

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

DISSERTAÇÃO

Espalhamento quântico não relativístico no espaço tempo de uma corda cósmica

José do Nascimento Linhares

ORIENTADOR: EDILBERTO OLIVEIRA SILVA

São Luís

2020

Espalhamento quântico não relativístico no espaço tempo de uma corda cósmica

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito para obtenção do grau de Mestrado em Física.

Orientador: Edilberto Oliveira Silva

Doutor em Física - UFMA

SÃO LUÍS

2020

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

do Nascimento Linhares, José.

Espalhamento quântico não relativístico no espaço tempo
de uma corda cósmica / José do Nascimento Linhares. -
2020.

77 p.

Orientador(a): Edilberto Oliveira Silva.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em
Física/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís,
2020.

1. Equação de Schrodinger. 2. Defeitos Topológicos.
3. Corda Cósmica. 4. Espalhamento Quântico. I. Oliveira
Silva, Edilberto. II. Título.

JOSÉ DO NASCIMENTO LINHARES

Espalhamento quântico não relativístico no espaço tempo de uma corda cósmica

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito para obtenção do grau de Mestre em Física.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Edilberto Oliveira Silva (Orientador)
UFMA

Prof. Dr. Frederico Elias Passos dos Santos
UFMA

Prof. Dr. Luis Rafael Benito Castro
UFMA

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado saúde e força para enfrentar e superar as dificuldades que se fizeram presentes durante a Pós-Graduação.

Aos meus irmãos, pelo apoio incondicional e a minha mãe, Antonia do Nascimento, pela presença, amor e incentivo.

A minha esposa, Camila C. S. Linhares e a minha filha, Maria Clara, pelo amor e paciência nos momentos mais difíceis.

Ao professor Edilberto O. Silva, pela orientação precisa, ensinamentos, suas correções, paciência, conversas, pelas aulas na Pós-Graduação e por ter compreendido as dificuldades que carrego. Muito obrigado professor, o senhor é um grande mestre.

Aos professores da Pós-Graduação: Benito, Arroyo, Gabriel, Casana, Manoel, Eduardo da Hora e Luciana, pelas aulas.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram com minha formação.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

No presente trabalho investigamos o espalhamento quântico não relativístico por um potencial coulombiano no espaço-tempo de uma corda cósmica. Inicialmente, revisamos os fundamentos da mecânica quântica não relativística, com ênfase na equação de Schrödinger e em suas propriedades essenciais. Em seguida, desenvolvemos a teoria do espalhamento quântico, particularizando o formalismo para o potencial coulombiano. A corda cósmica é descrita pelo elemento de linha

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + \alpha^2 r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

no qual formulamos a equação de Schrödinger e resolvemos explicitamente o problema para os estados de espalhamento. A partir dessas soluções, determinamos o deslocamento de fase, a amplitude de espalhamento e a seção de choque, evidenciando as modificações introduzidas pelo defeito topológico. Além disso, mostramos que o espectro de energia dos estados ligados pode ser obtido a partir dos polos da matriz de espalhamento, resultando em níveis de energia corrigidos pelo parâmetro geométrico α . Os resultados obtidos revelam que a topologia associada à corda cósmica influencia diretamente observáveis quânticos, manifestando-se tanto no comportamento assintótico das ondas espalhadas quanto no desdobramento geométrico dos níveis de energia do átomo de hidrogênio.

Palavras chave: Equação de Schrodinger, Defeitos topológicos, Corda cósmica, Espalhamento quântico.

ABSTRACT

In this work, we investigate nonrelativistic quantum scattering by a Coulomb potential in the spacetime of a cosmic string. We begin by reviewing the foundations of nonrelativistic quantum mechanics, with emphasis on the Schrödinger equation and its essential properties. We then develop the theory of quantum scattering, specializing the formalism to the Coulomb potential. The cosmic string is described by the line element

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + \alpha^2 r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

within which we formulate the Schrödinger equation and explicitly solve the problem for scattering states. From these solutions, we determine the phase shift, the scattering amplitude, and the cross section, highlighting the modifications introduced by the topological defect. Moreover, we show that the energy spectrum of bound states can be obtained from the poles of the scattering matrix, yielding energy levels corrected by the geometric parameter α . The results reveal that the topology associated with the cosmic string directly influences quantum observables, manifesting itself both in the asymptotic behavior of the scattered waves and in the geometric splitting of the energy levels of the hydrogen atom.

Keywords: Schrödinger equation, Topological defects, Cosmic strings, Quantum scattering.

Lista de Figuras

3.1	Espalhamento em um potencial esfericamente simétrico.	24
3.2	Diferença entre as regiões de espalhamento clássico e quântico.	27
4.1	Soluções radiais assintóticas para $l=1$	50
4.2	Fase efetiva $\Phi(r)$ para $l = 1$ nos três casos: (a) onda livre, (b) espalhamento coulombiano e (c) espalhamento coulombiano na presença da corda cósmica. . .	52
4.3	Deslocamento geométrico da fase $\Delta\Phi_l = \frac{\pi}{2}(l-l_\alpha)$ em função do momento angular l , para um valor fixo de $\alpha < 1$. Observa-se um crescimento linear do deslocamento de fase, evidenciando a contribuição puramente geométrica associada à topologia cônica do espaço-tempo da corda cósmica.	53
4.4	Níveis de energia $E_{l,N}$ em função do momento angular l , para um valor fixo de N , comparando os casos $\alpha = 1$ (espaço euclidiano) e $\alpha < 1$ (presença da corda cósmica). Observa-se que, para $\alpha < 1$, os níveis deixam de ser degenerados, evidenciando o desdobramento geométrico induzido pela topologia do espaço-tempo.	56
4.5	Contribuição angular de uma única onda parcial com $l = 1$ para $\alpha = 1$ e $\alpha < 1$. O padrão é suave e a influência da corda cósmica é pouco pronunciada.	59
4.6	Contribuição angular de uma única onda parcial com $l = 20$ para $\alpha = 1$ e $\alpha < 1$. Ondas de grande momento angular apresentam estrutura fina e maior sensibilidade ao efeito topológico.	60

4.7 Seção de choque diferencial para diferentes valores do parâmetro α . O caso $\alpha = 1$ corresponde ao espalhamento coulombiano usual, enquanto $\alpha < 1$ representa a presença da corda cósmica. A deformação progressiva do padrão angular reflete a interferência alterada entre as ondas parciais em um espaço com déficit angular. 61

Lista de Figuras	7
Sumário	9
1 INTRODUÇÃO	11
2 A EQUAÇÃO DE ONDA DE SCHRÖDINGER	15
2.1 Equação de Schrödinger Dependente do Tempo	16
2.1.1 Valor esperado	17
2.2 Estados Estacionários	18
2.3 Densidade de Corrente de Probabilidade	21
3 ESPALHAMENTO QUÂNTICO	23
3.1 Espalhamento não-Relativístico	23
3.1.1 Seção de choque e amplitude de espalhamento	25
3.1.2 Análise de ondas parciais	27
3.1.3 Deslocamento de fase	30
3.2 Espalhamento em um potencial do tipo coulombiano	32
4 A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NO ESPAÇO DA CORDA CÓSMICA	35
4.1 Cordas Cósmicas	36

4.1.1	Defeitos topológicos e cordas cósmicas	36
4.1.2	Métrica do espaço da corda cósmica	37
4.1.3	Interpretação geométrica do déficit angular	37
4.2	Equação de Schrödinger com o defeito topológico	39
4.3	Solução da Equação de Schrödinger	40
4.4	Espalhamento no potencial coulombiano na presença da corda	44
4.4.1	Interpretação física do deslocamento de fase	49
4.4.2	Visualização do efeito topológico na fase	51
4.4.3	Espectro de energia dos estados ligados	53
4.5	Amplitude de espalhamento e Seção de Choque	57
4.5.1	Estrutura angular e papel do momento angular	58
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	62
5.1	Proposta de trabalhos futuros	63
	Referências Bibliográficas	65
	APÊNDICE	68
A	ALGORITMOS NUMÉRICOS IMPLEMENTADOS EM PYTHON	70
A.1	Gráficos da seção 4.4.1: deslocamento de fase	70
A.2	Gráficos da seção 4.4.2: Visualização do efeito topológico na fase	72
A.3	Gráficos da seção 4.4.2: Deslocamento geométrico da fase	73
A.4	Gráficos da seção 4.4.3: Espectro de energia dos estados ligados	74
A.5	Gráficos da seção 4.5.1: Estrutura angular e papel do momento angular	75

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

As equações de Schrödinger, Klein–Gordon e Dirac em espaços curvos têm sido objeto de estudo de diversos pesquisadores nos últimos anos [1, 2, 3, 4, 5], motivados pela busca de uma teoria que conecte a relatividade geral com a mecânica quântica e, adicionalmente, pelo interesse em investigar a influência do campo gravitacional sobre sistemas físicos específicos. Além disso, tais estudos encontram aplicações no contexto da matéria condensada, como, por exemplo, na investigação da dinâmica de férmions sobre superfícies curvas [3, 6].

Uma situação particularmente interessante ocorre quando um setor circular de ângulo α é removido ou adicionado a uma superfície plana, e as bordas remanescentes são coladas. A nova superfície formada pode assumir a forma de um cone ou de um anti-cone e apresenta um defeito localizado na região de junção. Superfícies construídas dessa maneira são conhecidas como desclinações [7, 8]. Verifica-se que a dinâmica de um férmion sobre tais superfícies é modificada em razão tanto da nova geometria quanto da presença do defeito [3, 9]. Esse cenário possui um análogo no contexto gravitacional, representado pelas chamadas cordas cósmicas, que constituem o objeto de estudo do presente trabalho [10, 11].

As cordas cósmicas são defeitos topológicos do espaço-tempo originados por processos ocorridos no início do Universo [10, 11]. Trata-se de estruturas finas, extensas e extremamente massivas. Segundo Kibble [12], elas surgiram como consequência de quebras de simetria associadas às forças fundamentais em regimes de altíssimas energias, nos quais as interações fraca,

forte e eletromagnética comportar-se-iam de forma unificada. De acordo com Gleiser [13], a eventual descoberta observacional de uma corda cósmica confirmaria tal hipótese, uma vez que, em seu interior, essas forças exibiriam esse comportamento unificado. Tal fato implicaria não apenas uma confirmação indireta do modelo do Big Bang, mas também uma via observacional para o estudo da física de partículas em regimes de energia atualmente inacessíveis em laboratório [13].

Como o objetivo deste trabalho é investigar modificações nos estados de uma partícula induzidas pelo campo gravitacional, é necessário compreender previamente a relatividade geral como uma teoria métrica, na qual a gravitação é interpretada como manifestação da curvatura do espaço-tempo produzida pela presença de matéria e energia. Essa relação é descrita pela equação de campo de Einstein, que conecta quantidades geométricas, como o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, a curvatura escalar R e o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, ao tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, por meio da expressão [5, 14]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

A equação (1.1) permitiu prever teoricamente o surgimento de grandes estruturas no Universo, como os buracos negros [15], cuja existência foi posteriormente confirmada por observações indiretas, bem como a formação de defeitos topológicos, tais como monopolos globais e as próprias cordas cósmicas [10, 12]. Vale ressaltar que a equação de Einstein deve ser aplicada na descrição de corpos massivos, da ordem, por exemplo, da massa da Terra, pois apenas a partir dessa escala os efeitos gravitacionais tornam-se perceptíveis [14].

Segundo o modelo discutido na Ref. [5], a relatividade geral pode ser concebida como uma teoria clássica, no sentido de que não incorpora a descrição de sistemas atômicos, uma vez que, nessa escala, os efeitos quânticos sobrepõem-se aos gravitacionais. Assim, para compreender de que forma o campo gravitacional modifica um sistema físico específico, por exemplo, os níveis de energia do átomo de hidrogênio torna-se necessário investigar a influência da curvatura local sobre esse sistema e, além disso, considerar as propriedades topológicas do espaço-tempo no qual ele está inserido [1, 16].

De acordo com [1], as distorções induzidas pelo campo gravitacional nos níveis de energia do átomo de hidrogênio são, em princípio, passíveis de detecção experimental e podem ser distinguidas das alterações provocadas por campos eletromagnéticos. Outra modificação potencialmente observável consiste em deslocamentos de fase de ondas espalhadas na presença de

campos associados a defeitos topológicos, como as cordas cósmicas [9, 11].

Nesse contexto, diversos trabalhos têm sido desenvolvidos com o objetivo de investigar as modificações introduzidas por campos gravitacionais na descrição de sistemas quânticos. Entre eles, destaca-se a Ref. [16], na qual os autores estudaram a influência do campo gravitacional de uma corda cósmica sobre os estados ligados do átomo de hidrogênio, tanto no contexto da equação de Schrödinger quanto da equação de Dirac. Na Ref. [5], analisaram-se os estados ligados de um elétron em um potencial do tipo coulombiano no espaço curvo da corda cósmica sob efeitos não inerciais. Já na Ref. [2], investigou-se o problema de espalhamento de partículas carregadas por um potencial coulombiano no espaço-tempo da corda cósmica, no limite exato das simetrias de spin e pseudo-spin, mostrando-se que as ondas espalhadas sofrem deslocamentos de fase devido aos efeitos de curvatura.

Observa-se, portanto, que grande parte dos trabalhos encontrados na literatura sobre sistemas quânticos em espaços curvos concentra-se no estudo de estados ligados. Em contraste, as investigações envolvendo estados de espalhamento ainda são relativamente escassas. O presente trabalho busca contribuir para esse cenário, estudando o espalhamento de partículas carregadas por um potencial coulombiano no espaço-tempo da corda cósmica.

Os processos de espalhamento são fundamentais por permitirem a investigação de propriedades intrínsecas de sistemas físicos a partir de dados experimentais [17]. Historicamente, experimentos desse tipo desempenharam papel central no desenvolvimento da física moderna. Um exemplo emblemático é o experimento de espalhamento de partículas α realizado por Rutherford em 1911, que forneceu evidências decisivas para a elucidação da estrutura atômica [17, 18].

Nesta dissertação, estudamos o problema de espalhamento de elétrons no regime não relativístico no espaço-tempo da corda cósmica. Determinamos as principais grandezas físicas do sistema, tais como o deslocamento de fase, a matriz S de espalhamento, a amplitude da onda espalhada e a expressão dos estados ligados a partir dos polos da matriz S .

Os capítulos seguintes desta dissertação estão organizados da seguinte forma. No Capítulo 2, apresentamos uma breve revisão da mecânica quântica não relativística no formalismo de Schrödinger, introduzindo sua equação dependente e independente do tempo, bem como suas propriedades gerais. No Capítulo 3, desenvolvemos a teoria do espalhamento quântico não relativístico, estudando o espalhamento por potenciais esfericamente simétricos localizados e aplicando a técnica de ondas parciais para obter grandezas relevantes, como a amplitude de

espalhamento, as seções de choque diferencial e total e o deslocamento de fase. Em seguida, estendemos esses conceitos ao potencial coulombiano, que constitui um exemplo típico de potencial não localizado.

No Capítulo 4, apresentamos uma breve introdução às cordas cósmicas e desenvolvemos a contribuição original desta dissertação. Utilizamos a teoria exposta no Capítulo 3 para estudar o problema de espalhamento de elétrons no espaço-tempo da corda cósmica, calculando o deslocamento de fase, a amplitude de espalhamento, as energias dos estados ligados, bem como as seções de choque parciais e totais, e investigando as implicações físicas da topologia do espaço nesses resultados. Por fim, no Capítulo 5, apresentamos as conclusões e discutimos perspectivas para trabalhos futuros.

A EQUAÇÃO DE ONDA DE SCHRÖDINGER

A mecânica quântica ondulatória, desenvolvida por Erwin Schrödinger no começo do século XX, teve seu início em um seminário proferido por ele ao grupo de pesquisa do qual fazia parte. O objetivo era esclarecer as ideias inovadoras contidas na tese de doutoramento de Louis de Broglie, na qual afirmava que a dualidade onda-partícula observada em fenômenos luminosos se aplicava também a partículas [19, 20, 21].

Segundo de Broglie, partículas possuem uma onda (onda de matéria) associada ao seu movimento, cujo comprimento de onda está relacionado com o momento linear da partícula através da equação $\lambda = h/p$, em que h é a constante de Planck [21]. Com essa proposta, ele conseguiu explicar as órbitas estacionárias do elétron no átomo de hidrogênio, postuladas por Niels Bohr em 1913 [18].

Contudo, a proposta de de Broglie era pouco compreendida, principalmente porque, na época, não se sabia o que era realmente a onda de matéria nem qual equação essas ondas deveriam satisfazer. Assim, a resposta a esse segundo questionamento, dada por Schrödinger, culminou com o desenvolvimento da célebre equação diferencial conhecida pelo seu nome e com o surgimento da mecânica ondulatória, que deu origem a quatro artigos no ano de 1926 [22].

A teoria de Schrödinger constitui o ponto de partida para a compreensão da mecânica quântica não relativística. Para compreendê-la melhor, apresentamos, a seguir, um estudo sucinto sobre a equação de Schrödinger e suas propriedades mais importantes. Uma análise

histórica detalhada desse processo pode ser encontrada em [23].

2.1 Equação de Schrödinger Dependente do Tempo

A mecânica quântica ondulatória parte do princípio de que a todo sistema quântico (partículas, átomos ou moléculas) podemos associar uma função denominada função de onda Ψ e essa função possui toda informação física acerca do sistema e o seu módulo ao quadrado é interpretado como uma densidade de probabilidade.

A função Ψ é solução da equação de Schrödinger e esta pode ser obtida da relação clássica para a energia total

$$E = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \quad (2.1)$$

trocando o momento linear $\mathbf{P}$ e a energia E por seus respectivos operadores diferenciais $\mathbf{P}$ e E

$$\mathbf{P} \longrightarrow -i\hbar\nabla \quad (2.2)$$

e

$$E \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad (2.3)$$

e depois aplicamos a expressão resultante a função de onda $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Obtemos assim, a equação diferencial linear de segunda ordem denominada equação de Schrödinger dependente do tempo [24, 25, 26, 27, 28]

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) \right] \Psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}, t), \quad (2.4)$$

onde ∇^2 é o operador laplaciano, $\hbar = h/2\pi$ e $V(\mathbf{r}, t)$ é o potencial que descreve alguma interação. Por exemplo, a interação entre o elétron e próton no átomo de hidrogênio é descrita por uma energia potencial de Coulomb da forma $V(r) = k/r$. A energia potencial $V(r)$ permite-nos determinar a forma da solução $\Psi(\mathbf{r}, t)$.

A equação (2.4) é muitas vezes escrita em uma forma mais compacta usando o operador hamiltoniano H , definido como

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}, t). \quad (2.5)$$

Em termos desse operador, a equação de Schrödinger dependente do tempo assume a forma

$$H\Psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.6)$$

Escrita como em (2.6), fica evidente que a equação de Schrödinger descreve a evolução temporal de sistemas quânticos, exercendo um papel similar, em um certo sentido, à segunda lei de Newton para sistemas clássicos. Uma outra informação que podemos também abstrair de (2.6) é que $\Psi(\mathbf{r}, t)$ são funções complexas. O fato da função de onda ser complexa não será possível fazer uma interpretação direta de seu significado físico uma vez que o resultado de medidas físicas são dados em termos de quantidades reais e não complexas. Essa dificuldade de interpretação levou Max Borne, em 1926, a postular que é o módulo ao quadrado $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ e não $\Psi(\mathbf{r}, t)$ que tem interpretação física [25]. Assim, postula-se que a probabilidade $\mathcal{P}$ de uma partícula associada a função $\Psi(\mathbf{r}, t)$ ser encontrada no instante de tempo t , no elemento de volume dV , localizado na posição $\mathbf{r}$, é dado por [24, 25, 26]

$$d\mathcal{P} = \Psi^*(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) dV, \quad (2.7)$$

onde a quantidade real

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \Psi^*(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.8)$$

é interpretada como uma densidade de probabilidade.

Em virtude da equação (2.8), podemos ver que a função de onda deve satisfazer a relação

$$\int \Psi^*(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} = 1, \quad (2.9)$$

em outras palavras, ela deve ser normalizável para que represente uma densidade de probabilidade. Além de satisfazer a equação (2.9), a função de onda e sua derivada devem também ser contínuas. O cumprimento desses três requisitos garante que ela seja fisicamente aceitável.

2.1.1 Valor esperado

Como podemos ver, a mecânica quântica segundo a interpretação de Born para a função de onda, é uma teoria probabilística e, por isso, não podemos esperar obter a partir dela, por exemplo, a posição exata de uma partícula. O que a teoria é capaz de nos informar é com qual probabilidade a posição da partícula pode ser medida ou o valor esperado da posição de um conjunto de partículas situadas no mesmo estado $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Uma vez conhecida a densidade de probabilidade, essa informação é calculada a partir da equação

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \int \Psi^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} \Psi(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r}, \quad (2.10)$$

onde $\mathbf{r}$ é agora interpretado como um operador que atua sobre a função de onda extraindo informação da posição. Por conseguinte, conhecendo o valor esperado da posição é possível determinar o valor da velocidade, o qual é dado por

$$\frac{d\langle \mathbf{r} \rangle}{dt} = \int \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* (\mathbf{r}, t) \mathbf{r} \Psi (\mathbf{r}, t) d^3 \mathbf{r}. \quad (2.11)$$

De maneira geral, o valor esperado de um observável físico, identificado pelo operador $\mathcal{O}$, pode ser escrito como

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int \Psi^* (\mathbf{r}, t) \mathcal{O} \Psi (\mathbf{r}, t) d^3 \mathbf{r}. \quad (2.12)$$

2.2 Estados Estacionários

Sempre que a energia potencial V na equação (2.4) for independente do tempo, o hamiltoniano H também será independente do tempo e a equação de Schrödinger pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis. Então, assumindo que V não depende explicitamente do tempo, a solução $\Psi(\mathbf{r}, t)$ pode ser escrita na forma

$$\Psi (\mathbf{r}, t) = \psi (\mathbf{r}) \varphi (t) \quad (2.13)$$

Substituindo (2.13) em (2.4) e dividindo por $\psi (\mathbf{r}) \varphi (t)$, obtemos

$$i\hbar \frac{1}{\varphi(t)} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t) = \left[-\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 + V(r) \right] \psi(\mathbf{r}). \quad (2.14)$$

Observando essa equação, percebemos que o lado esquerdo depende somente de t e o lado direito depende somente de $\mathbf{r}$, sendo assim, a igualdade só é verdadeira se os dois lados forem uma constante E . Dessa forma, temos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t) = E \varphi(t) \quad (2.15)$$

$$H \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}), \quad (2.16)$$

onde a constante de acoplamento E é a energia e $H = -\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 + V(r)$. Integrando a equação (2.15), encontramos a solução $\varphi(t) = e^{-iEt/\hbar}$, que oscila com frequência $\omega = E/\hbar$ (desde que E seja uma quantidade real). A segunda equação (Eq. (2.16)), é uma equação de autovalores, conhecida como equação de Schrödinger independente do tempo e sua solução depende das condições impostas à função de onda $\psi(\mathbf{r})$ e da especificação da energia potencial $V(r)$. Dependendo das restrições impostas à função de onda ψ os autovalores de energia poderão assumir

valores discretos ou contínuos. Ao conjunto de autovalores $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, denominamos espectro de energia e a função associada a cada energia chamamos de autofunções de energia ψ_n .

Resolvendo a parte temporal e a parte espacial da equação (2.14), podemos expressar a solução geral como

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-\frac{iEt}{\hbar}}. \quad (2.17)$$

De acordo com a Ref. [26], a equação de Schrödinger independente do tempo é de fundamental importância para a descrição de sistemas quânticos e os motivos são os seguintes:

1. Suas soluções são estados estacionários. Isso pode ser verificado calculando a densidade de probabilidade, que é

$$|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \psi(\mathbf{r})e^{-\frac{iEt}{\hbar}}\psi^*(\mathbf{r})e^{\frac{iEt}{\hbar}} = \psi(\mathbf{r})^*\psi(\mathbf{r}), \quad (2.18)$$

onde vemos que a dependência temporal desaparece por conta do produto das exponenciais. Portanto, mesmo que $\Psi(r, t)$ dependa de t , a densidade de probabilidade não depende e o valor esperado de qualquer grandeza dinâmica será constante no tempo.

2. Os estados estacionários são estados de energia total bem definida. Essa afirmação pode ser comprovada calculando a variância do Hamiltoniano, que para o caso dos estados estacionários não depende do tempo e pode ser escrito como $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})$ e a equação de Schrödinger como $H\psi = E\psi$.

O valor esperado da energia total é

$$\langle H \rangle = \int \psi^* H \psi d^3\mathbf{r} = E \int |\psi|^2 d^3\mathbf{r} = E \quad (2.19)$$

e de H^2 é

$$\langle H^2 \rangle = \int \psi^* H^2 \psi d^3\mathbf{r} = E^2 \int |\psi|^2 d^3\mathbf{r} = E^2. \quad (2.20)$$

Dos resultados de $\langle H \rangle$ e $\langle H^2 \rangle$, temos que a variância de H é

$$\sigma_H^2 = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = E^2 - E^2 = 0, \quad (2.21)$$

o que mostra que a energia não apresenta dispersão e por isso, pode ser medida com exatidão.

3. As soluções separáveis constituem um conjunto de funções ortogonais. Considerando um conjunto de autoestados estacionários $\psi_n(\mathbf{r})$ de um determinado sistema, a condição de ortogonalidade para seus elementos é expressa como

$$\int_V \psi_{n'}(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r})d^3r = 0 \text{ ou } 1. \quad (2.22)$$

Como $\psi_{n'}(\mathbf{r})$ e $\psi_n(\mathbf{r})$ satisfazem a equação de Schrödinger, temos

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi_n(\mathbf{r}) = E_n\psi_n(\mathbf{r}) \quad (2.23)$$

e também

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi_{n'}^*(\mathbf{r}) = E_{n'}\psi_{n'}^*(\mathbf{r}). \quad (2.24)$$

Agora, multiplicando (2.23) e (2.24), respectivamente, por $\psi_{n'}^*(\mathbf{r})$ e $\psi_n(\mathbf{r})$ e em seguida subtraindo os resultados, encontramos

$$-\frac{\hbar^2}{2m} [\psi_{n'}^*\nabla^2\psi_n - \psi_n\nabla^2\psi_{n'}^*] = (E_n - E_{n'})\psi_n(\mathbf{r})\psi_{n'}^*(\mathbf{r}) \quad (2.25)$$

ou

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \cdot [\psi_{n'}^*\nabla\psi_n - \psi_n\nabla\psi_{n'}^*] = (E_n - E_{n'})\psi_n(\mathbf{r})\psi_{n'}^*(\mathbf{r}). \quad (2.26)$$

A fim de aplicar o teorema da divergência, integramos a equação (2.26) sobre todo o volume. Assim, escrevemos

$$\int -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \cdot [\psi_{n'}^*\nabla\psi_n - \psi_n\nabla\psi_{n'}^*] d^3\mathbf{r} = \int (E_n - E_{n'})\psi_n(\mathbf{r})\psi_{n'}^*(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}. \quad (2.27)$$

que pode ser simplificado em

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \oint_S [\psi_{n'}^*\nabla\psi_n - \psi_n\nabla\psi_{n'}^*] \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r} = \int_V (E_n - E_{n'})\psi_n(\mathbf{r})\psi_{n'}^*(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}, \quad (2.28)$$

onde $\mathbf{n}$ é o vetor unitário normal a superfície, apontando para fora. Como no infinito a função de onda deve ser nula, o lado esquerdo da equação (2.28) deve ser zero neste limite, restando apenas

$$(E_n - E_{n'}) \int_V \psi_n(\mathbf{r})\psi_{n'}^*(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} = 0. \quad (2.29)$$

A equação (2.29) confirma que para diferentes autofunções possuindo autovalores de energia diferentes, ou seja com $E_n \neq E_{n'}$, devem obedecer a relação de ortogonalidade

$$\int_V \psi_n(\mathbf{r}) \psi_{n'}^*(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \delta_{nn'}, \quad (2.30)$$

onde

$$\delta_{nn'} = \begin{cases} 0, & \text{para } n \neq n' \\ 1, & \text{para } n = n' \end{cases}. \quad (2.31)$$

4. Solução geral. Como vimos, a equação de Schrödinger é uma equação diferencial linear e, por isso, a soma de duas ou mais soluções também deve ser uma solução. Deste modo, podemos escrever a solução geral como uma combinação linear dos estados estacionários

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi(\mathbf{r}) e^{-\frac{iE_n}{\hbar} t}. \quad (2.32)$$

E as constantes c_n podem ser determinadas a partir do estado inicial $\Psi(\mathbf{r}, 0)$, explorando a ortogonalidade das soluções separáveis.

Assim, multiplicando a equação (2.32) (no estado inicial) pelo autoestado $\psi_n^*(\mathbf{r})$ e integrando sobre o volume V , temos

$$\int_V \psi_{n'}^*(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}, 0) d^3\mathbf{r} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_V \psi_n(\mathbf{r}) \psi_{n'}^*(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad (2.33)$$

que pode também ser escrito na forma

$$\int_V \psi_{n'}^*(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}, 0) d^3\mathbf{r} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{n,n'}, \quad (2.34)$$

da qual podemos determinar as constantes da combinação linear através da expressão

$$c_n = \int_V \psi_n^*(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}, 0) d^3\mathbf{r}. \quad (2.35)$$

2.3 Densidade de Corrente de Probabilidade

Em Física, dizemos que uma determinada grandeza é conservada quando sua taxa de variação temporal é nula. Quando essa grandeza se distribui e flui no espaço, tal lei de conservação pode ser expressa por meio de uma equação de continuidade, escrita na forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}, \quad (2.36)$$

onde ρ representa a densidade associada à grandeza em uma região do espaço e $\mathbf{J}$ corresponde ao seu fluxo através dessa região.

No contexto do eletromagnetismo, por exemplo, a equação da continuidade expressa a conservação da energia transportada por uma onda eletromagnética [29]. De maneira análoga, é possível obter uma lei de conservação no âmbito da mecânica quântica. Para isso, tomamos a derivada temporal da equação (2.8) e utilizamos as expressões (2.5) e (2.6). Como resultado, obtemos

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \left[\Psi \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \Psi^* + \Psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \Psi \right]. \quad (2.37)$$

Usando a identidade

$$\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^* = \nabla \cdot (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*), \quad (2.38)$$

e definindo a densidade de corrente de probabilidade $\mathbf{J}$ como

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*), \quad (2.39)$$

podemos reescrever a equação (2.37) na forma

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t). \quad (2.40)$$

A equação (2.40) é conhecida como equação da continuidade na mecânica quântica não relativística e expressa a conservação da probabilidade [30]. No estudo de fenômenos de espalhamento, a grandeza $\mathbf{J}$ pode ser interpretada como a quantidade de partículas dN que atravessa uma região delimitada por um elemento de área dA em um intervalo de tempo dt . Nesse contexto, a equação da continuidade garante a conservação do número de partículas, fornecendo a base formal para a definição de fluxos, seções de choque e demais grandezas observáveis associadas ao processo de espalhamento.

ESPALHAMENTO QUÂNTICO

O estudo da colisão de partículas é de grande importância para a Física, pois boa parte do que conhecemos sobre a estrutura da matéria foi obtido por meio de processos de espalhamento. Um dos exemplos mais marcantes que temos registro, é o do espalhamento de partículas α por finas folhas de ouro, realizado por Rutherford em 1911, onde através do mesmo se descobriu a existência de núcleos atômicos positivamente carregados cercados por uma eletrosfera formada por elétrons orbitando o núcleo atômico [25, 17]. Processos de espalhamento permitiram também a descoberta de partículas subatômicas como os múons e os píons, além de permitir o estudo de interações nucleares fracas, fortes e eletromagnéticas [25]. Neste capítulo, estudamos o espalhamento quântico de partículas em potenciais esfericamente simétricos.

3.1 Espalhamento não-Relativístico

Para estudar o processo de espalhamento quântico, vamos considerar a seguinte situação: uma partícula livre vinda do infinito pela esquerda na direção do eixo z , incide em uma região limitada do espaço (alvo) onde interage com um potencial V e é espalhada. Um detector é colocado na direção definida pelos ângulos θ e φ e coleta informações que permitem investigar o fenômeno. Para facilitar o estudo, consideramos que o potencial é real e de curto alcance, o que significa dizer que a partícula não interage com ele em grandes distâncias, em outras

palavras V tende a zero mais rápido do que $1/r$. Além disso, as partículas do feixe incidente não interagem entre si e os efeitos de seus spins e do alvo não serão considerados, pois queremos investigar o fenômeno no regime não-relativístico.

Como supomos que a partícula veio do infinito, pela esquerda, consideramos que o seu movimento é governado por uma onda plana da forma $\psi(z)_{in} = Be^{ikz}$ e após ser espalhada pelo alvo, a onda distribui-se esfericamente em todo o espaço, podendo ser representada como $\psi_{scatt} = f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}$, onde o termo $(\frac{1}{r})$ foi introduzido para garantir que a função satisfaça a condição de contorno no infinito. Assim, para regiões situadas a grandes distâncias do potencial espalhador, um estado de espalhamento (solução da equação de Schrödinger) deve ter a seguinte forma:

$$\psi = A \left(e^{ikz} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \right). \quad (3.1)$$

Na equação (3.1), a função $f(\theta, \varphi)$ é conhecida como amplitude de espalhamento e o seu módulo ao quadrado fornece a probabilidade da partícula ser espalhada na direção definida por (θ, φ) e A é uma constante de normalização. Na figura 3.1, temos a representação de uma partícula vinda do infinito e sendo espalhada por um potencial esfericamente simétrico.

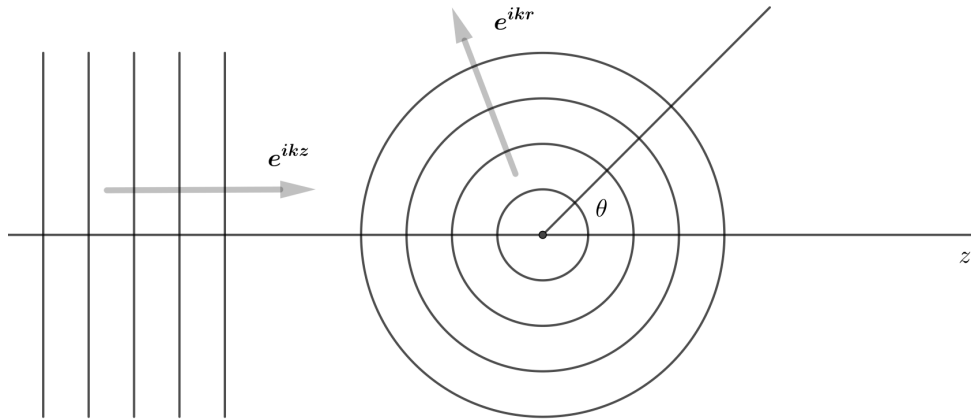


Figura 3.1: Espalhamento em um potencial esfericamente simétrico.

Nesse tipo de processo, as grandezas físicas que devem ser obtidas são as mesmas de interesse para fenômenos de espalhamento clássico: seção de choque, amplitude de espalhamento e deslocamento de fase. A seguir, descreveremos como cada uma dessas quantidades é obtida para o regime de espalhamento quântico.

3.1.1 Seção de choque e amplitude de espalhamento

Consideremos o processo de espalhamento esquematizado na Figura 3.1. Queremos saber qual é a distribuição angular das partículas espalhadas pelo potencial $V(r)$. Em outras palavras, desejamos determinar uma expressão que nos forneça o número de partículas espalhadas por unidade de tempo em um elemento de ângulo sólido $d\Omega$ [25]. A função que nos fornece essa informação é denominada seção de choque diferencial. A fim de encontrar tal relação, vamos utilizar a definição (2.39) e a condição de contorno (3.1) para os estados de espalhamento quando $r \rightarrow \infty$.

A quantidade de partículas espalhadas por unidade de tempo N que atravessam um pequeno elemento de ângulo sólido $\Delta\Omega$ é proporcional ao próprio ângulo sólido e ao fluxo de corrente incidente $\mathbf{J}_{in}$. Assim, podemos escrever N como

$$N = \frac{d\sigma}{d\Omega} \mathbf{J}_{in} \Delta\Omega, \quad (3.2)$$

onde a constante de proporcionalidade $d\sigma/d\Omega$ é a seção de choque diferencial. Isolando-a, encontramos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N}{\mathbf{J}_{in} \Delta\Omega}. \quad (3.3)$$

Verificamos que essa expressão depende do número de partículas espalhadas e da corrente de probabilidade incidente. A corrente $\mathbf{J}_{in}$ é obtida a partir da equação (3.1), considerando somente o termo que corresponde a partícula incidente. Logo,

$$\mathbf{J}_{in} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi_{in}^* \nabla \psi_{in} - \psi_{in} \nabla \psi_{in}^*) \quad (3.4)$$

ou

$$\mathbf{J}_{in} = \frac{i\hbar}{2m} (e^{-ikr \cos \theta} \nabla e^{ikr \cos \theta} - e^{ik \cos \theta} \nabla e^{-ikr \cos \theta}) \quad (3.5)$$

ou ainda

$$\mathbf{J}_{in} = \frac{\hbar k}{2m}. \quad (3.6)$$

O número de partículas N está relacionado com a corrente espalhada através da equação

$$N = \mathbf{J}_{scatt} \cdot \hat{\mathbf{r}} r^2 \Delta\Omega \quad (3.7)$$

onde

$$\mathbf{J}_{scatt} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi_{scatt}^* \nabla \psi_{scatt} - \psi_{scatt} \nabla \psi_{scatt}^*). \quad (3.8)$$

Portanto, podemos escrever a expressão para o número de partícula como

$$\begin{aligned} N &= \frac{i\hbar}{2m} \left(f(\theta, \varphi)^* \frac{e^{-ikr \cos \theta}}{r} \nabla f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr \cos \theta}}{r} - f(\theta, \varphi) \frac{e^{ik \cos \theta}}{r} \nabla f(\theta, \varphi)^* \frac{e^{-ikr \cos \theta}}{r} \right) \cdot \hat{\mathbf{r}} r^2 \Delta\Omega, \\ &= \frac{\hbar k}{2m} |f(\theta, \varphi)|^2 \Delta\Omega. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Substituindo os resultados (3.6) e (3.9) na equação (3.3), encontramos a expressão para seção de choque diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \varphi)|^2. \quad (3.10)$$

Integrando esse resultado sobre todos ângulos sólidos, obtemos a grandeza conhecida como seção de choque total (3.11) que, como podemos ver, depende somente da amplitude de espalhamento $f(\theta, \varphi)$, através da relação

$$\sigma = \int |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega. \quad (3.11)$$

A seção de choque tem unidade de área e pode ser interpretada como a área transversal na qual as partículas devem entrar para que sejam espalhadas pelo potencial $V(r)$.

Um exemplo interessante de aplicação da equação (3.11) é o caso do espalhamento no potencial conhecido como esfera compacta

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq a \\ 0, & r > a. \end{cases} \quad (3.12)$$

Segundo a mecânica newtoniana, a seção de choque total para esse processo é de $\sigma = \pi a^2$. Contudo, os cálculos via mecânica quântica revelam que a seção de choque é $\sigma = 4\pi a^2$, o que corresponde a área superficial de uma esfera de raio a . Enquanto a partícula clássica enxerga à sua frente um obstáculo com área transversal de πr^2 , a partícula quântica percebe uma área que é quatro vezes maior. A figura 3.2, mostra a diferença entre as interpretações clássica e quântica deste fenômeno.

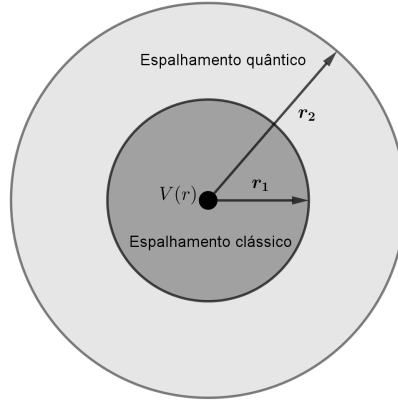


Figura 3.2: Diferença entre as regiões de espalhamento clássico e quântico.

3.1.2 Análise de ondas parciais

Para determinar a amplitude $f(\theta, \varphi)$ de um determinado processo de espalhamento, é preciso resolver a equação de Schrödinger e impor a condição de contorno (3.1) às soluções $\Psi(r)$ no limite assintótico. De acordo com a Ref. [31], em espalhamentos a baixas energias é conveniente a utilização do método de análise de ondas parciais. Esse método foi desenvolvido por Rayleigh para estudar o espalhamento de ondas acústicas em (1873) e utilizado posteriormente em 1927 por Faxen e Holtsmark, para descrever o espalhamento quântico [31]. A análise de ondas parciais é aplicada para potenciais com simetria esférica e consiste na expansão da função de onda para regiões distantes do centro espalhador em termos das autofunções simultâneas do hamiltoniano H e dos operadores $\mathbf{L}^2$ e $\mathbf{L}_Z$, onde cada termo da série contribui com uma onda parcial [25]. A seguir, mostramos como essa série de ondas parciais pode ser obtida.

A equação de Schrödinger para um potencial esfericamente simétrico pode ser escrita como

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\mathbf{L}^2}{r^2} \right] + V(r) \right\} \Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}), \quad (3.13)$$

onde $\mathbf{L}$ é o operador momento angular, definido através da expressão

$$\mathbf{L} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla \quad (3.14)$$

e $\mathbf{L}^2$ da

$$\mathbf{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right], \quad (3.15)$$

com autovalores

$$\mathbf{L}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi),$$

onde $Y_l^m(\theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos. Escrevendo as soluções de (3.13) na forma separável

$$\Psi(\mathbf{r}) = R(r)Y_l^m(\theta, \phi), \quad (3.16)$$

e substituindo, encontramos a equação radial

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left(\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r) \right) u_l = E u_l, \quad (3.17)$$

onde $u_l(r) = rR(r)$. No limite assintótico ($r \rightarrow \infty$) essa equação toma a forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} = E u_l, \quad (3.18)$$

cujas soluções são

$$u_l(r) = A_l e^{ikr} + B_l e^{-ikr}, \quad (3.19)$$

com $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$. O primeiro termo representa uma onda se deslocando para além do centro espalhador enquanto o segundo termo representa uma onda de entrada [26]. Para r muito grande, a onda espalhada é proporcional a $R(r) \sim \frac{e^{ikr}}{r}$, o que corrobora com a condição de contorno (3.1).

Próximo do centro espalhador, existe uma região denominada região intermediária onde podemos desconsiderar a contribuição do potencial $V(r)$ e manter apenas o termo centrífugo. Para essa região a equação radial é

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u_l = -k^2 u_l, \quad (3.20)$$

com solução dada pela combinação linear das funções esféricas de Bessel na forma (3.21)

$$u_l(r) = r [A_l j_l(kr) + B_l n_l(kr)]. \quad (3.21)$$

Contudo, nem j_l e nem n_l comportam-se como ondas de saída ou de entrada [26]. Assim, outras combinações das funções de Bessel devem ser usadas no lugar de (3.21). Uma combinação possível, pode ser dada em termos das funções de Hankel $h_l(x)$, que podem ser de primeiro ou de segundo tipo. As de primeiro tipo, comportam-se como e^{ikr}/r para $r \rightarrow \infty$ e as de segundo tipo como e^{-ikr}/r no mesmo limite. Assim, usando as funções de Hankel de primeiro tipo, a solução completa para $\Psi(\mathbf{r})$ na região intermediária pode ser escrita como

$$\Psi(\mathbf{r}) = A \left[e^{ikr} + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm} h_l^{(1)}(kr) Y_l^m(\theta, \phi) \right]. \quad (3.22)$$

Por conta da simetria esférica do potencial, apenas os termos com $m = 0$ vão contribuir com a série. Desta forma, os harmônicos esféricos podem ser escritos como

$$Y_l^m(\theta, \phi) = Y_l^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \quad (3.23)$$

e, conseqüentemente, podemos escrever $\Psi(\mathbf{r})$ como

$$\Psi(r, \theta) = A \left\{ e^{ikr} + \sum_{l=0}^{\infty} C_l h_l^{(1)}(kr) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \right\}. \quad (3.24)$$

Agora, fazendo $C_l = i^{l+1} k \sqrt{4\pi(2l+1)} a_l$ e substituindo em (3.24), chegamos na expressão final para a função de onda

$$\Psi(r, \theta) = A \left\{ e^{ikr} + k \sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1} (2l+1) a_l h_l^{(1)}(kr) P_l(\cos \theta) \right\}. \quad (3.25)$$

Onde os a_l são conhecidos como amplitudes de ondas parciais.

Agora que já conhecemos a solução $\Psi(r, \theta)$ em termos da série de ondas parciais, podemos obter a expressão para a amplitude de espalhamento. Primeiro, devemos notar que no limite assintótico ($r \rightarrow \infty$), a função de Hankel $h_l^{(1)}$ se comporta como $(-i)^{l+1} \frac{e^{ikr}}{kr}$. Desse modo, podemos reescrever a equação (3.25) na forma

$$\Psi(r, \theta) = A \left\{ e^{ikr} + k \sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1} (2l+1) a_l (-i)^{l+1} \frac{e^{ikr}}{kr} P_l(\cos \theta) \right\} \quad (3.26)$$

ou de maneira mais compacta, como

$$\Psi(r, \theta) = A \left\{ e^{ikr} + \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l P_l(\cos \theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right\}. \quad (3.27)$$

Comparando (3.27) com a condição de contorno (3.1), podemos concluir que a amplitude de espalhamento $f(\theta)$ é dada por

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l P_l(\cos \theta). \quad (3.28)$$

De posse da amplitude de espalhamento, podemos obter a seção de choque total em função das amplitudes de ondas parciais integrando o módulo de $f(\theta)$ sobre todos os ângulos sólidos, conforme a equação (3.11), ou seja

$$\sigma(\theta) = \int \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} (2l+1) ((2l'+1) a_l a_{l'}^* P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.29)$$

ou

$$\sigma(\theta) = 2\pi \int_{-1}^1 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} (2l+1)((2l'+1) a_l a_{l'}^* P_l(\cos \theta) P_{l'}'(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (3.30)$$

ou ainda, usando a ortogonalidade dos polinômios de Legendre,

$$\sigma(\theta) = 2\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} (2l+1)((2l'+1) a_l a_{l'}^* \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |a_l|^2. \quad (3.31)$$

3.1.3 Deslocamento de fase

Retornando à equação (3.21) e tomando o limite $r \rightarrow \infty$, onde temos os resultados

$$j_l(kr) \rightarrow \frac{\sin(kr - \frac{l\pi}{2})}{kr} \quad (3.32)$$

e

$$n_l(kr) \rightarrow \frac{\cos(kr - \frac{l\pi}{2})}{kr}, \quad (3.33)$$

podemos escrever a função radial como

$$R_l(r) \rightarrow C_l [\cos \delta_l j_l(kr) + \sin \delta_l n_l(kr)] = C_l \frac{\sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(k))}{kr}, \quad (3.34)$$

onde $\delta_l(k)$ é o ângulo definido por

$$\tan \delta_l(k) = -\frac{B_l}{A_l}$$

e C_l é dado por

$$C_l = \sqrt{A_l^2 + B_l^2}.$$

A fase $\delta_l(k)$ que aparece na equação (3.34) é denominada deslocamento de fase e representa a interferência de $V(r)$ na função de onda para regiões bem afastadas do centro do potencial espalhador [32].

É possível escrever a seção de choque (3.31) somente em termos do deslocamento de fase. Para isso, expandimos a onda incidente em função de ondas parciais usando a fórmula de *Rayleigh*, ou seja, escrevemos [33, 34]

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (3.35)$$

e substituímos em (3.27) para obter

$$\Psi(r, \theta) = A \sum_{l=0}^{\infty} \left[i^l j_l(kr) + a_l \frac{e^{ikr}}{r} \right] (2l+1) P_l(\cos \theta). \quad (3.36)$$

Usando a equação (3.32), escrevemos $\Psi(r, \theta)$ como [35]

$$\Psi(r, \theta) \rightarrow A \sum_{l=0}^{\infty} \left[i^l \frac{\sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right)}{kr} + a_l \frac{e^{ikr}}{r} \right] (2l+1) P_l(\cos \theta) \quad (3.37)$$

o que resulta na equação

$$\Psi(r, \theta) \rightarrow A \sum_{l=0}^{\infty} \left[i^l \frac{[(-i)^l e^{ikr} - i^l e^{-ikr}]}{2ikr} + a_l \frac{e^{ikr}}{r} \right] (2l+1) P_l(\cos \theta) \quad (3.38)$$

ou

$$\begin{aligned} \Psi(r, \theta) \simeq & -\frac{e^{-ikr}}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} i^{2l} (2l+1) P_l(\cos \theta) \\ & + \frac{e^{ikr}}{r} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l (-i)^l}{2ik} (2l+1) P_l(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} a_l (2l+1) P_l(\cos \theta) \right] \end{aligned} \quad (3.39)$$

ou ainda

$$\Psi(r, \theta) \simeq -\frac{e^{-ikr}}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} i^{2l} (2l+1) P_l(\cos \theta) + \frac{e^{ikr}}{r} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l (-i)^l}{2ik} (2l+1) P_l(\cos \theta) + f(\theta) \right]. \quad (3.40)$$

Por outro lado, a solução da equação de Schrödinger pode ser escrita na forma

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a'_l R_l(r) P_l(\cos \theta) \quad (3.41)$$

e substituindo a solução (3.34), encontramos

$$\begin{aligned} \Psi(r, \theta) & \rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} a'_l \frac{\sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(k) \right)}{kr} P_l(\cos \theta) \\ & = -\frac{e^{-ikr}}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} a'_l i^l e^{-i\delta_l} P_l(\cos \theta) + \frac{e^{ikr}}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} a'_l (-i)^l e^{i\delta_l} P_l(\cos \theta). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Agora, estabelecendo a comparação entre as equações (3.40) e (3.42), obtemos

$$a'_l i^l e^{-i\delta_l} = i^{2l} (2l+1) \Rightarrow a'_l = i^l (2l+1) e^{i\delta_l}, \quad (3.43)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l (-i)^l}{2ik} (2l+1) P_l(\cos \theta) + f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} a'_l (-i)^l e^{i\delta_l} P_l(\cos \theta). \quad (3.44)$$

Substituindo a'_l (dado em (3.43)) na equação (3.44), temos

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l (-i)^l}{2ik} (2l+1) P_l(\cos \theta) + f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} (-i)^l i^l e^{i\delta_l} P_l(\cos \theta)$$

ou

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{(e^{2i\delta_l} - 1)}{2i} P_l(\cos \theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) P_l(\cos \theta). \quad (3.45)$$

Comparando (3.45) com a equação (3.28), obtemos as amplitudes de ondas parciais em termos dos deslocamentos de fase

$$a_l = \frac{e^{i\delta_l} \sin(\delta_l)}{k}. \quad (3.46)$$

Substituindo a expressão (3.46) em (3.31), encontramos a seção de choque total

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2(\delta_l). \quad (3.47)$$

Essa equação nos mostra que é possível determinar a seção de choque para um determinado processo de espalhamento se conhecemos os deslocamentos de fase, isto é, a influência do potencial espalhador sobre as ondas parciais para regiões bem distantes do centro, podemos determinar a seção de choque total uma vez que está quantidade que caracteriza o processo pode ser escrita inteiramente em função dos deslocamentos de fase.

3.2 Espalhamento em um potencial do tipo coulombiano

Na seção anterior, obtivemos expressões para as grandezas relevantes em um processo de espalhamento quântico por potenciais esfericamente simétricos de curto alcance, que convergem para zero mais rápido que $1/r^2$. Agora, vamos investigar o espalhamento de partículas carregadas num potencial coulombiano, considerado de longo alcance em decorrência do seu decaimento lento. Devido as características desse potencial, veremos a seguir que tanto a onda incidente quanto a onda espalhada serão modificadas e isso refletirá nas demais grandezas.

Em grande parte da bibliografia disponível, o espalhamento de partículas carregadas por um potencial coulombiano é tratado no sistema de coordenadas parabólicas [25, 32, 36]. Aqui, também usamos esse sistema. A relação entre as coordenadas esféricas (r, θ, φ) e as coordenadas parabólicas (ζ, ξ, φ) é dada por

$$\zeta = r(1 + \cos \theta), \quad (3.48)$$

$$\xi = r(1 - \cos \theta), \quad (3.49)$$

$$\varphi = \varphi.$$

Usando essas relações, podemos escrever a equação de Schrödinger da forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{4}{\zeta + \xi} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \right) + \frac{1}{\zeta \xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{2e^2}{\zeta + \xi} \psi = E\psi \quad (3.50)$$

ou através do laplaciano em coordenadas parabólicas ∇_p^2

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_p^2 - \frac{2e^2}{\zeta + \xi} \right) \psi = E\psi. \quad (3.51)$$

Mediante as substituições $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{1}{2} m v_0^2$ e $\gamma = \frac{e^2}{\hbar v_0^2}$, tal expressão pode ser escrita como

$$\left[\nabla_p^2 + k^2 - \frac{\gamma k}{r} \right] \psi = E\psi. \quad (3.52)$$

Agora, supondo soluções da forma [24]

$$\psi = A e^{ik(\zeta - \xi)/2} f(\xi) \quad (3.53)$$

e depois substituindo na Eq. (3.52), a equação resultante é a equação hipergeométrica confluyente

$$\left[\eta \frac{d^2}{d\eta^2} + (1 - \eta) \frac{d}{d\eta} + i\gamma \right] f(\eta) = 0, \quad (3.54)$$

onde $\eta = ik\xi$. A solução dessa equação pode ser escrita como [24]

$$\psi = A e^{ikz} \Phi(-i\gamma, 1, \eta = ik(r - z)), \quad (3.55)$$

onde $\Phi(a, b, z)$ é dado em termos da série

$$\Phi(a, b, z) = 1 + \frac{a}{b} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{(b(b+1))} \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b)x^n}{\Gamma(b+n)\Gamma(a)n!}. \quad (3.56)$$

Para $r \rightarrow \infty$, isto é, no limite assintótico, a função $\Phi(a, b, z)$ tende para $\Phi(a, b, z) = W_1(a, b, z) + W_2(a, b, z)$, em que

$$W_1(a, b, z) \simeq \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} (-z)^{-a} \sum_n \frac{\Gamma(n+a)\Gamma(n+a-b+1)}{\Gamma(a)\Gamma(a-b-1)} \frac{(-z)^{-n}}{n!} \quad (3.57)$$

$$W_2(a, b, z) \simeq \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b} \sum_n \frac{\Gamma(n+1-a)\Gamma(n+b-a)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \frac{(z)^{-n}}{n!}. \quad (3.58)$$

Substituindo essas expressões na equação (3.55), obtemos finalmente a forma da solução da equação de Schrödinger para os estados de espalhamento no potencial coulombiano

$$\Psi_r \simeq \frac{A(-i)^{i\gamma}}{\Gamma(1+i\gamma)} \left[e^{i(kz + \gamma \ln k(r-z))} - \frac{\gamma \Gamma(1+i\gamma)}{k(r-z)\Gamma(1-i\gamma)} e^{i(kr - \gamma \ln k(r-z))} \right] \quad (3.59)$$

da qual identificamos que

$$\Psi_r \propto \left[e^{i(kz + \gamma \ln k(r-z))} - \frac{f(\theta)}{r} e^{i(kr - \gamma \ln k(r-z))} \right], \quad (3.60)$$

onde a amplitude de espalhamento é expressa por

$$f(\theta) = -\frac{\gamma}{2k \sin^2(\frac{\theta}{2})} \frac{\Gamma(1 + i\gamma)}{\Gamma(1 - i\gamma)} e^{-i\gamma \ln \sin^2(\frac{\theta}{2})}. \quad (3.61)$$

Comparando as expressões (3.59) e (3.1), notamos de fato que as ondas incidente e espalhada são influenciadas pelo potencial, o qual é evidenciado pela presença do termo logarítmico acompanhando as exponenciais, em virtude do decaimento lento do potencial, como mencionado antes.

É possível mostrar que a solução radial no limite assintótico pode ser escrita como

$$\psi(r \rightarrow \infty) \rightarrow \sin(kr - \gamma \ln 2kr + \delta_l - \frac{l\pi}{2}). \quad (3.62)$$

em que δ_l é o deslocamento de fase, dado por

$$\delta_l = \arg \Gamma(l + 1 + i\gamma). \quad (3.63)$$

Em termos do deslocamento de fase, a amplitude de espalhamento fica expressa na forma [24, 37]

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(S_l - 1)P_l(\cos\theta), \quad (3.64)$$

onde S é a matriz de espalhamento, definida como:

$$S_l = \frac{\Gamma(l + 1 + i\eta)}{\Gamma(l + 1 - i\eta)} = \exp(2i\delta_l). \quad (3.65)$$

De posse da amplitude de espalhamento, podemos determinar as seções de choque diferencial e total para o espalhamento coulombiano. Isso é feito fazendo uso das equações

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (3.66)$$

e

$$\sigma = \int |f(\theta)|^2 d\Omega. \quad (3.67)$$

Os conceitos desenvolvidos até aqui, principalmente as equações (3.64), (3.65), (3.66) e (3.67) serão utilizados no próximo capítulo a fim de adaptá-los para o espalhamento no potencial coulombiano sob a influencia da corda cósmica. Isso porque essas expressões representam as quantidades de interesse nos processos de espalhamento por serem grandezas mensuráveis.

A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NO ESPAÇO DA CORDA CÓSMICA

Os defeitos topológicos surgem naturalmente em teorias de campos relativísticas e desempenham um papel relevante em diversos cenários cosmológicos [10]. Entre esses defeitos, as cordas cósmicas destacam-se por induzirem uma modificação global da estrutura do espaço-tempo, caracterizada por um déficit angular, mesmo na ausência de curvatura local fora de seu eixo [11]. Essa peculiaridade torna tais objetos um laboratório conceitual privilegiado para investigar como propriedades puramente geométricas podem influenciar sistemas quânticos [?, 38].

Neste capítulo, estudamos o comportamento de uma partícula não relativística sujeita a um potencial coulombiano no espaço-tempo gerado por uma corda cósmica. Inicialmente, apresentamos as principais características geométricas desse defeito topológico e derivamos a equação de Schrödinger apropriada ao cenário considerado. Em seguida, obtemos a equação radial resultante, na qual a topologia manifesta-se por meio da modificação do termo centrífugo efetivo.

A partir dessa formulação, analisamos tanto o problema de espalhamento quanto os estados ligados do sistema. Mostramos que a presença da corda cósmica altera o comportamento assintótico das soluções, modificando os deslocamentos de fase e, conseqüentemente, a matriz de espalhamento. Essa abordagem permite estabelecer uma conexão direta entre o processo de

espalhamento e o espectro de energia dos estados ligados, o qual é extraído a partir dos polos da matriz S .

Os resultados obtidos evidenciam que, embora o potencial de interação permaneça coulombiano, a topologia do espaço-tempo é capaz de produzir efeitos mensuráveis na dinâmica quântica da partícula. Dessa forma, o sistema estudado constitui um exemplo claro de como defeitos topológicos podem deixar assinaturas observáveis em processos quânticos, revelando o papel fundamental da geometria global do espaço-tempo.

4.1 Cordas Cósmicas

Antes de introduzir o formalismo quântico propriamente dito, é necessário estabelecer o cenário geométrico no qual o problema físico será formulado. Nesta seção, apresentamos os conceitos fundamentais associados às cordas cósmicas, enfatizando sua origem como defeitos topológicos, bem como as principais características geométricas do espaço-tempo por elas gerado. Em particular, mostramos que, embora o espaço seja localmente plano fora do eixo da corda, sua estrutura global é modificada por um déficit angular, o qual desempenha papel central em toda a análise subsequente. Essa peculiaridade geométrica será a responsável direta pelas alterações introduzidas na equação de Schrödinger e, conseqüentemente, nos processos de espalhamento e nos estados ligados estudados neste capítulo.

4.1.1 Defeitos topológicos e cordas cósmicas

O modelo que deu origem às cordas cósmicas tem suas raízes na proposta formulada por Dirac na década de 1940, no contexto de monopolos magnéticos em teorias abelianas [10, 11]. Segundo [39], Dirac concebeu os monopolos magnéticos como extremidades de cordas infinitas de cargas, ao longo das quais o potencial seria singular e por onde fluiriam linhas de campo. Embora originalmente introduzida como um artifício matemático, essa ideia evoluiu ao longo das décadas seguintes.

Em 1970, Nambu passou a considerar essas cordas como entidades físicas que poderiam, em princípio, manifestar-se na realidade [39]. Sabe-se que, desde os instantes iniciais, o Universo atravessou sucessivas transições de fase associadas à quebra espontânea de simetrias [39, 10]. Tais processos podem dar origem a estruturas exóticas, entre as quais se destacam as cordas

cósmicas. De modo geral, a cada quebra de simetria está associado um defeito, o que permite interpretar as cordas cósmicas como defeitos topológicos do espaço-tempo [10].

Embora ainda não tenham sido observadas experimentalmente, acredita-se que essas estruturas possam apresentar-se na forma de laços fechados ou de linhas extremamente longas, com extensão comparável à do próprio Universo. Sua espessura típica é estimada da ordem de 10^{-29} cm, e sua densidade linear de massa é extremamente elevada. Como consequência, apenas um centímetro de corda poderia possuir uma massa da ordem de 10^{21} kg, tornando essas entidades gravitacionalmente relevantes mesmo em escalas microscópicas [39, 10].

4.1.2 Métrica do espaço da corda cósmica

Geometricamente, uma corda cósmica é descrita pelo seguinte elemento de linha, em coordenadas esféricas,

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + \alpha^2 r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (4.1)$$

onde θ está definido no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$, r assume valores entre 0 e infinito, e

$$\alpha = 1 - \frac{4G}{c^2} \mu,$$

com G representando a constante gravitacional de Newton, c a velocidade da luz e μ a densidade linear de massa da corda. O parâmetro α , definido no intervalo $[0, 1]$ para garantir curvatura positiva do espaço-tempo, é o responsável por registrar a presença da corda cósmica por meio de um déficit angular [5, 10].

O espaço-tempo descrito pela métrica (4.1) é localmente plano e, como consequência, não existe potencial newtoniano associado à corda fora de seu eixo. Ainda assim, sua geometria global é não trivial, uma vez que o intervalo angular efetivo é reduzido por um fator α , caracterizando um déficit angular $\Delta = 2\pi(1 - \alpha)$. Essa métrica surge como solução das equações de Einstein na relatividade geral e foi obtida inicialmente por Hiscock [11], a partir dos resultados de Vilenkin [5, 10].

4.1.3 Interpretação geométrica do déficit angular

A principal característica física da métrica (4.1) reside no fato de que, embora o espaço-tempo seja localmente plano fora do eixo da corda, sua estrutura global difere da euclidiana. Em particular, o ângulo azimutal efetivo deixa de variar em um intervalo de comprimento 2π ,

passando a assumir o intervalo $2\pi\alpha$. Essa modificação é geometricamente equivalente à remoção de uma “fatia” do plano, seguida da identificação de suas bordas, resultando em um espaço com topologia cônica.

Essa geometria é típica de fontes lineares em relatividade geral e foi analisada de forma sistemática por Hiscock [11], a partir dos resultados de Vilenkin [10]. Nessa construção, toda a curvatura do espaço-tempo encontra-se concentrada no eixo da corda, enquanto que, fora dele, o espaço é rigorosamente plano. Como consequência, partículas em movimento não experimentam uma força gravitacional local associada à corda. Ainda assim, suas trajetórias e fases quânticas são afetadas pela estrutura global do espaço-tempo.

Esse caráter puramente geométrico do efeito gravitacional é análogo ao discutido por Deser, Jackiw e Hooft [40] no contexto da gravitação em baixas dimensões, onde fontes pontuais geram espaços cônicos na ausência de um campo gravitacional local. No caso das cordas cósmicas, essa peculiaridade manifesta-se por meio do déficit angular, o qual pode produzir consequências físicas observáveis mesmo em regiões onde a curvatura é nula.

Um exemplo notável desse fenômeno é fornecido pelos efeitos de lente gravitacional associados às cordas cósmicas. Como mostrado por Gott [41], imagens duplicadas de objetos distantes podem surgir não em virtude de uma deflexão dinâmica, mas como resultado direto da topologia cônica do espaço-tempo. Tal comportamento ilustra de forma clara que a corda cósmica não atua como uma fonte gravitacional convencional, mas como um agente geométrico que modifica globalmente a estrutura do espaço.

No contexto deste trabalho, o déficit angular será responsável pela modificação do termo centrífugo efetivo na equação radial de Schrödinger, por meio da substituição

$$l \longrightarrow l_\alpha = \frac{l}{\alpha}.$$

Essa alteração repercute tanto no comportamento assintótico das soluções quanto no espectro de energia dos estados ligados, estabelecendo uma ligação direta entre a geometria do espaço-tempo e a dinâmica quântica da partícula. Dessa forma, efeitos topológicos globais passam a manifestar-se em grandezas quânticas observáveis, como deslocamentos de fase, amplitudes de espalhamento e níveis de energia.

Como mencionado anteriormente, essas considerações mostram que a presença da corda cósmica não se manifesta por meio de um campo gravitacional local, mas através de uma modificação global da geometria do espaço. Consequentemente, qualquer teoria quântica for-

mulada nesse cenário deve incorporar essa estrutura geométrica desde o início. Em particular, a dinâmica de uma partícula quântica será governada por uma equação de Schrödinger construída a partir da métrica (4.1), na qual o déficit angular se refletirá diretamente nos operadores diferenciais e, em última instância, no comportamento das soluções físicas. Na seção seguinte, derivamos explicitamente essa equação e analisamos como o defeito topológico altera a forma da equação de Schrödinger e de suas soluções.

4.2 Equação de Schrödinger com o defeito topológico

Conhecida a métrica que descreve o espaço-tempo de uma corda cósmica, estamos em posição de formular a equação de Schrödinger nesse cenário geométrico e, a partir dela, investigar de que maneira a topologia influencia a dinâmica quântica do sistema considerado. Como discutido na seção anterior, embora o espaço seja localmente plano fora do eixo da corda, sua estrutura global é modificada por um déficit angular, o qual deve refletir-se diretamente na forma dos operadores diferenciais.

Iniciamos essa construção a partir do laplaciano definido no espaço caracterizado pela métrica (4.1). Em um espaço arbitrário, esse operador é conhecido como operador de Laplace–Beltrami e é definido como [16, 42, 43]

$$\nabla^2 = g^{-1/2} \partial_i (g^{ij} g^{1/2} \partial_j), \quad (4.2)$$

no qual $i, j = 1, 2, 3$ e g é o determinante de g^{ij} , ($g = \det(g^{ij})$). Como queremos investigar o espalhamento no regime não-relativístico, a componente temporal de (4.1) deve ser suprimida. Dessa forma, a representação matricial do tensor métrico associado com (4.1) é

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Calculando o determinante desse tensor e substituindo em (4.2), obtemos o operador de Laplace–Beltrami no espaço curvo da corda cósmica

$$\nabla_{LB}^2 = \frac{1}{r^2} \left[2r \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\alpha^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (4.4)$$

Agora, fazendo a troca de $\nabla^2 \rightarrow \nabla_{LB}^2$ em (2.4), encontramos a equação de Schrödinger independente do tempo para o espaço da corda, com o potencial de interação esfericamente simétrico $V(r)$. Portanto,

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \left[2r \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\alpha^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \psi(\mathbf{r}) + V(r)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (4.5)$$

ou

$$H_{LB}\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (4.6)$$

onde o hamiltoniano

$$H_{LB} = -\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \left[2r \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\alpha^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] + V(r). \quad (4.7)$$

A seguir, solucionamos a equação (4.6) para obter os estados de espalhamento.

4.3 Solução da Equação de Schrödinger

Como o hamiltoniano (4.7) é independente do tempo, podemos escrever as soluções da equação de Schrödinger (4.5) na forma de um produto de funções, com cada função dependendo de uma única variável, isto é, $\psi(\mathbf{r}) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. Substituindo essa solução na equação (4.5), obtemos a expressão

$$\left[2r \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + r^2 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial^2} - \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} (V - E) \right] = - \left[\cot \theta \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\alpha^2 \sin^2 \theta} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (4.8)$$

Observando a equação (4.8), notamos que o lado esquerdo da igualdade depende somente da variável r enquanto o lado direito depende das variáveis θ e φ . Logo, ela será verdadeira somente se ambos os lados forem iguais a uma constante. Tal constante é denotada por λ . Dessa forma, podemos separar a parte angular da parte radial, escrevendo

$$\begin{cases} 2r \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + r^2 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial^2} - \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} (V - E) = \lambda, \\ \cot \theta \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\alpha^2 \sin^2 \theta} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -\lambda. \end{cases} \quad (4.9)$$

A equação radial pode ser simplificada se definimos a função $u(r) = rR(r)$ e suas respectivas derivadas

$$\frac{dR}{dr} = \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}, \quad (4.10)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = -\frac{1}{r^2} \frac{du}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 u}{dr^2} + 2\frac{u}{r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{du}{dr}. \quad (4.11)$$

Fazendo a substituição de (4.10) e (4.11) na primeira equação de (4.9), obtemos a equação radial

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[V - \frac{\hbar^2 \lambda^2}{2m r^2} \right] u = Eu. \quad (4.12)$$

Definindo o potencial efetivo $V_{\text{ef}} = V - \frac{\hbar^2 \lambda^2}{2m r^2}$, escrevemos esta última expressão como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + V_{\text{ef}} u = Eu. \quad (4.13)$$

A parte angular da equação (4.9) pode ser separada em duas equações. Para isso, multiplicamos a segunda equação de (4.9) por $\alpha^2 \sin^2 \theta$. A equação resultante é

$$\alpha^2 \sin \theta \cos \theta \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + \alpha^2 \sin^2 \theta \frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -\lambda^2 \alpha^2 \sin^2 \theta, \quad (4.14)$$

a qual, novamente, só será verdadeira se cada um dos lados forem iguais a uma constante m^2 . Introduzindo essa constante na equação (4.14), obtemos as equações diferenciais para $\Theta(\theta)$ e $\Phi(\phi)$,

$$\begin{cases} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m^2, \\ \alpha^2 \sin \theta \cos \theta \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + \alpha^2 \sin^2 \theta \frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \lambda^2 \alpha^2 \sin^2 \theta = m^2. \end{cases} \quad (4.15)$$

A primeira equação possui solução bem simples, pois é uma equação diferencial linear de segunda ordem e homogênea. Para resolvê-la, basta explorarmos a simetria axial do potencial $V(r)$. Dando uma volta completa em torno do eixo de simetria, os valores da função coincidem. Assim, a função deve satisfazer à condição

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \quad (4.16)$$

Reescrevendo a equação para Φ , temos

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + m^2 \Phi = 0. \quad (4.17)$$

Aplicando a condição (4.16) em (4.17), encontramos as soluções normalizadas

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}, \quad (4.18)$$

com $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Para facilitar a resolução da segunda equação em (4.15), vamos introduzir a variável $x = \cos \theta$. Assim, escrevemos $\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{dx} \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d}{dx}$. Substituindo esses resultados em (4.18), encontramos a equação diferencial associada de Legendre generalizada (4.19)

$$(1 - x^2) \frac{d^2 F(x)}{dx^2} - 2x \frac{dF(x)}{dx} + \left[\lambda - \frac{m^2}{\alpha^2(1 - x^2)} \right] F(x) = 0 \quad (4.19)$$

ou

$$(1-x^2)\frac{d^2F(x)}{dx^2} - 2x\frac{dF(x)}{dx} + \left[\lambda - \frac{m_\alpha^2}{(1-x^2)}\right]F(x) = 0, \quad (4.20)$$

com $m_\alpha = m/\alpha$. Supondo agora soluções da forma

$$F(x) = (1-x^2)^{\frac{m_\alpha}{2}} \mathbb{P}(x), \quad (4.21)$$

e substituindo em (4.20), achamos, após manipulações algébricas, a equação diferencial

$$(1-x^2)\frac{d^2\mathbb{P}}{dx^2} - 2(m_\alpha+1)x\frac{d\mathbb{P}(x)}{dx} + [\lambda - m_\alpha(m_\alpha+1)]\mathbb{P}(x) = 0, \quad (4.22)$$

com pontos singulares em $x = \pm 1$. Essa equação, possui uma solução em série de potências em torno do ponto $x = 0$. Essa solução é dada por [44, 45]

$$\mathbb{P} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (4.23)$$

com derivadas de primeira e segunda ordens dadas, respectivamente, por

$$\frac{d\mathbb{P}}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (4.24)$$

e

$$\frac{d^2\mathbb{P}}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}. \quad (4.25)$$

Substituindo (4.25), (4.24) e (4.23) em (4.22), encontramos a expressão

$$(1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2(m_\alpha+1)x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - [m_\alpha^2 + m_\alpha - \lambda] \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad (4.26)$$

ou

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - 2(m_\alpha+1) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - [m_\alpha^2 + m_\alpha - \lambda] \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \quad (4.27)$$

A fim de obter a relação de recorrência para os coeficientes a_n , vamos escrever todos os somatórios de tal modo que eles de $n = 2$ e depois reunir as potências comum em x^n . Fazendo isso, chegamos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & 2a_2 + 6a_3x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - 2(m_\alpha+1) a_1 x \\ & - 2(m_\alpha+1) \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n - [m_\alpha^2 + m_\alpha - \lambda] a_0 - [m_\alpha^2 + m_\alpha - \lambda] a_1 x \\ & - [m_\alpha^2 + m_\alpha - \lambda] \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

da qual obtemos as relações

$$2a_2 + [\lambda - m_\alpha(m_\alpha + 1)] a_0 = 0, \quad (4.29)$$

$$6a_3 + [\lambda - m_\alpha(m_\alpha + 1)] a_1 - 2(m_\alpha + 1)a_1 = 0, \quad (4.30)$$

$$\{(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2(m_\alpha + 1)na_n - [m_\alpha^2 + m_\alpha - \lambda] a_n\} = 0. \quad (4.31)$$

Essa última equação é a relação de recorrência para os coeficientes da série e pode ser posta na forma

$$a_{n+2} = \frac{n(n-1) + (m_\alpha + 1)(m_\alpha + 2n) - \lambda}{(n+2)(n+1)} a_n. \quad (4.32)$$

A partir da relação de recorrência (4.32) e da série (4.23), é possível mostrar que se x for maior que -1 e menor que 1 , isto é, $|x| < 1$, a série (4.23) converge. Contudo, ela diverge em $x = \pm 1$, o que não é aceitável fisicamente, uma vez que grandezas físicas são representadas por funções finitas. Para obtermos então soluções finitas, devemos truncar a série, de forma que para algum $n = N$ tenhamos o termo $a_{N+2} = 0$, o que só é possível se

$$\lambda = l_\alpha(l_\alpha + 1), \quad (4.33)$$

$$l_\alpha = m_\alpha + N. \quad (4.34)$$

Substituindo $\lambda = l_\alpha(l_\alpha + 1)$ na equação (4.19), obtemos a equação de Legendre generalizada [45]

$$(1-x^2)\frac{d^2F(x)}{dx^2} - 2x\frac{dF(x)}{dx} + \left[l_\alpha(l_\alpha + 1) - \frac{m_\alpha^2}{(1-x^2)}\right] F(x) = 0, \quad (4.35)$$

cujas soluções são dadas por [46]

$$F_{l_\alpha}^{m_\alpha} = \frac{1}{2^{l_\alpha} l_\alpha!} (1-x^2)^{\frac{m_\alpha}{2}} \frac{d^{m_\alpha+l_\alpha}}{dx^{m_\alpha+l_\alpha}} (x-1)^{l_\alpha}. \quad (4.36)$$

A expressão (4.36) fornece a forma explícita das autofunções angulares no espaço da corda cósmica, constituindo uma generalização direta das funções associadas de Legendre do caso euclidiano. A presença do índice modificado l_α reflete o efeito do déficit angular introduzido pela topologia do espaço-tempo. No limite $\alpha \rightarrow 1$, recuperam-se as funções usuais da mecânica quântica em espaço plano, evidenciando que a influência da corda manifesta-se exclusivamente por meio da geometria global.

Do ponto de vista físico, essa etapa garante a regularidade das soluções no domínio angular e fixa os valores admissíveis do momento angular efetivo. Com isso, o problema angular encontra-se completamente determinado, permitindo-nos retornar à equação radial para investigar os

estados de espalhamento no espaço da corda cósmica, tal como feito no capítulo anterior. Essa análise é realizada na próxima seção.

4.4 Espalhamento no potencial coulombiano na presença da corda

Como discutido na Subseção 3.1.1, o espalhamento por potenciais esfericamente simétricos manifesta-se predominantemente na componente radial da corrente de probabilidade. Assim, no caso presente, a análise dos estados de espalhamento na presença da corda cósmica reduz-se à resolução da equação radial (4.12), na qual a topologia do espaço-tempo encontra-se incorporada por meio do momento angular efetivo l_α .

O primeiro passo consiste na determinação dos deslocamentos de fase associados às ondas parciais. Esses deslocamentos codificam toda a informação dinâmica do processo de espalhamento e permitem, de forma direta, a construção da amplitude de espalhamento e da seção de choque diferencial. Dessa maneira, torna-se possível identificar explicitamente as correções de origem topológica introduzidas pela presença da corda cósmica.

Para tornar explícita a influência do defeito topológico na dinâmica radial, substituímos a decomposição angular dada por (4.33) na equação radial (4.12). Com isso, obtemos uma equação diferencial apenas para a função radial, na qual a influência da corda cósmica é incorporada pela redefinição do momento angular, que passa a assumir a forma efetiva l_α . A equação resultante pode então ser escrita na forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 y}{dr^2} + \left[V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l_\alpha(l_\alpha + 1)}{r^2} - E \right] y = 0, \quad (4.37)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{d^2 y}{dr^2} + \left[\varepsilon + \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^2}{r} - \frac{l_\alpha(l_\alpha + 1)}{r^2} \right] y = 0, \quad (4.38)$$

onde definimos $\varepsilon = 2mE/\hbar^2$ e utilizamos a expressão do potencial coulombiano $V(r) = -e^2/r$. Observa-se que a estrutura da equação é formalmente idêntica à do problema do hidrogênio em espaço plano, com a diferença essencial de que o termo centrífugo envolve agora o momento angular efetivo l_α , incorporando explicitamente o efeito topológico da corda cósmica. No presente contexto, estamos interessados nos estados de espalhamento, os quais correspondem a

energias positivas ($E > 0$). Para conveniência, introduzimos as variáveis adimensionais k , v_0 e γ , definidas por

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad (4.39)$$

$$v_0 = \sqrt{2E/m}, \quad (4.40)$$

$$\gamma = -\frac{z_1 z_2 e^2}{\hbar v_0} = -\frac{e^2}{\hbar v_0}. \quad (4.41)$$

Com essas definições, a equação (4.38) pode ser reescrita de maneira mais conveniente como

$$\frac{d^2 y}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{2\gamma k}{r} - \frac{l_\alpha(l_\alpha + 1)}{r^2} \right] y = 0. \quad (4.42)$$

Para colocar a equação radial em uma forma conveniente para a obtenção das soluções, introduzimos a mudança de variável complexa

$$\xi = -2ikr.$$

Com essa transformação, a equação (4.42) assume a forma

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \left[-\frac{1}{4} - \frac{i\gamma}{\xi} - \frac{l_\alpha(l_\alpha + 1)}{\xi^2} \right] y = 0, \quad (4.43)$$

na qual a estrutura singular em $\xi = 0$ e o comportamento assintótico para $|\xi| \rightarrow \infty$ tornam-se explícitos. Essa escrita é particularmente adequada para a análise das soluções nos regimes assintóticos, permitindo identificar de forma direta o comportamento físico das ondas incidentes e espalhadas. A seguir, investigamos o comportamento dessa equação nesses limites.

- Para regiões suficientemente distantes do centro do potencial, correspondentes ao regime assintótico $r \rightarrow \infty$, os termos proporcionais a $1/\xi$ e $1/\xi^2$ tornam-se desprezíveis em comparação com o termo constante. Nessa aproximação, a equação (4.43) reduz-se a

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} - \frac{1}{4} y = 0, \quad (4.44)$$

cujas soluções gerais são

$$y(\xi) = A e^{\xi/2} + B e^{-\xi/2}. \quad (4.45)$$

Embora a variável $\xi = -2ikr$ seja complexa, o limite físico relevante é $r \rightarrow \infty$, o que implica $|\xi| \rightarrow \infty$ ao longo da direção $\arg(\xi) = -\pi/2$ no plano complexo. Nesse regime,

$$e^{-\xi/2} = e^{ikr}, \quad e^{\xi/2} = e^{-ikr},$$

de modo que as exponenciais em ξ reproduzem o comportamento ondulatório esperado para uma partícula livre.

A solução física deve, portanto, comportar-se assintoticamente como uma onda propagante do tipo e^{ikr} . Consequentemente, o termo proporcional a $e^{\xi/2}$ deve ser descartado, impondo-se $A = 0$, e a solução assintótica fisicamente admissível assume a forma

$$y(\xi \rightarrow \infty) = B e^{-\xi/2}. \quad (4.46)$$

- Na região próxima ao centro do potencial, correspondente ao regime $r \rightarrow 0$, ou, equivalentemente, $|\xi| \rightarrow 0$, o termo dominante na equação (4.43) é aquele proporcional a $1/\xi^2$. Nesse limite, a contribuição $-l_\alpha(l_\alpha + 1)/\xi^2$ torna-se muito maior que as demais, de modo que a equação pode ser aproximada por uma equação do tipo Euler-Cauchy,

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} - \frac{l_\alpha(l_\alpha + 1)}{\xi^2} y = 0, \quad (4.47)$$

cujas soluções são dadas por

$$y(\xi) = C \xi^{-l} + D \xi^{l_\alpha+1}. \quad (4.48)$$

A primeira parcela dessa solução diverge no limite $r \rightarrow 0$ (ou, equivalentemente, $|\xi| \rightarrow 0$), violando a condição de regularidade da função de onda na origem. Dessa forma, tal termo deve ser descartado, restando apenas a solução fisicamente admissível,

$$y(\xi) = D \xi^{l_\alpha+1}. \quad (4.49)$$

Essas duas observações indicam que a solução completa deve reproduzir, simultaneamente, o comportamento assintótico em grandes distâncias e a regularidade na origem. Para isso, propomos uma solução da forma (4.50), na qual a função $\phi(\xi)$ é introduzida com o objetivo de fatorizar e remover explicitamente os comportamentos dominantes descritos em (4.45) e (4.49). Dessa maneira, $\phi(\xi)$ passa a conter apenas a parte regular da solução, livre das singularidades e do crescimento assintótico.

Consequentemente, podemos escrever

$$y = e^{ikr} \phi(\xi) (kr)^{l_\alpha+1}, \quad (4.50)$$

onde $\phi_{l_\alpha}(\xi)$ deve ser determinada a partir da substituição da forma proposta para y e de suas derivadas na equação (4.43). O procedimento conduz a uma equação diferencial apenas para $\phi_{l_\alpha}(\xi)$, a qual pode ser identificada como a equação diferencial hipergeométrica confluyente,

$$\xi \frac{d^2 \phi_{l_\alpha}}{d\xi^2} + (2l_\alpha + 2 - \xi) \frac{d\phi_{l_\alpha}}{d\xi} - (l_\alpha + 1 + i\gamma) \phi_{l_\alpha} = 0. \quad (4.51)$$

A solução da equação (4.51) pode ser expressa em termos da função hipergeométrica confluyente,

$$\phi_{l_\alpha}(\xi) = F(a, b, z) \equiv {}_1F_1(a; b; z),$$

cujas expansão em série de potências é dada por

$$F(a, b, z) = 1 + \frac{a}{b} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots. \quad (4.52)$$

No presente caso, os parâmetros assumem os valores

$$a = l_\alpha + 1 + i\gamma, \quad b = 2l_\alpha + 2, \quad z = \xi.$$

A condição de contorno apropriada aos estados de espalhamento requer a análise do comportamento da solução no limite assintótico $r \rightarrow \infty$. Nesse regime, correspondente a $|\xi| \rightarrow \infty$, a função hipergeométrica confluyente $F(a, b, z)$ pode ser convenientemente reescrita em termos de duas soluções linearmente independentes, usualmente denotadas por $W_1(a, b, z)$ e $W_2(a, b, z)$, conforme definido em [24, 31].

$$W_1 \simeq \frac{\Gamma(2l_\alpha + 2)}{\Gamma(l_\alpha + 1 - i\gamma)} (-\xi)^{-(l_\alpha + 1 + i\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + l_\alpha + 1 + i\gamma) \Gamma(n - l_\alpha - 1 + i\gamma) (-\xi)^{-n}}{\Gamma(l_\alpha + 1 + i\gamma) \Gamma(-l_\alpha + i\gamma)}, \quad (4.53)$$

com $(-\pi < \arg(-z) < \pi)$, e

$$W_2 \simeq \frac{\Gamma(2l_\alpha + 2)}{\Gamma(l_\alpha + 1 + i\gamma)} e^{\xi} (\xi)^{(-l_\alpha - 1 + i\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n - l_\alpha - i\gamma) \Gamma(n + l_\alpha + 1 - \gamma) (\xi)^{-n}}{\Gamma(-l_\alpha - i\gamma) \Gamma(l_\alpha + 1 - i\gamma) n!}. \quad (4.54)$$

com $(-\pi < \arg(-z) < \pi)$.

Desta forma,

$$F(l_\alpha + 1 + i\gamma, 2l_\alpha + 2, \xi) = W_1(l_\alpha + 1 + i\gamma, 2l_\alpha + 2, \xi) + W_2(l_\alpha + 1 + i\gamma, 2l_\alpha + 2, \xi) \quad (4.55)$$

e, por conseguinte, escrevemos

$$y_l = e^{ikr} (kr)^{l_\alpha + 1} [W_1(l_\alpha + 1 + i\gamma, 2l_\alpha + 2, \xi) + W_2(l_\alpha + 1 + i\gamma, 2l_\alpha + 2, \xi)]. \quad (4.56)$$

Substituindo as equações (4.53) e (4.54) na equação (4.55), e esta, por sua vez, na equação (4.50), obtemos

$$y = e^{ikr} (kr)^{l_\alpha+1} \left\{ \frac{\Gamma(2l_\alpha+2)}{\Gamma(l_\alpha+1-i\gamma)} (-\xi)^{-(l_\alpha+1+i\gamma)} + \frac{\Gamma(2l_\alpha+2)}{\Gamma(l_\alpha+1+i\gamma)} e^\xi (\xi)^{(-l_\alpha-1+i\gamma)} \right\} \quad (4.57)$$

ou

$$y = e^{ikr} (kr)^{l_\alpha+1} \Gamma(2l_\alpha+2) \left\{ \frac{(2ikr)^{-(l_\alpha+1+i\gamma)}}{\Gamma(l_\alpha+1-i\gamma)} + \frac{e^{(-2ikr)} (-2ikr)^{(-l_\alpha-1+i\gamma)}}{\Gamma(l_\alpha+1+i\gamma)} \right\}$$

ou ainda

$$y = (kr)^{l_\alpha+1} \Gamma(2l_\alpha+2) \left\{ \frac{(2kr)^{-(l_\alpha+1+i\gamma)} (i)^{-(l_\alpha+1+i\gamma)}}{\Gamma(l_\alpha+1-i\gamma)} e^{ikr} + e^{(-ikr)} \frac{(2kr)^{(-l_\alpha-1+i\gamma)} (-i)^{(-l_\alpha-1+i\gamma)}}{\Gamma(l_\alpha+1+i\gamma)} \right\} \quad (4.58)$$

Multiplicando (4.58) por $\frac{2^{l_\alpha+1}}{2^{l_\alpha+1}}$, obtemos

$$y = \frac{\Gamma(2l_\alpha+2)}{2^{l_\alpha+1}} \left\{ \frac{(2kr)^{-i\gamma} (i)^{-(l_\alpha+1+i\gamma)}}{\Gamma(l_\alpha+1-i\gamma)} e^{ikr} + e^{(-ikr)} \frac{(2kr)^{i\gamma} (-i)^{(-l_\alpha-1+i\gamma)}}{\Gamma(l_\alpha+1+i\gamma)} \right\} \quad (4.59)$$

Reescrevendo as expressões:

$$(2kr)^{-i\gamma} e^{ikr} = e^{ikr + \ln(2kr)^{-i\gamma}}, \quad (4.60)$$

$$(i)^{-(l_\alpha+1+i\gamma)} = e^{-(l_\alpha+1+i\gamma)(i\pi/2)} \quad (4.61)$$

e substituindo na equação (4.59), encontramos

$$y_l = \frac{\Gamma(2l_\alpha+2)}{2^{l_\alpha+1}} \left\{ \frac{e^{(ikr-i\gamma \ln 2kr)} e^{(-l_\alpha-1-i\gamma)(i\pi/2)}}{\Gamma(l_\alpha+1-i\gamma)} + \frac{e^{(-ikr+i\gamma \ln 2kr)} e^{(i\gamma-l_\alpha-1)(-i\pi/2)}}{\Gamma(l_\alpha+1+i\gamma)} \right\} \quad (4.62)$$

ou

$$y_l = \frac{\Gamma(2l_\alpha+2) e^{\pi\gamma/2}}{2^{l_\alpha+1}} \left\{ \frac{e^{(ikr-i\gamma \ln 2kr + (-l_\alpha-1)(i\pi/2))}}{\Gamma(l_\alpha+1-i\gamma)} + \frac{e^{(-ikr+i\gamma \ln 2kr + (-l_\alpha-1)(-i\pi/2))}}{\Gamma(l_\alpha+1+i\gamma)} \right\}. \quad (4.63)$$

Essa expressão pode ser significativamente simplificada ao introduzirmos o deslocamento de fase δ_{l_α} por meio da razão entre funções gama,

$$\frac{\Gamma(l_\alpha+1+i\gamma)}{\Gamma(l_\alpha+1-i\gamma)} = e^{2i\delta_{l_\alpha}},$$

o que equivale a escrever

$$\Gamma(l_\alpha+1-i\gamma) = e^{-2i\delta_{l_\alpha}} \Gamma(l_\alpha+1+i\gamma). \quad (4.64)$$

Substituindo essa relação na equação (4.63), obtemos

$$y = \frac{\Gamma(2l_\alpha + 2) e^{\pi\gamma/2} e^{i\delta_{l_\alpha}}}{2^{l_\alpha+1} \Gamma(l_\alpha + 1 + i\gamma)} \left[e^{i\delta_{l_\alpha}} e^{ikr - i\gamma \ln(2kr) - i\frac{\pi}{2}(l_\alpha+1)} + e^{-i\delta_{l_\alpha}} e^{-ikr + i\gamma \ln(2kr) + i\frac{\pi}{2}(l_\alpha+1)} \right], \quad (4.65)$$

a qual pode ser finalmente reescrita na forma compacta

$$y = \frac{\Gamma(2l_\alpha + 2) e^{\pi\gamma/2} e^{i\delta_{l_\alpha}}}{2^{l_\alpha} \Gamma(l_\alpha + 1 + i\gamma)} \sin\left(kr - \gamma \ln(2kr) + \delta_{l_\alpha} - \frac{\pi l_\alpha}{2}\right). \quad (4.66)$$

Comparando as expressões (3.62) e (4.66), que descrevem, respectivamente, o comportamento assintótico da solução radial na ausência e na presença da corda cósmica, identificamos que o deslocamento de fase total pode ser escrito como

$$\delta_l = \frac{\pi}{2} (l - l_\alpha) + \delta_{l_\alpha}, \quad (4.67)$$

onde δ_{l_α} corresponde ao argumento da função gama $\Gamma(l_\alpha+1+i\gamma)$ e l_α é definido pela equação (4.34).

Esse resultado evidencia de forma explícita a contribuição geométrica da corda cósmica ao processo de espalhamento. O primeiro termo, $\frac{\pi}{2}(l - l_\alpha)$, não está associado à dinâmica do potencial, mas exclusivamente à modificação topológica do espaço-tempo, uma vez que $l_\alpha = l/\alpha$. Assim, mesmo mantendo-se inalterado o potencial coulombiano, a presença do parâmetro α introduz uma correção adicional na fase das ondas parciais, distinguindo o espalhamento no espaço da corda cósmica daquele em espaço plano.

4.4.1 Interpretação física do deslocamento de fase

A análise formal do deslocamento de fase mostra que a presença da corda cósmica introduz uma correção adicional de origem puramente geométrica. Para tornar esse efeito mais transparente do ponto de vista físico, examinamos diretamente o comportamento assintótico das soluções radiais. Com esse objetivo, construímos os gráficos correspondentes a três situações distintas: propagação livre, espalhamento coulombiano usual e espalhamento coulombiano no espaço da corda cósmica. Essa comparação permite visualizar como a topologia do espaço-tempo se manifesta como um deslocamento extra da fase da onda, distinguindo o efeito dinâmico do potencial daquele associado exclusivamente à geometria.

No regime assintótico, as soluções radiais podem ser escritas, respectivamente, como

- Onda livre (ausência de potencial e de defeito topológico):

$$y_l^{(0)}(r) \sim \sin\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right),$$

para a qual não ocorre deslocamento de fase, $\delta_l = 0$.

- Onda coulombiana (presença apenas do potencial espalhador):

$$y_l^{(C)}(r) \sim \sin\left(kr - \gamma \ln(2kr) + \delta_l - \frac{\pi l}{2}\right),$$

em que o termo logarítmico caracteriza a distorção típica do potencial coulombiano e δ_l representa o deslocamento de fase dinâmico associado à interação.

- Onda coulombiana no espaço da corda cósmica:

$$y_l^{(C+\text{corda})}(r) \sim \sin\left(kr - \gamma \ln(2kr) + \delta_{l_\alpha} + \frac{\pi}{2}(l - l_\alpha) - \frac{\pi l_\alpha}{2}\right),$$

na qual surge um termo adicional de origem puramente geométrica, proporcional a $(l - l_\alpha)$, refletindo o déficit angular do espaço-tempo.

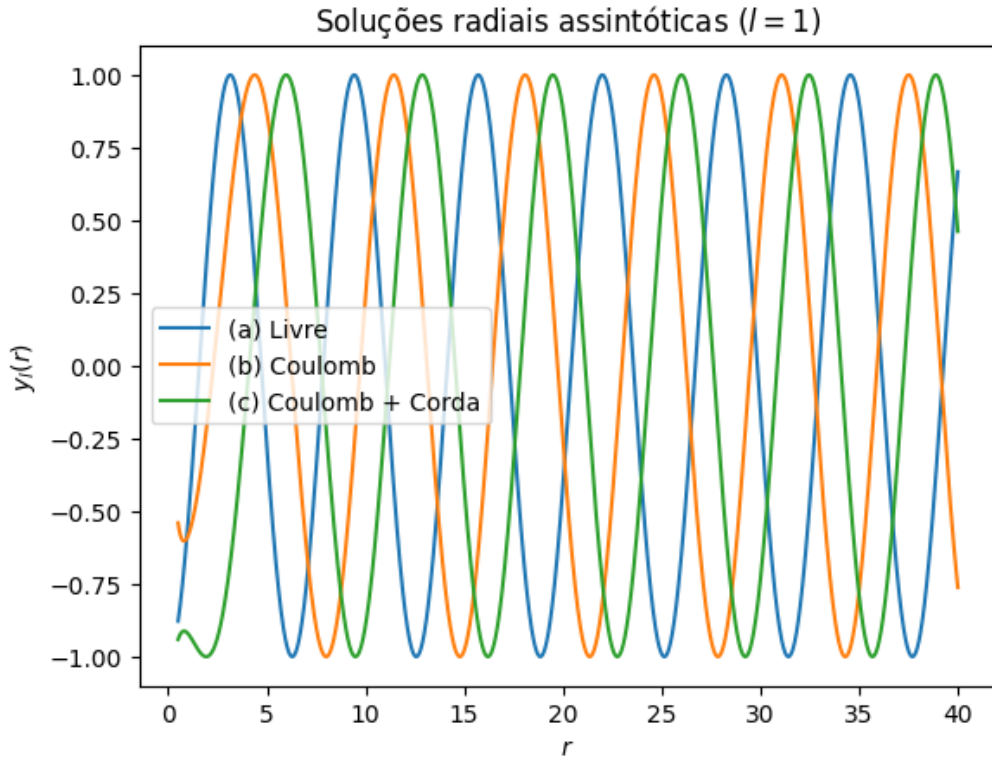


Figura 4.1: Soluções radiais assintóticas para $l=1$.

A Figura 4.1 ilustra essas três situações para um mesmo momento angular $l = 1$. Na Figura 4.1a observa-se a onda livre, cujo comportamento assintótico não apresenta qualquer deslocamento de fase. Na Figura 4.1b, ao introduzir o potencial coulombiano, nota-se um adiantamento da fase em relação ao caso livre, acompanhado da distorção logarítmica característica dessa interação.

Finalmente, na Figura 4.1c, além do efeito coulombiano, verifica-se um deslocamento adicional da fase. Esse termo extra não está associado à dinâmica do potencial, mas exclusivamente à modificação topológica do espaço-tempo, codificada no parâmetro α . Trata-se, portanto, de uma assinatura geométrica da métrica da corda cósmica sobre os estados de espalhamento: mesmo mantendo-se inalterado o potencial coulombiano, a topologia do espaço induz uma correção observável na fase das ondas parciais.

4.4.2 Visualização do efeito topológico na fase

Uma outra forma de visualização, igualmente interessante, consiste em separar explicitamente a fase da amplitude das soluções radiais. Em vez de representar diretamente as ondas $y_l(r)$, consideramos a fase efetiva $\Phi(r)$ definida a partir da forma assintótica das soluções. Para os três casos em estudo, tem-se

- Onda livre:

$$\Phi_0(r) = kr - \frac{\pi l}{2},$$

que corresponde a uma função linear de r , característica de uma partícula livre.

- Onda coulombiana:

$$\Phi_C(r) = kr - \gamma \ln(2kr) + \delta_l - \frac{\pi l}{2},$$

na qual o termo logarítmico introduz uma deformação suave em relação ao comportamento linear, refletindo o caráter de longo alcance do potencial coulombiano.

- Onda coulombiana no espaço da corda cósmica:

$$\Phi_{C+\text{corda}}(r) = \Phi_C(r) + \frac{\pi}{2}(l - l_\alpha),$$

que difere do caso coulombiano usual apenas por uma translação vertical constante.

A Figura 4.2 torna evidente a natureza distinta dos dois efeitos envolvidos. Enquanto o potencial coulombiano deforma a fase de maneira dependente de r , por meio do termo logarítmico, a corda cósmica introduz apenas um deslocamento constante, independente de r . A geometria do espaço-tempo não distorce a propagação local da onda, mas desloca globalmente toda a fase, caracterizando um efeito puramente topológico.

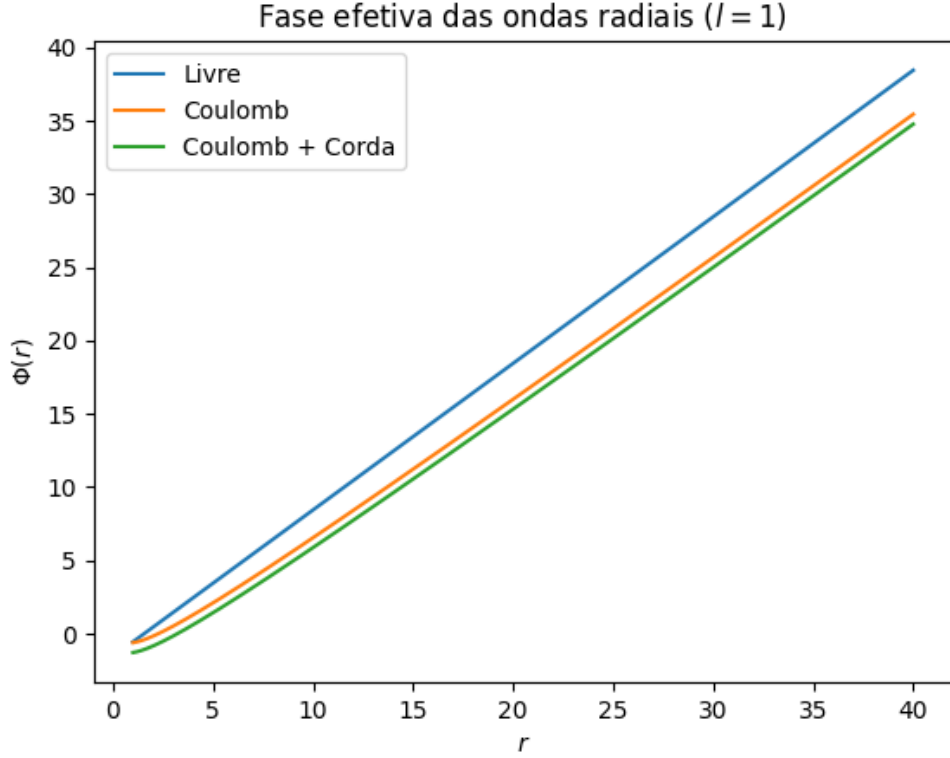


Figura 4.2: Fase efetiva $\Phi(r)$ para $l = 1$ nos três casos: (a) onda livre, (b) espalhamento coulombiano e (c) espalhamento coulombiano na presença da corda cósmica.

Um aspecto adicional relevante desse resultado é a dependência explícita do deslocamento geométrico com o momento angular. Da expressão

$$\Delta\Phi_l = \frac{\pi}{2}(l - l_\alpha) = \frac{\pi l}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right),$$

observa-se que a correção introduzida pela corda cósmica cresce linearmente com l e se anula para $l = 0$. Em outras palavras, ondas parciais de momento angular nulo não sofrem qualquer efeito topológico, enquanto componentes com valores maiores de l acumulam deslocamentos de fase cada vez mais pronunciados.

Essa dependência é ilustrada na Figura 4.3, onde se representa $\Delta\Phi_l$ em função de l . A linearidade da curva evidencia que a corda cósmica atua como um amplificador angular do efeito geométrico: quanto maior o momento angular da onda parcial, mais sensível ela se torna à topologia do espaço. Tal comportamento reforça a interpretação de que o efeito da corda não está associado a uma força local, mas a uma propriedade global da geometria, cuja manifestação torna-se progressivamente mais visível à medida que se consideram componentes de maior l .

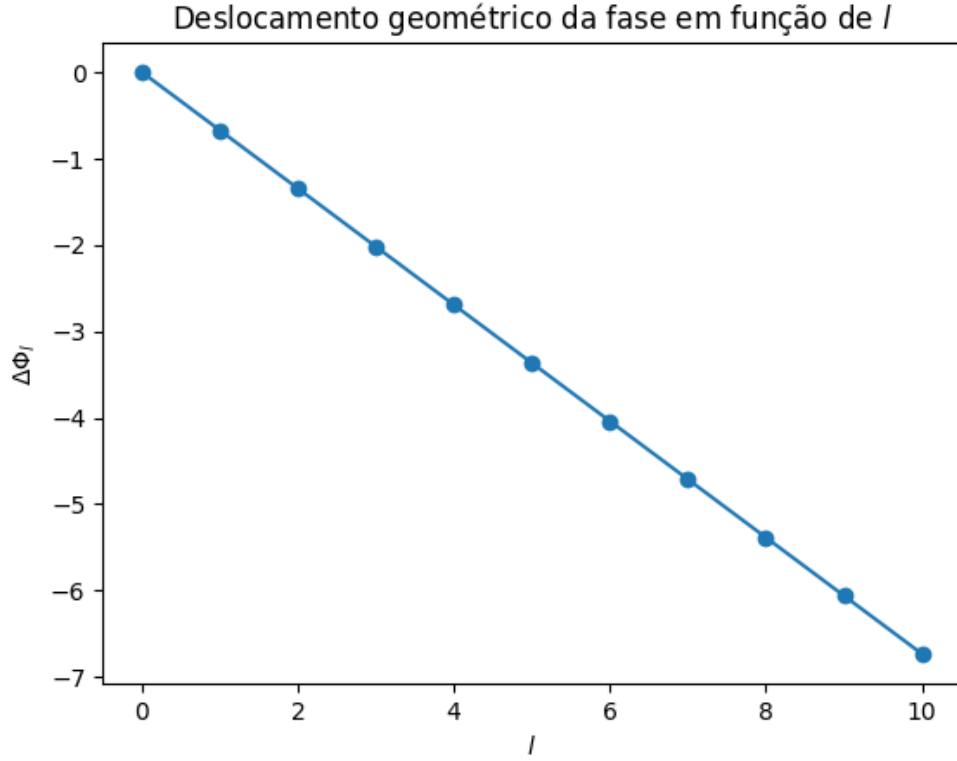


Figura 4.3: Deslocamento geométrico da fase $\Delta\Phi_l = \frac{\pi}{2}(l - l_\alpha)$ em função do momento angular l , para um valor fixo de $\alpha < 1$. Observa-se um crescimento linear do deslocamento de fase, evidenciando a contribuição puramente geométrica associada à topologia cônica do espaço-tempo da corda cósmica.

4.4.3 Espectro de energia dos estados ligados

Além de modificar os processos de espalhamento, a presença da corda cósmica afeta também os estados ligados do sistema. Como discutido anteriormente, a informação dinâmica do problema está codificada na matriz de espalhamento, cujos polos no plano complexo da energia correspondem precisamente aos níveis ligados. Dessa forma, o espectro de energia pode ser obtido diretamente a partir da estrutura analítica da matriz S .

No caso do potencial coulombiano usual, esse procedimento conduz ao conhecido espectro do átomo de hidrogênio. No espaço-tempo da corda cósmica, entretanto, a modificação do momento angular efetivo, $l \rightarrow l_\alpha$, altera a posição desses polos, produzindo uma correção geométrica nos níveis de energia. O objetivo desta seção é determinar explicitamente esse espectro e comparar os resultados com aqueles obtidos no espaço euclidiano.

A matriz de espalhamento S contém uma informação adicional fundamental acerca do sis-

tema físico investigado. Como discutido na seção anterior, da relação (4.64) observa-se que a amplitude da onda parcial cresce indefinidamente quando

$$l_\alpha + 1 + i\gamma = -N, \quad N = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

uma vez que a função gama no numerador, $\Gamma(l_\alpha + 1 + i\gamma)$, não está definida para inteiros negativos. Consequentemente, a matriz de espalhamento,

$$S = \frac{\Gamma(l_\alpha + 1 + i\gamma)}{\Gamma(l_\alpha + 1 - i\gamma)}, \quad (4.68)$$

apresenta polos nesses pontos.

Esses polos possuem um significado físico bem definido: eles correspondem precisamente aos estados ligados do sistema. Assim, a condição acima fornece o critério de quantização das energias ligadas no espaço-tempo da corda cósmica.

Para tornar essa condição explícita, escrevemos o parâmetro γ em termos da energia,

$$\gamma = \frac{me^2}{\hbar^2 k}, \quad k = i\kappa, \quad \kappa = \sqrt{-\varepsilon},$$

e impomos a condição de polo

$$l_\alpha + 1 + i\gamma = -N, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

Utilizando a expressão equivalente

$$\gamma = -\frac{e^2 \sqrt{m}}{\hbar \sqrt{2} \sqrt{E}}, \quad (4.69)$$

obtemos

$$l_\alpha + 1 + N = i \frac{e^2 \sqrt{m}}{\hbar \sqrt{2} \sqrt{E}}. \quad (4.70)$$

Como os estados ligados possuem energia negativa, escrevemos $E = -|E|$, o que conduz a

$$l_\alpha + 1 + N = \frac{e^2 \sqrt{m}}{\hbar \sqrt{2} \sqrt{|E|}}. \quad (4.71)$$

Resolvendo a relação (4.71) em relação a E , obtemos finalmente o espectro de energia dos estados ligados no espaço da corda cósmica,

$$E_{l_\alpha, N} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{(l_\alpha + 1 + N)^2} = -\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{mc^2}{2(l_\alpha + 1 + N)^2}. \quad (4.72)$$

A expressão (4.72) revela de modo imediato que a presença da corda cósmica altera qualitativamente a estrutura do espectro. No átomo de hidrogênio usual, os níveis de energia dependem apenas do número quântico principal

$$n = N + l + 1,$$

de modo que todos os estados com o mesmo valor de n possuem a mesma energia, independentemente de l . Essa propriedade caracteriza a degenerescência acidental do problema coulombiano em espaço euclidiano.

No espaço-tempo da corda cósmica, entretanto, o espectro passa a depender de

$$l_\alpha = \frac{l}{\alpha},$$

e assume a forma

$$E_{l_\alpha, N} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{(l_\alpha + 1 + N)^2}.$$

Como $l_\alpha \neq l$ para $\alpha \neq 1$, a energia deixa de depender apenas da combinação $N + l + 1$ e passa a depender separadamente de N e de l . Consequentemente, estados que no caso usual apresentariam o mesmo valor de n tornam-se energeticamente distintos na presença da corda cósmica.

Esse efeito é ilustrado na Figura 4.4, onde se representa $E_{l, N}$ em função de l para um valor fixo de N . Para $\alpha = 1$, recupera-se a estrutura usual do hidrogênio, refletindo a degenerescência do espectro. Já para $\alpha < 1$, observa-se que cada valor de l corresponde a um nível diferente, evidenciando o desdobramento dos estados ligados. A separação entre os níveis cresce com l , em consonância com o fato de que a correção geométrica é proporcional a l_α .

Assim, a corda cósmica rompe a degenerescência acidental do átomo de hidrogênio por um mecanismo puramente geométrico. Mesmo mantendo-se inalterado o potencial coulombiano, a topologia do espaço-tempo modifica a quantização do momento angular e imprime uma assinatura observável no espectro de energia. Esse comportamento constitui o análogo, no regime dos estados ligados, do deslocamento geométrico de fase encontrado no espalhamento, reforçando a interpretação de que a corda atua não como uma força local, mas como uma modificação global da geometria do espaço.

Observa-se que, para $l = 0$, tem-se

$$l_\alpha = \frac{l}{\alpha} = 0 \quad \text{para qualquer valor de } \alpha.$$

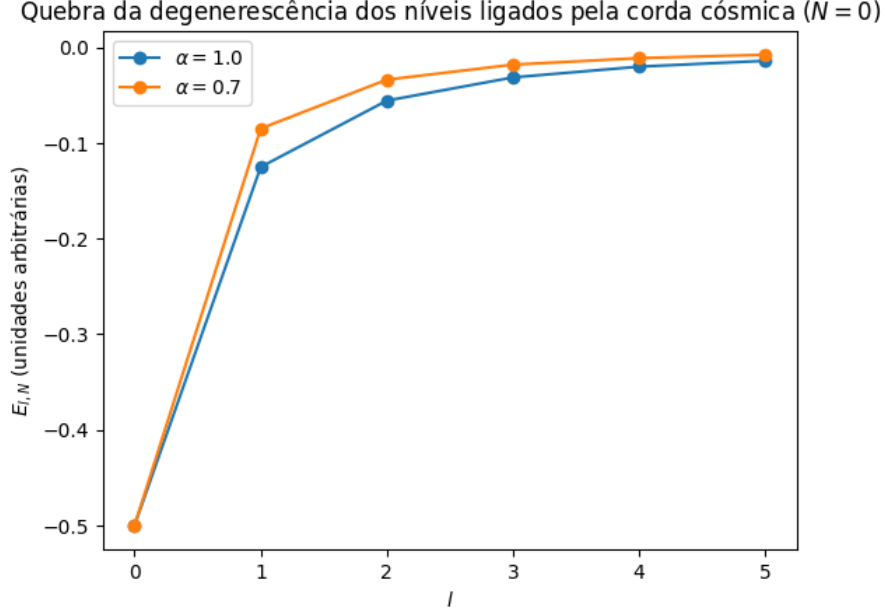


Figura 4.4: Níveis de energia $E_{l,N}$ em função do momento angular l , para um valor fixo de N , comparando os casos $\alpha = 1$ (espaço euclidiano) e $\alpha < 1$ (presença da corda cósmica). Observa-se que, para $\alpha < 1$, os níveis deixam de ser degenerados, evidenciando o desdobramento geométrico induzido pela topologia do espaço-tempo.

Consequentemente, os níveis com momento angular nulo coincidem exatamente com aqueles do átomo de hidrogênio usual,

$$E_{0,N} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{(N+1)^2}.$$

Em outras palavras, os estados s não são afetados pela presença da corda cósmica. O efeito topológico manifesta-se exclusivamente em estados com momento angular diferente de zero, refletindo o fato de que a correção geométrica está associada à estrutura angular do espaço-tempo e, em particular, ao déficit azimutal introduzido pela corda.

Vale ainda ressaltar que a simetria axial da métrica garante que a degenerescência associada ao número quântico magnético m permanece inalterada. A quebra ocorre apenas na chamada degenerescência acidental do problema coulombiano, isto é, entre estados que no espaço euclidiano possuem o mesmo número quântico principal $n = N + l + 1$, mas diferentes valores de l . Assim, a corda cósmica não elimina a estrutura fundamental dos níveis, mas remove a simetria adicional responsável pela igualdade energética entre esses estados.

Dessa forma, os estados ligados fornecem uma manifestação complementar do efeito geométrico já observado no espalhamento. Enquanto neste último a topologia do espaço-tempo se revela

por meio de um deslocamento de fase, nos estados ligados ela se manifesta como um desdobramento sistemático dos níveis de energia. Em ambos os regimes, a corda cósmica atua não como uma fonte de força local, mas como uma modificação global da geometria, capaz de deixar uma assinatura direta em observáveis quânticos.

4.5 Amplitude de espalhamento e Seção de Choque

Nesta seção, iremos adaptar os resultados apresentados no capítulo 3 para obter a seção de choque no caso do espalhamento sob a presença da corda cósmica. Conforme o já discutido naquela seção, a solução regular ψ_{reg} para $r \rightarrow \infty$ pode ser escrita como

$$\psi_{reg} = \psi_{in} + \psi_{scatt}, \quad (4.73)$$

com ψ_{in} descrevendo a partícula incidente e ψ_{scatt} descrevendo a partícula espalhada. Novamente, vamos assumir que a onda incidente se propaga no eixo z , vinda de uma região consideravelmente distante do centro do potencial espalhador e a onda espalhada se distribui no espaço e tende a zero no infinito. Perante esses argumentos, podemos escrever a seção de choque para o espalhamento coulombiano no espaço da corda em função dos deslocamentos de fase como

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(S_l - 1)P_l(\cos\theta). \quad (4.74)$$

Agora, introduzindo a matriz de espalhamento na forma (3.65), onde os deslocamentos de fase são dados por (4.67), obtemos a amplitude de espalhamento para o processo, que é

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(e^{2i\delta_l} - 1)P_l(\cos\theta). \quad (4.75)$$

A integral sobre o módulo ao quadrado desta expressão nos fornece

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^{2\pi\alpha} \int_0^\pi \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2ik} (2l+1)(e^{2i\delta_l} - 1) \right) P_l(\cos\theta) \left(-\frac{1}{2ik} (2l'+1)(e^{-2i\delta_{l'}} - 1) \right) P_{l'}(\cos\theta) d\Omega \\ &= \frac{1}{4k^2} \int_0^{2\pi\alpha} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1)(2 - 2\cos 2\delta_l) \int_0^\pi P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Explorando a ortogonalidade dos polinômios de Legendre em (4.76), a seção de choque total pode ser escrita como

$$\sigma = \frac{1}{4k^2} \int_0^{2\pi\alpha} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1)(2 - 2\cos 2\delta_l) \left(\frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'} \right) d\varphi,$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\pi\alpha}{4k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1 - \cos 2\delta_l) \\
&= \frac{2\pi\alpha}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1 - \cos^2 \delta_l)
\end{aligned} \tag{4.77}$$

ou

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \left[\frac{\pi}{2}(l - l_\alpha) + \delta_{l_\alpha} \right] \tag{4.78}$$

que mais uma vez está representada em termos dos deslocamentos de fase como na equação (3.47), porém com a presença do termo α que caracteriza a corda cósmica modificando o resultado.

4.5.1 Estrutura angular e papel do momento angular

A expressão geral para a amplitude de espalhamento,

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(e^{2i\delta_l} - 1)P_l(\cos \theta), \tag{4.79}$$

mostra que o padrão angular observado resulta da interferência entre contribuições de ondas parciais com diferentes valores do momento angular l . Cada termo da soma é ponderado por um polinômio de Legendre $P_l(\cos \theta)$ e por um fator de fase que, na presença da corda cósmica, contém o deslocamento geométrico

$$\frac{\pi}{2}(l - l_\alpha) = \frac{\pi l}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right).$$

Como esse termo cresce linearmente com l , espera-se que ondas parciais de maior momento angular sejam mais sensíveis ao déficit angular do espaço-tempo.

Para tornar esse efeito mais transparente, analisamos separadamente três situações complementares: a contribuição de ondas parciais com momento angular pequeno, a contribuição de ondas parciais com momento angular grande e o padrão angular resultante da superposição de todas as ondas parciais. Esse procedimento permite identificar em que regime a topologia do espaço passa a influenciar de forma perceptível o espalhamento.

Na Figura 4.5 mostramos a contribuição angular de uma única onda parcial com l pequeno ($l = 1$). Nesse caso, o padrão angular é suave e pouco estruturado, e a diferença entre os casos $\alpha = 1$ e $\alpha < 1$ é praticamente imperceptível. Isso indica que ondas parciais de baixo momento angular sentem pouco a topologia do espaço.

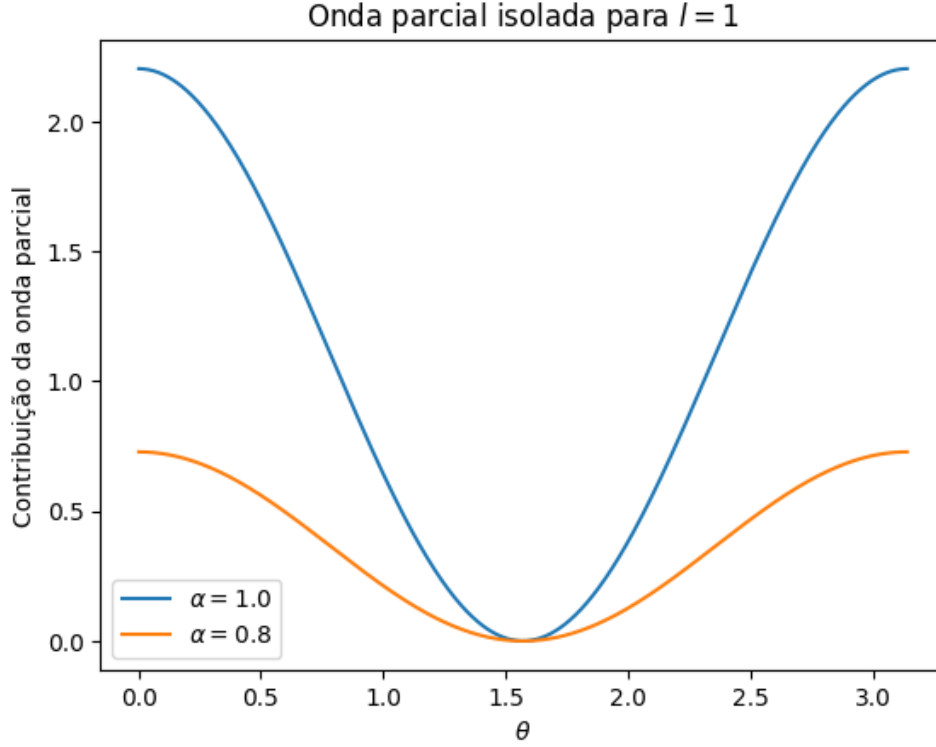


Figura 4.5: Contribuição angular de uma única onda parcial com $l = 1$ para $\alpha = 1$ e $\alpha < 1$. O padrão é suave e a influência da corda cósmica é pouco pronunciada.

Na Figura 4.6 apresentamos a contribuição de uma única onda parcial com momento angular elevado ($l = 20$). Nesse regime, o padrão angular torna-se altamente oscilatório e concentrado em pequenos ângulos. Já para um único modo angular observa-se uma diferença nítida entre os casos $\alpha = 1$ e $\alpha < 1$, evidenciando que ondas parciais de grande l acumulam deslocamentos geométricos de fase significativamente maiores.

Finalmente, na Figura 4.7 exibimos a seção de choque diferencial completa, obtida pela soma de todas as ondas parciais até um valor máximo $l_{\max}$. Observa-se que o padrão físico de espalhamento resulta da superposição dessas contribuições individuais. As ondas de grande l , embora cada uma contribua de forma parcial, acumulam-se e tornam o efeito geométrico da corda claramente observável no padrão angular global.

Esses resultados evidenciam que o momento angular atua como um verdadeiro amplificador do efeito topológico: quanto maior o valor de l , maior o deslocamento geométrico da fase e mais sensível torna-se a onda parcial à topologia do espaço-tempo. A seção de choque observável emerge, assim, como o resultado acumulado dessas contribuições, tornando macroscópica a

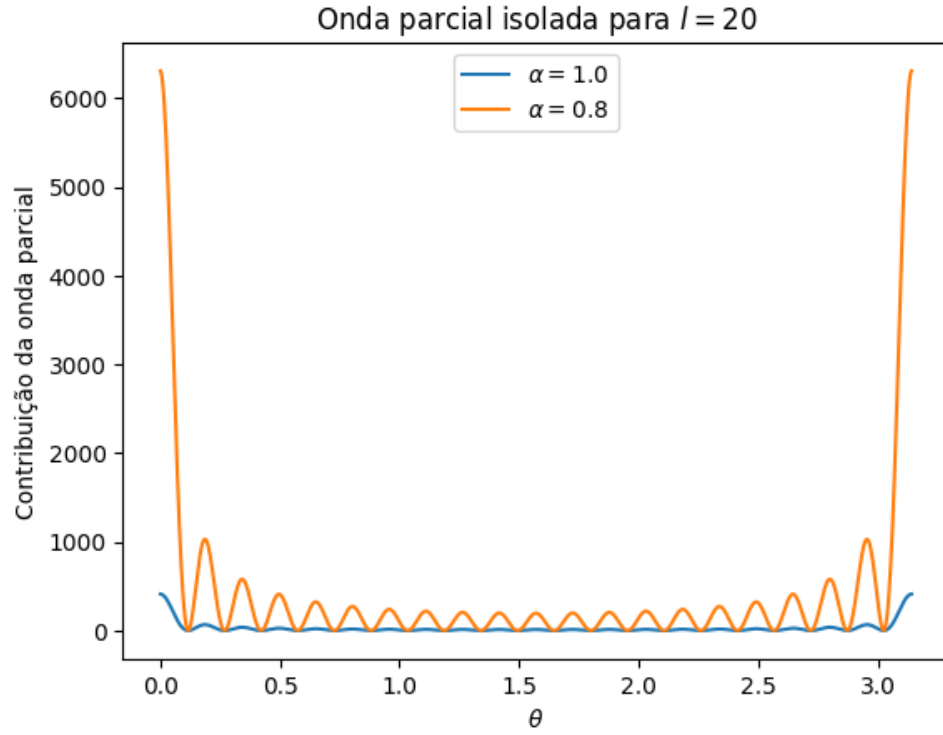


Figura 4.6: Contribuição angular de uma única onda parcial com $l = 20$ para $\alpha = 1$ e $\alpha < 1$. Ondas de grande momento angular apresentam estrutura fina e maior sensibilidade ao efeito topológico.

assinatura geométrica da corda cósmica no processo de espalhamento.

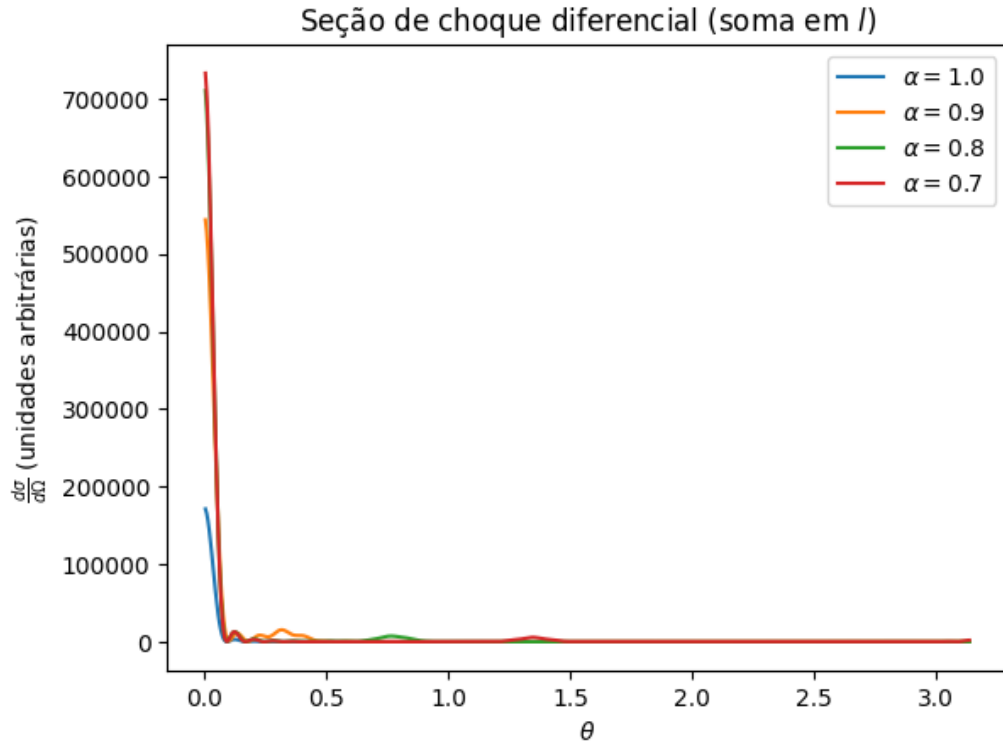


Figura 4.7: Seção de choque diferencial para diferentes valores do parâmetro α . O caso $\alpha = 1$ corresponde ao espalhamento coulombiano usual, enquanto $\alpha < 1$ representa a presença da corda cósmica. A deformação progressiva do padrão angular reflete a interferência alterada entre as ondas parciais em um espaço com déficit angular.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, investigamos o espalhamento de uma partícula carregada por um potencial coulombiano no espaço-tempo de uma corda cósmica. Para isso, desenvolvemos inicialmente, no Capítulo 2, os fundamentos da mecânica quântica não relativística a partir da equação de Schrödinger. Em seguida, no Capítulo 3, estudamos o problema do espalhamento por potenciais de curto e longo alcance, utilizando o potencial coulombiano como aplicação central. Por fim, no Capítulo 4, aplicamos esses resultados ao estudo do espalhamento não relativístico de um elétron por um potencial coulombiano no espaço-tempo associado a uma corda cósmica.

Os resultados obtidos no Capítulo 4 mostram que a topologia do espaço pode influenciar de forma mensurável grandezas quânticas. Em particular, verificamos que a presença da corda cósmica modifica tanto os estados ligados quanto os estados de espalhamento do átomo de hidrogênio. No caso dos estados ligados, o espectro de energia passa a depender do parâmetro geométrico α , conforme expresso na equação (4.72), em concordância com resultados previamente reportados na literatura, como na Ref. [16]. Observa-se que os níveis de energia sofrem desvios em relação ao caso euclidiano, os quais se tornam mais pronunciados à medida que o parâmetro α se afasta da unidade.

Esse parâmetro está relacionado à densidade linear de massa da corda pela expressão

$$\alpha = 1 - 4G\mu,$$

de modo que cordas mais massivas produzem correções geométricas mais intensas. Assim, α atua como um parâmetro de controle do efeito topológico: quanto maior o déficit angular do espaço-tempo, mais acentuada é a influência da corda sobre o sistema quântico.

No regime de espalhamento, os deslocamentos de fase foram obtidos a partir da análise das soluções radiais expressas em termos de funções hipergeométricas confluentes. A partir desses deslocamentos, determinamos as amplitudes das ondas espalhadas e, consequentemente, as seções de choque correspondentes. A expressão final para a seção de choque total, equação (4.78), evidencia de forma clara o papel da corda cósmica no processo de espalhamento, mostrando que a topologia do espaço-tempo modifica globalmente a interferência entre as ondas parciais.

Em conjunto, esses resultados mostram que a corda cósmica não atua como uma fonte gravitacional convencional no regime considerado, mas como uma modificação global da geometria do espaço-tempo. Tal modificação é capaz de deixar assinaturas diretas em observáveis quânticos, manifestando-se tanto por meio do desdobramento dos níveis de energia quanto pela alteração do padrão angular do espalhamento. Dessa forma, o presente trabalho evidencia como defeitos topológicos do espaço-tempo podem influenciar sistemas quânticos de maneira sistemática e fisicamente observável.

5.1 Proposta de trabalhos futuros

- Estudar o espalhamento coulombiano relativístico no espaço-tempo de uma corda cósmica, de modo a investigar a influência da geometria cônica sobre os graus de liberdade de spin da partícula incidente e do alvo. Para isso, será necessário resolver a equação de Dirac em $3 + 1$ dimensões nesse fundo geométrico e analisar as modificações nas seções de choque diferenciais e totais.
- Estender a análise para outros defeitos topológicos, como monopolos globais e paredes de domínio, incorporando-os à equação de Schrödinger e investigando seus efeitos tanto sobre estados ligados quanto sobre estados de espalhamento, em particular no surgimento de fases geométricas e na quebra de degenerescências espectrais.
- Investigar o problema de espalhamento em presença simultânea de potenciais de curto alcance e do defeito topológico, permitindo comparar, de forma controlada, os efeitos

puramente geométricos com aqueles induzidos pela interação local.

- Analisar o papel de campos externos, como campos magnéticos uniformes ou do tipo Aharonov–Bohm, no espaço-tempo da corda cósmica, explorando possíveis interferências entre efeitos topológicos gravitacionais e eletromagnéticos.
- Explorar possíveis consequências observacionais desses efeitos em contextos astrofísicos ou cosmológicos, estimando ordens de grandeza para as correções induzidas pela corda cósmica em processos de espalhamento de partículas carregadas.

Referências Bibliográficas

- [1] G. d. A. Marques e V. B. Bezerra. Hydrogen atom in the gravitational fields of topological defects. *Physical Review D* **66**, 10, 105011 (2002).
- [2] M. Hosseinpour e H. Hassanabadi. Scattering states of Dirac equation in the presence of cosmic string for Coulomb interaction. *International Journal of Modern Physics A* **30**, 1550124 (2015).
- [3] A. Cortijo e M. A. Vozmediano. Electronic properties of curved graphene sheets. *EPL (Europhysics Letters)* **77**, 4, 47002 (2007).
- [4] S. Azevedo e F. Moraes. Two-dimensional scattering by disclinations in monolayer graphite. *Journal of Physics: Condensed Matter* **12**, 33, 7421 (2000).
- [5] L. C. N. dos Santos. *Alguns resultados no estudo de férmions e bósons em espaços curvos: soluções das equações de Dirac e Klein Gordon*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis (2015).
- [6] A. Cortijo e M. A. H. Vozmediano. Effects of topological defects and local curvature on the electronic properties of planar graphene. *Nuclear Physics B* **763**, 293–308 (2007).
- [7] M. O. Katanaev e I. V. Volovich. Theory of defects in solids and three-dimensional gravity. *Annals of Physics* **216**, 1–28 (1992).

- [8] P. E. Lammert e V. H. Crespi. Topological phases in graphitic cones. *Physical Review Letters* **85**, 5190–5193 (2000).
- [9] S. Deser e R. Jackiw. Classical and quantum scattering on a cone. *Communications in Mathematical Physics* **118**, 495–509 (1988).
- [10] A. Vilenkin e E. P. S. Shellard. *Cosmic strings and other topological defects* (Cambridge University Press, 2000).
- [11] W. A. Hiscock. Exact gravitational field of a string. *Physical Review D* **31**, 12, 3288 (1985).
- [12] T. W. B. Kibble. Topology of cosmic domains and strings. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **9**, 1387–1398 (1976).
- [13] M. Gleiser. *A dança do universo: dos mitos de criação ao Big Bang* (Companhia das Letras, 1997).
- [14] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler et al.. *Gravitation* (Macmillan, 1973).
- [15] A. Saa. Cem anos de buracos negros: o centenário da solução de Schwarzschild. *Revista Brasileira de Ensino de Física* **38**, 4 (2016).
- [16] G. de A Marques e V. B. Bezerra. Non-relativistic quantum systems on topological defects spacetimes. *Classical and Quantum Gravity* **19**, 5, 985 (2002).
- [17] E. Rutherford, J. Chadwick e C. D. Ellis. *Radiations from radioactive substances* (Cambridge University Press, 2010).
- [18] N. Bohr. On the Constitution of Atoms and Molecules. *Philosophical Magazine* **26**, 1–25 (1913).
- [19] D. W. Ward e S. M. Volkmer. How to derive the Schrodinger equation. arXiv preprint physics/0610121 (2006).
- [20] J. M. F. Bassalo e F. Caruso. *Schrödinger*, volume 1 (Livraria da Física, 2016).
- [21] L. de Broglie. Recherches sur la théorie des quanta. *Annales de Physique* **10**, 22–128 (1924).

- [22] E. Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem. *Annalen der Physik* **79**, 361–376 (1926).
- [23] M. Jammer. *The Conceptual Development of Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, 1966).
- [24] H. J. Müller Kirsten. *Introduction to Quantum Mechanics: Schrödinger Equation and Path Integral* (World Scientific Publishing Company, 2006).
- [25] J. R. P. Mahon. *Mecânica Quântica: desenvolvimento contemporâneo com aplicações* (LTC, 2011).
- [26] D. J. Griffiths e D. F. Schroeter. *Introduction to quantum mechanics* (Cambridge University Press, 2018).
- [27] J. J. Sakurai e J. Napolitano. *Mecânica quântica moderna* (bookman, 2013).
- [28] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloe. *Quantum Mechanics* (Hermann and John Wiley & Sons, 1977).
- [29] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics* (Wiley, 1999).
- [30] L. D. Landau e E. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Pergamon Press, 1991).
- [31] P. Burke e C. Joachain. *Theory of Electron-Atom Collisions: Part One: Potential Scattering*. Cassell Education (Springer, 1995).
- [32] M. G. Garcia. *Espalhamento coulombiano relativístico próximo das condições de simetria de spin e pseudospin*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual Paulista (UNESP) (2015).
- [33] K. D. Machado. *Teoria do eletromagnetismo* (UEPG, 2007).
- [34] J. VAZ JR e E. C. OLIVEIRA. *Metodos matematicos* (Livraria da Fisica, 2016).
- [35] C. L. R. Braga. *Notas de Física Matemática* (Editora Livraria da Física, 2006).
- [36] M. E. *Quantum Mechanics* (John Wiley e Sons, 1970).
- [37] Q.-g. Lin. On the partial wave amplitude of Coulomb scattering in three dimensions. *American Journal of Physics* **68**, 11, 1056–1057 (2000).

- [38] E. M. Serebryanyi. The gravitational field of a straight cosmic string. *Theoretical and Mathematical Physics* **64**, 3, 846–850 (1985).
- [39] S. R. d. Oliveira. Soluções polinomiais das equações de campo para cordas cosmicas acopladas as equações de Einstein (1991).
- [40] S. Deser, R. Jackiw e G. 't Hooft. Three-dimensional Einstein gravity: dynamics of flat space. *Annals of Physics* **152**, 220–235 (1984).
- [41] J. R. Gott. Gravitational lensing effects of vacuum strings. *The Astrophysical Journal* **288**, 422–427 (1985).
- [42] J. Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis* (Springer, 2002), 3rd edition.
- [43] G. B. Folland. *Harmonic Analysis and Partial Differential Equations* (Princeton University Press, 1995).
- [44] K. D. Machado. *Equações diferenciais aplicadas à física* (Editora UEPG, 2004).
- [45] H. J. Weber e G. B. Arfken. *Essential mathematical methods for physicists, ISE* (Elsevier, 2003).
- [46] G. d. A. Marques e V. B. Bezerra. Hydrogen atom in the gravitational fields of topological defects. *Physical Review D* **66**, 10, 105011 (2002).

APÊNDICE

ALGORITMOS NUMÉRICOS IMPLEMENTADOS EM PYTHON

Neste apêndice são apresentados os principais algoritmos numéricos desenvolvidos e utilizados ao longo deste trabalho para a obtenção dos resultados gráficos e quantitativos discutidos nos capítulos anteriores. Tais rotinas foram implementadas em linguagem Python e têm por objetivo calcular as contribuições angulares das ondas parciais, bem como o padrão completo de espalhamento resultante da superposição de todos os momentos angulares.

A.1 Gráficos da seção 4.4.1: deslocamento de fase

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# parâmetros físicos
k = 1.0
l = 1
alpha = 0.8

def l_alpha(l, alpha):
    return (1 + (1 - alpha)/2)/alpha - 0.5
```

```

def delta_phi(l, alpha):
    return 0.5 * np.pi * (1 - l_alpha(l, alpha))

# domínio radial (regime assintótico)
r = np.linspace(1, 40, 2000)

# (a) solução livre
y_free = np.sin(k*r - 0.5*np.pi*l)

# (b) Coulomb (fase extra constante, simbólica)
delta_coulomb = 0.6
y_coulomb = np.sin(k*r - 0.5*np.pi*l + delta_coulomb)

# (c) Coulomb + corda cósmica
dphi = delta_phi(l, alpha)
y_string = np.sin(k*r - 0.5*np.pi*l + delta_coulomb + dphi)

# gráfico
plt.figure(figsize=(8,4))
plt.plot(r, y_free, label='(a) Livre')
plt.plot(r, y_coulomb, label='(b) Coulomb')
plt.plot(r, y_string, label='(c) Coulomb + Corda')

plt.xlabel(r'$r$')
plt.ylabel(r'$y_l(r)$')
plt.title(r'Soluções radiais assintóticas $(l=1)$')
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()

```

A.2 Gráficos da seção 4.4.2: Visualização do efeito topológico na fase

```
import numpy as np

def hydrogen_spectrum(alpha, n_max=5, mu=1.0, e=1.0):
    """
    Espectro de energia dos estados ligados do átomo de hidrogênio
    no espaço-tempo de uma corda cósmica.

     $E_{\{n,l\}} = - (\mu * e^4) / (2 * n_{eff}^2)$ 
    com
     $n_{eff} = n + l_{alpha} - 1$ 
     $l_{alpha} = (1 + (1 - \alpha)/2)/\alpha - 0.5$ 
    """

    energies = []

    for n in range(1, n_max + 1):
        for l in range(0, n):
            l_alpha = (1 + (1 - alpha)/2)/alpha - 0.5
            n_eff = n + l_alpha - 1

            E = - (mu * e**4) / (2.0 * n_eff**2)
            energies.append({
                "n": n,
                "l": l,
                "l_alpha": l_alpha,
                "E": E
            })
```

```

    return energies

# Exemplo de uso
if __name__ == "__main__":
    alpha = 0.8
    spectrum = hydrogen_spectrum(alpha, n_max=4)

    for level in spectrum:
        print(f"n={level['n']}, l={level['l']}, "
              f"l_alpha={level['l_alpha']:.3f}, E={level['E']:.6f}")

```

A.3 Graficos da seção 4.4.2: Deslocamento geométrico da fase

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# parâmetros
k = 1.0
l = 1
alpha = 0.8
delta_coulomb = 0.6 # fase coulombiana efetiva (constante)

def l_alpha(l, alpha):
    return (1 + (1 - alpha)/2)/alpha - 0.5

def delta_phi(l, alpha):
    return 0.5 * np.pi * (1 - l_alpha(l, alpha))

```

```

# domínio radial
r = np.linspace(1, 40, 500)

# fases efetivas
phi_free = k*r - 0.5*np.pi*l
phi_coulomb = k*r - 0.5*np.pi*l + delta_coulomb
phi_string = k*r - 0.5*np.pi*l + delta_coulomb + delta_phi(l, alpha)

# gráfico
plt.figure(figsize=(7,4))
plt.plot(r, phi_free, label='Livre')
plt.plot(r, phi_coulomb, label='Coulomb')
plt.plot(r, phi_string, label='Coulomb + Corda')

plt.xlabel(r'$r$')
plt.ylabel(r'$\Phi(r)$')
plt.title(r'Fase efetiva das ondas radiais $(l=1)$')
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()

```

A.4 Gráficos da seção 4.4.3: Espectro de energia dos estados ligados

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def l_alpha(l, alpha):
    return (1 + (1 - alpha)/2)/alpha - 0.5

```

```

def delta_phi(l, alpha):
    return 0.5 * np.pi * (1 - l_alpha(l, alpha))

# parâmetros
alpha = 0.8
l_max = 10
l = np.arange(0, l_max + 1)

# deslocamento geométrico
dphi = delta_phi(l, alpha)

# gráfico
plt.figure(figsize=(6,4))
plt.plot(l, dphi, marker='o')
plt.xlabel(r'$l$')
plt.ylabel(r'$\Delta\Phi_l$')
plt.title(r'Deslocamento geométrico da fase em função de $l$')
plt.tight_layout()
plt.show()

```

A.5 Gráficos da seção 4.5.1: Estrutura angular e papel do momento angular

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.special import eval_legendre

# l_alpha conforme definido no trabalho
def l_alpha(l, alpha):

```

```

    return (1 + (1 - alpha)/2)/alpha - 0.5

# contribuição angular de uma única onda parcial
def partial_wave(theta, l, alpha):
    la = l_alpha(l, alpha)\\
    return eval_legendre(int(round(la)), np.cos(theta))

# 1) l pequeno
def plot_l_small(alpha, l=1):
    theta = np.linspace(0, np.pi, 1000)
    y = partial_wave(theta, l, alpha)
    plt.figure()
    plt.plot(theta, y)
    plt.xlabel(r'$\theta$')
    plt.ylabel(r'$P_{l\alpha}(\cos\theta)$')
    plt.title(f'Onda parcial: l={l}, alpha={alpha}')
    plt.show()

# 2) l grande
def plot_l_large(alpha, l=50):
    theta = np.linspace(0, np.pi, 2000)
    y = partial_wave(theta, l, alpha)
    plt.figure()
    plt.plot(theta, y)
    plt.xlabel(r'$\theta$')
    plt.ylabel(r'$P_{l\alpha}(\cos\theta)$')
    plt.title(f'Onda parcial: l={l}, alpha={alpha}')
    plt.show()

# 3) superposição de todas as ondas parciais
def full_pattern(alpha, lmax=80):

```

```

theta = np.linspace(0, np.pi, 2000)
total = np.zeros_like(theta)

for l in range(lmax + 1):
    la = l_alpha(l, alpha)
    total += (2*l + 1) * eval_legendre(int(round(la)), np.cos(theta))

plt.figure()
plt.plot(theta, total)
plt.xlabel(r'$\theta$')
plt.ylabel(r'$\sum_l (2l+1)P_{l_\alpha}(\cos\theta)$')
plt.title(f'Padrão angular completo, alpha={alpha}')
plt.show()

```