

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Rafael Christ de Castro Lopes**

**Influência dos termos violadores de Lorentz em um  
sistema de dois níveis**

São Luís-MA, Brasil

2008

Rafael Christ de Castro Lopes

**Influência dos termos violadores de Lorentz em um  
sistema de dois níveis**

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Jr., apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física como parte final dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

São Luís-MA, Brasil

2008

Lopes, Rafael Christ de Castro.

Influência dos termos violadores de Lorentz em um sistema de dois níveis / Rafael Christ de Castro Lopes. – 2008.

71f

Impresso por computador.

Orientador: Manoel Messias Ferreira Junior.

Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2008.

1. Relatividade (Física). 2. Violação de Lorentz - efeitos. I. Ferreira Junior, Manoel Messias. II. Título.

CDU 530.145

Rafael Christ de Castro Lopes

**Influência dos termos violadores de Lorentz em um  
sistema de dois níveis**

Dissertação apresentada a Pós-Graduação de  
Física da Universidade Federal do Maranhão  
como parte dos requisitos para obtenção do  
grau de Mestre em Física.

Aprovada em: / /2008

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Jr. (Orientador)

Doutor em Física

Universidade Federal do Maranhão

---

Prof. Dr. Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho

Doutor em Física

Centro Federal de Educação Tecnológica do Maranhão

---

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos Almeida

Doutor em Física

Universidade Federal do Ceará

À Deus.

À minha esposa.

À minha família, meus fiéis amigos.

Os céus proclamam a glória de Deus e o  
firmamento anuncia a obra das suas mãos.

(Sl 19:1)

# Agradecimentos

Agradeço ao meu Deus, fonte de minha esperança, e inspiração para meu crescimento. Sem Ele, nada seria possível, inclusive minha existência, e a de toda natureza a qual dedico-me estudar.

Ao Professor Dr. Manoel Messias Ferreira Jr., pela paciência e orientação em uma obra tão importante.

Aos professores do Departamento de Física, pela amizade, apoio e incentivo na minha formação acadêmica e como ser humano. Em especial aos professores: Prof. Dr. Antonio Pinto Neto, pelos conselhos e pela amizade firmada para toda vida, ao Prof. Dr. Humberto Filomeno da Silva, que me deu grande estímulo para finalizar esse trabalho e agora compartilha da minha Fé. Aos Professores Doutores Rodolfo Alván Casana Sifuentes e Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho, pelos importantes conhecimentos ensinados durante o mestrado.

Aos meus pais, Raimundo Nonato Vieira Lopes e Ariadne Maria de Castro Lopes, pelo incentivo e amor que me deram por toda minha vida, nunca deixando de acreditar em minha carreira acadêmica.

Às minhas irmãs, que me acompanharam em toda minha caminhada.

À minha esposa, que desde a graduação esteve comigo, me incentivando e cobrando-me para que eu desenvolvesse este trabalho.

Aos meus amigos da Pós-Graduação.

À todos da Coordenação de Pós-graduação.

E finalmente, à CAPES, FAPEMA e CNPq, pelo apoio financeiro durante minha formação.

## Resumo

A escala de Planck, um regime de energia da ordem de  $10^{19} GeV$ , constitui-se um domínio desconhecido da Física atual. Acredita-se, que nesse regime deva ocorrer a unificação de duas teorias fundamentais da física: a Teoria da Relatividade Geral e a Mecânica Quântica. Uma questão de interesse é saber se a simetria de Lorentz continua válida na escala de energia de Planck, o que pode guiar a construção de novas teorias para a gravitação quântica. Tais investigações são atualmente desenvolvidas dentro do arcabouço teórico do Modelo Padrão Estendido, uma extensão do Modelo Padrão usual, que incorpora os termos violadores de Lorentz e CPT. Neste trabalho, é investigado a influência dos termos violadores da simetria de Lorentz e CPT sobre a dinâmica de um sistema de 2-níveis semi-clássico. O ponto de partida é o limite não-relativístico da equação de Dirac modificada, que fornece os termos de violação que devem ser incorporados no Hamiltoniano do sistema. Fazendo-se isto, percebe-se que o termo violador em acoplamento “vetorial”  $v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  induz modificações na função de inversão de população (FIP); para alguns conjuntos de valores de parâmetros houve acentuadas alterações na curva senoidal usual, modificando a homogeneidade da FIP por meio de picos invertidos. A frequência de oscilação da FIP apresentou uma dependência com o background que tornou-se até maior que a frequência de Rabi  $\Omega_R$ . Para alguns valores específicos de parâmetros o background induz uma modulação tipo batimento. Por outro lado, o termo violador em acoplamento “axial”  $b_\mu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi$ , levou a definição de duas FIPs: uma para descrever a oscilação de spins, outra para descrever a oscilação nos estados de energia. Para o caso de um background tipo espaço, observou-se que algumas configurações geraram oscilações de energia e de spin. A não observação experimental dos efeitos gerados pelo background nos dois acoplamentos permitiu o estabelecimento de um limite superior sobre a sua magnitude:  $|v| < 10^{-10} eV$  e  $|b| < 10^{-19} eV$ .



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Modelo Padrão Estendido</b>	<b>12</b>
2.1	Lagrangiana de Dirac violadora de Lorentz . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Tratamento semi-clássico de um sistema de dois níveis.</b>	<b>19</b>
3.1	Introdução . . . . .	19
3.2	Hamiltoniano da interação átomo-campo . . . . .	22
3.3	Método da Amplitude de Probabilidade . . . . .	24
3.4	Método Matricial . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Efeitos da violação de Lorentz devido ao acoplamento vetorial <math>v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi</math></b>	<b>32</b>
4.1	Efeitos da violação de Lorentz devido ao termo $e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}/m_e$ . . . . .	32
4.2	Efeitos da violação de Lorentz devido ao termo $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}/m_e$ . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Efeitos da violação de Lorentz devido ao acoplamento axial <math>b_\mu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi</math></b>	<b>42</b>
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>53</b>
<b>7</b>	<b>Apêndice: Representações da Mecânica Quântica</b>	<b>55</b>
7.1	Introdução . . . . .	55
7.2	Representação de Schrödinger . . . . .	56
7.3	Representação de Heisenberg . . . . .	57
7.4	Representação de Interação . . . . .	58

# Capítulo 1

## Introdução

A física do século XX foi marcada pelo surgimento e desenvolvimento de duas importantes teorias, a Mecânica Quântica(MQ) e a Teoria da Relatividade Geral(TRG), primeiramente apresentada como Teoria da Relatividade Restrita (TRR). Estas duas teorias têm obtido surpreendentes comprovações experimentais, o que as coloca no status de “Teorias Fundamentais da Natureza”<sup>1</sup>. Com o progresso das pesquisas em TRR e MQ surgiram teorias buscando harmonizá-las; uma delas foi a versão relativística da Mecânica Quântica, proposta por Dirac em 1927, que desenvolveu uma equação consistente com uma interpretação probabilística da MQ e abrangia regimes de alta velocidade. Um outro programa de pesquisa que utiliza a TR e a MQ, que obteve grande sucesso foi a Teoria Quântica de Campos(TQC), que nasceu dos esforços de descrever sob o ponto de vista quântico, a interação eletromagnética. Tais esforços levaram ao desenvolvimento da eletrodinâmica quântica.

Dentro dessa visão teórica, foi possível reunir as forças da natureza em apenas quatro: a eletromagnética, a força fraca, a força forte e a força da gravidade. A última é descrita pela TRG de Einstein, enquanto que as três primeiras são descritas pelo chamado “Modelo Padrão”(MP) das interações fundamentais, que descreve o comportamento das partículas

---

<sup>1</sup>Usa-se aqui esta terminologia para designar teorias que têm sido confirmadas nos mais diversos testes experimentais, não sendo conhecido, até o presente momento, experimentos capazes de falseá-las.

elementares. Nesta teoria, as partículas elementares são descritas como excitações localizadas de campos definidos ao longo do espaço-tempo.

Um dos postulados da TRR afirma que as leis físicas são as mesmas para todos os observadores inerciais. Esta equivalência estabelece uma simetria fundamental da natureza, chamada de simetria de Lorentz, em homenagem ao físico holandês Hendrick Antoon Lorentz (1853-1928), que primeiro obteve as conhecidas transformações de coordenadas de Lorentz, a partir de 1890. Caso uma teoria possua simetria de Lorentz é dita covariante de Lorentz.

O conceito de simetria é primordial na física, pois está ligado à conservação de importantes quantidades, tais como energia, momento e carga, ligação esta, estabelecida por meio do teorema de Noether. Esse teorema estipula uma conexão formal entre as chamadas simetrias contínuas e quantidades conservadas, declarando que, caso um sistema seja invariante perante uma transformação contínua (aquela cujos parâmetros possam ser descritos por variações infinitesimais), há uma “corrente” associada que satisfaz uma equação de continuidade, que por sua vez implica na existência de uma “carga” conservada. Um exemplo dessa relação está na invariância do eletromagnetismo sobre uma “transformação de gauge” (ou de calibre), que conduz diretamente à conservação da carga elétrica. A própria conservação da energia em um sistema físico pode ser deduzida pela invariância desse sistema sob uma translação da coordenada do tempo. Por outro lado, a ocorrência de quebra de simetria também é muito importante na física, tendo amplas consequências de interesse. Por exemplo, a quebra da simetria eletrofraca é responsável pela geração de massa dos bósons vetoriais  $W^+$ ,  $W^-$  e  $Z^0$ , partículas mediadoras da interação eletrofraca.

Com o estabelecimento da Teoria da Relatividade Restrita (TRR) como uma teoria fundamental da natureza, a simetria de Lorentz passou a ser vista como uma simetria também fundamental, dentro da concepção de que, se a TRR está correta, então as suas premissas básicas também devem estar. Porém, em anos recentes, alguns físicos teóricos têm questionado a validade desta simetria em determinados regimes, ou melhor,

estão empenhados em investigar até que ponto a covariância de Lorentz é uma simetria exata da natureza. Além deste interesse acadêmico, esta questão está relacionada com problemas de fronteira da Física contemporânea, tais como o desenvolvimento de uma teoria para descrever a Física na escala de energia de Planck, pretensamente descrita por uma teoria da gravitação quântica, unificando a TRG e a MQ. Uma das questões de interesse na atualidade é saber se a simetria de Lorentz continua válida na escala de Planck, pois isto seria determinante para o desenvolvimento da pretensa teoria da gravitação quântica. A dificuldade em se formular tal teoria quântica para a gravitação, conhecida como “Gravitação Quântica”, advém do fato das versões desenvolvidas até o momento não se mostrarem bem definidas (principalmente no aspecto da renormalização). Uma possível união entre essas duas teorias seria um grande avanço no sentido de unificar a descrição da natureza em um único sistema teórico, promovendo também um avanço no conhecimento dos processos naturais que ocorrem na escala de Planck, atualmente desconhecidos pela ciência. Até então a TRG e a MQ não foram combinadas de maneira satisfatória, porém uma abordagem ampla e promissora para a teoria unificada tem sido a Teoria das Cordas, apoiada na idéia de que as partículas são vibrações de entidades unidimensionais (“Cordas”). Uma outra candidata à teoria quântica com gravitação é a “Gravitação Quântica em Loop” (“Loop Gravity”), que se baseia na idéia de quantização do espaço-tempo. Seja qual for a forma da teoria unificada, acredita-se que a física quântica e a gravidade estejam entrelaçadas em uma escala elementar de  $10^{-35}$  metros, o conhecido comprimento de Planck, correspondente a uma energia de  $10^{19} GeV$  (energia de Planck), escala muito além daquela atingida pelos mais avançados aceleradores de partículas. Esse comprimento é obtido por meio de um procedimento em que a constante fundamental da mecânica quântica  $\hbar$ , a velocidade da luz  $c$  e a constante gravitacional de Newton  $G$ , são equiparadas em magnitude:  $G = 1 \frac{l_p^3}{m_p t_p^2}$ ,  $c = 1 \frac{l_p}{t_p}$  e  $\hbar = 1 \frac{m_p l_p}{t_p}$ . Estas relações estabelecem o sistema de Planck de unidades, no qual  $l_p$  é o comprimento de Planck,  $t_p$  é o tempo de Planck e  $m_p$  é a massa de Planck. Resolvendo as três relações de

unidades, resulta:

$$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1,61 \times 10^{-33} cm, \quad (1.1)$$

$$t_p = \frac{l_p}{c} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 5,44 \times 10^{-44} s, \quad (1.2)$$

$$m_p = \sqrt{\frac{c\hbar}{G}} = 2,17 \times 10^{-5} g. \quad (1.3)$$

Porém, não são apenas argumentos teóricos que motivam os estudos sobre a possibilidade da quebra da SL. Na década passada, dados astronômicos do espectro de estrelas [1], revelaram evidências de que a constante da estrutura fina  $\alpha$  ( $\alpha = \frac{e}{\hbar c}$ ), uma medida da interação eletromagnética entre fótons e elétrons, esteja lentamente variando. Como  $\alpha$  relaciona a carga elétrica ( $e$ ), a constante de planck ( $\hbar$ ) e a velocidade de propagação da luz no vácuo ( $c$ ), é difícil saber qual “constante” que estaria realmente variando de modo a localizar o efeito no domínio relativístico, quântico, ou eletromagnético. Deve-se observar que, identificar qual constante estaria variando implica em propor mudanças na MQ, TRR ou teoria eletromagnética de Maxwell. Caso fosse  $\hbar$  a constante que sofresse variação, isto levaria a alterações na MQ e por consequência em toda formulação do modelo padrão, se por outro lado a carga elementar  $e$  do elétron fosse alterada, a consequência direta seria a quebra da simetria de gauge, a qual está na base da formulação da eletrodinâmica quântica, teoria que apresenta precisão testada até a nona casa decimal. Portanto uma proposta seria a possibilidade da variação do valor da velocidade da luz  $c$ , apesar de que a teoria que propõe a constância de  $c$ , a TRR, ter comprovações experimentais até a oitava casa decimal. A variação da velocidade da luz pode revelar uma anisotropia do espaço-tempo, quebrando então a invariância translacional que, por estar interrelacionada com a SL por meio do grupo de Poincaré, pode ser interpretada como uma violação da simetria de Lorentz. Um outro dado experimental que revela a possibilidade da quebra da simetria de Lorentz está nos raios cósmicos com energia além do limite (GZK) - (Grasen-Zatsepin-Kuzmin) ( $E_{GZK} \simeq 4.10^{19}$  eV), que de acordo com previsões teóricas não deveriam atingir o sistema solar quando provenientes de fontes astronômicas distantes, além de  $50 Mpc$ , com uma energia superior a  $4.10^{19}$  eV, uma vez que deveriam interagir com os fótons

da radiação cósmica de fundo, perdendo parte de sua energia inicial (via efeito Compton inverso). Uma das explicações possíveis para este fenômeno é que a violação de Lorentz impede que os raios cósmicos sofram colisões inelásticas com os fótons da radiação cósmica de fundo, evitando a troca de energia entre ambos, o que invalida, o limite GZK[2].

Como podem aparecer violações da covariância de Lorentz na escala de Planck? Estudos pioneiros sobre esta questão foram iniciados por V. Alan Kostelecky e colaboradores da Universidade de Indiana nos Estados Unidos, buscando inicialmente por violações de Lorentz na teoria das cordas. De fato, no início dos anos 90, V. Alan Kostelecky, S. Samuel e R. Potting [3] conseguiram mostrar que pode ocorrer violação espontânea da simetria de Lorentz no âmbito da teoria das cordas. Tal violação, por sua vez, criaria campos de fundo, que são valores esperados no vácuo de quantidades tensoriais pertencentes a esta teoria primordial, fazendo o papel do parâmetro de ordem da transição de fase de 2ª ordem associada. Os trabalhos de Kostelecky, Samuel e Potting são importantes porque, a princípio, indicam uma possível característica da física na escala de Planck: violação da simetria de Lorentz. A questão que se coloca então é se tal característica poderia ser confirmada, ou não, por experimentos realizados numa escala de energia acessível. Para responder esta questão, Colladay e Kostelecky formularam o chamado Modelo Padrão Estendido (MPE) [4], o qual será descrito no Cap. II, onde o setor fermiônico é estudado e o Hamiltoniano violador de Lorentz escrito explicitamente. Este ferramental teórico abrange todos os setores de interação descrito pelo modelo padrão usual, e inclui interações de uma possível quebra da simetria de Lorentz e CPT. Seus trabalhos têm se estendido por muitas áreas da física: teoria das cordas, teoria da gravidade, teoria quântica de campos, cosmologia e fenomenologia, o que tem aberto muitos caminhos para testes da violação da covariância de Lorentz e a percepção dos limites de validade desta simetria.

O princípio da relatividade, que indica que as leis físicas são as mesmas para todos os referenciais inerciais, está baseado na invariância da forma matemática destas leis sob a ação das bem-conhecidas transformações de Lorentz. Para melhor descrever como ocorre a quebra da SL no MPE, é necessário primeiramente estabelecer a distinção entre dois

tipos de transformações de Lorentz: Transformação de Lorentz do Observador (TLO) e Transformações de Lorentz da Partícula (TLP).

As TLO consistem nas transformações de coordenadas usuais que representam uma mudança de referencial, sem modificar diretamente as coordenadas ou propriedades das partículas (ou campos) que compõem o sistema. Tal transformação atua também sobre os campos de fundo (background), uma vez que se trata de um boost. A invariância das leis físicas sob este tipo de transformação configura a simetria de Lorentz do observador (SLO). É a SLO que estabelece a equivalência entre a física descrita por um observador parado em uma estação ferroviária e a física observada por um passageiro sentado no interior de um trem em movimento.

No caso da TLP, ocorre uma transformação (operação) diretamente sobre as coordenadas ou propriedades das partículas, enquanto que os campos de background são mantidos intactos. Isto seria exemplificado, no caso do trem em movimento, quando o passageiro se levanta e passa a se mover no trem, ocasionando uma mudança em suas coordenadas em relação ao referencial fixo no trem, que poderia ser descrita por meio de uma nova TLO para um terceiro sistema de referência. Isto mostra que a TLP é equivalente a TLO, uma vez que o efeito da primeira pode ser descrito por outra TLO. Este passageiro continuaria a observar o mesmo quadro físico que percebia quando estava sentado. Tal equivalência significa que a percepção física independe do estado de movimento do observador ou da partícula. Porém, estes dois tipos de transformação de Lorentz são equivalentes somente em uma situação onde vale a SL e deixa de valer quando a SL é quebrada, como ocorre na presença de um campo de fundo.

Uma forma de ilustrar a quebra da equivalência entre as descrições da TLO e TLP, é observar um elétron que se move na direção perpendicular a um campo magnético uniforme, que faz o papel de campo de fundo. O movimento resultante será em círculo. Caso o momento do elétron sofra um incremento (transformação esta que pode ser lida como um boost), o elétron passará a circular em uma órbita de maior raio. Agora, se por outro lado, o observador passar a se mover (TLO) em uma direção perpendicular

ao campo magnético de fundo, o resultado é que, do ponto de vista deste observador, o elétron não mais se moverá em círculo, pois sofrerá uma força de “drift” na direção  $\vec{E} \times \vec{B}$ , gerando um movimento helicoidal. Neste caso, fica evidente que a alteração no quadro dinâmico do sistema conforme à aplicação do boost nas coordenadas da partícula ou nas coordenadas do observador. Fica claro nesse exemplo que é a existência de um campo magnético de fundo (background) que gera a quebra da equivalência entre a TLO e a TLP.

Uma outra forma de visualizar a diferença entre a física observada no referencial do observador e a física no referencial da partícula é imaginar-se dentro de um material magnético na fase ordenada. A simetria de Lorentz do observador estabelece que um observador locomovendo-se por este meio perceberia os mesmos fenômenos físicos independentemente da orientação de seu movimento(TLO), por exemplo, um elétron que se move em determinada direção, uma vez que a física não pode depender do referencial adotado. Para o caso em que o observador permanece fixo, e o elétron passa a estar em dois estados de movimento diferentes(boost da partícula), por exemplo, em um caso o movimento é paralelo ao campo magnético, e em outro, a partícula carregada moveria-se perpendicularmente ao campo. Uma vez que a força magnética depende do ângulo entre a velocidade e o campo magnético (campo de fundo), a dinâmica de uma partícula carregada que se move paralelamente ao campo é diferente de uma partícula em movimento ortogonal ao campo. Tal diferença de evolução configura a quebra da simetria da partícula.

A magnetização ( $M$ ) de um material magnético, estabelecida a partir do alinhamento espontâneo dos dipólos magnéticos microscópicos em determinada direção, é também um bom exemplo do que se denomina “Quebra Espontânea de Simetria” (QES). O termo “espontânea” está ligado ao fato de que, para haver magnetização, os dipólos devem alinharem-se espontaneamente em alguma direção específica, o que configura uma violação espontânea de simetria rotacional.

Uma quebra espontânea de simetria pode ser exemplificada através da transição de



segunda fase do ferromagnetismo no modelo de Ising. Antes da transição, os spins não possuem qualquer correlação, exibindo orientações arbitrárias uns em relação aos outros. Este estado desordenado é dito simétrico, uma vez que cada spin pode apontar em qualquer direção em relação a sua origem (simetria rotacional). A partir do momento em que o sistema é resfriado, os spins começam a ficar correlacionados, orientando-se em uma determinada direção, produzindo então uma quebra espontânea da simetria rotacional original. Observa-se que a direção resultante do alinhamento dos spins é arbitrária, o que justifica o termo “quebra espontânea”. Após a transição de fase (QES), surge um campo de fundo (no caso, o campo de magnetização  $\vec{M}$ ), que funciona como o parâmetro de ordem da fase de simetria quebrada. Tal parâmetro, obviamente, vale zero na fase simétrica. Uma outra situação ilustrativa do processo de QES envolve um bastão cilíndrico posicionado verticalmente no chão, sofrendo a ação de uma força também vertical. A situação inicial é completamente simétrica sob a perspectiva de um movimento de rotação em torno do eixo do bastão. Porém, com um aumento substancial da força, o bastão irá se encurvar espontaneamente, escolhendo uma determinada direção, quebrando assim a simetria rotacional. No caso do MPE, a QESL cria um campo tensorial com valor esperado no vácuo diferente de zero, que gera o chamado campo de fundo, ou background, na fase de simetria quebrada. Tais campos de fundo então permeariam todo o universo, indicando direções privilegiadas no espaço. Uma partícula elementar na presença desse background iria experimentar interações que seriam sensíveis a existência de uma direção específica no espaço-tempo. Desta maneira experiências em um dado referencial, como um laboratório fixo aqui na Terra, poderiam produzir resultados que evidenciassem a existência de tais backgrounds e conseqüentemente, da violação da simetria de Lorentz.

Esta dissertação se baseia na discursão acima, e versa sobre o estudo da influência de termos violadores de Lorentz. No capítulo II, partindo primeiramente da Lagrangeana de Dirac modificada pelos termos violadores de Lorentz, e na presença de um campo eletromagnético externo, constrói-se a equação de Dirac modificada. Tomando-se o limite não-relativístico desta teoria, obtém-se o Hamiltoniano correspondente, composto pelo

Hamiltoniano de Pauli e pelo Hamiltoniano violador de Lorentz, formado pelos termos advindos do acoplamento fermiônico com o background. Dentro desse Hamiltoniano, estão os termos cuja influência sobre um sistema de 2-níveis será estudada ao longo deste trabalho.

No Cap. III faz-se uma descrição semi-clássica, por não tratar o campo como quantizado, do sistema de dois níveis. Nesse estudo são apresentados dois meios para tal análise, o primeiro estabelece as equações para os coeficientes dos auto-estados da base, cuja solução permite escrever a Função de Inversão de População (FIP), que descreve o comportamento de inversão do sistema entre os dois estados da base, por isso a FIP constitui-se no objeto principal da análise do presente trabalho. O outro mecanismo citado, descreve a violação de Lorentz como uma perturbação escrita em forma matricial, que permite construir uma função da probabilidade de oscilação entre os dois estados que representam os dois níveis do sistema.

Dentro do Cap. IV, o formalismo semi-clássico baseado na FIP é aplicado aos termos  $e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}/m_e$  e  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}/m_e$ , que advêm do termo de acoplamento vetorial  $v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ . O primeiro mostrou não alterar a FIP, produzindo apenas oscilações de fase, que não implicam em alterações nas amplitudes de probabilidade. Entretanto o outro termo induz sensíveis modificações na FIP, gerando intervalos de frustração da inversão e ocorrência de picos de deformação na forma cossenoidal do gráfico. A princípio tais alterações no comportamento poderiam ser observadas. Porém, como não o são, permitem estabelecer o limite  $\mathbf{v}_x \leq 10^{-10}eV$  para o coeficiente do background violador de Lorentz.

No capítulo V são estudados os termos gerados por  $b_\mu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi$ , que são  $\sigma \cdot \mathbf{b}$  para um background tipo-espaço, e  $\frac{eb_0}{m_e} \sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})$  para o tipo-tempo. A presença das matrizes de Pauli, atuando sobre os estados de spin, indicam a necessidade de adotar uma base de quatro estados, definidos como produtos tensoriais dos estados de energia e spin. Esta nova base configura um sistema de quatro níveis, implicando que podem ocorrer oscilações entre os níveis de energia e entre os estados de spin, o que exige a definição de um Função de Inversão de População para os estados de spin. Os resultados obtidos revelaram que,

para algumas configurações de background a FIP de energia era alterada a ponto de formar padrões como batimentos e, em outros casos, apresentar alterações na forma de picos de inversão. A FIP de spin apresentou um comportamento de parcial frustração para algumas configurações, mas em outros casos, havia completa inversão nos estados de spins. Como os efeitos induzidos pelo background, tais como a inversão de spin, não são observados experimentalmente foi possível estabelecer um limite superior para o background:  $b < 10^{-19}eV$ .

O último capítulo consiste nas observações finais e conclusão da dissertação.

## Capítulo 2

# Modelo Padrão Estendido

Supondo-se que a simetria de Lorentz seja violada, uma questão interessante é saber se tal violação poderia ser detectável experimentalmente. Para tanto, faz-se necessário a realização de experimentos específicos e refinados, voltados para a busca de pequenas violações desta simetria. Tal violação, se ocorrer, deve ser pequena, caso contrário já teria produzido efeitos perceptíveis em experimentos envolvendo aspectos da TRR ou da Eletrodinâmica Quântica, por exemplo. Para guiar a proposição e realização de novos experimentos voltados especificamente para esta questão, é imprescindível a existência de um ferramental teórico onde tal violação esteja presente, de modo a ser manipulável e passível de descrição e previsão. Este arcabouço teórico foi construído por Allan Kostelecky e Don Colladay, que conceberam o chamado “Modelo Padrão Estendido” (MPE)[4] uma estrutura que congrega todas as interações presentes no MP, incluindo os termos violadores de Lorentz em todos os setores de interação. Além de disso, é compatível com quaisquer modificações oriundas de uma teoria mais fundamental, tal como a Teoria das Cordas. No MPE, a simetria de Lorentz é quebrada apenas no referencial das partículas<sup>1</sup>, mas permanece inalterada sob o ponto de vista de uma transformação do referencial do

---

<sup>1</sup>Transformação de Lorentz no referencial da partícula, equivale à uma transformação que ocorre nas coordenadas da partícula ou dos campos associados a ela, sobre a influência de um background.

observador<sup>2</sup>. Pois nesse referencial, os coeficientes tensoriais, responsáveis pela quebra de Lorentz e presentes na lagrangeana, são transformados como tensores de Lorentz genuínos, enquanto que no referencial da partícula, transformam-se como um conjunto de escalares independentes.

Os coeficientes tensoriais do MPE são gerados por meio de QESL, que ocorre no contexto de uma teoria da altíssima energia. Portanto, o MPE corresponde à fase de simetria quebrada da teoria original. Tais coeficientes podem vir a representar um background que permeia todo o universo, acoplando-se com as partículas elementares. Isto acarretaria alterações nas propriedades físicas das partículas conhecidas, assim como a dinâmica de uma partícula com spin é modificada por um campo magnético de fundo.

Uma das principais características do MPE está na possibilidade de incorporar teorias envolvendo tipos diferentes de interações que são avaliadas por variados experimentos. Portanto a interconexão e comparação de resultados experimentais somente é possível quando são expressos em um ferramental teórico comum, descrito pelo MPE. Além disso, este ferramental possui uma generalidade que o torna uma teoria que abrange outros modelos teóricos com violação de Lorentz. Por exemplo, o modelo fenomenológico proposto por Robertson [5], que pressupõe a existência de um referencial preferencial, sendo então um grupo de parâmetros violadores de Lorentz incluídos manualmente na lagrangeana, pode ser obtido como um subgrupo de parâmetros do MPE.

Além da quebra de simetria de Lorentz ser uma possível característica da Física na escala de Planck, uma outra simetria dos sistemas físicos que poderia ser quebrada é a invariância CPT, também descrita no MPE. Tal simetria indica que as leis físicas não são alteradas sob a ação de três operações discretas sucessivas: a conjugação de cargas ( $\hat{C}$ ), inversão espacial ou de paridade ( $\hat{P}$ ) e a inversão temporal ( $\hat{T}$ ). Violações independentes destas transformações já são conhecidas, porém uma violação do teorema CPT como um todo, ainda não foi observada de forma categórica.

---

<sup>2</sup>Consiste de uma transformação que atua sobre o referencial do observador na influência de um background.

Com a finalidade de analisar até que ponto as simetrias de Lorentz e CPT são boas simetrias da natureza, físicos teóricos começaram a propor sistemas físicos onde a violação dessas simetrias estaria presente, para então determinar as consequências de tal quebra em diferentes situações. Carrol-Field-Jackiw foram os responsáveis pelo trabalho inicial nessa linha de pesquisa [6]. Esses autores avaliaram a eletrodinâmica de Maxwell na presença de um termo tipo Chern-Simons em (1+3) dimensões,  $\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}A^\mu K^\nu F^{\kappa\lambda}$ , onde  $K^\nu$  representa o background fixo, responsável pela quebra da simetria de Lorentz no referencial das partículas. Uma das previsões dessa eletrodinâmica estendida é que fótons com estado de polarização diferentes se propagam com velocidades diferentes, apresentando o efeito da birefringência. Comparando esta previsão teórica com dados observacionais da radiação emitida de galáxias distantes, com o fim de verificar a existência do efeito previsto, nada foi observado. Esta comparação, contudo, possibilitou estabelecer um limite superior para magnitude do background violador:  $|K^\nu| < 10^{-33}$  eV.

O setor fermiônico do MPE, objeto de interesse do presente trabalho, proposto por Colladay e Kostelecky [4] é constituído por termos violadores de Lorentz que são compatíveis com a simetria de gauge  $U(1)$  e a renormalização. Estes termos são:

$$\mathcal{L} = -v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - b_\mu \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi + \frac{1}{2} H_{\mu\nu} \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi + \frac{1}{2} i c_{\mu\nu} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}^\nu \psi + \frac{1}{2} i d_{\mu\nu} \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}^\nu \psi, \quad (2.1)$$

onde os coeficientes que quebram Lorentz ( $v_\mu, b_\mu, H_{\mu\nu}, c_{\mu\nu}, d_{\mu\nu}$ ) advêm como valores esperados do vácuo de quantidades tensoriais presentes na teoria original. Todos os termos de contração tensorial de Lorentz comportam-se como bilineares autênticos no referencial do observador. Os dois primeiros termos são CPT-ímpares, enquanto os outros CPT-pares. A atenção deste trabalho está centrada nos dois termos CPT-ímpares, nos quais o *background* ( $v_\mu$  ou  $b_\mu$ ) está acoplado ao campo fermiônico por meio de termos de acoplamento “vetorial” ( $v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ ) e “axial” ( $b_\mu \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi$ ), respectivamente.

## 2.1 Lagrangeana de Dirac violadora de Lorentz

O ponto de partida é a lagrangeana de Dirac acrescida dos dois termos CPT-ímpares, dada por:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_{Dirac} - v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - b_\mu \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi, \quad (2.2)$$

onde  $\mathcal{L}_{Dirac}$  é a lagrangeana de Dirac ( $\mathcal{L}_{Dirac} = \frac{1}{2} i \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - m_e \bar{\psi} \psi$ ). Os termos  $v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ ,  $b_\mu \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi$  comportam-se como um escalar e um pseudo-escalar somente no referencial do observador, no qual  $v_\mu$  e  $b_\mu$  são vistos como genuínos quadri-vetores e não ocorre a violação de Lorentz [4]. A equação de Euler-Lagrange, aplicada a esta lagrangeana, conduz à equação de Dirac modificada:

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - v_\mu \gamma^\mu - b_\mu \gamma^5 \gamma^\mu - m_e) \psi = 0, \quad (2.3)$$

a qual corresponde à equação de Dirac alterada pelos termos violadores de Lorentz associados com o background. Tal equação pode ser escrita no espaço dos momentos:

$$(\gamma^\mu p_\mu - v_\mu \gamma^\mu - b_\mu \gamma^5 \gamma^\mu - m_e) w(p) = 0, \quad (2.4)$$

com  $w(p)$  sendo o espinor ( $4 \times 1$ ) no espaço do momento.

O próximo passo será estudar o limite não-relativístico desta equação. Porém, para fazê-lo, é necessário considerar a Lagrangeana de Dirac (2.2) na presença de um campo eletromagnético externo ( $A_\mu$ ) acoplado por meio de uma derivada covariante ( $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ ). A Lagrangeana (2.2) é então lida na forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} i \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu \psi - m_e \bar{\psi} \psi - b_\mu \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi - v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (2.5)$$

a qual conduz à expressão:

$$(\gamma^\mu p_\mu - e \gamma^\mu A_\mu - v_\mu \gamma^\mu - b_\mu \gamma^5 \gamma^\mu - m_e) w(p) = 0. \quad (2.6)$$

Escrevendo  $w(p)$  em termos de duas componentes espinoriais ( $w_A, w_B$ ) e as matrizes de Dirac  $\gamma^\mu$  em sua forma matricial explícita,

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

obtém-se a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} E - eA_0 - m_e - \sigma^i b^i - v_0 & -\sigma^i p^i + e\sigma^i A^i + v^i \sigma^i + b_0 \\ \sigma^i p^i - e\sigma^i A^i - v^i \sigma^i + b_0 & -E + eA_0 - m_e + \sigma^i b^i + v_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_A \\ w_B \end{pmatrix} = 0. \quad (2.8)$$

Tal equação conduz a duas equações acopladas para os espiniores ( $2 \times 1$ ):

$$(E - eA_0 - m_e - \sigma \cdot \mathbf{b} - v_0) w_A = [\sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A} - \mathbf{v}) - b_0] w_B, \quad (2.9)$$

$$(E - eA_0 + m_e - v_0 - \sigma \cdot \mathbf{b}) w_B = [\sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A} - \mathbf{v}) - b_0] w_A. \quad (2.10)$$

Estas duas equações produzem soluções de partícula livre para este modelo (veja refs. [4],[29]). Se ocorrer apenas o acoplamento vetorial ( $b_\mu = 0$ ), as soluções podem ser escritas como:

$$u_1(p) = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{(p_z - v_z)}{E + m_e - v_0} \\ \frac{(p_x - v_x) + i(p_y - v_y)}{E + m_e - v_0} \end{pmatrix}, \quad u_2(p) = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{(p_x - v_x) + i(p_y - v_y)}{E + m_e - v_0} \\ \frac{-(p_z - v_z)}{E + m_e - v_0} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

$$v_3(p) = N \begin{pmatrix} \frac{(p_z + v_z)}{E + m_e + v_0} \\ \frac{(p_x + v_x) + i(p_y + v_y)}{E + m_e + v_0} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4(p) = N \begin{pmatrix} \frac{(p_x + v_x) + i(p_y + v_y)}{E + m_e + v_0} \\ -\frac{(p_z + v_z)}{E + m_e + v_0} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Caso haja somente acoplamento axial ( $v_\mu = 0$ ), as soluções assumem a forma:

$$u_1 = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left[ (E + m_e)(p_z - b^0) - b^0 b_z + \vec{b} \cdot \vec{p} + ic_z \right] / E_1^2 \\ \left[ (E + m_e)(p_x + ip_y) - b^0(b_x + ib_y) + i(c_x + ic_y) \right] / E_1^2 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

$$u_2 = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \left[ (E + m_e)(p_x - ip_y) - b^0(b_x - ib_y) + i(c_x - ic_y) \right] / E_1^2 \\ \left[ -(E + m_e)(p_z + b^0) + b^0 b_z + \vec{b} \cdot \vec{p} - ic_z \right] / E_1^2 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$



$$v_1 = N \begin{pmatrix} [(E + m_e)(p_z + b^0) + b^0 b_z + \vec{b} \cdot \vec{p} - ic_z] / E_2^2 \\ [(E + m_e)(p_x + ip_y) - b^0(b_x + ib_y) - i(c_y + ic_z)] / E_2^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$$v_2 = N \begin{pmatrix} [(E + m_e)(p_x - ip_y) + b^0(b_x - ib_y) - i(c_x - ic_y)] / E_2^2 \\ [-(E + m_e)(p_z - b^0) - b^0 b_z + \vec{b} \cdot \vec{p} + ic_z] / E_2^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

onde  $\vec{c} = \vec{b} \times \vec{p}$ ,  $E_1^2 = [(E + m_e)^2 - b \cdot b]$ ,  $E_2^2 = [(E - m_e)^2 - b \cdot b]$  e  $N$  é a constante de normalização.

O regime não-relativístico é implementado através das condições:  $\mathbf{p}^2 \ll m_e^2$ ,  $eA_0 \ll m_e$  e  $E = m_e + H$ , onde  $H$  representa o Hamiltoniano não-relativístico. Substituindo a componente espinorial “small” ( $w_B$ ) na eq.(2.9), obtém-se uma equação para a componente “large” do espinor ( $w_A$ ), que governa o comportamento do sistema neste regime. Tal expressão conduz a seguinte forma para  $H$  (ver ref. [29]):

$$H = H_{\text{Pauli}} - \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \cdot \mathbf{v}}{m_e} + \sigma \cdot \mathbf{b} - \frac{b_0}{m_e} \sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \frac{b_0 \mathbf{v}}{m_e} + v_0, \quad (2.17)$$

onde

$$H_{\text{Pauli}} = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m_e} - \frac{e\hbar}{2m_e} \sigma \cdot \mathbf{B} + eA_0, \quad (2.18)$$

é o conhecido Hamiltoniano de Pauli obtido no limite não-relativístico da equação de Dirac. Os dois últimos termos da eq.(2.17) podem ser ignorados, pois são constantes, tendo como efeito apenas o deslocamento do espectro de energia como um todo, o que obviamente não representa nenhum efeito físico. Com estas considerações, o Hamiltoniano da violação de Lorentz apresenta a forma:

$$H_{VL} = -\frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \cdot \mathbf{v}}{m_e} + \sigma \cdot \mathbf{b} - \frac{b_0}{m_e} \sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}). \quad (2.19)$$

No intento de estudar a influência deste Hamiltoniano em um sistema de dois níveis, os termos que violam Lorentz serão considerados na equação de Schrödinger. Todo o procedimento de implementação e avaliação dos resultados será realizado no contexto de um sistema de dois níveis semi-clássico, através do “Método de amplitude de probabilidade”.

# Capítulo 3

## Tratamento semi-clássico de um sistema de dois níveis.

### 3.1 Introdução

Um dos sistemas físicos de larga aplicação na ótica é conhecido como "Sistema de dois níveis" (SDN), pois possui apenas dois graus de liberdade. Uma realização física deste sistema é um átomo cujo elétron de valência possa oscilar somente entre dois níveis de energia. Esse sistema constitui, na verdade, uma aproximação, pois não existe uma limitação fixa do número de níveis de energia que podem ser ocupados por elétrons em sistemas atômicos. Entretanto há átomos que podem, com boa aproximação, ser considerados um SDN. Um bom exemplo é o átomo de Sódio ( $Na^{11}$ ), no qual o elétron de valência está na camada  $3s$ . Caso este elétron receba uma pequena quantidade de energia, poderá migrar para um nível mais externo. Sendo considerado o acoplamento Russell-Saunders, tal elétron estará associado a uma estrutura de dubletos correspondente aos spins "up" e "down", onde a subcamada do estado fundamental corresponde a  $^2s_{1/2}$ , enquanto que o elétron excitado na próxima subcamada ocuparia um dos dois níveis:  $3p^2P_{3/2}$ ,  $3p^2P_{1/2}$ . As transições permitidas,  $3p^2P_{3/2} - 3s^2S_{1/2}$  e  $3p^2P_{1/2} - 3s^2S_{1/2}$  constituem as conhecidas linhas  $D$  do átomo de sódio, dadas por  $5890\overset{\circ}{\text{Å}}$  e  $5896\overset{\circ}{\text{Å}}$  respectivamente, com uma

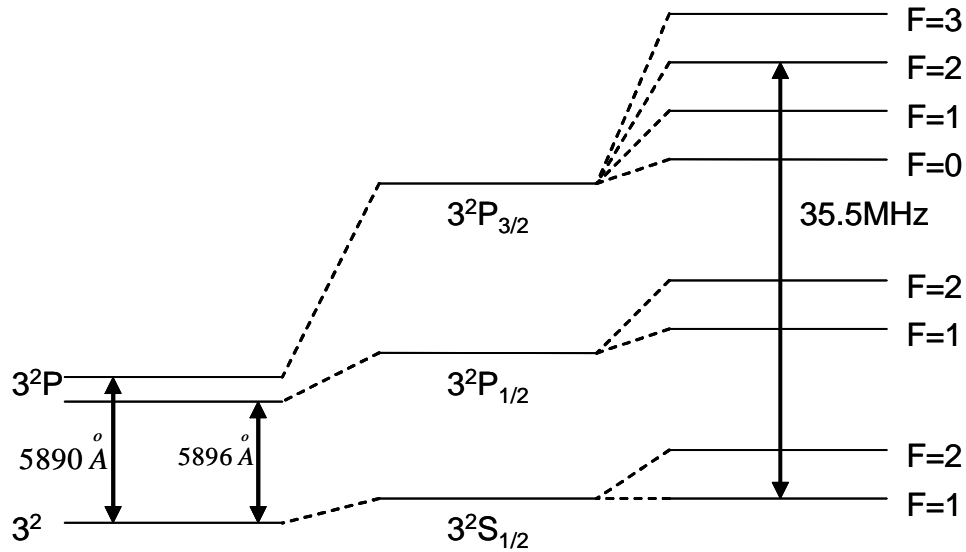


Figura 3.1: Níveis do átomo de sódio referente ao acoplamento Rssel-Saunders e a estrutura hiperfina.

diferença de  $6 \text{ \AA}$ . Entretanto, se mais uma estrutura for associada, no caso o acoplamento entre o spin nuclear e a componente  $J$  do acoplamento Russell-Saunders, o resultado será o aparecimento dos níveis hiperfinos. Neste caso, para que o átomo de sódio possa ser considerado um sistema de dois níveis, é necessário a aplicação de um pulso que encerre somente dois dos seus níveis na correção hiperfina. O que ocorre com a aplicação de um pulso  $35.5 \text{ MHz}$  que efetuará a transição entre o nível  $3p^2P_{3/2}(F = 2)$  e entre nível do estado fundamental  $3s^2S_{1/2}(F = 1)$ , pois uma frequência maior do que esse valor alcançaria outro nível de tal forma que não poderia ser considerado um sistema de dois níveis. Como descrito na Fig. [3.1](veja ref.[7]).

Em termos reais, é impossível conhecer exatamente a forma da interação de uma coleção de átomos, ou até mesmo de um único átomo, com a luz. Para que seja possível tratar tal interação, é necessário que se implemente algumas aproximações, tais como a aproximação dipolar, que consiste em tratar o comprimento de onda do campo incidente como sendo muito maior que as dimensões do átomo ( $\lambda_{campo} \gg \lambda_{átomo}$ ), permitindo que o campo seja considerado constante ao longo da dimensão espacial do átomo, de tal modo

a exibir apenas dependência temporal. Além desta aproximação, é comum supor que o campo incidente seja aproximadamente monocromático e sua frequência coincida com a frequência de transição entre os dois níveis do átomo; tais considerações simplificam bastante a descrição do sistema.

Sob o ponto de vista dinâmico, um átomo de dois níveis exibe um comportamento muito similar a de uma partícula de spin-1/2 sujeita a um campo magnético dependente do tempo, uma vez que as equações de movimento advindas da equação de Schrödinger para o sistema de dois níveis (que governam a sua evolução temporal) são as mesmas válidas para partículas de spin-1/2 em um campo magnético externo. Ambos sistemas possuem uma frequência de oscilação entre dois níveis, chamada de frequência de Rabi, que no caso do átomo ocorre entre os dois níveis de energia (oscilações ópticas), e no caso do spin se dá entre estados de spin “up” e “down”.

Todo o tratamento desenvolvido neste capítulo é realizado no contexto da aproximação semi-clássica, na qual se considera a interação de um átomo quantizado com um campo eletromagnético clássico, ou seja, não-quantizado. Esse estudo pode ser feito por meio de dois métodos. O primeiro consiste em obter e solucionar as equações diferenciais para os coeficientes da função de onda do sistema de dois níveis, escrita em termos dos seus auto-estados. Tais coeficientes proporcionam as amplitudes de probabilidade, motivo pelo qual este é o chamado “Método da amplitude de probabilidade”. O segundo método é baseado em uma expressão matricial da perturbação sendo conhecido como “Método Matricial”. Antes de apresentar os dois métodos, deve-se primeiro apresentar a forma do Hamiltoniano da interação átomo-campo.

A figura de representação usada no presente trabalho é a “*Representação de Interação*”, que permite considerar que tanto as variáveis dinâmicas bem como os auto-estados possuam variação temporal. Isto implica em poder trabalhar com a equação de Heisenberg para o Hamiltoniano não perturbado, enquanto que a equação de Schrödinger leva em consideração o Hamiltoniano completo, incluindo o termo relativo à perturbação. Isto não significa, entretanto, que uma análise em termos da “*Representação de Schrödinger*”

ou da “*Representação de Heisenberg*” não possa ser efetuada <sup>1</sup>.

## 3.2 Hamiltoniano da interação átomo-campo

Um elétron de massa  $m$  interagindo com um campo eletromagnético externo é descrito pelo Hamiltoniano de acoplamento-mínimo,

$$H = \frac{1}{2m} [\mathbf{P} - e\mathbf{A}(\mathbf{r},t)]^2 + eU(\mathbf{r},t) + V(\mathbf{r}), \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{P} = -i\hbar\nabla$  é o operador momento canônico,  $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$  e  $U(\mathbf{r},t)$  são os potenciais vetorial e escalar do campo externo, respectivamente, e  $V(\mathbf{r})$  é um potencial eletrostático que define o sistema quântico em questão; para o átomo de hidrogênio quantizado vale  $V(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{r}$ .

Implementando a prescrição operatorial para o momento descrita acima e substituindo o Hamiltoniano na equação de schrödinger

$$H\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi, \quad (3.2)$$

obtemos a expressão

$$\left\{ \frac{-\hbar^2}{2m} \left[ \nabla - i\frac{e}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \right]^2 + eU(\mathbf{r},t) + V(\mathbf{r}) \right\} \psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi. \quad (3.3)$$

O vetor  $\mathbf{r}_0$  determina a localização do núcleo enquanto que vetor posição  $\mathbf{r}$  localiza o elétron, ligado ao átomo por meio do potencial  $V(\mathbf{r})$ . Sob esta circunstância, é possível implementar a aproximação dipolar que permitirá a redução do Hamiltoniano de acoplamento-mínimo para uma forma mais compacta. Esta vale quando o comprimento de onda do campo incidente é muito maior que o comprimento médio do átomo.

No contexto da interação semi-clássica, o átomo está imerso numa onda plana, representativa do campo eletromagnético, descrita pelo vetor potencial  $\mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0, t) = \mathbf{A}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)}$ . Por meio da aproximação dipolar ( $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$ ), este vetor potencial pode ser escrito como

---

<sup>1</sup>Ver apêndice.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0, t) &= \mathbf{A}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \\
&= \mathbf{A}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} (\mathbf{1} + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \dots), \\
&\simeq \mathbf{A}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Através deste resultado podemos ver que a aproximação dipolar consiste em fazer com que a variação espacial do campo sobre o átomo deixe de ser percebida, uma vez que o campo passa a depender somente do tempo. Esta aproximação permite que a equação de Schrodinger (3.3) seja reescrita na forma

$$\left\{ \frac{-\hbar^2}{2m} \left[ \nabla - i\frac{e}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \right]^2 + V(\mathbf{r}) \right\} \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi, \tag{3.5}$$

onde foi usado o gauge de radiação, que impõe a seguinte condição para o potencial

$$U(\mathbf{r}, t) = 0. \tag{3.6}$$

Como a eq.(3.5) é invariante sob uma transformação de gauge local, é possível definir uma nova função de onda,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{[i\frac{e}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \cdot \mathbf{r}]} \phi(\mathbf{r}, t), \tag{3.7}$$

que ao ser inserida na eq.(3.7), conduz a:

$$i\hbar \left[ \frac{ie}{\hbar} \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r} \phi(\mathbf{r}, t) + \dot{\phi}(\mathbf{r}, t) \right] e^{[i\frac{e}{\hbar} \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}]} = \left[ \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right] \phi(\mathbf{r}, t) e^{[i\frac{e}{\hbar} \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}]}, \tag{3.8}$$

onde  $\mathbf{P} = i\hbar [\nabla - i\frac{e}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t)]$ .

Após o cancelamento da exponencial e a reorganização dos termos, a expressão anterior assume a forma simples:

$$i\hbar \dot{\phi}(\mathbf{r}, t) = [H_0 - e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)] \phi(\mathbf{r}, t), \tag{3.9}$$

tal que,

$$H_0 = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V(\mathbf{r}), \tag{3.10}$$

é o Hamiltoniano não perturbado e Hamiltoniano total é expresso como

$$H = H_0 + H_1, \tag{3.11}$$

com

$$H_1 = -e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t). \quad (3.12)$$

Aqui, o Hamiltoniano  $H_1$  representa a interação do elétron localizado em  $\mathbf{r}$  com o campo eletromagnético  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)$  definido de acordo com a aproximação dipolar ( $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{t})$ ).

Com a obtenção do Hamiltoniano de interação, é possível fazer uma primeira descrição de um sistema de dois níveis, avaliando como tal sistema se comporta submetido à ação de um campo elétrico.

### 3.3 Método da Amplitude de Probabilidade

Um sistema de dois níveis possui, por definição, dois estados de energia correspondentes a esses níveis, que podem ser designados pelos auto-estados de energia  $|a\rangle, |b\rangle$  (auto-estados de  $H_0$ ), que formam a base do sistema. Este está submetido à ação de um campo eletromagnético semiclássico ( $A^\mu$ ). A função de onda para este sistema é:

$$|\psi(t)\rangle = A(t)|a\rangle + B(t)|b\rangle, \quad (3.13)$$

sendo que  $|A(t)|^2, |B(t)|^2$  representam as probabilidades de encontrar o elétron nos estados  $|a\rangle, |b\rangle$ , respectivamente. A evolução deste sistema é dada pela equação de Schrödinger,

$$i\dot{|\psi(t)\rangle} = -iH|\psi(t)\rangle, \quad (3.14)$$

com  $H$  sendo o Hamiltoniano associado ao sistema, o qual pode ser escrito em termos de uma parte não perturbada e uma parte de interação, a saber:

$$H = H_0 + H_{int}, \quad (3.15)$$

sendo que  $H_0|a\rangle = \hbar\omega_a|a\rangle, H_0|b\rangle = \hbar\omega_b|b\rangle$ , e  $H_{int} = -e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ .

Supondo que o campo elétrico esteja polarizado na direção  $x$ , temos:  $\vec{E}(t) = E_0 \cos \nu t \hat{i}$ , o que resulta:

$$H_{int} = -exE_0 \cos \nu t. \quad (3.16)$$



O módulo do campo elétrico ( $E_0$ ) é considerado como constante, uma consequência direta da aproximação dipolar. Através do conhecimento acerca da evolução do ket  $|\psi(t)\rangle$ , em termos de seus coeficientes  $A(t)$  e  $B(t)$ , toda dinâmica de um sistema de dois níveis pode ser estudada. Para tanto, é necessário obter as equações diferenciais para os coeficientes  $A(t)$  e  $B(t)$ , cuja solução fornecerá o comportamento do sistema. Uma abordagem eficiente consiste em escrever o Hamiltoniano  $H$  na base  $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ . Através da relação de completudeza  $|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b| = 1$ , pode-se escrever  $H_0$  como

$$H_0 = (|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|) H_0 (|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|). \quad (3.17)$$

Observando que  $H_0|a\rangle = \hbar\omega_a|a\rangle$  e  $H_0|b\rangle = \hbar\omega_b|b\rangle$ , obtém-se:

$$H_0 = \hbar\omega_a|a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b|b\rangle\langle b|. \quad (3.18)$$

De forma análoga, aplica-se a relação de completudeza sobre o Hamiltoniano de interação,

$$H_{int} = (|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|) (-exE_0 \cos \nu t) (|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|). \quad (3.19)$$

Considerando que somente o operador posição  $x$  pode atuar sobre os kets, resulta:

$$H_{int} = -e [(\langle b|x|a\rangle) |b\rangle\langle a| + (\langle a|x|b\rangle) |a\rangle\langle b|] E_0 \cos \nu t, \quad (3.20)$$

$$H_{int} = -(P_{ab}|a\rangle\langle b| + P_{ab}^*|b\rangle\langle a|)E(t), \quad (3.21)$$

onde foi usado:  $E(t) = E_0 \cos \nu t$ ,  $\langle a|x|a\rangle = \langle b|x|b\rangle = 0$ . Aqui,  $P_{ab} = e\langle a|x|b\rangle$  é o elemento de matriz do momento de dipólo elétrico. Substituindo o Hamiltoniano e o ket  $|\psi(t)\rangle$  na equação de Schrödinger, surgem duas equações diferenciais acopladas para  $A(t)$  e  $B(t)$ :

$$\dot{A}(t) = -iA\omega_a + i\Omega_R B \cos \nu t, \quad (3.22)$$

$$\dot{B}(t) = -iB\omega_b + i\Omega_R A \cos \nu t, \quad (3.23)$$

com  $\Omega_R = |P_{ab}|E_0$  sendo a frequência de Rabi, frequência com a qual o sistema oscilará entre os dois níveis. As eqs. (3.22,3.23) podem ser facilmente resolvidas fazendo uso de

uma redefinição dos coeficientes  $a(t) = Ae^{i\omega_a t}$  e  $b(t) = Be^{i\omega_b t}$ , que permitirá, posteriormente, implementar uma nova aproximação. As novas equações para os coeficientes são escritas como:

$$\dot{a}(t) = i\frac{\Omega_R}{2}b(t) [e^{i(\omega-\nu)t} + e^{i(\omega+\nu)t}], \quad (3.24)$$

$$\dot{b}(t) = i\frac{\Omega_R}{2}a(t) [e^{-i(\omega-\nu)t} + e^{-i(\omega+\nu)t}]. \quad (3.25)$$

Aqui  $\omega = (\omega_a - \omega_b)$ . Deve-se observar que tais equações diferenciais são compostas por termos de duas frequências diferentes, um dado por  $e^{\pm i(\omega-\nu)t}$  e outro escrito como  $e^{\pm i(\omega+\nu)t}$ . Uma aproximação muito eficiente e útil na solução destas equações consiste em desprezar os termos de frequências mais alta, retendo apenas aqueles de baixa frequência. Esta técnica é conhecida como aproximação de onda girante (RWA - “Rotating wave approximation”). A justificativa física para sua aplicação está no fato que a média temporal dos termos com maior frequência é aproximadamente nula, de modo que os efeitos produzidos pelos termos em questão podem ser negligenciados. Entretanto, há trabalhos na literatura que discutem o efeito dos termos de alta frequência, desprezados na RWA, mostrando que tais efeitos provocam um desvio na frequência de ressonância, efeito conhecido como “deslocamento de Bloch-Siegert” [8]. Para um pulso de  $1nseg$ , o desvio de Bloch-Siegert vale  $\Delta \cong 10^{-10}\omega_0$ , sendo  $\omega_0$  a frequência de ressonância [7]. Isto atesta a validade da RWA em sistemas atômicos típicos.

Aplicando a RWA, às equações para  $a(t)$  e  $b(t)$  são reescritas como

$$\dot{a}(t) = i\frac{\Omega_R}{2}b(t)e^{i(\omega-\nu)t}, \quad (3.26)$$

$$\dot{b}(t) = i\frac{\Omega_R}{2}a(t)e^{-i(\omega-\nu)t}, \quad (3.27)$$

podendo então ser resolvidas exatamente. As soluções obtidas para os coeficientes  $a(t)$  e  $b(t)$  são:

$$a(t) = (\alpha_1 e^{i\Omega t/2} + \alpha_2 e^{-i\Omega t/2}) e^{i\Delta t/2}, \quad (3.28)$$

$$b(t) = (\beta_1 e^{i\Omega t/2} + \beta_2 e^{-i\Omega t/2}) e^{-i\Delta t/2}, \quad (3.29)$$

sendo  $\Delta = (\omega - \nu)$ ,  $\Omega = \sqrt{\Omega_R^2 + (\omega - \nu)^2}$ , enquanto que  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  são constantes que dependem das condições iniciais, sendo dadas por:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\Omega} [(\Omega - \Delta) a(0) + \Omega_R b(0)], \quad (3.30)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\Omega} [(\Omega + \Delta) a(0) - \Omega_R b(0)], \quad (3.31)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2\Omega} [(\Omega + \Delta) b(0) + \Omega_R a(0)], \quad (3.32)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2\Omega} [(\Omega - \Delta) b(0) - \Omega_R a(0)]. \quad (3.33)$$

Substituindo tais coeficientes nas soluções para  $a(t)$  e  $b(t)$ , resulta:

$$a(t) = a(0) \{ [\cos(\Omega t/2) - i(\Delta/\Omega) \sin(\Omega t/2)] + \frac{i\Omega_R}{\Omega} b(0) \sin(\Omega t/2) \} e^{i\Delta t/2}, \quad (3.34)$$

$$b(t) = b(0) \{ [\cos(\Omega t/2) + i(\Delta/\Omega) \sin(\Omega t/2)] + \frac{i\Omega_R}{\Omega} a(0) \sin(\Omega t/2) \} e^{-i\Delta t/2}. \quad (3.35)$$

Considerando o sistema no estado  $|a\rangle$  em  $t = 0$ , então  $a(0) = 1$  e  $b(0) = 0$ , o que resulta em:

$$a(t) = [\cos(\Omega t/2) - i(\Delta/\Omega) \sin(\Omega t/2)] e^{i\Delta t/2}, \quad (3.36)$$

$$b(t) = i \frac{\Omega_R}{\Omega} \sin(\Omega t/2) e^{-i\Delta t/2}, \quad (3.37)$$

Na ressonância, a frequência do campo externo coincide com a diferença de frequência entre os dois níveis ( $\nu = \omega$ ), tal que  $\Delta = 0$ ,  $\Omega = \Omega_R$ . Desse modo, a função de inversão de população (FIP), definida como  $W(t) = |a(t)|^2 - |b(t)|^2$ , que reflete a alternância da partícula entre os estados  $|a\rangle$  e  $|b\rangle$ , é igual a:

$$W(t) = \cos \Omega_R t, \quad (3.38)$$

cujos comportamento pode ser visualizado pelo gráfico da [3.2].

Quando  $W(t) = +1$ , a partícula está no estado  $|a\rangle$ , por outro lado quando  $W = -1$ , a partícula encontra-se no estado  $|b\rangle$ ; se  $-1 < W < 1$ , a partícula estará em uma superposição dos dois estados, onde o valor de  $W$  indicará em qual estado é mais provável

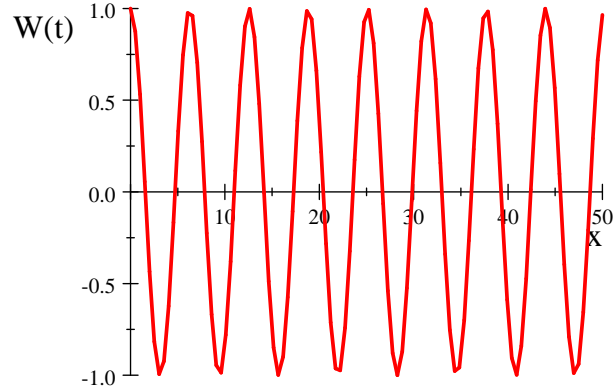


Figura 3.2: Oscilações da Função de Inversão de População (FIP)  $W(t)$  como função do tempo

encontrá-la. A forma de  $W(t)$  mostra com que frequência a partícula oscila entre os estados  $|a\rangle$  e  $|b\rangle$ , sendo conhecida como a frequência de Rabi. Portanto, fica claro que o gráfico da FIP permite conhecer a dinâmica do SDN. Todo o formalismo aqui desenvolvido, segue diretamente o cap. 5 da ref.[9].

### 3.4 Método Matricial

Após ter sido desenvolvido uma análise preliminar do sistema de dois níveis por meio da amplitude de probabilidade, que conduz ao cálculo da função de inversão de população (FIP), é interessante conhecer um outro meio de realizar um estudo do SDN expressando o Hamiltoniano da interação ( $W$ ), em forma matricial[37]. Como o sistema é de dois níveis, então o espaço de estados será bidimensional composto por dois autos-estados  $|\varphi_1\rangle$  e  $|\varphi_2\rangle$ , os quais satisfazem a relação:

$$H_0|\varphi_1\rangle = E_1|\varphi_1\rangle, \quad (3.39)$$

$$H_0|\varphi_2\rangle = E_2|\varphi_2\rangle, \quad (3.40)$$

onde  $H_0$  é o Hamiltoniano não-perturbado, independente do tempo, cujas autoenergias são  $E_1$  e  $E_2$ . Quando é incluída uma perturbação  $W$  no sistema, o Hamiltoniano assume

a forma:

$$H = H_0 + W, \quad (3.41)$$

cujos auto-estados e os auto-valores são escritos como  $|\psi_{\pm}\rangle$  e  $E_{\pm}$ , obedecendo a relação:

$$H|\psi_{+}\rangle = E_{+}|\psi_{+}\rangle, \quad (3.42)$$

$$H|\psi_{-}\rangle = E_{-}|\psi_{-}\rangle. \quad (3.43)$$

Pode-se escrever  $W$  na base  $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$  dos auto-estados de  $H_0$ , na forma de uma matriz Hermitiana, como:

$$(W) = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

onde  $W_{12} = W_{21}^*$ . Deste modo, a matriz  $H$  pode ser escrita na forma:

$$(H) = \begin{pmatrix} E_1 + W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & E_2 + W_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Após a diagonalização de  $H$ , são obtidos os autovalores  $E_{\pm}$ :

$$E_{+} = \frac{1}{2}(E_1 + W_{11} + E_2 + W_{22}) + \frac{1}{2}\sqrt{(E_1 + W_{11} - E_2 - W_{22}) + 4|W_{12}|^2}, \quad (3.46)$$

$$E_{-} = \frac{1}{2}(E_1 + W_{11} + E_2 + W_{22}) - \frac{1}{2}\sqrt{(E_1 + W_{11} - E_2 - W_{22}) + 4|W_{12}|^2}, \quad (3.47)$$

enquanto os auto-estados associados com  $E_{+}$  e  $E_{-}$  escrevem-se:

$$|\psi_{+}\rangle = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |\varphi_1\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |\varphi_2\rangle, \quad (3.48)$$

$$|\psi_{-}\rangle = -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |\varphi_1\rangle + \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |\varphi_2\rangle. \quad (3.49)$$

Aqui, os ângulos  $\theta$  e  $\varphi$  são parâmetros dados por:

$$\tan \theta = \frac{2|W_{12}|}{E_1 + W_{11} - E_2 - W_{22}}, \quad (3.50)$$

$$W_{12} = |W_{12}| e^{i\varphi}. \quad (3.51)$$

Com  $0 \leq \theta \leq \pi$ . É possível estudar a evolução dinâmica de um sistema de dois níveis sob uma perturbação externa pela análise da probabilidade de transição entre os dois auto-estados  $|\varphi_1\rangle$  e  $|\varphi_2\rangle$ . Sob esta perspectiva, o efeito da perturbação está em induzir uma oscilação do sistema entre estes dois auto-estados. Um meio de obter a probabilidade de transição está em determinar a evolução temporal do ket  $|\psi(t)\rangle$ , que representa o estado do sistema no instante  $t$ . Este ket é escrito como:

$$|\psi(t)\rangle = c_1(t)|\varphi_1\rangle + c_2(t)|\varphi_2(t)\rangle. \quad (3.52)$$

A probabilidade do sistema estar no estado  $|\varphi_1\rangle$  ou  $|\varphi_2\rangle$  é  $|c_1(t)|^2$  ou  $|c_2(t)|^2$ , respectivamente. Considerando que o sistema está inicialmente no estado  $|\varphi_1\rangle$ , isto é,  $|\psi(0)\rangle = |\varphi_1\rangle$ , então a probabilidade de transição para o estado  $|\varphi_2\rangle$  é  $P_{12}(t) = |\langle\varphi_2|\psi(0)\rangle|^2$ . Para calculá-la, podemos escrever  $|\psi(0)\rangle$  em termos dos autoestados  $|\psi_+\rangle$  e  $|\psi_-\rangle$ , invertendo as equações (3.48 e 3.49), o que leva a:

$$|\psi(0)\rangle = |\varphi_1\rangle = e^{i\varphi/2} \left[ \cos \frac{\theta}{2} |\psi_+\rangle - \sin \frac{\theta}{2} |\psi_-\rangle \right], \quad (3.53)$$

da qual segue-se,

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\varphi/2} \left[ \cos \frac{\theta}{2} e^{-iE_+t/\hbar} |\psi_+\rangle - \sin \frac{\theta}{2} e^{-iE_-t/\hbar} |\psi_-\rangle \right]. \quad (3.54)$$

Com este resultado, a probabilidade  $P_{12}$  resulta igual a:

$$P_{12}(t) = \sin^2 \theta \sin^2 \left( \frac{E_+ - E_-}{2\hbar} \right) t. \quad (3.55)$$

Substituindo os termos dados nas eqs.(3.46),(3.47), (3.50), temos:

$$P_{12}(t) = \frac{4|W_{12}|^2}{4|W_{12}|^2 + (E_1 - E_2)^2} \sin^2 \left[ \left( \sqrt{4|W_{12}|^2 + (E_1 - E_2)^2} \right) \frac{t}{2\hbar} \right]. \quad (3.56)$$

Esta expressão é conhecida como fórmula de Rabi, e mostra a oscilação de  $P_{12}(t)$  no tempo com uma frequência  $(E_+ - E_-)/\hbar$  variando entre os extremos 0 e  $\sin^2 \theta$ . Quando  $E_1 = E_2$ ,  $(E_+ - E_-)/\hbar$ , é igual a  $2|W_{12}|/\hbar$ , e  $\sin^2 \theta$  assume valor máximo, isto é 1. Então após um certo tempo, o sistema, que inicialmente estava em  $|\varphi_1\rangle$ , passa a estar em  $|\varphi_2\rangle$ . Desse modo, perturbação em dois estados de mesma energia faz com que o sistema passe a oscilar

completamente de um estado para o outro com uma frequência proporcional a magnitude da perturbação. Caso esta perturbação seja de magnitude muito inferior a diferença entre os dois níveis não perturbados ( $E_1 - E_2 \gg |W_{12}|$ ), a separação entre os níveis perturbados será bem próxima àquela existente antes da perturbação ( $E_+ - E_- \approx E_1 - E_2$ ). Isto está em acordo com o fato de que o estado  $|\varphi_1\rangle$  é muito próximo de  $|\psi_+\rangle$  para este tipo de perturbação.

# Capítulo 4

## Efeitos da violação de Lorentz devido ao acoplamento vetorial $v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

### 4.1 Efeitos da violação de Lorentz devido ao termo

$$e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}/m_e.$$

Após o estabelecimento do Hamiltoniano no limite não-relativístico, o próximo passo será determinar o papel desempenhado pelos termos advindos do acoplamento  $v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  em um sistema de dois níveis. Da eq.(2.19), sabe-se que são  $e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}/m_e$  e  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}/m_e$ . Inicialmente, será considerado o efeito do termo  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ , o que será realizado seguindo o "Método da Amplitude de Probabilidade" apresentado no capítulo anterior.

Primeiramente, toma-se o campo elétrico da onda eletromagnética incidente sobre o átomo como sendo dado por  $\mathbf{E}(t) = E_0 \cos \nu t \hat{i}$ , o que resulta em  $\mathbf{A}(t) = -A_0 \sin \nu t \hat{i}$ , com  $A_0 = E_0/\nu$ . O Hamiltoniano do sistema, formado por todas as interações consideradas, é expresso por:

$$H = H_0 + H_{int} + H_1, \quad (4.1)$$

onde  $H_0$  representa o Hamiltoniano não perturbado,  $H_{int}$  a interação do átomo com o campo eletromagnético e, por último,  $H_1$  representa o acoplamento do *background* com o átomo, escrito na forma:  $H_1 = -eA_0 v_x \sin \nu t/m_e$ . Em termos da base  $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ , esta



interação pode ser escrita na forma:

$$H_1 = -\frac{e}{m_e} (|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|) A_0 v_x (|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|) \sin \nu t. \quad (4.2)$$

O que implica imediatamente em:

$$H_1 = \alpha(t)(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|), \quad (4.3)$$

com:  $\alpha(t) = -\alpha_0 \sin \nu t$ ,  $\alpha_0 = eA_0 v_x / m_e$ . O Hamiltoniano H, na base  $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ , é:

$$H = \hbar\omega_a |a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b |b\rangle\langle b| - (P_{ab}|a\rangle\langle b| + P_{ab}^* |b\rangle\langle a|) E(t) + \alpha(t)(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|). \quad (4.4)$$

Substituindo o Hamiltoniano H na equação de Schrödinger, são obtidas duas equações diferenciais acopladas para os coeficientes  $A(t)$  e  $B(t)$ :

$$\dot{A}(t) = -iA\omega_a + i\Omega_R B \cos \nu t + iA\alpha_0 \sin \nu t, \quad (4.5)$$

$$\dot{B}(t) = -iB\omega_b + i\Omega_R A \cos \nu t + iB\alpha_0 \sin \nu t, \quad (4.6)$$

onde o elemento da matriz dipolar foi assumido como real ( $P_{ab} = P_{ab}^*$ ). Se implementarmos uma redefinição dos coeficientes, tal que  $a(t) = Ae^{i\omega_a t}$  e  $b(t) = Be^{i\omega_b t}$ , as novas equações para os coeficientes serão escritas como:

$$\dot{a}(t) = i\alpha_0 a(t) \sin \nu t + i(\Omega_R/2)b(t)e^{i(\omega-\nu)t}, \quad (4.7)$$

$$\dot{b}(t) = i\alpha_0 b(t) \sin \nu t + i(\Omega_R/2)a(t)e^{-i(\omega-\nu)t}. \quad (4.8)$$

Nesta última expressão foi adotada a aproximação de onda girante (RWA), o que conduziu à exclusão dos termos  $e^{\pm i(\omega+\nu)t}$ .

Na ressonância ( $\omega = \nu$ ), e com condição inicial  $a(0) = 1$ , tais equações diferenciais podem ser resolvidas exatamente, conduzindo às soluções:

$$a(t) = e^{-i(\alpha_0 \cos \nu t)/\nu} e^{i\alpha_0/\nu} \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right), \quad (4.9)$$

$$b(t) = e^{-i(\alpha_0 \cos \nu t)/\nu} e^{i\alpha_0/\nu} \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right). \quad (4.10)$$

Esses coeficientes possuem uma forma diferente daqueles obtidos na ausência do *background*, apresentados no capítulo anterior, porém as amplitudes de probabilidade  $|A(t)|^2$ ,  $|B(t)|^2$

e portanto a FIP (Função Inversão de População),  $W(t) = \cos \Omega_R t$ , não são alteradas. Tal resultado indica que o termo de violação de Lorentz  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$  não conduz a modificações na oscilação de Rabi, oscilações entre os dois níveis. Desta forma, a dinâmica do sistema de dois níveis permanece inalterada pelo *background*.

## 4.2 Efeitos da violação de Lorentz devido ao termo

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} / m_e.$$

O próximo passo na investigação do efeito do background sob a dinâmica de um sistema de dois níveis será o estudo do termo  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} / m_e$ . Neste caso, o Hamiltoniano é expresso por:

$$H = H_0 + H_{int} + H_2, \quad (4.11)$$

onde o termo  $H_2$  representa  $-\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} / m_e$ .

Para um campo elétrico polarizado no eixo  $x$ ,  $H_2 = -v_x p_x / m_e$ . Usando a relação  $\dot{x} = -i[x, H_0]$ , obtêm-se como resultado:

$$H_2 = i v_x [x, H_0]. \quad (4.12)$$

Este termo do Hamiltoniano pode ser escrito na base  $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ . Para tanto usa-se a relação de fechamento:

$$H_2 = i v_x (|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|) [x, H_0] (|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|), \quad (4.13)$$

que após a aplicação dos operadores  $x$  e  $H_0$  assume a forma

$$H_2 = -i\beta_0 [\omega|a\rangle\langle b| - \omega|b\rangle\langle a|], \quad (4.14)$$

com  $\beta_0 = (v_x p_{ab})$ ,  $p_{ab} = \langle a|x|b\rangle$ .

Substituindo o Hamiltoniano

$$H = \hbar\omega_a |a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b |b\rangle\langle b| - (P_{ab}|a\rangle\langle b| + P_{ab}^* |b\rangle\langle a|)E(t) - i\beta_0 [\omega|a\rangle\langle b| - \omega|b\rangle\langle a|], \quad (4.15)$$

na equação de Schrödinger, origina-se o seguinte sistema de equações acopladas:

$$\dot{A}(t) = -i\omega_a A + iP_{ab}E_0 B \cos \nu t - \beta_0 \omega B, \quad (4.16)$$

$$\dot{B}(t) = -i\omega_b B + iP_{ab}E_0 A \cos \nu t + \beta_0 \omega A. \quad (4.17)$$

Tais equações pode ser reescritas pelo uso da transformação  $a(t) = Ae^{i\omega_a t}$ ,  $b(t) = Be^{i\omega_b t}$ , assumindo a forma:

$$\dot{a}(t) = i\hbar \frac{P_{ab}E_0}{2} b(t) e^{i(\omega-\nu)t} - \beta_0 \omega b(t) e^{i\omega t}, \quad (4.18)$$

$$\dot{b}(t) = i\hbar \frac{P_{ab}E_0}{2} a(t) e^{-i(\omega-\nu)t} + \beta_0 \omega a(t) e^{-i\omega t}, \quad (4.19)$$

sendo que a RWA foi usada para exclusão dos termos de alta frequência e para facilitar a solução.

Antes de prosseguir na solução deste sistema, uma análise interessante consiste em avaliar o seu comportamento sob a ação somente do background, ou seja, na situação onde o campo externo é nulo ( $E_0 = 0$ ). Nesse caso, o sistema de Eqs. (4.18), (4.19) adquire a forma:

$$\dot{a}(t) = -\beta_0 \omega b(t) e^{i\omega t}, \quad (4.20)$$

$$\dot{b}(t) = \beta_0 \omega a(t) e^{-i\omega t}. \quad (4.21)$$

Para resolvê-lo, aplica-se a condição inicial  $a(0) = 1$  e  $b(0) = 0$ , que implica na solução:

$$a(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+4\beta_0^2}} \left[ k_- e^{\frac{i}{2}k_- \omega t} + k_+ e^{-\frac{i}{2}k_+ \omega t} \right], b(t) = \frac{-i\beta_0}{\sqrt{1+4\beta_0^2}} \left[ e^{\frac{i}{2}k_- \omega t} - e^{-\frac{i}{2}k_+ \omega t} \right], \quad (4.22)$$

com  $k_{\pm} = (\sqrt{1+4\beta_0^2} \pm 1)$ . A correspondente função de inversão de população é:

$$W(t) = \frac{1}{(1+4\beta_0^2)} \left[ 1 + 4\beta_0^2 \cos(\sqrt{1+4\beta_0^2} \omega t) \right]. \quad (4.23)$$

Este resultado mostra que o background violador de Lorentz é capaz de induzir oscilações de Rabi com uma frequência fixa  $\varpi = \sqrt{1+4\beta_0^2} \omega$ , que aproxima-se de  $\omega = (\omega_a - \omega_b)$ , uma vez que o background é suposto ser de pequena magnitude ( $\beta_0^2 \ll 1$ ). Como as correções induzidas são proporcionais ao fator  $4v_x^2 p_{ab}^2$ , elas podem ser usadas

para impor um limite na magnitude do background. De fato, considerando que os efeitos na inversão de população maiores que  $10^{-10}$  podem ser experimentalmente detectáveis, então impõe-se que:  $4v_x^2 p_{ab}^2 < 10^{-10}$ . Assumindo-se  $P_{ab} = \langle a|x|b \rangle \simeq 1(\text{eV})^{-1}$ , obtém-se:

$$v_x < 5 \cdot 10^{-6} \text{ eV}. \quad (4.24)$$

Este não é um limite rigoroso, mas pode ser encarado como um resultado preliminar. Um limite mais rigoroso pode ser alcançado analisando o comportamento do sistema na presença de campo elétrico ( $E_0 \neq 0$ ).

Na presença do campo externo  $E_0$ , as eqs. (4.18,4.19) não possuem solução analítica, mesmo na ressonância ( $\omega = \nu$ ). Uma abordagem numérica torna-se necessária para produzir uma representação gráfica para a FIP do sistema. Deste modo, é necessário estabelecer um grupo de valores numéricos compatíveis com a física de um típico sistema de dois níveis. O sistema de unidades usado é o de unidades naturais ( $c = 1, \hbar = 1$ ), onde os parâmetros relevantes apresentam a dimensão de massa:  $[\Omega_R] = [\omega] = [v^\mu] = 1, [E_0] = 2, [P_{ab}] = [p_{ab}] = -1$ .

O próximo passo é buscar efeitos advindos de um pequeno background,  $|v| = 10^{-6} - 10^{-10} \text{ eV}$ , no sistema de dois níveis. Os valores assumidos para o campo elétrico correspondem a típicos valores que abrangem a energia de transição ótica entre dois níveis, dada por, aproximadamente,  $1 \text{ eV}$ . Deste modo o campo elétrico é da ordem de  $E \approx 1V/a_0$  (ou  $E \approx 10^{10}V/m$ ), onde  $a_0$  é raio de Bohr. Entretanto, experimentos de ressonância trabalham com campos várias ordens de grandeza menor, como por exemplo  $E \approx 10^6 \text{ V/m}$ [7]. Em unidades naturais  $1 \text{ volt/m} = 2.3 \times 10^{-6}(\text{eV})^2$ , o que resulta em:  $E_0 \simeq 2 - 10(\text{eV})^2$ . Para a frequência da onda assume-se valores eletromagnéticos típicos tais como:  $\nu \sim 10^{16} \text{ Hz}$  (limite do ultravioleta), o qual em unidades naturais é equivalente a  $\nu = 6.6eV$  (sendo  $1s^{-1} = 6.6 \times 10^{-16}eV$ ).

Na Fig.[4.1], o efeito do background na FIP é mostrado em detalhes. Induz alterações (deformações) na forma da senoidal harmônica usual, obtida na ausência do background. Tais modificações aparecem como não homogênedades na FIP, embora o padrão periódico seja mantido. Tais alterações estão presentes ao longo de toda senoidal da oscilação. Para

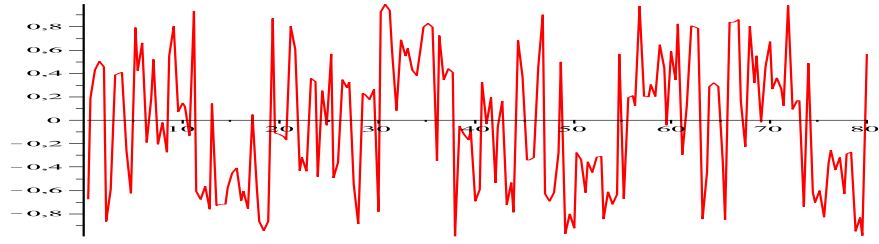


Figura 4.1: Gráfico da Inversão de População  $\times$  tempo para  $P_{ab} = 3(eV)^{-1}, \nu = 3eV, v = 10^{-7}eV, E_0 = 2(eV)^2$ .

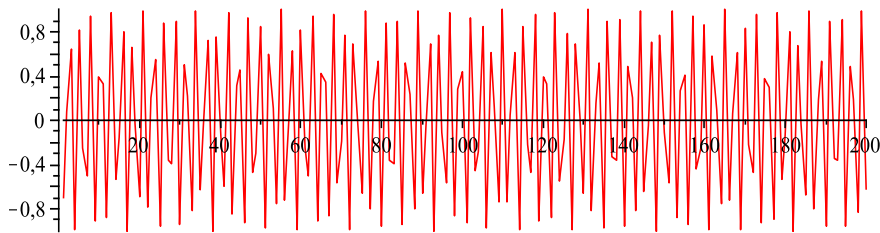


Figura 4.2: Gráfico da Inversão de População  $\times$  tempo para  $P_{ab} = 0.4(eV)^{-1}, \nu = 3eV, v = 10^{-9}eV, E_0 = 6(eV)^2$ .

um background duas ordens de grandeza menor, e outra configuração de parâmetros, o padrão periódico foi mantido, entretanto surgiram modificações consideráveis na curva senoidal padrão, como apresentado na Fig.[4.2]. Naturalmente, os efeitos da violação de Lorentz na FIP aumentam com a magnitude do background, como é mostrado no gráfico Fig.[4.4]. Mantendo os outros parâmetros inalterados, foi atribuído o valor de  $10^{-7}eV$  para o background, sendo observado que o padrão obtido para a FIP assemelha-se a de um leve batimento, tal como descrito no gráfico [4.5], o que é depois confirmado nas Figs. [4.8], [4.9]. Simulações, para um outro conjunto de parâmetros, revelaram que os efeitos da VL são sensíveis a variação de  $P_{ab}$  como observado na Fig.[4.3], e a FIP passa a se concentrar no estado  $|a\rangle$ . Abordagem computacional desenvolvida nesse trabalho foi construída através do programa Maple 11.

Na ausência de uma solução analítica, é necessário explorar os parâmetros relevantes para obter algum entendimento sobre o papel desempenhado por cada um deles. Man-

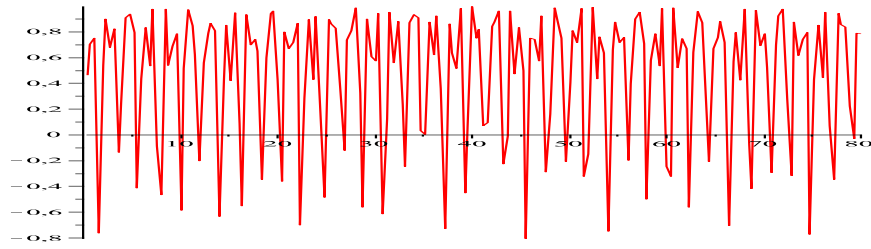


Figura 4.3: Gráfico da Inversão de População  $\times$  tempo para  $P_{ab} = 1(eV)^{-1}, \nu = 3eV, v = 10^{-7}eV, E_0 = 2(eV)^2$ .

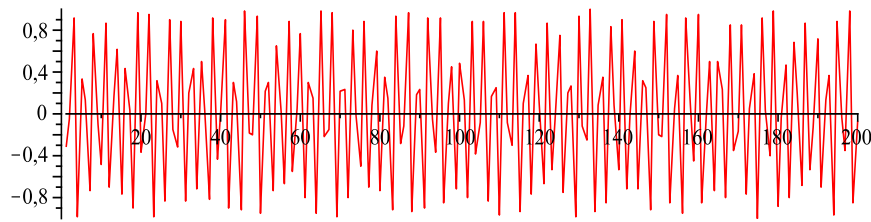


Figura 4.4: Gráfico da Inversão de População  $\times$  tempo para  $P_{ab} = 0.4(eV)^{-1}, \nu = 3eV, v = 10^{-8}eV, E_0 = 6(eV)^2$ .

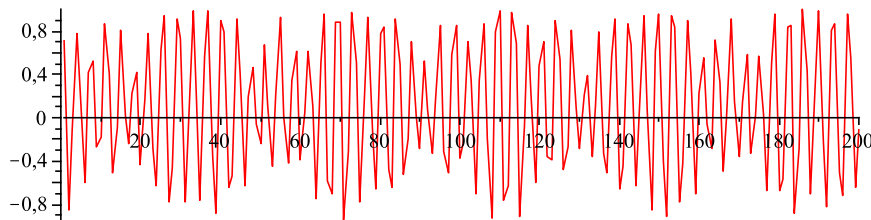


Figura 4.5: Gráfico da Inversão de População  $\times$  tempo para  $P_{ab} = 0.4(eV)^{-1}, \nu = 3eV, v = 10^{-7}eV, E_0 = 6(eV)^2$ .

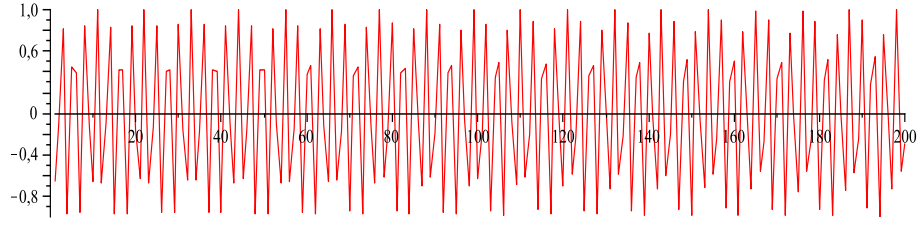


Figura 4.6: Gráfico da Inversão de População  $\times$  tempo para  $P_{ab} = 2(eV)^{-1}, \nu = 7eV, v = 10^{-9}eV, E_0 = 2(eV)^2$ .

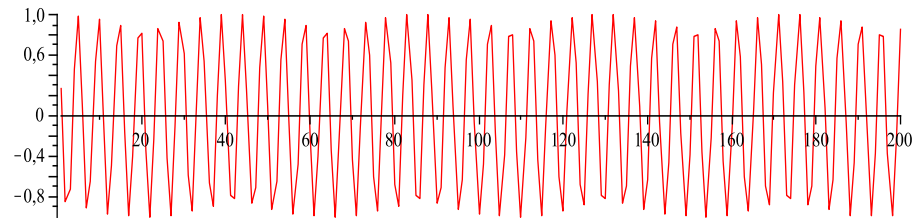


Figura 4.7: Gráfico da Inversão de População  $\times$  tempo para  $P_{ab} = 2.5(eV)^{-1}, \nu = 7eV, v = 10^{-9}eV, E_0 = 2(eV)^2$ .

tendo  $E_0, v$ , e a frequência externa ( $\nu$ ) constantes, simulações revelaram que os efeitos da variação de  $P_{ab}$  sobre a FIP são cíclicos, apresentando uma sensível alteração na frequência de oscilação, como observado nas figuras [4.6] e [4.7]. Considerando um aumento inicial deste parâmetro, ocorre um incremento desta frequência, prosseguindo no aumento de  $P_{ab}$ , a frequência passa a sofrer um decréscimo. A variação do campo elétrico também tem um efeito cíclico em  $W$ . Inicialmente, enquanto a magnitude de  $E_0$  é reduzida, efeitos da VL tornam-se mais significativos. Reduzindo ainda mais  $E_0$ , tais efeitos diminuem, tal que no limite  $E_0 \rightarrow 0$ , a influência do background torna-se minúscula, retornando as fracas oscilações descritas pela eq.(4.23).

Em relação à frequência de oscilação (análogo da frequência de Rabi, neste sistema), esta continua a ser sensível a valores de  $P_{ab}E_0$  (quanto maior este produto, maior será a frequência). Mas tal frequência é também afetada pela magnitude do background, de modo que  $\Omega_R = E_0P_{ab}$  não mais representa o valor da frequência na presença da VL.

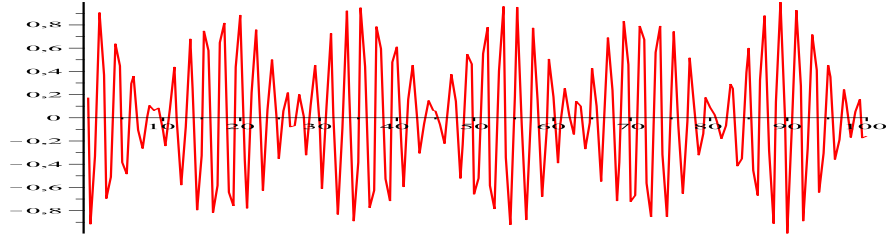


Figura 4.8: Gráfico da Inversão de População  $\times$  tempo para  $P_{ab} = 1(eV)^{-1}, \nu = 3eV, v = 10^{-8}eV, E_0 = 3(eV)^2$

Somente quando o background tende a desaparecer, a frequência de oscilação retorna ao valor normal ( $E_0 P_{ab}$ ). Observa-se nas simulações que com o aumento do background, a frequência diminui consideravelmente.

Além disso, para valores específicos dos parâmetros, o background induz uma clara modulação na FIP, que ocorre apenas para alguns valores do produto  $P_{ab}E_0$ . Tal modulação é obviamente associada com um tipo de frustração parcial da FIP (quando a inversão não é completamente realizada) em alguns estágios. De fato, o gráfico da Fig.[4.8] mostra um padrão de modulação muito similar ao de um batimento (superposição de frequência próxima). O comportamento da Fig.[4.8] ocorre para algumas combinações específicas de  $P_{ab}$  e  $E_0$  as quais produzem  $P_{ab}E_0 = 3$ , para  $\nu = 3eV, v = 10^{-8}eV$ . Mesmo para um background de menor magnitude ( $v = 10^{-9}$ ), uma modulação tipo batimento foi observada, tal como descrito na Fig.[4.9].

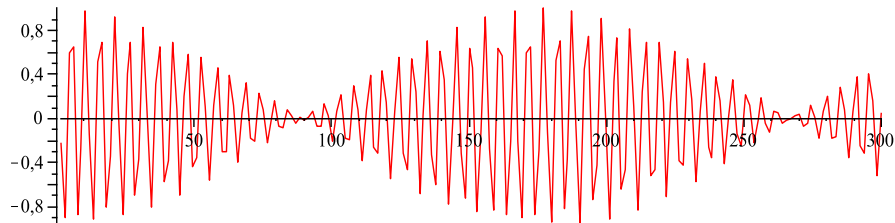


Figura 4.9: Gráfico da Inversão de População  $\times$  tempo para  $P_{ab} = 1(eV)^{-1}, \nu = 3eV, v = 10^{-9}eV, E_0 = 3(eV)^2$



Uma observação pertinente a ser feita, diz respeito aos valores aqui atribuídos para a frequência, o limite no ultravioleta próximo ( $10^{16}$  Hz). Em termos de simulação numérica, usar uma onda excitante no limite do ultravioleta não gera problema algum, porém quanto maior a frequência, maior será a energia aplicada sobre o sistema físico, o que poderá abranger outros níveis, comprometendo assim a condição para que o sistema seja considerado como possuindo apenas dois níveis. Dessa forma, uma faixa de frequência que poderia ser aplicada na aproximação de um SDN seria o infravermelho ( $10^{-3}$  eV –  $10^{-4}$  eV), pois permitiria supor que a energia alcançaria apenas dois de seus níveis. Uma outra digressão a ser feita seria acerca do valor do momento de dipólo,  $P_{ab} = e\langle a|x|b\rangle$ . Considerando as dimensões atômicas, da ordem de  $1\overset{\circ}{\text{A}}$  ( $10^{-3}$  eV<sup>-1</sup> em unidades naturais) e o valor da carga elétrica do elétron nessa unidade:  $e = \sqrt{1/137}$ , o valor que resulta para o momento de dipólo é da ordem de  $10^{-5}$  eV<sup>-1</sup>.

Finalmente, um ponto importante também a ser analisado refere-se à magnitude mínima do background para o qual modificações na FIP ainda se manifestam. Simulações numéricas para  $\mathbf{v}_x = 10^{-10}$  eV não revelaram qualquer efeito nas oscilações senoidais de Rabi para os seguintes intervalos de parâmetros:  $0 < P_{ab} < 10$  (eV)<sup>-1</sup>,  $0 < E_0 < 10$  (eV)<sup>2</sup>,  $0.001 < \nu < 6$  (eV). Valores de parâmetros fora desses intervalos poderiam ser considerados, mas violam a aproximação dipolar e não são convenientes para simular a física de um sistema de dois níveis (exceto frequências menores que 0.001 eV).

Um vez que as modificações de Lorentz aqui citadas não são observadas, é possível concluir que o background não pode ser maior que  $10^{-10}$  eV ( $\mathbf{v}_x \leq 10^{-10}$  eV). Com o estabelecimento deste limite superior para o background, concluí-se que qualquer possibilidade de VL no sistema de dois níveis (referente a este termo) só pode ocorrer para valores de background ainda menores.

# Capítulo 5

## Efeitos da violação de Lorentz devido ao acoplamento axial $b_\mu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi$

Dentre os possíveis termos violadores de Lorentz do setor fermiônico de MPE, que conduzem também à violação de CPT, temos ainda  $b_\mu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi$ . Este termo está ligado ao background fixo por meio de um acoplamento vetorial axial. O objetivo central deste capítulo é examinar os efeitos que este acoplamento gera na dinâmica de um sistema de dois níveis semi-clássico.

Inicialmente, escolhe-se um background puramente tipo espaço,  $b^\mu = (0, \mathbf{b})$ , que está associado com o termo  $\sigma \cdot \mathbf{b}$  no limite não-relativístico. Como as matrizes de Pauli ( $\sigma$ ) são operadores que atuam sobre os estados de spin, faz-se necessário a adoção de uma base de quatro estados:  $\{|a_+\rangle, |a_-\rangle, |b_+\rangle, |b_-\rangle\}$ , onde cada elemento é um produto tensorial de um auto-estado de energia ( $|a\rangle$  ou  $|b\rangle$ ) com um auto-estado de spin ( $|+\rangle$  ou  $|-\rangle$ ). Neste caso, o ket que descreve o estado do sistema é escrito como uma combinação linear de cada um dos estados da base:

$$|\psi(t)\rangle = A_1(t)|a_+\rangle + A_2(t)|a_-\rangle + B_1(t)|b_+\rangle + B_2(t)|b_-\rangle, \quad (5.1)$$

constituindo formalmente um sistema de quatro níveis.

O Hamiltoniano é escrito em três partes:

$$H = H_0 + H_{int} + H_3, \quad (5.2)$$

com  $H_0$  representando a parte não perturbada,  $H_{int}$  descrevendo a interação do sistema com um campo externo, enquanto  $H_3 = \sigma \cdot \mathbf{b}$  descreve a interação do background com o átomo. É necessário escrever este Hamiltoniano na nova base, utilizando-se a relação de fechamento:

$$|a+\rangle\langle a+| + |a-\rangle\langle a-| + |b+\rangle\langle b+| + |b-\rangle\langle b-| = 1. \quad (5.3)$$

O termo  $H_0$ , escrito na nova base (por meio da relação 1 $H_0$ 1), assume a forma:

$$H_0 = \hbar\omega_a(|a+\rangle\langle a+| + |a-\rangle\langle a-|) + \hbar\omega_b(|b+\rangle\langle b+| + |b-\rangle\langle b-|). \quad (5.4)$$

Para a interação com o campo elétrico  $H_{int}$ , escrevemos  $1(-ex \cdot E(t))1$ , o que resulta em:

$$H_{int} = -(P_{ab++}|a+\rangle\langle b+| + P_{ab--}|a-\rangle\langle b-| + P_{ab++}^*|b+\rangle\langle a+| + P_{ab--}^*|b-\rangle\langle a-|)E(t), \quad (5.5)$$

onde foi usado  $P_{ab++} = e\langle a+|x|b+\rangle$ ,  $P_{ab--} = e\langle a-|x|b-\rangle$ ,  $e\langle a+|x|b-\rangle = \langle a-|x|b+\rangle = \langle b-|x|a+\rangle = \langle b+|x|a-\rangle = 0$ , uma vez que operador  $x$  não atua nos estados de spin,  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$ , mutualmente ortogonais. No que concerne ao termo de interação  $H_3$ , o mesmo pode ser expresso por:  $H_3 = b_x\sigma_x + b_y\sigma_y + b_z\sigma_z$ . Sabendo que o operador spin atua como

$$\sigma_x|\pm\rangle = |\mp\rangle, \quad \sigma_y|\pm\rangle = \pm i|\mp\rangle, \quad \sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle, \quad (5.6)$$

$H_3$  pode ser expresso por:

$$H_3 = \{b_x[|a-\rangle\langle a+| + |a+\rangle\langle a-| + |b-\rangle\langle b+| + |b+\rangle\langle b-|] + b_z[|a+\rangle\langle a+| - |a-\rangle\langle a-| + |b+\rangle\langle b+| - |b-\rangle\langle b-|] - ib_y[|a+\rangle\langle a-| - |a-\rangle\langle a+| + |b+\rangle\langle b-| - |b-\rangle\langle b+|]\}. \quad (5.7)$$

Reunindo esses termos em um único Hamiltoniano e o substituindo na equação de Schrödinger, obtém-se quatro equações diferenciais acopladas para os coeficientes dependentes do tempo:

$$\dot{A}_1 = -i[\omega_a A_1 - E(t)P_{ab++}B_1 + b_x A_2 + b_z A_1 - ib_y A_2], \quad (5.8)$$

$$\dot{A}_2 = -i[\omega_a A_2 - E(t)P_{ab--}B_2 + b_x A_1 - b_z A_2 + ib_y A_1], \quad (5.9)$$

$$\dot{B}_1 = -i[\omega_b B_1 - E(t)P_{ab++}^*A_1 + b_x B_2 + b_z B_1 - ib_y B_2], \quad (5.10)$$

$$\dot{B}_2 = -i[\omega_b B_2 - E(t)P_{ab--}^*A_2 + b_x B_1 - b_z B_2 + ib_y B_1]. \quad (5.11)$$

Tais equações podem ser reescritas por meio de uma transformação de variáveis ( $a_1(t) = A_1 e^{i\omega_a t}$ ,  $a_2(t) = A_2 e^{i\omega_a t}$ ,  $b_1(t) = B_1 e^{i\omega_b t}$ ,  $b_2(t) = B_2 e^{i\omega_b t}$ ):

$$\dot{a}_1(t) = -i [-E_0 P_{ab} e^{i(\omega-\nu)t} b_1(t) + b_x a_2(t) + b_z a_1(t) - i b_y a_2], \quad (5.12)$$

$$\dot{a}_2(t) = -i [-E_0 P_{ab} e^{i(\omega-\nu)t} b_2(t) + b_x a_1(t) - b_z a_2(t) + i b_y a_1], \quad (5.13)$$

$$\dot{b}_1(t) = -i [-E_0 P_{ab} e^{-i(\omega-\nu)t} a_1(t) + b_x b_2(t) + b_z b_1(t) - i b_y b_2], \quad (5.14)$$

$$\dot{b}_2(t) = -i [-E_0 P_{ab} e^{-i(\omega-\nu)t} a_2(t) + b_x b_1(t) - b_z b_2(t) + i b_y b_1], \quad (5.15)$$

onde foi suposto que a transição dipolar é uma quantidade real e a mesma entre estados de diferentes polarizações de spin, isto é:  $P_{ab++} = P_{ab--} = P_{ab} = P_{ab}^*$ . Além disso, os termos envolvendo  $e^{\pm i(\omega+\nu)t}$  foram negligenciados devido à RWA.

Considerando que o sistema é composto por quatro níveis, o efeito do background sobre o mesmo pode ser avaliado por meio de oscilações nos estados de spin e energia, de tal modo que é necessário definir duas funções de inversão de população - uma FIP de spin ( $W_S$ ) e uma FIP de energia ( $W_E$ ), dadas a seguir:

$$W_S = |a_1(t)|^2 + |b_1(t)|^2 - |a_2(t)|^2 - |b_2(t)|^2, \quad (5.16)$$

$$W_E = |a_1(t)|^2 + |a_2(t)|^2 - |b_1(t)|^2 - |b_2(t)|^2. \quad (5.17)$$

Como primeiro passo, este modelo será considerado na ausência de background ( $b_x = b_y = b_z = 0$ ) e na presença do campo externo  $E_0$ . Neste caso, a solução para as quatro equações acopladas têm a forma:

$$a_1(t) = \cos(E_0 P_{ab} t), \quad (5.18)$$

$$a_2(t) = 0, \quad (5.19)$$

$$b_1(t) = -i \sin(E_0 P_{ab} t), \quad (5.20)$$

$$b_2(t) = 0, \quad (5.21)$$

que implica nas seguintes FIPs:

$$W_E = |a_1(t)|^2 - |b_1(t)|^2 = \cos(2E_0 P_{ab} t), \quad (5.22)$$

$$W_S = 1, \quad (5.23)$$

o que atesta a coerência do modelo, pois na ausência do background, a única interação existente é entre átomo e o campo externo, ocasionando então uma oscilação entre os auto-estados de energia ( $a_1(t) \neq 0, b_1(t) \neq 0, a_2(t) = b_2(t) = 0$ ), representada por uma curva cossenoidal, como descrito antes. Por outro lado, não há alteração nos estados de spin, uma vez que o campo elétrico não atua nos estados de spin. Este cenário é apropriadamente descrito por  $W_S = 1$ .

Após esta breve análise de consistência, deve-se proceder uma descrição dos efeitos do background  $\mathbf{b}$  sobre o sistema atômico. O cenário inicial adotado é a configuração  $\mathbf{b} = (b_x, 0, b_z)$  na ausência de campo externo ( $E_0 = 0$ ). As soluções encontradas para os coeficientes são:

$$a_1(t) = \cos(\sqrt{b_x^2 + b_z^2}t) - i \frac{b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_z^2}} \sin(\sqrt{b_x^2 + b_z^2}t) \quad (5.24)$$

$$a_2(t) = -i \frac{b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_z^2}} \sin(\sqrt{b_x^2 + b_z^2}t), \quad (5.25)$$

$$b_1(t) = 0, \quad (5.26)$$

$$b_2(t) = 0. \quad (5.27)$$

Tais relações obviamente refletem uma oscilação nos estados de spin, uma vez que o sistema passa a sofrer oscilação entre os estados  $|a+\rangle, |a-\rangle$ , simultaneamente à inexistência de alternância entre estados de energia. As FIPs correspondentes são:

$$W_S = \cos^2(\sqrt{b_x^2 + b_z^2}t) + \left[ \frac{b_z^2 - b_x^2}{b_z^2 + b_x^2} \right] \sin^2(\sqrt{b_x^2 + b_z^2}t), \quad (5.28)$$

$$W_E = 1, \quad (5.29)$$

confirmando o panorama descrito. Como caso particular podemos ter ( $b_x = 0, b_z \neq 0$ ), que resulta em  $W_S = 1, W_e = 1$  (ausência de oscilação de energia e spin). Em outra situação particular ( $b_x \neq 0, b_z = 0$ ), obtém-se  $W_S = \cos(2b_x t)$ , o que indica que o background, por si próprio, pode induzir oscilações de spin. Este fato pode ser usado para se estabelecer um limite superior para  $b_x$ .

O próximo passo é certamente solucionar o sistema de equações (5.12-5.15) na presença tanto do background violador de Lorentz como do campo externo  $E_0$ . Como situação

inicial, toma-se o background como apresentando somente componente -  $z$ ,  $\mathbf{b} = (0, 0, b_z)$ , o qual produz as seguintes soluções:

$$a_1(t) = \frac{1}{2}e^{-i(b_z - E_0 P_{ab})t} + \frac{1}{2}e^{-i(b_z + E_0 P_{ab})t}, \quad (5.30)$$

$$a_2(t) = 0, \quad (5.31)$$

$$b_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-i(b_z - E_0 P_{ab})t} + \frac{1}{2}e^{-i(b_z + E_0 P_{ab})t}, \quad (5.32)$$

$$b_2(t) = 0. \quad (5.33)$$

Nota-se logo que a inversão de população dos estados de energia permanece igual a  $\cos(2E_0 P_{ab}t)$ , indicando que o termo  $b_z \sigma_z$  não modifica a inversão de população deste sistema. Além do mais, não leva à alternância nos estados de spin ( $W_S = 1$ ), o que é consistente com do operador  $\sigma_z$  não inverter o spin.

Uma vez que a influência da componente  $b_z$  está bem entendida, deve-se estudar o papel desempenhado por um background mais geral,  $b = (b_x, b_y, 0)$ . Neste caso, a oscilação de spin é um resultado esperado, uma vez que os operadores  $\sigma_y$  e  $\sigma_x$  promovem inversão de spin. O sistema de eqs.(5.12-5.15) também exibe uma solução exata, neste caso dada por:

$$a_1(t) = \frac{1}{2}[\cos Mt + \cos Nt], \quad a_2(t) = -\frac{i(b_x + ib_y)}{2}[\sin Nt - \sin Mt], \quad (5.34)$$

$$b_1(t) = \frac{i}{2}[\sin Mt + \sin Nt], \quad b_2(t) = -\frac{i(b_x + ib_y)}{2}[\cos Nt - \cos Mt], \quad (5.35)$$

onde:  $M = (E_0 P_{ab} - b)$ ,  $N = (E_0 P_{ab} + b)$ ,  $b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$ . As FIP de spin e energia correspondentes são dadas por:

$$W_E = \cos(2E_0 P_{ab}t), \quad (5.36)$$

$$W_S = \cos(2bt). \quad (5.37)$$

É visto então que os termos  $b_x \sigma_x, b_y \sigma_y$  não modificam  $W_E$ , que é governada somente pelo campo externo, ao passo que este não altera a oscilação de spin, que dependem apenas do background. Todos os resultados obtidos até o momento podem ser resumidos na tabela abaixo:

<i>Background</i> – $\vec{\mathbf{b}}$	$E_0$	$W_E$	$W_s$
0	$E_0$	$\cos(2E_0 P_{ab} t)$	1
$0, 0, b_z$	0	1	1
$0, 0, b_z$	$E_0$	$\cos(2E_0 P_{ab} t)$	1
$b_x, 0, 0$	0	1	$\cos(2b_x t)$
$b_x, b_y, 0$	$E_0$	$\cos(2E_0 P_{ab} t)$	$\cos(2b_x t)$
$b_x, 0, b_z$	0	1	$\cos^2(\sqrt{b_x^2 + b_z^2} t) + \left[ \frac{b_z^2 - b_x^2}{b_z^2 + b_x^2} \right] \sin^2(\sqrt{b_x^2 + b_z^2} t)$

(5.38)

A oscilação de spin tem período  $\pi/b$ , tal que a diminuição do parâmetro  $b$ , leva ao aumento do período. Para um  $b$  minúsculo, o período pode ser tão grande que a inversão não resultará observável. Aqui, toma-se o caso em que tal oscilação de spin não é detectável (períodos maiores que  $10^4 s$ , ou seja,  $\pi/b > 10^4 s$ ). Se for usado que  $1s^{-1} = 6.6 \cdot 10^{-16} \text{ eV}$ , então é possível estabelecer um limite superior para o background:

$$b < 10^{-19} \text{ eV} . \quad (5.39)$$

Este limite superior pode ser igualmente estipulado sobre  $b_y$  e  $b_x$  ( $b_x < 10^{-19} \text{ eV}$  ou  $b_y < 10^{-19} \text{ eV}$ ), para os casos  $b_y = 0$  ou  $b_x = 0$ , respectivamente. Fica claro que o background  $b = (0, b_y, 0)$  induz efeitos similares aos de  $b = (b_x, 0, 0)$ , de modo a não requerer atenção especial, como já foi sugerido. O presente limite superior constitui um resultado próximo dos melhores limites estabelecidos na literatura para este coeficiente.

Uma outra situação de possível interesse é o caso  $\mathbf{b} = (b_x, 0, b_z)$ , para o qual a oscilação de energia pode estar correlacionada com a oscilação de spin. Neste caso, o sistema de

equações (5.12-5.15) produz as seguintes soluções:

$$a_1(t) = \frac{1}{2bMN} [ib_z E_0 P_{ab} (M \sin Nt - N \sin Mt) - ib_z b (N \sin Mt + M \sin Nt) + MNb (\cos Mt + \cos Nt)], \quad (5.40)$$

$$b_1(t) = -\frac{1}{2bMN} [-ib^2 (M \sin Nt - N \sin Mt) + iE_0 P_{ab} b (N \sin Mt + M \sin Nt) + b_z MN (\cos Nt - \cos Mt)], \quad (5.41)$$

$$a_2(t) = -\frac{ib_x}{2b} [\sin Nt - \sin Mt], \quad (5.42)$$

$$b_2(t) = \frac{b_x}{2b} [\cos Mt - \cos Nt], \quad (5.43)$$

onde  $b = \sqrt{b_x^2 + b_z^2}$ . Esse resultado permite escrever as expressões para  $W_E$  e  $W_S$ , as quais revelam a influência de  $b_x$  e  $b_z$  na dinâmica do sistema:

$$\begin{aligned} W_E = & (1/2bMN)^2 \{ [(b_z E_0 P_{ab})^2 - b^4 - 2(b_z^2 E_0 P_{ab} b - E_0 P_{ab} b^3) + (b_z b)^2 - (E_0 P_{ab} b)^2] M^2 \sin^2 Nt \\ & + [(b_z E_0 P_{ab})^2 - b^4 + 2(b_z^2 E_0 P_{ab} b - E_0 P_{ab} b^3) + (b_z b)^2 - (E_0 P_{ab} b)^2] N^2 \sin^2 Mt \\ & - 2MN [(b_z E_0 P_{ab})^2 - b^4 - (b_z b)^2 + (E_0 P_{ab} b)^2] \sin [Nt] [\sin Mt] \\ & + [MNb^2 - [b_z MN]^2] [\cos^2 Mt + \cos^2 (N) t] \\ & + [MNb^2 + [b_z MN]^2] 2 \cos Mt \cos Nt \} \\ & - (b_x/2b)^2 \{ 2 \cos (2E_0 P_{ab} t) [\cos (2bt) - 1] \}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} W_S = & (1/2bMN)^2 \{ [(b_z E_0 P_{ab})^2 + b^4 - 2(b_z^2 E_0 P_{ab} b + E_0 P_{ab} b^3) + (b_z b)^2 + (E_0 P_{ab} b)^2] M^2 \sin^2 Nt \\ & + [(b_z E_0 P_{ab})^2 + b^4 + 2(b_z^2 E_0 P_{ab} b + E_0 P_{ab} b^3) + (b_z b)^2 + (E_0 P_{ab} b)^2] N^2 \sin^2 Mt \\ & - 2MN [(b_z E_0 P_{ab})^2 + b^4 - ((b_z b)^2 + (E_0 P_{ab} b)^2)] \sin [Nt] [\sin Mt] \\ & + [MNb^2 + [b_z MN]^2] [\cos^2 Mt + \cos^2 (N) t] \\ & + [MNb^2 - [b_z MN]^2] \cos Mt \cos Nt \} \\ & - (b_x/2b)^2 2 \{ 1 - \cos 2bt \}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

O gráfico da FIP para valores gerais revelam que esses coeficientes  $b_x$  e  $b_z$  não têm muito efeito na inversão de energia, a qual permanece quase invariante quando  $b_x$  e  $b_z$  assumem valores diferentes. Este não é o caso para inversão de spin,  $W_S$  é sensível para variações da razão  $b_x/b_z$ , sendo suprimida para pequenos valores de  $b_x/b_z$  ( $b_x/b_z \ll 1$ ),



ao mesmo tempo que aumenta com tal razão, tornando-se total ( $-1 \leq W_S \leq 1$ ) para o caso  $b_x/b_z \gg 1$ . Por outro lado, é também observado que a frequência da oscilação de spin aumenta com o módulo do background ( $b$ ). Dado que o coeficiente  $b_y$  desempenha um papel similar ao de  $b_x$ , pode-se concluir que o caso  $b = (0, b_y, b_z)$  apresenta o mesmo comportamento geral do caso anterior.

Como uma investigação final, considera-se o caso de um background puramente tipo-tempo,  $b^\mu = (b_0, 0)$ , no qual o termo não-relativístico correspondente é  $\sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})$ . Procedendo como antes, o hamiltoniano é:  $H = H_0 + H_{int} + H_4$ , com  $H_4 = -(b_0/m_e)\sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})$ . Na base  $\{|a+\rangle, |a-\rangle, |b+\rangle, |b-\rangle\}$ , a interação  $H_4$  tem a forma:

$$H_4 = -ib_0\omega(P_{ab}^*|b-\rangle\langle a+| + P_{ab}^*|b+\rangle\langle a-| - P_{ab}|a-\rangle\langle b+| - P_{ab}|a+\rangle\langle b-|) \quad (5.46)$$

$$+ \gamma_0 \sin(\nu t)[(|a+\rangle\langle a-| + |a-\rangle\langle a+| + |b+\rangle\langle b-| + |b-\rangle\langle b+|)],$$

onde  $\gamma_0 = eb_0E_0/(m_e\nu)$ , e  $H_0, H_{int}$  já estão escritos nas eqs.(5.4, 5.5). Substituindo o Hamiltoniano completo na equação de Schrödinger, o sistema de equações acopladas obtido é:

$$\dot{a}_1(t) = iP_{ab} [E_0 \cos(\nu t)e^{i\omega t}b_1(t) - ib_0\omega e^{i\omega t}b_2(t) - \gamma_0(\sin \nu t)a_2(t)], \quad (5.47)$$

$$\dot{a}_2(t) = iP_{ab} [E_0 \cos(\nu t)e^{i\omega t}b_2(t) - ib_0\omega e^{i\omega t}b_1(t) - \gamma_0(\sin \nu t)a_1(t)], \quad (5.48)$$

$$\dot{b}_1(t) = iP_{ab} [E_0 \cos(\nu t)e^{-i\omega t}a_1(t) + ib_0\omega e^{-i\omega t}a_2(t) - \gamma_0(\sin \nu t)b_2(t)], \quad (5.49)$$

$$\dot{b}_2(t) = iP_{ab} [E_0 \cos(\nu t)e^{-i\omega t}a_2(t) + ib_0\omega e^{-i\omega t}a_1(t) - \gamma_0(\sin \nu t)b_1(t)]. \quad (5.50)$$

Tal sistema não possui uma solução analítica, de forma que deve-se partir para uma abordagem numérica. É importante ressaltar que a constante  $\gamma_0$  é muito menor que  $E_0, P_{ab}$ , de tal maneira que o termo linear em  $\gamma_0$  torna-se desprezível em comparação com os outros. Seguindo o exemplo da última seção, resolve-se o sistema (5.47-5.50) numericamente. O gráfico da Fig.[5.1] retrata o comportamento da FIP para os estados de energia e de spin (linha mais larga), que revela uma modificação apreciável, induzida pelo background, na função de inversão de energia - uma frustração parcial em alguns momentos, ao passo que a inversão de spin é sempre frustrada parcialmente (o sistema

permanece predominantemente no estado  $|+\rangle$ ). Este efeito pode ser amplificado tomando-se  $P_{ab} = 0.5 (eV)^{-1}$ , como é bem mostrado na Fig.[5.2], onde a oscilação de spin torna-se total e a inversão de energia é inteiramente frustrada em alguns momentos. Investigações numéricas mostram que este cenário ocorre somente para valores específicos do produto  $P_{ab}E_0$ , (neste caso,  $P_{ab}E_0 = 0.5 (eV)^{-1}$ ). Um comportamento completamente similar foi observado para  $P_{ab} = 0.25 (eV)^{-1}$ ,  $b_0 = 0.10eV$ ,  $E_0 = 2.00(eV)^2$ ,  $\nu = 1.00eV$ . Para valores de  $P_{ab}$  ligeiramente diferentes,  $P_{ab} = 0.4 (eV)^{-1}$  ou  $P_{ab} = 0.6 (eV)^{-1}$ , a oscilação de spin é quase aniquilada, enquanto a oscilação de energia torna-se aproximadamente total. Este comportamento é bastante similar ao descrito na Fig.[5.3]. A Fig.[5.2] revela um interessante padrão de inversão, observado para alguns valores do background. Este gráfico mostra que o sistema permanece quase colapsado no estado  $|a-\rangle$  em um certo intervalo de tempo, depois passa por uma oscilação entre os estados  $|a+\rangle, |b+\rangle$ , e retornar ao estado  $|a-\rangle$  na sequência. Este ciclo de alterações é repetido ao longo do tempo. Pela Fig.[5.3], notamos que uma redução no produto  $P_{ab}E_0$  implica uma frequência de oscilação menor na função de inversão de energia. Isto é confirmado pela análise de gráficos para diferentes valores de  $E_0, P_{ab}$ . Por fim, foi observado que esta frequência (oscilações de energia) também decresce com a magnitude  $b_0$ .

Soluções numéricas mostram que os efeitos de VL mais apreciáveis são alcançados apenas para altos valores do background, tais como  $b_0 = 0.1eV$ . Para magnitudes menores, tais como  $b_0 \leq 0.01eV$  (ver Fig.[5.3]), os efeitos de violação de Lorentz tendem a desaparecer. De fato, enquanto que a FIP de energia tende a assumir uma forma senoidal completa, a FIP de spin tende a colapsar para 1 (ausência de oscilação de spin), em um comportamento similar ao da Fig.[5.3].

Um ponto que merece atenção está relacionado com a validade da aproximação de onda girante (RWA) nos casos onde a perturbação violadora de Lorentz contém um termo tipo  $\sin\nu t$  ou  $\cos\nu t$ , como nas eqs. (4.7, 4.8, 5.47-5.50). Neste caso, os termos de perturbação oscilam em uma frequência ( $\nu$ ) igual à metade da frequência do termo negligenciado na RWA. A questão é saber se o termo de oscilação rápida (com frequência igual a  $2\nu$ )

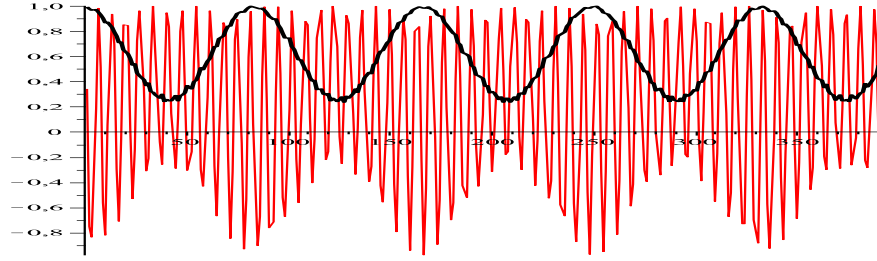


Figura 5.1: Gráfico simultâneo da FIP de spin (linha negra grossa) e FIP de energia (linha fina) para os seguintes valores de parâmetros:  $P_{ab} = 0.47 (eV)^{-1}$ ,  $b_0 = 0.10 eV$ ,  $E_0 = 1.00 (eV)^2$ ,  $\nu = 1.00 eV$ .

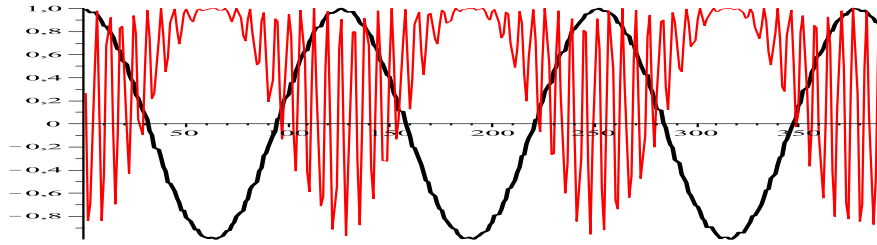


Figura 5.2: Gráfico simultâneo da FIP de spin (linha negra grossa) e FIP de energia (linha fina) para os seguintes valores de parâmetros:  $P_{ab} = 0.5 (eV)^{-1}$ ,  $b_0 = 0.1 eV$ ,  $E_0 = 1.0 (eV)^2$ ,  $\nu = 1.0 eV$ .

pode ser omitido enquanto o termo de perturbação mais lenta (com frequência igual a  $\nu$ ) é mantido. Para responder a essa questão, alguns cálculos foram realizado sem a aplicação da RWA, isto é, mantendo os termos de oscilação rápida juntos. Os resultados observados não diferem qualitativamente e apreciavelmente daqueles previamente obtidos, de modo que se pode afirmar que a RWA constitui em uma boa aproximação também nesta situação.

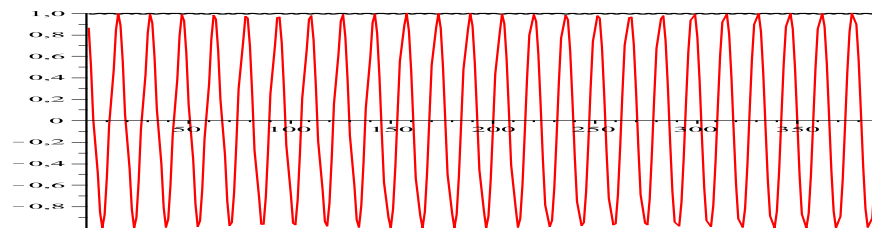


Figura 5.3: Gráfico simultâneo da FIP de spin (linha negra grossa) e FIP de energia (linha fina) para os seguintes valores de parâmetros:  $P_{ab} = 0.2 (eV)^{-1}$ ,  $b_0 = 0.1 eV$ ,  $E_0 = 1.0 (eV)^2$ ,  $\nu = 1.0 eV$ .

# Capítulo 6

## Conclusão

Neste trabalho, foram investigados os efeitos dos termos violadores das simetrias de Lorentz e CPT (oriundos do Modelo Padrão Estendido) em um sistema de dois níveis semi-clássico. No primeiro caso analisado, foi observado que o termo  $e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}/m_e$  oriundo do background  $v_\mu$  não produzia quaisquer alterações na FIP do sistema, enquanto que o termo  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}/m_e$  altera as oscilações, implicando em uma frustração parcial da inversão de população e para alguns tipos de modulação. Por meio da variação de parâmetros, foi observado que os efeitos VL são sensíveis ao produto  $P_{ab}E_0$ , sendo que, quando o seu valor aproxima-se da frequência da onda incidente  $\nu$  os efeitos VL são mais acentuados. Dependendo dos valores de parâmetros, a modulação induzida pode ser significativa, tornando-se similar a um batimento. Foi observado também que  $v_\mu$  pode induzir oscilações de Rabi mesmo na ausência de um campo eletromagnético externo, o que entretanto só se torna apreciável para grandes magnitudes do background. As simulações geradas mostraram que a FIP do sistema possui um comportamento cíclico em termos dos valores do campo  $E_0$ . O fato dos efeitos de violação de Lorentz aqui previstos não serem observados pode ser usado para estabelecer um valor máximo para o background, abaixo do qual as modificações na FIP tornam-se menores que uma parte em  $10^{10}$ . Este limite superior estabelecido para o background é:  $\mathbf{v}_x \leq 10^{-10}eV$ .

No intuito de determinar os efeitos induzidos pelo background  $b_\mu$ , uma

base de quatro estados foi adotada. Mostrou-se então que ocorrem dois tipos de inversão de população, uma referente aos estados de energia (determinada pelo campo eletromagnético externo), outra concernente aos os estados de spin (provocada pelo background). Primeiramente foi analisado o caso de um background tipo-espaço, e observou-se uma oscilação na FIP de spins, a qual, na ausência de background é constante. A suposta não observação da oscilação de spin (confiando na validade da aproximação dipolar) foi usada para impor um limite superior para tal coeficiente:  $b_x < 10^{-19} eV$ . Em seguida um background tipo-tempo foi admitido, entretanto os efeitos da VL somente tornaram-se significativos para um alto valor de background. Algumas simulações, para determinados conjuntos de parâmetros, mostraram que o sistema permanece, para estas condições, predominantemente no estado  $|+\rangle$ .

O estudo de um sistema de dois níveis sem levar em consideração a quantização do campo (teoria semi-clássica) leva ao um interesse sobre os efeitos VL advindos da interação de um SDN com um campo quantizado. De tal forma, que abre perspectivas futuras para o estudo do sistema de dois níveis com um campo quantizado. O estudo do termo vetorial  $v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  torna-se perfeitamente factível, tendo sido até já realizado [10]. Entretanto, o termo axial  $b_\mu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi$  necessita da implementação de um sistema de quatro níveis. Neste caso, o fenômeno de colapso e reavivamento da FIP, usados para analisar a influência do background, precisam ser redefinidos para um sistema de quatro níveis, o que torna este estudo mais laborioso.

# Capítulo 7

## Apêndice: Representações da Mecânica Quântica

### 7.1 Introdução

A descrição física da evolução de um sistema físico em mecânica quântica é desenvolvida por meio de uma equação de movimento que envolve três elementos principais; o primeiro descreve o estado do sistema em um tempo específico, que pode ser representado por uma função de estado  $\psi_\alpha(\vec{r})$ , kets  $|\alpha\rangle$ , matrizes colunas  $\psi_\alpha$  e vetores no espaço de Hilbert; a estes elementos estão associadas quantidades hermitianas adjuntas, tais como  $\psi_\alpha^\dagger$  ou  $\langle\alpha|$ . O segundo elemento importante na dinâmica de um sistema quântico é a transformação unitária  $U$  que pode ser escrita como matriz, cujo efeito é transformar a representação em termos de uma determinada base em outra; o que em termos de espaço de Hilbert pode ser visto como uma rotação de eixos sem alterar o estado vetorial. O terceiro elemento necessário são as variáveis dinâmicas  $\Omega$ , que podem ser escritas como operadores ou matrizes quadradas. Os elementos dessas matrizes podem ser calculados em uma base particular do espaço de Hilbert, sendo que uma matriz unitária realiza a transformação desta base em outra.

A evolução física de um sistema no tempo pode ser descrita por meio de uma mudança

temporal nos estados vetoriais (*Representação de Schrödinger*), nas variáveis dinâmicas (*Representação de Heisenberg*), ou em ambas (*Representação de Interação*). Cada uma apresentando uma equação de movimento particular para descrever o estado do sistema com dependência temporal (a descrição aqui seguida esta baseada na ref.[36]).

## 7.2 Representação de Schrödinger

A base dessa descrição está em escrever os estados vetoriais com dependência temporal, representados por kets  $|\alpha_s(t)\rangle$ , obedecendo à equação de Schrödinger dependente do tempo:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_s(t)\rangle = H |\alpha_s(t)\rangle, \quad (7.1)$$

onde o sub-índice  $s$  indica que a figura em uso é a de Schrödinger. A equação de movimento adjunta é:

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \langle \alpha_s(t) | = \langle \alpha_s(t) | H, \quad (7.2)$$

onde o hamiltoniano  $H$  é hermitiano.

Para o caso de não haver uma dependência de  $H$  no tempo, a solução das equações diferenciais (7.1) e (7.2) é dada por:

$$|\alpha_s(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |\alpha_s(0)\rangle, \quad (7.3)$$

e

$$\langle \alpha_s(t) | = \langle \alpha_s(0) | e^{\frac{iHt}{\hbar}}. \quad (7.4)$$

A variação temporal do elemento de matriz da variável dinâmica  $\Omega_s$  entre os estados  $\langle \alpha_s(t) |$  e  $|\beta_s(t)\rangle$  na figura de Schrödinger (FS) é obtida:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \alpha_s(t) | \Omega_s | \beta_s(t) \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle \alpha_s(t) | H \Omega_s | \beta_s(t) \rangle + \langle \alpha_s(t) | \frac{\partial}{\partial t} \Omega_s | \beta_s(t) \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle \alpha_s(t) | \Omega_s H | \beta_s(t) \rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_s(t) | [\Omega_s, H] | \beta_s(t) \rangle. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Onde o segundo termo é anulado por pelo fato de a variável dinâmica na possuir dependência temporal. Dessa forma toda dinâmica do sistema é descrita por uma equação



de movimento que envolve os estados vetoriais, dependentes do tempo, e o hamiltoniano completo do sistema, incluindo o hamiltoniano de perturbação.

### 7.3 Representação de Heisenberg

Quando se considera que os estados vetoriais sejam invariantes no tempo e a dinâmica do sistema físico é descrita por meio da variação temporal das variáveis dinâmicas a figura em que se está trabalhando é chamada de ”*Figura de Heisenberg*”.

Substituindo as eqs. (7.3) e (7.4) na eq.(7.5) obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \alpha_s(0) | e^{\frac{iHt}{\hbar}} \Omega_s e^{-\frac{iHt}{\hbar}} | \beta_s(0) \rangle &= \langle \alpha_s(0) | e^{\frac{iHt}{\hbar}} \frac{\partial \Omega_s}{\partial t} e^{-\frac{iHt}{\hbar}} | \beta_s(0) \rangle \\ &+ \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_s(0) | \left[ e^{\frac{iHt}{\hbar}} \Omega_s e^{-\frac{iHt}{\hbar}}, H \right] | \beta_s(0) \rangle. \end{aligned} \quad (7.6)$$

onde foi aplicado o fato de que  $H$  comuta com  $e^{\pm \frac{iHt}{\hbar}}$ . Nesta figura, ausência de dependência temporal dos estados vetoriais é apresentada pela definição:

$$|\alpha_H\rangle \equiv |\alpha_s(0)\rangle = e^{\frac{iHt}{\hbar}} |\alpha_s(t)\rangle, \quad (7.7)$$

o sub-índice  $H$  indica que está sendo aplicado a figura de Heisenberg. A variável dinâmica, nesta figura, apresenta uma dependência temporal escrita como:

$$\Omega_H(t) \equiv e^{\frac{iHt}{\hbar}} \Omega_s e^{-\frac{iHt}{\hbar}}. \quad (7.8)$$

Substituindo agora a eq.(7.7), na eq. (7.6) temos:

$$\frac{d}{dt} \langle \alpha_H | \Omega_H | \beta_H \rangle = \langle \alpha_H | \frac{\partial \Omega_H}{\partial t} | \beta_H \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_H | [\Omega_H, H] | \beta_H \rangle. \quad (7.9)$$

Como esta equação independe dos kets envolvidos, sua aplicação deve valer para os operadores isoladamente:

$$\frac{d\Omega_H}{dt} = \frac{\partial \Omega_H}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [\Omega_H, H]. \quad (7.10)$$

Esta equação estabelece a evolução do operador  $\Omega$  na figura de Heisenberg. Portanto, na figura de Heisenberg (FH) os estados vetoriais não possuem dependência temporal,

enquanto que as variáveis dinâmicas possuem uma evolução temporal que descreve a dinâmica do sistema quântico. A transformação entre a representação de Heisenberg e de Schrödinger é realizada por meio dos operadores unitários  $e^{\pm iHt}$ , como mostrado nas eqs. (7.7) e (7.8).

## 7.4 Representação de Interação

Um outra representação muito útil é a figura de interação (FI), onde o hamiltoniano é dividido em duas partes.

$$H = H_0 + H', \quad (7.11)$$

sendo  $H_0$  não depende explicitamente do tempo e têm uma estrutura simples, e  $H'$  representa o hamiltoniano da perturbação que atua sobre o sistema.

O outro ponto central da FI está em considerar uma dependência temporal tanto para os estados vetoriais quanto para as variáveis dinâmicas, fato esse explicitado por:

$$|\alpha_I(t)\rangle \equiv e^{\frac{iH_0st}{\hbar}} |\alpha_s(t)\rangle, \quad (7.12)$$

$$\Omega_I \equiv e^{\frac{iH_0st}{\hbar}} \Omega_s e^{-\frac{iH_0st}{\hbar}}. \quad (7.13)$$

Através desta definição fica evidente que a FI recai na FH quando  $H' = 0$ .

A diferenciação da eq.(7.12) permite a obtenção de uma equação de movimento para os estados  $|\alpha_I(t)\rangle$ :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle &= -H_0S e^{\frac{iH_0st}{\hbar}} |\alpha_s(t)\rangle + i\hbar e^{\frac{iH_0st}{\hbar}} \frac{d}{dt} |\alpha_s(t)\rangle = -H_0S |\alpha_I(t)\rangle + e^{\frac{iH_0st}{\hbar}} H_s e^{-\frac{iH_0st}{\hbar}} |\alpha_I(t)\rangle \\ &= e^{\frac{iH_0st}{\hbar}} H'_s e^{-\frac{iH_0st}{\hbar}} |\alpha_I(t)\rangle \\ &= H'_I |\alpha_I(t)\rangle. \end{aligned} \quad (7.14)$$

De forma análoga, a diferenciação da eq. (7.13) conduz a equação de movimento para a variável dinâmica  $\Omega_I$ :

$$\frac{d\Omega_I}{dt} = \frac{\partial\Omega_I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [\Omega_I, H_0S] = \frac{\partial\Omega_I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [\Omega_I, H_0I]. \quad (7.15)$$

As equações (7.14) e (7.15) revelam que os estados vetoriais evoluem no tempo de acordo com  $H'$ , enquanto que as variáveis dinâmicas evoluem com  $H_0$ . Esta propriedade da FI torna-se muito útil quando  $H'$  é uma pequena *perturbação*, pois, sendo assim, a variável dinâmica mantém sua forma não perturbada e as funções de estado permanecem aproximadamente constantes.

# Referências Bibliográficas

- [1] H. B. Sandvik, J. D. Barrow and J. Maguejo *Phys. Rev. Lett.* **88**, 031302 (2002); O. Bertolami, *et al.*, *Phys. Rev. D* **69**, 083513 (2004)
- [2] J. W. Moffat, *Int. J. Mod. Phys. D***12**, 1279 (2003); O Bertolami, hep-ph/0301191; S. R. Coleman and S. L. Glashow, *Phys. Rev. D* **59**, 116008 (1999).
- [3] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 224 (1989); *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1811 (1991); *Phys. Rev. D* **39**, 683 (1989); *Phys. Rev. D* **40**, 1886 (1989), V. A. Kostelecky and R. Potting, *Nucl. Phys. B* **359**, 545 (1991); *Phys. Lett. B* **381**, 89 (1996); V. A. Kostelecky and R. Potting, *Phys. Rev. D* **51**, 3923 (1995).
- [4] D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997); D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998).
- [5] Robertson, *Rev. Mod. Phys.* 21, 378 1949 . 11 R. Mansouri and R. U. Sexl, *Gen. Relativ. Gravit.* 8, 497 1977 . 066101-2.
- [6] S.M. Carroll, G.B. Field and R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **41**, 1231 (1990);
- [7] L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonance and two-level atoms*, Dover, 1987.
- [8] F. Bloch and A. J. F. Siegert, , *Phys. Rev.* **57**, 522 (1940); A. F. Stevenson, *Phys. Rev.* **58**, 1061 (1940)
- [9] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, 1997.

- [10] M. M. Ferreira Jr and A. R. Gomes, *Lorentz violation on a quantized two-level system*.  
hep-th/08034010
- [11] M.M. Ferreira Jr, A. R. Gomes and Rafael C. C. Lopes, *Phys. Rev. D* **76**, 105031 (2007);
- [12] C. Adam and F. R. Klinkhamer, *Nucl. Phys. B* **607**, 247 (2001); *Nucl. Phys. B* **657**, 214 (2003); *Phys. Lett. B* **513**, 245 (2001); Q. G. Bailey and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev. D* **70**, 076006 (2004); M. Frank and I. Turan, *Phys. Rev. D* **74**, 033016 (2006); R. Lehnert and R. Potting, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 110402 (2004);
- [13] H. Belich, M. M. Ferreira Jr, J.A. Helayel-Neto, M. T. D. Orlando, *Phys. Rev. D* **67**, 125011 (2003); -ibid, *Phys. Rev. D* **69**, 109903 (E) (2004); H. Belich, M. M. Ferreira Jr, J.A. Helayel-Neto, M. T. D. Orlando, *Phys. Rev. D* **68**, 025005 (2003); A. P. B. Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo, J.A.
- [14] Helayel-Neto, *Phys. Rev. D* **67**, 085021 (2003); H. Belich *et al.*, *Nucl. Phys. B Suppl.* **127**, 105 (2004); H. Belich, M. M. Ferreira Jr and J. A. Helayel-Neto, *Eur. Phys. J. C* **38**, 511 (2005); H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., J. A. Helayel-Neto, *Eur. Phys. J. C* **42**, 127 (2005).
- [15] R. Jackiw and V. A. Kostelecký, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3572 (1999); J. M. Chung and B. K. Chung *Phys. Rev. D* **63**, 105015 (2001); A. P. B. Scarpelli, M. Sampaio, M. C. Nemes, and B. Hiller, *Phys. Rev. D* **64**, 046013 (2001); F.A. Brito, T. Mariz, J.R. Nascimento, E. Passos, R.F. Ribeiro, *JHEP* 0510 (2005) 019.
- [16] B. Altschul, *Phys. Rev. D* **70**, 056005 (2004); D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Lett. B* **511**, 209 (2001); M. M. Ferreira Jr, *Phys. Rev. D* **70**, 045013 (2004); M. M. Ferreira Jr, *Phys. Rev. D* **71**, 045003 (2005); M. M. Ferreira Jr and M. S. Tavares, *Int. J. Mod. Phys. A* **22**, 1685 (2007).

- [17] V. Barger, S. Pakvasa, T.J.Weiler, and K.Whisnant, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5055 (2000); V. A. Kostelecky and M. Mewes, *Phys. Rev. D* **69**, 016005 (2004); V. A. Kostelecky and M. Mewes, *Phys. Rev. D* **70**, 076002 (2004);
- [18] M. Lubo, *Phys. Rev. D* **71**, 047701 (2005); M.N. Barreto, D. Bazeia, and R. Menezes, *Phys. Rev. D* **73**, 065015 (2006).
- [19] H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., J. A. Helayël-Neto, M.T. D. Orlando, *Phys. Lett. B* **639**, 678 (2006); H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., J. A. Helayël-Neto, *Eur. Phys. J. C* **41**, 421 (2005).
- [20] O. Gagnon and G. D. Moore, *Phys. Rev. D* **70**, 065002 (2004); J.W. Moffat, *Int. J. Mod. Phys. D* **12** 1279 (2003); F. W. Stecker and S.T. Scully, *Astropart. Phys.* **23**, 203 (2005); F. W. Stecker and S.L. Glashow, *Astropart. Phys.* **16**, 97 (2001).
- [21] P. A. Bolokhov, S. GrootNibbelink, M.Pospelov, *Phys. Rev. D***72**, 015013 (2005); H. Belich *et al.*, *Phys. Rev. D* **68**, 065030 (2003); S. Groot Nibbelink and M. Pospelov, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 081601 (2005).
- [22] E. O. Iltan, *Eur. Phys. J. C* **40**, 269 (2005); *Mod. Phys. Lett.* **A19**, 327 (2004); *JHEP* 0306 (2003) 016.
- [23] V.A. Kostelecky and R. Lehnert, *Phys. Rev. D* **63**, 065008 (2001); R. Lehnert, *Phys. Rev. D* **68**, 085003 (2003).
- [24] A. P. B. Scarpelli and J. A. Helayel-Neto, *Phys. Rev. D* **73**, 105020 (2006); N.M. Barraz, Jr., J.M. Fonseca, W.A. Moura-Melo, and J.A. Helayel-Neto, *Phys. Rev. D***76**, 027701 (2007); H. Belich, M. A. De Andrade, M. A. Santos, *Mod.Phys.Lett. A* **20**, 2305 (2005).
- [25] S.R. Coleman and S.L. Glashow, *Phys. Rev. D* **59**, 116008 (1999); V. A. Kostelecky and M. Mewes, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 251304 (2001); V. A. Kostelecky and M. Mewes, *Phys. Rev. D* **66**, 056005 (2002);

- [26] R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and N. Russell, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1432 (1997); R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and N. Russell, *Phys. Rev. D* **57**, 3932 (1998); R. Bluhm, V.A. Kostelecky, C. D. Lane, and N. Russell, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 090801 (2002);
- [27] R. Bluhm and V.A. Kostelecky, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1381 (2000); R. Bluhm, R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and C. D. Lane, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1098 (2000); R. Bluhm, V.A. Kostelecky, N. Russell, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2254 (1999);
- [28] V.A. Kostelecky and C. D. Lane, *J. Math. Phys.* **40**, 6245 (1999); R. Lehnert, *J. Math. Phys.* **45**, 3399 (2004).
- [29] M.M. Ferreira Jr and F. M. O. Moucherek, *Int. J. Mod. Phys. A* **21**, 6211 (2006); *Nucl. Phys. A* **790**, 635 (2007);
- [30] H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., J. A. Helayël-Neto, and F. M. O. Moucherek, *Phys. Rev. D* **74**, 065009 (2006).
- [31] H. Muller, C. Braxmaier, S. Herrmann, A. Peters, and C. Lämmerzahl, *Phys. Rev. D* **67**, 056006 (2003); H. Müller, S. Herrmann, A. Saenz, A. Peters, and C. Lämmerzahl, *Phys. Rev. D* **68**, 116006 (2003); H. Müller, *Phys. Rev. D* **71**, 045004 (2005).
- [32] D. F. Phillips, M. A. Humphrey, E. M. Mattison, R. E. Stoner, R. F C. Vessot, R. L. Walsworth, *Phys.Rev. D* **63**, 111101 (R) (2001); D. Bear, R.E. Stoner, R.L. Walsworth, V. A. Kostelecky, C. D. Lane, *Phys.Rev. Lett.* **85**, 5038 (2000);
- [33] H. Belich, T. Costa-Soares, M. A. Santos and M.T.D. Orlando *Rev. Bras. de Ens. de Fís.* **29** n.1 54-64 (2007)
- [34] V. A. Kostelecky, *Scientific American* (Brasil) **29**, 72 (2004).
- [35] Gordon Kane, *Scientific American* (Brasil) **39**, 100 (2004).
- [36] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*. New York, McGraw-Hill, 1968.
- [37] Cohen-Tannoudji, C. *Quantum Mechanics*. Wiley, 1977.

[38] R. Lewis H. . *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1996.

[39] R. Bluhm, *Physic's World*, (Breaking Lorentz symmetry) (2004).