Universidade Federal do Maranhão
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT

Ítalo Bruno Leandro Lustosa

Sobre noções restritivas de lineabilidade

São Luís - MA
2026

Universidade Federal do Maranhão
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT

Ítalo Bruno Leandro Lustosa

Sobre noções restritivas de lineabilidade

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGMAT) da UFMA como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Ítalo Bruno Leandro Lustosa e aprovada pela comissão julgadora.

Anselmo Baganha Raposo Júnior
(Orientador)

São Luís - MA
2026

Universidade Federal do Maranhão
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGMAT) da UFMA como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise Funcional

Aprovada em: 26 de fevereiro de 2026

Prof. Dr. Anselmo Baganha Raposo Júnior
Orientador
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Prof. Dr. José Vanterler da Costa Sousa
Examinador Interno
Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino
Examinador Externo
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

São Luís - MA
2026

Aos que me fazem forte

Agradecimentos

A Deus.

À minha família, por sempre me apoiar e ajudar, sendo presentes nos momentos mais difíceis e complexos da minha vida.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Anselmo B. Raposo Júnior, pela paciência, dedicação, motivação, amizade, hombridade e por demonstrar confiança em mim. Enquanto seu aluno, pude aprender muito sobre Matemática e também como ser lúcido e empático com o próximo.

Aos meus colegas do Mestrado, que tiveram papel fundamental nessa caminhada acadêmica.

Aos professores que tive durante toda essa caminhada, em especial: Leomar Veras, Ronaldo José, Raimundo Neto, Giovane Ferreira, Vanessa R. Ramos, José Santana, Ivaldo Paz, José Vanterler, Anselmo Baganha, Gustavo Silvestre e Ermerson Rocha.

Por fim, agradeço à CAPES, pelo apoio financeiro.

Das coisas existentes, algumas são encargos nossos; outras não. São encargos nossos o juízo, o impulso, o desejo, a repulsa, em suma: tudo quanto seja ação nossa. Não são encargos nossos o corpo, as posses, a reputação, os cargos públicos, em suma: tudo quanto não seja ação nossa. Por natureza, as coisas que são encargos nossos são livres, desobstruídas, sem entraves. As que não são encargos nossos são débeis, escravas, obstruídas, de outrem. Lembra então que, se pensares livres as coisas escravas por natureza e tuas as de outrem, tu te farás entraves, tu te afligirás, tu te inquietarás, censurarás tanto os deuses como os homens.

Epicteto, *Encheirídion*, §1

Resumo

Neste trabalho, reunimos e contextualizamos resultados recentes sobre estruturas algébricas em subconjuntos não lineares de espaços vetoriais topológicos, com ênfase nas noções de lineabilidade, espaçabilidade e suas versões mais fortes, como a (α, β)-lineabilidade, (α, β)-espaçabilidade e as noções pontuais associadas. Inicialmente, discutimos critérios gerais para as noções fortes de lineabilidade e espaçabilidade, estabelecendo condições abstratas que explicam a falha sistemática de resultados positivos quando se impõem exigências mais restritivas de dimensão e fechamento. Em seguida, apresentamos resultados sobre o conjunto das funções contínuas, integráveis e ilimitadas em $[0, \infty)$, mostrando que tal conjunto admite estruturas lineares de grande dimensão, incluindo resultados de espaçabilidade pontual, ao mesmo tempo em que se evidenciam limitações relevantes quanto à $(\aleph_0, \mathfrak{c})$-espaçabilidade. Como aplicações, são recuperados e generalizados resultados clássicos em espaços de funções e de sequências, evidenciando a interação delicada entre propriedades algébricas e topológicas nesses contextos.

Palavras-chave: Lineabilidade, Espaçabilidade, Espaço vetoriais topológicos, Noções restritivas de lineabilidade.

Abstract

In this work, we gather and contextualize recent results on algebraic structures in nonlinear subsets of topological vector spaces, with emphasis on the notions of lineability, spaceability, and their stronger versions, such as (α, β)-lineability, (α, β)-spaceability, and the associated pointwise notions. Initially, we discuss general criteria for the strong notions of lineability and spaceability, establishing abstract conditions that explain the systematic failure of positive results when more restrictive requirements on dimension and closedness are imposed. We then present results on the set of continuous, integrable, and unbounded functions on $[0, \infty)$, showing that this set admits large-dimensional linear structures, including pointwise spaceability results, while also highlighting relevant limitations regarding $(\aleph_0, \mathfrak{c})$-spaceability. As applications, classical results in function and sequence spaces are recovered and generalized, revealing the delicate interplay between algebraic and topological properties in these contexts.

Key-words: Lineability, Spaceability, Topological vector spaces, Restrictive notions of lineability.

Sumário

Notações e terminologias

- $\mathbb{K}$ - Denota de forma indistinta os corpos $\mathbb{R}$ dos números reais e $\mathbb{C}$ dos números complexos.
- $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ - Denota o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e o conjunto dos números complexos z para os quais $\mathrm{Re}\,(z)\,, \mathrm{Im}\,(z) \in \mathbb{Q}$ se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- $\mathrm{card}\,(A)$ - Denota a cardinalidade do conjunto A.
- $\mathbb{N}$ - Denota o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$ dos números naturais.
- $\aleph_0$ - Denota a cardinalidade de $\mathbb{N}$.
- $\mathfrak{c}$ - Denota a cardinalidade de $\mathbb{R}$.
- ℓ_p, $0 < p < \infty$ - Denota o conjunto das sequências p-somáveis de escalares, isto é,

$$\ell_p = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

  Este conjunto é sabidamente um espaço vetorial com respeito às operações usuais de adição de vetores e de multiplicação de um vetor por um escalar.
- $\|\cdot\|_p$ - Denota a aplicação

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p \mapsto \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \in \mathbb{R}.$$

  Esta aplicação é sabidamente uma norma se $1 \leq p < \infty$ e uma p-norma se $0 < p < 1$. Faz de ℓ_p um espaço completo.
- ℓ_∞ - Denota o conjunto das sequências limitadas de escalares, isto é,

$$\ell_\infty = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \text{ e } \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}.$$

- $\|\cdot\|_\infty$ - Denota a aplicação

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty \mapsto \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \in \mathbb{R}.$$

  Esta aplicação é sabidamente uma norma e faz de ℓ_∞ um espaço completo.

- c - Denota o subespaço fechado de ℓ_∞ constituído das sequências convergentes de escalares.

- c_0 - Denota o subespaço fechado de ℓ_∞ constituído das sequências de escalares que convergem para 0.

- $L_p(I)$, $0 < p < \infty$ - Denota o conjunto das classes de equivalência das funções p-integráveis a Lebesgue $f\colon I \to \mathbb{R}$ que coincidem quase sempre sobre I. É usual identificar a classe de equivalência $[f]$ a qual f pertence com a própria função f. Assim,
$$L_p(I) = \{f\colon I \to \mathbb{K} : |f|^p \text{ é integrável a Lebesgue}\}.$$
Este conjunto é sabidamente um espaço vetorial com respeito às operações usuais de adição de vetores e de multiplicação de um vetor por um escalar.

- $\|\cdot\|_{L_p}$ - Denota a aplicação
$$f \in L_p(I) \mapsto \|f\|_{L_p} = \left(\int |f|^p \, dx\right)^{1/p} \in \mathbb{R}.$$
Esta aplicação é sabidamente uma norma se $1 \leq p < \infty$ e uma p-norma se $0 < p < 1$. Faz de $L_p(I)$ um espaço completo.

- $\mathcal{C}(I)$ - Denota o espaço das funções contínuas $f\colon I \to \mathbb{K}$.

- $\mathcal{C}^n(I)$ - Denota o espaço das funções contínuas $f\colon I \to \mathbb{K}$ que possuem derivada contínua de n-ésima ordem.

- $\mathcal{C}^\infty(I)$ - Denota o espaço das funções contínuas $f\colon I \to \mathbb{K}$ que possuem derivada de qualquer ordem.

- $\operatorname{span}(A)$ - Denota o espaço gerado por A, isto é, o conjunto das combinações lineares finitas de elementos de A.

- $\dim(X)$ - Denota a dimensão algébrica do espaço vetorial X, isto é, a cardinalidade de uma base de Hamel de X.

- $\mathbb{S}_X$ - Denota a esfera unitária do espaço vetorial normado X, isto é, $\mathbb{S}_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

- $B_r(a)$ - Denota a bola aberta de centro a e raio $r > 0$ em um espaço métrico M, ou seja,
$$B_r(a) = \{x \in M : d(x,a) < r\}.$$

Introdução

Grande parte do desenvolvimento da matemática esteve historicamente associada à investigação de objetos que desafiam a intuição e escapam aos padrões usuais. Muitos desses exemplos, inicialmente considerados curiosidades ou exceções patológicas, acabaram desempenhando papel central na consolidação de novas teorias. A irracionalidade de $\sqrt{2}$, já conhecida na Grécia Antiga, rompeu com a visão pitagórica dos números; os trabalhos de Liouville e Cantor revelaram não apenas a existência de números transcendentes, mas também sua abundância; e o célebre exemplo de Weierstrass de uma função contínua em todo ponto e diferenciável em nenhum abalou profundamente a intuição geométrica do cálculo clássico.

Esses fenômenos suscitam uma questão natural: objetos matemáticos aparentemente excepcionais são de fato raros ou escondem, sob sua irregularidade, algum tipo de estrutura subjacente? No contexto da Análise Funcional, essa pergunta motivou o surgimento da *Teoria da Lineabilidade*, cujo objetivo central é investigar a existência de grandes estruturas lineares contidas em subconjuntos não lineares de espaços vetoriais topológicos.

O primeiro estudo nesta direção (ainda sem o formalismo conceitual e terminológico que temos hoje) é atribuído a Gurariy que, em 1966, demonstrou que o conjunto das funções contínuas $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ que não são diferenciáveis em nenhum ponto contém um subespaço vetorial de dimensão infinita. Desde então, essa teoria foi substancialmente ampliada, sobretudo a partir da década de 1990, com contribuições de diversos autores, como Aron, Bernal-González e Seoane-Sepúlveda, que exploraram a lineabilidade em diferentes espaços vetoriais e sob distintas perspectivas.

Um fortalecimento natural dessa noção é a *espaçabilidade*, que exige que o subespaço vetorial contido no conjunto seja, além de infinito dimensional, também fechado no espaço ambiente. Essa exigência intensifica a interação entre propriedades algébricas e topológicas, revelando que muitos conjuntos definidos por comportamentos irregulares possuem, na verdade, uma estrutura interna rica e topologicamente robusta.

Outra noção relevante é a de *lineabilidade densa*, que requer que o subespaço vetorial de dimensão infinita seja denso no espaço ambiente. Essa propriedade assegura que os elementos do conjunto considerado estejam distribuídos de forma topologicamente significativa, permitindo a aproximação arbitrária de elementos gerais do espaço por elementos pertencentes ao conjunto em questão.

Mais recentemente, surgiram versões ainda mais restritivas dessas noções, como a (α,β)-*lineabilidade* e a (α,β)-*espaçabilidade*, nas quais se exige que todo subespaço de dimensão α contido no conjunto possa ser estendido a um subespaço de dimensão β, ainda contido no conjunto, possivelmente com propriedades adicionais de fechamento ou densidade. Paralelamente, foram introduzidas as *noções pontuais* de lineabilidade e espaçabilidade, que substituem a exigência global pela condição de que, para cada elemento do conjunto, exista um subespaço vetorial de grande dimensão que o contenha e permaneça, exceto pelo vetor nulo, dentro do conjunto. Essas ideias foram introduzidas por Fávaro, Pellegrino e Tomáz e posteriormente aprofundadas por Fávaro, Pellegrino, Raposo Jr. e Ribeiro.

Embora naturais, essas versões mais fortes frequentemente se mostram excessivamente restritivas, levando à falha sistemática de resultados positivos. Compreender as razões dessas falhas, bem como identificar os contextos em que tais noções ainda são viáveis, constitui um dos principais objetivos deste trabalho. Um aspecto central dessa análise é a relação entre dimensão algébrica, densidade topológica e a estrutura de subespaços e espaços quocientes, especialmente em conjuntos do tipo $V \setminus W$, onde V é um espaço vetorial topológico e W é um subespaço vetorial de V.

Como aplicação concreta dessas ideias, dedicamos atenção especial ao conjunto das funções contínuas, integráveis e ilimitadas definidas em $[0, \infty)$. Esse conjunto ilustra de forma clara a tensão entre a abundância algébrica local e as limitações globais impostas por exigências topológicas mais severas, especialmente no contexto das noções (α, β) e pontuais de lineabilidade e espaçabilidade.

A dissertação está organizada da seguinte forma. No Capítulo 1, apresentamos os conceitos e resultados preliminares necessários ao desenvolvimento do trabalho, incluindo noções básicas de aritmética cardinal, dimensão algébrica e as definições fundamentais de lineabilidade, espaçabilidade, suas versões densas, bem como as noções (α, β) e pontuais.

No Capítulo 2, desenvolvemos um estudo sistemático das noções restritivas de lineabilidade e espaçabilidade. Inicialmente, estabelecemos critérios gerais que explicam a inexistência de resultados positivos em diversos contextos, obtendo importantes resultados negativos. Em seguida, discutimos condições sob as quais resultados positivos ainda podem ser obtidos, destacando o papel da codimensão, da densidade e da existência de sequências básicas em espaços de Banach e de Fréchet.

No Capítulo 3, mostramos que o conjunto das funções contínuas, integráveis e ilimitadas em $[0, \infty)$ admite estruturas lineares de grande dimensão, inclusive sob a ótica das noções pontuais de espaçabilidade, ao mesmo tempo em que evidenciamos limitações fundamentais quanto à $(\aleph_0, \mathfrak{c})$-espaçabilidade.

O objetivo geral desta dissertação é, portanto, aprofundar a compreensão das *noções restritivas de lineabilidade* em espaços vetoriais topológicos, destacando a delicada interação entre estrutura algébrica e propriedades topológicas, bem como esclarecer os limites e possibilidades dessas noções em contextos abstratos e aplicados.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos e resultados que serão fundamentais para o desenvolvimento desse trabalho. Alguns deles serão apresentados apenas por questões de completude, haja vista que o intuito deste trabalho não é retomar os fundamentos da Teoria Axiomática de Conjuntos.

1.1 Números cardinais

Números cardinais são, de certa forma, uma extensão dos números naturais. Neste contexto, a aritmética cardinal é, pois, uma extensão da aritmética usualmente construída sobre $\mathbb{N}$. A noção de número cardinal e alguns fatos básicos sobre aritmética cardinal serão de suma importância para o entendimento dos conceitos apresentados neste trabalho.

No que segue, se A é um conjunto, então $\mathrm{card}(A)$ denota a **cardinalidade** de A.

Definição 1.1 *Sejam A e B conjuntos não vazios. Diremos que:*

- $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ *se houver uma função injetora de A em B;*
- $\mathrm{card}(A) \geq \mathrm{card}(B)$ *se houver uma função sobrejetora de A em B;*
- $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$ *se houver uma função bijetora de A em B;*
- $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(B)$ *se* $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ *e não existir uma função bijetora de A em B;*
- $\mathrm{card}(A) > \mathrm{card}(B)$ *se* $\mathrm{card}(A) \geq \mathrm{card}(B)$ *e não existir uma função bijetora de A em B.*

Claramente, se $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ e $\mathrm{card}(B) \leq \mathrm{card}(C)$ então $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(C)$. Os resultados a seguir mostram que as definições acima estão de acordo com o que se esperaria.

Observação 1.2 *Não definimos aqui* $\mathrm{card}(A)$ *e* $\mathrm{card}(B)$ *de maneira direta. No entanto, em breve veremos que* $\mathrm{card}(A)$ *estende a noção de número natural e os símbolos $\leq$, $\geq$, $<$, $>$ e $=$ se comportarão, de maneira natural, como esperado.*

Teorema 1.3 $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ *se, e somente se,* $\mathrm{card}(B) \geq \mathrm{card}(A)$.

Demonstração: Ver [1, Proposition I.2, p. 1]. ■

O primeiro teorema principal nesta seção será o responsável por garantir que a relação $\leq$ aqui introduzida define uma relação de ordem. Sua profundidade pode ser percebida quando observamos as sutilezas dos argumentos contidos em sua prova.

Teorema 1.4 (Teorema de Cantor–Bernstein–Schröder) *Se* $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ *e* $\mathrm{card}(A) \geq \mathrm{card}(B)$ *então* $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$.

Demonstração: Sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to A$ funções injetoras. A existência de tais funções é garantida pela hipótese feita acerca das cardinalidades dos conjuntos A e B. Para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$, definamos $h_n\colon A \to A$ pondo $h_0 = \mathrm{id}_A$ e $h_{n+1} = (g \circ f) \circ h_n$. Assim, se $n \geq 1$, podemos escrever $h_n = (g \circ f)^n$, onde $(g \circ f)^n$ representa a composição de n fatores iguais a $g \circ f$. Sabemos que a injetividade das funções f e g implica na injetividade de h_n. Seja $S \subset A$, dado por

$$S = \left\{x \in A;\ h_n^{-1}(x) \notin g(B)\,,\ \text{para algum } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}.$$

Observemos que, se $x \notin g(B)$, então, tomando $n = 0$, segue que $h_0^{-1}(x) = x \notin g(B)$, ou seja, $x \in S$. Equivalentemente, se $x \notin S$, então $x \in g(B)$. Por outro lado, notemos que, dado $y \in B$, se tivermos $g(y) \in S$, então $y \in f(A)$ e ocorre $f^{-1}(y) \in S$. De fato, se $g(y) \in S$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $h_n^{-1}(g(y)) \notin g(B)$. É claro que $n \neq 0$ e, neste caso, podemos escrever

$$\begin{aligned} h_n^{-1}(g(y)) &= ((g \circ f) \circ h_{n-1})^{-1}(g(y)) \\ &= h_{n-1}^{-1}\left((g \circ f)^{-1}(g(y))\right) \\ &= h_{n-1}^{-1}\left(f^{-1}\left(g^{-1}(g(y))\right)\right) \\ &= h_{n-1}^{-1}\left(f^{-1}(y)\right). \end{aligned}$$

Logo, $h_{n-1}^{-1}((f^{-1}(y)) \notin g(B)$, donde $f^{-1}(y) \in S$. Para concluir, definamos $H\colon A \to B$ pondo $H(x) = f(x)$ se $x \in S$ e $H(x) = g^{-1}(x)$ se $x \notin S$. Notemos que H está bem definida, pois g é injetiva e se $x \notin S$ então $x \in g(A)$, como já observamos. Ademais, H é injetiva, haja vista que, dados $x_1, x_2 \in A$, temos as seguintes possibilidades: $x_1, x_2 \in S$ (ambos estão em A); $x_1, x_2 \notin S$ (ambos estão no complementar de S) ou $x_1 \in S$ e $x_2 \notin S$ (um está em S e o outro no seu complementar). Nos dois primeiros casos a igualdade $H(x_1) = H(x_2)$ implica $x_1 = x_2$, devido a injetividade das funções f e de g. No último, tal igualdade implicaria $f(x_1) = g^{-1}(x_2)$ de onde teríamos $x_1 = f^{-1}(g^{-1}(x_2)) = h_1^{-1}(x_2)$. Porém, como $x_1 \in S$, existe $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $h_n^{-1}(x_1) \notin g(B)$. Logo, $h_n^{-1}\left(h_1^{-1}(x_2)\right) \notin g(B)$, ou seja, $h_{n+1}^{-1}(x_2) \notin g(B)$. Isso implica $x_2 \in S$, o que é uma contradição. Isso conclui a verificação da injetividade de H. Por fim, dado $y \in B$, temos duas possibilidades: $g(y) \notin S$ ou $g(y) \in S$. No primeiro caso, temos $H(g(y)) = g^{-1}(g(y)) = y$ e, no segundo caso, como observado, temos $f^{-1}(y) \in S$ e, daí, $H(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(y)) = y$. De todo modo, dado $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $H(x) = y$, ou seja, H é sobrejetora. A função H é, portanto, uma bijeção e o resultado segue. ■

De agora em diante, se A for um conjunto, o símbolo $\mathrm{card}(A)$ será chamado de número cardinal (ou simplesmente cardinal). O número cardinal $\mathrm{card}\,(A)$ pode ser pensado como uma classe de equivalência de conjuntos, isto é, como sendo a coleção dos conjuntos B para os quais existe uma bijeção $f\colon A \to B$.

O número cardinal $\mathrm{card}(A)$ é dito **finito**, se A for um conjunto finito; caso contrário é chamado número cardinal **infinito**. Diremos ainda que $\mathrm{card}(A)$ é contável se $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(\mathbb{N})$, ocasião em que o conjunto A é chamado de contável ou enumerável.

Para um conjunto finito é claro que $\mathrm{card}(A)$ pode ser visto como o número de elementos de A. Em particular, se houver uma bijeção de A para $\{1, ..., n\}$ escrevemos

$$\mathrm{card}(A) = n.$$

A partir de agora, escreveremos

$$\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0 \text{ e } \mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c},$$

e diremos que $\mathbb{N}$ tem a cardinalidade "aleph zero" e $\mathbb{R}$ possui a cardinalidade do "continuum". Por simplicidade os números cardinais serão denotados por letras gregas minúsculas. É conveniente definir a cardinalidade do conjunto vazio por zero.

O próximo resultado sobre números cardinais mostra outra propriedade interessante: quaisquer dois números cardinais são comparáveis. Isso estabelece uma ordenação total dos números cardinais.

Teorema 1.5 *Se α, β são números cardinais então $\alpha \leq \beta$ ou $\beta \leq \alpha$.*

Demonstração: Ver [1, Theorem I.5, p.3]. ■

O próximo resultado garante que, dado um número cardinal α, existe um cardinal β tal que $\alpha < \beta$. Em particular, isso garante que existem infinitos cardinais infinitos. Dado um conjunto A, denotamos por $\mathcal{P}(A)$ o conjunto das partes de A.

Teorema 1.6 *Para qualquer conjunto A, temos* $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(A))$.

Demonstração: Ver [1, Proposition I.6, p.4]. ■

Como era de se esperar, o menor número cardinal infinito é o $\aleph_0$, e isso é afirmado no próximo resultado.

Teorema 1.7 *Se α é um número cardinal infinito, então $\alpha \geq \aleph_0$.*

Demonstração: Seja M um conjunto qualquer, tal que $\mathrm{card}(M) = \alpha$. Escolha $x_1 \in M$. Como M é infinito, existe $x_2 \in M \setminus \{x_1\}$. Como M é infinito, existe $x_3 \in M \setminus \{x_1, x_2\}$. Prosseguindo deste modo, obtemos uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_i \neq x_j$ sempre que $i \neq j$. Logo, a função de $\mathbb{N}$ em M que a cada j faz corresponder x_j é injetora e, portanto, $\alpha \geq \aleph_0$. ■

Lembremos que a Hipótese do Continuum (HC) afirma que não existe um conjunto H tal que

$$\aleph_0 < \mathrm{card}(H) < \mathfrak{c}. \tag{1.1}$$

É bem conhecido que HC é independente dos axiomas padrão da Teoria dos Conjuntos (geralmente denotados por ZFC, ou seja, a teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel juntamente com o Axioma da Escolha). Assim, quando se diz que estamos assumindo a HC, na verdade significa que estamos assumindo (como um axioma) que não existe um conjunto H que satisfaça (1.1). Por outro lado, se assumirmos a negação da HC, significa que assumimos (como um axioma) a existência de um conjunto H que satisfaça (1.1).

1.2 Aritmética cardinal

Como já mencionamos na primeira seção, a noção de cardinalidade é, de maneira muito natural, uma extensão da noção de números naturais. Portanto, um passo natural que se poderia dar é definir operações dentro dos números cardinais.

Definição 1.8 *Sejam α e β números cardinais. Definimos:*

(i) $\alpha + \beta := \operatorname{card}(S)$, *onde* $S = A \cup B$ *com* $\alpha = \operatorname{card}(A)$, $\beta = \operatorname{card}(B)$ *e* $A \cap B = \varnothing$.

(ii) $\alpha \cdot \beta := \operatorname{card}(P)$, *onde* $P = A \times B$, *com* $\alpha = \operatorname{card}(A)$ *e* $\beta = \operatorname{card}(B)$.

(iii) $\alpha^\beta := \operatorname{card}(C)$, *onde C é qualquer conjunto da forma*

$$C = \prod_{i \in I} A_i,$$

com $\operatorname{card}(I) = \beta$ *e* $\operatorname{card}(A_i) = \alpha$ *para todo* $i \in I$. *Equivalentemente, se* $\operatorname{card}(A) = \alpha$, *então* $\alpha^\beta = \operatorname{card}(A^I)$, *com*

$$A^I = \{f : f \text{ é uma função de } I \text{ em } A\}.$$

Dados os números cardinais $\alpha, \beta, \gamma \geq 1$, temos:

- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$,
- $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$,
- $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$,
- $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$,
- $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$,
- $(\alpha \cdot \beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$,
- $(\alpha)^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$,
- $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma} = (\alpha^\gamma)^\beta$.

Além disso, a relação $\leq$ é compatível com as operações de adição e multiplicação. Mais precisamente, se $\alpha_1 \leq \alpha_2$ e $\beta_1 \leq \beta_2$, então :

- $\alpha_1 + \beta_1 \leq \alpha_2 + \beta_2$,
- $\alpha_1 \cdot \beta_1 \leq \alpha_2 \cdot \beta_2$,
- $\alpha_1^{\beta_1} \leq \alpha_2^{\beta_2}$

Também, se α é um cardinal infinito, então

$$\alpha + n = \alpha,$$

para qualquer inteiro positivo n. O próximo resultado é uma extensão desse último fato.

Teorema 1.9 *Sejam α e β números cardinais, com $1 \leq \beta \leq \alpha$ e α infinito. Então*

$$\alpha + \beta = \alpha.$$

Demonstração: Ver [1, Theorem II.2, p. 6]. ∎

Corolário 1.10 *Se α, β, γ são números cardinais infinitos, com $\alpha + \beta = \gamma$ e $\alpha < \gamma$, então $\beta = \gamma$.*

O seguinte resultado é uma versão de multiplicação do Teorema 1.9.

Teorema 1.11 *Sejam α e β números cardinais, com $1 \leq \beta \leq \alpha$ e α infinito. Então*

$$\alpha \cdot \beta = \alpha.$$

Demonstração: Ver [1, Theorem II.4, p. 7]. ∎

Corolário 1.12 *Se β é um cardinal infinito, então*

$$\aleph_0 \cdot \beta = \beta.$$

Teorema 1.13 $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Demonstração: Segue do Teorema de Cantor–Bernstein–Schröder que é suficiente mostrar que $2^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}$ e, reciprocamente, que $\mathfrak{c} \leq 2^{\aleph_0}$. A função $h\colon \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{Q}}$ definida por $h(x) = h_x$, com $h_x\colon \mathbb{Q} \to \{0,1\}$ dada por

$$h_x(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < x, \\ 1, & \text{se } x \leq y, \end{cases}$$

é injetiva e, assim,

$$\mathfrak{c} \leq 2^{\aleph_0}.$$

Por outro lado, a função

$$\begin{aligned} g\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} &\to \mathbb{R} \\ (\alpha_i) &\mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i \cdot 10^{-i}, \end{aligned}$$

é injetiva e, portanto, $2^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}$. ∎

Lema 1.14 *Se α é um número cardinal infinito e β é um número cardinal tal que $2 \leq \beta \leq 2^\alpha$, então*
$$\beta^\alpha = 2^\alpha.$$

Demonstração: Notemos que, como $\alpha \cdot \alpha = \alpha$, obtemos
$$2^\alpha \leq \beta^\alpha \leq (2^\alpha)^\alpha = 2^{\alpha \cdot \alpha} = 2^\alpha$$
e assim, à luz do Teorema de Cantor–Bernstein–Schröder, concluímos que $\beta^\alpha = 2^\alpha$. ■

Teorema 1.15 $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Demonstração: Do lema anterior, como $2 < \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ conseguimos
$$\mathfrak{c}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c},$$
e o resultado segue. ■

1.3 Lineabilidade e espaçabilidade

Lembremos que um espaço vetorial topológico é um espaço vetorial com uma topologia segundo a qual as operações de adição e multiplicação por escalar são contínuas. O "tamanho linear" de um subconjunto em tal espaço, pode ser descrito com as noções de lineabilidade e espaçabilidade.

Definição 1.16 *Sejam V um espaço vetorial topológico, A um subconjunto não vazio de V e α um número cardinal. Dizemos que:*

(*i*) *A é α-**lineável** se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial de dimensão α.*

(*ii*) *A é α-**espaçável** se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial fechado de dimensão α.*

(*iii*) *A é α-**denso lineável** (ou **densamente** α-**lineável**) se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial denso de dimensão α.*

Será comum referirmo-nos ao conjunto A simplesmente por **lineável**, **espaçável** ou **densamente lineável**, se o subespaço em questão for de dimensão infinita, mas o número cardinal que denota esta dimensão não é especificado. Observemos que, se estivermos no contexto de espaços vetoriais (sem topologia envolvida), então a noção de lineabilidade ainda é válida. O maior número cardinal α tal que A é α-lineável pode não existir. O próximo exemplo ilustra esse fenômeno.

Exemplo 1.17 *Sejam $j_1 \leq k_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_m \leq k_m < j_{m+1} \leq \cdots$ inteiros com $k_n - j_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e seja*
$$M := \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=j_m}^{k_m} a_i X^i : a_i \in \mathbb{K} \right\}.$$
Os conjuntos $\left\{\sum_{i=j_m}^{k_m} a_i X^i : a_i \in \mathbb{K}\right\}$, $m \in \mathbb{N}$, são, obviamente, dois a dois disjuntos e, portanto, M é n-lineável para todo n mas não é $\aleph_0$-lineável em $\mathbb{K}[X]$.

Recentemente, em [8] as noções de (α, β)-lineabilidade e (α, β)-espaçabilidade foram introduzidas como uma tentativa de investigar até que ponto resultados positivos de lineabilidade e espaçabilidade permanecem válidos quando colocados sob condições mais rigorosas.

Definição 1.18 *Sejam V um espaço vetorial topológico, A um subconjunto não vazio de V e, α e β números cardinais onde $\alpha \leq \beta$. Dizemos que:*

(*i*) *A é (α, β)-**lineável** se é α-lineável e para todo subespaço α-dimensional $W_\alpha \subset A \cup \{0\}$ existe um subespaço W_β tal que*

$$\dim(W_\beta) = \beta \qquad e \qquad W_\alpha \subset W_\beta \subset A \cup \{0\}. \tag{1.2}$$

Quando V é munido de uma topologia, duas novas noções surgem:

(*ii*) *Quando o subespaço W_β satisfazendo* (1.2) *pode sempre ser escolhido fechado em V, dizemos que A é (α, β)-**espaçável**;*

(*iii*) *Quando o subespaço W_β satisfazendo* (1.2) *pode sempre ser escolhido denso em V, dizemos que A é (α, β)-**denso lineável** (ou **densamente** (α, β)-**lineável**).*

Notemos que, em particular, (α, β)-lineabilidade (espaçabilidade, lineabilidade densa) implica β-lineabilidade (espaçabilidade, lineabilidade densa). Por outro lado, enquanto (α, α)-lineabilidade e α-lineabilidade são o mesmo conceito, a noção de (α, α)-espaçabilidade (lineabilidade densa) não coincide com a noção de α-espaçabilidade (lineabilidade densa).

Nesse mesmo sentido, em [14], a noção de β-lineabilidade (espaçabilidade) pontual foi introduzida. Posteriormente, em [7], foi introduzido o conceito de β-lineabilidade densa pontual.

Definição 1.19 *Seja V um espaço vetorial, A um subconjunto de V e β um número cardinal. Dizemos que:*

(*i*) *A é **pontualmente** β-**lineável** se, para todo $x \in A$, existe um subespaço W_x, tal que*

$$\dim(W_x) = \beta \qquad e \qquad x \in W_x \subset A \cup \{0\}. \tag{1.3}$$

Quando V é munido de uma topologia, temos as seguintes noções:

(*ii*) *A é **pontualmente** β-**espaçável** quando o subespaço W_β satisfazendo* (1.3) *sempre pode ser escolhido fechado em V;*

(*iii*) *A é **pontualmente densamente** β-**lineável** se o subespaço W_β satisfazendo* (1.3) *sempre pode ser escolhido denso em V.*

*Quando A é pontualmente β-lineável (espaçável, densamente lineável) e $\dim(V) = \beta$, dizemos que A é pontualmente **maximal** lineável (espaçável, densamente lineável).*

É claro que β-lineabilidade (espaçabilidade, lineabilidade densa) pontual implica em $(1,\beta)$-lineabilidade (espaçabilidade, lineabilidade densa). Diante disso, vale o seguinte questionamento natural: A recíproca é verdadeira?

Exemplo 1.20 *Vejamos que $(1,\beta)$-lineabilidade não implica em β-lineabilidade pontual. De fato, seja $A=\mathbb{R}^2\cup\{(1,1,1)\}$ note que, A não é pontualmente lineável em $\mathbb{R}^3$, porém, é $(1,2)$-lineável em $\mathbb{R}^3$.*

Exemplo 1.21 *Vejamos que $(1,\beta)$-espaçabilidade não implica em β-espaçabilidade pontual. De fato, sejam E um espaço vetorial normado de dimensão infinita, $\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in E'\setminus\{0\}$ e $\varepsilon>0$. Façamos,*

$$A=\{x\in E:|\varphi_j(x)|<\varepsilon,\ j=1,...,n\}\quad e\quad M:=\bigcap_{j=1}^{n}\ker(\varphi_j).$$

Notemos que, como M tem deficiência finita,

$$\dim(M)=\dim(E).$$

Seja $x\in E\setminus\bigcap_{j=1}^{n}\ker(\varphi_j)$. Como $\dfrac{1}{k}x\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0_E$, segue da continuidade de $\varphi_j,\ j=1,...,n$, que existe $k_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tal que, se $k\geq k_\varepsilon$, então, para todo $j=1,\ldots,n$,

$$\left|\varphi_j\left(\frac{1}{k}x\right)\right|<\varepsilon$$

logo,

$$\frac{1}{k_\varepsilon}x\in A.$$

Isso mostra, em particular, que A não é pontualmente $(1,\beta)$-lineável, qualquer que seja o cardinal $\beta\geq 1$. Agora, seja $F\subset E$ tal que $F\subset A$. Para fins de contradição, suponhamos que $F\not\subset M$. Seja $y\in F\setminus M$. Nesse caso, existe $j_0\in\{1,...,n\}$ tal que $\varphi_{j_0}(y)\neq 0$ e, portanto,

$$|\varphi_{j_0}(y)|>0.$$

Isso implica que

$$\lim_{t\to\infty}t\,|\varphi_{j_0}(y)|=\infty$$

e, consequentemente, existe $t_0\in[0,\infty)$ tal que $t_0\,|\varphi_{j_0}(y)|>\varepsilon$. Mas

$$t_0\,|\varphi_{j_0}(y)|=|t_0\varphi_{j_0}(y)|=|\varphi_{j_0}(t_0y)|\,,$$

de onde segue que $t_0y\notin A$, o que é claramente uma contradição. Logo, $F\subset M$. Agora, sejam $1\leq\alpha<\dim(E)$ e W_α um subespaço de dimensão α contido em A. Pelo que vimos,

$$W_\alpha\subset M$$

e, portanto, A é $(\alpha,\dim(E))$-espaçável. Em particular, A é $(1,\dim(E))$-espaçável. Mas A não é pontualmente β-espaçável.

Observação 1.22 *Quando* $A \cup \{0\}$ *é fechado quanto a multiplicação por escalar, a noção* β *pontual coincide com a noção* $(1, \beta)$ *correspondente. Até o momento existem poucos resultados concernentes às noções de* (α, β)*-lineabilidade,* (α, β)*-espaçabilidade. A maioria dos resultados obtidos até o momento mostram a* $(1, \mathfrak{c})$*-lineabilidade e a* $(1, \mathfrak{c})$*-espaçabilidade de certos conjuntos e nenhuma técnica geral que relacione lineabilidade e espaçabilidade com* (α, β)*-lineabilidade e* (α, β)*-espaçabilidade, respectivamente, parece ser conhecida.*

Capítulo 2

Um critério geral para uma noção mais forte de lineabilidade

Este capítulo é baseado em [7]. Seu principal objetivo é esclarecer a relação entre as noções ordinárias de lineabilidade e espaçabilidade e as noções de (α, β)-lineabilidade e (α, β)-espaçabilidade, fornecendo técnicas gerais aplicáveis em diversos contextos.

2.1 Conjuntos (α, β)-espaçáveis: resultados negativos

Antes de apresentar o principal resultado desta seção, recordemos que, se A e B são subconjuntos de um espaço vetorial V, então A é dito mais forte do que B se

$$A + B = \{x + y : x \in A \text{ e } y \in B\} \subset A.$$

Notemos que, se A é mais forte do que B, então A é mais forte do que $B \cup \{0\}$. Recordemos também que um F-espaço é um espaço vetorial topológico cuja topologia é induzida por uma métrica completa e invariante por translações.

Teorema 2.1 *Sejam $\alpha \geq \aleph_0$ um número cardinal e V um F-espaço. Sejam também A e B subconjuntos de V tais que A é α-lineável e B é 1-lineável. Se $A \cap B = \varnothing$ e A é mais forte do que B, então A não é (α, β)-espaçável, independentemente do número cardinal β.*

Demonstração: Seja $d \colon V \times V \to \mathbb{R}$ uma métrica completa e invariante por translações que induza a topologia de V. Como B é 1-lineável, existe $v \in V \setminus \{0\}$ tal que

$$\mathbb{K}v \setminus \{0\} \subset B.$$

Como A é α-lineável, existem um conjunto Γ de cardinalidade α e um conjunto linearmente independente $\{v_a\}_{a\in\Gamma} \subset V$ tal que

$$E \setminus \{0\} \subset A,$$

onde $E = \operatorname{span}\{v_a\}_{a\in\Gamma}$. Fixemos um subconjunto infinito e enumerável $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Gamma$. Fixado $n \in \mathbb{N}$, segue da continuidade da multiplicação por escalar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_n > 0$ tal que

$$d(sv_{a_n}, 0v_{a_n}) < \varepsilon, \qquad \text{sempre que } |s| < \delta_n.$$

Em particular, para $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, se $s = \dfrac{\delta_n}{2}$, então

$$d\left(\frac{\delta_n}{2} v_{a_n}, 0\right) < \frac{1}{n}.$$

Dado $b \in \Gamma$, seja $u_b := t_b v_b + v$, onde

$$t_b = \begin{cases} \dfrac{\delta_n}{2}, & \text{se } b = a_n \text{ para algum } n, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $A + B \subset A$, inferimos que $u_b \in A$ para todo $b \in \Gamma$. Como $A \cap B = \varnothing$, é claro que $\{u_b\}_{b\in\Gamma}$ é linearmente independente. Assim, se

$$M := \operatorname{span}\{u_b\}_{b\in\Gamma}$$

então $\dim(M) = \alpha$. Vejamos que $M \setminus \{0\} \subset A$. Dado $w \in M \setminus \{0\}$, sejam $N \in \mathbb{N}$, $(c_1, ..., c_N) \in \mathbb{K}^N \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ e $b_1, \ldots, b_N \in \Gamma$ tais que

$$w = \sum_{j=1}^{N} c_j u_{b_j} = \sum_{j=1}^{N} c_j (t_{b_j} v_{b_j} + v) = \sum_{j=1}^{N} (c_j t_{b_j} v_{b_j} + c_j v) = \sum_{j=1}^{N} c_j t_{b_j} v_{b_j} + \sum_{j=1}^{N} c_j v$$

Como $\{v_b\}_{b\in\Gamma}$ é linearmente independente e $(c_1, ..., c_N) \neq (0, ..., 0)$, obtemos

$$\sum_{j=1}^{N} c_j t_{b_j} v_{b_j} \in E \setminus \{0\} \subset A \qquad \text{e} \qquad \sum_{j=1}^{N} c_j v \in \mathbb{K}v \subset B \cup \{0\}.$$

Logo,

$$w \in A + (B \cup \{0\}) \subset A$$

e $M \setminus \{0\} \subset A$. Agora, dado $\varepsilon > 0$, seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Como d é uma métrica invariante por translações, temos

$$\begin{aligned} d(u_{a_n}, v) &= d(t_{a_n} v_{a_n} + v, v) \\ &= d(t_{a_n} v_{a_n} + v - v, v - v) \\ &= d(t_{a_n} v_{a_n}, 0) \\ &= d\left(\frac{\delta_n}{2} v_{a_n}, 0\right) \\ &< \frac{1}{n} < \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, $u_{a_n} \to v$ e, portanto, $v \in \overline{M}$. Entretanto, como $v \notin A$, concluímos que

$$\overline{M} \not\subset A \cup \{0\}$$

e, sendo assim, A não é (α, β)-espaçável, independentemente do cardinal $\beta \geq \alpha$. ■

Corolário 2.2 *Sejam $\alpha \geq \aleph_0$ e β números cardinais, X um espaço de Banach ou um espaço p-Banach $(p > 0)$ e Y um subespaço não trivial de X. Se $X \setminus Y$ é α-lineável, então $X \setminus Y$ não é (α, β)-espaçável.*

Demonstração: Façamos $A = X \setminus Y$ e $B = Y$. Então A é α-lineável, B é 1-lineável, $A + B \subset A$ e $A \cap B = \varnothing$ e, nestas condições, o resultado segue do Teorema 2.1. ■

Sabemos de [9] que o conjunto $\mathcal{ND}\,[0,1]$ das funções contínuas $f\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}$ que não são diferenciáveis em nenhum ponto é $\mathfrak{c}$-espaçável em $\mathcal{C}\,[0,1]$. A seguinte consequência do resultado anterior mostra que tal conjunto não é $(\alpha,\mathfrak{c})$-espaçável, independentemente do cardinal $\alpha \geq \aleph_0$.

Corolário 2.3 *Sejam $\alpha \geq \aleph_0$ e β um número cardinal. O conjunto $\mathcal{ND}[0,1]$ não é (α,β)-espaçável.*

Demonstração: Fazendo $A = \mathcal{ND}[0,1]$ e $B = \{f \in C[0,1] : f \text{ é diferenciável}\}$, notemos que,

$$A \cap B = \varnothing \qquad \text{e} \qquad A + B \subset A.$$

Se $\aleph_0 \leq \alpha \leq \mathfrak{c}$, como A é α-lineável, o resultado segue do Teorema 2.1. Se $\alpha > \mathfrak{c}$ o resultado é imediato. ■

Seguindo as linhas de [3], mostraremos agora que $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$, com $p > 0$, é $\mathfrak{c}$-espaçável em $L_p[0,1]$.

Teorema 2.4 *$L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ é espaçável para todo $p > 0$.*

Demonstração: Vamos primeiro considerar a seguinte representação do intervalo semiaberto $[0,1)$ como uma união disjunta de intervalos:

$$[0,1) = [0, 1-1/2) \cup [1-1/2, 1-1/4) \cup [1-1/4, 1-1/8) \cup \cdots = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

onde $I_n := [a_n, b_n) = [1 - 1/2^{n-1}, 1 - 1/2^n)$. Notemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in I_n$, existe um único $t_{x,n} \in [0,1)$ tal que

$$x = (1 - t_{x,n})\, a_n + x_n b_n.$$

Agora, dado $p > 0$, fixando $f \in L_p\,[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q\,[0,1]$, definamos a sequência de funções $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, com $f_n\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}$, da seguinte forma:

$$f_n\,(x) = \begin{cases} f\,(t_{x,n})\,, & \text{se } x \in I_n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A ideia geométrica é reproduzir o gráfico de f no intervalo I_n. Notemos que, por construção,

$$\|f_n\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p}\,, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Ademais, as funções f_n são linearmente independentes (pois possuem suportes disjuntos) e

$$\operatorname{span}\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L_p\,[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q\,[0,1]\,.$$

Isto nos diz, em particular, que $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ é $\aleph_0$-lineável. Para conseguir o que queremos, a estratégia é definir um operador linear contínuo e injetivo $T\colon F \to L_p[0,1]$, em que F é um espaço de Banach, tal que $\overline{T(F)} \cap L_q[0,1] = \{0\}$ para todo $q > p$. Isso deve provar que $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ é espaçável. De fato, se $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s$, onde

$$s = \begin{cases} 1, & \text{se } p \geq 1, \\ p, & \text{se } 0 < p < 1, \end{cases}$$

então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha_n f_n\|_{L_p}^s = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^s \|f_n\|_{L_p}^s \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^s \|f\|_{L_p}^s = \|f\|_{L_p}^s \left\|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_s^s < \infty.$$

Como $L_p[0,1]$ é um espaço de Banach para $p \geq 1$ e um espaço quasi-Banach para $0 < p < 1$, segue que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n \in L_p[0,1]$ e, portanto,

$$\begin{aligned} T\colon \ell_s &\to L_p[0,1] \\ (\alpha_j)_{j=1}^{\infty} &\mapsto T\left((\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n \end{aligned}$$

é uma aplicação bem definida e claramente linear. Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n = 0$. Dado $k \in \mathbb{N}$, se $x \in I_k$, então

$$\alpha_k f_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n(x) = 0$$

e, como cada $f_k \neq 0$, concluímos que $\alpha_k = 0$. Portanto, o operador linear T é injetor e $T(\ell_s)$ é um subespaço vetorial de $L_p[0,1]$ tal que

$$\dim(T(\ell_s)) = \dim(\ell_s) = \mathfrak{c}.$$

Notemos que, neste momento, fica estabelecido que $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ é $\mathfrak{c}$-lineável. Seja $\overline{T(\ell_s)}$ o fecho de $T(\ell_s)$ em $L_p[0,1]$. Provaremos que $\overline{T(\ell_s)} \cap L_q[0,1] = \{0\}$ para todo $q > p$. De fato, seja $g \in \overline{T(\ell_s)} \setminus \{0\}$. Então, existem sequências $(\alpha_i^{(k)})_{i=1}^{\infty} \in \ell_s$ $(k \in \mathbb{N})$ tais que

$$g = \lim_{k\to\infty} T((\alpha_i^{(k)})_{i=1}^{\infty}) \qquad \text{em } L_p[0,1].$$

Assim,

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(k)} f_n(x) - g(x)\right|^p dx = 0.$$

Em particular, isso implica em

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{1/2} \left|\alpha_1^{(k)} f_1(x) - g(x)\right|^p dx = 0.$$

A menos de uma subsequência, obtemos

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_1^{(k)} f_1(x) = g(x), \qquad \text{para quase todo } x \in [0, 1/2).$$

Claramente, o conjunto $S = \{x \in [0, 1/2) : f_1(x) \neq 0\}$ não possui medida nula. Deste modo, dado $x' \in S$, obtemos

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_1^{(k)} = \frac{g(x')}{f_1(x')} = \eta \neq 0,$$

o que nos permite concluir que

$$g(x) = \eta f_1(x) \qquad \text{para quase todo } x \in [0, 1/2),$$

o que mostra que $g \notin L_q[0, 1/2]$ (independentemente do $q > p$), finalizando a prova. ■

Como consequência do Teorema 2.4, se considerarmos $X = L_p[0, 1]$ e $Y = \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$ no Corolário 2.2, obtemos o seguinte:

Corolário 2.5 *Sejam $\alpha \geq \aleph_0$ e β um número cardinal. Para $p > 0$, o conjunto $L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$ não é (α, β)-espaçável.*

Apenas por uma questão de curiosidade, apresentamos uma demonstração construtiva do Corolário 2.5.

Teorema 2.6 *Seja $p > 0$. O conjunto $L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$ não é $(\aleph_0, \mathfrak{c})$-espaçável.*

Demonstração: Seja

$$[1/2, 1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

onde $I_n = [a_n, b_n)$, $a_n = 1 - 1/2^n$ e $b_n = 1 - 1/2^{n+1}$. Para cada $x \in I_n$, existe uma única $t_{x,n} \in [0, 1)$ tal que

$$x = (1 - t_{x,n})\, a_n + t_{x,n} b_n.$$

Seja $f \in L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0, 1/2), \\ f(t_{x,n}), & \text{se } x \in I_n, \\ 0, & \text{se } x \notin I_n \cup [0, 1/2). \end{cases}$$

É fácil observar que $f_n \in L_p[0, 1]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, se $q > p$, denotando o comprimento do intervalo I_n por $|I_n|$, $n \in \mathbb{N}$, e fazendo uma mudança de variáveis, concluímos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_n|^q \, dx &= \int_{[0,1/2)} |f_n|^q \, dx + \int_{[1/2,1]} |f_n|^q \, dx = \frac{1}{2} + \int_{I_n} |f_n|^q \, dx \\ &= \frac{1}{2} + |I_n| \cdot \int_0^1 |f|^q \, dx = \infty. \end{aligned}$$

Assim, $f_n \in L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\{f_1, f_2, \ldots\}$ é linearmente independente. De fato, sejam $a_1, a_2, \ldots, a_m$ escalares tais que

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_m f_m = 0.$$

Para cada $k = 1, \ldots, m$, seja $x_k \in I_k$ tal que $f_k(x_k) \neq 0$. Por isso,

$$a_k f_k(x_k) = (a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_m f_m)(x_k) = 0$$

e assim $a_k = 0$. É também simples ver que

$$W \setminus \{0\} \subset L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1],$$

onde $W = \operatorname{span}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Finalmente, denotando por $\chi_{[0,1/2)}$ a função característica em $[0, 1/2)$, obtemos

$$\left\| f_n - \chi_{[0,1/2)} \right\|_p^p = \int_{[0,1]} \left| f_n \chi_{[1/2,1)} \right|^p = \int_{I_n} |f_n|^p = |I_n| \cdot \int_0^1 |f|^p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo, W não pode ser um subespaço fechado contido em $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$, pois $\chi_{[0,1/2)} \in \overline{W}$ e, como $\chi_{[0,1/2)} \notin L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$, a prova segue. ■

Observação 2.7 *Notemos que, se V é um espaço vetorial topológico e A é um subconjunto próprio de V que é densamente α-lineável, então A não pode ser (α, β)-espaçável para qualquer $\beta \geq \alpha$.*

Dizemos que um subespaço F de um espaço de Banach X é **quasicomplementado** em X se é fechado e existe um subespaço vetorial fechado G de X tal que $F \cap G = \{0\}$ e $F+G$ é denso em X. Em [12], Lindestrauss perguntou se c_0 é ou não quasicomplementado em ℓ_∞ e, em [16, Theorem 1.7], Rosenthal respondeu afirmativamente à este questionamento. Mais geralmente, todo subespaço separável de ℓ_∞ é quasicomplementado em ℓ_∞. Portanto, se $F = c_0$ ou c, então $\ell_\infty \setminus F$ é $\mathfrak{c}$-espaçável.

O próximo resultado foi extraído de [15, Proposition 1.5].

Teorema 2.8 (Papathanasiou) *Seja X um subespaço vetorial denso de ℓ_∞. Então*

$$\dim(X) = \mathfrak{c}.$$

Demonstração: Notemos que, se $\overline{X} = \ell_\infty$, então X deve ser um subespaço de dimensão infinita. Assim,

$$\aleph_0 \leq \dim(X) \leq \dim \ell_\infty = \mathfrak{c}. \tag{2.1}$$

Seja

$$H = \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \{0,1\} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Para fins de contradição, suponhamos que H seja enumerável e consideremos uma enumeração

$$H = \left\{ x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots \right\}$$

de H, onde $x^{(k)} = (x_{k,n})_{n=1}^\infty$. Se $x = (x_{n,n})_{n=1}^\infty$, então $x \neq x^{(k)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e, no entanto, $x \in H$. Logo, H é não-enumerável. Considerando as funções $f, g \colon H \to [0,1]$ definidas, respectivamente, por

$$f\left((x_n)_{n=1}^\infty\right) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{2^n} \qquad \text{e} \qquad g\left((x_n)_{n=1}^\infty\right) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{10^n},$$

observamos, sem dificuldades que f é sobrejetora e g é injetora. Logo, do Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder,

$$\operatorname{card}(H) = \operatorname{card}([0,1]) = \mathfrak{c}.$$

É fácil ver que, se $x, y \in H$ e $x \neq y$, então $\|x - y\|_\infty = 1$. Sendo assim, as bolas abertas $B(x, 1/2) \subset \ell_\infty$, com $x \in H$, são duas a duas disjuntas. Consequentemente, se $\mathcal{B}$ é a coleção destas bolas, então

$$\operatorname{card}(\mathcal{B}) = \operatorname{card}(H) = \mathfrak{c}.$$

Como todo subconjunto denso de ℓ_∞ deverá ter pelo menos um elemento em cada bola de $\mathcal{B}$, concluímos que, se E é um subconjunto denso de ℓ_∞, então

$$\operatorname{card}(E) \geq \mathfrak{c}. \tag{2.2}$$

Para fins de contradição, suponhamos que $\dim(X) < \mathfrak{c}$. Sejam $C = \{v_i : i \in I\}$ uma base normalizada de X e D a coleção das combinações lineares finitas de elementos de C com coeficientes em $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$. Sejam $a \in \ell_\infty$ e $\varepsilon > 0$. Segue da densidade de X em ℓ_∞ que existe $x \in X$ tal que

$$\|x - a\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_n \in I$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$x = \alpha_1 v_{i_1} + \cdots + \alpha_n v_{i_n}.$$

Da densidade de $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ em $\mathbb{K}$ concluímos que, para todo $j = 1, \ldots, n$, existe $\beta_j \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ tal que

$$|\alpha_j - \beta_j| < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Daí, se $x_0 = \beta_1 v_{i_1} + \cdots + \beta_n v_{i_n}$, então $x_0 \in D$ e

$$\begin{aligned} \|x - x_0\|_\infty &= \|(\alpha_1 - \beta_1) v_{i_1} + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) v_{i_n}\|_\infty \\ &\leq |\alpha_1 - \beta_1| \|v_{i_1}\|_\infty + \cdots + |\alpha_n - \beta_n| \|v_{i_n}\|_n \\ &= |\alpha_1 - \beta_1| + \cdots + |\alpha_n - \beta_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2n} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\|x_0 - a\|_\infty \leq \|x - x_0\|_\infty + \|x - a\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

isto é, D é denso em ℓ_∞. Agora, para todo $n \in \mathbb{N}$ seja D_n a coleção de todas as combinações lineares de n elementos distintos de C com coeficientes em $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$. Então a correspondência

$$\alpha_1 v_{i_1} + \cdots + \alpha_n v_{i_n} \in D_n \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}}^n \times I^n$$

é, claramente, uma bijeção e, portanto,

$$\operatorname{card} D_n = \operatorname{card}(\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}^n \times I^n) = \operatorname{card}(\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}^n) \cdot \operatorname{card}(I^n) = \aleph_0 \cdot \operatorname{card}(I) = \operatorname{card}(I).$$

Agora, uma vez que

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

inferimos que

$$\operatorname{card}(D) = \operatorname{card}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) \leq \operatorname{card}\left(\prod_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \operatorname{card}\left(I^{\aleph_0}\right) = \operatorname{card}(I) < \mathfrak{c},$$

contrariando (2.2). Logo,

$$\dim(X) \geq \mathfrak{c}. \tag{2.3}$$

De (2.1) e (2.3), o resultado segue. ∎

Como consequência imediata do Teorema 2.8, do Corolário 2.2 e do fato de c e c_0 serem quasicomplementados, temos:

Corolário 2.9 *Se $F = c_0$ ou $F = c$, então $\ell_\infty \setminus F$ não é (α, β)-espaçável se $\alpha \geq \aleph_0$.*

2.2 Conjuntos (α, β)-espaçáveis: resultados positivos

Sejam V um espaço vetorial e W um subespaço de V. A **codimensão** de W em V, que representamos simbolicamente por $\operatorname{codim}(W)$, é a dimensão do espaço quociente V/W, isto é,

$$\operatorname{codim}(W) = \dim(V/W).$$

Dado $v \in V$, seja $\overline{v} = \{x \in V : x - v \in W\} \in V/W$. Vejamos que, se $\{x_i : i \in I\} \subset V$ é tal que $\{\overline{x}_i : i \in I\}$ é uma base de V/W e $\{w_j : j \in J\}$ é uma base de W, então $B = \{x_i : i \in I\} \cup \{w_j : j \in J\}$ é uma base de V.

• B gera V. Dado $v \in V$, sejam $m \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_m \in I$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ tais que

$$\overline{v} = \sum_{r=1}^{m} \alpha_r \overline{x}_{i_r} = \overline{\sum_{r=1}^{m} \alpha_r x_{i_r}}.$$

Então, $v - \sum_{r=1}^{m} \alpha_r x_{i_r} \in W$ e, consequentemente, existem $n \in \mathbb{N}$, $j_1, \ldots, j_n \in J$ e $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v - \sum_{r=1}^{m} \alpha_r x_{i_r} = \sum_{s=1}^{n} \beta_s w_{j_s}.$$

Logo,

$$v = \sum_{r=1}^{m} \alpha_r x_{i_r} + \sum_{s=1}^{n} \beta_s w_{j_s} \in \operatorname{span}(B).$$

• B é linearmente independente. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_m \in I$, $j_1, \ldots, j_n \in J$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\sum_{r=1}^{m} \alpha_r x_{i_r} + \sum_{s=1}^{n} \beta_s w_{j_s} = 0.$$

Então

$$\overline{0} = \overline{\sum_{r=1}^{m} \alpha_r x_{i_r} + \sum_{s=1}^{n} \beta_s w_{j_s}}$$

$$= \sum_{r=1}^{m} \alpha_r \overline{x}_{i_r} + \sum_{s=1}^{n} \beta_s \overline{w}_{j_s}$$
$$= \sum_{r=1}^{m} \alpha_r \overline{x}_{i_r}$$

e, como $\{\overline{x}_{i_1}, \ldots, \overline{x}_{i_m}\}$ é, sabidamente, linearmente independente, concluímos que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$. Logo,

$$\sum_{s=1}^{n} \beta_s w_{j_s} = 0$$

e, como $\{w_{j_1}, \ldots, w_{j_n}\}$ também é, sabidamente, linearmente independente, inferimos que $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$.

Seja $M = \operatorname{span}\{x_i : i \in I\}$. Então

$$\dim(M) = \operatorname{codim}(W) \qquad \text{e} \qquad V = W + M.$$

Seja $v \in M \cap W$. Então existem $m, n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_m \in I$, $j_1, \ldots, j_n \in J$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\sum_{r=1}^{m} \alpha_r x_{i_r} = v = \sum_{s=1}^{n} \beta_s w_{j_s}.$$

Daqui,

$$\sum_{r=1}^{m} \alpha_r x_{i_r} - \sum_{s=1}^{n} \beta_s w_{j_s} = 0$$

e, consequentemente, do que estabelecemos acima, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$, de onde extraímos que $v = 0$ e que

$$V = W \oplus M.$$

Assim, a codimensão de um subespaço pode ser entendida como sendo a cardinalidade daquilo que foi preciso acrescentar a uma base do subespaço para estendê-la a uma base do espaço.

Dizemos que um espaço vetorial topológico V é de Fréchet se é localmente convexo, metrizável e completo. Um resultado clássico devido a Wilansky e Kalton afirma que, se W é um subespaço fechado de um espaço de Fréchet V, então $V \setminus W$ é espaçável se, e somente se, $\operatorname{codim}(W) \geq \aleph_0$. Wilansky estabeleceu o resultado para espaços de Banach e Kalton observou que o mesmo argumento vale para espaços de Fréchet (ver [17, p. 12]). Este resultado é apresentado em [10, Theorem 2.2] da seguinte forma:

Teorema 2.10 *Se W é um subespaço vetorial fechado de um espaço de Fréchet V, então $V \setminus W$ é espaçável se, e somente se,* $\operatorname{codim}(W) \geq \aleph_0$.

Nesta seção, apresentaremos uma extensão desse resultado. Mostraremos que, se W é um subespaço fechado de um espaço de Banach V que possui uma sequência básica regular e $V \setminus W$ é $\aleph_0$-lineável, então

$$V \setminus W \text{ é } (\alpha, \beta)\text{-espaçável se, e somente se, } \alpha < \aleph_0.$$

Em particular, isto assegura que $\ell_\infty \setminus c_0$ e $\ell_\infty \setminus c$ são $(\alpha, \mathfrak{c})$-espaçáveis se, e somente se, $\alpha < \aleph_0$. Começamos lembrando alguns resultados referentes a base de Schauder e sequência básica.

Definição 2.11 *Uma sequência* $(x_n)_{n=1}^\infty$ *em um espaço de Banach* X *é uma* **base de Schauder** *para* X *se para cada* $x \in X$ *existe uma única sequência de escalares* $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ *tal que* $x = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n x_n$*. Mais geralmente, uma sequência* $(x_n)_{n=1}^\infty$ *em um espaço de Banach é uma* **sequência básica** *se é uma base de Schauder para* $\overline{\mathrm{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$*. Uma sequência básica* $(x_n)_{n=1}^\infty$ *em um espaço de Banach é dita* **regular** *se* $\inf \{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\} > 0$*.*

É imediato que, se $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência básica em um espaço de Banach X, então $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente.

Agora, apresentaremos alguns lemas que serão utilizados em resultados subsequentes.

Lema 2.12 *Sejam* V *um espaço de Banach de dimensão infinita e* W *um subespaço de* V *de dimensão finita. Então, dado* $\varepsilon \in (0, 1)$*, existe* $v \in V$ *tal que* $\|v\| = 1$ *e*

$$\|w + \lambda v\| \geq (1 - \varepsilon) \|w\|$$

para todo $(\lambda, w) \in \mathbb{K} \times W$*.*

Demonstração: Seja $\mathbb{S}_W$ a esfera unitária de W. Por se tratar de um subconjunto fechado e limitado de um espaço vetorial normado de dimensão finita, $\mathbb{S}_W$ é compacta. Assim, dado $\varepsilon \in (0, 1)$, podemos encontrar um conjunto finito $\{w_1, ..., w_r\} \subset \mathbb{S}_W$ tal que

$$\mathbb{S}_W \subset \bigcup_{k=1}^{r} B_\varepsilon(w_k),$$

onde, para todo $k = 1, \ldots, r$, $B_\varepsilon(w_k)$ é a bola aberta de centro w_k e raio ε. Seja V' o dual topológico de V. Segue do Teorema de Hahn-Banach que existem $w'_1, ..., w'_r \in V'$ tais que, para todo $k = 1, ..., r$, $\|w'_k\| = 1$ e $w'_k(w_k) = 1$. Como V tem dimensão infinita, $\bigcap_{k=1}^r \ker(w'_k)$ é um subespaço não-trivial de V. Fixemos, um vetor unitário $v \in \bigcap_{k=1}^r \ker(w'_k)$. Dado $w \in W \setminus \{0\}$, existe $k \in \{1, ..., r\}$ tal que

$$\left\| \frac{w}{\|w\|} - w_k \right\| < \varepsilon.$$

Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\|w + \lambda v\|}{\|w\|} &= \left\| \frac{w}{\|w\|} + \frac{\lambda v}{\|v\|} \right\| \\
&= \left\| \left(\frac{\lambda v}{\|w\|} + w_k \right) + \left(\frac{w}{\|w\|} - w_k \right) \right\| \\
&\geq \left\| \frac{\lambda v}{\|w\|} + w_k \right\| - \left\| \frac{w}{\|w\|} - w_k \right\| \\
&> \left\| \frac{\lambda v}{\|w\|} + w_k \right\| - \varepsilon
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|w_k'\| \left\| \frac{\lambda v}{\|w\|} + w_k \right\| - \varepsilon \\
&\geq \left| w_k' \left(w_k + \frac{\lambda v}{\|w\|} \right) \right| - \varepsilon \\
&= \left| w_k'(w_k) + \frac{\lambda}{\|w\|} w_k'(v) \right| - \varepsilon \\
&= |w_k' (w_k)| - \varepsilon \\
&= 1 - \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\|w + \lambda v\| \geq (1 - \varepsilon) \|w\| ,$$

para todo $w \in W \setminus \{0\}$ e todo $\lambda \in \mathbb{K}$. O caso $w = 0$ é imediato. ■

Lema 2.13 *Seja $(\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty}$ a sequência definida por*

$$\varepsilon_k = \left(\frac{10^k}{9} + \sum_{j=0}^{k-1} 10^j \right)^{-1} .$$

Então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - \varepsilon_k)^{-1} = 2 - \frac{1}{10^n}.$$

Demonstração: Notemos que, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_k &= \frac{1}{\dfrac{10^k}{9} + 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}} \\
&= \frac{1}{\dfrac{9 + 9 \cdot 10 + \cdots + 9 \cdot 10^{k-1} + 10^k}{9}} \\
&= \frac{9}{9 + 9 \cdot 10 + \cdots + 9 \cdot 10^{k-1} + 10^k}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$1 - \varepsilon_1 = 1 - \frac{9}{19} = \frac{10}{19} \tag{2.4}$$

e, se $k \geq 2$, então

$$
\begin{aligned}
1 - \varepsilon_k &= 1 - \frac{9}{9 + 9 \cdot 10 + \cdots + 9 \cdot 10^{k-1} + 10^k} \\
&= \frac{9 + 9 \cdot 10 + \cdots + 9 \cdot 10^{k-1} + 10^k - 9}{9 + 9 \cdot 10 + \cdots + 9 \cdot 10^{k-1} + 10^k} \\
&= \frac{9 \cdot 10 + \cdots + 9 \cdot 10^{k-1} + 10^k}{9 + 9 \cdot 10 + \cdots + 9 \cdot 10^{k-1} + 10^k}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\varepsilon_k} &= \frac{9+9\cdot 10+\cdots+9\cdot 10^{k-1}+10^k}{9\cdot 10+9\cdot 10^2+\cdots+9\cdot 10^{k-1}+10^k}\\ &= \frac{10^k+9\cdot 10^{k-1}+\cdots+9\cdot 10+9}{10^k+9\cdot 10^{k-1}+\cdots+9\cdot 10},\end{aligned}$$

sempre que $k \geq 2$. A fim de estabelecermos a igualdade desejada, mostraremos que, equivalentemente,

$$\prod_{k=1}^{n}(1-\varepsilon_k)^{-1} = 1+\frac{9}{10}+\cdots+\frac{9}{10^n}, \tag{2.5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$, segue de (2.4) que

$$(1-\varepsilon_1)^{-1} = \frac{19}{10} = 1+\frac{9}{10}.$$

Supondo que (2.5) vale para um certo n, observamos que

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}(1-\varepsilon_k)^{-1} &= (1-\varepsilon_{n+1})^{-1}\prod_{k=1}^{n}(1-\varepsilon_k)^{-1}\\ &= \frac{10^{n+1}+9\cdot 10^n+\cdots+9\cdot 10+9}{10^{n+1}+9\cdot 10^n+\cdots+9\cdot 10}\left(1+\frac{9}{10}+\cdots+\frac{1}{10^n}\right)\\ &= \frac{10^{n+1}+9\cdot 10^n+\cdots+9\cdot 10+9}{10(10^n+9\cdot 10^n+\cdots+9\cdot 10+9)}\cdot\frac{10^n+9\cdot 10^{n-1}+\cdots+9\cdot 10+9}{10^n}\\ &= \frac{10^{n+1}+9\cdot 10^n+\cdots+9\cdot 10+9}{10\cdot 10^n}\\ &= \frac{10^{n+1}+9\cdot 10^n+\cdots+9\cdot 10+9}{10^{n+1}}\\ &= 1+\frac{9}{10}+\cdots+\frac{9}{10^n}+\frac{9}{10^{n+1}}\end{aligned}$$

e, portanto, a igualdade é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Lema 2.14 *Sejam V um espaço de Banach de dimensão infinita e $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ um conjunto linearmente independente de vetores normados. Então V contém uma sequência básica $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que $v_k = u_k$ para todo $k = 1, ..., n$.*

Demonstração: Seja $W_1 = \text{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$. Definamos $u_k = v_k$ para todo $k = 1, \ldots, n$. Seja $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ como no Lema 2.13. Segue do Lema 2.12 que existe $u_{n+1} \in V$ tal que $\|u_{n+1}\| = 1$ e

$$\|w+\lambda u_{n+1}\| \geq (1-\varepsilon_1)\,\|w\|$$

para todo $w \in W_1$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, isto é,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k u_k+\lambda u_{n+1}\right\| \geq (1-\varepsilon_1)\left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k u_k\right\|$$

sempre que $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Definamos, $W_2 = \text{span}\{u_1, \ldots, u_{n+1}\}$. À luz novamente do Lema 2.12, existe $u_{n+2} \in V$ tal que $\|u_{n+2}\| = 1$ e

$$\|w+\lambda u_{n+2}\| \geq (1-\varepsilon_2)\,\|w\|$$

para todo $w \in W_2$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, isto é,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k u_k + \lambda u_{n+2}\right\| \geq (1-\varepsilon_2)\left\|\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k u_k\right\|$$

sempre que $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$. Repetindo este processo, conseguimos uma sequência $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ em V, com $\|u_k\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $N \geq 1$ e qualquer sequência $(\lambda_k)_{k=1}^{n+N}$ de escalares, temos

$$\left\|\sum_{k=1}^{n+N} \lambda_k u_k\right\| \geq (1-\varepsilon_N)\left\|\sum_{k=1}^{n+N-1} \lambda_k u_k\right\|. \tag{2.6}$$

Notemos que, aplicando a desigualdade (2.6) recursivamente, inferimos que, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n+N-1} \lambda_k u_k\right\| \leq \prod_{k=1}^{m+1}(1-\varepsilon_{N+k-1})^{-1}\left\|\sum_{k=1}^{n+N+m} \lambda_k u_k\right\| \leq 2\left\|\sum_{k=1}^{n+N+m} \lambda_k u_k\right\|,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Em particular,

$$\left\|\sum_{k=1}^{s} \lambda_k u_k\right\| \leq 2\left\|\sum_{k=1}^{t} \lambda_k u_k\right\|, \tag{2.7}$$

para todo $t \geq s \geq n$. Agora, suponhamos que $s \leq r \leq n$. Como a correspondência

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k \mapsto \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|$$

define uma norma em W_1 e, duas normas são sempre equivalentes em espaços de dimensão finita, existem $L, M > 0$ tais que

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k\right\| \leq L\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \leq M\left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k\right\|. \tag{2.8}$$

Portanto,

$$\left\|\sum_{k=1}^{s} \lambda_k u_k\right\| \leq L\sum_{k=1}^{s} |\lambda_k| \leq L\sum_{k=1}^{r} |\lambda_k| \leq M\left\|\sum_{k=1}^{r} \lambda_k u_k\right\|. \tag{2.9}$$

Combinando as desigualdades (2.8) e (2.9), obtemos

$$\left\|\sum_{k=1}^{s} \lambda_k u_k\right\| \leq 2M\left\|\sum_{k=1}^{t} \lambda_k u_k\right\|,$$

para todo $t \geq n$. Finalmente, por (2.7), (2.8) e (2.9), concluímos que, em geral, se $r, s \in \mathbb{N}$ são tais que $s \leq r$, temos

$$\left\|\sum_{k=1}^{s} \lambda_k u_k\right\| \leq C\left\|\sum_{k=1}^{r} \lambda_k u_k\right\|,$$

para uma certa constante C. Logo, do Critério de Banach-Grunblum (ver, por exemplo, [4, Teorema 10.3.13]), $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência básica. ■

Lema 2.15 *Seja* $\left(t^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ *uma sequência limitada em* ℓ_∞. *Então existem uma subsequência* $\left(t^{(n_k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ *de* $\left(t^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ *e* $t \in \ell_\infty$ *tal que*

$$\lim_{k\to\infty} t^{(n_k)} = t.$$

Demonstração: Seja $L > 0$ tal que

$$\left\|t^{(n)}\right\|_\infty \leq L \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

Fazendo $t^{(n)} = (t_j^{(n)})_{j=1}^{\infty}$, segue de (2.10) que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|t_1^{(n)}\right| \leq \left\|t^{(n)}\right\|_\infty \leq L$$

e, portanto, $(t_1^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência limitada de escalares. Sendo assim, existem um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 = \{n_{1,1} < n_{1,2} < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ e $t_1 \in \mathbb{K}$ tais que

$$\lim_{n\in\mathbb{N}_1} t_1^{(n)} = t_1.$$

Segue também de (2.10) que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|t_2^{(n)}\right| \leq \left\|t^{(n)}\right\|_\infty \leq L$$

e, portanto, $(t_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_1}$ é uma sequência limitada de escalares. Deste modo, existem um subconjunto infinito $\mathbb{N}_2 = \{n_{2,1} < n_{2,2} < \cdots\} \subset \mathbb{N}_1$ e $t_2 \in \mathbb{K}$ tais que

$$\lim_{n\in\mathbb{N}_2} t_2^{(n)} = t_2.$$

Prosseguindo deste modo, obtemos uma sequência $(\mathbb{N}_j)_{j=1}^{\infty}$ de subconjuntos infinitos de inteiros positivos e uma sequência $(t_j)_{j=1}^{\infty}$ de escalares tais que, para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{N}_{j+1} = \{n_{j+1,1} < n_{j+1,2} < \cdots\} \subset \{n_{j,1} < n_{j,2} < \cdots\} = \mathbb{N}_j$$

e

$$\lim_{n\in\mathbb{N}_j} t_j^{(n)} = t_j.$$

Seja $\mathbb{N}^* = \{n_{1,1} < n_{2,2} < n_{3,3} < \cdots\}$. Notemos que

$$\lim_{n\in\mathbb{N}^*} t_j^{(n)} = t_j.$$

Ademais, segue do Teorema da Conservação do Sinal que $|t_j| \leq L$ para todo j e, portanto, $t = (t_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty$. Como uma sequência em ℓ_∞ converge se, e somente se, converge coordenada a coordenada, segue que $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}^*} t^{(n)} = t$. ■

Para a conclusão do próximo resultado, lembremos que, se $T\colon X \to Y$ é um isomorfismo linear entre os espaços de Banach X e Y e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica de X, então $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica de Y (ver, por exemplo, [4, Teorema 10.3.11])

Lema 2.16 *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências em X tais que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é sequência básica e $\sum_{n=1}^{\infty}\|u_n\|<\infty$. Seja $y_n=x_n+u_n$. Suponhamos que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n = 0 \Leftrightarrow t_n = 0 \qquad \text{para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Então $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica.

Demonstração: Notemos que, dado $t\in\ell_\infty$,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n u_n\right\| &\le \sum_{n=1}^{\infty}\|t_n u_n\| = \sum_{n=1}^{\infty}|t_n|\,\|u_n\| \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty}\|t\|_\infty\|u_n\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|u_n\|\right)\|t\|_\infty<\infty. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Daí, sendo X um espaço de Banach, concluímos que a sequência $(t_nu_n)_{n=1}^{\infty}$ é somável e, portanto, é bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} S\colon \ell_\infty &\to X \\ t &\mapsto S(t)=\sum_{n=1}^{\infty} t_n u_n. \end{aligned}$$

É evidente que S é linear. Além disso, a desigualdade (2.11) assegura a continuidade de S. Seja $\left(t^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em ℓ_∞ tal que

$$\sup\left\{\left\|t^{(n)}\right\|_\infty : n\in\mathbb{N}\right\}<\infty$$

e, denotando $t^{(n)}=(t_k^{(n)})_{k=1}^{\infty}$, para todo $k\in\mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} t_k^{(n)} = 0. \tag{2.12}$$

A condição (2.12) assegura que $\lim_{n\to\infty} t^{(n)}=0$ e, portanto, da continuidade de S,

$$\lim_{n\to\infty} S\left(t^{(n)}\right)=0.$$

Sejam $E=\overline{\operatorname{span}\{x_n : n\in\mathbb{N}\}}$ e $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E' tal que, dados $m,n\in\mathbb{N}$, $f_n(x_m)=\delta_{m,n}$, (onde $\delta_{m,n}$ é o delta de Kronecher). Seja $x\in E$. Então existe uma única sequência $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ de escalares tal que

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k x_k.$$

Assim, dado $n\in\mathbb{N}$,

$$f_n(x)=f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k x_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k f_n(x_k)=\alpha_n.$$

Seja $a = \inf \|x_n\|$. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica regular, inferimos que $a > 0$ e, como $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ converge, deduzimos que $\alpha_n x_n \to 0$. Logo,

$$|\alpha_n| \, \|x_n\| = \|\alpha_n x_n\| \to 0$$

e, como

$$0 \leq |\alpha_n| = \frac{|\alpha_n| \, a}{a} \leq \frac{|\alpha_n| \, \|x_n\|}{a},$$

segue do Teorema do Confronto que $\alpha_n \to 0$. Assim, é bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} R\colon E &\to c_0 \\ x &\mapsto R(x) = (f_n(x))_{n=1}^{\infty} = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

É evidente que R é linear. Sejam $G(R)$ o gráfico de R e $(x, y) \in \overline{G(R)}$. Neste caso, existe uma sequência $(x_n, R(x_n))$ em $E \times c_0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, R(x_n)) = (x, y).$$

Como (relativamente à topologia produto) convergência em $E \times c_0$ implica em convergência coordenada a coordenada, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} R(x_n) = y.$$

Denotando $y = (y_k)_{k=1}^{\infty}$, segue da continuidade dos funcionais f_k e do fato de que convergência em c_0 implica em convergência coordenada a coordenada que

$$\begin{aligned} \alpha_k - y_k &= \alpha_k - \lim \alpha_k^{(n)} \\ &= f_k(x) - \lim f_k\left(x^{(n)}\right) \\ &= \lim \left[f_k(x) - f_k\left(x^{(n)}\right)\right] \\ &= \lim \left[f_k\left(x - x^{(n)}\right)\right] \\ &= \lim \left|f_k\left(x - x^{(n)}\right)\right| = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $R(x) = y$ e $(x, y) \in G(R)$. Logo, $G(R)$ é um subespaço fechado de $E \times c_0$ e, sendo assim, à luz do Teorema do Gráfico Fechado, o operador linear R é contínuo. Portanto, é também contínuo o operador linear

$$T = I + S \circ R.$$

Notemos que, dado $x \in E$,

$$\begin{aligned} T(x) &= x + S(R(x)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k + S\left((\alpha_k)_{k=1}^{\infty}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u_k \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (x_k + u_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k.$$

Segue da hipótese que

$$T(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k = 0 \Leftrightarrow \alpha_k = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

e, portanto, o operador T é injetor. Agora, seja $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E tal que $\|T(z_n)\| \to 0$. Para fins de contradição, suponhamos que exista $\varepsilon > 0$ tal que $\|z_n\| > \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos inicialmente que

$$\sup \{\|R(z_n)\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty. \tag{2.13}$$

Segue então do Lema 2.15 que, a menos de subsequência, podemos supor que existe $t \in \ell_\infty$ tal que

$$R(z_n) \to t. \tag{2.14}$$

Da continuidade de S segue, então, que

$$S(R(z_n)) \to S(t) \in X.$$

Assim,

$$z_n = T(z_n) - S(R(z_n)) \to -S(t) \tag{2.15}$$

e, consequentemente, $S(t) \in E$, $z_n + S(t) \to 0$ e, da continuidade de R,

$$R(z_n) + R(S(t)) = R(z_n + S(t)) \to 0 \tag{2.16}$$

em ℓ_∞. De (2.14) e (2.16) concluímos que

$$t + R(S(t)) = 0$$

de onde extraímos que

$$0 = S(t + R(S(t))) = S(t) + S(R(S(t))) = T(S(t)).$$

A injetividade de T assegura que

$$S(t) = 0. \tag{2.17}$$

De (2.15) e (2.17),

$$\lim z_n = 0,$$

contrariando a hipótese de que $\|z_n\| > \varepsilon$. Se

$$\sup \{\|R(z_n)\| : n \in \mathbb{N}\} = \infty,$$

a menos de subsequência, podemos supor

$$\lim \|R(z_n)\| = \infty,$$

considerar a sequência $\left(\|R(z_n)\|^{-1} z_n\right)_{n=1}^{\infty}$ e obter uma contradição similar. Logo, T é um isomorfismo sobre sua imagem e, como $T(x_n) = y_n$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica. ■

Agora, podemos partir para o resultado principal dessa seção.

Teorema 2.17 *Sejam V um espaço de Banach de dimensão infinita e W um subespaço vetorial fechado de V. Se* $\operatorname{codim}(W) \geq \aleph_0$*, então $V \setminus W$ é $(n, \mathfrak{c})$-espaçável, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Seja Z um subespaço de V tal que

$$\dim(Z) = n \qquad \text{e} \qquad Z \setminus \{0\} \subset V \setminus W.$$

Seja ainda $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de Z. Como W é fechado, o espaço quociente V/W é um espaço de Banach quando munido da norma

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{V/W} : V/W &\to \mathbb{R} \\ \overline{v} &\mapsto \|\overline{v}\|_{V/W} = \inf\{\|v - w\| : w \in W\}, \end{aligned}$$

onde $\overline{v}$ denota a classe de equivalência de $v \in V$. Seja $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência básica regular em W. Para todo $i = 1, \ldots, n$, seja

$$x_i = \frac{(v_i - y_i)}{\|\overline{v}_i\|_{V/W}}. \tag{2.18}$$

Vejamos que $\{\overline{x}_i, \ldots, \overline{x}_n\}$ é linearmente independente. Com efeito, sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{x}_i = 0.$$

Então

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\overline{\frac{v_i - y_i}{\|\overline{v}_i\|_{V/W}}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{\overline{v}_i - \overline{y}_i}{\|\overline{v}_i\|_{V/W}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\|\overline{v}_i\|_{V/W}} \overline{v}_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\|\overline{v}_i\|_{V/W}} \overline{y}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\|\overline{v}_i\|_{V/W}} \overline{v}_i \\ &= \overline{\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\|\overline{v}_i\|_{V/W}} v_i}. \end{aligned}$$

Isso implica que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\|\overline{v}_i\|_{V/W}} v_i \in W \cap Z = \{0\}$$

e, como $\{v_1, \ldots v_n\}$ é uma base de Z, concluímos que

$$\lambda_i = 0, \qquad \text{para todo } i = 1, \ldots, n.$$

Usando o Lema 2.14, obtemos uma sequência básica normalizada $(\overline{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ em V/W com $x_1,\dots,x_n$ como em (2.18). Como $\|\overline{x}_k\|_{V/W} := \inf\{\|x_k - w\| : w \in W\}$, para todo $k > n$, existe $w_k \in W$ tal que

$$\|x_k - w_k\| \leq \|\overline{x}_k\|_{V/W} + \frac{1}{2^k} = 1 + 2^{-k}.$$

Sejam

$$u_k := \begin{cases} \|\overline{v}_k\|_{V/W} x_k, & \text{se } k \leq n, \\ 2^{-k}(x_k - w_k), & \text{se } k > n, \end{cases}$$

e $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathbb{K}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(y_k + u_k) = 0. \tag{2.19}$$

Então, em particular

$$\lim_{k\to\infty} |a_k|\,\|y_k + u_k\| = 0. \tag{2.20}$$

Como $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência básica regular, existe um $L > 0$ tal que $\|y_k\| \geq L$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, se $k > n$, então

$$\|y_k + u_k\| \geq \|y_k\| - \|u_k\| \geq L - \frac{1}{2^k}\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} L > 0. \tag{2.21}$$

De (2.20) e (2.21) concluímos que

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0. \tag{2.22}$$

A desigualdade

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\|2^{-k}(x_k - u_k)\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k}(1 + 2^{-k}) < \infty \tag{2.23}$$

combinada com (2.22), nos permite concluir que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k$ converge absolutamente e, portanto, converge. Por conseguinte, de (2.19), obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k.$$

Consequentemente, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k \in W$. Assim,

$$\overline{0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{u}_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{u}_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \overline{u}_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \|\overline{v}_k\|_{V/W} \overline{x}_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k 2^{-k} \overline{x}_k$$

e, como $(\overline{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência básica em V/W, segue que

$$a_k = 0 \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{2.24}$$

Por (2.23) e (2.24) podemos invocar o Lema 2.16 para concluir que a sequência $(y_k + u_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência básica em V. Definindo $F = \overline{\operatorname{span}\{y_k + u_k\}_{k\in\mathbb{N}}}$, mostraremos que $F \setminus \{0\} \subset V \setminus W$. Se $v \in W \cap F$, então existem escalares c_k tais que

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(y_k + u_k)$$

e,

$$
\begin{aligned}
\overline{0} = \overline{v} &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\overline{y}_k + \overline{u}_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} c_k\overline{y}_k + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\overline{u}_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\|\overline{v}_k\|_{V/W}\, \overline{x}_k + 2^{-k}\overline{x_k - w_k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\|\overline{v}_k\|_{V/W}\, \overline{x}_k + 2^{-k}\overline{x}_k \right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \|\overline{v}_k\|_{V/W} + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k 2^{-k} \right) \overline{x}_k \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k \overline{x}_k
\end{aligned}
$$

onde,

$$
d_k := \begin{cases} c_k\|\overline{v}_k\|_{V/W}, & \text{se } k \leq n, \\ c_k 2^{-k}, & \text{se } k > n. \end{cases}
$$

Como $(\overline{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência básica em V/W, segue que $d_k = c_k = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e, portanto, $v = 0$. Assim, $W \cap F = \{0\}$, isto é,

$$
F \setminus \{0\} \subset V \setminus W
$$

Como, para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$
y_k + u_k = y_k + \|\overline{v}_k\|_{V/W} x_k = y_k + \|\overline{v}_k\|_{V/W} \frac{(v_k - y_k)}{\|\overline{v}_k\|_{V/W}} = y_k + v_k - y_k = v_k,
$$

inferimos que $Z \subset F$ e o resultado segue, pois $\dim(F) = \mathfrak{c}$. ■

O próximo resultado é consequência do Corolário 2.2 e do Teorema 2.17:

Corolário 2.18 *Se W é um subespaço fechado de um espaço de Banach V e* $\operatorname{codim}(W) \geq \aleph_0$*, então*

$$
V \setminus W \text{ é } (\alpha, \mathfrak{c})\text{-espaçável se, e somente se, } \alpha < \aleph_0.
$$

Demonstração: O Teorema 2.17 assegura que $V \setminus W$ é $(\alpha, \mathfrak{c})$-espaçável, para todo $\alpha < \aleph_0$. Por outro lado, o Corolário 2.2 garante que, se $\aleph_0 \leq \alpha \leq \mathfrak{c}$, então $V \setminus W$ não é $(\alpha, \mathfrak{c})$-espaçável. ■

Corolário 2.19 *Seja $F = c$ ou $F = c_0$. Então, $\ell_\infty \setminus F$ é $(\alpha, \mathfrak{c})$-espaçável se, e somente se, $\alpha < \aleph_0$.*

Demonstração: Os subespaços c_0 e c são ambos fechados e possuem codimensão infinita em ℓ_∞. Portanto, se pegarmos $V = \ell_\infty$ e $W = c_0$ ou c no Corolário 2.18, concluímos que tanto $\ell_\infty \setminus c$ quanto $\ell_\infty \setminus c_0$ são $(\alpha, \mathfrak{c})$-espaçáveis se, e somente se, $\alpha < \aleph_0$. ■

Alternativamente, o Corolário 2.19 pode ser obtido pela substituição do Corolário 2.2 pelo Corolário 2.9 na demonstração do Corolário 2.18.

O próximo resultado é uma consequência imediata do Teorema 2.17 e do fato de que $V \backslash W$ é pontualmente $\mathfrak{c}$-espaçável se, e somente se, é $(1, \mathfrak{c})$-espaçável (ver Observação 1.22).

Corolário 2.20 *Sejam V um espaço de Banach de dimensão infinita e W um subespaço vetorial fechado de V. Se* $\operatorname{codim}(W) \geq \aleph_0$*, então $V \setminus W$ é pontualmente $\mathfrak{c}$-espaçável.*

2.3 Lineabilidade densa

Esta seção é dedicada à investigação da noção de (α, β)-lineabilidade densa. Iniciamos apresentando um lema técnico que será utilizado para estabelecer um resultado devido a Bernal-González e Cabrera (ver [2, Theorem 2.5]).

Lema 2.21 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão infinita e W um subespaço de V. Então $V \setminus W$ é lineável se, e somente se,* $\operatorname{codim}(W) \geq \aleph_0$.

Demonstração: Se $V \setminus W$ é lineável, então existe um subespaço $M \subset (V \setminus W) \cup \{0\}$ tal que $\dim(M) \geq \aleph_0$. Seja $\{v_i : i \in I\}$ uma base de M. Como $M \cap W = \{0\}$, concluímos que $\overline{v}_i \neq \overline{0}$ para todo $i \in I$. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_n \in I$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\overline{0} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{v}_{i_j} = \overline{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_{i_j}}.$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_{i_j} \in M \cap W = \{0\},$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_{i_j} = 0$$

e, consequentemente, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Isto prova que $\{\overline{v}_i : i \in I\}$ é um subconjunto linearmente independente de V/W e, portanto,

$$\operatorname{codim}(W) = \dim(V/W) = \operatorname{card}(\{\overline{v}_i : i \in I\}) = \operatorname{card}(I) = \dim(M) \geq \aleph_0.$$

Reciprocamente, se $\operatorname{codim}(W) \geq \aleph_0$, então existe $M \subset V$ tal que $V = W \oplus M$, com $\dim(M) = \operatorname{codim}(W) \geq \aleph_0$. Como, neste caso, $M \subset (V \setminus W) \cup \{0\}$, concluímos que $V \setminus W$ é lineável. ■

Teorema 2.22 (Bernal-González–Cabrera) *Sejam V um espaço vetorial topológico metrizável separável e W um subespaço de V. Se* $\operatorname{codim}(W) \geq \aleph_0$*, então $V \backslash W$ é densamente $\aleph_0$-lineável.*

Demonstração: Sendo V um espaço vetorial topológico metrizável e separável, existe uma base enumerável de abertos $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para a topologia de V. À luz do Lema 2.21

extraímos que $V \setminus W$ é lineável. Deste modo, em particular, $W \subsetneq V$. Para fins de contradição, suponhamos que $\operatorname{int}(W) \neq \varnothing$. Neste caso, existem $y \in W$ e $r > 0$ tais que

$$B_r(y) \subset W.$$

Como V é um espaço vetorial topológico, a translação

$$\begin{aligned} A_{-y} \colon V &\to V \\ x &\mapsto x - y \end{aligned}$$

é um homeomorfismo e, portanto, uma aplicação aberta. Logo, $A_{-y}(B_r(y))$ é um aberto de V. É evidente que $0 \in A_{-y}(B_r(y))$. Seja $x \in V \setminus W$. Segue da continuidade da multiplicação por escalar que existe $\delta > 0$ tal que, se $|\lambda| < \delta$, então $\lambda x \in A_{-y}(B_r(y))$. Seja $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, com $|\lambda| < \delta$. Então,

$$y + \lambda x = A_y(\lambda x) \in A_y(A_{-y}(B_r(y))) = B_r(y).$$

No entanto, isto significa que

$$x = \lambda \frac{x}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}[(y + \lambda x) - y] \in W$$

o que é claramente uma contradição, visto que $x \in V \setminus W$. Portanto, $\operatorname{int}(W) = \varnothing$ e, consequentemente, não há nenhuma bola que esteja contida em W. Logo, toda bola aberta em V terá elementos de $V \setminus W$, isto é, $V \setminus W$ é denso em V.

Agora, como G_1 é aberto e $V \setminus W$ é denso em V, podemos escolher $x_1 \in G_1 \setminus W$. Uma vez que $\operatorname{codim}(W) \geq \aleph_0$, concluímos que $\operatorname{span}(W \cup \{x_1\}) \subsetneq V$ e, portanto, $\operatorname{int}(\operatorname{span}(W \cup \{x_1\})) = \varnothing$ e $V \setminus \operatorname{span}(W \cup \{x_1\})$ é denso em V. Como G_2 é aberto, a densidade de $V \setminus \operatorname{span}(W \cup \{x_1\})$ em V assegura que podemos escolher $x_2 \in G_2 \setminus \operatorname{span}(W \cup \{x_1\})$ e, como $\operatorname{codim}(W) \geq \aleph_0$, concluímos que $\operatorname{span}(W \cup \{x_1, x_2\}) \subsetneq V$, de onde segue que $\operatorname{int}(\operatorname{span}(W \cup \{x_1, x_2\})) = \varnothing$ e, por conseguinte, que $V \setminus \operatorname{span}(W \cup \{x_1, x_2\})$ é denso em V. Prosseguindo deste modo, obtemos uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$x_1 \in G_1 \setminus W \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} \in G_{n+1} \setminus \operatorname{span}(W \cup \{x_1, \ldots, x_n\}).$$

Em particular, $x_n \in G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e sendo $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma base de abertos para a topologia de V, concluímos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é um subconjunto denso de V. Daí, se

$$M := \operatorname{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}},$$

então M é um subespaço denso de V. Para fins de contradição, suponhamos que exista um vetor não-nulo $y \in M \cap W$. Como $y \in M$, existem $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$, com $\alpha_k \neq 0$, tais que

$$y = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j.$$

Observemos que deve ser $k \geq 2$ pois, se fosse $k = 1$, teríamos $x_1 = \dfrac{1}{\alpha_1} y \in W$, o que sabemos não ocorrer. Assim,

$$x_k = \frac{1}{\alpha_k}\left(y - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j x_j\right) \in \operatorname{span}(W \cup \{x_1, \ldots, x_{k-1}\}),$$

contrariando o fato de que, sabidamente,

$$x_k \notin \operatorname{span}(W \cup \{x_1, \ldots, x_{k-1}\}) .$$

Logo, $M \cap W = \{0\}$ e, consequentemente, $M \subset (V \setminus W) \cup \{0\}$. Isto encerra a prova de que $V \setminus W$ é denso lineável. ■

Dado um espaço vetorial topológico V, seja $\mathcal{B}_V$ o conjunto de todas as bases da topologia de V. Como os números cardinais são bem ordenados, podemos considerar $B_0 \in \mathcal{B}_V$ de cardinalidade mínima. O número cardinal $\operatorname{card}(B_0)$ é chamada de **peso** de V e é denotado por $w(V)$.

O principal resultado desta seção foi inspirado em [11, Lemma 3.1] e fornece a seguinte versão mais forte e não-separável do Teorema 2.22:

Teorema 2.23 *Seja V um espaço vetorial topológico não trivial e seja W um subespaço vetorial de V tal que $w(V) \leq \operatorname{codim}(W)$. Então, $V \setminus W$ é (α, β)-denso lineável para todo $\alpha < \operatorname{codim}(W)$ e*

$$\max\{\alpha, w(V)\} \leq \beta \leq \operatorname{codim}(W) .$$

Demonstração: Fixado $\alpha < \operatorname{codim}(W)$, seja $C = \{u_\lambda\}_{\lambda\in\alpha} \subset V$ um subconjunto linearmente independente de cardinalidade α tal que

$$\operatorname{span}(C) \subset (V \setminus W) \cup \{0\}.$$

Considerando o subespaço $M_\alpha := W \oplus \operatorname{span}(C)$, seja $B_0 = \{U_\mu\}_{\mu\in w(V)} \in \mathcal{B}_V$ uma base de cardinalidade mínima para a topologia de V. Como $\alpha = \dim(\operatorname{span}(C)) < \operatorname{codim}(W)$, inferimos que $M_\alpha \subsetneq V$ e, consequentemente,

$$V \setminus M_\alpha \text{ é denso em } V.$$

Isto significa que existe um vetor $v_{\mu_0} \in U_{\mu_0} \cap (V \setminus M_\alpha)$. Dado $\mu < w(V)$, suponhamos por indução transfinita que

$$v_\eta \in U_\eta \cap (V \setminus (M_\alpha \oplus \operatorname{span}\{v_\gamma\}_{\gamma\in\eta}))$$

tenha sido definido para todo $\eta < \mu$. Como,

$$\dim(\operatorname{span}(C) \oplus \operatorname{span}\{v_\gamma\}_{\gamma\in\mu}) = \alpha + \mu < \max\{\alpha, w(V)\} \leq \operatorname{codim}(W) ,$$

o subespaço $M_\alpha \oplus \operatorname{span}(v_\gamma)_{\gamma\in\mu} \subsetneq V$. Isto é,

$$V \setminus (M_\alpha \oplus \operatorname{span}(v_\gamma)_{\gamma\in\mu}) \text{ é denso em } V.$$

Logo, existe um vetor $v_\mu \in U_\mu \cap (V \setminus (M_\alpha \oplus \operatorname{span}\{v_\gamma\}_{\gamma\in\mu}))$. Isso assegura a existência de vetores $\{v_\mu\}_{\mu\in w(V)}$ satisfazendo

$$v_\mu \in U_\mu \cap (V \setminus G_\mu), \qquad \text{para todo } \mu < w(V),$$

onde $G_\mu := W \oplus H_\mu$ e $H_\mu := \operatorname{span}(C) \oplus \operatorname{span}(v_\gamma)_{\gamma\in\mu}$. É claro que o conjunto $\{v_\mu\}_{\mu\in w(V)}$ é denso e linearmente independente em V. Consequentemente o subespaço

$$Y := \operatorname{span}(C) \oplus \operatorname{span}\{v_\mu\}_{\mu\in w(V)}$$

é denso em V. Além disso, se $v \in Y \setminus \{0\}$, então

$$v = \sum_{j=1}^{n} a_j u_{\lambda_j} + \sum_{k=n+1}^{m} a_k v_{\mu_k}.$$

Logo, $v \in H_{\mu_m}$ e, como $H_{\mu_m} \cap W = \{0\}$, concluímos que $v \notin W$. Portanto,

$$\text{span}(C) \subset \text{span}(C) \oplus \text{span}\{v_\mu\}_{\mu \in w(V)} =: Y \subset (V \setminus W) \cup \{0\}.$$

Como

$$\dim(Y) = \max\{\alpha, w(V)\} \qquad \text{e} \qquad \max\{\alpha, w(V)\} \geq \alpha,$$

o conjunto $V \setminus W$ é $(\alpha, \max\{\alpha, w(V)\})$-denso lineável. Uma vez que podemos estender Y a um subespaço $\tilde{Y}$ tal que

$$Y \subset \tilde{Y} \subset (V \setminus W) \cup \{0\} \qquad \text{e} \qquad \dim(\tilde{Y}) = \beta$$

o resultado segue. ■

Seja V um espaço vetorial topológico não-trivial. A **densidade característica** de V, denotada por $\text{dens}(V)$, é o menor número cardinal infinito para um subconjunto denso de V.

Corolário 2.24 *Sejam V um espaço vetorial topológico metrizável de dimensão infinita de densidade característica* $\text{dens}(V) = \kappa$ *e W um subespaço vetorial de V. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) $V \setminus W$ é (α, β)-denso lineável sempre que

$$\alpha < \text{codim}\,(W) \qquad e \qquad \max\{\kappa, \alpha\} \leq \beta \leq \text{codim}\,(W)\,.$$

(ii) $V \setminus W$ é κ-lineável.

(iii) $\kappa \leq \text{codim}\,(W)$.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ É óbvio.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sejam W_κ um subespaço de κ-dimensional de V tal que $W \cap W_\kappa = \{0\}$ e $\pi_W \colon V \to V/W$ a projeção canônica. Se $x \in W_\kappa$, então

$$\begin{aligned} \pi_W(x) = \overline{0} &\Leftrightarrow x \in \ker(\pi_W) = W \\ &\Leftrightarrow x \in W \cap W_\kappa = \{0\} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

e, portanto, $\pi_W|_{W_\kappa}$ é injetiva. Logo,

$$\kappa = \dim(W_\kappa) = \dim(\pi_W(W_\kappa)) \leq \dim(V/W) = \text{codim}\,(W)\,.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Se $\kappa \leq \text{codim}\,(W)$, como V é metrizável, temos

$$w(V) = \kappa \leq \text{codim}\,(W)$$

e, o resultado segue do Teorema 2.23. ■

O próximo resultado melhora o Teorema 2.22.

Corolário 2.25 *Sejam V um espaço vetorial topológico metrizável de dimensão infinita, com* $\operatorname{dens}(V) = \kappa$*, e W um subespaço vetorial de V tal que* $\kappa \leq \operatorname{codim}(W)$*. Então $V \setminus W$ é pontualmente* $\operatorname{codim}(W)$*-denso lineável. Se, além disso,* $\operatorname{codim}(W) = \dim(V)$*, então $V \setminus W$ é pontualmente maximal denso lineável.*

Demonstração: De fato, o Corolário 2.24 assegura que $V \setminus W$ é $(1, \operatorname{codim}(W))$-denso lineável e, como $(V \setminus W) \cup \{0\}$ é fechado quanto a multiplicação por escalar, segue da Observação 1.22 que $V \setminus W$ é pontualmente $\operatorname{codim}(W)$-denso lineável. ■

Em [8, Theorem 3.2] os autores provaram que o conjunto $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ é $(1, \mathfrak{c})$-espaçável. Assim, fazendo $V = L_p[0,1]$ e $W = \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ no Corolário 2.25, obtemos:

Corolário 2.26 $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ *é pontualmente maximal denso lineável, para todo* $p > 0$.

Corolário 2.27 *Sejam V um espaço vetorial topológico metrizável separável e W um subespaço de V. Se* $\operatorname{codim}(W) \geq \aleph_0$*, então $V \setminus W$ é (k, β)-denso lineável, para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo* $\aleph_0 \leq \beta \leq \operatorname{codim}(W)$*.*

Demonstração: Isso é uma consequência imediata do Corolário 2.24 uma vez que, neste caso,

$$\operatorname{dens}(V) = \aleph_0 \leq \operatorname{codim}(W).$$

■

Fazendo $V = L_p[0,1]$ e $W = \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ no Corolário 2.24, obtemos:

Corolário 2.28 *Seja $0 < p < \infty$. O conjunto $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ é (α, β)-denso lineável, sempre que*

$$\alpha < \mathfrak{c} \qquad e \qquad \max\{\alpha, \aleph_0\} \leq \beta \leq \mathfrak{c}.$$

Em [13], Nestoridis levantou a seguinte questão:

O conjunto $\ell_\infty \setminus c_0$ contém um subespaço vetorial denso?

Em [15, Theorem 1.2] Papathanasiou deu uma resposta positiva para a questão. Mais precisamente, ele mostrou que o conjunto $\ell_\infty \setminus c_0$ é maximal denso-lineável. Agora, o resultado de Papathanasiou foi melhorado pelo seguinte resultado:

Corolário 2.29 *Seja $F = c_0$ ou c.*

(i) $\ell_\infty \setminus F$ é $(\alpha, \mathfrak{c})$-denso lineável para todo $\alpha < \mathfrak{c}$.

(ii) $\ell_\infty \setminus F$ não é $(n, \aleph_0)$-denso lineável para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: *(i)* Uma vez que

$$\operatorname{dens}(\ell_\infty) = \mathfrak{c},$$

segue do Corolário 2.24 que $\ell_\infty \setminus F$ é $(\alpha, \mathfrak{c})$-denso lineável para todo $\alpha < \mathfrak{c} = \operatorname{codim}(F)$.

(ii) É uma consequência direta do fato de que a dimensão de todo subespaço linear denso de ℓ_∞ é $\mathfrak{c}$ ■

Observação 2.30 *Os* Corolários 2.19 e 2.29 *nos permitem concluir, em particular, que $\ell_\infty \setminus F$ é $(\aleph_0, \mathfrak{c})$-denso lineável, mas não é $(\aleph_0, \mathfrak{c})$-espaçável.*

Capítulo 3

Lineabilidade e funções ilimitadas, contínuas e integráveis

A investigação da estrutura algébrica do conjunto das funções ilimitadas, contínuas e integráveis $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ foi iniciada por Calderón-Moreno et al. em [5], ocasião em que os autores provaram, entre outros resultados, que o conjunto

$$\mathcal{A} := \left\{ f \in \mathcal{C}[0,\infty) \cap L_1[0,\infty) : \limsup_{x\to\infty} |f\,(x)\,| = \infty \right\}$$

é lineável. Apresentaremos agora a continuação dessa investigação desenvolvida em [6] provando, com técnicas diferentes, outros resultados acerca das estruturas topológica e algébrica deste conjunto.

3.1 As estruturas algébrica e topológica do conjunto das funções ilimitadas, contínuas e integráveis

Para $p > 0$, seja $L_p[0,\infty)$ o espaço clássico das (classes de equivalência de) funções mensuráveis $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ equipado com a norma (p-norma se $0 < p < 1$) definida por

$$\|f\|_p = \left(\int_I |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Seja $\mathcal{C}[0,\infty)$ o espaço das funções contínuas $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, munido da topologia da convergência uniforme sobre compactos, com a qual $\mathcal{C}[0,\infty)$ se torna um espaço vetorial topológico metrizável completo, isto é, um F-espaço. Consideremos o conjunto

$$X := \mathcal{C}[0,\infty) \cap L_1[0,\infty),$$

equipado com a métrica $d_X\colon X \times X \to \mathbb{R}$ definida por

$$d_X(f,g) := \|f-g\|_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|f-g\|_{\infty,n}}{1+\|f-g\|_{\infty,n}},$$

onde
$$\|f\|_{\infty,n} = \max\{|f(x)| : x \in [0,n]\}.$$
Em [5, Theorem 2.4] foi mostrado que
$$\mathcal{A} := \left\{ f \in X : \limsup_{x\to\infty} |f(x)| = \infty \right\}$$
é maximal densamente lineável. Um protótipo de uma função $\omega\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ em $\mathcal{A}$ é o seguinte:
$$\omega(x) = \begin{cases} 2^n s_n^2 (x-n), & \text{se } n \leq x \leq \dfrac{1}{2^n s_n}, \\ -2^n s_n^2 \left(x - n - \dfrac{1}{2^{n-1} s_n} \right), & \text{se } n + \dfrac{1}{2^n s_n} \leq x \leq n + \dfrac{1}{2^n s_n}, \\ 0, & \text{se } x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[n, n + \dfrac{1}{2^n s_n} \right], \end{cases}$$
onde $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

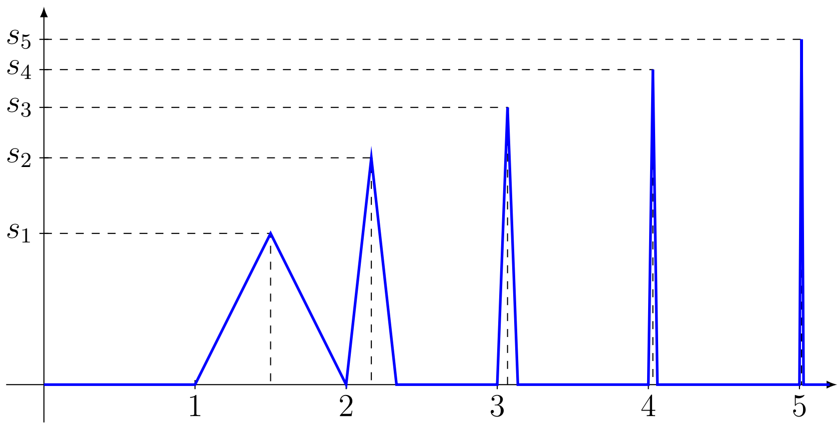

Figura 1: O gráfico de ω.

Nesta seção, mostraremos resultados negativos e positivos acerca da estrutura topológica de $\mathcal{A}$. O próximo resultado mostra que $\mathcal{A}$ é pontualmente $\mathfrak{c}$-espaçável.

Teorema 3.1 *O conjunto $\mathcal{A}$ é pontualmente $\mathfrak{c}$-espaçável em (X, d_X).*

Demonstração: Sejam $f \in \mathcal{A}$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência crescente em $[0,\infty)$ tal que
$$\begin{cases} x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \\ f(x_n) \neq 0 \text{ para cada } n = 1, 2, \ldots, \\ |f(x_n)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \end{cases} \tag{3.1}$$
Dados $n, k \in \mathbb{N}$, definamos $t_n^{(k)}$ da seguinte foma:

$$t_n^{(1)} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2} \qquad \text{e} \qquad t_n^{(k+1)} = \frac{x_n + t_n^k}{2}.$$

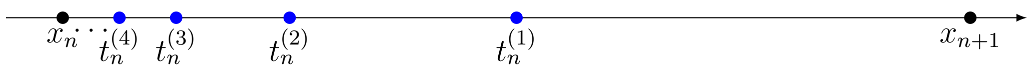

Figura 2: Um panorama geométrico dos $t_n^{(k)}$.

Agora, dados $k, n \in \mathbb{N}$, seja

$$0 < \varepsilon_n^{(k)} \leq \frac{t_n^{(k)} - t_n^{k+1}}{2}$$

tal que

$$|f(x_n)| \leq \frac{1}{2^n \varepsilon_n^{(k)}}.$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$, seja $f_k \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ a função

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x_n)}{\varepsilon_n^{(k)}} \left(x - t_n^{(k)} + \varepsilon_n^{(k)} \right), & \text{se } t_n^{(k)} - \varepsilon_n^{(k)} \leq x \leq t_n^{(k)}, \\ -\dfrac{f(x_n)}{\varepsilon_n^{(k)}} \left(x - t_n^{(k)} - \varepsilon_n^{(k)} \right), & \text{se } t_n^{(k)} \leq x \leq t_n^{(k)} + \varepsilon_n^{(k)}, \\ 0, & \text{se } x \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[t_n^{(k)} - \varepsilon_n^{(k)}, t_n^{(k)} + \varepsilon_n^{(k)} \right]. \end{cases} \tag{3.2}$$

Geometricamente, f_k representa o k-ésimo triângulo em cada intervalo $[x_n, x_{n+1}]$.

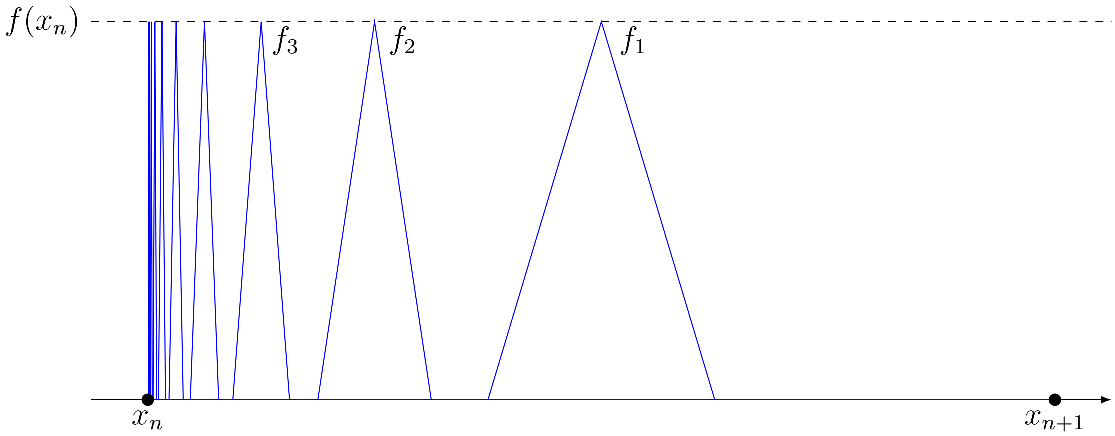

Figura 3: Sobreposição dos gráficos das funções f_k em $[x_n, x_{n+1}]$.

Observemos que :

(i) f_k é contínua, para todo $k \in \mathbb{N}$;

(ii) $f_k \in L_1[0, \infty)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, pois

$$\int_0^{\infty} |f_k| \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{(k)} |f(x_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1;$$

(iii) Para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$t_n^{(k)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \qquad \text{e} \qquad \left|f_k(t_n^{(k)})\right| = \left|f\left(x_n\right)\right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Portanto, $\limsup_{x\to\infty} |f_k\left(x\right)| = \infty$;

(iv) Se $x \in \left(t_n^{(k)} - \varepsilon_n^{(k)}, t_n^{(k)} + \varepsilon_n^{(k)}\right)$, então, sempre que $j \neq k$, temos $f_k\left(x\right) \neq 0 = f_j\left(x\right)$.

Assim, se $x \notin \bigcup_{k,n\in\mathbb{N}} \left(t_n^{(k)} - \varepsilon_n^{(k)}, t_n^{(k)} + \varepsilon_n^{(k)}\right)$ então $f_k\left(x\right) = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Em particular, $f_k\left(x_n\right) = 0$ para quaisquer $n, k \in \mathbb{N}$. Fixando uma sequência não-nula $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell_1$, seja $g\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ a função

$$g\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k\left(x\right),$$

onde $f_0 = f$. Vejamos que g é bem definida. Se $x \in \left(t_n^{(k)} - \varepsilon_n^{(k)}, t_n^{(k)} + \varepsilon_n^{(k)}\right)$ para algum par de naturais k_0, n_0, então

$$g\left(x\right) = a_0 f\left(x\right) + a_{k_0} f_{k_0}\left(x\right)$$

e, se $x \notin \left(t_n^{(k)} - \varepsilon_n^{(k)}, t_n^{(k)} + \varepsilon_n^{(k)}\right)$, então

$$g\left(x\right) = a_0 f\left(x\right).$$

Mostremos agora que g é contínua. Se $x_0 \in \left(t_n^{(k)} - \varepsilon_n^{(k)}, t_n^{(k)} + \varepsilon_n^{(k)}\right)$, então

$$\lim_{x\to x_0} g\left(x\right) = \lim_{x\to x_0} \left[a_0 f\left(x\right) + a_k f_k\left(x\right)\right] = a_0 f(x_0) + a_k f_k(x_0) = g(x_0).$$

Se x_0 é um ponto interior de $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k,n\in\mathbb{N}} \left(t_n^{(k)} - \varepsilon_n^{(k)}, t_n^{(k)} + \varepsilon_n^{(k)}\right)$, então

$$\lim_{x\to x_0} g\left(x\right) = \lim_{x\to x_0} a_0 f\left(x\right) = a_0 f(x_0) = g(x_0).$$

Se $x_0 = t_n^{(k)} - \varepsilon_n^{(k)}$ para algum par de inteiros k, n, então

$$\lim_{x\to x_0^-} g\left(x\right) = \lim_{x\to x_0^-} a_0 f\left(x\right) = a_0 f(x_0) = g(x_0)$$

e

$$\lim_{x\to x_0^+} g\left(x\right) = \lim_{x\to x_0^+} \left[a_0 f\left(x\right) + a_k f_k\left(x\right)\right] = a_0 f(x_0) + a_k f_k(x_0) = a_0 f(x_0) = g(x_0).$$

De maneira análoga verificamos que

$$\lim_{x\to x_0^-} g\left(x\right) = g(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} g\left(x\right)$$

se $x_0 = t_n^{(k)} + \varepsilon_n^{(k)}$ para algum par k, n de números naturais. Isto assegura a continuidade de g. Agora, uma vez que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k f_k\|_1 \leq |a_0| \, \|f\|_1 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty,$$

inferimos que $g = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k \in L_1[0, \infty)$. Finalmente, notemos que, se $a_0 \neq 0$, então

$$|g(x_n)| = |a_0 f(x_n)| = |a_0| \, |f(x_n)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

e, consequentemente,

$$\limsup_{x\to\infty} |g(x)| = \infty.$$

Se $a_0 = 0$, seja j tal que $a_j \neq 0$. Então,

$$\left| g\left(t_n^{(j)}\right) \right| = \left| a_j f_j \left(t_n^{(j)}\right) \right| = |a_j| \, |f(x_n)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

e, por conseguinte,

$$\limsup_{x\to\infty} |g(x)| = \infty.$$

Portanto, $g \in \mathcal{A}$. Em particular, acabamos por estabelecer que o operador

$$\begin{aligned} T \colon \ell_1 &\to \mathcal{C}[0, \infty) \cap L_1[0, \infty) \\ (a_k)_{k=0}^{\infty} &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k \end{aligned}$$

é bem definido e que $T(\ell_1) \subset \mathcal{A} \cup \{0\}$. Ademais, é evidente que T é linear. Seja $(a_k)_{k=0}^{\infty} \in \ell_1$ tal que $T\left((a_k)_{k=0}^{\infty}\right) = 0$. Então,

$$0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k \right)(x_1) = a_0 f(x_1)$$

e, para $k \geq 1$,

$$0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k \right)(t_1^{(k)}) = a_k f(x_1)$$

e, como $f(x_1) \neq 0$, concluímos que $a_k = 0$ para todo $k = 0, 1, \ldots$ e, portanto, T é injetor. Logo,

$$\mathfrak{c} = \dim(\ell_1) = \dim(T(\ell_1))$$

e, como $f = T(1, 0, 0, 0, ...) \in T(\ell_1)$, é suficiente mostrar que $\overline{T(\ell_1)}^{(X, d_X)} \subset \mathcal{A} \cup \{0\}$, onde $\overline{T(\ell_1)}^{(X, d_X)}$, denota o fecho de $T(\ell_1)$ em (X, d_X). Seja $h \in \overline{T(\ell_1)}^{X, d_X} \setminus \{0\}$. Então, existe uma sequência $(c^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ em ℓ_1, com $c^{(j)} = (c_k^{(j)})_{k=0}^{\infty}$, tal que

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(j)} f_k = h \qquad \text{em } (X, d_X).$$

Em particular, $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(j)} f_k$ converge uniformemente para h sobre cada intervalo compacto $[a, b] \subset [0, \infty)$. Portanto, fixando $n \in \mathbb{N}$, e lembrando que $f_k(x_n) = 0$ para quaisquer $n, k \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\lim_{j\to\infty} c_0^{(j)} f(x_n) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(j)} f_k(x_n) = h(x_n)$$

e isso implica que

$$\lim_{j\to\infty} c_0^{(j)} = \frac{h(x_n)}{f(x_n)} := c_0.$$

A unicidade do limite de uma sequência e a arbitrariedade de $n \in \mathbb{N}$ asseguram que $h(x_n) = c_0 f(x_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $c_0 \neq 0$, então

$$\lim_{n\to\infty} |h(x_n)| = \lim_{n\to\infty} |c_0| \, |f(x_n)| = \infty$$

e $h \in \mathcal{A}$. Se $c_0 = 0$, segue do item (iv) que, se $x \notin \bigcup_{k,n\in\mathbb{N}} \left(t_n^{(k)} - \varepsilon_n^{(k)}, t_n^{(k)} + \varepsilon_n^{(k)}\right)$, então $f_k(x) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e, portanto,

$$h(x) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(j)} f_k(x) = 0.$$

Se $x \in \left(t_n^{(r)} - \varepsilon_n^{(r)}, t_n^{(r)} + \varepsilon_n^{(r)}\right)$ para algum par n, r de números naturais, segue de (iv) que $f_r(x) \neq 0 = f_k(x)$ sempre que $k \neq r$ e, portanto,

$$h(x) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(j)} f_k(x) = \lim_{j\to\infty} c_r^{(j)} f_r(x).$$

Assim,

$$\lim_{j\to\infty} c_r^{(j)} = \frac{h(x)}{f_r(x)} := c_r$$

e

$$h(x) = c_r f_r(x). \tag{3.3}$$

Como $h \neq 0$, existem $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $h(x_0) \neq 0$ para algum $x_0 \in \left(t_n^{(k)} - \varepsilon_n^{(k)}, t_n^{(k)} + \varepsilon_n^{(k)}\right)$. Assim, $c_k \neq 0$ e, como (3.3) vale para todo $x \in \left(t_n^{(k)} - \varepsilon_n^{(k)}, t_n^{(k)} + \varepsilon_n^{(k)}\right)$, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \left|h(t_n^{(k)})\right| = \lim_{n\to\infty} |c_k| \left|f_k(t_n^{(k)})\right| = \infty.$$

Logo, $h \in \mathcal{A}$ e o resultado segue. ■

Como consequência imediata temos o seguinte:

Corolário 3.2 *O conjunto $\mathcal{A}$ é $(1, \mathfrak{c})$-espaçável em (X, d_X).*

Observação 3.3 *Seja $\mathcal{C}^n[0,\infty)$, $n = 1, 2, \ldots$, o espaço vetorial das funções $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ cuja derivada de ordem n é contínua, e seja $\mathcal{C}^\infty[0,\infty)$ o espaço linear das funções $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ que possuem derivada de qualquer ordem. Usando funções bump, uma pequena adaptação da prova acima garante que os conjuntos*

$$\mathcal{A}^n = \left\{ f \in \mathcal{C}^n[0,\infty) \cap L_1[0,\infty) : \limsup_{x\to\infty} |f(x)| = \infty \right\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

e

$$\mathcal{A}^\infty = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty[0,\infty) \cap L_1[0,\infty) : \limsup_{x\to\infty} |f(x)| = \infty \right\}$$

são pontualmente $\mathfrak{c}$-lineáveis.

Isso nos leva à seguinte questão natural: seria possível estender a noção de $(1, \mathfrak{c})$-espaçabilidade em $\mathcal{A}$ para uma forma mais geral? Nosso segundo resultado mostra, no entanto, que esse conjunto não é $(\aleph_0, \mathfrak{c})$-espaçável.

Teorema 3.4 *$\mathcal{A}$ não é $(\aleph_0, \mathfrak{c})$-espaçável em (X, d_X).*

Demonstração: Seja $f \in \mathcal{A}$ e seja $(x_n^{(1)})_{n=1}^{\infty}$ uma sequência crescente em $[0, \infty)$, com $x_1^{(1)} > 0$, tal que

$$x_n^{(1)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \qquad f(x_n^{(1)}) \neq 0 \text{ para todo } n = 1, 2, \ldots \qquad \text{e} \qquad \left|f(x_n^{(1)})\right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $t_n^{(1)}$ o ponto médio do intervalo $\left[x_n^{(1)}, x_{n+1}^{(1)}\right]$ e $\varepsilon_n^{(1)} > 0$ tal que

$$\varepsilon_n^{(1)} \leq \frac{x_{n+1}^{(1)} - x_n^{(1)}}{2} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_n^{(1)} \left|f(x_n^{(1)})\right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Definamos $x_n^{(1)} = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e a função $f_1 \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x_n)}{\varepsilon_n^{(1)}} \left(x - t_n^{(1)} + \varepsilon_n^{(1)}\right), & \text{se } t_n^{(1)} - \varepsilon_n^{(1)} \leq x \leq t_n^{(1)}, \\ -\dfrac{f(x_n)}{\varepsilon_n^{(1)}} \left(x - t_n^{(1)} - \varepsilon_n^{(1)}\right), & \text{se } t_n^{(1)} \leq x \leq t_n^{(1)} + \varepsilon_n^{(1)}, \\ 0, & \text{se } x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[t_n^{(1)} - \varepsilon_n^{(1)},\, t_n^{(1)} + \varepsilon_n^{(1)}\right]. \end{cases}$$

Seja $(x_n^{(2)})_{n=1}^{\infty}$ a única ordenação crescente de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \left\{t_n^{(1)} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $t_n^{(2)}$ o ponto médio do intervalo $\left[x_n^{(2)}, x_{n+1}^{(2)}\right]$ e seja $\varepsilon_n^{(2)} > 0$ tal que

$$\left[t_n^{(2)} - \varepsilon_n^{(2)},\, t_n^{(2)} + \varepsilon_n^{(2)}\right] \subset \left[x_n^{(2)}, x_{n+1}^{(2)}\right] \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_n^{(2)} \left|f(x_n)\right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Definamos $f_2 \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ como a função dada por

$$f_2(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{se } x_1 \leq x \leq x_2, \\ \dfrac{f(x_n)}{\varepsilon_n^{(2)}} \left(x - t_n^{(2)} + \varepsilon_n^{(2)}\right), & \text{se } t_n^{(2)} - \varepsilon_n^{(2)} \leq x \leq t_n^{(2)} \text{ e } x \notin [x_1, x_2], \\ -\dfrac{f(x_n)}{\varepsilon_n^{(2)}} \left(x - t_n^{(2)} - \varepsilon_n^{(2)}\right), & \text{se } t_n^{(2)} \leq x \leq t_n^{(2)} + \varepsilon_n^{(2)} \text{ e } x \notin [x_1, x_2], \\ 0, & \text{se } x \notin \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[t_n^{(2)} - \varepsilon_n^{(2)},\, t_n^{(2)} + \varepsilon_n^{(2)}\right]\right) \cup [x_1, x_2]. \end{cases}$$

Em geral, para cada inteiro $k > 1$, sejam $(x_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$ a única ordenação crescente de $\left\{x_n^{(k-1)} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{t_n^{(k-1)} : n \in \mathbb{N}\right\}$, $t_n^{(k)}$ o ponto médio do intervalo $\left[x_n^{(k)}, x_{n+1}^{(k)}\right]$ e $\varepsilon_n^{(k)} > 0$ tal que

$$\varepsilon_n^{(k)} \leq \frac{x_{n+1}^{(k)} - x_n^{(k)}}{2} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_n^{(k)} |f(x_n)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Então $f_k\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é a função definida por

$$f_k(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{se } x_1 \le x \le x_2, \\ \dfrac{f(x_n)}{\varepsilon_n^{(k)}}\left(x - t_n^{(k)} + \varepsilon_n^{(k)}\right), & \text{se } t_n^{(k)} - \varepsilon_n^{(k)} \le x \le t_n^{(k)} \text{ e } x \notin [x_1, x_2], \\ -\dfrac{f(x_n)}{\varepsilon_n^{(k)}}\left(x - t_n^{(k)} - \varepsilon_n^{(k)}\right), & \text{se } t_n^{(k)} \le x \le t_n^{(k)} + \varepsilon_n^{(k)} \text{ e } x \notin [x_1, x_2], \\ 0, & \text{se } x \notin \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[t_n^{(k)} - \varepsilon_n^{(k)}, t_n^{(k)} + \varepsilon_n^{(k)}\right]\right) \cup [x_1, x_2]. \end{cases}$$

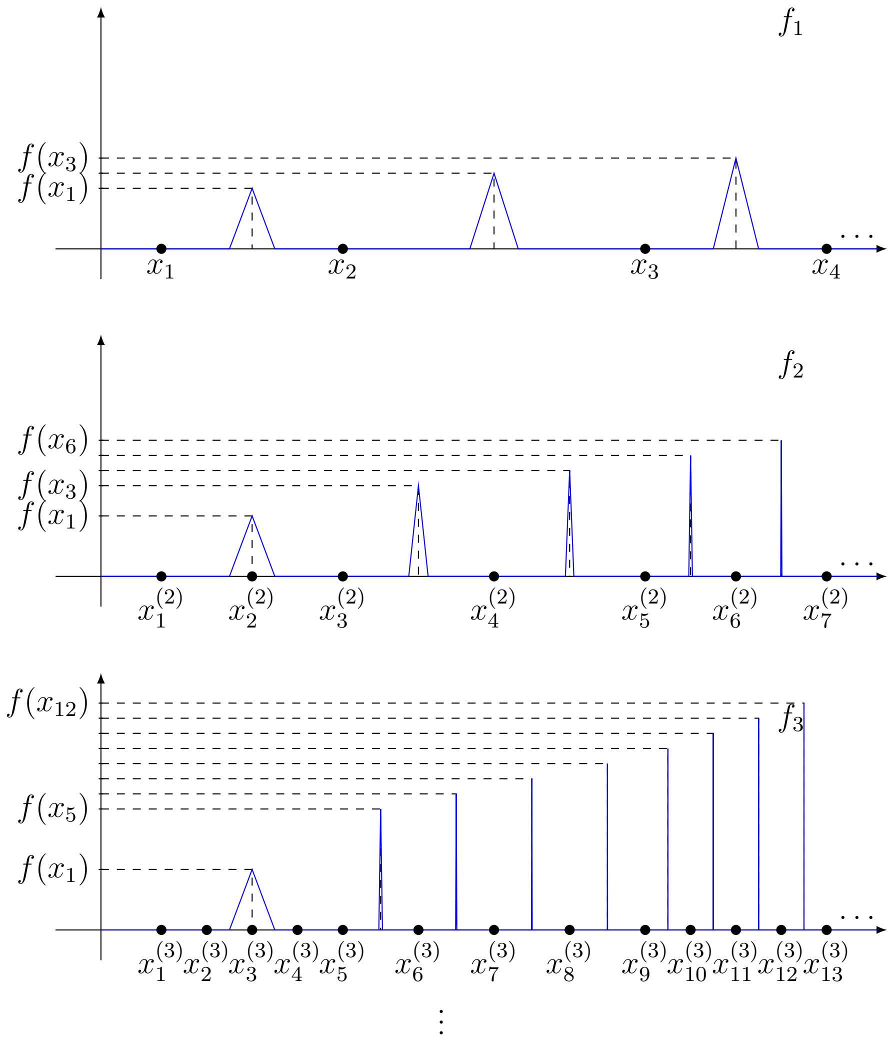

Figura 4: A sequência $(f_k)_{k=1}^{\infty}$.

Dado $k \in \mathbb{N}$, seja n_k o menor índice tal que $x_{n_k} > \max\{x_2, k\}$. Sejam $g_k, g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ as funções definidas, respectivamente, por

$$g_k(x) = \begin{cases} f_k(x), & \text{se } x \in [0, x_2] \cup [x_{n_k}, \infty), \\ 0, & \text{se } x \in [x_2, x_{n_k}], \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{se } 0 \leq x \leq x_2, \\ 0, & \text{se } x \geq x_2. \end{cases}$$

Procedendo como no Teorema 3.1, concluímos que $\{g_1, g_2, \ldots\}$ é linearmente independente e que

$$\operatorname{span}\{g_n : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{0\} \subset \mathcal{A}.$$

Provaremos que $g_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} g$ em (X, d_X) e, para tanto, veremos que

$$\|g_k - g\|_1 \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

e que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|g_k - g\|_{\infty,n}}{1 + \|g_k - g\|_{\infty,n}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Notemos que

$$(g_k - g)(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_2 \leq x \leq x_{n_k}, \\ g_k(x) = f_k(x), & \text{se } x \geq x_{n_k}. \end{cases}$$

Uma vez que $x_{n_k} \to \infty$, obtemos

$$\|g_k - g\|_1 = \int_{x_{n_k}}^{\infty} |g_k| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como $x_{n_k} > k$, inferimos que $\|g_k - g\|_{\infty,n} = 0$, para todo $n = 1, \ldots, k$ e, consequentemente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|g_k - g\|_{\infty,n}}{1 + \|g_k - g\|_{\infty,n}} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|g_k - g\|_{\infty,n}}{1 + \|g_k - g\|_{\infty,n}} \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^k}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$d_X(g_k, g) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como $g \in X \setminus \mathcal{A}$, segue que

$$\overline{\operatorname{span}\{g_n : n \in \mathbb{N}\}} \setminus \{0\} \nsubseteq \mathcal{A}.$$

Portanto, não existe um subespaço fechado W de X que possua dimensão infinita, contenha $\operatorname{span}\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ e esteja contido em $\mathcal{A} \cup \{0\}$, isto é, $\mathcal{A}$ não é $(\aleph_0, \mathfrak{c})$-espaçável em (X, d_X). ■

Corolário 3.5 *$\mathcal{A}$ não é $(\aleph_0, \mathfrak{c})$-espaçável em $L_1[0, \infty)$.*

Corolário 3.6 *$\mathcal{A}$ não é $(\aleph_0, \mathfrak{c})$-espaçável em $\mathcal{C}[0, \infty)$ munido da topologia da convergência uniforme sobre compactos.*

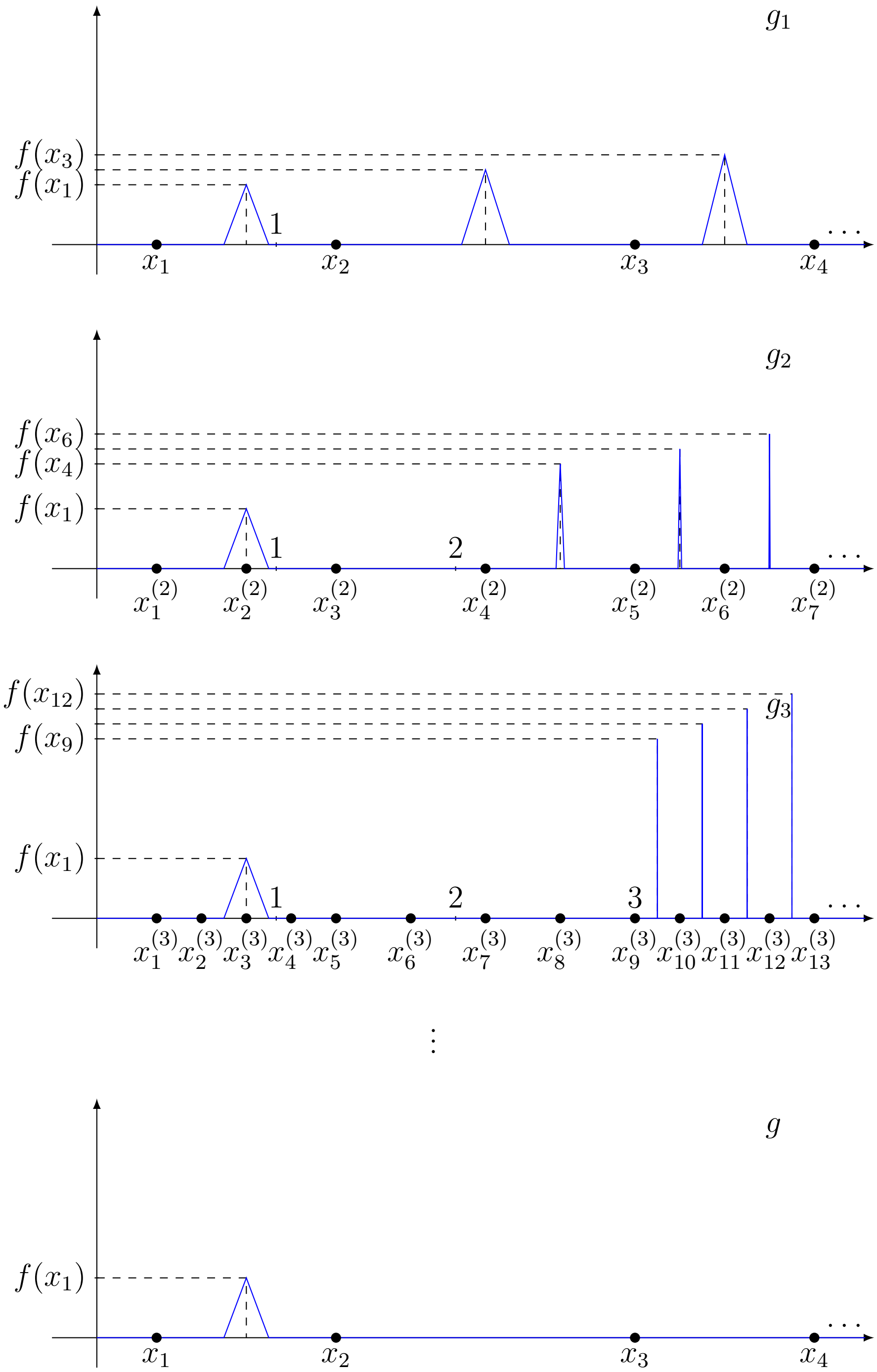

Figura 5: A sequência $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ e o seu limite g.

3.2 Sequências de funções ilimitadas, contínuas e integráveis

A seguinte observação será útil nesta seção:

Observação 3.7 *Sejam $f \in \mathcal{A}$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência crescente em $[0, \infty)$ satisfazendo*

(3.1)*. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja f_k definida como em* (3.2)*. Fixando $k \in \mathbb{N}$, seja j_k o menor índice tal que $x_{j_k} \geq k$. Fazendo $g_0 = f$, para $k \geq 1$, definamos $g_k\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ por*

$$g_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x \leq x_{j_k}, \\ f_k(x), & \text{se } x \geq x_{j_k}. \end{cases}$$

É claro que a prova do Teorema 3.1 *se mantém se substituirmos a sequência $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ pela sequência $(g_k)_{k=0}^{\infty}$.*

Seja $c_0(X)$ o espaço de sequências definido por

$$c_0(X) := \left\{ (f_r)_{r=1}^{\infty} : f_r \in X \text{ para todo } r \text{ e } d_X(f_r, 0) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}.$$

Neste espaço consideraremos a métrica $d_{c_0(X)}\colon c_0(X) \times c_0(X) \to \mathbb{R}$ dada por

$$d_{c_0(X)}\left((f_r)_{r=1}^{\infty}, (g_r)_{r=1}^{\infty}\right) = \sup_{r\in\mathbb{N}} d_X(f_r, g_r).$$

Agora, seja $\mathcal{A}_0 \subset c_0(X)$ o conjunto definido por

$$\mathcal{A}_0 := \left\{ (f_r)_{r=1}^{\infty} : f_r \in \mathcal{A} \text{ para cada } r \text{ e } d_X(f_r, 0) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}.$$

Em [5, Theorem 3.2] foi provado que $\mathcal{A}_0$ é maximal denso-lineável em $\big(c_0(X), d_{c_0(X)}\big)$, isto é, $\mathcal{A}_0$ contém, a menos do vetor nulo, um espaço vetorial denso com a mesma dimensão de $c_0(X)$. Aqui estabelecemos o seguinte resultado:

Teorema 3.8 *$\mathcal{A}_0$ é pontualmente $\mathfrak{c}$-espaçável em $\big(c_0(X), d_{c_0(X)}\big)$.*

Demonstração: Seja $f = (f_r)_{r=1}^{\infty} \in \mathcal{A}_0$. Para cada $r \in \mathbb{N}$, seja $(x_j^{(r)})_{j=1}^{\infty}$ uma sequência crescente em $[0,\infty)$ tal que

$$x_j^{(r)} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \qquad f_r(x_j^{(r)}) \neq 0 \text{ para cada } j = 1, 2, \ldots \qquad \text{e} \qquad \left| f_r(x_j^{(r)}) \right| \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Consideremos a função $f_{k,r}$ definida por f_r e $(x_j^{(r)})_{j=1}^{\infty}$ como em (3.2), isto é,

$$f_{k,r}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_r(x_n^{(r)})}{\varepsilon_n^{(k,r)}} \left(x - t_n^{(k,r)} + \varepsilon_n^{(k,r)} \right), & \text{se } t_n^{(k,r)} - \varepsilon_n^{(k,r)} \leq x \leq t_n^{(k,r)}, \\ -\dfrac{f_r(x_n^{(r)})}{\varepsilon_n^{(k,r)}} \left(x - t_n^{(k,r)} - \varepsilon_n^{(k,r)} \right), & \text{se } t_n^{(k,r)} \leq x \leq t_n^{(k,r)} + \varepsilon_n^{(k,r)}, \\ 0, & \text{se } x \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[t_n^{(k,r)} - \varepsilon_n^{(k,r)}, t_n^{(k,r)} + \varepsilon_n^{(k,r)} \right], \end{cases}$$

onde os $t_n^{(k,r)}$ são definidos recursivamente por

$$t_n^{(1,r)} = \frac{x_n^{(r)} + x_{n+1}^{(r)}}{2} \qquad \text{e} \qquad t_n^{(k+1,r)} = \frac{x_n^{(r)} + t_n^{(k,r)}}{2},$$

$\varepsilon_n^{(k,r)}$ é tal que

$$0 < \varepsilon_n^{(k,r)} < \frac{t_n^{(k,r)} - t_n^{(k+1,r)}}{2}$$

e

$$\varepsilon_n^{(k,r)} \left| f_r \left(x_n^{(r)} \right) \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Para cada $r \in \mathbb{N}$ seja j_r o menor índice tal que $x_{j_r}^{(r)} \geq r$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $g_{k,r} \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g_{k,r}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x \leq x_{j_r}^{(r)}, \\ f_{k,r}(x), & \text{se } x \geq x_{j_r}^{(r)}. \end{cases}$$

Denotando $g_j = (2^{-r} g_{j,r})_{r=1}^{\infty}$, precisamos mostrar que $g_j \in \mathcal{A}_0$, para cada j. (O fator 2^{-r} na definição de g_j não é realmente necessário. No entanto, como veremos, seu uso simplifica os argumentos.) Fixando $j \in \mathbb{N}$, como $g_{j,r} \in \mathcal{A}$ para cada $r \in \mathbb{N}$, só precisamos provar que $d_X (2^{-r} g_{j,r}, 0) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Se $j \geq 1$, então

$$\left\| 2^{-r} g_{j,r} \right\|_1 = 2^{-r} \int_0^{\infty} |g_{j,r}| \, dx \leq 2^{-r} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, é claro que

$$\left\| 2^{-r} g_{j,r} \right\|_{\infty,n} = \max \left\{ \left| 2^{-r} g_{j,r}(x) \right| : x \in [0, n] \right\} = 0$$

sempre que $r \geq n$. Consequentemente,

$$\left\| 2^{-r} g_{j,r} \right\|_{\infty,n} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto, para $r \geq 1$,

$$\begin{aligned} d_X \left(2^{-r} g_{j,r}, 0 \right) &= \|2^{-r} g_{j,r}\|_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|2^{-r} g_{j,r}\|_{\infty,n}}{1 + \|2^{-r} g_{j,r}\|_{\infty,n}} \\ &\leq 2^{-r} + \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|2^{-r} g_{j,r}\|_{\infty,n}}{1 + \|2^{-r} g_{j,r}\|_{\infty,n}} \\ &\leq 2^{-r} + \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2^{-r+1} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Agora, consideremos $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell_1$ não-nulo e definamos

$$h = a_0 f + \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n = \left(a_0 f_1 + 2^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_{n,1}, a_0 f_2 + 2^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_{n,2}, \ldots \right).$$

Seguindo as mesmas linhas da demonstração do Teorema 3.1, obtemos $h_r = a_0 f_r + 2^{-r} \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_{n,r} \in \mathcal{A}$ para cada r. Notemos também que, se $r \geq n$, então

$$\|h_r\|_1 = \left\| a_0 f_r + 2^{-r} \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_{n,r} \right\|_1$$

$$\begin{aligned} &\leq |a_0| \, \|f_r\|_1 + 2^{-r} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, \|g_{n,r}\|_1 \\ &\leq |a_0| \, \|f_r\|_1 + 2^{-r} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, . \end{aligned}$$

Como

$$\|h_r\|_{\infty,n} = \max \{|a_0 f_r(x)| : x \in [0,n]\} = |a_0| \, \|f_r\|_{\infty,n}$$

sempre que $r \geq n$, segue que

$$\|h_r\|_{\infty,n} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $d_X(f_r, 0) \to 0$, concluímos que

$$\|f_r\|_1 \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|f_r\|_{\infty,n}}{1 + \|f_r\|_{\infty,n}} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Se $a_0 = 0$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|a_0| \, \|f_r\|_{\infty,n}}{1 + |a_0| \, \|f_r\|_{\infty,n}} = 0.$$

Notemos que, se $0 < |a_0| \leq 1$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|a_0| \, \|f_r\|_{\infty,n}}{1 + |a_0| \, \|f_r\|_{\infty,n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|a_0| \, \|f_r\|_{\infty,n}}{|a_0| + |a_0| \, \|f_r\|_{\infty,n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|f_r\|_{\infty,n}}{1 + \|f_r\|_{\infty,n}} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

e, se $|a_0| > 1$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|a_0| \, \|f_r\|_{\infty,n}}{1 + |a_0| \, \|f_r\|_{\infty,n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|a_0| \, \|f_r\|_{\infty,n}}{1 + \|f_r\|_{\infty,n}} = |a_0| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|f_r\|_{\infty,n}}{1 + \|f_r\|_{\infty,n}} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d_X(h_r, 0) &= \|h_r\|_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|h_r\|_{\infty,n}}{1 + \|h_r\|_{\infty,n}} \\ &= \|h_r\|_1 + \sum_{n=1}^{r} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|a_0| \, \|f_r\|_{\infty,n}}{1 + |a_0| \, \|f_r\|_{\infty,n}} + \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|h_r\|_{\infty,n}}{1 + \|h_r\|_{\infty,n}} \\ &\leq |a_0| \, \|f_r\|_1 + 2^{-r} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|a_0| \, \|f_r\|_{\infty,n}}{1 + |a_0| \, \|f_r\|_{\infty,n}} + \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= |a_0| \, \|f_r\|_1 + 2^{-r} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + 1 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|a_0| \, \|f_r\|_{\infty,n}}{1 + |a_0| \, \|f_r\|_{\infty,n}} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Assim sendo, $h \in \mathcal{A}_0$. Em particular, denotando $g_0 = f$, concluímos que o operador

$$\begin{aligned} T \colon \ell_1 &\to c_0(X) \\ (a_n)_{n=0}^{\infty} &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n, \end{aligned}$$

está bem definido, é linear, injetivo e satisfaz

$$T(\ell_1) \subset \mathcal{A}_0 \cup \{0\}.$$

Uma vez que

$$\mathfrak{c} = \dim(\ell_1) = \dim(T(\ell_1))$$

e $f = T(1,0,0,\ldots) \in T(\ell_1)$, até aqui, mostramos que $\mathcal{A}_0$ é pontualmente $\mathfrak{c}$-lineável.

O resultado será totalmente comprovado se mostrarmos que

$$\overline{T(\ell_1)}^{\left(c_0(X),d_{c_0}(X)\right)} \subset \mathcal{A}_0 \cup \{0\}.$$

Seja $w = (w_r)_{r=1}^{\infty} \in \overline{T(\ell_1)}^{\left(c_0(X),d_{c_0(X)}\right)} \setminus \{0\}$. Observemos que, para completar esta prova, basta mostrarmos que $w_r \in \mathcal{A}$ para cada $r \in \mathbb{N}$.

Seja $\left(a^{(j)}\right)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência em ℓ_1, com $a^{(j)} = (a_n^{(j)})_{n=0}^{\infty}$, tal que

$$v^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} g_n \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} w \text{ em } \left(c_0(X), d_{c_0(X)}\right).$$

Logo, denotando

$$v_r^{(j)} = a_0^{(j)} f_r + 2^{-r} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(j)} g_{n,r},$$

inferimos que

$$d_{c_0(X)}\left(v^{(j)}, w\right) = \sup_{r\in\mathbb{N}} d_X(v_r^{(j)}, w_r) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Em particular,

$$d_X(v_r^{(j)}, w_r) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

para cada $r \in \mathbb{N}$. Assim sendo, para $r \in \mathbb{N}$, $v_r^{(j)} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} w_r$ uniformemente em cada intervalo compacto não degenerado $[a,b] \subset [0,\infty)$. Procedendo como no Teorema 3.1, concluímos que $w_r \in \mathcal{A}$. ∎

Corolário 3.9 *$\mathcal{A}_0$ é $(1,\mathfrak{c})$-espaçável em $\left(c_0(X), d_{c_0(X)}\right)$.*

Teorema 3.10 *$\mathcal{A}_0$ não é $(\aleph_0,\mathfrak{c})$-espaçável em $\left(c_0(X), d_{c_0(X)}\right)$.*

Demonstração: Tomemos uma sequência $f = (f_r)_{r=1}^{\infty} \in \mathcal{A}_0$ e consideremos a função $f_{k,r}$ definida como em (3.2) para f_r e uma sequência adequada $(x_k^{(r)})_{k=1}^{\infty}$ em $[0,\infty)$ como em (3.1). Para cada par (n,r) de números naturais, seja n_r o menor índice tal que $x_{n_r}^{(r)} \geq rn$. Seja $g_{n,r}\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g_{n,r}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x \leq x_{n_r}^{(r)}, \\ f_{n,r}(x), & \text{se } x \geq x_{n_r}^{(r)}. \end{cases}$$

Definindo $\phi_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{se } 1 \leq x \leq x_{n_1}^{(1)}, \\ n^{-1} g_{n,1}(x), & \text{se } x \geq x_{n_1}^{(1)}, \end{cases}$$

denotemos $g_n = (\phi_n, 2^{-2n}g_{n,2}, 2^{-3n}g_{n,3}, \ldots, 2^{-rn}g_{n,r}, \ldots)$. Precisamos mostrar que $g_n \in \mathcal{A}_0$, para cada n. Como $g_{n,r} \in \mathcal{A}$ para cada $n, r \in \mathbb{N}$, é suficiente mostrar que $d_X\left(2^{-rn}g_{n,r}, 0\right) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Se $r > 1$, então

$$\left\|2^{-rn}g_{n,r}\right\|_1 = 2^{-rn}\int_0^\infty |g_{n,r}| \leq 2^{-rn} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como $x_{n_r}^{(r)} \geq rn$, obtemos

$$\left\|2^{-rn}g_{n,r}\right\|_{\infty,m} = \max\left\{\left|2^{-rn}g_{n,r}(x)\right| : x \in [0,m]\right\} = 0,$$

sempre que $m \leq rn$. Consequentemente,

$$\left\|2^{-rn}g_{n,r}\right\|_{\infty,m} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

para cada $m \in \mathbb{N}$. Portanto, dado $r > 1$,

$$\begin{aligned} d_X\left(2^{-rn}g_{n,r}, 0\right) &= \|2^{-rn}g_{n,r}\|_1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^m}\cdot\frac{\|2^{-rn}g_{n,r}\|_{\infty,m}}{1+\|2^{-rn}g_{n,r}\|_{\infty,m}} \\ &\leq 2^{-rn} + \sum_{m=rn+1}^{\infty}\frac{1}{2^m}\cdot\frac{\|2^{-rn}g_{n,r}\|_{\infty,m}}{1+\|2^{-rn}g_{n,r}\|_{\infty,m}} \\ &\leq 2^{-rn} + \sum_{m=rn+1}^{\infty}\frac{1}{2^m} = 2^{-rn+1} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Agora, vamos mostrar que $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente. Suponhamos que

$$\sum_{n=1}^{N} a_n g_n = 0.$$

Como,

$$\sum_{n=1}^{N} a_n g_n = \left(\sum_{n=1}^{N} a_n\phi_n, \sum_{n=1}^{N} 2^{-2n}a_n g_{n,2}, \sum_{n=1}^{N} 2^{-3n}a_n g_{n,3}, \sum_{n=1}^{N} 2^{-4n}a_n g_{n,4}, \ldots\right),$$

obtemos

$$\sum_{n=1}^{N} 2^{-2n}a_n g_{n,2} = 0.$$

Como $\{g_{n,2} : n \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente, obtemos $a_n = 0$, para cada $n = 1, \ldots, N$. Seja $W := \operatorname{span}\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$. Vejamos que $W \setminus \{0\} \subset \mathcal{A}_0$. Seja

$$\sum_{n=1}^{N} a_n g_n = \left(\sum_{n=1}^{N} a_n\phi_n, \sum_{n=1}^{N} 2^{-2n}a_n g_{n,2}, \sum_{n=1}^{N} 2^{-3n}a_n g_{n,3}, \sum_{n=1}^{N} 2^{-4n}a_n g_{n,4}, \ldots\right) \in W \setminus \{0\}.$$

Seguindo as mesmas linhas da demonstração do Teorema 3.1, obtemos $\sum_{n=1}^{N} a_n\phi_n \in \mathcal{A}$ e $\sum_{n=1}^{N} 2^{-rn}a_n g_{n,r} \in \mathcal{A}$ para cada $r > 1$. Notemos ainda que

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} 2^{-rn}a_n g_{n,r}\right\|_1 \leq \sum_{n=1}^{N}\left|2^{-rn}a_n\right| \|g_{n,r}\|_1 \leq \sum_{n=1}^{N}\left|2^{-rn}a_n\right| \leq 2^{-r}\sum_{n=1}^{N}|a_n|.$$

É imediato que, dado $m \in \mathbb{N}$,

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} 2^{-rn} a_n g_{n,r}\right\|_{\infty,m} = \max\left\{\left|\sum_{n=1}^{N} 2^{-rn} a_n g_{n,r}(x)\right| : x \in [0,m]\right\} = 0$$

sempre que $r > m$. Consequentemente,

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} 2^{-rn} a_n g_{n,r}\right\|_{\infty,m} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

para cada $m \in \mathbb{N}$. Deste modo,

$$\begin{aligned}
d_X\left(\sum_{n=1}^{N} 2^{-rn} a_n g_{n,r}, 0\right) &= \left\|\sum_{n=1}^{N} 2^{-rn} a_n g_{n,r}\right\|_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \cdot \frac{\left\|\sum_{n=1}^{N} 2^{-rn} a_n g_{n,r}\right\|_{\infty,m}}{1 + \left\|\sum_{n=1}^{N} 2^{-rn} a_n g_{n,r}\right\|_{\infty,m}} \\
&= \left\|\sum_{n=1}^{N} 2^{-rn} a_n g_{n,r}\right\|_1 + \sum_{m=r+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \cdot \frac{\left\|\sum_{n=1}^{N} 2^{-rn} a_n g_{n,r}\right\|_{\infty,m}}{1 + \left\|\sum_{n=1}^{N} 2^{-rn} a_n g_{n,r}\right\|_{\infty,m}} \\
&\leq 2^{-r} \sum_{n=1}^{N} |a_n| + \sum_{m=r+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{N} a_n g_n \in \mathcal{A}_0$ e

$$W \setminus \{0\} \subset \mathcal{A}_0.$$

Definamos $v := (v_r)_{r=1}^{\infty}$ fazendo

$$v_1(x) := \begin{cases} 1 - x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

e $v_r \equiv 0$ para cada $r \geq 2$. Temos, pois:

(i) $d_X(v_r, 0) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$;

(ii) $v_r \in X$ para cada $r \in \mathbb{N}$;

(iii) $v_r \notin \mathcal{A}$ para cada $r \in \mathbb{N}$.

Segue de (i), (ii) e (iii) que $v \in c_0(X) \setminus \mathcal{A}_0$.

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
d_X(\phi_n, v_1) &= \|\phi_n - v_1\|_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|\phi_n - v_1\|_{\infty,m}}{1 + \|\phi_n - v_1\|_{\infty,m}} \\
&= n^{-1} \int_{x_{n_1}^{(1)}}^{\infty} |g_{n,1}| + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|g_{n,1}\|_{\infty,m}}{1 + \|g_{n,1}\|_{\infty,m}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq n^{-1} + \sum_{m=n+1}^{\infty} 2^{-m} \\ &= n^{-1} + 2^{-n} \\ &\leq 2n^{-1} \end{aligned}$$

segue de (3.4) que

$$\begin{aligned} d_{c_0(X)}(g_n, v) &= \sup\left\{d_X(\phi_n, v_1), d_X\left(2^{-2n} g_{n,2}, v_2\right), d_X\left(2^{-3n} g_{n,3}, v_3\right), \ldots\right\} \\ &\leq \sup\left\{2n^{-1}, d_X\left(2^{-2n} g_{n,2}, v_2\right), d_X\left(2^{-3n} g_{n,3}, v_3\right), \ldots\right\} \\ &= \sup\left\{2n^{-1}, d_X\left(2^{-2n} g_{n,2}, 0\right), d_X\left(2^{-3n} g_{n,3}, 0\right), \ldots\right\} \\ &\leq \sup\left\{2n^{-1}, 2^{-2n+1}, 2^{-3n+1}, \ldots\right\} = 2n^{-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Isso significa que $v \in \overline{W}$. Como $v \notin \mathcal{A}_0 \cup \{0\}$, segue que $\overline{W} \setminus \{0\} \not\subset \mathcal{A}_0$ e, assim sendo, $\mathcal{A}_0$ não é $(\aleph_0, \mathfrak{c})$-espaçável em $\left(c_0(X), d_{c_0(X)}\right)$. ■

Para $p > 0$, consideremos o espaço de sequências

$$\ell_p(X) := \{(f_r)_{r=1}^{\infty} : f_r \in X \text{ para todo } r \text{ e } (d_X(f_r, 0))_{r=1}^{\infty} \in \ell_p\}$$

munido da métrica

$$d_{\ell_p(X)}\left((f_r)_{r=1}^{\infty}, (g_r)_{r=1}^{\infty}\right) = \begin{cases} \sum\limits_{r=1}^{\infty} \left[d_X(f_r, g_r)\right]^p, & \text{se } 0 < p < 1, \\ \left(\sum\limits_{r=1}^{\infty} \left[d_X(f_r, g_r)\right]^p\right)^{1/p}, & \text{se } 1 \leq p < \infty. \end{cases}$$

Observemos que $\left(\ell_p(X), d_{\ell_p(X)}\right)$ é um espaço vetorial métrico. Seja $\mathcal{A}_p \subset \ell_p(X)$ o conjunto definido por

$$\mathcal{A}_p := \{(f_r)_{r=1}^{\infty} : f_r \in \mathcal{A} \text{ para cada } r \text{ e } (d_X(f_r, 0))_{r=1}^{\infty} \in \ell_p\}.$$

Mostremos que $\mathcal{A}_p$ é não-vazio. Para cada $r \in \mathbb{N}$, definimos $f_r\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por

$$f_r(x) = \begin{cases} n^2 2^n (x - n), & \text{se } n \leq x \leq n + \dfrac{1}{n2^n} \text{ para algum inteiro } n \geq r, \\ -n^2 2^n \left(x - n - \dfrac{1}{n2^n}\right), & \text{se } n + \dfrac{1}{n2^n} \leq x \leq n + \dfrac{1}{n2^{n-1}} \text{ para algum inteiro } n \geq r, \\ 0, & \text{se } x \notin \bigcup\limits_{n=r}^{\infty} \left[n, n + \dfrac{1}{n2^{n-1}}\right]. \end{cases}$$

Obviamente, cada f_r é uma função contínua e é simples verificar que $\|f_r\|_1 = 2^{-r+1}$ e que $f_r\left(n + \dfrac{1}{n2^n}\right) = n$ se $n \geq r$. Consequentemente, $f_r \in \mathcal{A}$ para cada $r \in \mathbb{N}$. Fixado $p > 0$, seja $(a_r)_{r=1}^{\infty} \in \ell_p$ tal que $a_r \neq 0$ para cada $r \in \mathbb{N}$. Se tomarmos

$$(g_r)_{r=1}^{\infty} = \left(2^{r-1} a_r f_r\right)_{r=1}^{\infty},$$

então

$$d_X\left(g_r,0\right)=\|g_r\|_1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\|g_r\|_{\infty,n}}{1+\|g_r\|_{\infty,n}}=|a_r|+\sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\|g_r\|_{\infty,n}}{1+\|g_r\|_{\infty,n}}.$$

Notemos que

$$\left(\sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\|g_r\|_{\infty,n}}{1+\|g_r\|_{\infty,n}}\right)^p\leq\left(\sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right)^p=\frac{1}{2^{rp}}.$$

Por isso,

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\|g_r\|_{\infty,n}}{1+\|g_r\|_{\infty,n}}\right)^p\leq\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^{rp}}=\frac{1}{2^p-1}$$

e assim

$$\left(\sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\|g_r\|_{\infty,n}}{1+\|g_r\|_{\infty,n}}\right)_{r=1}^{\infty}\in\ell_p.$$

Consequentemente,

$$\left(d_X\left(g_r,0\right)\right)_{r=1}^{\infty}=\left(|a_r|\right)_{r=1}^{\infty}+\left(\sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\|g_r\|_{\infty,n}}{1+\|g_r\|_{\infty,n}}\right)_{r=1}^{\infty}\in\ell_p$$

e então $(g_r)_{r=1}^{\infty}\in\mathcal{A}_p$.

As provas dos Teoremas 3.8 e 3.10 podem ser adaptadas, *mutatis mutandis*, para provar o seguinte:

Teorema 3.11 *Para cada $p>0$, o conjunto $\mathcal{A}_p$*

(i) é pontualmente $\mathfrak{c}$-espaçável em $\left(\ell_p\left(X\right),d_{\ell_p(X)}\right)$, para cada $p>0$;

(ii) é $(1,\mathfrak{c})$-espaçável em $\left(\ell_p\left(X\right),d_{\ell_p(X)}\right)$;

(iii) não é $(\aleph_0,\mathfrak{c})$-espaçável em $\left(\ell_p\left(X\right),d_{\ell_p(X)}\right)$.

Referências

[1] R.M. Aron, L. Bernal-González, D. Pellegrino, J.B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability: The Search for Linearity in Mathematics*. Monographs and Research Notes in Mathematics. CRC Press, Boca Raton (2016).

[2] L. Bernal-González, M.O. Cabrera, *Lineability criteria, with applications*, J. Funct. Anal. **266** (2014), no. 6, 3997–4025.

[3] G. Botelho, V.V. Fávaro, D. Pellegrino, J.B. Seoane-Sepúlveda, $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ *is spaceable for every* $p > 0$, Linear Algebra Appl. **436** (2012), no. 9, 2963–2965.

[4] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira, Fundamentos de Análise Funcional, 3^a edição, Coleção Textos Universitários, SBM (2023).

[5] M.C. Calderón-Moreno, P.J. Gerlach-Mena, J.A. Prado-Bassas, *Algebraic structure of continuous, unbounded and integrable functions*, J. Math. Anal. Appl. **470** (2019), 348–359.

[6] V.V. Fávaro, D. Pellegrino, A. Raposo Jr., G. Ribeiro, *Lineability and unbounded, continuous and integrable functions*, Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat. **117** (2023), no. 104, 21p.

[7] V.V. Fávaro, D. Pellegrino, A. Raposo Jr., G.S. Ribeiro, *General criteria for a stronger notion of lineability*, Proc. Amer. Math. Soc. **152** (3) (2024), 941–954.

[8] V.V. Fávaro, D. Pellegrino, D. Tomaz, *Lineability and spaceability: a new approach*, Bull. Braz. Math. Soc. **51** (2020), 27–46.

[9] V.P. Fonf, V.I. Gurariy, M.I. Kadets, *An infinite dimensional subspace of* $\mathcal{C}[0,1]$ *consisting of nowhere differentiable functions*, C. R. Acad. Bulgare Sci. **52** (1999), no. 11-12, 13–16.

[10] D.Kitson, R.M. Timoney, *Operator ranges and spaceability*, J. Math. Anal. Appl. **378** (2011), no. 2, 680–686.

[11] P. Leonetti, T. Russo, and J. Somaglia, *Dense lineability and spaceability in certain subsets of* ℓ_∞, Bull. Lond. Math. Soc. **55** (2023), 1–21.

[12] J. Lindenstrauss, *On a theorem of Murray and Mackey*, An. Acad. Brasil. Ci. **39** (1967), 1–6.

[13] V. Nestoridis, *A project about chains of spaces, regarding topological and algebraic genericity and spaceability*, arXiv:2005.01023, (2020).

[14] D. Pellegrino, A. Raposo Jr, *Pointwise lineability in sequence spaces*. Indag. Math. (N.S.) **32** (2021), 536–546.

[15] D. Papathanasiou, *Dense lineability and algebrability of* $\ell^\infty \setminus c_0$, Proc. Amer. Math. Soc. **150** (2022), no. 3, 991–996.

[16] H.P. Rosenthal, *On quasi-complemented subspaces of Banach spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **59** (1968), 361–364.

[17] A. Wilansky, *Semi-Fredholm maps of FK spaces*, Math. Z. **144** (1975), no. 1, 9–12.