



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Gleudson Filadelfo Dimaranes
Método de Nehari e Aplicações

São Luís - MA
2026

Gleudson Filadelfo Dimaranes

Método de Nehari e Aplicações

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Maranhão.

Orientadora: Profa. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto

São Luís - MA

2026

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Dimaranes, Gleidson Filadelfo.

Método de Nehari e Aplicações / Gleidson Filadelfo
Dimaranes. - 2026.

67 p.

Orientador(a): Prof^a Dr^a Sandra Imaculada Moreira Neto.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em
Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São
Luis, 2026.

1. Método de Nehari. 2. Solução Ground State. 3.
Problema do Tipo Kirchhoff. I. Moreira Neto, Prof^a Dr^a
Sandra Imaculada. II. Título.

Gleudson Filadelfo Dimaranes

Método de Nehari e Aplicações

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Maranhão.

Dissertação de Mestrado. São Luís - MA, 24 de Fevereiro de 2026.

**Profa. Dra. Sandra Imaculada Moreira
Neto**
Orientadora
Universidade Estadual do Maranhão

**Prof. Dr. José Vanterler da Costa
Sousa**
Examinador Interno
Universidade Estadual do Maranhão

Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza
Examinador Externo
Universidade Federal Rural de Pernambuco

São Luís - MA
2026

À meus avós Francisco e Rita.

Agradecimentos

"Há certos milagres nos encontros", escreve Carla Madeira em Tudo é Rio. Ao olhar para trás e revisitar estes dois anos de mestrado, percebo que minha trajetória foi composta por esses pequenos milagres. Esta dissertação deixou de ser apenas um projeto para se tornar realidade graças aos encontros que me moldaram.

Agradeço, primeiramente, aos meus avós Francisco e Rita, pelo amor incondicional, pelo apoio constante e por me oferecerem a oportunidade de seguir com meus estudos. Sem a base que vocês me deram, nada disso seria possível.

À minha orientadora, Sandra Neto, expresso minha mais profunda gratidão pela orientação maravilhosa e pela condução impecável deste trabalho. Obrigado pela paciência, pelas dúvidas sanadas prontamente e, acima de tudo, por me receber sempre com um sorriso e me dar forças nos momentos de maior dificuldade.

Minha trajetória na matemática começou muito antes deste mestrado. Agradeço ao meu ex-professor de ensino médio, Gillyanny César, por ter despertado meu interesse por esta ciência, e aos meus professores de graduação, com um agradecimento especial à minha orientadora de monografia, Giovana Alves.

No âmbito do PPGMAT-UFMA, agradeço a todos os docentes que contribuíram para minha capacitação, em especial aos professores Gustavo Silvestre, Anselmo Barganha, Vanessa Ramos, Ermerson Rocha e José Santana. Sou grato também à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste mestrado.

Aos amigos, que transformaram a dureza da pós graduação em momentos de partilha. Obrigado pelas horas de estudo, pelos lanches, pelo café (sempre muito café!) e por dividirem o desespero e as vitórias de cada prova.

A todos que, de alguma maneira, cruzaram meu caminho e contribuíram para que eu chegasse até aqui, meu mais profundo obrigado.

"Nunca poderei ler todos os livros que quero; nunca poderei ser todas as pessoas que quero e viver todas as vidas que quero. Quero viver e sentir as nuances, os tons e as variações das experiências físicas e mentais possíveis de minha existência. E sou terrivelmente limitada."

(Sylvia Plath)

Resumo

Neste trabalho, utilizamos o Método de Nehari, baseado em [9], para mostrar a existência de uma solução do tipo Ground State para o seguinte problema de valor de contorno

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega; \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ denota um domínio limitado, Δ é o operador Laplaciano e a não linearidade $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaz hipóteses adequadas de regularidade e crescimento, tais como

$$|f(t)| \leq C(1 + |t|^{r-1}),$$

para constantes $C > 0$ e $2 < r < 2^*$, onde 2^* representa o expoente crítico de Hardy-Sobolev com valor

$$2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2}, & \text{se } N \geq 3; \\ \infty, & \text{se } N = 1 \text{ ou } N = 2. \end{cases}$$

Também aplicamos o Método de Nehari para provar a existência de uma solução nodal com energia mínima para o problema do tipo Kirchhoff proposto em [10] e descrito por

$$(P) \quad \begin{cases} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u = f(u) & \text{em } \Omega; \\ u^+ \neq 0 \text{ e } u^- \neq 0 & \text{em } \Omega; \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio suave e limitado,

$$u^+(x) = \max\{u(x), 0\} \quad \text{e} \quad u^-(x) = \min\{u(x), 0\}; \quad \forall x \in \Omega$$

e assume-se que a não linearidade f , bem como o termo não local M da função de Kirchhoff, satisfazem hipóteses adequadas de regularidade e crescimento.

Palavras-chave: Método de Nehari, Solução Ground State, Problema do tipo Kirchhoff.

Abstract

In this work, we use the Nehari Method to show the existence of a Ground State solution for the following boundary value problem based in [9]

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega; \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ denotes a bounded domain, Δ is the Laplacian operator, and the nonlinearity $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfies suitable regularity and growth hypotheses, such as

$$|f(t)| \leq C(1 + |t|^{r-1}),$$

for constants $C > 0$ and $2 < r < 2^*$, where 2^* represents the critical Hardy-Sobolev exponent with value

$$2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2}, & \text{if } N \geq 3; \\ \infty, & \text{if } N = 1 \text{ or } N = 2. \end{cases}$$

We also apply Nehari's Method to prove the existence of a nodal solution with minimum energy for the Kirchhoff-type problem proposed in [10] and described by

$$(P) \quad \begin{cases} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u = f(u) & \text{in } \Omega; \\ u^+ \neq 0 \text{ e } u^- \neq 0 & \text{in } \Omega; \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is a smooth and bounded domain,

$$u^+(x) = \max\{u(x), 0\} \quad \text{and} \quad u^-(x) = \min\{u(x), 0\}; \quad \forall x \in \Omega$$

and it is assumed that the nonlinearity f , as well as the nonlocal term M , satisfy adequate regularity and growth hypotheses.

Keywords: Nehari method, ground state solution, Kirchhoff-type problem.

Lista de símbolos

Ω	Subconjunto limitado do \mathbb{R}^N ;
$\partial\Omega$	Fronteira do conjunto Ω ;
$ \Omega $	Medida de Lebesgue do subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;
Φ	Funcional Energia;
\mathcal{N}	Variedade de Nehari;
\mathcal{M}	Variedade de Nehari Nodal;
$\ \cdot\ $	Norma usual em $H_0^1(\Omega)$;
$\ \cdot\ _p$	Norma usual em L^p ;
$\ \cdot\ _{H^1}$	Norma usual em H^1 ;
$\ \cdot\ _{H^{-1}}$	Norma usual em H^{-1} ;
$L_{loc}^1(\Omega)$	Espaço das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ integráveis em cada subconjunto compacto $K \subset \Omega$;
L^p	Espaço de Lebesgue;
X^*	Dual Topológico;
$o_n(1)$	Sequências que convergem a zero quando $n \rightarrow +\infty$;
$d\sigma$	Medida da superfície em $\partial\Omega$;
$D_i u$	i -ésima derivada fraca de u em Ω ;
$W^{1,p}$	Espaço de Sobolev;
$H^1(\Omega)$	Subespaço de $L^2(\Omega)$ cujas derivadas fracas de primeira ordem pertencem a $L^2(\Omega)$;
$H_0^1(\Omega)$	Fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com relação a $\ \cdot\ _{H^1}$;
$H^{-1}(\Omega)$	Espaço dual de $H_0^1(\Omega)$;
$2^* = \frac{2N}{N-2}$	Expoente crítico de Hardy-Sobolev;
C_0^∞	Espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω ;

u^+	Parte positiva da função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$;
u^-	Parte negativa da função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$;
\hookrightarrow	Imersão contínua;
\rightarrow	Convergência forte, quando $n \rightarrow \infty$;
\rightharpoonup	Convergência fraca, quando $n \rightarrow \infty$;
<i>q.t.p.</i>	quase todo ponto;
∇u	Gradiente da função u , i.e., $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	O MÉTODO DE NEHARI	15
2.1	Estrutura variacional	17
2.2	Lemas Técnicos	23
2.3	Demonstração do Teorema 2.1	30
2.3.1	Via Teorema da Função Implícita	30
2.3.2	Via Teorema dos Multiplicadores de Lagrange	31
3	EXISTÊNCIA DE UMA SOLUÇÃO NODAL COM ENERGIA MÍNIMA PARA UMA EQUAÇÃO DE KIRCHHOFF	32
3.1	Estrutura variacional e Lemas técnicos	35
3.2	Demonstração do Teorema 3.1	43
APÊNDICE A	ESPAÇOS DE LEBESGUE L^p	52
APÊNDICE B	O ESPAÇO DE SOBOLEV H_0^1	55
APÊNDICE C	FUNCIONAIS DIFERENCIÁVEIS	59
APÊNDICE D	MULTIPLICADORES DE LAGRANGE	61
APÊNDICE E	RESULTADOS COMPLEMENTARES	63
	Referências	65

1 Introdução

Os Métodos Variacionais são ferramentas poderosas para resolver problemas da teoria de Equações Diferenciais Parciais Elípticas. A essência por trás destes métodos consiste na obtenção de pontos críticos para um funcional Φ associado ao problema considerado. Mais precisamente, busca-se determinar um ponto crítico u em um espaço de Banach E apropriado que satisfaça $\Phi'(u)v = 0$ para todo $v \in E$.

Uma maneira de encontrar esses pontos é tratar a equação como um problema de minimização. No entanto, há situações em que o funcional Φ associado ao problema não é limitado inferiormente, impossibilitando a busca por mínimos globais. Surge, assim, a necessidade de restringir o funcional Φ a um conjunto onde ele seja, de fato, limitado inferiormente. A vantagem dessa nova abordagem reside no fato de que, sob hipóteses adequadas, qualquer ponto crítico encontrado sob essa restrição herda a propriedade de ser um ponto crítico no espaço inteiro.

Foi esta alternativa estabelecida por Zeev Nehari e introduzida em dois de seus artigos, a saber, em [19] e [20]. Nesses trabalhos, Nehari considerou uma EDO de segunda ordem em um intervalo aberto (a, b) e mostrou a existência de uma solução não trivial minimizando o funcional Φ de classe C^2 restrito ao conjunto $\mathcal{N} \subset E$, dado por

$$\mathcal{N} := \{u \in E \setminus \{0\} : \Phi'(u)u = 0\},$$

cujos passos decisivos de sua demonstração envolveram o Teorema da Função Implícita para provar que a restrição a \mathcal{N} atua como um vínculo natural.

O conjunto \mathcal{N} é conhecido na literatura como Variedade de Nehari. Vale notar que, embora o termo dê nome ao método (Método da Variedade de Nehari ou, simplesmente, Método de Nehari), \mathcal{N} nem sempre admite estrutura de variedade.

No capítulo 2, para ilustrar a aplicação deste método no contexto de Equações Diferenciais Parciais, iniciamos esta dissertação estudando o seguinte problema de valor de contorno proposto em [9]

$$-\Delta u = f(u) \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ denota um domínio limitado, Δ é o operador Laplaciano e a não linearidade f satisfaz hipóteses adequadas de regularidade e crescimento. Estabelecemos a existência de uma solução para o problema acima de duas maneiras distintas: a primeira, análoga a realizada por Nehari, utiliza o Teorema da Função Implícita; a segunda emprega o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange aplicado ao problema de minimização com restrição.

Neste caso, busca-se um minimizador de $\Phi|_{\mathcal{N}}$ e mostra-se que o multiplicador de Lagrange se anula, recuperando assim uma solução fraca para o problema sem restrições.

Posteriormente, no capítulo 3, inspirado pelo trabalho de Figueiredo e Nascimento (2015) [10], fizemos uso do Método de Nehari com o objetivo de provar a existência de uma solução nodal (solução que muda de sinal) para a classe de equações do tipo Kirchhoff descritas por

$$(P) \quad \begin{cases} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u = f(u) & \text{em } \Omega; \\ u^+ \neq 0 \text{ e } u^- \neq 0 & \text{em } \Omega; \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado suave e

$$u^+(x) = \max\{u(x), 0\} \quad \text{e} \quad u^-(x) = \min\{u(x), 0\}$$

para todo $x \in \Omega$. Note que, neste caso, $u = u^+ + u^-$ e $|u| = u^+ - u^-$.

Para tratar soluções mudando de sinal, introduz-se a chamada variedade de Nehari nodal,

$$\mathcal{M} = \{w \in \mathcal{N} : \Phi'(w), w^+ = 0, \Phi'(w), w^- = 0\}.$$

Sob hipóteses adequadas, essa construção permite obter soluções nodais de energia mínima, frequentemente com exatamente dois domínios nodais [6, 22].

Na demonstração do teorema principal, optamos por uma abordagem alternativa à utilizada em [10]. Enquanto os autores fundamentam a prova na aplicação de um Lema de Deformação Quantitativa e em argumentos de grau topológico, neste trabalho utilizamos um argumento direto de minimização e contradição, proposto em [17]. Essa escolha decorre da estrutura do conjunto de Nehari Nodal \mathcal{M} . Demonstraremos que o minimizador de $\Phi|_{\mathcal{M}}$ é um ponto crítico no espaço inteiro assumindo, por contradição, que a derivada é não nula e construindo uma deformação local que projeta a solução em um nível de energia inferior ao ínfimo estabelecido. Concluímos a prova mostrando que a solução possui exatamente dois domínios nodais. Por fim, encerramos a dissertação apresentando alguns apêndices com resultados que fundamentam a teoria e os cálculos usados ao longo do trabalho.

2 O Método de Nehari

Neste capítulo, dedicamo-nos a detalhar a aplicação do Método da Variedade de Nehari no contexto de equações elípticas semilineares. Para expor a técnica com o devido rigor e clareza, usaremos a apostila [9] como objeto de estudo para o seguinte problema de valor de contorno

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega; \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ denota um domínio limitado. A fim de estabelecer a existência de soluções não triviais para o problema (P_1) , é necessário impor certas condições de regularidade e crescimento sobre a não linearidade f , as quais descrevemos a seguir.

A função f é de classe $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e existem constantes $C, r \in \mathbb{R}$ com $2 < r < 2^*$ tais que

$$(f_1) : \quad |f(t)| \leq C(1 + |t|^{r-1}) \text{ para todo } t \in \mathbb{R};$$

Além disso, considere as seguintes condições na origem e no infinito:

$$(f_2) : \quad \lim_{|t| \rightarrow 0} \frac{|f(t)|}{|t|} = 0;$$

$$(f_3) : \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(t)}{t^2} = +\infty, \quad \text{onde } F(t) = \int_0^t f(s) ds;$$

$$(f_4) : \quad \text{A função } t \mapsto \frac{f(t)}{t} \text{ é crescente para } |t| > 0.$$

Exemplo 2.1. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = |t|^{p-2}t$, com $2 < p < r \leq 2^*$. Como $p \leq r$, temos que o crescimento de f é controlado por $|t|^{r-1}$. Logo, existe uma constante $C > 0$ tal que $|f(t)| = |t|^{p-1} \leq C(1 + |t|^{r-1})$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Perto da origem, o limite é dado por*

$$\lim_{|t| \rightarrow 0} \frac{|f(t)|}{|t|} = \lim_{|t| \rightarrow 0} \frac{|t|^{p-1}}{|t|} = \lim_{|t| \rightarrow 0} |t|^{p-2} = 0,$$

uma vez que $p > 2$. Avaliando o comportamento no infinito, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{p}t^p}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{p}t^{p-2} = +\infty.$$

Por fim, para $t > 0$, a função $\frac{f(t)}{t} = \frac{t^{p-1}}{t} = t^{p-2}$ é estritamente crescente, visto que o expoente $p - 2$ é estritamente positivo.

Observação 2.1. As hipóteses (f_1) e (f_2) garantem que, dado $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq \varepsilon|t| + C_\varepsilon|t|^{r-1}; \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

De fato, de (f_2) segue que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t| < \delta \Rightarrow \frac{|f(t)|}{|t|} < \varepsilon.$$

Dessa forma, $|f(t)| < \varepsilon|t|$ quando $|t| < \delta$. Agora, vejamos para valores grandes de $t \in \mathbb{R}$. Utilizando (f_1) e o fato de que $2 < r$, obtemos, para $\delta \leq |t|$,

$$\delta^{r-1} \leq |t|^{r-1} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{|t|^{r-1}}{\delta^{r-1}}$$

e assim,

$$\begin{aligned} |f(t)| &\leq C(1 + |t|^{r-1}) \\ &\leq C\left(\frac{|t|^{r-1}}{\delta^{r-1}} + |t|^{r-1}\right) \\ &= C\left(\frac{1}{\delta^{r-1}} + 1\right)|t|^{r-1} \\ &\leq \varepsilon|t| + C\left(\frac{1}{\delta^{r-1}} + 1\right)|t|^{r-1}. \end{aligned}$$

Tomando $C_\varepsilon = C\left(\frac{1}{\delta^{r-1}} + 1\right)$, obtemos (2.1).

Antes de enunciarmos o principal resultado deste capítulo, é importante conhecermos a definição a seguir.

Definição 2.1 (Solução Ground State). *Considere um funcional $\Phi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Um ponto crítico $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ de Φ tal que $\Phi(u) = c$ é dito **Ground State** ou **ponto crítico de energia mínima** se $c = \inf\{\Phi(u) \mid u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}, \Phi'(u) = 0\}$. Se $u_0 \in \mathcal{N}$ é tal que $\Phi(u_0) = c$, então u_0 é chamado **Solução Ground State**.*

Teorema 2.1. *Considere $(f_1) - (f_4)$ verdadeiras. Então (P_1) tem uma solução ground state.*

Nas seções a seguir, estabeleceremos a estrutura variacional necessária para a prova deste teorema. Inicialmente, definiremos o funcional energia associado e introduziremos a variedade de Nehari. O nosso objetivo será demonstrar que o funcional restrito a essa variedade possui um minimizador e, subsequentemente, provar que este minimizador é uma solução fraca do problema (P_1) .

2.1 Estrutura variacional

Multiplicando a primeira equação em (P_1) por uma função teste $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ e integrando sobre Ω , obtemos

$$-\int_{\Omega} \Delta u \phi \, dx = \int_{\Omega} f(u) \phi \, dx. \quad (2.2)$$

Usando a Fórmula de Green (Teorema E.3) para integrar por partes o termo à esquerda, temos

$$-\int_{\Omega} \Delta u \phi \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \phi \, d\sigma, \quad (2.3)$$

em que $d\sigma$ denota a medida da superfície em $\partial\Omega$. Sendo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, a condição de contorno de Dirichlet nos garante que $\phi = 0$ em $\partial\Omega$. Logo,

$$-\int_{\Omega} \Delta u \phi \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx \quad (2.4)$$

e, portanto, segue de (2.2), (2.3) e (2.4) que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx - \int_{\Omega} f(u) \phi \, dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Pela Definição (B.3), concluímos que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx - \int_{\Omega} f(u) \phi \, dx = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \quad (2.5)$$

Definição 2.2 (Solução fraca). *Uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ é **solução fraca** do problema (P_1) se satisfaz a relação (2.5) para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$.*

Consideremos o funcional energia $\Phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (P_1)

$$\Phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega} F(u) \, dx.$$

Primeiramente, observe que o funcional Φ está bem definido. De fato, a função $u \mapsto \frac{1}{2} \|u\|^2$ está bem definida para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Por outro lado, decorre da restrição de crescimento (2.1) que

$$\begin{aligned} |F(u)| &= \left| \int_0^u f(s) \, ds \right| \\ &\leq \int_0^u |f(s)| \, ds \\ &\leq \int_0^u (\varepsilon |s| + C_\varepsilon |s|^{r-1}) \, ds \\ &= \varepsilon \int_0^u |s| \, ds + C_\varepsilon \int_0^u |s|^{r-1} \, ds \end{aligned}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}|u|^2 + \frac{C_\varepsilon}{r}|u|^r. \quad (2.6)$$

Pelas imersões de Sobolev (ver Teorema B.3), $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, com $p \in [1, 2^*]$, temos

$$\int_{\Omega} |F(u)| \, dx \leq \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2}|u|^2 + \frac{C_\varepsilon}{r}|u|^r \right) \, dx < +\infty.$$

Observe que a restrição de crescimento subcrítico (2.1) implica na boa definição do funcional energia Φ no espaço $H_0^1(\Omega)$. Caso f apresentasse um crescimento superior ao expoente crítico, a primitiva F comportar-se-ia como $|u|^r$ com $r > 2^*$. Visto que a imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ não se verifica para $p > 2^*$, não poderíamos garantir a integrabilidade de F , tornando o funcional mal definido.

Proposição 2.1 (Diferenciabilidade de Φ). *O funcional energia $\Phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e*

$$\Phi'(u)\phi = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx - \int_{\Omega} f(u)\phi \, dx = 0. \quad (2.7)$$

Demonstração. Primeiramente, vamos encontrar a derivada de Gâteaux de $u \mapsto I_1(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx$ na direção ϕ , definida por

$$I_1'(u)\phi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_1(u + t\phi) - I_1(u)}{t}.$$

Observemos que, para $t \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{I_1(u + t\phi) - I_1(u)}{t} &= \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u + t\phi)|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right) \\ &= \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u + t\nabla\phi|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right) \\ &= \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + 2t\nabla u \nabla \phi + t^2|\nabla\phi|^2) \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right) \\ &= \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + t \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx + \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla\phi|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right) \\ &= \frac{1}{t} \left(t \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx + \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla\phi|^2 \, dx \right) \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx + \frac{t}{2} \int_{\Omega} |\nabla\phi|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$I_1'(u)\phi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_1(u + t\phi) - I_1(u)}{t} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx$$

e I_1' é Gâteaux diferenciável.

Veja que o lado direito desta igualdade pode ser visto como o seguinte funcional linear

$$T_u : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi \mapsto T_u(\phi) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx.$$

A derivada $I_1' : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ é dada por $I_1'(u) = T_u$. Além disso, dados $u, w \in H_0^1(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, note que

$$I_1'(u + w) = T_{u+w} = T_u + T_w = I_1'(u) + I_1'(w)$$

e

$$I_1'(\alpha u) = T_{\alpha u} = \alpha T_u = \alpha I_1'(u),$$

logo I_1' é uma aplicação linear. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} \|I_1'(u) - I_1'(w)\|_{H^{-1}} &= \sup_{\|\phi\| \leq 1} |(I_1'(u) - I_1'(w))\phi| \\ &= \sup_{\|\phi\| \leq 1} |I_1'(u - w)\phi| \\ &= \sup_{\|\phi\| \leq 1} \left| \int_{\Omega} \nabla(u - w) \nabla \phi \, dx \right| \\ &\leq \sup_{\|\phi\| \leq 1} \int_{\Omega} |\nabla(u - w) \nabla \phi| \, dx \\ &\leq \sup_{\|\phi\| \leq 1} (\|u - w\| \|\phi\|) \\ &= \|u - w\|. \end{aligned}$$

Isso mostra que I_1' é Lipschitz e, portanto, contínuo. Assim, $I_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Quanto ao funcional $u \mapsto I_2(u) = \int_{\Omega} F(u) \, dx$, sejam $u, \phi \in H_0^1(\Omega)$. Vejamos que

$$\frac{I_2(u + t\phi) - I_2(u)}{t} = \frac{1}{t} \left(\int_{\Omega} F(u + t\phi) \, dx - \int_{\Omega} F(u) \, dx \right) = \int_{\Omega} \frac{F(u + t\phi) - F(u)}{t} \, dx.$$

Fixado $x \in \Omega$, temos que F é uma função de valores reais, logo o Teorema do Valor Médio garante a existência de $\theta \in \mathbb{R}$, satisfazendo $0 < \theta < 1$, tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} [F(u(x) + t\phi(x)) - F(u(x))] &= \frac{1}{t} \left[\frac{\partial F}{\partial \phi}(u(x) + \theta\phi(x)) t\phi(x) \right] \\ &= \frac{f(u(x) + \theta t\phi(x)) t\phi(x)}{t} \\ &= f(u(x) + \theta t\phi(x)) \phi(x). \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\frac{I_2(u + t\phi) - I_2(u)}{t} = \int_{\Omega} f(u + \theta t\phi) \phi \, dx. \quad (2.8)$$

Mostremos que a integral em (2.8) é finita. Para tanto, notemos que

$$\begin{aligned} |f(u(x) + \theta t\phi(x))\phi(x)| &= |f(u(x) + \theta t\phi(x))||\phi(x)| \\ &\leq C(1 + |u(x) + \theta t\phi(x)|^{r-1})|\phi(x)| \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} &\leq C[1 + (|u(x)| + \theta|t||\phi(x)|)^{r-1}]|\phi(x)| \\ &\leq C[1 + (|u(x)| + |\phi(x)|)^{r-1}]|\phi(x)| \\ &\leq C[1 + 2^{r-2}(|u(x)|^{r-1} + |\phi(x)|^{r-1})]|\phi(x)| \quad (2.10) \\ &\leq C|\phi(x)| + C2^{r-2}(|\phi(x)||u(x)|^{r-1} + |\phi(x)|^r) \\ &\leq k(|\phi(x)| + |\phi(x)||u(x)|^{r-1} + |\phi(x)|^r). \end{aligned}$$

Nas estimativas acima, (2.9) segue da hipótese (f_1) , enquanto (2.10) decorre do Lema A.1 e, além disso, $k = \max\{C, C2^{r-2}\}$.

Resta verificar que a função majorante $(|\phi| + |\phi||u|^{r-1} + |\phi|^r) \in L^1(\Omega)$. Com efeito, como Ω é limitado, temos a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, logo $|\phi| \in L^1(\Omega)$. Além disso, o fato de $u, \phi \in H_0^1(\Omega)$ implica, pela imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), p \in [1, 2^*]$ que $u, \phi \in L^p(\Omega)$ e, conseqüentemente, $|u|^r, |\phi|^r \in L^1(\Omega)$. Por fim, visto que os expoentes r e $\frac{r}{r-1}$ são conjugados, $|\phi| \in L^p(\Omega)$ e $|u|^{r-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, a Desigualdade de Hölder garante que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\phi||u|^{r-1} dx &\leq \left(\int_{\Omega} |\phi|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\Omega} (|u|^{r-1})^{\frac{r}{r-1}} dx \right)^{\frac{r-1}{r}} \\ &= \|\phi\|_r \left(\int_{\Omega} |u|^r dx \right)^{\frac{r-1}{r}} \\ &= \|\phi\|_r \|u\|_r^{r-1} \\ &\leq C\|\phi\|(C\|u\|)^{r-1} \quad (2.11) \\ &= C^r \|\phi\| \|u\|^{r-1} < +\infty, \end{aligned}$$

onde (2.11) segue do fato de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ com $p \in [1, 2^*]$. Assim $|\phi||u|^{r-1} \in L^1(\Omega)$, o que conclui a demonstração de que $(|\phi| + |\phi||u|^{r-1} + |\phi|^r) \in L^1(\Omega)$.

Finalmente, observamos que, como f é contínua e $t \rightarrow 0$, temos a convergência pontual

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(u(x) + \theta t\phi(x))\phi(x) = f(u(x))\phi(x) \quad q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

Portanto, estando satisfeitas as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada, concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_2(u + t\phi) - I_2(u)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(u + \theta t\phi)\phi dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega} \lim_{t \rightarrow 0} f(u + \theta t \phi) \phi \, dx \\
 &= \int_{\Omega} f(u) \phi \, dx.
 \end{aligned}$$

Assim, o limite existe para todo $u, \phi \in H_0^1(\Omega)$ e dessa forma, $I_2'(u)\phi = \int_{\Omega} f(u)\phi \, dx$ e I_2 é Gâteaux diferenciável.

Para concluir que $\Phi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, resta verificar a continuidade da aplicação $I_2 : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}$. Dado $u \in H_0^1(\Omega)$, decorre de (2.1) que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |f(u)|^{\frac{r}{r-1}} \, dx &\leq \int_{\Omega} (\varepsilon|u| + C_{\varepsilon}|u|^{r-1})^{\frac{r}{r-1}} \, dx \\
 &\leq \int_{\Omega} 2^{\frac{r}{r-1}-1} [(\varepsilon|u|)^{\frac{r}{r-1}} + (C_{\varepsilon}|u|^{r-1})^{\frac{r}{r-1}}] \, dx \\
 &= 2^{\frac{1}{r-1}} \varepsilon^{\frac{r}{r-1}} \int_{\Omega} |u|^{\frac{r}{r-1}} \, dx + 2^{\frac{1}{r-1}} C_{\varepsilon}^{\frac{r}{r-1}} \int_{\Omega} |u|^r \, dx \\
 &= K_1 \|u\|_{\frac{r}{r-1}}^{\frac{r}{r-1}} + K_2 \|u\|_r^r, \quad K_1, K_2 > 0.
 \end{aligned}$$

Sabemos pelas imersões compactas de Sobolev, que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $p \in [1, 2^*)$ e, como Ω é limitado, segue da Proposição A.2 que $L^r(\Omega) \subset L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)$, pois $r > 2 > \frac{r}{r-1} \geq 1$. Logo, temos a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)$ e, portanto, o lado direito da desigualdade acima é finito e $f \in L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)$.

Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência convergindo para u quando $n \rightarrow +\infty$. Pelas imersões compactas de Sobolev, temos $u_n \rightarrow u$ em $L^p(\Omega)$, $p \in [1, 2^*)$. Além disso, pelo Teorema A.5, temos

(i) $u_n(x) \rightarrow u(x)$ em *q.t.p* $x \in \Omega$;

(ii) Existe uma função $h_p \in L^p(\Omega)$, $p \in [1, 2^*)$ tal que $|u_n(x)| \leq h_p(x)$ em *q.t.p.* $x \in \Omega$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como f é contínua e $|f(u_n) - f(u)| \in L^{\frac{r}{r-1}}$, temos que $f(u_n) \rightarrow f(u)$ *q.t.p* em Ω . Por outro lado, de (2.1), note que

$$\begin{aligned}
 |f(u_n) - f(u)| &\leq |f(u_n)| + |f(u)| \\
 &\leq \varepsilon(|u_n| + |u|) + C_{\varepsilon}(|u_n|^{r-1} + |u|^{r-1}) \\
 &\leq 2\varepsilon h_r + 2C_{\varepsilon} h_r^{r-1} \in L^1(\Omega).
 \end{aligned}$$

De fato, sendo $h_r \in L^r(\Omega)$ e Ω um domínio limitado, temos que $L^r(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, logo $h_r \in L^1(\Omega)$. Além disso, observe que $h_r^{r-1} \in L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)$, pois $(h_r^{r-1})^{\frac{r}{r-1}} = h_r^r \in L^1(\Omega)$.

Segue da Desigualdade de Hölder e do Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \|I'_2(u_n) - I'_2(u)\|_{H^{-1}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\|\phi\| \leq 1} |(I'_2(u_n) - I'_2(u))\phi| \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\|\phi\| \leq 1} \left| \int_{\Omega} (f(u_n) - f(u))\phi \, dx \right| \\
&\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\|\phi\| \leq 1} \left[\left(\int_{\Omega} |f(u_n) - f(u)|^{\frac{r}{r-1}} \, dx \right)^{\frac{r-1}{r}} \left(\int_{\Omega} |\phi|^r \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f(u_n) - f(u)\|_{\frac{r}{r-1}} \left(\sup_{\|\phi\| \leq 1} \|\phi\|_r \right) \\
&\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} C \|f(u_n) - f(u)\|_{\frac{r}{r-1}}. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Desse modo, fazendo $n \rightarrow +\infty$, o limite em (2.12) tende a zero, provando a continuidade desejada. \square

Assim, encontrar soluções de (P_1) é o mesmo que procurar pontos críticos do funcional de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ dado por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\Omega} F(u) \, dx. \tag{2.13}$$

Definição 2.3. *Seja E um espaço de Banach reflexivo e $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$. O conjunto*

$$\mathcal{N} := \{u \in E \setminus \{0\} : \Phi'(u)u = 0\}$$

*é chamado **Variedade de Nehari**.*

Observe que a condição $\Phi'(u) = 0$, para $u \neq 0$, implica diretamente que $\Phi'(u)u = 0$, ou seja, $u \in \mathcal{N}$. Isso caracteriza \mathcal{N} como um restrição natural que engloba todos os pontos críticos não triviais, permitindo transformar a busca por soluções em um problema de minimização com vínculo.

Observação 2.2. *Conforme [23], é importante ressaltar que a definição de \mathcal{N} não garante, por si só, que este conjunto possua estrutura de variedade diferenciável. Para que \mathcal{N} seja uma variedade de E , é necessário que $0 \in \mathbb{R}$ seja um valor regular do funcional vínculo*

$$J : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto J(u) = \Phi'(u)u,$$

isto é, $J'(u) \neq 0$ para todo $u \in \mathcal{N}$. Nestas condições, temos que $\mathcal{N} = J^{-1}(0)$ é uma variedade de E .

Os resultados a seguir estabelecem o cenário usual no qual pontos críticos para o funcional energia Φ são obtidos através do Método de Nehari.

2.2 Lemas Técnicos

O lema que demonstraremos a seguir desempenha um papel central no Método de Nehari. Ele estabelece que toda função não nula $u \in H_0^1(\Omega)$ pode ser projetada na variedade de Nehari de maneira única. Como consequência imediata, concluiremos que a variedade de Nehari é não vazia.

Lema 2.1. *Se $(f_1) - (f_4)$ ocorrem, então para $u \in H_0^1(\Omega)$ com $u \neq 0$, existe um único $t_0 = t_0(u) > 0$ tal que $t_0 u \in \mathcal{N}$ e $\Phi(t_0 u) = \max_{t \geq 0} \Phi(tu)$.*

Demonstração. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ com $u \neq 0$ e

$$h(t) = \Phi(tu) = \frac{t^2}{2} \|u\|^2 - \int_{\Omega} F(tu) \, dx.$$

Observe que, avaliando (2.6) em $tu \in H_0^1(\Omega)$ e integrando sobre Ω , obtemos

$$\int_{\Omega} F(tu) \, dx \leq \frac{\varepsilon}{2} t^2 \int_{\Omega} |u|^2 \, dx + \frac{C_{\varepsilon}}{r} t^r \int_{\Omega} |u|^r \, dx.$$

Usando as imersões de Sobolev com $r \in (2, 2^*)$, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\int_{\Omega} |u|^2 \, dx \leq C_1 \|u\|^2 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} |u|^r \, dx \leq C_2 \|u\|^r.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{t^2}{2} \|u\|^2 - \int_{\Omega} F(tu) \, dx \\ &\geq \frac{t^2}{2} \|u\|^2 - \left(\frac{\varepsilon}{2} t^2 \int_{\Omega} |u|^2 \, dx + C t^r \int_{\Omega} |u|^r \, dx \right) \\ &\geq \frac{t^2}{2} \|u\|^2 - \frac{\varepsilon}{2} t^2 C_1 \|u\|^2 - \frac{C_{\varepsilon}}{r} C_2 t^r \|u\|^r \\ &= (1 - \varepsilon C_1) \frac{t^2}{2} \|u\|^2 - \frac{C_{\varepsilon}}{r} C_2 t^r \|u\|^r. \end{aligned}$$

Sendo $2 < r < 2^*$, existe $t_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que $h(t) > 0$ para todo $t \in (0, t_1)$. Por outro lado, a condição (f_3) garante que, para qualquer $K > 0$ suficientemente grande, existe $M > 0$ tal que, se $t \geq M$, então

$$F(t) \geq Kt^2. \tag{2.14}$$

Como $u \neq 0$ em $L^2(\Omega)$, existe $\delta > 0$ tal que o conjunto

$$E_{\delta} := \{x \in \Omega : |u(x)| \geq \delta\}$$

tem medida de Lebesgue positiva. De fato, se para todo $\delta > 0$ a medida de E_{δ} fosse nula, então $u(x) = 0$ em *q.t.p.* $x \in \Omega$, contrariando a hipótese que $u \neq 0$ em $L^2(\Omega)$. Dado $t > 0$ suficientemente grande tal que $\delta t \geq M$, temos

$$|tu(x)| = t|u(x)| \geq t\delta \geq M, \quad \forall x \in E_{\delta}.$$

Logo, por (2.14),

$$F(tu(x)) \geq Kt^2|u(x)|^2, \quad \forall x \in E_\delta.$$

Desse modo, integrando sobre E_δ , vemos

$$Kt^2 \int_{E_\delta} |u|^2 dx \leq \int_{E_\delta} F(tu) dx \leq \int_{\Omega} F(tu) dx$$

e, conseqüentemente,

$$h(t) \leq t^2 \left(\frac{1}{2} \|u\|^2 - K \int_{E_\delta} |u|^2 dx \right).$$

Fixado $\delta > 0$ e u , podemos escolher K arbitrariamente grande de tal modo que

$$K > \frac{\|u\|^2}{2 \int_{E_\delta} |u|^2 dx}.$$

Dessa forma, existe $C > 0$ tal que

$$h(t) \leq -Ct^2; \quad \forall \delta t \geq M.$$

Assim, pelo Teorema de Weierstrass, h atinge um máximo global em algum $t_0 > 0$, isto é,

$$h(t_0) = \max_{t \geq 0} \Phi(tu).$$

Além disso, $h'(t_0) = 0$, ou seja,

$$t_0^2 \|u\|^2 = \int_{\Omega} f(t_0 u) t_0 u$$

e $t_0 u \in \mathcal{N}$. No que segue, mostraremos que t_0 é único. Para isso, suponhamos que exista $s > 0$, $s \neq t_0$, tal que $su \in \mathcal{N}$. Pela definição da variedade de Nehari, $\Phi'(su)su = 0$. Então,

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} \frac{f(t_0 u)}{t_0 u} u^2 dx \quad \text{e} \quad \|u\|^2 = \int_{\Omega} \frac{f(su)}{su} u^2 dx.$$

Logo,

$$\int_{\Omega} \left(\frac{f(t_0 u)}{t_0 u} - \frac{f(su)}{su} \right) u^2 dx = 0. \quad (2.15)$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $t_0 > s$ e assim, pela condição (f_4) , temos

$$\frac{f(t_0 u(x))}{t_0 u(x)} > \frac{f(su(x))}{su(x)}$$

para *q.t.p.* $x \in \Omega$, onde $u(x) \neq 0$. Multiplicando por $u^2(x)$ e integrando sobre Ω , obtemos

$$\int_{\Omega} \frac{f(t_0 u)}{t_0 u} u^2 dx > \int_{\Omega} \frac{f(su)}{su} u^2 dx$$

o que contradiz (2.15). Logo, a unicidade de t_0 está garantida. \square

O próximo resultado caracteriza o comportamento do conjunto \mathcal{N} e do funcional Φ . Mostraremos que \mathcal{N} é limitada inferiormente longe de zero, isto é, existe $\rho > 0$ tal que $\|u\| \geq \rho$ para todo $u \in \mathcal{N}$. Como consequência direta dessa estimativa, concluiremos que o ínfimo do funcional sobre \mathcal{N} é um valor estritamente positivo.

Lema 2.2. *Para todo $u \in \mathcal{N}$, existe uma constante positiva C independente de u tal que*

$$0 < C \leq \|u\| \quad e \quad \Phi(u) \geq 0.$$

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{N}$, então pela definição da variedade de Nehari, $\Phi'(u)u = 0$, ou seja,

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} f(u)u \, dx. \quad (2.16)$$

Por (2.1) e pelas imersões de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $p \in [1, 2^*]$, para todo $u \in \mathcal{N}$, temos que

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \int_{\Omega} f(u)u \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} (\varepsilon|u|^2 + C_{\varepsilon}|u|^r) \, dx \\ &\leq \varepsilon \int_{\Omega} |u|^2 \, dx + C_{\varepsilon} \int_{\Omega} |u|^r \, dx \\ &\leq \varepsilon C_1 \|u\|^2 + C_{\varepsilon} C_2 \|u\|^r \end{aligned}$$

e, desse modo,

$$\begin{aligned} \|u\|^2 \leq \varepsilon C_1 \|u\|^2 + C_{\varepsilon} C_2 \|u\|^r &\iff \|u\|^2 - \varepsilon C_1 \|u\|^2 \leq C_{\varepsilon} C_2 \|u\|^r \\ &\iff (1 - \varepsilon C_1) \|u\|^2 \leq C_{\varepsilon} C_2 \|u\|^r \\ &\iff 1 - \varepsilon C_1 \leq C_{\varepsilon} C_2 \|u\|^{r-2}. \end{aligned}$$

Escolhamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $1 - \varepsilon C_1 > 0$. Assim, temos

$$\frac{1 - \varepsilon C_1}{C_{\varepsilon} C_2} \leq \|u\|^{r-2} \iff \left(\frac{1 - \varepsilon C_1}{C_{\varepsilon} C_2} \right)^{\frac{1}{r-2}} \leq \|u\|$$

e definindo

$$C := \left(\frac{1 - \varepsilon C_1}{C_{\varepsilon} C_2} \right)^{\frac{1}{r-2}} > 0,$$

concluimos que

$$0 < C \leq \|u\|.$$

Agora, observe que por (2.16), podemos reescrever $\Phi(u)$ da seguinte forma

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(u)u \, dx - \int_{\Omega} F(u) \, dx = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} f(u)u - F(u) \right] \, dx. \quad (2.17)$$

Definamos $h(t) = \frac{1}{2}f(t)t - F(t)$. Derivando-a com relação a t , segue que

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt}(t) &= \frac{1}{2}f'(t)t + \frac{1}{2}f(t) - f(t) \\ &= \frac{1}{2}[f'(t)t - f(t)]. \end{aligned}$$

Note que, por (f_4) , obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{f(t)}{t} \right) = \frac{f'(t)t - f(t)}{t^2} > 0$$

e, conseqüentemente,

$$f'(t)t - f(t) > 0; \quad \forall t > 0, \quad (2.18)$$

mas esta última desigualdade equivale afirmar que a função h é crescente para $t > 0$. Desse modo, de (2.17), encontramos $\Phi(u) \geq 0$. \square

Observação 2.3. *O resultado do Lema 2.2 traduz duas propriedades geométricas fundamentais associadas ao Teorema do Passo da Montanha. Primeiramente, a estimativa $\|u\| \geq C > 0$ mostra que a variedade de Nehari \mathcal{N} é estritamente afastada da origem. Isso ocorre porque, próximo a zero, o termo não linear controlado pela hipótese (f_2) é fraco demais para contrabalançar o termo de ordem superior da equação. Para que o equilíbrio exigido por $\Phi'(u)u = 0$ seja atingido, as funções em \mathcal{N} precisam possuir uma norma mínima.*

Em segundo lugar, como $u = 0$ é um mínimo local estrito do funcional com $\Phi(0) = 0$, e as funções não nulas de \mathcal{N} correspondem aos pontos de máximo da energia Φ ao longo das direções radiais $t \mapsto \Phi(tu)$, a energia nesses picos deve ser estritamente positiva. É esta estrutura topológica que garante que o nível de energia mínima, $c = \inf_{u \in \mathcal{N}} \Phi(u)$, seja um valor estritamente positivo ($c > 0$).

Antes de apresentarmos o próximo resultado, seguindo L. Evans [8, p. 444], definamos o conceito de sequência minimizante.

Definição 2.4. *Seja*

$$c := \inf_{u \in \mathcal{N}} \Phi(u)$$

e escolhamos funções $u_n \in \mathcal{N}$ tais que

$$\Phi(u_n) \rightarrow c \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

*Dizemos que (u_n) é uma **sequência minimizante**.*

O lema a seguir estabelece a coercividade do funcional Φ quando restrito ao conjunto \mathcal{N} . Demonstraremos que, se uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}$ é minimizante, então a norma $\|u_n\|$ deve ser limitada. Em particular, isso assegura a limitação de qualquer sequência minimizante.

Lema 2.3. *Se $(u_n) \subset \mathcal{N}$ é uma sequência minimizante para Φ , então (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que (u_n) não é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Então, a menos de subsequência, $\|u_n\| \rightarrow \infty$. Consideremos $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. Note que $\|v_n\| = 1$, logo (v_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$ e, assim, existe $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup v_0$ em $H_0^1(\Omega)$. Por hipótese, $(u_n) \subset \mathcal{N}$ é uma sequência minimizante, então

$$\Phi(u_n) \rightarrow c := \inf_{u \in \mathcal{N}} \Phi(u) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Suponhamos primeiramente que $v_0 = 0$. Como $(u_n) \subset \mathcal{N}$, segue do Lema 2.1 que u_n é um ponto de máximo global de Φ restrito à semirreta $\{tv_n : t > 0\}$, logo para qualquer $t > 0$, vale que $\Phi(u_n) = \max_{t \geq 0} \Phi(tv_n) \geq \Phi(tv_n)$. Assim,

$$\begin{aligned} c + o_n(1) &= \Phi(u_n) = \Phi(\|u_n\|v_n) \\ &= \max_{t \geq 0} \Phi(tv_n) \geq \Phi(tv_n) \\ &= \frac{t^2}{2} \|v_n\|^2 - \int_{\Omega} F(tv_n) dx \\ &= \frac{t^2}{2} - \int_{\Omega} F(tv_n) dx. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Como $v_n \rightharpoonup 0$ em $H_0^1(\Omega)$, pelas imersões compactas de Sobolev, temos que $v_n \rightarrow 0$ em $L^p(\Omega)$, $p \in [1, 2^*)$. Assim, utilizando (2.6) e as imersões de Sobolev, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F(tv_n) dx &\leq \frac{\varepsilon}{2} t^2 \int_{\Omega} |v_n|^2 dx + \frac{C_\varepsilon}{r} t^r \int_{\Omega} |v_n|^r dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} C_1 t^2 \|v_n\|^2 + \frac{C_\varepsilon}{r} C_2 t^r \|v_n\|^r \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Desse modo, segue de (2.19) e (2.20) que

$$c + o_n(1) \geq \frac{t^2}{2} \quad \text{para todo } t > 0$$

e, fazendo $n \rightarrow \infty$, temos

$$c \geq \frac{t^2}{2} \quad \text{para todo } t > 0.$$

Como o lado direito pode ser arbitrariamente grande, isso contradiz a finitude de c .

Suponha agora que $v_0 \neq 0$. Neste caso, escrevamos

$$\begin{aligned} \Phi(u_n) &= \Phi(\|u_n\|v_n) \\ &= \frac{1}{2} \|u_n\|^2 \|v_n\|^2 - \int_{\Omega} F(\|u_n\|v_n) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_{\Omega} F(\|u_n\|v_n) dx. \quad (2.21)$$

Dividindo ambos os lados de (2.21) por $\|u_n\|^2$, e observando que $\Phi(u_n) \rightarrow c$ enquanto $\|u_n\|^2 \rightarrow \infty$, o lado esquerdo da igualdade tende a zero. Portanto,

$$\begin{aligned} o_n(1) &= \frac{1}{\|u_n\|^2} \Phi(u_n) \\ &= \frac{1}{\|u_n\|^2} \left(\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_{\Omega} F(\|u_n\|v_n) dx \right) \\ &= \frac{1}{2} - \int_{\Omega} \frac{F(\|u_n\|v_n)}{\|u_n\|^2} dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\Omega} \frac{F(\|u_n\|v_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{2} - o_n(1). \quad (2.22)$$

Como $v_n \rightarrow v_0$ em $H_0^1(\Omega)$, pelas imersões compactas de Sobolev, tem-se $v_n \rightarrow v_0$ em $L^p(\Omega)$, $p \in [1, 2^*)$. Passando à subsequência, se necessário, podemos supor pelo Teorema A.5 que $v_n(x) \rightarrow v_0(x)$ em *q.t.p.* $x \in \Omega$. Além disso, sendo $v_0 \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que o conjunto

$$E_{\delta} := \{x \in \Omega : |v_0(x)| > \delta\}$$

tem medida de Lebesgue positiva. De fato, se assim não fosse, teríamos $v_0(x) = 0$ quase sempre em $x \in \Omega$, o que contraria a hipótese $v_0 \neq 0$. Dado $x \in E_{\delta}$, para $n \geq 1$ suficientemente grande, escrevamos $|v_n(x)| \geq \frac{\delta}{2}$, logo

$$\| \|u_n\|v_n(x) \| = \|u_n\| |v_n(x)| \geq \frac{\delta}{2} \|u_n\| \rightarrow +\infty \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty$$

e, por (f₃),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(\|u_n\| |v_n(x)|)}{\|u_n\|^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(\|u_n\| |v_n(x)|)}{(\|u_n\| |v_n(x)|)^2} |v_n(x)|^2 = +\infty$$

em *q.t.p.* $x \in E_{\delta}$. Como o integrando de (2.22) é não negativo para n suficientemente grande, pelo Lema de Fatou, temos

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \frac{F(\|u_n\|v_n)}{\|u_n\|^2} dx \geq \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(\|u_n\|v_n)}{\|u_n\|^2} dx = +\infty$$

o que contradiz (2.22). Desse modo, concluímos que (u_n) é limitada. \square

No próximo lema mostraremos que o ínfimo de Φ restrito a Nehari é atingido. Nesta prova é fundamental a projeção na variedade de Nehari e a semicontinuidade fraca do funcional Φ .

Lema 2.4. *Existe $u \in \mathcal{N}$, tal que*

$$\Phi(u) = c := \inf_{u \in \mathcal{N}} \Phi(u).$$

Demonstração. Considere $(u_n) \subset \mathcal{N}$ uma sequência minimizante, ou seja,

$$\Phi(u_n) \rightarrow c := \inf_{u \in \mathcal{N}} \Phi(u) \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Então, pelo Lema 2.3, (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Segue do Teorema A.2 que, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H_0^1(\Omega)$. Note que $u_0 \neq 0$, pois caso contrário, usando (2.1) e as imersões compactas de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &= \int_{\Omega} f(u_n)u_n \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} (\varepsilon|u_n|^2 + C_{\varepsilon}|u_n|^r) \, dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} |u_n|^2 \, dx + C_{\varepsilon} \int_{\Omega} |u_n|^r \, dx \\ &\leq \varepsilon C_1 \|u_n\|^2 + C_{\varepsilon} C_2 \|u_n\|^r \end{aligned}$$

e, fazendo $n \rightarrow \infty$, temos $\|u_n\| \rightarrow 0$. Disso, segue que $u_n \rightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$, o que contradiz o Lema 2.2.

Seja $t_0 > 0$ tal que $u = t_0 u_0 \in \mathcal{N}$. Pelo item (iii) da Proposição A.3, a norma $\|\cdot\|$ é fracamente semicontínua inferiormente, desse modo,

$$\|u_0\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|. \quad (2.23)$$

Além disso, sabemos pela Proposição 2.1 que o funcional

$$\begin{aligned} I_2 : H_0^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto I_2(u) = \int_{\Omega} F(u) \, dx \end{aligned} \quad (2.24)$$

é contínuo e, portanto, fracamente contínuo.

Assim, combinando (2.23) e (2.24), concluímos que Φ é fracamente semicontínuo inferiormente. Daí

$$c \leq \Phi(u) = \Phi(t_0 u_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi(t_0 u_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n) = c,$$

onde na terceira desigualdade foi usada a propriedade fundamental do conjunto de Nehari vista no Lema 2.1: para $u \in \mathcal{N}$, temos $\Phi(u) = \max_{t \geq 0} \Phi(tu)$. \square

Observação 2.4. *Note que o ínfimo de Φ restrito a \mathcal{N} admite a seguinte caracterização mínima:*

$$c := \inf_{u \in \mathcal{N}} \Phi(u) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} \Phi(tu).$$

Para concluir, demonstraremos que o ponto de mínimo do funcional restrito à variedade de Nehari é, de fato, um ponto crítico de Φ em todo o espaço. Estabeleceremos esse resultado através de duas abordagens distintas: a primeira utiliza o Teorema da Função Implícita, seguindo a construção original de Nehari; a segunda emprega o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange.

2.3 Demonstração do Teorema 2.1

2.3.1 Via Teorema da Função Implícita

Queremos mostrar que se $u \in \mathcal{N}$ minimiza $\Phi|_{\mathcal{N}}$, então $\Phi'(u)v = 0$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Como $u \neq 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $u + sv \neq 0$, para todo $|s| < \varepsilon$. Então, pelo Lema 2.1, existe $t = t(s)$ tal que $t(u + sv) \in \mathcal{N}$. Agora definimos

$$\varphi(s, t) = \Phi'(t(u + sv))t(u + sv) = \|t(u + sv)\|^2 - \int_{\Omega} f(t(u + sv))t(u + sv) dx.$$

Note que $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e

$$\varphi(0, 1) = \Phi'(u)u = \|u\|^2 - \int_{\Omega} f(u)u dx = 0,$$

uma vez que $u \in \mathcal{N}$. Derivando φ em relação a t , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\varphi(s, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(t^2 \|u + sv\|^2 - \int_{\Omega} f(t(u + sv))t(u + sv) dx \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (t^2 \|u + sv\|^2) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega} f(t(u + sv))t(u + sv) dx \right) \\ &= 2t \|u + sv\|^2 - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} [f(t(u + sv))t(u + sv)] dx \quad (2.25) \\ &= 2t \|u + sv\|^2 - \int_{\Omega} [f(t(u + sv))(u + sv) + f'(t(u + sv))t(u + sv)^2] dx. \end{aligned}$$

Note que em (2.25), utilizamos o Teorema A.4 para justificar a comutatividade entre a derivada e a integral. Tomando $(s, t) = (0, 1)$, temos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, 1) = J'(u)u = 2\|u\|^2 - \int_{\Omega} [f(u)u + f'(u)u^2] dx,$$

em que

$$J(u) = \|u\|^2 - \int_{\Omega} f(u)u dx. \quad (2.26)$$

Observe que o funcional J está bem definido e, restrito a Nehari, é de classe $C^1(\mathcal{N}, \mathbb{R})$, por cálculos análogos a Proposição 2.1. Como $u \in \mathcal{N}$, temos

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} f(u)u dx$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\varphi(0, 1) &= 2 \int_{\Omega} f(u)u \, dx - \int_{\Omega} [f(u)u + f'(u)u^2] \, dx \\ &= \int_{\Omega} [f(u)u - f'(u)u^2] \, dx. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Pela condição (f_4) , temos que $f(u)u - f'(u)u^2 < 0$ e daí

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(0, 1) = \int_{\Omega} [f(u)u - f'(u)u^2] \, dx < 0.$$

Segue do Teorema da Função Implícita que existe $t = t(s) \in C^1(-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $\varphi(s, t) = 0$, com $t(0) = 1$ para todo $|s| < \varepsilon$. Então $t = t(s) \neq 0$ e $t(u + sv) \in \mathcal{N}$. Definamos

$$\Upsilon(s) = \Phi(t(u + sv)); \quad |s| < \varepsilon.$$

Note que $\Upsilon \in C^1$. Assim, como $t(u + sv) \in \mathcal{N}$, temos

$$\Upsilon(0) = \Phi(u) = c \leq \Phi(t(u + sv)) = \Upsilon(s); \quad |s| < \varepsilon,$$

logo $s = 0$ é um ponto de mínimo local de Υ e, portanto, $\Upsilon'(0) = 0$. Por outro lado, note que

$$\Upsilon'(0) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \Phi(t(u + sv)) = \Upsilon'(s) \Big|_{s=0}.$$

Pela Regra da Cadeia, temos

$$\begin{aligned} 0 = \Upsilon'(0) = \Upsilon'(s) \Big|_{s=0} &= \Phi'(t(u + sv)) \left. \frac{\partial}{\partial s} [t(u + sv)] \right|_{s=0} \\ &= \Phi'(u) [t'(0)u + v] \\ &= t'(0)\Phi'(u)u + \Phi'(u)v = \Phi'(u)v. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $\Phi'(u)v = 0$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

2.3.2 Via Teorema dos Multiplicadores de Lagrange

Pela Proposição D.1, a derivada de $\Phi|_{\mathcal{N}}$ tem norma dada por

$$\|\Phi'(u)\|_* = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\Phi'(u) - \lambda J'(u)\|,$$

onde J é dado por (2.26). Como $u \in \mathcal{N}$ é um ponto de mínimo de $\Phi|_{\mathcal{N}}$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Phi'(u) - \lambda J'(u) = 0. \quad (2.28)$$

Aplicando este funcional linear contínuo no próprio $u \in \mathcal{N}$, obtemos

$$\Phi'(u)u - \lambda J'(u)u = 0.$$

Sendo $\Phi'(u)u = 0$, vemos que $\lambda J'(u)u = 0$. Mas por (2.18) e (2.27) temos que $J'(u)u < 0$, o que implica $\lambda = 0$. Portanto, por (2.28), obtemos que $\Phi'(u) = 0$.

3 Existência de uma solução nodal com energia mínima para uma equação de Kirchhoff

Neste capítulo, com base no artigo de Figueiredo e Nascimento [10], estudaremos a existência de uma solução nodal (solução que muda de sinal) para o seguinte problema

$$(P) \quad \begin{cases} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u = f(u) & \text{em } \Omega; \\ u^+ \neq 0 \text{ e } u^- \neq 0 & \text{em } \Omega; \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio suave e limitado e

$$u^+(x) = \max\{u(x), 0\} \quad \text{e} \quad u^-(x) = \min\{u(x), 0\}$$

para todo $x \in \Omega$. Note que, neste caso, $u = u^+ + u^-$ e $|u| = u^+ - u^-$.

Assumimos que a função $M : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é de classe C^1 e satisfaz as seguintes condições:

(M_1) A função M é crescente e $0 < M(0) =: m_0$.

(M_2) A função $t \mapsto \frac{M(t)}{t}$ é decrescente.

Conforme pode ser visto em [10], um exemplo típico de uma função que verifica as hipóteses (M_1) – (M_2) e que remonta aos trabalhos originais de Kirchhoff sobre vibrações de cordas elásticas, é dado por

$$M(t) = m_0 + bt \quad \text{com } m_0, b > 0.$$

Uma classe mais ampla de funções, que permite modelar materiais com respostas não-lineares mais complexas à tensão, é dada por perturbações sublineares do termo constante (ou linear)

$$M(t) = m_0 + \sum_{i=1}^k b_i t^{\gamma_i},$$

com $b_i \geq 0$ e $\gamma_i \in (0, 1)$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Outro exemplo relevante mencionado na literatura envolve o crescimento logarítmico, que possui um comportamento assintótico mais suave que o polinomial

$$M(t) = m_0 + \ln(1 + t).$$

Assumimos que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 e satisfaz

(f_1) (Comportamento na origem):

$$\lim_{|t| \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = 0.$$

(f_2) (Crescimento subcrítico): Existe $q \in (4, 6)$ tal que

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{|t|^{q-1}} = 0.$$

(f_3) (Condição de Ambrosetti-Rabinowitz): Existe $\theta \in (4, 6)$ tal que

$$0 < \theta F(t) \leq f(t)t, \quad \forall |t| > 0,$$

onde $F(t) = \int_0^t f(s)ds$.

(f_4) (Monotocidade): A aplicação

$$t \mapsto \frac{f(t)}{|t|^3} \quad \text{é crescente em } |t| > 0.$$

Observação 3.1. (a) *Pelas condições (f_1) e (f_2), temos*

$$f(t)t \leq \varepsilon |t|^2 + C_\varepsilon |t|^q \quad \forall t \geq 0. \tag{3.1}$$

Além disso, de (f_3), existe $\theta \in (4, 6)$ tal que $0 < \theta F(t) \leq f(t)t$ para todo $|t| > 0$. Em particular, $f(t)t > 0$ para todo $t > 0$ e $f(t) < 0$ para $t < 0$. Sendo $f(t) = F'(t)$, temos

$$\theta F(t) \leq F'(t)t \Leftrightarrow \frac{\theta}{t} \leq \frac{F'(t)}{F(t)}, \quad \forall t > 0.$$

Integrando sobre o intervalo $[t_0, t]$, temos

$$\begin{aligned} \theta \int_{t_0}^t \frac{1}{s} ds &\leq \int_{t_0}^t \frac{F'(s)}{F(s)} ds \Leftrightarrow \theta \ln |s| \Big|_{t_0}^t \leq \ln |F(s)| \Big|_{t_0}^t \\ &\Leftrightarrow \theta (\ln |t| - \ln |t_0|) \leq \ln |F(t)| - \ln |F(t_0)| \\ &\Leftrightarrow \theta \ln \left(\frac{|t|}{|t_0|} \right) \leq \ln \left(\frac{|F(t)|}{|F(t_0)|} \right) \\ &\Leftrightarrow \ln \left(\frac{|t|}{|t_0|} \right)^\theta \leq \ln \left(\frac{|F(t)|}{|F(t_0)|} \right). \end{aligned}$$

Como a exponencial é crescente, temos

$$\left(\frac{|t|}{|t_0|} \right)^\theta \leq \frac{|F(t)|}{|F(t_0)|} \Leftrightarrow |F(t_0)| \left(\frac{|t|}{|t_0|} \right)^\theta \leq |F(t)|$$

e considerando as constantes $K_1 = \frac{|F(t_0)|}{|t_0|^\theta}$, $K_2 > 0$, obtemos

$$F(t) \geq K_1|t|^\theta - K_2 \quad \forall |t| \geq t_0. \quad (3.2)$$

(b) Note que, a partir de (M_2) , temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{M(t)}{t} \right) = \frac{M'(t)t - M(t)}{t^2} \leq 0 \implies M'(t)t \leq M(t); \quad \forall t \geq 0. \quad (3.3)$$

Defina,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\mapsto \varphi(t) = \frac{1}{2}\widehat{M}(t) - \frac{1}{4}M(t)t, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s) ds$. Derivando-a com relação a t , obtemos

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{1}{2}M(t) - \frac{1}{4}(M'(t)t + M(t)) \\ &= \frac{1}{4}(M(t) - M'(t)t). \end{aligned}$$

Por (3.3), temos que

$$-M'(t)t \geq -M(t) \implies \frac{1}{4}M(t) - \frac{1}{4}M'(t)t \geq \frac{1}{4}M(t) - \frac{1}{4}M(t) = 0,$$

logo $\varphi'(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$ e, portanto, φ é não decrescente. Agora, usando (f_4) , temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{f(t)}{t^3} \right) &= \frac{f'(t)t^3 - 3t^2f(t)}{t^6} \\ &= \frac{f'(t)t - 3f(t)}{t^4} \geq 0 \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$f'(t)t \geq 3f(t) \quad \text{para todo } |t| \geq 0. \quad (3.5)$$

Defina

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\mapsto \psi(t) = \frac{1}{4}f(t)t - F(t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Observe que derivando-a com respeito a t , temos

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \frac{1}{4}[f'(t)t + f(t)] - f(t) \\ &= \frac{1}{4}f'(t)t - \frac{3}{4}f(t) \end{aligned}$$

e, por (3.5), $\psi'(t) \geq 0$ e ψ é não decrescente para $t > 0$. Além disso, de (M_1) , obtemos

$$\widehat{M}(t+s) = \int_0^{t+s} M(\tau) d\tau = \widehat{M}(t) + \int_t^{t+s} M(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned}
 &= \widehat{M}(t) + \int_0^s M(\gamma + t) d\gamma \\
 &\geq \widehat{M}(t) + \int_0^s M(\gamma) d\gamma \\
 &= \widehat{M}(t) + \widehat{M}(s), \quad \text{para todo } t, s \in [0, +\infty).
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Antes de enunciar o principal resultado deste trabalho, definamos a noção de solução nodal.

Definição 3.1 (Solução nodal). *Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma **solução nodal** do problema (P) se $u^+ \neq 0$, $u^- \neq 0$ em Ω e satisfaz a relação*

$$M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi dx = \int_{\Omega} f(u) \phi dx, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.8}$$

Aqui é importante lembrar que se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $u^{\pm} \in H_0^1(\Omega)$ (veja Proposição B.2).

Teorema 3.1. *Suponha que a função M satisfaz $(M_1) - (M_2)$ e a função f satisfaz $(f_1) - (f_4)$. Então o problema (P) possui uma solução nodal com energia mínima.*

3.1 Estrutura variacional e Lemas técnicos

Consideremos o funcional energia $\Phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (P)

$$\Phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \Phi(u) = \frac{1}{2} \widehat{M}(\|u\|^2) - \int_{\Omega} F(u) dx,$$

onde $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s) ds$.

Afirmamos que Φ está bem definido. De fato, sabemos que $M \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, logo a função \widehat{M} é contínua e bem definida para todo $t \geq 0$. Uma vez que a aplicação $u \mapsto \|u\| := \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ está bem definida para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, vemos que $\widehat{M}(\|u\|^2)$ está bem definida. A verificação de que a aplicação $u \mapsto \int_{\Omega} F(u) dx$ está bem definida é análoga ao caso feito para o Laplaciano na Proposição 2.1.

Proposição 3.1 (Diferenciabilidade de Φ). *O funcional energia Φ é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e*

$$\Phi'(u)\phi = M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi dx - \int_{\Omega} f(u) \phi dx.$$

Demonstração. Uma vez que $I_1(u) = \|u\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$, sabemos que é um funcional de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ cuja derivada de Fréchet aplicada a $\phi \in H_0^1(\Omega)$ é dada por

$$I_1'(u)\phi = 2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi dx.$$

Escrevamos

$$I_0 : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto I_0(u) = \frac{1}{2}(\widehat{M} \circ I_1)(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(I_1(u)).$$

Sendo I_1 e \widehat{M} diferenciáveis, temos pela regra da cadeia que

$$\begin{aligned} I_0'(u)\phi &= \frac{1}{2}\widehat{M}'(I_1(u))I_1'(u)\phi \\ &= M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx \end{aligned}$$

e I_0 é Fréchet diferenciável. Por outro lado, observe que as aplicações $u \mapsto M(\|u\|^2)$, $u \mapsto I_0'(u)\phi$ são, respectivamente, composição e produto de funções contínuas; portanto, ambas são contínuas. Assim, $I_0 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

A demonstração que o funcional $I_2(u) = \int_{\Omega} F(u) \, dx$ é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ é análoga a realizada na Proposição 2.1, considerando a restrição de crescimento (3.1).

Portanto, sendo $\Phi = I_0 - I_2$, concluímos que $\Phi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com a derivada dada. □

Assim, as soluções fracas de (P) são precisamente os pontos críticos de Φ . Associada ao funcional Φ , definimos a variedade de Nehari

$$\mathcal{N} = \{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : \Phi'(u)u = 0\}.$$

No Teorema 3.1, provaremos que existe $w \in \mathcal{M}$ tal que

$$\Phi(w) = \inf_{w \in \mathcal{M}} \Phi(w),$$

onde

$$\mathcal{M} := \{w \in \mathcal{N} : \Phi'(w)w^+ = 0 = \Phi'(w)w^-\}.$$

Observe que dado $w \in \mathcal{M}$, então $w^{\pm} \neq 0$ e $\Phi'(w)w^+ = 0 = \Phi'(w)w^-$. Assim, seguindo [21, Proposição 1.3, p. 8], temos

$$\begin{aligned} \Phi'(w)w^+ = 0 &\Leftrightarrow M(\|w\|^2) \int_{\Omega} \nabla w \nabla w^+ \, dx = \int_{\Omega} f(w)w^+ \, dx \\ &\Leftrightarrow M(\|w\|^2) \int_{\Omega} \nabla w [\nabla w \chi_{\{w>0\}}] \, dx = \int_{\Omega} f(w)w^+ \, dx \\ &\Leftrightarrow M(\|w\|^2) \int_{\Omega} |\nabla w^+|^2 \, dx = \int_{\Omega} f(w^+ + w^-)w^+ \, dx \\ &\Leftrightarrow M(\|w\|^2) \int_{\Omega} |\nabla w^+|^2 \, dx = \int_{\text{supp}(w^+)} f(w^+ + w^-)w^+ \, dx + \\ &\qquad\qquad\qquad \int_{\text{supp}(w^-)} f(w^+ + w^-)w^+ \, dx \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow M(\|w\|^2)\|w^+\|^2 = \int_{\Omega} f(w^+)w^+ dx$$

e como

$$\begin{aligned} \|w^+\|^2 + \|w^-\|^2 &= \|w^+\|^2 + 2\nabla w^+ \nabla w^- + \|w^-\|^2 \\ &= \|w^+ + w^-\|^2 = \|w\|^2, \end{aligned}$$

segue que $\|w^+\|^2 \leq \|w\|^2$ e de (M_1) temos $M(\|w^+\|^2) \leq M(\|w\|^2)$. Assim, esta última desigualdade implica que

$$\begin{aligned} \Phi'(w^+)w^+ &= M(\|w^+\|^2)\|w^+\|^2 - \int_{\Omega} f(w^+)w^+ dx \\ &\leq M(\|w\|^2)\|w^+\|^2 - \int_{\Omega} f(w)w^+ dx \\ &= \Phi'(w)w^+ = 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

para todo $w \in \mathcal{M}$. Analogamente, mostra-se que $\Phi'(w^-)w^- \leq 0$.

Começemos por estabelecer alguns resultados preliminares que serão explorados na última seção para um argumento de minimização.

Lema 3.1. (a) Para todo $u \in \mathcal{N}$ temos

$$\Phi(u) \geq \frac{(\theta - 4)}{4\theta} m_0 \|u\|^2.$$

(b) Existe $\rho > 0$ tal que

$$\|u\| \geq \rho \quad \text{para todo } u \in \mathcal{N}$$

e

$$\|w^{\pm}\| \geq \rho \quad \text{para todo } w \in \mathcal{M}.$$

(c) Para $(u_n) \subset \mathcal{N}$ tal que $\|u_n\| \rightarrow +\infty$, temos $\Phi(u_n) \rightarrow +\infty$.

Demonstração. Sabemos, por (M_2) , que a função $t \mapsto \frac{M(t)}{t}$ é decrescente, então para $0 < \sigma \leq t$, temos

$$\frac{M(t)}{t} \leq \frac{M(\sigma)}{\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{M(t)}{t} \sigma \leq M(\sigma).$$

Integrando em relação a σ sobre o intervalo $[0, t]$,

$$\begin{aligned} \widehat{M}(t) &= \int_0^t M(\sigma) d\sigma \geq \int_0^t \frac{M(t)}{t} \sigma d\sigma \\ &= \frac{M(t)}{t} \int_0^t \sigma d\sigma = \frac{1}{2} M(t)t. \end{aligned}$$

A partir disso e de (M_1) , temos para todo $t \geq 0$ que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\theta-4}{4\theta}\right) m_0 t &\leq \left(\frac{\theta-4}{4\theta}\right) M(t)t \\ &= \frac{1}{4}M(t)t - \frac{1}{\theta}M(t)t \\ &\leq \frac{1}{2}\widehat{M}(t) - \frac{1}{\theta}M(t)t. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Dado $u \in \mathcal{N}$, temos

$$\Phi(u) - \frac{1}{\theta}\Phi'(u)u = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \int_{\Omega} F(u) dx - \frac{1}{\theta} \left[M(\|u\|^2)\|u\|^2 - \int_{\Omega} f(u)u dx \right]$$

e, por (f_3) , vemos que $0 \leq \frac{1}{\theta}f(u)u - F(u)$. Portanto,

$$0 \leq \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\theta}f(u)u - F(u) \right] dx = \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} f(u)u dx - \int_{\Omega} F(u) dx.$$

Logo

$$\Phi(u) - \frac{1}{\theta}\Phi'(u)u \geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \frac{1}{\theta}M(\|u\|^2)\|u\|^2. \tag{3.11}$$

Desse modo, de (3.10) e (3.11), obtemos

$$\left(\frac{\theta-4}{4\theta}\right) m_0 \|u\|^2 \leq \Phi(u) - \frac{1}{\theta}\Phi'(u)u$$

e, sendo $\Phi'(u)u = 0$ para todo $u \in \mathcal{N}$, concluímos que

$$\Phi(u) \geq \left(\frac{\theta-4}{4\theta}\right) m_0 \|u\|^2,$$

o que prova (a). Para provar (b), note que a partir da definição de \mathcal{N} , (M_1) , (3.1) e das imersões de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $p \in [1, 2^*]$, temos para todo $u \in \mathcal{N}$ que

$$\begin{aligned} m_0 \|u\|^2 &\leq M(\|u\|^2)\|u\|^2 \\ &= \int_{\Omega} f(u)u dx \\ &\leq \int_{\Omega} (\varepsilon|u|^2 + C_{\varepsilon}|u|^q) dx \\ &\leq \varepsilon \int_{\Omega} |u|^2 dx + C_{\varepsilon} \int_{\Omega} |u|^q dx \\ &\leq \varepsilon C_1 \|u\|^2 + C_{\varepsilon} C_2 \|u\|^q \end{aligned}$$

e, desse modo,

$$m_0 \|u\|^2 \leq \varepsilon C_1 \|u\|^2 + C_{\varepsilon} C_2 \|u\|^q \Leftrightarrow m_0 \|u\|^2 - \varepsilon C_1 \|u\|^2 \leq C_{\varepsilon} C_2 \|u\|^q$$

$$\Leftrightarrow (m_0 - \varepsilon C_1) \|u\|^2 \leq C_\varepsilon C_2 \|u\|^q$$

$$\Leftrightarrow m_0 - \varepsilon C_1 \leq C_\varepsilon C_2 \|u\|^{q-2}.$$

Escolhamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $m_0 - \varepsilon C_1 > 0$. Assim, temos

$$\frac{m_0 - \varepsilon C_1}{C_\varepsilon C_2} \leq \|u\|^{q-2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{m_0 - \varepsilon C_1}{C_\varepsilon C_2} \right)^{\frac{1}{q-2}} \leq \|u\|$$

e definindo

$$\rho := \left(\frac{m_0 - \varepsilon C_1}{C_\varepsilon C_2} \right)^{\frac{1}{q-2}} > 0,$$

concluimos que

$$0 < \rho \leq \|u\|.$$

Agora, seja $w \in \mathcal{M}$, então $\Phi'(w)w^+ = 0$ e $\Phi'(w)w^- = 0$. Além disso, segue de (3.9) que

$$M(\|w^\pm\|^2) \|w^\pm\|^2 \leq \int_\Omega f(w^\pm) w^\pm dx.$$

Desse modo, utilizando (M_1) , (3.1), as imersões de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $p \in [1, 2^*]$ e repetindo o raciocínio anterior, obtemos

$$0 < \rho \leq \|w^\pm\|.$$

Por fim, resta provar (c). Note que, pelo item (a), para $(u_n) \subset \mathcal{N}$, vale que

$$\Phi(u_n) \geq \left(\frac{\theta - 4}{4\theta} \right) m_0 \|u_n\|^2,$$

logo, se $\|u_n\| \rightarrow +\infty$, então $\Phi(u_n) \rightarrow +\infty$. □

Aplicamos o próximo resultado na última seção a toda sequência minimizante limitada de Φ em \mathcal{M} para garantir que o candidato a minimizador seja diferente de zero.

Lema 3.2. *Se (w_n) é uma sequência limitada em \mathcal{M} , então*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |w_n^\pm|^q dx > 0.$$

Demonstração. Usando (3.9) e (3.1), temos

$$\begin{aligned} M(\|w_n^\pm\|^2) \|w_n^\pm\|^2 &\leq \int_\Omega f(w_n^\pm) w_n^\pm dx \\ &\leq \int_\Omega (\varepsilon |w^\pm|^2 + C_\varepsilon |w^\pm|^q) dx \\ &= \varepsilon \int_\Omega |w^\pm|^2 dx + C_\varepsilon \int_\Omega |w^\pm|^q dx. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Pela condição (M_1) e pelo item (b) do Lema 3.1, temos

$$m_0 \rho^2 \leq M(\|w_n^\pm\|^2) \|w_n^\pm\|^2. \tag{3.13}$$

Sendo (w_n) limitada em $H_0^1(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que $\|w_n\| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, $\|w_n^\pm\| \leq C$ e, pela desigualdade de Poincaré (veja Proposição B.1), segue que

$$\int_{\Omega} |w_n^\pm|^2 dx \leq C_1 \|w_n^\pm\|^2 \leq C_1 C^2. \quad (3.14)$$

Denotando $k = C_1 C^2 > 0$, segue por (3.12), (3.13) e (3.14) que

$$m_0 \rho^2 \leq \varepsilon k + C_\varepsilon \int_{\Omega} |w_n^\pm|^q dx.$$

Rearranjando os termos, vemos que

$$\frac{m_0 \rho^2 - \varepsilon k}{C_\varepsilon} \leq \int_{\Omega} |w_n^\pm|^q dx.$$

Tomando $\varepsilon > 0$ tão pequeno que $m_0 \rho^2 - \varepsilon k > 0$ e definindo

$$\delta := \frac{m_0 \rho^2 - \varepsilon k}{C_\varepsilon} > 0,$$

obtemos

$$0 < \delta \leq \int_{\Omega} |w_n^\pm|^q dx, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Portanto,

$$0 < \delta \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |w_n^\pm|^q dx.$$

□

Os próximos resultados inferem informações geométricas de Φ em relação a \mathcal{M} da mesma maneira que se costuma fazer com \mathcal{N} . Para ser mais preciso, note a semelhança entre o próximo resultado e o Lema 2.1, onde afirma-se que para cada $v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ existe $t_v > 0$ tal que $t_v v \in \mathcal{N}$.

Lema 3.3. *Se $v \in H_0^1(\Omega)$, com $v^\pm \neq 0$, então existem $t, s > 0$ tais que*

$$\Phi'(tv^+ + sv^-)v^+ = 0 \quad e \quad \Phi'(tv^+ + sv^-)v^- = 0. \quad (3.15)$$

Consequentemente, $tv^+ + sv^- \in \mathcal{M}$.

Demonstração. Definamos a função

$$V : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(t, s) \mapsto V(t, s) = (\Phi'(tv^+ + sv^-)(tv^+), \Phi'(tv^+ + sv^-)(sv^-))$$

a qual é contínua, pois suas funções coordenadas o são. Note que $\Phi'(tv^+ + sv^-)v^+ = 0$ se, e somente se, $\Phi'(tv^+ + sv^-)(tv^+) = 0$, uma vez que $t > 0$. Por outro lado, sabemos que

$$\Phi'(tv^+ + sv^-)(tv^+) = M(\|tv^+ + sv^-\|^2) \int_{\Omega} \nabla(tv^+ + sv^-) \nabla(tv^+) dx$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} f(tv^+ + sv^-)(tv^+) dx \\
= & M(\|tv^+ + sv^-\|^2) \int_{\Omega} \nabla(tv^+ + sv^-) \nabla(tv^+) dx - \\
& \left[\int_{\text{supp}(v^+)} f(tv^+ + sv^-)(tv^+) dx + \int_{\text{supp}(v^-)} f(tv^+ + sv^-)(tv^+) dx \right] \\
= & M(\|tv^+\|^2 + 2ts \nabla v^+ \nabla v^- + \|sv^-\|^2) \int_{\Omega} (t^2 |\nabla v^+|^2 + ts \nabla v^+ \nabla v^-) dx \\
& - \int_{\text{supp}(v^+)} f(tv^+)(tv^+) dx \\
= & t^2 M(\|tv^+\|^2 + \|sv^-\|^2) \int_{\Omega} |\nabla v^+|^2 dx - \int_{\Omega} f(tv^+)(tv^+) dx \\
= & t^2 M(t^2 \|v^+\|^2 + s^2 \|v^-\|^2) \|v^+\|^2 - \int_{\Omega} f(tv^+)(tv^+) dx, \tag{3.16}
\end{aligned}$$

em que as igualdades seguem das propriedades das partes positiva e negativa de v , especificamente o fato de possuírem suportes disjuntos, o que implica em $\nabla v^+ \nabla v^- dx = 0$ e $v^+ v^- = 0$ *q.t.p.* em Ω . Utilizando (M_1) , (3.1) e as imersões de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $p \in [1, 2^*]$, temos

$$\begin{aligned}
\Phi'(tv^+ + sv^-)(tv^+) &= t^2 M(t^2 \|v^+\|^2 + s^2 \|v^-\|^2) \|v^+\|^2 - \int_{\Omega} f(tv^+)(tv^+) dx \\
&\geq t^2 m_0 \|v^+\|^2 - \int_{\Omega} (\varepsilon |tv^+|^2 + C_{\varepsilon} |tv^+|^q) dx \\
&= t^2 m_0 \|v^+\|^2 - \varepsilon t^2 \int_{\Omega} |v^+|^2 dx - C_{\varepsilon} t^q \int_{\Omega} |v^+|^q dx \\
&\geq t^2 m_0 \|v^+\|^2 - \varepsilon t^2 C_1 \|v^+\|^2 - C_2 C_{\varepsilon} t^q \|v^+\|^q \\
&\geq (m_0 - \varepsilon C) t^2 \|v^+\|^2 - C C_{\varepsilon} t^q \|v^+\|^q \\
&\geq t^2 \|v^+\|^2 (m_0 - \varepsilon C - t^{q-2} C_{\varepsilon} C \|v^+\|^{q-2})
\end{aligned}$$

em que $C = \max\{C_1, C_2\}$. Escolhamos $\varepsilon > 0$ de modo que $m_0 - \varepsilon C > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que, para $0 < t < \delta$, temos $m_0 - \varepsilon C - t^{q-2} C_{\varepsilon} C \|v^+\|^{q-2} > 0$. Seja $r = \frac{\delta}{2} > 0$, então para todo $0 < t \leq r$, segue que

$$\Phi'(tv^+ + sv^-)(tv^+) > 0.$$

Em particular, para $t = r$, temos

$$\Phi'(rv^+ + sv^-)(rv^+) > 0, \quad \text{para todo } s > 0.$$

Argumentando da mesma forma para $\Phi'(tv^+ + rv^-)(rv^-)$, obtemos

$$\Phi'(tv^+ + rv^-)(rv^-) > 0, \quad \text{para todo } t > 0.$$

Por outro lado, de (M_2) , a função $t \mapsto \frac{M(t)}{t}$ é decrescente, então para $t \geq 1$, temos

$$\frac{M(t)}{t} \leq \frac{M(1)}{1} = M(1)$$

e, conseqüentemente, $M(t) \leq M(1)t$ para $t \geq 1$. Para $0 \leq t < 1$, como M é contínua no compacto $[0, 1]$, M é limitada, logo existe $K_0 > 0$ tal que $M(t) \leq K_0$ para todo $t \in [0, 1]$. Tomando $K = \max\{K_0, M(1)\}$, temos para todo $t \geq 0$ que

$$M(t) \leq M(1)t + K. \quad (3.17)$$

Usando (3.17), (3.2) e (f_3) em (3.16), temos

$$\begin{aligned} \Phi'(tv^+ + sv^-)(tv^+) &= t^2 M(t^2 \|v^+\|^2 + s^2 \|v^-\|^2) \|v^+\|^2 - \int_{\Omega} f(tv^+)(tv^+) dx \\ &\leq t^2 [M(1)(\|tv^+\|^2 + \|sv^-\|^2) + K] \|v^+\|^2 - \theta \int_{\Omega} F(tv^+) dx \\ &\leq M(1)t^4 \|v^+\|^4 + M(1)t^2 s^2 \|v^+\|^2 \|v^-\|^2 + Kt^2 \|v^+\|^2 \\ &\quad - \theta K_1 |t|^\theta \int_{\Omega} |v^+|^\theta dx + K_2 |\Omega|, \end{aligned}$$

onde $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue sobre Ω . Assim, como $\theta \in (4, 6)$, existe $R > 0$ suficientemente grande tal que para $t = R$,

$$\Phi'(Rv^+ + sv^-)(Rv^+) < 0 \quad \text{para todo } s \leq R.$$

Argumentando da mesma maneira para $\Phi'(tv^+ + rv^-)(rv^-)$, obtemos

$$\Phi'(tv^+ + Rv^-)(Rv^-) < 0 \quad \text{para todo } t \leq R.$$

Em particular,

$$\Phi'(rv^+ + sv^-)(rv^+) > 0 \quad \text{e} \quad \Phi'(tv^+ + rv^-)(rv^-) > 0 \quad \text{para todo } t, s \in [r, R]$$

e

$$\Phi'(Rv^+ + sv^-)(Rv^+) < 0 \quad \text{e} \quad \Phi'(tv^+ + Rv^-)(Rv^-) < 0 \quad \text{para todo } t, s \in [r, R].$$

Como V é contínua, o Teorema de Miranda (Teorema E.9) assegura a existência de um ponto $(t_0, s_0) \in [r, R] \times [r, R]$ tal que $V(t_0, s_0) = (0, 0)$. Ou seja,

$$\Phi'(t_0v^+ + s_0v^-)(t_0v^+) = 0 \quad \text{e} \quad \Phi'(t_0v^+ + s_0v^-)(s_0v^-) = 0.$$

Como $t_0 \geq r > 0$ e $s_0 \geq r > 0$, podemos dividir as equações acima por t_0 e s_0 respectivamente, obtendo

$$\Phi'(t_0v^+ + s_0v^-)v^+ = 0 \quad \text{e} \quad \Phi'(t_0v^+ + s_0v^-)v^- = 0.$$

Isso conclui a prova da existência de $t, s > 0$ satisfazendo (3.15). Finalmente, para mostrar que $u_0 = t_0v^+ + s_0v^- \in \mathcal{M}$, lembramos que a variedade de Nehari nodal é definida por

$$\mathcal{M} = \{w \in \mathcal{N} : \Phi'(w)w^+ = 0 = \Phi'(w)w^-\}.$$

Como $v^+ \neq 0$, $v^- \neq 0$ têm suportes disjuntos e $t_0, s_0 > 0$, segue que $u_0 \neq 0$. Além disso, pela linearidade do funcional Φ' , temos

$$\begin{aligned} \Phi'(u_0)u_0 &= \Phi'(t_0v^+ + s_0v^-)(t_0v^+ + s_0v^-) \\ &= t_0\Phi'(t_0v^+ + s_0v^-)v^+ + s_0\Phi'(t_0v^+ + s_0v^-)v^- = 0 \end{aligned}$$

e, portanto, $\Phi'(u_0)u_0 = 0$, o que implica que $t_0v^+ + s_0v^- \in \mathcal{M}$. □

3.2 Demonstração do Teorema 3.1

Neste ponto, finalmente podemos provar a existência de $w \in \mathcal{M}$ no qual o ínfimo de Φ é atingido. Descobrimos que w é um ponto crítico de Φ e, em seguida, uma solução nodal de energia mínima do problema (P) . Para completar a prova do Teorema 3.1, concluímos mostrando que w possui exatamente dois domínios nodais.

Dada a complexidade dos resultados que precisam ser desenvolvidos e demonstrados, organizaremos a prova do Teorema 3.1 em diversos lemas, a fim de facilitar a compreensão e a exposição sistematizada desses resultados.

Primeiro, vamos começar com a existência de um minimizador $w \in \mathcal{M}$ para Φ , o qual é garantido pelos lemas anteriores que fornecem a geometria necessária. No que segue, denotamos $c_0 = \inf_{w \in \mathcal{M}} \Phi(w)$ e deduzimos, pelo Lema 3.1 que $c_0 > 0$. Assim, existe uma sequência minimizante $(w_n) \subset \mathcal{M}$ tal que $\Phi(w_n) \rightarrow c_0$. Do Lema 3.1(c), temos que o funcional Φ é coercivo, logo a sequência (w_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Portanto, pelas imersões de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $p \in [1, 2^*]$ e pela reflexividade de $H_0^1(\Omega)$, podemos assumir a menos de subsequência, que existem $w, w_1, w_2 \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$w_n \rightharpoonup w, \quad w_n^+ \rightharpoonup w_1, \quad w_n^- \rightharpoonup w_2 \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega).$$

Além disso, como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ compactamente para $p \in [1, 2^*)$, temos

$$w_n \rightarrow w, \quad w_n^+ \rightarrow w_1, \quad w_n^- \rightarrow w_2 \quad \text{em} \quad L^p(\Omega), \quad p \in [1, 2^*).$$

Lema 3.4. *Sejam $(w_n) \subset \mathcal{M}$ uma sequência minimizante para c_0 e w, w_1, w_2 os limites definidos anteriormente. Então*

- (i) $w_n^\pm \rightarrow w^\pm$ em $L^p(\Omega)$, $p \in [1, 2^*)$;

(ii) $w^+ = w_1$ e $w^- = w_2$ quase sempre em Ω ;

(iii) $w \in \mathcal{M}$.

Demonstração. Com efeito, seja $p \in [1, +\infty)$, queremos mostrar que a função $g : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ definida por $g(w) = w^+$ é contínua. Observe que

$$|w_n^+ - w^+| \leq |w_n - w|, \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Elevando a potência $p \geq 1$ e integrando sobre Ω , obtemos

$$\begin{aligned} \|g(w_n) - g(w)\|_p^p &= \int_{\Omega} |w_n^+(x) - w^+(x)|^p dx \\ &\leq \int_{\Omega} |w_n(x) - w(x)|^p dx \\ &= \|w_n - w\|_p^p. \end{aligned}$$

Desse modo, g é contínua. Repetindo os cálculos, provamos que $w_n^- \rightarrow w^-$.

Para provar (ii), note que $w_n \rightarrow w$ em $L^p(\Omega)$ e $w_n^+ = (w_n)^+$, logo pela continuidade da aplicação $w \mapsto w^+$, temos $w_n^+ \rightarrow w^+$ em $L^p(\Omega)$. Por outro lado, vimos que $w_n^+ \rightarrow w_1$ em $L^p(\Omega)$. Pela unicidade do limite em $L^p(\Omega)$, devemos ter necessariamente $w^+ = w_1 \geq 0$ e de forma análoga $w^- = w_2 \leq 0$ quase sempre em Ω .

Agora, resta provar (iii). Com efeito, por $w_n^+ \rightarrow w^+$ e $w_n^- \rightarrow w^-$ em $L^p(\Omega)$, $p \in [1, 2^*)$ quando $n \rightarrow +\infty$, temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|w_n^{\pm} - w^{\pm}\|_p^p = 0.$$

Segue da desigualdade triangular que

$$\|w_n^{\pm}\|_p^p - \|w^{\pm}\|_p^p \leq \|w_n^{\pm} - w^{\pm}\|_p^p \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Logo, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|w_n^{\pm}\|_p^p = \|w^{\pm}\|_p^p$, ou equivalentemente,

$$\int_{\Omega} |w_n^{\pm}|^p dx \rightarrow \int_{\Omega} |w^{\pm}|^p dx.$$

Pelo Lema 3.2, $w^{\pm} \neq 0$ e, conseqüentemente, $w = w^+ + w^-$ está trocando de sinal. \square

Lema 3.5. *Se $(w_n) \subset \mathcal{M}$ é uma seqüência minimizante para c_0 , então existe $w \in \mathcal{M}$ tal que*

$$\int_{\Omega} f(w_n^{\pm}) w_n^{\pm} dx \rightarrow \int_{\Omega} f(w^{\pm}) w^{\pm} dx$$

e

$$\int_{\Omega} F(w_n^{\pm}) dx \rightarrow \int_{\Omega} F(w^{\pm}) dx.$$

Demonstração. Se (w_n) é uma seqüência minimizante para c_0 , já vimos que ela é limitada e a menos de subsequências

$$w_n \rightarrow w, \quad w_n^+ \rightarrow w^+, \quad w_n^- \rightarrow w^- \quad \text{em } L^p(\Omega), p \in [1, 2^*).$$

Pelo Teorema A.5, a menos de subsequência, temos

$$w_n(x) \rightarrow w(x), \quad w_n^+(x) \rightarrow w^+(x), \quad w_n^-(x) \rightarrow w^-(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

e existe funções $h_p, h_p^+, h_p^- \in L^p(\Omega)$ tais que

$$|w_n(x)| \leq h_p(x), \quad |w_n^+(x)| \leq h_p^+(x), \quad |w_n^-(x)| \leq h_p^-(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que f é contínua e $w_n^+(x) \rightarrow w^+(x)$ q.t.p. em Ω , temos que $f(w_n^+(x))w_n^+(x) \rightarrow f(w^+(x))w^+(x)$. Desse modo, pela condição de crescimento (3.1), temos

$$\begin{aligned} |f(w_n^+(x))w_n^+(x)| &\leq \varepsilon |w_n^+(x)|^2 + C_\varepsilon |w_n^+(x)|^q \\ &\leq \varepsilon (h_2^+(x))^2 + C_\varepsilon (h_q^+(x))^q \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(w_n^+)w_n^+ dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(w_n^+)w_n^+ dx = \int_{\Omega} f(w^+)w^+ dx.$$

De maneira análoga, mostra-se que

$$\int_{\Omega} f(w_n^-)w_n^- dx \rightarrow \int_{\Omega} f(w^-)w^- dx$$

e além disso, de maneira semelhante, os mesmos resultados se aplicam para F . □

Lema 3.6. *Sejam $t, s > 0$ os números reais satisfazendo o Lema 3.3. Então vale que $t \leq 1$ e $s \leq 1$.*

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $s \leq t$. Assim,

$$\begin{aligned} t^2 \|w^+\|^2 + s^2 \|w^-\|^2 &\leq t^2 (\|w^+\|^2 + \|w^-\|^2) \\ &= t^2 (\|w^+\|^2 + 2\nabla w^+ \nabla w^- + \|w^-\|^2) \\ &= t^2 \|w^+ + w^-\|^2 \\ &= t^2 \|w\|^2. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.5, temos

$$\int_{\Omega} f(w_n^\pm)w_n^\pm dx \rightarrow \int_{\Omega} f(w^\pm)w^\pm dx$$

e

$$\int_{\Omega} F(w_n^\pm)w_n^\pm dx \rightarrow \int_{\Omega} F(w^\pm)w^\pm dx.$$

Desse modo, uma vez que $\Phi'(w_n)w_n^\pm = 0$, vemos que

$$M(\|w_n\|^2)\|w_n^\pm\|^2 = \int_{\Omega} f(w_n^\pm)w_n^\pm dx.$$

Pela continuidade inferior e por (M_1) , tem-se

$$M(\|w\|^2) \leq M(\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|w_n\|^2) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} M(\|w_n\|^2).$$

Logo,

$$M(\|w\|^2)\|w^\pm\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} M(\|w_n\|^2)\|w_n^\pm\|^2 = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(w_n^\pm)w_n^\pm dx = \int_{\Omega} f(w^\pm)w^\pm dx,$$

isto é,

$$\Phi'(w)w^+ \leq 0 \quad \text{e} \quad \Phi'(w)w^- \leq 0. \quad (3.18)$$

Agora, de (3.15), temos

$$t^2 M(t^2\|w^+\|^2 + s^2\|w^-\|^2)\|w^\pm\|^2 = \int_{\Omega} f(tw^\pm)tw^\pm dx.$$

Observe que, por (M_1) , temos

$$\frac{t^2 M(t^2\|w^+\|^2 + s^2\|w^-\|^2)}{\|w\|^2} \|w^\pm\|^2 \|w\|^2 \leq \frac{t^2 M(t^2\|w\|^2)}{\|w\|^2} \|w^\pm\|^2 \|w\|^2. \quad (3.19)$$

Escrevamos

$$\int_{\Omega} f(tw^\pm)tw^\pm dx = \int_{\Omega} \frac{f(tw^\pm)}{(tw^\pm)^3} (tw^\pm)^3 tw^\pm dx = t^4 \int_{\Omega} \frac{f(tw^\pm)}{(tw^\pm)^3} (w^\pm)^4 dx \quad (3.20)$$

e, desse modo, de (3.19) e (3.20), concluímos que

$$\frac{t^2 M(t^2\|w\|^2)}{\|w\|^2} \|w^\pm\|^2 \|w\|^2 \geq t^4 \int_{\Omega} \frac{f(tw^\pm)}{(tw^\pm)^3} (w^\pm)^4 dx,$$

ou seja,

$$\frac{M(t^2\|w\|^2)}{t^2\|w\|^2} \|w^\pm\|^2 \|w\|^2 \geq \int_{\Omega} \frac{f(tw^\pm)}{(tw^\pm)^3} (w^\pm)^4 dx. \quad (3.21)$$

Por outro lado, de (3.18), temos

$$\frac{M(\|w\|^2)}{\|w\|^2} \|w^\pm\|^2 \|w\|^2 \leq \int_{\Omega} \frac{f(w^\pm)}{(w^\pm)^3} (w^\pm)^4 dx. \quad (3.22)$$

Combinando (3.21) e (3.22), temos

$$\left[\frac{M(\|w\|^2)}{\|w\|^2} - \frac{M(t^2\|w\|^2)}{t^2\|w\|^2} \right] \|w^\pm\|^2 \|w\|^2 \leq \int_{\Omega} \left[\frac{f(w^\pm)}{(w^\pm)^3} - \frac{f(tw^\pm)}{(tw^\pm)^3} \right] (w^\pm)^4 dx.$$

Suponha que $t > 1$, então pela hipótese (M_2) , segue que

$$\left[\frac{M(\|w\|^2)}{\|w\|^2} - \frac{M(t^2\|w\|^2)}{t^2\|w\|^2} \right] \|w^\pm\|^2 \|w\|^2 \geq 0.$$

Por outro lado, devido a condição (f_4) , se $t > 1$, temos

$$\int_{\Omega} \left[\frac{f(w^\pm)}{(w^\pm)^3} - \frac{f(tw^\pm)}{(tw^\pm)^3} \right] (w^\pm)^4 dx < 0,$$

o que causa uma contradição. Portanto, devemos ter $t \leq 1$. Analogamente, prova-se que $s \leq 1$. □

Lema 3.7. *Sejam $(w_n) \subset \mathcal{M}$ uma seqüência minimizante para c_0 e $t, s > 0$ os números reais tais que $tw^+ + sw^- \in \mathcal{M}$. Então, $t = s = 1$. Consequentemente, $\Phi(w) = c_0$.*

Demonstração. Como $0 < t, s \leq 1$, $w_n \rightharpoonup w$ em $H_0^1(\Omega)$ e Φ é fracamente semicontínuo inferiormente, podemos utilizar (3.4) e (3.6) para obter a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
 c_0 &\leq \Phi(tw^+ + sw^-) = \Phi(tw^+ + sw^-) - \frac{1}{4}\Phi'(tw^+ + sw^-)(tw^+ + sw^-) \\
 &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\|tw^+ + sw^-\|^2) - \int_{\Omega} F(tw^+ + sw^-) dx \\
 &\quad - \frac{1}{4} \left[M(\|tw^+ + sw^-\|^2)\|tw^+ + sw^-\|^2 - \int_{\Omega} f(tw^+ + sw^-)(tw^+ + sw^-) dx \right] \\
 &\leq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|w\|^2) - \int_{\Omega} F(w) dx - \frac{1}{4} \left[M(\|w\|^2)\|w\|^2 - \int_{\Omega} f(w)w dx \right] \\
 &= \Phi(w) - \frac{1}{4}\Phi'(w)w \\
 &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left[\Phi(w_n) - \frac{1}{4}\Phi'(w_n)w_n \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(w_n) = \Phi(w) = c_0.
 \end{aligned}$$

Observemos que, se $t \neq 1$ ou $s \neq 1$, pelos cálculos acima obteríamos uma contradição. De fato, a estimativa acima nos fornece a seguinte cadeia de desigualdades

$$c_0 \leq \mathcal{A}(t, s) \leq \mathcal{A}(1, 1) \leq c_0, \quad (3.23)$$

onde a expressão auxiliar $\mathcal{A}(t, s)$ é definida por

$$\mathcal{A}(t, s) = \Phi(tw^+ + sw^-) - \frac{1}{4}\Phi'(tw^+ + sw^-)(tw^+ + sw^-).$$

Suponha que $t < 1$ ou $s < 1$. Vamos analisar a expressão expandida de $\mathcal{A}(t, s)$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(t, s) &= \left[\frac{1}{2}\widehat{M}(\|tw^+ + sw^-\|^2) - \frac{1}{4}M(\|tw^+ + sw^-\|^2)\|tw^+ + sw^-\|^2 \right] \\
 &\quad + \int_{\Omega} \left[\frac{1}{4}f(tw^+ + sw^-)(tw^+ + sw^-) - F(tw^+ + sw^-) \right] dx
 \end{aligned}$$

e por (3.4) e (3.6), temos que

$$\mathcal{A}(t, s) = \varphi(tw^+ + sw^-) + \int_{\Omega} \psi(tw^+ + sw^-) dx.$$

Como w^+ e w^- possuem suportes disjuntos, temos $\|tw^+ + sw^-\|^2 = \|tw^+\|^2 + \|sw^-\|^2$ e podemos separar a integral

$$\int_{\Omega} \psi(tw^+ + sw^-) dx = \int_{\text{supp}(w^+)} \psi(tw^+ + sw^-) dx + \int_{\text{supp}(w^-)} \psi(tw^+ + sw^-) dx.$$

Se $w \neq 0$, então $w^+ \not\equiv 0$ ou $w^- \not\equiv 0$. Assumamos, sem perda de generalidade, que $w^+ \not\equiv 0$. Se $t < 1$, pela propriedade de monotonicidade das aplicações $t \mapsto \varphi(t), t \mapsto \psi(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t, s) &= \varphi(tw^+ + sw^-) + \int_{\text{supp}(w^+)} \psi(tw^+ + sw^-) dx + \int_{\text{supp}(w^-)} \psi(tw^+ + sw^-) dx \\ &< \varphi(w^+ + sw^-) + \int_{\text{supp}(w^+)} \psi(tw^+ + sw^-) dx + \int_{\text{supp}(w^-)} \psi(tw^+ + sw^-) dx \\ &= \mathcal{A}(1, s). \end{aligned}$$

e analogamente para $s < 1$. Em suma, se $t < 1$ ou $s < 1$, concluímos que

$$\mathcal{A}(t, s) < \mathcal{A}(1, 1),$$

mas isso contradiz diretamente (3.23). Logo, a suposição de que $t < 1$ ou $s < 1$ é falsa e, portanto, $t = s = 1$, $w \in \mathcal{M}$ e $\Phi(w) = c_0$. \square

Neste ponto, afirmamos que w é um ponto crítico de Φ , ou seja, $\Phi'(w) = 0$. Então w é uma solução fraca do problema (P). Faremos isso de maneira diferente do apresentado no artigo base, conforme mencionado na introdução, deixando assim uma contribuição para futuros estudos baseados no método de Nehari.

Lema 3.8. *Seja $w \in \mathcal{M}$ e $c_0 = \inf_{w \in \mathcal{M}} \Phi(w)$. Então w é solução fraca do problema (P).*

Demonstração. Suponha, por contradição, que w não é solução fraca do problema (P). Então podemos encontrar uma função $\phi \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\Phi'(w)\phi = M(\|w\|^2) \int_{\Omega} \nabla w \nabla \phi dx - \int_{\Omega} f(w)\phi dx \leq -1.$$

Pela continuidade de Φ' , existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\Phi'(tw^+ + sw^- + \xi\phi)\phi \leq -\frac{1}{2} \quad \text{para } |t - 1| + |s - 1| + |\xi| \leq 3\varepsilon. \quad (3.24)$$

Seja η uma função corte tal que

$$\eta(t, s) = \begin{cases} 1, & \text{se } |t - 1| \leq \frac{\varepsilon}{2}, |s - 1| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0, & \text{se } |t - 1| \geq \varepsilon \text{ ou } |s - 1| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

e consideremos uma função auxiliar ψ dada por

$$\begin{aligned} \psi : [0, 1] &\rightarrow H_0^1(\Omega) \\ \sigma &\mapsto \psi(\sigma) = \Phi(tw^+ + sw^- + \sigma\eta(t, s)\phi). \end{aligned}$$

Como $\Phi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, a derivada de ψ existe e é contínua, logo pela Regra da Cadeia, obtemos que

$$\psi'(\sigma) = \Phi'(tw^+ + sw^- + \sigma\eta(t, s)\phi)\eta(t, s)\phi.$$

Segue do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned}\psi(1) - \psi(0) &= \Phi(tw^+ + sw^- + \varepsilon\eta(t, s)\phi) - \Phi(tw^+ + sw^-) \\ &= \int_0^1 \Phi'(tw^+ + sw^- + \sigma\varepsilon\eta(t, s)\phi)\varepsilon\eta(t, s)\phi \, d\sigma \\ &= \int_0^1 \psi'(\sigma) \, d\sigma\end{aligned}$$

e observemos que para $|t - 1| \leq \varepsilon$ e $|s - 1| \leq \varepsilon$, temos e assim, usando (3.24) temos

$$\begin{aligned}\Phi(tw^+ + sw^- + \varepsilon\eta(t, s)\phi) &= \Phi(tw^+ + sw^-) + \int_0^1 \Phi'(tw^+ + sw^- + \sigma\varepsilon\eta(t, s)\phi)\varepsilon\eta(t, s)\phi \, d\sigma \\ &\leq \Phi(tw^+ + sw^-) + \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}\right) \varepsilon\eta(t, s) \, d\sigma \\ &= \Phi(tw^+ + sw^-) - \frac{1}{2}\varepsilon\eta(t, s) \\ &\leq \Phi(tw^+ + sw^-) \\ &< \Phi(w).\end{aligned}$$

A desigualdade anterior continua válida para $|t - 1| \geq \varepsilon$ ou $|s - 1| \geq \varepsilon$, pois nesse caso, $\eta(t, s) = 0$ e a desigualdade é imediata. Portanto, a desigualdade $\Phi(tw^+ + sw^- + \varepsilon\eta(t, s)\phi) \leq \Phi(tw^+ + sw^-)$ é válida para todo $(t, s) \in (R)^2$ com $t \neq 1$, $s \neq 1$. Finalmente, considerando $t = 1$ e $s = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\Phi(tw^+ + sw^- + \varepsilon\eta(s, t)\phi) &= \Phi(w + \varepsilon\eta(1, 1)\phi) \\ &= \Phi(w) + \int_0^1 \Phi'(w + \sigma\varepsilon\eta(1, 1)\phi)\varepsilon\eta(1, 1)\phi \, d\sigma \\ &\leq \Phi(w) + \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}\right) \varepsilon\eta(1, 1) \, d\sigma \\ &= \Phi(w) - \frac{1}{2}\varepsilon\eta(1, 1) \\ &< \Phi(w).\end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade $\Phi(tw^+ + sw^- + \varepsilon\eta(t, s)\phi) \leq \Phi(tw^+ + sw^-)$ é válida para todo $(t, s) \in (R)^2$ e concluímos que

$$\sup_{t \geq 0, s \geq 0} \Phi(tw^+ + sw^- + \varepsilon\eta(t, s)\phi) < c_0.$$

Agora, é suficiente encontrar $\bar{t}, \bar{s} > 0$ tal que

$$\bar{t}w^+ + \bar{s}w^- + \varepsilon\eta(\bar{t}, \bar{s})\phi \in \mathcal{M},$$

o qual contraria a definição de c_0 , ou seja, acharíamos um ponto na Nehari nodal abaixo do ínfimo. Para isto, consideremos as funções

$$h : [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \times [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \rightarrow H_0^1(\Omega)$$

$$(t, s) \mapsto h(t, s) = tw^+ + sw^- + \varepsilon\eta(t, s)\phi$$

e

$$\Upsilon : [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \times [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, s) \mapsto \Upsilon(t, s) = \Phi'(tw^+ + sw^- + \varepsilon\eta(t, s)\phi)(tw^+ + sw^- + \varepsilon\eta(t, s)\phi).$$

Para verificar a continuidade de Υ , observemos primeiramente que a aplicação $(t, s) \mapsto h(t, s)$ é contínua de \mathbb{R}^2 em $H_0^1(\Omega)$. Além disso, como $\Phi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, a aplicação derivada $u \mapsto \Phi'(u)$ é contínua do espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ em seu dual $H^{-1}(\Omega)$. Conseqüentemente, a função $u \mapsto \Phi'(u)u$ é contínua e, portanto, Υ é contínua, pois é a composição da aplicação contínua h com a aplicação contínua $u \mapsto \Phi'(u)u$. Disso, segue que

$$\begin{aligned} \Upsilon((1 - \varepsilon), (1 - \varepsilon)) &= \Phi'((1 - \varepsilon)w^+ + (1 - \varepsilon)w^- + \varepsilon\eta((1 - \varepsilon), (1 - \varepsilon))\phi)((1 - \varepsilon)w^+ \\ &\quad + (1 - \varepsilon)w^- + \varepsilon\eta((1 - \varepsilon), (1 - \varepsilon))\phi) \\ &= \Phi'((1 - \varepsilon)w^+ + (1 - \varepsilon)w^-)((1 - \varepsilon)w^+ + (1 - \varepsilon)w^-) > 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Upsilon((1 + \varepsilon), (1 + \varepsilon)) &= \Phi'((1 + \varepsilon)w^+ + (1 + \varepsilon)w^- + \varepsilon\eta((1 + \varepsilon), (1 + \varepsilon))\phi)((1 + \varepsilon)w^+ \\ &\quad + (1 + \varepsilon)w^- + \varepsilon\eta((1 + \varepsilon), (1 + \varepsilon))\phi) \\ &= \Phi'((1 + \varepsilon)w^+ + (1 + \varepsilon)w^-)((1 + \varepsilon)w^+ + (1 + \varepsilon)w^-) < 0, \end{aligned}$$

de onde concluímos, pelo Teorema de Miranda, que existe $(\bar{t}, \bar{s}) \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \times (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ tal que $\Upsilon(\bar{t}, \bar{s}) = 0$. □

Para finalizar a prova do teorema, iremos mostra que \mathcal{M} possui exatamente dois domínios nodais ou, equivalentemente, muda de sinal exatamente uma vez.

Consideremos o aberto $\tilde{\Omega} = \{x \in \Omega : w(x) \neq 0\}$. Suponha, por contradição, que $\tilde{\Omega}$ possua mais de dois domínios nodais. Como w muda de sinal, sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$w = w_1 + w_2 + w_3, \quad \text{onde } w_1 \geq 0, w_2 \leq 0, w_3 \neq 0$$

e

$$\text{supp}(w_i) \cap \text{supp}(w_j) = \emptyset, \quad \text{para } i \neq j; i, j = 1, 2, 3.$$

Observe que $w_i = 0$ em $\tilde{\Omega} \setminus \text{supp}(w_i)$ para $i = 1, 2, 3$. Assim, a disjunção dos suportes combinada com $\Phi'(w) = 0$ implica

$$\Phi'(w_1 + w_2)w_1 = 0 = \Phi'(w_1 + w_2)w_2.$$

Como $0 \neq w_1 = (w_1 + w_2)^+$ e $0 \neq w_2 = (w_1 + w_2)^-$, pelo Lema 3.3 existem $t, s \in (0, 1]$ tais que $t(w_1 + w_2)^+ + s(w_1 + w_2)^- \in \mathcal{M}$, ou seja, $tw_1 + sw_2 \in \mathcal{M}$ e, então $\Phi(tw_1 + sw_2) \geq c_0$.

Por outro lado, usando $0 \neq w_3 \in \mathcal{M}$ e (3.1)(b), temos

$$\Phi(tw_1 + sw_2) \leq \Phi(w_1 + w_2) < \Phi(w_1 + w_2) + \Phi(w_3) = \Phi(w) = c_0$$

o que contraria a definição de c_0 e, portanto, concluímos que $w_3 = 0$. Assim, a prova do Teorema 3.1 está completa.

Apêndice A

Espaços de Lebesgue L^p

Apresentamos a seguir uma breve revisão dos Espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$ cujas provas podem ser encontradas em [1], [3], [4], [12] e [15]. O objetivo é fixar a notação utilizada e enunciar resultados clássicos essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Definição A.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável e $1 \leq p < \infty$. Definimos*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável e } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty\}$$

dotado da norma

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (\text{A.1})$$

O espaço $L^p(\Omega)$ é chamado de Espaço de Lebesgue. Além disso, se $1 \leq p < \infty$, então L^p é um espaço vetorial normado com relação à (A.1) e é completo com respeito a esta norma; portanto, L^p é um espaço de Banach. Segue desse fato que, para $1 < p < \infty$, L^p é uniformemente convexo e, conseqüentemente, reflexivo.

Teorema A.1. (Desigualdade de Hölder - [3], pág. 6) *Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

Proposição A.1. (Lema 2.2 - [1], pág. 23) *Seja $a, b \geq 0$ e $1 \leq p < +\infty$, então*

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Proposição A.2. (Proposição 6.12 - [12], pág. 186) *Se $\mu(X) < \infty$ e $0 < p < q \leq \infty$, então $L^q(X) \subset L^p(X)$ e $\|f\|_p \leq \|f\|_q \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$.*

Definição A.2. *Seja X um espaço de Banach e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um funcional. Dizemos que Φ é fracamente semicontínuo inferiormente se para toda seqüência $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ que converge fracamente para algum $u \in X$, isto é, $u_n \rightharpoonup u$, vale $\Phi(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n)$.*

Proposição A.3. (Proposição 3.5 - [4], pág. 58) *Seja X um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência em X . Então*

- (i) $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(X, X^*)$ se, e só se, $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$, para todo $f \in X^*$.
- (ii) Se $x_n \rightarrow x$ fortemente, então $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(X, X^*)$.

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(X, X^*)$, então a sequência $(\|x_n\|)_{n=1}^\infty$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.

(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(X, X^*)$ e $f_n \rightarrow f$ fortemente em X^* , então $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Proposição A.4. (Proposição 6.2.9 - [3], pág. 109) Sejam E e F espaços de Banach. Um operador linear $T : E \rightarrow F$ é contínuo se, e somente se, $T : (E, \sigma(E, E^*)) \rightarrow (F, \sigma(F, F^*))$ é contínuo.

Teorema A.2. (Teorema 6.5.4 - [3], pág. 164) Em um espaço reflexivo, toda subsequência limitada tem subsequência fracamente convergente.

Proposição A.5. (Proposição 3.6 - [7], pág. 20) Seja H um espaço de Hilbert

(i) Se (u_n) converge fracamente para u em H , então

$$\|u\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|.$$

(ii) Se (u_n) converge fracamente para u em H e

$$\|u\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|,$$

então (u_n) converge fortemente para u em H .

Lema A.1. (Lema de Fatou - [4], pág. 90) Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que satisfaz:

(i) para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \geq 0$ em q.t.p. $x \in \Omega$;

(ii) $\sup_n \int f_n < +\infty$.

Para q.t.p. $x \in \Omega$, temos $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq +\infty$. Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Teorema A.3. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue - [4], pág. 90) Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que satisfaz:

(i) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ em q.t.p. $x \in \Omega$;

(ii) existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ em q.t.p. $x \in \Omega$.

Então $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\| \rightarrow 0$.

Teorema A.4. (Teorema 2.27 - [12], pág. 56) Suponha que $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($-\infty < a < b < +\infty$) e que $f(\cdot, t) : X \rightarrow \mathbb{R}$ sejam integráveis para cada $t \in [a, b]$. Seja $F(t) = \int_X f(x, t)$.

(i) Suponha que exista $g \in L^1(X \times [a, b])$ tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$ para todo $(x, t) \in X \times [a, b]$. Se $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$ para todo $x \in X$, então $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$; em particular, se $f(x, \cdot)$ é contínua para cada $x \in X$, então F é contínua.

(ii) Suponha que $\frac{\partial f}{\partial t}$ exista e que $g \in L^1(X \times [a, b])$ tal que $|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| \leq g(x)$ para todo $(x, t) \in X \times [a, b]$. Então F é diferenciável e $F'(x) = \frac{\partial}{\partial t} \int f(x, t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$.

Teorema A.5. (Teorema 4.9 - [4], pág. 94) Seja (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tal que $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$. Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ e uma função $h \in L^p(\Omega)$ que satisfazem

(i) $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ em q.t.p. $x \in \Omega$;

(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, para todo $k \geq 1$ em q.t.p. $x \in \Omega$.

Apêndice B

O espaço de Sobolev H_0^1

Neste apêndice, apresentamos as definições e propriedades fundamentais do espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, o qual constitui o ambiente funcional adequado para o estudo de problemas elípticos com condições de fronteira de Dirichlet homogêneas. Para uma discussão detalhada, recomendamos [2], [4], [7], [21] e [23].

Para definir o espaço de Sobolev, primeiramente estendemos o conceito clássico de derivada. Seja $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω (frequentemente chamadas de funções teste).

Denotamos por

$$L_{loc}^1(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u|_\omega \in L^1(\omega), \quad \forall \omega \text{ aberto limitado com } \bar{\omega} \subset \Omega\}.$$

A fórmula da integração por partes motiva a seguinte definição.

Definição B.1. *Seja $u \in L_{loc}^1(\Omega)$. Dizemos que u é fracamente diferenciável em Ω se existem $v_1, \dots, v_N \in L_{loc}^1(\Omega)$ tais que*

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_{\Omega} v_i \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (\text{B.1})$$

para cada $i = 1, \dots, N$. A função v_i que satisfaz (B.1) é dita a i -ésima derivada fraca de u em Ω e é denotada por $D_i u := v_i$. Em particular, se $u \in C^1(\Omega)$ então $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, para todo $i = 1, \dots, N$. O gradiente fraco de u em Ω , denotado por

$$\nabla u := (D_1 u, \dots, D_N u)$$

é a função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ cujas componentes são derivadas fracas.

Definição B.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido como*

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D_i u \in L^p(\Omega), \quad \forall i = 1, \dots, N\}.$$

Este espaço é equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \|u\|_p + \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i=1}^N \left(\int_{\Omega} |D_i u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$, também denotado por $W^{1,2}(\Omega)$, é definido como o subespaço de $L^2(\Omega)$ cujas derivadas fracas de primeira ordem também pertencem a $L^2(\Omega)$

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : D_i u \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, N \right\}.$$

Se $u, v \in H^1(\Omega)$, definimos o produto escalar em $H^1(\Omega)$ como

$$\langle u, v \rangle_{H^1} := \int_{\Omega} uv \, dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (D_i u)(D_i v) \, dx = \int_{\Omega} uv \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx \quad (\text{B.2})$$

com a norma induzida

$$\|u\|_{H^1} := \left(\int_{\Omega} u^2 \, dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (D_i u)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} u^2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.3})$$

Teorema B.1. (*Teorema 2.23 - [7], pág. 17*) $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Definição B.3. O espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ é definido como o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$, isto é,

$$H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$

Resulta que $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert por ser um subespaço fechado de um espaço completo.

Seguindo L. Evans [8, p. 283], definamos o espaço dual de $H_0^1(\Omega)$.

Definição B.4. Denotamos por $H^{-1}(\Omega)$ o espaço dual de $H_0^1(\Omega)$. Em outras palavras, f pertence a $H^{-1}(\Omega)$ desde que f seja um funcional linear limitado em $H_0^1(\Omega)$.

Definição B.5. Se $f \in H^{-1}(\Omega)$, definimos a norma

$$\|f\|_{H^{-1}} = \sup \left\{ \langle f, u \rangle \mid u \in H_0^1(\Omega), \|u\| \leq 1 \right\}.$$

Por H. Brezis [4, p. 291], temos as inclusões

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega),$$

onde essas injeções são contínuas e densas. Além disso, os elementos de $H^{-1}(\Omega)$ são descritos pelo seguinte resultado:

Teorema B.2. (*Teorema 1 - [8], pág. 283*)

(i) Suponha que $f \in H^{-1}(\Omega)$. Então existem funções f^0, f^1, \dots, f^n em $L^2(\Omega)$ tais que

$$(1) \quad \langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f^0 v + \sum_{i=1}^n f^i v_{x_i} \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

(ii) Além disso,

$$\|f\|_{H^{-1}} = \inf \left\{ \left(\int_{\Omega} \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx \right)^{1/2} \mid f \text{ satisfaz (1) para } f^0, \dots, f^n \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Proposição B.1. (Desigualdade de Poincaré - [2], pág. 7) Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

onde C é independente de u .

Devido a desigualdade de Poincaré, podemos considerar em $H_0^1(\Omega)$ a norma

$$\|u\| := \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

no qual é conhecida como a norma usual de $H_0^1(\Omega)$. Os próximos resultados representam as principais imersões que utilizaremos.

Teorema B.3. (Imersões de Sobolev - [4], pág. 284) Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, então as seguintes imersões são contínuas

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad p \in [1, 2^*], \quad N \geq 3, \quad 2^* = \frac{2N}{N-2},$$

e

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad p \in [1, +\infty), \quad N = 1, 2.$$

Assim, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_p \leq C \|u\|_{H^1} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Teorema B.4. (Imersões compactas de Sobolev - [4], pág. 285) Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, então as seguintes imersões são compactas

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad p \in [1, 2^*), \quad N \geq 3,$$

e

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad p \in [1, +\infty), \quad N = 1, 2.$$

Desse modo, se $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ e $\|u\|_{H^1} \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então existe $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ e $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\Omega)$$

e

$$u_{n_k} \rightarrow u \text{ em } L^p(\Omega),$$

onde nas convergências acima foi utilizado o fato que o espaço $H^1(\Omega)$ é reflexivo.

Observação B.1. O número $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é chamado de **expoente crítico de Hardy-Sobolev** e é o único número para o qual se cumprem o resultados anteriores.

Proposição B.2. (**Lema 7.6 - [13], pág. 152**) Seja $u \in W^{1,2}(\Omega)$, então $u^+, u^-, |u| \in W^{1,2}(\Omega)$ e

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & , \quad \text{se } u > 0 \\ 0 & , \quad \text{se } u \leq 0 \end{cases}$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } u \geq 0 \\ \nabla u & , \quad \text{se } u < 0 \end{cases}$$

$$\nabla |u| = \begin{cases} \nabla u & , \quad \text{se } u > 0 \\ 0 & , \quad \text{se } u = 0 \\ -\nabla u & , \quad \text{se } u < 0 \end{cases}$$

Apêndice C

Funcionais diferenciáveis

Neste apêndice, revisamos os conceitos centrais do cálculo diferencial em espaços de Banach. Definimos as noções de derivada de Gâteaux e de Fréchet, estabelecendo a relação entre elas. O objetivo principal é apresentar condições suficientes para a regularidade C^1 de funcionais, resultado essencial para a aplicação de métodos variacionais. Para mais detalhes, veja [8] e [24].

Definição C.1. *Seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$, onde U é um subconjunto aberto de um espaço de Banach X . Dizemos que φ possui uma derivada de Gâteaux $f \in X^*$ em $u \in U$ se, para todo $v \in X$*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\varphi(u + tv) - \varphi(u) - f(tv)] = 0$$

A derivada de Gâteaux é denotada por $\varphi'(u)$.

Definição C.2. *Seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$, onde U é um subconjunto aberto de um espaço de Banach X . Dizemos que φ possui uma derivada de Fréchet $f \in X^*$ em $u \in U$ se*

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\|v\|} [\varphi(u + v) - \varphi(u) - f(v)] = 0.$$

Definição C.3. *Dizemos que o funcional $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$ se a derivada de Fréchet de φ existe e é contínua em U .*

Observação C.1. *Segue diretamente da Definição (C.1) que, quando φ é diferenciável no sentido de Gâteaux em $u \in U$, a ação do funcional $\varphi(u) \in X^*$ sobre qualquer vetor $v \in X$ coincide com a derivada direcional de $\varphi(u)$ na direção v . Isto é, vale a identidade*

$$\varphi'(u)v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\varphi(u + tv) - \varphi(u)].$$

Observação C.2. *Toda derivada de Fréchet é uma derivada de Gâteaux.*

Proposição C.1. (Proposição 1.3 - [24], pág. 7) *Seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$, onde U é um subconjunto aberto de um espaço de Banach X . Se φ possui uma derivada de Gâteaux contínua em $u \in U$, então $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$.*

Demonstração. Dado $u \in U$, seja $\varphi'(u)$ a derivada de Gâteaux de φ em u . O Teorema do valor Médio garante a existência de $\theta \in \mathbb{R}$ satisfazendo $0 < \theta < 1$ tal que

$$|\varphi(u + v) - \varphi(u) - \varphi'(u)v| = |\varphi'(u + \theta v)(v) - \varphi'(u)(v)| \quad (\text{C.1})$$

$$\leq \|\varphi'(u + \theta v) - \varphi'(u)\|_{X^*} \|v\|.$$

Note que

$$\|(u + \theta v) - u\| = \|\theta v\| = \theta \|v\| < \|v\|.$$

Desse modo, uma vez que φ possui uma derivada de Gâteaux contínua em $u \in U$, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $\|v\| < \delta$, temos

$$\|\varphi'(u + \theta v) - \varphi'(u)\|_{X^*} < \varepsilon$$

e daí, usando *C.1*, obtemos

$$|\varphi(u + v) - \varphi(u) - \varphi'(u)v| < \varepsilon \|v\|$$

de onde concluímos que φ possui uma derivada de Fréchet que, por sua vez, é contínua.

Apêndice D

Multiplicadores de Lagrange

Apresentamos a seguir o Teorema do Multiplicadores de Lagrange no contexto de espaços de Banach. Esta ferramenta é essencial para identificar pontos críticos de funcionais sujeitos a vínculos, transformando um problema de minimização restrita em uma equação envolvendo as derivadas do funcional e da restrição. Definimos a estrutura geométrica do vínculo e caracterizamos a existência do multiplicador real λ . Para uma discussão detalhada, veja [2], [14] e [24].

Definição D.1. *Sejam X um espaço de Banach, $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ funcional de classe $C^1(X, \mathbb{R})$ e um conjunto de restrições*

$$S := \{u \in X; F(u) = 0\} = F^{-1}(\{0\}).$$

Supomos que, para todo $u \in S$, tem-se $F'(u) \neq 0$. Se $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ (ou de classe C^1 em uma vizinhança de S , ou ainda C^1 sobre S), dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de J sobre S se existirem $u_0 \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $J(u_0) = c$ e

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

*O ponto u_0 é um ponto crítico de J sobre S e o número real λ é denominado **multiplicador de Lagrange** para o valor crítico c (ou para o ponto crítico u_0).*

O conjunto S é uma variedade de dimensão infinita e o espaço tangente em um ponto $u \in S$ é definido da seguinte forma

$$T_u S := \{v \in X : \langle F'(u), v \rangle = 0\}.$$

Definição D.2. *Seja $J \in C^1(X; \mathbb{R})$ e $u \in S$. A norma da derivada da restrição de J em S é definida como sendo*

$$\|J'(u)\|_* := \sup_{\substack{v \in T_u S \\ \|v\|=1}} \langle J'(u), v \rangle.$$

O ponto u é um ponto crítico da restrição de J em S se a restrição de J' em $T_u S$ é igual a zero.

Lema D.1. (Lema 5.11 - [24], pág. 87) *Se $f, g \in X^*$, temos que*

$$\sup_{\substack{\langle g, v \rangle = 0 \\ \|v\|=1}} \langle f, v \rangle = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|f - \lambda g\|_*.$$

Proposição D.1. (*Proposição 5.12 - [24], pág. 87*) Se $J \in C^1(X; \mathbb{R})$ e $u \in S$, então

$$\|J'(u)\|_* = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|J'(u) - \lambda F'(u)\|.$$

Em particular, u é um ponto crítico de $J|_S$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $J'(u) = \lambda F'(u)$.

Apêndice E

Resultados Complementares

Neste apêndice, reunimos uma série de resultados clássicos de Análise no \mathbb{R}^N . Tais ferramentas são utilizadas pontualmente ao longo do trabalho e são apresentadas aqui para facilitar a consulta. Mais informações podem ser encontradas em [7], [8], [16], [18] e [23].

Assumimos nos teoremas *E.1*, *E.2* e *E.3* que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado e $\partial\Omega \in C^1$.

Teorema E.1. (Fórmula de Gauss - [8], pág. 627) Se $u \in C^1(\bar{\Omega})$, então

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} uv^i d\sigma \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Teorema E.2. (Integração por Partes - [8], pág. 628) Sejam $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$, então

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uvv^i d\sigma \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Teorema E.3. (Fórmula de Green - [8], pág. 628) Sejam $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, então

$$(i) \int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma,$$

$$(ii) \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx = - \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u d\sigma,$$

$$(iii) \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}) d\sigma.$$

Teorema E.4. (Teorema Fundamental do Cálculo - [16], pág. 88) Seja $f : [a, a+h] \rightarrow \mathbb{R}^N$ um caminho com derivada integrável. Então

$$f(a+h) - f(a) = \int_a^{a+h} f'(t) dt = h \int_0^1 f'(a+th) dt.$$

Teorema E.5. (Teorema do Valor Médio - [16], pág. 123) Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $U \in \mathbb{R}^N$. Suponhamos que o segmento de reta $[a, a+v]$ esteja contido em U , que a restrição $f|_{[a, a+v]}$ seja contínua e que exista a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$, segundo v , em todo ponto $x \in (a, a+v)$. Então existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $f(a+v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a+\theta v)$.

Teorema E.6. (Teorema da Função Implícita - [16], pág. 169) Dada a função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k , $k \geq 1$, no aberto $U \subset \mathbb{R}^{N+1}$, seja $(x_0, y_0) \in U$ tal que $f(x_0, y_0) = c$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Existem uma bola $B = B(x_0, y_0) \subset \mathbb{R}^N$ e um intervalo $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ com as seguintes propriedades:

- 1) $B \times \bar{J} \subset U$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in B \times \bar{J}$;
- 2) Para todo $x \in B$ existe um único $y = \xi(x) \in J$ tal que $f(x, y) = f(x, \xi(x)) = c$.

A função $\xi : B \rightarrow J$, assim definida, é de classe C^k e suas derivadas parciais em cada ponto $x \in B$ são dadas por

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \xi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))}.$$

Teorema E.7. (Teorema de Weierstrass - [16], pág. 45) Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto compacto e $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existem $x_0, x_1 \in K$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in K$.

Teorema E.8. (Teorema do Valor Intermediário - [16], pág. 57) Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida num conjunto conexo $X \subset \mathbb{R}^N$. Se existem $a, b \in X$ e $d \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in X$ tal que $f(c) = d$.

Teorema E.9. (Teorema de Miranda - [18]) Seja $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : |x_i| \leq L, i = 1, 2, \dots, n\}$ e considere $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ contínua, satisfazendo

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, -L, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0$$

e

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, +L, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq 0$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Então $f(x) = 0$ tem uma solução em Ω .

Referências

- [1] ADAMS, Robert A.; FOURNIER, John J. F. **Sobolev Spaces**. 2. ed. Oxford: Academic Press, 2003. v. 140. (Pure and Applied Mathematics). ISBN 978-0-080-54129-7.
- [2] ALVES, Claudianor O. **Uma Introdução às Equações Elípticas**. Apostila. Rio de Janeiro, 2007. p. 79. Disponível em: http://www.enama.org/wp-content/uploads/2013/03/E1_mini02_claudianor.pdf. Acesso em: 8 fev. 2026.
- [3] BOTELHO, Geraldo; PELLEGRINO, Daniel; TEIXEIRA, Eduardo. **Fundamentos de Análise Funcional**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. p. 414. (Textos Universitários). ISBN 9788583372097.
- [4] BREZIS, Haim. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. New York: Springer, 2011. (Universitext). ISBN 978-0-387-70913-0.
- [5] CASTRO, Alfonso; COSSIO, Jorge; NEUBERGER, John M. A Sign-Changing Solution for a Superlinear Dirichlet Problem. **Rocky Mountain Mathematics Consortium**, v. 27, n. 4, p. 1041–1053, 1997. DOI: 10.1216/rmjm/1181071858.
- [6] CHENG, Bo. Least energy sign-changing solutions for a class of Kirchhoff-type problems. **SpringerPlus**, v. 5, n. 1, p. 1256, 2016. DOI: 10.1186/s40064-016-2846-5.
- [7] CLAPP, Mónica. **Métodos variacionales en ecuaciones diferenciales parciales**. Notas de Aula. [S. l.], 2016. p. 150. Disponível em: https://piazza.com/class_profile/get_resource/ij3gst1k4n25m8/io8vm4d516s77g. Acesso em: 8 fev. 2026.
- [8] EVANS, Lawrence C. **Partial Differential Equations**. 2. ed. Providence: American Mathematical Society, 2010. v. 19. (Graduate Studies in Mathematics). ISBN 978-0-8218-4974-3.
- [9] FIGUEIREDO, Giovany M. **Sobre o método de Nehari**. Apostila. Brasília, 2018. p. 69. Disponível em: <https://www.enama.org/wp-content/uploads/2018/04/Livro-Nehari-versao-0.pdf>. Acesso em: 8 fev. 2026.
- [10] FIGUEIREDO, Giovany M.; NASCIMENTO, Rúbia G. Existence of a nodal solution with minimal energy for a Kirchhoff equation. **Mathematische Nachrichten**, v. 288, n. 1, p. 48–60, 2015. DOI: 10.1002/mana.201300195.

- [11] FOLLAND, Gerald B. **Introduction to Partial Differential Equations**. 2. ed. Princeton: Princeton University Press, 1995. ISBN 0-691-04361-2.
- [12] FOLLAND, Gerald B. **Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications**. New York: John Wiley & Sons, 1999. (Pure and Applied Mathematics). ISBN 0-471-31716-0.
- [13] GILBARG, David; TRUDINGER, Neil S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. Berlin: Springer, 2001. v. 224. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften). ISBN 978-3-642-61798-0.
- [14] KAVIAN, Otared. **Introduction à la Théorie des Points Critiques**. 1. ed. Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. p. 335. ISBN 978-3-540-59619-6.
- [15] KREYSZIG, Erwin. **Introductory Functional Analysis with Applications**. New York: John Wiley & Sons, 1991. (Wiley Classics Library). ISBN 978-0-471-50459-7.
- [16] LIMA, Elon L. **Curso de Análise**. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. v. 1, p. 547. (Projeto Euclides). ISBN 978-85-244-0372-9.
- [17] LIU, Jiaquan; WANG, Yaqi; WANG, Zhi-Qiang. Solutions for Quasilinear Schrödinger Equations via the Nehari Method. **Communications in Partial Differential Equations**, v. 29, n. 5-6, p. 879–901, 2004. DOI: 10.1081/PDE-120037335.
- [18] MIRANDA, Carlo. Un'osservazione su un teorema di Brouwer. **Bollettino dell'Unione Matematica Italiana**, v. 3, p. 5–7, 1940.
- [19] NEHARI, Zeev. Characteristic values associated with a class of nonlinear second-order differential equations. **Acta Mathematica**, v. 105, p. 141–175, 1961. DOI: 10.1007/BF02559588.
- [20] NEHARI, Zeev. On a class of nonlinear second-order differential equations. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 95, n. 1, p. 101–123, 1960. DOI: 10.1090/s0002-9947-1960-0111898-8.
- [21] PATRICIO, G. F. **Existência de Solução Nodal para alguns Problemas Elípticos**. 2018. f. 161. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande. Disponível em: <https://dspace.sti.ufcg.edu.br/bitstream/riufcg/2464/3/GEOVANY%20FERNANDES%20PATRICIO%20e2%80%93%20DISSERTA%20c3%87%20c3%83%20%28PPGMat%29%20CCT%202018.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2026.

- [22] PU, Huan-Huan *et al.* Nodal solutions of fourth-order Kirchhoff equations with critical growth in \mathbb{R}^N . **Electronic Journal of Differential Equations**, v. 2021, n. 17, p. 1–20, 2021. Disponível em: <http://ejde.math.txstate.edu>.
- [23] VIEIRA, Leandro. **Existência e Multiplicidade de soluções para problemas elípticos pelo método da variedade de Nehari**. 2015. f. 79. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. Disponível em: <https://www.mat.ufmg.br/posgrad/wp-content/uploads/2016/12/Diss259.pdf>. Acesso em: 17 nov. 2025.
- [24] WILLEM, Michel. **Minimax Theorems**. Boston: Birkhäuser, 1996. v. 24. (Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications). ISBN 978-1-4612-8673-8.