Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

Propriedades termodinâmicas do campo eletromagnético no setor CPT-ímpar do modelo padrão estendido

Josberg Silva Rodrigues

Orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes

São Luís, abril de 2009

Propriedades termodinâmicas do campo eletromagnético no setor CPT-ímpar do modelo padrão estendido

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

Orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes
Doutor em Física - UFMA

São Luís, abril de 2009

Rodrigues, Josberg Silva

PROPRIEDADES TERMODINÂMICAS DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO NO SETOR CPT-ÍMPAR DO MODELO PADRÃO ESTENDIDO./ Josberg Silva Rodrigues - 2009

77.p

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós Graduação em Física

Universidade Federal do Maranhão.

Orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes

1.Simetria de Lorentz 2.Radiação do Corpo negro 3. Anisotropia. I Título

CDU 537.8

Josberg Silva Rodrigues

Propriedades termodinâmicas do campo eletromagnético no setor CPT-ímpar do modelo padrão estendido

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

BANCA EXAMINADORA

Rodolfo Alván Casana Sifuentes (*ORIENTADOR*)
Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Bruto Max Pimentel Escobar
Doutor em Física - Instituto de Física Teórica (IFT)
Universidade Estadual Paulista (UNESP)

Manoel Messias Ferreira Junior
Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Aos meus familiares

Agradecimentos

À minha família, sem a qual esse trabalho não seria possível.

Ao professor Rodolfo Alván Casana Sifuentes pela orientação, amizade e além de tudo, as boas discussões na academia e fora dela, foram determinantes para a realização desse trabalho.

A todos os professores do Departamento de Física da UFMA pelos seus ensinamentos, principalmente aos professores Humberto Filomeno, sempre disposto e que incentivou-me a iniciar o mestrado e Manoel Messias Ferreira Junior por aceitar-me em seu grupo de pesquisa. Aos amigos do GFTPC, pela inúmeras conversas sobre essa bela ciência.

Aos contribuintes do Estado do Maranhão que por meio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Maranhão (FAPEMA) e da Secretaria de Educação (Seduc), financiaram parte da execução deste trabalho.

O tempo é um rio que leva ou afoga. Nesse rio, se nada. E nele, ninguém manda. Os grandes homens foram os que entenderam bem os seus tempos. Entenderam que não amanhece porque o galo canta, mas que o galo canta porque amanhece.

Imre Madách

Resumo

Esta dissertação aborda os efeitos da quebra espontânea da simetria de Lorentz sob a radiação do corpo negro no contexto da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ). O modelo MCFJ advém do setor CPT-ímpar do modelo padrão estendido e apresenta uma hamiltoniana positiva-definida somente para um campo de fundo puramente tipo-espaço. O estudo começa pela eletrodinâmica de Maxwell realizando uma análise de sua estrutura hamiltoniana através do procedimento de Dirac para sistemas vinculados. Após essa análise, calcula-se a função de partição via o formalismo de integração funcional e obtendo conseqüentemente suas propriedades termodinâmicas relevantes como: densidade de energia, pressão de radiação e a entropia do sistema. Na segunda parte, seguindo um procedimento similar encontramos a função de partição do modelo MCFJ. Observa-se que o espectro de energia do corpo negro sofre alteração devido à quebra da invariância de Lorentz e da simetria CPT. Mostramos que se a radiação cósmica de fundo (RCF) for descrita por esse modelo desponta uma anisotropia na distribuição de densidade de energia. Também, mostramos que a lei de radiação de Planck e a lei de Stefan Boltzmann são afetadas pela introdução do campo externo responsável pela quebra de Lorentz. Tais modificações no caso da lei de Planck são não-lineares na freqüência e na lei de Stefan-Boltzmann são quadráticas na temperatura. Usando esses resultados e os dados experimentais da constante de Stefan-Boltzmann e os dados referentes a anisotropia da radiação cósmica de fundo, estipulamos limites superiores para a magnitude do parâmetro da VL. Contudo, os limites obtidos são menos restritivos que os obtidos pela análise do fenômeno da birrefrigência.

Palavras Chaves: Teoria de campos à temperatura finita, Quebra da simetria de Lorentz, Radiação do corpo negro, Anisotropia da RCF.

Abstract

In this work we study the effects of the spontaneous breaking of Lorentz symmetry on black body radiation phenomenon in the context of the Maxwell-Caroll-Field-Jackiw (MCFJ) model. The MCFJ model is the electromagnetic CPT-odd sector of the standard model extension and, it presents for a purely space-like background a positive-definite hamiltonian. Firstly, we study the Maxwell electrodynamics by analyzing its hamiltonian structure following the Dirac's procedure for constrained systems. Then, we calculate the partition function via the path integrals formalism and consequently we obtain its thermodynamic properties such as: energy density, radiation pressure and the entropy. Afterwards, we apply the same procedure to find the partition function of the MCFJ model and we observe how the spectrum of black body changes due to the breaking of the CPT and Lorentz symmetries. We show that if the cosmic microwave background (CMB) radiation is described by this model, it shows an angular anisotropy in the energy density distribution. We also give, at leading order in the Lorentz violating parameter, the contributions of the Lorentz breaking for the Planck's radiation and the Stefan-Boltzmann laws. The Lorentz-violating (LV) corrections for the Planck's law is non-linear in the frequency and for the Stefan-Boltzmann law is quadratic in the temperature. Using our results, we set upper limits for the LV parameter by analyzing the Stefan-Boltmann law and the CMB anisotropy but it is shown that they are much less stringents that those obtained by birefringence or polarization analysis of light.

Keywords: Field Theory at Finite Temperature, Lorentz symmetry breaking, Black body radiation, CMB anisotropy.

Sumário

Introdução

Maxwell no seu trabalho seminal [1], propôs que a luz requeria de um meio material para se propagar fazendo analogia com as experiências envolvendo a propagação de ondas num fluido. Maxwell era adepto da idéia aristotélica de que a luz se propagava através de um meio material: o *éter*, meio que tinha densidade desprezível e que não interagia com a matéria. Em vista das propriedades da luz, já observadas naquela época, acreditava-se que o éter permeava todo o universo. Entretanto, a questão do éter foi abandonada com o advento da teoria da relatividade restrita [2], a qual estabelece a covariância de Lorentz como uma simetria fundamental da natureza. A teoria da relatividade restrita está baseada em dois princípios básicos: O primeiro nos diz que as leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais e o segundo que a velocidade da luz é a mesma em relação a qualquer referencial inercial.

Desde o advento da relatividade restrita, a covariância de Lorentz é a pedra fundamental na construção de todas as teorias de campo que descrevem as interações fundamentais e sobretudo ser também responsável pela construção das modernas teorias da física de altas energias. Os experimentos mais recentes confirmam a invariância de Lorentz com uma alta precisão, numa escala de energia que vai até 2 TeV. Contudo, na atualidade, é discutida a possibilidade de que a simetria de Lorentz possa ter sido quebrada na escala de Planck ou equivalentemente no início do universo quando a energia alcançada era dessa ordem de magnitude. Tal cenário é sugerido pela teoria das cordas [3] e, constitui a chave para o estudo de teorias de campos não-comutativos [4]. Os novos experimentos que se iniciarão no LHC (*grande colisor de hádrons* traduzido do inglês), poderão estender a escala de energia até aproximadamente 14 TeV. Nessa escala de energia, a simetria de Lorentz (SL) deve ser testada e confirmada se realmente ainda é válida ou eventualmente possa ser observada a sua quebra.

As pesquisas que estudam as conseqüências da quebra da simetria de Lorentz e da simetria CPT são freqüentemente desenvolvidas sob o arcabouço teórico do modelo padrão estendido (MPE), primeiramente proposto por Colladay e Kostelecky [5]. A simetria CPT é conjuntamente três simetrias discretas básicas da natureza em que C representa a simetria de conjugação da carga, P a simetria de paridade e T representa a simetria de reversão temporal. Na natureza existe a violação de modo individual das simetrias C, P, T e CP mas até o momento não existe nenhuma comprovação experimental da violação das simetrias PT e CPT. A construção das teorias quânticas de campo descrevendo as partículas fundamentais e suas interações é restrita pelo teorema CPT, que estabelece que toda teoria quântica de campos além de ter a simetria CPT na sua estrutura, deve satisfazer as seguintes propriedades: princípio de localidade, invariância sob a simetria de Lorentz e analiticidade das representações do grupo de Lorentz com respeito aos parâmetros de translação e rotação (boost) [6].

O modelo padrão estendido contém, além das interações que definem o atual modelo padrão, interações que violam as simetrias de Lorentz e CPT controladas por coeficientes (gerados via a quebra espontânea da simetria de Lorentz numa teoria fundamental definida na escala de Planck) que são quantidades tensoriais genuínas no referencial do observador. A quebra espontânea da simetria de Lorentz garante que ela ainda permanece tanto como uma simetria da teoria fundamental como também da teoria efetiva emergente abaixo da escala de Planck no referencial do observador. Os coeficientes tensoriais da violação de Lorentz (VL) no referencial da partícula não seguem as regras de transformação impostas pela covariância de Lorentz.

Uma forte motivação para estudar o MPE é a necessidade de conseguir alguma informação sobre a física fundamental que rege a escala de Planck onde, acredita-se, a simetria de Lorentz deve ser quebrada devido à efeitos da gravidade quântica. Essa procura é feita principalmente no setor fotônico do MPE que tem sido amplamente estudado com dois propósitos: a determinação de novos efeitos eletromagnéticos induzidos pela interação do campo de fundo que gera a violação de Lorentz e, a imposição de rigorosos limites superiores para as magnitudes dos coeficientes da VL [7, 8]. O estudo dos efeitos da violação da simetria de Lorentz no eletromagnetismo foi iniciado por Carroll-Field-Jackiw (CFJ) no início dos anos 90 [9], modificando a eletrodinâmica de Maxwell via a adição na densidade Lagrangiana de um termo do tipo Chern-Simons, $\epsilon^{\mu\nu k\lambda}\left(k_{AF}\right)_{\mu}A_{\nu}F_{\kappa\lambda}$, que além de quebrar a simetria de Lorentz também quebra a simetria CPT. Nesse termo, o vetor constante $(k_{AF})_\mu$ é o responsável por fixar um campo de fundo que quebra a simetria de Lorentz. O setor fotônico do MPE além do termo do tipo Chern-Simons inclui um termo CPT-par da forma $W^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda}$. O tensor constante $W^{\mu\nu\kappa\lambda}$ têm as mesmas simetrias que o tensor de Riemann além de possuir traço nulo. A eletrodinâmica de MCFJ é causal, estável e unitária [10] somente se o campo de fundo é puramente tipo-espaço, $(k_{AF})_\mu = (0, \mathbf{k}_{AF})$. Já a eletrodinâmica levando em consideração somente o termo CPT-par é causal, unitária e estável .

Uma característica marcante da eletrodinâmica do MPE é o fato de apresentar o fenômeno da birrefrigência do vácuo [9, 11, 12], ou seja, a velocidade da luz depende do modo de propagação assim como da rotação do plano de polarização. Considerando que a birrefrigência cresce linearmente com a distância, a análise deste efeito sob escala cosmológica oferece um bom cenário para a busca de indícios da violação da simetria de Lorentz. A análise de luz polarizada de fontes astrofísicas [9, 11, 12], tem a vantagem de que pequenos efeitos são acumulados devido ao tempo muito grande de propagação da luz e podem produzir resultados de alta sensibilidade comparados com aqueles obtidos com matéria [13]. Nesse contexto a radiação cósmica de fundo (RCF), sendo a radiação mais antiga e limpa disponível para observação, oferece uma oportunidade única para a pesquisa dos efeitos da violação da simetria de Lorentz envolvendo fótons. Na referência [14], foram desenvolvidos ferramentas teóricas para extrair, das observações polarimétricas da RCF e da análise dos dados observacionais, medidas altamente sensíveis das magnitudes dos parâmetros que controlam a quebra da simetria de Lorentz.

A radiação cósmica de fundo é vista como uma forte evidência da teoria do Big Bang (modelo proposto mais aceito descrevendo a origem do universo). Os cálculos teóricos de nucleossíntese predizem a existência de uma radiação cósmica de fundo a temperaturas de alguns graus Kelvin [15]. A RCF foi observada pela primeira vez em 1965 por Wilson e Penzias quando estavam fazendo testes de freqüências com baixo ruído e corroboraram que a radiação cósmica de fundo é a mais velha radiação disponível para observação. Os dados obtidos pelo Cosmic Background Explorer (COBE Satellite) e Wilkinson Microwave Anisotropy (WMAP) revelam que a RCF é uma perfeita curva planckiana associada à distribuição do corpo negro na temperatura de 2,73 K com uma precisão tão alta que garantem ela ser isotrópica na ordem de 1 em 10^5. Nessa ordem de exatidão são observadas pequenas anisotropias [16, 17, 18, 19] cuja origem se conhecida seria relevante para entender fenômenos como a origem e a atual expansão do universo.

Considerando que a propagação da luz é afetada pelos termos que violam tanto a simetria CPT como a SL, então podemos dizer que é muito provável que as propriedades termodinâmicas do campo eletromagnético também o sejam, entre as quais podemos mencionar a distribuição espectral de energia. Assim, podemos estudar o problema da radiação de corpo negro no contexto do MPE à temperatura finita e tentar relacionar as anisotropias da radiação cósmica de fundo com os efeitos produzidos pela violação da SL, tal com foi realizado em [20]. O ferramental teórico natural para lidar com a radiação do corpo negro e violação de Lorentz é a teoria de campos à temperatura finita [21]. Uma análise diferente das correções produzidas pela VL na lei de radiação de Planck foram apresentadas em [22], via o estudo da emissão e absorção da radiação por elétrons não relativísticos na eletrodinâmica MCFJ.

A Dissertação apresenta no primeiro capítulo, com caráter puramente didático, a eletrodinâmica de Maxwell para estudarmos a formulação hamiltoniana da técnica de quantização conhecida como integração funcional ou integrais de trajetória de Dirac-Feynman. Primeiramente, estudamos a estrutura hamiltoniana da eletrodinâmica de Maxwell segundo o formalismo de Dirac para sistemas vinculados [23], e desse modo obtermos um hamiltoniano positivo-definido, requisito fundamental para obter uma teoria unitária e fazer possível sua quantização. Logo que conhecemos a estrutura de vínculos ou estrutura hamiltoniana, estamos em posição de quantizá-la tanto a temperatura zero (Teoria Quântica de Campos usual) via o cálculo do gerador funcional das funções de Green, ou à temperatura finita (Mecânica Estatística Quântica) calculando a função de partição. Com a função de partição obtém-se as propriedades termodinâmicas do gás de fótons tal como a distribuição de energia denominada de distribuição de Maxwell-Boltzmann em equilíbrio termodinâmico.

No segundo capítulo, estuda-se as propriedades termodinâmicas do modelo MCFJ para o caso de um campo de fundo puramente tipo-espaço para o qual a análise da estrutura de vínculos prevê um hamiltoniano positivo-definido. Logo, construímos a função de partição para este modelo de calibre, que permite obter toda a informação sobre suas propriedades termodinâmicas entre as quais as versões equivalentes às leis de radiação de Planck e a de Stefan-Boltzmann no contexto da quebra da simetria de Lorentz. Também, calculamos limites superiores da magnitude do campo de fundo obtidos considerando os dados experimentais da constante de Boltzmann e das flutuações (anisotropias) na temperatura da radiação cósmica de fundo. Logo, apresentamos nossas conclusões e perspectivas. Também, incluímos quatro apêndices com nossa notação e algumas relações úteis (apêndice **A**), uma breve apresentação do formalismo de Dirac (apêndice **B**), a representação da função de partição como uma integral funcional (apêndice **C**) e, por último os cálculos dos determinantes funcionais do campo de Maxwell livre e do modelo de MCFJ (apêndice **D**).

Capítulo 1

Campo Eletromagnético de Maxwell

Na segunda metade do século XIX, Maxwell formulou a teoria do campo eletromagnético, um dos pilares da física moderna, estabelecendo dois resultados extremamente importantes, a saber: o primeiro foi mostrar que a radiação eletromagnética propaga-se com a velocidade da luz c e segundo, unificou a óptica ao eletromagnetismo mostrando o caráter ondulatório da luz [1].

A eletrodinâmica de Maxwell é regida por quatro equações: duas não-homogêneas

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad , \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \, , \tag{1.1}$$

e duas homogêneas

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \, , \tag{1.2}$$

sendo invariantes perante as transformações de Lorentz. A introdução dos potenciais escalar e vetorial permite reescrever as equações numa forma explicitamente covariante, em que as quatro equações são reduzidas em apenas duas:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu \quad , \quad \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \, , \tag{1.3}$$

onde os tensores $F_{\mu\nu}$ e $\tilde{F}^{\mu\nu}$ são definidos por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad , \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \, , \tag{1.4}$$

e o potencial vetor e o densidade de corrente são

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}) \quad , \quad j^\mu = (\rho, \mathbf{J}) \; . \tag{1.5}$$

Além da simetria de Lorentz, o eletromagnetismo de Maxwell admite uma simetria de gauge ou de calibre local. Esta simetria estabelece que os campos elétricos e magnéticos, expressos em termos dos potenciais escalar e vetorial, são invariantes se os potenciais mudam como $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$, com $\Lambda(x)$ sendo uma função escalar arbitrária.

A presença da simetria de gauge implica que a teoria é um sistema vinculado, o que nos motiva a estudar a sua estrutura hamiltoniana segundo o formalismo de Dirac [23]. Essa análise é de suma importância para a posterior quantização do modelo, podendo ser feita tanto no formalismo canônico operatorial ou no formalismo de integração funcional.

À temperatura zero, o estudo do campo eletromagnético e suas interações com as partículas carregadas é feito pela teoria de campos chamada de eletrodinâmica quântica (QED), contudo, nesse capítulo, detalharemos a quantização do campo eletromagnético livre no formalismo funcional.

Também, este capítulo trata a construção da função de partição no formalismo funcional visando o estudo das propriedades inerentes ao problema da radiação do corpo negro, ou seja, as propriedades do campo eletromagnético em equilíbrio térmico como: a densidade de energia, a pressão de radiação, a função de distribuição de Bose-Einstein e a entropia.

1.1 Formulação hamiltoniana e análise de vínculos

O campo eletromagnético, na ausência de fontes, é descrito pela seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \,, \tag{1.6}$$

invariante sob a transformação de calibre local $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$. A equação de Euler-Lagrange dá a seguinte equação de movimento

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \,. \tag{1.7}$$

Para $\mu = 0$:

$$\nabla^2 A_0 - \partial_0 (\partial_k A_k) = 0, \tag{1.8}$$

Para $\mu = k$:

$$\Box A^k - \partial^k (\partial_0 A_0 - \partial_j A_j) = 0. \tag{1.9}$$

Começamos a análise da estrutura hamiltoniana definindo o momento canônico conjugado ao campo A_μ

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = F^{\mu 0} \ . \tag{1.10}$$

Vê-se claramente que $\pi^0 = 0$ gera um vínculo primário aqui denominado de ϕ_1. Dizemos que existe um vínculo primário quando não se pode expressar a velocidade (neste caso a derivada temporal do potencial vetor) em termos dos momentos e dos campos. Assim, tem-se

$$\phi_1 = \pi^0 \approx 0, \tag{1.11}$$

em que o símbolo $\approx$ (no formalismo de Dirac) representa uma igualdade fraca dentro do espaço de fase. Por outro lado, para as componentes espaciais do momento canônico conjugado obtemos a seguinte relação dinâmica

$$\pi^k = \dot{A}_k - \partial_k A_0, \tag{1.12}$$

que expressa a velocidade $\dot{A}_k$ em termos dos momentos e dos campos, não sendo assim considerado um vínculo.

Podemos notar que o vínculo primário é não-holônomo. E como veremos a seguir, o campo eletromagnético apresenta somente vínculos não-holônomos, isto é, aqueles que podem ser expressos como funções dos campos e dos momentos.

Os parênteses de Poisson (PP) fundamentais são

$$\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\} = \delta_\mu^\nu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, . \tag{1.13}$$

A densidade hamiltoniana canônica, $\mathcal{H}_C = \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}$, é

$$\mathcal{H}_C = \frac{1}{2}\left(\pi^k\right)^2 + \pi^k \partial_k A_0 + \frac{1}{4}\left(F_{kl}\right)^2 , \tag{1.14}$$

e a hamiltoniana canônica é

$$H_C = \int d\mathbf{y} \ \left[\frac{1}{2}\left(\pi^k\right)^2 - A_0 \partial_k \pi^k + \frac{1}{4}\left(F_{kl}\right)^2\right] . \tag{1.15}$$

Para garantir que o vínculo primário seja preservado durante a evolução do sistema, define-se a hamiltoniana primária como sendo a soma da hamiltoniana canônica e do vínculo primário, como vê-se abaixo,

$$H_P = H_C + \int d\mathbf{y} \ C\phi_1 \ , \tag{1.16}$$

onde C é o multiplicador de Lagrange correspondente ao vínculo primário ϕ_1.

Com o hamiltoniano primário, calculamos a condição de consistência do vínculo primário: $\dot{\phi}_1 = \{\pi^0, H_P\} \approx 0$, isso garante que o vínculo permanece invariante sob a evolução temporal gerada pelo hamiltoniano primário. Assim, obtemos

$$\dot{\phi}_1 = \partial_k \pi^k \approx 0, \tag{1.17}$$

que proporciona um vínculo secundário que denotamos por ϕ_2

$$\phi_2 = \partial_k \pi^k \approx 0\,, \tag{1.18}$$

que é exatamente a lei de Gauss sem fontes, e cuja condição de consistência permite obter

$$\dot{\phi}_2 = 0\,. \tag{1.19}$$

Desse modo, observamos que o vínculo secundário é automaticamente preservado sob a evolução temporal gerada por H_P. Assim, não há mais vínculos gerados no modelo. O fato importante é que não se consegue fixar o multiplicador de Lagrange C. No formalismo de Dirac isso indica a presença de vínculos de primeira classe. Os vínculos de primeira classe são aqueles que têm parênteses de Poisson nulos com todos os vínculos obtidos no modelo em estudo. Dessa forma, pode-se facilmente perceber que os parênteses de Poisson entre os vínculos ϕ_1 e ϕ_2 é identicamente nulo, $\left\{\pi^0, \partial_k \pi^k\right\} = 0$. Assim a teoria contém dois vínculos de primeira classe

$$\phi_1 = \pi^0 \approx 0\;, \qquad \phi_2 = \partial_k \pi^k \approx 0\;. \tag{1.20}$$

Após, termos determinado a estrutura hamiltoniana do eletromagnetismo de Maxwell como sendo de primeira classe, a teoria ainda permanece indeterminada, pois desconhecemos a forma do multiplicador de Lagrange C. Para podermos quantizar a teoria, tanto no formalismo canônico operatorial como no funcional, essa arbitrariedade deve ser fixada de algum modo. A seguinte seção mostra como fixar a teoria clássica e deixá-la pronta para sua quantização.

1.1.1 Equações de movimento e condições de calibre

Dirac observou que os vínculos de primeira classe (tanto primários como secundários) são geradores de simetrias do sistema físico, assim, conjeturou que a evolução dinâmica do sistema deveria ser governada por uma hamiltoniana contendo esses vínculos de primeira classe: o hamiltoniano estendido, H_E. Dessa maneira, em nosso caso, temos

$$H_E = H_C + \int d\mathbf{y}\ \left[C\phi_1 + D\phi_2\right], \tag{1.21}$$

onde C e D são os respectivos multiplicadores de Lagrange.

Segundo a conjectura de Dirac, será esse hamiltoniano que governará a evolução temporal do sistema físico. Devemos então calcular a evolução das variáveis canônicas. Para o campo A_μ, obtém-se

$$\dot{A}_0 = \{A_0, H_E\} = C, \tag{1.22}$$

$$\dot{A}_k = \pi^k + \partial_k A_0 - \partial_k D\ , \tag{1.23}$$

mostrando que a dinâmica tanto de A_0 como de A_k permanece indeterminada, pois ainda depende dos parâmetros arbitrários C e D.

E para o momento canônico conjugado π^μ

$$\dot{\pi}^0 = \left\{\pi^0, H_E\right\} = \partial_k \pi^k \approx 0, \tag{1.24}$$

$$\dot{\pi}^k = \left\{\pi^k, H_E\right\} = -\partial_l F_{kl}. \tag{1.25}$$

Observamos que essa última equação reproduz a equação de Euler-Lagrange (1.7) quando combinada com (1.24), ou seja, $\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$.

Podemos notar que a Eq. (1.23) é similar à equação lagrangiana (1.12), se fizermos D igual a zero. Portanto, deve-se impor uma condição de calibre de tal forma que fixe-se $D = 0$. Isto é uma decorrência do algoritmo de Dirac, que requer um número de condições de calibre igual ao número de vínculos de primeira classe na teoria. Entretanto, estas condições devem ser compatíveis com as equações de Euler-Lagrange, em que deve-se fixar $D = 0$ e, logo, determinar o multiplicador de Lagrange C. Devemos observar que se as condições de calibre fixam corretamente os multiplicadores de Lagrange então, o conjunto formado pelas condições de calibre e os vínculos de primeira classe é de segunda classe.

Assim, precisa-se fixar os multiplicadores de Lagrange C e D de tal modo que as equações de movimento hamiltonianas sejam equivalentes às equações de movimento lagrangianas, e desse modo a Física descrita por ambos os formalismos seja a mesma.

1.1.2 Gauge ou calibre de Coulomb

A equação (1.22) diz explicitamente que A_0 é um multiplicador de Lagrange. Logo, a equação de movimento (1.8) para A_0 deve indicar qual a condição de calibre desejada. Então, se impomos que $A_0 \approx 0$ como nossa primeira condição de calibre:

$$\varphi_1 = A_0 \approx 0, \tag{1.26}$$

a equação de movimento (1.8) resulta em $\partial_0 (\partial_k A_k) = 0$, ou seja, $\partial_k A_k$ é independente do tempo e depende explicitamente somente das coordenadas espaciais. Escolhendo como segunda condição de gauge

$$\varphi_2 = \partial_k A_k \approx 0, \tag{1.27}$$

cuja condição de consistência $\dot{\varphi}_2 = \{\psi_2, H_E\} \approx 0$ proporciona a seguinte equação

$$\partial_k \pi^k + \nabla^2 A_0 - \nabla^2 D \approx 0, \tag{1.28}$$

e usando o fato que $\partial_k \pi^k \approx 0$ e $A_0 \approx 0$, obtemos $\nabla^2 D \approx 0$, ou seja, D é uma função harmônica que pela equação (1.23) deve ter gradiente nulo. Logo D é uma constante, e usando a condição de contorno que os campos se anulam no infinito, obtemos que $D = 0$.

A condição de consistência de φ_1 : $\dot{\varphi}_1 = \{\psi_1, H_E\} \approx 0$ proporciona a seguinte relação $C = 0$. Assim, fixamos todos os multiplicadores de Lagrange da teoria.

Assim, as condições de calibre que fixam os multiplicadores de Lagrange de modo consistente com as equações de Euler-Lagrange são

$$\psi_1 = \partial_k A_k \approx 0 \quad e \quad \psi_2 = A_0 \approx 0, \tag{1.29}$$

conhecidas como o "gauge" ou calibre de Coulomb.

Finalmente, o conjunto $\Sigma_a = \{\phi_1,\ \phi_2,\ \psi_1,\ \psi_2\}$ formado pelos vínculos de primeira classe e as condições de calibre é de segunda classe. Isso é garantido pois, verifica-se que sua matriz de vínculos, constituída pelos parênteses de Poisson $\{\Sigma_a(x), \Sigma_b(y)\}$, é não singular.

Em nosso caso, a matriz de vínculos é dada por:

$$M(x,y) = \{\Sigma_a(x), \Sigma_b(y)\} = \begin{array}{c} \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{array} \begin{array}{cccc} \phi_1 & \phi_2 & \psi_1 & \psi_2 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \nabla_x^2 & 0 \\ 0 & -\nabla_x^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{1.30}$$

tendo um determinante funcional não nulo

$$\det M(x,y) = \left[\det\left(-\nabla^2\right)\right]^2. \tag{1.31}$$

A matriz inversa é dada por

$$M^{-1}(x,y) = \begin{array}{c|cccc} & \phi_1 & \phi_2 & \psi_1 & \psi_2 \\ \hline \phi_1 & 0 & 0 & 0 & \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ \phi_2 & 0 & 0 & G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & 0 \\ \psi_1 & 0 & -G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & 0 & 0 \\ \psi_2 & -\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 \end{array}, \tag{1.32}$$

onde $G(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ é a função de Green da equação de Poisson:

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \ , \tag{1.33}$$

com

$$G(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{\mathbf{p}^2} = \frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}\|}. \tag{1.34}$$

1.1.3 Parênteses de Dirac

A este nível, é necessário assegurar que o conjunto de vínculos de primeira classe e as condições de calibre se tornem igualdades fortes no espaço de fase reduzido. Tal exigência é satisfeita definindo uma nova operação de parênteses que denominamos, parênteses de Dirac (PD), $\{\cdot,\cdot\}_D$. Assim, dadas duas funções das variáveis canônicas $A(x)$ e $B(y)$, o PD é

$$\begin{aligned} \{A(x), B(y)\}_D &= \{A(x), B(y)\} \\ &\quad - \int d\mathbf{u} \int d\mathbf{v} \{A(x), \Sigma_c(u)\} \left[M^{-1}(u,v)\right]_{cd} \{\Sigma_d(v), B(y)\}, \end{aligned} \tag{1.35}$$

com $\Sigma_a = \{\phi_1,\ \phi_2,\ \psi_1,\ \psi_2\}$ e $M^{-1}(x,y)$ a matriz inversa dada na Eq. (1.32).

Os parênteses de Dirac, no gauge de Coulomb, são

$$\begin{aligned} \{A_k(x), A_j(y)\}_D &= 0, \\ \left\{\pi^k(x), \pi^j(y)\right\}_D &= 0, \\ \left\{A_k(x), \pi^j(y)\right\}_D &= \left(\delta_{kj} - \frac{\partial_k^x \partial_j^x}{\nabla^2}\right) \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \end{aligned} \tag{1.36}$$

e dão a álgebra satisfeita pelos graus de liberdade físicos do campo eletromagnético.

A importância dos parênteses de Dirac reside em que essa álgebra pode ser levada a nível quântico via o princípio de correspondência, dando as relações de comutação dos operadores que descrevem o campo eletromagnético, podendo ser realizada sua quantização via o formalismo operatorial.

Também, estamos em posição de quantizar a teoria no formalismo funcional hamiltoniano, pois temos em mão a estrutura hamiltoniana completa, ou seja, conhecemos que dois vínculos são de primeira classe e duas são as condições de calibre advindas da fixação dos primeiros. Temos assim:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \pi^0 \approx 0 \quad , \qquad \phi_2 = \partial_k \pi^k \approx 0 \quad , \\ \psi_1 &= \partial_k A_k \approx 0 \quad , \qquad \psi_2 = A_0 \approx 0, \end{aligned} \tag{1.37}$$

o conjunto de vínculos de segunda classe.

Vale ressaltar que tanto os vínculos de primeira classe quanto as condições de calibre têm caráter bosônico. Assim, nas duas seções seguintes mostraremos o procedimento padrão para quantizar o campo eletromagnético à temperatura zero (Teoria Quântica de Campos) e à temperatura finita (Mecânica Estatística Quântica).

1.2 A amplitude de transição vácuo-vácuo

Define-se a amplitude de transição vácuo-vácuo no formalismo de integração funcional para um modelo que tem somente vínculos bosônicos como

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\pi^\mu \left(\prod_a \delta\left(\Sigma_a\right) \right) \left| \det \left\{ \Sigma_a\left(x\right), \Sigma_b\left(y\right) \right\} \right|^{1/2} \exp \left\{ i \int dx \left(\pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{H}_C \right) \right\}, \quad (1.38)$$

onde Σ_a representa todos os vínculos bosônicos da teoria, $\{\Sigma_a(x), \Sigma_b(y)\}$ é a matriz formada pelos PP dos vínculos Σ_a, e $\mathcal{H}_C$ é a densidade hamiltoniana canônica.

Em nosso caso, $\Sigma_a = \{\phi_1,\ \phi_2,\ \psi_1,\ \psi_2\}$ é o conjunto de segunda classe formado pelos vínculos de primeira classe e as condições de calibre, o $\det\{\Sigma_a(x), \Sigma_b(y)\}$ é dado pela Eq. (1.31) e $\mathcal{H}_C$ é a densidade hamiltoniana canônica em (1.15).

Observando os vínculos dados em (1.37), podemos facilmente fazer as integrações em A_0 e em π^0, obtendo

$$Z = \int \mathcal{D}A_k \mathcal{D}\pi^k\, \delta\left(\partial_k \pi^k\right) \delta(\partial_k A_k) \left| \det\left(-\nabla^2\right) \right| \exp \left\{ i \int dx \left[\pi^k \dot{A}_k - \frac{1}{2}\left(\pi^k\right)^2 - \frac{1}{4}\left(F_{kl}\right)^2 \right] \right\}. \quad (1.39)$$

Para poder integrar no momento canônico π^k, usamos a representação de Fourier da $\delta-$Dirac funcional

$$\delta\left(\partial_k \pi^k\right) = \int \mathcal{D}\Lambda\ \exp\left\{ i \int dx\, \Lambda \partial_k \pi^k \right\}. \quad (1.40)$$

Assim, obtemos que a integração resulta em

$$\begin{aligned} I_{\pi^k} &= \int \mathcal{D}\pi^k\ \exp\left\{ i \int dx \left[-\frac{1}{2}\left(\pi^k\right)^2 + \pi^k \left(\dot{A}_k - \partial_k \Lambda \right) \right] \right\} \\ &= N' \exp\left\{ i \int dx\, \frac{1}{2} \left(\dot{A}_k - \partial_k \Lambda \right)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (1.41)$$

com N' sendo uma constante de normalização.

Com esse resultado, a amplitude de transição (1.39) assume a seguinte forma

$$Z = \int \mathcal{D}A_k \mathcal{D}\Lambda\ \left| \det\left(-\nabla^2\right) \right| \delta\left(\partial_k A_k\right) \exp\left\{ i \int dx - \frac{1}{4}\left(F_{kl}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{A}_k - \partial_k \Lambda \right)^2 \right\}. \quad (1.42)$$

Agora chamamos $\Lambda = A_0$ e obtemos a amplitude de transição vácuo-vácuo do campo eletromagnético livre no calibre de Coulomb

$$Z = N' \int \mathcal{D}A_\mu\ \delta\left(\partial_k A_k\right)\ \exp\left\{ i \int dx\ - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\}\ , \quad (1.43)$$

onde N' carrega informações que não dependem dos campos, e que, à temperatura zero, não contribuem à física do problema. Já no caso de temperatura finita esses termos podem ser considerados e, no caso do campo eletromagnético, contribuem para definir corretamente a função de partição.

A amplitude de transição vácuo-vácuo (1.43) não é explicitamente covariante de Lorentz devido que o calibre de Coulomb não é covariante, contudo, podemos passar a um calibre covariante (como o calibre de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$), via o ansatz de Faddeev-Popov [24] que é definido como

$$\int D\omega(x)\, \delta\left(\mathcal{G}\left[A_\mu^\omega\right]\right) \det \left|\frac{\delta \mathcal{G}\left[A_\mu^\omega\right]}{\delta\omega}\right|_{\omega=0} \equiv 1, \tag{1.44}$$

onde $\omega\,(x)$ é o parâmetro de calibre, $D\omega$ é a medida do grupo de calibre, $\mathcal{G}\,[A_\mu]$ é alguma condição de calibre covariante, A_μ^ω é o campo transformado que no caso abeliano é

$$A_\mu^\omega = A_\mu + \partial_\mu \omega \tag{1.45}$$

e

$$\det \left|\frac{\delta \mathcal{G}\left[A_\mu^\omega\right]}{\delta\omega}\right|_{\omega=0}, \tag{1.46}$$

sendo conhecido como o determinante de Faddeev-Popov, é invariante de calibre.

Assim, introduzindo o ansatz de Faddeev-Popov (1.44) na amplitude de transição vácuo-vácuo (1.43) e, fazendo a transformação de calibre $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\omega$, temos

$$\begin{aligned} Z \;&=\; N \int \mathcal{D}A_\mu\, \delta\left(\mathcal{G}\left[A_\mu\right]\right)\, \det \left|\frac{\delta \mathcal{G}\left[A_\mu^\omega\right]}{\delta\omega}\right|_{\omega=0} \exp\left\{ i \int dx - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right\} \\ &\quad \times \int \mathcal{D}\omega\, \det(-\nabla^2)\delta(\partial_k A_k - \nabla^2 \omega). \end{aligned} \tag{1.47}$$

A integração funcional em ω é simplesmente o ansatz de Faddeev-Popov no gauge de Coulomb, que é equivalente a uma unidade.

Assim, a amplitude de transição vácuo-vácuo num calibre covariante arbitrário é

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu\, \delta\left(\mathcal{G}\left[A_\mu\right]\right)\, \det \left|\frac{\delta \mathcal{G}\left[A_\mu^\omega\right]}{\delta\omega}\right|_{\omega=0} \exp\left\{ i \int dx - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right\}. \tag{1.48}$$

Para os nossos propósitos, escolhe-se o calibre de Lorenz geral

$$\mathcal{G}\left[A_\mu\right] = \frac{1}{\sqrt{\xi}}\partial_\mu A^\mu - f\ , \qquad \left.\frac{\delta \mathcal{G}\left[A_\mu^\omega\right]}{\delta\omega}\right|_{\omega=0} = \frac{\Box}{\sqrt{\xi}}\ , \tag{1.49}$$

sendo f uma função escalar arbitrária. Assim, obtemos

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \; \delta \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} \partial_\mu A^\mu - f \right) \; \det \left| \frac{\Box}{\sqrt{\xi}} \right| \exp \left\{ i \int dx \; -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\}. \tag{1.50}$$

Como a amplitude de transição deve ser independente de f, devemos integrar (1.50) usando o seguinte peso $\exp \left(-\frac{i}{2} \int dx \, f^2 \right)$. Com isso, finalmente obtemos a amplitude de transição vácuo-vácuo no calibre de Lorenz

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \; \exp \left\{ i \int dx - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} \left(\partial_\mu A^\mu \right)^2 \right\}, \tag{1.51}$$

onde N contém termos que independem dos campos e que a temperatura zero não contribuem. Com essa amplitude, bem definida, poderemos calcular agora as funções de Green do campo eletromagnético quantizado.

1.2.1 Funções de Green

O próximo passo é calcular as funções de Green do campo eletromagnético, para isso, define-se o gerador funcional das funções de Green a partir da amplitude de transição vácuo-vácuo (1.51)

$$Z \left[J^\mu \right] = N \int \mathcal{D}A_\mu \; \exp \left\{ i \int dx \; -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} \left(\partial_\mu A^\mu \right)^2 + A_\mu J^\mu \right\}, \tag{1.52}$$

onde N é uma constante de normalização definida por $Z[0] = 1$ e J^μ é a fonte externa do campo eletromagnético, que no caso usual representa as cargas e as correntes.

Após fazermos uma integração por partes na exponencial, obtemos

$$Z \left[J^\mu \right] = N \int \mathcal{D}A_\mu \; \exp \left\{ i \int dx \; \frac{1}{2} A_\mu D_\xi^{\mu\nu} A_\nu + A_\mu J^\mu \right\}, \tag{1.53}$$

onde definimos o operador

$$D_\xi^{\mu\nu} = \Box T^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} \Box L^{\mu\nu}, \tag{1.54}$$

escrito em termos dos projetores simétricos transversal e longitudinal

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\Box} \qquad , \qquad L^{\mu\nu} = \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\Box} \,. \tag{1.55}$$

Integrando o campo de gauge, obtém-se

$$Z \left[J^\mu \right] = \exp \left\{ \frac{i}{2} \int dx \; dy \; J^\mu (x) \, \Delta_{\mu\nu} (x - y) \, J^\nu (y) \right\}, \tag{1.56}$$

onde $\Delta_{\mu\nu}(x-y)$ é a função de Green da equação de movimento do campo de gauge $\left(D_{\xi}^{\mu\nu}A_{\nu}=-J^{\mu}\right)$ escrita explicitamente como:

$$\left(\Box g^{\mu\nu}-\partial^{\mu}\partial^{\nu}+\frac{1}{\xi}\partial^{\mu}\partial^{\nu}\right)A_{\nu}=-J^{\mu}. \tag{1.57}$$

A função de Green para esta equação de movimento satisfaz:

$$\left(\Box g^{\mu\nu}-\partial^{\mu}\partial^{\nu}+\frac{1}{\xi}\partial^{\mu}\partial^{\nu}\right)\Delta_{\nu\rho}(x-y)=-\delta^{\mu}{}_{\rho}\delta(x-y). \tag{1.58}$$

Solucionando no espaço de Fourier, temos que

$$\Delta_{\mu\nu}(x) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tilde{\Delta}_{\mu\nu}(p)\ e^{-ip\cdot x}\ , \tag{1.59}$$

com

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{p^2}\left(g_{\mu\nu}-\frac{p_{\mu}p_{\nu}}{p^2}\right)+\xi\frac{p_{\mu}p_{\nu}}{p^4}. \tag{1.60}$$

Então, o propagador do campo A_{μ}, definido como

$$G_{\mu\nu}(x-y)=\langle 0\left|TA_{\mu}(x)A_{\nu}(y)\right|0\rangle=-\left.\frac{\delta^2 Z[J^{\mu}]}{\delta J^{\nu}(y)\,\delta J^{\mu}(x)}\right|_{J^{\mu}=0}, \tag{1.61}$$

é dado por

$$G_{\mu\nu}(x-y)=-i\Delta_{\mu\nu}(x-y)\ , \tag{1.62}$$

e no espaço dos momentos é expresso como

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(p)=-\frac{i}{p^2}\left(g_{\mu\nu}-\frac{p_{\mu}p_{\nu}}{p^2}\right)-i\xi\frac{p_{\mu}p_{\nu}}{p^4}\ .$$

A componente transversal do propagador é independente de calibre e tem um pólo simples em $p^2=0$, isso significa que o campo eletromagnético além de transverso tem massa nula. Por outro lado, a componente longitudinal é gauge-dependente e, portanto, não descreve Física nenhuma.

Contudo, vemos que o propagador em geral é gauge-dependente, logo algumas escolhas do parâmetro ξ podem ser de grande ajuda na obtenção de algumas informações físicas. Por exemplo, se $\xi=1$, temos o calibre de Feynman, no qual o propagador é

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(p)=-i\frac{g_{\mu\nu}}{p^2}, \tag{1.63}$$

que é muito utilizado em cálculos perturbativos pela sua simplicidade. Por outro lado, $\xi = 0$ define o calibre de Landau no qual o propagador torna-se

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(p) = -i\frac{1}{p^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right), \tag{1.64}$$

revelando explicitamente o caráter transverso do campo eletromagnético.

O propagador do campo eletromagnético é a única função relevante, pois funções de Green de mais alta ordem resultam ser combinações de produtos de propagadores.

Com isso terminamos a breve análise da quantização do campo eletromagnético no formalismo da integração funcional.

1.3 A função de partição

Se desejamos estudar as propriedade termodinâmicas de um sistema físico em equilíbrio térmico, o conhecimento de sua função de partição é de fundamental importância. Como em geral um sistema físico pode ser vinculado, a construção da função de partição deve ser feita no formalismo funcional hamiltoniano.

Logo, conhecendo a estrutura de vínculos do campo eletromagnético, prossegue-se a definir a função de partição, primeiramente, no calibre de Coulomb, do sistema composto por fótons em equilíbrio termodinâmico

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\pi^\mu \left(\prod_a \delta(\Sigma_a)\right) \left|\det\{\Sigma_a(x), \Sigma_b(y)\}\right|^{1/2} \exp\left\{\int_\beta dx \ \left(i\pi^\mu \partial_\tau A_\mu - \mathcal{H}_C\right)\right\}. \tag{1.65}$$

Aqui, a integração funcional do campo eletromagnético deve ser realizada sobre as configurações de campo satisfazendo condições de contorno periódicas na coordenada $\tau \in [0, \beta]$: $A_\mu(\tau, \mathbf{x}) = A_\mu(\tau + \beta, \mathbf{x})$. A constante $\beta = T^{-1}$, onde T é a temperatura, poder ser considerado como um multiplicador de Lagrange que determina a energia média do sistema. Similarmente ao caso da amplitude de transição vácuo-vácuo, o termo $\Sigma_a = \{\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2\}$ representa o conjunto formado pelos vínculos de primeira classe e suas respectivas condições de calibre, $\mathcal{H}_C$ é a densidade hamiltoniana canônica (1.15). A medida de integração do espaço de euclidiano é denotada da seguinte forma, $\displaystyle\int_\beta dx = \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x}$.

Levando em consideração que os vínculos são dados em (1.37), podemos facilmente fazer as integrações em A_0 e em π^0, obtendo

$$
\begin{aligned}
Z(\beta) &= \int \mathcal{D}A_k \mathcal{D}\pi^k \; \delta\left(\partial_k \pi^k\right) \delta\left(\partial_k A_k\right) \; \left|\det\left(-\nabla^2\right)\right| \\
&\quad \times \exp\left\{ \int_\beta dx \; \left[i\pi^k \partial_\tau A_k - \frac{1}{2}\left(\pi^k\right)^2 - \frac{1}{4}\left(F_{kl}\right)^2 \right] \right\}.
\end{aligned}
\tag{1.66}
$$

Usando a representação de Fourier da $\delta-$Dirac funcional (Similarmente ao feito em (1.40)), podemos integrar no momento canônico π^k, encontrando

$$
\begin{aligned}
Z(\beta) &= \int \mathcal{D}A_k \mathcal{D}\Lambda \; \left|\det\left(-\nabla^2\right)\right| \delta\left(\partial_k A_k\right) \\
&\quad \times \exp\left\{ \int_\beta dx \; \left[-\frac{1}{4}\left(F_{kl}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_\tau A_k - \partial_k \Lambda\right)^2 \right] \right\}.
\end{aligned}
\tag{1.67}
$$

Doravante, tomamos $\Lambda = A_\tau$, obtendo a função de partição do campo eletromagnético livre no calibre de Coulomb

$$
Z(\beta) = \int \mathcal{D}A_a \; \left|\det\left(-\nabla^2\right)\right| \delta\left(\partial_k A_k\right) \; \exp\left\{ \int_\beta dx - \frac{1}{4} F_{ab} F_{ab} \right\},
\tag{1.68}
$$

onde $a, b = \tau, 1, 2, 3$. Devemos observar que o calibre de Coulomb não é explicitamente covariante, logo a função de partição (1.68) também não o é, contudo podemos passar para um calibre ou gauge covariante (como o calibre de Lorenz $\partial_a A_a = 0$) via o ansatz de Faddeev-Popov[1] que é definido como

$$
\int D\omega(x) \, \delta\left(\mathcal{G}\left[A_a^\omega\right]\right) \det\left|\frac{\delta \mathcal{G}\left[A_a^\omega\right]}{\delta \omega}\right|_{\omega=0} \equiv 1,
\tag{1.69}
$$

onde $\omega(x)$ é o parâmetro de calibre, $D\omega$ é a medida do grupo de calibre, $\mathcal{G}[A_a]$ é alguma condição de calibre covariante, A_μ^ω é o campo transformado que no caso abeliano é $A_a^\omega = A_a + \partial_a \omega$, e finalmente temos $\det\left|\frac{\delta \mathcal{G}\left[A_a^\omega\right]}{\delta \omega}\right|_{\omega=0}$ o determinante de Faddeev-Popov invariante de calibre.

Assim, introduz-se o ansatz de Faddeev-Popov na função de partição (1.68) e, fazendo a

[1]Similar procedimento foi feito na seção **1.2**, contudo por completeza de raciocínio é apresentado novamente no espaço Euclideano.

transformação de gauge $A_a \to A_a - \partial_a \omega$, obtém-se:

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int DA_a \; \delta\left(G\left[A_a\right]\right) \det\left|\frac{\delta G\left[A_a^{\omega}\right]}{\delta\omega}\right|_{\omega=0} \exp\left\{\int_\beta dx - \frac{1}{4}\left(F_{ab}\right)^2\right\} \\ &\quad \times \int D\omega \;\; \det\left(-\nabla^2\right) \;\; \delta\left(\partial_k A_k - \nabla^2\omega\right). \end{aligned} \tag{1.70}$$

A integração funcional em ω é simplesmente o ansatz de Faddeev-Popov no gauge de Coulomb, que é equivalente a uma unidade.

Desse modo, obtemos a função de partição num gauge covariante arbitrário

$$Z(\beta) = \int DA_a \; \delta\left(G\left[A_a\right]\right) \; \det\left(\frac{\delta G\left[A_a^{\omega}\right]}{\delta\omega}\right)_{\omega=0} \exp\left\{\int_\beta dx - \frac{1}{4}\left(F_{ab}\right)^2\right\}. \tag{1.71}$$

Escolhemos o calibre de Lorenz na seguinte forma geral

$$G\left[A_a\right] = -\frac{1}{\sqrt{\xi}}\partial_a A_a + f \;, \tag{1.72}$$

sendo f uma função escalar arbitrária e ξ um parâmetro real arbitrário. Com isto, temos:

$$G\left[A_a^{\omega}\right] = G\left[A_a\right] - \frac{1}{\sqrt{\xi}}\Box\omega \;, \tag{1.73}$$

tal que

$$\det\left|\frac{\delta G\left[A_a^{\omega}\right]}{\delta\omega}\right|_{\omega=0} = \det\left(\frac{-\Box}{\sqrt{\xi}}\right), \tag{1.74}$$

onde $\Box = \partial_a\partial_a = \left(\partial_\tau\right)^2 + \nabla^2$.

Assim, a função de partição (1.71) é expressa como

$$Z(\beta) = \int DA_a \; \delta\left(-\frac{1}{\sqrt{\xi}}\partial_a A_a + f\right) \; \det\left(\frac{-\Box}{\sqrt{\xi}}\right) \exp\left\{\int_\beta dx - \frac{1}{4}\left(F_{ab}\right)^2\right\}. \tag{1.75}$$

Como a função de partição deve ser independente de f, podemos integrar no campo f usando a seguinte função peso $\exp\left(-\frac{1}{2}\int_\beta dx \; f^2\right)$. Assim, obtemos

$$Z(\beta) = \int DA_a \; \det\left(\frac{-\Box}{\sqrt{\xi}}\right) \exp\left\{\int_\beta dx - \frac{1}{4}\left(F_{ab}\right)^2 - \frac{1}{2\xi}\left(\partial_a A_a\right)^2\right\}. \tag{1.76}$$

Após uma integração por partes, resulta

$$Z(\beta) = \int DA_a \; \det\left(\frac{-\Box}{\sqrt{\xi}}\right) \exp\left\{\int_\beta dx - \frac{1}{2}A_a\left[-\Box\delta_{ab} - \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)\partial_a\partial_b\right]A_b\right\}. \tag{1.77}$$

A integração no campo de calibre é imediata e tem-se o seguinte resultado:

$$Z(\beta) = \det\left(\frac{-\Box}{\sqrt{\xi}}\right)\det\left[-\Box\delta_{ab} - \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)\partial_a\partial_b\right]^{-1/2} . \tag{1.78}$$

Calculando o determinante[2] temos

$$\det\left[-\Box\delta_{ab} - \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)\partial_a\partial_b\right] = \det\left|\frac{(-\Box)^4}{\xi}\right| . \tag{1.79}$$

Substituindo-o na Eq. (1.78), obtemos a função de partição

$$\ln Z(\beta) = -\ln\det(-\Box) = -\mathrm{Tr}\ln(-\Box) \ . \tag{1.80}$$

O traço funcional é calculado na base de Fourier que expande o campo vetorial

$$A(\tau, \mathbf{x}) = \left(\frac{\beta}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n,\mathbf{p}} e^{i(\omega_n\tau + \mathbf{x}\cdot\mathbf{p})}\tilde{A}(\mathbf{p}, n), \tag{1.81}$$

onde V é o volume do sistema e ω_n representas as freqüências de Matsubara bosônicas

$$\omega_n = 2n\frac{\pi}{\beta} \ . \tag{1.82}$$

Então, no espaço de Fourier a função de partição (1.80) expressa-se como

$$\ln Z(\beta) = -\sum_{n,\mathbf{p}} \ln\left(\beta^2\left[\mathbf{p}^2 + (\omega_n)^2\right]\right) . \tag{1.83}$$

A soma em n é realizada através da identidade,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln\left[(2\pi n)^2 + \beta^2\omega^2\right] = \beta\omega + 2\ln\left[1 - e^{-\beta\omega}\right] , \tag{1.84}$$

onde $\omega = |\mathbf{p}|$. Assim, a função de partição para o campo eletromagnético assume a forma

$$\ln Z = -2V \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\left[\frac{\beta\omega}{2} + \ln(1 - e^{-\beta\omega})\right] . \tag{1.85}$$

Esta equação descreve um campo bosônico sem massa com 2 estados de polarização em equilíbrio termodinâmico, ou seja, descreve o espectro de energia da radiação de um corpo negro.

Expressando a integral em coordenadas esféricas, $\mathbf{p} \to (\omega, \theta, \phi)$, obtemos

$$\ln Z = -\frac{2V}{(2\pi)^3}\int d\Omega \int_0^\infty d\omega\ \omega^2 \ln(1 - e^{-\beta\omega}), \tag{1.86}$$

[2]Para maiores detalhes ver o apêndice D.1.

onde temos desprezado a contribuição do vácuo e $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ é o elemento de ângulo sólido.

Finalmente, calculando as integrais na Eq. (1.86), encontramos o seguinte resultado para a função de partição do campo eletromagnético

$$\ln Z = V\frac{\pi^2}{45\beta^3} \ . \tag{1.87}$$

1.3.1 Grandezas termodinâmicas

A partir da Eq. (1.87), calculamos a densidade de energia da radiação eletromagnética em equilíbrio termodinâmico (densidade de energia da cavidade ou corpo negro),

$$\frac{U}{V} = \frac{\pi^2}{15\beta^4} = \frac{\pi^2}{15}T^4 = aT^4, \tag{1.88}$$

a qual corresponde à lei de Stefan-Boltzmann, que relaciona a quantidade de energia de um corpo negro com a potência quártica da temperatura, enquanto a constante (a) está relacionada com a constante de Stefan-Boltzmann (σ) por $a = 4\sigma$.

Contudo, a partir da expressão (1.86), a densidade de energia é expressa como

$$u = \frac{1}{4\pi^3}\int d\Omega \int_0^\infty d\omega \ \frac{\omega^3}{e^{\beta\omega}-1}, \tag{1.89}$$

cujo integrando é a densidade de energia por unidade de freqüência e unidade de ângulo sólido:

$$u(\omega,\Omega) = \frac{1}{4\pi^3}\frac{\omega^3}{e^{\beta\omega}-1}, \tag{1.90}$$

mostrando o caráter totalmente anisotrópico da distribuição de energia. Se integrarmos nas freqüências, obtemos a densidade de energia por elemento de ângulo sólido:

$$u_A(\beta,\Omega) = \frac{\pi}{60}\frac{1}{\beta^4}, \tag{1.91}$$

a qual define uma perfeita distribuição isotrópica.

Por outro lado, se na Eq. (1.89) integrarmos o ângulo sólido a densidade de energia é expressa como

$$u = \int_0^\infty d\omega \ \frac{1}{\pi^2}\frac{\omega^3}{e^{\beta\omega}-1} \ , \tag{1.92}$$

onde o integrando é a densidade de energia por unidade de freqüência ou lei de radiação de Planck:

$$u(\omega) = \frac{1}{\pi^2}\frac{\omega^3}{e^{\beta\omega}-1} \ . \tag{1.93}$$

A energia livre de Helmholtz é

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta) = -\frac{\pi^2 V}{45\beta^4} \, . \tag{1.94}$$

A pressão da radiação é dada por

$$P = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = \frac{\pi^2}{45\beta^4} \, , \tag{1.95}$$

ou seja, a luz exerce pressão ($\sim T^4$) que é extremamente pequena a baixas temperaturas e extremamente alta a temperatura elevadas.

Da Eq. (1.92), extraímos a função de distribuição dos fótons

$$n\,(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \, , \tag{1.96}$$

que é a função de distribuição de Bose-Einstein para um sistema com potencial químico nulo.

Da Eq. (1.87), obtemos diretamente a entropia ($S = \ln Z + \beta U$) do sistema:

$$S = \frac{4V\pi^2}{45\beta^3} \, . \tag{1.97}$$

Capítulo 2

A eletrodinâmica de MCFJ

2.1 Introdução

Ao longo das duas últimas décadas tem sido estudado os efeitos produzidos pela possível quebra das simetrias de Lorentz e CPT na descrição das interações fundamentais da natureza.

O estudo dos efeitos da violação da simetria de Lorentz e da simetria CPT no eletromagnetismo foi iniciado por Carroll-Field-Jackiw (CFJ) no início dos anos 90 [9], modificando a eletrodinâmica de Maxwell via a adição na densidade Lagrangiana de um termo do tipo Chern-Simons, $\epsilon^{\mu\nu k\lambda}\left(k_{AF}\right)_{\mu} A_{\nu} F_{\kappa\lambda}$, que além de quebrar a simetria de Lorentz, também quebra a simetria CPT. Nesse termo, o vetor constante $\left(k_{AF}\right)_{\mu}$ é o responsável por fixar um campo de fundo que quebra a simetria de Lorentz.

Desde o trabalho pioneiro de Carroll-Field-Jackiw [9], as propriedades da eletrodinâmica do modelo MCFJ foram amplamente investigadas, abrangendo aspectos distintos, tais como soluções clássicas [29], estudos sobre a existência da radiação Cerenkov [28], entre outros.

Apesar dos mais variados estudos sobre as implicações da violação da simetria de Lorentz no entendimento da natureza, ainda permanecem um tanto inexploradas as propriedades termodinâmicas do setor eletromagnético do modelo padrão estendido. Com esse intuito, neste capítulo estudaremos as propriedades do modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ) em equilíbrio termodinâmico. Nossa abordagem será alicerçada no formalismo do tempo imaginário ou formalismo de Matsubara. Veremos adiante que a VL introduzida no eletromagnetismo de

Maxwell pelo termo tipo Chern-Simons induz uma anisotropia na distribuição de energia da radiação do corpo negro.

O presente capítulo estuda o modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw à temperatura finita segundo o mesmo procedimento realizado no capítulo **1**: inicia-se fazendo a análise da estrutura de vínculos para se definir corretamente a hamiltoniana (positiva-definida); a partir desta análise, calculamos a função de partição no formalismo da integração funcional. Uma vez obtida a função de partição, tem-se acesso a todas as propriedades termodinâmicas do modelo. Finalmente, discutimos a possibilidade de usar os resultados obtidos para impor limites superiores sobre a magnitude do campo de fundo.

2.2 Estrutura hamiltoniana

O MCFJ é definido pela seguinte densidade de lagrangiana,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu k\lambda}\left(k_{AF}\right)_{\mu} A_{\nu}F_{k\lambda}, \tag{2.1}$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ é o tensor do campo eletromagnético, $\epsilon^{\nu\alpha\mu\beta}$ é o tensor de Levi-Civita totalmente anti-simétrico e $\left(k_{AF}\right)_{\mu}$ é o vetor constante do campo de fundo, responsável em gerar a quebra da simetria de Lorentz e CPT.

A equação de Euler-Lagrange para o campo vetorial é

$$\partial_{\nu}F^{\nu\mu} + \left(k_{AF}\right)_{\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \tag{2.2}$$

em que $\tilde{F}^{\nu\alpha} = \frac{1}{2}\epsilon^{\nu\alpha\mu\beta}F_{\mu\beta}$ é o tensor dual. Percebe-se claramente que a Eq. (2.2) apresenta uma modificação na equação de movimento do campo eletromagnético de Maxwell, conseqüência da quebra da simetria de Lorentz.

Para $\mu = 0$:

$$\nabla^2 A_0 - \frac{1}{2}\epsilon^{0kij}\left(k_{AF}\right)_k F_{ij} - \partial_0\left(\partial_k A_k\right) = 0, \tag{2.3}$$

For $\mu = k$:

$$\Box A_k - \partial_k\left(\partial_0 A_0 - \partial_j A_j\right) + \left(k_{AF}\right)_0 B_k + \epsilon_{kji}\left(k_{AF}\right)_j E_i = 0. \tag{2.4}$$

Visando o nosso principal objetivo, que é calcular as correções geradas pela VL para a distribuição de energia do corpo negro, precisamos definir corretamente a função de partição do modelo. Contudo, como será mostrado neste capítulo, o modelo MCFJ é uma teoria de calibre e, para poder calcular a função de partição no formalismo de integração funcional, é preciso analisar *a priori* a sua estrutura hamiltoniana. Com isso esclarecido, a função de partição será calculada no formalismo do tempo imaginário para as teorias de campo à temperatura finita.

Em princípio, para fazermos a análise hamiltoniana deste modelo, devemos calcular o momento canônico conjugado, expresso abaixo por

$$\pi^{\mu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{A}_{\mu}} = -F^{0\mu} - \frac{1}{2}\epsilon^{0\mu\alpha\beta} \left(k_{AF}\right)_{\alpha} A_{\beta}, \tag{2.5}$$

com o qual podemos escrever os parênteses fundamentais de Poisson (PP):

$$\left\{A_{\mu}\left(x\right), \pi^{\nu}\left(y\right)\right\} = \delta_{\mu}^{\nu}\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right). \tag{2.6}$$

Observa-se na Eq. (2.5) que a componente temporal é nula, tal como acontece na lagrangiana de Maxwell. Dessa forma, o momento sendo nulo leva a um vínculo primário dado por

$$\phi_1 = \pi^0 \approx 0. \tag{2.7}$$

Para a componente espacial, têm-se a seguinte relação dinâmica

$$\pi^{k} = \dot{A}_{k} - \partial_{k}A_{0} - \frac{1}{2}\epsilon^{0kij}\left(k_{AF}\right)_{i} A_{j}, \tag{2.8}$$

que não constitui um vínculo, já que a velocidade ($\dot{A}_k$) é expressa em função dos momentos canônico e dos campos.

A densidade hamiltoniana canônica, então, assume a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_C \;=\; & \frac{1}{2}\left(\pi^{\kappa}\right)^2 + \pi^{\kappa}\partial_{\kappa}A_0 + \frac{1}{8}\left[\epsilon^{0\kappa ij}\left(k_{AF}\right)_i A_j\right]^2 + \frac{1}{2}\pi^{\kappa}\epsilon^{0\kappa ij}\left(k_{AF}\right)_i A_j + \\ & + \frac{1}{4}\left(F_{j\kappa}\right)^2 + \frac{1}{4}\epsilon^{0\kappa ij}\left[\left(k_{AF}\right)_0 A_{\kappa} - \left(k_{AF}\right)_{\kappa} A_0\right] F_{ij}\ . \end{aligned} \tag{2.9}$$

Pelo procedimento de Dirac, neste momento, é introduzido o hamiltoniano primário obtido pela soma da hamiltoniana canônica com o vínculo primário segundo a expressão:

$$H_P = H_C + \int d^3\mathbf{y}\ C\pi^0, \tag{2.10}$$

onde C é o multiplicador de Lagrange bosônico *a priori* arbitrário.

A condição de consistência para o vínculo primário, $\dot{\pi}^0 = \{\pi^0, H_P\} \approx 0$, gera um vínculo secundário escrito como

$$\phi_2 = \partial_k \pi^k + \frac{1}{4}\epsilon^{0kij} \left(k_{AF}\right)_k F_{ij} \approx 0, \tag{2.11}$$

que revela uma modificação da lei de Gauss de Maxwell $\left(\partial_k \pi^k \approx 0\right)$ pelo campo de fundo que controla tanto a quebra da simetria CPT como a de Lorentz. Isto pode ser melhor visto em termos dos campos elétrico e magnético: $\nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{k}_{AF} \cdot \mathbf{B} = 0$. Com efeito, vemos que para um campo de fundo puramente tipo-tempo, $k_{AF} = \left(\left(k_{AF}\right)_0, \mathbf{0}\right)$, não há modificação da lei de Gauss. O cenário muda para o caso puramente tipo-espaço $k_{AF} = (0, \mathbf{k}_{AF})$, sendo a lei de Gauss modificada pela presença do campo de fundo, que estabelece o acoplamento entre os setores elétrico e magnético na eletrodinâmica de MCFJ [9, 29].

A condição de consistência da lei de Gauss modificada é $\dot{\phi}_2 = \{\phi_2, H_p\} = 0$. Portanto, o vínculo secundário é automaticamente preservado e o modelo não possui mais vínculos. Entretanto, o multiplicador de Lagrange bosônico permanece indeterminado, sendo um atributo para a existência de vínculos de primeira classe na teoria. Isto pode ser verificado pela computação dos parênteses de Poisson (PP) entre os vínculos obtidos $\{\phi_1, \phi_2\}$, cujo resultado é nulo. Assim, tem-se o conjunto de vínculos de primeira classe

$$\phi_1 = \pi^0 \approx 0 \quad , \qquad \phi_2 = \partial_k \pi^k + \frac{1}{4}\epsilon^{0kij} \left(k_{AF}\right)_k F_{ij} \approx 0, \tag{2.12}$$

que definem o modelo MCFJ como uma teoria de calibre que possui a mesma estrutura de vínculos do eletromagnetismo de Maxwell: somente vínculos de primeira classe.

2.2.1 Equações de movimento e condições de fixação de calibre

Seguindo com a conjectura de Dirac, define-se o hamiltoniano estendido (H_E) adicionando todos os vínculos de primeira classe ao hamiltoniano primário:

$$H_E = H_C + \int dy \left[C\phi_1 + D\phi_2\right]. \tag{2.13}$$

Esta hamiltoniana é a responsável pela dinâmica do sistema vinculado. Com ela, podemos calcular a equação de movimento de qualquer observável da teoria. *A priori*, para cada vínculo adicionado na hamiltoniana, foi introduzido um multiplicador de Lagrange arbitrário. Assim, com esse hamiltoniano, pode-se computar a evolução temporal das variáveis canônicas do sistema. Logo, a evolução temporal do campo A_μ resulta ser

$$\dot{A}_0 \;=\; \{A_0, H_E\} = C, \tag{2.14}$$

$$\dot{A}_k \;=\; \{A_k, H_E\} = \pi^k + \partial_k A_0 + \frac{1}{2}\epsilon^{0kij}\left(k_{AF}\right)_i A_j - \partial_k D, \tag{2.15}$$

mostrando que a dinâmica tanto de A_0 como de A_k permanece indeterminada, pois ainda depende dos parâmetros arbitrários C e D.

Para π^0, obtemos

$$\dot{\pi}^0 = \partial_k \pi^k + \frac{1}{4}\epsilon^{0kij}\left(k_{AF}\right)_k F_{ij} = \phi_2 \approx 0, \tag{2.16}$$

e usando a equação (2.15) para π^k, conseguimos a seguinte equação

$$\partial_k F^{0k} + \frac{1}{2}\epsilon^{0ikj}\left(k_{AF}\right)_i F_{kj} + \nabla^2 D \approx 0, \tag{2.17}$$

que é a equação de movimento advinda da lagrangiana (2.3), se e somente se, $\nabla^2 D = 0$.

Para π^k, obtemos

$$\dot{\pi}^k = \partial_j F^{jk} + \frac{1}{2}V_\alpha \epsilon^{k\alpha\mu\nu}F_{\mu\nu} - \epsilon^{0kli}V_l \partial_0 A_i + \frac{1}{2}\epsilon^{0kli}V_l\left(\partial_0 A_i + \partial_i D + \partial_i D\right). \tag{2.18}$$

Usando a equação (2.15) para π^k, conseguimos a seguinte equação de movimento

$$\partial_\alpha F^{\alpha k} + \frac{1}{2}V_\alpha \epsilon^{k\alpha\mu\nu}F_{\mu\nu} + \epsilon^{0kli}V_l \partial_i D - \partial_0 \partial_k D = 0, \tag{2.19}$$

que resulta igual à equação advinda da lagrangiana (2.4) se $\partial_k D = 0$.

Pode-se notar que a Eq. (2.15) é similar à equação lagrangiana (2.8), tomando-se D igual a zero. Portanto, deve-se impor uma condição de calibre de tal forma que se fixe $D = 0$. Isto é uma decorrência do algoritmo de Dirac, que requer um número de condições de calibre igual ao número de vínculos de primeira classe na teoria. Entretanto, estas condições devem ser compatíveis com as equações de Euler-Lagrange, em que se deve fixar $D = 0$ e, logo, determinar o multiplicador de Lagrange C. Devemos observar que, se as condições de calibre fixam corretamente os multiplicadores de Lagrange, então o conjunto formado pelas condições de calibre e os vínculos de primeira classe é de segunda classe.

Assim, precisa-se fixar os multiplicadores de Lagrange C e D de tal modo que as equações de movimento hamiltonianas sejam equivalentes às equações de movimento lagrangianas e, desse modo, a Física descrita por ambos os formalismos seja a mesma.

2.2.2 Calibre de Radiação

Da equação (2.14), podemos dizer que A_0 é um multiplicador de Lagrange, logo, podemos usar a equação de movimento lagrangiana (2.3) para escolher, de algum modo, as condições de calibre. Assim, observamos que se escolhermos como a primeira condição de gauge

$$\varphi_1 = \nabla^2 A_0 - \frac{1}{2}\epsilon^{0kij}\left(k_{AF}\right)_k F_{ij} \approx 0, \tag{2.20}$$

a equação de movimento resulta igual a $\partial_0\left(\partial_k A_k\right) = 0$. Portanto, a quantidade $\partial_k A_k$ é preservada no tempo e, desse modo, escolhemos como a segunda condição de gauge

$$\varphi_2 = \partial_k A_k \approx 0, \tag{2.21}$$

cuja condição de consistência, $\dot{\varphi}_2 = \{\varphi_2, H_E\} \approx 0$, proporciona a seguinte relação

$$\underbrace{\nabla^2 A_0 - \frac{1}{2}\epsilon^{0kij}\left(k_{AF}\right)_k F_{ij}}_{\varphi_1 \approx 0} - \nabla^2 D \approx 0\ . \tag{2.22}$$

Assim, obtemos $\nabla^2 D = 0$. Considerando o fato que $\partial_k D = 0$ e as condições de contorno (os campos se anulam no infinito), obtemos que $D = 0$.

A condição de consistência para $\varphi_1 : \dot{\varphi}_1 = \{\varphi_1, H_E\} \approx 0$, permite obter

$$\nabla^2 C - \frac{1}{2}\epsilon^{0kij}\left(k_{AF}\right)_k \dot{F}_{ij} = 0, \tag{2.23}$$

uma equação que determina o multiplicador C.

Assim, foram determinados todos os multiplicadores de Lagrange do modelo MCFJ via as seguinte condições de calibre

$$\psi_1 = \partial_k A_k \approx 0 \quad , \quad \psi_2 = \nabla^2 A_0 - \frac{1}{2}\epsilon^{0kij}\left(k_{AF}\right)_k F_{ij} \approx 0. \tag{2.24}$$

O conjunto $\Sigma_a = \{\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2\}$ é de segunda classe e a matriz dos PP definida como $M_{ab}(x,y) = \{\Sigma_a(x), \Sigma_b(y)\}$ é não-singular,

$$M\left(x,y\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\nabla^2 \\ 0 & 0 & \nabla^2 & 0 \\ 0 & -\nabla^2 & 0 & 0 \\ \nabla^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{2.25}$$

com determinante dado por

$$\det M(x,y) = \det(-\nabla^2)^4. \tag{2.26}$$

Sua inversa é computada como sendo

$$M^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ 0 & 0 & G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & 0 \\ 0 & -G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & 0 & 0 \\ G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.27}$$

escrita em termos da função de Green para a equação de Poisson dada pelas equações (1.33) e (1.34).

Nesse ínterim, será necessário garantir que o conjunto dos vínculos de primeira classe e suas condições de calibre sejam igualdades fortes no espaço de fase reduzido. Dentro do espaço de fase reduzido, os parênteses de Poisson não são estabelecidos como identidades. Então, é preciso definir uma nova operação de parênteses satisfazendo as mesmas propriedades que os de Poisson, isso é obtido definindo os parêntese de Dirac, $\{.,.\}_D$, para o modelo.

2.2.3 Parênteses de Dirac

Os parênteses de Dirac são definidos como

$$\begin{aligned} \{A(x), B(y)\}_D &= \{A(x), B(y)\} \\ &\quad - \int d\mathbf{u} \int d\mathbf{v} \{A(x), \Sigma_c(u)\} \left[M^{-1}(u,v)\right]_{cd} \{\Sigma_d(v), B(y)\}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

onde $\Sigma_a = \{\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2\}$ e $M^{-1}(x,y)$ é a matriz inversa definida na Eq. (2.27).

Assim, os parênteses de Dirac não nulos dão a seguinte álgebra para os campos do modelo MCFJ:

$$\{A_k(x), \pi_j(y)\}_D = -\left[\delta_{kj} - \frac{\partial_k \partial_j}{\nabla^2}\right] \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{2.29}$$

$$\left\{\pi^k(x), \pi^j(y)\right\}_D = \frac{1}{2}\epsilon^{0jli} (k_{AF})_l \partial_i^x \partial_k^x G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \frac{1}{2}\epsilon^{0kli} (k_{AF})_l \partial_i^x \partial_j^x G(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{2.30}$$

$$\left\{A_0(x), \pi^k(y)\right\}_D = -\epsilon^{0kli} (k_{AF})_l \partial_i^x G(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{2.31}$$

Um fato importante é observar que, no calibre de Coulomb, a álgebra da eletrodinâmica de Maxwell (1.36) apresenta como único parênteses de Dirac não nulo o dado pela Eq. (2.29). A quebra das simetrias CPT e Lorentz gera uma modificação na álgebra dos campos e faz que a eletrodinâmica de MCFJ apresente uma relação de não-comutatividade para os momentos transversos (2.30). Essa não comutatividade dos momentos transversos fornece a diferença entre os modelos e é de fundamental importância em nosso estudo do comportamento termodinâmico do modelo MCFJ.

Existe na literatura um modelo proposto por A. H Fatollahi e M. Hajirahimi [30] para estudar a radiação do corpo negro no contexto da quebra da simetria de Lorentz. Esse modelo consiste em deformar a álgebra do campo eletromagnético pela seguinte álgebra não-comutativa do campo de calibre

$$[A_j(x), A_k(y)] = i l_{jk} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \tag{2.32}$$

$$[A_j(x), \pi_k(y)] = i \delta_{jk} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \tag{2.33}$$

$$[\pi_j(x), \pi_k(y)] = 0. \tag{2.34}$$

Comparando as diferentes estruturas algébricas, pode-se inferir que as propriedades do modelo MCFJ são diferentes da teoria de Maxwell livre e da abordagem do campo de calibre não-comutativo. Dessa forma, estes modelos devem carregar diferentes propriedades termodinâmicas, como será exposto mais adiante.

Dado que os parênteses de Dirac atuam no espaço de fase reduzido, o hamiltoniano canônico (2.9) torna-se:

$$H_C = \int d^3y \left[\frac{1}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 + \frac{1}{2} \left(k_{AF}\right)_0 \mathbf{A}.\mathbf{B} \right], \tag{2.35}$$

que está expresso em função do campo elétrico E, do campo magnético B, do potencial vetor A e da componente temporal do campo de fundo $\left(k_{AF}\right)_0$. Uma observação pertinente é que um campo de fundo puramente tipo-tempo não assegura um hamiltoniano positivo-definido, o que pode ser obtido apenas para o caso do background puramente tipo-espaço (para o qual se tem uma teoria quântica bem definida). De fato, neste caso o modelo pode ser quantizado no formalismo canônico operatorial, uma vez que as relações de comutação canônica para os campos quânticos são obtidos através dos parênteses de Dirac (pelo princípio de correspondência). Ele também pode ser quantizado via o formalismo de integração funcional, tal como fizemos ao abordar a eletrodinâmica de Maxwell. Seguindo essa última quantização, computa-se a função de partição e analisam-se as propriedades termodinâmicas decorrentes do modelo.

2.3 Função de partição do modelo de MCFJ

Para estudar as propriedades termodinâmicas do modelo MCFJ, o objeto de interesse é a função de partição, sendo que a análise hamiltoniana realizada na seção anterior permite defini-la corretamente. Como a teoria somente contém vínculos bosônicos, a função de partição é dada por

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\pi^\mu \left(\prod_a \delta(\Sigma_a) \right) \Big| \det\{\Sigma_a(x), \Sigma_b(y)\} \Big|^{1/2} \exp\left\{ \int_\beta dx \ \left(i\pi^\mu \partial_\tau A_\mu - \mathcal{H}_C \right) \right\}. \tag{2.36}$$

onde $\Sigma_a = \{\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2\}$ é o conjunto de segunda classe formado pelos vínculos de primeira classe e as condições de gauge, $M_{ab} = [\Sigma_a(x), \Sigma_b(y)]$ é a matriz dos vínculos dada pela Eq. (2.25), cujo determinante é $\det M(x,y) = \det(-\nabla^2)^4$, $\mathcal{H}_C$ é a densidade de hamiltoniano canônico dado por (2.9). Dado o caráter bosônico do campo de calibre, sua integração funcional deve ser feita sobre todos os campos satisfazendo condições periódicas na variável τ: $A(\tau, \mathbf{x}) = A(\tau + \beta, \mathbf{x})$. Usa-se a notação simplificada, $\int_\beta dx$, para a medida de integração no espaço euclideano, $\int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x}$.

Primeiramente, calcula-se a integração sobre o campo π^0, que é trivial. Para poder integrar no momento canônico π^k, usamos a representação de Fourier para $\delta(\phi_2)$,

$$\delta(\phi_2) = \int \mathcal{D}\Lambda \ \exp\left\{ i \int_\beta dx \, \Lambda \left(\partial_k \pi^k + \frac{1}{4}\epsilon^{0kij} \left(k_{AF}\right)_k F_{ij} \right) \right\}, \tag{2.37}$$

que ao ser substituída na função de partição acima,implica:

$$
\begin{aligned}
Z(\beta) &= \det\left(-\nabla^2\right)^2 \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Lambda \mathcal{D}\pi^k \ \delta(\psi_1)\,\delta(\psi_2) \\
&\times \exp\left\{\int_\beta dx \ -\frac{1}{2}\left(\pi^k\right)^2 + i\pi^k\left[\partial_\tau A_k - \partial_k\Lambda + i\partial_k A_0 + \frac{i}{2}\epsilon^{0kij}\left(k_{AF}\right)_i A_j\right]\ \right\} \\
&\times \exp\left\{\int_\beta dx \ \frac{i}{4}\Lambda\epsilon^{0kij}\left(k_{AF}\right)_k F_{ij} - \frac{1}{4}\left(F_{jk}\right)^2 - \frac{1}{8}\left[\epsilon^{0kij}\left(k_{AF}\right)_i A_j\right]^2\right\} \\
&\times \exp\left\{\int_\beta dx \ -\frac{1}{4}\epsilon^{0kij}\left[\left(k_{AF}\right)_0 A_k - \left(k_{AF}\right)_k A_0\right] F_{ij}\right\},
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

Fazendo a seguinte mudança $\Lambda \to \Lambda + iA_0$ e, simplificando, temos:

$$
\begin{aligned}
Z(\beta) &= \det\left(-\nabla^2\right)^2 \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Lambda \mathcal{D}\pi^k \ \delta(\psi_1)\,\delta(\psi_2) \\
&\times \exp\left\{\int_\beta dx \ -\frac{1}{2}\left(\pi^k\right)^2 + i\pi^k\left[\partial_\tau A_k - \partial_k\Lambda + \frac{i}{2}\epsilon^{0kij}\left(k_{AF}\right)_i A_j\right]\ \right\} \\
&\times \exp\left\{\int_\beta dx \ -\frac{1}{4}\left(F_{jk}\right)^2 + \frac{i}{4}\Lambda\epsilon^{0kij}\left(k_{AF}\right)_k F_{ij}\right\} \\
&\times \exp\left\{\int_\beta dx \ -\frac{1}{4}\epsilon^{0kij}\left(k_{AF}\right)_0 A_k F_{ij} - \frac{1}{8}\left[\epsilon^{0kij}\left(k_{AF}\right)_i A_j\right]^2\right\}.
\end{aligned}
$$

Realizando a integração sobre o campo π^k, resulta

$$
\begin{aligned}
I_{\pi^k} &= \int \mathcal{D}\pi^k \exp\left\{\int_\beta dx \ -\frac{1}{2}\left(\pi^k\right)^2 + i\pi^k\left[\partial_\tau A_k - \partial_k\Lambda + \frac{i}{2}\epsilon^{0kij}\left(k_{AF}\right)_i A_j\right]\right\} \\
&= N\exp\left\{\int_\beta dx \ -\frac{1}{2}\left(\partial_\tau A_k - \partial_k\Lambda\right)^2 + \frac{1}{8}\left[\epsilon^{0kij}\left(k_{AF}\right)_i A_j\right]^2\right\} \\
&\times \exp\left\{\int_\beta dx \ -\frac{i}{2}\left(\partial_\tau A_k - \partial_k\Lambda\right)\epsilon^{0kij}\left(k_{AF}\right)_i A_j\right\}\ ,
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

de modo que a função de partição assume a seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
Z &= \left[\det(-\nabla^2)\right]^2 \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Lambda \delta(\psi_1)\delta(\psi_2) \\
&\times \exp\left\{\int dx - \frac{1}{2}\left(\partial_\tau A_k - \partial_k\Lambda\right)^2 - \frac{i}{2}(\partial_\tau A_k - \partial_k\Lambda)\epsilon^{0kij}\left(k_{AF}\right)_i A_j\right\} \\
&\times \exp\left\{\int_\beta dx \frac{i}{4}\Lambda\epsilon^{0kij}\left(k_{AF}\right)_k F_{ij} - \frac{1}{4}(F_{jk})^2 - \frac{1}{4}\epsilon^{0kij}\left(k_{AF}\right)_0 A_k F_{ij}\right\}.
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

Agora, realizamos a integração sobre o campo A_0,

$$
\int \mathcal{D}A_0 \ \delta(\psi_2) = \int \mathcal{D}A_0 \ \delta\left(\nabla^2 A_0 - \frac{1}{2}\epsilon_k^{0kij}\left(k_{AF}\right)_k F_{ij}\right) = \left[\det\left(-\nabla^2\right)\right]^{-1}.
$$

Uma vez que renomeia-se $\Lambda = A_\tau$ e $(k_{AF})_0 = -i\,(k_{AF})_\tau$, e fazendo $\epsilon^{0kij} = i\epsilon_{\tau kij}$ tal que $\epsilon_{\tau 123} = -i$, consegue-se a função de partição para o modelo de MCFJ no calibre de Coulomb:

$$Z(\beta) = N \det\left(-\nabla^2\right)\int \mathcal{D}A_a\ \delta(\partial_k A_k) \exp\left\{\int_\beta dx \left[-\frac{1}{4}F_{ab}F_{ab} - \frac{1}{4}\epsilon_{abcd}\,(k_{AF})_a\,A_b F_{cd}\right]\right\}, \quad (2.41)$$

onde $a,\ b,\ c,\ d = \tau,\ 1,\ 2,\ 3$. A função de partição no calibre de Coulomb não é explicitamente covariante. De fato, é conhecido da literatura que se a covariância é explícita, o processo do cálculo torna-se mais simples. O procedimento para passar de um calibre não-covariante para um covariante (por exemplo, o calibre de Lorenz $\partial_a A_a = 0$) pode ser implementado usando a técnica de Faddeev-Popov [24], assim como foi feito no capítulo anterior para o caso do eletromagnetismo de Maxwell .

Com efeito, aplicando o ansatz de Faddeev-Popov, no gauge de Lorenz generalizado (1.72), a função de partição é expressa como

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}A_a \delta\left(-\frac{1}{\sqrt{\xi}}\partial_a A_a + f\right) \det\left|\frac{-\Box}{\sqrt{\xi}}\right| \exp\left\{\int_\beta dx - \frac{1}{4}F_{ab}F_{ab} - \frac{1}{4}\epsilon_{abcd}\,(k_{AF})_a\,A_b F_{cd}\right\}. \quad (2.42)$$

Como a função $Z(\beta)$ é independente de f, podemos eliminar f segundo o seguinte procedimento: integramos sobre o campo f com a função peso $\exp\left(-\frac{1}{2}\int_\beta dx\ f^2\right)$. Após uma integração por partes na exponencial, a função de partição assume a forma,

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}A_a \det\left(\frac{-\Box}{\sqrt{\xi}}\right) \exp\left\{\int_\beta dx - \frac{1}{2}A_a\left[-\Box\delta_{ab} - (\frac{1}{\xi} - 1)\partial_a\partial_b - S_{ab}\right]A_b\right\}, \quad (2.43)$$

onde definimos o operador $S_{ab} = \epsilon_{abcd}\,(k_{AF})_c\,\partial_d$ e $k_{AF} = (0, \mathbf{k}_{AF})$.

A integração sobre o campo de calibre fornece

$$Z(\beta) = \det\left(\frac{-\Box}{\sqrt{\xi}}\right)\left[\det\left(-\Box\delta_{ab} - (\frac{1}{\xi} - 1)\partial_a\partial_b - S_{ab}\right)\right]^{-1/2}. \quad (2.44)$$

Com mais um pouco de álgebra, obtém-se[1]

$$\det\left(-\Box\delta_{ab} - S_{ab}\right) = \det\left(-\frac{\Box}{\sqrt{\xi}}\right)^2 \det\left[\Box^2 - (\mathbf{k}_{AF})^2\,\Box + (\mathbf{k}_{AF}\cdot\nabla)^2\right]. \quad (2.45)$$

Substituindo em (2.44), chega-se a seguinte expressão para a função de partição

$$\ln Z(\beta) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\left[\Box^2 - (\mathbf{k}_{AF})^2\,\Box + (\mathbf{k}_{AF}\cdot\nabla)^2\right]\ . \quad (2.46)$$

[1]Para maiores detalhes ver apêndice D.2.

Como esperado numa teoria de calibre, a função de partição é independente do parâmetro de calibre. Ainda, a função de partição é decomposta como a contribuição de dois modos distintos de polarização:

$$
\begin{aligned}
\ln Z(\beta) &= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\left[-\Box+\frac{(\mathbf{k}_{AF})^2}{2}+\sqrt{\frac{(\mathbf{k}_{AF})^4}{4}-(\mathbf{k}_{AF}\cdot\nabla)^2}\right] \\
&\quad -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\left[-\Box+\frac{(\mathbf{k}_{AF})^2}{2}-\sqrt{\frac{(\mathbf{k}_{AF})^4}{4}-(\mathbf{k}_{AF}\cdot\nabla)^2}\right],
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

Obviamente, se $\mathbf{k}_{AF}=0$, obtemos a função de partição do campo eletromagnético de Maxwell (1.80), $-\mathrm{Tr}\ln(-\Box)$, deduzida na íntegra no capítulo **2**.

Como continuação, calculamos as contribuições de cada modo presente no modelo, esclarecendo aquela advinda do termo tipo Chern-Simons. Para atender nossos propósitos, computa-se o traço funcional na base de Fourier do campo de calibre

$$
A_a(\tau,\mathbf{x})=\left(\frac{\beta}{V}\right)^{1/2}\sum_{n,\mathbf{p}}\exp i\left(\omega_n\tau+\mathbf{x}.\mathbf{p}\right)\tilde{A}_a(n,\mathbf{p}),
\tag{2.48}
$$

onde ω_n são as freqüências de Matsubara bosônicas definidas por

$$
\omega_n=2n\frac{\pi}{\beta},\quad \text{para}\quad n=0,1,2\cdots,
\tag{2.49}
$$

e V é o volume do sistema.

2.3.1 Contribuição dos modos

Na representação de Fourier, a função de partição (2.47) é expressa como

$$
\begin{aligned}
\ln Z(\beta) &= -\frac{1}{2}\sum_{n,\mathbf{p}}\ln\beta^2\left[(\omega_n)^2+\mathbf{p}^2+\frac{(\mathbf{k}_{AF})^2}{2}+\sqrt{\frac{(\mathbf{k}_{AF})^4}{4}+(\mathbf{k}_{AF}\cdot\mathbf{p})^2}\right] \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{n,\mathbf{p}}\ln\beta^2\left[(\omega_n)^2+\mathbf{p}^2+\frac{(\mathbf{k}_{AF})^2}{2}-\sqrt{\frac{(\mathbf{k}_{AF})^4}{4}+(\mathbf{k}_{AF}\cdot\mathbf{p})^2}\right].
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

Em coordenadas esféricas, $|\mathbf{p}|=\omega$, $|\mathbf{k}_{AF}|=k_{AF}$, $\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}_{AF}=pk_{AF}\cos\theta$, podemos separar a função de partição proveniente da quebra da simetria de Lorentz em duas partes, como apresentamos a seguir:

$$\ln Z(\beta) = \ln Z_{+}(\beta) + \ln Z_{-}(\beta), \tag{2.51}$$

onde

$$\ln Z_{\pm}(\beta) = -\frac{1}{2}\frac{V}{(2\pi)^3}\int d\Omega \int_0^{\infty} d\omega\ \omega^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \beta^2 \left[(\omega_n)^2 + \omega_{\pm}^2\right], \tag{2.52}$$

com

$$\omega_{\pm}^2 = \omega^2 + \frac{(k_{AF})^2}{2} \pm \sqrt{(\omega k_{AF})^2 \cos^2\theta + \frac{(k_{AF})^4}{4}}. \tag{2.53}$$

A soma (2.52) pode ser calculada exatamente usando a Eq. (1.84), assim obtém-se

$$\ln Z_{\pm}(\beta) = -\frac{1}{2}\frac{V}{(2\pi)^3}\int d\Omega \int_0^{\infty} d\omega\ \omega^2 \left[\beta\omega_{\pm} - \ln 2 + 2\ln\left(1 - e^{-\beta\omega_{\pm}}\right)\right]. \tag{2.54}$$

Desprezando as contribuições do vácuo, têm-se

$$\ln Z_{\pm}(\beta) = -\frac{V}{(2\pi)^3}\int d\Omega \int_0^{\infty} d\omega\ \omega^2 \ln\left(1 - e^{-\beta\omega_{\pm}}\right). \tag{2.55}$$

Observa-se que cada modo contribui de forma diferente para a função de partição.

Considerando $(\beta k_{AF}) \ll 1$, e expandindo em termos deste parâmetro, obtém-se

$$\begin{aligned} \ln\left(1 - e^{-\beta\omega_{\pm}}\right) &= \ln\left(1 - e^{-\beta\omega}\right) \pm \frac{1}{2}\frac{e^{-\beta\omega}\cos\theta}{1 - e^{-\beta\omega}}(\beta k_{AF}) \\ &+ \frac{1}{8}\left[\frac{e^{-\beta\omega}\left[2 - (1+\beta\omega)\cos^2\theta\right]}{\beta\omega\left(1 - e^{-\beta\omega}\right)} - \frac{e^{-2\beta\omega}\cos^2\theta}{\left(1 - e^{-\beta\omega}\right)^2}\right](\beta k_{AF})^2 + \mathcal{O}\left((k_{AF})^3\right). \end{aligned} \tag{2.56}$$

Substituindo na função de partição, obtemos

$$\begin{aligned} \ln Z &= -2\frac{V}{(2\pi)^3}\int d\Omega \int_0^{\infty} d\omega\ \omega^2 \ln\left(1 - e^{-\beta\omega}\right) \\ &- \frac{1}{2}\frac{V}{(2\pi)^3}(k_{AF})^2 \int d\Omega \int_0^{\infty} d\omega\ \frac{\beta\omega e^{-\beta\omega}}{\left(1 - e^{-\beta\omega}\right)} + \\ &+ \frac{1}{4}\frac{V}{(2\pi)^3}(k_{AF})^2 \int d\Omega \cos^2\theta \int_0^{\infty} d\omega\ \left[\frac{\beta\omega(1+\beta\omega)e^{-\beta\omega}}{1 - e^{-\beta\omega}} + \frac{(\omega\beta)^2 e^{-2\beta\omega}}{\left(1 - e^{-\beta\omega}\right)^2}\right]. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Fazendo uma integração por partes na variável ω no segundo e terceiro termo, tem-se que a função de partição a segunda ordem em k_{AF} é

$$\begin{aligned} \ln Z &= -2\frac{V}{(2\pi)^3}\int d\Omega \int_0^{\infty} d\omega\ \omega^2 \ln\left(1 - e^{-\beta\omega}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{V}{(2\pi)^3}(k_{AF})^2 \int d\Omega \left(1 - \frac{3}{2}\cos^2\theta\right) \int_0^{\infty} d\omega \ln\left(1 - e^{-\beta\omega}\right). \end{aligned} \tag{2.58}$$

Assim percebe-se que a contribuição linear do parâmetro controlando a VL é cancelada quando a soma dos modos é realizada. O primeiro termo na expansão é a contribuição maxwelliana à função de partição e o segundo termo é a contribuição da VL à segunda ordem em k_{AF} tendo dois termos (um de caráter isotrópico e um outro anisotrópico).

Integrando sob as variáveis angulares e na freqüência, obtemos a função de partição do modelo de MCFJ como

$$\ln Z\left(\beta\right) = \frac{\pi^2}{45\beta^3}V - \frac{\left(k_{AF}\right)^2}{48\beta}V. \tag{2.59}$$

O primeiro termo representa a contribuição de Maxwell e o segundo termo advém do termo tipo Chern-Simons da eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw.

2.3.2 Grandezas termodinâmicas do modelo de MCFJ

Da Eq. (2.59), pode-se calcular o valor esperado da energia por unidade de volume (sob o ensemble termodinâmico) para este modelo com quebra de Lorentz, obtendo-se:

$$u_{MCFJ} = -\frac{1}{V}\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{\pi^2}{15\beta^4} - \frac{\left(k_{AF}\right)^2}{48\beta^2}, \tag{2.60}$$

Contudo, a partir da Eq. (2.58), vemos que a densidade de energia é

$$u_{MCFJ} = \frac{1}{4\pi^3}\int d\Omega \int_0^\infty d\omega \; \frac{\omega^3}{e^{\beta\omega}-1}\left[1 - \frac{\left(k_{AF}\right)^2}{4\omega^2}\left(1 - \frac{3}{2}\cos^2\theta\right)\right], \tag{2.61}$$

cujo integrando é a densidade de energia da radiação por unidade de freqüência e unidade de ângulo sólido:

$$u_{MCFJ}\left(\omega,\Omega\right) = \frac{1}{4\pi^3}\frac{\omega^3}{e^{\beta\omega}-1}\left[1 - \frac{\left(k_{AF}\right)^2}{4\omega^2}\left(1 - \frac{3}{2}\cos^2\theta\right)\right]\;. \tag{2.62}$$

Integrando as variáveis angulares em (2.61), obtém-se

$$u_{MCFJ} = \int_0^\infty d\omega \; \frac{1}{\pi^2}\frac{\omega^3}{e^{\beta\omega}-1}\left(1 - \frac{\left(k_{AF}\right)^2}{8\omega^2}\right)\;. \tag{2.63}$$

O integrando é a densidade de radiação por unidade de freqüência para o modelo MCFJ, ou seja, a lei de radiação equivalente àquela de Planck:

$$u_{MCFJ}\left(\omega\right) = \frac{1}{\pi^2}\frac{\omega^3}{e^{\beta\omega}-1}\left(1 - \frac{\left(k_{AF}\right)^2}{8\omega^2}\right). \tag{2.64}$$

O primeiro termo é a lei de radiação de Planck para o eletromagnetismo

$$u_A(\omega) = \frac{1}{\pi^2} \frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1} \tag{2.65}$$

enquanto o segundo termo fornece a correção da VL para a lei de radiação de Planck.

Da Eq. (2.61) integrando somente nas freqüências, determinamos a contribuição para a densidade de energia através do ângulo sólido ($d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$),

$$u_{MCFJ}(\beta, \Omega)\, d\Omega = \left[\frac{\pi}{60}\frac{1}{\beta^4} - \frac{(k_{AF})^2}{96\pi\beta^2}\left(1 - \frac{3}{2}\cos^2\theta\right)\right] d\Omega, \tag{2.66}$$

pelo qual observa-se a presença manifesta do fator de anisotropia ($\cos^2\theta$). Fica evidente que o campo de fundo introduz uma dependência angular na distribuição de energia. A distribuição de energia angular em segunda ordem de $(k_{AF})^2$ fornece uma contribuição quadrupolar ($l = 2$) para o espectro angular de energia, revelando uma sutil propriedade: a contribuição da VL para o espectro é anisotrópica e produz uma contribuição máxima perpendicular à direção do background. Da Eq. (2.47) é fácil mostrar que a contribuição em ordem de $(k_{AF})^{2n}$ para o espectro angular de energia da radiação do corpo negro deve ser considerada. Isto fornece contribuições até ordem $l = 2n$ que podem ser associadas a uma dependência na temperatura em T^{4-2n}. Isto garante que, para altas temperaturas, as contribuições relevantes advêm somente dos primeiros termos da expansão.

A densidade de energia do modelo MCFJ (2.60), escrita em termos da temperatura do corpo negro, é

$$u_{MCFJ} = \frac{\pi^2}{15}T^4 - \frac{(k_{AF})^2}{48}T^2. \tag{2.67}$$

A equação acima mostra uma correção para a lei de Stefan-Boltzmann em ordem de $(k_{AF})^2$, com uma dependência na temperatura em T^2. Tal correção é potencialmente mais significativa em baixas temperaturas. O resultado (2.67) pode ser reescrito de duas maneiras. A primeira é

$$u_{MCFJ} = \bar{a}(T)\, T^4, \tag{2.68}$$

com $\bar{a}(T)$ sendo um coeficiente efetivo que contém a temperatura e a modificação da VL é

$$\bar{a} = a\left(1 - a^{(1)}\frac{(k_{AF})^2}{T^2}\right), \tag{2.69}$$

onde

$$a = \frac{\pi^2}{15} \quad , \qquad a^{(1),} = \frac{5}{16\pi^2}. \tag{2.70}$$

Ver apêndice **A** para suas expressões no SI.

A segunda forma para a lei de Stefan-Boltzmann é

$$u_{MCFJ} \approx a\left(T^4 - 4T^3\delta T\right), \tag{2.71}$$

em que δT é a flutuação da temperatura. Estas duas formas de expressar a lei de Stefan-Boltzmann serão úteis para obtermos os limites superiores do parâmetro da VL, como será visto nas próximas seções.

A energia livre de Helmholtz é expressa como

$$F = -\frac{1}{\beta}\ln Z(\beta) = -\frac{\pi^2}{45\beta^4}V + \frac{(k_{AF})^2}{48\beta^2}V.$$

A pressão de radiação é dada por

$$P = \frac{\pi^2}{45\beta^4} - \frac{(k_{AF})^2}{48\beta^2}, \tag{2.72}$$

enquanto a entropia vale

$$S = \frac{4\pi^2}{45\beta^3}V - \frac{(k_{AF})^2}{24\beta}V\ . \tag{2.73}$$

À primeira ordem no background, observamos que algumas propriedades termodinâmicas como a densidade de energia, a pressão de radiação e a entropia diminuem devido aos efeitos vindos da quebra das simetrias de Lorentz e CPT. Já a energia livre de Helmholtz aumenta.

2.4 Primeiro limite superior para o campo de fundo

Inicialmente estabelece-se um limite para o parâmetro que gera a quebra de Lorentz, o vetor constante k_{AF}, usando os dados experimentais [31] para a constante de Stefan-Boltzmann

$$\sigma = 5,670277968 \times 10^{-8} \pm 0,000040 \times 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}, \tag{2.74}$$

onde o erro experimental é

$$\Delta\sigma = 4,0 \times 10^{-13}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}. \tag{2.75}$$

A constante de Boltzmann modificada tornar-se

$$\bar{a} = a - aa^{(1)} \frac{(k_{AF})^2}{T^2}, \tag{2.76}$$

com $a^{(1)}$ dado na Eq. (A.15), e

$$\bar{\sigma} = \sigma \left(1 - a^{(1)} \frac{(k_{AF})^2}{T^2} \right) = \sigma + \Delta\sigma. \tag{2.77}$$

Assim tem-se que

$$\Delta\sigma \geq \sigma a^{(1)} \frac{(k_{AF})^2}{T^2}, \tag{2.78}$$

o que implica em:

$$k_{AF} \leq T \sqrt{\frac{\Delta\sigma}{\sigma a^{(1)}}}, \tag{2.79}$$

Vemos assim que a magnitude de k_{AF} não deve ultrapassar o valor dado acima.

Como temos visto que as correções vindas da VL devem ser mais relevantes a baixas temperaturas, consideramos a temperatura da radiação cósmica de fundo $T = 2,73\text{K}$ para obter o nosso primeiro limite superior para o parâmetro k_{AF}:

$$k_{AF} \leq 5,\ 334\,8 \times 10^9 \text{s}^{-1} = 3,6 \times 10^{-15} \text{ GeV}. \tag{2.80}$$

2.5 Segundo limite superior para o campo de fundo

Existe uma outra interpretação para a expressão (2.67), que consiste em considerar a constante de Stefan-Boltzmann fixa e atribuir uma pequena variação na densidade de energia produzida pela flutuação da temperatura (δT). Assim como foi obtida a Eq. (2.71), pode-se escrever

$$4T^3 \delta T \approx a^{(1)} (k_{AF})^2 T^2, \tag{2.81}$$

que implica em

$$k_{AF} \approx 2T \sqrt{\frac{\delta T}{T} \frac{1}{a^{(1)}}}. \tag{2.82}$$

Tal expressão permite extrair as variações da temperatura no modelo MCFJ (seguindo o método desenvolvido na referência [19]) que podem ser comparados com os dados experimentais obtidos pelo FIRAS (Far-InfraRed Absolute Spectrophotometer) e WMAP. Portanto, observa-se que a violação de Lorentz é um mecanismo que pode ser de fundamental importância para explicar qualquer anisotropia da radiação cósmica de fundo. Fisicamente, o termo δT na Eq. (2.71) simboliza a temperatura integrada no espectro de MCFJ (integrado sobre todas as freqüências) comparada com espectro do corpo negro convencional de Maxwell (u_m).

A Eq. (2.82) leva a um segundo (porém similar) limite para o parâmetro k_{AF}. Se for feita uma relação com a flutuação de quadrupolo induzida pela VL (2.66) com a flutuação de quadrupolo da temperatura da radiação cósmica de fundo [16, 17, 18], têm-se $\dfrac{\delta T}{T} \sim 10^{-6}$, com $T = 2,73$K. Neste caso, k_{AF} assume

$$k_{AF} \approx 4,0172 \times 10^{9}\text{s}^{-1} = 2,75 \times 10^{-15}\text{GeV}. \tag{2.83}$$

Assim, vemos que para poder atribuir à quebra da simetria de Lorentz as flutuações observadas na radiação cósmica de fundo, na intensidade em que são devidamente mensuraras, o parâmetro da quebra deveria ser da ordem de $\sim 10^{-15}$ GeV. Entretanto, são conhecidos dados de birrefringência que limitam a magnitude deste coeficiente ao nível de $k_{AF} < 10^{-33}$GeV [9], o que exclui a possibilidade destas flutuações interpretadas serem uma decorrência da violação da simetria de Lorentz no setor fotônico do modelo padrão estendido.

Conclusões e perspectivas

A Dissertação estudou as propriedades termodinâmicas do campo eletromagnético no setor CPT-ímpar do modelo padrão estendido, esse setor é conhecido como o modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw. A relevância do trabalho reside no fato de que é o primeiro em estudar o setor eletromagnético CPT-ímpar do modelo padrão estendido à temperatura finita. O objetivo foi verificar como as quebras das simetrias de Lorentz e CPT influenciam o fenômeno da radiação do corpo negro.

Começamos nossa jornada na teoria quântica de campos à temperatura finita, onde foi estudado o campo eletromagnético de Maxwell livre com a finalidade de apresentar o formalismo e fazer uma releitura das propriedades termodinâmicas e, principalmente, estudar o fenômeno da radiação do corpo negro que é completamente descrito pela leis de radiação de Planck e de Stefan-Boltzmann. O formalismo inicia seu roteiro com o estabelecimento da estrutura hamiltoniana, pois como é bem conhecido, ela fica totalmente bem definida quando são escolhidas condições de calibre adequadas para fixar as arbitrariedades vindas dos vínculos de primeira classe contidas na estrutura. Com isso, o hamiltoniano é positivo-definido, garantindo a unitariedade, pré-requisito fundamental para a posterior quantização, tanto à temperatura zero, como finita. Feito isso, a quantização do campo eletromagnético foi realizada segundo o formalismo da integração funcional.

No segundo capítulo, estudou-se a eletrodinâmica de MCFJ à temperatura finita tendo como principal objetivo o cálculo da função de partição para em seguida calcular as propriedades termodinâmicas. E verificou-se que a quebra das simetrias de Lorentz e CPT modificam as características do fenômeno da radiação do corpo negro. Assim, observamos que a distribuição angular de energia do modelo MCFJ apresenta anisotropia. Ao mesmo tempo, sabemos que a radiação cósmica de fundo é isotrópica e tem um comportamento planckiano quase perfeito, com imprecisões de 1 parte em 10^5. Estas pequenas imprecisões são flutuações ou anisotropias na distribuição de temperatura da radiação. Dado o grande interesse atual em estudar e tentar entender as causas destas flutuações, realizamos uma tentativa de verificar se o modelo MCFJ poderia representá-las a contento. Nosso estudo, relacionou a anisotropia da RCF com as correções vindas do termo que quebra tanto a simetria de Lorentz como a CPT, ou seja, assumimos que a anisotropia da RCF no universo é gerada pela radiação dos fótons do modelo MCFJ.

Vimos que o termo de quebra da VL modifica as propriedades termodinâmicas do campo eletromagnético de Maxwell e, consequentemente, a distribuição da radiação do corpo negro. Essa alteração é essencialmente devido ao fato da álgebra dos campos do modelo MCFJ diferir daquela da eletrodinâmica de Maxwell, como pode ser explicitamente observado nas equações (2.30)-(2.31) e (1.36). Especificamente, a Eq. (2.30) estabelece uma relação de não-comutatividade dos momentos canônicos transversos, uma situação que pode ser contrastada também com as álgebras de outros modelos envolvidos no estudo da radiação do corpo negro no contexto da quebra da simetria de Lorentz, entre eles podemos citar a teoria de campos de calibre com álgebra não-comutativa [30] e as teorias de campos no espaço-tempo não-comutativo [32]. Essas diferenças levam a distintas propriedades termodinâmicas, e a espectros totalmente diferentes para o fenômeno da radiação do corpo negro. De fato, podemos comparar as contribuições à ordem de $n \geq 1$ dos diferentes modelos para o espectro da temperatura (correções à lei de Stefan-Boltzmann): T^{4+4n} para um espaço-tempo não-comutativo , T^{4+2n} para o modelo de campos de gauge com álgebra não-comutativa. e T^{4-2n} para o nosso modelo. É fácil notar, que as correções vindas do modelo MCFJ são relevantes a baixas temperaturas, já as dos outros modelos o são a altas temperaturas. Isso foi o motivo pelo qual escolhemos a temperatura da radiação cósmica de fundo para estabelecer os limites superiores para os valores do parâmetro que controla a quebra das simetrias CPT e Lorentz.

Assim, vê-se que o termo CFJ é capaz de induzir uma contribuição anisotrópica para a RCF, embora em um patamar bem inferior ao de 1 parte em 10^5. A razão disto é que o parâmetro de quebra está severamente limitado por dados de birrefrigência no nível de 1 parte em 10^{-33} GeV [9]. Assim, conclui-se que a quebra das simetrias de Lorentz e CPT no modelo MCFJ não pode ser usada para explicar a anisotropia da RCF.

A continuação deste trabalho, ainda em fase de desenvolvimento, consiste em analisar as propriedades termodinâmicas da eletrodinâmica do setor CPT-par do modelo padrão estendido.

Apêndice A

Notações e Convenções

O tensor métrico é assumido da seguinte forma

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{A.1}$$

Derivadas com respeito a coordenadas covariantes (x_μ) e contravariantes (x^μ) são abreviadas sem forma explícita

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad , \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{A.2}$$

O produto escalar com a métrica definida acima é

$$\begin{aligned} V \cdot A &= V_\mu A^\mu = V^\mu A_\mu = g_{\mu\nu} V^\mu A^\nu = g^{\mu\nu} V_\mu A_\nu \\ &= V_0 A_0 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{A} = V_0 A_0 - V_i A_i. \end{aligned} \tag{A.3}$$

O quadrivetor denota-se por

$$k_{AF} = \left((k_{AF})_0 \, , \mathbf{k}_{AF} \right). \tag{A.4}$$

O operador D'Alembertiano é

$$\Box = \partial^\mu \partial_\mu = \partial_0^2 - \nabla^2. \tag{A.5}$$

O tensor de Levi-Civita $\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ com $\epsilon^{0123}=1$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} = -\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} = \begin{cases} +1 & \text{se } \{\mu,\nu,\rho,\lambda\} \text{ é uma permutação par} \\ -1 & \text{se é uma permutação ímpar} \\ \ \ 0 & \text{em outro caso} \end{cases} \tag{A.6}$$

Identidades úteis do tensor de Levi-Civita em $4D$

$$\begin{aligned} -\epsilon^{\alpha\mu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha}{}^{\nu\lambda\kappa} &= g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda}g^{\sigma\kappa} - g^{\mu\nu}g^{\rho\kappa}g^{\sigma\lambda} + g^{\mu\lambda}g^{\rho\kappa}g^{\sigma\nu} \\ &\quad -g^{\mu\lambda}g^{\rho\nu}g^{\sigma\kappa} + g^{\mu\kappa}g^{\rho\nu}g^{\sigma\lambda} - g^{\mu\kappa}g^{\rho\lambda}g^{\sigma\nu} \end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\rho'\lambda'} = -2\left(g^{\rho\rho'}g^{\lambda\lambda'} - g^{\rho\lambda'}g^{\rho'\lambda}\right) \tag{A.8}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\varepsilon_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda'} = -6g^{\lambda\lambda'} \tag{A.9}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} = 24 \tag{A.10}$$

Somas e integrais úteis

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln\left[(2\pi n)^2 + b^2\right] = b - \ln 2 + 2\ln\left(1-e^{-b}\right) \tag{A.11}$$

$$\int_0^\infty d\omega\ \omega^2 \ln\left(1-e^{-\beta\omega}\right) = -\frac{\pi^4}{45\beta^3}$$

$$\int_0^\infty d\omega\ \ln\left(1-e^{-\beta\omega}\right) = -\frac{\pi^2}{6\beta}$$

Dados experimentais e numéricos

$$\begin{aligned}\hbar &= 1,054589 \times 10^{-34}\ \mathrm{Js} \\ c &= 2,99792458 \times 10^{8}\ \mathrm{ms}^{-1} \\ k_B &= 1,38066 \times 10^{-23}\ \mathrm{JK}^{-1} \\ 1\mathrm{eV} &= 1,602189 \times 10^{-19}\ \mathrm{J} \\ 1\mathrm{GeV} &= 1,602189 \times 10^{-10}\ \mathrm{J}\end{aligned}$$

Se $\hbar = 1$ então,

$$s^{-1} \equiv 6,5822 \times 10^{-25}\ \mathrm{GeV}$$

e o dado experimental para a constante de Stefan-Boltzmann é

$$\sigma = 5,670277968 \times 10^{-8} \pm 0,000040 \times 10^{-8}\ \mathrm{Wm}^{-2}\mathrm{K}^{-4}. \tag{A.12}$$

No sistema internacional de unidades a relação entre σ e a é

$$\sigma = \frac{ac}{4}, \tag{A.13}$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo e

$$a = \frac{\pi^2 k_B^4}{15\,(\hbar c)^3} = 7,565604554 \times 10^{-16}\mathrm{J\ m}^{-3}\mathrm{K}^{-4}, \tag{A.14}$$

com k_B sendo a constante de Boltzmann e $\hbar$ a constante de Planck.

A constante $a^{(1)}$ no SI é

$$a^{(1)} = \left(\frac{\hbar}{k_B}\right)^2 \frac{5}{16\pi^2} = 1.847324817 \times 10^{-24}\ \mathrm{s}^2\mathrm{K}^2. \tag{A.15}$$

Apêndice B

Formalismo de Dirac para sistemas vinculados

O formalismo de Dirac para o estudo de sistemas vinculados é apresentado de forma breve e tem como motivação esclarecer alguns detalhes do algoritmo, os interessados podem obter maiores informações nas referências dadas em [23].

Seja um sistema definido pela lagrangiana $L[q_i(t), \dot{q}_i(t), t]$, entao definimos o momento canonico conjugado à coordenada q_i por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{B.1}$$

Tal sistema é dito *não-singular* se a matriz Hessiana, definida como

$$H_{ij} \equiv \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\,, \tag{B.2}$$

tem determinante não nulo ($\det H_{ij} \neq 0$), se esta condição não for satisfeita o sistema é dito *singular* ou *vinculado*.

Se o sistema é não-singular podemos passar do formalismo lagrangiano para o hamiltoniano, sem ambigüidades, via a transformação de Legendre: $H = p_i \dot{q}_i - L$.

Por outro lado, se o sistema for singular é impossível passar ao formalismo hamiltoniano pois não será possível expressar todas as velocidades $\dot{q}_i$ em termos dos momentos p_i e as coordenadas q_i. É aqui que o formalismo de Dirac trabalha e tem como finalidade proporcionar ao sistema um hamiltoniano livre de ambigüidades de tal modo que agora já é possível passar do formalismo lagrangiano ao hamiltoniano.

É importante observar que um sistema físico somente pode ser quantizado quando a sua estrutura hamiltoniana é bem estabelecida e, esse é justamente o papel do formalismo de Dirac para sistemas vinculados.

A seguir, então, apresentamos o algoritmo de Dirac.

Se a matriz Hessiana for singular e tiver posto $P = N - R$, podemos resolver apenas P velocidades $\dot{q}_a$ em função das coordenadas, dos momentos e das R velocidades restantes $\dot{q}_{_U}$, ou seja

$$\dot{q}_a = f_a(q, p_b, \dot{q}_{_U}),$$

onde $U = 1, \ldots, R$ e $a = b = R + 1, \ldots, N$. Substituindo na definição dos momentos canônicamente conjugados obtemos que

$$p_i = \tilde{g}_i(q, \dot{q}_a, \dot{q}_{_U}) = \tilde{g}_i(q, f_a(q, p_b, \dot{q}_{_U}), \dot{q}_{_U}) = g_i(q, p_b, \dot{q}_{_U}), \tag{B.3}$$

e observamos que como existem R velocidades que não podem ser expressas em termos dos momentos e das coordenadas, cujos momentos canônicos são dados por $p_{_U} = g_{_U}(q, p_b)$, conseqüentemente, temos R vínculos primários

$$\Phi_{_U} = p_{_U} - g_{_U}(q, p_b) \approx 0. \tag{B.4}$$

Para garantir que esses vínculos sejam mantidos pela evolução do sistema, é necessário introduzir um novo hamiltoniano que os preserve no tempo, tal hamiltoniano é chamado de *primário* e é definido como

$$H_P = H_C + \lambda_{_U} \Phi_{_U}, \tag{B.5}$$

onde $\lambda_{_U}$ são os respectivos multiplicadores de Lagrange.

Como os vínculos primários devem ser preservados na evolução temporal do sistema governado por H_P, impomos a seguinte condição de consistência

$$\dot{\Phi} = \{\Phi, H_P\} \approx 0. \tag{B.6}$$

A partir dessas condições pode-se obter três situações distintas:

- Expressões que envolvem os multiplicadores de Lagrange, sendo possível determinar alguns dos multiplicadores.

- Relações não nulas que não envolvem os multiplicadores $\lambda_{_U}$. Essas relações proporcionam novos vínculos e são chamados de *vínculos secundários*.

- Equações que são explicitamente nulas indicam que o vínculo primário analisado é automaticamente preservado pela evolução temporal.

O seguinte passo é aplicar aos novos vínculos as condições de consistência, e assim sucessivamente até que não surjam mais vínculos.

Uma vez que temos determinado todos os vínculos do modelo, prosseguimos com a classificação deles segundo o seguinte critério:

- Os vínculos que possuem parênteses de Poisson nulos com todo o conjunto de vínculos são chamados de *vínculos de primeira classe*.

- E os que não satisfazem a propriedade acima são chamados de *vínculos de segunda classe*.

Assim, sejam os vínculos de primeira classe denotados como Π_k e os de segunda classe como Σ_a. Então, com os vínculos de segunda classe, formamos a matriz Δ cujos elementos são definidos como $\Delta_{ab} = \{\Sigma_a, \Sigma_b\}$, se ela não for inversível, significa que pelo menos um dos autovetores desta matriz possui um autovalor nulo. Um autovetor com autovalor nulo representa uma combinação linear de vínculos de segunda classe que gera um vínculo de primeira classe. Após separar as combinações lineares que geram um vínculo de primeira classe, a matriz reduzida $\bar{\Delta}$ contém os verdadeiros vínculos de segunda classe $\bar{\Sigma}_a$ e será uma matriz inversível, isso significa que os multiplicadores associados com os verdadeiros vínculos de segunda classe podem ser determinados explicitamente. Após esse rearranjo denotaremos os vínculos de primeira classe por $\bar{\Pi}_k$.

O formalismo de Dirac fornece um modo de tornar vínculos de segunda classe em identidades exatas e isso somente é possível se redefinimos a operação de parênteses de Poisson por uma nova, os chamados *parênteses de Dirac* que são definidos, a partir dos parênteses de Poisson e a matriz $\bar{\Delta}$, pela seguinte equação:

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \left\{A, \bar{\Sigma}_a\right\} \left[\bar{\Delta}^{-1}\right]_{ab} \left\{\bar{\Sigma}_b, B\right\}, \tag{B.7}$$

sendo A e B funções das variáveis canônicas.

Desse modo ficamos somente com os vínculos de primeira classe. Dirac observou que tanto os vínculos de primeira classe primários quanto os secundários são geradores das transformações infinitesimais que não alteram o estado físico do sistema e conjeturou que a dinâmica deveria ser gerada por uma nova hamiltoniana, a hamiltoniana estendida (H_E) definida como

$$H_E = H_C + v_k \bar{\Pi}_k, \tag{B.8}$$

que contém todos os vínculos de primeira classe, primários e secundários.

A vantagem de introduzir a hamiltoniana estendida é que não precisamos calcular explicitamente os multiplicadores de Lagrange correspondentes aos vínculos de segunda classe. A conjectura de Dirac diz que com a hamiltoniana estendida podemos calcular as equações de Hamilton e ver se elas levam às mesmas equações de movimento que aquelas obtidas com as equações de Euler-Lagrange. É na procura da equivalência de ambos formalismos que conseguimos obter informação de como devem ser os multiplicadores de Lagrange v_k associados com os vínculos de primeira classe, ou seja, o método não determina explicitamente estes multiplicadores. Para calcular explicitamente esses multiplicadores, necessitamos impor condições subsidiárias ou de gauge. As condições de gauge devem ser escolhidas de tal forma que o novo conjunto composto pelos vínculos de primeira classe e as condições de gauge formem um conjunto de vínculos de segunda classe cuja matriz será inversível de tal modo que todos os multiplicadores v_k podem ser calculados explicitamente.

Uma vez que conseguimos condições de gauge adequadas segue diretamente a equivalência entre as equações de Hamilton com as equações de Euler-Lagrange.

Apêndice C

Representação da função de partição como uma integral funcional

Obtemos a representação da integral funcional para a função de partição de campos relativísticos sem vínculos na sua estrutura hamiltoniana, como é o caso do campo de Klein-Gordon [21].

C.1 Amplitude de Transição para Bósons

Seja $\hat{\phi}(\mathbf{x},0)$ um operador de campo em $t=0$ e seja $\hat{\pi}(\mathbf{x},0)$ seu operador momento canônico conjugado. Os autoestados do operador de campo são descritos por $|\phi\rangle$ e satisfazem

$$\hat{\phi}(\mathbf{x},0)\,|\phi\rangle = \phi(\mathbf{x})\,|\phi\rangle\,, \tag{C.1}$$

onde $\phi(\mathbf{x})$ é o autovalor respectivo. Os autoestados satisfazem as condições de completeza e ortogonalidade:

$$\int d\phi(\mathbf{x})\;\; |\phi\rangle\langle\phi| = 1 \tag{C.2}$$

e

$$\langle\phi_a|\,\phi_b\rangle = \delta\left[\phi_a(\mathbf{x}) - \phi_b(\mathbf{x})\right]. \tag{C.3}$$

De forma similar, definimos os autoestados do operador momento canônico conjugado

$$\hat{\pi}(\mathbf{x},0)\,|\pi\rangle = \pi(\mathbf{x})\,|\pi\rangle\,, \tag{C.4}$$

e cujas condições de ortogonalidade e completeza são

$$\int \frac{d\pi(\mathbf{x})}{2\pi} \left|\pi\right\rangle \left\langle\pi\right| = 1 \tag{C.5}$$

e

$$\left\langle \pi_a \right| \left. \pi_b \right\rangle = \delta\left[\pi_a\left(\mathbf{x}\right) - \pi_b\left(\mathbf{x}\right)\right]. \tag{C.6}$$

Em mecânica quântica, o produto entre um autoestado do operador posição e um autoestado do operador momento é dado por

$$\left\langle \mathbf{x} \right| \left. \mathbf{p} \right\rangle = e^{ipx}, \tag{C.7}$$

em teoria de campos temos se seguinte relação

$$\left\langle \phi \right| \left. \pi \right\rangle = \exp\left[i \int d^3\mathbf{x}\ \pi\left(\mathbf{x}\right)\phi\left(\mathbf{x}\right)\right], \tag{C.8}$$

que é uma generalização natural de um sistema com um número finito de graus de liberdade (N) da mecânica quântica para um sistema com um número infinito de graus de liberdade como é o caso da teoria quântica de campos

$$\sum_{i=1}^{N} p_i x_i \rightarrow \int d^3\mathbf{x}\, \pi\left(\mathbf{x}\right)\phi\left(\mathbf{x}\right). \tag{C.9}$$

Para descrever a dinâmica do sistema introduzimos um hamiltoniano que é expresso como um funcional dos campos e de seus momentos conjugados:

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{x}\ \mathcal{H}\left(\hat{\pi}, \hat{\phi}\right). \tag{C.10}$$

Supondo que o sistema esteja no estado $\left|\phi_a\right\rangle$ no tempo $t = 0$. E após um tempo t_f, o estado evoluirá para $e^{-i\hat{H}t_f}\left|\phi_a\right\rangle$. A amplitude de transição do estado ir de $\left|\phi_a\right\rangle$ para algum outro estado $\left|\phi_b\right\rangle$ após um tempo t_f é dado por $\left\langle\phi_b\right| e^{-i\hat{H}t_f}\left|\phi_a\right\rangle$. Como estamos interessados em mecânica estatística, situação em que o sistema retorna para seu estado inicial após um tempo t_f, na análise a seguir consideramos $\left|\phi_b\right\rangle = \left|\phi_a\right\rangle$. Procedemos do seguinte modo, primeiro, dividimos o intervalo de tempo $(0, t_f)$ em N intervalos iguais $\Delta t = \dfrac{t_f}{N}$. Então, em cada intervalo de tempo inserimos um conjunto completo de autoestados dos campos e dos momentos via as relações de completeza dada por (C.2) e (C.5):

$$\begin{aligned} \left\langle\phi_a\right| e^{-i\hat{H}t_f}\left|\phi_a\right\rangle \;=\; & \lim_{N\rightarrow\infty} \int \left(\prod_{i=1}^{N} \frac{d\pi_i}{2\pi} d\phi_i\right) \left\langle\phi_a\right|\left.\pi_N\right\rangle \left\langle\pi_N\right| e^{-i\hat{H}\Delta t}\left|\phi_N\right\rangle \left\langle\phi_N\right|\left.\pi_{N-1}\right\rangle \\ & \times \left\langle\pi_{N-1}\right| e^{-i\hat{H}\Delta t}\left|\phi_{N-1}\right\rangle \cdots \left\langle\phi_2\right|\left.\pi_1\right\rangle \left\langle\pi_1\right| e^{-i\hat{H}\Delta t}\left|\phi_1\right\rangle \left\langle\phi_1\right|\left.\phi_a\right\rangle, \end{aligned} \tag{C.11}$$

do fato que

$$\langle \phi_1 | \phi_a \rangle = \delta(\phi_1 - \phi_a), \tag{C.12}$$

e de que

$$\langle \phi_{i+1} | \pi_i \rangle = \exp\left[i \int d^3\mathbf{x}\ \pi_i(\mathbf{x}) \phi_{i+1}(\mathbf{x}) \right], \tag{C.13}$$

e considerando $\Delta t \to 0$, podemos expandir da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle \pi_i | e^{-i\hat{H}\Delta t} | \phi_i \rangle &\cong \langle \pi_i | \left(1 - i\hat{H}\Delta t\right) | \phi_i \rangle \\ &= \langle \pi_i | \phi_i \rangle (1 - iH_i \Delta t) \\ &= (1 - iH_i\Delta t) \exp\left[-i \int d^3\mathbf{x} \pi_i(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) \right], \end{aligned} \tag{C.14}$$

onde

$$H_i = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H}(\pi_i(\mathbf{x}), \phi_i(\mathbf{x})), \tag{C.15}$$

inserindo todos eles em (C.11), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \pi_a | e^{-i\hat{H}t_f} | \phi_a \rangle &= \lim_{N\to\infty} \int \left(\prod_{i=1}^{N} \frac{d\pi_i}{2\pi} d\phi_i \right) \delta(\phi_1 - \phi_a) \\ &\quad \times \exp\left\{ -i\Delta t \sum_{j=1}^{N} \int d^3\mathbf{x} \left[\mathcal{H}(\pi_j, \phi_j) - \pi_j \frac{(\phi_{j+1} - \phi_j)}{\Delta t} \right] \right\}, \end{aligned} \tag{C.16}$$

onde $\phi_{N+1} = \phi_a = \phi_1$.

Tomando o limite do contínuo de (C.16), chega-se finalmente no seguinte resultado

$$\begin{aligned} \langle \phi_a | e^{-iHt_f} | \phi_a \rangle &= \int [d\pi] \int_{\phi(\mathbf{x},\mathbf{0})=\phi_a(\mathbf{x})}^{\phi(\mathbf{x},\mathbf{t}_f)=\phi_a(\mathbf{x})} [d\phi] \\ &\quad \times \exp\left[i \int_0^{t_f} dt \int d^3\mathbf{x} \left(\pi(\mathbf{x},t) \frac{\partial \phi(\mathbf{x},t)}{\partial t} - \mathcal{H}(\pi(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{x},t)) \right) \right], \end{aligned} \tag{C.17}$$

onde os símbolos $[d\pi]$ e $[d\phi]$ denotam a medida da integração funcional definida em (C.16). A integração em $\pi(\mathbf{x},t)$ é livre de restrições, mas a integração em $\phi(\mathbf{x},t)$ é tal que os campos começam em $\phi_a(\mathbf{x})$ em $t = 0$ e finalizam em $\phi_a(\mathbf{x})$ em $t = t_f$.

C.2 Função de Partição para Bósons

A função de partição é definida como

$$Z = \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta\left(H-\mu_i \hat{N}_i\right)}\right] = \int d\phi_a \left\langle\phi_a\right| e^{-\beta\left(H-\mu_i \hat{N}_i\right)} \left|\phi_a\right\rangle \tag{C.18}$$

onde a soma corre sobre todos os estados. Semelhante à amplitude de transição, podemos, de fato, expressar Z como uma integral sobre os campos e seus momentos conjugados fazendo uso de (C.17). Primeiramente, mudamos o tempo para uma variável imaginária $\tau = it$. Os limites de integração para τ são 0 e β. A operação traço em (C.18) quando aplicada em (C.17) significa que devemos integrar sobre todos campos ϕ_a. Finalmente, se o sistema admite alguma carga conservada introduzimos um potencial químico μ e, podemos fazer a substituição

$$\mathcal{H}\left(\pi,\phi\right) \rightarrow \mathcal{H}\left(\pi,\phi\right) = \mathcal{H}\left(\pi,\phi\right) - \mu\mathcal{N}\left(\pi,\phi\right), \tag{C.19}$$

onde $\mathcal{N}\left(\pi,\phi\right)$ é a densidade de carga conservada. Portanto, chega-se numa fórmula fundamental

$$Z = \int \left[d\pi\right] \int_{\text{periódico}} \left[d\phi\right] \exp\left[\int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \left(i\pi\frac{\partial\phi}{\partial\tau} - \mathcal{H}\left(\pi,\phi\right) + \mu\mathcal{N}\left(\pi,\phi\right)\right)\right]. \tag{C.20}$$

O termo periódico significa que a integração sobre os campos é feita tal que $\phi(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x},\beta)$. Isto é uma conseqüência da operação do traço, fazendo $\phi_a\left(\mathbf{x}\right) = \phi\left(\mathbf{x},0\right) = \phi\left(\mathbf{x},\beta\right)$. Não há restrição sobre a integração em π. A generalização de (C.20) para um número arbitrário de campos e cargas conservadas é imediata.

Apêndice D

Determinantes funcionais

D.1 Campo eletromagnético livre

Partimos da função de partição definida em (1.77)

$$Z(\beta) = \int DA_a \ \det\left(\frac{(-\Box)}{\sqrt{\xi}}\right)\exp\left\{\int_\beta dx - \frac{1}{2}A_a\mathbb{D}_{ab}A_b\right\} \tag{D.1}$$

$$= \det\left(\frac{(-\Box)}{\sqrt{\xi}}\right)\left[\det\left(\mathbb{D}_{ab}^{(0)}\right)\right]^{-1/2} \tag{D.2}$$

onde temos definido o operador diferencial $\mathbb{D}_{ab}^{(0)}$ as

$$\mathbb{D}_{ab}^{(0)} = -\Box\delta_{ab} - \lambda\partial_a\partial_b, \tag{D.3}$$

com

$$\lambda = \frac{1}{\xi} - 1 \tag{D.4}$$

Para calcular o determinante funcional do operador $\mathbb{D}_{ab}$, primeiro passamos ao espaço de Fourier

$$\tilde{\mathbb{D}}_{ab}^{(0)}(p) = \delta_{ab}p^2 + \lambda p_a p_b \tag{D.5}$$

onde $p^2 = (p_\tau)^2 + \mathbf{p}^2$, e computamos o determinante da matriz $\tilde{\mathbb{D}}_{ab}(p)$ que escrita explicitamente é dada por

$$\tilde{\mathbb{D}}^{(0)}_{ab}(p) = \begin{pmatrix} p^2+\lambda p_\tau^2 & \lambda p_\tau p_1 & \lambda p_\tau p_2 & \lambda p_\tau p_3 \\ \lambda p_\tau p_1 & p^2+\lambda p_1^2 & \lambda p_1 p_2 & \lambda p_1 p_3 \\ \lambda p_\tau p_2 & \lambda p_1 p_2 & p^2+\lambda p_2^2 & \lambda p_2 p_3 \\ \lambda p_\tau p_3 & \lambda p_1 p_3 & \lambda p_2 p_3 & p^2+\lambda p_3^2 \end{pmatrix}, \tag{D.6}$$

cujo determinante é

$$\det \tilde{\mathbb{D}}^{(0)}_{ab}(p) = p^8 + \lambda p^6 \left(p_\tau^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) = p^8 (1+\lambda) = \frac{p^8}{\xi} \; . \tag{D.7}$$

Retornando para o espaço de configurações temos que o determinante funcional é

$$\det \mathbb{D}^{(0)}_{ab} = \det \frac{(-\Box)^4}{\xi} . \tag{D.8}$$

Esse resultado que é inserido na equação (1.78) para obter (1.80).

D.2 O modelo MCFJ

Partindo do funcional gerador

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}A_a \det\left(\frac{-\Box}{\sqrt{\xi}}\right) \exp\left\{\int_\beta dx - \frac{1}{2} A_a \mathbb{D}_{ab} A_b\right\} \tag{D.9}$$

A integração no campo de calibre é imediata e obtém-se o seguinte resultado:

$$Z(\beta) = \det\left(\frac{-\Box}{\sqrt{\xi}}\right) \left[\det\left(\mathbb{D}_{ab}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{D.10}$$

onde temos definido o operador diferencial

$$\mathbb{D}_{ab} = \mathbb{D}^{(0)}_{ab} - \mathbb{S}_{ab} \tag{D.11}$$

com o operador $\mathbb{D}^{(0)}_{ab}$ definido pela equação (D.3) e o operador $\mathbb{S}_{ab} = \epsilon_{abcd} \left(k_{AF}\right)_c \partial_d$ e $k_{AF} = (0, \mathbf{k}_{AF})$.

No espaço de Fourier temos

$$\tilde{\mathbb{D}}_{ab}(p) = \tilde{\mathbb{D}}^{(0)}_{ab}(p) - \tilde{\mathbb{S}}_{ab}(p) \tag{D.12}$$

com $\tilde{\mathbb{D}}^{(0)}_{ab}(p)$ dado pelas equações (D.5)–(D.6). E as componentes da matriz $\tilde{\mathbb{S}}_{ab}(p)$ são definidos por

$$\tilde{\mathbb{S}}_{ab}(p) = i\epsilon_{abcd} V_c p_d \tag{D.13}$$

considerando $\epsilon_{\tau ijk} = -i\epsilon_{ijk}$, temos as componentes

$$\tilde{\mathbb{S}}_{\tau k}(p) = -\tilde{\mathbb{S}}_{k\tau}(p) = C_k \quad , \quad \tilde{\mathbb{S}}_{jk}(p) = -\tilde{\mathbb{S}}_{kj}(p) = \epsilon_{jki} H_i \ , \tag{D.14}$$

onde temos definido os vetores **C** e **H** por

$$\mathbf{C} = (\mathbf{k}_{AF}) \times \mathbf{p} \qquad , \qquad \mathbf{H} = p_\tau \mathbf{k}_{AF} \qquad , \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{0} \ . \tag{D.15}$$

Então a matriz $\tilde{\mathbb{D}}_{ab}(p)$ explicitamente é

$$\tilde{\mathbb{D}}_{ab}(p) = \begin{pmatrix} p^2 + \lambda p_\tau^2 & \lambda p_\tau p_1 - C_1 & \lambda p_\tau p_2 - C_2 & \lambda p_\tau p_3 - C_3 \\ \lambda p_\tau p_1 + C_1 & p^2 + \lambda p_1^2 & \lambda p_1 p_2 - H_3 & \lambda p_1 p_3 + H_2 \\ \lambda p_\tau p_2 + C_2 & \lambda p_1 p_2 + H_3 & p^2 + \lambda p_2^2 & \lambda p_2 p_3 - H_1 \\ \lambda p_\tau p_3 + C_3 & \lambda p_1 p_3 - H_2 & \lambda p_2 p_3 + H_1 & p^2 + \lambda p_3^2 \end{pmatrix} \tag{D.16}$$

e cujo determinante é

$$\det \tilde{\mathbb{D}}_{ab}(p) = (1+\lambda)\, p^4 \left[p^4 + \mathbf{C}^2 + \mathbf{H}^2\right] \tag{D.17}$$

onde

$$\mathbf{C}^2 = (\mathbf{k}_{AF})^2\, \mathbf{p}^2 - (\mathbf{k}_{AF} \cdot \mathbf{p})^2 \quad , \quad \mathbf{H}^2 = (p_\tau)^2 (\mathbf{k}_{AF})^2 \, , \tag{D.18}$$

assim, temos que

$$\det \tilde{\mathbb{D}}_{ab}(p) = \frac{p^4}{\xi} \left[p^4 + p^2 (\mathbf{k}_{AF})^2 - (\mathbf{k}_{AF} \cdot \mathbf{p})^2\right] . \tag{D.19}$$

Logo, o determinante funcional expresso no espaço de configuração resulta ser

$$\det \mathbb{D}_{ab} = \det \left(\frac{-\Box}{\sqrt{\xi}} \right)^2 \det \left[(-\Box)^2 - (\mathbf{k}_{AF})^2 \Box + (\mathbf{k}_{AF} \cdot \nabla)^2\right] , \tag{D.20}$$

esse resultado é inserido na equação (2.44) para obter a equação (2.46) para a função de partição do modelo MCFJ.

Apêndice E

Artigo publicado no Physical Review D

A Dissertação teve como resultado a publicação de um artigo na revista Physical Review D. A publicação mostra os resultados obtidos especificamente no capítulo **2**.

PHYSICAL REVIEW D **78,** 125013 (2008)

Lorentz-violating contributions of the Carroll-Field-Jackiw model to the CMB anisotropy

Rodolfo Casana,* Manoel M. Ferreira, Jr.,† and Josberg S. Rodrigues‡

Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão (UFMA),
Campus Universitário do Bacanga, São Luís-MA, 65085-580 - Brasil

(Received 3 October 2008; published 11 December 2008)

We study the finite temperature properties of the Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ) electrodynamics for a purely spacelike background. Starting from the associated finite temperature partition function, a modified black body spectral distribution is obtained. We thus show that, if the CMB radiation is described by this model, the spectrum presents an anisotropic angular energy density distribution. We show, at leading order, that the Lorentz-breaking contributions for the Plank's radiation law and for the Stefan-Boltzmann's law are nonlinear in frequency and quadratic in temperature, respectively. Using our results, we set up bounds for the Lorentz-breaking parameter, and show that Lorentz violation in the context of the MCFJ model is unable to yield the known CMB anisotropy (of 1 part in 10^5).

DOI: 10.1103/PhysRevD.78.125013 PACS numbers: 11.30.Cp, 12.60.−i, 44.40.+a, 98.70.Vc

Referências Bibliográficas

[1] J. C. Maxwell, *Treatise on electricity and magnetism*, 3rd edition, 2 vols. reprint by Dover, New York (1954).

[2] A. Einstein, Ann. Phys. (Leipzig) **322**, 891 (1905); reprinted in **14**, 194 (2005).

[3] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. Lett. **63**, 224 (1989); **66**, 1811 (1991); Phys. Rev. D **39**, 683 (1989); **40**, 1886 (1989); V. A. Kostelecky and R. Potting, Nucl. Phys. B **359**, 545 (1991); Phys. Lett. B **381**, 89 (1996); V. A. Kostelecky and R. Potting, Phys. Rev. D **51**, 3923 (1995).

[4] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane and T. Okamoto, Phys. Rev. Lett. **87**, 141601 (2001); Z. Guralnik, R. Jackiw, S. Y. Pi, A. P. Polychronakos, Phys. Lett. B **517**, 450 (2001); A. Anisimov, T. Banks, M. Dine and M. Graesser, Phys. Rev. D **65**, 085032 (2002).

[5] D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997); D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998).

[6] R. F. Streater and A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That*, Princeton University Press (2000); F. Strocchi, *Selected Topics on the General Properties of Quantum Field Theory*, Lecture Notes in Physics, Vol. 51, World Scientific Publishing Company (1993).

[7] A. P. Baeta Scarpelli and J. A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **73**, 105020 (2006); N. M. Barraz Jr., J. M. Fonseca, W.A. Moura-Melo and J.A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **76**, 027701 (2007); M. N. Barreto, D. Bazeia and R. Menezes, Phys. Rev. D **73**, 065015 (2006); J.W.

Moffat, Int. J. Mod. Phys. D **12** 1279 (2003); F. W. Stecker and S.T. Scully, Astropart. Phys. **23**, 203 (2005); H. Belich, J. L. Boldo, L. P. Colatto, J. A. Helayel-Neto and A. L. M. A. Nogueira, Phys. Rev. D **68,** 065030 (2003); E. O. Iltan, Eur. Phys. J. C **40**, 269 (2005); E. O. Iltan, JHEP 0306, 016 (2003); T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, L. Y. Santos, A. J. da Silva, Phys. Lett. B **661**, 312 (2008); M. Gomes, J.R. Nascimento, E. Passos, A.Yu. Petrov, A. J. da Silva, Phys. Rev. D **76**, 047701 (2007); A.F. Ferrari, M. Gomes, A.J. da Silva, J.R. Nascimento, E. Passos, A.Yu. Petrov, Phys. Lett. B **652**, 174 (2007); O. Bertolami and D.F. Mota, Phys. Lett. B **455**, 96 (1999); R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. Lett. **93**, 110402 (2004); Phys. Rev. D **70**, 125010 (2004); B. Altschul, Phys. Rev. Lett. **98**, 041603 (2007); M. B. Cantcheff, Eur. Phys. J. C **46**, 247 (2006); M. B. Cantcheff, C.F.L. Godinho, A. P. Baeta Scarpelli, J.A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **68**, 065025 (2003); A. Kobakhidze and B.H.J McKellar, Phys. Rev. D **76**, 093004 (2007).

[8] T. Jacobson, S. Liberati, and D. Mattingly, Ann. Phys. **321**, 150 (2006); T. Jacobson, S. Liberati, D. Mattingly and F.W. Stecker, Phys. Rev. Lett. **93**, 021101 (2004); T. Jacobson, S. Liberati, and D. Mattingly, Nature **424**, 1019 (2003).

[9] S. M. Carroll, G. B. Field, and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).

[10] C. Adam and F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B**607**, 247 (2001); C. Adam and F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B**657**, 214 (2003).

[11] V. A. Kostelecky and Matthew Mewes, Phys. Rev. Lett. **97**, 140401 (2006).

[12] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001); Phys. Rev. D **66**, 056005 (2002).

[13] D. Bear *et al.*, Phys. Rev. Lett. 85, 5038 (2000); M. A. Humphrey *et al.*, Phys. Rev. A 68, 063807 (2003); F. Cane *et al.*, Phys. Rev. Lett. 93, 230801 (2004); P. Wolf *et al.*, Phys. Rev. Lett. 96, 060801 (2006); B. R. Heckel *et al.*, Phys. Rev. Lett. 97, 021603 (2006).

[14] V. A. Kostelecky and Matthew Mewes, Phys. Rev. Lett. **99**, 011601 (2007); Arthur Lue, Limin Wang and Marc Kamionkowski, Phys. Rev. Lett. **83**, 1506 (1999).

[15] R. A. Alpher, R. Herman and G. A. Gamow, Phys. Rev. **74**, 1198 (1948); R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. S. Roll and D. T. Wilkinson, Astrophys. J. **142**, 414 (1965); A. A. Penzias, R. W. Wilson, Astrophys. J. **142**, 419 (1965).

[16] G. Hinshaw, M. R. Nolta, C. L. Bennett *et al.*, Astrophys. J. 464, L17 (1996); J. C. Mather *et al.*, Astrophys. J. **420**, 439 (1994); E. L. Wright *et al.*, Astrophys. J. **396**, L13 (1992); http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/.

[17] G. Hinshaw, M. R. Nolta, C. L. Bennett *et al.*, Astrophys. J. Supplement Series **170**, 288 (2007); A. Kogut *et al.*, Astrophys. J. Supplement Series **148**, 161 (2003).

[18] Planck Science Team, PLANCK BLUEBOOK, available on line, http://www.rssd.esa.int/Planck/

[19] M. Szopa, R. Hofmann, F. Giacosa, M. Schwarz, Eur. Phys. J. C **54**, 655 (2008); M. Szopa and R. Hofmann, JCAP **03**, 001 (2008).

[20] Rodolfo Casana, Manoel M. Ferreira Jr. and Josberg S. Rodrigues, Phys. Rev. **D** 78, 125013 (2008).

[21] J. I. Kapusta, *Finite-Temperature Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989; M. Le Bellac, *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[22] J. M. Fonseca, A. H. Gomes and W. A. Moura-Melo, Phys. Lett. B 671, 280 (2009).

[23] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science,(Yeshiva University, New York, 1964). P. A. M. Dirac, *Generalized Hamiltonian Dynamics*, Canadian Journal of Mathematics, **2**, 129 (1950); P. A. M. Dirac , *The Hamiltonian form of field dynamics*, Canadian Journal of Mathematics **3**, 1 (1951); Kurt Sundermeyer, *Constrained Dynamics: Lecture notes in Physics*, Springer-Verlag (1982); Andrew Hanson, Tullio Regge, Claudio Teitelboin, *Constrained Hamiltonian Systems*, Academia Nazionale de Lincei (1976).

[24] L. Faddeev and V. Popov, Phys. Lett. B **25**, 29 (1967).

[25] J. A. Lipa *et al.*, Phys. Rev. Lett. 90, 060403 (2003); H. Müller *et al.*, Phys. Rev. Lett. 91, 020401 (2003); P. L. Stanwix *et al.*, Phys. Rev. Lett. 95, 040404 (2005); S. Herrmann *et al.*, Phys. Rev. Lett. 95, 150401 (2005); P. Antonini *et al.*, Phys. Rev. A 71, 050101 (2005); P. L. Stanwix *et al.*, Phys. Rev. D 74, 081101 (2006).

[26] K. Greisen, Phys. Rev. Lett. **16**, 748 (1966); G. T. Zatsepin and V. A. Kuz'min, JETP Lett. **4**, 78 (1966).

[27] R. U. Abbasi, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **100**, 101101 (2008).

[28] R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. Lett. **93**, 110402 (2004); Phys. Rev. D **70**, 125010 (2004); Phys. Rev. D **70** 129906(E) (2004); B. Altschul, Nucl. Phys. B **796**, 262 (2008).

[29] Rodolfo Casana, Manoel M. Ferreira Jr. and Carlos E. H. Santos, Phys. Rev. D **78**, 025030 (2008).

[30] A. H. Fatollahi and M. Hajirahimi, Phys. Lett. B **641**, 381 (2006).

[31] P. J. Mohr and B. N. Taylor, Rev. Mod. Phys. **77**, 1 (2005).

[32] A. P. Balachandran, A. R. Queiroz, A. M. Marques and P. Teotonio-Sobrinho, Phys. Rev. D **77**, 105032 (2008); Hyeong-Chan Kim, Chaiho Rim, and Jae Hyung Yee, Phys. Rev. D **76**, 105012 (2007); A. H. Fatollahi and M. Hajirahimi, Europhys. Lett. **75**, 542 (2006).

PHYSICAL REVIEW D **78,** 125013 (2008)

Lorentz-violating contributions of the Carroll-Field-Jackiw model to the CMB anisotropy

Rodolfo Casana,* Manoel M. Ferreira, Jr.,† and Josberg S. Rodrigues‡

Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão (UFMA), Campus Universitário do Bacanga, São Luís-MA, 65085-580 - Brasil

(Received 3 October 2008; published 11 December 2008)

We study the finite temperature properties of the Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ) electrodynamics for a purely spacelike background. Starting from the associated finite temperature partition function, a modified black body spectral distribution is obtained. We thus show that, if the CMB radiation is described by this model, the spectrum presents an anisotropic angular energy density distribution. We show, at leading order, that the Lorentz-breaking contributions for the Plank's radiation law and for the Stefan-Boltzmann's law are nonlinear in frequency and quadratic in temperature, respectively. Using our results, we set up bounds for the Lorentz-breaking parameter, and show that Lorentz violation in the context of the MCFJ model is unable to yield the known CMB anisotropy (of 1 part in 10^5).

DOI: 10.1103/PhysRevD.78.125013 PACS numbers: 11.30.Cp, 12.60.−i, 44.40.+a, 98.70.Vc

I. INTRODUCTION

In his seminal work [1], Maxwell proposed that light requires a medium to travel, in a full analogy to the experiences involving waves propagation in fluids. Such medium was named as ether. In view of the already observed light properties, it was assumed that the ether permeated the whole space, was of a negligible density, and had imperceptible interaction with matter. However, the ether was abandoned with the advent of the special theory of relativity [2] that established Lorentz covariance as one of the fundamental symmetries of nature. Nowadays, the Lorentz covariance pervades all the field theories describing fundamental interactions and has the status of a cornerstone in the construction of all modern physical theories. The present experiments confirm Lorentz invariance to a very high precision at currently accessible energy scales that goes up to 2 TeV. The new experiments to be performed in the Large Hadron Collider (LHC) at CERN, that will extend the energy scale to approximately 14 TeV, should test the Lorentz symmetry to confirm that it still remains unspoiled or to reveal some indications about its violation. At the moment, the possibility is discussed of Lorentz and CPT symmetry breaking at Plank scale (or in the very early Universe when energies are close to the Planck scale). One such scenario is suggested by string theory [3] and it is a key feature of noncommutative field theories [4].

The researches about Lorentz and CPT violation are commonly performed under the framework of the standard model extension (SME) developed by Colladay and Kostelecky [5]. The SME is an enlarged version of the usual standard model that embraces all Lorentz-violating coefficients (generated as vacuum expectation values of tensor quantities belonging to a fundamental theory defined at Planck scale) that yield Lorentz scalars (as tensor contractions) in the observer frame. Such coefficients rule Lorentz violation in the particle frame, where they are seen as sets of independent numbers, whereas they work out as genuine tensor in the observer frame. A strong motivation to study the SME is the necessity to get some information about underlying physics to the Planck scale where the Lorentz symmetry may be broken due to quantum gravity effects. The photon sector of the SME has been extensively studied with a double purpose: the determination of new electromagnetic effects induced by the Lorentz-violating (LV) interactions and the imposition of stringent upper bounds for the magnitudes of the LV coefficients. Lorentz violation has been investigated in a broad perspective in the latest years [6,7].

The research about LV effects on classical electromagnetism was started by Carroll-Field-Jackiw [8], who studied the Maxwell electrodynamics in the presence of the assigned Carroll-Field-Jackiw (CFJ) term $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}(k_{AF})_\mu A_\nu F_{\kappa\lambda}$, with $(k_{AF})_\mu$ standing for the LV fixed background. The gauge sector of the SME embodies a CPT-odd CFJ term and the CPT-even one, $W^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda}$, both of which imply vacuum birefringence [8–10], which takes place whenever the light velocity depends on the polarization mode, amounting to a rotation in the polarization plane. While the CFJ term yields a causal, stable, and unitary electrodynamics only for a purely spacelike background [11], the CPT-even term provides an electrodynamics not plagued with stability illness. Regarding that birefringence increases linearly with the distance traveled, the analysis of this effect over cosmological scales offers an exceptionally sensitive signal for Lorentz violations. Within this context, as the cosmic microwave background (CMB) is partially polarized, it can be considered an experimental optical probe able to catch minuscule Lorentz violations [12,13]. In [13], the

*casana@ufma.br
†manojr07@ibest.com.br
‡josberg@ufma.br

 © 2008 The American Physical Society

spacelike sector of the CFJ background, k_{AF}, has been analyzed and has been shown that experimental data from the Boomerang experiment and the 5-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) survey are consistent with weak Lorentz violation at the 1-sigma level. Other issues concerning LV corrections to the Planckian spectrum were addressed in Ref. [14], where the emission and absorption of radiation by nonrelativistic electrons in the SME framework was properly regarded to derive such effects.

The CMB, which is the oldest thermal radiation available to observation, constitutes a good scenario to be described by the Lorentz-violating photon sector of the SME at finite temperature. The detected CMB is interpreted as compelling evidence for the big bang, since theoretical nucleosynthesis calculations foresees the existence of a cosmic background radiation at a temperature of some kelvins [15]. The data coming from the Cosmic Background Explorer (COBE) and WMAP revealed that the CMB is a perfect Planckian black body distribution at 2.73 K with high precision of one part in 10^5, which bounds the anisotropies to this small extent [16,17].

Considering that the light propagation is affected by the Lorentz violation, it is probable that its thermodynamical properties and spectral distribution are also altered. Therefore the black body pattern of the CMB is an interesting phenomenon where Lorentz-violating effects may play a relevant role, mainly when concerned with the anisotropies of the spectrum, an issue that captures broad attention nowadays [16–19]. A natural framework to deal with black body radiation and Lorentz violation is the finite temperature field theory [20]. The aim of the present work is to study the finite temperature properties of the MCFJ electrodynamics for the case of a purely spacelike background (for which the model provides a positive-definite Hamiltonian). Indeed, taking as starting point the MCFJ Lagrangian, we can construct the partition function for this gauge model (after the constraints structure is well determined). Such partition function provides all thermodynamical information required, including the energy density distribution. We thus show that if the CMB radiation is described by the MCFJ model, the radiation presents an anisotropic angular energy density distribution. Consequently, it is possible to obtain the Lorentz-breaking contributions to the Plank's radiation law and to the Stefan-Boltzmann's law.

This paper is outlined as follows. In Sec. II, we develop the Hamiltonian analysis of the constraints structure of the MCFJ model by following the Dirac formalism for constrained systems. In Sec. III, we construct the partition function (into the functional formalism) and study the thermodynamical properties of the model, including the modified energy density distribution and the modified Stefan-Boltzmann's law. In the last section, we present our conclusions and final remarks.

II. THE MCFJ ELECTRODYNAMICS: HAMILTONIAN STRUCTURE

The Maxwell-Carroll-Field-Jackiw model is defined by the following Lagrangian density:

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \tfrac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}(k_{AF})_\mu A_\nu F_{\kappa\lambda}, \tag{1}$$

where $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ is the electromagnetic stress tensor, $(k_{AF})_\mu$ is the Lorentz-breaking vector background, and $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}$ is the totally antisymmetric Levi-Civita tensor with $\epsilon^{0123} = 1$. The corresponding Euler-Lagrange equation for the vector field is

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} + (k_{AF})_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \tag{2}$$

where $\tilde{F}^{\nu\alpha} = \frac{1}{2}\epsilon^{\nu\alpha\mu\beta}F_{\mu\beta}$ is the dual tensor. Since the pioneering work of Carroll-Field-Jackiw [8], the properties of the MCFJ electrodynamics were extensively investigated in several distinct respects [11,21,22]. In the present work, the goal is to evaluate the LV corrections to the Planck black body distribution, which will be done by means of the imaginary-time formalism for finite temperature field theory. Once the partition function is carried out, the entire thermodynamics of the model becomes available. For it, we should first try to understand the constraint structure of the model, unveiled by a careful Hamiltonian analysis.

In order to accomplish the Hamiltonian analysis of this model, we begin defining the canonical conjugate momentum

$$\pi^\mu = -F^{0\mu} - \tfrac{1}{2}\epsilon^{0\mu\alpha\beta}(k_{AF})_\alpha A_\beta, \tag{3}$$

with which we can write the fundamental Poisson brackets (PB): $\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\} = \delta^\nu_\mu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.

From Eq. (3), it is easy to note that $\pi^0 = 0$; such a null momentum yields a primary constraint $\phi_1 = \pi^0 \approx 0$ (into the Dirac formalism, the symbol $\approx$ denotes a *weak equality*). Also, the momenta π^k are defined via the following dynamic relation:

$$\pi^k = \dot{A}_k - \partial_k A_0 - \tfrac{1}{2}\epsilon^{0kij}(k_{AF})_i A_j, \tag{4}$$

while the canonical Hamiltonian density is explicitly written as

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_C = {}& \tfrac{1}{2}(\pi^k)^2 + \pi^k\partial_k A_0 + \tfrac{1}{4}(F_{jk})^2 + \tfrac{1}{2}\pi^k\epsilon^{0kij}(k_{AF})_i A_j \\ & + \tfrac{1}{8}[\epsilon^{0kij}(k_{AF})_i A_j]^2 + \tfrac{1}{4}\epsilon^{0kij}(k_{AF})_0 A_k F_{ij} \\ & - \tfrac{1}{4}\epsilon^{0kij}(k_{AF})_k A_0 F_{ij}.\end{aligned} \tag{5}$$

Following the usual Dirac procedure, we introduce the primary Hamiltonian (H_P) by adding to the canonical Hamiltonian all the primary constraints, $H_P = H_C + \int d^3\mathbf{y} C\pi^0$, where C is a bosonic Lagrange multiplier. The consistency condition of the primary constraint, $\dot{\pi}^0 = \{\pi^0, H_P\} \approx 0$, gives a secondary constraint

$$\phi_2 = \partial_k\pi^k + \tfrac{1}{4}\epsilon^{0kij}(k_{AF})_k F_{ij} \approx 0, \tag{6}$$

which reveals that the usual Gauss's law is modified by an arbitrary Lorentz-breaking background. It can be written in terms of the electric and magnetic fields: $\nabla\cdot\mathbf{E}+(\mathbf{k}_{AF})\cdot\mathbf{B}=0$. Therefore, for the case of a pure timelike background, no modification is implied on the usual Gauss law. The situation changes for a pure spacelike case, for which the Gauss's law is modified by the presence of the background. Such modification reflects the coupling between the electric and magnetic sectors in the MCFJ electrodynamics [8,22].

The consistency condition of the modified Gauss's law gives $\dot\phi_2=\{\phi_2,H_P\}=0$. Thus, the secondary constraint is automatically conserved and there are no more constraints in this model. The bosonic multiplier of the primary constraint remains undetermined. It is an evidence of the existence of first-class constraints, such as it can be verified by computing the PB between the constraints $\{\phi_1,\phi_2\}=0$. Therefore, the set of constraints

$$\phi_1=\pi^0\approx 0,\qquad \phi_2=\partial_k\pi^k+\tfrac{1}{4}\epsilon^{0kij}(k_{AF})_kF_{ij}\approx 0, \tag{7}$$

is a first-class one.

A. Equations of motion and gauge fixing conditions

Following the Dirac conjecture, we define the extended Hamiltonian (H_E) by adding all the first-class constraint to the primary Hamiltonian,

$$H_E=H_C+\int d\mathbf{y}[C\phi_1+D\phi_2]. \tag{8}$$

Under this Hamiltonian, we compute the time evolution of the canonical variables of the system:

$$\dot A_0=\{A_0,H_E\}=C, \tag{9}$$

$$\dot A_k=\pi^k+\partial_kA_0+\tfrac{1}{2}\epsilon^{0kij}(k_{AF})_iA_j-\partial_kD, \tag{10}$$

showing that the dynamics of A_0 and A_k remains arbitrary. For π^0 and π^k, it is attained

$$\dot\pi^0=\partial_k\pi^k+\tfrac{1}{4}\epsilon^{0kij}(k_{AF})_kF_{ij}=\phi_2\approx 0, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\dot\pi^k={}&-\tfrac{1}{2}\pi^l\epsilon^{0lik}(k_{AF})_i-\partial_jF_{kj}\\&-\tfrac{1}{4}\epsilon^{0lij}\epsilon^{0lak}(k_{AF})_i(k_{AF})_aA_j-\tfrac{1}{2}(k_{AF})_0\epsilon^{0kij}F_{ij}\\&-\tfrac{1}{2}\epsilon^{0kli}(k_{AF})_l\partial_iA_0+\tfrac{1}{2}\epsilon^{0kli}(k_{AF})_l\partial_iD.\end{aligned} \tag{12}$$

Making use of Eq. (10), these expressions can be rewritten as

$$\begin{gathered}\partial_kF^{0k}+\tfrac{1}{4}\epsilon^{0ikj}(k_{AF})_iF_{kj}+\partial_k\partial_kD\approx 0,\\ \partial_\alpha F^{\alpha k}+\tfrac{1}{2}\epsilon^{k\alpha\mu\nu}(k_{AF})_\alpha F_{\mu\nu}+\epsilon^{0kli}(k_{AF})_l\partial_iD-\partial_0\partial_kD=0.\end{gathered} \tag{13}$$

We can see that Eqs. (10) and (13) are similar to the Lagrangian equations (4) and (2), respectively, if and only if $D=0$. Thus, we should impose a gauge condition in such a way to fix $D=0$. It is known that the Dirac algorithm requires a number of gauge conditions equal to the number of first-class constraints in the theory. However, those gauge conditions must be compatible with the Euler-Lagrange equations, such that they should fix $D=0$ and determine the Lagrangian multiplier C. Such that the gauge conditions together with the first-class constraints should form a second-class set.

1. Radiation gauge

Equation (10) suggests the following gauge fixing condition $\psi_1=\partial_kA_k\approx 0$, whose consistency relation, $\dot\psi_1=\{\psi_1,H_E\}\approx 0$, gives

$$\nabla^2A_0-\tfrac{1}{2}\epsilon^{0kij}(k_{AF})_kF_{ij}-\nabla^2D\approx 0. \tag{14}$$

In order to get an equation only for D, we impose

$$\psi_2=\nabla^2A_0-\tfrac{1}{2}\epsilon^{0kij}(k_{AF})_kF_{ij}\approx 0, \tag{15}$$

as a second gauge condition, such that $\nabla^2D=0$ is used to fix $D=0$. The consistency condition of the second gauge condition, $\dot\psi_2=\{\psi_2,H_E\}\approx 0$, implies

$$\nabla^2C-\tfrac{1}{2}\epsilon^{0kij}(k_{AF})_k\dot F_{ij}=0. \tag{16}$$

Thus, we have determined all the Lagrange multipliers. Therefore, the set $\Sigma_a=\{\phi_1,\phi_2,\psi_1,\psi_2\}$ is a second-class one while the corresponding PB matrix, defined as $M_{ab}(x,y)=\{\Sigma_a(x),\Sigma_b(y)\}$, $\Sigma_b(y)$, explicitly reads as a nonsingular matrix,

$$M(x,y)=\begin{pmatrix}0&0&0&-\nabla^2\\0&0&\nabla^2&0\\0&-\nabla^2&0&0\\\nabla^2&0&0&0\end{pmatrix}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{17}$$

whose inverse

$$M^{-1}(x,y)=\begin{pmatrix}0&0&0&-G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\\0&0&G(\mathbf{x}-\mathbf{y})&0\\0&-G(\mathbf{x}-\mathbf{y})&0&0\\G(\mathbf{x}-\mathbf{y})&0&0&0\end{pmatrix}, \tag{18}$$

is written in terms of the Green function for the Poisson equation, $G(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, given by

$$\begin{gathered}\nabla^2G(\mathbf{x}-\mathbf{y})=-\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\\ G(\mathbf{x})=\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{\mathbf{p}^2}=\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}\|}.\end{gathered} \tag{19}$$

At this level, it is necessary to assure that the set of first-class constraints and gauge fixing conditions become strong equalities. Such requirement is fulfilled by defining a new bracket operation, the Dirac brackets, $\{\cdot,\cdot\}_D$, as

$$\{A(x), B(y)\}_D = \{A(x), B(y)\} - \int d\mathbf{u} \int d\mathbf{v} \{A(x), \Sigma_c(u)\} \times [M^{-1}(u, v)]_{cd} \{\Sigma_d(v), B(y)\}, \tag{20}$$

where $\Sigma_a = \{\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2\}$ and $M^{-1}(x, y)$ is the inverse matrix defined in Eq. (18).

Thus, the non-null Dirac brackets for the physical variables

$$\{A_k(x), \pi_j(y)\}_D = -\left[\delta_{kj} - \frac{\partial_k \partial_j}{\nabla^2}\right]\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \tag{21}$$

$$\{\pi^k(x), \pi^j(y)\}_D = \tfrac{1}{2}\epsilon^{0jli}(k_{AF})_l \partial_i^x \partial_k^x G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \tfrac{1}{2}\epsilon^{0kli}(k_{AF})_l \partial_i^x \partial_j^x G(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \tag{22}$$

$$\{A_0(x), \pi^k(y)\}_D = -\epsilon^{0kli}(k_{AF})_l \partial_i^x G(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \tag{23}$$

should be compared with the algebra of the pure Maxwell electrodynamics (in the radiation gauge), for which the only non-null Dirac bracket is given by Eq. (21). Also, the MCFJ algebra establishes a noncommutative relation for the transverse momenta which can be contrasted with the noncommutative gauge field algebra $[A_k(x), A_j(y)] = i\ell_{jk}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), [A_k(x), \pi_j(y)] = i\delta_{kj}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), [\pi_k(x), \pi_j(y)] = 0$, proposed in Ref. [23] for studying black body radiation in a Lorentz-breaking context. In a definitive way, we can infer that the physical properties of the MCFJ model are very different from the Maxwell theory and from the noncommutative gauge field approach. Consequently, these models should have different thermodynamical properties such as will be clearly shown in the last section.

Under the Dirac brackets, the canonical Hamiltonian (5) reads as

$$H = \int d^3\mathbf{y}\left[\frac{1}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 + \frac{1}{2}(k_{AF})_0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\right]. \tag{24}$$

While a pure timelike background does not guarantee a positive-definite Hamiltonian, it can be obtained for the case of a pure spacelike background, for which a well-defined quantum theory may be constructed. Indeed, in this case the model can be quantized in the canonical formalism, once the canonical commutation relations for the quantum fields are obtained from the Dirac brackets (by means of the correspondence principle). It may be also quantized via the functional integral formalism. We follow the last quantization procedure to compute the partition function and to analyze the thermodynamical properties of the MCFJ model.

III. THE PARTITION FUNCTION

In this section, we study the thermodynamical properties of the MCFJ model. The fundamental object for this analysis is the partition function. The Hamiltonian analysis performed in the previous section allows one to define in a correct way the functional integral representation of the partition function, which is given by

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\pi^\mu \delta(\phi_1)\delta(\phi_2)\delta(\psi_1) \times \delta(\psi_2)|\det\{\Sigma_a(x), \Sigma_b(y)\}|^{1/2} \times \exp\left\{\int_\beta dx(i\pi^\mu \partial_\tau A_\mu - \mathcal{H}_C)\right\}, \tag{25}$$

where $\Sigma_a = \{\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2\}$ is a second-class set formed by the first-class constraints and the gauge fixing conditions, $M_{ab}(x, y) = \{\Sigma_a(x), \Sigma_b(y)\}$ is the constraint matrix given in Eq. (17), whose determinant is $\det M(x, y) = \det(-\nabla^2)^4$. Given the bosonic character of the gauge field, its functional integration can be performed over all the fields satisfying periodic boundary conditions in the τ variable: $A(\tau, \mathbf{x}) = A(\tau + \beta, \mathbf{x})$. The short notation $\int_\beta dx$ denotes $\int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x}$, and $\mathcal{H}_C$ is the canonical Hamiltonian given by Eq. (5).

We first compute the integration on the field π^0. Using a Fourier representation for $\delta(\phi_2)$,

$$\delta(\phi_2) = \int \mathcal{D}\Lambda \exp\left\{i\int_\beta dx \Lambda\left(\partial_k \pi^k + \frac{1}{4}\epsilon^{0kij}(k_{AF})_k F_{ij}\right)\right\}, \tag{26}$$

doing the change $\Lambda \to \Lambda + iA_0$, and performing the integration over the π^k field, the partition function reads as

$$\begin{aligned} Z(\beta) = \det(-\nabla^2)^2 \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Lambda \delta(\psi_1)\delta(\psi_2) &\times \exp\left\{\int_\beta dx - \frac{1}{2}(\partial_\tau A_k - \partial_k \Lambda)^2 - \frac{i}{2}(\partial_\tau A_k - \partial_k\Lambda)\epsilon^{0kij}(k_{AF})_i A_j\right\} \\ &\times \exp\left\{\int_\beta dx \frac{i}{4}\Lambda \epsilon^{0kij}(k_{AF})_k F_{ij} - \frac{1}{4}(F_{jk})^2 - \frac{1}{4}\epsilon^{0kij}(k_{AF})_0 A_k F_{ij}\right\}. \end{aligned} \tag{27}$$

The integration of the A_0 field gives the contribution $[\det(-\nabla^2)]^{-1}$. At once, we rename $\Lambda = A_\tau$ and $(k_{AF})_0 = i(k_{AF})_\tau$, and setting $\epsilon^{0kij} = -i\epsilon_{\tau kij}$, $\epsilon_{\tau 123} = 1$, we get the partition function for the MCFJ model in the Coulomb gauge:

$$Z(\beta) = N\det(-\nabla^2)\int \mathcal{D}A_a \delta(\partial_k A_k) \times \exp\left\{\int_\beta dx - \frac{1}{4}F_{ab}F_{ab} - \frac{1}{4}\epsilon_{abcd}(k_{AF})_a A_b F_{cd}\right\}, \tag{28}$$

where $a, b, c, d = \tau, 1, 2, 3$.

The partition function in the Coulomb gauge is not explicitly covariant. It is well known that if the covariance is explicit, the calculation process becomes more manageable. The procedure to pass from a noncovariant gauge to a covariant one, like the Lorentz gauge $\partial_a A_a = 0$, can be implemented using the Faddeev-Popov ansatz, which is defined by

$$\int D\omega(x)\delta(G[A_a^\omega])\det\left|\frac{\delta G[A_a^\omega]}{\delta\omega}\right|_{\omega=0} \equiv 1, \tag{29}$$

where $\omega(x)$ is the gauge parameter, $D\omega$ is a gauge group measure, $G[A_a]$ is a covariant gauge fixing condition, A_a^ω is the gauge-transformed field ($A_a^\omega = A_a + \partial_a\omega$), and $\det\left|\frac{\delta G[A_a^\omega]}{\delta\omega}\right|_{\omega=0}$ is the so-called Faddeev-Popov determinant, which is gauge invariant. We thus choose the Lorentz gauge

$$G[A_a] = -\frac{1}{\sqrt{\xi}}\partial_a A_a + f, \tag{30}$$

f being an arbitrary scalar function and ξ a gauge parameter. In this way, we have $G[A_a^\omega] = G[A_a] - \Box\omega/\sqrt{\xi}$, which implies

$$\det\left|\frac{\delta G[A_a^\omega]}{\delta\omega}\right|_{\omega=0} = \det\left|\frac{-\Box}{\sqrt{\xi}}\right|, \tag{31}$$

where $\Box = \partial_a\partial_a = (\partial_\tau)^2 + \nabla^2$. As the partition function is independent of f, such a factor can be eliminated by integrating it with the weight $\exp(-\frac{1}{2}\int_\beta dx f^2)$. Thus, after an integration by parts, the partition function takes the form:

$$Z(\beta) = \int DA_a \det\left|\frac{-\Box}{\sqrt{\xi}}\right|\exp\left\{\int_\beta dx - \frac{1}{2}A_a\left[-\Box\delta_{ab} - \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)\partial_a\partial_b - S_{ab}\right]A_b\right\}, \tag{32}$$

where have defined the operator $S_{ab} = \epsilon_{acdb}(k_{AF})_c\partial_d$. For convenience, we choose the Feynman gauge $\xi = 1$, and the integration over the gauge field gives

$$Z(\beta) = \det(-\Box)[\det(-\Box\delta_{ab} - S_{ab})]^{-1/2}. \tag{33}$$

After some algebra, we obtain $\det(-\Box\delta_{ab} - S_{ab}) = [\det(-\Box)]^2\det(\Box^2 + (k_{AF})^2\Box - ((k_{AF})\cdot\partial)^2)$. Replacing it in the partition function (33), we obtain

$$Z(\beta) = Z_A(\beta)Z_{\rm LV}(\beta). \tag{34}$$

Here, the quantity $Z_A(\beta) = \exp\{-\mathrm{tr}\ln(-\Box)\}$ is the partition function of the usual electromagnetic field (without Lorentz violation), while

$$Z_{\rm LV}(\beta) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\left[1 + \frac{(k_{AF})^2}{\Box} - \frac{((k_{AF})\cdot\partial)^2}{\Box^2}\right]\right\} \tag{35}$$

is the contribution stemming from the Chern-Simon-like LV term. We can compute the involved trace writing the gauge field in terms of a Fourier expansion,

$$A_a(\tau,\mathbf{x}) = \left(\frac{\beta}{V}\right)^{1/2}\sum_{n,\mathbf{p}} e^{i(\omega_n\tau + \mathbf{x}\cdot\mathbf{p})}\tilde{A}_a(n,\mathbf{p}), \tag{36}$$

where V represents the system volume and ω_n are the bosonic Matsubara's frequencies, $\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta}$, for $n = 0, 1, 2, \cdots$.

A. The pure electromagnetic contribution

We start computing the pure electromagnetic contribution,

$$\ln Z_A(\beta) = -\mathrm{tr}\ln(-\Box) = -\sum_{n,\mathbf{p}}\ln(\beta^2[\mathbf{p}^2 + (\omega_n)^2]). \tag{37}$$

The sum in n is evaluated as

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\ln[(2\pi n)^2 + \beta^2\omega_{\mathbf{p}}^2] = \beta\omega_{\mathbf{p}} + 2\ln[1 - e^{-\beta\omega_{\mathbf{p}}}], \tag{38}$$

where $\omega_{\mathbf{p}} = \|\mathbf{p}\|$. Therefore, the contribution of the pure electromagnetic field is

$$\ln Z_A(\beta) = -2V\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\left[\frac{\beta\omega_{\mathbf{p}}}{2} + \ln(1 - e^{-\beta\omega_{\mathbf{p}}})\right], \tag{39}$$

where the sum in $\|\mathbf{p}\|$ was replaced by an integral. The latter integral can be explicitly evaluated in spherical coordinates, $\mathbf{p} \equiv (\omega, \theta, \phi)$, where $\omega = \omega_{\mathbf{p}} = \|\mathbf{p}\|$, θ is the angle between the background $\boldsymbol{k}_{AF}$ and the photonic momentum $\mathbf{p}$, while ϕ is the azimuthal angle. In this way, the partition function reads as

$$\ln Z_A(\beta) = -\frac{2V}{(2\pi)^3}\int d\Omega \times \int_0^\infty d\omega\left[\frac{\beta\omega^3}{2} + \omega^2\ln(1 - e^{-\beta\omega})\right], \tag{40}$$

with $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ being the differential solid-angle element. Neglecting the vacuum contributions, the partition function is exactly carried out

$$\ln Z_A(\beta) = V\frac{\pi^2}{45\beta^3}. \tag{41}$$

The energy density ($u_A = U_A/V$) for the pure electromagnetic field which represents the expectation value of the energy per unit volume (over the thermodynamical ensemble) can be easily obtained ($u_A = -V^{-1}\partial\ln Z_A/\partial\beta$), yielding:

$$u_A = \int_0^\infty d\omega\frac{1}{\pi^2}\frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1}. \tag{42}$$

Without integrating in frequency, we obtain the energy density of radiation per frequency unity, that is, the well-known Planck distribution for the black body spectrum:

$$u_A(\omega) = \frac{1}{\pi^2}\frac{\omega^3}{e^{\beta\omega}-1}. \tag{43}$$

Now, performing the integral in frequency in Eq. (42), we get the total energy density in the cavity

$$u_A = \frac{\pi^2}{15\beta^4} = aT^4, \tag{44}$$

which corresponds to the Stefan-Boltzmann law, while the constant a[1] is related to the Stefan-Boltzmann's constant (σ) by $a = 4\sigma$. The energy density per solid-angle element is

$$u_A(\beta, \Omega)d\Omega = \frac{\pi}{60}\frac{1}{\beta^4}d\Omega, \tag{45}$$

which stands for a perfect isotropic distribution.

B. The CPT-odd and Lorentz-violating contribution

The Lorentz-breaking contribution, $Z_{\rm LV}(\beta)$, to the partition function is computed for the case of a pure spacelike background $k_{AF} = (0, \mathbf{k}_{AF})$, once it is known that the Hamiltonian is positive-definite (stable) only for this background configuration. Such a feature guarantees the existence of the functional integral from which is attained the partition function, thus, the partition function (35) reads

$$\ln Z_{\rm LV} = -\frac{1}{2}\sum_{n,\mathbf{p}}\ln\left(1 - \frac{\mathbf{k}_{AF}^2}{(\omega_n)^2+\mathbf{p}^2} + \frac{(\mathbf{k}_{AF}\cdot\mathbf{p})^2}{[(\omega_n)^2+\mathbf{p}^2]^2}\right). \tag{46}$$

Now, we consider the spacelike background as a weak coupling, $\|\mathbf{k}_{AF}\| \ll 1$, then we get at order $\mathbf{k}_{AF}^2$

$$\ln Z_{\rm LV} = \frac{1}{2}\sum_{n,\mathbf{p}}\left(\frac{\mathbf{k}_{AF}^2}{(\omega_n)^2+\mathbf{p}^2} - \frac{(\mathbf{k}_{AF}\cdot\mathbf{p})^2}{[(\omega_n)^2+\mathbf{p}^2]^2}\right). \tag{47}$$

The series above can be computed easily by using expression (38). Performing the sum and expressing the resultant integrals in spherical coordinates, the partition function takes the form

$$\begin{aligned}\ln Z_{\rm LV} = {}& \frac{1}{2}\frac{\mathbf{k}_{AF}^2}{(2\pi)^3}V\int d\Omega\int_0^\infty d\omega\left\{\frac{\beta\omega}{2} + \frac{\beta\omega}{e^{\beta\omega}-1}\right\}\\ & - \frac{1}{2}\frac{\mathbf{k}_{AF}^2}{(2\pi)^3}V\int d\Omega\cos^2\theta\int_0^\infty d\omega\left\{\frac{\beta\omega}{2} + \frac{\beta\omega}{2}\right.\\ & \left.\times\frac{1}{e^{\beta\omega}-1} + \frac{(\beta\omega)^2}{2}\frac{e^{\beta\omega}}{(e^{\beta\omega}-1)^2}\right\}.\end{aligned} \tag{48}$$

Here, the integrals in the frequency (ω) can be performed exactly, implying

$$\ln Z_{\rm LV} = V\frac{\mathbf{k}_{AF}^2}{96\pi\beta}\int d\Omega - V\frac{\mathbf{k}_{AF}^2}{64\pi\beta}\int d\Omega\cos^2\theta. \tag{49}$$

Performing now the angular integrations, we obtain the Lorentz-violating contribution to the partition function,

$$\ln Z_{\rm LV} = V\frac{\mathbf{k}_{AF}^2}{48\beta}, \tag{50}$$

where we have neglected vacuum contributions.

From Eq. (48), the expectation value of the energy is achieved by unit volume (over the thermodynamical ensemble) for the Lorentz-breaking contribution:

$$\begin{aligned}u_{\rm LV} = {}& -\frac{\mathbf{k}_{AF}^2}{4}\int_0^\infty d\omega\frac{1}{\pi^2}\frac{\omega^3}{e^{\beta\omega}-1}\left\{\frac{5}{6}\frac{1}{\omega^2} - \frac{7}{6}\frac{\beta}{\omega}\right.\\ & \left.\times\frac{e^{\beta\omega}}{(e^{\beta\omega}-1)} + \frac{1}{6}\beta^2\frac{e^{\beta\omega}(e^{\beta\omega}+1)}{(e^{\beta\omega}-1)^2}\right\}.\end{aligned} \tag{51}$$

The integrand gives the LV corrections to the Planckian energy density distribution to be

$$\begin{aligned}u_{\rm LV}(\omega) = {}& -\frac{\mathbf{k}_{AF}^2}{4}\frac{1}{\pi^2}\frac{\omega^3}{e^{\beta\omega}-1}\left\{\frac{5}{6}\frac{1}{\omega^2} - \frac{7}{6}\frac{\beta}{\omega}\frac{e^{\beta\omega}}{(e^{\beta\omega}-1)}\right.\\ & \left. + \frac{1}{6}\beta^2\frac{e^{\beta\omega}(e^{\beta\omega}+1)}{(e^{\beta\omega}-1)^2}\right\},\end{aligned} \tag{52}$$

where nonlinear contributions in the frequency ω appear.

The Lorentz-breaking contribution to the Stefan-Boltzmann law can be achieved by integrating Eq. (51), which yields

$$u_{\rm LV} = \frac{\mathbf{k}_{AF}^2}{48\beta^2} = \frac{\mathbf{k}_{AF}^2}{48}T^2. \tag{53}$$

From Eq. (49), we can also determine the LV contribution to the energy density in each solid angle ($d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$):

$$u_{\rm LV}(\beta, \Omega)d\Omega = \frac{\mathbf{k}_{AF}^2}{96\pi\beta^2}\left[1 - \frac{3}{2}\cos^2\theta\right]d\Omega, \tag{54}$$

in which it is manifest the presence of the anisotropy factor ($\cos^2\theta$). This reveals that LV is a mechanism that can play an important role in explaining CMB anisotropies.

C. The MCFJ thermodynamics

The energy density of the MCFJ model is the one associated with the full partition function (33), given by the sum of the contributions (44) and (53), namely,

$$u_{\rm MCFJ} = aT^4 + \frac{\mathbf{k}_{AF}^2}{48}T^2. \tag{55}$$

The expression above shows a LV correction to the Stefan-Boltzmann law at $\boldsymbol{k}_{AF}^2$ order with a dependence in the temperature as T^2. Such a correction is potentially more

[1] In SI unities the relation is $\sigma = \frac{ac}{4}$ with c the vacuum light velocity and $a = \frac{\pi^2 k_B^4}{15(\hbar c)^3} = 7.565\,604\,554\times 10^{-16}$ Jm^{-3} K^{-4}, $\sigma = 5.670\,277\,968\times 10^{-8}$ Wm^{-2} K^{-4}, where k_B is the Boltzmann's constant and $\hbar$ the Planck's constant.

significant at low temperatures. The result (55) can be rewritten in two ways. The first one is

$$u_{\rm MCFJ} = \bar{a}(T)T^4, \tag{56}$$

with $\bar{a}(T)$ being an effective coefficient that retains the temperature and LV modifications:

$$\bar{a}(T) = a + \frac{\mathbf{k}_{AF}^2}{48T^2}. \tag{57}$$

It affords an opportunity to establish a first bound for the spacelike LV background by using the experimental data for the Stefan-Boltzmann constant [24] $\sigma = (5.670\,40 \pm 0.000\,04) \times 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}\,K^{-4}}$. Thus, considering that the corrections to the Stefan-Boltzmann law are of the order of the experimental error, we get $\|\mathbf{k}_{AF}\| \leq 3.6 \times 10^{-15}$ GeV for $T = 2.73$ K (the black body temperature of the CMB radiation).

The second form to express Eq. (55) is by considering the a constant as fixed and attributing the small variations on the energy density to temperature fluctuations (δT). The expression (55) can be then written as

$$u_{\rm MCFJ} \approx a(T^4 + 4T^3\delta T), \tag{58}$$

which gives the temperature fluctuation δT with respect to the black body temperature T without LV interactions. In others words, we assume that the Stefan-Boltzmann law $u \propto T^4$ remains valid for both models [19]. Considering Eq. (58), we write the first order temperature corrections (δT) as

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{u_{\rm MCFJ} - u_M}{4u_M}. \tag{59}$$

Such expression allows one to extract the temperature offsets from the MCFJ (model following the method developed in Ref. [19]), which can be compared with the experimental data coming from the Far-InfraRed Absolute Spectrophotometer (FIRAS) and the WMAP. Thus, we see that Lorentz violation is a mechanism that can play an important role in explaining CMB anisotropies. Physically, the term δT in Eq. (58) stands for the temperature offsets of the MCFJ integrated spectra (integration over all frequencies) compared to the conventional Maxwell black body integrated spectra (u_M).

The expression for δT leads to a second (but similar) bound for the LV parameter if we compare the quadrupole fluctuation implied by Lorentz violation [see Eq. (54)] with the quadrupole temperature fluctuation of the CMB [16–18]: $\delta T/T \sim 10^{-6}$, with $T = 2.73$ K. In this case, we obtain $\|\mathbf{k}_{AF}\| \sim 2.75 \times 10^{-15}$ GeV.

Also, from Eqs. (43) and (52) we derive the energy density of the radiation per frequency for the MCFJ electrodynamics

$$u_{\rm MCFJ}(\omega) = \frac{1}{\pi^2}\frac{\omega^3}{e^{\beta\omega}-1}\left\{1 - \frac{\mathbf{k}_{AF}^2}{4}\left[\frac{5}{6}\frac{1}{\omega^2} - \frac{7}{6}\frac{\beta}{\omega} \times \frac{e^{\beta\omega}}{(e^{\beta\omega}-1)} + \frac{1}{6}\beta^2\frac{e^{\beta\omega}(e^{\beta\omega}+1)}{(e^{\beta\omega}-1)^2}\right]\right\}. \tag{60}$$

From the angular energy distribution expressions (45) and (54), we write the MCFJ energy density per solid-angle element:

$$u_{\rm MCFJ}(\beta,\Omega)d\Omega = \left[\frac{\pi}{60}\frac{1}{\beta^4} + \frac{\mathbf{k}_{AF}^2}{96\pi\beta^2}\left(1 - \frac{3}{2}\cos^2\theta\right)\right]d\Omega. \tag{61}$$

Thus, the angular energy distribution at $\mathbf{k}_{AF}^2$ order provides a quadrupole ($l = 2$) contribution to the power angular spectrum, revealing an interesting feature: the LV contribution to the spectrum is anisotropic and gives a maximal contribution in the plane perpendicular to background direction. From Eq. (35), it is easy to show that a contribution at $(\mathbf{k}_{AF}^2)^n$ order to the power angular spectrum of the black body radiation may be considered. It gives contributions until the order $l = 2n$ at the same time it is associated with a T^{4-2n} temperature dependence. This guarantees that, for high temperatures, the relevant contributions stem only from the first terms of the expansion.

IV. CONCLUSIONS AND REMARKS

In this work, we have initially established the constraint structure of the MCFJ electrodynamics having as the main goal the correct evaluation of the partition function of this model (at the finite temperature regime). With the partition function, the thermodynamics properties of the model were determined, revealing the LV corrections to the black body spectral distribution. As the CMB map is in fact nothing more than a black body radiation pattern only slightly perturbed by fluctuations, our purpose involves an attempt of relating the CMB anisotropies with the LV corrections here evaluated. Indeed, we have addressed what is expected to appear as anisotropies in the CMB map if the photonic sector in the lately universe is described by the finite temperature CJF electrodynamics. Such calculation shows that the LV CFJ term modifies (in leading order) the monopole and quadrupole moments of angular power spectrum in a proper way. This is ascribed to the form of the MCFJ field algebra, that is different from the Maxwell and from the noncommutative gauge field (and space-time) approaches proposed in Refs. [23,25]. Such difference leads to very distinct black body spectra. In fact, at order $n \geq 1$, the temperature corrections to the integrated spectra are proportional to T^{4+4n}, for the noncommutative space-time approach, T^{4+2n}, for the noncommutative gauge field model approach, and T^{4-2n}, for the finite temperature MCFJ model.

Finally, we have seen that the CFJ term is able to induce anisotropic contributions to the CMB. Although, we should mention that the background magnitude for yielding a CMB anisotropy of 1 part in 10^5 is approximately 10^{-15} GeV. Considering that birefringence data constrain such background as tightly as 10^{-33} eV, we conclude that Lorentz violation, as set up in the MCFJ model, cannot be used to explain such anisotropies.

In a forthcoming work, we intend to present the thermodynamical contributions for the black body radiation provided by the less constrained coefficients of the CPT-even term of the gauge sector of the SME. Such work is in progress.

ACKNOWLEDGMENTS

R. C. thanks Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) for partial support. M. M. F. is grateful to CNPq and to FAPEMA (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Maranhão) for partial support. J. S. R. thanks FAPEMA for full support.

[1] J. C. Maxwell, *Treatise on Electricity and Magnetism*, reprint by (Dover, New York, 1954), 3rd ed., 2 vols.

[2] A. Einstein, Ann. Phys. (Leipzig) **322**, 891 (1905); **14**, 194 (2005).

[3] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. Lett. **63**, 224 (1989); **66**, 1811 (1991); Phys. Rev. D **39**, 683 (1989); **40**, 1886 (1989); V. A. Kostelecky and R. Potting, Nucl. Phys. **B359**, 545 (1991); Phys. Lett. B **381**, 89 (1996); Phys. Rev. D **51**, 3923 (1995).

[4] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane, and T. Okamoto, Phys. Rev. Lett. **87**, 141601 (2001); Z. Guralnik, R. Jackiw, S. Y. Pi, and A. P. Polychronakos, Phys. Lett. B **517**, 450 (2001); A. Anisimov, T. Banks, M. Dine, and M. Graesser, Phys. Rev. D **65**, 085032 (2002).

[5] D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997); D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998).

[6] A. P. Baeta Scarpelli and J. A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **73**, 105020 (2006); N. M. Barraz, Jr., J. M. Fonseca, W. A. Moura-Melo, and J. A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **76**, 027701 (2007); M. N. Barreto, D. Bazeia, and R. Menezes, Phys. Rev. D **73**, 065015 (2006); J. W. Moffat, Int. J. Mod. Phys. D **12**, 1279 (2003); F. W. Stecker and S. T. Scully, Astropart. Phys. **23**, 203 (2005); H. Belich, J. L. Boldo, L. P. Colatto, J. A. Helayel-Neto, and A. L. M. A. Nogueira, Phys. Rev. D **68**, 065030 (2003); E. O. Iltan, Eur. Phys. J. C **40**, 269 (2005); J. High Energy Phys. 06 (2003) 016; T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, L. Y. Santos, and A. J. da Silva, Phys. Lett. B **661**, 312 (2008); M. Gomes, J. R. Nascimento, E. Passos, A. Yu. Petrov, and A. J. da Silva, Phys. Rev. D **76**, 047701 (2007); A. F. Ferrari, M. Gomes, A. J. da Silva, J. R. Nascimento, E. Passos, and A. Yu. Petrov, Phys. Lett. B **652**, 174 (2007); O. Bertolami and D. F. Mota, Phys. Lett. B **455**, 96 (1999); R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. Lett. **93**, 110402 (2004); Phys. Rev. D **70**, 125010 (2004); B. Altschul, Phys. Rev. Lett. **98**, 041603 (2007); M. B. Cantcheff, Eur. Phys. J. C **46**, 247 (2006); M. B. Cantcheff, C. F. L. Godinho, A. P. Baeta Scarpelli, and J. A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **68**, 065025 (2003); A. Kobakhidze and B. H. J. McKellar, Phys. Rev. D **76**, 093004 (2007).

[7] T. Jacobson, S. Liberati, and D. Mattingly, Ann. Phys. (N.Y.) **321**, 150 (2006); T. Jacobson, S. Liberati, D. Mattingly, and F. W. Stecker, Phys. Rev. Lett. **93**, 021101 (2004); T. Jacobson, S. Liberati, and D. Mattingly, Nature (London) **424**, 1019 (2003).

[8] S. M. Carroll, G. B. Field, and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).

[9] V. A. Kostelecky and Matthew Mewes, Phys. Rev. Lett. **97**, 140401 (2006).

[10] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001); Phys. Rev. D **66**, 056005 (2002).

[11] C. Adam and F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. **B607**, 247 (2001); **657**, 214 (2003).

[12] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **99**, 011601 (2007); A. Lue, L. Wang, and M. Kamionkowski, Phys. Rev. Lett. **83**, 1506 (1999).

[13] V. A. Kostelecky and M. Mewes, arXiv:0809.2846.

[14] J. M. Fonseca, A. H. Gomes, and W. A. Moura-Melo, arXiv:0809.0704.

[15] R. A. Alpher, R. Herman, and G. A. Gamow, Phys. Rev. **74**, 1198 (1948); R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. S. Roll, and D. T. Wilkinson, Astrophys. J. **142**, 414 (1965); A. A. Penzias and R. W. Wilson, Astrophys. J. **142**, 419 (1965).

[16] G. Hinshaw *et al.*, Astrophys. J. **464**, L17 (1996); J. C. Mather *et al.*, Astrophys. J. **420**, 439 (1994); E. L. Wright *et al.*, Astrophys. J. **396**, L13 (1992); http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/.

[17] G. Hinshaw, M. R. Nolta, C. L. Bennett *et al.*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **170**, 288 (2007); A. Kogut *et al.*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **148**, 161 (2003).

[18] Planck Science Team, PLANCK BLUEBOOK, http://www.rssd.esa.int/Planck/.

[19] M. Szopa, R. Hofmann, F. Giacosa, and M. Schwarz, Eur. Phys. J. C **54**, 655 (2008); M. Szopa and R. Hofmann, J. Cosmol. Astropart. Phys. 03 (2008) 001.

[20] J. I. Kapusta, *Finite-Temperature Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1989); M. Le Bellac, *Thermal Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1996).

[21] R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. Lett. **93**, 110402 (2004); Phys. Rev. D **70**, 125010 (2004); **70**, 129906(E) (2004); B. Altschul, Nucl. Phys. **B796**, 262 (2008).

[22] R. Casana, M. M. Ferreira, Jr., and C. E. H. Santos, Phys. Rev. D **78**, 025030 (2008).
[23] A. H. Fatollahi and M. Hajirahimi, Phys. Lett. B **641**, 381 (2006).
[24] P. J. Mohr and B. N. Taylor, Rev. Mod. Phys. **77**, 1 (2005).
[25] A. P. Balachandran, A. R. Queiroz, A. M. Marques, and P. Teotonio-Sobrinho, Phys. Rev. D **77**, 105032 (2008); H.-C. Kim, C. Rim, and J. H Yee, Phys. Rev. D **76**, 105012 (2007); A. H. Fatollahi and M. Hajirahimi, Europhys. Lett. **75**, 542 (2006).