_M^2 \boldsymbol{\Delta}_\phi^\top(t) \mathbf{R} \boldsymbol{\Delta}_\phi(t), \quad (3.72d)$$

onde $\boldsymbol{\Delta}_{nc}(t) = \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \bar{\mathbf{B}}_{v_{1,i}} \mathbf{v}(t)$.

Comentário 3.14. A decomposição algébrica apresentada em (3.70) detalha como a dinâmica de modo deslizante prático impacta a derivada do funcional de Lyapunov–Krasovskii *fuzzy*. Ao expandir o termo quadrático $\tau_M^2 \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1^\top(t) \mathbf{R} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(t)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \tau_M^2 \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1^\top(t) \mathbf{R} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(t) &= \tau_M^2 (\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1^{\text{ideal}}(t))^\top \mathbf{R} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1^{\text{ideal}}(t) + 2\tau_M^2 (\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1^{\text{ideal}}(t))^\top \mathbf{R} \boldsymbol{\Delta}_{nc}(t) + \tau_M^2 \boldsymbol{\Delta}_{nc}^\top(t) \mathbf{R} \boldsymbol{\Delta}_{nc}(t) \\ &\quad + \tau_M^2 \boldsymbol{\Delta}_\phi^\top(t) \mathbf{R} \boldsymbol{\Delta}_\phi(t) + 2\tau_M^2 (\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1^{\text{ideal}}(t))^\top \mathbf{R} \boldsymbol{\Delta}_\phi(t) + 2\tau_M^2 \boldsymbol{\Delta}_\phi^\top(t) \mathbf{R} \boldsymbol{\Delta}_{nc}(t). \end{aligned}$$

Nessa estrutura, as três primeiras parcelas do lado direito são absorvidas diretamente em (3.48). Por sua vez, as três parcelas remanescentes tornam-se os termos $T_1(t)$, $T_2(t)$ e $T_3(t)$. Procedimento análogo é aplicado à $\dot{V}_1(t)$, na qual a parcela remanescente torna-se o termo $T_0(t) = 2\tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t) \mathbf{P} \boldsymbol{\Delta}_\phi(t)$.

Lema 3.6 (Desigualdade de Rayleigh (HORN; JOHNSON, 2012)). *Seja $\mathbf{R} \succ 0$ uma matriz simétrica positiva definida com menor valor singular $\lambda_{\min}(\mathbf{R})$ e maior valor singular $\lambda_{\max}(\mathbf{R})$. Então, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:*

$$\lambda_{\min}(\mathbf{R})\|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^\top \mathbf{R} \mathbf{x} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{R})\|\mathbf{x}\|^2. \quad (3.73)$$

Lema 3.7 (Desigualdade de Young (YOUNG, 1912)). *Para quaisquer $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, matriz $\mathbf{R} \succ 0$ e escalar $\varepsilon > 0$, a seguinte desigualdade é válida:*

$$2\mathbf{a}^\top \mathbf{b} \leq \varepsilon \mathbf{a}^\top \mathbf{R} \mathbf{a} + \varepsilon^{-1} \mathbf{b}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}. \quad (3.74)$$

Para a análise do termo $T_0(t)$, que é proveniente de $\dot{V}_1(t)$, aplica-se o lema da desigualdade de Young, seguida do lema da desigualdade de Rayleigh. Ao estabelecer $\varepsilon_0 > 0$, $\mathbf{a} = \mathbf{P}^{1/2} \tilde{\mathbf{x}}_1(t)$ e $\mathbf{b} = \mathbf{P}^{-1/2} \mathbf{P} \Delta_\phi(t)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} T_0(t) &= 2\tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t) \mathbf{P} \Delta_\phi(t) \leq \varepsilon_0 \tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \varepsilon_0^{-1} \Delta_\phi^\top(t) \mathbf{P} \Delta_\phi(t) \\ &\leq \varepsilon_0 \tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \varepsilon_0^{-1} \lambda_{\max}^2(\mathbf{P}) \bar{M}^2 \tilde{G}_2^{-2} \phi_{\max}^2. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Seguindo a mesma estratégia de limitação para os componentes de $\dot{V}_4(t)$, o termo puramente quadrático $T_1(t)$, é limitado superiormente pelo lema da desigualdade de Rayleigh:

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \tau_M^2 \Delta_\phi^\top(t) \mathbf{R} \Delta_\phi(t) \leq \tau_M^2 \lambda_{\max}(\mathbf{R}) \|\Delta_\phi(t)\|^2 \\ &\leq \tau_M^2 \lambda_{\max}(\mathbf{R}) \bar{M}^2 \tilde{G}_2^{-2} \phi_{\max}^2. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Adicionalmente, o termo $T_2(t)$, que caracteriza o produto cruzado entre $\dot{\mathbf{x}}_1^{\text{ideal}}(t)$ e $\Delta_\phi(t)$ em $\dot{V}_4(t)$, é realizado por meio da aplicação do lema da desigualdade de Cauchy–Schwarz, seguida do lema da desigualdade de Rayleigh. Sabendo que a taxa de variação ideal é limitada em norma por $\|\dot{\mathbf{x}}_1^{\text{ideal}}(t)\| \leq \bar{A}_c \|\boldsymbol{\xi}(t)\|$, na qual $\bar{A}_c = \sum_{i=1}^r (\|\bar{\mathbf{A}}_{ci}\| + \|\bar{\mathbf{A}}_{dci}\| + \|\bar{\mathbf{B}}_{v_{1,i}}\|)$, segue que:

$$\begin{aligned} T_2(t) &= 2\tau_M^2 (\dot{\mathbf{x}}_1^{\text{ideal}}(t))^\top \mathbf{R} \Delta_\phi(t) \leq 2\tau_M^2 \lambda_{\max}(\mathbf{R}) \|\dot{\mathbf{x}}_1^{\text{ideal}}(t)\| \|\Delta_\phi(t)\| \\ &\leq 2\tau_M^2 \lambda_{\max}(\mathbf{R}) \bar{A}_c \bar{M} \tilde{G}_2^{-1} \phi_{\max} \|\boldsymbol{\xi}(t)\|. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Por fim, para a análise do termo $T_3(t)$, que descreve o produto cruzado entre $\Delta_\phi(t)$ e $\Delta_{nc}(t)$, ao aplicar inicialmente o lema da desigualdade de Cauchy–Schwarz, seguida do lema da desigualdade de Rayleigh, obtém-se:

$$\begin{aligned} T_3(t) &= 2\tau_M^2 \Delta_\phi^\top(t) \mathbf{R} \Delta_{nc}(t) \leq 2\tau_M^2 \lambda_{\max}(\mathbf{R}) \|\Delta_\phi(t)\| \|\Delta_{nc}(t)\| \\ &\leq 2\tau_M^2 \lambda_{\max}(\mathbf{R}) \bar{M} \tilde{G}_2^{-1} \phi_{\max} \bar{\vartheta}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Em seguida, de modo a desacoplar o produto presente no limite superior de (3.78) e permitir a linearização matricial, aplica-se o lema da desigualdade de Young com parâmetro escalar $\varepsilon_1 > 0$. Esse procedimento resulta em:

$$T_3(t) \leq \varepsilon_1 \tau_M^2 \lambda_{\max}(\mathbf{R}) \bar{M}^2 \tilde{G}_2^{-2} \phi_{\max}^2 + \varepsilon_1^{-1} \tau_M \bar{\vartheta}^2. \quad (3.79)$$

Comentário 3.15. O termo $\tau_M^2 (\dot{\mathbf{x}}_1^{\text{ideal}}(t))^\top \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}_1^{\text{ideal}}(t)$ presente em (3.70) pode ser expandido na forma $\tau_M^2 \dot{\mathbf{x}}_1^{\text{ideal}\top}(t) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}_1^{\text{ideal}}(t) = \tau_M^2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(t) \omega_j(t) (\mathbf{F}_i \boldsymbol{\xi}(t))^\top \mathbf{R} (\mathbf{F}_j \boldsymbol{\xi}(t))$, em que a matriz $\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{ci} & \bar{\mathbf{A}}_{dc_i} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{B}}_{v_{1,i}} \end{bmatrix}$. Para cada vetor aumentado $\boldsymbol{\xi}(t)$ fixado, os escalares $G_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{F}_i \boldsymbol{\xi}(t))^\top \mathbf{R} (\mathbf{F}_j \boldsymbol{\xi}(t))$ são constantes, permitindo definir a matriz compacta $\mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}) = \tau_M^2 \mathbf{Z}^\top(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{Z}(\boldsymbol{\xi})$, com a matriz bloco mapeada por $\mathbf{Z}^\top(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{F}_1 \boldsymbol{\xi}(t) & \dots & \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{F}_r \boldsymbol{\xi}(t) \end{bmatrix}$. Visto que a matriz resultante cumpre a condição de semidefinição positiva $\mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}) \succeq 0$ por construção, a forma quadrática associada $f_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\omega}(t)) = \boldsymbol{\omega}^\top(t) \mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\omega}(t)$ é estritamente convexa em relação às funções de pertinência $\boldsymbol{\omega}(t)$ para qualquer trajetória fixa do vetor aumentado.

Lema 3.8 (Desigualdade de Jensen (JENSEN, 1906)). *Seja $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Para todo $n \geq 2$, $x_1, \dots, x_n \in I$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ que satisfaz $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, verifica-se que:*

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_i). \quad (3.80)$$

Visto que a forma quadrática $\tau_M^2 \dot{\mathbf{x}}_1^{\text{ideal}\top}(t) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}_1^{\text{ideal}}(t) = f_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\omega}(t))$ é convexa em relação à função de pertinência $\boldsymbol{\omega}(t)$ para cada vetor aumentado $\boldsymbol{\xi}(t)$ fixado, a aplicação direta do lema da desigualdade de Jensen, definida em 3.8 sobre o simplex unitário fornece o seguinte limite superior para $f_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\omega}(t))$:

$$f_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\omega}(t)) = f_{\boldsymbol{\xi}}\left(\sum_{i=1}^r \omega_i(t) \mathbf{e}_i\right) \leq \sum_{i=1}^r \omega_i(t) f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{e}_i) = \tau_M^2 \sum_{i=1}^r \omega_i(t) (\mathbf{F}_i \boldsymbol{\xi}(t))^\top \mathbf{R} (\mathbf{F}_i \boldsymbol{\xi}(t)), \quad (3.81)$$

em que $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^r$ denota o i -ésimo vetor da base canônica.

Na sequência do desenvolvimento, o objetivo é garantir que a condição de passividade robusta se verifique sob perturbações não casadas admissíveis (Comentário 3.16). Essa propriedade é definida pela seguinte desigualdade:

$$\dot{V}(t) \leq 2y(t)v(t) + \eta v^2(t). \quad (3.82)$$

Comentário 3.16. Como a variável deslizante satisfaz $s(t) \in \mathbb{R}$, a saída do sistema na forma regular (3.3) é escalar, $y(t) \in \mathbb{R}$, e a perturbação não casada também é escalar, $v(t) \in \mathbb{R}$. Em consequência, $D_{v_i} \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, de modo que a taxa de suprimento $2y(t)v(t) + \eta v^2(t)$ é escalar. Essa dimensionalidade justifica diretamente o bloco (4, 4) de (3.48) e o bloco (3, 3) de (3.57) assumirem a forma escalar $-2D_{v_i} - \eta$, em lugar de $-\text{He}(\mathbf{D}_{v_i}) - \eta \mathbf{I}$.

Ao aplicar o limite superior de $\tau_M^2 (\dot{\mathbf{x}}_1^{\text{ideal}}(t))^\top \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}_1^{\text{ideal}}(t)$ obtido em (3.81) na derivada do funcional (3.70) e agrupar os termos quadráticos em relação ao vetor aumentado $\boldsymbol{\xi}(t)$, a imposição da condição de passividade robusta (3.82) é garantida se a seguinte desigualdade se verificar:

$$\boldsymbol{\xi}^\top(t) \sum_{i=1}^r \omega_i(t) (\boldsymbol{\Phi}_i + \tau_M^2 \mathbf{F}_i^\top \mathbf{R} \mathbf{F}_i) \boldsymbol{\xi}(t) + \varepsilon_0 \tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \sum_{k=0}^3 T_k(t) - 2y(t)v(t) - \eta v^2(t) < 0. \quad (3.83)$$

Ao substituir a equação de saída (3.3) em (3.83), chega-se a:

$$\xi^\top(t) \sum_{i=1}^r \omega_i(t) (\bar{\Phi}_i + \tau_M^2 \mathbf{F}_i^\top \mathbf{R} \mathbf{F}_i) \xi(t) + \varepsilon_0 \tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \sum_{k=0}^3 T_k(t) < 0, \quad (3.84)$$

na qual a matriz:

$$\bar{\Phi}_i = \begin{bmatrix} \text{He}(\mathbf{P} \bar{\mathbf{A}}_i) + \mathbf{Q}_i + \Phi - \mathbf{R} & \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}_i} + \mathbf{R} - \mathbf{Y} & \mathbf{Y} & \mathbf{P} \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{v}_{1,i}} - \mathbf{C}_i^\top \\ \star & -(1-\mu)(\mathbf{Q}_i + \mathbf{S}_i) - 2\mathbf{R} + \text{He}(\mathbf{Y}) & \mathbf{R} - \mathbf{Y} & -\mathbf{C}_{\mathbf{d}_i}^\top \\ \star & \star & \mathbf{S}_i - \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -2D_{\mathbf{v}_i} - \eta \end{bmatrix}, \quad (3.85)$$

com $\Phi = \tau_M \sum_{j=1}^r h_j(\mathbf{Q}_j + \mathbf{S}_j)$.

Considerando as propriedades de convexidade dos graus de pertinência, dadas por $\omega_i(t) \geq 0$ e $\sum_{i=1}^r \omega_i(t) = 1$, uma condição suficiente para assegurar a negatividade definida da forma quadrática matricial descrita em (3.84) é estabelecida por:

$$\bar{\Phi}_i^* + \tau_M^2 \mathbf{F}_i^\top \mathbf{R} \mathbf{F}_i \prec 0, \quad (3.86)$$

para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, onde $\bar{\Phi}_i^* = \bar{\Phi}_i + \varepsilon_0 \bar{\mathbf{P}}$. O termo $\varepsilon_0 \tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_1(t)$ é incorporado à forma quadrática ao reescrevê-lo como $\xi^\top(t) \bar{\mathbf{P}} \xi(t)$, em que $\bar{\mathbf{P}} = \text{diag}(\mathbf{P}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Lema 3.9 (Complemento de Schur (BOYD et al., 1994)). *Seja a matriz simétrica particionada*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^\top & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

com $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^\top$ e $\mathbf{R} = \mathbf{R}^\top$ de dimensões apropriadas. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $\mathbf{M} \succ 0$;
- (ii) $\mathbf{R} \succ 0$ e $\mathbf{Q} - \mathbf{S} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}^\top \succ 0$;
- (iii) $\mathbf{Q} \succ 0$ e $\mathbf{R} - \mathbf{S}^\top \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{S} \succ 0$.

Pelo lema do complemento de Schur (Lema 3.9), (3.86) ser negativo definido é equivalente a $-\mathbf{R}^{-1} \prec 0$ e a:

$$\begin{bmatrix} \text{He}(\mathbf{P} \bar{\mathbf{A}}_i) + \mathbf{Q}_i + \Phi - \mathbf{R} + \varepsilon_0 \mathbf{P} & \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}_i} + \mathbf{R} - \mathbf{Y} & \mathbf{Y} & \mathbf{P} \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{v}_{1,i}} - \mathbf{C}_i^\top & \tau_M \bar{\mathbf{A}}_i^\top \\ \star & \Gamma_i - 2\mathbf{R} + \text{He}(\mathbf{Y}) & \mathbf{R} - \mathbf{Y} & -\mathbf{C}_{\mathbf{d}_i}^\top & \tau_M \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}_i}^\top \\ \star & \star & \mathbf{S}_i - \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -2D_{\mathbf{v}_i} - \eta & \tau_M \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{v}_{1,i}}^\top \\ \star & \star & \star & \star & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.88)$$

onde $\mathbf{\Gamma}_i = -(1 - \mu)(\mathbf{Q}_i + \mathbf{S}_i)$.

Seja a matriz de transformação de congruência $\text{diag}(\mathbf{P}^{-1}, \mathbf{P}^{-1}, \mathbf{P}^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I})$. Ao aplicar a transformação de congruência em (3.88), e adotando as mudanças de variáveis $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{Q}}_i = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}_i\mathbf{P}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{S}}_i = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{S}_i\mathbf{P}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{P}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}$ junto a mudança de variável $\mathbf{V} = \mathbf{G}\mathbf{X}$, estabelece-se a seguinte desigualdade matricial:

$$\begin{bmatrix} \text{He}(\bar{\mathbf{A}}_{c_i}) + \tilde{\mathbf{Q}}_i + \tilde{\Phi} - \tilde{\mathbf{R}} + \varepsilon_0 \mathbf{X} & \bar{\mathbf{A}}_{d_{c_i}} + \tilde{\mathbf{R}} - \tilde{\mathbf{Y}} & \tilde{\mathbf{Y}} & \bar{\mathbf{B}}_{v_{1,i}} - \mathbf{X}\mathbf{C}_i^\top & \tau_M \bar{\mathbf{A}}_{c_i}^\top \\ \star & \mathbf{\Gamma}_i - 2\tilde{\mathbf{R}} + \text{He}(\tilde{\mathbf{Y}}) & \tilde{\mathbf{R}} - \tilde{\mathbf{Y}} & -\mathbf{X}\mathbf{C}_{d_i}^\top & \tau_M \bar{\mathbf{A}}_{d_{c_i}}^\top \\ \star & \star & \tilde{\mathbf{S}}_i - \tilde{\mathbf{R}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -2D_{v_i} - \eta & \tau_M \bar{\mathbf{B}}_{v_{1,i}}^\top \\ \star & \star & \star & \star & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.89)$$

em que os blocos componentes são descritos por:

$$\bar{\mathbf{A}}_{c_i} = \tilde{\mathbf{A}}_{11,i}\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{A}}_{12,i}\mathbf{V}, \quad \bar{\mathbf{A}}_{d_{c_i}} = \tilde{\mathbf{A}}_{d_{11,i}}\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{A}}_{d_{12,i}}\mathbf{V}, \quad (3.90)$$

$$\mathbf{\Gamma}_i = -(1 - \mu)(\tilde{\mathbf{Q}}_i + \tilde{\mathbf{S}}_i), \quad \tilde{\Phi} = \tau_M \sum_{j=1}^r h_j(\tilde{\mathbf{Q}}_j + \tilde{\mathbf{S}}_j). \quad (3.91)$$

Visando eliminar a não linearidade remanescente decorrente do termo inverso $-\mathbf{R}^{-1}$ no bloco de posição (5,5) de (3.89), introduz-se a variável de folga $\mathbf{W} \succ 0$ restrita por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.92)$$

o que assegura, via o lema do complemento de Schur, a relação $\mathbf{W} \succ \mathbf{R}^{-1}$.

Comentário 3.17. A partir dessa restrição, a substituição direta de $-\mathbf{R}^{-1}$ por $-\mathbf{W}$ em (3.89) viabiliza a solução do problema de otimização, via programação semidefinida, na forma de *LMI* em relação às variáveis de decisão. Uma vez resolvido o sistema, a matriz de ganho de realimentação de estados é prontamente recuperada por $\mathbf{G} = \mathbf{V}\mathbf{X}^{-1}$.

Considerando-se que (3.89) e (3.92) são factíveis, pelo lema do complemento de Schur, é equivalente a afirmar que:

$$\bar{\Phi}_i + \tau_M^2 \mathbf{F}_i^\top \mathbf{R} \mathbf{F}_i + \varepsilon_0 \bar{\mathbf{P}} \prec 0, \quad (3.93)$$

para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Pelo lema da desigualdade de Rayleigh aplicada a (3.93):

$$\xi^\top(t) \sum_{i=1}^r \omega_i(t) (\bar{\Phi}_i + \tau_M^2 \mathbf{F}_i^\top \mathbf{R} \mathbf{F}_i + \varepsilon_0 \bar{\mathbf{P}}) \xi(t) \leq -\lambda_\varepsilon \|\xi(t)\|^2, \quad (3.94)$$

com $\lambda_\varepsilon = \lambda_{\min}(-\sum_{i=1}^r \omega_i(\bar{\Phi}_i + \tau_M^2 \mathbf{F}_i^\top \mathbf{R} \mathbf{F}_i)) - \varepsilon_0 \lambda_{\max}(\mathbf{P})$.

Reunindo os limites superiores provenientes de T_0 , T_1 e T_3 desenvolvidos em (3.75)–(3.79), obtém-se:

$$\delta_1 = \left[\varepsilon_0^{-1} \lambda_{\max}^2(\mathbf{P}) + (1 + \varepsilon_1) \tau_M^2 \lambda_{\max}(\mathbf{R}) \right] \bar{M}^2 \tilde{G}_2^{-2}, \quad (3.95)$$

ao passo que a contribuição de T_2 resulta em:

$$\delta_2 = 2\tau_M^2 \lambda_{\max}(\mathbf{R}) \bar{A}_c \bar{M} \tilde{G}_2^{-1}. \quad (3.96)$$

Considerando-se δ_1 e δ_2 , e o limite superior de $\xi^\top(t) \sum_{i=1}^r \omega_i(t) (\bar{\Phi}_i + \tau_M^2 \mathbf{F}_i^\top \mathbf{R} \mathbf{F}_i + \epsilon_0 \bar{\mathbf{P}}) \xi(t)$ desenvolvido em (3.94), a desigualdade (3.83) é reescrita como:

$$\dot{V}(t) - 2y(t)v(t) - \eta v^2(t) \leq -\lambda_\epsilon \|\xi(t)\|^2 + \delta_1 \phi_{\max} \|\xi(t)\| + \delta_2 \phi_{\max}^2, \quad (3.97)$$

com $\phi_{\max} = \|\mathbf{G}\| \tilde{\Phi} / \bar{\mathbf{A}}$.

O lado direito de (3.97) é negativo sempre que:

$$\|\xi(t)\| > r_{\text{stab}} = \kappa_{\text{stab}} \frac{\|\mathbf{G}\| \tilde{\Phi}}{\bar{\mathbf{A}}}, \quad (3.98)$$

onde r_{stab} é a raiz positiva da equação quadrática $\lambda_\epsilon r^2 - \delta_1 \phi_{\max} r - \delta_2 \phi_{\max}^2 = 0$, que fornece:

$$\kappa_{\text{stab}} = \frac{\delta_2 + \sqrt{\delta_2^2 + 4\lambda_\epsilon \delta_1}}{2\lambda_\epsilon}. \quad (3.99)$$

Comentário 3.18. Note-se que r_{stab} , dado por (3.98), depende exclusivamente do limiar de acionamento $\tilde{\Phi}$ e de constantes determinadas pelo projeto (κ_{stab} , $\|\mathbf{G}\|$, $\bar{\mathbf{A}}$), não dependendo da estimativa $\hat{p}(t)$ nem do limite superior real ρ da perturbação casada, ambos desconhecidos a priori pela Hipótese $\mathbf{H}_2$. O raio da região de estabilidade prática é, portanto, determinado independentemente de qualquer estimativa dessa perturbação.

A partir da factibilidade de (3.89) e (3.92), assegura-se que $\mathbf{P} \succ 0$, $\mathbf{Q}(\omega(t)) \succ 0$, $\mathbf{S}(\omega(t)) \succ 0$ e $\mathbf{R} \succ 0$, garantindo a positividade definida dos componentes do funcional, de modo que $V_1(t) \geq 0$, $V_2(t) \geq 0$, $V_3(t) \geq 0$ e $V_4(t) \geq 0$. Consequentemente, estabelece-se o seguinte limite inferior:

$$V(t) \geq V_1(t) \geq \lambda_{\min}(\mathbf{P}) \|\tilde{\mathbf{x}}_1(t)\|^2 = \underline{\nu} \|\tilde{\mathbf{x}}_1(t)\|^2, \quad (3.100)$$

onde $\underline{\nu} = \lambda_{\min}(\mathbf{P})$.

Por sua vez, os limites superiores de cada termo do funcional de Lyapunov–Krasovskii *fuzzy* (3.62) podem ser deduzidos individualmente. Para $V_1(t)$, a aplicação do lema da desigualdade de Rayleigh fornece:

$$V_1(t) = \tilde{\mathbf{x}}_1^\top(t) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\tilde{\mathbf{x}}_1(t)\|^2 \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\tilde{\mathbf{x}}_1\|_{C^1}^2, \quad (3.101)$$

em que a desigualdade satisfaz a relação funcional $\|\tilde{\mathbf{x}}_1(t)\| \leq \|\tilde{\mathbf{x}}_1\|_{C^1}$.

Para $V_2(t)$, o limite superior é obtido ao aplicar o lema da desigualdade de Rayleigh no integrando seguido da integração da norma do estado $\tilde{\mathbf{x}}_1$ no intervalo $[t - \tau(t), t]$, resultando na

seguinte cadeia de desigualdades:

$$\begin{aligned}
 V_2(t) &= \int_{t-\tau(t)}^t \tilde{\mathbf{x}}_1^\top(s) \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}(t)) \tilde{\mathbf{x}}_1(s) ds \leq \lambda_{\max}(\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}(t))) \int_{t-\tau(t)}^t \|\tilde{\mathbf{x}}_1(s)\|^2 ds \\
 &\leq \lambda_{\max}(\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}(t))) \int_{t-\tau(t)}^t \|\tilde{\mathbf{x}}_{1_t}\|_{C^1}^2 ds \\
 &= \lambda_{\max}(\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}(t))) \tau(t) \|\tilde{\mathbf{x}}_{1_t}\|_{C^1}^2 \\
 &\leq \tau_M \lambda_{\max}(\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}(t))) \|\tilde{\mathbf{x}}_{1_t}\|_{C^1}^2.
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

Comentário 3.19. Considerando a estrutura *fuzzy* da matriz dependente de parâmetros dada por $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}(t)) = \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \mathbf{Q}_i$, um limite superior uniforme para o seu autovalor máximo pode ser estabelecido ao explorar as propriedades de convexidade dos graus de pertinência. Sabendo que $\omega_i(t) \geq 0$ e $\sum_{i=1}^r \omega_i(t) = 1$, a aplicação do lema da desigualdade triangular para a norma-2 induzida de matrizes simétricas fornece:

$$\lambda_{\max}(\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}(t))) \leq \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_i) \leq \max_{i \in \{1, \dots, r\}} \{\lambda_{\max}(\mathbf{Q}_i)\}. \tag{3.103}$$

Considerando-se o Comentário 3.19, $V_2(t)$ é limitado superiormente por:

$$V_2(t) \leq \tau_M \max_{i \in \{1, \dots, r\}} \{\lambda_{\max}(\mathbf{Q}_i)\} \|\tilde{\mathbf{x}}_{1_t}\|_{C^1}^2. \tag{3.104}$$

Seguindo o mesmo procedimento para $V_3(t)$, obtém-se o limite superior descrito por:

$$\begin{aligned}
 V_3(t) &= \int_{t-\tau_M}^{t-\tau(t)} \tilde{\mathbf{x}}_1^\top(s) \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t)) \tilde{\mathbf{x}}_1(s) ds \leq \lambda_{\max}(\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t))) \int_{t-\tau_M}^{t-\tau(t)} \|\tilde{\mathbf{x}}_1(s)\|^2 ds \\
 &\leq \tau_M \lambda_{\max}(\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t))) \|\tilde{\mathbf{x}}_{1_t}\|_{C^1}^2.
 \end{aligned} \tag{3.105}$$

Considerando-se o Comentário 3.19, $V_3(t)$ é limitado superiormente por:

$$V_3(t) \leq \tau_M \max_{i \in \{1, \dots, r\}} \{\lambda_{\max}(\mathbf{S}_i)\} \|\tilde{\mathbf{x}}_{1_t}\|_{C^1}^2. \tag{3.106}$$

Por fim, $V_4(t)$ assume inicialmente o seguinte limite superior:

$$\begin{aligned}
 V_4(t) &= \tau_M \int_{-\tau_M}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1^\top(s) \mathbf{R} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(s) ds d\theta \leq \tau_M \lambda_{\max}(\mathbf{R}) \int_{-\tau_M}^0 \int_{t+\theta}^t \|\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(s)\|^2 ds d\theta \\
 &\leq \tau_M \lambda_{\max}(\mathbf{R}) L^2 \|\tilde{\mathbf{x}}_{1_t}\|_{C^1}^2 \int_{-\tau_M}^0 \int_{t+\theta}^t 1 ds d\theta,
 \end{aligned} \tag{3.107}$$

na qual L denota a constante de Lipschitz do sistema que satisfaz a restrição $\|\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(t)\| \leq L \|\tilde{\mathbf{x}}_{1_t}\|_{C^1}$. Ao calcular a integral dupla em (3.107), o limite superior $V_4(t)$ reduz-se a:

$$V_4(t) \leq \frac{\tau_M^2 L^2}{2} \lambda_{\max}(\mathbf{R}) \|\tilde{\mathbf{x}}_{1_t}\|_{C^1}^2 \leq \tau_M^2 L^2 \lambda_{\max}(\mathbf{R}) \|\tilde{\mathbf{x}}_{1_t}\|_{C^1}^2. \tag{3.108}$$

Dessa forma, ao agrupar os limites superiores obtidos para cada componente do funcional de Lyapunov–Krasovskii *fuzzy*, estabelece-se o seguinte limite superior:

$$V(t) \leq \bar{v} \|\tilde{\mathbf{x}}_{1_t}\|_{C^1}^2, \tag{3.109}$$

em que o coeficiente $\bar{v}$ é dado por:

$$\bar{v} = \lambda_{\max}(\mathbf{P}) + \tau_M \max_{i \in \{1, \dots, r\}} \{\lambda_{\max}(\mathbf{Q}_i)\} + \tau_M \max_{i \in \{1, \dots, r\}} \{\lambda_{\max}(\mathbf{S}_i)\} + \tau_M^2 L^2 \lambda_{\max}(\mathbf{R}). \quad (3.110)$$

Portanto, de (3.100) e (3.109), tem-se que o funcional de Lyapunov–Krasovskii *fuzzy* (3.63) satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\underline{v} \|\tilde{\mathbf{x}}_1(t)\|^2 \leq V(\tilde{\mathbf{x}}_{1t}) \leq \bar{v} \|\tilde{\mathbf{x}}_{1t}\|_{C^1}^2. \quad (3.111)$$

O raio funcional r_{stab} definido em (3.98) determina a região de estabilidade prática funcional no espaço $C^1([-\tau_M, 0], \mathbb{R}^{n_x-1})$:

$$\mathcal{B}_{\text{stab}} = \{ \tilde{\mathbf{x}}_{1t} \in C^1([-\tau_M, 0], \mathbb{R}^{n_x-1}) : \|\tilde{\mathbf{x}}_{1t}\|_{C^1} \leq r_{\text{stab}} \}.$$

O maior valor do funcional de Lyapunov–Krasovskii *fuzzy* ao atingir a fronteira de $\mathcal{B}_{\text{stab}}$ é $c^* = \bar{v} r_{\text{stab}}^2$, e o conjunto de nível $\Omega_{c^*} = \{ \tilde{\mathbf{x}}_{1t} \in C^1 : V(\tilde{\mathbf{x}}_{1t}) \leq c^* \}$ é positivamente invariante, pois $\dot{V}(t) \leq 0$ para todo $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| \geq r_{\text{stab}}$. Portanto, para toda trajetória iniciada em Ω_{c^*} :

$$\underline{v} \|\tilde{\mathbf{x}}_1(t)\|^2 \leq V(\tilde{\mathbf{x}}_{1t}) \leq c^* = \bar{v} r_{\text{stab}}^2, \quad (3.112)$$

do qual se obtém:

$$\|\tilde{\mathbf{x}}_1(t)\| \leq \sqrt{\frac{\bar{v}}{\underline{v}}} r_{\text{stab}} = \sqrt{\frac{\bar{v}}{\underline{v}}} \kappa_{\text{stab}} \frac{\|\mathbf{G}\| \tilde{\Phi}}{\bar{\mathbf{A}}}, \quad (3.113)$$

confirmando que as trajetórias de (3.46) são *UUB* na região de estabilidade prática funcional $\mathcal{B}_{\text{stab}}$ e, por consequência, na região de estabilidade prática geométrica:

$$\mathcal{R}_{\text{stab}} = \{ \tilde{\mathbf{x}}_1(t) \in \mathbb{R}^{n_x-1} : \|\tilde{\mathbf{x}}_1(t)\| \leq R_{\text{stab}} \}, \quad (3.114)$$

onde $R_{\text{stab}} = \sqrt{\bar{v}/\underline{v}} r_{\text{stab}}$ é o raio geométrico resultante da projeção de $\mathcal{B}_{\text{stab}}$ sobre $\mathbb{R}^{n_x-1}$.

Comentário 3.20. É importante destacar a distinção conceitual e geométrica entre os conjuntos $\mathcal{B}_{\text{stab}}$ e $\mathcal{R}_{\text{stab}}$. O conjunto $\mathcal{B}_{\text{stab}}$ constitui a região de estabilidade prática funcional, definida no espaço de funções de dimensão infinita $C^1([-\tau_M, 0], \mathbb{R}^{n_x-1})$ com base no nível de energia do funcional de Lyapunov–Krasovskii *fuzzy*, em razão da presença do atraso variante $\tau(t)$. Por outro lado, $\mathcal{R}_{\text{stab}}$ constitui a região de estabilidade prática geométrica, obtida pela projeção de $\mathcal{B}_{\text{stab}}$ sobre o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n_x-1}$, mapeando diretamente o estado instantâneo $\tilde{\mathbf{x}}_1(t)$. Essa transição do espaço funcional para o espaço euclidiano justifica o escalonamento de r_{stab} pelo fator $\sqrt{\bar{v}/\underline{v}}$, que expressa a razão entre os limites superior e inferior do funcional de Lyapunov–Krasovskii, resultando no raio geométrico R_{stab} .

Comentário 3.21. A região $\mathcal{B}_{\text{stab}}$ é positivamente invariante para qualquer atraso $\tau(t) \in [0, \tau_M]$, desde que (3.48)–(3.49) sejam factíveis. Por consequência, o conjunto $\mathcal{R}_{\text{stab}}$, que representa a projeção de $\mathcal{B}_{\text{stab}}$ sobre o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n_x-1}$, também é positivamente invariante.

Por fim, integrando (3.82) de 0 a t^* e usando $V(\tilde{\mathbf{x}}_{1_{t^*}}) \geq 0$, obtém-se:

$$2 \int_0^{t^*} y(t)v(t) dt \geq -\eta \int_0^{t^*} v^2(t) dt - V(\tilde{\mathbf{x}}_{1_0}), \quad (3.115)$$

que, sob condições iniciais nulas ($V(\tilde{\mathbf{x}}_{1_0}) = 0$), reduz-se exatamente à desigualdade integral de passividade robusta:

$$2 \int_0^{t^*} y(t)v(t) dt \geq -\eta \int_0^{t^*} v^2(t) dt, \quad (3.116)$$

para todo $t^* > 0$ e para todas as perturbações admissíveis $v(t)$, garantindo, conjuntamente com (3.86), as afirmações do teorema.

Comentário 3.22. A desigualdade (3.116) caracteriza o sistema em malha fechada como passivo com o coeficiente de passividade robusta η especificado: o produto interno em $L_2[0, t^*]$ entre a saída $y(t)$ e a perturbação não casada $v(t)$ pode ser negativo, mas sua magnitude está limitada inferiormente por $-\eta$ vezes a energia da perturbação ao longo do intervalo $[0, t^*]$. Em outras palavras, o coeficiente η quantifica o quanto o sistema pode deixar de ser passivamente robusto ($\eta = 0$ correspondendo à passividade exata) em função da energia fornecida pela perturbação: quanto menor η , mais próximo o sistema está de ser passivo, e menor é o impacto admissível de $v(t)$ sobre $y(t)$. Como a desigualdade vale para todo $t^* > 0$ e para toda perturbação admissível, essa cota é uniforme no tempo e robusta à forma específica de $v(t)$, dependendo apenas de sua energia acumulada $\int_0^{t^*} v^2(t) dt$. Esse resultado garante, portanto, que o efeito da perturbação não casada sobre a saída do sistema permanece proporcionalmente limitado pelo coeficiente η .

□

Comentário 3.23. Para determinar o atraso máximo admissível, uma busca por bisseção é realizada sobre τ_M^* , que representa o atraso máximo para o qual o sistema em malha fechada permanece praticamente estável, dada a matriz $G = \mathbf{V}\mathbf{X}^{-1}$ obtida de (3.48)–(3.49). Isto constitui uma análise de robustez pós-projeto que certifica o atraso máximo admissível por meio de um teste de factibilidade de (3.57), sem requerer um procedimento de *co-design*. O problema de otimização é formulado como:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } \tau_M^*(G), \\ &\text{sujeito a: (3.57), } \mathbf{P} \succ 0, \mathbf{Q}_i \succ 0, \mathbf{S}_i \succ 0, \mathbf{R} \succ 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}. \end{aligned} \quad (3.117)$$

3.3 Método de Controle 2

3.3.1 Convergência das Trajetórias de Estado para a Região de Modos Deslizantes Prático

Nesta subseção, apresenta-se o Teorema 3.10, o qual garante que as trajetórias de estado do sistema *fuzzy* T–S tipo-2 intervalar (3.2) convergem para a região de modos deslizantes prático em tempo finito, sob um ganho de chaveamento adaptado baseado em função de barreira, mesmo na presença de perturbações casadas e não casadas e de atraso variante no tempo, permanecendo nela de forma UBB para todo instante de tempo subsequente.

Teorema 3.10. *Considere o sistema (3.2) sujeito à entrada de controle (3.5), com os erros de acionamento $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{e}(t - \tau(t)) = \mathbf{x}(t_k - \tau(t_k)) - \mathbf{x}(t - \tau(t))$, e com $\bar{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^r \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{A}_i\|$ e $\bar{\mathbf{A}}_d = \sum_{i=1}^r \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{A}_{d_i}\|$. Suponha que:*

i) *A sequência de instantes de acionamento $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ é determinada pela condição de acionamento por eventos:*

$$\frac{\bar{\mathbf{A}}\|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_d\|\mathbf{e}(t - \tau(t))\|}{\bar{\mathbf{A}}\|\mathbf{G}\|^{-1}} \geq \delta, \quad (3.118)$$

onde $\delta > 0$ denota o limiar de acionamento por eventos.

ii) *O ganho de chaveamento adaptativo é dado por:*

$$K(t) = \begin{cases} K_a(t) = \bar{\varphi} + \hat{\rho}(t_k), & |s(t)| \geq \delta, \\ K_b(t) = \frac{\alpha_2}{\delta - |s(t_k)|}, & |s(t)| < \delta, \end{cases} \quad (3.119)$$

para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, onde $K_a(t)$ é o ganho de chaveamento adaptativo baseado em crescimento monotônico e $K_b(t)$ é o ganho de chaveamento adaptativo baseado em função de barreira. O escalar $\bar{\varphi}$ satisfaz $\bar{\varphi} > \delta \bar{\mathbf{A}}\|\mathbf{G}\|^{-1} + \bar{\vartheta}$ e $\bar{\varphi} > \bar{\vartheta}$, com $\bar{\vartheta} = \sup_{t \geq 0} \bar{\mathbf{B}}_v |v(t)|$ e $\bar{\mathbf{B}}_v = \sum_{i=1}^r \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{B}_{v_i}\|$. Os parâmetros $\alpha_2 > 0$ e $\delta > 0$ são projetados de modo que $K_b(t) > \bar{\rho} + \bar{\vartheta}$ para todo $\varsigma < |s(t)| < \delta$, com $K_b(\varsigma) = \bar{\rho} + \bar{\vartheta}$. Nesse contexto, $\bar{\rho} = \sup_{t \geq 0} \bar{\mathbf{B}} |d(t)|$, $\bar{\mathbf{B}} = \sum_{i=1}^r \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{B}_i\|$ e $\varsigma = \delta - \alpha_2 / (\bar{\rho} + \bar{\vartheta}) > 0$, sendo essa condição garantida por $\bar{\rho} + \bar{\vartheta} > \delta \bar{\mathbf{A}}\|\mathbf{G}\|^{-1}$.

iii) *A estimativa do limite superior da perturbação casada $\hat{\rho}(t)$ é atualizada de acordo com a seguinte lei de atualização:*

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = \begin{cases} \gamma |s(t)|, & |s(t)| \geq \delta, \\ 0, & |s(t)| < \delta, \end{cases} \quad (3.120)$$

com $\gamma > 0$ e $\hat{\rho}(0) \geq 0$.

Então:

i) *As trajetórias de estado $\mathbf{x}(t)$ alcançam a fronteira da região de modos deslizantes prático:*

$$\partial \bar{S} = \{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : |s(t)| = \delta\}, \quad (3.121)$$

em tempo finito t_1 , limitado superiormente por:

$$t_1 < \frac{\sqrt{2}V_1^{1/2}(0) - \delta}{\bar{\varphi} - \bar{\vartheta}}, \quad (3.122)$$

onde $V_1(0)$ é o valor inicial da função candidata de Lyapunov $V_1(t)$, sendo este limite superior independente de $\hat{\rho}(t)$.

ii) Após t_1 , as trajetórias entram e permanecem, por invariância positiva, na região de modos deslizantes prático:

$$\bar{\mathcal{S}} = \left\{ \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : |s(t)| < \frac{\delta \bar{\mathbf{A}} - \|\mathbf{G}\| \bar{\mathbf{A}}_d \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\|}{\bar{\mathbf{A}}} < \delta \right\}, \quad (3.123)$$

para todo $t > t_1$.

iii) Para qualquer $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, as trajetórias alcançam em tempo finito t_2^ε a fronteira da vizinhança da região de não dominância:

$$\partial \bar{\mathcal{D}}_{\varsigma+\varepsilon} = \{ \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : |s(t)| = \varsigma + \varepsilon \}, \quad (3.124)$$

onde $\bar{\mathcal{D}}_\varsigma$ denota a região de não dominância:

$$\bar{\mathcal{D}}_\varsigma = \{ \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : |s(t)| \leq \varsigma \}. \quad (3.125)$$

O tempo finito t_2^ε é limitado superiormente por:

$$t_2^\varepsilon \leq t_1 + \frac{2V_2^{1/2}(t_1)}{\beta_2^\varepsilon}, \quad (3.126)$$

onde $V_2(t_1) = \frac{1}{2}s^2(t_1) + \frac{1}{2}K_b^2(t_1)$, $\beta_2^\varepsilon = \sqrt{2}\Psi_2^\varepsilon \min\{1, \alpha_2\delta^{-1}\}$ e $\Psi_2^\varepsilon = K_b(\varsigma + \varepsilon) - \delta \bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{G}\|^{-1} > 0$ é o valor mínimo de $K_b(t_k) - \delta \bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{G}\|^{-1}$ na região $\varsigma + \varepsilon \leq |s(t)| < \delta$.

Demonstração. A demonstração é dividida em duas etapas: a *Etapa 1* aborda a região $|s(t)| \geq \delta$, e a *Etapa 2* aborda a região $|s(t)| < \delta$.

Etapa 1: Para a região $|s(t)| \geq \delta$

Considere a função candidata de Lyapunov:

$$V_1(t) = \frac{1}{2}s^2(t) + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\rho}^2(t), \quad (3.127)$$

para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, onde $\tilde{\rho}(t) = \hat{\rho}(t) - \bar{\rho}$ é o erro de estimação do limite superior da perturbação casada.

Diferenciando $V_1(t)$ ao longo das trajetórias de (3.2) e substituindo (3.5), obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & s(t) \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \mathbf{G} [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{d_i} \mathbf{x}(t - \tau(t)) + \mathbf{B}_i d(t) + \mathbf{B}_{v_i} v(t)] \\ & + s(t) \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(t) \omega_j(t_k) \mathbf{G} \mathbf{B}_i (\mathbf{G} \mathbf{B}_j)^{-1} [-\mathbf{G} \mathbf{A}_j \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{G} \mathbf{A}_{d_j} \mathbf{x}(t_k - \tau(t_k)) - K(t_k) \text{sign}(s(t_k))] \\ & + \gamma^{-1} \tilde{\rho}(t) \dot{\hat{\rho}}(t). \end{aligned} \quad (3.128)$$

Limitando superiormente $\dot{V}_1(t)$ em (3.128), e aplicando o mesmo procedimento de majoração do Teorema 3.1, em particular, adotando $\zeta = 1$ conforme justificado no Comentário 3.5, e relembando que $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{e}(t - \tau(t)) = \mathbf{x}(t_k - \tau(t_k)) - \mathbf{x}(t - \tau(t))$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) \leq & |s(t)| \sum_{i=1}^r \omega_i(t) (\|\mathbf{G}\| \|\mathbf{A}_i\| \|\mathbf{e}(t)\| + \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{A}_{d_i}\| \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| + \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{B}_i\| |d(t)| \\ & + \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{B}_{v_i}\| |v(t)|) - s(t) K_a(t) \text{sign}(s(t_k)) + \gamma^{-1} \tilde{\rho}(t) \dot{\hat{\rho}}(t). \end{aligned} \quad (3.129)$$

Antes de as trajetórias da variável deslizante alcançarem a fronteira $|s(t)| = \delta$, uma vez que tanto $s(t)$ quanto $s(t_k)$ pertencem à mesma região de $\mathbb{R}$, ou ambos em $[\delta, \infty)$ ou ambos em $(-\infty, -\delta]$, tem-se $\text{sign}(s(t)) = \text{sign}(s(t_k))$, condição sob a qual $-s(t) K_a(t_k) \text{sign}(s(t_k)) = -K_a(t_k) |s(t)|$. Sob essa condição, (3.129) simplifica-se para:

$$\dot{V}_1(t) \leq |s(t)| (\bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_d \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| + \bar{\mathbf{B}} |d(t)| + \bar{\mathbf{B}}_v |v(t)| - K_a(t)) + \gamma^{-1} \tilde{\rho}(t) \dot{\hat{\rho}}(t), \quad (3.130)$$

onde $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{A}}_d$, $\bar{\mathbf{B}}$ e $\bar{\mathbf{B}}_v$ são os limites superiores definidos na demonstração do Teorema 3.1.

Comentário 3.24. A condição $\text{sign}(s(t)) = \text{sign}(s(t_k))$ é garantida pela mesma argumentação do Comentário 3.6, com $\|\mathbf{G}\| \frac{\bar{\Phi}}{\bar{\mathbf{A}}}$ substituído por δ .

Substituindo $K_a(t_k) = \bar{\Phi} + \hat{\rho}(t_k)$ em (3.130), adotando as cotas superiores $\sup_{t \geq 0} \bar{\mathbf{B}} |d(t)| = \bar{\rho}$ e $\sup_{t \geq 0} \bar{\mathbf{B}}_v |v(t)| = \bar{\vartheta}$, e reescrevendo $\bar{\rho} - \hat{\rho}(t_k) = -\tilde{\rho}(t) - (\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t_k))$, o reagrupamento dos termos na forma $-|s(t)| \tilde{\rho}(t) + \gamma^{-1} \tilde{\rho}(t) \dot{\hat{\rho}}(t) = \gamma^{-1} \tilde{\rho}(t) (\dot{\hat{\rho}}(t) - \gamma |s(t)|)$ permite obter:

$$\dot{V}_1(t) \leq |s(t)| (\bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_d \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| + \bar{\vartheta} - \bar{\Phi}) - |s(t)| (\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t_k)) + \gamma^{-1} \tilde{\rho}(t) (\dot{\hat{\rho}}(t) - \gamma |s(t)|). \quad (3.131)$$

De acordo com (3.120), para todo $|s(t)| \geq \delta$, $\dot{\hat{\rho}}(t) = \gamma |s(t)| \geq 0$, de modo que $\hat{\rho}(t)$ é monotonicamente crescente e $\hat{\rho}(t_k) \leq \hat{\rho}(t)$ para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. O termo $-|s(t)| (\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t_k)) \leq 0$ é não positivo e pode ser omitido, resultando em:

$$\dot{V}_1(t) \leq |s(t)| (\bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_d \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| - (\bar{\Phi} - \bar{\vartheta})) + \gamma^{-1} \tilde{\rho}(t) (\dot{\hat{\rho}}(t) - \gamma |s(t)|). \quad (3.132)$$

Substituindo $\dot{\hat{\rho}}(t) = \gamma |s(t)|$, o último termo de (3.131) anula-se. Dessa forma, (3.132) reduz-se a:

$$\dot{V}_1(t) \leq |s(t)| (\bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_d \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| - (\bar{\Phi} - \bar{\vartheta})). \quad (3.133)$$

A cada instante de acionamento, $\mathbf{e}(t_k) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{e}(t_k - \tau(t_k)) = \mathbf{0}$, de modo que (3.133) resulta em $\dot{V}_1(t_k) < -(\bar{\Phi} - \bar{\vartheta}) |s(t_k)| < 0$, pois $\bar{\Phi} > \bar{\vartheta}$ por hipótese estabelecida no enunciado do Teorema 3.10. Para todo $t \in (t_k, t_{k+1})$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, uma vez que a condição de acionamento por eventos (3.118) não é satisfeita, assegura-se que $\bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_d \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| < \delta \bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{G}\|^{-1} < \bar{\Phi} - \bar{\vartheta}$, garantindo que $\dot{V}_1(t) < -(\bar{\Phi} - \bar{\vartheta}) |s(t)| < 0$ para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, pois $\bar{\Phi} > \bar{\vartheta} + \delta \bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{G}\|^{-1}$ por hipótese apresentada no enunciado do Teorema 3.10. Sendo assim, garante-se que as trajetórias da variável deslizante alcancem a fronteira $|s(t)| = \delta$ em tempo

finito t_1 , o que equivale a assegurar que as trajetórias de estado alcancem a fronteira $\partial\bar{\mathcal{S}}$ nesse mesmo instante. Para todo $t > t_1$, o ganho de chaveamento é adaptado segundo a função de barreira $K_b(t)$ na região $|s(t)| < \delta$, conforme estabelecido na Etapa 2.

Comentário 3.25. Como $\dot{V}_1(t) < -(\bar{\varphi} - \bar{\vartheta})|s(t)|$ e $V_1(t) \geq \frac{1}{2}s^2(t)$, definindo $w(t) = V_1^{1/2}(t)$, tem-se $\dot{w}(t) < -(\bar{\varphi} - \bar{\vartheta})/\sqrt{2}$. Integrando de 0 a t_1 e usando $V_1^{1/2}(t_1) \geq \delta/\sqrt{2}$, pois $|s(t_1)| = \delta$, obtém-se:

$$t_1 < \frac{\sqrt{2}V_1^{1/2}(0) - \delta}{\bar{\varphi} - \bar{\vartheta}}, \quad (3.134)$$

com o limite superior sendo independente de $\hat{p}(t)$.

Comentário 3.26. Considerando que (3.118) não é satisfeita em um instante arbitrário, a diferença $|s(t_k) - s(t)|$ é limitada por:

$$|s(t_k) - s(t)| \leq \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{e}(t)\| < \frac{\delta \bar{\mathbf{A}} - \|\mathbf{G}\| \bar{\mathbf{A}}_d \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\|}{\bar{\mathbf{A}}} < \delta. \quad (3.135)$$

Impondo $s(t_k) = 0$ em (3.135), obtém-se a definição da região de modos deslizantes prático (3.123).

Etapa 2: Para a região $|s(t)| < \delta$

Com $\varsigma = \delta - \alpha_2/(\bar{\rho} + \bar{\vartheta})$ e $K_b(\varsigma) = \bar{\rho} + \bar{\vartheta}$, a monotonicidade de K_b garante que $K_b(s(t)) > \bar{\rho} + \bar{\vartheta}$ para todo $\varsigma < |s(t)| < \delta$. Nenhuma condição de dominância de $K_b(t)$ sobre $\bar{\rho} + \bar{\vartheta}$ é imposta para a região $|s(t)| \leq \varsigma$, que é equivale a dizer que $\bar{\mathcal{D}}_\varsigma$ é .

Considere a função candidata de Lyapunov:

$$V_2(t) = \frac{1}{2}s^2(t) + \frac{1}{2}K_b^2(t), \quad (3.136)$$

para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Diferenciando $V_2(t)$ ao longo de (3.2), aplica-se o mesmo procedimento de majoração da Etapa 1 com $\zeta = 1$. Uma vez que, antes de as trajetórias da variável deslizante alcançarem a região $|s(t)| < \varsigma$, tanto $s(t)$ quanto $s(t_k)$ pertencem à mesma região de $\mathbb{R}$, sendo ambos em $(0, \delta)$ ou ambos em $(-\delta, 0)$, tem-se a igualdade $\text{sign}(s(t)) = \text{sign}(s(t_k))$, de modo que se obtém:

$$\dot{V}_2(t) \leq |s(t)| (\bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_d \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| + \bar{\rho} + \bar{\vartheta} - K_b(t_k)) + K_b(t) \dot{K}_b(t). \quad (3.137)$$

Para estabelecer que $\dot{V}_2(t) < 0$ na região $\varsigma < |s(t)| < \delta$, analisa-se $\dot{K}_b(t)$ em dois casos.

Caso 1: $\varsigma < s(t) < \delta$. Diferenciando $K_b(t)$ pela regra da cadeia, obtém-se $\dot{K}_b(t) = \frac{\alpha_2}{(\delta - |s(t)|)^2} \dot{s}(t)$. Substituindo $\dot{s}(t)$ e aplicando os limites $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{A}}_d$, $\bar{\mathbf{B}}$ e $\bar{\mathbf{B}}_v$ estabelecidos na demonstração do Teorema 3.1, resulta:

$$\dot{K}_b(t) \leq \frac{\alpha_2 \delta}{(\delta - |s(t)|)^2} (\bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_d \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| + \bar{\rho} + \bar{\vartheta} - K_b(t)). \quad (3.138)$$

Caso 2: $-\delta < s(t) < -\varsigma$. Para $s(t) < 0$, tem-se $|s(t)| = -s(t)$, de modo que $\dot{K}_b(t) = \frac{dK_b}{d|s|} \frac{d|s|}{dt} = \frac{\alpha_2}{(\delta - |s(t)|)^2} (-\dot{s}(t))$. Aplicando os mesmos limites do Caso 1 a $-\dot{s}(t)$, obtém-se o mesmo limite superior (3.138).

Ambos os casos resultam no mesmo limite superior para $\dot{K}_b(t)$, dado por:

$$\dot{K}_b(t) \leq \phi(t) (\bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_d \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| + \bar{\rho} + \bar{\vartheta} - K_b(t)), \quad (3.139)$$

onde $\phi(t) = \alpha_2 \delta / (\delta - |s(t)|)^2 > 0$. Substituindo (3.139) em (3.137), obtém-se:

$$\dot{V}_2(t) \leq (|s(t)| + K_b(t) \phi(t)) (\bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_d \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| + \bar{\rho} + \bar{\vartheta} - K_b(t)). \quad (3.140)$$

A cada instante de acionamento com $\varsigma < |s(t_k)| < \delta$, $\mathbf{e}(t_k) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{e}(t_k - \tau(t_k)) = \mathbf{0}$, de modo que (3.140) reduz-se a $\dot{V}_2(t_k) \leq -(|s(t_k)| + K_b(t_k) \phi(t_k)) \Psi_1$, onde $\Psi_1 = K_b(t_k) - (\bar{\rho} + \bar{\vartheta}) > 0$, pois $K_b(t_k) > \bar{\rho} + \bar{\vartheta}$ para todo $\varsigma < |s(t_k)| < \delta$ por hipótese estabelecida no enunciado do Teorema 3.10. Como $\phi(t) = \alpha_2 \delta / (\delta - |s(t)|)^2$ é estritamente crescente em $|s(t)|$ e atinge seu ínfimo sobre $(0, \delta)$ quando $|s(t)| \rightarrow 0^+$, estabelece-se o limite inferior uniforme $\phi(t) \geq \alpha_2 / \delta$ para todo $|s(t)| \in (0, \delta)$, de modo que $\min\{1, \phi(t)\} \geq \min\{1, \alpha_2 / \delta\}$. Levando em consideração a estrutura de $V_2(t)$, obtém-se:

$$\dot{V}_2(t_k) \leq -\beta_1 V_2^{1/2}(t_k), \quad (3.141)$$

onde $\beta_1 = \sqrt{2} \Psi_1 \min\{1, \alpha_2 / \delta\}$.

Para todo $t \in (t_k, t_{k+1})$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, uma vez que a condição de acionamento por eventos (3.118) não é satisfeita, assegura-se $\bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_d \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| \delta \bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{G}\|^{-1}$. Substituindo esse limite em (3.140) e definindo $\Psi_2 = K_b(t_k) - \delta \bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{G}\|^{-1}$, obtém-se:

$$\dot{V}_2(t) \leq -|s(t)| \Psi_2 - \phi(t) \Psi_2 K_b(t). \quad (3.142)$$

Aplicando o mesmo procedimento de fatoração de (3.141), obtém-se:

$$\dot{V}_2(t) \leq -\beta_2 V_2^{1/2}(t), \quad (3.143)$$

onde $\beta_2 = \sqrt{2} \Psi_2 \min\{1, \alpha_2 / \delta\}$. A condição de projeto $\bar{\rho} + \bar{\vartheta} > \delta \bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{G}\|^{-1}$ garante que $\Psi_2 > 0$ para todo $\varsigma < |s(t)| < \delta$: como $K_b(t) > \bar{\rho} + \bar{\vartheta}$ nessa região, tem-se $K_b(t_k) > \delta \bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{G}\|^{-1}$; em $|s(t)| = \varsigma$, tem-se $K_b(\varsigma) = \bar{\rho} + \bar{\vartheta}$, o que fornece $\Psi_2 = \bar{\rho} + \bar{\vartheta} - \delta \bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{G}\|^{-1} > 0$. Portanto, para todo $\varsigma \leq |s(t)| < \delta$, garante-se que $\dot{V}_2(t) \leq -\beta_2 V_2^{1/2}(t) < 0$ para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, o que significa que as trajetórias da variável deslizante são conduzidas em direção a $|s(t)| = \varsigma$, isto é, as trajetórias de estado são conduzidas em direção à fronteira $\partial \bar{\mathcal{D}}_\varsigma$. Contudo, não se pode garantir que $|s(t)| = \varsigma$ seja alcançada por tais trajetórias, com conclusão equivalente para as trajetórias de estado em relação à fronteira $\partial \bar{\mathcal{D}}_\varsigma$.

Comentário 3.27. Como $\dot{V}_2(t) < 0$ é garantido apenas para $\varsigma < |s(t)| < \delta$, não é possível estabelecer um limite superior finito para o tempo de alcance de $\partial \bar{\mathcal{D}}_\varsigma$. Para qualquer $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, considera-se a vizinhança $\bar{\mathcal{D}}_{\varsigma+\varepsilon} = \{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : |s(t)| \leq \varsigma + \varepsilon\}$. Na

região $\varsigma + \varepsilon \leq |s(t)| < \delta$, o valor mínimo de $\Psi_2 = K_b(t_k) - \delta \bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{G}\|^{-1}$ ocorre em $|s(t_k)| = \varsigma + \varepsilon$, fornecendo:

$$\Psi_2^\varepsilon = K_b(\varsigma + \varepsilon) - \delta \bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{G}\|^{-1} = \frac{\alpha_2}{\delta - (\varsigma + \varepsilon)} - \delta \bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{G}\|^{-1} > 0.$$

Definindo $\beta_2^\varepsilon = \sqrt{2} \Psi_2^\varepsilon \min\{1, \alpha_2/\delta\}$, tem-se $\dot{V}_2(t) \leq -\beta_2^\varepsilon V_2^{1/2}(t)$ para todo $\varsigma + \varepsilon \leq |s(t)| < \delta$. Fazendo $w(t) = V_2^{1/2}(t)$ e aplicando a regra da cadeia, obtém-se $\dot{w}(t) \leq -\beta_2^\varepsilon/2$. Integrando sobre $[t_1, t_2^\varepsilon]$ e impondo $V_2^{1/2}(t_2^\varepsilon) \geq 0$, conclui-se que as trajetórias de estado alcançam a fronteira $\partial \bar{\mathcal{D}}_{\varsigma+\varepsilon}$ em tempo finito t_2^ε limitado por:

$$t_2^\varepsilon \leq t_1 + \frac{2V_2^{1/2}(t_1)}{\beta_2^\varepsilon}, \quad (3.144)$$

sendo este limite superior independente de $\hat{p}(t)$.

Os resultados acima garantem que as trajetórias da variável deslizante são conduzidas em direção a $|s(t)| = \varsigma$ e entram em uma vizinhança $|s(t)| \leq \varsigma + \varepsilon$ de $|s(t)| = \varsigma$ para qualquer $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno. O restante da prova estabelece a invariância positiva de $\bar{\mathcal{S}}$. Observa-se que, considerando o problema de controle tratado nesta tese porém no contexto orientado ao tempo, a condição $K_b(t) \rightarrow \infty$ quando $|s(t)| \rightarrow \delta^-$ seria por si só suficiente para garantir a invariância positiva de $\bar{\mathcal{S}}$, pois o ganho divergente impediria as trajetórias de alcançar $|s(t)| = \delta$. No entanto, sob o mecanismo de acionamento por eventos, a entrada de controle é mantida constante em $[t_k, t_{k+1})$, de modo que $K_b(t)$ não é atualizado continuamente e essa propriedade não pode ser assegurada. A condição de acionamento por eventos (3.118) e a região de $\mathbb{R}$ à qual $s(t)$ e $s(t_k)$ pertencem tornam-se, portanto, igualmente essenciais. Em particular, quando (3.118) não é satisfeita, obtém-se:

$$|s(t) - s(t_k)| \leq \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{e}(t)\| < \frac{\delta \bar{\mathbf{A}} - \|\mathbf{G}\| \bar{\mathbf{A}}_d \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\|}{\bar{\mathbf{A}}} < \delta, \quad (3.145)$$

o que fornece uma margem estrita para a atualização da entrada de controle antes que as trajetórias alcancem $|s(t)| = \delta$. As três situações a seguir são consideradas:

1. *Hipóteses:* (i) as variáveis $s(t)$ e $s(t_k)$ pertencem às mesmas regiões de $\mathbb{R}$, sendo ambas em $(-\varsigma, 0)$ ou ambas em $(0, \varsigma)$; (ii) as trajetórias alcançam a região $|s(t)| < \varsigma$; e (iii) nenhuma atualização da entrada de controle ocorreu desde que as trajetórias entraram nessa região. A dominância de $K_b(t)$ sobre $\bar{p} + \bar{\vartheta}$ não é imposta e $\dot{V}_2(t) < 0$ não pode ser garantido, de modo que as trajetórias podem sair de $|s(t)| < \varsigma$ sem cruzar $s(t) = 0$. Como a entrada de controle foi atualizada pela última vez em $\varsigma < |s(t)| < \delta$, ao re-entrar nessa região tem-se $\dot{V}_2(t) \leq -\beta_2^\varepsilon V_2^{1/2}(t) < 0$ para $\varsigma + \varepsilon \leq |s(t)| < \delta$, conduzindo as trajetórias em direção a uma vizinhança $|s(t)| \leq \varsigma + \varepsilon$ de $|s(t)| = \varsigma$, para qualquer $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno.
2. *Hipóteses:* (i) as variáveis $s(t)$ e $s(t_k)$ pertencem às mesmas regiões de $\mathbb{R}$, sendo ambas em $(-\varsigma, 0)$ ou ambas em $(0, \varsigma)$; (ii) as trajetórias alcançam a região $|s(t)| < \varsigma$; e (iii) a entrada de controle foi atualizada desde que as trajetórias entraram em $|s(t)| < \varsigma$. A

dominância de $K_b(t)$ sobre $\bar{\rho} + \bar{\vartheta}$ não é imposta e $\dot{V}_2(t) < 0$ não pode ser garantido. As trajetórias podem sair de $|s(t)| < \varsigma$ e se mover em direção a $|s(t)| = \delta$. Sob as hipóteses do Comentário 3.28, a condição de acionamento por eventos (3.118) é satisfeita sendo gerado um novo evento antes que as trajetórias alcancem $|s(t)| = \delta$, e a cadeia de desigualdades (3.145) fornece uma margem estrita para que a entrada de controle seja atualizada antes de $|s(t)| = \delta$ ser atingido. Com a atualização, $s(t)$ e $s(t_k)$ voltam a pertencer à mesma região de $\mathbb{R}$, sendo ambas em $(-\delta, 0)$ ou ambas em $(0, \delta)$, de modo $\dot{V}_2(t) \leq -\beta_2^\varepsilon V_2^{1/2}(t) < 0$ para $\varsigma + \varepsilon \leq |s(t)| < \delta$, conduzindo as trajetórias em direção a uma vizinhança $|s(t)| \leq \varsigma + \varepsilon$ de $|s(t)| = \varsigma$, para qualquer $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno.

3. *Hipótese: as variáveis $s(t)$ e $s(t_k)$ pertencem a regiões distintas de $\mathbb{R}$, uma em $(-\delta, 0)$ e outra em $(0, \delta)$.* A análise de $\dot{V}_2(t)$ não se aplica. Sob as hipóteses do Comentário 3.28, a condição de acionamento por eventos (3.118) é satisfeita, sendo gerado um novo evento antes que as trajetórias alcancem $|s(t)| = \delta$, e a cadeia de desigualdades (3.145) fornece uma margem estrita para a atualização da entrada de controle. Com a atualização, $s(t)$ e $s(t_k)$ voltam a pertencer à mesma região de $\mathbb{R}$, sendo ambos em $(-\delta, 0)$ ou ambos em $(0, \delta)$, de modo que $\dot{V}_2(t) \leq -\beta_2^\varepsilon V_2^{1/2}(t) < 0$ para $\varsigma + \varepsilon \leq |s(t)| < \delta$, conduzindo as trajetórias em direção a uma vizinhança $|s(t)| \leq \varsigma + \varepsilon$ de $|s(t)| = \varsigma$, para qualquer $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno.

Combinando os três cenários, uma vez que $|s(t_1)| < \delta$, garante-se que $|s(t)| < \delta$ para todo $t > t_1$, estabelecendo a invariância positiva de $\bar{\mathcal{S}}$.

Comentário 3.28. O Teorema 3.10 é demonstrado supondo-se que: (i) a condição de acionamento (3.118) é monitorada continuamente; (ii) os eventos são gerados exatamente quando $\bar{\mathbf{A}}\|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_d\|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| = \delta\bar{\mathbf{A}}\|\mathbf{G}\|^{-1}$; e (iii) não existem atrasos entre o monitoramento da condição de acionamento, a geração de um novo evento, a atualização da entrada de controle e a sua aplicação no atuador. Se um novo evento for gerado apenas quando $\bar{\mathbf{A}}\|\mathbf{e}(t)\| + \bar{\mathbf{A}}_d\|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| > \delta\bar{\mathbf{A}}\|\mathbf{G}\|^{-1}$, então nem a invariância positiva de $\bar{\mathcal{S}}$ nem o alcance em tempo finito das trajetórias de estado à fronteira $\partial\bar{\mathcal{S}}$ ou $\partial\bar{\mathcal{D}}_\varsigma$ são garantidos. Essas hipóteses são padrão no controle por modos deslizantes acionado por eventos com monitoração contínua (BEHERA, 2025; FENG; HAO, 2021) e constituem uma limitação inerente a essa classe de métodos.

Comentário 3.29. A região de modos deslizantes prático $\bar{\mathcal{S}}$ e o domínio do ganho $K_b(t)$ coincidem por projeto: ambos são definidos por $|s(t)| < \delta$. O crescimento de $K_b(t)$ quando $|s(t)| \rightarrow \delta^-$ assegura a dominância sobre $\bar{\rho}$ em toda a região $\varsigma < |s(t)| < \delta$. Sob as hipóteses do Comentário 3.28, as trajetórias da variável deslizante nunca deixarão a região $|s(t)| < \delta$.

Comentário 3.30. Embora $K(t_k)$ seja mantido constante para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$, o ganho $K_b(t)$ difere fundamentalmente de $K_a(t)$: enquanto $K_a(t)$ possui comportamento discreto, $K_b(t)$ é continuamente diferenciável para todo $|s(t)| < \delta$, propriedade explorada na Etapa 2 por meio do cálculo explícito de $\dot{K}_b(t)$ via regra da cadeia.

Comentário 3.31. As hipóteses $\bar{\varphi} > \delta \bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{G}\|^{-1} + \bar{\vartheta}$ e $\bar{\varphi} > \bar{\vartheta}$ são condições necessárias para se garantir a negatividade de $\dot{V}_1(t)$. A hipótese $\bar{\varphi} > \hat{\rho}(t)$ para todo $t \geq 0$ garante adicionalmente que $K_a(t)$ domina a estimativa $\hat{\rho}(t_k)$ em todo instante de acionamento; como $\dot{\hat{\rho}}(t) = \gamma |s(t)| \geq 0$ para todo $|s(t)| \geq \delta$, $\hat{\rho}(t)$ cresce de forma monotônica, assegurando essa dominância para todo $t \geq 0$. A dominância de $K_b(t)$ sobre $\bar{\rho} + \bar{\vartheta}$ para todo $\varsigma < |s(t)| < \delta$ decorre diretamente da definição $\varsigma = \delta - \alpha_2/(\bar{\rho} + \bar{\vartheta})$: para qualquer $|s(t)| > \varsigma$, tem-se $\delta - |s(t)| < \alpha_2/(\bar{\rho} + \bar{\vartheta})$ e, portanto, $K_b(t) = \alpha_2/(\delta - |s(t)|) > \bar{\rho} + \bar{\vartheta}$. A condição $\bar{\rho} + \bar{\vartheta} > \delta \bar{\mathbf{A}} \|\mathbf{G}\|^{-1}$ garante $\varsigma > 0$, assegurando que a região de não dominância $\bar{\mathcal{D}}_\varsigma$ seja não vazia.

Comentário 3.32. Para prevenir a divergência numérica de $K_b(t)$ quando $|s(t)| \rightarrow \delta^-$, impõe-se a saturação:

$$K_b(t) = \frac{\alpha_2}{\max(\delta - |s(t)|, \tilde{\eta} \delta)}, \quad \tilde{\eta} \in (0, 1), \quad (3.146)$$

resultando em $K_{\max} = \alpha_2/(\tilde{\eta} \delta)$. A saturação torna-se ativa apenas na região $|s(t)| \geq (1 - \tilde{\eta})\delta$, e a seleção do fator de saturação $\tilde{\eta} \in [0,05; 0,15]$ assegura que essa zona permaneça desprezível em relação à largura total de $\bar{\mathcal{S}}$. Como $K_{\max} > \bar{\rho}$ para todo $\varsigma < |s(t)| < \delta$, o limite superior de t_2 em (3.144) permanece válido sob saturação.

□

3.3.2 Ausência do Comportamento Zeno

Nesta subseção, apresenta-se o Teorema 3.11, o qual garante que a sequência de instantes de acionamento por eventos $\{t_k\}_{k=0}^\infty$ do Método 2 é livre do comportamento Zeno, estabelecendo analiticamente um limite inferior estritamente positivo para o intervalo entre instantes de acionamentos consecutivos, $T_k = t_{k+1} - t_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Teorema 3.11. *Considere o sistema (3.2) e que as a condição de acionamento (3.118) governe as atualizações da entrada de controle (3.5). Então, para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e quaisquer dois instantes de acionamento consecutivos t_k e t_{k+1} , o intervalo entre eventos $T_k = t_{k+1} - t_k$ admite um limite inferior estritamente positivo:*

$$T_k \geq \frac{1}{\gamma_1} \ln \left(1 + \frac{\gamma_1 (\delta \|\mathbf{G}\|^{-1} - \bar{\mathbf{A}}^{-1} \bar{\mathbf{A}}_d \|\mathbf{e}(t - \tau(t))\|)}{\gamma_3 \|\mathbf{x}(t_k)\| + \gamma_2} \right) > 0, \quad (3.147)$$

onde os escalares γ_1 , γ_2 e γ_3 são dados por (3.37a)–(3.37c).

Demonstração. A prova segue o mesmo procedimento do Teorema 3.2. Aplicando o teorema de Razumikhin, a desigualdade triangular e os limites $\sup_{t \geq 0} \bar{\mathbf{B}}|d(t)| = \bar{\rho}$ e $\sup_{t \geq 0} \bar{\mathbf{B}}_v|v(t)| = \bar{\vartheta}$ à dinâmica do erro de acionamento, obtém-se a mesma desigualdade diferencial (3.39), e consequentemente o mesmo limite superior (3.40) para $\|\mathbf{e}(t)\|$.

O acionamento ocorre quando (3.118) é satisfeita, o que implica $\bar{\mathbf{A}}\|\mathbf{e}(t)\| \geq \delta\bar{\mathbf{A}}\|\mathbf{G}\|^{-1} - \bar{\mathbf{A}}_d\|\mathbf{e}(t - \tau(t))\|$. Combinando com (3.40):

$$\delta\bar{\mathbf{A}}\|\mathbf{G}\|^{-1} - \bar{\mathbf{A}}_d\|\mathbf{e}(t - \tau(t))\| \leq \bar{\mathbf{A}} \frac{\gamma_3\|\mathbf{x}(t_k)\| + \gamma_2}{\gamma_1} (e^{\gamma_1 T_k} - 1). \quad (3.148)$$

Isolando T_k em (3.148):

$$T_k \geq \frac{1}{\gamma_1} \ln \left(1 + \frac{\gamma_1 (\delta\|\mathbf{G}\|^{-1} - \bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{A}}_d\|\mathbf{e}(t - \tau(t))\|)}{\gamma_3\|\mathbf{x}(t_k)\| + \gamma_2} \right) > 0. \quad (3.149)$$

A positividade de (3.149) garante $T_k \geq \psi > 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, de modo que a sequência $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ é livre do comportamento Zeno. $\square$

3.3.3 Estabilização Prática e Passividade Robusta

De acordo com o Teorema 3.10, devido à invariância positiva da região de modos deslizantes prático, após as trajetórias de estado alcançarem $\tilde{\mathcal{S}}$ em $t > t_1$, elas permanecem nessa região para todo tempo posterior. Sendo assim, quando o sistema está em modo deslizante prático, as trajetórias da variável deslizante são superiormente limitadas por:

$$|s(t)| \leq \frac{\delta\bar{\mathbf{A}} - \|\mathbf{G}\|\bar{\mathbf{A}}_d\|\mathbf{e}(t - \tau(t))\|}{\bar{\mathbf{A}}} < \delta. \quad (3.150)$$

Ao aplicar o limite superior da variável deslizante $s(t)$ estabelecido em (3.150), verifica-se que $\tilde{x}_2(t)$, dentro da região de modos deslizantes prático, satisfaz:

$$\tilde{x}_2(t) < -\mathcal{G}\tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \tilde{G}_2^{-1}\delta. \quad (3.151)$$

Com objetivo de simplificação, $\tilde{x}_2(t)$ é expresso da seguinte forma:

$$\tilde{x}_2(t) = -\mathcal{G}\tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \delta_{\tilde{x}_2}(t), \quad (3.152)$$

onde $|\delta_{\tilde{x}_2}(t)| \leq \tilde{G}_2^{-1}\delta$ para todo $t \geq 0$. A dinâmica de $\tilde{\mathbf{x}}_1$ tem a mesma forma de (3.46), com $\phi_{\max} = \delta$ no lugar de $\phi_{\max} = \|\mathbf{G}\| \frac{\bar{\phi}}{\bar{\mathbf{A}}}$:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(t) = \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \left[\bar{\mathbf{A}}_i \tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \bar{\mathbf{A}}_{d,i} \tilde{\mathbf{x}}_1(t - \tau(t)) + \bar{\mathbf{B}}_{v_{1,i}} v(t) \right] + \mathbf{\Delta}_{\phi}(t), \quad (3.153)$$

com $\|\mathbf{\Delta}_{\phi}(t)\| \leq \bar{M}\tilde{G}_2^{-1}\delta$.

Teorema 3.12. *Seja (3.153) a dinâmica do sistema em modo deslizante prático. Suponha que, dados os escalares $\tau_M > 0$, $\mu \in [0, 1)$, $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ e h_i , existam matrizes $\mathbf{X} \succ 0$, $\mathbf{W} \succ 0$, $\tilde{\mathbf{R}} \succ 0$,*

$\tilde{\mathbf{Q}}_i \succ 0$, $\tilde{\mathbf{S}}_i \succ 0 \in \mathbb{S}^{(n_x-1) \times (n_x-1)}$ e matrizes $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{1 \times (n_x-1)}$, $\tilde{\mathbf{Y}} \in \mathbb{R}^{(n_x-1) \times (n_x-1)}$, tais que para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, sejam factíveis:

$$\begin{bmatrix} \text{He}(\bar{\mathbf{A}}_{c_i}) + \tilde{\mathbf{Q}}_i + \tilde{\Phi} - \tilde{\mathbf{R}} + \varepsilon_0 \mathbf{X} & \bar{\mathbf{A}}_{d_{c_i}} + \tilde{\mathbf{R}} - \tilde{\mathbf{Y}} & \tilde{\mathbf{Y}} & \bar{\mathbf{B}}_{v_{1,i}} - \mathbf{X} \mathbf{C}_i^\top & \tau_M \bar{\mathbf{A}}_{c_i}^\top \\ \star & \Gamma_i - 2\tilde{\mathbf{R}} + \text{He}(\tilde{\mathbf{Y}}) & \tilde{\mathbf{R}} - \tilde{\mathbf{Y}} & -\mathbf{X} \mathbf{C}_{d_i}^\top & \tau_M \bar{\mathbf{A}}_{d_{c_i}}^\top \\ \star & \star & \tilde{\mathbf{S}}_i - \tilde{\mathbf{R}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -2D_{v_i} - \eta & \tau_M \bar{\mathbf{B}}_{v_{1,i}}^\top \\ \star & \star & \star & \star & -\mathbf{W} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.154)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.155)$$

onde os blocos de (3.154) são definidos por:

$$\bar{\mathbf{A}}_{c_i} = \tilde{\mathbf{A}}_{11,i} \mathbf{X} - \tilde{\mathbf{A}}_{12,i} \mathbf{V}, \quad \bar{\mathbf{A}}_{d_{c_i}} = \tilde{\mathbf{A}}_{d_{11,i}} \mathbf{X} - \tilde{\mathbf{A}}_{d_{12,i}} \mathbf{V}, \quad (3.156)$$

$$\Gamma_i = -(1 - \mu)(\tilde{\mathbf{Q}}_i + \tilde{\mathbf{S}}_i), \quad \tilde{\Phi} = \tau_M \sum_{j=1}^r h_j (\tilde{\mathbf{Q}}_j + \tilde{\mathbf{S}}_j), \quad (3.157)$$

com as transformações de congruência $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{Q}}_i = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q}_i \mathbf{P}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{S}}_i = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S}_i \mathbf{P}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{P}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{P}^{-1}$ e a matriz de ganho de realimentação de estado determinada por $\mathcal{G} = \mathbf{V} \mathbf{X}^{-1}$.

Então, a estabilidade prática do sistema (3.153) em conjunto com a passividade robusta com coeficiente $\eta > 0$ são garantidas, e:

i) As trajetórias do estado funcional $\tilde{\mathbf{x}}_{1_t}$ são UUB com respeito à região de estabilidade prática funcional:

$$\mathcal{B}_{\text{stab}} = \{ \tilde{\mathbf{x}}_{1_t} \in C^1([- \tau_M, 0], \mathbb{R}^{n_x-1}) : \|\tilde{\mathbf{x}}_{1_t}\|_{C^1} \leq r_{\text{stab}} \}, \quad (3.158)$$

definida no espaço de funções de dimensão infinita $C^1([- \tau_M, 0], \mathbb{R}^{n_x-1})$, com raio funcional:

$$r_{\text{stab}} = \kappa_{\text{stab}} \delta, \quad \kappa_{\text{stab}} = \frac{\delta_2 + \sqrt{\delta_2^2 + 4\lambda_\varepsilon \delta_1}}{2\lambda_\varepsilon}, \quad (3.159)$$

onde:

$$\delta_1 = [\varepsilon_0^{-1} \lambda_{\max}^2(\mathbf{P}) + (1 + \varepsilon_1) \tau_M^2 \lambda_{\max}(\mathbf{R})] \bar{M}^2 \tilde{G}_2^{-2}, \quad \delta_2 = 2\tau_M^2 \lambda_{\max}(\mathbf{R}) \bar{A}_c \bar{M} \tilde{G}_2^{-1}, \quad (3.160)$$

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^r \|\tilde{\mathbf{A}}_{12,i} + \tilde{\mathbf{A}}_{d_{12,i}}\|, \quad (3.161a)$$

$$\bar{A}_c = \sum_{i=1}^r (\|\tilde{\mathbf{A}}_i\| + \|\tilde{\mathbf{A}}_{d_i}\| + \|\tilde{\mathbf{B}}_{v_{1,i}}\|), \quad (3.161b)$$

$$\lambda_\epsilon = \lambda_{\min} \left(- \sum_{i=1}^r \omega_i (\bar{\Phi}_i + \tau_M^2 \mathbf{F}_i^\top \mathbf{R} \mathbf{F}_i) \right) - \epsilon_0 \lambda_{\max}(\mathbf{P}), \quad (3.162)$$

com $\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i & \bar{\mathbf{A}}_{d_i} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{B}}_{v_{1,i}} \end{bmatrix}$ e:

$$\bar{\Phi}_i = \begin{bmatrix} \text{He}(\mathbf{P}\bar{\mathbf{A}}_i) + \mathbf{Q}_i + \Phi - \mathbf{R} & \bar{\mathbf{A}}_{d_i} + \mathbf{R} - \mathbf{Y} & \mathbf{Y} & \mathbf{P}\bar{\mathbf{B}}_{v_{1,i}} - \mathbf{C}_i^\top \\ \star & -(1-\mu)(\mathbf{Q}_i + \mathbf{S}_i) + \Gamma & \mathbf{R} - \mathbf{Y} & -\mathbf{C}_{d_i}^\top \\ \star & \star & \mathbf{S}_i - \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -2D_{v_i} - \eta \end{bmatrix}, \quad (3.163)$$

na qual $\Phi = \tau_M \sum_{j=1}^r h_j(\mathbf{Q}_j + \mathbf{S}_j)$ e $\Gamma = -2\mathbf{R} + \text{He}(\mathbf{Y})$.

ii) A projeção de $\mathcal{B}_{\text{stab}}$ sobre $\mathbb{R}^{n_x-1}$ define a região de estabilidade prática geométrica:

$$\mathcal{R}_{\text{stab}} = \{ \tilde{\mathbf{x}}_1(t) \in \mathbb{R}^{n_x-1} : \|\tilde{\mathbf{x}}_1(t)\| \leq R_{\text{stab}} \}, \quad (3.164)$$

com raio geométrico:

$$R_{\text{stab}} = \sqrt{\frac{\bar{v}}{v}} r_{\text{stab}}, \quad (3.165)$$

onde $v = \lambda_{\min}(\mathbf{P})$ e:

$$\bar{v} = \lambda_{\max}(\mathbf{P}) + \tau_M \max_i \{ \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_i) \} + \tau_M \max_i \{ \lambda_{\max}(\mathbf{S}_i) \} + \tau_M^2 L^2 \lambda_{\max}(\mathbf{R}). \quad (3.166)$$

iii) Para toda perturbação admissível $v(t)$ e todo $t^* > 0$, as trajetórias satisfazem a condição de passividade robusta:

$$2 \int_0^{t^*} y(t)v(t) dt \geq -\eta \int_0^{t^*} v^2(t) dt - V(\tilde{\mathbf{x}}_{1_0}), \quad (3.167)$$

que, sob condições iniciais nulas ($V(\tilde{\mathbf{x}}_{1_0}) = 0$), reduz-se exatamente à desigualdade integral de passividade robusta com coeficiente η .

Demonstração. O funcional de Lyapunov–Krasovskii fuzzy é o mesmo (3.62). O desenvolvimento de $\dot{V}(t) - 2y(t)v(t) - \eta v^2(t)$ é idêntico ao do Teorema 3.3, com $\phi_{\max}$ substituído por δ :

$$\dot{V}(t) - 2y(t)v(t) - \eta v^2(t) \leq -\lambda_\epsilon \|\xi(t)\|^2 + \delta_1 \delta \|\xi(t)\| + \delta_2 \delta^2, \quad (3.168)$$

negativa para $\|\xi(t)\| > r_{\text{stab}} = \kappa_{\text{stab}} \delta$, raiz positiva de $\lambda_\epsilon r^2 - \delta_1 \delta r - \delta_2 \delta^2 = 0$.

Os limites superiores dos termos do funcional de Lyapunov–Krasovskii (3.101)–(3.108) aplicam-se identicamente. O maior valor do funcional ao atingir $\mathcal{B}_{\text{stab}}$ é $c^* = \bar{v} r_{\text{stab}}^2$, o conjunto de nível $\Omega_{c^*} = \{ \tilde{\mathbf{x}}_{1_t} : V(\tilde{\mathbf{x}}_{1_t}) \leq c^* \}$ é positivamente invariante, e para toda trajetória em Ω_{c^*} :

$$\|\tilde{\mathbf{x}}_1(t)\| \leq \sqrt{\frac{\bar{v}}{v}} r_{\text{stab}} = \sqrt{\frac{\bar{v}}{v}} \kappa_{\text{stab}} \delta = R_{\text{stab}}, \quad (3.169)$$

confirmando que as trajetórias do sistema (3.153) são *UUB* em $\mathcal{R}_{\text{stab}}$. A passividade robusta segue pela integração de (3.168) de 0 a t^* , usando $V(\tilde{\mathbf{x}}_{1_{t^*}}) \geq 0$, de modo análogo a (3.115)–(3.116). $\square$

Comentário 3.33. Analogamente ao Método 1 (Comentário 3.18), r_{stab} , dado por (3.169), depende exclusivamente do limiar de acionamento δ e das mesmas constantes de projeto, não dependendo da estimativa $\hat{p}(t)$ nem do limite superior real p da perturbação casada. O raio da região de estabilidade prática do Método 2 é, portanto, igualmente determinado independentemente de qualquer estimativa dessa perturbação.

Comentário 3.34. Os Teoremas 3.3 e 3.12 são estruturalmente idênticos, diferindo apenas no parâmetro de projeto: $\phi_{\max} = \|\mathbf{G}\|\tilde{\phi}/\bar{\mathbf{A}}$ no Método 1 e $\phi_{\max} = \delta$ no Método 2. A distinção está no comportamento na região de modos deslizantes prático: o Método 2, mediante $K_b = \alpha_2/(\delta - |s(t)|)$, pode reduzir o ganho para todo $|s(t)| < \delta$, resultando em menor energia de controle, enquanto o Método 1 mantém K_a constante no valor atingido no instante em que as trajetórias de estado alcançam a região de modos deslizantes prático.

3.4 Vínculo Energético entre os Limiares de Acionamento e o Coeficiente de Passividade Robusta

A relação entre o coeficiente de passividade η e os limiares $\tilde{\phi}$ (Método 1) e δ (Método 2) não é arbitrária: ela surge diretamente das condições na forma de *LMIs* (3.48) e das condições de estabilização prática dos Teoremas 3.3–3.12. A cadeia dedutiva a seguir torna essa dependência explícita em três passos: (i) extrair um limite inferior para a taxa de suprimento a partir da *LMI*; (ii) combinar esse limite com a condição de decrescimento do funcional de Lyapunov–Krasovskii *fuzzy* na fronteira de $\mathcal{B}_{\text{stab}}$; e (iii) obter analiticamente o limite máximo admissível para $\phi_{\max}$ em função de η .

3.4.1 Passo 1: Limite Inferior para a Taxa de Suprimento

Como $D_{v_i} \in \mathbb{R}$ é escalar, a factibilidade das *LMIs* (3.48) impõe, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, que o bloco (4,4) satisfaça:

$$-2D_{v_i} - \eta < 0, \quad (3.170)$$

ou, de forma equivalente,

$$D_{v_i} > -\frac{\eta}{2}. \quad (3.171)$$

Define-se o escalar:

$$d_{\min} = \min_{i \in \{1, \dots, r\}} D_{v_i} \in \mathbb{R}, \quad (3.172)$$

de modo que (3.170) implica $2d_{\min} + \eta > 0$.

Para derivar o limite inferior da taxa de suprimento, parte-se da equação de saída:

$$y(t) = \sum_{i=1}^r \omega_i(t) [\mathbf{C}_i \tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \mathbf{C}_{d_i} \tilde{\mathbf{x}}_1(t - \tau(t)) + D_{v_i} v(t)]. \quad (3.173)$$

Substituindo (3.173) na taxa de suprimento $2y(t)v(t) + \eta v^2(t)$, tem-se:

$$\begin{aligned} 2y(t)v(t) + \eta v^2(t) &= 2 \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \mathbf{C}_i \tilde{\mathbf{x}}_1(t) v(t) + 2 \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \mathbf{C}_{d_i} \tilde{\mathbf{x}}_1(t - \tau(t)) v(t) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^r \omega_i(t) D_{v_i} v^2(t) + \eta v^2(t). \end{aligned} \quad (3.174)$$

Os dois primeiros termos de (3.174) são produtos cruzados entre os estados $\tilde{\mathbf{x}}_1(t)$, $\tilde{\mathbf{x}}_1(t - \tau(t))$ e a perturbação $v(t)$. Esses termos aparecem explicitamente na desigualdade (3.97) e são absorvidos pelo funcional de Lyapunov–Krasovskii *fuzzy* (3.62) por meio de desigualdades de Young e Rayleigh, não contribuindo para o limite inferior da taxa de suprimento. O terceiro termo é limitado inferiormente por:

$$2 \sum_{i=1}^r \omega_i(t) D_{v_i} v^2(t) \geq 2d_{\min} v^2(t), \quad (3.175)$$

pois $\sum_{i=1}^r \omega_i(t) = 1$ e $D_{v_i} \geq d_{\min}$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Somando ao quarto termo e usando $2d_{\min} + \eta > 0$, obtém-se para todo $v(t) \neq 0$:

$$2y(t)v(t) + \eta v^2(t) \geq 2d_{\min} v^2(t) + \eta v^2(t) = (2d_{\min} + \eta) v^2(t) \geq 0. \quad (3.176)$$

Comentário 3.35. A desigualdade (3.176) constitui um limite inferior para a taxa de suprimento, cujo coeficiente $(2d_{\min} + \eta)$ é determinado diretamente pela condição de factibilidade (3.170) e contém η de forma explícita.

Comentário 3.36. O escalar $d_{\min}$ quantifica a contribuição mínima de D_{v_i} ao limite inferior da taxa de suprimento: quando $d_{\min} > 0$, essa contribuição é estritamente positiva para todos os r sistemas locais lineares; quando $d_{\min} \in (-\eta/2, 0)$, o limite inferior positivo é assegurado exclusivamente pelo coeficiente η .

Comentário 3.37. A escolha da passividade robusta como função de suprimento é motivada pela sua estrutura: dentre as funções de suprimento QSR (HILL; MOYLAN, 1976; MADEIRA, 2021), a passividade robusta, obtida com $Q = 0$, $S = 1$ e $R = \eta$, é o caso mais simples cujo limite inferior (3.176) contém η de forma isolada e explícita, sem parâmetros de ponderação adicionais, sendo essencial para que (3.179) produza um vínculo analítico fechado entre $\phi_{\max}$ e η .

3.4.2 Passo 2: Condição Algébrica entre $\phi_{\max}$ e η

Na demonstração do Teorema 3.3, a derivada do funcional de Lyapunov–Krasovskii *fuzzy* (3.62) satisfaz a desigualdade (3.97):

$$\dot{V}(t) - 2y(t)v(t) - \eta v^2(t) \leq -\lambda_\epsilon \|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2 + \delta_2 \phi_{\max} \|\boldsymbol{\xi}(t)\| + \delta_1 \phi_{\max}^2, \quad (3.177)$$

com $\phi_{\max} = \|\mathbf{G}\|\tilde{\Phi}/\bar{\mathbf{A}}$ para o Método 1 e $\phi_{\max} = \delta$ para o Método 2. Somando (3.176) em (3.177):

$$\dot{V}(t) \leq -\lambda_\epsilon \|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2 + \delta_2 \phi_{\max} \|\boldsymbol{\xi}(t)\| + \delta_1 \phi_{\max}^2 - (2d_{\min} + \eta) v^2(t). \quad (3.178)$$

Na fronteira $\|\xi(t)\| = r_{\text{stab}} = \kappa_{\text{stab}}\phi_{\text{max}}$, os três primeiros termos de (3.178) se anulam, pois r_{stab} é raiz positiva da equação polinomial $\lambda_{\epsilon}r^2 - \delta_2\phi_{\text{max}}r - \delta_1\phi_{\text{max}}^2 = 0$, restando $\dot{V}(t) \leq -(2d_{\min} + \eta)v^2(t) \leq 0$. Dividindo essa equação por ϕ_{max}^2 e substituindo $r = \kappa_{\text{stab}}\phi_{\text{max}}$, obtém-se $\lambda_{\epsilon}\kappa_{\text{stab}}^2 = \delta_2\kappa_{\text{stab}} + \delta_1$. Multiplicando ambos os membros por ϕ_{max}^2 e usando $r_{\text{stab}} = \kappa_{\text{stab}}\phi_{\text{max}}$, obtém-se $\lambda_{\epsilon}r_{\text{stab}}^2 = (\delta_2\kappa_{\text{stab}} + \delta_1)\phi_{\text{max}}^2$. Para obter um limite superior para ϕ_{max} em função de η , impõe-se que $\lambda_{\epsilon}r_{\text{stab}}^2$ seja dominado pelo limite inferior (3.176) avaliado com $\sup_{t \geq 0} |v(t)| = \vartheta$:

$$(\delta_2\kappa_{\text{stab}} + \delta_1)\phi_{\text{max}}^2 \leq (2d_{\min} + \eta)\vartheta^2, \quad (3.179)$$

do qual se obtém diretamente, no Passo 3, o limite superior $\phi^*(\eta)$ para ϕ_{max} .

Comentário 3.38. Note-se que (3.179) é uma condição suficiente obtida por tomada de limitantes superiores ao longo da cadeia dedutiva; a estabilização prática e a passividade robusta já estão garantidas pelas *LMIs* e pela construção de κ_{stab} , independentemente do valor de ϕ_{max} . O limite superior $\phi^*(\eta)$ estabelece portanto uma restrição de projeto que assegura o vínculo analítico entre o limiar de acionamento e o coeficiente de passividade robusta, sem interferir nas garantias de estabilidade já obtidas.

3.4.3 Passo 3: Vínculo Analítico entre ϕ_{max} e η

Isolando ϕ_{max} em (3.179), obtém-se o limite superior compatível com o coeficiente de passividade robusta $\eta > 0$:

$$\phi_{\text{max}} \leq \phi^*(\eta) = \vartheta \sqrt{\frac{2d_{\min} + \eta}{\delta_2\kappa_{\text{stab}} + \delta_1}}. \quad (3.180)$$

Comentário 3.39. Como $2d_{\min} + \eta > 0$, $\phi^*(\eta)$ é estritamente crescente em η : aumentar o coeficiente de passividade robusta amplia o conjunto admissível de limiares de acionamento por eventos.

Comentário 3.40. A expressão (3.180) estabelece o vínculo energético entre o limiar de acionamento por eventos e o coeficiente de passividade robusta para a classe de sistemas *fuzzy* T–S tipo-2 intervalares considerada: ϕ_{max} é limitado superiormente pela capacidade dissipativa do sistema em malha fechada, medida por η . Sistemas com maior capacidade dissipativa admitem limiares de acionamento mais elevados sem comprometer as garantias de estabilização prática e passividade robusta já estabelecidas pelas *LMIs* dos Teoremas 3.3 e 3.12. Em sentido inverso, a escolha do limiar impõe uma demanda mínima sobre a capacidade dissipativa: dado ϕ_{max} , o coeficiente de passividade mínimo necessário é determinado diretamente por (3.179), sem necessidade de iteração sobre as *LMIs*.

3.4.4 Limites de Projeto para Cada Método de Controle

O vínculo energético (3.180) estabelece um limite superior $\phi_{\text{max}} \leq \phi^*(\eta)$ para os limiares de acionamento, desde que as *LMIs* dos Teoremas 3.3 e 3.12 sejam factíveis. Esse limite se traduz

em restrições distintas sobre os parâmetros de projeto de cada método, mediante as relações $\phi_{\max} = \|G\|\tilde{\varphi}/\bar{A}$ para o Método 1 e $\phi_{\max} = \delta$ para o Método 2.

Corolário 3.13 (Vínculo passividade–limiar para o Método 1). *Para o Método 1, o vínculo (3.180) exige que o limiar de acionamento satisfaça:*

$$\tilde{\varphi} \leq \tilde{\varphi}^*(\eta) = \frac{\bar{A}}{\|G\|} \phi^*(\eta) = \frac{\bar{A}}{\|G\|} \vartheta \sqrt{\frac{2d_{\min} + \eta}{\delta_2 \kappa_{\text{stab}} + \delta_1}}. \quad (3.181)$$

Sob essa condição, o raio da região de estabilidade prática funcional satisfaz:

$$r_{\text{stab}}^{(\text{M1})} = \kappa_{\text{stab}} \frac{\|G\|\tilde{\varphi}}{\bar{A}} \leq \kappa_{\text{stab}} \phi^*(\eta). \quad (3.182)$$

Demonstração. Substituindo $\phi_{\max} = \|G\|\tilde{\varphi}/\bar{A}$ em (3.180) e isolando $\tilde{\varphi}$, obtém-se (3.181). A expressão de $r_{\text{stab}}^{(\text{M1})}$ segue de $r_{\text{stab}} = \kappa_{\text{stab}}\phi_{\max}$ com $\phi_{\max} \leq \phi^*(\eta)$. $\square$

Comentário 3.41. O limiar $\tilde{\varphi}^*(\eta)$, dado por (3.181), depende exclusivamente do coeficiente de passividade robusta η , do limite superior conhecido ϑ da perturbação não casada, de constantes de projeto e de $\|G\|$ e $\bar{A}$, não dependendo em nenhum momento da estimativa $\hat{p}(t)$ nem do limite superior real ρ da perturbação casada. O limite superior da região de modos deslizantes prático é, portanto, determinado independentemente de qualquer estimativa dessa perturbação.

Corolário 3.14 (Vínculo passividade–limiar para o Método 2). *Para o Método 2, o vínculo (3.180) exige que o limiar de acionamento satisfaça:*

$$\delta \leq \delta^*(\eta) = \phi^*(\eta) = \vartheta \sqrt{\frac{2d_{\min} + \eta}{\delta_2 \kappa_{\text{stab}} + \delta_1}}. \quad (3.183)$$

Sob essa condição, o raio da região de estabilidade prática funcional satisfaz:

$$r_{\text{stab}}^{(\text{M2})} = \kappa_{\text{stab}} \delta \leq \kappa_{\text{stab}} \delta^*(\eta). \quad (3.184)$$

Demonstração. Imediata por substituição de $\phi_{\max} = \delta$ em (3.180). $\square$

Comentário 3.42. Analogamente ao Método 1, o limiar $\delta^*(\eta)$, dado por (3.183), depende exclusivamente de η , de ϑ e das mesmas constantes de projeto, não dependendo da estimativa $\hat{p}(t)$ nem do limite superior real ρ da perturbação casada. O limite superior da região de modos deslizantes prático do Método 2 é, portanto, igualmente determinado independentemente de qualquer estimativa dessa perturbação.

Comentário 3.43. Como as *LMIs* dos Teoremas 3.3 e 3.12 têm estrutura idêntica, uma vez que as dinâmicas (3.46) e (3.153) diferem apenas no parâmetro $\phi_{\max}$, os coeficientes δ_1 , δ_2 , λ_{ϵ} e κ_{stab} são os mesmos para os dois métodos, dados os mesmos parâmetros η , τ_M e μ . Consequentemente, quando os limiares são escolhidos nos seus valores superiores $\tilde{\varphi}^*(\eta)$ e $\delta^*(\eta)$, os raios funcionais das respectivas regiões de estabilidade prática coincidem:

$$r_{\text{stab}}^{(\text{M1})} = r_{\text{stab}}^{(\text{M2})} = \kappa_{\text{stab}} \phi^*(\eta). \quad (3.185)$$

A vantagem do Método 2 não reside, portanto, no raio da região de estabilidade prática, mas na redução do esforço de controle dentro de $\tilde{S}$, conforme o Comentário 3.34.

4 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Este capítulo apresenta os resultados computacionais obtidos com as metodologias de controle propostas. A Seção 4.1 realiza a análise de desempenho comparativa dos dois métodos de controle propostos, avaliando o comportamento das trajetórias de estado, a evolução do ganho de chaveamento adaptativo, as propriedades da região de modos deslizantes prático e a eficiência do mecanismo de acionamento por eventos. A Seção 4.2 compara os métodos propostos com abordagens da literatura, evidenciando a vantagem decorrente da certificação de robustez a atraso variante e a perturbações casada e não casada frente a métodos sem tais garantias, bem como o compromisso entre a velocidade de convergência e o esforço de controle e a frequência de acionamento por eventos observado frente a métodos que já empregam acionamento por eventos e atraso variante.

4.1 Comparação de Desempenho entre os Métodos Propostos

4.1.1 Descrição do Sistema e Parâmetros de Simulação

As simulações foram realizadas sobre um modelo *fuzzy* T-S tipo-2 intervalar com quatro modelos locais lineares de segunda ordem. O modelo segue a estrutura (3.2), com matrizes de estado

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -0,5 & 1 \\ -2,0 & -1,0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -0,5 & 1 \\ -2,0 & -0,3 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ -0,5 & -1,0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ -0,5 & -0,3 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

matrizes de entrada $\mathbf{B}_1 = [0 \ 0,8]^\top$, $\mathbf{B}_2 = [0 \ 1,0]^\top$, $\mathbf{B}_3 = [0 \ 1,2]^\top$, $\mathbf{B}_4 = [0 \ 1,5]^\top$, distintas entre os sistemas locais em conformidade com a Hipótese **H4**, e matrizes de atraso $\mathbf{A}_{d_i} = 0,2\mathbf{A}_i$. A perturbação não casada entra no sistema por meio de $\mathbf{B}_{v_1} = \mathbf{B}_{v_3} = [0 \ 0,03]^\top$ e $\mathbf{B}_{v_2} = \mathbf{B}_{v_4} = [0 \ 0,05]^\top$. A equação de saída segue a estrutura (3.3), com $C_i = 0,1$, $C_{d_i} = 0,05$ e $D_{v_i} = 0,1$ para todo $i \in \{1, \dots, 4\}$, de modo que $d_{\min} = \min_i D_{v_i} = 0,1 > 0$, garantindo a positividade de $\varphi^*(\eta)$ para todo $\eta > 0$. A perturbação casada é $d(t) = 0,3 \sin(2t) + 0,01|y(t)|$ e a perturbação não casada é $v(t) = 0,5 \sin(2,3t + 0,5)$.

As funções de pertinência inferiores e superiores normalizadas são

$$\begin{aligned} \underline{\omega}_1(x_1(t)) &= e^{-x_1^2(t)/2,0}, & \underline{\omega}_2(x_1(t)) &= e^{-(x_1(t)-1)^2/1,5}, \\ \underline{\omega}_3(x_1(t)) &= 1 - \underline{\omega}_1(x_1(t)), & \underline{\omega}_4(x_1(t)) &= 1 - \underline{\omega}_2(x_1(t)), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1(x_1(t)) &= \min(1, 1,2 \underline{\omega}_1(x_1(t))), & \bar{\omega}_2(x_1(t)) &= \min(1, 1,2 \underline{\omega}_2(x_1(t))), \\ \bar{\omega}_3(x_1(t)) &= 1 - \bar{\omega}_1(x_1(t)), & \bar{\omega}_4(x_1(t)) &= 1 - \bar{\omega}_2(x_1(t)). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Os pesos da combinação convexa entre os graus de pertinência inferior e superior, $\bar{v}(t) = 0,5 \sin^2(t)$ e $\underline{v}(t) = 1 - \bar{v}(t)$, são comuns a todas as regras do modelo *fuzzy* T-S tipo-2 intervalar.

Ao longo desta seção, os índices $M1$ e $M2$ designam, respectivamente, as variáveis e as métricas associadas ao Método 1 e ao Método 2.

4.1.2 Resultados de Simulação

As matrizes de ganho de realimentação de estados foram obtidas pela solução das *LMIs* dos Teoremas 3.3 e 3.12. A matriz de transformação de similaridade $\mathbf{T}$, empregada na obtenção da forma regular (3.3), foi definida como a matriz identidade. Os parâmetros ε_0 e ε_1 , oriundos da desigualdade de Young utilizada na demonstração dos Teoremas 3.3 e 3.12, foram ajustados para maximizar $\delta^*(\eta)$ e $\varphi^*(\eta)$, resultando em $\varepsilon_0 = 0,1$ e $\varepsilon_1 = 0,01$. Os demais parâmetros associados às *LMIs* foram definidos como $\mu = 0,1$ e $h_i = 0,25$, para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Os limiares de acionamento foram obtidos aplicando-se, em todas as simulações e varreduras apresentadas nesta seção, uma margem de segurança de 90% sobre os respectivos limites superiores $\tilde{\varphi}^*(\eta)$ e $\delta^*(\eta)$, definidos pelos Corolários 3.13 e 3.14. Note-se que essa escolha faz com que a fronteira $\partial \bar{\mathcal{J}}^{M1}$ do Método 1 seja igual à fronteira $\partial \bar{\mathcal{J}}^{M2}$ do Método 2. Essa igualdade, deliberadamente imposta, torna a comparação entre os dois métodos estruturalmente justa. Dessa forma, as regiões de modos deslizantes prático $\bar{\mathcal{J}}^{M1}$ e $\bar{\mathcal{J}}^{M2}$ possuem exatamente o mesmo limite superior, garantindo que qualquer diferença de desempenho observada a seguir decorra exclusivamente da estrutura da lei de chaveamento adaptativo, e não de uma vantagem artificial concedida a um dos métodos por uma região de confinamento mais permissiva.

Com esse mesmo objetivo de promover uma comparação justa, a condição inicial da estimativa do limite superior da perturbação casada, $\hat{p}(0) = 0,1245$, foi adotada de forma idêntica para ambos os métodos. Isso implica que o ganho $K^{M1}(t)$ do Método 1 e o ganho $K_a^{M2}(t)$ do Método 2, ativo quando $|s(t)| \geq \delta$, obedecem exatamente à mesma lei de adaptação, $\dot{\hat{p}}(t) = \gamma|s(t)|$, sob a mesma taxa $\gamma = 0,15$ e o mesmo $\bar{\varphi} = 0,4150$. A vantagem do Método 2 decorre, portanto, exclusivamente de $K_b^{M2}(t) = \alpha_2/(\delta - |s(t_k)|)$, ativo apenas quando $|s(t)| < \delta$, a qual é baseada em função de barreira e foi definida com $\alpha_2 = 1,39 \times 10^{-3}$ e limite de saturação $K_{\max}^{M2} = 1,66$ (com fator de saturação $\tilde{\eta} = 0,10$). Em todas as simulações apresentadas nesta seção, salvo indicação em contrário, a condição inicial é dada pelo histórico $\phi(\theta) = [0, 1 \quad -0,1]^\top$ para $\theta \in [-\tau_M, 0]$, de modo que o estado do sistema em cada instante t é descrito pelo segmento de trajetória $\mathbf{x}_t$ definido em (2.31), com passo de integração $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$ s e horizonte de simulação $T = 10$ s.

Para avaliar a robustez desses resultados frente à escolha do coeficiente de passividade robusta η , a Tabela 2 apresenta uma varredura de η entre 0,05 e 1,00, mantendo fixo o atraso de projeto em $\tau_M = 0,2$ s, o histórico ϕ e as demais condições descritas anteriormente. Para cada valor de η , os limiares teóricos $\tilde{\varphi}_{M1}^*$ e δ_{M2}^* foram recalculados pelos Corolários 3.13 e 3.14, e os respectivos limiares adotados $\tilde{\varphi}_{M1}$ e δ_{M2} foram obtidos pela mesma margem de segurança já descrita.

Observa-se que a redução percentual de E_u do Método 2 em relação ao Método 1

cresce de forma monotônica com η , e a redução de N_{ev} acompanha essa tendência de forma geral, passando de aproximadamente 75% em $\eta = 0,05$ para 78% em $\eta = 1,00$, ainda que sem monotonicidade estrita ao longo de toda a faixa. Esse comportamento decorre da estrutura das expressões dos Corolários 3.13 e 3.14: um coeficiente η maior relaxa a restrição de passividade robusta e, por consequência, eleva o limite superior do limiar δ_{M2}^* do Método 2 de forma mais expressiva do que o crescimento do limite superior do limiar $\tilde{\phi}_{M1}^*$ do Método 1. Em termos absolutos, o número de eventos de ambos os métodos decresce monotonicamente com o aumento de η (N_{ev}^{M1} de 1791 a 1086 eventos; N_{ev}^{M2} de 450 a 237 eventos), acompanhado pelo crescimento correspondente do tempo médio entre eventos ($\bar{T}_k^{M1}$ de 0,0056 s a 0,0092 s; $\bar{T}_k^{M2}$ de 0,0222 s a 0,0422 s), refletindo o alargamento das regiões de modos deslizantes prático permitido por um coeficiente η maior. O tempo de alcance t_1 , idêntico para os dois métodos em cada coluna, decresce monotonicamente de 0,298 s em $\eta = 0,05$ para 0,219 s em $\eta = 1,00$, pois uma região de modos deslizantes prático mais ampla é alcançada mais cedo por $|s(t)|$. Já a redução de E_x (1,1% a 1,8%) não exibe nenhum comportamento monotônico, reforçando a conclusão de que a vantagem do Método 2 reside no esforço de controle e na frequência de acionamento, não na precisão de convergência da trajetória de estado, e que essa vantagem é uma propriedade estrutural da estratégia de adaptação baseada em função de barreira.

Esse comportamento favorável do mecanismo de acionamento decorre da própria definição de η : o coeficiente de passividade robusta delimita também a atenuação energética do impacto da perturbação não casada sobre a saída do sistema. Um η maior, ao mesmo tempo em que amplia os limiares de acionamento e reduz o esforço de controle e a frequência de eventos, corresponde a uma garantia de atenuação mais fraca dessa perturbação sobre a saída. A escolha de η constitui, portanto, um compromisso de projeto entre a economia de recursos energéticos, de comunicação e de processamento, e a rejeição de perturbação não casada, e não um parâmetro a ser maximizado indiscriminadamente; a faixa $\eta \in [0,05, 1,00]$ investigada nesta varredura ilustra a extensão desse compromisso, cabendo ao projetista posicionar-se dentro dela conforme a severidade da perturbação não casada esperada na aplicação.

Uma segunda dimensão de robustez, complementar à anterior, é a sensibilidade dos resultados ao atraso de projeto τ_M , apresentada na Tabela 3, com o coeficiente de passividade robusta mantido fixo em $\eta = 0,3$. Para cada valor de τ_M testado, entre 0,05 s e 0,50 s, o histórico $\phi(\theta) = [0,1 \ -0,1]^\top$ foi redefinido no intervalo correspondente $\theta \in [-\tau_M, 0]$, de modo que o segmento de trajetória $\mathbf{x}_t$, conforme (2.31), acompanha a redefinição de τ_M a cada coluna da tabela. Para cada τ_M , as *LMIs* dos Teoremas 3.3 e 3.12 foram resolvidas novamente, o atraso máximo admissível τ_M^* foi certificado por bisseção (Comentário 3.23), e os limiares teóricos $\tilde{\phi}_{M1}^*$, δ_{M2}^* e os respectivos limiares adotados $\tilde{\phi}_{M1}$, δ_{M2} foram reprojetados pelos Corolários 3.13 e 3.14, mantendo-se fixo o atraso real do sistema simulado.

Como esperado, tanto os limiares teóricos ($\tilde{\phi}_{M1}^*$ de 0,0829 a 0,0236; δ_{M2}^* de 0,0117 a 0,0033) quanto os adotados ($\tilde{\phi}_{M1}$ de 0,0746 a 0,0213; δ_{M2} de 0,0105 a 0,0030) diminuem

Tabela 2 – Varredura no coeficiente de passividade robusta η : limiares teóricos e adotados, métricas de acionamento por eventos (número de eventos N_{ev} e tempo médio entre eventos $\bar{T}_k$), energias de estado e controle (E_x , E_u), tempo de alcance t_1 à região de modos deslizantes prático, e redução percentual do Método 2 em relação ao Método 1 (ΔN_{ev} , ΔE_u , ΔE_x), para cada valor de η testado. As linhas $\tilde{\Phi}_{M1}^*$ e δ_{M2}^* correspondem aos limites superiores analíticos dos limiares de acionamento (Corolários 3.13 e 3.14); $\tilde{\Phi}_{M1}$ e δ_{M2} são os valores efetivamente adotados na simulação.

Variável/Métrica	$\eta = 0,05$	$\eta = 0,10$	$\eta = 0,15$	$\eta = 0,20$	$\eta = 0,30$	$\eta = 0,50$	$\eta = 0,70$	$\eta = 1,00$
$\tilde{\Phi}_{M1}^*$	0,046756	0,051218	0,055322	0,059142	0,066123	0,078238	0,088713	0,10244
$\tilde{\Phi}_{M1}$	0,042080	0,046097	0,049790	0,053228	0,059510	0,070414	0,079842	0,092193
δ_{M2}^*	0,006578	0,007206	0,007783	0,008321	0,009303	0,011007	0,012481	0,014412
δ_{M2}	0,005920	0,006485	0,007005	0,007489	0,008373	0,009907	0,011233	0,012971
N_{ev}^{M1}	1791	1668	1592	1531	1424	1277	1185	1086
N_{ev}^{M2}	450	412	378	352	323	296	277	237
$\bar{T}_k^{M1}$ [s]	0,005579	0,005990	0,006276	0,006524	0,007016	0,007822	0,008420	0,009191
$\bar{T}_k^{M2}$ [s]	0,022183	0,024192	0,026374	0,027855	0,030969	0,033515	0,035982	0,042216
E_x^{M1}	0,007080	0,007114	0,007166	0,007188	0,007240	0,007338	0,007407	0,007501
E_x^{M2}	0,006997	0,007035	0,007064	0,007088	0,007131	0,007214	0,007288	0,007365
E_u^{M1}	3,1025	3,2108	3,3110	3,4072	3,5858	3,9047	4,1927	4,5813
E_u^{M2}	0,57192	0,58957	0,59097	0,57980	0,60562	0,63176	0,66510	0,67693
t_1^{M1} [s]	0,298	0,290	0,282	0,276	0,265	0,247	0,234	0,219
t_1^{M2} [s]	0,298	0,290	0,282	0,276	0,265	0,247	0,234	0,219
ΔN_{ev} [%]	74,87	75,30	76,26	77,01	77,32	76,82	76,62	78,18
ΔE_u [%]	81,57	81,64	82,15	82,98	83,11	83,82	84,14	85,22
ΔE_x [%]	1,17	1,11	1,42	1,39	1,51	1,68	1,61	1,82

monotonicamente com o aumento de τ_M , refletindo o maior conservadorismo exigido pelas *LMIs* à medida que o atraso de projeto aumenta. Esse estreitamento das regiões de modos deslizantes prático eleva substancialmente o número de eventos de ambos os métodos (N_{ev}^{M1} de 1087 a 3577 eventos; N_{ev}^{M2} de 229 a 862 eventos), acompanhado pela redução correspondente do tempo médio entre eventos ($\bar{T}_k^{M1}$ de 0,0092 s a 0,0028 s; $\bar{T}_k^{M2}$ de 0,0433 s a 0,0116 s). A energia de estado E_x apresenta variação pequena e sem tendência monotônica clara em toda a faixa investigada, para ambos os métodos, ao passo que a energia de controle E_u do Método 1 decresce globalmente ao longo da faixa (de 3,667 a 3,162, com um pequeno acréscimo inicial entre $\tau_M = 0,05$ s e $\tau_M = 0,10$ s), com padrão semelhante para o Método 2; a redução percentual de E_u do Método 2 em relação ao Método 1 permanece, ainda assim, superior a 82% em toda a faixa de τ_M investigada. O tempo de alcance t_1 , idêntico para os dois métodos em cada coluna, cresce monotonicamente de 0,215 s em $\tau_M = 0,05$ s para 0,400 s em $\tau_M = 0,50$ s, pois o maior conservadorismo das *LMIs*, resultante do aumento do atraso de projeto, estreita a região de modos deslizantes prático e retarda o instante em que $|s(t)|$ a alcança. Observa-se, contudo, que o atraso máximo admissível certificado permanece praticamente constante, em torno de $\tau_M^* \approx 3,00$ s, para toda a faixa de τ_M de projeto investigada, o que sugere que esse valor está limitado pelo intervalo de busca empregado no algoritmo de bisseção, e não por uma fronteira de factibilidade das *LMIs*.

Tabela 3 – Varredura no atraso de projeto τ_M (com η mantido igual a 0,3): atraso máximo admissível certificado τ_M^* e margem percentual em relação ao atraso de projeto, limiares teóricos e adotados pelo Método 1 e Método 2 ($\tilde{\Phi}_{M1}^*$, $\tilde{\Phi}_{M1}$, δ_{M2}^* , δ_{M2}), métricas de acionamento por eventos (número de eventos N_{ev} e tempo médio entre eventos $\bar{T}_k$), energias de estado e controle (E_x , E_u), e tempo de alcance t_1 à região de modos deslizantes prático, para cada atraso de projeto τ_M testado.

Variável/Métrica	$\tau_M = 0,05$	$\tau_M = 0,10$	$\tau_M = 0,15$	$\tau_M = 0,20$	$\tau_M = 0,25$	$\tau_M = 0,30$	$\tau_M = 0,40$	$\tau_M = 0,50$
τ_M^* [s]	2,9993	2,9993	2,9993	2,9993	2,9993	2,9993	2,9994	2,9994
Margem [%]	5898,6	2899,3	1899,5	1399,7	1099,7	899,78	649,84	499,88
$\tilde{\Phi}_{M1}^*$	0,082939	0,079361	0,073586	0,066123	0,057715	0,049185	0,034257	0,023626
$\tilde{\Phi}_{M1}$	0,074645	0,071425	0,066228	0,059510	0,051943	0,044267	0,030831	0,021263
δ_{M2}^*	0,011669	0,011165	0,010353	0,009303	0,008120	0,006920	0,004820	0,003324
δ_{M2}	0,010502	0,010049	0,009318	0,008373	0,007308	0,006228	0,004338	0,002992
N_{ev}^{M1}	1087	1171	1276	1424	1610	1874	2595	3577
N_{ev}^{M2}	229	292	289	323	381	432	659	862
$\bar{T}_k^{M1}$ [s]	0,009181	0,008528	0,007825	0,007016	0,006205	0,005331	0,003851	0,002795
$\bar{T}_k^{M2}$ [s]	0,043268	0,033976	0,033712	0,030969	0,026253	0,023037	0,015170	0,011590
E_x^{M1}	0,007204	0,007250	0,007260	0,007240	0,007214	0,007170	0,007077	0,006995
E_x^{M2}	0,007089	0,007111	0,007136	0,007131	0,007122	0,007093	0,007023	0,006962
E_u^{M1}	3,6673	3,6917	3,6606	3,5858	3,4845	3,3815	3,2235	3,1619
E_u^{M2}	0,60403	0,63984	0,61417	0,60562	0,60155	0,57316	0,57386	0,55067
t_1^{M1} [s]	0,215	0,228	0,245	0,265	0,287	0,311	0,358	0,400
t_1^{M2} [s]	0,215	0,228	0,245	0,265	0,287	0,311	0,358	0,400

Em ambas as tabelas, o tempo de alcance observado t_1 é idêntico para os dois métodos em cada linha. Essa igualdade decorre da própria definição de t_1 como o primeiro instante em que $|s(t)|$ atinge a respectiva região de modos deslizantes prático, e não de um mero acaso: como ambas as regiões possuem exatamente o mesmo raio equivalente e os dois métodos partem do mesmo histórico e da mesma estimativa inicial $\hat{p}(0)$, a fase de alcance transcorre sob a mesma dinâmica de aproximação até que $|s(t)|$ cruze a fronteira comum aos dois métodos, momento a partir do qual as leis de adaptação do ganho de chaveamento passam a diferir. Cabe destacar que os limites superiores analíticos de t_1 , dados por:

$$t_1^{M1} < \frac{\sqrt{2V_1(0)} - \frac{\|G\|\tilde{\Phi}}{\bar{A}}}{\bar{\Phi} - \bar{\vartheta}}, \quad t_1^{M2} < \frac{\sqrt{2V_1(0)} - \delta}{\bar{\Phi} - \bar{\vartheta}},$$

com $V_1(0) = \frac{1}{2}s(0)^2 + \frac{1}{2\gamma}(\rho_0 - \bar{\rho})^2$, permanecem, em toda a faixa investigada, consideravelmente acima dos valores observados na simulação. Esse comportamento é esperado para cotas obtidas via função de Lyapunov V_1 , as quais privilegiam a tratabilidade analítica em detrimento do conservadorismo. Portanto, a distância entre o limite teórico e o valor simulado não deve ser interpretada como imprecisão do modelo, mas sim como a margem de conservadorismo inerente ao método de prova.

Para a geração dos gráficos de simulação, o coeficiente de passividade robusta foi fixado no valor $\eta = 0,3$, enquanto o atraso de projeto foi definido em $\tau_M = 0,2$ s. A matriz de ganho de realimentação, obtida pela solução das *LMI*s dos Teoremas 3.3 e 3.12, resultou

em $\mathbf{G} = [2,2890 \ 1,0000]$. Com o ganho $\mathbf{G}$ fixado, o atraso máximo admissível certificado pelo algoritmo de bisseção (Comentário 3.23) alcançou $\tau_M^* \approx 3,00$ s, evidenciando uma margem substancial de robustez ao atraso. Os valores numéricos das métricas obtidos dessa simulação correspondem às colunas $\eta = 0,30$ e $\tau_M = 0,20$ s já apresentadas nas Tabelas 2 e 3.

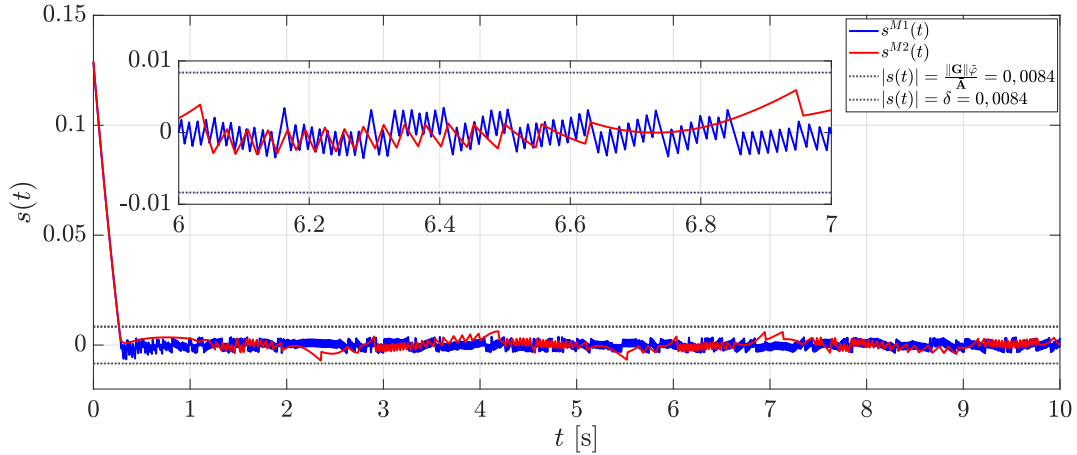


Figura 7 – Trajetórias das variáveis deslizantes $s^{M1}(t)$ e $s^{M2}(t)$. O detalhe ampliado evidencia o confinamento estrito de ambas as trajetórias dentro de $|s(t)| \leq 0,0084$, raio comum às duas regiões de modos deslizantes prático.

A Figura 7 mostra que ambas as variáveis deslizantes convergem para a vizinhança da origem em menos de um segundo, e o detalhe ampliado, correspondente ao intervalo $t \in [6, 7]$ s, confirma que $s^{M1}(t)$ e $s^{M2}(t)$ permanecem estritamente confinadas dentro da faixa $|s(t)| \leq 0,0084$ ao longo de todo o regime permanente, em concordância com as regiões definidas pelos Teoremas 3.1 e 3.10. A igualdade numérica entre os dois limites superiores das regiões de modos deslizantes prático, já discutida, é o que legitima a comparação de desempenho apresentada nas figuras seguintes.

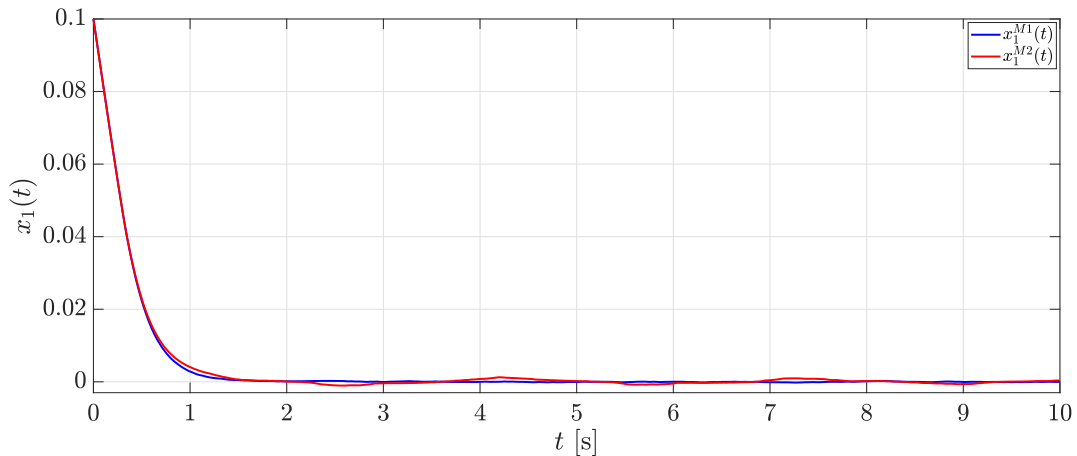


Figura 8 – Trajetórias de estado $x_1^{M1}(t)$ e $x_1^{M2}(t)$.

As Figuras 8 e 9 mostram que as trajetórias de estado dos dois métodos são praticamente indistinguíveis, com convergência de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ para a origem em aproximadamente 1,5 s.

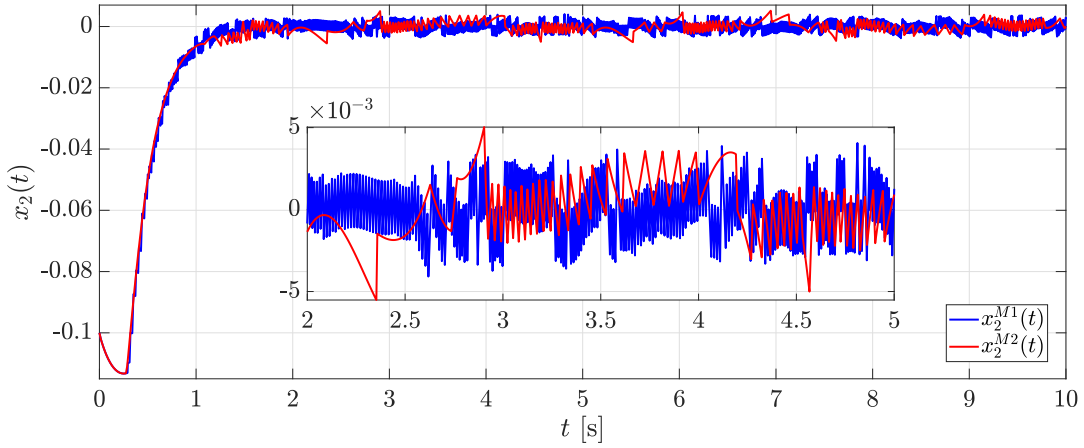


Figura 9 – Trajetórias de estado $x_2^{M1}(t)$ e $x_2^{M2}(t)$.

O detalhe ampliado da Figura 9, no intervalo $t \in [2, 5]$ s, evidencia oscilação residual de alta frequência confinada à faixa $\pm 5 \times 10^{-3}$, assinatura característica do modo deslizante prático em regime permanente. A escolha entre o Método 1 e o Método 2 não compromete, portanto, o desempenho da regulação: a energia de estado E_x difere entre os dois métodos por menos de dois pontos percentuais em toda a faixa de η investigada, conforme a Tabela 2. A distinção entre os métodos manifesta-se exclusivamente no esforço de controle e na frequência de acionamento, o que é evidenciado a seguir no plano de fase e nas entradas de controle.

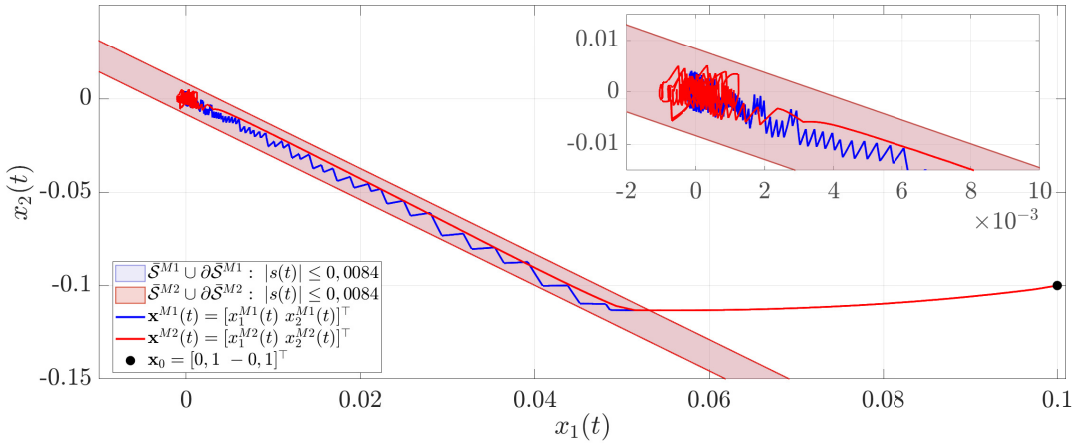


Figura 10 – Trajetórias de estado no plano de fase (x_1, x_2) , com as respectivas regiões de modos deslizantes prático $\bar{\mathcal{S}}^{M1}$ e $\bar{\mathcal{S}}^{M2}$, ambas com limite superior igual a 0,0084, e o ponto inicial $\mathbf{x}_0 = [0, 1 \ -0, 1]^\top$. O detalhe ampliado exhibe o confinamento das trajetórias dentro do modo deslizante prático.

A Figura 10 apresenta a trajetória de estado no plano de fase, com as duas regiões de modos deslizantes prático sobrepostas e de mesmo limite superior. Observa-se que a trajetória $\mathbf{x}^{M2}(t)$ apresenta uma inflexão inicial antes de convergir para $\bar{\mathcal{S}}^{M2}$, distinta da aproximação mais direta de $\mathbf{x}^{M1}(t)$, que exibe o padrão em dente de serra característico do chaveamento monotônico de ganho crescente. O detalhe ampliado confirma o confinamento de ambas as trajetórias dentro

das regiões $\bar{\mathcal{S}}^{M1}$ e $\bar{\mathcal{S}}^{M2}$, corroborando o resultado teórico de invariância positiva estabelecido nos Teoremas 3.1 e 3.10.

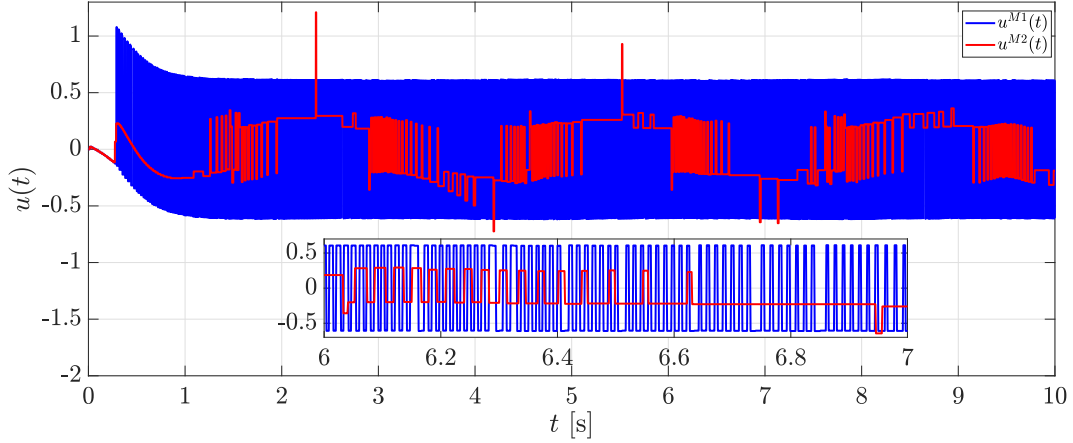


Figura 11 – Evolução temporal das entradas de controle $u^{M1}(t)$ e $u^{M2}(t)$.

A Figura 11 evidencia a diferença estrutural entre os dois métodos de forma mais direta. A entrada $u^{M1}(t)$ mantém chaveamento de alta frequência e amplitude sustentada próxima de $\pm 0,5$ ao longo de toda a simulação, ao passo que $u^{M2}(t)$ apresenta comportamento predominantemente intermitente, com longos intervalos de baixa atividade interrompidos por picos isolados. Essa diferença qualitativa é quantificada na Tabela 2: para $\eta = 0,3$, a energia de controle do Método 2 corresponde a apenas 16,9% da energia do Método 1 ($E_u^{M2} = 0,60562$ do Método 2, em comparação a $E_u^{M1} = 3,5858$ do Método 1), uma redução de 83,1%.

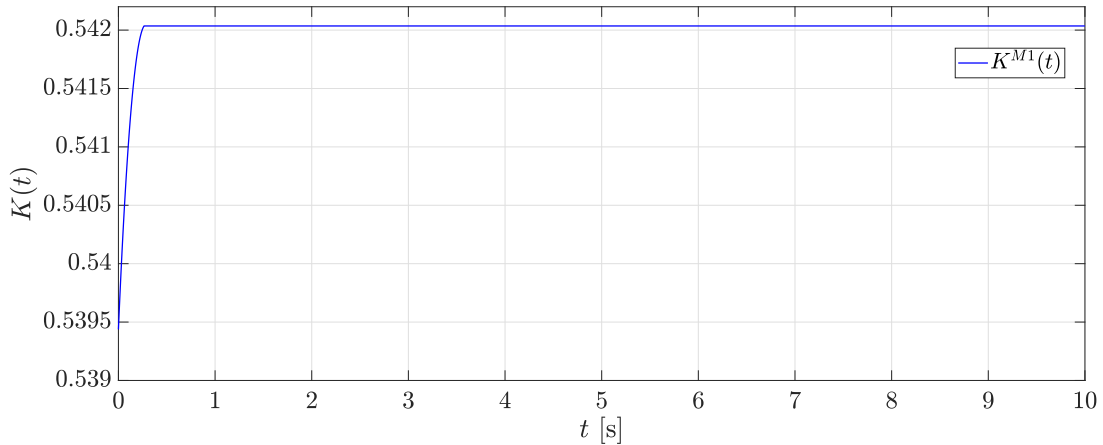


Figura 12 – Evolução temporal do ganho de chaveamento adaptativo $K^{M1}(t)$.

As Figuras 12 e 13 explicam o mecanismo por trás dessa redução de energia. O ganho $K^{M1}(t)$ cresce monotonicamente e alcança o valor de convergência de aproximadamente 0,542 em $t_1^{M1} = 0,265$ s, permanecendo constante pelo restante do horizonte. Já $K^{M2}(t_k)$ exibe um pico inicial acentuado, igual a 1,66, valor que coincide com a saturação $K_{\max}^{M2} = 1,66$ imposta pelo mecanismo de saturação da função de barreira, decaindo rapidamente e permanecendo limitado

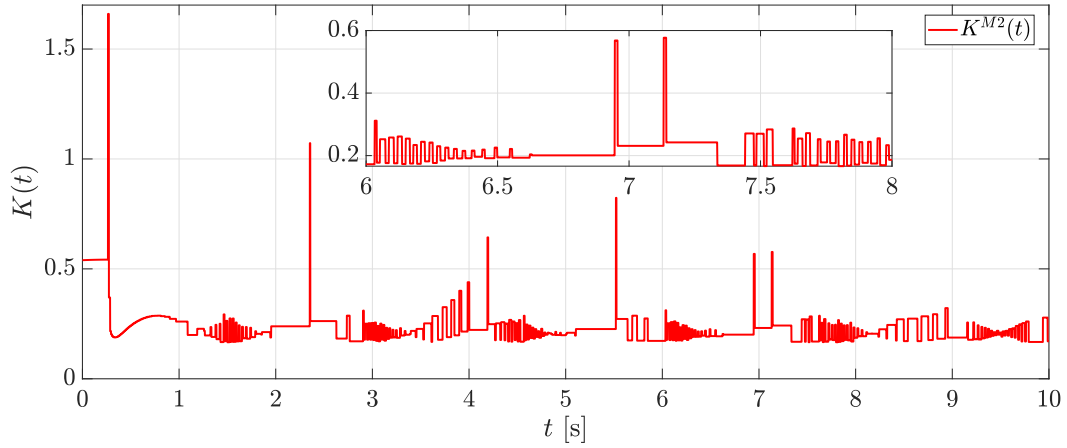


Figura 13 – Evolução temporal do ganho de chaveamento adaptativo $K^{M2}(t_k)$.

numa faixa entre 0,1 e 0,3, com picos esporádicos associados aos instantes em que a trajetória se aproxima da fronteira $|s(t_k)| \rightarrow \delta^-$. Excetuados esses picos, o ganho de regime permanente de K^{M2} é tipicamente inferior à metade do ganho de regime permanente de K^{M1} , o que explica diretamente a redução observada em E_u .

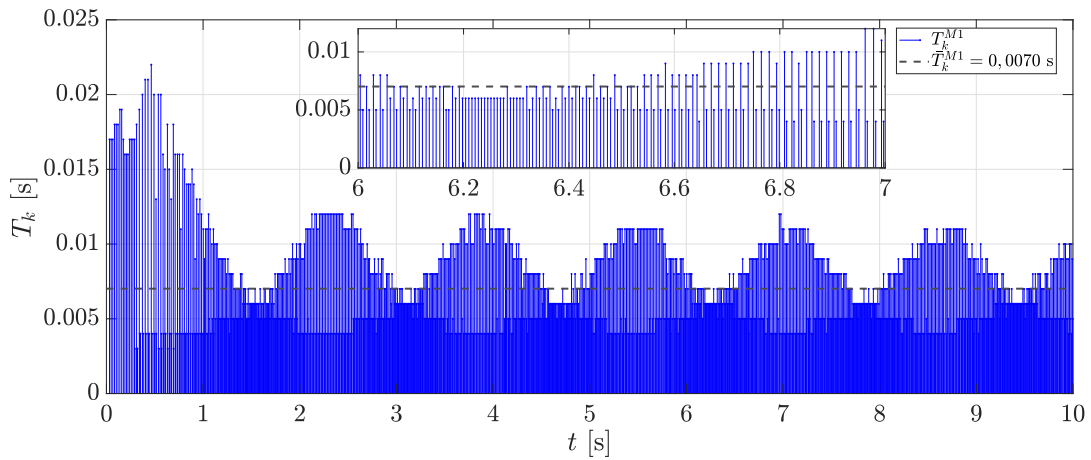


Figura 14 – Tempo entre eventos T_k^{M1} . A linha tracejada indica o valor médio, $\bar{T}_k^{M1} = 0,0070$ s.

As Figuras 14 e 15 completam essa análise pela perspectiva do número de acionamentos. O intervalo entre eventos do Método 1, T_k^{M1} , concentra-se predominantemente abaixo de 0,02 s, com valor médio $\bar{T}_k^{M1} = 0,0070$ s, e exibe um padrão quase periódico ao longo dos 10 s de simulação. Já T_k^{M2} apresenta padrão esparsos, com picos isolados que atingem 0,4 s e valor médio $\bar{T}_k^{M2} = 0,0310$ s, aproximadamente 4,4 vezes maior que o valor médio do Método 1. Isso corresponde a $N_{ev}^{M1} = 1424$ eventos contra $N_{ev}^{M2} = 323$ eventos ao longo do mesmo horizonte de simulação, uma redução de 77,3% no número de acionamentos, conforme reportado na Tabela 2. Em ambos os casos, o intervalo mínimo observado entre eventos permanece estritamente positivo, o que é consistente com a ausência do comportamento Zeno garantida pelos Teoremas 3.2 e 3.11.

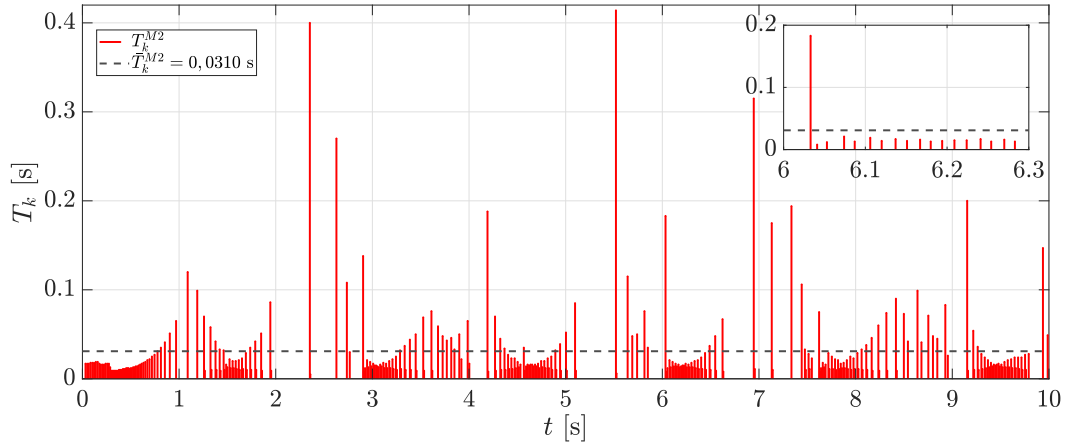


Figura 15 – Tempo entre eventos T_k^{M2} . A linha tracejada indica o valor médio, $\bar{T}_k^{M2} = 0,0310$ s.

4.2 Comparação de Desempenho entre os Métodos Propostos e a Literatura

4.2.1 Comparação com Li *et al.* (2016)

A fim de situar o desempenho dos métodos propostos frente aos métodos da literatura, esta seção compara o Método 1 e o Método 2 com o método de controle por modos deslizantes integral adaptativo de Li *et al.* (2016) (LI et al., 2016a), aplicados ao Exemplo 1 daquele artigo: um sistema *fuzzy* T–S tipo-2 intervalar com três modelos locais lineares de segunda ordem, com as matrizes:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2,0 & 0 \\ 0,6 & -1,0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1,8 & 0 \\ 0,8 & -0,7 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1,4 & 0 \\ 0,6 & -1,0 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 2,0 \\ -0,6 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 2,2 \\ -0,4 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 2,4 \\ -0,2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = [0,2 \quad -0,1]^\top, \quad (4.5)$$

cujos autovalores de malha aberta, $\{-1,0; 2,0\}$, $\{-0,7; 1,8\}$ e $\{-1,0; 1,4\}$, confirmam a instabilidade relatada em (LI et al., 2016a). O método de controle emprega uma região de modos deslizantes integral $s(t) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t) - \mathbf{G}\mathbf{K} \int_0^t \mathbf{x}(\alpha) d\alpha$, com $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}$ e ganho $\mathbf{K}$ obtido pela solução da *LMI* do Teorema 1 (LI et al., 2016a); o ganho $\mathbf{K}$ empregado aqui foi escalado por um fator $\sqrt{10}$ em relação ao ganho original, $\mathbf{K} = \sqrt{10} \begin{bmatrix} 2,6594 & -0,2734 \\ -1,3297 & 0,136 \end{bmatrix}$, necessário para evitar instabilidade numérica na integração explícita sem comprometer a estrutura da lei de controle. Os parâmetros adaptativos (q_i , ε , μ , $\hat{\gamma}_i(0)$) seguem exatamente a Seção IV do artigo original. Em ambos os cenários, o horizonte de simulação adotado é de $T = 10$ s, cinco vezes maior do que o horizonte de 2 s empregado no exemplo original de Li *et al.* (2016), de modo a permitir uma avaliação mais conservadora dos resultados obtidos para comparação.

A comparação é conduzida em dois cenários complementares, cada um respondendo a uma pergunta distinta. O primeiro reproduz exatamente as condições do Exemplo 1 (LI et al., 2016a): sem atraso e sem perturbação não casada, avaliando o desempenho de cada lei

de controle estritamente dentro do domínio para o qual os três métodos foram projetados e demonstrados. O segundo introduz atraso variante, perturbação casada e perturbação não casada, exatamente o tipo de incerteza para o qual o Método 1 e o Método 2 possuem certificação formal, mas que o trabalho de Li *et al.* (2016) não contempla em sua formulação original. Em ambos os cenários, os limiares de acionamento do Método 1 e do Método 2 foram definidos para que as regiões de modos deslizantes prático coincidisse, garantindo que qualquer diferença de desempenho entre ambos decorra exclusivamente da estrutura da lei de controle, e não de uma vantagem sobre o limite superior de cada região. Cabe destacar que a natureza adaptativa do Método 1 e do Método 2 é concebida estruturalmente para dominar perturbações casadas independentemente do cenário de teste; a perturbação casada $d(t)$ é introduzida explicitamente a partir do segundo cenário, em conjunto com a perturbação não casada e o atraso variante, de modo que os dois cenários avaliados isolam progressivamente as complexidades adicionais frente às quais os métodos propostos foram certificados.

4.2.1.1 Primeiro Cenário

Neste primeiro cenário, os três métodos operam estritamente dentro do domínio do Exemplo 1 (LI et al., 2016a): ausência de atraso, ausência de perturbação não casada e ausência de perturbação casada, restando apenas a incerteza paramétrica intrínseca ao modelo *fuzzy* T-S tipo-2 intervalar.

Tabela 4 – Comparação de métricas entre o Método 1, o Método 2 e Li *et al.* (2016) no cenário do Exemplo 1 (LI et al., 2016a): mesmo sistema e condição inicial $\mathbf{x}_0 = [0, 2 \ -0, 1]^\top$, sem atraso e sem perturbação casada e não casada.

Métrica	Método 1	Método 2	Li <i>et al.</i> (2016)
Energia do estado E_x	0,0047	0,0113	0,0065
Energia da variável deslizante E_s	0,0026	0,0095	0,0003
Energia do controle E_u	12,3994	13,6252	0,0417
Frequência de <i>chattering</i> [Hz]	247,40	56,00	774,75
Tempo de alcance t_1 [s]	0,104	9,996	N/A
Número de eventos (N_{ev})	2496	565	N/A
Tempo médio entre eventos $\bar{T}_k$ [s]	0,0040	0,0175	N/A

A Tabela 4 apresenta este primeiro cenário. Com o limite superior da região de modos deslizantes prático igual a 0,0079 para ambos os métodos propostos, a trajetória de estado para o Método 1 converge rapidamente ($t_1 = 0,104$ s), ao custo de uma frequência de *chattering* elevada (247,40 Hz), energia de controle de $E_u = 12,3994$, energia da variável deslizante $E_s = 0,0026$ e acionamento frequente, com $N_{ev} = 2496$ eventos e tempo médio entre eventos de 0,0040 s. O Método 2, apesar de operar na mesma região, apresenta frequência de *chattering* menor (56,00 Hz), energia da variável deslizante ligeiramente superior ($E_s = 0,0095$) e acionamento consideravelmente menos frequente, com $N_{ev} = 565$ eventos e tempo médio entre eventos

$\bar{T}_k = 0,0175$ s, porém converge de forma consideravelmente mais lenta, atingindo a convergência apenas próximo ao limite do horizonte de simulação ($t_1 = 9,996$ s). O método de controle de Li *et al.* (2016) emprega a estratégia de controle por modos deslizantes integral, que conduz a trajetória à região de modos deslizantes integral desde $t = 0$, sem a fase de alcance característica do modo deslizante convencional; por essa razão, o tempo de alcance t_1 , definido em função do limite superior δ da região de modos deslizantes prático do Método 1 e do Método 2, não se aplica à mesma noção de convergência empregada naquele método, e por isso não é reportado para Li *et al.* (2016) na Tabela 4. O método de Li *et al.* (2016) obtém, ainda assim, a menor energia de controle entre os três ($E_u = 0,0417$) e a menor energia da variável deslizante ($E_s = 0,0003$), livre do custo estrutural de uma certificação de robustez que, neste cenário, não é exigida, ainda que à custa da maior frequência de *chattering* (774,75 Hz), decorrente da natureza de controle orientada ao tempo adotada por Li *et al.* (2016), sem mecanismo de acionamento por eventos.

4.2.1.2 Segundo Cenário

Para avaliar a robustez de cada método frente a um cenário mais exigente, o sistema foi estendido para a classe de sistemas com atraso variante e submetido a perturbação não casada, com condição inicial dada pelo histórico de estado $\mathbf{x}(\theta) = [0,2 \ -0,1]^\top$ para $\theta \in [-\tau_M, 0]$. O atraso variante no tempo é dado por $\tau(t) \in [0, \tau_M]$ para todo $t \geq 0$, com $\tau_M = 0,2$ s, de modo que o estado do sistema em cada instante t é descrito pelo segmento de trajetória de estado $\mathbf{x}_t : \theta \mapsto \mathbf{x}(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau_M, 0]$. Adotam-se matrizes de atraso $\mathbf{A}_{d_i} = 0,1 \mathbf{A}_i$, matrizes $\mathbf{B}_{v_1} = \mathbf{B}_{v_3} = [0 \ 0,03]^\top$ e $\mathbf{B}_{v_2} = [0 \ 0,05]^\top$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$, além de perturbação casada $d(t) = 0,1 \sin(2t) + 0,01|y(t)|$ e perturbação não casada $v(t) = 0,1 \sin(2,3t + 0,5)$. O projeto de controle para o Método 1 e o Método 2 foi mantido sob o coeficiente de passividade robusta $\eta = 0,3$, certificando formalmente a robustez a esse cenário exato. Em contrapartida, a estratégia de Li *et al.* (2016), por não contemplar atrasos de tempo ou perturbações não casadas em sua formulação original, foi simulada sob o mesmo cenário para avaliar o seu comportamento fora do domínio de projeto.

Tabela 5 – Comparação de métricas entre o Método 1, o Método 2 e Li *et al.* (2016), sob a adição do atraso variante e perturbações casada e não casada.

Métrica	Método 1	Método 2	Li <i>et al.</i> (2016)
Energia do estado E_x	0,0083	0,0083	DIVERGIU
Energia da variável deslizante E_s	0,0076	0,0075	DIVERGIU
Energia do controle E_u	0,4289	0,2057	DIVERGIU
Frequência de <i>chattering</i> [Hz]	53,50	26,50	DIVERGIU
Tempo de alcance t_1 [s]	0,569	0,569	DIVERGIU
Número de eventos (N_{ev})	585	303	N/A
Tempo médio entre eventos $\bar{T}_k$ [s]	0,0171	0,0325	N/A

Os resultados da Tabela 5 revelam duas conclusões principais, cada uma sustentando um

argumento distinto da tese. A primeira diz respeito à comparação entre o Método 1 e o Método 2: mantendo a mesma região de modos deslizantes prático, o Método 2 reduz a energia de controle em 52,0% ($E_u = 0,2057$ do Método 2, em comparação a $E_u = 0,4289$ do Método 1), o número de eventos em 48,2% ($N_{ev} = 303$ eventos do Método 2, em comparação a $N_{ev} = 585$ eventos do Método 1) e a frequência de *chattering* em 50,5% (26,50 Hz do Método 2, em comparação a 53,50 Hz do Método 1), refletindo-se em um tempo médio entre eventos quase duas vezes maior ($\bar{T}_k = 0,0325$ s do Método 2, em comparação a $\bar{T}_k = 0,0171$ s do Método 1), enquanto preserva a mesma energia de estado E_x , uma energia da variável deslizante praticamente igual ($E_s = 0,0075$ do Método 2, em comparação a $E_s = 0,0076$ do Método 1) e o mesmo tempo de alcance $t_1 = 0,569$ s. Esse padrão reproduz, em um sistema e cenário completamente distintos daqueles da Seção 4.1, a mesma conclusão estrutural já estabelecida: a estratégia de adaptação baseada em função de barreira não compromete a precisão de convergência, mas redistribui o esforço de controle de forma significativamente mais eficiente.

A segunda conclusão decorre da exposição do controlador de Li *et al.* (2016) ao cenário com atraso e perturbação não casada. O trabalho de (LI et al., 2016a) certifica a estabilidade apenas frente à incerteza paramétrica intrínseca ao modelo fuzzy T–S tipo-2 intervalar, sem qualquer termo na lei de controle ou na análise de Lyapunov que trate atrasos ou perturbações não casadas. Ao ser simulado nesse cenário sem modificações de projeto, o estado diverge, tornando todas as métricas, incluindo E_x , E_s e E_u , indefinidas. Esse resultado não deve ser lido como uma falha do método de Li *et al.* (2016) dentro do escopo para o qual foi formulado, mas sim como evidência direta de que os métodos propostos nesta tese possuem valor prático mensurável: exatamente no cenário para o qual essa certificação foi construída, as estratégias propostas preservam a estabilidade e a convergência rápida, ao passo que uma lei de controle sem essa garantia estrutural perde a estabilidade sob as mesmas complexidades.

As duas avaliações, tomadas em conjunto, evidenciam a natureza complementar da contribuição desta tese frente à literatura. No primeiro cenário, a ausência de atraso variante, de perturbação casada e de perturbação não casada permite que o método de Li *et al.* (2016) opere com esforço de controle reduzido, uma vez que sua lei não paga o custo estrutural de uma certificação de robustez que, naquele cenário, não é exigida. No segundo cenário, esse mesmo custo estrutural revela seu propósito, pois os métodos propostos preservam a estabilidade quando o sistema é submetido a atraso e perturbações casada e não casada não contemplados por Li *et al.* (2016). A comparação não sustenta, portanto, uma afirmação genérica de superioridade em todas as condições, mas uma conclusão mais precisa e teoricamente sólida: a garantia formal de robustez proposta nesta tese apresenta um custo mensurável no primeiro cenário e um benefício decisivo no segundo, de modo que a escolha entre as abordagens deve ser orientada pela presença ou ausência, na aplicação real, das complexidades para as quais essa garantia foi projetada.

4.2.2 Comparação com Su *et al.* (2019)

Como segunda referência de comparação com a literatura, esta seção compara o Método 1 e o Método 2 com o método de controle por modos deslizantes acionador por eventos de Su *et al.* (2019) (SU *et al.*, 2019), aplicado ao sistema *fuzzy* T–S com dois sistemas locais lineares de segunda ordem daquele artigo, com as matrizes:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1,2 & 0,3 \\ 1,0 & -0,8 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,5 \\ -1,2 & -0,4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

com ganhos de perturbação casada $C_1 = 1,6$ e $C_2 = 2,0$ associados a $f(t) = 0,5e^{-t} \sin(t)$, e condição inicial dada pelo histórico de estado $\mathbf{x}(\theta) = [-0,5 \ -0,4]^\top$ para $\theta \in [-h_M \Delta t, 0]$. O método de controle de Su *et al.* (2019) emprega a variável deslizante $s(t) = \sum_i f_i(\theta(t)) [G_i, 1] z_1(t_k)$, com $G_1 = 0,9733$ e $G_2 = -1,2538$, e uma lei de controle definida por partes, com parâmetro de projeto $\phi = 0,005$. Diferentemente de Li *et al.* (2016), o controlador de Su *et al.* (2019) possui mecanismo próprio de acionamento por eventos, definido pela condição:

$$[z_1(t_k + nT) - z_1(t_k)]^\top W_1 [z_1(t_k + nT) - z_1(t_k)] > \bar{\delta} z_1^\top(t_k) W_2 z_1(t_k), \quad (4.7)$$

com $W_1 = 6,2 \times 10^{-3}$, $W_2 = 14,373 \times 10^{-4}$ e $\bar{\delta} = 0,8$; o período de integração, não explicitado naquele artigo, foi definido por $\Delta t = 0,001$ s adotado nas simulações desta tese. O sistema está sujeito a atraso induzido pela rede, representado pelo segmento de trajetória de estado $\mathbf{x}_t : \theta \mapsto \mathbf{x}(t + \theta)$, $\theta \in [-h_M \Delta t, 0]$, com atraso pontual $h(t)\Delta t \in [h_m \Delta t, h_M \Delta t]$ para todo $t \geq 0$, onde $h(t) \in [h_m, h_M] = [1, 3]$ é o número de períodos de amostragem decorridos, de modo que $h(t)\Delta t \in [0,001, 0,003]$ s. Como o mecanismo de Su *et al.* (2019) já incorpora atraso e acionamento por eventos em sua formulação original, esses dois elementos são mantidos comuns aos três métodos em ambos os cenários avaliados; a única variável isolada entre eles é a presença de perturbação não casada, certificada via passividade robusta apenas para o Método 1 e o Método 2. O horizonte de simulação adotado em ambos os cenários é de $T = 50$ s, o mesmo empregado no exemplo numérico do artigo original de Su *et al.* (2019) para demonstrar a convergência de seu método.

4.2.2.1 Primeiro Cenário

Neste primeiro cenário, os três métodos operam sob o mesmo atraso de rede $h(t)$ e o mesmo mecanismo de acionamento por eventos, na presença da perturbação casada $f(t)$ já definida no sistema original de Su *et al.* (2019), e sem perturbação não casada.

A Tabela 6 mostra que, para o Método 1 e o Método 2, a trajetória de estados alcança a região de modos deslizantes prático em menos de um segundo ($t_1 = 0,649$ s), enquanto, para o controlador de Su *et al.* (2019), esse alcance ocorre apenas em $t_1 = 11,535$ s, quase dezoito vezes mais lento. Essa diferença decorre diretamente da frequência de acionamento resultante em cada método: com apenas 14 eventos ao longo dos 50 s de simulação e tempo médio entre

Tabela 6 – Comparação de métricas entre o Método 1, o Método 2 e Su *et al.* (2019) no primeiro cenário, com atraso de rede e acionamento por eventos comuns aos três métodos e ausência de perturbação não casada.

Métrica	Método 1	Método 2	Su <i>et al.</i> (2019)
Energia do estado E_x	1,0264	1,0071	0,3509
Energia da variável deslizante E_s	0,1242	0,1246	0,2697
Energia do controle E_u	22,1652	0,3813	0,0102
Frequência de <i>chattering</i> [Hz]	121,52	11,00	0,08
Tempo de alcance t_1 [s]	0,649	0,649	11,535
Número de eventos (N_{ev})	6172	652	14
Tempo médio entre eventos $\bar{T}_k$ [s]	0,0081	0,0767	1,2607

eventos $\bar{T}_k = 1,2607$ s, a entrada de controle de Su *et al.* (2019) é atualizada com frequência muito inferior à do Método 1 ($N_{ev} = 6172$ eventos, $\bar{T}_k = 0,0081$ s) e à do Método 2 ($N_{ev} = 652$ eventos, $\bar{T}_k = 0,0767$ s), o que explica também sua menor energia de controle ($E_u = 0,0102$) e sua menor frequência de *chattering* (0,08 Hz), ainda que à custa da maior energia da variável deslizante entre os três métodos ($E_s = 0,2697$ para Su *et al.* (2019), contra $E_s = 0,1242$ do Método 1 e $E_s = 0,1246$ do Método 2). Entre o Método 1 e o Método 2, o padrão observado nas demais comparações desta tese se repete: o Método 2 reduz a energia de controle em 98,3% ($E_u = 0,3813$ do Método 2, em comparação a $E_u = 22,1652$ do Método 1) e o número de eventos em 89,4% ($N_{ev} = 652$ eventos do Método 2, em comparação a $N_{ev} = 6172$ eventos do Método 1), refletindo-se em um tempo médio entre eventos quase dez vezes maior ($\bar{T}_k = 0,0767$ s do Método 2, em comparação a $\bar{T}_k = 0,0081$ s do Método 1), com uma redução leve de 1,9% na energia de estado ($E_x = 1,0071$ do Método 2, em comparação a $E_x = 1,0264$ do Método 1) e um aumento de 0,3% na energia da variável deslizante ($E_s = 0,1246$ do Método 2, em comparação a $E_s = 0,1242$ do Método 1), mantendo o mesmo tempo de alcance do Método 1.

4.2.2.2 Segundo Cenário

Para avaliar a robustez de cada método a um cenário mais exigente, mantendo o atraso de rede $h(t)$ e o mecanismo de acionamento por eventos do primeiro cenário, foi introduzida perturbação não casada $v(t) = 0,1 \sin(2,3t + 0,5)$, com $\mathbf{B}_{0,1} = [0 \ 0,03]^\top$ e $\mathbf{B}_{0,2} = [0 \ 0,05]^\top$, certificada via passividade robusta com coeficiente $\eta = 0,3$ apenas para o Método 1 e o Método 2. O controlador de Su *et al.* (2019), por não contemplar perturbação não casada em sua formulação original, foi simulado sob o mesmo cenário sem qualquer alteração de projeto.

A Tabela 7 confirma que, sob a perturbação não casada, a trajetória de estado para Su *et al.* (2019) alcança a região de modos deslizantes prático em $t_1 = 11,419$ s, com 46 eventos ao longo dos 50 s de simulação e tempo médio entre eventos $\bar{T}_k = 1,0904$ s, resultado consistente com o observado no primeiro cenário. Para o Método 1 e o Método 2, a trajetória de estado alcança a mesma região em $t_1 = 0,879$ s, cerca de treze vezes mais rápida do que a de Su *et al.* (2019). Entre os dois métodos propostos, o Método 2 reduz a energia de controle em 98,2%

Tabela 7 – Comparação de métricas entre o Método 1, o Método 2 e Su *et al.* (2019), sob a adição de perturbação não casada.

Métrica	Método 1	Método 2	Su <i>et al.</i> (2019)
Energia do estado E_x	0,9234	0,8924	0,3496
Energia da variável deslizante E_s	0,1723	0,1729	0,2689
Energia do controle E_u	14,2864	0,2626	0,0102
Frequência de <i>chattering</i> [Hz]	69,30	6,14	0,08
Tempo de alcance t_1 [s]	0,879	0,879	11,419
Número de eventos (N_{ev})	3531	372	46
Tempo médio entre eventos [s]	0,0141	0,1344	1,0904

($E_u = 0,2626$ do Método 2, em comparação a $E_u = 14,2864$ do Método 1), o número de eventos em 89,5% ($N_{ev} = 372$ eventos do Método 2, em comparação a $N_{ev} = 3531$ eventos do Método 1) e a frequência de *chattering* em 91,1% (6,14 Hz do Método 2, em comparação a 69,30 Hz do Método 1), refletindo-se em um tempo médio entre eventos mais de nove vezes maior ($\bar{T}_k = 0,1344$ s do Método 2, em comparação a $\bar{T}_k = 0,0141$ s do Método 1), com uma redução leve de 3,4% na energia de estado ($E_x = 0,8924$ do Método 2, em comparação a $E_x = 0,9234$ do Método 1) e uma energia da variável deslizante praticamente igual, com aumento de apenas 0,3% ($E_s = 0,1729$ do Método 2, em comparação a $E_s = 0,1723$ do Método 1), reproduzindo, mesmo sob perturbação não casada, o mesmo padrão de desempenho observado nas demais comparações desta tese. O controlador de Su *et al.* (2019), por sua vez, apresenta novamente a maior energia da variável deslizante entre os três ($E_s = 0,2689$), consistente com o padrão já observado no primeiro cenário.

O conjunto das duas comparações com a literatura, Li *et al.* (2016) e Su *et al.* (2019), evidência contribuições distintas e complementares. Frente a Li *et al.* (2016), que não emprega acionamento por eventos, a certificação de robustez a atraso e perturbações casada e não casada mostrou-se decisiva, uma vez que o controlador daquele trabalho diverge quando exposto a um cenário para o qual não foi projetado. Frente a Su *et al.* (2019), que já emprega mecanismo próprio de acionamento por eventos e permanece estável em ambos os cenários avaliados, a diferença central reside na velocidade de convergência: o Método 1 e o Método 2 atingem a região de modos deslizantes prático entre treze e dezoito vezes mais rápido, ao custo de energia de controle e frequência de acionamento mais elevadas, especialmente no caso do Método 1. O Método 2 reduz consistentemente esse custo frente ao Método 1 sem comprometer a velocidade de convergência, aproximando-se do menor esforço de controle observado em Su *et al.* (2019), sem abrir mão de uma resposta significativamente mais rápida. A comparação não sustenta, portanto, uma superioridade irrestrita dos métodos propostos em todas as métricas, mas demonstra que ambos ocupam um ponto de operação voltado à convergência rápida sob acionamento por eventos. Em contrapartida, Su *et al.* (2019) prioriza a economia de recursos de comunicação e de energia, à custa de uma resposta consideravelmente mais lenta. Assim, a

escolha entre as abordagens deve ser orientada pelo requisito de velocidade de convergência exigida.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo encerra a tese apresentando a síntese das contribuições desenvolvidas, o reconhecimento das limitações dos métodos e as diretrizes para pesquisas futuras. A Seção 5.1 retoma os resultados teóricos e numéricos em articulação com o problema de pesquisa e os dois métodos de controle propostos. A Seção 5.2 delimita o alcance do trabalho ao abordar as restrições teóricas e metodológicas assumidas. Por fim, a Seção 5.3 indica extensões que, em sua maioria, decorrem diretamente dessas limitações e, nos demais casos, dão continuidade natural aos resultados obtidos, com vistas ao seu aprofundamento teórico e à sua aplicação prática.

5.1 Conclusão

Esta tese propôs, para a classe de sistemas *fuzzy* T-S tipo-2 intervalares com atraso variante no tempo, matrizes de entrada distintas entre os modelos locais, e perturbações casada e não casada, duas estratégias de controle por modos deslizantes adaptativo com acionamento por eventos e garantias formais de passividade robusta. As contribuições desenvolvidas ao longo do trabalho podem ser sintetizadas como segue.

Estabeleceram-se, a partir de um funcional de Lyapunov–Krasovskii *fuzzy* tomado como função de armazenamento na desigualdade de passividade robusta, condições de estabilização prática e de passividade robusta na forma de *LMIs*, dependentes do atraso máximo, dos limites superiores das taxas de variação do atraso e dos graus de pertinência, e do coeficiente de passividade robusta. A factibilidade dessas condições determina a matriz da variável deslizante e certifica a passividade robusta, fornecendo as variáveis de decisão necessárias à dedução do raio da região de estabilidade prática, determinado, para o Método 1 e o Método 2, independentemente de qualquer estimativa do limite superior da perturbação casada, bem como do limite superior da região de modos deslizantes prático. Complementarmente, propôs-se um procedimento desacoplado para a certificação do atraso máximo admissível. Esse procedimento dispensa estratégias de *co-design* e, conseqüentemente, estratégias iterativas de relaxação, permitindo avaliar a robustez do sistema a um atraso superior ao atraso de projeto.

Desenvolveram-se duas leis de adaptação para o ganho de chaveamento. A primeira, baseada em crescimento monotônico, dispensa o conhecimento do limite superior da perturbação casada e força a convergência do ganho assim que a trajetória de estado atinge a região de modos deslizantes prático, com instante de alcance independente dessa estimativa. A segunda, baseada em função de barreira, flexibiliza a condição de dominância do ganho por meio de uma região de relaxação em que essa dominância não é imposta; ao permitir crescimento e decréscimo do ganho, essa lei produz uma ação de controle menos agressiva dentro da região de modos deslizantes prático, enquanto preserva a mesma independência do instante de alcance em relação

à estimativa da perturbação. Para ambas as leis, demonstrou-se a invariância positiva da região de modos deslizantes prático sob a presença simultânea de atraso variante, perturbações casada e não casada e acionamento por eventos.

Formulou-se, adicionalmente, o mecanismo de acionamento por eventos de modo a assegurar a ausência do comportamento de Zeno na sequência de instantes de acionamento, preservando a eficiência na redução do número de atualizações da entrada de controle. Derivou-se ainda, analiticamente, um limite superior para o limiar de acionamento, estabelecendo um vínculo energético explícito entre o mecanismo de acionamento e a dissipatividade em malha fechada, e assegurando, pelo mesmo coeficiente de passividade robusta, a atenuação energética do impacto da perturbação não casada sobre a saída.

Os resultados numéricos confirmaram, em múltiplos sistemas e cenários, que a lei de adaptação baseada em função de barreira, referente ao Método 2, reduz de forma consistente a energia de controle, o número de eventos e a frequência de *chattering* em relação à lei de adaptação baseada em crescimento monotônico, sem comprometer a precisão de convergência da trajetória de estado. A comparação com os métodos de Li *et al.* (2016) e Su *et al.* (2019) situou essas contribuições frente à literatura a partir de duas perspectivas complementares, cada uma isolando uma dimensão distinta da contribuição desta tese. A primeira, frente a Li *et al.* (2016), cuja formulação original não contempla atraso nem perturbação não casada, avalia o efeito das condições de estabilização prática e de passividade robusta desenvolvidas nesta tese frente a um método sem tais garantias, mostrando que essas condições asseguram a convergência da trajetória de estado no cenário estendido, quando comparadas ao método de Li *et al.* (2016), sob o qual a trajetória de estado diverge nesse mesmo cenário. A segunda, frente a Su *et al.* (2019), que já emprega acionamento por eventos e sob o qual a trajetória de estado permanece estável no mesmo cenário, avalia o desempenho frente a um método também robusto a esse cenário, revelando que a distinção recai sobre a velocidade de convergência, obtida à custa de maior energia de controle e maior frequência de acionamento; nesse compromisso entre velocidade de convergência e economia de recursos, o Método 2 se mostra a escolha mais favorável entre os métodos propostos, ao reduzir consistentemente a energia de controle e a frequência de acionamento do Método 1 sem comprometer a rapidez de convergência.

Em conjunto, os resultados teóricos e numéricos apresentados demonstram que os métodos de controle propostos permitem conciliar robustez a atraso e a perturbações casada e não casada, precisão de convergência e economia de recursos computacionais e energéticos, respondendo ao problema de pesquisa que motivou este trabalho.

5.2 Limitações do Trabalho

Apesar dos resultados obtidos, algumas limitações devem ser reconhecidas.

As condições de estabilização prática e de passividade robusta desenvolvidas empregam

um funcional de Lyapunov–Krasovskii *fuzzy* em que a matrizes $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}(t))$, $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t))$ são dependentes dos graus de pertinência, ao passo que a matriz $\mathbf{P}$ foi mantida única para todos os sistemas locais lineares, escolha que assegura uma única região de modos deslizantes prático, comum a todos os sistemas locais, em vez de uma região distinta para cada uma; essa restrição pode ser relaxada em trabalhos futuros, ao custo de se admitir regiões de modos deslizantes prático dependentes dos graus de pertinência. Uma segunda fonte de conservadorismo é o emprego da desigualdade integral de Jensen no majoramento dos termos integrais do funcional, também passível de relaxamento por meio de majorantes menos conservadores.

As duas leis adaptativas propostas pressupõem o conhecimento de um limite superior para a perturbação não casada. Adicionalmente, na estratégia baseada em função de barreira, o ganho de chaveamento precisa dominar efetivamente o limite superior da perturbação casada fora da região de não dominância imposta, ainda que o valor desse limite não precise ser conhecido a priori para o projeto; essa exigência é mais forte do que a imposta pela estratégia baseada em crescimento monotônico, cuja lei de adaptação exige apenas que o parâmetro $\bar{\varphi}$ domine a estimativa do limite superior da perturbação, sem definir uma região de relaxação na qual essa dominância deixe de ser imposta.

O mecanismo de acionamento por eventos desenvolvido nesta tese pressupõe a monitoração contínua do estado, para verificar a condição de acionamento a cada instante. Embora essa formulação reduza significativamente o número de atualizações da entrada de controle, ela não elimina a necessidade de processamento contínuo para a avaliação da condição de acionamento, o que pode representar uma limitação em plataformas embarcadas com restrições severas de energia ou de capacidade computacional.

A validação apresentada é inteiramente numérica, restrita a sistemas com número reduzido de regras e de estados, sem verificação experimental em plataforma física, o que deixa em aberto o efeito de não linearidades de modelagem, ruído de sensor e limitações de hardware não capturadas pelo modelo *fuzzy* T–S tipo-2 intervalar. Por fim, as funções de pertinência inferiores e superiores foram admitidas como conhecidas e fixas ao longo de todo o desenvolvimento, hipótese razoável para representar a incerteza paramétrica considerada nesta tese, mas que não contempla cenários em que a fronteira da região de incerteza se altera ao longo da evolução temporal do sistema, por exemplo em razão de degradação gradual de componentes ou de mudanças de regime não previstas no projeto original.

5.3 Trabalhos Futuros

Os resultados obtidos nesta tese abrem diversas perspectivas de investigação. As principais direções de trabalho futuro são elencadas a seguir.

1. **Generalização da condição de passividade robusta para funções de suprimento QSR mais ricas.** A condição de passividade robusta empregada nesta tese pode ser vista

como um caso particular da dissipatividade QSR generalizada. A extensão para funções de suprimento QSR mais gerais permitiria critérios de projeto mais flexíveis e, potencialmente, relações analíticas mais completas entre os parâmetros de projeto e o comportamento do sistema na região de modos deslizantes prático.

2. **Formalização analítica da relação entre o coeficiente de passividade robusta e os parâmetros do *chattering*.** Embora os resultados numéricos evidenciem que o coeficiente de passividade robusta está associado à amplitude e à frequência do *chattering*, essa relação não foi caracterizada analiticamente nesta tese. Tal caracterização requer abordagens baseadas em função descritiva ou em análise de sistemas de Filippov, não contempladas nesta tese.
3. **Extensão a sistemas *fuzzy* T–S tipo-2 intervalares com consequentes polinomiais.** A extensão da abordagem proposta para modelos *fuzzy* T–S tipo-2 intervalares com consequentes polinomiais, com certificação de estabilidade e passividade robusta via soma de quadrados, ampliaria a classe de sistemas não lineares representáveis com maior fidelidade, reduzindo o conservadorismo associado à aproximação puramente linear dos modelos locais.
4. **Extensão a sistemas com atraso na entrada de controle.** A formulação atual considera atraso exclusivamente no estado. A extensão para sistemas com atraso simultâneo no estado e na entrada de controle, cenário comum em sistemas em rede com assimetria de canais, requereria condições adicionais para garantir a invariância positiva da região de modos deslizantes e da região de estabilidade prática.
5. **Relaxação das exigências das leis de adaptação.** Para o Método 1, investigações de leis de adaptação que relaxem a exigência de dominância de $\bar{\phi}$ sobre a estimativa do limite superior da perturbação casada visam reduzir o conservadorismo da estratégia. Para o Método 2, o emprego de funções de barreira assimétricas para otimizar o desempenho sob perturbações assimétricas e a relaxação da dominância do ganho de chaveamento sobre o limite superior desconhecido da perturbação surgem como direções relevantes para cenários de incerteza mais severa.
6. **Funcionais de Lyapunov–Krasovskii *fuzzy* menos conservadores.** Os funcionais de Lyapunov–Krasovskii *fuzzy* empregados nesta tese recorrem à desigualdade de Jensen no tratamento dos termos integrais duplos, o que introduz um grau de conservadorismo conhecido na literatura de sistemas com atraso. A investigação de desigualdades integrais menos conservadoras, como as desigualdades de Wirtinger, a desigualdade de Bessel–Legendre de ordem superior, ou abordagens baseadas em matrizes livres, combinadas com funcionais dependentes dos graus de pertinência, poderia reduzir o conservadorismo das condições LMI resultantes e ampliar a faixa admissível do atraso máximo e dos parâmetros de projeto.

7. **Implementação em plataformas embarcadas.** A validação experimental dos métodos propostos em sistemas físicos constitui um passo natural para a avaliação do desempenho de controle. A eficiência computacional do acionamento por eventos torna os métodos propostos especialmente adequados para implementações com restrições de processamento, de comunicação e de energia.
8. **Estratégia de monitoração não contínua.** O mecanismo de acionamento por eventos desenvolvido nesta tese pressupõe a monitoração contínua do estado para a verificação da condição de acionamento. A proposição de uma estratégia de monitoração não contínua eliminaria essa exigência computacional e ampliaria a aplicabilidade dos métodos propostos a plataformas embarcadas com restrições severas de energia e de capacidade de processamento.

REFERÊNCIAS

- ARRIFANO, N. d. S. D. et al. Fuzzy stabilization of power systems in a co-generation scheme subject to random abrupt variations of operating conditions. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, IEEE, v. 15, n. 2, p. 384–393, 2007.
- ÅSTRÖM, K. J.; BERNHARDSSON, B. Comparison of periodic and event based sampling for first-order stochastic systems. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 32, n. 2, p. 5006–5011, 1999.
- ÅSTRÖM, K. J.; BERNHARDSSON, B. Comparison of riemann and lebesgue sampling for first order stochastic systems. In: IEEE. *41st IEEE Conference on Decision and Control*, 2002. [S.l.], 2002. v. 2, p. 2011–2016.
- BANDYOPADHYAY, B.; BEHERA, A. K. Event-triggered sliding mode control. *Studies in Systems, Decision and Control*, Springer, v. 139, p. 6837–6847, 2018.
- BAO, J.; LEE, P. L. *Process Control: The Passive Systems Approach*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.
- BARTOLINI, G.; FERRARA, A.; USAI, E. Chattering avoidance by second-order sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 43, n. 2, p. 241–246, 2002.
- BEHERA, A. K. Event-triggered sliding mode control via digital redesign. *Automatica*, Elsevier, v. 177, p. 112349, 2025.
- BEHERA, A. K.; BANDYOPADHYAY, B. Event-triggered sliding mode control for a class of nonlinear systems. *international Journal of control*, Taylor & Francis, v. 89, n. 9, p. 1916–1931, 2016.
- BEHERA, A. K.; BANDYOPADHYAY, B. Robust sliding mode control: An event-triggering approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, IEEE, v. 64, n. 2, p. 146–150, 2016.
- BEHERA, A. K. et al. A survey on event-triggered sliding mode control. *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Industrial Electronics*, IEEE, v. 2, n. 3, p. 206–217, 2021.
- BEHERA, A. K. et al. Event-triggered sliding mode control for robust stabilization of linear multivariable systems. In: *Recent Advances in Sliding Modes: From Control to Intelligent Mechatronics*. [S.l.]: Springer, 2015. p. 155–175.
- BENJELLOUN, K.; BOUKAS, E.-K. Independent delay sufficient conditions for robust stability of uncertain linear time-delay systems with jumps. In: IEEE. *1997 American Control Conference*. [S.l.], 1997. v. 6, p. 3814–3815.
- BERNAL, M. et al. *Analysis and Synthesis of Nonlinear Control Systems*. [S.l.]: Springer, 2022. v. 408.
- BOIKO, I. *Discontinuous Control Systems: Frequency-Domain Analysis and Design*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008.

- BOIKO, I.; FRIDMAN, L.; IRIARTE, R. Analysis of chattering in continuous sliding mode control. In: *Proceedings of the 2005 American Control Conference*. [S.l.]: IEEE, 2005. v. 4, p. 2439–2444.
- BOIKO, I. et al. Analysis of chattering in systems with second-order sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic control*, IEEE, v. 52, n. 11, p. 2085–2102, 2007.
- BOO, J.; CHWA, D. Integral sliding mode control-based robust bidirectional platoon control of vehicles with the unknown acceleration and mismatched disturbance. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, IEEE, v. 24, n. 10, p. 10881–10894, 2023.
- BOYD, S. et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. [S.l.]: SIAM, 1994.
- BROGLIATO, B. et al. Dissipative systems analysis and control. *Theory and Applications*, Springer, v. 2, p. 2–5, 2007.
- CHE, Z. et al. Passivity analysis and disturbance observer-based adaptive integral sliding mode control for uncertain singularly perturbed systems with input non-linearity. *IET Control Theory & Applications*, Wiley Online Library, v. 13, n. 18, p. 3174–3183, 2019.
- CHEN, H. et al. Probabilistic event-triggered policy for extended dissipative finite-time control of mjs under cyber-attacks and actuator failures. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 68, n. 12, p. 7803–7810, 2023.
- CHEN, J.; PARK, J. H.; XU, S. Stability analysis of continuous-time systems with time-varying delay using new lyapunov–krasovskii functionals. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, v. 355, n. 13, p. 5957–5967, 2018.
- CHEN, X.; TAN, W. W. Tracking control of surface vessels via fault-tolerant adaptive backstepping interval type-2 fuzzy control. *Ocean Engineering*, Elsevier, v. 70, p. 97–109, 2013.
- CHITOUR, Y.; MASON, P.; SIGALOTTI, M. Switched linear systems: Definitions and basic facts. In: *Dynamics and Stability of Continuous-Time Switched Linear Systems*. [S.l.]: Springer, 2025. p. 1–24.
- CHOPRA, N. et al. Passivity-based control of robots: Theory and examples from the literature. *IEEE Control Systems Magazine*, IEEE, v. 42, n. 2, p. 63–73, 2022.
- CRUZ-ZAVALA, E.; MORENO, J. A. Homogeneous high order sliding mode design: a lyapunov approach. *Automatica*, Elsevier, v. 80, p. 232–238, 2017.
- DELMOTTE, F.; GUERRA, T.-M.; KSANTINI, M. Continuous takagi–sugeno’s models: reduction of the number of lmi conditions in various fuzzy control design technics. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, IEEE, v. 15, n. 3, p. 426–438, 2007.
- DONG, G. et al. Event-triggered obstacle avoidance control for autonomous surface vehicles with actuator faults. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 34, n. 13, p. 8692–8708, 2024.
- DONKERS, M. C. F.; HEEMELS, W. P. M. H. Output-based event-triggered control with guaranteed L_∞ -gain and improved and decentralized event-triggering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 57, n. 6, p. 1362–1376, 2012.

- DOU, Y. et al. A review of event-triggered consensus control in multi-agent systems. *Journal of Control and Decision*, Taylor & Francis, v. 12, n. 1, p. 1–23, 2025.
- DRAŽENOVIĆ, B. The invariance conditions in variable structure systems. *Automatica*, Elsevier, v. 5, n. 3, p. 287–295, 1969.
- EDWARDS, C.; SPURGEON, S. K. *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. [S.l.]: Crc Press, 1998.
- EFIMOV, D. et al. Delayed sliding mode control. *Automatica*, Elsevier, v. 64, p. 37–43, 2016.
- FAN, L.; ZHU, Q.; ZHENG, W. X. Stability analysis of switched stochastic nonlinear systems with state-dependent delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 69, n. 4, p. 2567–2574, 2023.
- FAN, X.; WANG, Z. Event-triggered sliding mode control for singular systems with disturbance. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, Elsevier, v. 40, p. 101011, 2021.
- FARIA, F. A. et al. Less conservative state feedback design with switched controllers for ts fuzzy systems. In: SPRINGER. *APCA International Conference on Automatic Control and Soft Computing*. [S.l.], 2022. p. 251–261.
- FENG, J.; HAO, F. Event-triggered sliding mode control for time-delay uncertain systems. *Asian Journal of Control*, Wiley Online Library, v. 23, n. 3, p. 1407–1418, 2021.
- FENG, Z.; YANG, Y.; LAM, H.-K. New results on sliding mode control for polynomial fuzzy singular systems with time-varying delay. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 33, n. 4, p. 2779–2795, 2023.
- FENG, Z.; ZHANG, H.; LAM, H.-K. New results on dissipative control for a class of singular takagi–sugeno fuzzy systems with time delay. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, IEEE, v. 30, n. 7, p. 2466–2475, 2021.
- FERRARA, A.; INCREMONA, G. P.; VECCHIO, C. Adaptive multiple-surface sliding mode control of nonholonomic systems with matched and unmatched uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 69, n. 1, p. 614–621, 2023.
- FILIPPOV, A. Existence and general properties of solutions of discontinuous systems. In: *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. [S.l.]: Springer, 1988. p. 48–122.
- FILIPPOV, A. F. Classical solutions of differential equations with multi-valued right-hand side. *SIAM Journal on Control*, SIAM, v. 5, n. 4, p. 609–621, 1967.
- FRIDMAN, E. Introduction to time-delay systems. *Analysis and Control*. Birkhäuser, Springer, v. 75, 2014.
- FRIDMAN, E.; ORLOV, Y. On stability of linear parabolic distributed parameter systems with time-varying delays. In: IEEE. *2007 46th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.], 2007. p. 1597–1602.
- FRIDMAN, E.; SEURET, A.; RICHARD, J.-P. Robust sampled-data stabilization of linear systems: an input delay approach. *Automatica*, Elsevier, v. 40, n. 8, p. 1441–1446, 2004.

- FRIDMAN, E.; SHAKED, U. Delay-dependent stability and h_∞ control: constant and time-varying delays. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 76, n. 1, p. 48–60, 2003.
- FRIDMAN, L. The problem of chattering: An averaging approach. In: *Variable Structure Systems, Sliding Mode and Nonlinear Control*. [S.l.]: Springer, 2007. p. 363–386.
- FRIDMAN, L. M. Chattering in systems with inertial sensors: The singularly perturbed approach. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 34, n. 6, p. 599–604, 2001.
- FRIDMAN, L. M. An averaging approach to chattering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 46, n. 8, p. 1260–1265, 2002.
- FU, A.; MAZO, M. Periodic asynchronous event-triggered control. In: *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 1370–1375.
- FUJIMOTO, K. et al. A passivity-based sliding mode controller for a class of electro-mechanical systems. *IEEE Control Systems Letters*, IEEE, v. 6, p. 1208–1213, 2021.
- GAO, Y.; SUN, B.; LU, G. Passivity-based integral sliding-mode control of uncertain singularly perturbed systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, IEEE, v. 58, n. 6, p. 386–390, 2011.
- GASSARA, H. et al. Stability analysis and memory control design of polynomial fuzzy systems with time delay via polynomial lyapunov-krasovskii functional. *International Journal of Control, Automation and Systems*, Springer, v. 16, n. 4, p. 2011–2020, 2018.
- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P.; BOLZERN, P. Dynamic output feedback control of switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 53, n. 3, p. 720–733, 2008.
- GHODRAT, M.; MARQUEZ, H. J. A new lyapunov-based event-triggered control of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 68, n. 4, p. 2599–2606, 2022.
- GIRARD, A. Dynamic triggering mechanisms for event-triggered control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 60, n. 7, p. 1992–1997, 2014.
- GOEBEL, R.; SANFELICE, R. G.; TEEL, A. R. *Hybrid Dynamical Systems: Modeling, Stability, and Robustness*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2012.
- GU, K.; CHEN, J.; KHARITONOV, V. L. *Stability of Time-Delay Systems*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2003.
- HAMDAN, I.; YOUSSEF, M. M.; NOURELDEEN, O. Influence of interval type-2 fuzzy control approach for a grid-interconnected doubly-fed induction generator driven by wind energy turbines in variable-speed system. *SN Applied Sciences*, Springer, v. 5, n. 1, p. 25, 2023.
- HEEMELS, W.; JOHANSSON, K. H.; TABUADA, P. Event-triggered and self-triggered control. In: *Encyclopedia of Systems and Control*. [S.l.]: Springer, 2021. p. 724–730.
- HEEMELS, W. H.; DONKERS, M.; TEEL, A. R. Periodic event-triggered control for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 58, n. 4, p. 847–861, 2012.
- HEEMELS, W. P.; JOHANSSON, K. H.; TABUADA, P. An introduction to event-triggered and self-triggered control. In: *IEEE. 2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. [S.l.], 2012. p. 3270–3285.

- HILL, D.; MOYLAN, P. The stability of nonlinear dissipative systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 21, n. 5, p. 708–711, 2003.
- HILL, D. J.; LIU, T. Dissipativity, stability, and connections: Progress in complexity. *IEEE Control Systems Magazine*, IEEE, v. 42, n. 2, p. 88–106, 2022.
- HILL, D. J.; MOYLAN, P. J. The stability of nonlinear dissipative systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 21, n. 5, p. 708–711, 1976.
- HILL, D. J.; MOYLAN, P. J. Dissipative dynamical systems: Basic input-output and state properties. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, v. 309, n. 5, p. 327–357, 1980.
- HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. *Matrix Analysis*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012.
- HUANG, Y.-J.; KUO, T.-C.; CHANG, S.-H. Adaptive sliding-mode control for nonlinear systems with uncertain parameters. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, IEEE, v. 38, n. 2, p. 534–539, 2008.
- HUERTA, H.; LOUKIANOV, A. G.; CAÑEDO, J. M. Passivity sliding mode control of large-scale power systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, IEEE, v. 27, n. 3, p. 1219–1227, 2018.
- INCREMENTONA, G. P.; CUCUZZELLA, M.; FERRARA, A. Adaptive suboptimal second-order sliding mode control for microgrids. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 89, n. 9, p. 1849–1867, 2016.
- IOANNOU, P. A.; SUN, J. *Robust Adaptive Control*. [S.l.]: PTR Prentice-Hall Upper Saddle River, NJ, 1996. v. 1.
- ISIDORI, A. *Nonlinear Control Systems*. [S.l.]: Springer, 1985. v. 72. (Lecture Notes in Control and Information Sciences, v. 72).
- ISIDORI, A. *Nonlinear Control Systems II*. [S.l.]: Springer, 1999.
- JAHANSHAHI, H. et al. A review on design and implementation of type-2 fuzzy controllers. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Wiley Online Library, v. 49, n. 3, p. 1814–1835, 2026.
- JENSEN, J. L. W. V. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Mathematica*, Springer, v. 30, p. 175–193, 1906.
- JOHANSSON, K. H.; BARABANOV, A. E.; ÅSTRÖM, K. J. Limit cycles with chattering in relay feedback systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 47, n. 9, p. 1414–1423, 2002.
- JOHN, R. I.; MENDEL, J. M. Fuzzy logic, type-2 and uncertainty. In: *Granular, Fuzzy, and Soft Computing*. [S.l.]: Springer, 2023. p. 743–754.
- KAVIKUMAR, R. et al. Sliding mode control for it2 fuzzy semi-Markov systems with faults and disturbances. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 420, p. 126907, 2022.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. 3rd. ed. [S.l.]: Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002. v. 115.

- KHAN, R. F. A. et al. Singular perturbation-based adaptive integral sliding mode control for flexible joint robots. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, IEEE, v. 70, n. 10, p. 10516–10525, 2022.
- KHANESAR, M. A. et al. Adaptive indirect fuzzy sliding mode controller for networked control systems subject to time-varying network-induced time delay. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, IEEE, v. 23, n. 1, p. 205–214, 2014.
- KHARITONOV, V. *Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- KRASOVSKII, N. N. Stability of motion. *Stanford University Press*, 1963.
- LAKSHMIKANTHAM, V.; LEELA, S.; MARTYNYUK, A. A. *Practical Stability of Nonlinear Systems*. Singapore: World Scientific, 1990.
- LAM, H.-K.; LEUNG, F. H.-F. *Stability Analysis of Fuzzy-Model-Based Control Systems*. [S.l.]: Springer, 2011. v. 264.
- LAM, H.-K. et al. Control design for interval type-2 fuzzy systems under imperfect premise matching. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, IEEE, v. 61, n. 2, p. 956–968, 2013.
- LEE, D. et al. Relaxed conditions for parameterized linear matrix inequality in the form of double fuzzy summation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, IEEE, v. 32, n. 3, p. 1608–1612, 2023.
- LEE, H.; UTKIN, V. I. Chattering suppression methods in sliding mode control systems. *Annual Reviews in Control*, Elsevier, v. 31, n. 2, p. 179–188, 2007.
- LEVANT, A. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 58, n. 6, p. 1247–1263, 1993.
- LEVANT, A. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 76, n. 9-10, p. 924–941, 2003.
- LEVANT, A. Chattering analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 55, n. 6, p. 1380–1389, 2010.
- LI, H. et al. Adaptive sliding mode control for interval type-2 fuzzy systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, IEEE, v. 46, n. 12, p. 1654–1663, 2016.
- LI, H. et al. *Analysis and Synthesis for Interval Type-2 Fuzzy-Model-Based Systems*. Cham: Springer, 2016.
- LI, T.-F.; FU, J. Event-triggered control of switched linear systems. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, v. 354, n. 15, p. 6451–6462, 2017.
- LIBERZON, D. *Switching in Systems and Control*. Boston: Birkhäuser, 2003. (Systems & Control: Foundations & Applications).
- LIBERZON, D. Switched systems. In: *Handbook of Networked and Embedded Control Systems*. [S.l.]: Springer, 2005. p. 559–574.
- LIBERZON, D.; HESPAHHA, J. P.; MORSE, A. S. Stability of switched systems: a lie-algebraic condition. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 37, n. 3, p. 117–122, 1999.

- LIU, F. et al. Dissipativity analysis for singular interval type-2 fuzzy markov jump systems with actuator faults and time-vary delays. *International Journal of Fuzzy Systems*, Springer, v. 27, n. 5, p. 1438–1452, 2025.
- LIU, F. et al. Extended dissipative analysis of integral sliding mode control for singular interval type-2 fuzzy systems with time delay. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 493, p. 129221, 2025.
- LIU, J. et al. Sliding mode control for IT2 fuzzy semi-Markov jump systems with faults and disturbances. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 425, p. 127028, 2022.
- LIU, J. et al. Event-triggering dissipative control of switched stochastic systems via sliding mode. *Automatica*, Elsevier, v. 103, p. 261–273, 2019.
- LIU, M.; TZOUNAS, G.; MILANO, F. A model-independent delay compensation method for power systems. In: IEEE. *2019 IEEE Milan PowerTech*. [S.l.], 2019. p. 1–6.
- LOZANO, R. et al. Dissipative systems. *Dissipative Systems Analysis and Control: Theory and Applications*, Springer, p. 111–166, 2000.
- LUK'YANOV, A. G.; UTKIN, V. Methods for reduction of equations of dynamic systems to a regular form. *Avtomatika i Telemekhanika*, Russian Academy of Sciences, n. 4, p. 5–13, 1981.
- LUNZE, J.; LEHMANN, D. A state-feedback approach to event-based control. *Automatica*, Elsevier, v. 46, n. 1, p. 211–215, 2010.
- LV, L. et al. Interval type-2 ts fuzzy robust anti-lock braking control for electro-mechanical braking system considering road uncertainty and input delay. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, IEEE, v. 26, n. 5, p. 7006–7020, 2025.
- MA, W.; ZHANG, B. Periodic time-triggered hybrid control for dc–dc converter based on switched affine system model. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, IEEE, v. 70, n. 1, p. 311–321, 2022.
- MADEIRA, D. *Contributions to passivity theory and dissipative control synthesis*. Tese (Doutorado) — Dissertation, Darmstadt, Technische Universität Darmstadt, 2018.
- MADEIRA, D. d. S. Necessary and sufficient dissipativity-based conditions for feedback stabilization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 67, n. 4, p. 2100–2107, 2021.
- MADEIRA, D. d. S.; MACHADO, G. F. Recurrent dissipativity-based inequalities for controller design. *IFAC-PapersOnLine*, Elsevier, v. 58, n. 21, p. 19–24, 2024.
- MAGOSSI, R. F. et al. State feedback design for ts fuzzy systems subject to persistent bounded disturbances. In: IEEE. *2022 IEEE 61st Conference on Decision and Control (CDC)*. [S.l.], 2022. p. 5601–5607.
- MARTÍNEZ-FUENTES, C. A.; PÉREZ-VENTURA, U.; FRIDMAN, L. Chattering analysis for lipschitz continuous sliding-mode controllers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 31, n. 9, p. 3779–3794, 2021.
- MAZO, M.; CAO, M. Asynchronous decentralized event-triggered control. *Automatica*, Elsevier, v. 50, n. 12, p. 3197–3203, 2014.

- MAZO, M.; TABUADA, P. On event-triggered and self-triggered control over sensor/actuator networks. In: IEEE. *2008 47th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. [S.l.], 2008. p. 435–440.
- MENDEL, J. et al. *Introduction to type-2 fuzzy logic control: theory and applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2014.
- MENDEL, J. M. *Explainable Uncertain Rule-Based Fuzzy Systems*. [S.l.]: Springer, 2024.
- MENDEL, J. M. Type-reduction: Uncertainty measures. In: *Explainable Uncertain Rule-Based Fuzzy Systems*. [S.l.]: Springer, 2024. p. 341–383.
- MILOŠEVIĆ, M. Almost sure exponential stability of solutions to highly nonlinear neutral stochastic differential equations with time-dependent delay and the euler–maruyama approximation. *Mathematical and Computer Modelling*, Elsevier, v. 57, n. 3–4, p. 887–899, 2013.
- MOBAYEN, S. et al. Barrier function-based adaptive nonsingular terminal sliding mode control technique for a class of disturbed nonlinear systems. *ISA Transactions*, Elsevier, v. 134, p. 481–496, 2023.
- MONDAL, S.; BEHERA, A. K. Practical state estimation with event-triggered sliding mode observer. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 69, n. 4, p. 2461–2468, 2023.
- MORENO, J. A. Lyapunov approach for analysis and design of second order sliding mode algorithms. In: *Sliding Modes After the First Decade of the 21st Century: State of the Art*. [S.l.]: Springer, 2011. p. 113–149.
- MOZELLI, L.; SOUZA, F. O.; PALHARES, R. A new discretized lyapunov–krasovskii functional for stability analysis and control design of time-delayed ts fuzzy systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 21, n. 1, p. 93–105, 2011.
- NAMADCHIAN, Z. et al. Stability analysis of dynamic general type-2 fuzzy control system with uncertainty. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, IEEE, v. 54, n. 3, p. 1755–1767, 2023.
- NGUYEN, D.-H.; BUI, N.-T. et al. Trajectory tracking of cable-driven parallel robot via a hybrid structure of type-2 fuzzy controllers and sliding mode control under disturbances and pulley friction with vibration analysis. *IEEE Access*, IEEE, v. 13, p. 188534–188551, 2025.
- NORONHA, R. P.; SERRA, G. L. O. Adaptive sliding mode control design for interval type-2 T-S fuzzy systems with time delay: an event-triggered approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 36, n. 12, p. 6047–6067, 2026.
- NORONHA, R. P.; SERRA, G. L. O. Event-triggered adaptive sliding mode control for interval type-2 T-S fuzzy systems with time-varying delay. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Springer, 2026. Published online 12 May 2026.
- OBEID, H. et al. Barrier function-based adaptive sliding mode control. *Automatica*, Elsevier, v. 93, p. 540–544, 2018.

- OBEID, H.; LAGHROUCHE, S.; FRIDMAN, L. Dual layer barrier functions based adaptive higher order sliding mode control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 31, n. 9, p. 3795–3808, 2021.
- OVALLE, L. et al. Discrete implementations of sliding-mode controllers with barrier-function adaptations require a revised framework. *Automatica*, Elsevier, v. 185, p. 112797, 2026.
- PAL, D.; BELUR, M. N. Dissipativity of uncontrollable systems, storage functions, and lyapunov functions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, SIAM, v. 47, n. 6, p. 2930–2966, 2009.
- PAN, Y.; WU, Y.; LAM, H.-K. Security-based fuzzy control for nonlinear networked control systems with dos attacks via a resilient event-triggered scheme. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, IEEE, v. 30, n. 10, p. 4359–4368, 2022.
- PARK, J.; KWON, W.; PARK, P. An improved adaptive sliding mode control based on time-delay control for robot manipulators. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, IEEE, v. 70, n. 10, p. 10363–10373, 2022.
- PARK, P.; KO, J. W.; JEONG, C. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays. *Automatica*, Elsevier, v. 47, n. 1, p. 235–238, 2011.
- PERSIS, C. D.; POSTOYAN, R.; TESI, P. Event-triggered control from data. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 69, n. 6, p. 3780–3795, 2023.
- PLESTAN, F. et al. New methodologies for adaptive sliding mode control. *International journal of control*, Taylor & Francis, v. 83, n. 9, p. 1907–1919, 2010.
- PRECUP, R.-E.; NGUYEN, A.-T.; BLAŽIČ, S. A survey on fuzzy control for mechatronics applications. *International Journal of Systems Science*, Taylor & Francis, v. 55, n. 4, p. 771–813, 2024.
- RAHNAMA, A.; XIA, M.; ANTSAKLIS, P. J. A QSR-dissipativity and passivity based analysis of event-triggered networked control systems. In: *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 3072–3077.
- RAZUMIKHIN, B. S. On the stability of systems with a delay. *Prikl. Mat. Mekh*, v. 20, n. 4, p. 500–512, 1956.
- RODRIGUES, V. H. P. et al. Adaptive sliding mode control with guaranteed performance based on monitoring and barrier functions. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Wiley Online Library, v. 36, n. 6, p. 1252–1271, 2022.
- RUDERMAN, M. et al. Sensitivity analysis and experimental evaluation of pid-like continuous sliding mode control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 36, n. 8, p. 4591–4601, 2026.
- SALA, A. On the conservativeness of fuzzy and fuzzy-polynomial control of nonlinear systems. *Annual Reviews in Control*, Elsevier, v. 33, n. 1, p. 48–58, 2009.
- SCHAFT, A. Van der. Introduction to jan c. willems’, “dissipative dynamical systems, part i: General theory”: 50 years of dissipativity theory. *IEEE Control Systems Magazine*, IEEE, v. 42, n. 2, p. 46–50, 2022.

- SHARMILA, V.; RAKKIYAPPAN, R. Memory sampled-data controller design for interval type-2 fuzzy systems via polynomial-type lyapunov–krasovskii functional. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, IEEE, v. 53, n. 1, p. 82–93, 2022.
- SHEN, H. et al. Sliding-mode control for it2 fuzzy nonlinear singularly perturbed systems: a dynamic event-triggered mechanism. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, IEEE, v. 53, n. 7, p. 4077–4090, 2023.
- SHI, Y. et al. Event-triggered saturation-tolerant control for autonomous underwater vehicles with quantitative transient behaviors. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, IEEE, v. 72, n. 8, p. 9857–9867, 2023.
- SHTESSEL, Y. et al. *Sliding mode control and observation*. [S.l.]: Springer, 2014. v. 10.
- SHTESSEL, Y.; TALEB, M.; PLESTAN, F. A novel adaptive-gain super twisting sliding mode controller: Methodology and application. *Automatica*, Elsevier, v. 48, n. 5, p. 759–769, 2012.
- SLOTINE, J.-J. E. The robust control of robot manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, SAGE Publications, v. 4, n. 2, p. 49–64, 1985.
- SONG, F. et al. Finite/fixed-time practical sliding mode: An event-triggered approach. *Information Sciences*, Elsevier, v. 631, p. 271–287, 2023.
- SONG, X. et al. Bipartite synchronization for cooperative-competitive neural networks with reaction–diffusion terms via dual event-triggered mechanism. *Neurocomputing*, Elsevier, v. 550, p. 126498, 2023.
- SOUZA, F. O.; MOZELLI, L. A.; PALHARES, R. M. On stability and stabilization of t–s fuzzy time-delayed systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, IEEE, v. 17, n. 6, p. 1450–1455, 2009.
- SU, X. et al. Event-triggered fuzzy control for nonlinear systems via sliding mode approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, IEEE, v. 29, n. 2, p. 336–344, 2019.
- SUN, J. et al. Second-order sliding mode control for nonminimum phase boost converters with mismatched uncertainties. *IEEE Transactions on Transportation Electrification*, IEEE, v. 11, n. 2, p. 5555–5568, 2024.
- SUN, Z. *Switched Linear Systems: Control and Design*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.
- SUN, Z.; GE, S. S. *Stability Theory of Switched Dynamical Systems*. [S.l.]: Springer London, 2011.
- TABUADA, P. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 52, n. 9, p. 1680–1685, 2007.
- UTKIN, V. et al. Conventional and high order sliding mode control. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, v. 357, n. 15, p. 10244–10261, 2020.
- UTKIN, V. I. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- UTKIN, V. I.; POZNYAK, A. S. Adaptive sliding mode control. In: *Advances in Sliding Mode Control: Concept, Theory and Implementation*. [S.l.]: Springer, 2013. p. 21–53.

- VIDAL-MARTÍNEZ, R. et al. A review of mamdani, takagi–sugeno, and type-2 fuzzy controllers for mppt and power management in photovoltaic systems. *Technologies*, MDPI, v. 13, n. 9, p. 422, 2025.
- WANG, B.; YU, X.; CHEN, G. ZOH discretization effect on single-input sliding mode control systems with matched uncertainties. *Automatica*, Elsevier, v. 45, n. 1, p. 118–125, 2009.
- WANG, X. et al. Event-triggered sliding mode control for interval type-2 fuzzy interconnected systems under markov-model-based hybrid cyberattacks. *Information Sciences*, Elsevier, v. 719, p. 122467, 2025.
- WANG, X.; ZHANG, B. Real-time lebesgue-sampled model for continuous-time nonlinear systems. In: IEEE. *53rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. [S.l.], 2014. p. 4367–4372.
- WANG, Y. et al. Interval type-2 fuzzy control for hmm-based multiagent systems via dynamic event-triggered scheme. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, IEEE, v. 30, n. 8, p. 3063–3073, 2021.
- WANG, Z.; FAN, X.; SHI, Z. Periodic event-triggered integral sliding-mode control for t–s fuzzy systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, IEEE, v. 52, n. 8, p. 7669–7681, 2020.
- WILLEMS, J. C. The generation of lyapunov functions for input-output stable systems. *SIAM Journal on Control*, SIAM, v. 9, n. 1, p. 105–134, 1971.
- WILLEMS, J. C. Dissipative dynamical systems part i: General theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Springer, v. 45, n. 5, p. 321–351, 1972.
- WILLEMS, J. C. Dissipative dynamical systems part ii: Linear systems with quadratic supply rates. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Springer, v. 45, p. 352–393, 1972.
- WILLEMS, J. C.; TAKABA, K. Dissipativity and stability of interconnections. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 17, n. 5-6, p. 563–586, 2007.
- WU, L.; ZHENG, W. X. Passivity-based sliding mode control of uncertain singular time-delay systems. *Automatica*, Elsevier, v. 45, n. 9, p. 2120–2127, 2009.
- WU, Z.-G. et al. Asynchronous dissipative control for fuzzy markov jump systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, IEEE, v. 48, n. 8, p. 2426–2436, 2017.
- XIE, G.; ZHENG, D.; WANG, L. Controllability of switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 47, n. 8, p. 1401–1405, 2002.
- XIE, Z. et al. Dynamic-output-feedback based interval type-2 fuzzy control for nonlinear active suspension systems with actuator saturation and delay. *Information Sciences*, Elsevier, v. 607, p. 1174–1194, 2022.
- XU, Z.; LI, X.; STOJANOVIC, V. Exponential stability of nonlinear state-dependent delayed impulsive systems with applications. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, Elsevier, v. 42, p. 101088, 2021.
- XUE, X.; XU, H.; XU, L. Distributed filtering and control for time delay systems interconnected over an undirected graph. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 93, n. 8, p. 1839–1858, 2020.

- YAN, X.-G.; SPURGEON, S. K.; EDWARDS, C. Dynamic sliding mode control for a class of systems with mismatched uncertainty. *European Journal of Control*, Elsevier, v. 11, n. 1, p. 1–10, 2005.
- YANG, J.; LI, S.; YU, X. Sliding-mode control for systems with mismatched uncertainties via a disturbance observer. *IEEE Transactions on industrial electronics*, IEEE, v. 60, n. 1, p. 160–169, 2012.
- YANG, X.; WANG, H.; ZHU, Q. Event-triggered predictive control of nonlinear stochastic systems with output delay. *Automatica*, Elsevier, v. 140, p. 110230, 2022.
- YAO, D.; LI, H.; SHI, Y. Adaptive event-triggered sliding-mode control for consensus tracking of nonlinear multiagent systems with unknown perturbations. *IEEE Transactions on Cybernetics*, IEEE, v. 53, n. 4, p. 2672–2684, 2022.
- YOUNG, W. H. On classes of summable functions and their Fourier series. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, v. 87, n. 594, p. 225–229, 1912.
- YU, H.; ANTSAKLIS, P. J. Event-triggered real-time scheduling for stabilization of passive and output feedback passive systems. In: IEEE. *American Control Conference (ACC)*. [S.l.], 2011. p. 1674–1679.
- YUE, D.; BALDI, S.; CAO, J. Distributed aperiodic time-triggered and event-triggered consensus: A scalability viewpoint. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, IEEE, v. 10, n. 3, p. 1512–1524, 2022.
- ZHANG, D.; JIN, X.; SU, H. Event-triggered control systems under stochastic pulsing denial-of-service attacks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 69, n. 6, p. 4013–4020, 2023.
- ZHANG, J.; SHI, P.; XIA, Y. Robust adaptive sliding-mode control for fuzzy systems with mismatched uncertainties. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, IEEE, v. 18, n. 4, p. 700–711, 2010.
- ZHANG, J. et al. A design of fuzzy sliding mode control for Markovian jumping system with different input matrices. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 462, p. 128340, 2024.
- ZHANG, X.-M.; HAN, Q.-L.; GE, X. Novel stability criteria for linear time-delay systems using lyapunov-krasovskii functionals with a cubic polynomial on time-varying delay. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, IEEE, v. 8, n. 1, p. 77–85, 2020.
- ZHANG, X.-M. et al. An improved reciprocally convex inequality and an augmented lyapunov–krasovskii functional for stability of linear systems with time-varying delay. *Automatica*, Elsevier, v. 84, p. 221–226, 2017.
- ZHAO, J.-Y.; ZHAO, T. Improving disturbance rejection and tracking performance of interval type-2 T-S fuzzy systems with time-varying delay. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 489, p. 129150, 2025.
- ZHAO, Y.; LI, X.; SONG, S. Observer-based sliding mode control for stabilization of mismatched disturbance systems with or without time delays. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, IEEE, v. 51, n. 12, p. 7337–7345, 2021.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C. *Essentials of robust control*. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 1998. v. 104.

ZHOU, M. et al. Super-twisting algorithm-based fractional-order sliding-mode control of nonlinear systems with mismatched uncertainties. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, IEEE, v. 71, n. 8, p. 9510–9519, 2023.