



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
Programa de Pós-Graduação em Física

Marcos Cezar Rios Ribeiro Jr
**Decaimento de Fótons no Modelo Padrão
Estendido**

São Luís - MA
2021

Marcos Cezar Rios Ribeiro Jr

Decaimento de Fótons no Modelo Padrão Estendido

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Programa de Pós-Graduação em Física

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Marco Schreck

São Luís - MA

2021

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Rios Ribeiro Junior, Marcos Cezar.

Decaimento de Fótons no Modelo Padrão Estendido /
Marcos Cezar Rios Ribeiro Junior. - 2021.
105 p.

Orientador(a): Marco Schreck.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em
Física/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís,
2021.

1. Física de Partículas. 2. Modelo Padrão Estendido.
3. Violação da Simetria de Lorentz. 4. Decaimento de
Fótons. I. Schreck, Marco. II. Título.

Marcos Cezar Rios Ribeiro Jr

Decaimento de Fótons no Modelo Padrão Estendido

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Prof. Dr. Marco Schreck

Orientador

Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Junior.

Examinador Interno

Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes.

Examinador Interno

Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva

Examinador Externo

Universidade Federal do Cariri

São Luís - MA

2021

Agradecimentos

Este trabalho fecha um ciclo importante nessa jornada que escolhi viver por amor à ciência. Não teria conseguido se não fosse a ajuda de várias pessoas durante esses anos que se passaram.

Gostaria de começar agradecendo todo o apoio, amor e conselhos dos meus pais, Cezar e Janete, que sempre me ajudaram, desde pequeno.

Aos meus irmãos Victor e Thiago pela companhia e pelas conversas que me fazem perceber o mundo de diferentes pontos de vista.

À minha noiva Eveling, por todo o companheirismo, amor, lealdade, discussões científicas, ou não, pelos sonhos que compartilhamos juntos e por toda a felicidade que me proporciona.

Ao meu orientador, Marco, por toda a gentileza e boa vontade comigo durante esses anos de mestrado, pelo tempo investido em mim e por todo o conhecimento que me passou. Ao senhor, "*Vida longa e próspera!*".

Gostaria de agradecer à banca examinadora desta dissertação: professor Manoel, professor Casana e professor Euclides, por todas as sugestões e comentários que me fizeram pensar bastante sobre a beleza da ciência.

Agradeço também ao professor Edilberto, pelos ensinamentos, pelas partidas de xadrez, pelos conselhos e por ter me ajudado muito no começo da minha vida acadêmica.

Agradeço à todos os meus amigos e ao corpo docente da UFMA por toda ajuda nesses anos em que integrei a instituição. Em especial, aos meus amigos Filipe e Alex por terem me acompanhado em aventuras científicas ao redor do Brasil, pelas discussões sobre física e pela amizade.

"Because something is happening here but you don't know what it is."

Resumo

A descoberta da simetria de Lorentz foi um dos grandes avanços da física moderna. Essa simetria tem sido confirmada cada vez mais, por vários experimentos ao longo das últimas décadas. Dessa forma, uma busca por pequenos desvios dessa simetria é uma janela para buscar uma nova física. O presente trabalho aborda o decaimento de fótons, no contexto do Modelo Padrão Estendido (MPE). Para desenvolvermos essa temática, realizamos inicialmente uma revisão da literatura sobre a extensão não-invariante de Lorentz do Modelo Padrão, o conhecido MPE. Na sequência, apresentamos as características do setor de fótons do MPE, como a Lagrangiana, a equação de movimento e suas soluções, assim como as leis de conservação. Posteriormente, discutimos o decaimento do fóton como uma consequência da violação da simetria de Lorentz. Analisamos o decaimento do fóton para um tipo particular de violação, a dita isotrópica. Tal violação é obtida a partir do setor CPT-par do MPE. Ademais, discutimos alguns aspectos clássicos e quânticos da teoria eletromagnética isotrópica e obtemos uma série de resultados relacionados com o processo do decaimento de fótons. O fato do decaimento do fóton não ter sido observado em nenhum experimento, nos permite conseguir limites para o coeficiente isotrópico.

Palavras-chave: Física de Partículas. Violação da Simetria de Lorentz. Modelo Padrão Estendido. Decaimento de fótons.

Abstract

The discovery of Lorentz symmetry was one of the great advances in modern physics. This symmetry has been increasingly confirmed by various experiments over the past few decades. Thus, a search for small deviations from this symmetry is a window to search for a new physics. The present work is dedicated to photon decay, in the context of the Standard-Model Extension (SME). To develop this subject matter, we initially carried out a literature survey on the Lorentz-noninvariant extension of the Standard Model, the well-known SME. Next, we present the characteristics of the photon sector of the SME, such as the Lagrangian, the equation of motion and its solutions, as well as the conservation laws. Later, we discuss photon decay as a consequence of a violation of Lorentz symmetry. We analyze photon decay for a particular type of violation, known as isotropic. Such a violation is obtained from the CPT-even sector of the SME. Furthermore, we discuss some classical and quantum aspects of the isotropic sector of the modified electromagnetic theory and obtain a series of results related to the photon decay process. The fact that photon decay has not been observed in any experiment allows us to set limits on the isotropic coefficient.

Keywords: Particle Physics. Violation of Lorentz Symmetry. Standard-Model Extension. Photon decay.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Partículas do Modelo Padrão	12
Figura 2 – Referenciais em movimento relativo	16
Figura 3 – Distância Euclidiana entre dois pontos	17
Figura 4 – Cone de luz	18
Figura 5 – Translação no espaço-tempo	26
Figura 6 – Espaço de fase não-relativístico	29
Figura 7 – Contração de Lorentz da caixa cúbica da Figura 6-a	30
Figura 8 – Decaimento do fóton	31
Figura 9 – Diagrama de Feynman do decaimento do fóton	32
Figura 10 – Decaimento do fóton Colinear	32
Figura 11 – Escalas em Física	34
Figura 12 – Ilustração da quebra espontânea da simetria axial	37
Figura 13 – Transformações ativas e passivas	40
Figura 14 – Transformações de Observador e Partícula	41
Figura 15 – Referencial centrado no Sol	43
Figura 16 – Cone de Luz no referencial isotrópico	59
Figura 17 – Processo em QED	66
Figura 18 – Espaço de Fase	70
Figura 19 – Ângulo entre o par elétron-pósitron	72
Figura 20 – Ângulo entre o par e^-e^+	73
Figura 21 – Diagrama de Feynman para o decaimento do fóton	75
Figura 22 – Taxa de decaimento parcial	76
Figura 23 – Taxa de decaimento total	77
Figura 24 – Taxa de decaimento e tempo de vida	78

Lista de tabelas

Tabela 1 – Classificação de intervalos no espaço de Minkowski.	18
Tabela 2 – Classificação dos tipos de transformação de Lorentz.	21
Tabela 3 – Simetrias e grandezas conservadas em Física.	25

Sumário

	Introdução	11
1	SIMETRIAS, CAMPOS RELATIVÍSTICOS E PARTÍCULAS	15
1.1	Simetria de Lorentz	15
1.2	Campos Relativísticos	22
1.3	Decaimento de partículas	27
2	QUEBRA DA SIMETRIA DE LORENTZ	33
2.1	Motivações	33
2.2	O Modelo Padrão Estendido	35
2.3	Transformações de Partícula e Observador	39
3	ASPECTOS CLÁSSICOS DO SETOR DE FÓTONS DO MODELO PADRÃO ESTENDIDO	44
3.1	Lagrangiana, Equações de Campo e Soluções	44
3.2	Leis de conservação	47
3.3	Soluções da equação de movimento e propagação de ondas	51
4	DECAIMENTO DE FÓTONS NO MPE	55
4.1	Eletromagnetismo Isotrópico	55
4.1.1	Aspectos clássicos	56
4.1.2	Aspectos Quânticos	60
4.2	Decaimento do fóton na QED Isotrópica	67
4.2.1	Energia mínima	67
4.2.2	Espaço de fase	69
4.2.3	Ângulo entre o par elétron-pósitron	71
4.2.4	Taxa de decaimento	73
4.2.5	Limite para o parâmetro de violação isotrópico	77
5	CONCLUSÃO	79
	Referências	82
	APÊNDICE A – CÁLCULOS ESTENDIDOS CAPÍTULO 1	88
A.1	Cálculo de $\mathcal{M}(\gamma \rightarrow e^- e^+)$	88

	APÊNDICE B – CÁLCULOS ESTENDIDOS DO CAPÍTULO 2 . . .	91
B.1	Cálculo do tensor canônico $T^{\alpha\beta}$	91
B.2	Simetrizando $T^{\alpha\beta}$	92
B.3	Cálculo da densidade de Hamiltoniana Θ^{00}	93
B.4	Cálculo da densidade de momento	95
B.5	Cálculo do fluxo de densidade de energia	95
B.6	Cálculo do tensor de tensões	96
	APÊNDICE C – CÁLCULOS ESTENDIDOS DO CAPÍTULO 3 . . .	98
C.1	Cálculo do Comutador	98
C.2	Hamiltoniana	101
C.3	Taxa de decaimento	102

Introdução

O resultado nulo do célebre experimento de Michelson-Morley, de 1887 [1], foi surpreendente e difícil de explicar, em termos dos conceitos físicos vigentes na época. Inicialmente, os físicos do final do sec. XIX acreditavam que a luz sendo onda precisaria de um meio pelo qual se propagasse. Esse meio levaria à um referencial privilegiado para as leis do eletromagnetismo. No entanto, essa concepção foi abandonada quando Einstein apresentou as ideias da teoria especial da Relatividade [2]. Einstein postulou a existência de uma simetria entre os vários referenciais inerciais¹ 4-dimensionais, ou seja, todos eram equivalentes em uma descrição das leis naturais. Essa ideia mudou profundamente o pensamento científico da época. Espaço e tempo passaram a ser entendidos como uma estrutura indissociável, chamada de espaço-tempo.

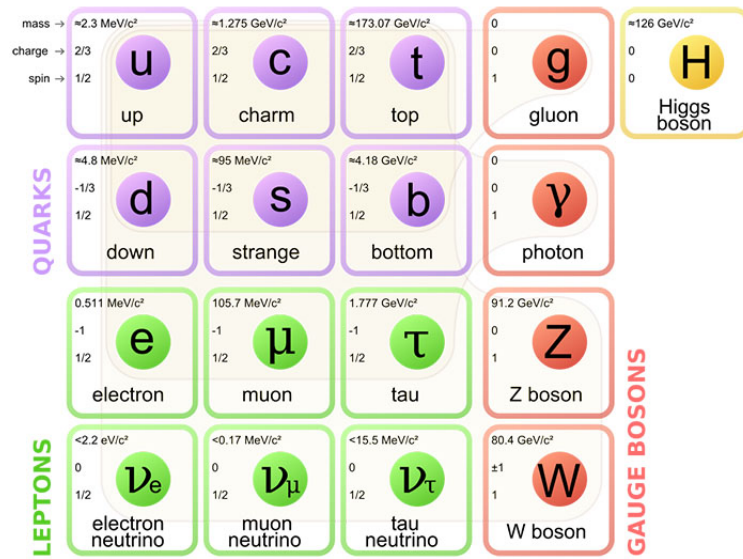
Concomitantemente ao desenvolvimento da teoria da Relatividade, o comportamento do mundo microscópico foi sendo desvendado com os esforços de uma série de cientistas pelo mundo. Uma descrição unificada da Relatividade Especial e da Mecânica Quântica começou a ser alcançada por Dirac em seus trabalhos pioneiros, onde a quantização do campo eletromagnético foi feita pela primeira vez [4]. Essa quantização deu consistência teórica ao conceito de fóton introduzido por Einstein, na elucidação do efeito fotoelétrico. Poucos anos depois, o próprio Dirac obteve uma lei relativística para o elétron [5], expressa na famosa equação de Dirac, com grande sucesso experimental. A equação de Dirac, além do sucesso experimental na descrição de átomos hidrogenóides, previa a existência de uma partícula semelhante ao elétron, em spin e em massa, mas, de carga oposta. O pósitron, a anti-partícula do elétron, foi previsto por argumentos de simetria inerentes à equação de Dirac. Logo depois, em 1932, a sua existência foi confirmada experimentalmente por Anderson [6].

A física de partículas começou a ser desenhada com a unificação da Relatividade Especial e da Mecânica Quântica, originando-se da compreensão da interação entre matéria e energia. A interação eletromagnética passou a ser entendida por troca de partículas intermediadoras, ou seja, elétrons e pósitrons interagindo trocando fótons. Esse desenvolvimento foi usado para entender outras duas interações fundamentais da natureza: A interação fraca, responsável por uma série de decaimentos radioativos [7] e a interação forte, responsável por manter o núcleo atômico coeso.

As interações fundamentais, exceto a gravidade, passaram a ser descritas em termos de uma teoria quântica de campos e, juntas, formaram o Modelo Padrão das Partículas Elementares. Essa é a teoria mais bem sucedida já construída, embora seja considerada apenas uma primeira aproximação de uma teoria mais fundamental, ainda desconhecida. O Modelo Padrão é um conglomerado de teorias de campo que descrevem o comportamento das partículas fundamentais.

¹ A equivalência entre os referenciais inerciais já era conhecida desde os trabalhos de Newton. Contudo, o princípio da Relatividade Newtoniano se referia às leis da mecânica. Dessa forma, o princípio da Relatividade Einsteiniano foi uma generalização do Newtoniano para um espaço 4-dimensional [3].

Figura 1 – Partículas do Modelo Padrão



O Modelo Padrão da física de partículas descreve as interações fundamentais mediante a troca de partículas [8].

São elas (Figura 1): Seis léptons, partículas leves que não possuem interação forte; seis quarks, partículas que compõem o núcleo atômico e interagem fortemente; quatro bósons de calibre, responsáveis por mediar as interações fundamentais e o bóson de Higgs, partícula responsável por dar massa às outras partículas do Modelo Padrão. Vale a pena mencionar que, para cada partícula do Modelo Padrão, existe uma antipartícula associada. Essa estrutura teórica é bem sucedida na explicação de vários dados experimentais [9], porém, deixa várias questões sem respostas [10].

Um grande problema teórico que o Modelo Padrão enfrenta é a não-inclusão de uma descrição da interação gravitacional. Isso é particularmente frustrante, uma vez que há na natureza lugares extremos, como os arredores de um buraco negro, onde uma teoria de gravitação quântica se torna necessária. A busca por uma teoria de gravitação quântica consistente é intensamente estudada em uma série de trabalhos [11, 12]. Mostrou-se que, em vários desses, a simetria de Lorentz poderia ser quebrada [13, 14, 15, 16].

Uma violação da simetria de Lorentz é algo possível de ocorrer em energias da ordem da escala de Planck, onde espera-se que a física seja bem diferente das leis descritas pelo Modelo Padrão e pela Relatividade Geral. Buscar evidências experimentais de violações da simetria de Lorentz e CPT é de grande importância, tanto para testar as teorias existentes, quanto para buscar uma nova física.

As violações da simetria de Lorentz podem ser introduzidas de várias maneiras e isso não é novidade em física. As primeiras considerações foram feitas ainda nos anos 60 com vários trabalhos [17]. No final dos anos 90, Colladay e Kostelecký desenvolveram uma extensão não-invariante de Lorentz para o Modelo Padrão, conhecida como Modelo Padrão Estendido.

Tal arcabouço teórico tem como papel parametrizar qualquer tipo de violação da simetria de Lorentz através de campos tensoriais, fixos no espaço-tempo. No passado, o próprio Kosteletsky demonstrou que as violações da simetria de Lorentz poderiam surgir em teorias de cordas e mostrou que era possível uma violação espontânea da simetria de Lorentz [18].

As violações podem assumir os mais variados tipos possíveis, através da concepção de campos de fundo, uma vez que não existe um modelo que escolha preferencialmente um tipo de violação em detrimento ao outro. Assim, o Modelo Padrão Estendido pode ser dividido em duas grandes partes: o setor mínimo, que inclui restrições mais duras sobre os tipos de violação presentes na Lagrangiana do Modelo Padrão Estendido [19], com o intuito de preservar os campos do Modelo Padrão e o setor não-mínimo [20, 21, 22, 23, 24, 25], que inclui novos efeitos, como a contribuição gravitacional [26] e operadores não-renormalizáveis, que seriam de muita importância para estudos em energias mais altas. A ideia principal é que o MPE pode ser entendido como uma soma de sucessivas aproximações que se tornam menos importantes de acordo com a energia típica do sistema:

$$\mathcal{L}_{\text{MPE}} = \mathcal{L}_{\text{MP}} + \mathcal{L}_{\text{mínimo}}^{\text{MPE}} + \mathcal{L}_{\text{não-mínimo}}^{\text{MPE}} + \dots \quad (1)$$

De tal maneira que, para baixas energias, a aproximação de primeira ordem, $\mathcal{L}_{\text{MPE}} = \mathcal{L}_{\text{MP}} + \mathcal{L}_{\text{mínimo}}^{\text{MPE}}$, seja suficiente [27].

Uma característica marcante em teorias que violam a simetria de Lorentz, são as pequenas modificações nas relações de dispersão das partículas fundamentais,

$$E^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2 + \delta(|\mathbf{p}|, E), \quad (2)$$

onde $\delta(|\mathbf{p}|, E)$ é alguma função dependente do momento, da energia e dos coeficientes que violam a simetria de Lorentz. Essas modificações podem induzir à uma série de efeitos não-usuais e proibidos, considerando-se apenas o MP. Efeitos exóticos, como o decaimento do fóton, ($\gamma \rightarrow e^- e^+$), a radiação de Cherenkov no vácuo, ($e^- \rightarrow \gamma e^-$), o fóton splitting, ($\gamma \rightarrow \gamma \dots \gamma$) e a emissão de um par por um férmion, ($e^- \rightarrow e^- e^- e^+$), [28], se tornam possíveis graças às relações de dispersão modificadas.

O fato desses efeitos nunca terem sido detectados experimentalmente torna possível a obtenção de limites para os coeficientes de quebra [29]. Com o avanço da física experimental limites cada vez menores para tais coeficientes, têm sido obtidos.

Este presente trabalho tem como objetivo analisar o decaimento de fótons, utilizando o formalismo do MPE. O capítulo 1 apresenta a simetria de Lorentz através da sua motivação física, calcada na teoria da Relatividade Especial. Nesse capítulo, é feita uma abordagem sobre a estrutura do espaço-tempo, o conceito de grupo e como as transformações de Lorentz são classificadas mediante as suas propriedades matemáticas. Em seguida, é feita a descrição de campos relativísticos clássicos e é demonstrado como o princípio de mínima ação conduz às equações de movimento para tais campos. São apresentadas algumas propriedades do decaimento

de partículas em sua descrição quântica. Além disso, é discutido como a estabilidade do fóton é garantida à luz da simetria de Lorentz.

O capítulo 2 chama a atenção para a possibilidade da quebra da simetria de Lorentz. Depois de uma motivação para o estudo dessa área de pesquisa, há uma descrição do MPE como uma ferramenta adequada para um estudo sistematizado do tema. Por fim, é discutido sobre como a violação da simetria de Lorentz é empregada através do conceito de transformações de partícula e transformações de observador.

O capítulo 3 foca no setor CPT-par de fótons do Modelo Padrão Estendido mínimo. É realizada a derivação das equações de movimento, leis de conservação e algumas propriedades básicas das soluções gerais, apresentando um tipo particular dessa violação para exemplificar novos fenômenos possíveis, quando tratamos da quebra da simetria de Lorentz.

No capítulo 4 estão os principais resultados deste trabalho. É apresentada a extensão isotrópica do setor de fótons do MPE. Esse modelo é obtido com a redução dos 19 parâmetros do campo de fundo CPT-par, $(\kappa_F)_{\mu\nu\rho\sigma}$, em apenas um único parâmetro, $\tilde{\kappa}_{tr}$, que controla a violação isotrópica. São discutidos alguns dos aspectos clássicos mais imediatos da teoria, como a obtenção das equações de Maxwell modificadas, soluções para a equação de onda, além de comentários sobre a causalidade, quando $\tilde{\kappa}_{tr} < 0$. Posteriormente, é feita a quantização da teoria no calibre de Coulomb calculando as modificações nos vetores de polarização e na soma sobre todas as polarizações; cruciais para cálculos de processos físicos. Segue-se analisando a possibilidade do fóton apresentar instabilidade em cenários onde há a quebra da simetria de Lorentz. Algumas informações sobre a cinemática do processo, como o espaço de fase e o ângulo entre o par, e^-e^+ , são discutidas em detalhes. A taxa de decaimento para o fóton é calculada e obtém-se também a dependência com a energia E_γ do fóton inicial. Por fim, é obtido, através de dados recentes, um limite para o coeficiente de controle isotrópico, $\tilde{\kappa}_{tr}$.

As conclusões obtidas estão apresentadas no capítulo 5, onde são sumarizados os principais resultados e enunciadas perspectivas futuras. Nos apêndices, ao final, são detalhados os principais cálculos realizados ao longo do trabalho.

1 Simetrias, Campos Relativísticos e Partículas

Neste capítulo, abordaremos aspectos gerais de teoria de campos, simetrias e decaimento de partículas, com o intuito de criar familiaridade com a notação e o formalismo que será utilizado em todo o texto. De início, apresentaremos a simetria de Lorentz, evidenciando alguns aspectos físicos e a sua estrutura formal, como o intervalo invariante e comentários sobre o grupo de Lorentz. Posteriormente, trataremos sobre campos relativísticos, discutindo as obtenções das equações de movimento pelo princípio de mínima ação. Além disso, comentaremos sobre simetrias contínuas e o teorema de Noether, usando o campo eletromagnético como exemplo. Por fim, discutiremos, brevemente, sobre o decaimento de partículas na física e analisaremos o motivo do processo $\gamma \rightarrow e^+e^-$ ser proibido em cenários onde a simetria de Lorentz é preservada.

1.1 Simetria de Lorentz

A Teoria Especial da Relatividade é baseada em como observáveis físicos se transformam entre referenciais inerciais que possuem movimento mútuo. Por exemplo, a Figura 2 mostra um evento que ocorre nas coordenadas $(\mathbf{r}, t)$, no referencial inercial S e nas coordenadas $(\mathbf{r}', t')$, em outro referencial inercial S' , que se move em relação à S em uma velocidade v , na direção z . Para o caso onde $v \ll c$ e as origens dos referenciais coincidem, quando $t = t' = 0$, os dois conjuntos de coordenadas estão relacionados pelas transformações de Galileu (TG),

$$t' = t, \quad (1.1a)$$

$$x' = x, \quad (1.1b)$$

$$y' = y, \quad (1.1c)$$

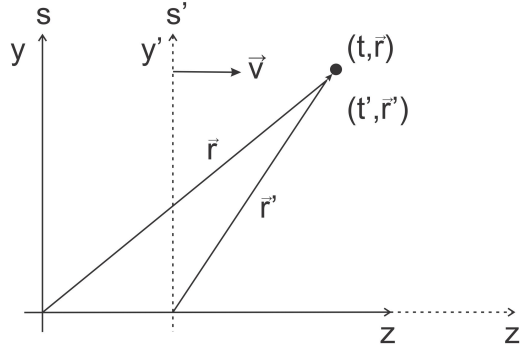
$$z' = z - vt. \quad (1.1d)$$

Em 1905, Einstein [2] postulou que *a velocidade da luz no vácuo é a mesma em qualquer referencial inercial*. Esse primeiro postulado implica que um pulso de luz esférico emitido em $t = t' = 0$, deve satisfazer simultaneamente as equações $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$, para o referencial S e, $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$, para S' . Consequentemente, o intervalo espaço-temporal,

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2, \quad (1.2)$$

é uma quantidade invariante e, portanto, S e S' devem concordar em sua medida. A equação (1.2) é satisfeita apenas se as próprias coordenadas satisfizerem leis de transformação, conhecidas

Figura 2 – Referenciais em movimento relativo



como transformações de Lorentz (TL)¹,

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} z \right), \quad (1.3a)$$

$$x' = x, \quad (1.3b)$$

$$y' = y, \quad (1.3c)$$

$$z' = \gamma (z - vt), \quad (1.3d)$$

onde γ é o fator de Lorentz, dado por

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1.4)$$

com $\beta = v/c$. No limite de baixas velocidades, $v \ll c$, ou, $\beta \rightarrow 0$, as TL se reduzem às TG. Podemos escrever uma TL em uma forma matricial, $\mathbf{X}' = \mathbf{\Lambda} \mathbf{X}$. Para (1.3a), (1.3b), (1.3c) e (1.3d), temos, explicitamente,

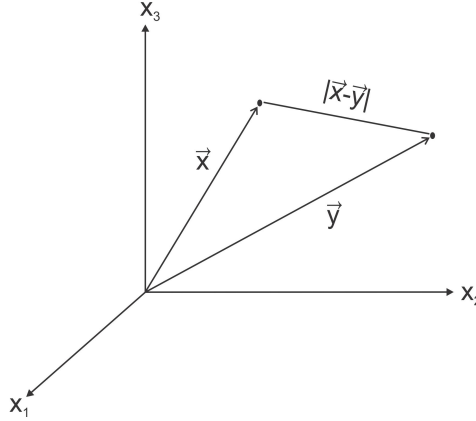
$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

O movimento relativo entre os referenciais garante que S' observa S se movendo com uma velocidade $-v$, na direção z . A transformação do referencial S' para S é dada pela inversão de (1.5), ou seja, $\mathbf{X} = \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{X}'$, ou ainda,

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

¹ A transformação ilustrada na figura é um tipo particular de TL, conhecida como *Transformação de Lorentz pura ou de boost*. Mais adiante no texto, comentaremos acerca disso.

Figura 3 – Distância Euclidiana entre dois pontos



onde tudo que fizemos foi considerar $\beta \rightarrow -\beta$, para a transformação inversa. É fácil verificar que, de fato, a matriz em (1.6) é a inversa da matriz em (1.5), ou seja,

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Uma característica marcante nas TL é a mistura de componentes espaciais e temporais. Isso sugere que o tempo está relacionado com o espaço de maneira intrínseca. Dessa forma, a noção de espaço-tempo fica clara e passa a ser conveniente organizar as componentes, $\mathcal{X} = (t, x, y, z)$, em um objeto 4-dimensional, chamado de 4-vetor. Esse objeto pertence à um espaço vetorial diferente do bem conhecido *espaço Euclidiano*, onde toda a mecânica Newtoniana foi fundamentada.

Uma maneira de se distinguir um espaço vetorial de outro é através da noção de medida de distâncias em cada um. No espaço Euclidiano 3-dimensional, a distância entre dois pontos, digamos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, é invariante e está relacionada com o produto interno convencional, ilustrado na Figura 3.

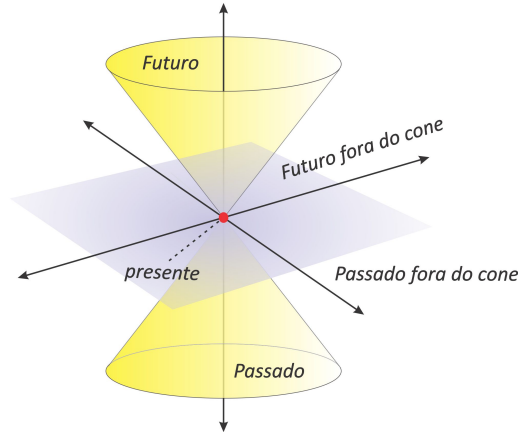
$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2. \quad (1.8)$$

Podemos reescrever (1.8), de maneira matricial, fazendo uso do conceito de um tensor métrico $\mathbf{g}$,

$$|\mathbf{r}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top \mathbf{g} (\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (1.9)$$

Um tensor métrico é uma forma bilinear que define a noção de distância em um espaço vetorial [30]. No espaço euclidiano 3-dimensional, a métrica é, simplesmente, dada por $g_{ij} = \delta_{ij}$, onde

Figura 4 – Cone de luz



δ_{ij} é a delta de Kronecker, ou seja,

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Toda a mecânica Newtoniana é formulada em cima do conceito de espaço Euclidiano. Todavia, quando sistemas físicos possuem velocidade, v , comparável à velocidade da luz, c , o caráter não-Euclidiano do espaço-tempo é evidenciado. No lugar de um espaço 3-dimensional Euclidiano, damos lugar a um espaço 4-dimensional chamado *espaço de Minkowski*, caracterizado pelo intervalo invariante (1.2). A distância² entre dois pontos no espaço de Minkowski é dada por,

$$d(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = c^2 (t_1 - t_2)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2. \quad (1.11)$$

Note que a definição de distância no espaço de Minkowski não é positiva definida. Esse fato faz do espaço de Minkowski um espaço *pseudo-Euclidiano* e, assim, podemos classificar a distância (1.11) de três maneiras possíveis, ilustradas na Tabela 1.

$d(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) > 0$	intervalo tipo-tempo
$d(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$	intervalo tipo-luz
$d(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) < 0$	intervalo tipo-espaço

Tabela 1 – Classificação de intervalos no espaço de Minkowski.

Todos os intervalos *tipo-luz* estão sobre a superfície 3-dimensional de um cone num espaço 4-dimensional. Essa superfície é conhecida como cone de luz e possui um papel central na discussão sobre causalidade. O cone de luz determina a região do espaço-tempo que está

² Estamos denotando os pontos no espaço-tempo por $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, para diferenciar dos pontos no espaço 3-dimensional $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

causalmente ligada ao evento localizado no ponto $\mathcal{Y}$ (origem), como mostra a Figura 4. Um evento que está localizado no presente (origem), pode ter sido afetado por qualquer evento localizado no passado e pode afetar qualquer outro evento que se encontra no futuro, desde que esses eventos estejam no interior do cone de luz. Esses intervalos preservam a causalidade e são chamados de *tipo-tempo*. Entretanto, há regiões que não podem afetar o presente, assim como regiões que o presente jamais poderá afetar, pois, se assim fosse, a causalidade seria violada. Esses pontos estão fora do cone de luz e são classificados como intervalos *tipo-espaço*.

O intervalo entre dois pontos no espaço de Minkowski pode ser representado com o auxílio da métrica de Minkowski,

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Tão logo, podemos reescrever (1.11) em forma matricial,

$$d(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (\mathcal{X} - \mathcal{Y})^\top \eta (\mathcal{X} - \mathcal{Y}), \quad (1.13)$$

onde $\mathcal{X} = (ct_1, x_1, x_2, x_3)^\top$ e $\mathcal{Y} = (ct_2, y_1, y_2, y_3)^\top$. É mais usual a notação em componentes do que a matricial. Assim, a distância entre dois pontos no espaço-tempo, é

$$d(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \equiv \eta_{\mu\nu} (x - y)^\mu (x - y)^\nu, \quad (1.14)$$

com $\mu = \{0, 1, 2, 3\}$ sendo os índices que correm as componentes do 4-vetor³. Inspirados pela lei de transformação (1.5), podemos definir o *vetor contravariante*, $x^\mu = (ct, x, y, z)$, como sendo o objeto que se transforma sob mudança de coordenadas da seguinte forma,

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (1.15)$$

onde $\Lambda^\mu{}_\nu$ são os elementos da matriz de transformação. De forma semelhante, podemos definir um *vetor covariante*,

$$x_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} x^\nu, \quad (1.16)$$

com $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$. O vetor covariante se transforma segundo a lei,

$$x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu, \quad (1.17)$$

onde $\Lambda_\mu{}^\nu$ representa o elemento de matriz de Λ^{-1} . Com essas definições podemos representar a distância⁴ entre dois pontos no espaço-tempo simplesmente por,

$$d(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = x^\mu y_\mu = x_0 y_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}. \quad (1.18)$$

³ Em todo o trabalho, estamos utilizando a convenção da soma, ou seja, índices repetidos representam soma.

⁴ Algumas vezes essa operação é chamada de produto escalar de Minkowski.

Comentários sobre o Grupo de Lorentz

O conjunto de transformações que mantém invariante a distância (1.18) forma um *grupo*, conhecido como *grupo de Lorentz*. Um grupo pode ser definido como um conjunto de elementos que satisfazem as regras:

- Associatividade, ou seja, $(\Lambda_1 \Lambda_2) \Lambda_3 = \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3$;
- Existência do elemento neutro $\hat{1}$;
- Cada elemento Λ do conjunto deve possuir um inverso Λ^{-1} , de tal forma que, $\Lambda \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \Lambda$;
- O conjunto deve ser fechado, ou seja, a combinação de dois elementos do conjunto ainda pertence ao conjunto, $\Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_3$.

Como a distância (1.18) é um invariante, temos

$$x'^\mu y'_\mu = x^\mu y_\mu. \quad (1.19)$$

Com o auxílio de (1.15) e (1.16),

$$x'^\mu y'_\mu = \eta_{\mu\nu} x'^\mu y'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta x^\alpha y^\beta = x^\mu y_\mu, \quad (1.20)$$

ou seja,

$$(\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta - \eta_{\alpha\beta}) x^\alpha y^\beta = 0. \quad (1.21)$$

A equação acima garante que Λ satisfaz a relação,

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta}, \quad (1.22)$$

ou, em forma matricial,

$$\Lambda^\top \eta \Lambda = \eta. \quad (1.23)$$

Vale a pena mencionar que as *transformações de Lorentz puras*, introduzidas no início da seção (1.5), são apenas um exemplo de TL. Rotações espaciais,

$$\Lambda^{(\text{rot})} = \begin{pmatrix} 1 & 0^\top \\ 0 & R_{3 \times 3}(\hat{n}) \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

com $R_{3 \times 3}$ sendo a matriz de rotação usual e $\hat{n}$ um vetor unitário apontando ao longo da direção de rotação é um outro exemplo. *Transformações de Paridade* ou *inversão Temporal*,

$$\Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & 0^\top \\ 0 & -\hat{1}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

$$\Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & 0^\top \\ 0 & \hat{1}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

também satisfazem a condição (1.23) e, portanto, são elementos do grupo de Lorentz. Essas transformações específicas são discretas, se comparadas às transformações contínuas de boosts e rotações.

A equação (1.23) representa, precisamente, a relação que Λ deve satisfazer para ser classificada como um elemento do grupo de Lorentz. Podemos ainda classificar as TL mediante o valor do seu determinante, pois (1.23) implica em,

$$\det \Lambda = \pm 1. \quad (1.27)$$

As TL que possuem a propriedade, $\det \Lambda = 1$, são ditas *transformações de Lorentz próprias* e são denotadas por L_+ . Por outro lado, as transformações que possuem, $\det \Lambda = -1$, são chamadas de *transformações de Lorentz impróprias* e são denotadas por L_- . Note ainda que a equação (1.22), para $\alpha = \beta = 0$, implica que

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \Lambda^i_0 \Lambda^i_0 \geq 1, \quad (1.28)$$

ou seja, temos mais duas classificações possíveis: as transformações *Ortócronas* ($L^\uparrow$), quando $\Lambda^0_0 \geq 1$ e as *não-Ortócronas* ($L^\downarrow$), quando $\Lambda^0_0 \leq -1$. Concluimos que o conjunto de todas as TL é composto de quatro peças distintas e estão dispostas na Tabela 2,

$L^\uparrow_+ (\det [\Lambda] = 1, \Lambda^0_0 \geq 1)$	$L^\uparrow_- (\det [\Lambda] = -1, \Lambda^0_0 \geq 1)$
$L^\downarrow_+ (\det [\Lambda] = 1, \Lambda^0_0 \leq -1)$	$L^\downarrow_- (\det [\Lambda] = -1, \Lambda^0_0 \leq -1)$

Tabela 2 – Classificação dos tipos de transformação de Lorentz.

Essas peças são desconexas, pois não é possível passar de uma para a outra por meio de mudanças contínuas dos parâmetros que caracterizam as transformações [31]. É fácil mostrar que apenas o conjunto, $L^\uparrow_+$, é um subgrupo do grupo de Lorentz. Tal subgrupo é, costumeiramente, chamado de *grupo de Lorentz restrito* e é um exemplo de um *grupo de Lie*.

O grupo de Lorentz, tratado até o momento, é chamado *homogêneo* e é constituído por 6 parâmetros independentes: três devido aos boosts e três devido às rotações. O grupo homogêneo, quando considerado juntamente com transformações de translação,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (1.29)$$

resulta no chamado grupo de Lorentz não-homogêneo, também chamado de *Grupo de Poincaré*. Tal grupo é constituído por 10 parâmetros independentes, seis devido às transformações homogêneas e quatro devido às translações no espaço-tempo. O subgrupo em que, $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$ e o parâmetro, a^μ , é arbitrário é chamado de *grupo de Translações*. Mais adiante, associaremos esse grupo ao tensor energia momento canônico.

1.2 Campos Relativísticos

A teoria de campos é uma ferramenta de muita utilidade na física moderna, tendo aplicações em muitas áreas diferentes [32, 33]. O conceito de campo relativístico é, particularmente, indispensável no tratamento das interações fundamentais, pois, as quatro interações podem ser descritas a partir desses objetos. Em suma, campos relativísticos devem satisfazer o segundo postulado da *Relatividade Restrita*, ou seja, suas equações de movimento devem ser covariantes sob transformações de Lorentz. Vamos discutir alguns aspectos iniciais da *Teoria Clássica de Campos*.

Equação de movimento

O formalismo Lagrangiano é uma maneira muito útil de descrever a dinâmica de um sistema de partículas em muitas situações. Em oposição ao formalismo Newtoniano, as equações de movimento são totalmente determinadas através do elegante *princípio de mínima ação*⁵.

Sem maiores aprofundamentos, a descrição Lagrangiana, de um sistema constituído por N partículas, pode ser introduzida definindo-se um funcional dependente das funções que indicam a posição e a velocidade de cada uma delas. Essas funções são, rotineiramente, chamadas de graus de liberdade do sistema ou *coordenadas e velocidades generalizadas*, $q_i(t)$ e $\dot{q}_i(t)$, sendo i o índice que rotula as partículas do sistema. Definimos o funcional,

$$S = \int L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) dt, \quad (1.30)$$

comumente chamado de *ação*, enquanto a função $L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$ é conhecida como *Lagrangiana* do sistema. O princípio de mínima ação garante que deve ser nula a variação da ação com respeito às coordenadas generalizadas. Isso nos leva a um conjunto de N equações, uma para cada grau de liberdade, na forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (1.31)$$

onde $i = 1, 2, \dots, N$. As equações acima são as chamadas equações de Euler-Lagrange e descrevem o movimento de maneira equivalente ao *princípio fundamental da dinâmica Newtoniana* [3].

A descrição Lagrangiana é, particularmente, essencial quando estudamos um sistema contínuo, como um campo escalar ou vetorial. Diferentemente de um sistema discreto, comentado brevemente acima, um sistema contínuo é composto por um número infinito de graus de liberdade. A generalização do formalismo discreto para o contínuo deve ser feita cautelosamente [34]. Todavia, os resultados são análogos ao caso discreto, de tal modo que a correspondência

$$i \rightarrow x^\mu, \quad (1.32a)$$

$$q_i \rightarrow \Phi(x), \quad (1.32b)$$

$$\dot{q}_i \rightarrow \partial_\mu \Phi(x), \quad (1.32c)$$

⁵ Também conhecido como Princípio de Hamilton

pode ser tomada sem maiores problemas⁶. A Lagrangiana para um sistema de partículas é, simplesmente, a soma das Lagrangianas individuais. A correspondência contínua é a integral sobre todo o espaço do que chamamos de *densidade de Lagrangiana*,

$$L = \sum_i L_i(q, \dot{q}) \rightarrow \int \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi; x) d^3x. \quad (1.33)$$

O funcional ação é escrito em termos de uma integral 4-dimensional,

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi; x). \quad (1.34)$$

E, de maneira análoga ao caso discreto, a equação de movimento é decorrente do princípio variacional. Vamos calcular δS , considerando variações $\delta\phi$ infinitesimais. Temos,

$$\begin{aligned} \delta S &= S[\Phi + \delta\Phi] - S[\Phi], \\ &= \int d^4x [\mathcal{L}(\Phi + \delta\Phi, \partial_\mu \Phi + \partial_\mu \delta\Phi; x) - \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi; x)], \\ &= \int d^4x \left(\delta\Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} + \partial_\mu \delta\Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right), \\ &= \int d^4x \delta\Phi \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) \right] + \int_{\partial V} dS_\mu \delta\Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

sendo que, na última passagem, usamos o teorema da divergência generalizado:

$$\int_V d^4x \partial_\mu A^\mu = \int_{\partial V} dS_\mu A^\mu. \quad (1.36)$$

O princípio de mínima ação, sumarizado por $\delta S = 0$, nos fornece então as equações de Euler-Lagrange para o campo,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) = 0. \quad (1.37)$$

Como a densidade de Lagrangiana é um escalar perante transformações de Lorentz, as equações (1.37) são covariantes, ou seja, mantêm a mesma forma perante transformações de coordenadas.

Como um exemplo, vamos considerar o campo eletromagnético descrito pela densidade de Lagrangiana de Maxwell,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + j^\mu A_\mu. \quad (1.38)$$

As equações de Maxwell podem ser derivadas imediatamente das equações de Euler-Lagrange (1.37). Temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial (\partial^\alpha A^\beta)}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \partial_\alpha A_\beta + \partial^\alpha A^\beta \frac{\partial (\partial_\alpha A_\beta)}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} - \frac{\partial (\partial^\beta A^\alpha)}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \partial_\alpha A_\beta - \partial^\beta A^\alpha \frac{\partial (\partial_\alpha A_\beta)}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \right), \\ &= -\frac{1}{2} (\eta^{\alpha\mu} \delta^\beta_\nu \partial_\alpha A_\beta + \partial^\alpha A^\beta \delta^\mu_\alpha \eta_{\beta\nu} - \eta^{\mu\beta} \delta^\alpha_\nu \partial_\alpha A_\beta - \partial^\beta A^\alpha \delta^\mu_\alpha \eta_{\beta\nu}), \\ &= -\frac{1}{2} (\partial^\mu A_\nu + \partial^\mu A_\nu - \partial_\nu A^\mu - \partial_\nu A^\mu) = -F^\mu_\nu, \end{aligned} \quad (1.39)$$

⁶ A derivada temporal é generalizada para a 4-derivada do campo

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = j^\alpha \eta_{\alpha\nu} = j_\nu, \quad (1.40)$$

ou seja,

$$\partial_\mu F^\mu{}_\nu + j_\nu = 0 \implies \partial_\mu F^\mu{}_\nu = -j_\nu \implies \partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu, \quad (1.41)$$

onde j_ν é a 4-densidade de corrente, dada por $j_\nu = (\rho, \mathbf{j})$. A equação acima é a forma covariante das equações de Maxwell não-homogêneas. As equações homogêneas também admitem uma forma covariante. São elas,

$$\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\rho\sigma} = 0, \quad (1.42)$$

onde $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ é o tensor de Levi-Civita no espaço-tempo de Minkowski.

Simetrias e o Teorema de Noether

É notório que a noção de simetrias é um artifício de extrema relevância em física. A existência de simetrias está associada à grandezas físicas conservadas, como sumarizadas na Tabela 3.

Uma simetria pode ser identificada como uma propriedade de um sistema, mediante uma transformação. Por exemplo, dizemos que um sistema, descrito por uma densidade de Lagrangiana $\mathcal{L}$, é *simétrico sob uma transformação*, quando suas equações de movimento permanecem inalteradas.

Vamos então discutir, brevemente, sobre a relação entre simetrias e leis de conservação em uma teoria de campos. Essa relação está resumida pelo *Teorema de Noether*. Esse teorema afirma: "*À todo grupo de transformações contínuas de Φ , que mudam $\mathcal{L}$, no máximo por uma divergência, existe associada uma corrente conservada*".

A prova de tal afirmação pode ser feita considerando uma transformação infinitesimal sobre o campo,

$$\Phi(x^\mu) \rightarrow \Phi'(x^\mu) + \delta\Phi(x^\mu), \quad (1.43)$$

tal que transforme a densidade de Lagrangiana por $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$, em que⁷ $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{J}^\mu$. Assim, a variação de $\mathcal{L}$,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \partial_\mu \delta\Phi, \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) \delta\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \partial_\mu \delta\Phi, \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta\Phi \right), \end{aligned}$$

⁷ A existência de $\mathcal{J}^\mu$ é assegurada pela hipótese do teorema.

Invariância	Grandeza Conservada
Translações espaciais	Momento linear
Rotações	Momento Angular
Translações temporais	Energia

Tabela 3 – Simetrias e grandezas conservadas em Física.

em que a equação de movimento⁸ (1.37) foi usada. Assim, temos uma equação de continuidade $\partial_\mu j^\mu = 0$, com

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi - \mathcal{J}^\mu. \quad (1.44)$$

O fato da corrente j^μ ser conservada, implica que a quantidade

$$Q \equiv \int_R j^0 d^3x, \quad (1.45)$$

é constante no tempo, onde R representa todo o espaço 3-dimensional.

De acordo com a terminologia adotada na literatura, as transformações dos campos (1.43) podem ter sido induzidas por transformações do espaço-tempo, ou não. Nesse último caso, a transformação é dita interna. As transformações podem ainda ser locais ou globais, conforme dependam, ou não, dos pontos do espaço-tempo.

Como um exemplo do teorema de Noether, vamos considerar uma densidade de Lagrangiana que não depende, explicitamente, das coordenadas espaço-temporais x^μ , ou seja,

$$\left(\frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} \right)_{\Phi, \partial_\mu \Phi} = 0.^9 \quad (1.46)$$

Dito de outra forma, a densidade de Lagrangiana é invariante por transformações do tipo translações,

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu, \quad (1.47)$$

onde a^μ é o conjunto de parâmetros infinitesimais da transformação. O teorema de Noether garante que para uma transformação do tipo (1.47), sob a condição (1.46), existirá uma corrente conservada. Vamos identificar assim, o tensor de energia-momento canônico.

Primeiramente, um campo associado à qualquer uma das representações do grupo de Lorentz que estamos representando genericamente por Φ , se transforma da seguinte maneira sob translações,

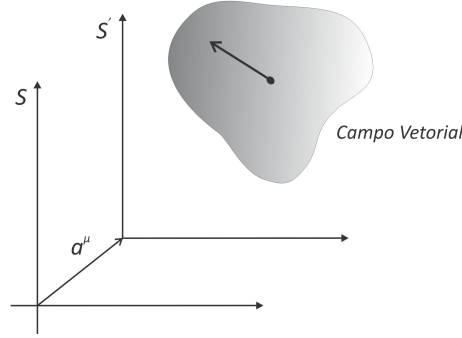
$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x') = \Phi(x). \quad (1.48)$$

Isso se deve ao fato de que uma transformação do tipo (1.47) translada apenas a origem do sistema de referência, como na Figura 5, sem qualquer mudança nas orientações dos eixos. Dessa forma, as projeções do campo não se alteram mediante a transformação do tipo (1.47). A

⁸ A lei de conservação é válida apenas para configurações de campo que satisfazem a equação de movimento.

⁹ Esta equação denota a não-dependência explícita da densidade de Lagrangiana em relação aos pontos x^μ do espaço-tempo.

Figura 5 – Translação no espaço-tempo



derivada da densidade de Lagrangiana em relação às coordenadas é, então,

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \partial_\mu \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi} \partial_\mu \partial_\nu \Phi. \quad (1.49)$$

Com o auxílio da equação de movimento (1.37), temos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathcal{L} &= \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Phi)} \right) \partial_\mu \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi} \partial_\mu \partial_\nu \Phi, \\ \partial_\mu \mathcal{L} &= \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Phi)} \partial_\mu \Phi \right). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Obtemos assim,

$$\partial_\nu T_\mu{}^\nu = 0, \quad (1.51)$$

uma equação de continuidade para cada uma das componentes espaço-temporais. Identificamos o *tensor de energia-momento canônico* como sendo,

$$T^\nu{}_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Phi)} \partial_\mu \Phi - \delta^\nu{}_\mu \mathcal{L}. \quad (1.52)$$

Para o caso específico do campo eletromagnético sem fontes, descrito por (1.38), com $j^\mu = 0$, temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\lambda)} = F^{\nu\lambda}. \quad (1.53)$$

Então, o tensor de energia-momento para o campo eletromagnético, é

$$T^\nu{}_\mu = F^{\nu\lambda} \partial_\mu A_\lambda + \frac{1}{4} \delta^\nu{}_\mu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (1.54)$$

ou ainda,

$$T^{\nu\mu} = F^{\nu\lambda} \partial^\mu A_\lambda + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (1.55)$$

A lei de conservação, expressa por (1.51), nos entrega a conservação da energia e do momento, integrando sobre todo o espaço 3-dimensional, em um tempo fixo. Explicitamente, temos

$$\int \partial_\nu T^{\nu\alpha} d^3x = \int \partial_0 T^{0\alpha} d^3x + \int \partial_i T^{i\alpha} d^3x = 0. \quad (1.56)$$

Para um campo localizado¹⁰ é possível mostrar que a segunda integral não contribui, devido ao teorema de Gauss. Temos assim, um conjunto de 4 equações, onde a componente temporal entrega a conservação da energia total e as componentes espaciais a conservação do momento total,

$$\int \partial_0 T^{0\alpha} d^3x = 0 \Rightarrow \frac{dE_{\text{campo}}}{dt} = 0; \frac{d\mathbf{p}_{\text{campo}}}{dt} = 0, \quad (1.57)$$

onde E_{campo} e $\mathbf{p}_{\text{campo}}$ são a energia total e o momento total do campo eletromagnético, respectivamente.

1.3 Decaimento de partículas

Até agora, consideramos apenas campos clássicos. Todavia, se estamos interessados em descrever partículas fundamentais, devemos dar um caráter quântico para tais campos, em um procedimento chamado de *Quantização*. Comentaremos sobre a quantização da teoria eletromagnética mais adiante neste trabalho. Por enquanto, vamos nos concentrar em discutir como o decaimento de partículas é descrito quanticamente, tanto para o caso não-relativístico, quanto para o caso relativístico.

Na mecânica quântica não-relativística, as taxas de transição são obtidas fazendo uso da *regra de ouro de Fermi*. A taxa de transição de um estado inicial $|i\rangle$ para um estado final $|f\rangle$, de um certo sistema, é expressa por:

$$\Gamma_{fi} = 2\pi |T_{fi}|^2 \rho(E_i), \quad (1.58)$$

onde T_{fi} é o elemento da matriz de transição e $\rho(E_i)$ é a densidade de estados finais que o sistema pode assumir. A matriz de transição é determinada pelo Hamiltoniano de interação H' e, para pequenas perturbações, vale a conhecida expansão perturbativa [35],

$$T_{fi} = \langle f | H' | i \rangle + \sum_{j \neq i} \frac{\langle f | H' | j \rangle \langle j | H' | i \rangle}{E_i - E_j} + \dots \quad (1.59)$$

A taxa de transição (1.58) depende também da densidade de estados $\rho(E_i)$,

$$\rho(E_i) = \left| \frac{dn}{dE} \right|_{E=E_i}, \quad (1.60)$$

onde dn é o número de estados acessíveis na janela de energia $[E, E + dE]$. De maneira alternativa, a densidade de estados pode ser escrita como uma integral sobre todos os estados finais do sistema. Usando a função delta de Dirac para garantir a conservação da energia, temos

$$\left| \frac{dn}{dE} \right|_{E=E_i} = \int \frac{dn}{dE} \delta(E - E_i) dE. \quad (1.61)$$

¹⁰ Campos que decaem no infinito suficientemente rápidos.

Assim, podemos reescrever a regra de ouro por,

$$\Gamma_{fi} = 2\pi \int |T_{fi}|^2 \delta(E - E_i) dn. \quad (1.62)$$

A taxa de decaimento entre dois estados de um sistema quântico depende de duas componentes:

- (i) o *elemento da matriz de transição*, que contém informações sobre a dinâmica do processo e
- (ii) a *densidade de estados acessíveis*, que depende da cinemática do processo em questão.

Na mecânica quântica não-relativística, o processo de decaimento de uma partícula de energia E_a e momento $\mathbf{p}_a$, em outras duas partículas de energias e momentos E_1, E_2 e $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ pode ser calculado usando a expressão (1.62). O termo de primeira ordem da matriz de transição para esse decaimento é:

$$T_{a \rightarrow 1+2} = \langle \psi_1 \psi_2 | H' | \psi_a \rangle = \int \psi_1^* \psi_2^* \hat{H}' \psi_a d^3\mathbf{x}, \quad (1.63)$$

onde $|\psi_a\rangle$, $|\psi_1 \psi_2\rangle$ representam os estados iniciais e finais, respectivamente, do sistema. Na aproximação de Born, a perturbação pode ser considerada pequena, de tal modo que os estados finais e iniciais possam ser considerados como ondas planas:

$$\psi(\mathbf{x}) = A e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)}, \quad (1.64)$$

onde a constante A é determinada pela normalização da função de onda. A integral (1.63) se estende por toda a região onde a função de onda é normalizada. Usualmente, costuma-se escolher as condições de contorno de uma caixa cúbica de lado L . A normalização garante que:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int \psi^* \psi d^3\mathbf{x} = 1 \rightarrow |A|^2 = 1/L^3 = \frac{1}{V} \quad (1.65)$$

onde V é o volume da caixa cúbica. As condições de contorno para a caixa garantem que a função de onda é periódica,

$$\psi(x + L, y, z) = \psi(x, y, z), \text{ etc.} \quad (1.66)$$

como ilustra a Figura 6-a.

A periodicidade da função de onda restringe o momento da partícula, em estados quantizados,

$$(p_x, p_y, p_z) = (n_x, n_y, n_z) \frac{2\pi}{L}, \quad (1.67)$$

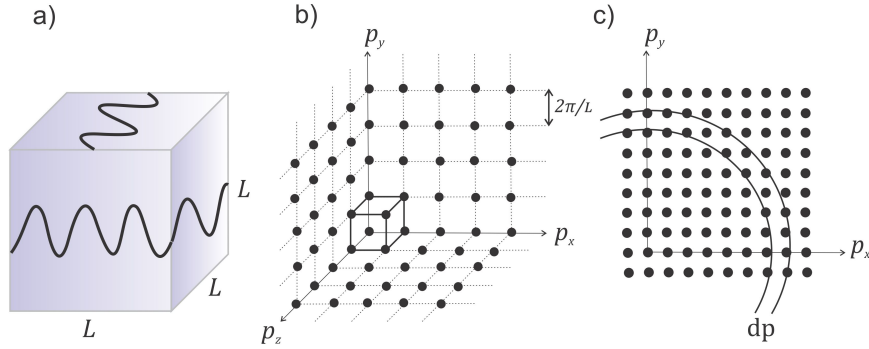
onde n_x, n_y e n_z são números inteiros que caracterizam um estado particular do sistema. Cada estado, caracterizado pelo conjunto dos números inteiros (n_x, n_y, n_z) , ocupa um volume infinitesimal, dado por:

$$d^3\mathbf{p} = dp_x dp_y dp_z = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3, \quad (1.68)$$

(Figura 6-b). O número de estados possíveis, em um intervalo infinitesimal, de tamanho dp é igual ao volume da casca esférica de momento, p , dividido pelo volume médio ocupado por um único estado (Figura 6-c), dado por (1.68),

$$dn = 4\pi p^2 dp \frac{V}{(2\pi)^3}, \quad (1.69)$$

Figura 6 – Espaço de fase não-relativístico



a) A função de onda da partícula deve satisfazer condições periódicas, para cada lado da caixa cúbica, de tamanho L . b) Estados possíveis no espaço dos momentos. c) O número de estados em um intervalo de comprimento dp , no plano $p_x p_y$.

e, portanto,

$$\frac{dn}{dp} = \frac{4\pi p^2}{(2\pi)^3} V. \quad (1.70)$$

A densidade de estados pode ser calculada usando a regra da cadeia

$$\frac{dn}{dp} = \frac{dn}{dE} \frac{dE}{dp} \rightarrow \frac{dn}{dE} = \frac{dn}{dp} \left| \frac{dp}{dE} \right|. \quad (1.71)$$

Essa densidade corresponde ao número de estados acessíveis do sistema.

A taxa de transição não deve depender do volume V , uma vez que o fator V é cancelado pela normalização da função de onda no cálculo da matriz de transição (1.63). Podemos ainda normalizar a *função de onda por unidade de volume*, fazendo $V = 1$. Nesse caso, o número de estados acessíveis de cada partícula associado à um volume infinitesimal no espaço dos momentos é, simplesmente,

$$dn_i = \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{(2\pi)^3}. \quad (1.72)$$

Para o decaimento do tipo $a \rightarrow 1 + 2$, existem dois momentos finais. Contudo, esses momentos estão relacionados por conservação, resultando em apenas um momento independente. É conveniente estender a região de integração sobre os momentos das duas partículas, usando a função delta de Dirac 3-dimensional,

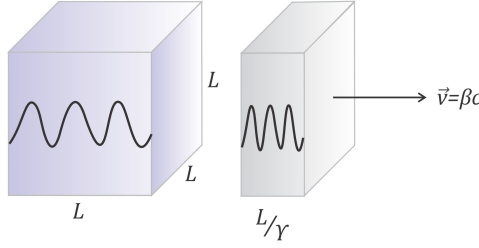
$$dn = (2\pi)^3 \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2). \quad (1.73)$$

A regra de ouro (1.62) para o decaimento $a \rightarrow 1 + 2$ pode ser escrita como sendo,

$$\Gamma_{a \rightarrow 1+2} = (2\pi)^4 \int |T_{fi}|^2 \delta(E_a - E_1 - E_2) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}. \quad (1.74)$$

A equação acima descreve a taxa de transição entre dois estados e possui essa forma apenas no referencial privilegiado, onde a caixa está em repouso e, portanto, vale a *normalização*

Figura 7 – Contração de Lorentz da caixa cúbica da Figura 6-a



por unidade de volume. Para um outro observador, que possui movimento relativo ao referencial privilegiado, a caixa sofre uma contração por um fator $1/\gamma$, ao longo da direção do movimento, resultando em uma taxa de transição diferente de (B.44). Em outras palavras, a equação (B.44) não é invariante de Lorentz, como ilustra a Figura 7. Para sistemas relativísticos, devemos usar a seguinte normalização para a função de onda:

$$\int \psi'^* \psi' d^3\mathbf{x} = 2E \quad (1.75)$$

onde ψ' representa a função de onda relativística que se relaciona com a função de onda não-relativística, simplesmente, por:

$$\psi' = \sqrt{2E} \psi. \quad (1.76)$$

Com essa nova normalização, definimos o elemento de matriz invariante de Lorentz para o processo $a \rightarrow 1 + 2$, como sendo

$$M_{a \rightarrow 1+2} \equiv \langle \psi'_1 \psi'_2 | H' | \psi'_a \rangle = (2E_1 2E_2 2E_a)^{1/2} \langle \psi_1 \psi_2 | H' | \psi_a \rangle, \quad (1.77)$$

ou ainda,

$$M_{a \rightarrow 1+2} = (2E_1 2E_2 2E_a)^{1/2} T_{fi}. \quad (1.78)$$

Usando a relação entre a matriz de transição, T_{fi} , e o elemento de matriz invariante de Lorentz, M_{fi} , podemos reescrever a taxa de transição,

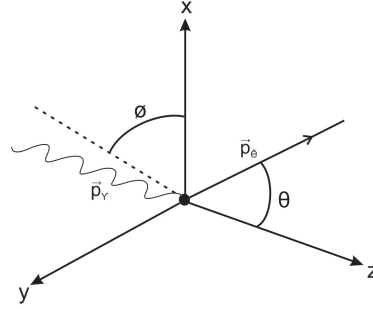
$$\Gamma_{a \rightarrow 1+2} = \frac{(2\pi)^4}{2E_a} \int |M_{a \rightarrow 1+2}|^2 \delta(E_a - E_1 - E_2) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2}. \quad (1.79)$$

A expressão acima é a regra de ouro em sua forma relativística.

Decaimento de Fótons

Este trabalho tem como principal objetivo estudar o decaimento de um único fóton em um par elétron-pósitron, $\gamma \rightarrow e^- e^+$. Esse decaimento, no entanto, é proibido por questões cinemáticas, ou seja, o volume do espaço de fase é zero e, portanto, o fóton se mantém estável.

Figura 8 – Decaimento do fóton



De maneira análoga ao que foi mencionado anteriormente, o elemento de matriz, M_{fi} , está relacionado com a dinâmica do processo, ao passo que o elemento de volume do espaço de fase está relacionado com a cinemática do decaimento.

Para ilustrar que o decaimento do tipo, $\gamma \rightarrow e^- e^+$, não é possível, vamos supor que ele seja possível. Sendo assim, a conservação do 4-vetor energia-momento garante que o processo deve satisfazer as equações:

$$E_\gamma = E_{e^-} + E_{e^+}, \quad (1.80a)$$

$$\mathbf{p}_\gamma = \mathbf{p}_{e^-} + \mathbf{p}_{e^+}, \quad (1.80b)$$

onde os índices γ , e^- , e^+ representam as energias e momentos do fóton, elétron e pósitron, respectivamente. As relações de dispersão relativísticas, em unidades naturais, nos auxiliam à reescrever a conservação da energia como,

$$p_\gamma = \sqrt{p_{e^-}^2 + m^2} + \sqrt{p_{e^+}^2 + m^2}, \quad (1.81)$$

uma vez que, $m_{e^-} = m_{e^+} \equiv m$. Vamos considerar o momento inicial do fóton $\mathbf{p}_\gamma = q\hat{z}$, como ilustra a Figura 9. Usando o sistema de coordenadas da figura e a conservação do momento, expresso pela equação (1.80b), podemos reescrever a equação (1.81), como

$$q = \sqrt{p^2 + m^2} + \sqrt{p^2 + m^2 + q^2 - 2pq \cos \theta}, \quad (1.82)$$

onde p representa o módulo do momento do elétron e θ o ângulo entre a direção do momento do elétron e a direção de propagação do fóton inicial. Resolvendo a equação acima para $\cos \theta$, temos

$$\cos \theta = \sqrt{1 + \frac{m^2}{p^2}}. \quad (1.83)$$

Note que (1.83) não faz sentido, uma vez que $|\cos \theta| \leq 1$. Isso garante que as igualdades (1.80a) e (1.80b) não são satisfeitas para o decaimento do tipo $\gamma \rightarrow e^- e^+$ e, portanto, o volume do espaço de fase é nulo.

Apesar do volume do espaço de fase ser nulo, o elemento de matriz $\mathcal{M}_{\gamma \rightarrow e^- e^+}$, para esse decaimento, é diferente de zero e seu módulo quadrado pode ser calculado. O diagrama de

Figura 9 – Diagrama de Feynman do decaimento do fóton

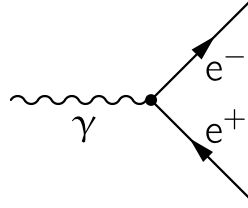
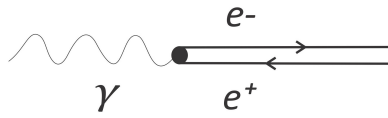


Figura 10 – Decaimento do fóton Colinear



Feynman em primeira ordem, na constante de estrutura fina, é mostrado na Figura 9. O cálculo do módulo quadrado do elemento de matriz é feito no Apêndice A.1 e, como resultado, temos

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 4e^2 (p_\mu p^\mu + q_\mu p^\mu), \quad (1.84)$$

onde $p^\mu = (m, \mathbf{p}_{e^-})$ é o 4-vetor do elétron e $q^\mu = (p_\gamma, \mathbf{p}_\gamma)$ o do fóton. Note que a razão do decaimento de um fóton em um par elétron-pósitron é devido apenas à cinemática do processo e, portanto, está diretamente relacionada com a simetria de Lorentz.

De maneira geral, partículas sem massa decaem apenas em partículas de massa nula [36], por conta da simetria de Lorentz. Supor o decaimento de uma partícula sem massa em partículas massivas resulta em absurdos, como a equação (1.83) evidencia.

Alguém, no entanto, poderia supor que, no limite $m \rightarrow 0$, a equação (1.83) começa a fazer sentido, resultando na possibilidade do decaimento, $\gamma \rightarrow e^- e^+$, ocorrer e produzir um par elétron-pósitron, na mesma direção de propagação do fóton (Figura 10). Contudo, por menor que seja a massa do elétron-pósitron, nunca teremos a igualdade $m = 0$. Dessa forma, o decaimento é proibido, mesmo em cenários onde $E \ll m$.

Mais adiante, neste trabalho, vamos analisar a estabilidade do fóton em altíssimas energias e constatar que, se houver violação da simetria de Lorentz, esse decaimento passará a ser teoricamente possível.

2 Quebra da Simetria de Lorentz

Neste presente capítulo, abordaremos algumas ideias básicas relacionadas à violação da simetria de Lorentz. Começamos justificando a relevância do estudo da quebra dessa simetria, citando o grande potencial para avanços significativos em teorias ainda não compreendidas. Além disso, faremos uma análise sobre a não-invariância de Lorentz das leis físicas¹ que possibilitam o acesso à uma nova física, em alguma escala de altas-energias. Depois, comentaremos brevemente sobre o Modelo Padrão Estendido, um arcabouço teórico que contém todos os tipos de violações da simetria de Lorentz, no contexto do modelo padrão e da teoria da Relatividade Geral. Por fim, uma digressão sobre os tipos de transformações de Lorentz, a fim de ilustrar, com exemplos claros, como a violação, de fato, pode ocorrer e seus efeitos em diferentes referenciais.

2.1 Motivações

Atualmente, são conhecidas quatro forças da natureza: a força gravitacional, a força eletromagnética e as forças nucleares fraca e forte. Essas forças são razoavelmente bem descritas pelas teorias existentes² e cada uma possui sua escala de comprimento característica. As forças nucleares, por exemplo, são restritas às escalas de comprimento pequenas, da ordem de 10^{-14} metros para a força forte e 10^{-17} metros para a força fraca. O eletromagnetismo e a gravidade³, no entanto, possuem escalas de comprimento maiores⁴. O eletromagnetismo tem raio de ação desde escalas interplanetárias como em escalas interatômicas⁵. Todas essas forças são descritas matematicamente através de campos relativísticos. Apesar disso, a gravitação é a única força, dentre as quatro, que não possui uma descrição quântica, sendo esse, um dos grandes problemas da física teórica moderna.

A teoria que descreve o comportamento quântico das três outras forças fundamentais é conhecida como MP. Essa teoria é baseada na ideia de descrever as interações fundamentais mediante as partículas elementares. Essas partículas, por sua vez, são descritas por campos quânticos e relativísticos. O caráter relativístico suscita o fundamental papel que a simetria de Lorentz tem no Modelo Padrão. Apesar do sucesso teórico e experimental [9], acredita-se que o próprio MP seja apenas uma teoria efetiva emergente de um limite de baixas energias de uma

¹ A não-invariância de Lorentz nada tem a ver com violações nos postulados fundamentais da relatividade restrita. Vamos explicar esse ponto mais adiante.

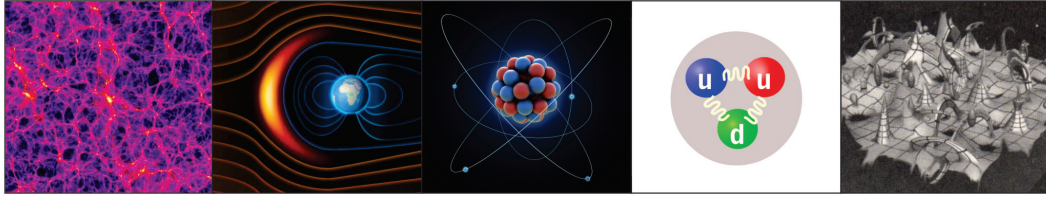
² A gravitação é descrita pela Teoria da Relatividade Geral, enquanto as outras três forças pelo Modelo Padrão da Física de Partículas.

³ De acordo com a Relatividade Geral, não há uma força gravitacional [37]. Partículas pontuais se movem ao longo de uma geodésica dentro de um espaço-tempo com curvatura.

⁴ Em escalas cosmológicas (megaParsec), efeitos eletromagnéticos podem ser negligenciados e a força predominante é a gravidade [38, 39].

⁵ Em escalas interatômicas, a gravidade é insignificante, voltando a ser relevante apenas em tamanhos da ordem do comprimento de Planck.

Figura 11 – Escalas em Física



Adaptado de google imagens. [40, 41, 42, 43, 44]

teoria mais fundamental. Teorias além do MP são intensamente analisadas tanto do ponto de vista teórico como do ponto de vista experimental [45, 46].

Existem inúmeras formas de analisar situações além do MP. Dentre todas, talvez a mais desafiante seja a de introduzir a gravidade no contexto do MP. Se uma teoria de gravitação quântica consistente for alcançada, se torna viável, por exemplo, a análise de possíveis efeitos que a partícula de gravidade, o *gráviton*⁶, teria com as outras partículas já conhecidas, possibilitando, pelo menos em princípio, o estudo de aspectos quânticos⁷ de buracos negros ou do universo primordial. Contudo, estamos longe de conhecer a física por trás da teoria quântica da gravidade, pois, efeitos quânticos da gravitação são presentes apenas em escalas de comprimentos muito pequenas, da ordem de 10^{-35} metros. Essa escala de comprimento é conhecida como *escala de Planck*. É possível combinar as constantes físicas $\hbar$, G e c , de maneira a se obter escalas de comprimento, massa, energia e tempo.

$$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1,6 \times 10^{-35} \text{ m}, \quad (2.1)$$

$$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2,18 \times 10^{-8} \text{ kg}, \quad (2.2)$$

$$E_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \approx 1,22 \times 10^{19} \text{ GeV}, \quad (2.3)$$

$$t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5,39 \times 10^{-44} \text{ s}. \quad (2.4)$$

Nossos aparatos experimentais mais modernos não são suficientemente robustos para chegar à essa escala. Se espera que a física, na escala de Planck, seja bem diferente das nossas melhores teorias atuais: o Modelo Padrão e a Relatividade Geral.

Há muitas propostas para uma teoria de gravitação quântica. A mais conhecida é a teoria de cordas [48]. No entanto, existem outras formulações, como: a gravitação quântica em laços, a geometria não-comutativa, etc [49, 50]. Os detalhes dessas teorias não são o objetivo deste

⁶ Partícula hipotética que media a interação gravitacional.

⁷ É possível introduzir o gráviton em uma teoria de gravitação linearizada. No entanto, tal teoria não é equivalente à Relatividade Geral [47].

trabalho. Todavia, uma característica comum em todas é que a noção de espaço-tempo muda radicalmente.

A ideia básica é que a gravidade, descrita classicamente por uma métrica pseudo-Riemanniana,⁸ deve sofrer algum tipo de quantização⁹ em escalas de comprimento da ordem de Planck. Em vários tipos de teorias de gravitação quântica, foram encontradas evidências teóricas para uma violação da simetria de Lorentz, pondo em xeque essa simetria que é um dos grandes alicerces da Relatividade Geral e do MP [13, 14, 15, 16]. Talvez, a violação da simetria de Lorentz seja a chave para efeitos físicos, tendo a origem em uma unificação da Relatividade Geral com a Mecânica Quântica.

Uma possível violação da simetria de Lorentz é considerada desde o ano de 1950, onde o físico Dirac já considerava se o antigo conceito de Éter, descartado por Einstein, de fato, era uma noção ultrapassada [51]. Desde então, uma série de trabalhos investigam consequências de possíveis violações da simetria de Lorentz [52, 17, 53, 54, 55]. Uma hipótese interessante é supor que as constantes fundamentais em física variam no tempo. Isso quebraria a invariância de Lorentz, uma vez que seria possível definir referenciais privilegiados onde estas constantes permaneceriam inalteradas [56, 57].

Os pontos citados acima servem como motivações para uma busca por violações da simetria de Lorentz. A física experimental entra em jogo na busca de novas técnicas e aperfeiçoamentos de medidas, pois, talvez seja possível, através de medições de alta precisão, medir efeitos de uma física na escala de Planck, ou, quem sabe, conseguir evidências experimentais da violação da simetria de Lorentz.

2.2 O Modelo Padrão Estendido

Desde o século passado, a análise sobre possíveis violações da simetria de Lorentz tem sido feita mediante vários aspectos. A introdução na física de partículas é dos anos 60, com os trabalhos [17, 58].

Não é objetivo deste trabalho uma abordagem histórica¹⁰ dessa área de pesquisa. No entanto, vale a pena comentar que no final dos anos 90, Colladay e Kostelecký [19] apresentaram uma estrutura formal e sistematizada para a análise de violações da simetria de Lorentz e CPT. Esse avanço foi muito importante, pois, o chamado *Modelo Padrão Estendido* (MPE) organiza, em um único formalismo, todas as possíveis formas de violações de Lorentz e CPT, no contexto do MP, abrindo possibilidade para a verificação experimental de tais violações.

A principal vantagem do MPE é que além de fornecer uma teoria de campos completa,

⁸ Um tensor métrico pseudo-Riemanniano é a generalização de uma métrica Riemanniana. Esse tensor não possui a propriedade de ser definido positivo.

⁹ Essa quantização ainda não é compreendida e alvo de muita análise em teoria de gravitação quântica.

¹⁰ Para uma abordagem histórica, consulte [59].

que incorpora violações de Lorentz e CPT, o MPE fornece um alto grau preditivo. O resultado de qualquer experimento pode, em princípio, ser calculado. Isso permite prever, a priori, quais experimentos atingirão a melhor sensibilidade, ou não. É possível saber quais tipos de experimentos medem a mesma coisa e quais medem coisas diferentes e tais conclusões serão verdadeiras em qualquer modelo consistente. Assim, o MPE fornece uma estrutura para a catalogação de resultados, formando uma lista ampla das restrições para os coeficientes de violação [29]. Como uma teoria completa que incorpora a violação de Lorentz, o MPE também é muito útil ao considerar os aspectos teóricos da violação de Lorentz e CPT.

É importante enfatizar que o MPE não é um modelo, mas uma estrutura formal de teste da validade das simetrias de Lorentz e CPT. Como o MP e a Relatividade Geral passaram por todos os desafios experimentais até agora, o plano é fazer uma busca abrangente por nova física ao invés de construir modelos específicos. A ideia é que o momento mais adequado para a construção de um modelo seria após a observação de um resultado que não seja consistente com o MP e a Relatividade Geral, proporcionando assim, uma janela para a nova física.

Ao longo deste trabalho é usado o formalismo do MPE na análise teórica da quebra da invariância de Lorentz. Como mencionamos, o MPE é uma teoria de campos efetiva para o estudo de efeitos de violações da simetria de Lorentz e espera-se que seja apenas um limite de baixas energias de uma teoria ainda desconhecida na escala de Planck. A densidade de Lagrangiana do MPE, $\mathcal{L}_{\text{MPE}}$, é obtida adicionando-se à densidade de Lagrangiana do MP, $\mathcal{L}_{\text{MP}}$, todos os termos de violação, $(\delta\mathcal{L}_{\text{LV}})$, mais termos com efeitos de gravitação, $\mathcal{L}_{\text{G}}$. Tipicamente, a densidade de Lagrangiana do MPE tem a forma

$$\mathcal{L}_{\text{MPE}} = \mathcal{L}_{\text{MP}} + \mathcal{L}_{\text{G}} + \delta\mathcal{L}_{\text{LV}}, \quad (2.5)$$

onde os setores $\mathcal{L}_{\text{MP}}$ e $\mathcal{L}_{\text{G}}$ são invariantes por transformações de Lorentz, enquanto que $\delta\mathcal{L}_{\text{LV}}$ possui *coeficientes de controle* que quebram essa simetria no referencial da partícula¹¹. Esses coeficientes de violação são considerados pequenos, uma vez que, se assim não fossem, violações da simetria de Lorentz já teriam sido encontradas, corriqueiramente, nos experimentos já realizados.

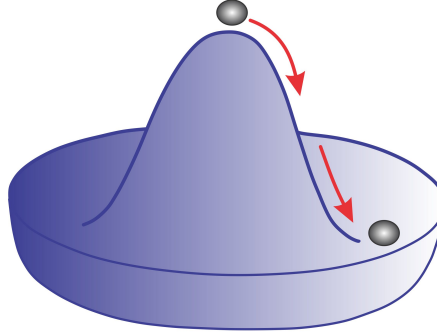
O MPE possibilita, além da violação da simetria de Lorentz, violações da simetria CPT. A simetria CPT é, em certo sentido, mais fundamental que a simetria de Lorentz, uma vez que foi demonstrado que violações da simetria CPT, no contexto da teoria de campos efetiva, implicam em violação da simetria de Lorentz,¹² ao passo que teorias que violam a simetria de Lorentz não violam CPT, necessariamente [61]. Tendo isso em vista, é possível classificar os termos, $\delta\mathcal{L}_{\text{LV}}$, em dois tipos: *CPT-par*, termos que não violam CPT e *CPT-ímpar*, termos que violam a simetria CPT, ou seja,

$$\delta\mathcal{L}_{\text{LV}} = \delta\mathcal{L}_{\text{LV}}^{\text{CPT-par}} + \delta\mathcal{L}_{\text{LV}}^{\text{CPT-ímpar}}. \quad (2.6)$$

¹¹ Comentaremos sobre isso na próxima seção.

¹² Essa afirmação só é válida para teorias de campo locais. Em teorias de campo não-locais, é possível construir modelos onde a simetria CPT é violada. Entretanto, a simetria de Lorentz não [60].

Figura 12 – Ilustração da quebra espontânea da simetria axial



Os coeficientes de violação presentes em $\delta\mathcal{L}_{LV}$ são introduzidos no MPE de modo a quebrar as simetrias de Lorentz e CPT de forma explícita. Isso significa que os campos de fundo¹³ são introduzidos "à mão" nas densidades de Lagrangiana. É claro que os campos de fundo não são introduzidos de qualquer maneira. Em primeiro lugar, eles devem estar acoplados com os campos do MP, de maneira que sejam invariantes perante mudança de observador. Além disso, devem respeitar as simetrias internas do MP

$$SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1), \quad (2.7)$$

uma vez que essa estrutura está de acordo com vários dados experimentais [9].

Em oposição à quebra explícita de simetria, existe a alternativa de quebra espontânea da simetria de Lorentz [18]. A quebra espontânea de simetria normalmente ocorre quando as soluções de baixa energia de um sistema não respeitam uma simetria existente na teoria. Um exemplo clássico é o caso de uma bola, inicialmente colocada no equilíbrio instável, no ponto alto central de um chapéu mexicano. Qualquer perturbação fará com que a bola caia para uma configuração de energia mais baixa, na aba do chapéu, quebrando a simetria axial inicial da situação, como ilustra a Figura 12. O mecanismo da quebra espontânea de simetria é bem conhecido no MP, envolvendo a quebra da simetria de calibre pelo campo de Higgs [33]. Sem maiores aprofundamentos, no caso da violação da simetria de Lorentz, a situação é diferente, pois, os campos não são escalares como o Higgs, mas, em geral, tensoriais. Nesse caso, esses campos tensoriais assumirão valores constantes que definem direções preferenciais no espaço vazio e, portanto, quebram a simetria de Lorentz [33].

O interessante da proposta de quebra espontânea da simetria de Lorentz é que, neste caso, a violação pode ser considerada menos drástica no sentido de que a teoria fundamental, na escala de Planck, pode ser invariante por Lorentz, mas, o estado de menor energia da teoria, que representa o “espaço vazio”, tem simetria menor que o da teoria fundamental: ele apresenta direções preferenciais representadas por coeficientes que são tensoriais, ou seja, vetores ou suas

¹³ Na literatura, é comum o termo *background fields*.

generalizações que são justamente os coeficientes de violação de Lorentz presentes na densidade de Lagrangiana, $\delta\mathcal{L}_{LV}$.

O MPE é amplo e pode admitir vários tipos distintos de acoplamento entre os campos de fundo e os campos físicos. Para uma primeira análise do MPE, é conveniente restringir tanta liberdade assumindo que o mesmo:

- Não deve implementar novos campos físicos, além dos já existentes no MP;
- Deve preservar a simetria de calibre $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$;
- Deve preservar a invariância por translações espaço-temporais;
- As dimensões dos operadores de campo devem ser $D \leq 4$.

O *Modelo Padrão Estendido Mínimo* (MPE-mínimo) é obtido quando impomos essas restrições. Esse modelo viola, minimamente, a simetria de Lorentz e CPT sem maiores complicações na estrutura do MP.

Uma vez que essas condições são impostas, a lista de possíveis violações se torna consideravelmente menor e podemos escrevê-la explicitamente. Como um exemplo, vamos considerar o setor de fótons que é composto pelo termo padrão

$$\mathcal{L}_{MP} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

onde $F^{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético invariante de calibre. O termo de violação CPT-par é dado por,

$$\delta\mathcal{L}_{LV}^{\text{CPT-par}} = -\frac{1}{4}\kappa_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}, \quad (2.9)$$

onde o tensor $\kappa_{\mu\nu\rho\sigma}$ é adimensional e possui as mesmas propriedades do tensor de Riemann. Mais adiante, discutiremos algumas propriedades dessa contribuição.

O termo CPT-ímpar é do tipo,

$$\delta\mathcal{L}_{LV}^{\text{CPT-ímpar}} = \frac{1}{2}(\kappa_{AF})^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}A^\beta F^{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

onde os coeficientes $(\kappa_{AF})^\alpha$ têm dimensão de massa. A primeira vista, pode-se imaginar que esse termo não é invariante de calibre. Entretanto, é fácil mostrar que uma variação perante transformações de calibre,

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\Lambda, \quad (2.11)$$

muda a ação apenas por um termo de derivada total, levando à uma invariância de calibre na ação,

$$S_{\text{MPE}} = \int d^4x \left(\mathcal{L}_{MP} + \delta\mathcal{L}_{LV}^{\text{CPT-par}} + \delta\mathcal{L}_{LV}^{\text{CPT-ímpar}} \right). \quad (2.12)$$

O termo (2.10) já foi considerado por Carrol, Field e Jackiw [62] e foi mostrado que ele pode introduzir estabilidade na teoria, se $(\kappa_{AF})^\alpha$ for um vetor tipo-tempo.

2.3 Transformações de Partícula e Observador

A noção de invariância das leis físicas nos levaram ao grupo de simetria que preserva a estrutura do espaço de Minkowski. As leis físicas (relativísticas) devem, portanto, ser invariantes perante transformações de Lorentz.

Devido a isotropia do espaço-tempo, cada transformação de Lorentz está relacionada com uma outra que descreve de forma equivalente a mesma situação. Considere, por exemplo, a mudança de coordenadas por uma transformação de rotação de ângulo α .

A mudança de coordenadas que faz o vetor $\mathbf{R}$ paralelo ao eixo $\hat{y}$ é a transformação

$$R_{\text{passiva}}(\alpha) \doteq \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

O resultado dessa transformação pode ser visto na Figura 13-b.

Esse tipo de transformação é costumeiramente chamada de *transformação passiva*, pois, deixa o vetor $\mathbf{R}$ inalterado, mudando apenas o sistema de coordenadas. Contudo, é possível obter o mesmo efeito geométrico realizando uma transformação no vetor $\mathbf{R}$ pela matriz

$$R_{\text{ativa}}(\alpha) \doteq \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = R_{\text{passiva}}^{\top}(\alpha). \quad (2.14)$$

O resultado da transformação pode ser visto na Figura 13-c.

Dizemos então que uma *transformação ativa* é aquela que transforma apenas o vetor, em contraste com as *transformações passivas*, onde mudamos as coordenadas.

Podemos aplicar essa mesma noção para as transformações gerais de Lorentz¹⁴. A teoria da relatividade especial sugere um espaço-tempo isotrópico. Logo, as leis da física devem se comportar de maneira equivalente frente transformações *ativas e passivas*.

Considerando apenas movimento em uma dimensão espacial, as transformações de Lorentz de observador são dadas por,

$$ct' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right), \quad (2.15a)$$

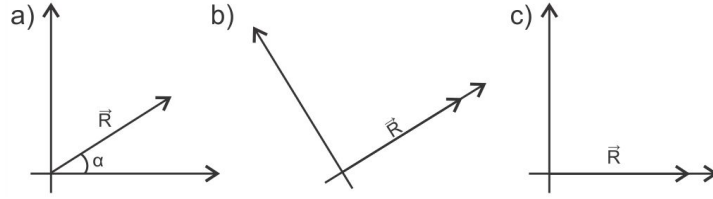
$$x' = \gamma (x - vt), \quad (2.15b)$$

$$y' = y, \quad (2.15c)$$

$$z' = z. \quad (2.15d)$$

¹⁴ As transformações de Lorentz gerais podem ser interpretadas como rotações no espaço de Minkowski. Para mais detalhes, consulte [63].

Figura 13 – Transformações ativas e passivas



Representando uma situação física equivalente, as transformações de Lorentz de partícula são,

$$ct' = \gamma \left(t + \frac{v}{c^2} x \right), \quad (2.16a)$$

$$x' = \gamma (x + vt), \quad (2.16b)$$

$$y' = y, \quad (2.16c)$$

$$z' = z. \quad (2.16d)$$

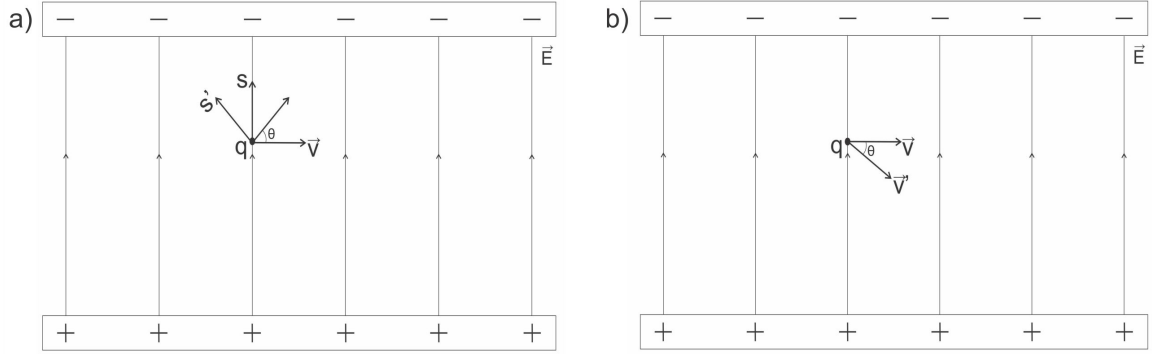
No entanto, quando tratamos de possíveis violações da simetria de Lorentz, é comum considerar a estrutura do espaço-tempo contendo anisotropias parametrizadas por campos tensoriais de fundo. Essa nova propriedade introduz, de maneira natural, direções privilegiadas no espaço-tempo. Dessa forma, a distinção entre os dois tipos de transformações é imprescindível, pois, a violação da simetria de Lorentz é vista apenas do ponto de vista da *partícula*. A invariância de observador ainda deve ser um requisito, ou seja, observáveis físicos não dependem do sistema de referência e, portanto, são invariantes perante *transformações de observador*. Por outro lado, a violação da simetria de Lorentz ocorre perante *transformações de partícula*, uma vez que os campos de fundo são fixos no espaço-tempo.

Para ilustrar a não-equivalência entre esses dois tipos de transformações, na presença de anisotropias, imaginemos o movimento de uma carga entre as placas de um capacitor frente transformações de rotação. O campo elétrico gerado pelo capacitor faz o papel de campo de fundo e aponta na direção $\hat{z}$. Se realizarmos uma *transformação de observador*, os referenciais S e S' (Figura 14-a) ainda concordam com o ângulo entre o campo elétrico e o vetor velocidade da carga.

Por outro lado, uma *transformação de partícula* altera apenas a direção da velocidade, fazendo com que o campo de fundo se comporte como um campo escalar [63]. Essa transformação modifica o ângulo entre o campo elétrico e o vetor velocidade.

No exemplo acima, consideramos apenas rotações sobre observadores e partículas e verificamos que o ângulo entre os vetores velocidade v e campo elétrico E se modifica dependendo do tipo de transformação. Esse comportamento é induzido pelo campo elétrico, pois, ele se comporta como um campo de fundo introduzindo direções privilegiadas no sistema. Para transformações de boost, também temos diferenças entre os dois tipos de transformações. Para mais detalhes [63].

Figura 14 – Transformações de Observador e Partícula



Do ponto de vista da teoria de campos, os campos de fundo se acoplam com os campos físicos, de maneira a preservar a invariância perante transformações de observador, ou seja, as Lagrangianas ainda devem ser um escalar de Lorentz e possuir todos os índices saturados. Tipicamente, a Lagrangiana tem a forma ¹⁵

$$\mathcal{L}_{LV} \subset (\kappa_{AF})^\alpha A^\beta \tilde{F}_{\alpha\beta}. \quad (2.17)$$

O 4-vetor de fundo $(\kappa_{AF})_\alpha$ é constante e introduz direções privilegiadas no espaço-tempo. Quando aplicamos uma *transformação de observador*, temos a invariância completa

$$(\kappa_{AF})^\alpha A^\beta \tilde{F}_{\alpha\beta} \rightarrow g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \Lambda^\gamma_\sigma \Lambda^\delta_\rho (\kappa_{AF})^\mu A^\nu \tilde{F}^{\sigma\rho} = (\kappa_{AF})^\alpha A^\beta \tilde{F}_{\alpha\beta}, \quad (2.18)$$

onde Λ^α_μ são as transformações de Lorentz definidas por

$$g_{\alpha\gamma} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\gamma_\sigma = g_{\mu\sigma}. \quad (2.19)$$

Quando realizamos uma *transformação de partícula*, o campo κ_{AF} fixo no fundo permanece inalterado, gerando assim, a violação da simetria de Lorentz

$$(\kappa_{AF})^\alpha A^\beta \tilde{F}_{\alpha\beta} \rightarrow g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} \Lambda^\beta_\nu \Lambda^\gamma_\sigma \Lambda^\delta_\rho (\kappa_{AF})^\alpha A^\nu \tilde{F}^{\sigma\rho} = \Lambda^\gamma_\sigma (\kappa_{AF})_\gamma A_\rho \tilde{F}^{\sigma\rho}. \quad (2.20)$$

Fisicamente, transformações de observador equivalem à mudança apenas nos observadores, enquanto que as transformações de partícula são transformações de Lorentz no experimento, deixando o campo de fundo inalterado, como no exemplo da carga entre as placas de um capacitor carregado.

A quebra da simetria de Lorentz é identificada por

$$\Lambda^\gamma_\sigma (\kappa_{AF})_\gamma A_\rho \tilde{F}^{\sigma\rho} \neq (\kappa_{AF})^\alpha A^\beta \tilde{F}_{\alpha\beta}. \quad (2.21)$$

No cenário da quebra da simetria de Lorentz, temos um campo para fenomenologia de possíveis pequenos desvios de teorias, como o Modelo Padrão e Relatividade Geral, pois estas são

¹⁵ Os campos de fundo sempre se acoplam com os campos físicos.

fundamentadas na simetria de Lorentz. Assim, através de medidas de alta precisão, podemos, em princípio, medir esses pequenos desvios.

Não há referenciais privilegiados e os valores dos coeficientes de violação variam de um referencial ao outro. Temos então que escolher um referencial padrão para efeitos de cálculo. Costuma-se escolher o referencial centrado no Sol (Figura 15) [64, 29, 65]. Nesse referencial, comparamos limites para os parâmetros de violação para diferentes experimentos.

Um observável, medido em um laboratório terrestre, possui dependências nos parâmetros de quebra expressos em relação ao referencial do experimento e denotados por κ^μ . Devemos assim expressar esses parâmetros em termos dos parâmetros de violação escritos no referencial centrado no Sol, que denotamos por K^μ . A matriz de transformação que relaciona os dois referenciais é uma transformação de Lorentz

$$\kappa^\mu = \Lambda^\mu_\nu K^\nu. \quad (2.22)$$

Em outras palavras, para cálculos e medições de limites dos coeficientes de violação, deve-se levar em consideração que um experimento, realizado em laboratórios terrestres, executa o mesmo movimento sideral da terra em torno do sol e de seu próprio eixo de rotação. Por consistência, supõe-se que estes observáveis devem oscilar nas mesmas frequências dos movimentos da terra. Efeitos de boost podem ser levados em consideração. Porém, em muitos casos, podemos considerar que as transformações Λ^μ_ν se resumem apenas à transformações de rotação [66, 65]

$$\Lambda^\mu_\nu \simeq R^\mu_\nu, \quad (2.23)$$

onde a matriz R^μ_ν acima é

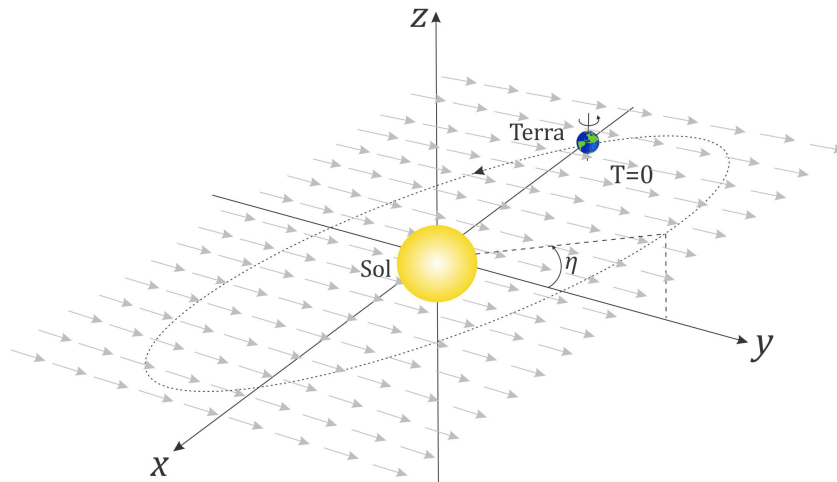
$$R(\zeta, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \zeta \cos \Omega t & \cos \zeta \sin \Omega t & -\sin \zeta \\ 0 & -\sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & \sin \zeta \cos \Omega t & \sin \zeta \sin \Omega t & \cos \zeta \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

com ζ sendo a colatitude¹⁶ do experimento e $\Omega \simeq 2\pi/23 \text{ hrs } 56 \text{ min}$ a frequência sideral da rotação terrestre em relação ao referencial do Sol. Os detalhes sobre o referencial centrado no Sol podem ser encontrados em [65].

Note que os coeficientes de violação da simetria de Lorentz se transformam sob ação de transformações do grupo de Lorentz que, por sua vez, é um grupo não compacto. Isso significa que há referenciais onde os coeficientes de violação adquirem valores arbitrariamente grandes e, portanto, não podem ser tratados como uma pequena perturbação na Lagrangiana, invalidando assim, o formalismo do MPE. Por conta disso, definem-se os *referenciais concordantes* como sendo os referenciais onde os coeficientes de quebra possuem valores pequenos. Logo, são os referenciais adequados para o formalismo do MPE. É um fato experimental que, se houver

¹⁶ Em coordenadas esféricas, colatitude é o ângulo complementar da latitude.

Figura 15 – Referencial centrado no Sol



violações da simetria de Lorentz, estas devem ser pequenas, pois, até o momento, não se têm evidências da violação dessa simetria fundamental. A terra é, portanto, um desses referencias concordantes.

3 Aspectos Clássicos do Setor de Fótons do Modelo Padrão Estendido

Neste capítulo, trataremos sobre o setor de fótons do MPE mínimo. Começaremos discutindo a Lagrangiana e as equações de movimento da teoria. Notaremos que, apesar do eletromagnetismo usual ser modificado pelo tensor de quebra $\kappa_{\mu\nu\rho\sigma}$, ainda é possível obter equações de Maxwell análogas ao caso de um eletromagnetismo em meios materiais, com auxílio dos campos $\mathbf{D}$ e $\mathbf{H}$ convenientemente definidos. Comentaremos também sobre as modificações do tensor energia-momento do campo eletromagnético induzidas pelo tensor de quebra e observaremos que o tensor energia-momento eletromagnético não pode ser simetrizado completamente. Uma expressão para o vetor de Poynting será obtida, além da densidade de energia e tensor das tensões. Por fim, discutiremos sobre algumas propriedades das soluções das equações de movimento e a propagação de ondas, ilustrando novos efeitos que são permitidos quando supomos violações da simetria de Lorentz.

3.1 Lagrangiana, Equações de Campo e Soluções

Estamos interessados aqui em investigar o setor eletromagnético do MPE. Como mencionamos no capítulo anterior, o setor eletromagnético do MPE se propõe a estender a eletrodinâmica usual descrita pela Lagrangiana de Maxwell, brevemente comentada no primeiro capítulo deste trabalho. Uma extensão não-invariante de Lorentz do eletromagnetismo supõe pequenos desvios da simetria de Lorentz. Desvios estes que podem ser interpretados fisicamente como um campo de fundo fixo, presente em qualquer ponto do espaço-tempo que quebra a invariância de Lorentz no referencial da partícula, introduzindo direções privilegiadas no espaço-tempo, causando assim, uma anisotropia espaço-temporal.

Vamos nos concentrar em analisar as propriedades mais imediatas para uma eletrodinâmica não-invariante de Lorentz, nos restringindo apenas à parte CPT-par da teoria, ou seja, $(\kappa_{AF})^\mu = 0$.

A ação que descreve esse modelo é:

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x (\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \kappa_{\mu\nu\rho\sigma}) F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}, \quad (3.1)$$

onde $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ é o tensor do campo eletromagnético. O campo $\kappa^{\mu\nu\sigma\lambda}$ é um tensor de fundo¹ que possui as mesmas simetrias do tensor de Riemann,

$$\kappa^{\mu\nu\rho\sigma} = -\kappa^{\nu\mu\rho\sigma} = \kappa^{\rho\sigma\mu\nu} = -\kappa^{\mu\nu\sigma\rho}, \quad (3.2)$$

¹ A simetria do tensor de fundo é a mesma do produto $F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$.

Além de satisfazer a identidade de Bianchi e duplo traço nulo,

$$\kappa^{\mu\nu\rho\sigma} + \kappa^{\mu\rho\sigma\nu} + \kappa^{\mu\sigma\nu\rho} = 0, \quad (3.3)$$

$$\kappa^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0. \quad (3.4)$$

A identidade de Bianchi (3.3) é imposta para evitar contribuições proporcionais à $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ e não está relacionada com a geometria do espaço-tempo [19]. As simetrias (3.2), (3.3) e (3.4), do objeto $\kappa^{\mu\nu\rho\sigma}$, parametrizam 19 componentes independentes que são responsáveis pela quebra da simetria de Lorentz perante transformações de partícula. As equações de campo são obtidas pelo princípio variacional

$$\delta S = 0. \quad (3.5)$$

Assim, para variações arbitrárias do campo A^μ , temos

$$\delta S = -\frac{1}{4} \int d^4x (\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \kappa_{\mu\nu\rho\sigma}) \delta (F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}), \quad (3.6)$$

$$\delta S = \int d^4x [-\partial_\sigma \partial_\mu A^\mu + \partial^\mu \partial_\mu A_\sigma - \kappa_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\rho \partial^\nu A^\mu + \kappa_{\nu\sigma\rho\mu} \partial^\nu \partial^\rho A^\mu] \delta A^\sigma \quad (3.7)$$

A partir das propriedades do tensor de fundo e usando (3.5) podemos reescrever a equação acima como,

$$-\partial_\mu (\partial_\sigma A^\mu - \partial^\mu A_\sigma) - \partial^\rho (\kappa_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu A^\mu + \kappa_{\mu\rho\nu\sigma} \partial^\mu A^\nu + \kappa_{\mu\nu\sigma\rho} \partial^\mu A^\nu) = 0. \quad (3.8)$$

Note que $\kappa_{\mu\rho\nu\sigma} \partial^\rho \partial^\mu A^\nu = 0$, o que nos leva imediatamente para as equações de movimento

$$\partial_\mu F_\sigma{}^\mu + \kappa_{\sigma\rho\mu\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu} = 0. \quad (3.9)$$

A equação acima estende a eletrodinâmica Maxwelliana e é recuperada simplesmente fazendo os coeficientes $\kappa_{\sigma\rho\mu\nu} = 0$. Note também que a equação (3.9), assim como o eletromagnetismo de Maxwell, é linear em $F_{\mu\nu}$ e, consequentemente, nos campos **E** e **B**. A definição usual do tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$ implica uma não-mudança nas equações homogêneas

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (3.10)$$

onde $\tilde{F}^{\mu\nu}$ é o tensor dual.

Observe ainda que a equação de movimento (3.9) é invariante perante transformações de "gauge"

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \frac{1}{q} \partial^\mu \Lambda, \quad (3.11)$$

pois, assim como a Lagrangiana, a equação (3.9) depende apenas do termo $F^{\mu\nu}$ que é, por sua vez, invariante de "gauge".

A equação de movimento (3.9) descreve a dinâmica do campo eletromagnético modificado na ausência de fontes. Podemos ainda acoplar uma contribuição de corrente na ação (3.1), somando o termo de fonte

$$S_{\text{fonte}} = - \int A^\sigma J_\sigma d^4x, \quad (3.12)$$

onde $J^\sigma = (\rho, \mathbf{j})$ é a 4-corrente. Realizando os mesmos cálculos anteriores, é fácil obter as equações de movimento para a ação total

$$S_{\text{total}} = -\frac{1}{4} \int d^4x (\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \kappa_{\mu\nu\rho\sigma}) F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} + S_{\text{fonte}}. \quad (3.13)$$

Como resultado, temos as equações de campo não homogêneas

$$\partial_\mu F_\sigma{}^\mu + \kappa_{\sigma\rho\mu\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu} = J_\sigma. \quad (3.14)$$

A conservação da corrente pode ser derivada imediatamente da equação acima, tomando a 4-divergência. Temos,

$$\partial^\sigma \partial_\mu F_\sigma{}^\mu + \kappa_{\sigma\rho\mu\nu} \partial^\sigma \partial^\rho F^{\mu\nu} = \partial^\sigma J_\sigma. \quad (3.15)$$

No primeiro termo do lado esquerdo, temos um operador diferencial simétrico, $\partial^\sigma \partial_\mu$, acoplado ao tensor antissimétrico, o que gera resultado nulo. Da mesma forma, no segundo termo, $\partial^\sigma \partial^\rho$ está acoplado ao tensor $\kappa_{\sigma\rho\mu\nu}$, antissimétrico nesses dois índices. Isso nos leva à conservação da corrente

$$\partial^\sigma J_\sigma = 0. \quad (3.16)$$

Podemos verificar ainda como as equações de Maxwell, explicitamente em termos dos campos, são modificadas pelos coeficientes de violação $\kappa_{\sigma\rho\mu\nu}$. A lei de Gauss é obtida escolhendo $\sigma = 0$. Temos

$$\begin{aligned} \partial_i F^{i0} + \kappa_{0i\mu\nu} \partial^i F^{\mu\nu} &= 0, \\ \partial_i F^{i0} + 2\kappa_{0i0j} \partial^i F^{0j} + \kappa_{0ijk} \partial^i F^{jk} &= 0. \end{aligned}$$

O tensor eletromagnético se relaciona com os campos de tal modo que, $F^{0i} = -E^i$ e $F^{jk} = -\epsilon^{jkl} B^l$. Então, a equação acima se reduz à:

$$\partial_i E^i - 2\kappa_{0i0j} \partial^i E^j - \kappa_{0ijk} \epsilon^{jkl} \partial^i B^l = 0. \quad (3.18)$$

É comum definirmos as seguintes parametrizações matriciais [67]:

$$-2\kappa_{0i0j} \equiv (\kappa_{ED})_{ij}, \quad (3.19a)$$

$$-\kappa_{0ijk} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{jkl} (\kappa_{DB})_{il}, \quad (3.19b)$$

$$\kappa_{pqrs} = \frac{1}{2} \epsilon^{jpq} \epsilon^{krs} (\kappa_{HB})_{jk}, \quad (3.19c)$$

de modo que a equação (3.18) assume a forma:

$$\partial_i E^i + (\kappa_{ED})_{ij} \partial^i E^j + \frac{1}{2} \epsilon_{jkm} \epsilon^{jkl} (\kappa_{DB})_{im} \partial^i B^l = 0, \quad (3.20)$$

$$\partial_i E^i + (\kappa_{ED})_{ij} \partial^i E^j + (\kappa_{DB})_{il} \partial^i B^l = 0. \quad (3.21)$$

Em notação vetorial explícita, temos a seguinte lei de Gauss modificada,

$$-\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \kappa_{ED} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \kappa_{DB} \cdot \mathbf{B}. \quad (3.22)$$

A fim de escrever as equações de Maxwell de forma familiar, é comum definirmos os campos auxiliares:

$$\mathbf{D} \equiv (\mathbf{1} + \kappa_{ED}) \cdot \mathbf{E} + \kappa_{DB} \cdot \mathbf{B}, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{H} \equiv (\mathbf{1} + \kappa_{HB}) \cdot \mathbf{B} - \kappa_{DB} \cdot \mathbf{E}. \quad (3.24)$$

A lei de Gauss se torna então,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0. \quad (3.25)$$

A lei de Ampère-Maxwell é obtida tomando $\sigma = i$ em (3.9). Temos então,

$$-\partial_\mu F_i^\mu + \kappa_{i\rho\mu\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu} = 0. \quad (3.26)$$

Usando as definições (3.19a), (3.19b), (3.19c) e realizando cálculos semelhantes, temos, de maneira análoga, a lei de Ampère-Maxwell modificada:

$$\nabla \times \mathbf{H} - \partial_0 \mathbf{D} = 0. \quad (3.27)$$

As equações de Maxwell modificadas são reescritas de forma semelhante às equações de Maxwell em um meio material. Logo,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (3.28a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \partial_0 \mathbf{D} = 0, \quad (3.28b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.28c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_0 \mathbf{B} = 0. \quad (3.28d)$$

Por fim, observe que, na ausência de fontes, o conjunto de equações de campo (3.28a) e (3.28c) possui uma simetria perante as seguintes transformações:

$$\mathbf{D} \rightarrow \pm \mathbf{B}, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{H} \rightarrow \mp \mathbf{E}. \quad (3.30)$$

3.2 Leis de conservação

As descrições Lagrangiana e Hamiltoniana da dinâmica, indispensáveis em teoria de campos, são de muita utilidade na análise das simetrias presentes em um sistema físico. A passagem da formulação Lagrangiana para Hamiltoniana se faz mediante a definição do momento conjugado

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (3.31)$$

O Hamiltoniano para um conjunto discreto de partículas é definido como:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \quad (3.32)$$

No caso de um sistema físico, composto por um número infinito de graus de liberdade, é conveniente definir uma densidade de Hamiltoniana, de tal maneira que a sua integral, em todo espaço, seja idêntica à Hamiltoniana total. Para o campo eletromagnético, a posição e o momento generalizados assumem a seguinte correspondência contínua:

$$\begin{aligned} q_i &\rightarrow A^\lambda(x), \\ p_i &\rightarrow \pi^\lambda(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A^\lambda)}, \end{aligned}$$

de tal maneira que a densidade de Hamiltoniana para o campo eletromagnético é obtida de (3.32).

$$\mathcal{H} = \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A^\lambda)} \partial_0 A^\lambda - \mathcal{L}. \quad (3.33)$$

Como dito no primeiro capítulo deste trabalho, a Hamiltoniana é identificada como a componente puramente temporal do *tensor energia-momento canônico*

$$T^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A^\lambda)} \partial^\beta A^\lambda - \eta^{\alpha\beta} \mathcal{L}, \quad (3.34)$$

onde a componente puramente temporal é identificada como a densidade de hamiltoniano. O tensor canônico, para o campo eletromagnético estendido pelo termo de violação CPT-par, foi calculado no Apêndice B.1, sendo dado por

$$T^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\gamma} F_{\lambda\gamma} \partial^\beta A^\lambda - \kappa^\alpha_{\lambda\mu\nu} F^{\mu\nu} \partial^\beta A^\lambda - \eta^{\alpha\beta} \mathcal{L}. \quad (3.35)$$

Esse objeto apresenta alguns problemas, como a não-simetria de índices $\alpha\beta$, além de não ser explicitamente invariante perante transformações de calibre. Contudo, o tensor de energia-momento do campo pode ser redefinido [68] na forma de um objeto parcialmente simétrico². O cálculo explícito (vide apêndice B.2) tem como resultado a expressão:

$$\Theta^{\alpha\beta} = -F^{\alpha\lambda} F^\beta_{\lambda} + \frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \kappa^{\mu\nu\alpha\lambda} F^\beta_{\lambda} F_{\mu\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} \kappa_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}. \quad (3.36)$$

Observe que $\Theta^{\alpha\beta}$ é definido de tal maneira que a sua 4-divergência é identicamente nula e, portanto, satisfaz uma equação de continuidade, ou seja,

$$\partial_\alpha \Theta^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.37)$$

Observe que termo $\kappa^{\mu\nu\alpha\lambda} F^\beta_{\lambda} F_{\mu\nu}$ garante que o tensor resultante em (3.36) seja parcialmente simétrico. É comum o tensor energia-momento não ser totalmente simétrico, no contexto do MPE [19], voltaremos com essa questão mais adiante. Por enquanto, vamos nos concentrar em calcular as componentes do tensor e observar como elas se diferenciam do tensor eletromagnético usual de Maxwell. A componente puramente temporal, ou seja, a densidade de Hamiltoniana é

$$\Theta^{00} = -F^{0\lambda} F^0_{\lambda} + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \kappa^{\mu\nu 0\lambda} F^0_{\lambda} F_{\mu\nu} + \frac{1}{4} \kappa_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}. \quad (3.38)$$

² Não é possível simetrizar totalmente o tensor.

Reescrevendo em termos dos campos elétricos e magnéticos,

$$\Theta^{00} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - \kappa^{0i0j} E^i E^j + \kappa^{0kij} \epsilon^{ijl} B^l E^k - \kappa^{0ijk} \epsilon^{jkm} B^m E^i + \frac{1}{4} \kappa^{ijkl} \epsilon^{ijm} \epsilon^{klp} B^m B^p,$$

os termos cruzados nos campos se cancelam, resultando em

$$\Theta^{00} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - \kappa^{0i0j} E^i E^j + \frac{1}{4} \kappa^{ijkl} \epsilon^{ijm} \epsilon^{klp} B^m B^p. \quad (3.39)$$

Usando as definições (3.19a), (3.19b) e (3.19c), temos

$$\Theta^{00} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \kappa_{ED} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \kappa_{HB} \cdot \mathbf{B}. \quad (3.40)$$

Note que a densidade de energia é sempre positiva, desde que os coeficientes de violação que compõem as matrizes κ_{ED} e κ_{HB} sejam muito pequenos. Dessa forma, os coeficientes não induzem instabilidade na teoria.

Por fim, podemos reescrever a densidade de energia acima de uma forma muito mais familiar. Para isso, observe que, através de (3.23) e (3.24), temos

$$\kappa_{ED} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \kappa_{DB} \cdot \mathbf{B}, \quad (3.41a)$$

$$\kappa_{HB} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{H} - \mathbf{B} + \kappa_{DB} \cdot \mathbf{E}, \quad (3.41b)$$

que substituído na equação (3.40), resulta em

$$\Theta^{00} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}). \quad (3.42)$$

A expressão acima, para a densidade de energia do campo eletromagnético, costumeiramente denotada por u , é similar à densidade de energia do campo eletromagnético na presença de um meio material. Já observamos essa semelhança desde a seção passada, quando reescrevemos as equações de campo.

A componente Θ^{i0} é identificada como sendo a densidade de fluxo de energia ou, simplesmente, como generalização do vetor de Poynting $g^i \equiv \Theta^{i0}$, onde

$$\Theta^{i0} = -F^{i\lambda} F^0_{\lambda} - \kappa^{\mu\nu i\lambda} F^0_{\lambda} F_{\mu\nu}. \quad (3.43)$$

Podemos reescrever a equação acima explicitamente em termos dos campos auxiliares. Os cálculos em detalhes se encontram no Apêndice (B.5). Como resultado temos,

$$\mathbf{g} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (3.44)$$

O setor temporal da equação de conservação (3.37) toma a seguinte forma usual:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{g} = 0, \quad (3.45)$$

com $u = \Theta^{00}$. A conservação explícita da energia pode ser derivada da equação acima. Tomando a integral sobre todo o espaço 3-dimensional,

$$\int d^3x \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} \right) = 0. \quad (3.46)$$

Por meio do teorema de Gauss é possível mostrar que o termo com a divergência vai à zero para campos localizados, nos entregando assim a conservação da energia total do campo eletromagnético $E_{\text{campo}} = \int u d^3x$. Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E_{\text{campo}} &= - \int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} = 0, \\ E_{\text{campo}} &= \text{const.} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Voltemos agora à questão da assimetria no tensor (3.36). Essa característica nos leva à uma possível ambiguidade na definição da densidade de momento do campo. O vetor (3.44) pode ser identificado como o vetor de Poynting generalizado. Contudo, $\Theta^{i0} \neq \Theta^{0i}$. O vetor de Poynting, costumeiramente relacionado com a quantidade de momento que o campo carrega, deve ser interpretado como o vetor densidade de fluxo de energia. A densidade de momento deve ser identificada como a parte espacial da equação de continuidade (3.37), ou seja,

$$\partial_0 \Theta^{0j} + \partial_i \Theta^{ij} = 0. \quad (3.48)$$

Apesar de ser diferente do vetor de Poynting, a densidade de momento do campo tem uma forma semelhante ao *momento de Minkowski*³[69], $\mathbf{g}_M$. O cálculo está explícito no Apêndice B.4 e, como resultado, temos

$$\Theta^{0i} = (\mathbf{D} \times \mathbf{B})^i, \quad (3.49)$$

ou seja,

$$\mathbf{g}_M = \mathbf{D} \times \mathbf{B}. \quad (3.50)$$

O setor espacial, Θ^{0i} , que compõe a equação (3.48), faz o papel de tensor de tensões e é dado por⁴

$$\begin{aligned} \Theta^{ij} &= \frac{3}{4} (E^i E^j + B^i B^j) - D^i E^j - B^i H^j + \frac{1}{8} \delta^{ij} \times \\ &\quad [\mathbf{E} \cdot (1 + 4\kappa_{ED}) \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot (1 + 4\kappa_{BH}) \cdot \mathbf{B}]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Podemos representar o tensor $\Theta^{\alpha\beta}$ como uma matriz 4×4 ,

$$\Theta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} u & \mathbf{g}^T \\ \mathbf{g}_M & \Theta^{ij} \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

³ Existe um impasse conhecido como *dilema de Abraham-Minkowski*, o qual discute a ambiguidade na definição do momento do campo em um meio material.

⁴ O δ^{ij} é o delta de Kronecker definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

onde o sobrescrito T denota o vetor $\mathbf{g}$ transposto.

Note que, no limite onde os coeficientes de violações $\kappa_{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow 0$, temos $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$ e $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{B}$ e, portanto,

$$\lim_{\kappa_{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow 0} \mathbf{g}_M = \lim_{\kappa_{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow 0} \mathbf{g} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (3.53)$$

o que resulta nas expressões usuais para a eletrodinâmica no vácuo, ou seja,

$$\lim_{\kappa_{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow 0} \Theta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) & (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^T \\ \mathbf{E} \times \mathbf{B} & -\frac{1}{4} [E^i E^j + B^i B^j - \frac{1}{2} \delta^{ij} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)] \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Quando introduzimos uma distribuição localizada de cargas e correntes interagindo com o campo, quebramos a invariância translacional do sistema. Esse acoplamento leva a equação (3.37) a assumir a seguinte forma

$$\partial_\alpha \Theta^{\alpha\beta} = -F^{\beta\lambda} J_\lambda, \quad (3.55)$$

onde J_λ é a 4-corrente. O termo que quebra a conservação é identificado como densidade de força $f^\beta \equiv F^{\beta\lambda} J_\lambda$, ou *densidade de força de Lorentz*.

3.3 Soluções da equação de movimento e propagação de ondas

Até aqui mencionamos como o campo de fundo, responsável pela quebra da invariância de Lorentz, altera as equações de movimento e as leis de conservação do eletromagnetismo. Além disso, observamos várias semelhanças entre a eletrodinâmica não-invariante de Lorentz e uma eletrodinâmica em um meio material. Vamos nos concentrar agora em estudar propriedades das soluções da equação de movimento e a propagação das ondas eletromagnéticas em presença de anisotropias espaço-temporais, descritas pelo tensor $\kappa_{\mu\nu\rho\sigma}$.

As equações de movimento, longe das fontes e em notação covariante (vide equações (3.9), (3.10)),

$$\partial_\mu F_\sigma{}^\mu + \kappa_{\sigma\rho\mu\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu} = 0, \quad (3.56)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (3.57)$$

podem ser reescritas em termos do campo A^μ . Em particular, a equação não-homogênea assume a forma,

$$\partial_\sigma \partial_\mu A^\mu - \square A_\sigma + 2\kappa_{\mu\nu\sigma\rho} \partial^\rho \partial^\mu A^\nu = 0,$$

ou ainda,

$$\partial_\sigma \partial_\mu A^\mu - \eta_{\sigma\mu} \square A^\mu - 2\kappa_{\mu\nu\sigma\rho} \partial^\rho \partial^\nu A^\mu = 0. \quad (3.58)$$

Podemos definir o operador diferencial simétrico $\hat{\mathbf{O}}_{\sigma\mu} \equiv \partial_\sigma \partial_\mu - \eta_{\sigma\mu} \square - 2\kappa_{\mu\nu\sigma\rho} \partial^\rho \partial^\nu$ para reescrever (3.58) de forma sucinta:

$$\hat{\mathbf{O}}^{\mu\nu} A_\mu = 0. \quad (3.59)$$

Vamos recorrer à uma expansão na base de ondas planas para o campo A_μ , a fim de transformar a equação diferencial em uma equação algébrica,

$$A_\mu(x) \equiv \epsilon_\mu(p) \exp(-ip_\alpha x^\alpha), \quad (3.60)$$

onde $p^\alpha \equiv (p^0, \mathbf{p})$ pode ser identificado como o 4-vetor de onda de um modo normal de vibração⁵. Vale a correspondência $\partial_\alpha \rightarrow -ip_\alpha$. Então, (3.59) se reescreve como

$$(-p^\mu p^\nu + \eta^{\mu\nu} p^2 + 2\kappa^{\mu\alpha\nu\beta} p_\alpha p_\beta) A_\mu = 0, \quad (3.61)$$

ou ainda,

$$\mathbf{O}^{\mu\nu}(p) A_\mu = 0, \quad (3.62)$$

com,

$$\mathbf{O}^{\mu\nu}(p) = (\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu - 2\kappa^{\mu\alpha\beta\nu} p_\alpha p_\beta). \quad (3.63)$$

Note que, no limite $\kappa^{\mu\alpha\beta\nu} \rightarrow 0$, temos de volta a matriz do caso Maxwelliano usual.

A matriz $\mathbf{O}^{\mu\nu}(p)$ é singular graças à simetria de calibre, que ainda é uma característica para a extensão não-invariante de Lorentz da eletrodinâmica. Deve-se então fixar o "gauge", para que o conjunto de equações (3.62) possa revelar soluções diferentes da trivial, com a condição,

$$\det \mathbf{O}_{\text{eff}}^{\mu\nu}(p) = 0, \quad (3.64)$$

onde $\mathbf{O}_{\text{eff}}^{\mu\nu}(p)$ é a matriz com o calibre fixado.

Diferentemente da eletrodinâmica usual, a escolha de diferentes calibres para a matriz que compõe (3.64) não resulta em situações equivalentes. Por exemplo, é de conhecimento geral que, quando $\kappa^{\mu\alpha\beta\nu} \rightarrow 0$, o calibre de Coulomb, caracterizado pela escolha de vínculo $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, é equivalente ao calibre temporal $A^0 = 0$ [68]. Quando efeitos de violações da simetria de Lorentz são incluídos, o calibre de Coulomb admite soluções não triviais para A^0 [19], evidenciando a não-equivalência entre os vários calibres na situação de violações da simetria de Lorentz.

Podemos escolher o calibre temporal para ilustrar efetivamente o processo de obtenção das relações de dispersão. No calibre temporal, eliminamos imediatamente o grau de liberdade $A^0(x)$, do campo de calibre, com a escolha:

$$\Lambda = \frac{1}{q} \int A^0(t', \mathbf{x}) dt'. \quad (3.65)$$

⁵ A frequência ω e o vetor $\mathbf{p}$ são associados à onda eletromagnética, porém, são diferentes da energia e momento obtidos pelo tensor energia-momento, que são associados ao campo próprio.

Isso resulta em um subconjunto de 4 equações de (3.62). Escrevendo $\mathbf{O}_{\text{eff}}^{\mu\nu}(p)$, de maneira explícita, temos:

$$(\eta^{i\nu} p^2 - p^i p^\nu - 2\kappa^{i\alpha\beta\nu} p_\alpha p_\beta) A_i = 0. \quad (3.66)$$

A fim de simplificar os cálculos, podemos escolher um sistema de referência onde o 4-momento tem a forma $p^\mu = (\omega, 0, 0, |\mathbf{q}|)$. Nesse referencial, temos $\mathbf{O}_{\text{eff}}^{\mu\nu}(p)$, explicitamente,

$$\mathbf{O}_{\text{eff}}^{\mu\nu}(p) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{K}^{10} & -\mathcal{K}^{20} & -|\mathbf{q}|\omega - \mathcal{K}^{30} \\ 0 & -p^2 - \mathcal{K}^{11} & -\mathcal{K}^{21} & -\mathcal{K}^{31} \\ 0 & -\mathcal{K}^{12} & -p^2 - \mathcal{K}^{22} & -\mathcal{K}^{32} \\ 0 & -|\mathbf{q}|\omega - \mathcal{K}^{13} & -\mathcal{K}^{23} & -p^2 - |\mathbf{q}| - \mathcal{K}^{33} \end{pmatrix}, \quad (3.67)$$

onde $\mathcal{K}^{i\nu} = 2\kappa^{i\alpha\beta\nu} p_\alpha p_\beta$.

A imposição de soluções diferentes da trivial para (3.66) implica em relações do tipo $\omega = \omega(|\mathbf{q}|; \kappa)$, as quais são identificadas como as relações de dispersão modificadas pelos coeficientes de violação. É claro que a relação de dispersão, que será obtida a partir do procedimento aqui descrito, só vale para o referencial onde $p^\mu = (\omega, 0, 0, |\mathbf{q}|)$. Contudo, é possível obter a relação de dispersão completa através de argumentos de simetria.

Um pequeno exemplo: Violação vetorial

Até aqui estudamos aspectos gerais do eletromagnetismo não-invariante de Lorentz, sem nos preocuparmos em particularizar os vários tipos de violação que esse modelo comporta. A fim de demonstrar como o campo de fundo pode induzir novos efeitos para uma onda eletromagnética no vácuo, podemos considerar um tipo específico de violação, onde o tensor $\kappa^{\mu\nu\rho\sigma}$ possui todas as componentes nulas, exceto as que compõem o tensor

$$\kappa_{0i0j} = -\frac{1}{2}(\kappa_{\text{ED}})_{ij}. \quad (3.68)$$

Vamos ainda parametrizar esse tensor por um único vetor $\mathbf{v}$, de tal maneira que,

$$(\kappa_{\text{ED}})_{ij} = v_i v_j.$$

Físicamente, o vetor $\mathbf{v}$ é um campo de fundo responsável pela quebra da simetria de Lorentz frente às transformações de partícula. A Lagrangiana para essa violação vetorial pode ser obtida facilmente e pode ser escrita em termos dos campos da seguinte forma,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) - \frac{1}{2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})^2. \quad (3.69)$$

As equações de movimento não homogêneas, por sua vez, podem ser obtidas diretamente de (3.28a),

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{v} \cdot \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) = 0, \quad (3.70)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} - \mathbf{v} \partial_t(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) = 0. \quad (3.71)$$

Essas equações, juntamente com as equações homogêneas, descrevem a eletrodinâmica não-invariante de Lorentz, para o tipo de violação vetorial considerada. É possível obter as equações de onda correspondentes para essa eletrodinâmica e obter dois modos distintos de propagação. O primeiro, satisfaz a relação de dispersão usual

$$\omega = k,$$

onde ω e k são a frequência da onda eletromagnética e o módulo do vetor de onda respectivamente. Contudo, se observa que além da relação de dispersão usual existe um modo de propagação que satisfaz uma relação de dispersão modificada pelo vetor $\mathbf{v}$, dada por

$$\omega^2 - k^2 = -\frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{k})^2}{1 + \mathbf{v}^2}. \quad (3.72)$$

Essa relação de dispersão é consequência direta da presença da anisotropia espacial parametrizada por $\mathbf{v}$. Note que esse efeito desaparece caso a onda se propague na mesma direção de $\mathbf{v}$ e é máximo quando $\mathbf{v}$ é perpendicular à $\mathbf{k}$.

4 Decaimento de fótons no MPE

Neste capítulo, vamos discutir sobre a estabilidade do fóton em teorias que violam a simetria de Lorentz. Inicialmente, vamos introduzir um tipo particular de eletromagnetismo não-invariante, conhecido na literatura como eletrodinâmica isotrópica. Discutimos primeiramente características clássicas do modelo, ação, Lagrangiana, equações de movimento e equações de ondas. Obtemos soluções gerais para a equação de onda modificada, assim como as relações de dispersão para o modelo. A interpretação quântica da eletrodinâmica isotrópica é analisada e obtemos expressões para os vetores de polarização. A estabilidade do fóton é investigada nesse modelo e no contexto da QED-modificada. Verificamos a existência de uma energia mínima para o decaimento do fóton ocorrer. Taxa de decaimento parcial e total são alcançadas, assim como o ângulo entre as partículas emergentes.

4.1 Eletromagnetismo Isotrópico

No modelo padrão das interações fundamentais, o fóton é considerado uma partícula estável e fundamental, ou seja, qualquer tipo de decaimento de um único fóton em outras partículas, com massa não nula, é estritamente proibido. Esse fato foi mencionado no primeiro capítulo deste trabalho. A principal razão do fóton se manter estável é a conservação da energia-momento e a simetria de Lorentz. Essa simetria, considerada fundamental para o MP, implica em relações de dispersão usuais para partículas de massa nula,

$$E_\gamma = p, \quad (4.1)$$

assim como para partículas massivas

$$E_{e\pm} = \sqrt{p^2 + m^2}. \quad (4.2)$$

Se o fóton decair em outras partículas, como um par elétron-pósitron, a conservação da energia e momento do sistema implicará nas igualdades

$$E_\gamma = E_{e^-} + E_{e^+}. \quad (4.3a)$$

$$\mathbf{p}_\gamma = \mathbf{p}_{e^-} + \mathbf{p}_{e^+}. \quad (4.3b)$$

Esse sistema de equações não possui solução diferente da trivial, como mostrado no capítulo inicial desta dissertação. Em outras palavras, o decaimento de um fóton em um par elétron-pósitron, $\gamma \rightarrow e^-e^+$, é proibido.

Esse é o cenário quando tratamos do decaimento de fótons na física do MP. Contudo, esse trabalho tem como um dos principais objetivos analisar teorias de campo onde a simetria de

Lorentz é violada, considerando efeitos de física além do MP. Uma série de efeitos não usuais emergem da não-invariância de Lorentz, como consequência das novas relações de dispersão do fóton. Além da relação de dispersão usual, uma teoria não-invariante de Lorentz possui relações de dispersão extraordinárias, que modificam a cinemática do campo eletromagnético e soluções não triviais para o sistema formado por (4.3a) e (4.3b) podem ser consideradas, abrindo possibilidade para um possível efeito de não estabilidade do fóton.

4.1.1 Aspectos clássicos

O setor de fótons CPT-par do MPE descrito pela lagrangiana,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\kappa_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}, \quad (4.4)$$

é bastante geral. Tal setor parametriza 19 coeficientes independentes que quebram a simetria de Lorentz. Vamos nos concentrar em um tipo particular de eletrodinâmica não-invariante de Lorentz, o caso onde a violação é dita *isotrópica*. Esse modelo é descrito por um único parâmetro. Começamos considerando o Ansatz não-birrefringente¹ [67] para o tensor de quebra,

$$\kappa_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\eta_{\mu\rho}\kappa_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\kappa_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}\kappa_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}\kappa_{\mu\rho}), \quad (4.5)$$

onde $\kappa_{\mu\nu}$ é um tensor de fundo constante que parametriza as componentes não-birrefringentes do tensor $\kappa_{\mu\nu\rho\sigma}$. Note que a antissimetria nos pares (μ, ν) e (ρ, σ) do tensor $(\kappa_F)_{\mu\nu\rho\sigma}$ é imediatamente satisfeita pelo Ansatz (4.5). A simetria na troca dos índices $\mu\nu \rightarrow \rho\sigma$ é preservada pelo Ansatz acima, quando impomos $\kappa_{\mu\nu}$ simétrico,

$$\kappa_{\mu\nu} = \kappa_{\nu\mu}. \quad (4.6)$$

De forma semelhante, a condição de duplo traço nulo do tensor $(\kappa_F)_{\mu\nu\rho\sigma}$ impõe que o traço do tensor $\kappa_{\mu\nu}$ seja nulo,

$$\kappa_{\mu}^{\mu} = 0. \quad (4.7)$$

Consequentemente, o tensor $\kappa_{\mu\nu}$ parametriza 9 componentes independentes do tensor $(\kappa_F)_{\mu\nu\rho\sigma}$.

É conhecido como setor isotrópico o referencial onde o tensor $\kappa_{\mu\nu}$ toma a forma diagonal e todos os coeficientes tipo-espaco são iguais. Os coeficientes da diagonal principal têm a seguinte forma

$$\kappa_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \kappa_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{00}/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{00}/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_{00}/3 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

¹ O fenômeno da birrefringência do vácuo é uma das características marcantes de teorias que violam a simetria de Lorentz. No entanto, vamos nos concentrar em um modelo mais simples de teorias com quebra de Lorentz, desconsiderando assim, os termos que geram a birrefringência.

A Lagrangiana que descreve a eletrodinâmica isotrópica pode ser obtida diretamente pela substituição do Ansatz (4.5) em (4.4), resultando em:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{8}(\kappa_{\nu\sigma}F^{\mu\nu}F_{\mu}{}^{\sigma} - \kappa_{\nu\rho}F^{\mu\nu}F_{\mu}{}^{\rho} - \kappa_{\mu\sigma}F^{\mu\nu}F_{\nu}{}^{\sigma} + \kappa_{\mu\rho}F^{\mu\nu}F_{\nu}{}^{\rho}).$$

Explorando a antissimetria do tensor $F^{\mu\nu}$ podemos reescrever a Lagrangiana acima como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\kappa_{\nu\sigma}F^{\mu\nu}F_{\mu}{}^{\sigma}. \quad (4.9)$$

Quando $\kappa_{\mu\nu}$ toma a forma (4.8) temos a Lagrangiana que descreve a eletrodinâmica isotrópica, $\mathcal{L}_{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}$. É conveniente obter $\mathcal{L}_{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}$ explicitamente em termos dos campos físicos. O primeiro termo em (4.9) não é nada além da contribuição de Maxwell,

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2).$$

A contribuição não-invariante de Lorentz, em (4.9), pode ser escrita como:

$$\mathcal{L}_{\text{LV}} = -\frac{1}{2}\kappa_{\nu\sigma}F^{\mu\nu}F_{\mu}{}^{\sigma} = \frac{1}{2}\kappa_{00}E^iE^i - \frac{1}{2}\kappa_{ij}E^iE^j + \frac{1}{2}\kappa_{ij}\epsilon^{kim}\epsilon^{kjn}B^mB^n,$$

ou ainda,

$$\mathcal{L}_{\text{LV}} = \frac{\kappa_{00}}{3}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2). \quad (4.10)$$

A Lagrangiana que descreve a eletrodinâmica isotrópica é, portanto,

$$\mathcal{L}_{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{3}\kappa_{00}\right)\mathbf{E}^2 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\kappa_{00}\right)\mathbf{B}^2.$$

Note que a simples mudança,

$$\mathbf{B}^2 \rightarrow (1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}})\mathbf{B}^2, \quad (4.11a)$$

$$\mathbf{E}^2 \rightarrow (1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}})\mathbf{E}^2, \quad (4.11b)$$

na ação usual da eletrodinâmica, nos leva à ação para a eletrodinâmica isotrópica, com ${}^2\tilde{\kappa}_{\text{tr}} \equiv \frac{2}{3}\kappa_{00}$.

$$S = \int \frac{1}{2}[(1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}})\mathbf{E}^2 - (1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}})\mathbf{B}^2] d^4x \quad (4.12)$$

A ação (4.12) é invariante por translações e rotações. No entanto, apenas no referencial privilegiado, onde $\kappa_{\mu\nu}$ toma a forma diagonal dada por (4.8). Em qualquer outro referencial, a invariância rotacional não é válida. Todavia, a invariância translacional continua válida, pois, o coeficiente de controle $\tilde{\kappa}_{\text{tr}}$ não depende das coordenadas espaço-temporais.

² É comum, na literatura, denotarmos por $\tilde{\kappa}_{\text{tr}}$ o coeficiente de violação isotrópica [70, 71].

As equações de movimento são facilmente obtidas usando as substituições $\mathbf{E} \rightarrow (1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \mathbf{E}$ e $\mathbf{B} \rightarrow (1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \mathbf{B}$ nas equações não-homogêneas. As equações de Maxwell são, portanto,

$$(1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad (4.13a)$$

$$(1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \partial_t \mathbf{E} + (1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}, \quad (4.13b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0, \quad (4.13c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.13d)$$

Podemos ainda mostrar que os campos elétricos e magnéticos satisfazem equações de onda. Por exemplo, tomando o rotacional na lei de Faraday (4.13c),

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \nabla \times \mathbf{B} = 0. \quad (4.14)$$

Usando a lei de Gauss e a lei de Ampère-Maxwell modificadas, obtemos uma equação de onda para o campo elétrico,

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) - \left(\frac{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \right) \partial_t^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (4.15)$$

Expandindo o campo elétrico na base de Fourier,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d^3 \mathbf{k}, \quad (4.16)$$

valem as correspondências $\nabla \rightarrow -i\mathbf{k}$, $\partial_t \rightarrow i\omega$, de modo que a equação (4.15) fornece:

$$\left(-\mathbf{k}^2 + \frac{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \omega^2 \right) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = 0.$$

A equação acima implica na seguinte relação de dispersão modificada para o eletromagnetismo isotrópico:

$$\mathbf{k}^2 = \frac{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \omega^2, \quad (4.17)$$

ou seja,

$$\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}} |\mathbf{k}|. \quad (4.18)$$

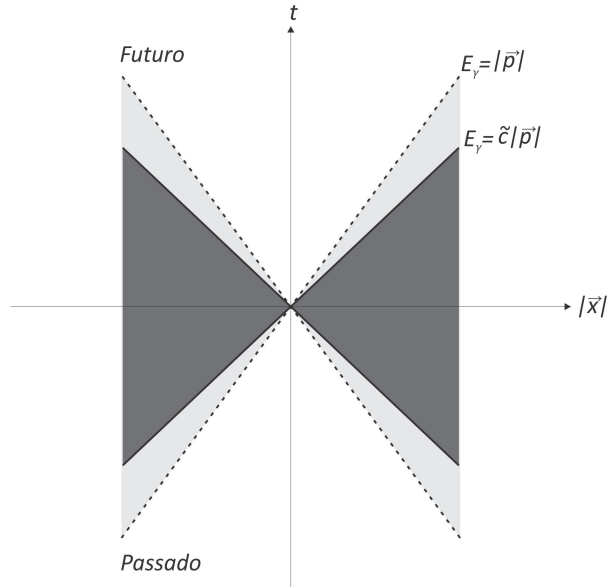
No referencial isotrópico, a relação de dispersão não depende da direção de propagação e a frequência depende apenas do módulo do vetor $\mathbf{k}$.

As velocidades de fase e de grupo para ondas que se propagam com a relação de dispersão (4.18) são iguais e, portanto, não há dispersão³.

$$|\mathbf{v}_f| = \frac{\omega(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|} = \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}}, \quad (4.19)$$

$$|\mathbf{v}_g| = \left| \frac{\partial \omega(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \right| = \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}}. \quad (4.20)$$

Figura 16 – Cone de Luz no referencial isotrópico



Na figura está indicada a modificação no cone de luz no espaço de posição quando $\tilde{\kappa}_{tr} < 0$. Nesse caso, o cone é mais aberto e a velocidade de propagação do fóton é maior que velocidade padrão c , ainda que de maneira bem sutil.

A dependência das velocidades de grupo e de fase, em termos de $\tilde{\kappa}_{tr}$, sugere que medidas de alta precisão da velocidade da luz podem, em princípio, ser usadas para conseguir limites superiores para o parâmetro $\tilde{\kappa}_{tr}$.

Uma expansão perturbativa pode ser obtida para a velocidade de grupo,

$$|\mathbf{v}_g| = c \left(1 - \tilde{\kappa}_{tr} + \frac{\tilde{\kappa}_{tr}^2}{2} + O(\tilde{\kappa}_{tr}^3) \right), \quad (4.21)$$

onde escrevemos c explicitamente. Note que se $\tilde{\kappa}_{tr} > 0$, problemas de não-causalidade são evitados, pois, vale ainda $|\mathbf{v}_g| < c$. O caso $\tilde{\kappa}_{tr} < 0$ é um pouco mais delicado, pois, para esse caso, teríamos $|\mathbf{v}_g| > c$ no vácuo. Em princípio, isso poderia nos conduzir à problemas de não-causalidade. No entanto, esse problema pode ser evitado redefinindo-se a velocidade da luz,

$$\tilde{c} \equiv c \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{tr}}{1 + \tilde{\kappa}_{tr}}}. \quad (4.22)$$

Com a redefinição (4.22) temos uma modificação no cone de luz (Figura 16), ou seja, um sinal eletromagnético viaja com uma velocidade maior que a *velocidade limite*, c , que uma partícula massiva pode ter. Além disso, uma outra partícula de massa nula, diferente do fóton, terá ainda velocidade c e, portanto, terá um cone de luz diferente (Figura 16).

Em suma, para a eletrodinâmica isotrópica, com $-1 < \tilde{\kappa}_{tr} < 0$, uma distinção entre a velocidade de propagação da onda, $\tilde{c}$, e a velocidade limite de uma partícula massiva, c , nos livra

³ O fenômeno da dispersão é muito comum em meios materiais. Quando se supõe violações da simetria de Lorentz, a dispersão pode ocorrer no vácuo [72]. No entanto, o modelo isotrópico da eletrodinâmica não possui esta propriedade, uma vez que o coeficiente tem dimensão de massa igual a zero.

de problemas de não-causalidade [70, 73]. A nível quântico, não temos tais problemas também. A microcausalidade é garantida no setor fotônico isotrópico, uma vez que podemos sempre redefinir a velocidade da luz. Isso significa que dois operadores de campo, avaliados em lugares diferentes, comutam entre si, quando os pontos do espaço-tempo não podem ser conectados por um sinal de luz modificada ou um sinal propagando com uma velocidade menor [74].

4.1.2 Aspectos Quânticos

As equações de Maxwell representam uma descrição clássica completa dos campos elétricos e magnéticos. No entanto, quando tratamos de efeitos em níveis microscópicos, devemos levar em consideração o caráter quântico da radiação. A quantização do campo eletromagnético é um procedimento complicado e seu tratamento completo é extensamente discutido em vários textos [75, 76, 77]. Aqui, comentaremos brevemente sobre a quantização do campo eletromagnético isotrópico, com o intuito de alcançar o conceito de *fóton modificado*, o quantum do campo eletromagnético isotrópico. Primeiramente, revisaremos as equações de Maxwell em termos dos potenciais.

Os potenciais eletromagnéticos são considerados apenas como campos auxiliares que ajudam na descrição teórica dos campos elétricos e magnéticos. No entanto, em nível quântico, a situação se torna diferente. O potencial vetor tem um papel fundamental no efeito Aharonov-Bohm [78], por exemplo. O próprio procedimento de quantização é realizado nos potenciais A^μ . Dessa forma, a propriedade de invariância de calibre se torna fundamental na discussão em nível quântico. As equações de Maxwell modificadas pelo coeficiente de controle isotrópico, escritas em termos dos potenciais, são:

$$\nabla^2 \Phi + \partial_t (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}, \quad (4.23)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{\tilde{c}^2} \partial_t^2 \mathbf{A} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{\tilde{c}^2} \partial_t \Phi \right) = \frac{\mathbf{j}}{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}. \quad (4.24)$$

Essas equações diferenciais acopladas são invariantes por transformações de calibre,

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \partial_t \Lambda, \quad (4.25)$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda. \quad (4.26)$$

Em particular, na ausência de fontes, o calibre de Coulomb,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (4.27)$$

nos leva à,

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (4.28)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{\tilde{c}^2} \partial_t^2 \mathbf{A} = -\frac{1}{\tilde{c}^2} \partial_t \nabla \Phi. \quad (4.29)$$

Esse sistema admite solução $\Phi = 0$ e, portanto, o campo eletromagnético é inteiramente determinado pela equação de onda modificada para o potencial vetor,

$$\frac{1}{\tilde{c}^2} \partial_t^2 \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = 0. \quad (4.30)$$

Os campos físicos são dados por,

$$\mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (4.31)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.32)$$

Note que devido à escolha (4.27), o campo $\mathbf{A}$ é transversal e, portanto, possui dois graus de liberdade associados à polarização da onda eletromagnética. A solução geral para a equação (4.30) é dada por:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \mathbf{A}(\mathbf{k}) e^{(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}} t)}, \quad (4.33)$$

onde $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ é alguma função real no espaço de Fourier e $\omega_{\mathbf{k}}$ é dado pela equação (4.18). Vamos empregar a quantização canônica no campo eletromagnético. Tal procedimento requer o uso do 4-momento associado ao campo A^μ . O 4-momento da eletrodinâmica isotrópica pode ser calculado usando a Lagrangiana modificada,

$$\mathcal{L}_{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2). \quad (4.34)$$

Seu momento conjugado é dado por:

$$\pi_\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}}{\partial (\partial_0 A^\mu)}. \quad (4.35)$$

Então, as componentes do 4-momento conjugado são:

$$\pi_0(x) = 0, \quad (4.36)$$

$$\pi_i(x) = -E_i - \tilde{\kappa}_{\text{tr}} E_i. \quad (4.37)$$

Note que a quantização canônica⁴ não pode ser empregada diretamente sobre as componentes de A^μ , assim como o caso invariante de Lorentz, pois, a relação de comutação para a componente temporal,

$$[A_0(\mathbf{x}, t_0), \pi_0(\mathbf{x}, t_0)], \quad (4.38)$$

é identicamente zero. Esse problema, assim como o caso usual, pode ser contornado de várias formas [75]. Aqui, vamos assumir o calibre de Coulomb,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0,$$

⁴ A quantização canônica se baseia na promoção das funções clássicas à operadores que agem em um espaço de Hilbert. Estes operadores devem satisfazer relações de comutação análogas aquelas da mecânica quântica de uma única partícula.

e realizar a quantização em tal calibre. A relação de comutação (4.38) não é mais um problema quando fixamos o calibre de Coulomb, pois, eliminamos a componente A_0 e a longitudinal do 4-potencial, restando apenas dois graus de liberdade.

As relações de comutação, em tempos iguais, para as componentes físicas do campo eletromagnético isotrópico, são

$$[A_i(\mathbf{x}, t_0), E_j(\mathbf{y}, t_0)] = -\frac{i}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \delta_{ij}^{\text{tr}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (4.39)$$

$$[A_i(\mathbf{x}, t_0), A_j(\mathbf{y}, t_0)] = [E_i(\mathbf{x}, t_0), E_j(\mathbf{y}, t_0)] = 0, \quad (4.40)$$

onde $\delta_{ij}^{\text{tr}}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ é a função delta transversa⁵. Essa função possui a seguinte representação no espaço de Fourier:

$$\delta_{ij}^{\text{tr}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \right). \quad (4.41)$$

Algumas propriedades dessa função podem ser encontradas em [75].

A equação de movimento para o operador do campo eletromagnético, no calibre de Coulomb, é idêntica à equação clássica dada por (4.30). A solução geral, em termos de uma expansão em ondas planas, é dada por (4.33). A restrição de Coulomb mostra, facilmente, que $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ deve satisfazer a condição de transversalidade,

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (4.42)$$

que significa que $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ é perpendicular à direção de propagação do movimento. Podemos então escrever $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ como uma combinação linear de dois vetores ortogonais $\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} = \frac{1}{N} \delta^{rs}, \quad r, s = 1, 2. \quad (4.43)$$

Estes vetores correspondem aos dois graus de liberdade necessários para descrever a direção de polarização do fóton⁶. O fator N é uma constante de normalização que pode depender do parâmetro de quebra $\tilde{\kappa}_{\text{tr}}$ e será calculado mais adiante. Em todo caso, os vetores de polarização, juntamente com o versor na direção do momento $\mathbf{k}$, formam uma base ortogonal completa no espaço 3-dimensional, satisfazendo a seguinte relação,

$$N \sum_s \varepsilon^{(s)i} \varepsilon^{(s)j} + \frac{k^i k^j}{|\mathbf{k}|^2} = \delta^{ij}. \quad (4.44)$$

É notório que o campo do fóton é neutro e, portanto, deve ser descrito por um campo real, $A^\mu(t, \mathbf{x}) = A^{\mu*}(t, \mathbf{x})$. Isso garante que podemos escrever o campo do fóton e os campos

⁵ A função delta transversa é fundamental na quantização do campo eletromagnético, no calibre de Coulomb [75].

⁶ O campo do fóton é descrito por um 4-vetor. No entanto, devido à simetria de calibre, apenas duas das quatro componentes são físicas.

físicos como sendo,

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \sum_{r=1,2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} \left[a_{\mathbf{k}}^{(r)} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}}^{(r)} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t)} + \text{h.c.} \right], \quad (4.45)$$

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \sum_{r=1,2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} \left[i\omega(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^{(r)} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}}^{(r)} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t)} + \text{h.c.} \right], \quad (4.46)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A} = \sum_{r=1,2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} \left[i\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}}^{(r)} a_{\mathbf{k}}^{(r)} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t)} + \text{h.c.} \right], \quad (4.47)$$

onde $a_{\mathbf{k}}^{(r)}$, $a_{\mathbf{k}}^{(r)*}$ são os coeficientes de Fourier dos campos. Os vetores de polarização possuem componentes diferentes de zero apenas nas direções transversais à direção de propagação. Por simplicidade, vamos considerar o 3-momento do fóton $\mathbf{k}$ se propagando apenas em uma direção espacial,

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \omega(\mathbf{k}) \\ |\mathbf{k}| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

o que permite tomar os dois vetores de polarização na seguinte forma:

$$\boldsymbol{\epsilon}^\mu(\mathbf{k}, 1) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon}^\mu(\mathbf{k}, 2) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

Quando o campo eletromagnético é quantizado, a função clássica $A(\mathbf{x}, t)$ é promovida ao status de um operador. Isso repercute na expansão (4.45), onde $a_{\mathbf{k}}^{(r)}$ e $a_{\mathbf{k}}^{(r)*}$ devem figurar também operadores, por consistência. As relações de comutação para $a_{\mathbf{k}}^{(r)}$ e $a_{\mathbf{k}}^{(r)\dagger}$, agora operadores, são dadas por,

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{k}}^{(r)}, a_{\mathbf{p}}^{(s)}] &= [a_{\mathbf{k}}^{(r)\dagger}, a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}] = 0, \\ [a_{\mathbf{k}}^{(r)}, a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}] &= \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \delta^{rs}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde o cálculo explícito se encontra no Apêndice C.1. Note que os operadores $a_{\mathbf{k}}^{(r)}$ e $a_{\mathbf{k}}^{(r)\dagger}$ satisfazem as mesmas relações de comutação do caso invariante de Lorentz. Os operadores $a_{\mathbf{k}}^{(r)}$ e $a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}$ são interpretados como operadores de aniquilação e criação, respectivamente. Finalmente, podemos calcular a Hamiltoniana do sistema,

$$\mathcal{H}_{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \right], \quad (4.51)$$

em termos de $a_{\mathbf{k}}^{(r)}$ e $a_{\mathbf{k}}^{(r)\dagger}$, obtendo, após um longo desenvolvimento algébrico,

$$\mathcal{H}_{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}} = \sum_r \int d^3\mathbf{p} \frac{(1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}})}{N} \frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2} (a_{\mathbf{p}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} + a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(r)}), \quad (4.52)$$

vide Apêndice C.2 para mais detalhes. Usando a expressão,

$$a_{\mathbf{p}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} = a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(r)} + [a_{\mathbf{p}}^{(r)}, a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger}], \quad (4.53)$$

reescrevemos a Hamiltoniana na forma:

$$\mathcal{H}_{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}} = \int d^3\mathbf{p} \frac{(1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}})}{N} \frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2} (2a_{\mathbf{p}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} + [a_{\mathbf{p}}^{(r)}, a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger}]), \quad (4.54)$$

$$\mathcal{H}_{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}} = \sum_r \int d^3\mathbf{p} \frac{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{N} \omega_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(r)} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}}^{(r)}, a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger}] \right). \quad (4.55)$$

O último termo, sendo proporcional à $\delta^3(\mathbf{0})$, leva à uma contribuição divergente para a Hamiltoniana. No entanto, esse problema pode ser contornado redefinindo a energia, uma vez que em física, estamos preocupados apenas com diferenças entre energias. Subtraindo $\frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}}^{(r)}, a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger}]$ da expressão para a Hamiltoniana quantizada (4.52),

$$\mathcal{H}_{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}} = \sum_r \int d^3\mathbf{p} \frac{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{N} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(r)}. \quad (4.56)$$

Podemos agora escrever o espectro para a eletrodinâmica isotrópica usando as mesmas técnicas para o oscilador harmônico livre. O estado $|0\rangle$, conhecido como estado de vácuo da teoria, possui a propriedade $a_{\mathbf{p}}^{(r)} |0\rangle = 0$, para qualquer $\mathbf{p}$, além de possuir energia mínima, $\omega_{\mathbf{p}} = 0$, que pode ser checada diretamente usando (4.56). Qualquer estado de 1-partícula $|\mathbf{p}, \sigma\rangle$, de momento $\mathbf{p}$ e polarização σ , pode ser obtido mediante a aplicação do operador de criação no estado fundamental,

$$a_{\mathbf{k}}^{(\sigma)\dagger} |0\rangle = |\mathbf{k}, \sigma\rangle. \quad (4.57)$$

A constante de normalização N pode ser obtida pela relação de consistência,

$$\langle \mathbf{k}, \sigma | \mathcal{H}_{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}} | \mathbf{k}, \sigma \rangle = \omega_{\mathbf{k}}. \quad (4.58)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}, \sigma | \mathcal{H}_{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}} | \mathbf{k}, \sigma \rangle &= \langle \mathbf{k}, \sigma | \sum_r \int d^3\mathbf{p} \frac{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{N} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(r)} | \mathbf{k}, \sigma \rangle, \\ \langle \mathbf{k}, \sigma | \mathcal{H}_{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}} | \mathbf{k}, \sigma \rangle &= \sum_r \int d^3\mathbf{p} \frac{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{N} \omega_{\mathbf{p}} \langle 0 | a_{\mathbf{k}}^{(\sigma)} a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(r)} a_{\mathbf{k}}^{(\sigma)\dagger} | 0 \rangle, \\ \langle \mathbf{k}, \sigma | \mathcal{H}_{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}} | \mathbf{k}, \sigma \rangle &= \sum_r \int d^3\mathbf{p} \frac{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{N} \omega_{\mathbf{p}} \langle 0 | a_{\mathbf{k}}^{(\sigma)} a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} \left([a_{\mathbf{p}}^{(r)}, a_{\mathbf{k}}^{(\sigma)\dagger}] + a_{\mathbf{k}}^{(\sigma)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(r)} \right) | 0 \rangle, \\ \langle \mathbf{k}, \sigma | \mathcal{H}_{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}} | \mathbf{k}, \sigma \rangle &= \sum_r \int d^3\mathbf{p} \frac{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{N} \omega_{\mathbf{p}} \langle \mathbf{k}, \sigma | |\mathbf{p}, r\rangle \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \delta^{r\sigma}, \\ \langle \mathbf{k}, \sigma | \mathcal{H}_{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}} | \mathbf{k}, \sigma \rangle &= \frac{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{N} \omega_{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

o que permite obter,

$$N = 1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}. \quad (4.60)$$

No desenvolvimento anterior, usamos o fato do estado $|\mathbf{k}, \sigma\rangle$ ser normalizado,

$$\langle \mathbf{k}, \sigma | \mathbf{k}, \sigma \rangle = 1, \quad (4.61)$$

a fim de preservar a interpretação probabilística intrínseca da teoria quântica. Os vetores de polarização, explicitamente em termos do coeficiente $\tilde{\kappa}_{\text{tr}}$, são, portanto,

$$(\varepsilon^1)^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\varepsilon^2)^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

A soma sobre todas as polarizações é de extrema importância quando tratamos de processos físicos em que não temos a informação prévia sobre a polarização das partículas. O cálculo efetivo de taxas de decaimento e sessões de choque é feito utilizando teoria de perturbação e é comum ocorrer produtos diretos entre dois vetores de polarização, formando um tensor de polarização. Assim, é de utilidade prática buscar a soma sobre os tensores de polarização em forma covariante. Para isso, vamos adotar o seguinte Ansatz:

$$\sum_r \varepsilon^{(r)\mu} \varepsilon^{(r)\nu} = \frac{1}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} (A \eta^{\mu\nu} + B \xi^\mu \xi^\nu + C k^\mu k^\nu + D k^\mu \xi^\nu + E \xi^\mu k^\nu), \quad (4.63)$$

onde ξ^μ é um 4-vetor tipo-tempo,

$$\xi^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.64)$$

o qual pode ser usado para descrever o tensor simétrico definido na equação (4.8), ou seja,

$$\kappa^{\mu\nu} = 2\tilde{\kappa}_{\text{tr}} \left(\xi^\mu \xi^\nu - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \xi^\alpha \xi_\alpha \right) = \frac{3}{2} \tilde{\kappa}_{\text{tr}} \text{diag}(1, 1/3, 1/3, 1/3). \quad (4.65)$$

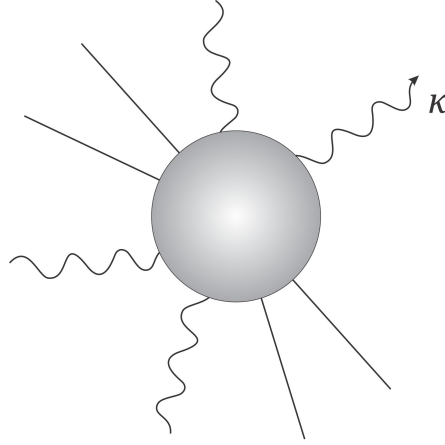
O lado esquerdo do Ansatz (4.63) é uma decomposição que construímos utilizando a métrica $\eta^{\mu\nu}$ e os 4-vetor ξ^μ, k^μ . Esse Ansatz admite uma representação matricial e os coeficientes A, B, C, D e E , podem ser obtidos por comparação com a matriz resultante do cálculo do produto direto entre os vetores (4.62). Como resultado, temos:

$$\sum_r \varepsilon^{(r)\mu} \varepsilon^{(r)\nu} = \frac{1}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.66)$$

Comparando os termos, temos os seguintes valores para os coeficientes:

$$A = -1, \quad B = 1 - \frac{\omega^2(k)}{k^2}, \quad C = -\frac{1}{k^2}, \quad D = E = \frac{\omega(k)}{k^2}. \quad (4.67)$$

Figura 17 – Processo em QED



Usando a relação de dispersão de maneira explícita, temos que a soma dos tensores de polarização físicas é

$$\sum_r \varepsilon^{(r)\mu} \varepsilon^{(r)\nu} = \frac{1}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \left[-\eta^{\mu\nu} + \frac{2\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \xi^\mu \xi^\nu - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} + \frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} (k^\mu \xi^\nu + \xi^\mu k^\nu) \right]. \quad (4.68)$$

Aqui vale um pequeno comentário sobre o resultado acima. Em um processo arbitrário, onde fótons externos interagem com férmions carregados, sempre podemos escrever a amplitude de probabilidade como sendo,

$$\mathcal{M} = \varepsilon^\mu(k) \mathcal{M}_\mu(k),$$

onde $\mathcal{M}_\mu(k)$ é um elemento de matriz que, em geral, depende da 4-corrente fermiônica $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$.

$$\mathcal{M}^\mu(k) = \int \langle f | j^\mu | i \rangle e^{ik \cdot x} d^4x. \quad (4.69)$$

A conservação da corrente $\partial_\mu j^\mu = 0$, é uma simetria clássica que se mantém a nível quântico e, sua validade, implica na *identidade de Ward*⁷,

$$k^\mu \mathcal{M}_\mu(k) = 0. \quad (4.70)$$

Isso significa que não são todos os termos em (4.68) que contribuirão para uma amplitude envolvendo fótons modificados. Os termos proporcionais à k^μ podem ser desconsiderados, restando apenas,

$$\sum_r \varepsilon^{(r)\mu} \varepsilon^{(r)\nu} \rightarrow \frac{1}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \left(-\eta^{\mu\nu} + \frac{2\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \xi^\mu \xi^\nu \right). \quad (4.71)$$

⁷ Esse breve comentário sobre a identidade de Ward está muito distante de uma prova. Para detalhes, consulte [33].

4.2 Decaimento do fóton na QED Isotrópica

Até agora, analisamos a eletrodinâmica isotrópica em alguns de seus aspectos clássicos e quânticos. Todavia, sempre tratamos a teoria livre. Vamos investigar efeitos de pequenas violações na simetria de Lorentz no setor de fótons interagindo com férmions através do acoplamento usual, no que chamamos de *Eletrodinâmica Dinâmica Quântica Isotrópica* (QED-Isotrópica). A Lagrangiana que descreve esse modelo,

$$\mathcal{L}_{\text{QED}}^{(iso)} = \mathcal{L}_{\text{Mawell}}^{(iso)} [\tilde{c}, \kappa_{tr}] + \mathcal{L}_{\text{Dirac}} [c, m_e] + \mathcal{L}_{\text{int}} [e], \quad (4.72)$$

é composta pela Lagrangiana do eletromagnetismo isotrópico $\mathcal{L}_{\text{Mawell}}^{(iso)} [\tilde{c}, \kappa_{tr}]$, a Lagrangiana padrão⁸ de Dirac, $\mathcal{L}_{\text{Dirac}} [c, m_e]$, que descreve férmions e pelo termo de acoplamento com o campo eletromagnético A^μ ,

$$\mathcal{L}_{\text{int}} [e] = e \bar{\psi} A_\mu \gamma^\mu \psi, \quad (4.73)$$

onde ψ é o campo espinorial e $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ é o espinor adjunto de Dirac. Como $\mathcal{L}_{\text{int}} [e]$ envolve a carga do férmion "e", só férmions carregados interagem com o campo A^μ . Neste sentido, a carga "e" é vista como constante de acoplamento do setor eletromagnético com o setor fermiônico.

$$\mathcal{L}_{\text{QED}}^{(iso)} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \kappa_{\nu\sigma} F^{\mu\nu} F_\mu{}^\sigma + \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi - m_e \bar{\psi} \psi, \quad (4.74)$$

onde,

$$\kappa_{\mu\nu} = \frac{3}{2} \tilde{\kappa}_{tr} \text{diag} \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), \quad (4.75)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + e A_\mu, \quad (4.76)$$

com D_μ sendo a derivada covariante que contém o termo de interação. Note que escrevemos a Lagrangiana em (4.72) com suas dependências das constantes fundamentais. Isso foi feito para chamar a atenção que a velocidade limite, c , que uma partícula massiva pode ter, é diferente da velocidade de fase de uma onda eletromagnética isotrópica, $\tilde{c}$. Como mostrado na seção anterior, esse efeito é causado diretamente pela presença do coeficiente de quebra, $\tilde{\kappa}_{tr}$, na relação de dispersão (4.18). Esse fato gera modificações na cinemática dos campos e possibilita novos processos que, em princípio, podem ser observados.

4.2.1 Energia mínima

A distinção entre a velocidade da onda eletromagnética, $\tilde{c}$, e a velocidade limite que uma partícula massiva pode alcançar, c , possibilita efeitos incomuns dependendo do sinal do coeficiente de quebra isotrópico, $\tilde{\kappa}_{tr}$. Veremos agora a possibilidade teórica do decaimento de um fóton em um par elétron-pósitron, quando $-1 < \tilde{\kappa}_{tr} < 0$.

⁸ Em uma primeira análise, consideramos elétrons e pósitrons usuais, desconsiderando violações no setor de férmions do MP.

Por enquanto, é suficiente tratar o processo ocorrendo apenas em uma direção (1D). Considere assim, a conservação da energia e momento para um processo do tipo, $\gamma \rightarrow e^+e^-$,

$$E_\gamma = E_{e^-} + E_{e^+}, \quad (4.77)$$

$$\mathbf{p}_\gamma = \mathbf{p}_{e^-} + \mathbf{p}_{e^+}. \quad (4.78)$$

Estamos considerando eletrons e pósitrons padrões, ou seja, possuindo relações de dispersão:

$$E_e = \sqrt{|\mathbf{p}_e|^2 + m_e^2}. \quad (4.79)$$

O fóton, no entanto, possui relação de dispersão modificada pelo coeficiente de controle isotrópico,

$$E_\gamma = \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}} p_\gamma. \quad (4.80)$$

A partir de agora, usaremos a notação $E_{\gamma,e}$ para denotar a energia das partículas. Com o auxílio de (4.79) e (4.80), as equações de conservação se tornam:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}} p_\gamma &= \sqrt{p_{e^-}^2 + m_e^2} + \sqrt{p_{e^+}^2 + m_e^2}, \\ p_\gamma &= p_{e^+} + p_{e^-}, \end{aligned} \quad (4.81)$$

Esse sistema de equações possui soluções reais para p_{e^-} , a partir de um valor mínimo para p_γ . Para obter esse valor mínimo, podemos tomar o quadrado de ambas as equações acima e subtrair uma pela outra,

$$-\frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} p_\gamma^2 - m_e^2 + p_{e^-} p_{e^+} = \sqrt{(p_{e^-}^2 + m_e^2)(p_{e^+}^2 + m_e^2)}. \quad (4.82)$$

Tomando o quadrado mais uma vez e usando a equação da conservação do momento, (4.81), podemos reescrever a equação acima como uma equação algébrica de segunda ordem para o momento do elétron p_{e^-} ,

$$p_{e^+}^2 - p_\gamma p_{e^-} + \frac{1}{2} \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} p_\gamma^2 + \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}} - 1}{2\tilde{\kappa}_{\text{tr}}} m_e^2 = 0. \quad (4.83)$$

Essa equação tem como raízes,

$$p_{e^-} = \frac{p_\gamma \pm \sqrt{p_\gamma^2 - \frac{2\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} p_\gamma^2 - 2\frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}} - 1}{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}} m_e^2}}{2}. \quad (4.84)$$

É claro que p_{e^-} deve ser uma grandeza real. Portanto, o momento do fóton inicial, p_γ , e a massa do elétron, m_e , satisfazem a seguinte desigualdade:

$$p_\gamma^2 - \frac{2\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} p_\gamma^2 - 2\frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}} - 1}{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}} m_e^2 \geq 0. \quad (4.85)$$

Note agora que existe um caso limite onde a desigualdade é saturada. Nesse caso limite, temos, portanto, o valor mínimo que o momento do fóton inicial deve ter para garantir que o processo, $\gamma \rightarrow e^+e^-$, ocorra. Assim,

$$p_\gamma^{(\text{min})2} - \frac{2\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} p_\gamma^{(\text{min})2} - 2\frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}} - 1}{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}} m_e^2 = 0, \quad (4.86)$$

ou seja,

$$p_{\gamma}^{(\min)} = 2m_e \sqrt{\frac{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{-2\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}}. \quad (4.87)$$

Observe que a equação acima só faz sentido para $\tilde{\kappa}_{\text{tr}} < 0$. Concluimos assim que, para valores de momento a partir de $2m_e \sqrt{\frac{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{-2\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}}$, um fóton pode se tornar instável e decair em um par elétron-pósitron. É mais conveniente obter uma energia mínima para o processo. Usando a relação de dispersão modificada (4.18), obtemos:

$$E_{\gamma}^{(\min)}(m_e, \tilde{\kappa}_{\text{tr}}) = 2m_e \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{-2\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}}. \quad (4.88)$$

Note que a quebra da simetria de Lorentz induz uma modificação na cinemática da teoria, possibilitando o decaimento do fóton para $-1 < \tilde{\kappa}_{\text{tr}} < 0$. Um efeito inusitado também acontece quando consideramos o caso $1 > \tilde{\kappa}_{\text{tr}} > 0$. Nesse caso, um processo análogo à radiação de Cherenkov, $e^- \rightarrow \gamma + e^-$, pode ocorrer no vácuo. Para mais detalhes desse e de outros efeitos vide referências [79, 76].

A energia mínima para o decaimento do fóton depende explicitamente do valor numérico do coeficiente $\tilde{\kappa}_{\text{tr}}$. Podemos conseguir limites inferiores para o coeficiente de controle, $\tilde{\kappa}_{\text{tr}}$, confrontando os resultados teóricos com as observações experimentais. Comentaremos sobre isso mais adiante.

4.2.2 Espaço de fase

O processo $\gamma \rightarrow e^- e^+$ se torna possível graças à modificação na cinemática do campo eletromagnético, expressa pela relação de dispersão modificada (4.18). Isso significa que o decaimento de fótons pode ocorrer para energias acima de um valor mínimo (4.88). Mais adiante neste trabalho, calcularemos a taxa de decaimento do fóton. Primeiramente, devemos obter os estados finais possíveis para o par elétron-pósitron gerado no processo, ou seja, o espaço de fase no referencial isotrópico. Para isso, vamos considerar o decaimento do fóton em três dimensões espaciais.

As relações de energia e momento são,

$$\sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}} |\mathbf{p}_{\gamma}| = \sqrt{|\mathbf{p}_{e^-}|^2 + m_e^2} + \sqrt{|\mathbf{p}_{e^+}|^2 + m_e^2}, \quad (4.89)$$

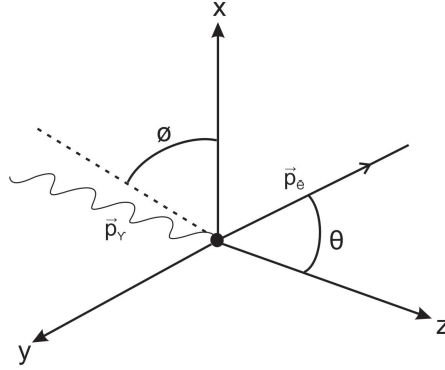
$$\mathbf{p}_{\gamma} = \mathbf{p}_{e^+} + \mathbf{p}_{e^-}. \quad (4.90)$$

Estamos adotando o sistema de coordenadas ilustrado na Figura 18, onde o momento inicial do fóton está sobre o eixo $\hat{z}$. O ângulo que o elétron faz com a direção de propagação do fóton coincide com o ângulo θ das coordenadas esféricas. Temos assim,

$$\mathbf{p}_{e^-} = |\mathbf{p}| (\sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}). \quad (4.91)$$

$$\mathbf{p}_{\gamma} = |\mathbf{q}| \hat{z}. \quad (4.92)$$

Figura 18 – Espaço de Fase



A figura esquematiza um sistema de coordenadas conveniente para calcular os limites do espaço de fase dos possíveis estados finais do elétron emergente do decaimento do fóton. Escolhendo a direção de propagação no eixo z , os ângulos θ e ϕ são os usuais ângulos esféricos.

Graças à conservação do momento, podemos escrever o momento espacial do pósitron, $\mathbf{p}_{e^+} = \mathbf{p}_\gamma - \mathbf{p}_{e^-}$, também em termos das coordenadas θ e ϕ , ou seja,

$$\mathbf{p}_{e^+} = -|\mathbf{p}| \sin \theta \cos \phi \hat{x} - |\mathbf{p}| \sin \theta \sin \phi \hat{y} + (|\mathbf{q}| - |\mathbf{p}| \cos \theta) \hat{z}. \quad (4.93)$$

A conservação da energia, dada em (4.81), é reescrita como

$$\sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}} |\mathbf{q}| = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} + \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2 + |\mathbf{q}|^2 - 2|\mathbf{p}||\mathbf{q}| \cos \theta}, \quad (4.94)$$

onde não se observa dependência do ângulo azimutal ϕ . Isso garante que o momento final do elétron, $\mathbf{p}_{e^-}$, pode assumir qualquer valor para esse ângulo. O caso é um pouco diferente para o ângulo θ . Observe que podemos resolver a equação (4.94) para $\cos \theta$, obtendo:

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{(1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}})(1 + m^2/|\mathbf{p}|^2)}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}} + \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \frac{|\mathbf{q}|}{|\mathbf{p}|}, \quad (4.95)$$

ou ainda,

$$\theta(|\mathbf{p}|) = \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \left(1 + \frac{m^2}{|\mathbf{p}|^2} \right)} + \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \frac{|\mathbf{q}|}{|\mathbf{p}|} \right). \quad (4.96)$$

Os possíveis valores do ângulo polar têm uma dependência com o momento final do elétron. Isso restringe o volume no espaço de fase, como veremos mais adiante. Para $\theta = 0$, a equação (4.95) fornece,

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{\frac{(1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}})(|\mathbf{p}|^2 + m^2)}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}} + \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} |\mathbf{q}|. \quad (4.97)$$

Podemos obter uma equação algébrica para o momento final do elétron,

$$|\mathbf{p}|^2 - |\mathbf{q}||\mathbf{p}| + \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} - \frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{2\tilde{\kappa}_{\text{tr}}} m^2 = 0, \quad (4.98)$$

que possui as seguintes soluções:

$$|\mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{q}|}{2} \left[1 \pm \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{tr}}{1 + \tilde{\kappa}_{tr}} + \frac{2m^2}{|\mathbf{q}|^2} \left(\frac{1}{\tilde{\kappa}_{tr}} - 1 \right)} \right]. \quad (4.99)$$

No caso onde $\theta = \pi$, temos, de maneira semelhante, uma equação algébrica para o momento final do elétron, cujas soluções são:

$$|\mathbf{p}| = -\frac{|\mathbf{q}|}{2} \pm \frac{|\mathbf{q}|}{2} \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{tr}}{1 + \tilde{\kappa}_{tr}} + \frac{1 - \tilde{\kappa}_{tr}}{\tilde{\kappa}_{tr}} \frac{2m^2}{|\mathbf{q}|^2}}. \quad (4.100)$$

Acima, temos igualdades para o módulo do momento, o qual deve ser real e positivo. Temos assim, o menor valor possível para o momento do elétron,

$$|\mathbf{p}|_{\min} = \frac{|\mathbf{q}|}{2} \left[1 - \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{tr}}{1 + \tilde{\kappa}_{tr}} + \frac{2m^2}{|\mathbf{q}|^2} \left(\frac{1}{\tilde{\kappa}_{tr}} - 1 \right)} \right]. \quad (4.101)$$

Consequentemente, o valor máximo que o momento do elétron pode alcançar é quando temos o sinal positivo em (4.99),

$$|\mathbf{p}|_{\max} = \frac{|\mathbf{q}|}{2} \left[1 + \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{tr}}{1 + \tilde{\kappa}_{tr}} + \frac{2m^2}{|\mathbf{q}|^2} \left(\frac{1}{\tilde{\kappa}_{tr}} - 1 \right)} \right]. \quad (4.102)$$

Diferentemente do caso padrão, onde a simetria de Lorentz é preservada, o volume do espaço de fase é não-nulo quando supomos violações da simetria de Lorentz. Em particular, calculamos os intervalos possíveis de momento para uma violação isotrópica. Note que é possível obter elétrons ou pósitrons para quaisquer valores dos ângulos θ e ϕ . No entanto, só é possível encontrar elétrons e pósitrons com momentos no intervalo,

$$|\mathbf{p}|_{\min} \leq |\mathbf{p}| \leq |\mathbf{p}|_{\max}. \quad (4.103)$$

4.2.3 Ângulo entre o par elétron-pósitron

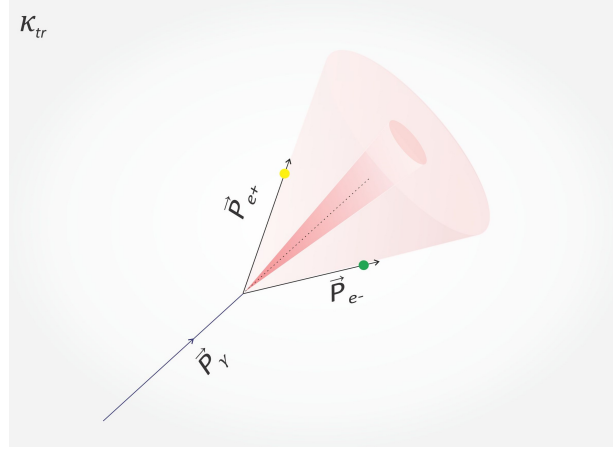
Na subseção anterior, verificamos que, graças à relação de dispersão modificada, um fóton pode se tornar instável e decair em um par elétron-pósitron, em energias superiores à energia mínima definida pela equação (4.88). Nesse tipo de decaimento, as partículas produzidas se propagam em direções que, em geral, são diferentes da direção de propagação do fóton inicial, dados por um ângulo θ não-nulo. Além do ângulo θ , existe um ângulo entre a direção do momento do par elétron-pósitron que depende dos parâmetros cinemáticos do processo. Esse ângulo é, precisamente, dado por:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{p}_{e^-} \cdot \mathbf{p}_{e^+}}{|\mathbf{p}_{e^-}| |\mathbf{p}_{e^+}|}. \quad (4.104)$$

Podemos reescrever o ângulo α no sistema de coordenadas da Figura 19. Usando as expressões para os momentos do elétron e pósitron, dados pelas equações (4.91) e (4.93), temos:

$$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{q}| \cos \theta - |\mathbf{p}|}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2 - 2 |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \cos \theta}}. \quad (4.105)$$

Figura 19 – Ângulo entre o par elétron-pósitron



Um esquema pictórico do decaimento de um fóton em um par e^-e^+ . O par é criado e as direções de propagação das partículas ficam sobre a superfície de um cone, em vermelho na figura. O ângulo de abertura α desse cone é uma função da energia final do elétron/pósitron.

Com auxílio de (4.95), podemos reescrever o ângulo como:

$$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{q}| \sqrt{\frac{1-\tilde{\kappa}_{tr}}{1+\tilde{\kappa}_{tr}} (1 + m_e^2/|\mathbf{p}|^2)} + \frac{\tilde{\kappa}_{tr}}{1+\tilde{\kappa}_{tr}} \frac{|\mathbf{q}|^2}{|\mathbf{p}|} - |\mathbf{p}|}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2 - 2|\mathbf{p}||\mathbf{q}| \sqrt{\frac{1-\tilde{\kappa}_{tr}}{1+\tilde{\kappa}_{tr}} (1 + m_e^2/|\mathbf{p}|^2)} - \frac{2\tilde{\kappa}_{tr}}{1+\tilde{\kappa}_{tr}} |\mathbf{q}|^2}}}. \quad (4.106)$$

É mais conveniente escrever o ângulo α em termos das energias do fóton inicial e do elétron final. Usando as relações de dispersão para cada partícula, temos:

$$\cos \alpha = \chi \frac{E_\gamma + \frac{\tilde{\kappa}_{tr}}{1-\tilde{\kappa}_{tr}} \frac{E_\gamma^2}{E_e} - \frac{E_e}{\chi^2}}{\sqrt{(E_\gamma - E_e)^2 - m_e^2}}, \quad (4.107)$$

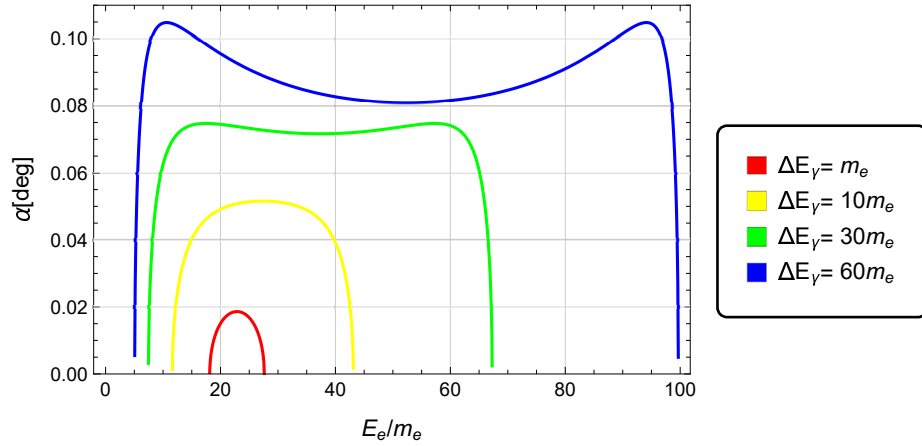
onde $\chi \equiv 1/\sqrt{1 - m_e^2/E_e^2}$. Quando consideramos o limite de altíssimas energias para E_γ , a massa do elétron pode ser desprezada perante a energia do fóton, o que equivale a fazer $m \rightarrow 0$ na equação (4.107), ou seja,

$$\lim_{m \rightarrow 0} \cos \alpha = 1 + \frac{\tilde{\kappa}_{tr}}{1 - \tilde{\kappa}_{tr}} \frac{E_\gamma^2}{E_e (E_\gamma - E_e)}. \quad (4.108)$$

Note, mais uma vez, que a equação acima faz sentido apenas para $-1 < \tilde{\kappa}_{tr} < 0$, pois do contrário, teríamos $\cos \alpha > 1$. O ângulo entre o par de partículas pode ser obtido, explicitamente, invertendo a equação (4.107). De fato,

$$\alpha(E_e; E_\gamma, \tilde{\kappa}_{tr}) = \cos^{-1} \left[\chi \frac{E_\gamma + \frac{\tilde{\kappa}_{tr}}{1-\tilde{\kappa}_{tr}} \frac{E_\gamma^2}{E_e} - \frac{E_e}{\chi^2}}{\sqrt{(E_\gamma - E_e)^2 - m_e^2}} \right]. \quad (4.109)$$

O gráfico da Figura 23 revela o comportamento do ângulo α em termos da razão entre a energia final do elétron e sua massa. Como demonstrado anteriormente, o decaimento do fóton se torna

Figura 20 – Ângulo entre o par e^-e^+ 

Plot do comportamento do ângulo entre o par elétron-pósitron em relação à energia do elétron E_e para vários valores de ΔE_γ acima da energia mínima da equação (3.40).

possível apenas para energias superiores à energia mínima. É conveniente, então, definirmos o *excesso de energia* ΔE_γ , como a diferença entre a energia do fóton inicial e a energia mínima (4.88), ou seja,

$$\Delta E_\gamma \equiv E_\gamma - E_\gamma^{(\min)}. \quad (4.110)$$

Assim, podemos escrever a energia do fóton como sendo:

$$E_\gamma = 2m_e \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{-2\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}} + \Delta E_\gamma. \quad (4.111)$$

Traçamos o comportamento da função $\alpha(E_e; E_\gamma, \tilde{\kappa}_{\text{tr}})$ para vários valores de ΔE_γ .

4.2.4 Taxa de decaimento

O processo de criação de um par, e^-e^+ , por um único fóton, pode ser descrito, em primeira ordem, pelo diagrama de Feynman da Figura 21, onde as linhas externas representam as soluções livres para o campo do fóton modificado e do campo de Dirac convencional. Os cálculos a seguir são feitos no referencial isotrópico, onde a relação de dispersão do fóton é dada pela equação (4.80). O diagrama de Feynman nos auxilia no cálculo da amplitude de probabilidade para o decaimento do fóton. Temos,

$$i\mathcal{M}(\gamma \rightarrow e^-e^+) = -ie\epsilon_\mu^{(r)}(q) \bar{u}^{(s)}(p) \gamma^\mu v^{(s')}(p'), \quad (4.112)$$

onde $\bar{u}^{(s)}(p)$ é o espinor adjunto de Dirac do elétron, com polarização s e 4-momento p e $v^{(s')}(p')$ é o espinor do pósitron de polarização s' e 4-momento p' . O módulo quadrado do elemento de matriz $\mathcal{M}(\gamma \rightarrow e^-e^+)$ é, então,

$$|\mathcal{M}|^2 = e^2 \epsilon_\mu^{(r)}(q) \bar{u}^{(s)}(p) \gamma^\mu v^{(s')}(p') \epsilon_\nu^{(r)*}(q) \bar{v}^{(s')}(p') \gamma^\nu u^{(s)}(p). \quad (4.113)$$

Até esse ponto não especificamos quais são os estados de polarização do fóton inicial. Em muitos experimentos reais é comum que as partículas iniciais sejam não-polarizadas. Então, é conveniente calcular a média sobre todas as polarizações do fóton. Devemos ainda somar sobre todos os estados de polarização possíveis dos férmions,

$$\frac{1}{2} \sum_r \sum_s \sum_{s'} |\mathcal{M}(\gamma \rightarrow e^- e^+)|^2. \quad (4.114)$$

O cálculo é análogo ao do caso invariante de Lorentz, (vide Apêndice A.1). Temos como resultado parcial,

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^2}{2} \sum_r \overline{\epsilon_\mu^{(r)}(q) \epsilon_\nu^{(r)*}(q)} (-8p^\mu p^\nu + 4p^\mu q^\nu + 4p^\nu q^\mu - 4p_\alpha q^\alpha \eta^{\mu\nu}). \quad (4.115)$$

A diferença substancial do caso convencional é que, nesse modelo, a eletrodinâmica é modificada pelo termo isotrópico $\tilde{\kappa}_{\text{tr}}$. Isso gera consequências sobre os vetores de polarização. A soma sobre todas as polarizações, para o caso da eletrodinâmica isotrópica, foi derivada na seção anterior (4.71) e, como resultado, temos a seguinte regra, quando os tensores de polarização são contraídos com uma expressão invariante de calibre,

$$\sum \epsilon^{(r)\mu}(q) \epsilon^{(r)*\nu}(q) \rightarrow \frac{1}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \left(-\eta^{\mu\nu} + \frac{2\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \xi^\mu \xi^\nu \right), \quad (4.116)$$

onde $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$ é um 4-vetor.

O quadrado do elemento de matriz (4.115), somado sobre todas as polarizações, se torna:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{4e^2}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \left[(p_\mu p^\mu + q_\mu p^\mu) + \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} (-2p^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu - p_\alpha q^\alpha \eta^{\mu\nu}) \xi_\mu \xi_\nu \right], \quad (4.117a)$$

ou ainda, escrevendo explicitamente em termos das componentes dos 4-momentos, $p^\mu = (E_e, \mathbf{p})$, e $q^\mu = (E_\gamma, \mathbf{q})$, temos

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{4e^2}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \left[(m_e^2 + E_\gamma E_e - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) + \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} (-2E_e^2 + E_e E_\gamma + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) \right], \\ \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{4e^2}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \left[(m_e^2 + E_\gamma E_e - |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \cos \theta) + \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} (-2E_e^2 + E_e E_\gamma + |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \cos \theta) \right]. \end{aligned} \quad (4.118)$$

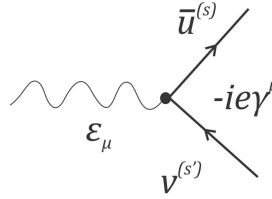
Estamos prontos para calcular a largura de decaimento para o processo $\gamma \rightarrow e^- e^+$, utilizando a regra de ouro de Fermi, discutida no início deste trabalho e o módulo quadrado do elemento de matriz $|\mathcal{M}(\gamma \rightarrow e^- e^+)|^2$,

$$\Gamma = \frac{1}{2E_\gamma} \int \overline{|\mathcal{M}|^2} d\Pi_2, \quad (4.119)$$

onde $d\Pi_2$ é o elemento infinitesimal do espaço de fase. Escrevendo-o explicitamente, temos

$$\Gamma = \frac{1}{2E_\gamma} \iint \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{e^-}} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{e^+}} (2\pi)^4 \delta^4 \left(q - \sum_i p_i \right) \overline{|\mathcal{M}|^2}, \quad (4.120)$$

Figura 21 – Diagrama de Feynman para o decaimento do fóton



onde q é o 4-momento do fóton inicial $q = (E_\gamma, \mathbf{q})$. Os 4-momentos $p_{e^-} = (E_{e^-}, \mathbf{p})$ e $p_{e^+} = (E_{e^+}, \mathbf{k})$ pertencem ao elétron e pósitron, respectivamente.

$$\Gamma = \frac{1}{2E_\gamma} \iint \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{e^-}} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{e^+}} (2\pi)^4 \delta^4(q - p_{e^-} - p_{e^+}) \overline{|\mathcal{M}|^2}. \quad (4.121)$$

A parte espacial da função delta 4-dimensional pode ser usada para calcular a integral nas variáveis $\mathbf{k}$, resultando em apenas uma integral,

$$\frac{1}{2E_\gamma} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{e^-}} \frac{1}{2E_{e^+}} \overline{|\mathcal{M}|^2} (2\pi) \delta(E_\gamma - E_{e^-} - E_{e^+}). \quad (4.122)$$

Lembre-se que os cálculos são realizados no referencial isotrópico, onde temos as relações,

$$E_{e^+} = \sqrt{\mathbf{q}^2 + \mathbf{p}^2 - 2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|\cos\theta} + m_e^2, \quad (4.123)$$

$$E_{e^-} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_e^2}, \quad (4.124)$$

$$E_\gamma = \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}} |\mathbf{q}|. \quad (4.125)$$

A integração nas variáveis $\mathbf{p}$ podem ser feitas tomando o sistema de coordenada ilustrado na Figura 11.

A integração em ϕ é trivial. A integral em θ , por outro lado, pode ser calculada usando a função delta. Observe que podemos reescrever a função delta de maneira mais conveniente,

$$\delta(E_\gamma - E_1 - E_2) = \frac{E_{e^+}}{|\mathbf{p}||\mathbf{q}|\sin\theta_0} \delta(\theta - \theta_0), \quad (4.126)$$

onde θ_0 é o valor que anula o argumento da delta, do lado esquerdo da igualdade acima. Esse valor é, precisamente, dado por (4.96). Temos assim,

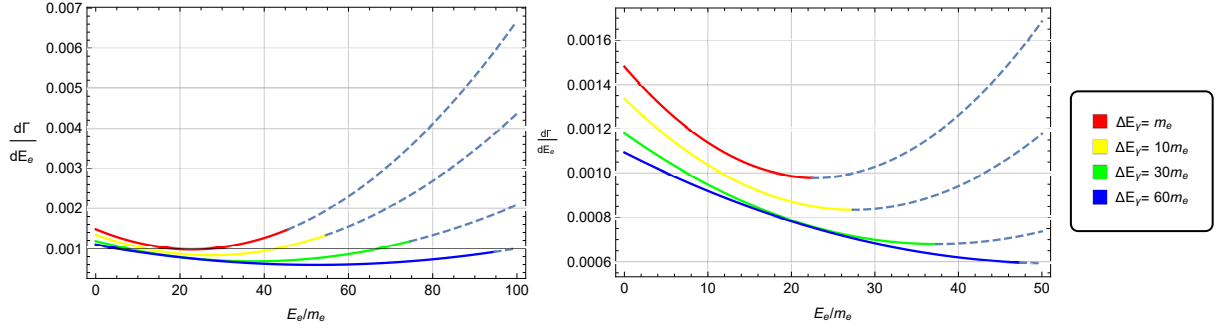
$$\Gamma = \frac{1}{4\pi E_\gamma} \int \frac{1}{2E_{e^-}} \frac{1}{2E_{e^+}} \overline{|\mathcal{M}|^2} \frac{E_{e^+}}{|\mathbf{p}||\mathbf{q}|\sin\theta_0} \delta(\theta - \theta_0) |\mathbf{p}|^2 \sin\theta d|\mathbf{p}| d\theta, \quad (4.127)$$

ou ainda,

$$\Gamma = \int \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2} \Big|_{\theta=\theta_0}}{16\pi |\mathbf{q}| E_\gamma \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_e^2}} |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|. \quad (4.128)$$

A função que compõe o integrando é conhecida como taxa de decaimento parcial. Contudo, é mais conveniente escrevê-la explicitamente, em termos da energia, ao invés do momento linear.

Figura 22 – Taxa de decaimento parcial



Plot da taxa de decaimento parcial em relação à energia do elétron remanescente, normalizada pela sua própria massa, para vários excessos da energia mínima do fóton. O comportamento de $d\Gamma/dE_e$ se assemelha à uma parábola. A linha contínua no gráfico da esquerda indica a região onde $d\Gamma/dE_e$ é bem definida, uma vez que, para uma energia inicial E_γ , deve-se ter, por conservação, $E_e < E_\gamma$. O gráfico da direita é o mesmo que o da esquerda, porém, com seu intervalo reduzido pela metade $[0, E_\gamma/2]$. Foram escolhidos os valores, $e^2/4\pi = 1$ e $\tilde{\kappa}_{\text{tr}} = -10^{-3}$ em ambos os gráficos.

Para isso, note que podemos usar a regra da cadeia,

$$\frac{d\Gamma}{d|\mathbf{p}|} = \frac{dE_e}{dp} \frac{d\Gamma}{dE_e}, \quad (4.129)$$

de tal maneira que,

$$\frac{d\Gamma}{dE_e} = \frac{|\mathcal{M}(\gamma \rightarrow e^- e^+)|^2}{16\pi E_\gamma |\mathbf{q}|}. \quad (4.130)$$

Substituindo, explicitamente, o elemento de matriz $\mathcal{M}(\gamma \rightarrow e^- e^+)$, dado por (4.118),

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dE_e} &= \frac{1}{4\pi E_\gamma |\mathbf{q}|} \frac{e^2}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \\ &\times \left[(m_e^2 + E_\gamma E_e - |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \cos \theta_0) + \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} (-2E_e^2 + E_e E_\gamma + |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \cos \theta_0) \right]. \end{aligned}$$

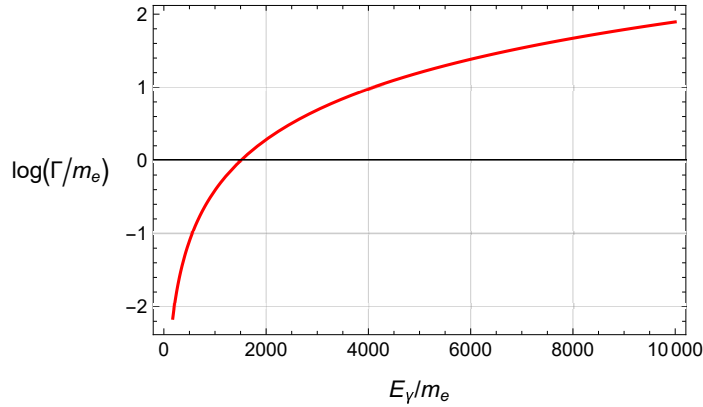
É possível reescrever a taxa de decaimento parcial em termos das energias do fóton inicial e elétron final. Para isso, reescrevemos $\cos \theta_0$ em termos da energia, usando as relações de dispersão (4.124) e (4.125). A taxa de decaimento é, portanto,

$$\frac{d\Gamma}{dE_e} = \frac{e^2}{4\pi} \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}} \frac{1}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \left[\frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \left(2 \frac{E_e}{E_\gamma} - 2 \frac{E_e^2}{E_\gamma^2} + \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \right) + \frac{m_e^2}{E_\gamma^2} - \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \right]. \quad (4.131)$$

Podemos plotar um gráfico para diversos valores de ΔE_γ , onde este é o excesso da energia mínima para o processo ocorrer. A largura de decaimento total é obtida da integração direta de (4.128). Os cálculos detalhados podem ser vistos no Apêndice C.3. Como resultado, temos

$$\Gamma = \frac{e^2}{4\pi} N_0(\tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \left[\left(\frac{m_e^2}{E_\gamma^2} - \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \right) \Delta E_e^{(1)} + \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \left(\frac{\Delta E_e^{(2)}}{E_\gamma} - \frac{2}{3} \frac{\Delta E_e^{(3)}}{E_\gamma^2} \right) \right]. \quad (4.132)$$

Figura 23 – Taxa de decaimento total



O plot do comportamento, na taxa de decaimento, em relação à energia inicial do fóton. Note que a largura de decaimento Γ vai à zero para a energia do fóton, aproximando-se da energia mínima. Portanto, o $\log(\Gamma/m_e) \rightarrow -\infty$. Foram escolhidos os valores $e^2/4\pi = 1$ e $\tilde{\kappa}_{\text{tr}} = -10^{-3}$.

onde o termo $\Delta E_e^{(1)}$ indica a diferença entre a energia máxima e mínima do elétron, assim como $\Delta E_e^{(2)}$ a diferença do quadrado das energias e $\Delta E_e^{(3)}$ a diferença do cubo⁹,

$$\Delta E_e^{(1)} \equiv \sqrt{|\mathbf{p}|_{\text{max}}^2 + m_e^2} - \sqrt{|\mathbf{p}|_{\text{min}}^2 + m_e^2}. \quad (4.133)$$

$$\Delta E_e^{(2)} \equiv |\mathbf{p}|_{\text{max}}^2 - |\mathbf{p}|_{\text{min}}^2, \quad (4.134)$$

$$\Delta E_e^{(3)} \equiv (|\mathbf{p}|_{\text{max}}^2 + m_e^2)^{3/2} - (|\mathbf{p}|_{\text{min}}^2 + m_e^2)^{3/2}. \quad (4.135)$$

O termo $N_0(\tilde{\kappa}_{\text{tr}})$ depende do fator de quebra e sua definição pode ser consultada no Apêndice C.3. A taxa de decaimento, como função da energia do fóton inicial, foi plotada e pode ser observada no gráfico 23.

4.2.5 Limite para o parâmetro de violação isotrópico

Nesta breve seção, iremos comparar os dados experimentais mais recentes, com o intuito de obter um limite inferior para o parâmetro $\tilde{\kappa}_{\text{tr}}$. O decaimento de fótons é um processo exótico e sua previsão teórica se dá apenas em altas energias. A busca por fótons de energias extremas é um ramo muito movimentado e de intensa pesquisa entre astrônomos e físicos [80, 81, 82].

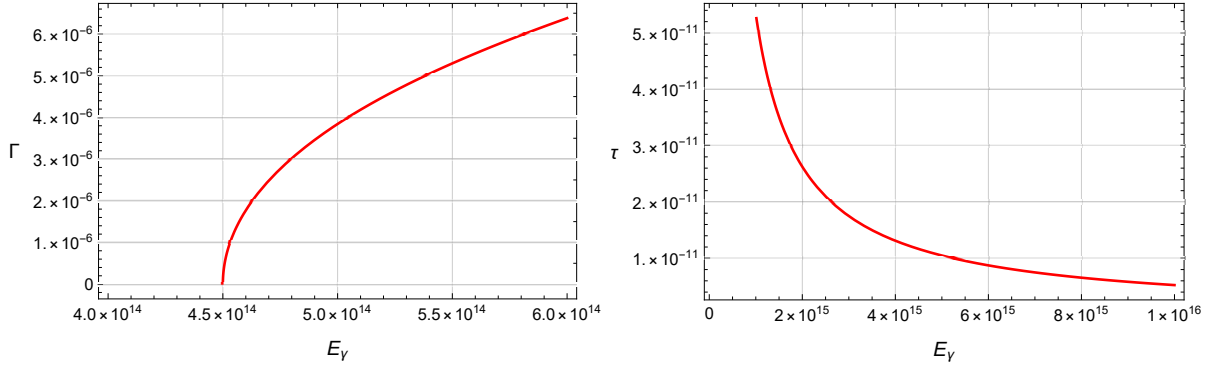
Até o momento não se tem uma prova experimental do decaimento de fótons. Por conseguinte, todo e qualquer fóton já aferido em laboratório possui energia E_γ menor que a mínima [81], derivada anteriormente na equação (4.88),

$$E_\gamma < E_{\text{min}}. \quad (4.136)$$

A desigualdade acima pode ser usada para obter limites para o coeficiente isotrópico.

⁹ Escrevendo os Γ em termos de $\Delta E_e^{(1)}$, $\Delta E_e^{(2)}$ e $\Delta E_e^{(3)}$ fica claro que a taxa de decaimento tem a dimensão correta, em unidades fundamentais.

Figura 24 – Taxa de decaimento e tempo de vida



O gráfico à esquerda é o plot da taxa de decaimento total para o caso onde $\tilde{\kappa}_{\text{tr}} = 2.6 \times 10^{-18}$. Já o gráfico da direita é o plot do tempo de vida do fóton modificado para o mesmo valor de $\tilde{\kappa}_{\text{tr}}$.

No ano de 2020 foram datados, pela colaboração *Tibet ASγ Collaboration*, fótons com as maiores energias já registradas [81], onde foram medidos fótons de energias $E_\gamma = 450 \text{ TeV}$. Assim, podemos obter um limite inferior diretamente dos dados experimentais,

$$\tilde{\kappa}_{\text{tr}} \gtrsim -2,6 \times 10^{-18}. \quad (4.137)$$

É possível obter o tempo de decaimento para um fóton usando o limite obtido acima através da relação,

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}. \quad (4.138)$$

A título de ilustração, podemos imaginar que fótons com o dobro de energia dos fótons detectados pela colaboração *Tibet ASγ Collaboration* teriam um tempo de vida de $\tau = 6 \times 10^{-11} \text{ s}$, percorrendo uma distância total de 18 centímetros. Dessa forma, fica claro que fótons modificados decairiam de maneira muito rápida de tal maneira que a eficiência do processo seria alta.

Um estudo recente [83] obteve um limite inferior menor para o coeficiente isotrópico,

$$\tilde{\kappa}_{\text{tr}} > -6 \times 10^{-21}. \quad (4.139)$$

O coeficiente $\tilde{\kappa}_{\text{tr}}$ pode ainda admitir valores positivos. No entanto, nesse caso, o decaimento de fóton não ocorre. Em seu lugar, um outro efeito não-comum chamado de radiação de Cherenkov no vácuo, onde um elétron livre perde energia na forma de um fóton [70].

5 Conclusão

Ao longo deste trabalho, discutimos alguns aspectos teóricos do MPE, usando como ferramenta a teoria de campos. No primeiro capítulo, apresentamos a concepção da Simetria de Lorentz, dando ênfase à como ela está relacionada com a estrutura matemática do espaço-tempo. Comentamos brevemente sobre campos relativísticos, demonstrando como o princípio de mínima ação pode ser utilizado para a obtenção das equações de movimento. Apresentamos uma prova do teorema de Noether para campos relativísticos e, além disso, obtemos uma lei de conservação associada à simetria por translações espaço-temporais, onde a quantidade física conservada foi identificada como tensor energia-momento canônico. Ainda no primeiro capítulo, abordamos sobre o tratamento não-relativístico e relativístico para o decaimento de partículas. Notamos que o decaimento de partículas depende tanto da cinemática, quanto da dinâmica do processo. Foi possível observar que, apesar do elemento de matriz para o decaimento do fóton ser não nulo,

$$|\overline{\mathcal{M}_{\gamma \rightarrow e^- e^+}}|^2 = 4e^2 (p^\mu p_\mu + p_\alpha q^\alpha). \quad (5.1)$$

o volume do espaço de fase assim é, garantindo a estabilidade dos fótons.

O segundo capítulo foi dedicado à uma pequena introdução sobre a quebra da simetria de Lorentz e o MPE. A literatura indica que tal violação é possível em vários cenários da física além do MP, especialmente em cenários de gravitação quântica e teoria de cordas. Seguimos discutindo sobre a diferença entre transformações de observador e partícula. Essa distinção é essencial no entendimento de como a violação se concretiza. No texto, esclarecemos que a violação da simetria de Lorentz nada tem a ver com a invalidade da teoria da Relatividade Especial, mas, com campos de fundo fixos no espaço-tempo, que quebram a simetria de Lorentz perante transformações de partícula.

No terceiro capítulo, focamos nos aspectos clássicos do setor CPT-par de fótons do Modelo Padrão Estendido mínimo, onde estudamos as propriedades básicas dessa teoria de campos. Verificamos uma semelhança com o eletromagnetismo em meios materiais, a começar pelas equações de movimento, que podem ser reescritas em termos de campos auxiliares $\mathbf{D}$ e $\mathbf{H}$ para adquirir uma forma familiar. Discutimos as leis de conservação, direcionando nossa atenção no tensor energia-momento eletromagnético modificado. Percebemos que a conservação desse tensor ainda é uma característica da teoria. Contudo, mostramos que não é possível simetrizar totalmente o tensor $\Theta^{\mu\nu}$. Isso implica em uma distinção entre a densidade de momento e a densidade de fluxo de energia. Ainda no capítulo 3, abordamos soluções do tipo onda plana e mostramos o procedimento para a obtenção das relações de dispersão modificadas da teoria. Por fim, exemplificamos o procedimento com a escolha de um tipo particular de violação e determinamos as relações de dispersão. A existência de novas relações de dispersão possibilita novos efeitos. Verificamos, ao longo do capítulo, a consistência da teoria tomando o limite,

$\kappa_{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow 0$, e alcançando os resultados usuais.

No quarto capítulo, estão os principais resultados deste trabalho. Nele, apresentamos a extensão isotrópica do setor de fótons do MPE. Esse modelo é obtido com a redução dos 19 parâmetros do campo de fundo CPT-par, $(\kappa_F)_{\mu\nu\rho\sigma}$, em apenas um único parâmetro, $\tilde{\kappa}_{tr}$, que controla a violação isotrópica. Determinamos as equações de campo modificadas e discutimos acerca da interpretação adequada para nos livrarmos de problemas de não-causalidade, quando $\tilde{\kappa}_{tr} < 0$. Nesse caso, a onda eletromagnética possui velocidade de grupo maior que a velocidade máxima em que uma partícula massiva pode alcançar (que continua sendo c). Em seguida, fizemos a quantização do campo eletromagnético isotrópico, no calibre de Coulomb, chegando ao conceito de um fóton modificado. Além disso, obtemos os vetores de polarização e a soma sobre todos os tensores de polarização modificados pelo termo isotrópico, $\tilde{\kappa}_{tr}$. Posteriormente, demonstramos a possibilidade do fóton apresentar instabilidade, quando acoplado com campos de férmions do MP. Graças às relações de dispersão modificadas, o decaimento do fóton se torna teoricamente possível, mas, apenas a partir de uma energia mínima,

$$E_{\min} = 2m_e \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{tr}}{2\tilde{\kappa}_{tr}}}, \quad (5.2)$$

ou seja, o fóton pode decair em um par e^-e^+ , apenas quando sua energia, E_γ , é maior que um valor mínimo,

$$E_\gamma > E_{\min}. \quad (5.3)$$

Outras informações sobre a cinemática do processo são obtidas, como o espaço de fase, o ângulo entre o par, e^-e^+ , subjacente do processo e sua dependência com a energia da partícula final E_e ,

$$\cos \alpha = \frac{E_e (E_\gamma - E_e) + \frac{\tilde{\kappa}_{tr}}{1 - \tilde{\kappa}_{tr}} E_\gamma + m_e^2}{\sqrt{[E_e^2 - m_e^2] [(E_\gamma - E_e)^2 - m_e^2]}}, \quad (5.4)$$

para vários valores de excesso de energia ΔE_γ . A taxa de decaimento parcial foi obtida,

$$\frac{d\Gamma}{dE_e} = \frac{\alpha}{(1 + \tilde{\kappa}_{tr})^2 \sqrt{1 - \tilde{\kappa}_{tr}^2} E_\gamma^2} \left\{ (1 - \tilde{\kappa}_{tr}) [2\tilde{\kappa}_{tr} E_e (E_\gamma - E_e) + (1 + \tilde{\kappa}_{tr}) m_e^2] - \tilde{\kappa}_{tr} E_\gamma^2 \right\}, \quad (5.5)$$

e seu comportamento para vários valores de ΔE_γ também foi obtido e ilustrado no gráfico da Figura 22. A taxa de decaimento total foi calculada explicitamente e obtemos sua dependência em relação a energia do fóton inicial. Observamos um comportamento crescente (Figura 23) o que indica que o decaimento do fóton deve ocorrer de maneira muito rápida em altas energias. Por fim, obtemos, através de dados recentes, um limite para o coeficiente de controle isotrópico, $\tilde{\kappa}_{tr}$.

O desenvolvimento feito neste trabalho abre a possibilidade para a análise do decaimento de fótons em outros modelos de violação da simetria de Lorentz, como a violação vetorial, onde admitimos que o espaço-tempo possui direções privilegiadas. Podemos assim, conseguir limites para outros setores do MPE.

Uma análise em laboratórios terrestres pode ser de muita importância para o estudo de violações da simetria de Lorentz, pois é possível obter resultados experimentais muito precisos. Nesse sentido, uma análise do decaimento de fótons em aceleradores de partículas pode obter resultados interessantes. Estamos em colaboração com pesquisadores do CERN, na análise do decaimento de fótons de um ponto de vista experimental, onde os resultados obtidos neste trabalho serão utilizados para estudar o decaimento de fótons no LHC, o maior acelerador de partículas já construído.

Uma outra extensão muito interessante, para esse trabalho, seria uma interseção com a astrofísica, na análise da estabilidade de estrelas, uma vez que a pressão da radiação eletromagnética tem um papel fundamental nessa estabilidade. No entanto, esse tipo de investigação é mais complexa, pois devemos considerar um gás de fótons, além de levar em consideração efeitos gravitacionais.

O decaimento de fótons se torna possível apenas em altíssimas energias. Nessa escala de energia, processos eletrofracos podem influenciar o decaimento. Assim, processos análogos ao decaimento do fóton podem ser investigado em outros setores do MPE, como o setor eletrofraco ou no setor de quarks.

Referências

- [1] Albert A Michelson and Edward W Morley. Lviii. on the relative motion of the earth an the luminiferous æther. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 24(151):449–463, 1887.
- [2] Albert Einstein et al. On the electrodynamics of moving bodies. *Annalen der physik*, 17(10):891–921, 1905.
- [3] Isaac Newton and NW Chittenden. *Newton’s principia: The mathematical principles of natural philosophy*. Geo. P. Putnam, 1850.
- [4] Paul Adrien Maurice Dirac. The quantum theory of the emission and absorption of radiation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 114(767):243–265, 1927.
- [5] Paul Adrien Maurice Dirac. *The principles of quantum mechanics*. Number 27. Oxford university press, 1981.
- [6] Carl D. Anderson. The the positron*. *Nature*, 133(767):313–316, 1934.
- [7] A. Lesov. The weak force: From fermi to feynman, 2009.
- [8] Bernie Hobbs. The standard model of particle physics is brilliant and completely flawed. <https://www.abc.net.au/news/science/2017-07-15/the-standard-model-of-particle-physics-explained/7670338>.
- [9] Guido Altarelli. The higgs and the excessive success of the standard model. *arXiv preprint arXiv:1407.2122*, 2014.
- [10] John R. Ellis. Limits of the standard model. In *PSI Zuoz Summer School on Exploring the Limits of the Standard Model*, 11 2002.
- [11] Carlo Rovelli. Loop quantum gravity. *Living Reviews in Relativity*, 1(1), Jan 1998.
- [12] Giampiero Esposito. An introduction to quantum gravity, 2011.
- [13] V. Alan Kostelecký and Robertus Potting. Cpt, strings, and meson factories. *Phys. Rev. D*, 1995.
- [14] V. Alan Kostelecky and R.Potting. Expectation values, lorentz invariance, and cpt in the open bosonic string. *Physics Letters B*, 1996.
- [15] M. Hayakawa. Perturbative analysis on infrared aspects of noncommutative qed on r4. *Physics Letters B*, 2000.

- [16] R. Lehnert. Theoretical topics in spacetime-symmetry violations. *CPT and Lorentz Symmetry*, 2008.
- [17] T. G. Pavlopoulos. Breakdown of lorentz invariance. *Phys. Rev.*, 1967.
- [18] V. Alan Kostelecký and Stuart Samuel. Spontaneous Breaking of Lorentz Symmetry in String Theory. *Phys. Rev. D*, 1989.
- [19] Don Colladay and V. Kostelecký. Lorentz-violating extension of the standard model. *Physical Review D*, 1998.
- [20] V. Alan Kostelecký and Matthew Mewes. Electrodynamics with lorentz-violating operators of arbitrary dimension. *Phys. Rev. D*, 80:015020, Jul 2009.
- [21] V. Alan Kostelecký and Matthew Mewes. Neutrinos with lorentz-violating operators of arbitrary dimension. *Phys. Rev. D*, 85:096005, May 2012.
- [22] V. Alan Kostelecký and Matthew Mewes. Fermions with lorentz-violating operators of arbitrary dimension. *Phys. Rev. D*, 88:096006, Nov 2013.
- [23] Yunhua Ding and V. Alan Kostelecký. Lorentz-violating spinor electrodynamics and penning traps. *Phys. Rev. D*, 94:056008, Sep 2016.
- [24] V. Alan Kostelecký and Zonghao Li. Gauge field theories with lorentz-violating operators of arbitrary dimension. *Phys. Rev. D*, 99:056016, Mar 2019.
- [25] V. Alan Kostelecký and Zonghao Li. Backgrounds in gravitational effective field theory. *Phys. Rev. D*, 103:024059, Jan 2021.
- [26] V. Alan Kostelecký. Gravity, lorentz violation, and the standard model. *Phys. Rev. D*, 69:105009, May 2004.
- [27] Robert C. Myers and Maxim Pospelov. Ultraviolet modifications of dispersion relations in effective field theory. *Physical Review Letters*, 90(21), May 2003.
- [28] Ted Jacobson, Stefano Liberati, and David Mattingly. Lorentz violation at high energy: Concepts, phenomena, and astrophysical constraints. *Annals of Physics*, 321(1):150?196, Jan 2006.
- [29] V. Alan Kostelecký and Neil Russell. Data tables for lorentz and *cpt* violation. *Rev. Mod. Phys.*, 2011.
- [30] Manfredo P Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated second edition*. Courier Dover Publications, 2016.
- [31] Manoel M. Ferreira. Grupo de Lorentz. *Departamento de Física da UFMA*, 2019.

- [32] Alexander Altland and Ben D Simons. *Condensed matter field theory*. Cambridge university press, 2010.
- [33] Michael Peskin. *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.
- [34] Nivaldo A Lemos. *Mecânica analítica*. Editora Livraria da Física, 2007.
- [35] Mark Thomson. *Modern particle physics*. Cambridge University Press, 2013.
- [36] Gaetano Fiore and Giovanni Modanese. General properties of the decay amplitudes for massless particles. *Nuclear Physics B*, 477(3):623–651, 1996.
- [37] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009.
- [38] Steven Weinberg. *Cosmology*. Oxford university press, 2008.
- [39] Eveling M.C. Diniz. Estudo de soluções cosmológicas em um modelo de quintessência no espaço de fases. *Universidade Federal do Maranhão-UFMA*, 2020.
- [40] M. Davis. What is the cosmic web? <https://bigthink.com/surprising-science/cosmic-web>.
- [41] Thamyras Fernandes. Ventos solares podem afetar telecomunicações a partir de hoje. <https://segredosdomundo.r7.com/ventos-solares-podem-afetar-telecomunicacoes-partir-de-hoje/>.
- [42] Anne Marie Helmenstine. Atomic mass definition: Atomic weight. what is atomic mass? <https://www.thoughtco.com/definition-of-atomic-mass-weight-604375>.
- [43] Quarks. <https://www.wikiwand.com/pt/Quark>.
- [44] Quantum foam. http://www.geocities.ws/quantum_00_2000/relativity/quantumfoam.html.
- [45] Djuna Croon, Tomás E. Gonzalo, Lukas Graf, Nejc Kosnik, and Graham White. Gut physics in the era of the LHC. *Frontiers in Physics*, 2019.
- [46] B. Abi et al. Prospects for Beyond the Standard Model Physics Searches at the Deep Underground Neutrino Experiment. 2020.
- [47] L. Sokolowski and A. Staruszkiewicz. On the issue of gravitons. *Classical and Quantum Gravity*, 23:5907–5917, 2006.
- [48] B. Greene. *Universo Elegante*. Companhia das Letras, 2001.
- [49] Carlo Rovelli. *Space and time in loop quantum gravity*, 2018.

- [50] Paolo Aschieri, Marija Dimitrijević, Frank Meyer, and Julius Wess. Noncommutative geometry and gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 2006.
- [51] P. Dirac. Is there an aether? *Nature*, 1951.
- [52] Peter R. Phillips. Is the graviton a goldstone boson? *Phys. Rev.*, 1966.
- [53] Kenneth Jr. Nordtvedt and Clifford M. Will. Conservation Laws and Preferred Frames in Relativistic Gravity. II. Experimental Evidence to Rule Out Preferred-Frame Theories of Gravity. *Astrophys. J.*, 1972.
- [54] H.B. Nielsen and I. Picek. Lorentz non-invariance. *Nuclear Physics B*, 1983.
- [55] A. Zee. Perhaps proton decay violates lorentz invariance. *Phys. Rev. D*, 1982.
- [56] V. Alan Kostelecký, Ralf Lehnert, and Malcolm J. Perry. Spacetime-varying couplings and lorentz violation. *Phys. Rev. D*, 2003.
- [57] Orfeu Bertolami, Ralf Lehnert, Robertus Potting, and André Ribeiro. Cosmological acceleration, varying couplings, and lorentz breaking. *Phys. Rev. D*, 2004.
- [58] L. B. Rédei. Validity of special relativity at small distances and the velocity dependence of the muon lifetime. *Phys. Rev.*, 162:1299–1301, Oct 1967.
- [59] David Mattingly. Modern tests of lorentz invariance. *Living Reviews in Relativity*, 8(1), Sep 2005.
- [60] Masud Chaichian, Alexander D. Dolgov, Victor A. Novikov, and Anca Tureanu. Cpt violation does not lead to violation of lorentz invariance and vice versa. *Physics Letters B*, 699(3):177–180, 2011.
- [61] O. W. Greenberg. *cpt* violation implies violation of lorentz invariance. *Phys. Rev. Lett.*, 89:231602, Nov 2002.
- [62] Sean M Carroll, George B Field, and Roman Jackiw. Limits on a lorentz-and parity-violating modification of electrodynamics. *Physical Review D*, 41(4):1231, 1990.
- [63] H. Belich, T. Costa-Soares, M.A. Santos, and M.T.D. Orlando. Violação da simetria de Lorentz. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 2007.
- [64] Robert Bluhm, V. Alan Kostelecký, Charles D. Lane, and Neil Russell. Clock-comparison tests of lorentz and *CPT* symmetry in space. *Phys. Rev. Lett.*, 2002.
- [65] Robert Bluhm, V. Alan Kostelecký, Charles D. Lane, and Neil Russell. Probing lorentz and *CPT* violation with space-based experiments. *Phys. Rev. D*, 2003.

- [66] V. Alan Kostelecký and Matthew Mewes. Signals for lorentz violation in electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 2002.
- [67] Quentin G Bailey and V Alan Kostelecký. Lorentz-violating electrostatics and magnetostatics. *Physical Review D*, 2004.
- [68] John David Jackson. Classical electrodynamics. *John Wiley And Sons*, 1999.
- [69] N Pfeifer Robert, Timo A Nieminen, Norman R Heckenberg, and Halina Rubinsztein-Dunlop. Momentum of an electromagnetic wave in dielectric media. *Rev. Mod. Phys*, 2007.
- [70] F. R. Klinkhamer and M. Schreck. New two-sided bound on the isotropic lorentz-violating parameter of modified maxwell theory. *Phys. Rev. D*, 78:085026, Oct 2008.
- [71] Michael A. Hohensee, Ralf Lehnert, David F. Phillips, and Ronald L. Walsworth. Limits on isotropic Lorentz violation in QED from collider physics. *Phys. Rev. D*, 80:036010, 2009.
- [72] V. Vasileiou, A. Jacholkowska, F. Piron, J. Bolmont, C. Couturier, J. Granot, F. W. Stecker, J. Cohen-Tanugi, and F. Longo. Constraints on lorentz invariance violation from fermi-large area telescope observations of gamma-ray bursts. *Phys. Rev. D*, 87:122001, Jun 2013.
- [73] J. S. Díaz and F. R. Klinkhamer. Parton-model calculation of a nonstandard decay process in isotropic modified maxwell theory. *Phys. Rev. D*, 92:025007, Jul 2015.
- [74] F.R. Klinkhamer and M. Schreck. Consistency of isotropic modified maxwell theory: Microcausality and unitarity. *Nuclear Physics B*, 848(1):90–107, 2011.
- [75] Walter Greiner and Joachim Reinhardt. *Field quantization*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [76] Marco Schreck. Teoria Quântica de Campos. *Departamento de Física da UFMA*, 2019.
- [77] Jo ao Barcelos Neto. *Teoria de Campos e a Natureza - Parte Quântica*. Editora Livraria da Física, 2017.
- [78] Kurt Gottfried. *Quantum mechanics: fundamentals*. CRC Press, 2018.
- [79] M. Schreck. Vacuum cherenkov radiation for lorentz-violating fermions, 2019.
- [80] H Abdalla, R Adam, F Aharonian, F Ait Benkhali, EO Angüner, M Arakawa, C Arcaro, C Armand, H Ashkar, M Backes, et al. A very-high-energy component deep in the γ -ray burst afterglow. *Nature*, 575(7783):464–467, 2019.
- [81] M. et al. Amenomori. First detection of sub-pev diffuse gamma rays from the galactic disk: Evidence for ubiquitous galactic cosmic rays beyond pev energies. *Phys. Rev. Lett.*, 126:141101, Apr 2021.

- [82] Magic Collaboration et al. Teraelectronvolt emission from the γ -ray burst grb 190114c. *Nature*, 575(455-458):2006–07249, 2019.
- [83] Fabian Duenkel, Marcus Niechciol, and Markus Risse. Photon decay in ultrahigh-energy air showers: Stringent bound on lorentz violation. *Physical Review D*, 104(1), Jul 2021.
- [84] Rodolfo Casana, Manoel M. Ferreira, Letícia Lisboa-Santos, Frederico E. P. dos Santos, and Marco Schreck. Maxwell electrodynamics modified by *cpt*-even and lorentz-violating dimension-6 higher-derivative terms. *Phys. Rev. D*, 97:115043, Jun 2018.
- [85] Manoel M. Ferreira, Letícia Lisboa-Santos, Roberto V. Maluf, and Marco Schreck. Maxwell electrodynamics modified by a *cpt*-odd dimension-five higher-derivative term. *Phys. Rev. D*, 100:055036, Sep 2019.
- [86] Rodolfo Casana, Manoel M. Ferreira, Adalto R. Gomes, and Frederico E. P. dos Santos. Feynman propagator for the nonbirefringent *cpt*-even electrodynamics of the standard model extension. *Phys. Rev. D*, 82:125006, Dec 2010.
- [87] Jiaxing Zhao, Shuzhe Shi, and Pengfei Zhuang. Fully-heavy tetraquarks in a strongly interacting medium. *Phys. Rev. D*, 102:114001, Dec 2020.

APÊNDICE A – Cálculos Estendidos

Capítulo 1

A.1 Cálculo de $\mathcal{M}(\gamma \rightarrow e^- e^+)$

Vamos calcular a amplitude do processo $\gamma \rightarrow e^- e^+$. Para isso, vamos usar as regras de Feynman [33] e nos restringir apenas à contribuição de primeira ordem que é descrita pelo diagrama da Figura 21. Vamos definir o 4-momento do fóton como sendo, simplesmente, $q \equiv q^\mu$, e o 4-momento do pósitron, $p'^\mu \equiv p' = q - p$. A amplitude é dada por,

$$i\mathcal{M} = -ie\epsilon_\mu^{(r)}(q) \bar{u}^{(s)}(p) \gamma^\mu v^{(s')}(p'), \quad (\text{A.1})$$

com $\epsilon_\mu^{(r)}(q)$ representado a solução livre de um fóton e $\bar{u}^{(s)}(p)$, $v^{(s')}(p')$ representando os espiniores do elétron e pósitron, respectivamente.

O conjugado de (A.1) é:

$$-i\mathcal{M}^* = ie\epsilon_\mu^{(r)*}(q) \left[\bar{u}^{(s)}(p) \gamma^\mu v^{(s')}(p') \right]^*, \quad (\text{A.2})$$

com,

$$\begin{aligned} \left[\bar{u}^{(s)}(p) \gamma^\mu v^{(s')}(p') \right]^* &= \left[\bar{u}^{(s)}(p) \gamma^\mu v^{(s')}(p') \right]^\dagger = v^{(s')\dagger}(p') \gamma^{\mu\dagger} \bar{u}^{(s)\dagger}(p), \\ &= \underbrace{v^{(s')\dagger}(p') \gamma^0}_{=\bar{v}} \gamma^\mu \underbrace{\gamma^0 \bar{u}^{(s)\dagger}(p)}_{=u} = \bar{v}^{(s')} \gamma^{\mu\dagger} u^{(s)}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Então,

$$-i\mathcal{M}^* = ie\epsilon_\mu^{(r)*}(q) \bar{v}^{(s')}(p') \gamma^\mu u^{(s)}(p), \quad (\text{A.4})$$

ou seja,

$$|\mathcal{M}|^2 = e^2 \epsilon_\mu^{(r)}(q) \bar{u}^{(s)}(p) \gamma^\mu v^{(s')}(p') \epsilon_\nu^{(r)*}(q) \bar{v}^{(s')}(p') \gamma^\nu u^{(s)}(p). \quad (\text{A.5})$$

Omitindo a dependência nos 4-vetores para clarificar a notação e escrevendo explicitamente os índices espinoriais,

$$|\mathcal{M}|^2 = e^2 \epsilon_\mu^{(r)} \epsilon_\nu^{(r)*} u_d^{(s)} \bar{u}_a^{(s)} \gamma_{ab}^\mu v_b^{(s')} \bar{v}_c^{(s')} \gamma_{cd}^\nu. \quad (\text{A.6})$$

É conveniente calcularmos a média sobre todas as polarizações do fóton inicial, uma vez que, em processos físicos reais, é comum não ter informação prévia sobre a polarização. Devemos ainda somar sobre todas as polarizações do elétron e pósitron.

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = e^2 \left(\frac{1}{2} \sum_r \epsilon_\mu^{(r)} \epsilon_\nu^{(r)*} \right) \left(\sum_s u_d^{(s)} \bar{u}_a^{(s)} \right) \gamma_{ab}^\mu \left(\sum_{s'} v_b^{(s')} \bar{v}_c^{(s')} \right) \gamma_{cd}^\nu. \quad (\text{A.7})$$

Usando as relações de completeza para os espinores [33], temos

$$\begin{aligned}
 |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{e^2}{2} \sum_{\epsilon} \epsilon_{\mu}^{(r)}(q) \epsilon_{\nu}^{(r)*}(q) (\gamma^{\alpha} p_{\alpha} + m)_{da} \gamma_{ab}^{\mu} (\gamma^{\beta} p'_{\beta} - m)_{bc} \gamma_{cd}^{\nu}, \\
 |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{e^2}{2} \sum_{\epsilon} \epsilon_{\mu}^{(r)}(q) \epsilon_{\nu}^{(r)*}(q) (\gamma^{\alpha} p_{\alpha} + m)_{ad} \gamma_{ab}^{\mu} (\gamma^{\beta} p'_{\beta} - m)_{bc} \gamma_{cd}^{\nu}, \\
 |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{e^2}{2} \sum_{\epsilon} \epsilon_{\mu}^{(r)}(q) \epsilon_{\nu}^{(r)*}(q) \text{Tr} [(\gamma^{\alpha} p_{\alpha} + m) \gamma^{\mu} (\gamma^{\beta} p'_{\beta} - m) \gamma^{\nu}], \\
 |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{e^2}{2} \sum_{\epsilon} \epsilon_{\mu}^{(r)}(q) \epsilon_{\nu}^{(r)*}(q) \text{Tr} [(\gamma^{\alpha} p_{\alpha} \gamma^{\mu} + m \gamma^{\mu}) (\gamma^{\beta} p'_{\beta} \gamma^{\nu} - m \gamma^{\nu})], \\
 |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{e^2}{2} \sum_{\epsilon} \epsilon_{\mu}^{(r)}(q) \epsilon_{\nu}^{(r)*}(q) \\
 &\quad \times \text{Tr} [(\gamma^{\alpha} p_{\alpha} \gamma^{\mu} \gamma^{\beta} p'_{\beta} \gamma^{\nu} + m \gamma^{\mu} \gamma^{\beta} p'_{\beta} \gamma^{\nu} - \gamma^{\alpha} p_{\alpha} \gamma^{\mu} m \gamma^{\nu} - m^2 \gamma^{\mu} \gamma^{\nu})] \quad (\text{A.8})
 \end{aligned}$$

O traço é um operador linear. Assim, vale

$$\begin{aligned}
 |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{e^2}{2} \sum_{\epsilon} \epsilon_{\mu}^{(r)}(q) \epsilon_{\nu}^{(r)*}(q) \left\{ \underbrace{\text{Tr} [\gamma^{\alpha} p_{\alpha} \gamma^{\mu} \gamma^{\beta} p'_{\beta} \gamma^{\nu}]}_{(I)} + m \underbrace{\text{Tr} [\gamma^{\mu} \gamma^{\beta} p'_{\beta} \gamma^{\nu}]}_{(II)} \right\} \\
 &\quad - \frac{e^2}{2} \sum_{\epsilon} \epsilon_{\mu}^{(r)}(q) \epsilon_{\nu}^{(r)*}(q) \left\{ m \underbrace{\text{Tr} (\gamma^{\alpha} p_{\alpha} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu})}_{(III)} + m^2 \underbrace{\text{Tr} [\gamma^{\mu} \gamma^{\nu}]}_{(IV)} \right\}. \quad (\text{A.9})
 \end{aligned}$$

Usando as identidades encontradas [33], podemos calcular termo a termo,

$$\begin{aligned}
 (I) &= p_{\alpha} p'_{\beta} \text{Tr} [\gamma^{\alpha} \gamma^{\mu} \gamma^{\beta} \gamma^{\nu}] = p_{\alpha} p'_{\beta} 4 (\eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} - \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} + \eta^{\alpha\nu} \eta^{\mu\beta}), \\
 (I) &= 4 (p_{\alpha} p'_{\beta} \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} - p_{\alpha} p'_{\beta} \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} + p_{\alpha} p'_{\beta} \eta^{\alpha\nu} \eta^{\mu\beta}), \\
 (I) &= 4 (p^{\mu} p'^{\nu} - p_{\alpha} p'^{\alpha} \eta^{\mu\nu} + p^{\nu} p'^{\mu}). \quad (\text{A.10})
 \end{aligned}$$

Mas, $k' = q - k$. Assim,

$$\begin{aligned}
 (I) &= 4 (p^{\mu} (q^{\nu} - p^{\nu}) - p_{\alpha} (q^{\alpha} - p^{\alpha}) \eta^{\mu\nu} + p^{\nu} (q^{\mu} - p^{\mu})), \\
 (I) &= 4 (p^{\mu} q^{\nu} - p^{\mu} p^{\nu} - p_{\alpha} q^{\alpha} \eta^{\mu\nu} + p_{\alpha} p^{\alpha} \eta^{\mu\nu} + p^{\nu} q^{\mu} - p^{\nu} p^{\mu}), \\
 (I) &= 4 (p^{\mu} q^{\nu} + q^{\mu} p^{\nu} - 2p^{\mu} p^{\nu} - p_{\alpha} q^{\alpha} \eta^{\mu\nu} + p_{\alpha} p^{\alpha} \eta^{\mu\nu}). \quad (\text{A.11})
 \end{aligned}$$

O segundo e terceiro termo em (A.9) são nulos, pois, temos o traço de um numero ímpar de matrizes de Dirac. Então,

$$(II) = k'_{\beta} \text{Tr} [\gamma^{\mu} \gamma^{\beta} \gamma^{\nu}] = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$(III) = k_{\alpha} \text{Tr} (\gamma^{\alpha} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu}) = 0. \quad (\text{A.13})$$

Para o quarto termo,

$$(IV) = \text{Tr} [\gamma^{\mu} \gamma^{\nu}] = 4\eta^{\mu\nu}. \quad (\text{A.14})$$

Substituindo os resultados (A.11) e (A.14) em (A.9):

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{e^2}{2} \sum_{\epsilon} \epsilon_{\mu}^{(r)}(q) \epsilon_{\nu}^{(r)*}(q) \\ &\times [4(p^{\mu} q^{\nu} + q^{\mu} p^{\nu} - 2p^{\mu} p^{\nu} - k_{\alpha} q^{\alpha} \eta^{\mu\nu} + p_{\alpha} p^{\alpha} \eta^{\mu\nu}) - 4m^2 \eta^{\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Mas, $k^{\alpha} k_{\alpha} = m^2$. Então,

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{e^2}{2} \sum_{\epsilon} \epsilon_{\mu}^{(r)}(q) \epsilon_{\nu}^{(r)*}(q) (4p^{\mu} q^{\nu} + 4q^{\mu} p^{\nu} - 8p^{\mu} p^{\nu} - 4p_{\alpha} q^{\alpha} \eta^{\mu\nu}), \\ \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{e^2}{2} \sum_{\epsilon} \epsilon_{\mu}^{(r)}(q) \epsilon_{\nu}^{(r)*}(q) (-8p^{\mu} p^{\nu} + 4p^{\mu} q^{\nu} + 4p^{\nu} q^{\mu} - 4p_{\alpha} q^{\alpha} \eta^{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

A soma sobre todas as polarizações no caso padrão é, simplesmente, dada por

$$\sum_{\epsilon} \epsilon_{\mu}^{(r)}(q) \epsilon_{\nu}^{(r)*}(q) \rightarrow -\eta_{\mu\nu}. \quad (\text{A.17})$$

Então,

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{e^2}{2} \eta_{\mu\nu} (8p^{\mu} p^{\nu} - 4p^{\mu} q^{\nu} - 4p^{\nu} q^{\mu} + 4p_{\alpha} q^{\alpha} \eta^{\mu\nu}), \\ \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{e^2}{2} \left(\underbrace{8p^{\mu} p_{\mu}}_{=m^2} - 4p^{\mu} q_{\mu} - 4p^{\mu} q_{\mu} + 4p_{\alpha} q^{\alpha} \underbrace{\eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu}}_{=4} \right), \\ \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{e^2}{2} (8m^2 - 8p^{\mu} q_{\mu} + 16p_{\alpha} q^{\alpha}). \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Obtemos assim,

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 4e^2 (m^2 + p^{\mu} q_{\mu}), \quad (\text{A.19})$$

onde m é a massa do elétron/pósitron.

APÊNDICE B – Cálculos Estendidos do

Capítulo 2

B.1 Cálculo do tensor canônico $T^{\alpha\beta}$

Vamos calcular explicitamente o termo de derivada com a Lagrangiana contida na equação (3.1). Temos,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A^\lambda)} = \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha A^\lambda)} \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \kappa_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} \right]. \quad (\text{B.1})$$

O primeiro termo é, então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Maxwell}}}{\partial (\partial_\alpha A^\lambda)} &= -\frac{1}{2} (\partial^\alpha A_\lambda + \partial^\alpha A_\lambda - \partial_\lambda A^\alpha - \partial_\lambda A^\alpha), \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Maxwell}}}{\partial (\partial_\alpha A^\lambda)} &= \partial_\lambda A^\alpha - \partial^\alpha A_\lambda = F_\lambda{}^\alpha. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Agora, vamos calcular a contribuição não-invariante de Lorentz. Usando as propriedades do tensor de fundo, $\kappa_{\mu\nu\rho\sigma}$, e do tensor eletromagnético, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{LV}}}{\partial (\partial_\alpha A^\lambda)} &= -\frac{1}{2} \kappa_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha A^\lambda)} (\partial^\mu A^\nu \partial^\rho A^\sigma - \partial^\nu A^\mu \partial^\rho A^\sigma), \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{LV}}}{\partial (\partial_\alpha A^\lambda)} &= -\frac{1}{2} \kappa_{\mu\nu\rho\sigma} \left[\frac{\partial (\partial^\mu A^\nu \partial^\rho A^\sigma)}{\partial (\partial_\alpha A^\lambda)} - \frac{\partial (\partial^\nu A^\mu \partial^\rho A^\sigma)}{\partial (\partial_\alpha A^\lambda)} \right], \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{LV}}}{\partial (\partial_\alpha A^\lambda)} &= -\frac{1}{2} \kappa_{\mu\nu\rho\sigma} \left[\frac{\partial (\partial^\mu A^\nu)}{\partial (\partial_\alpha A^\lambda)} \partial^\rho A^\sigma + \partial^\mu A^\nu \frac{\partial (\partial^\rho A^\sigma)}{\partial (\partial_\alpha A^\lambda)} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \kappa_{\mu\nu\rho\sigma} \left[\frac{\partial (\partial^\nu A^\mu)}{\partial (\partial_\alpha A^\lambda)} \partial^\rho A^\sigma + \partial^\nu A^\mu \frac{\partial (\partial^\rho A^\sigma)}{\partial (\partial_\alpha A^\lambda)} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

ou ainda,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{LV}}}{\partial (\partial_\alpha A^\lambda)} = -\frac{1}{2} [\kappa^\alpha{}_{\lambda\rho\sigma} \partial^\rho A^\sigma + \kappa^\alpha{}_{\lambda\mu\nu} \partial^\mu A^\nu + \kappa^\alpha{}_{\lambda\rho\sigma} \partial^\rho A^\sigma - \kappa^\alpha{}_{\lambda\mu\nu} \partial^\nu A^\mu]. \quad (\text{B.4})$$

Renomeando os índices $\rho\sigma \leftrightarrow \mu\nu$ no 1º e 3º termo e $\mu \leftrightarrow \nu$ no último termo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{LV}}}{\partial (\partial_\alpha A^\lambda)} &= -\frac{1}{2} [2\kappa^\alpha{}_{\lambda\mu\nu} \partial^\mu A^\nu + 2\kappa^\alpha{}_{\lambda\mu\nu} \partial^\mu A^\nu], \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{LV}}}{\partial (\partial_\alpha A^\lambda)} &= -2\kappa^\alpha{}_{\lambda\mu\nu} \partial^\mu A^\nu. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Podemos decompor o tensor $\partial^\mu A^\nu$ em sua parte simétrica e na parte antissimétrica,

$$\partial^\mu A^\nu = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} S^{\mu\nu}, \quad (\text{B.6})$$

ou seja,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{LV}}}{\partial (\partial_\alpha A^\lambda)} = -\kappa^\alpha_{\lambda\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (\text{B.7})$$

Temos, finalmente,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A^\lambda)} = F_\lambda^\alpha - \kappa^\alpha_{\lambda\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (\text{B.8})$$

A partir de (1.52), temos, explicitamente, o tensor canônico. Assim,

$$T^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\gamma} F_{\lambda\gamma} \partial^\beta A^\lambda - \kappa^\alpha_{\lambda\mu\nu} F^{\mu\nu} \partial^\beta A^\lambda - \eta^{\alpha\beta} \mathcal{L}. \quad (\text{B.9})$$

B.2 Simetrizando $T^{\alpha\beta}$

Vamos aplicar o procedimento de simetrização do Tensor Canônico. Para isso, vamos considerar apenas a parte não simétrica do tensor (B.9), que denotaremos por $T_{\text{NS}}^{\alpha\beta}$, ou seja,

$$\begin{aligned} T_{\text{NS}}^{\alpha\beta} &= \eta^{\alpha\gamma} F_{\lambda\gamma} \partial^\beta A^\lambda - \kappa^\alpha_{\lambda\mu\nu} F^{\mu\nu} \partial^\beta A^\lambda, \\ T_{\text{NS}}^{\alpha\beta} &= \eta^{\alpha\gamma} F_{\lambda\gamma} (\partial^\beta A^\lambda - \partial^\lambda A^\beta + \partial^\lambda A^\beta) - \kappa^\alpha_{\lambda\mu\nu} F^{\mu\nu} (\partial^\beta A^\lambda - \partial^\lambda A^\beta + \partial^\lambda A^\beta), \\ T_{\text{NS}}^{\alpha\beta} &= \eta^{\alpha\gamma} F_{\lambda\gamma} F^{\beta\lambda} - \kappa^\alpha_{\lambda\mu\nu} F^{\mu\nu} F^{\beta\lambda} - \kappa^\alpha_{\lambda\mu\nu} F^{\mu\nu} \partial^\lambda A^\beta + \eta^{\alpha\gamma} F_{\lambda\gamma} \partial^\lambda A^\beta, \\ T_{\text{NS}}^{\alpha\beta} &= F_\lambda^\alpha F^{\beta\lambda} - \kappa^\alpha_{\lambda\mu\nu} F^{\mu\nu} F^{\beta\lambda} - \kappa^\alpha_{\lambda\mu\nu} F^{\mu\nu} \partial^\lambda A^\beta + \eta^{\alpha\gamma} F_{\lambda\gamma} \partial^\lambda A^\beta. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Tomando a 4-divergência desse objeto,

$$\begin{aligned} \partial_\alpha T_{\text{NS}}^{\alpha\beta} &= \partial_\alpha (F_\lambda^\alpha F^{\beta\lambda} - \kappa^\alpha_{\lambda\mu\nu} F^{\mu\nu} F^{\beta\lambda}) \\ &\quad - \partial_\alpha (\kappa^\alpha_{\lambda\mu\nu} F^{\mu\nu} \partial^\lambda A^\beta - \eta^{\alpha\gamma} F_{\lambda\gamma} \partial^\lambda A^\beta). \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Observe os dois últimos termos:

$$\begin{aligned} \kappa^\alpha_{\lambda\mu\nu} \partial_\alpha (F^{\mu\nu} \partial^\lambda A^\beta) &= \kappa^\alpha_{\lambda\mu\nu} \partial_\alpha [\partial^\lambda (F^{\mu\nu} A^\beta) - \partial^\lambda F^{\mu\nu} A^\beta], \\ \kappa^\alpha_{\lambda\mu\nu} \partial_\alpha (F^{\mu\nu} \partial^\lambda A^\beta) &= \kappa^\alpha_{\lambda\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\lambda (F^{\mu\nu} A^\beta) - \kappa^\alpha_{\lambda\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\lambda F^{\mu\nu} A^\beta, \\ \kappa^\alpha_{\lambda\mu\nu} \partial_\alpha (F^{\mu\nu} \partial^\lambda A^\beta) &= \kappa_{\alpha\lambda\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\lambda (F^{\mu\nu} A^\beta) - \kappa_{\alpha\lambda\mu\nu} \partial^\alpha (\partial^\lambda F^{\mu\nu} A^\beta). \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

O primeiro termo é nulo, pois, temos a contração de um objeto simétrico nos índices $\alpha\lambda$ com um antissimétrico nos mesmos índices. Portanto,

$$\kappa^\alpha_{\lambda\mu\nu} \partial_\alpha (F^{\mu\nu} \partial^\lambda A^\beta) = -\kappa_{\alpha\lambda\mu\nu} \partial^\alpha (\partial^\lambda F^{\mu\nu} A^\beta). \quad (\text{B.13})$$

De maneira análoga, temos o último termo em (B.11):

$$\partial_\alpha (\eta^{\alpha\gamma} F_{\lambda\gamma} \partial^\lambda A^\beta) = -\partial_\alpha (\partial_\lambda F^{\lambda\alpha} A^\beta). \quad (\text{B.14})$$

Substituindo em (B.11),

$$\begin{aligned} \partial_\alpha T_{\text{NS}}^{\alpha\beta} &= \partial_\alpha (F_\lambda^\alpha F^{\beta\lambda} - \kappa^\alpha_{\lambda\mu\nu} F^{\mu\nu} F^{\beta\lambda}) \\ &\quad + \kappa_{\alpha\lambda\mu\nu} \partial^\alpha (\partial^\lambda F^{\mu\nu} A^\beta) - \partial_\alpha (\partial_\lambda F^{\lambda\alpha} A^\beta). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Note ainda que a equação de movimento garante que a soma dos últimos termos seja nula. Definimos assim, o tensor eletromagnético simetrizado, como:

$$\Theta^{\alpha\beta} = F_\lambda^\alpha F^{\beta\lambda} - \kappa^\alpha_{\lambda\mu\nu} F^{\mu\nu} F^{\beta\lambda} + \frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} \kappa_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}. \quad (\text{B.16})$$

B.3 Cálculo da densidade de Hamiltoniana Θ^{00}

Vamos calcular diretamente a Hamiltoniana da expressão do tensor de energia-momento $\Theta^{\alpha\beta}$. A Hamiltoniana é identificada pela componente puramente temporal. Temos assim,

$$\begin{aligned}
 \Theta_{\text{Maxwell}}^{00} &= -F^{0i} F^0_i + \frac{1}{4} F^{0\nu} F_{0\nu} + \frac{1}{4} F^{i\nu} F_{i\nu}, \\
 \Theta_{\text{Maxwell}}^{00} &= -F^{0i} F^0_i + \frac{1}{4} F^{0i} F_{0i} + \frac{1}{4} F^{i0} F_{i0} + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij}, \\
 \Theta_{\text{Maxwell}}^{00} &= F^{0i} F^{0i} - \frac{1}{2} F^{0i} F^{0i} + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij}, \\
 \Theta_{\text{Maxwell}}^{00} &= F^{0i} F^{0i} - \frac{1}{2} F^{0i} F^{0i} + \frac{1}{4} F^{ij} F^{ij}.
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

Escrevendo em termos dos campos elétricos e magnéticos, pela associação,

$$F^{0i} = -E^i, \tag{B.18}$$

$$F^{ij} = -\epsilon^{ijm} B^m. \tag{B.19}$$

A equação (B.17) se escreve como,

$$\begin{aligned}
 \Theta_{\text{Maxwell}}^{00} &= E^i E^i - \frac{1}{2} E^i E^i + \frac{1}{4} \epsilon^{ijk} \epsilon^{ijm} B^k B^m, \\
 \Theta_{\text{Maxwell}}^{00} &= \frac{1}{2} E^i E^i + \frac{1}{2} B^k B^k, \\
 \Theta_{\text{Maxwell}}^{00} &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2).
 \end{aligned} \tag{B.20}$$

Agora o termo de violação,

$$\Theta_{\text{LV}}^{00} = \underbrace{-\kappa^{\mu\nu 0\lambda} F^0_\lambda F_{\mu\nu}}_{=\Theta_{\text{LV}}^{00(1)}} + \underbrace{\frac{1}{4} \kappa_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}}_{=\Theta_{\text{LV}}^{00(2)}}. \tag{B.21}$$

Vamos calcular os termos separadamente para $\Theta_{\text{LV}}^{00(1)}$. Logo,

$$\begin{aligned}
 \Theta_{\text{LV}}^{00(1)} &= \kappa^{\mu\nu 0\lambda} F^0_\lambda F_{\mu\nu}, \\
 \Theta_{\text{LV}}^{00(1)} &= \kappa^{0\nu 0\lambda} F^0_\lambda F_{0\nu} + \kappa^{i\nu 0\lambda} F^0_\lambda F_{i\nu}, \\
 \Theta_{\text{LV}}^{00(1)} &= \kappa^{0i 0\lambda} F^0_\lambda F_{0i} + \kappa^{i0 0\lambda} F^0_\lambda F_{i0} + \kappa^{ij 0\lambda} F^0_\lambda F_{ij}, \\
 \Theta_{\text{LV}}^{00(1)} &= \kappa^{0i 0j} F^0_j F_{0i} + \kappa^{i0 0j} F^0_j F_{i0} + \kappa^{ij 0k} F^0_k F_{ij}, \\
 \Theta_{\text{LV}}^{00(1)} &= \kappa^{0i 0j} F^{0j} F^{0i} + \kappa^{i0 0j} F^{0j} F^{i0} - \kappa^{ij 0k} F^{0k} F^{ij}, \\
 \Theta_{\text{LV}}^{00(1)} &= 2\kappa^{0i 0j} F^{0j} F^{0i} - \kappa^{ij 0k} F^{0k} F^{ij}, \\
 \Theta_{\text{LV}}^{00(1)} &= 2\kappa^{0i 0j} E^i E^j - \kappa^{0kij} \epsilon^{ijl} E^k B^l.
 \end{aligned} \tag{B.22}$$

Para

$$\Theta_{LV}^{00(2)} = \frac{1}{4} \kappa_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}, \quad (B.23)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{LV}^{00(2)} &= \frac{1}{4} \kappa_{0\nu\rho\sigma} F^{0\nu} F^{\rho\sigma} + \frac{1}{4} \kappa_{i\nu\rho\sigma} F^{i\nu} F^{\rho\sigma}, \\ \Theta_{LV}^{00(2)} &= \frac{1}{2} \kappa_{0i\rho\sigma} F^{0i} F^{\rho\sigma} + \frac{1}{4} \kappa_{ij\rho\sigma} F^{ij} F^{\rho\sigma}, \\ \Theta_{LV}^{00(2)} &= \frac{1}{2} \kappa_{0i0\sigma} F^{0i} F^{0\sigma} + \frac{1}{2} \kappa_{0ij\sigma} F^{0i} F^{j\sigma} + \frac{1}{4} \kappa_{ij0\sigma} F^{ij} F^{0\sigma} + \frac{1}{4} \kappa_{ijk\sigma} F^{ij} F^{k\sigma}, \\ \Theta_{LV}^{00(2)} &= \kappa_{0i0j} F^{0i} F^{0j} + \frac{1}{2} \kappa_{0ijk} F^{0i} F^{jk} + \frac{1}{2} \kappa_{ij0k} F^{ij} F^{0k} + \frac{1}{4} \kappa_{ijkl} F^{ij} F^{kl}. \end{aligned} \quad (B.24)$$

Trocando $k \leftrightarrow i$ no segundo termo, alcançamos

$$\Theta_{LV}^{00(2)} = \kappa_{0i0j} F^{0i} F^{0j} + \kappa_{0ijk} F^{0i} F^{jk} + \frac{1}{4} \kappa_{ijkl} F^{ij} F^{kl}. \quad (B.25)$$

Escrevendo em termos dos campos,

$$\begin{aligned} \Theta_{LV}^{00(2)} &= \kappa_{0i0j} E^i E^j + \kappa_{0ijk} \epsilon^{jkl} E^i B^l + \frac{1}{4} \kappa_{ijkl} \epsilon^{ijn} \epsilon^{klm} B^n B^m, \\ \Theta_{LV}^{00(2)} &= \kappa^{0i0j} E^i E^j - \kappa^{0ijk} \epsilon^{jkl} E^i B^l + \frac{1}{4} \kappa^{ijkl} \epsilon^{ijn} \epsilon^{klm} B^n B^m. \end{aligned} \quad (B.26)$$

Então, podemos reescrever Θ^{00} da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Theta^{00} &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - 2\kappa^{0i0j} E^i E^j + \kappa^{0kij} \epsilon^{ijl} E^k B^l \\ &\quad + \kappa^{0i0j} E^i E^j - \kappa^{0ijk} \epsilon^{jkl} E^i B^l + \frac{1}{4} \kappa^{ijkl} \epsilon^{ijn} \epsilon^{klm} B^n B^m. \end{aligned} \quad (B.27)$$

Os termos cruzados se cancelam, restando apenas

$$\Theta^{00} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - \kappa^{0i0j} E^i E^j + \frac{1}{4} \kappa^{ijkl} \epsilon^{ijm} \epsilon^{klp} B^m B^p. \quad (B.28)$$

Podemos ainda reescrever em termos das matrizes:

$$\kappa^{0i0k} = -\frac{1}{2} (\kappa_{ED})^{ik}, \quad (B.29a)$$

$$\kappa^{0jik} = \frac{1}{2} \epsilon^{ikm} (\kappa_{DB})^{jm}, \quad (B.29b)$$

$$\kappa^{jkil} = \frac{1}{2} \epsilon^{jkp} \epsilon^{ilq} (\kappa_{BH})^{pq}, \quad (B.29c)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \Theta^{00} &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \frac{1}{2} (\kappa_{ED})^{ij} E^i E^j + \frac{1}{8} (\kappa_{BH})^{nq} \underbrace{\epsilon^{ijn} \epsilon^{ijm}}_{=2\delta^{nm}} \underbrace{\epsilon^{klq} \epsilon^{klp}}_{=2\delta^{qp}} B^m B^p, \\ \Theta^{00} &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \frac{1}{2} (\kappa_{ED})^{ij} E^i E^j + \frac{1}{2} (\kappa_{BH})^{nq} B^n B^q. \end{aligned} \quad (B.30)$$

B.4 Cálculo da densidade de momento

A densidade de momento é definida pela componente Θ^{0i} . Então,

$$\begin{aligned}\Theta^{0i} &= -F^{0\lambda} F^i_{\lambda} - \kappa^{\mu\nu 0\lambda} F^i_{\lambda} F_{\mu\nu}, \\ \Theta^{0i} &= -F^{0j} F^i_j - \kappa^{0\nu 0\lambda} F^i_{\lambda} F_{0\nu} - \kappa^{j\nu 0\lambda} F^i_{\lambda} F_{j\nu}, \\ \Theta^{0i} &= -F^{0j} F^i_j - \kappa^{0j0k} F^i_k F_{0j} - \kappa^{j00k} F^i_k F_{j0} - \kappa^{jk0l} F^i_l F_{jk}, \\ \Theta^{0i} &= F^{0j} F^{ij} - \kappa^{0j0k} F^{ik} F^{0j} - \kappa^{j00k} F^{ik} F^{j0} + \kappa^{jk0l} F^{il} F^{jk}.\end{aligned}\quad (\text{B.31})$$

Reescrevendo em termos dos campos físicos,

$$\Theta^{0i} = \epsilon^{ijk} E^j B^k - \kappa^{0j0k} \epsilon^{ikl} B^l E^j - \kappa^{0j0k} \epsilon^{ikl} B^l E^j + \kappa^{0ljk} \epsilon^{ilm} \epsilon^{jkn} B^m B^n. \quad (\text{B.32})$$

Usando as definições (B.29a), (B.29b) e (B.29c), temos que (B.32) fornece,

$$\begin{aligned}\Theta^{0i} &= \epsilon^{ijk} E^j B^k + (\kappa_{ED})^{jk} \epsilon^{ikl} B^l E^j + \frac{1}{2} (\kappa_{DB})^{lp} \underbrace{\epsilon^{jkp} \epsilon^{jkn}}_{=2\delta^{pn}} \epsilon^{ilm} B^m B^n, \\ \Theta^{0i} &= \epsilon^{ijk} E^j B^k + (\kappa_{ED})^{jk} \epsilon^{ikl} B^l E^j + (\kappa_{DB})^{ln} \epsilon^{ilm} B^m B^n.\end{aligned}\quad (\text{B.33})$$

Reescrevendo em notação vetorial explícita,

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_M &= \mathbf{E} \times \mathbf{B} + (\kappa_{ED} \mathbf{E} \times \mathbf{B}) + (\kappa_{DB} \mathbf{B} \times \mathbf{B}), \\ \mathbf{g}_M &= \mathbf{E} \times \mathbf{B} + [\kappa_{ED} \mathbf{E} + (\kappa_{DB} \mathbf{B})] \times \mathbf{B}.\end{aligned}\quad (\text{B.34})$$

Usando os campos auxiliares definidos por (3.23) e (3.24), podemos obter a igualdade,

$$\kappa_{ED} \mathbf{E} + (\kappa_{DB} \mathbf{B}) = \mathbf{D} - \mathbf{E}, \quad (\text{B.35})$$

ou seja,

$$\mathbf{g}_M = \mathbf{D} \times \mathbf{B}. \quad (\text{B.36})$$

B.5 Cálculo do fluxo de densidade de energia

O fluxo de energia é dado pela componente Θ^{i0} , ou seja,

$$\begin{aligned}\Theta^{i0} &= -F^{i\lambda} F^0_{\lambda} - \kappa^{\mu\nu i\lambda} F^0_{\lambda} F_{\mu\nu}, \\ \Theta^{i0} &= -F^{ij} F^0_j - \kappa^{0\nu i\lambda} F^0_{\lambda} F_{0\nu} - \kappa^{j\nu i\lambda} F^0_{\lambda} F_{j\nu}, \\ \Theta^{i0} &= -F^{ij} F^0_j - \kappa^{0jik} F^0_k F_{0j} - \kappa^{j0i\lambda} F^0_{\lambda} F_{j0} - \kappa^{jki\lambda} F^0_{\lambda} F_{jk}, \\ \Theta^{i0} &= -F^{ij} F^0_j - \kappa^{0jik} F^0_k F_{0j} - \kappa^{j0ik} F^0_k F_{j0} - \kappa^{jkil} F^0_l F_{jk}, \\ \Theta^{i0} &= F^{ij} F^{0j} - \kappa^{0jik} F^{0k} F^{0j} - \kappa^{j0ik} F^{0k} F^{j0} + \kappa^{jkil} F^{0l} F^{jk}.\end{aligned}\quad (\text{B.37})$$

Reescrevendo em termos dos campos

$$\Theta^{i0} = \epsilon^{ijk} E^j B^k - 2\kappa^{0jik} E^k E^j + \kappa^{jkil} \epsilon^{jkm} E^l B^m. \quad (\text{B.38})$$

Vamos reescrever em termos das matrizes (B.29a), (B.29b) e (B.29c)

$$\begin{aligned}\Theta^{i0} &= \epsilon^{ijk} E^j B^k - \epsilon^{ikm} E^k (\kappa_{DB})^{mj} E^j + \frac{1}{2} \underbrace{\epsilon^{jkp} \epsilon^{jkm}}_{=2\delta^{pm}} \epsilon^{ilq} (\kappa_{BH})^{pq} E^l B^m, \\ \Theta^{i0} &= \epsilon^{ijk} E^j B^k - \epsilon^{ikm} E^k (\kappa_{DB})^{mj} E^j + \epsilon^{ilq} E^l (\kappa_{BH})^{pq} B^p.\end{aligned}\quad (\text{B.39})$$

Voltando para a notação vetorial,

$$\begin{aligned}\mathbf{g} &= \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times (\kappa_{BH} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times (\kappa_{DB} \cdot \mathbf{E}), \\ \mathbf{g} &= \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times (\kappa_{BH} \cdot \mathbf{B} - \kappa_{DB} \cdot \mathbf{E})\end{aligned}\quad (\text{B.40})$$

Com o auxílio dos campos auxiliares (3.23) e (3.24), é possível obter a seguinte igualdade:

$$\kappa_{HB} \cdot \mathbf{B} - \kappa_{DB} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{H} - \mathbf{B}, \quad (\text{B.41})$$

ou seja,

$$\mathbf{g} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (\text{B.42})$$

B.6 Cálculo do tensor de tensões

O tensor das tensões é dado pelas componentes puramente espaciais de $\Theta^{\alpha\beta}$, ou seja,

$$\Theta^{ij} = -F^{i\lambda} F^j{}_{\lambda} - \frac{1}{4} \delta^{ij} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \kappa^{\mu\nu i\lambda} F^j{}_{\lambda} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \delta^{ij} \kappa_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}, \quad (\text{B.43})$$

onde vamos dividir da seguinte forma:

$$\Theta^{ij} = \Theta_{\text{Maxwell}}^{ij} + \Theta_{\text{LV}}^{ij}. \quad (\text{B.44})$$

O termo de Maxwell é bem conhecido [68]. Temos,

$$\Theta_{\text{Maxwell}}^{ij} = -\frac{1}{4} \left[E^i E^j + B^i B^j - \frac{1}{2} \delta^{ij} (E^2 + B^2) \right]. \quad (\text{B.45})$$

A contribuição não-invariante de Lorentz é:

$$\Theta_{\text{LV}}^{ij} = \underbrace{-\kappa^{\mu\nu i\lambda} F^j{}_{\lambda} F_{\mu\nu}}_{=\Theta_{\text{LV}}^{ij(1)}} - \underbrace{\frac{1}{4} \delta^{ij} \kappa_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}}_{=\Theta_{\text{LV}}^{ij(2)}}. \quad (\text{B.46})$$

Vamos calcular o primeiro termo:

$$\begin{aligned}\Theta_{\text{LV}}^{ij(1)} &= -\kappa^{\mu\nu i\lambda} F^j{}_{\lambda} F_{\mu\nu}, \\ \Theta_{\text{LV}}^{ij(1)} &= -\kappa^{0\nu i\lambda} F^j{}_{\lambda} F_{0\nu} - \kappa^{k\nu i\lambda} F^j{}_{\lambda} F_{k\nu}, \\ \Theta_{\text{LV}}^{ij(1)} &= -\kappa^{0ki\lambda} F^j{}_{\lambda} F_{0k} - \kappa^{k0i\lambda} F^j{}_{\lambda} F_{k0} - \kappa^{kli\lambda} F^j{}_{\lambda} F_{kl}, \\ \Theta_{\text{LV}}^{ij(1)} &= -\kappa^{0ki0} F^j{}_0 F_{0k} - \kappa^{0kil} F^j{}_l F_{0k} - \kappa^{k0i0} F^j{}_0 F_{k0} \\ &\quad - \kappa^{k0il} F^j{}_l F_{k0} - \kappa^{kli0} F^j{}_0 F_{kl} - \kappa^{klim} F^j{}_m F_{kl}, \\ \Theta_{\text{LV}}^{ij(1)} &= \kappa^{0ki0} F^{j0} F^{0k} - \kappa^{0kil} F^{jl} F^{0k} + \kappa^{k0i0} F^{j0} F^{k0} \\ &\quad - \kappa^{k0il} F^{jl} F^{k0} - \kappa^{kli0} F^{j0} F^{kl} + \kappa^{klim} F^{jm} F^{kl}, \\ \Theta_{\text{LV}}^{ij(1)} &= 2\kappa^{0k0i} F^{0j} F^{0k} - 2\kappa^{0kil} F^{jl} F^{0k} - \kappa^{0ikl} F^{0j} F^{kl} + \kappa^{klim} F^{jm} F^{kl}.\end{aligned}$$

Usando as definições (B.29a), (B.29b) e (B.29c) e reescrevendo em termos do campo, temos:

$$\begin{aligned} \Theta_{LV}^{ij(1)} = & -(\kappa_{ED})^{ki} E^j E^k - \underbrace{(\kappa_{DB})^{nk} \epsilon^{nil} \epsilon^{jlm} B^m E^k}_{=I} - \underbrace{\frac{1}{2} (\kappa_{DB})^{in} \epsilon^{nkl} \epsilon^{klm} E^j B^m}_{=II} \\ & + \underbrace{\frac{1}{2} \epsilon^{klq} \epsilon^{imr} \epsilon^{jmn} \epsilon^{klp} (\kappa_{BH})^{qr} B^n B^p}_{=III}. \end{aligned} \quad (B.47)$$

Os termos, separadamente, são:

$$I = -(\kappa_{DB})^{nk} (\delta^{nj} \delta^{im} - \delta^{nm} \delta^{ij}) B^m E^k = -B^i (\kappa_{DB})^{jk} E^k + \delta^{ij} B^n (\kappa_{DB})^{nk} E^k, \quad (B.48)$$

$$II = (\kappa_{DB})^{in} B^n E^j, \quad (B.49)$$

$$III = \frac{1}{2} \epsilon^{klq} \epsilon^{imr} \epsilon^{jmn} \epsilon^{klp} (\kappa_{BH})^{qr} B^n B^p = \delta^{ij} B^p (\kappa_{BH})^{pr} B^r - B^i B^p (\kappa_{BH})^{pj}. \quad (B.50)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Theta_{LV}^{ij(1)} = & -E^k (\kappa_{ED})^{ki} E^j + B^i (\kappa_{DB})^{jk} E^k - \delta^{ij} B^n (\kappa_{DB})^{nk} E^k \\ & - (\kappa_{DB})^{in} B^n E^j + \delta^{ij} B^p (\kappa_{BH})^{pr} B^r - B^i B^p (\kappa_{BH})^{pj} \end{aligned} \quad (B.51)$$

O escalar de Lorentz que multiplica a delta de Kronecker δ^{ij} no segundo termo, em (B.46), já foi calculado em (B.23) e, como resultado, temos (B.26), ou seja,

$$\Theta_{LV}^{ij(2)} = \left(-\kappa^{0k0l} E^k E^l + \kappa^{0klm} \epsilon^{lmn} E^k B^n - \frac{1}{4} \kappa^{klmn} \epsilon^{klp} \epsilon^{mnq} B^p B^q \right) \delta^{ij}. \quad (B.52)$$

Reescrevendo em termos das matrizes (B.29a), (B.29b) e (B.29c):

$$\Theta_{LV}^{ij(2)} = \left(\frac{1}{2} (\kappa_{ED})^{kl} E^k E^l + (\kappa_{DB})^{kp} E^k B^p - \frac{1}{2} (\kappa_{BH})^{pq} B^p B^q \right) \delta^{ij}, \quad (B.53)$$

ou ainda,

$$\Theta_{LV}^{ij(2)} = \left(\frac{1}{2} E^l (\kappa_{ED})^{kl} E^k + (\kappa_{DB})^{kp} E^k B^p - \frac{1}{2} (\kappa_{BH})^{pq} B^p B^q \right) \delta^{ij}. \quad (B.54)$$

Temos assim, a partir de (B.46),

$$\begin{aligned} \Theta_{LV}^{ij} = & -E^k (\kappa_{ED})^{ki} E^j - E^i (\kappa_{DB})^{jn} B^n + B^i (\kappa_{DB})^{jk} E^k - B^i (\kappa_{BH})^{pj} B^p \\ & + \left(\frac{1}{2} B^p (\kappa_{BH})^{pq} B^q + \frac{1}{2} E^l (\kappa_{ED})^{kl} E^k \right) \delta^{ij} \end{aligned} \quad (B.55)$$

Usando os campos auxiliares (3.23) e (3.24) nas equações (B.44) e (B.45), temos, finalmente:

$$\Theta^{ij} = \frac{3}{4} (E^i E^j + B^i B^j) - D^i E^j - B^i H^j + \frac{1}{8} \delta^{ij} [\mathbf{E} \cdot (1 + 4\kappa_{ED}) \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot (1 + 4\kappa_{BH}) \cdot \mathbf{B}]. \quad (B.56)$$

APÊNDICE C – Cálculos Estendidos do Capítulo 3

C.1 Cálculo do Comutador

Vamos obter as relações de comutação para os operadores $a_{\mathbf{k}}^{(r)}$ e $a_{\mathbf{k}}^{(r)\dagger}$. Partimos da expansão dos campos,

$$\mathbf{A}(x, t) = \sum_r \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\mathbf{k}}^{(r)} \boldsymbol{\epsilon}^{(r)} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^{(r)\dagger} \boldsymbol{\epsilon}^{(r)} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{E}(x, t) = \sum_r \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{(r)} \boldsymbol{\epsilon}^{(r)} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{(r)\dagger} \boldsymbol{\epsilon}^{(r)} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right]. \quad (\text{C.2})$$

Note que as expressões acima são transformadas integrais para os operadores $\mathbf{A}(x, t)$ e $\mathbf{E}(x, t)$. Podemos usar as técnicas de inversão para obter expressões para $a_{\mathbf{k}}^{(r)}$ e $a_{\mathbf{k}}^{(r)\dagger}$ em termos dos campos $\mathbf{A}(x, t)$ e $\mathbf{E}(x, t)$. Primeiro vamos extrair o Kernel $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ da equação integral

$$\mathbf{A}(x, t) = \sum_r \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\mathbf{k}}^{(r)} \boldsymbol{\epsilon}^{(r)} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + a_{-\mathbf{k}}^{(r)\dagger} \boldsymbol{\epsilon}^{(r)} e^{i\omega_{\mathbf{k}}t} \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (\text{C.3})$$

É conveniente trabalharmos com componentes. Por essa razão, vamos tomar o produto escalar por $\boldsymbol{\epsilon}^{(s)}$ em ambos os lados,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}^{(s)} \cdot \mathbf{A}(x, t) &= \sum_r \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \underbrace{\boldsymbol{\epsilon}^{(s)} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(r)}}_{=\frac{1}{N} \delta^{rs}} \left[a_{\mathbf{k}}^{(r)} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + a_{-\mathbf{k}}^{(r)\dagger} e^{i\omega_{\mathbf{k}}t} \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\ \boldsymbol{\epsilon}^{(s)} \cdot \mathbf{A}(x, t) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(a_{\mathbf{k}}^{(s)} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + a_{-\mathbf{k}}^{(s)\dagger} e^{i\omega_{\mathbf{k}}t} \right) \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{N}. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

O integrando é a transformada de Fourier da função no lado esquerdo, ou seja,

$$\frac{a_{\mathbf{k}}^{(s)} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + a_{-\mathbf{k}}^{(s)\dagger} e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}}{N\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \boldsymbol{\epsilon}^{(s)} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (\text{C.5})$$

Fazendo o mesmo procedimento para o campo elétrico,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, t) &= \sum_r \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} i\omega_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon}^{(r)} \left[a_{\mathbf{k}}^{(r)} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} - a_{-\mathbf{k}}^{(r)\dagger} e^{i\omega_{\mathbf{k}}t} \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\ i \frac{a_{\mathbf{k}}^{(s)} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} - a_{-\mathbf{k}}^{(s)\dagger} e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}}{N} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} &= \int \boldsymbol{\epsilon}^{(s)} \cdot \mathbf{E}(x, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Multiplicando (C.5) por $i\omega_{\mathbf{k}}$ e somando com (C.6),

$$\frac{2i}{N} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} a_{\mathbf{k}}^{(s)} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \boldsymbol{\epsilon}^{(s)} \cdot [i\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{A}(x, t) + \mathbf{E}(x, t)] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (\text{C.7})$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
 a_{\mathbf{k}}^{(s)} &= \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{N}{2i} \sqrt{\frac{2}{\omega_{\mathbf{k}}}} [i\omega_{\mathbf{k}}\mathbf{A}(x, t) + \mathbf{E}(x, t)] \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\
 a_{\mathbf{k}}^{(s)} &= \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{N}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} [\omega_{\mathbf{k}}\mathbf{A}(x, t) - i\mathbf{E}(x, t)] \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\
 a_{\mathbf{k}}^{(s)} &= \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} N \left[\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \mathbf{A}(x, t) - \frac{i}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \mathbf{E}(x, t) \right] \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{C.8}
 \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$a_{\mathbf{k}}^{(s)\dagger} = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} N \left[\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \mathbf{A}(x, t) + \frac{i}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \mathbf{E}(x, t) \right] \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{C.9}$$

Calculando a relação de comutação diretamente a partir das expressões (C.8) e (C.9),

$$\begin{aligned}
 [a_{\mathbf{k}}^{(r)}, a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}] &= \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} N \left[\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \mathbf{A}(x, t) - \frac{i}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \mathbf{E}(x, t) \right] \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\
 &\quad \int \frac{d^3\mathbf{y}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} N \left[\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \mathbf{A}(y, t) + \frac{i}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \mathbf{E}(y, t) \right] \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}}, \\
 [a_{\mathbf{k}}^{(r)}, a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}] &= \int \frac{d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}N^2}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} [\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{y})] \\
 &\quad + \int \frac{d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}N^2}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} i \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}} [\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y})] \\
 &\quad - \int \frac{d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}N^2}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} i \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} [\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{y})] \\
 &\quad + \int \frac{d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}N^2}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}} [\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y})], \\
 [a_{\mathbf{k}}^{(r)}, a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}] &= \int \frac{d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}N^2}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} \varepsilon^{(r)i} \varepsilon^{(s)j} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} [A^i(\mathbf{x}), A^j(\mathbf{y})] \\
 &\quad + \int \frac{d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}N^2}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} i \varepsilon^{(r)i} \varepsilon^{(s)j} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}} [A^i(\mathbf{x}), E^j(\mathbf{y})] \\
 &\quad - \int \frac{d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}N^2}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} i \varepsilon^{(r)i} \varepsilon^{(s)j} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} [E^i(\mathbf{x}), A^j(\mathbf{y})] \\
 &\quad + \int \frac{d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}N^2}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} \varepsilon^{(r)i} \varepsilon^{(s)j} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}} [E^i(\mathbf{x}), E^j(\mathbf{y})].
 \end{aligned}$$

Usando as relações de comutação fundamentais (4.39) e (4.40),

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{k}}^{(r)}, a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}] &= \int \frac{d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}N^2}{(2\pi)^3} e^{ik\cdot x - ip\cdot y} \varepsilon^{(r)i} \varepsilon^{(s)j} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(\frac{1}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \delta_{ij}^{tr}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \\ &\quad + \int \frac{d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}N^2}{(2\pi)^3} e^{ik\cdot x - ip\cdot y} \varepsilon^{(r)i} \varepsilon^{(s)j} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \left(\frac{1}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \delta_{ij}^{tr}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right), \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}N^2}{(2\pi)^3} e^{ik\cdot x - ip\cdot y} \varepsilon^{(r)i} \varepsilon^{(s)j} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(\frac{1}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \delta_{ij}^{tr}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \\ &\quad + \int \frac{d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}N^2}{(2\pi)^3} e^{ik\cdot x - ip\cdot y} \varepsilon^{(r)i} \varepsilon^{(s)j} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \left(\frac{1}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \delta_{ij}^{tr}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right). \end{aligned}$$

Vamos usar as funções delta transversa,

$$\delta_{ij}^{tr}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{|\mathbf{q}|^2} \right),$$

que satisfazem a seguinte relação, quando contraídas com o tensor de polarização,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(r)i} \varepsilon^{(s)j} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{|\mathbf{q}|^2} \right) &= \\ \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\delta^{rs}}{N} &\implies \varepsilon^{(r)i} \varepsilon^{(s)j} \delta_{ij}^{tr}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\delta^{rs}}{N}. \end{aligned}$$

Temos assim,

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{k}}^{(r)}, a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}] &= \int \frac{d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}N^2}{(2\pi)^3} e^{ik\cdot x - ip\cdot y} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(\frac{1}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\delta^{rs}}{N} \right) \\ &\quad + \int \frac{d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}N^2}{(2\pi)^3} e^{ik\cdot x - ip\cdot y} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \left(\frac{1}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\delta^{rs}}{N} \right), \\ [a_{\mathbf{k}}^{(r)}, a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}] &= \frac{N}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \int \frac{d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}}{(2\pi)^3} e^{ik\cdot x - ip\cdot y} \left(\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}} + \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta^{rs}, \\ [a_{\mathbf{k}}^{(r)}, a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}] &= \frac{N}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \delta^{rs} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - i\omega_{\mathbf{p}})t} \left(\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}} + \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \right) \\ &\quad \times \int \frac{d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [a_{\mathbf{k}}^{(r)}, a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}] &= \frac{N}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \delta^{rs} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - i\omega_{\mathbf{p}})t} \left(\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}} + \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \right) \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}}, \\ &= \frac{N}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \delta^{rs} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - i\omega_{\mathbf{p}})t} \left(\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}} + \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \right) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}). \end{aligned}$$

Como a delta faz $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{p}$, temos, simplesmente,

$$[a_{\mathbf{k}}^{(r)}, a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}] = \frac{N}{1 + \kappa_{tr}} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \delta^{rs}. \quad (\text{C.10})$$

Usando ainda, explicitamente, a constante de normalização encontrada em (4.60), temos, finalmente,

$$[a_{\mathbf{k}}^{(r)}, a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \delta^{rs}. \quad (\text{C.11})$$

C.2 Hamiltoniana

Vamos calcular a contribuição devido ao campo elétrico na Hamiltoniana,

$$\mathcal{H}_E \equiv \int \mathbf{E}^2 d^3x. \quad (\text{C.12})$$

Reescrevendo o campo elétrico em termos dos operadores de criação e aniquilação,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_E &= \int d^3x \sum_{r,s} \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p} \boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}} 2\omega_{\mathbf{p}}}} \left[i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{(r)} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} - i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{(r)\dagger} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right] \left[i\omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{(s)} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} - i\omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right], \\ \mathcal{H}_E &= \int d^3x \sum_{r,s} \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p} \boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}} 2\omega_{\mathbf{p}}}} \left[-\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(s)} e^{i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{p})} + \omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger} e^{i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{p})} \right] \\ &\quad + \int d^3x \sum_{r,s} \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p} \boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}} 2\omega_{\mathbf{p}}}} \left[\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(s)} e^{-i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{p})} - \omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger} e^{-i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{p})} \right]. \end{aligned}$$

Usando a definição da função delta,

$$\delta^3(\mathbf{k} \pm \mathbf{p}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{k} \pm \mathbf{p})}, \quad (\text{C.13})$$

temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_E &= \sum_{r,s} \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p} \boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}} 2\omega_{\mathbf{p}}}} \left[-\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(s)} e^{it(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{p}})} \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \right] \\ &\quad + \sum_{r,s} \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p} \boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}} 2\omega_{\mathbf{p}}}} \left[\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger} e^{it(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{p}})} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \right] \\ &\quad + \sum_{r,s} \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p} \boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}} 2\omega_{\mathbf{p}}}} \left[\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(s)} e^{-it(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{p}})} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \right] \\ &\quad - \sum_{r,s} \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p} \boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}} 2\omega_{\mathbf{p}}}} \left[\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger} e^{-it(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{p}})} \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \right]. \end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} = \frac{\delta^{rs}}{N}$ e usando as funções deltas para resolver a integral,

$$\mathcal{H}_E = \sum_r \int d\mathbf{p} \frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2N} \left[a_{\mathbf{p}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} + a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(r)} - a_{-\mathbf{p}}^{(r)} a_{-\mathbf{p}}^{(r)} e^{2it\omega_{\mathbf{p}}} - a_{-\mathbf{p}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} e^{-2it\omega_{\mathbf{p}}} \right]. \quad (\text{C.14})$$

A contribuição para o campo magnético pode ser obtida de maneira análoga,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_B &\equiv \int \mathbf{B}^2 d^3x, \\ \mathcal{H}_B &= \int d^3x \sum_{r,s} \left(\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} \right) \cdot \left(\mathbf{p} \times \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} \right) \left[i a_{\mathbf{k}}^{(r)} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} - i a_{\mathbf{k}}^{(r)\dagger} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right] \\ &\quad \times \left[i a_{\mathbf{p}}^{(s)} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} - i a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right] \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}} 2\omega_{\mathbf{p}}} (2\pi)^3}, \\ \mathcal{H}_B &= \int \sum_{r,s} \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p} d^3x}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}} 2\omega_{\mathbf{p}}} (2\pi)^3} \left(\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} \right) \cdot \left(\mathbf{p} \times \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} \right) \left[-a_{\mathbf{k}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(s)} e^{-i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{p})} + a_{\mathbf{k}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger} e^{-i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{p})} \right] \\ &\quad + \int \sum_{r,s} \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p} d^3x}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}} 2\omega_{\mathbf{p}}} (2\pi)^3} \left(\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} \right) \cdot \left(\mathbf{p} \times \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} \right) \left[a_{\mathbf{k}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(s)} e^{i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{p})} - a_{\mathbf{k}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger} e^{i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{p})} \right]. \end{aligned}$$

Usando a integral d^3x para reescrevê-las em termos de funções deltas, como em (C.13),

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_B &= \int \sum_{r,s} \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}} 2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(\mathbf{k} \times \varepsilon^{(r)} \right) \cdot \left(\mathbf{p} \times \varepsilon^{(s)} \right) \\
&\quad \times \left[-a_{\mathbf{k}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(s)} e^{-it(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{p}})} \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{p}) + a_{\mathbf{k}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger} e^{-it(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{p}})} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \right] \\
&\quad + \int \sum_{r,s} \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}} 2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(\mathbf{k} \times \varepsilon^{(r)} \right) \cdot \left(\mathbf{p} \times \varepsilon^{(s)} \right) \\
&\quad \times \left[a_{\mathbf{k}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(s)} e^{it(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{p}})} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) - a_{\mathbf{k}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger} e^{it(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{p}})} \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \right], \\
\mathcal{H}_B &= \int \sum_{r,s} \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \left(\mathbf{p} \times \varepsilon^{(r)} \right) \cdot \left(\mathbf{p} \times \varepsilon^{(s)} \right) \\
&\quad \times \left[a_{-\mathbf{p}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger} e^{-2it\omega_{\mathbf{p}}} + a_{\mathbf{p}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger} + a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(s)} + a_{-\mathbf{p}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger} e^{2it\omega_{\mathbf{p}}} \right].
\end{aligned}$$

Mas, $(\mathbf{p} \times \varepsilon^{(r)}) \cdot (\mathbf{p} \times \varepsilon^{(s)}) = \mathbf{p}^2 \varepsilon^{(r)} \cdot \varepsilon^{(s)} - (\mathbf{p} \cdot \varepsilon^{(s)}) (\mathbf{p} \cdot \varepsilon^{(r)}) = \frac{\mathbf{p}^2}{N} \delta^{rs}$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_B &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \frac{\mathbf{p}^2}{N} \sum_r \left(a_{\mathbf{p}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} + a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(r)} + a_{-\mathbf{p}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(r)} e^{-2it\omega_{\mathbf{p}}} + a_{-\mathbf{p}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} e^{2it\omega_{\mathbf{p}}} \right), \\
\mathcal{H}_B &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2N} \frac{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \omega_{\mathbf{p}} \sum_r \left(a_{\mathbf{p}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} + a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(r)} + a_{-\mathbf{p}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(r)} e^{-2it\omega_{\mathbf{p}}} + a_{-\mathbf{p}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} e^{2it\omega_{\mathbf{p}}} \right).
\end{aligned} \tag{C.15}$$

A Hamiltoniana completa é dada por,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{1}{2} (1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \mathcal{H}_E + \frac{1}{2} (1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \mathcal{H}_B, \\
\mathcal{H} &= \int d^3\mathbf{p} \frac{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{N} \frac{\omega_{\mathbf{p}}}{4} \left[a_{\mathbf{p}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} + a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(r)} - a_{-\mathbf{p}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(r)} e^{2it\omega_{\mathbf{p}}} - a_{-\mathbf{p}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} e^{-2it\omega_{\mathbf{p}}} \right] \\
&\quad + \int d^3\mathbf{p} \frac{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{N} \frac{\omega_{\mathbf{p}}}{4} \left[a_{\mathbf{p}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} + a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(r)} + a_{-\mathbf{p}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(r)} e^{2it\omega_{\mathbf{p}}} + a_{-\mathbf{p}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} e^{-2it\omega_{\mathbf{p}}} \right].
\end{aligned} \tag{C.16}$$

Finalmente,

$$\mathcal{H} = \int d^3\mathbf{p} \frac{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{N} \frac{\omega_{\mathbf{p}}}{4} \left[a_{\mathbf{p}}^{(r)} a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} + a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(r)} \right]. \tag{C.17}$$

C.3 Taxa de decaimento

Vamos calcular, explicitamente, a taxa de decaimento para o processo de decaimento do fóton. Partiremos da seguinte integral,

$$\Gamma(\gamma \rightarrow e^- e^+) = \int \frac{|\overline{\mathcal{M}}|_{\theta=\theta_0}^2}{16\pi |\mathbf{q}| E_\gamma \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|, \tag{C.18}$$

com θ_0 dado em (4.95). Podemos reescrever, explicitamente, $\overline{\mathcal{M}}_{\theta=\theta_0}^2$,

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{1}{16\pi |\mathbf{q}| E_\gamma} \int \frac{|\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \frac{4e^2}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} (m^2 + E_\gamma E_e - |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \cos \theta_0) \\ &\quad + \frac{1}{16\pi |\mathbf{q}| E_\gamma} \int \frac{|\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \frac{4e^2 \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{(1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}})^2} (-2E_e^2 + E_e E_\gamma + |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \cos \theta_0), \\ \Gamma &= \frac{1}{16\pi |\mathbf{q}| E_\gamma} \frac{4e^2}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \int \frac{|\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} (m^2 + E_\gamma E_e - |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \cos \theta_0) \\ &\quad + \frac{4e^2 \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{(1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}})^2} \frac{1}{16\pi |\mathbf{q}| E_\gamma} \int \frac{|\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} (-2E_e^2 + E_e E_\gamma + |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \cos \theta_0).\end{aligned}$$

Para organizar os cálculos, vamos subdividir Γ em duas partes,

$$\Gamma = \frac{e^2}{4\pi |\mathbf{q}| E_\gamma} \frac{1}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \Gamma_1 + \frac{e^2}{4\pi |\mathbf{q}| E_\gamma} \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{(1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}})^2} \Gamma_2, \quad (\text{C.19})$$

com,

$$\Gamma_1 \equiv \int (m^2 + E_\gamma E_e - |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \cos \theta_0) \frac{|\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}}, \quad (\text{C.20})$$

$$\Gamma_2 \equiv \int (-2E_e^2 + E_e E_\gamma + |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \cos \theta_0) \frac{|\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}}. \quad (\text{C.21})$$

Vamos nos concentrar no primeiro termo. Usando (4.95) temos,

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \int \left(m^2 + E_\gamma E_e - |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \left[\sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \left(1 + \frac{m^2}{|\mathbf{p}|^2} \right)} + \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}} |\mathbf{q}|}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}} |\mathbf{p}|} \right] \right) \frac{|\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}}, \\ \Gamma_1 &= \int \left(m^2 + E_\gamma E_e - |\mathbf{q}| \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} (|\mathbf{p}|^2 + m^2)} - \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}} |\mathbf{q}|^2}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \right) \frac{|\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}}, \\ \Gamma_1 &= \int \frac{m^2 |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}} + \int \frac{E_\gamma E_e |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}} - \int |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}} d|\mathbf{p}| - \int \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}} |\mathbf{q}|^2}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \frac{|\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}}.\end{aligned}$$

Note que os termos do meio se cancelam usando as relações de dispersão para o elétron e para o fóton modificado, (4.79) e (4.80),

$$\Gamma_1 = m^2 \int \frac{|\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}} - \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}} E_\gamma^2}{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \int \frac{|\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}}. \quad (\text{C.22})$$

Os limites de integração foram obtidos na seção (4.2.2), onde calculamos o volume no espaço de fase.

Vamos usar as soluções das seguintes integrais,

$$\int_{|\mathbf{p}|_{\min}}^{|\mathbf{p}|_{\max}} \frac{|\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}} = \sqrt{|\mathbf{p}|_{\max}^2 + m^2} - \sqrt{|\mathbf{p}|_{\min}^2 + m^2} \equiv \Delta E_e^{(1)}, \quad (C.23)$$

$$\int_{|\mathbf{p}|_{\min}}^{|\mathbf{p}|_{\max}} |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}| = \frac{1}{2} (|\mathbf{p}|_{\max}^2 - |\mathbf{p}|_{\min}^2) \equiv \frac{1}{2} \Delta E_e^{(2)}, \quad (C.24)$$

$$\int_{|\mathbf{p}|_{\min}}^{|\mathbf{p}|_{\max}} |\mathbf{p}| \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} d|\mathbf{p}| = \frac{1}{3} \left[(|\mathbf{p}|_{\max}^2 + m^2)^{3/2} - (|\mathbf{p}|_{\min}^2 + m^2)^{3/2} \right] \equiv \frac{\Delta E_e^{(3)}}{3}. \quad (C.25)$$

Então (C.22) é

$$\Gamma_1 = \left(m^2 - \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}} E_\gamma^2}{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \right) \Delta E_e^{(1)}. \quad (C.26)$$

O próximo termo pode ser calculado de maneira análoga.

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \int \left(-2E_e^2 + E_e E_\gamma + |\mathbf{q}| \sqrt{\frac{1 - \kappa_{tr}}{1 + \kappa_{tr}}} (|\mathbf{p}|^2 + m^2) + \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}} |\mathbf{q}|^2}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \right) \frac{|\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}}, \\ \Gamma_2 &= -2 \int E_e |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}| + \int E_\gamma |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}| + E_\gamma \int |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}| + \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}} |\mathbf{q}|^2}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \int \frac{|\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}}, \\ \Gamma_2 &= -2 \int |\mathbf{p}| \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} d|\mathbf{p}| + 2E_\gamma \int |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}| + \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}} |\mathbf{q}|^2}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \int \frac{|\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}}. \end{aligned} \quad (C.27)$$

Usando as equações (C.23), (C.24) e (C.25), temos

$$\Gamma_2 = -\frac{2\Delta E_e^{(3)}}{3} + E_\gamma \Delta E_e^{(2)} + \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}} |\mathbf{q}|^2}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \Delta E_e^{(1)}. \quad (C.28)$$

Então (C.19), se reescreve como

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{e^2}{4\pi |\mathbf{q}| E_\gamma} \frac{1}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \left(m^2 - \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}} E_\gamma^2}{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \right) \Delta E_e^{(1)} \\ &+ \frac{e^2}{4\pi |\mathbf{q}| E_\gamma} \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{(1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}})^2} \left[-\frac{2\Delta E_e^{(3)}}{3} + E_\gamma \Delta E_e^{(2)} + \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}} |\mathbf{q}|^2}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \Delta E_e^{(1)} \right], \end{aligned} \quad (C.29)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{e^2}{4\pi |\mathbf{q}| E_\gamma} \frac{1}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \left[\left(m^2 - \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}} E_\gamma^2}{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \right) + \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}} |\mathbf{q}|^2}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \right] \Delta E_e^{(1)} \\ &+ \frac{e^2}{4\pi |\mathbf{q}| E_\gamma} \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{(1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}})^2} \left(E_\gamma \Delta E_e^{(2)} - \frac{2\Delta E_e^{(3)}}{3} \right). \end{aligned} \quad (C.30)$$

Usando as relações de dispersão para o fóton modificado, temos:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{e^2}{4\pi} \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}} \frac{1}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \left[\frac{m^2}{E_\gamma^2} - \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} + \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}^2}{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}^2} \right] \Delta E_e^{(1)} \\ &+ \frac{e^2}{4\pi} \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}} \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{(1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}})^2} \left(\frac{\Delta E_e^{(2)}}{E_\gamma} - \frac{2\Delta E_e^{(3)}}{3E_\gamma^2} \right), \end{aligned}$$

ou finalmente,

$$\Gamma = \frac{e^2}{4\pi} \left[\left(N_0(\tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \frac{m^2}{E_\gamma^2} - N_1(\tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \right) \Delta E_e^{(1)} + N_2(\tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \left(\frac{\Delta E_e^{(2)}}{E_\gamma} - \frac{2}{3} \frac{\Delta E_e^{(3)}}{E_\gamma^2} \right) \right]. \quad (\text{C.31})$$

Com as seguintes definições:

$$\begin{aligned} N_0(\tilde{\kappa}_{\text{tr}}) &= \frac{1}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}}, \\ N_1(\tilde{\kappa}_{\text{tr}}) &= \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}^2} \frac{1}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}} = \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}^2} N_0(\tilde{\kappa}_{\text{tr}}), \\ N_2(\tilde{\kappa}_{\text{tr}}) &= \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{(1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}})^2} \sqrt{\frac{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}}} = \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} N_0(\tilde{\kappa}_{\text{tr}}), \end{aligned}$$

podemos reescrever (C.31) de maneira alternativa,

$$\Gamma = \frac{e^2}{4\pi} N_0(\tilde{\kappa}_{\text{tr}}) \left[\left(\frac{m^2}{E_\gamma^2} - \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 - \tilde{\kappa}_{\text{tr}}^2} \right) \Delta E_e^{(1)} + \frac{\tilde{\kappa}_{\text{tr}}}{1 + \tilde{\kappa}_{\text{tr}}} \left(\frac{\Delta E_e^{(2)}}{E_\gamma} - \frac{2}{3} \frac{\Delta E_e^{(3)}}{E_\gamma^2} \right) \right]. \quad (\text{C.32})$$