

Daiana Caroline dos Santos Gomes

**Filtragem de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar  
Evolutiva Baseada em Processamento Espectral  
de Dados Experimentais**

São Luís – MA

2024

Daiana Caroline dos Santos Gomes

**Filtragem de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar Evolutiva  
Baseada em Processamento Espectral de Dados  
Experimentais**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Maranhão, como requisito para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica, na área de concentração de Automação e Controle.

Universidade Federal do Maranhão – UFMA

Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas – CCET

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – PPGEE

Orientador: Prof. Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra

São Luís – MA

2024

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Gomes, Daiana Caroline dos Santos.

Filtragem de Kalman Fuzzy Tipo-2 Intervalar Evolutiva  
Baseada em Processamento Espectral de Dados Experimentais  
/ Daiana Caroline dos Santos Gomes. - 2024.

169 p.

Orientador(a): Ginalber Luiz de Oliveira Serra.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-graduação em  
Engenharia Elétrica/ccet, Universidade Federal do  
Maranhão, São Luís, 2024.

1. Análise Espectral Singular. 2. Filtragem de  
Kalman. 3. Identificação de Sistemas. 4. Modelo fuzzy  
tipo-2 intervalar. 5. Sistemas fuzzy evolutivos. I.  
Serra, Ginalber Luiz de Oliveira. II. Título.

Daiana Caroline dos Santos Gomes

# **Filtragem de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar Evolutiva Baseada em Processamento Espectral de Dados Experimentais**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Maranhão, como requisito para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica, na área de concentração de Automação e Controle.

Trabalho aprovado. São Luís – MA, 01 de março de 2024:

---

**Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra**  
Orientador - IFMA

---

**Dr. Francisco das Chagas de Souza**  
Membro Interno da Banca Examinadora -  
UFMA

---

**Dr. Ewaldo Eder Carvalho Santana**  
Membro Interno da Banca Examinadora -  
UFMA

---

**Dr. Romis Ribeiro de Faissol Attux**  
Membro Externo da Banca Examinadora -  
UNICAMP

---

**Dr. Celso José Munaro**  
Membro Externo da Banca Examinadora -  
UFES

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, porque dEle, por Ele e para Ele são todas as coisas. Sou grata pela força, saúde, ânimo, coragem e disposição por Ele concedidas, essenciais durante todo o desenvolvimento deste trabalho. Sem Ele, nada disso seria possível.

Agradeço a toda minha família pelo apoio e incentivo recebidos durante a realização deste trabalho, em especial aos meus pais, Júlio César e Marylande, e aos meus irmãos, Júlio, Bruna e João. Agradeço também aos meus queridos sobrinhos, Leonardo e Maria Eduarda, por sempre alegrarem meus dias.

Agradeço imensamente ao meu orientador, professor Dr. Ginalber Serra, pelos ricos ensinamentos, pela excelente orientação, pela amizade, companheirismo, paciência e pelas conversas no Laboratório 9 do IFMA, sempre muito importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Muito obrigada!

Agradeço à Universidade Federal do Maranhão – UFMA, em especial ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – PPGEE, e ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão – IFMA pelo apoio estrutural para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES pelo suporte financeiro.

E a todos aqueles que contribuíram, de alguma forma, direta ou indiretamente, para o desenvolvimento deste trabalho.

*“Ora, àquele que é poderoso para  
vos guardar de tropeçar e apresentar-vos  
irrepreensíveis, com alegria, perante  
a sua glória,  
ao único Deus, Salvador nosso,  
por Jesus Cristo, nosso Senhor,  
seja glória e majestade, domínio  
e poder, antes de todos os séculos,  
agora e para todo o sempre.  
Amém!”*

*(Bíblia Sagrada, Judas 1:24-25)*

# Resumo

Nesta tese de doutorado, um filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo é proposto para o processamento intervalar de dados experimentais incertos a partir de componentes espectrais não-observáveis. A metodologia adotada considera as seguintes etapas: um modelo inicial do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo é identificado de forma *off-line* a partir de uma janela inicial de dados experimentais; a atualização da proposição do antecedente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo é realizada usando uma formulação *fuzzy* tipo-2 intervalar do algoritmo de agrupamento *evolving* Takagi-Sugeno (eTS) e a atualização da proposição consequente é realizada usando uma formulação *fuzzy* tipo-2 do algoritmo *Observer/Kalman Filter Identification* (OKID), levando em consideração as componentes espectrais não-observáveis extraídas dos dados experimentais por meio de um algoritmo de Análise Espectral Singular Recursiva Multivariável. Os resultados computacionais para o rastreamento intervalar da série temporal caótica de Mackey-Glass e previsão da trajetória descrita por veículos aeroespaciais, em ambiente ruidoso, ilustram a eficiência da metodologia proposta em comparação com abordagens relevantes da literatura. Os resultados experimentais referentes ao rastreamento intervalar do comportamento dinâmico da COVID-19 e a filtragem e rastreamento de um helicóptero 2DoF, são apresentados, no sentido de elucidar a aplicabilidade da metodologia proposta.

**Palavras-chave:** Identificação de Sistemas. Filtragem de Kalman. Modelo *fuzzy* tipo-2 intervalar. Análise Espectral Singular. Sistemas *fuzzy* evolutivos.

# Abstract

In this doctoral thesis, an interval type-2 evolving fuzzy Kalman filter is proposed for interval processing of uncertain experimental data from unobservable spectral components. The adopted methodology considers the following steps: an initial model of the interval type-2 evolving fuzzy Kalman filter is identified offline from an initial window of experimental data; the updating of the antecedent proposition of interval type-2 evolving fuzzy Kalman filter is performed using an interval type-2 fuzzy formulation of the evolving Takagi-Sugeno (eTS) clustering algorithm and the consequent proposition update is performed using an interval type-2 fuzzy formulation of the Observer/Kalman Filter Identification (OKID) algorithm, taking into account the unobservable spectral components extracted from the experimental data by means of an algorithm of Multivariate Recursive Singular Spectral Analysis. The computational results for interval tracking of the Mackey-Glass chaotic time series and for forecasting of the trajectory described by aerospace vehicles, in a noisy environment, illustrate the efficiency of the proposed methodology compared to relevant approaches in the literature. The experimental results regarding the interval tracking of the dynamic behavior of COVID-19 and for filtering and tracking a 2DoF helicopter are presented, in order to elucidate the applicability of the proposed methodology.

**Keywords:** Systems identification. Kalman filtering. Interval type-2 fuzzy model. Singular spectral analysis. Evolving fuzzy systems.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Conjunto <i>fuzzy</i> tipo-1 gaussiano. Fonte: A autora . . . . .	43
Figura 2 – Conjuntos <i>fuzzy</i> tipo-1 $A$ e $B$ . Fonte: A autora . . . . .	44
Figura 3 – Conjunto <i>fuzzy</i> resultante da operação de união entre os conjuntos <i>fuzzy</i> $A$ e $B$ . Fonte: A autora . . . . .	44
Figura 4 – Conjunto <i>fuzzy</i> resultante da operação de intercessão entre os conjuntos <i>fuzzy</i> $A$ e $B$ . Fonte: A autora . . . . .	45
Figura 5 – Conjunto <i>fuzzy</i> resultante da operação de intercessão entre os conjuntos <i>fuzzy</i> $A$ e $B$ . Fonte: A autora . . . . .	45
Figura 6 – Conjunto <i>fuzzy</i> tipo-2 geral gaussiano. Fonte: (GOMES, 2021) . . . . .	46
Figura 7 – Conjunto <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar gaussiano. Fonte: (GOMES, 2021) . . . . .	47
Figura 8 – Conjunto <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar gaussiano bidimensional. Fonte: (GOMES, 2021) . . . . .	48
Figura 9 – Conjuntos <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalares $\tilde{W}^1$ e $\tilde{W}^2$ . Fonte: (GOMES, 2021) . . . . .	49
Figura 10 – Resultado da operação de união entre os conjuntos <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalares $\tilde{W}^1$ e $\tilde{W}^2$ . Fonte: (GOMES, 2021) . . . . .	49
Figura 11 – Resultado da operação de interseção entre os conjuntos <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalares $\tilde{W}^1$ e $\tilde{W}^2$ . Fonte: (GOMES, 2021) . . . . .	50
Figura 12 – Resultado da operação de complemento para o conjunto <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\tilde{W}^1$ . Fonte: (GOMES, 2021) . . . . .	51
Figura 13 – Estrutura de um sistema <i>fuzzy</i> tipo-2. Fonte:(GOMES, 2021) . . . . .	52
Figura 14 – Representação da dinâmica inerente a um conjunto de dados inicial de forma eficiente por um modelo matemático (linha tracejada). . . . .	56
Figura 15 – Situação em que novas amostras do conjunto de dados ficam disponíveis em uma região de operação desconhecida pelo modelo matemático original. . . . .	56
Figura 16 – Situação em que é necessária a evolução da estrutura para estender o modelo adequadamente, aumentando sua flexibilidade (comparar a linha sólida com a linha pontilhada, este último modelo obtido apenas a partir da atualização de seus parâmetros e mantendo sua estrutura). . . . .	57
Figura 17 – Processo de aprendizagem de sistemas <i>fuzzy</i> evolutivos. . . . .	58
Figura 18 – Exemplo de criação de um novo <i>cluster</i> devido a presença de novas amostras de dados. . . . .	59
Figura 19 – Exemplo de atualização de <i>cluster</i> devido a presença de novas amostras de dados. . . . .	59
Figura 20 – Exemplo de fusão de <i>clusters</i> devido a presença de novas amostras de dados na região entre os <i>clusters</i> . . . . .	60

Figura 21 – Situação em que há possibilidade de exclusão de <i>cluster</i> devido sua baixa representatividade do conjunto de dados. . . . .	61
Figura 22 – Ilustração do vetor de erro residual $\tilde{\epsilon}_k^i$ . . . . .	67
Figura 23 – Procedimento para o cálculo da resposta intervalar do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo proposto. . . . .	68
Figura 24 – Fluxograma da metodologia proposta correspondente aos aspectos computacionais para projeto do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo. . . . .	80
Figura 25 – Dados computacionais referentes à série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando $\tau = 17$ . . . . .	82
Figura 26 – Dados computacionais referentes à série temporal caótica de Mackey-Glass, exibidos em formato tridimensional, considerando $\tau = 17$ . . . . .	82
Figura 27 – Eficiência de diferentes números de componentes espectrais não-observáveis para representação do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass, de acordo com o critério VAF. . . . .	83
Figura 28 – Componentes espectrais não-observáveis $\alpha^j  _{j=1, \dots, 2}$ extraídas do conjunto de dados referente à série temporal caótica de Mackey-Glass. . . . .	84
Figura 29 – Funções de pertinência <i>fuzzy</i> intervalares resultantes da estimação paramétrica inicial da proposição do antecedente do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo, com base nas primeiras 500 amostras da série temporal caótica de Mackey-Glass. A linha tracejada corresponde à função de pertinência inferior e a linha sólida corresponde à função de pertinência superior. . . . .	85
Figura 30 – Região de confiança obtida pelo filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass, durante sua etapa de atualização recursiva, considerando o atraso de tempo $\tau = 17$ . . . . .	86
Figura 31 – Comportamento variável no tempo do número de regras <i>fuzzy</i> para o rastreamento dinâmico do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass. . . . .	87
Figura 32 – Ganhos de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalares $\tilde{\mathbf{K}}_{\tilde{W}^i}^i  _{i=1, \dots, 10}$ , durante as etapas de treinamento e de atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar evolutivo para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal de Mackey-Glass: (a) Ganho de Kalman inferior $\underline{K}_{\tilde{W}^i}^i$ , (b) Ganho de Kalman superior $\overline{K}_{\tilde{W}^i}^i$ . . . . .	88
Figura 33 – Estimação da matriz de estados intervalar $\tilde{\mathbf{A}}_{\tilde{W}^i}^i  _{i=1, \dots, 10}$ para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal de Mackey-Glass: (a) Limite inferior $\underline{\mathbf{A}}_{\tilde{W}^i}^i$ , (b) Limite superior $\overline{\mathbf{A}}_{\tilde{W}^i}^i$ . . . . .	89

Figura 34 – Estimação da matriz de saída intervalar $\tilde{\mathbf{C}}_{\tilde{W}_i}^i  _{i=1,\dots,10}$ para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal de Mackey-Glass: (a) Limite inferior $\underline{\mathbf{C}}_{\tilde{W}_i}^i$ , (b) Limite superior $\overline{\mathbf{C}}_{\tilde{W}_i}^i$ . . . . .	90
Figura 35 – Graus de ativação <i>fuzzy</i> normalizados instantâneos para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass: (a) Graus de ativação inferiores, (b) Graus de ativação superiores. . . . .	90
Figura 36 – Dados computacionais referentes à série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando $\tau = 22$ . . . . .	91
Figura 37 – Dados computacionais referentes à série temporal caótica de Mackey-Glass, exibidos em formato tridimensional, considerando $\tau = 22$ . . . . .	91
Figura 38 – Componentes espectrais não-observáveis $\alpha^j  _{j=1,\dots,2}$ extraídas do conjunto de dados referente à série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo $\tau = 22$ . . . . .	92
Figura 39 – Região de confiança obtida pelo filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass, durante sua etapa de atualização recursiva, considerando o atraso de tempo $\tau = 22$ . . . . .	93
Figura 40 – Comportamento variável no tempo do número de regras <i>fuzzy</i> para o rastreamento dinâmico do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo $\tau = 22$ . . . . .	94
Figura 41 – Ganhos de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalares $\tilde{\mathbf{K}}_{\tilde{W}_i}^i  _{i=1,\dots,7}$ , durante as etapas de treinamento e de atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar evolutivo para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo $\tau = 22$ : (a) Ganho de Kalman inferior $\underline{\mathbf{K}}_{\tilde{W}_i}^i$ , (b) Ganho de Kalman superior $\overline{\mathbf{K}}_{\tilde{W}_i}^i$ . . . . .	95
Figura 42 – Estimação da matriz de estados intervalar $\tilde{\mathbf{A}}_{\tilde{W}_i}^i  _{i=1,\dots,7}$ para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo $\tau = 22$ : (a) Limite inferior $\underline{\mathbf{A}}_{\tilde{W}_i}^i$ , (b) Limite superior $\overline{\mathbf{A}}_{\tilde{W}_i}^i$ . . . . .	96
Figura 43 – Estimação da matriz de saída intervalar $\tilde{\mathbf{C}}_{\tilde{W}_i}^i  _{i=1,\dots,7}$ para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo $\tau = 22$ : (a) Limite inferior $\underline{\mathbf{C}}_{\tilde{W}_i}^i$ , (b) Limite superior $\overline{\mathbf{C}}_{\tilde{W}_i}^i$ . . . . .	97
Figura 44 – Graus de ativação <i>fuzzy</i> normalizados instantâneos para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo $\tau = 22$ : (a) Graus de ativação inferiores, (b) Graus de ativação superiores. . . . .	98

Figura 45 – Dados computacionais referentes à série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando $\tau = 30$ . . . . .	98
Figura 46 – Dados computacionais referentes à série temporal caótica de Mackey-Glass, exibidos em formato tridimensional, considerando $\tau = 30$ . . . . .	99
Figura 47 – Componentes espectrais não-observáveis $\alpha^j _{j=1,\dots,2}$ extraídas do conjunto de dados referente à série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo $\tau = 30$ . . . . .	99
Figura 48 – Região de confiança obtida pelo filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass, durante sua etapa de atualização recursiva, considerando o atraso de tempo $\tau = 30$ . . . . .	100
Figura 49 – Comportamento variável no tempo do número de regras <i>fuzzy</i> para o rastreamento dinâmico do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo $\tau = 30$ . . . . .	101
Figura 50 – Ganhos de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalares $\widetilde{\mathbf{K}}_{\widetilde{W}_i}^i _{i=1,\dots,8}$ , durante as etapas de treinamento e de atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar evolutivo para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo $\tau = 30$ : (a) Ganho de Kalman inferior $\underline{K}_{\widetilde{W}_i}^i$ , (b) Ganho de Kalman superior $\overline{K}_{\widetilde{W}_i}^i$ . . . . .	102
Figura 51 – Estimação da matriz de estados intervalar $\widetilde{\mathbf{A}}_{\widetilde{W}_i}^i _{i=1,\dots,8}$ para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo $\tau = 30$ : (a) Limite inferior $\underline{\mathbf{A}}_{\widetilde{W}_i}^i$ , (b) Limite superior $\overline{\mathbf{A}}_{\widetilde{W}_i}^i$ . . . . .	103
Figura 52 – Estimação da matriz de saída intervalar $\widetilde{\mathbf{C}}_{\widetilde{W}_i}^i _{i=1,\dots,8}$ para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo $\tau = 30$ : (a) Limite inferior $\underline{\mathbf{C}}_{\widetilde{W}_i}^i$ , (b) Limite superior $\overline{\mathbf{C}}_{\widetilde{W}_i}^i$ . . . . .	103
Figura 53 – Graus de ativação <i>fuzzy</i> normalizados instantâneos para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo $\tau = 30$ : (a) Graus de ativação inferiores, (b) Graus de ativação superiores. . . . .	104
Figura 54 – Configuração de formação entre os satélites <i>target</i> and <i>chaser</i> . Fonte: Adaptado de (FRASER; ULRICH, 2021). . . . .	106
Figura 55 – Conjunto de dados referente a componente cartesiana $x$ da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial <i>chaser</i> . . . . .	107
Figura 56 – Conjunto de dados referente a componente cartesiana $y$ da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial <i>chaser</i> . . . . .	108

Figura 57 – Conjunto de dados referente a componente cartesiana $z$ da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial <i>chaser</i> . . . . .	108
Figura 58 – Trajetória tridimensional descrita pelo veículo aeroespacial <i>target</i> . . . . .	109
Figura 59 – Componentes espectrais não-observáveis $\alpha^j _{j=1,\dots,6}$ extraídas do conjunto de dados referente à série temporal $x$ da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial <i>chaser</i> . . . . .	109
Figura 60 – Componentes espectrais não-observáveis $\alpha^j _{j=1,\dots,6}$ extraídas do conjunto de dados referente à série temporal $y$ da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial <i>chaser</i> . . . . .	110
Figura 61 – Componentes espectrais não-observáveis $\alpha^j _{j=1,\dots,6}$ extraídas do conjunto de dados referente à série temporal $z$ da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial <i>chaser</i> . . . . .	110
Figura 62 – Região de confiança obtida pelo filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo para o rastreamento inicial da trajetória do veículo aeroespacial <i>chaser</i> : (a) componente cartesiana $x$ ; (b) componente cartesiana $y$ ; (c) componente cartesiana $z$ . . . . .	112
Figura 63 – Desempenho do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo para previsão da trajetória do veículo aeroespacial <i>chaser</i> baseado no rastreamento inicial do conjunto de dados: (a) previsão da série temporal $x$ ; (b) previsão da série temporal $y$ ; (c) previsão da série temporal $z$ . . . . .	113
Figura 64 – Desempenho do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo para previsão da trajetória do veículo aeroespacial <i>chaser</i> baseado na atualização evolutiva realizada nas amostras 118 a 129: (a) previsão da série temporal $x$ ; (b) previsão da série temporal $y$ ; (c) previsão da série temporal $z$ . . . . .	114
Figura 65 – Desempenho do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo para previsão da trajetória do veículo aeroespacial <i>chaser</i> baseado na atualização evolutiva realizada nas amostras 130 a 151: (a) previsão da série temporal $x$ ; (b) previsão da série temporal $y$ ; (c) previsão da série temporal $z$ . . . . .	115
Figura 66 – Desempenho do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo para previsão da trajetória do veículo aeroespacial <i>chaser</i> baseado na atualização evolutiva realizada nas amostras 382 a 400: (a) previsão da série temporal $x$ ; (b) previsão da série temporal $y$ ; (c) previsão da série temporal $z$ . . . . .	116
Figura 67 – Desempenho do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo para previsão da trajetória do veículo aeroespacial <i>chaser</i> baseado na atualização evolutiva realizada nas amostras 521 a 530: (a) previsão da série temporal $x$ ; (b) previsão da série temporal $y$ ; (c) previsão da série temporal $z$ . . . . .	117
Figura 68 – Comportamento variável no tempo do número de regras <i>fuzzy</i> para o rastreamento dinâmico e previsão da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial <i>chaser</i> . . . . .	118

Figura 69 – Ganhos de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalares $\widetilde{\mathbf{K}}_{\widetilde{W}_i}^i  ^{i=1,\dots,8}$ , durante as etapas de treinamento e de atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar evolutivo para o rastreamento dinâmico e previsão da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial <i>chaser</i> : (a) Ganho de Kalman inferior $\underline{K}_{\widetilde{W}_i}^i$ , (b) Ganho de Kalman superior $\overline{K}_{\widetilde{W}_i}^i$ . . . . .	118
Figura 70 – Estimação da matriz de estados intervalar $\widetilde{\mathbf{A}}_{\widetilde{W}_i}^i  ^{i=1,\dots,8}$ para o rastreamento dinâmico e previsão da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial <i>chaser</i> : (a) Limite inferior $\underline{\mathbf{A}}_{\widetilde{W}_i}^i$ , (b) Limite superior $\overline{\mathbf{A}}_{\widetilde{W}_i}^i$ . . . . .	119
Figura 71 – Estimação da matriz de saída intervalar $\widetilde{\mathbf{C}}_{\widetilde{W}_i}^i  ^{i=1,\dots,8}$ para o rastreamento dinâmico e previsão da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial <i>chaser</i> : (a) Limite inferior $\underline{\mathbf{C}}_{\widetilde{W}_i}^i$ , (b) Limite superior $\overline{\mathbf{C}}_{\widetilde{W}_i}^i$ . . . . .	119
Figura 72 – Graus de ativação <i>fuzzy</i> normalizados instantâneos para o rastreamento dinâmico e previsão da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial <i>chaser</i> : (a) Graus de ativação inferiores, (b) Graus de ativação superiores. . . . .	120
Figura 73 – Valores de erro quadrático médio tridimensional (3D-RMSE) considerando o efeito de 100 realizações do processo de filtragem e rastreamento do conjunto de dados de $x$ , $y$ e $z$ , referentes a trajetória do veículo aeroespacial <i>chaser</i> , para um nível de ruído branco de $20dB$ . . . . .	120
Figura 74 – Dados experimentais epidemiológicos de óbitos diários por COVID-19, registrados no período de 29 de Fevereiro de 2020 a 24 de Maio de 2021, no Brasil. . . . .	122
Figura 75 – Eficiência das componentes não-observáveis, de acordo com o critério VAF, para representar os dados experimentais de óbitos diários registrados no Brasil. . . . .	122
Figura 76 – Comportamento temporal das componentes não-observáveis espectrais $\alpha^j  ^{j=1,\dots,10}$ , as quais foram extraídas a partir dos dados experimentais de óbitos diários registrados no período de 29 de Fevereiro de 2020 a 24 de Maio de 2021 no Brasil. . . . .	124
Figura 77 – Região de confiança obtida pelo filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo para o rastreamento dos dados experimentais de óbitos diários, de 29 de fevereiro de 2020 a 13 de fevereiro de 2021, no Brasil. . . . .	125
Figura 78 – Desempenho do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo para o rastreamento e previsão da propagação dinâmica da COVID-19 relacionada aos óbitos diários no Brasil: (a) atualização em 13 de fevereiro de 2021; (b) atualização em 14 de março de 2021; (c) atualização em 24 de maio de 2021; (d) atualização em 06 de julho de 2021. . . . .	126

Figura 79 – Variação do número de regras <i>fuzzy</i> , durante o treinamento incremental do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo, para rastreamento dinâmico e previsão dos dados experimentais referentes aos óbitos diários por Covid-19 registrados no período de 29 de Fevereiro de 2020 a 24 de Maio de 2021 no Brasil. . . . .	127
Figura 80 – Ganhos de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalares, durante a atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários diários no período de 29 de Fevereiro de 2020 a 24 de Maio de 2021, no Brasil: (a) Ganho de Kalman inferior, (b) Ganho de Kalman superior. . . . .	128
Figura 81 – Estimação recursiva da matriz de estados <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\widetilde{\mathbf{A}}^i$ , para rastreamento dinâmico e previsão dos dados experimentais referentes aos óbitos diários no Brasil: (a) Matriz de estados inferior, (b) Matriz de estados superior. . . . .	129
Figura 82 – Estimação recursiva da matriz de saída <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\widetilde{\mathbf{C}}^i$ , para rastreamento dinâmico e previsão dos dados experimentais referentes aos óbitos diários no Brasil: (a) Matriz de saída inferior, (b) Matriz de saída superior. . . . .	130
Figura 83 – Graus de ativação <i>fuzzy</i> normalizados instantâneos do sistema de inferência do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo, durante seu treinamento incremental para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 no período de 29 de fevereiro de 2020 a 06 de julho de 2021, no Brasil: (a) Graus de ativação superiores, (b) Graus de ativação inferiores. . . . .	131
Figura 84 – Sistema dinâmico MIMO referente ao helicóptero 2DoF. Fonte: Elaborado pela autora. . . . .	133
Figura 85 – Diagrama de corpo livre do helicóptero 2DoF. Fonte: Manual do usuário Quanser - <i>2DoF Helicopter</i> (QUANSER, 2012). . . . .	133
Figura 86 – Variável de entrada do helicóptero 2DoF referente a tensão de controle do ângulo de elevação $u_\varphi$ . . . . .	134
Figura 87 – Variável de entrada do helicóptero 2DoF referente a tensão de controle do ângulo de azimute $u_\vartheta$ . . . . .	134
Figura 88 – Variável de saída do helicóptero 2DoF referente ao ângulo de elevação $y_\varphi$ .	135
Figura 89 – Variável de saída do helicóptero 2DoF referente ao ângulo de azimute $y_\vartheta$ .	135
Figura 90 – Eficiência das componentes espectrais não-observáveis para representação dos dados experimentais do helicóptero 2DoF, considerando a métrica VAF. . . . .	136

Figura 91 – Comportamento temporal das componentes espectrais não-observáveis $\alpha^j _{j=1,\dots,2}$ , as quais foram extraídas do conjunto de dados referente à variável de entrada da tensão de controle do ângulo de elevação $u_\phi$ do helicóptero 2DoF. . . . .	137
Figura 92 – Comportamento temporal das componentes espectrais não-observáveis $\alpha^j _{j=1,\dots,2}$ , as quais foram extraídas do conjunto de dados referente à variável de entrada da tensão de controle do ângulo de azimute $u_\phi$ do helicóptero 2DoF. . . . .	137
Figura 93 – Comportamento temporal das componentes espectrais não-observáveis $\alpha^j _{j=1,\dots,2}$ , as quais foram extraídas do conjunto de dados referente à variável de saída do ângulo de azimute $u_\theta$ do helicóptero 2DoF. . . . .	138
Figura 94 – Comportamento temporal das componentes espectrais não-observáveis $\alpha^j _{j=1,\dots,2}$ , as quais foram extraídas do conjunto de dados referente à variável de saída do ângulo de elevação $u_\phi$ do helicóptero 2DoF. . . . .	138
Figura 95 – Região de confiança para o rastreamento dos dados experimentais da saída do ângulo de azimute $y_\theta$ do helicóptero 2DoF, durante a etapa recursiva. . . . .	139
Figura 96 – Região de confiança para o rastreamento dos dados experimentais da saída do ângulo de elevação $y_\phi$ do helicóptero 2DoF, durante a etapa recursiva. . . . .	140
Figura 97 – O comportamento variável no tempo do número de regras fuzzy, durante o treinamento e etapas recursivas, para rastreamento dinâmico do helicóptero 2DoF. . . . .	140
Figura 98 – Estimação do elemento $\widetilde{K}_{11}^i$ da matriz de ganho de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\widetilde{\mathbf{K}}_{\widetilde{W}_i}^i _{i=1,\dots,4}$ , durante as etapas de treinamento e recursiva, para rastreamento do helicóptero 2DoF: (a) ganho de Kalman inferior $\underline{K}_{11}^i$ , (b) ganho de Kalman superior $\overline{K}_{11}^i$ . . . . .	141
Figura 99 – Estimação do elemento $\widetilde{K}_{22}^i$ da matriz de ganho de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\widetilde{\mathbf{K}}_{\widetilde{W}_i}^i _{i=1,\dots,4}$ , durante as etapas de treinamento e recursiva, para rastreamento do helicóptero 2DoF: (a) ganho de Kalman inferior $\underline{K}_{11}^i$ , (b) ganho de Kalman superior $\overline{K}_{11}^i$ . . . . .	141
Figura 100 – Comportamento temporal do elemento $\widetilde{A}_{11}^i$ da matriz <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\widetilde{\mathbf{A}}_{\widetilde{W}_i}^i _{i=1,\dots,4}$ , durante as etapas de treinamento e recursiva, para rastreamento do helicóptero 2DoF: (a) Limite inferior $\underline{\mathbf{A}}_{11}^i$ , (b) Limite superior $\overline{\mathbf{A}}_{11}^i$ . . . . .	142
Figura 101 – Comportamento temporal do elemento $\widetilde{B}_{11}^i$ da matriz <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\widetilde{\mathbf{B}}_{\widetilde{W}_i}^i _{i=1,\dots,4}$ , durante as etapas de treinamento e recursiva, para rastreamento do helicóptero 2DoF: (a) Limite inferior $\underline{\mathbf{B}}_{11}^i$ , (b) Limite superior $\overline{\mathbf{B}}_{11}^i$ . . . . .	142

Figura 102 – Comportamento temporal do elemento $\tilde{C}_{11}^i$ da matriz <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\tilde{\mathbf{C}}_{\tilde{W}_i}^i  ^{i=1,\dots,4}$ , durante as etapas de treinamento e recursiva, para rastreamento do helicóptero 2DoF: (a) Limite inferior $\underline{\mathbf{A}}_{11}^i$ , (b) Limite superior $\overline{\mathbf{C}}_{11}^i$ . . . . .	143
Figura 103 – Comportamento temporal do elemento $\tilde{D}_{11}^i$ da matriz <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\tilde{\mathbf{D}}_{\tilde{W}_i}^i  ^{i=1,\dots,4}$ , durante as etapas de treinamento e recursiva, para rastreamento do helicóptero 2DoF: (a) Limite inferior $\underline{\mathbf{D}}_{11}^i$ , (b) Limite superior $\overline{\mathbf{D}}_{11}^i$ . . . . .	143
Figura 104 – Graus de ativação <i>fuzzy</i> normalizados instantâneos para o rastreamento dos dados experimentais do helicóptero 2DoF: (a) Graus de ativação inferiores $\underline{\mu}_{\tilde{W}_i}^i$ , (b) Graus de ativação superiores $\overline{\mu}_{\tilde{W}_i}^i$ . . . . .	144
Figura 105 – Fluxograma para o algoritmo OKID. Fonte: Adaptado de (JUANG, 1994).	168

# Lista de tabelas

Tabela 1	– Classificação dos sistemas <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalares. . . . .	52
Tabela 2	– Análise da complexidade computacional do algoritmo de filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar evolutivo. . . . .	79
Tabela 3	– Eficiência de diferentes quantidades de componentes espectrais não-observáveis para representação da série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o critério VAF. . . . .	84
Tabela 4	– Análise comparativa do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo para o rastreamento da série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo $\tau = 17$ . . . . .	102
Tabela 5	– Eficiência do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo para o rastreamento da série temporal caótica de Mackey-Glass, para diferentes valores de atraso de tempo $\tau$ , considerando as métricas PICP e PINAW. . . . .	105
Tabela 6	– Análise comparativa entre o filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo e a abordagem em (FRASER; ULRICH, 2021) para previsão da trajetória do veículo aeroespacial <i>chaser</i> . . . . .	115
Tabela 7	– Eficiência de diferentes quantidades de componentes espectrais não-observáveis para representação do conjunto de dados relacionado ao número de óbitos diários por Covid-19 no Brasil, considerando o critério VAF. . . . .	123
Tabela 8	– Análise comparativa entre o filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo e a abordagem em (ARUNKUMAR et al., 2021) para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil. . . . .	127
Tabela 9	– Análise comparativa entre o filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo e a abordagem em (HAZARIKA; GUPTA, 2020) para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil. . . . .	128
Tabela 10	– Análise comparativa entre o filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo e a abordagem em (GAUTAM, 2021) para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil. . . . .	129
Tabela 11	– Análise comparativa entre o filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo e a abordagem em (DAIRI et al., 2021) para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil. . . . .	130
Tabela 12	– Análise comparativa entre o filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo e a abordagem em (AL-QANESS et al., 2021) para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil. . . . .	132

Tabela 13 – Eficiência de diferentes quantidades de componentes espectrais para representação do conjunto de dados de entrada e saída do helicóptero 2DoF, considerando a métrica VAF. . . . .	136
Tabela 14 – Análise comparativa do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar evolutivo para o rastreamento do helicóptero 2DoF. . . . .	145

# Lista de abreviaturas e siglas

AES	Análise Espectral Singular
ARIMA	<i>Autoregressive Integrated Moving Average</i>
ANFIS	<i>Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System</i>
CNN	<i>Convolutional Neural Network</i>
COVID-19	<i>Corona Virus Disease 2019</i>
DEKF	Filtro de Kalman Estendido Desacoplado
GD	Gradiente Descente
eTS	<i>evolving</i> Takagi-Sugeno
FDP	Função de Densidade de Probabilidade
FK	Filtro de Kalman
FKE	Filtro de Kalman Estendido
FKF	Filtro de Kalman <i>Fuzzy</i>
FKU	Filtro de Kalman <i>Unscented</i>
GK	Gustafson-Kessel
IT2FNN	<i>Interval Type-2 Fuzzy Neural Network</i>
LIT	Linear Invariante no Tempo
LLWNN	<i>Local Linear Wavelet Neural Network</i>
LSTM	<i>Long Short-Term Memory</i>
MAE	<i>Mean Absolute Error</i>
MAPE	<i>Mean Absolute Percentage Error</i>
MSE	<i>Mean Square Error</i>
OKID	<i>Observer/Kalman Filter Identification</i>
PSO	<i>Particle Swarm Optimization</i>

$R^2$	Coefficiente de determinação
RDI	Rastro de Incerteza
RMSE	<i>Root Mean Square Error</i>
RMSPE	<i>Root Mean Square Percentage Error</i>
SARIMA	<i>Seasonal Auto-Regressive Integrated Moving Average</i>
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i>
VAF	<i>Variance Accounted For</i>
WCRVFL	<i>Wavelet-Coupled Random Vector Functional Link</i>

# Lista de símbolos

$\tilde{\mathbf{A}}^i$	Matriz de estados intervalar na $i$ -ésima regra <i>fuzzy</i>
$\tilde{\mathbf{B}}^i$	Matriz de entrada intervalar na $i$ -ésima regra <i>fuzzy</i>
$\tilde{\mathbf{C}}^i$	Matriz de saída intervalar na $i$ -ésima regra <i>fuzzy</i>
$\tilde{\mathbf{D}}^i$	Matriz de transmissão direta intervalar na $i$ -ésima regra <i>fuzzy</i>
$\tilde{\mathbf{K}}^i$	Matriz de ganho de Kalman intervalar na $i$ -ésima regra <i>fuzzy</i>
$\mathbf{Q}^i$	Matriz de covariância do ruído de processo
$\mathbf{R}^i$	Matriz de covariância do ruído de medição
$\hat{\bullet}$	Estimação de uma variável
“ $-$ ”	Grandeza <i>a priori</i>
“ $+$ ”	Grandeza <i>a posteriori</i>
$\mathcal{N}$	Distribuição de probabilidade gaussiana
$E[ \ ]$	Esperança matemática
$\mathbf{Y}$	Vetor de parâmetros de Markov
$\mathcal{P}$	Matriz de observabilidade
$\mathcal{Q}$	Matriz de controlabilidade
$\tilde{\mu}_{\tilde{W}}$	Valor de pertinência tipo-2 da $i$ -ésima regra <i>fuzzy</i>
$\underline{\mu}_{\tilde{W}}$	Valor de pertinência inferior da $i$ -ésima regra <i>fuzzy</i>
$\bar{\mu}_{\tilde{W}}$	Valor de pertinência superior da $i$ -ésima regra <i>fuzzy</i>
$\in$	Pertence
$\alpha$	Componentes espectrais não-observáveis
$\xi$	Número de componentes espectrais não-observáveis extraídas
$\mathcal{Z}$	Conjunto de dados experimentais
$L$	Número de regras <i>fuzzy</i>

$\mathcal{E}$	Tolerância para convergência do algoritmo Gustafson-Kessel
$q$	Número de parâmetros de Markov
$\eta$	Limiar para exclusão de regras na condição C do algoritmo <i>evolving Takagi-Sugeno</i>

# Sumário

<b>I</b>	<b>CONTEXTUALIZAÇÃO INICIAL</b>	<b>26</b>
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>27</b>
1.1	Revisão da Literatura	28
1.2	Motivação e Justificativa	29
1.3	Objetivos	30
1.3.1	Objetivo Geral	30
1.3.2	Objetivos Específicos	30
1.4	Contribuições da Tese de Doutorado	31
1.5	Trabalhos Publicados Pela Autora	31
1.5.1	Artigos em Periódicos	31
1.5.2	Capítulos de Livro	32
1.5.3	Artigos em Anais de Congressos	32
1.5.4	Premiações	33
1.6	Organização da Tese	33
<b>II</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>35</b>
<b>2</b>	<b>TEORIA DE FILTRAGEM DE KALMAN</b>	<b>36</b>
2.1	Etapa de Propagação	37
2.2	Etapa de Assimilação	39
<b>3</b>	<b>TEORIA DE SISTEMAS FUZZY TIPO-2</b>	<b>42</b>
3.1	Conjuntos Fuzzy Tipo-1	42
3.1.1	Operações Básicas entre Conjuntos Fuzzy Tipo-1	43
3.1.1.1	União	43
3.1.1.2	Intercessão	43
3.1.1.3	Complemento	44
3.2	Conjuntos Fuzzy Tipo-2	46
3.2.1	Operações Básicas Entre Conjuntos Fuzzy Tipo-2 Intervalares	47
3.2.1.1	União	48
3.2.1.2	Interseção	48
3.2.1.3	Complemento	50
3.3	Sistema de Inferência Fuzzy Tipo-2 Intervalar Takagi-Sugeno	51
<b>4</b>	<b>TEORIA DE SISTEMAS EVOLUTIVOS</b>	<b>54</b>
4.1	Sistemas Fuzzy Evolutivos	56

4.1.1	Geração e Atualização de Regras <i>Fuzzy</i> . . . . .	58
4.1.2	Fusão de Regras <i>Fuzzy</i> . . . . .	60
4.1.3	Remoção de Regras <i>Fuzzy</i> . . . . .	60
<b>III</b>	<b>REFERENCIAL METODOLÓGICO</b>	<b>62</b>
<b>5</b>	<b>METODOLOGIA PROPOSTA: FILTRAGEM DE KALMAN <i>FUZZY</i> TIPO-2 EVOLUTIVA</b> . . . . .	<b>63</b>
<b>5.1</b>	<b>Pré-Processamento de Dados por Análise Espectral Singular Multi-variável</b> . . . . .	<b>63</b>
5.1.1	Estimação Inicial das Componentes Espectrais Não-Observáveis . . . . .	63
5.1.2	Atualização Recursiva das Componentes Espectrais Não-Observáveis . . . . .	65
<b>5.2</b>	<b>Estimação Paramétrica do Filtro de Kalman <i>Fuzzy</i> Tipo-2 Evolutivo</b> <b>65</b>	
5.2.1	Estimação Inicial da Proposição do Antecedente do Filtro de Kalman <i>Fuzzy</i> Tipo-2 Evolutivo . . . . .	68
5.2.2	Atualização Evolutiva da Proposição do Antecedente do Filtro de Kalman <i>Fuzzy</i> Tipo-2 Evolutivo . . . . .	70
5.2.3	Estimação Inicial da Proposição do Consequente do Filtro de Kalman <i>Fuzzy</i> Tipo-2 Evolutivo . . . . .	73
5.2.4	Atualização Recursiva da Proposição do Consequente do Filtro de Kalman <i>Fuzzy</i> Tipo-2 Evolutivo . . . . .	77
<b>5.3</b>	<b>Análise da Complexidade Computacional da Metodologia Proposta</b> <b>79</b>	
<b>6</b>	<b>ANÁLISE COMPUTACIONAL DA METODOLOGIA PROPOSTA</b> .	<b>81</b>
<b>6.1</b>	<b>Filtragem e Rastreamento de Kalman <i>Fuzzy</i> Tipo-2 Intervalar Evolutivo Aplicado à Série Temporal de Mackey-Glass</b> . . . . .	<b>81</b>
6.1.1	Experimento 1: Filtragem e Rastreamento de Kalman <i>Fuzzy</i> Tipo-2 Intervalar Evolutivo Aplicado à Série Temporal de Mackey-Glass considerando o atraso de tempo $\tau = 17$ . . . . .	81
6.1.2	Experimento 2: Filtragem e Rastreamento de Kalman <i>Fuzzy</i> Tipo-2 Intervalar Evolutivo Aplicado à Série Temporal de Mackey-Glass considerando o atraso de tempo $\tau = 22$ . . . . .	87
6.1.3	Experimento 3: Filtragem e Rastreamento de Kalman <i>Fuzzy</i> Tipo-2 Intervalar Evolutivo Aplicado à Série Temporal de Mackey-Glass considerando o atraso de tempo $\tau = 30$ . . . . .	92
6.1.4	Análise Comparativa e Discussões . . . . .	95
<b>6.2</b>	<b>Filtragem de Kalman <i>Fuzzy</i> Tipo-2 Intervalar Evolutiva Aplicada ao Rastreamento e Previsão da Trajetória de Veículos Aeroespaciais</b> . .	<b>105</b>
6.2.1	Análise Comparativa e Discussões . . . . .	113

<b>7</b>	<b>ANÁLISE EXPERIMENTAL DA METODOLOGIA PROPOSTA . . .</b>	<b>121</b>
<b>7.1</b>	<b>Filtragem e Rastreamento de Kalman <i>Fuzzy</i> Evolutivo Tipo-2 Inter- valar Aplicado aos Dados de Propagação da COVID-19 no Brasil . . .</b>	<b>121</b>
7.1.1	Análise Comparativa e Discussões . . . . .	125
<b>7.2</b>	<b>Filtragem e Rastreamento de Kalman <i>Fuzzy</i> Evolutivo Tipo-2 Inter- valar Aplicado aos Dados de um 2DoF Helicóptero . . . . .</b>	<b>132</b>
7.2.1	Análise Comparativa e Discussões . . . . .	144
<b>IV</b>	<b>CONTEXTUALIZAÇÃO FINAL</b>	<b>146</b>
<b>8</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>147</b>
<b>9</b>	<b>PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>149</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>150</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>161</b>
	<b>APÊNDICE A – ALGORITMO <i>OBSERVER/KALMAN FILTER IDENTIFICATION</i> (OKID) . . . . .</b>	<b>162</b>
<b>A.1</b>	<b>Cálculo dos Parâmetros de Markov . . . . .</b>	<b>164</b>
A.1.1	Parâmetros de Markov do Sistema . . . . .	164
A.1.2	Parâmetros de Markov do Ganho do Observador . . . . .	165
<b>A.2</b>	<b>Algoritmo de Realização de Autosistemas - ERA . . . . .</b>	<b>165</b>

# Parte I

## Contextualização Inicial

# 1 Introdução

A modelagem *fuzzy* a partir de dados experimentais tem sido largamente desenvolvida e aplicada com sucesso em diferentes domínios de aplicação, tais como biomédica (RABCAN et al., 2022), epidemiologia (GOMES; SERRA, 2021a), processamento digital de imagem (GUO et al., 2022b), reconhecimento de padrão (SONG et al., 2022), controle e automação de sistemas dinâmicos (YOU et al., 2021; ZAREI; KHASTAN; RODRÍGUEZ-LÓPEZ, 2022), entre outros. O interesse crescente da comunidade científica pelos sistemas *fuzzy* é devido a algumas de suas vantagens sobre outras técnicas de inteligência artificial, tais como a sua capacidade de combinar o conhecimento do especialista com informações extraídas de dados experimentais, sua fácil formulação e implementação, maior interpretabilidade e eficiência no tratamento de não-linearidades e incertezas (SAAD; ISA; AHMED, 2020). Portanto, os sistemas *fuzzy* representam uma poderosa ferramenta para solucionar problemas nas ciências e engenharias, uma vez que eles fornecem modelos eficientes com melhor interpretabilidade (SERRA, 2012; TEH et al., 2018).

O nível de complexidade e incerteza associados a problemas práticos tem motivado o desenvolvimento de sistemas *fuzzy* tipo-2 no contexto evolutivo com aplicações em diversas áreas de estudo (SU; JUANG; HSU, 2022; EVANGELISTA; SERRA, 2022). Uma vez que grande parte dos métodos de projeto e análise de sistemas *fuzzy* tipo-2 utilizam apenas informações linguísticas do especialista (SAAD; ISA; AHMED, 2020) e, considerando o crescente volume de dados e informações pertinentes a sistemas dinâmicos, propostas de metodologias para projeto de sistemas *fuzzy* tipo-2 evolutivos, levando em consideração o processamento de dados experimentais incertos, é um campo de pesquisa em aberto (GHOZZI et al., 2022; CHEN et al., 2022; BASKOV, 2022).

Em problemas práticos, é comum a distorção das informações contidas em dados experimentais, obtidos por meio de sensores, devido à presença de ruídos (CADY, 2017). Neste sentido, algoritmos de aprendizagem eficientes e com melhor desempenho, desenvolvidos para aplicações neste contexto, são bastante procurados. O filtro de Kalman, desde que foi proposto em 1960, constitui uma das principais ferramentas matemáticas utilizadas no processamento de dados experimentais ruidosos (KALMAN, 1960; SERRA, 2018). Diante disso, esta tese consiste no projeto de filtros de Kalman usando modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno tipo-2 evolutivos considerando o processamento intervalar e espectral de dados experimentais incertos por meio de uma formulação multivariável e recursiva do método de Análise Espectral Singular. A metodologia proposta consiste em duas etapas. Na primeira etapa é realizada a estimação paramétrica inicial do modelo do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo e sua estrutura é atualizada, recursivamente, de acordo com a dinâmica inerente aos dados experimentais. Na segunda etapa, considerada de atualização

do Filtro de Kalman *Fuzzy* Tipo-2, a parametrização da proposição do antecedente é realizada por meio do particionamento evolutivo dos dados experimentais através de uma formulação *fuzzy* tipo-2 do algoritmo *evolving* Takagi-Sugeno (eTS), proposta, e a parametrização da proposição do conseqüente é realizada por meio de uma formulação *fuzzy* tipo-2 recursiva do algoritmo *Observer/Kalman Filter Identification* (OKID), proposta em (GOMES; SERRA, 2021a), baseada nas componentes espectrais não-observáveis extraídas a partir dos dados experimentais.

## 1.1 Revisão da Literatura

Recentemente, os sistemas *fuzzy* evolutivos vêm sendo amplamente estudados e aplicados na solução de problemas complexos (GU, 2021; YANG et al., 2022; ALVES; AGUIAR, 2021; HUANG et al., 2021; YU; LU; ZHANG, 2022). Em (GARCIA; LEITE; SKRJANC, 2020), um modelo granular evolutivo baseado em regras *fuzzy* é proposto para problemas de aproximação de funções e previsão de séries temporais, sujeito a perda de informações durante o processamento dos dados. Nesta abordagem, o modelo *fuzzy* é baseado em um algoritmo de aprendizagem incremental que estima os dados perdidos e adapta os parâmetros e a estrutura do modelo. Em (GE; ZENG, 2019), é proposto um sistema *fuzzy* evolutivo para aprendizagem *online* a partir de dados. Essa abordagem utiliza um parâmetro de autoajuste, o qual é capaz de gerar melhores regras *fuzzy* para representação dos dados e aumenta a eficiência do sistema proposto para solucionar problemas de *underfitting/overfitting*. Em (LUO et al., 2019), é proposta uma rede neural recursiva baseada em sistemas *fuzzy* intuicionistas evolutivos tipo-2 intervalares. Nesta abordagem, as funções de pertinência *fuzzy* são obtidas por um algoritmo de agrupamento baseado no conceito de densidade das amostras dos dados e sua eficiência é ilustrada a partir da sua aplicação em problemas de previsão e regressão de séries temporais. Em (AFRAKHTE; BAYAT, 2020), uma estratégia de gerenciamento de energia baseada em sistemas *fuzzy* evolutivos tipo-2 é proposta para otimização de sistemas de energia. Nesta abordagem, os parâmetros das funções de pertinência *fuzzy* são ajustados por um algoritmo de otimização para diferentes modos de operação.

Vários estudos envolvendo a integração de filtros de Kalman e sistemas de inferência *fuzzy* já foram propostos e aplicados em diversos domínios de aplicação (JIMÉNEZ; ALVARADO; MATÍA, 2021; MATÍA et al., 2021). Em (ZHAO; TONG; MAO, 2023), um filtro de Kalman *fuzzy* para rastreamento fotoelétrico de alta precisão é proposto para melhorar o desempenho na estimação em casos com ruídos de medição não-estacionários. Nesta abordagem, o filtro de Kalman é integrado a sistemas *fuzzy* do tipo *singleton* e não-*singleton* e é comparado a diferentes métodos presentes na literatura para demonstrar a superioridade do filtro de Kalman proposto. Em (WANG et al., 2021), um filtro de Kalman *fuzzy* adaptativo é proposto para reconstrução de imagens de tomografia por capacitância

elétrica. Nesta abordagem, o filtro de Kalman *fuzzy* adaptativo ajusta os valores da matriz de covariância do ruído de observação e da matriz de covariância do erro de estimação inicial das capacitâncias medidas para melhorar a qualidade da imagem reconstruída. Em (LIN et al., 2022), um filtro de Kalman distribuído é proposto para o processamento de ruídos *fuzzy* em sistemas multiagentes. Nesta abordagem, os ruídos são representados usando variáveis aleatórias *fuzzy* com distribuição de probabilidade trapezoidal sendo aplicada com sucesso ao problema de rastreamento de alvos. Em (WANG et al., 2022), um filtro de Kalman *fuzzy* robusto adaptativo é proposto para estimar parâmetros importantes em sistemas avançados de controle de chassi. Nesta abordagem, um sistema *fuzzy* Takagi-Sugeno é desenvolvido para ajustar os parâmetros do ruído de processo do filtro de Kalman proposto e os parâmetros do modelo são atualizados por meio do algoritmo de mínimos quadrados recursivo.

Diferentemente das abordagens acima mencionadas e outras encontradas na literatura, a metodologia proposta está baseada na integração de sistemas *fuzzy* evolutivos tipo-2 intervalares com filtragem de Kalman, levando em consideração o processamento de componentes espectrais não-observáveis obtidas a partir de dados experimentais incertos. Quando comparada a abordagens semelhantes na literatura, a metodologia proposta é uma ferramenta útil para rastrear e prever dados experimentais não-estacionários incertos e não-lineares, devido ao seu mecanismo de atualização da estrutura do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar, em função das incertezas inerentes às componentes espectrais não-observáveis.

## 1.2 Motivação e Justificativa

Dentre algumas das complexidades associadas à modelagem computacional de dados experimentais encontram-se as não-linearidades, incertezas, ambiente ruidoso e não-estacionário, variabilidade temporal, entre outras (MARTYNYUK; YU.; MARTYNYUK-CHERNIENKO, 2019; TOMÁS-RODRÍGUEZ; BANKS, 2010). Dentre estes aspectos, destaca-se a importância dos conceitos de não-linearidade, não-estacionariedade e incerteza em sistemas dinâmicos, o quais são brevemente discutidos na sequência. Não-linearidade é um termo usado em estatística para descrever situações em que não há uma relação linear ou direta entre duas ou mais variáveis (ANTSACLIS, 2005). Em sistemas dinâmicos práticos, as não-linearidades podem estar presentes tanto nas relações entre suas variáveis de entrada e saída como em suas variáveis de estado (WU; LI; QIU, 2023). Já a não-estacionariedade é uma característica de sistemas dinâmicos cujas propriedades estatísticas (média, variância, etc) são variantes no tempo, ou seja, seus valores dependem do instante em que o sistema é observado (WANG ZHISHEN DUAN, 2009). A estacionariedade é um aspecto importante na proposição de novas metodologias na área de identificação de sistemas pois muitos modelos estatísticos e técnicas de análise de séries temporais

dependem dessa propriedade para serem aplicados com eficácia (YANG; DONG, 2023). Por fim, as incertezas envolvidas em qualquer problema prático é resultado de alguma informação imprecisa (WANG, 1997). As informações disponíveis referentes ao problema que deve ser solucionado podem ser incompletas, fragmentadas, não totalmente confiáveis, vagas, contraditórias ou imprecisas de alguma outra forma. Em geral, estas diversas deficiências de informação podem resultar em diferentes tipos de incerteza. Dentre estes tipos tem-se as incertezas de medição dos dados, incerteza nos parâmetros de modelos matemáticos, incerteza aleatória, entre outros (DOMBI; HUSSAIN, 2023).

A fim de garantir condições de estabilidade e convergência de algoritmos diante dessas complexidades, várias abordagens vêm sendo propostas no sentido de não somente lidar com tais complexidades como também superá-las de alguma forma (GUO et al., 2022a; ZHANG et al., 2022). No entanto, a presença de incertezas em dados experimentais é um dos aspectos mais discutidos pelos pesquisadores, bem como a variabilidade temporal da dinâmica inerente aos dados devido à presença de ruído (MA; MA, 2020; HURTIK; MOLEK; HULA, 2020). Isso tem motivado o desenvolvimento de estratégias de inteligência computacional baseadas na integração de sistemas *fuzzy* tipo-2 evolutivos com filtros de Kalman, que possam lidar com tais complexidades, principalmente no tratamento de diferentes tipos de incerteza (HASHEMI; TAHERI; CRETU, 2022; LU et al., 2022; XIAO et al., 2022), o que é a principal motivação para o desenvolvimento desta tese de doutorado.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo Geral

Desenvolver uma metodologia para o projeto de Filtros de Kalman *Fuzzy* tipo-2 com inferência evolutiva e intervalar, considerando o processamento das componentes espectrais não-observáveis inerentes aos dados experimentais.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

- Apresentar uma base teórica sobre filtragem de Kalman, sistemas *fuzzy* tipo-2 intervalares, sistemas evolutivos e análise espectral de dados;
- Formular, matematicamente, uma versão *fuzzy* tipo-2 do algoritmo de agrupamento *evolving* Takagi-Sugeno para estimação paramétrica evolutiva da proposição do antecedente do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar;
- Formular, matematicamente, uma versão recursiva multivariável do algoritmo de Análise Espectral Singular (AES) de modo a extrair componentes espectrais não-observáveis de dados experimentais multivariáveis;

- Formular, matematicamente, um mecanismo de atualização da proposição do consequente através de uma versão *fuzzy* tipo-2 do algoritmo OKID baseado na decomposição espectral de dados experimentais multivariáveis;
- Validar a metodologia proposta a partir da análise comparativa com outras metodologias largamente citadas na literatura e aplicações a estudos de caso em problemas reais de filtragem e previsão.

## 1.4 Contribuições da Tese de Doutorado

As principais contribuições que garantem a originalidade da metodologia proposta são:

- Uma abordagem evolutiva baseada na integração de filtros de Kalman e sistemas *fuzzy* tipo-2 intervalares para processamento de dados experimentais incertos;
- A proposta de uma metodologia para rastreamento e previsão de séries temporais com comportamento caótico e incerto, capaz de solucionar problemas em diversos campos de aplicação;
- Formulação de uma nova versão recursiva multivariável do algoritmo Análise Espectral Singular para extração de componentes espectrais não-observáveis de dados experimentais multivariáveis;
- Formulação de uma nova versão *fuzzy* tipo-2 intervalar do algoritmo de agrupamento *evolving* Takagi-Sugeno para estimação das regiões de operação intervalares associadas ao comportamento e incertezas inerentes aos dados experimentais, de forma a garantir seu rastreamento por meio uma região de confiança.

## 1.5 Trabalhos Publicados Pela Autora

### 1.5.1 Artigos em Periódicos

- Daiana Gomes e Ginalber Serra, *Interval Type-2 Evolving Fuzzy Kalman Filter For Processing of Unobservable Spectral Components From Uncertain Experimental Data*, Journal of the Franklin Institute - Engineering and Applied Mathematics, Volume -, DOI 10.1016/j.jfranklin.2023.12.017, 2024 (Qualis A1, JCR: 4.1).
- Daiana Gomes e Ginalber Serra, *Type-2 evolving fuzzy Kalman filter design based on unobservable spectral components space for interval tracking of non-stationary experimental data*, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems: Applications in Engineering and

Technology, Volume 44, Número 06, páginas 9379-9394, DOI 10.3233/JIFS-222919, 2023 (Qualis A2, JCR: 2).

- Daiana Gomes e Ginalber Serra, *Interval type-2 fuzzy computational model for real time Kalman filtering and forecasting of the dynamic spreading behavior of novel Coronavirus 2019*, ISA Transactions, Volume 124, páginas 57-68, ISSN 0019-0578, DOI 10.1016/j.isatra.2022.03.031, 2022 (Qualis A1, JCR: 7.3).

### 1.5.2 Capítulos de Livro

- dos Santos Gomes, D.C., de Oliveira Serra, G.L. (2022). Interval Type-2 Fuzzy Kalman Filtering and Forecasting of the Dynamic Spread Behavior of Novel Coronavirus 2019. In: Mishra, S., González-Briones, A., Bhoi, A.K., Mallick, P.K., Corchado, J.M. (eds) Connected e-Health. Studies in Computational Intelligence, vol 1021. Springer. DOI: 10.1007/978-3-030-97929-4-9.

### 1.5.3 Artigos em Anais de Congressos

- Gomes, D. C. S; Serra, G. L. O. Abordagem Computacional Evolutiva para Filtragem e Previsão de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar. In: Anais do Congresso Brasileiro de Sistemas *Fuzzy*, 2021, São José do Rio Preto - SP, p. 187-198, 2021.
- Gomes, D. C. S; Serra, G. L. O. Metodologia para Projeto de Filtro de Kalman Baseado em Modelo *Fuzzy* Tipo-2 Evolutivo para Previsão da Dinâmica de Propagação da COVID-19. In: Anais do XV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2021, Rio Grande - RS, p. 1318-1323, 2021.
- GOMES, D. C. S.; Serra, G. L. O. Projeto de Filtro de Kalman *Fuzzy* Evolutivo Tipo-2 Intervalar a Partir de Dados Experimentais. In: Anais do XXIV Congresso Brasileiro de Automática, Fortaleza - CE, 2022.
- GOMES, D. C. S.; Serra, G. L. O. Algoritmo de Filtro de Kalman Baseado em Modelo *Fuzzy* Tipo-2 Evolutivo para Rastreamento Intervalar de Dados Experimentais. In: Anais do XVI Brazilian Conference on Computational Intelligence (CBIC 2023), Salvador - BA, 2023.

### 1.5.4 Premiações

- Menção Honrosa ao artigo “Metodologia para Projeto de Filtro de Kalman Baseado em Modelo *Fuzzy* Tipo-2 Evolutivo para Previsão da Dinâmica de Propagação da COVID-19”, apresentado no XV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2021.

## 1.6 Organização da Tese

Esta tese está organizada em quatro partes principais: Contextualização Inicial, Fundamentação Teórica, Referencial Metodológico e Contextualização Final.

A parte **I**, CONTEXTUALIZAÇÃO INICIAL, é constituída apenas pelo Capítulo 1. Neste capítulo, apresentou-se uma introdução aos tópicos de interesse desta tese, a motivação e justificativa, os objetivos geral e específicos, bem como as contribuições da metodologia apresentada nesta tese.

A parte **II**, FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA, é constituída pelos Capítulos 2, 3 e 4. No Capítulo 2, são abordados conceitos e formulações sobre a teoria de filtragem de Kalman, relevantes para o desenvolvimento da metodologia proposta nesta tese. No capítulo 3, aspectos teóricos sobre sistemas *fuzzy* tipo-2 são detalhados, bem como sua extensão para sistemas *fuzzy* tipo-2 intervalares, os quais constituem a base para a metodologia proposta nesta tese. No Capítulo 4, são abordados conceitos sobre a teoria de sistemas evolutivos, enfatizando a teoria fundamental para projeto de sistemas *fuzzy* evolutivos.

A parte **III**, REFERENCIAL METODOLÓGICO, é constituída pelos Capítulos 5, 6 e 7. No Capítulo 5, é apresentada a metodologia proposta para o projeto de filtros de Kalman *fuzzy* evolutivos tipo-2 intervalares. Neste capítulo, formulações para o pré-processamento dos dados experimentais por meio de uma versão multivariável da técnica de Análise Espectral Singular, a estimação paramétrica inicial das proposições do antecedente e consequente do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar, bem como a etapa de atualização recursiva de sua estrutura, são abordados. No capítulo 6, resultados computacionais da metodologia proposta para o rastreamento da série temporal caótica de Mackey-Glass e para previsão da trajetória de veículos aeroespaciais, em ambiente ruidoso, são apresentados, bem como análise comparativa com abordagens relevantes presentes na literatura, no sentido de demonstrar a eficiência da metodologia proposta. No Capítulo 7, resultados experimentais da aplicação da metodologia proposta para o rastreamento adaptativo dos dados de um helicóptero com dois graus de liberdade bem como para previsão da dinâmica de propagação da COVID-19, são apresentados, no sentido de elucidar a aplicabilidade da metodologia proposta.

A Parte **IV**, CONTEXTUALIZAÇÃO FINAL, é constituída pelos Capítulos 8 e 9 nos quais apresentam-se, respectivamente, as considerações finais desta tese e as propostas

para trabalhos futuros.

## Parte II

### Fundamentação Teórica

## 2 Teoria de Filtragem de Kalman

O problema de estimação de estados de sistemas dinâmicos está presente em diversas aplicações da engenharia (JIANG; DAI; WEI, 2022; GHORBANI; JANABI-SHARIFI, 2022; ZAMZAM; LIU; BERNSTEIN, 2021; NUGROHO; TAHA; QI, 2020). Neste contexto, alguns algoritmos já foram desenvolvidos no sentido de estabelecer uma representação interna do comportamento de sistemas dinâmicos ao longo do tempo. Dentre eles, o filtro de Kalman (FK) é um estimador recursivo ótimo, bastante aplicado atualmente, baseado na combinação de informações sobre a dinâmica do sistema, representado por um modelo no espaços de estados, e medições de sensores (KALMAN, 1960). Neste capítulo, são apresentados conceitos básicos relativos ao filtro de Kalman bem como o funcionamento da sua estrutura no processo de filtragem e estimação de estados de sistemas dinâmicos.

O filtro de Kalman consiste de um conjunto de equações recursivas, as quais são utilizadas para a estimação dos estados de um sistema dinâmico representado pelo seguinte modelo linear no espaço de estados (AGUIRRE, 2015; HAYKIN, 2014; KALMAN, 1960; BROWN; HWANG, 2012; GREWAL, 2008):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \Upsilon_k \mathbf{w}_k \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado  $n$ -dimensional no instante  $k$ ;  $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entradas  $m$ -dimensional no instante  $k$ ;  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de saídas  $p$ -dimensional no instante  $k$  e as matrizes  $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $\mathbf{C}_k \in \mathbb{R}^{p \times n}$  são, respectivamente, a matriz de estados, matriz de entrada e matriz de saída. Os vetores  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{v}$  são, respetivamente, os ruídos de processo e de medição, os quais são processos estocásticos, de média nula, que satisfazem as seguintes relações  $E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = \mathbf{Q}_k$ ,  $E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] = \mathbf{R}_k$  e  $E[\mathbf{v}_k \mathbf{w}_k^T] = 0$ , e  $\Upsilon_k$  é a matriz que modela o ruído de processo. Um dos desafios para implementação da filtragem de Kalman clássica é a determinação das matrizes  $\mathbf{Q}_k$  e  $\mathbf{R}_k$ , as quais não são conhecidas em aplicações práticas, sendo, portanto, necessário realizar uma estimação e/ou atualização de seus valores (KALMAN, 1960). A matriz de covariância do ruído de medição  $\mathbf{R}_k$  depende da sensibilidade dos sensores utilizados para aferição dos dados experimentais do sistema sob análise e pode ser estimada a partir de técnicas de pré-processamento de dados (GOMES; SERRA, 2021b; ZHANG et al., 2024). Por outro lado, a matriz de covariância do ruído de processo  $\mathbf{Q}_k$  está associada ao nível de ruído presente nas variáveis de estado internas ao sistema dinâmico e, portanto, torna-se um pouco mais complexo estimá-la em situações práticas (ZHANG et al., 2020). Alguns métodos já foram propostos na literatura a fim de estimar ou atualizar os valores das matrizes  $\mathbf{Q}_k$  e  $\mathbf{R}_k$  em aplicações envolvendo a filtragem de Kalman clássica (ASSA; PLATANOTIS, 2017; CHANG et

al., 2021; NINO-RUIZ; GUZMAN; JABBA, 2021). A eficiência da metodologia proposta nesta tese não depende da estimação dos valores das matrizes  $\mathbf{Q}_k$  e  $\mathbf{R}_k$ , uma vez que está baseada na relação direta existente entre o algoritmo de identificação OKID e filtragem de Kalman (JUANG, 1994; WU et al., 2015).

Para o problema de estimação de estados, a estimativa de estados ótima  $\mathbf{x}_k$  é definida em termos da Função de Densidade de Probabilidade (FDP) condicional  $f_k(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k)$ , isto é, a estimativa ótima do vetor de estados  $\mathbf{x}_k$  é condicionada às medições de  $\mathbf{y}_i, i = 1, \dots, k$ , ou seja,  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{y}_k$ , onde  $k$  denota o instante de tempo atual (HAYKIN, 2014). O filtro de Kalman convencional adota uma estrutura do tipo *predição-correção* ou *propagação-assimilação* para a estimação ótima do vetor de estados  $\mathbf{x}_k$  baseada no conhecimento da dinâmica do sistema e nas medições realizadas para a saída  $\mathbf{y}_k$ . As etapas de propagação e assimilação, implementadas pelo algoritmo do filtro de Kalman convencional, são descritas a seguir.

## 2.1 Etapa de Propagação

Considerando a função de densidade de probabilidade de  $\mathbf{x}_k^+$  dada por  $f_k \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{P}_k^+)$ , em que  $f_k$ , por hipótese, é considerada como gaussiana para simplificação das deduções matemáticas,  $\bar{\mathbf{x}}_k^+$  é a média e  $\mathbf{P}_k^+$  é a matriz de covariância do erro de estimação, deseja-se encontrar a função de densidade de probabilidade de  $\mathbf{x}_{k+1}^-$ . Nesta tese, o sinal “+” é utilizado para indicar uma grandeza referente ao instante  $k$  após ter sido incluída a informação em  $k$  e o sinal de “-” para indicar uma grandeza referente ao instante  $k$  antes de ser incluída a informação referente ao instante  $k$ . Uma vez que, em processos estocásticos, uma função de densidade de probabilidade gaussiana permanece gaussiana ao ser propagada por um sistema linear e invariante no tempo,  $f_k^-$  também será gaussiana, ou seja,  $f_k^- \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^-, \mathbf{P}_{k+1}^-)$ , e é completamente definida pela determinação de  $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^-$  e  $\mathbf{P}_{k+1}^-$ .

Substituindo o estado  $\mathbf{x}_k$  por  $\mathbf{x}_k^+$  na Equação (2.1), tem-se:

$$\mathbf{x}_{k+1}^- = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k^+ + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{\Upsilon}_k \mathbf{w}_k \quad (2.3)$$

Uma vez que a média do ruído de processo  $\mathbf{w}_k$ , por hipótese, é nula e o sinal  $\mathbf{u}_k$  é determinístico, a esperança matemática de  $\mathbf{x}_{k+1}^-$ , na Equação (2.3), é dada por:

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{x}}_k^+ + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \quad (2.4)$$

Por se tratar de distribuições gaussianas, a estimação do vetor de estado  $\mathbf{x}_k$  resultará no seu valor médio. Logo, a Equação (2.4) pode ser reescrita como segue:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \quad (2.5)$$

onde o símbolo “ $\wedge$ ” indica o valor estimado do vetor de estado.

Definindo-se o erro de estimação na etapa de propagação como segue:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- - \mathbf{x}_{k+1} \quad (2.6)$$

onde o símbolo “ $\sim$ ” indica o erro e  $\mathbf{x}_{k+1}$  é o valor verdadeiro do vetor de estado. Substituindo as Equações (2.5) e (2.1) na Equação (2.6):

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- = [\mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k] - [\mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{\Upsilon}_k \mathbf{w}_k] \quad (2.7)$$

$$= \mathbf{A}_k (\hat{\mathbf{x}}_k^+ - \mathbf{x}_k) - \mathbf{\Upsilon}_k \mathbf{w}_k \quad (2.8)$$

$$= \mathbf{A}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^+ - \mathbf{\Upsilon}_k \mathbf{w}_k \quad (2.9)$$

Por definição, a matriz de covariância de  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$  é dada por (AGUIRRE, 2015):

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbb{E} \left[ \left( \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- - \mathbb{E} [\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-] \right) \left( \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- - \mathbb{E} [\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-] \right)^T \right] \quad (2.10)$$

$$= \mathbb{E} \left[ \left( \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- - \mathbf{x}_{k+1} \right) \left( \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- - \mathbf{x}_{k+1} \right)^T \right] \quad (2.11)$$

$$= \mathbb{E} \left[ \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \left( \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right)^T \right] \quad (2.12)$$

A partir da Equação (2.12), percebe-se que a matriz de covariância do vetor de estado estimado é igual a matriz de covariância do erro de estimação para o caso em que a estimativa de  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$  é não polarizada, para o qual  $\mathbb{E} [\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^-] = 0$ . Substituindo a Equação (2.9) na Equação (2.12), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1}^- &= \mathbb{E} \left[ \left( \mathbf{A}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^+ - \mathbf{\Upsilon}_k \mathbf{w}_k \right) \left( \mathbf{A}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^+ - \mathbf{\Upsilon}_k \mathbf{w}_k \right)^T \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \mathbf{A}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^+ \left( \tilde{\mathbf{x}}_k^+ \right)^T \mathbf{A}_k^T \right] - \mathbb{E} \left[ \mathbf{A}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^+ \mathbf{w}_k^T \mathbf{\Upsilon}_k^T \right] - \mathbb{E} \left[ \mathbf{\Upsilon}_k \mathbf{w}_k \left( \tilde{\mathbf{x}}_k^+ \right)^T \mathbf{A}_k^T \right] + \mathbb{E} \left[ \mathbf{\Upsilon}_k \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T \mathbf{\Upsilon}_k^T \right] \\ &= \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k^+ \mathbf{A}_k^T - \mathbf{A}_k \mathbb{E} \left[ \tilde{\mathbf{x}}_k^+ \mathbf{w}_k^T \right] \mathbf{\Upsilon}_k^T - \mathbf{\Upsilon}_k \mathbb{E} \left[ \mathbf{w}_k \left( \tilde{\mathbf{x}}_k^+ \right)^T \right] \mathbf{A}_k^T + \mathbf{\Upsilon}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{\Upsilon}_k^T \\ &= \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k^+ \mathbf{A}_k^T + \mathbf{\Upsilon}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{\Upsilon}_k^T \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde  $\mathbb{E} [\tilde{\mathbf{x}}_k^+ \mathbf{w}_k^T] = \mathbb{E} [\mathbf{w}_k \left( \tilde{\mathbf{x}}_k^+ \right)^T] = 0$ , pois o ruído de processo na iteração  $k$  não é correlacionado com o erro de estimação, considerando a mesma iteração.

Desse modo, a função de densidade de probabilidade  $f_k^- \sim \mathcal{N} \left( \bar{\mathbf{x}}_{k+1}^-, \mathbf{P}_{k+1}^- \right)$  é caracterizada completamente pelas Equações (2.4) e (2.13).

## 2.2 Etapa de Assimilação

Conforme visto na Seção 2.1, o vetor de estado  $\mathbf{x}_k^+$  é propagado para a próxima iteração a partir do modelo dinâmico, o qual descreve como o vetor de estado muda de uma iteração para outra, resultando em  $\mathbf{x}_{k+1}^-$ . Na etapa de assimilação ou correção, a estimativa do vetor de estados  $\mathbf{x}_{k+1}^-$  é corrigida com a chegada de nova informação (medição) na iteração  $k+1$ , resultando no vetor de estado corrigido  $\mathbf{x}_{k+1}^+$ . Nesta etapa, deseja-se observar o que ocorre com  $f_k^-$ , caracterizada na etapa de propagação, ao ser realizada a etapa de assimilação, ou seja, deve-se caracterizar a distribuição de  $\mathbf{x}_{k+1}^+$  definida pela distribuição *a posteriori*  $f_k^+ \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^+, \mathbf{P}_{k+1}^+)$ , a partir da distribuição *a priori*,  $f_k^- \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^-, \mathbf{P}_{k+1}^-)$ , e da medição que chega nesta iteração,  $\mathbf{y}_{k+1}$ . É possível relacionar as médias de  $f_k^+$  e  $f_k^-$  como segue:

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \bar{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} [\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{C}_{k+1} \bar{\mathbf{x}}_{k+1}^-] \quad (2.14)$$

onde

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{C}_k^T [\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_{k+1}]^{-1} \quad (2.15)$$

Conforme mencionado anteriormente, por se tratar de distribuições gaussianas, a estimação do vetor  $\mathbf{x}_k$  pode ser substituído pelo seu valor médio. Logo, a Equação (2.14) pode ser reescrita como segue:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} [\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{C}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-] \quad (2.16)$$

Para se determinar uma expressão para a matriz de covariância  $\mathbf{P}_{k+1}^-$ , será definido o erro de estimação após a assimilação como segue:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+ - \mathbf{x}_{k+1} \quad (2.17)$$

A partir da Equação (2.17), a matriz de covariância desejada é dada por

$$\mathbf{P}_{k+1}^+ = \mathbb{E} [\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^+ (\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^+)^T] \quad (2.18)$$

Substituindo a Equação (2.16) na Equação (2.17), tem-se:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} [\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{C}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-] - \mathbf{x}_{k+1} \quad (2.19)$$

Considerando a Equação (2.2), a Equação (2.19) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^+ &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} [\mathbf{C}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{C}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-] - \mathbf{x}_{k+1} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1}) \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- - (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1}) \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1}) \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Substituindo a Equação (2.20) na Equação (2.18), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{k+1}^+ &= \mathbf{E} \left[ (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k) \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \left( \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right)^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k)^T \right] + \\
&+ \mathbf{E} \left[ (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k) \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_{k+1}^T \right] + \\
&+ \mathbf{E} \left[ \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{v}_k \left( \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right)^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k)^T \right] + \mathbf{E} \left[ \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_{k+1}^T \right] \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_{k+1}^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k)^T + \\
&+ (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k) \mathbf{E} \left[ \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \mathbf{v}_k^T \right] \mathbf{K}_{k+1}^T + \\
&+ \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{E} \left[ \mathbf{v}_k \left( \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right)^T \right] (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{K}_{k+1}^T \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_{k+1}^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{K}_{k+1}^T \\
&= \mathbf{P}_{k+1}^- - \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{C}_k^T \mathbf{K}_{k+1}^T - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k+1}^- + \\
&+ \mathbf{K}_{k+1} \left( \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_{k+1} \right) \mathbf{K}_{k+1}^T \tag{2.21}
\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{E} \left[ \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \mathbf{v}_{k+1}^T \right] = 0$  e  $\mathbf{E} \left[ \mathbf{v}_{k+1} \left( \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right)^T \right] = 0$ , uma vez que o ruído de medição em uma iteração não é correlacionado ao erro da estimação corrigida na mesma iteração.

Substituindo a Equação (2.15) no primeiro elemento  $\mathbf{K}_{k+1}$  da última parcela da Equação (2.21), tem-se:

$$\mathbf{P}_{k+1}^+ = \mathbf{P}_{k+1}^- - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k+1}^- \tag{2.22}$$

Assim, a distribuição de probabilidade *a posteriori*  $f_k^+ \sim \mathcal{N} \left( \bar{\mathbf{x}}_{k+1}^+, \mathbf{P}_{k+1}^+ \right)$  é completamente caracterizada pelas Equações (2.14) e (2.22).

Portanto, o filtro de Kalman discreto é formado pela fusão das etapas de propagação e assimilação, anteriormente descritas, e o seu procedimento de cálculo é resumido pelo conjunto de equações abaixo:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- &= \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \\
\mathbf{P}_{k+1}^- &= \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k^+ \mathbf{A}_k^T + \Upsilon_k \mathbf{Q}_k \Upsilon_k^T \\
\mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{C}_k^T \left[ \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_{k+1} \right]^{-1} \\
\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+ &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} \left( \mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right) \\
\mathbf{P}_{k+1}^+ &= \mathbf{P}_{k+1}^- - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k+1}^- \tag{2.23}
\end{aligned}$$

onde as condições iniciais  $\hat{\mathbf{x}}_0^+$  e  $\mathbf{P}_0^+$  são conhecidas.

## 3 Teoria de Sistemas *Fuzzy* Tipo-2

O conceito de “conjunto *fuzzy* com função de pertinência *fuzzy*” foi introduzido em 1975 por L. A. Zadeh, os chamados conjuntos *fuzzy* tipo-2, como uma extensão do conceito de conjuntos *fuzzy* convencionais, também chamados de conjuntos *fuzzy* tipo-1 (ZADEH, 1975). Conjuntos *fuzzy* tipo-2 são caracterizados por funções de pertinência cujo grau de pertencimento de cada elemento nesta função é um conjunto *fuzzy* tipo-1 no intervalo  $[0, 1]$  (KARNIK; MENDEL; LIANG, 1999). A motivação para a formulação deste conceito está na impossibilidade de se determinar precisamente o grau de pertinência de uma grandeza em um conjunto *fuzzy*, uma vez que somente dados e informações imprecisas estão disponíveis na prática (KARNIK; MENDEL, 1998). Dessa forma, os conjuntos *fuzzy* tipo-2 são muito úteis em situações em que é difícil se determinar o formato preciso das funções de pertinência, permitindo representar diferentes tipos de incerteza em relação aos conjuntos *fuzzy* tipo-1. Neste capítulo, primeiramente é apresentada uma breve revisão sobre conceitos relacionados a conjuntos *fuzzy* tipo-1 e em seguida são apresentados conceitos e definições matemáticas sobre conjuntos *fuzzy* tipo-2 gerais e intervalares, bem como algumas operações básicas entre conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares. Por fim, a estrutura adotada em sistemas de inferência *fuzzy* tipo-2 Takagi-Sugeno é apresentada.

### 3.1 Conjuntos *Fuzzy* Tipo-1

Um conjunto *fuzzy* tipo-1, denominado por  $W$ , definido em um universo  $\mathcal{U}$ , é caracterizado por uma função de pertinência  $\mu_W(x)$ , a qual assume valores no intervalo  $[0, 1]$  (WANG, 1997). Matematicamente, um conjunto *fuzzy* tipo-1 pode ser expresso por:

$$W = \{(\mathbf{u}, \mu_W(\mathbf{u})) \mid \mathbf{u} \in \mathcal{U}\} \quad (3.1)$$

Um conjunto *fuzzy* pode ser entendido como a generalização de um conjunto clássico, permitindo que a função de pertinência assuma qualquer valor no intervalo  $[0, 1]$  (ZADEH, 1965). Em outras palavras, na matemática clássica a função de pertinência de um conjunto pode assumir apenas dois valores (zero ou um), conforme  $\mathbf{u}$  pertença ou não pertença ao conjunto *fuzzy*  $W$ , enquanto a função de pertinência de um conjunto *fuzzy* é uma função contínua definida no intervalo  $[0, 1]$ . Na figura 1 é ilustrado um exemplo de conjunto *fuzzy* tipo-1 definido a partir de uma função gaussiana. Caso o universo de discurso  $\mathcal{U}$  seja contínuo (por exemplo,  $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ ), o conjunto *fuzzy*  $W$  é comumente representado por:

$$W = \int_{\mathcal{U}} \mu_W(\mathbf{u}) / \mathbf{u} \quad (3.2)$$

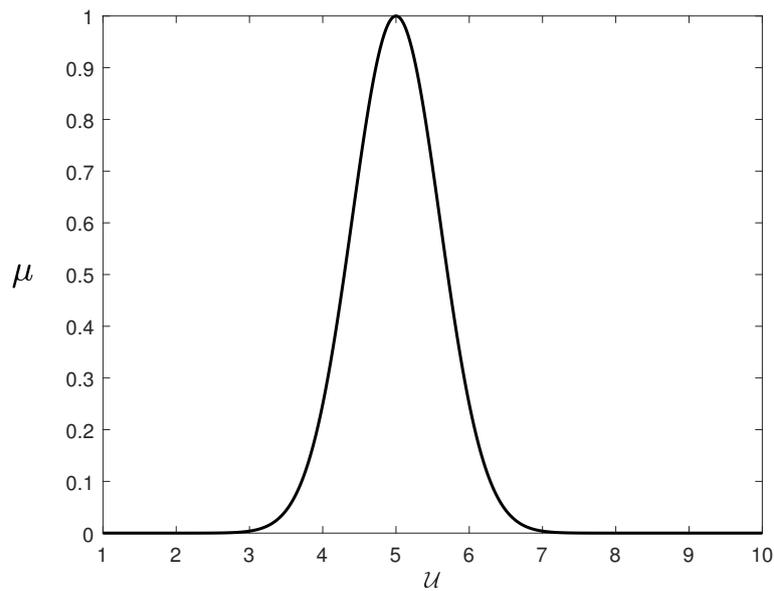


Figura 1 – Conjunto *fuzzy* tipo-1 gaussiano. Fonte: A autora

onde o sinal de integral não significa a operação de integração e sim denota a coleção de todos os pontos  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  com o valor da função de pertinência associada  $\mu_W(\mathbf{u})$ . Por outro lado, caso o universo de discurso  $\mathcal{U}$  seja discreto, o conjunto *fuzzy* é comumente representado por:

$$W = \sum_{\mathbf{u}} \mu_W(\mathbf{u}) / \mathbf{u} \quad (3.3)$$

onde o sinal de somatório não representa a operação de adição aritmética e sim denota a coleção de todos os pontos  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  com o valor da função de pertinência associada  $\mu_W(\mathbf{u})$ .

### 3.1.1 Operações Básicas entre Conjuntos *Fuzzy* Tipo-1

#### 3.1.1.1 União

A união de dois conjuntos *fuzzy*  $A$  e  $B$  é um conjunto *fuzzy* definido no universo de discurso  $\mathcal{U}$ , denotada por  $A \cup B$ , cuja função de pertinência é definida por (WANG, 1997):

$$\mu_{A \cup B}(\mathbf{u}) = \max[\mu_A(\mathbf{u}), \mu_B(\mathbf{u})], \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U} \quad (3.4)$$

Considerando os conjuntos *fuzzy*  $A$  e  $B$ , representados na Figura 2, a união entre estes conjuntos está representada na Figura 3.

#### 3.1.1.2 Intercessão

A intercessão de dois conjuntos *fuzzy*  $A$  e  $B$  é um conjunto *fuzzy* definido no universo de discurso  $\mathcal{U}$ , denotada por  $A \cap B$ , cuja função de pertinência é definida por (WANG, 1997):

$$\mu_{A \cap B}(\mathbf{u}) = \min[\mu_A(\mathbf{u}), \mu_B(\mathbf{u})], \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U} \quad (3.5)$$

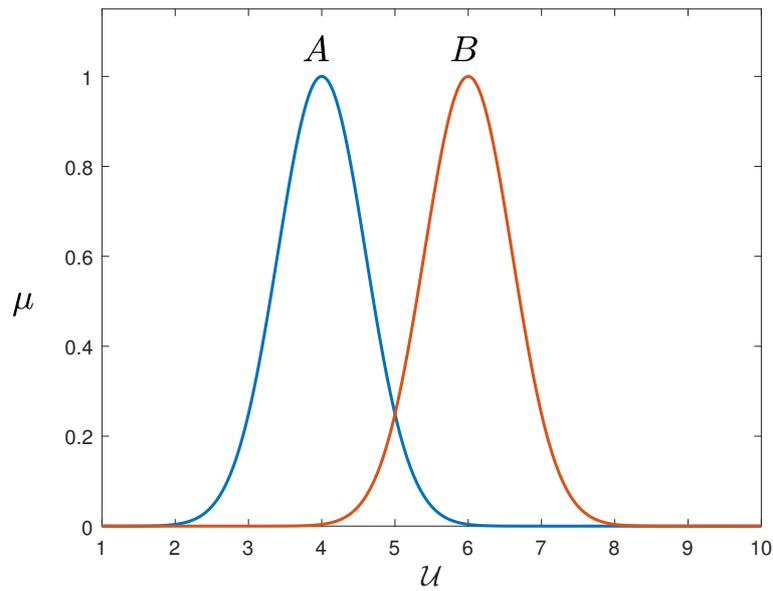


Figura 2 – Conjuntos *fuzzy* tipo-1  $A$  e  $B$ . Fonte: A autora

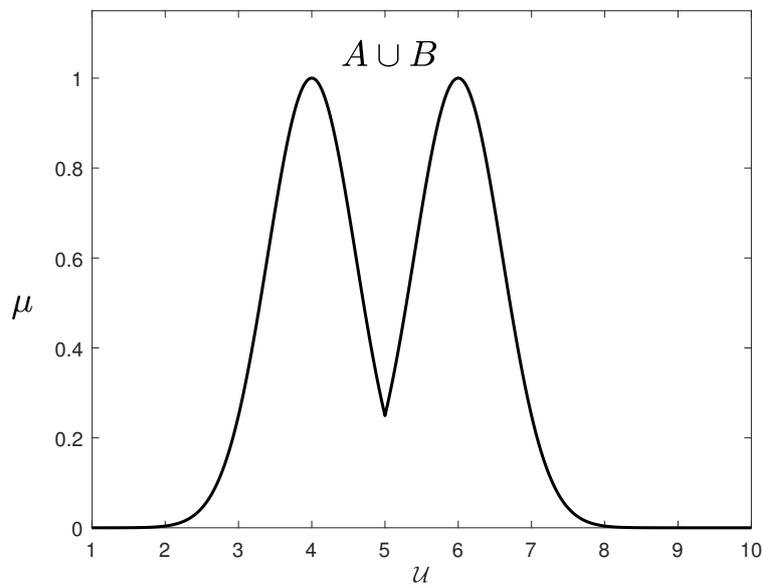


Figura 3 – Conjunto *fuzzy* resultante da operação de união entre os conjuntos *fuzzy*  $A$  e  $B$ . Fonte: A autora

O conjunto *fuzzy* resultante da operação de intercessão entre os conjuntos *fuzzy*  $A$  e  $B$ , representados na Figura 2, é mostrada na Figura 4.

### 3.1.1.3 Complemento

O complemento de um conjunto *fuzzy*  $A$  corresponde a um conjunto *fuzzy*, denotado por  $\bar{A}$ , também definido no universo de discurso  $\mathcal{U}$ , cuja função de pertinência é dada por

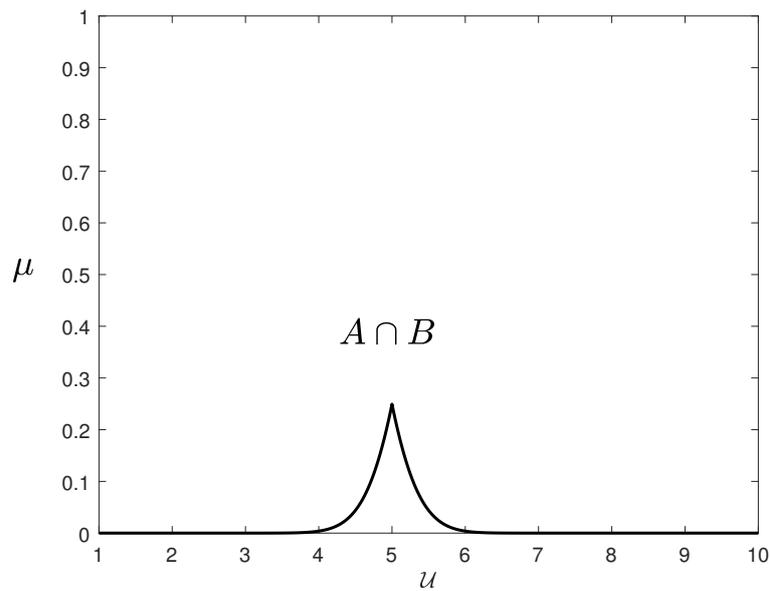


Figura 4 – Conjunto *fuzzy* resultante da operação de interseção entre os conjuntos *fuzzy*  $A$  e  $B$ . Fonte: A autora

(WANG, 1997):

$$\mu_{\bar{A}}(u) = 1 - \mu_A(u), \quad \forall u \in \mathcal{U} \quad (3.6)$$

Na Figura 5 é mostrado o conjunto *fuzzy* resultante da operação de complemento do conjunto *fuzzy*  $A$ , representado na Figura 2.

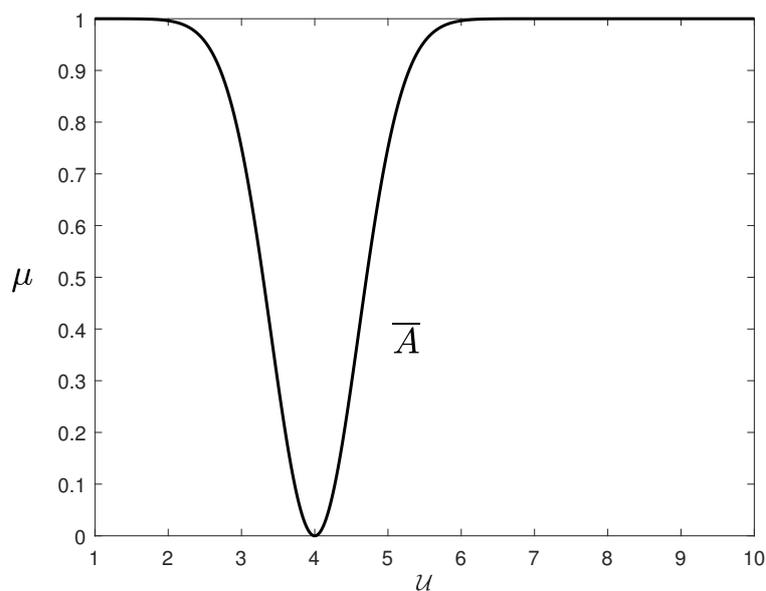


Figura 5 – Conjunto *fuzzy* resultante da operação de interseção entre os conjuntos *fuzzy*  $A$  e  $B$ . Fonte: A autora

## 3.2 Conjuntos Fuzzy Tipo-2

Um conjunto *fuzzy* tipo-2 geral, denominado por  $\widetilde{W}$ , definido em um universo de discurso  $\mathcal{U}$ , é formalmente representado por (CASTILLO, 2007):

$$\widetilde{W} = \left\{ (u, \mu_{1\widetilde{W}}), \mu_{2\widetilde{W}}(u, \mu_{1\widetilde{W}}) \mid \forall u \in \mathcal{U}, \forall \mu_{1\widetilde{W}} \in [0, 1] \right\} \quad (3.7)$$

onde  $\mu_{1\widetilde{W}}$  é denominado grau de pertinência primário e  $\mu_{2\widetilde{W}}$  é denominado grau de pertinência secundário, o qual está relacionado ao nível de incerteza sobre  $\mu_{1\widetilde{W}}$ , isto é, cada grau de pertinência primário  $\mu_{1\widetilde{W}}$  tem associada uma função de incerteza secundária  $\mu_{2\widetilde{W}}$ . Um exemplo de conjunto *fuzzy* tipo-2 geral gaussiano é ilustrado na Figura 6.

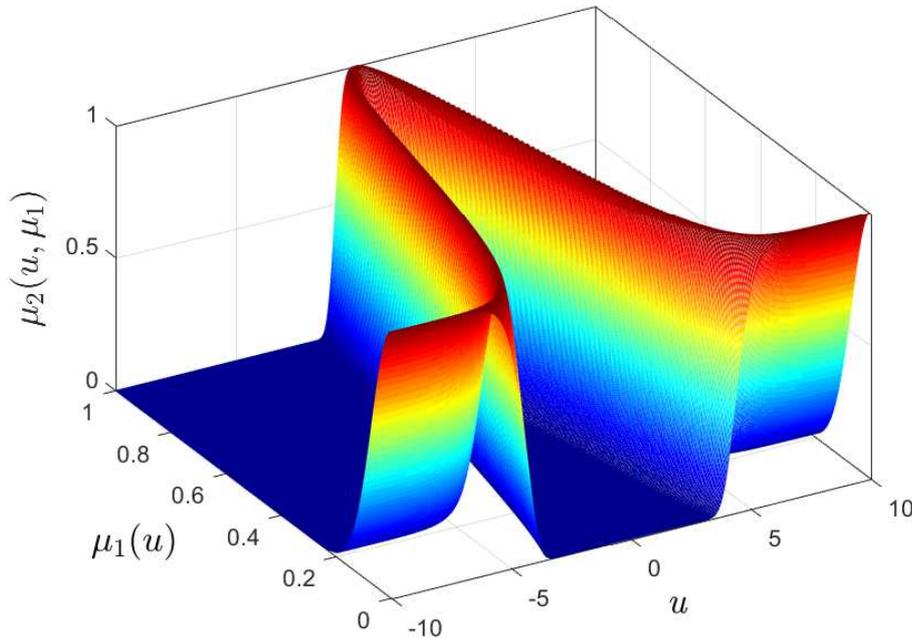


Figura 6 – Conjunto *fuzzy* tipo-2 geral gaussiano. Fonte: (GOMES, 2021)

Um caso particular dentro do estudo da lógica *fuzzy* tipo-2 são os conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares, os quais são derivados a partir de uma simplificação na função de pertinência tipo-2 mostrada na Figura 6, onde a terceira dimensão assume valor de pertinência sempre igual a 1, isto é,  $\mu_{2\widetilde{W}}(u, \mu_{1\widetilde{W}}) = 1$ . Dessa forma, conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares são caracterizados por duas funções de pertinência tipo-1, denominadas função de pertinência superior e função de pertinência inferior, sendo formalmente representados por (LIANG; MENDEL, 2000):

$$\widetilde{W} = \left\{ 1 / [\underline{\mu}_{\widetilde{W}}(u), \overline{\mu}_{\widetilde{W}}(u)] \mid \forall u \in \mathcal{U} \right\} \quad (3.8)$$

onde  $\underline{\mu}_{\widetilde{W}}(u)$  e  $\overline{\mu}_{\widetilde{W}}(u)$  são, respectivamente, as funções de pertinência superior e inferior de  $\widetilde{W}$ . Os conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares definem uma região de incerteza, chamada de

*Rastro de Incerteza* (RDI), limitada pelas funções de pertinência superior e inferior, a qual representa a incerteza relacionada ao grau de pertinência primário. Matematicamente, o rastro de incerteza de um conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar é definido como a união de todas as funções de pertinência primárias (MENDEL; JOHN, 2002). A forma assumida pela função de pertinência tipo-2 intervalar é mostrada na Figura 7. Uma maneira simplificada de ilustrar a função de pertinência tipo-2 intervalar está ilustrada na Figura 8, onde a terceira dimensão é suprimida. Devido sua complexidade computacional reduzida quando

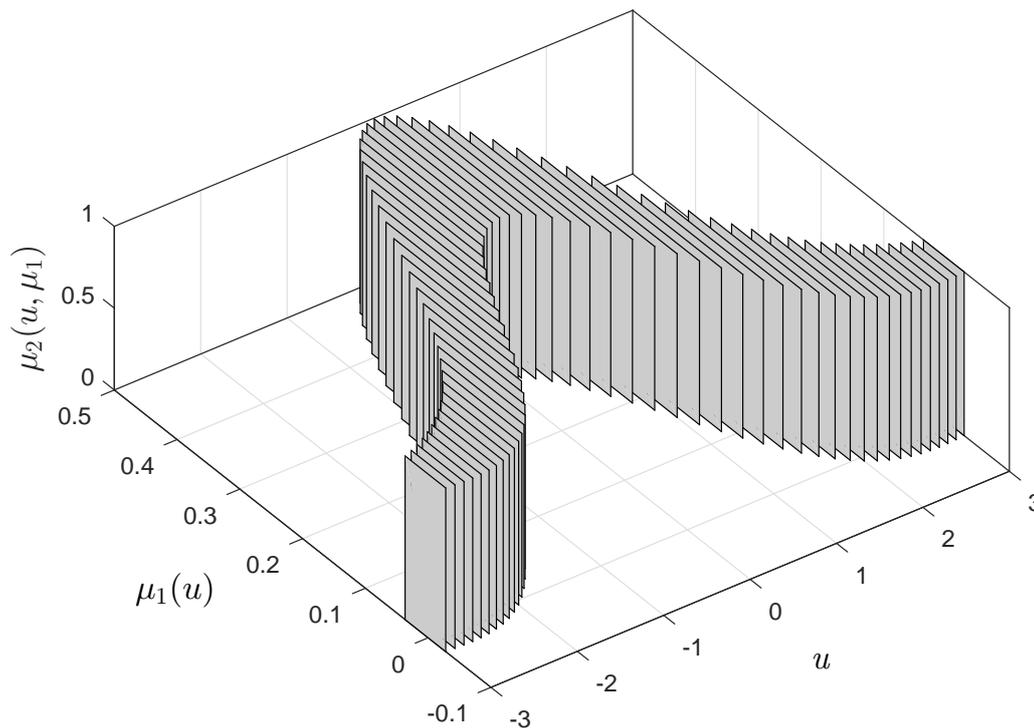


Figura 7 – Conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar gaussiano. Fonte: (GOMES, 2021)

comparada aos conjuntos *fuzzy* tipo-2 gerais, as funções tipo-2 intervalares são mais largamente empregadas na literatura ( TSAI; CHEN, 2022; FU et al., 2022; NAIK; SINGH, 2021; TURK et al., 2021; ZHOU; HAN, 2020). Assim, o presente trabalho tem como objetivo a utilização de sistemas *fuzzy* baseados em conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares.

### 3.2.1 Operações Básicas Entre Conjuntos *Fuzzy* Tipo-2 Intervalares

Para a implementação de sistemas *fuzzy* tipo-2 intervalares, é necessário o entendimento de algumas operação básicas entre conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares, a saber, as operações de *união*, *interseção* e *complemento*. Sejam dois conjuntos *fuzzy* tipo-2

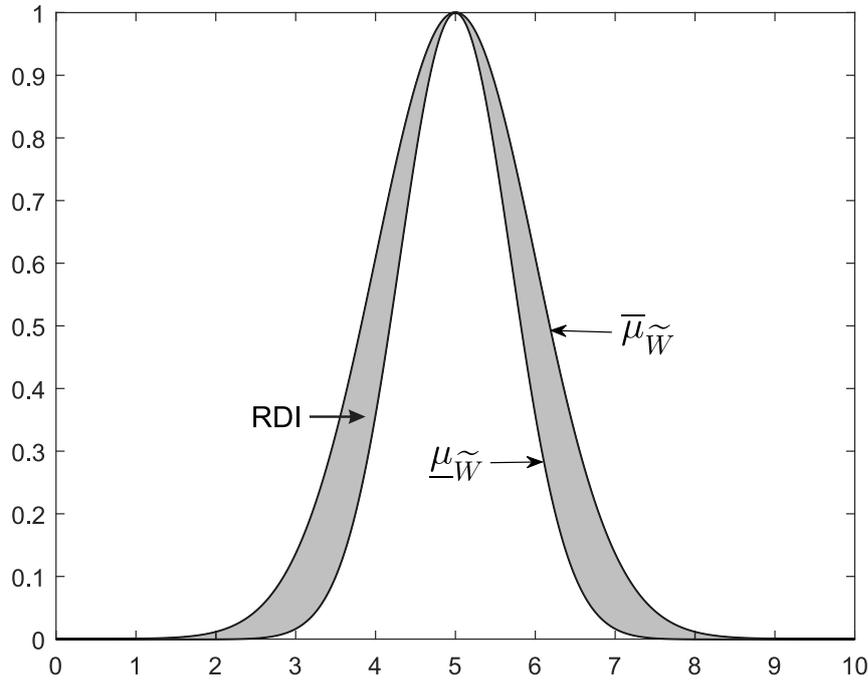


Figura 8 – Conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar gaussiano bidimensional. Fonte: (GOMES, 2021)

intervalares,  $\widetilde{W}^1$  e  $\widetilde{W}^2$ , definidos por

$$\widetilde{W}^1 = \left\{ 1 / \left[ \underline{\mu}_{\widetilde{W}^1}(\mathbf{u}), \overline{\mu}_{\widetilde{W}^1}(\mathbf{u}) \right] \right\} \quad (3.9)$$

$$\widetilde{W}^2 = \left\{ 1 / \left[ \underline{\mu}_{\widetilde{W}^2}(\mathbf{u}), \overline{\mu}_{\widetilde{W}^2}(\mathbf{u}) \right] \right\} \quad (3.10)$$

os quais são mostrados na Figura 9.

### 3.2.1.1 União

A operação de união entre os conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\widetilde{W}^1$  e  $\widetilde{W}^2$  é, matematicamente, dada por:

$$\widetilde{W}^1 \cup \widetilde{W}^2 = 1 / \left[ \underline{\mu}_{\widetilde{W}^1}(\mathbf{u}) \cup \underline{\mu}_{\widetilde{W}^2}(\mathbf{u}), \overline{\mu}_{\widetilde{W}^1}(\mathbf{u}) \cup \overline{\mu}_{\widetilde{W}^2}(\mathbf{u}) \right] \quad (3.11)$$

isto é, a operação de união entre dois conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares equivale a união entre as funções de pertinência superiores e entre as funções de pertinência inferiores de  $\widetilde{W}^1$  e  $\widetilde{W}^2$ . O resultado da operação de união entre os conjuntos  $\widetilde{W}^1$  e  $\widetilde{W}^2$  é ilustrado na Figura 10.

### 3.2.1.2 Interseção

A operação de interseção entre os conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\widetilde{W}^1$  e  $\widetilde{W}^2$  é, matematicamente, dada por:

$$\widetilde{W}^1 \cap \widetilde{W}^2 = 1 / \left[ \underline{\mu}_{\widetilde{W}^1}(\mathbf{u}) \cap \underline{\mu}_{\widetilde{W}^2}(\mathbf{u}), \overline{\mu}_{\widetilde{W}^1}(\mathbf{u}) \cap \overline{\mu}_{\widetilde{W}^2}(\mathbf{u}) \right] \quad (3.12)$$

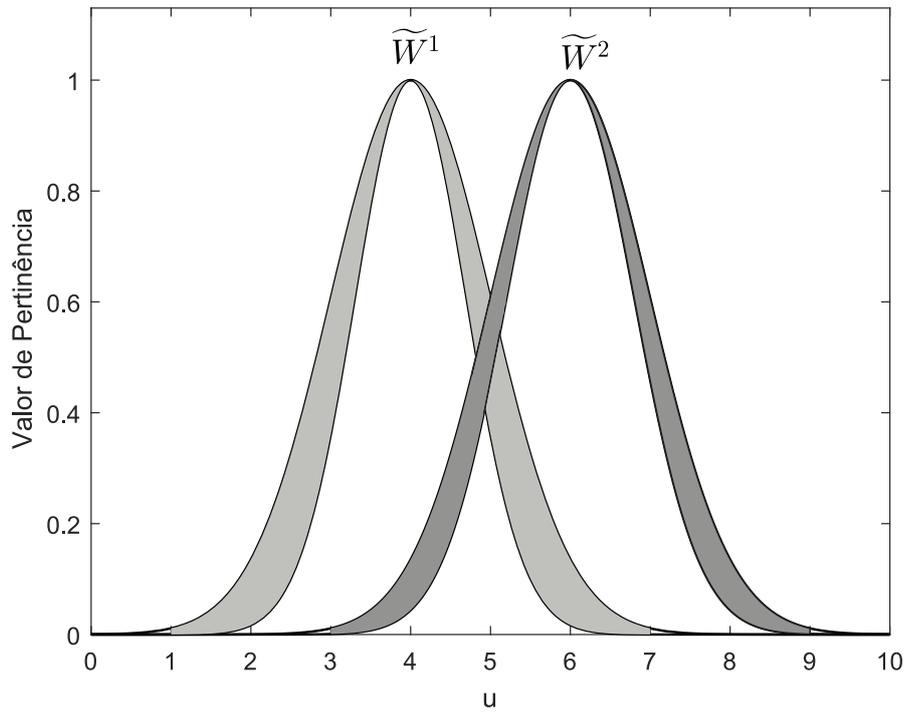


Figura 9 – Conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\tilde{W}^1$  e  $\tilde{W}^2$ . Fonte: (GOMES, 2021)

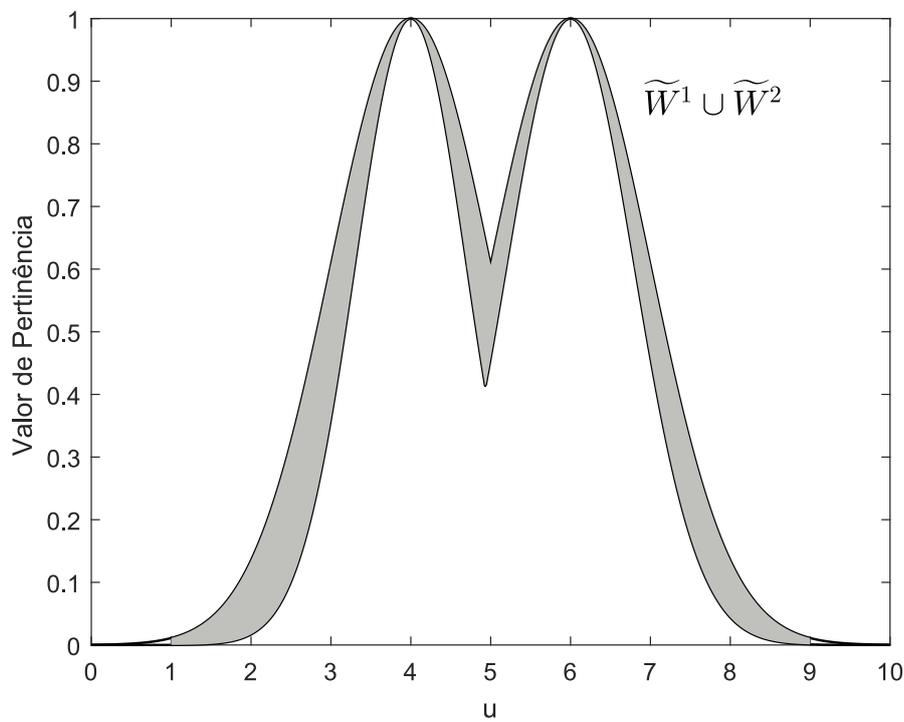


Figura 10 – Resultado da operação de união entre os conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\tilde{W}^1$  e  $\tilde{W}^2$ . Fonte: (GOMES, 2021)

isto é, a operação de interseção entre dois conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares equivale a interseção entre as funções de pertinência superiores e entre as funções de pertinência inferiores de  $\widetilde{W}^1$  e  $\widetilde{W}^2$ . O resultado da operação de interseção entre os conjuntos  $\widetilde{W}^1$  e  $\widetilde{W}^2$  é ilustrado na Figura 11.

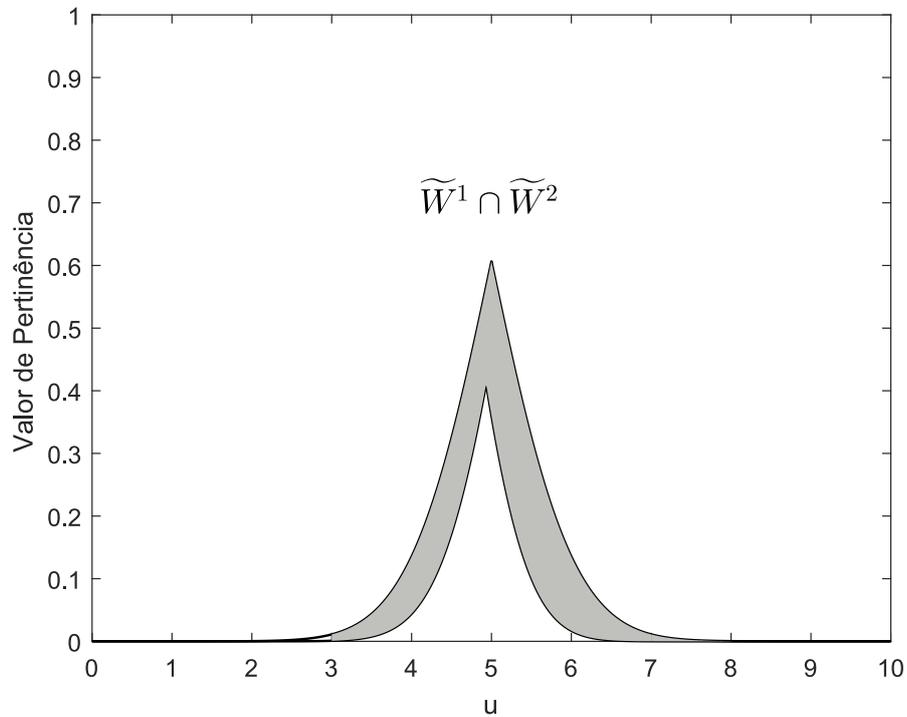


Figura 11 – Resultado da operação de interseção entre os conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\widetilde{W}^1$  e  $\widetilde{W}^2$ . Fonte: (GOMES, 2021)

### 3.2.1.3 Complemento

A operação de complemento do conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\widetilde{W}^1$  é, matematicamente, dada por:

$$\widetilde{W}^{1'} = 1 / [1 - \underline{\mu}_{\widetilde{W}^1}(\mathbf{u}), 1 - \overline{\mu}_{\widetilde{W}^1}(\mathbf{u})] \quad (3.13)$$

isto é, a operação de complemento para um conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar equivale ao complemento das suas funções de pertinência superior e inferior. O resultado da operação de complemento para o conjunto  $\widetilde{W}^1$  é ilustrado na Figura 12.

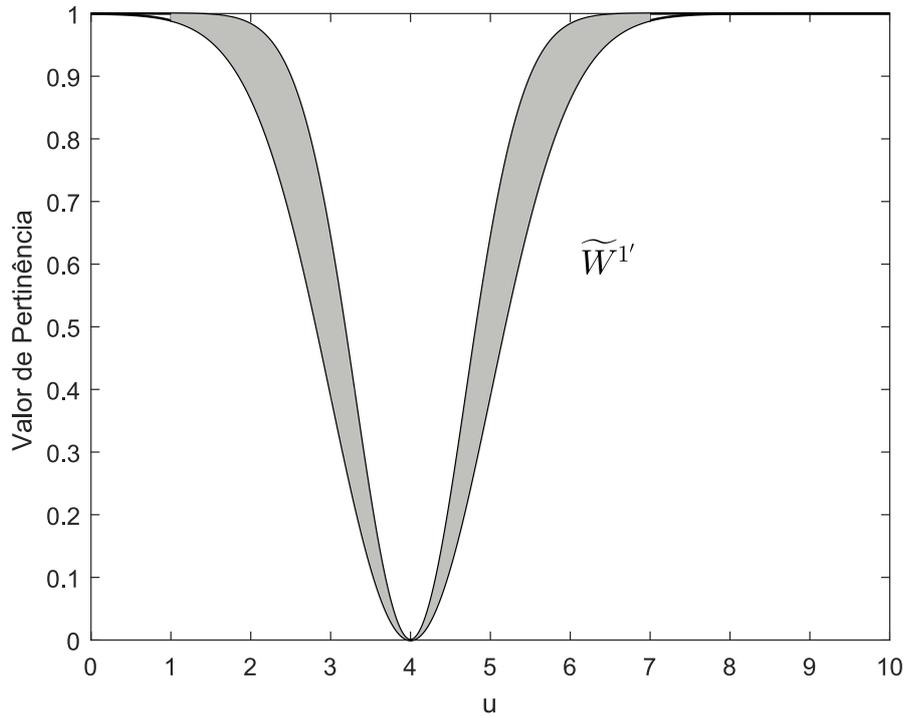


Figura 12 – Resultado da operação de complemento para o conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\widetilde{W}^1$ . Fonte: (GOMES, 2021)

### 3.3 Sistema de Inferência *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar Takagi-Sugeno

Os princípios básicos da lógica *fuzzy* não se alteram de sistemas *fuzzy* tipo-1 para sistemas *fuzzy* tipo-2 e, em geral, não são alterados para qualquer sistema *fuzzy* tipo-n, uma vez que são independentes da natureza das funções de pertinência adotadas (CASTILLO, 2011). Os sistemas *fuzzy* tipo-2 intervalares possuem estrutura semelhante à adotada em sistemas *fuzzy* tipo-1, com a diferença que apresentam uma versão estendida dos métodos de defuzzificação. A estrutura de um sistema *fuzzy* tipo-2 é ilustrada na Figura 13 e cada uma das suas etapas são descritas a seguir.

1. *Fuzificador*: Realiza o mapeamento das entradas *crisp* para os conjuntos *fuzzy* tipo-2, fornecendo os graus de ativação de cada regra *fuzzy* para o bloco de inferência.
2. *Regras*: Este bloco é composto por um conjunto de regras *fuzzy* do tipo SE-ENTÃO, onde as proposições do antecedente e consequente são caracterizadas por conjuntos *fuzzy* tipo-2. A forma generalizada de uma regra *fuzzy* é dada por:

$$R^{(i)} : \text{SE } u_1 \text{ é } \widetilde{W}^{1(i)} \text{ e } u_2 \text{ é } \widetilde{W}^{2(i)} \text{ e } \dots \text{ e } u_p \text{ é } \widetilde{W}^{p(i)} \text{ ENTÃO } \tilde{y}^{(i)} = \tilde{Y}^{(i)} \quad (3.14)$$

onde  $u_j$  são as variáveis de entrada,  $\widetilde{W}^{j(i)}$  são os conjuntos *fuzzy* tipo-2 do antecedente,

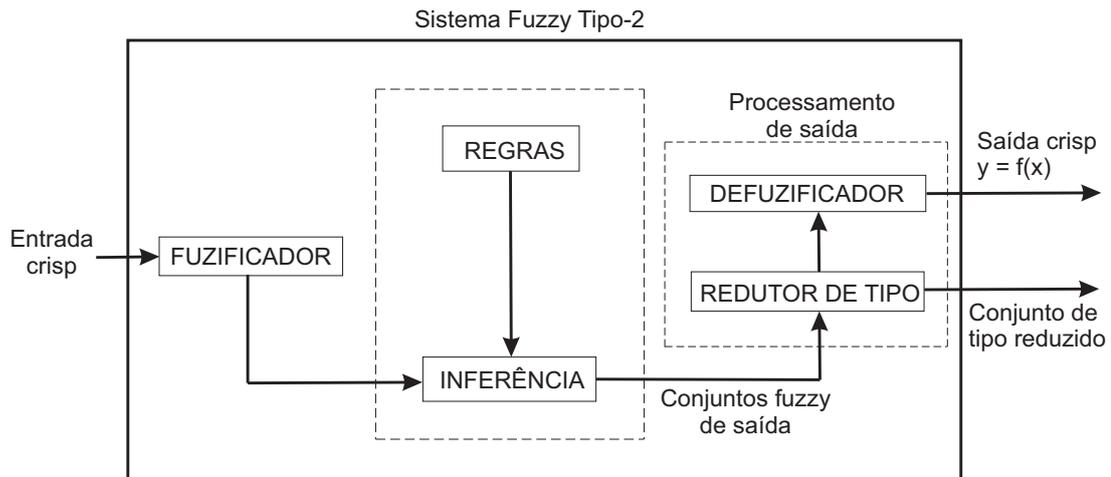


Figura 13 – Estrutura de um sistema *fuzzy* tipo-2. Fonte:(GOMES, 2021)

$\tilde{y}^{(j)}$  é a proposição do consequente e  $\tilde{Y}^{(j)}$  é o conjunto *fuzzy* tipo-2 de saída, tal que  $j = 1, \dots, p$ .

3. *Inferência*: Realiza a composição das regras *fuzzy*, a partir dos operadores de união e interseção, resultando em um mapeamento dos conjuntos *fuzzy* tipo-2 de entrada para os conjuntos *fuzzy* tipo-2 de saída.
4. *Redutor de Tipo*: Este bloco é responsável pela redução de tipo do conjunto *fuzzy* tipo-2 obtido na saída do bloco de inferência em um intervalo  $\tilde{y} = [y^r, y^l]$ , onde  $y^r$  e  $y^l$  representam os limites superior e inferior, respectivamente. Os métodos mais empregados atualmente para a redução de tipo são os algoritmos propostos em (KARNIK; MENDEL, 2001; WU; MENDEL, 2009).
5. *Defuzificador*: Realiza o cálculo da saída crisp  $y$  do sistema *fuzzy* tipo-2, a partir do intervalo  $\tilde{y} = [y^r, y^l]$ , onde o valor defuzificado é dado pela média dos valores de  $y^r$  e  $y^l$ .

Os sistemas *fuzzy* tipo-2 intervalares Takagi-Sugeno são caracterizados por regras *fuzzy* SE-ENTÃO que descrevem as relações de entrada-saída do sistema, em que a proposição do antecedente é descrita por conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares e a proposição do consequente por uma função matemática. Eles podem ser classificados de acordo com a tabela abaixo (KAYACAN, 2011):

Tabela 1 – Classificação dos sistemas *fuzzy* tipo-2 intervalares.

	Modelo I	Modelo II
proposição do antecedente	Conjuntos <i>Fuzzy</i> Tipo-2	Conjuntos <i>Fuzzy</i> Tipo-2
proposição do consequente	Parâmetros com incerteza	Parâmetros <i>crisp</i>

A estrutura de sistema *fuzzy* tipo-2 intervalar Takagi-Sugeno adotada neste trabalho de tese é baseada no modelo A2-C1 (antecedente tipo-2 e consequente tipo-1), cuja regra *fuzzy* generalizada é dada por:

$$R^{(i)} : \mathbf{SE} \mathbf{u}_1 \text{ é } \widetilde{W}^{1(i)} \text{ e } \mathbf{u}_2 \text{ é } \widetilde{W}^{2(i)} \text{ e } \dots \text{ e } \mathbf{u}_p \text{ é } \widetilde{W}^{p(i)} \mathbf{ENTÃO} \tilde{y}^{(i)} = \sum_{j=1}^p \tilde{a}_j^{(i)} x_j + \tilde{b}_j^{(i)} \quad (3.15)$$

onde  $\tilde{y}^{(i)} = [\underline{y}^{(i)}, \overline{y}^{(i)}]$  é a saída intervalar da  $i$ -ésima regra *fuzzy*,  $\tilde{a}_j^{(i)}$  e  $\tilde{b}_j^{(i)}$  são parâmetros incertos definidos por  $\tilde{a}_j^{(i)} = [\underline{a}_j^{(i)}, \overline{a}_j^{(i)}] = [a_j^i + \mathfrak{J}_{a_j^i}^i, a_j^i - \mathfrak{J}_{a_j^i}^i]$  e  $\tilde{b}_j^{(i)} = [\underline{b}_j^{(i)}, \overline{b}_j^{(i)}] = [b_j^i + \mathfrak{J}_{b_j^i}^i, b_j^i - \mathfrak{J}_{b_j^i}^i]$ . Desse modo, os parâmetros das funções matemáticas definidas na proposição do consequente de cada regra *fuzzy* são incertos e são processados pelo sistema *fuzzy* tipo-2 como valores intervalares.

Na metodologia proposta nesta tese, uma modificação na estrutura do modelo *fuzzy* A2-C1 foi adotada, onde as etapas de redução de tipo e defuzzificação foram suprimidas de modo que todo o processamento dos dados experimentais é realizado de forma intervalar, proporcionando a redução da complexidade computacional envolvida para o desenvolvimento e implementação prática do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar proposto nesta tese. Uma vertente também utilizada para o desenvolvimento desta tese é o projeto de sistemas *fuzzy* no contexto evolutivo, os quais possuem a propriedade de se adaptar dinamicamente aos dados experimentais utilizados para a obtenção do modelo *fuzzy*, o que é discutido a seguir no Capítulo 4.

## 4 Teoria de Sistemas Evolutivos

Em aplicações das ciências e engenharias há uma grande quantidade de dados e informações disponíveis, tornando-se cada vez mais necessário o processamento destas informações de forma eficiente para a solução de problemas práticos (WANG et al., 2021; ZHAO et al., 2021; HUANG et al., 2022). Estas informações não só se apresentam em grandes quantidades, mas também exibem um comportamento na forma de fluxo dinâmico de dados (*data streams*) (LUGHOFER, 2011). Este aspecto, em particular, traz novos desafios para a grande maioria das abordagens voltadas ao processamento de dados existentes atualmente, as quais geralmente se apresentam no formato *offline* e são aplicadas a dados com propriedades estacionárias (CHEN; ZHAO, 2021). Diante disso, técnicas e metodologias vêm sendo desenvolvidas a fim de obter modelos matemáticos que melhor representem a dinâmica inerente a fluxos de dados (RHIF et al., 2023; DIXIT; JAIN, 2023).

Segundo (LUGHOFER, 2011), modelos evolutivos são orientados por dados, automaticamente adaptados, estendidos e evoluídos dinamicamente em tempo real com base em novas amostras recebidas. Desse modo, os modelos evolutivos são capazes de suportar qualquer cenário para modelagem a partir de fluxos de dados, medições *on-line* e dados que mudam sua natureza e características ao longo do tempo e do espaço (AGELOV; FILEV; KASABOV, 2010). Uma das principais motivações para o estudo de modelos evolutivos é a necessidade de lidar com a grande quantidade de dados que são gerados diariamente em vários formatos. Quando novos dados são obtidos, é dispendioso realizar um novo treinamento para modelos matemáticos considerando todo o conjunto de dados. Dessa forma, torna-se mais eficiente extrair conhecimento útil a partir do fluxo de dados, evolutivamente, como forma de atender requisitos de desempenho em aplicações práticas (CHEN et al., 2021; DELL'ANNA; JAMSHIDNEJAD, 2022; JAHANDARI; KALHOR; ARAABI, 2020). Segundo (AGELOV; FILEV; KASABOV, 2010), as características mais importantes de qualquer sistema inteligente evolutivo é sua capacidade para:

- Expandir ou reduzir sua estrutura, bem como adequar seus parâmetros, e assim evoluir;
- Trabalhar e adaptar-se de forma incremental, *online* e, se necessário, em tempo real.

Importante destacar a diferença entre os termos “*online*” e “*tempo real*” adotados nesta tese. Sistemas online são aqueles conectados a uma rede nos quais os dados são processados com certa latência, porém sua resposta é disponibilizada em tempo hábil para que seja feita uma tomada de decisão. Exemplos de sistemas online incluem sites de

comércio eletrônico, sistemas bancários e sistemas de reservas online (WILLIAMS, 2006). Por outro lado, sistemas em tempo real são sistemas computacionais projetados para processar os dados assim que estes se tornam disponíveis, respondendo instantaneamente. Estes sistemas normalmente têm restrições de tempo estritas e devem ser capazes de responder aos eventos em tempo hábil. Alguns exemplos de sistemas em tempo real incluem sistemas de controle para fábricas, sistemas de controle de tráfego e sistemas de controle de voo (KOPETZ, 2011).

Dois conceitos distintos no contexto da modelagem computacional de dados são os de adaptação e evolução. A adaptação do modelo geralmente refere-se à atualização de alguns parâmetros do modelo visando alguma mudança em limites de decisão, partição de dados em *clusters* ou superfícies de aproximação. A evolução também leva em consideração a extensão dos modelos, gerando (evoluindo) novas componentes estruturais necessárias com base nas características das novas amostras de dados (ANGELOV, 2013). Em alguns casos, a adaptação de parâmetros é suficiente para incluir novas informações presentes nos dados aos modelos (gerados anteriormente). No entanto, existem outras situações onde há a necessidade de que a estrutura do modelo seja reajustada para representar de forma eficiente as novas informações contidas no fluxo de dados (LUGHOFER, 2011). Considerando a Figura 14, o modelo original adotado é capaz de representar de forma eficiente a dinâmica descrita pelas amostras do conjunto de dados. Quando novas amostras de dados ficam disponíveis em uma região de operação desconhecida pelo modelo original, conforme mostrado na Figura 15, apenas a adaptação de parâmetros não é suficiente para representar a dinâmica de todo conjunto de dados, sendo necessário a adaptação da estrutura do modelo, conforme ilustrado na Figura 16. Nestes casos, a estrutura do modelo deve ser estendida, a fim de representar a dinâmica do conjunto de dados com maior precisão.

Outro aspecto importante sobre os modelos evolutivos é que eles possibilitam a autoaprendizagem de sistemas computadorizados. Isto é, os modelos evolutivos estão permanentemente atualizando seu conhecimento sobre diversas relações complexas e dependências em aplicações práticas, integrando novos comportamentos ao sistema e influências do ambiente (que se manifestam através dos dados que são capturados a todo momento) (LUGHOFER, 2011). A sua aprendizagem segue um contexto de “aprendizagem ao longo da vida”, e nunca é realmente terminada, mas que dura de acordo com a chegada de novas informações. Portanto, os sistemas evolutivos podem ser vistos como uma valiosa contribuição dentro do campo da inteligência computacional e artificial (ŠKRJANC et al., 2019).

Em (LUGHOFER, 2011), é afirmado que o desenvolvimento e aplicação de sistemas evolutivos está fortemente relacionado ao conceito de *aprendizagem incremental*. Segundo este mesmo autor, a aprendizagem incremental pode ser definida como um treinamento

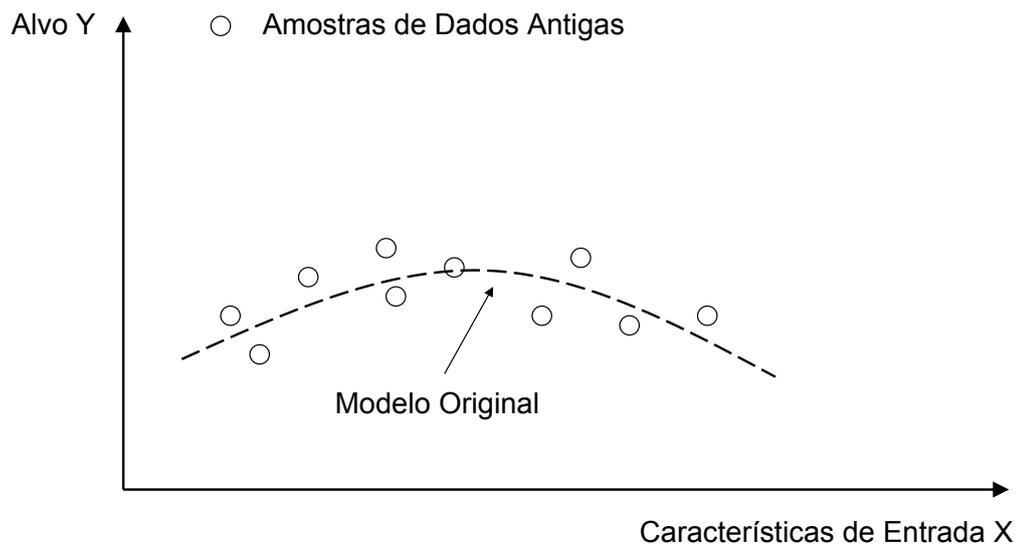


Figura 14 – Representação da dinâmica inerente a um conjunto de dados inicial de forma eficiente por um modelo matemático (linha tracejada).

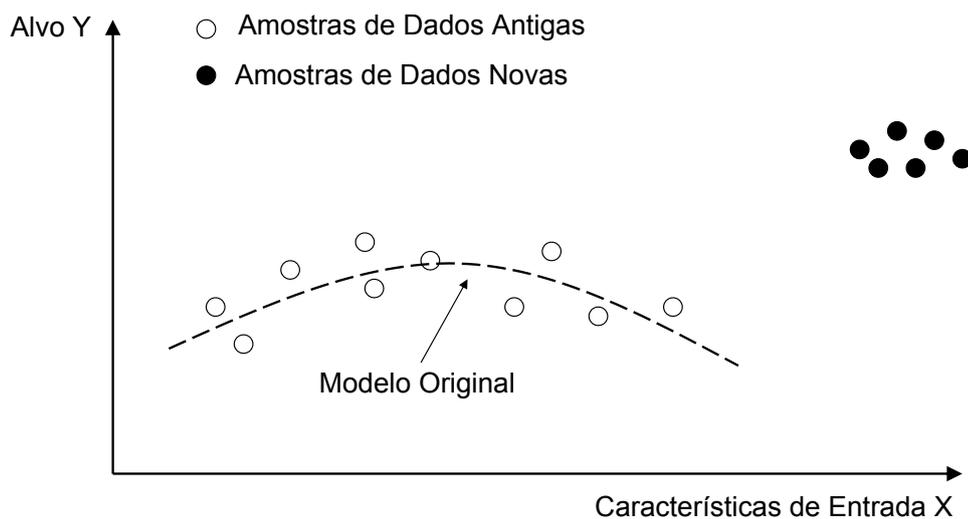


Figura 15 – Situação em que novas amostras do conjunto de dados ficam disponíveis em uma região de operação desconhecida pelo modelo matemático original.

amostral ou por blocos de dados, tal que o modelo a ser obtido pode ser iniciado do zero ou a partir de um modelo pré-estimado. Isto significa que o modelo é construído passo a passo com partes do conjunto de dados, em vez de se utilizar todo o conjunto de dados para treinar o modelo de uma só vez (treinamento em batelada).

## 4.1 Sistemas *Fuzzy* Evolutivos

Sistemas *fuzzy* evolutivos, em particular, apresentam a vantagem adicional da interpretabilidade linguística e transparência uma vez que podem ser usados para representar o conhecimento humano a partir de regras *fuzzy* do tipo SE-ENTÃO (ANGELOV, 2002;

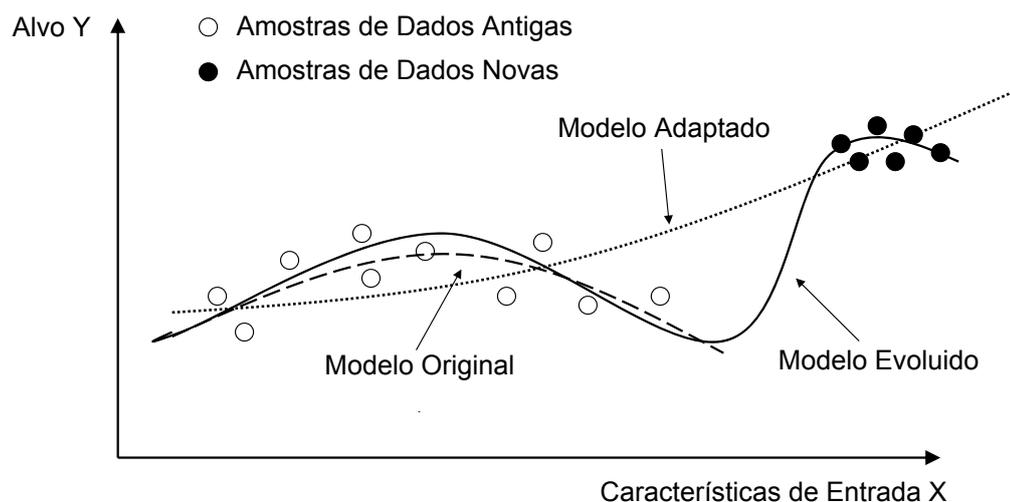


Figura 16 – Situação em que é necessária a evolução da estrutura para estender o modelo adequadamente, aumentando sua flexibilidade (comparar a linha sólida com a linha pontilhada, este último modelo obtido apenas a partir da atualização de seus parâmetros e mantendo sua estrutura).

PEDRYCZ, 2005; ZADEH, 1975). Os sistemas neuro-*fuzzy* também têm um alto grau de interpretabilidade devido à sua componente *fuzzy* (KASABOV, 1996; WANG; MENDEL, 1992). Dentre algumas aplicações dos sistemas *fuzzy* evolutivos, tem-se (LUGHOFER, 2011):

- Aplicações em identificação e controle de sistemas;
- Aplicações em problemas de classificação;
- Previsão, estimação e filtragem de dados;
- Desenvolvimento de modelos a partir de um grande volume de dados, cujo processamento envolveria uma elevada carga computacional caso fosse realizado em batelada;
- Modelagem de tarefas cognitivas do cérebro humano.

A determinação da estrutura de um modelo evolutivo depende do tipo de representação utilizado para a modelagem de um conjunto de dados. Para o caso de sistemas *fuzzy*, a determinação de sua estrutura envolve, por exemplo, a quantidade de regras *fuzzy*, o número de entradas e saídas do sistema, o formato das funções de pertinência adotadas, o tipo de proposição do antecedente e conseqüente, a natureza dos conectivos *fuzzy*, o sistema de inferência e operadores de defuzzificação (ANGELOV, 2013). O processo de aprendizagem de um sistema *fuzzy* evolutivo geralmente ocorre da forma como ilustrado na Figura 17. O mecanismo de evolução da estrutura de um sistema *fuzzy* está relacionado ao processo de criação e atualização de regras *fuzzy*, fusão de regras existentes e remoção

de regras *fuzzy* bem como a atualização dos parâmetros das proposições do antecedente e consequente conforme novas amostras de dados ficam disponíveis no decorrer do tempo, a fim de garantir uma flexibilidade significativa no caso de situações mutáveis do sistema e ambientes não-estacionários durante a aprendizagem incremental. Nas próximas seções serão abordados alguns aspectos relativos ao processo de evolução de sistemas *fuzzy*.

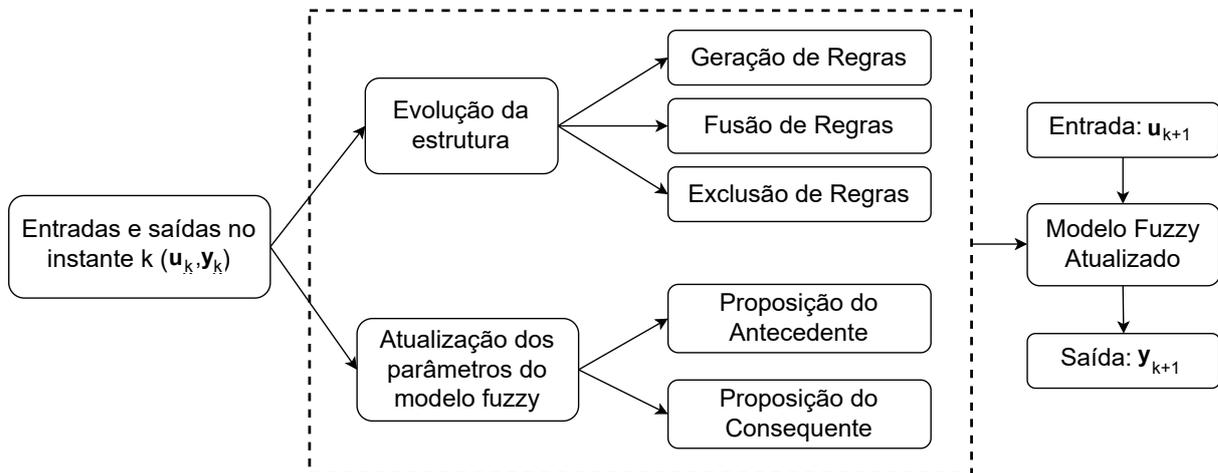


Figura 17 – Processo de aprendizagem de sistemas *fuzzy* evolutivos.

#### 4.1.1 Geração e Atualização de Regras *Fuzzy*

A adição de regras *fuzzy* ou *clusters* é um mecanismo essencial em sistemas *fuzzy* evolutivos e está relacionado à expansão do modelo. Normalmente, o aprendizado inicia sem modelos ou *clusters* locais, os quais vão sendo adicionados ao modelo global, em tempo real, a fim de expandir seu conhecimento para novas regiões de interesse no espaço descrito pelo conjunto de dados (ŠKRJANC et al., 2019). O processo de adição de regras *fuzzy* é ilustrado na Figura 18, onde  $X_1$  e  $X_2$  correspondem às características do espaço de entrada do sistema. Quando novas amostras do conjunto de dados pertencem a uma região desconhecida pelo modelo (marcadores retangulares), um novo *cluster* ou uma nova regra é adicionada para melhor representar as novas amostras.

Por outro lado, existem situações em que apenas a adaptação ou atualização das regras *fuzzy* existentes é suficiente para representação da dinâmica inerente ao conjunto de dados em determinado instante de tempo. Quando as novas amostras do conjunto de dados estão próximas ou recaindo em um *cluster* já existente, este *cluster* deve ser atualizado, isto é, sua região elipsoidal é expandida, o que pode ser obtido, por exemplo, atualizando a matriz de covariância inversa do *cluster*, conforme ilustrado na Figura 19. A adaptação de parâmetros é útil para modelar mudanças graduais ou leves de comportamento ou simplesmente para reduzir a incerteza do modelo ou de seus parâmetros, o que também pode ser denominado de refinamento do modelo, enquanto a evolução estrutural é útil para

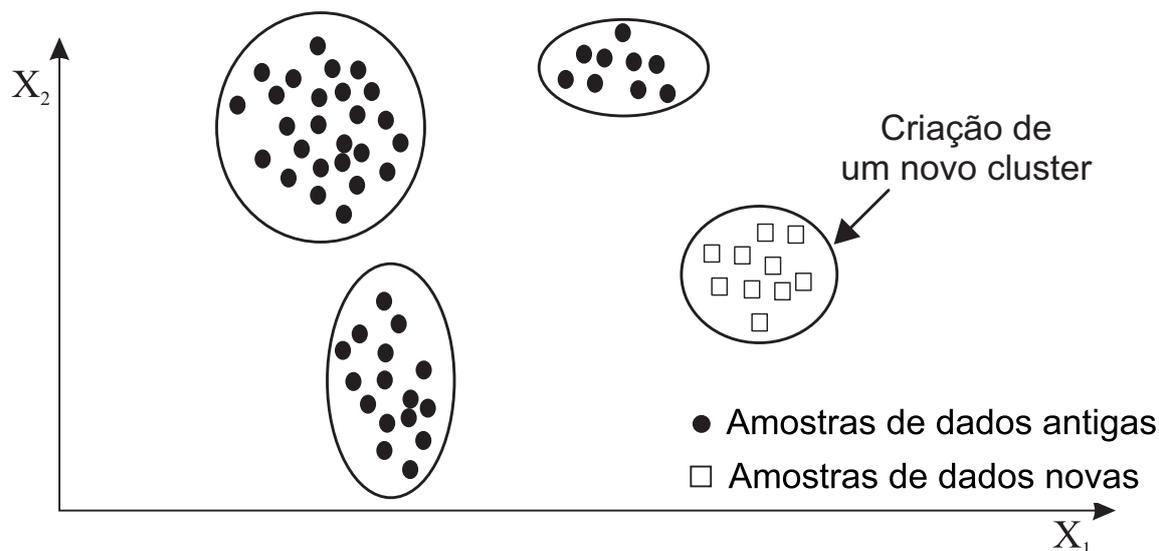


Figura 18 – Exemplo de criação de um novo *cluster* devido a presença de novas amostras de dados.

ajustar e agregar novos padrões, comportamentos ou eventos completamente diferentes ao modelo *fuzzy* (LUGHOFER, 2011; ŠKRJANC et al., 2019).

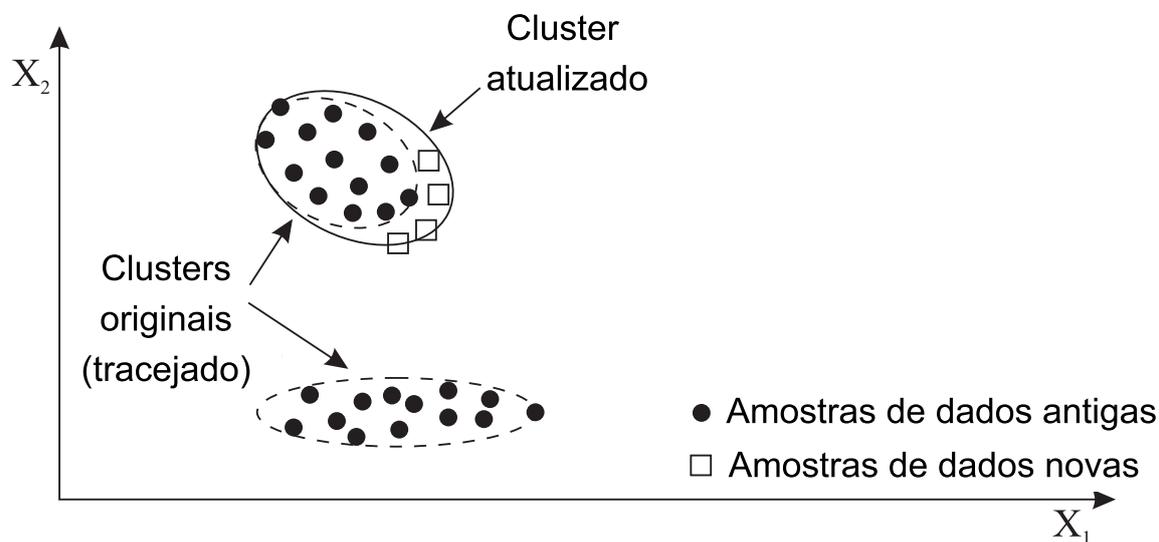


Figura 19 – Exemplo de atualização de *cluster* devido a presença de novas amostras de dados.

Usualmente, é necessário que alguma métrica seja satisfeita para a geração de uma nova regra *fuzzy*. Dentre os principais critérios utilizados em modelos *fuzzy* evolutivos estão os baseados na distância entre os *clusters*, nos graus de ativação, critérios baseados em potencial de amostras do conjunto de dados, na qualidade dos dados, entre outros (BARUAH; ANGELOV, 2014; ANGELOV; FILEV, 2004).

### 4.1.2 Fusão de Regras *Fuzzy*

A fusão de dois ou mais *clusters* é necessária caso estes se sobrepõem significativamente após processos de adaptação na estrutura do modelo (LUGHOFER, 2011). Este efeito é chamado de fusão de *cluster* e geralmente é causado por amostras consecutivas pertencentes à região compreendida entre dois ou mais *clusters*, os quais devem ser mesclados para eliminar conflitos e redundância de regras *fuzzy* (ŠKRJANC et al., 2019). Um exemplo para visualização deste efeito é mostrado na Figura 20. A fusão de *clusters* não apenas fornece uma representação mais precisa das distribuições de dados locais, como também simplifica a base de regras que compõe o modelo evolutivo. Portanto, a fusão de *clusters* é necessária quando estes se sobrepõem significativamente com a evolução da estrutura do modelo considerando a avaliação de alguns critérios específicos.

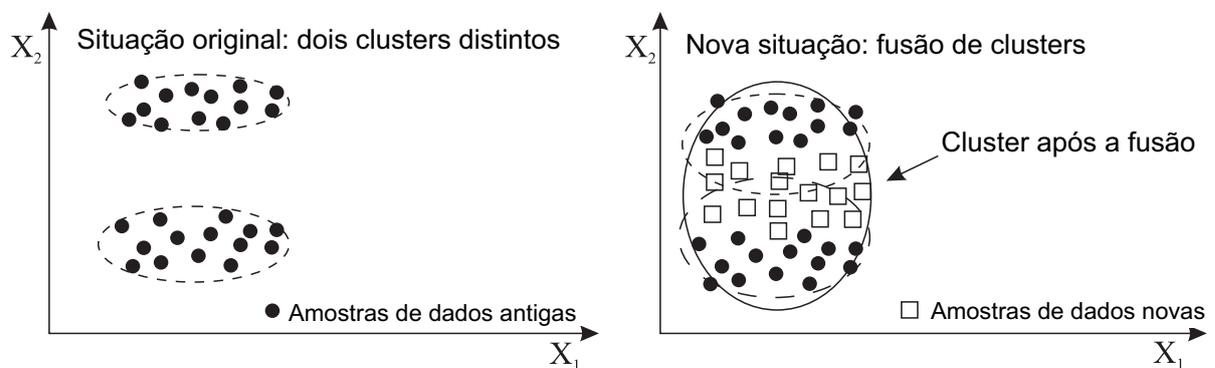


Figura 20 – Exemplo de fusão de *clusters* devido a presença de novas amostras de dados na região entre os *clusters*.

### 4.1.3 Remoção de Regras *Fuzzy*

A remoção de *clusters* é conveniente para excluir modelos locais antigos ou inativos, que não são mais válidos. Este mecanismo é de extrema importância em problemas de classificação e reconhecimento de padrões para garantir maior velocidade computacional na adaptação e bases de regras mais compactas. Em geral, ocorre que um *cluster* é criado em uma parte do espaço de entrada-saída onde existem apenas algumas amostras representativas (AGELOV; FILEV; KASABOV, 2010). Isso é justificado por erros nas medições ou devido a uma mudança no comportamento do sistema para que um *cluster* não seja útil após várias iterações. Esses *clusters* podem ser removidos do modelo, pois não auxiliam na descrição dos dados. No entanto, deve-se ter cuidado com os comportamentos sazonais, pois um *cluster* pode ser reativado posteriormente. Além disso, em problemas de detecção de anomalias, *clusters* incomuns e ociosos podem ser mais importantes do que *clusters* altamente operacionais e, portanto, não devem ser removidos (ŠKRJANC et al., 2019). Os mecanismos para remoção de *clusters* são baseados principalmente nos seguintes princípios: a idade da regra *fuzzy*, o tamanho do suporte do *cluster* (quantidade

de amostras pertencentes a um *cluster*), a contribuição da regra para o erro de saída, a combinação da idade e o número total de ativações da regras *fuzzy*, etc. Na Figura 21 é ilustrada uma situação com dois *clusters* mais representativos, isto é, mais significativos para a modelagem do conjunto de dados e um *cluster* com menor poder de representação. Este *cluster* possivelmente seria excluído caso fosse adotado um critério baseado no suporte dos *clusters* para exclusão de regras *fuzzy*.

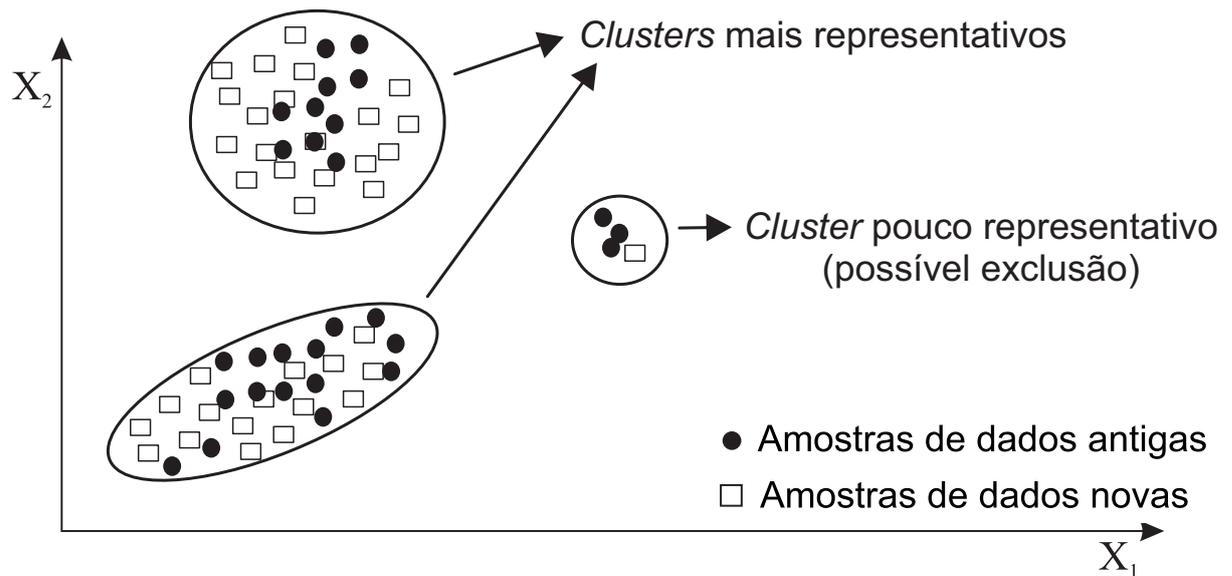


Figura 21 – Situação em que há possibilidade de exclusão de *cluster* devido sua baixa representatividade do conjunto de dados.

Parte III

REFERENCIAL METODOLÓGICO

## 5 Metodologia Proposta: Filtragem de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 Evolutiva

Neste capítulo, a metodologia proposta para o projeto do Filtro de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 Evolutivo, a partir de componentes espectrais não-observáveis extraídas de dados experimentais incertos, é apresentada. São abordados o pré-processamento dos dados experimentais por análise espectral singular multivariável, a estimação paramétrica inicial do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo bem como sua etapa de atualização recursiva. Por fim, será apresentada uma análise da complexidade computacional do algoritmo para filtragem de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo proposto nesta tese.

### 5.1 Pré-Processamento de Dados por Análise Espectral Singular Multivariável

A Análise Espectral Singular (AES) é uma técnica de processamento de dados que tem por objetivo a decomposição de séries temporais originais em componentes espectrais não-observáveis interpretáveis (GOLYANDINA; ZHIGLJAVSKY, 2013). Estas componentes espectrais são sinais não-observáveis inerentes aos conjunto de dados e podem estar associadas a comportamento de tendência, periódico, semi-periódico ou ruído (ABDOLLAHZADE et al., 2015). Uma formulação recursiva multivariável do algoritmo AES é proposta, a qual é descrita a seguir.

#### 5.1.1 Estimação Inicial das Componentes Espectrais Não-Observáveis

Considerando a janela inicial de dados experimentais multivariável  $\mathbf{y}$  referente a  $p$  séries temporais, com  $N$  amostras, dada por:

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1 \quad \mathbf{y}_2 \quad \dots \quad \mathbf{y}_N], \quad \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{p \times N} \quad (5.1)$$

onde  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$ , tal que  $k = 1, \dots, N$ , é o vetor composto pelas observações da série temporal  $p$  na amostra  $k$ . Uma matriz trajetória  $\mathcal{H}$  é construída considerando as  $p$  dimensões de  $\mathbf{y}$  como segue:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 & \cdots & \mathbf{y}_\rho \\ \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 & \mathbf{y}_4 & \cdots & \mathbf{y}_{\rho+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_\delta & \mathbf{y}_{\delta+1} & \mathbf{y}_{\delta+2} & \cdots & \mathbf{y}_{p \times N} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H} \in \mathbb{R}^{p\delta \times pN} \quad (5.2)$$

onde  $2 \leq \delta \leq N - 1$  é um parâmetro definido pelo usuário e  $\rho = N - \delta + 1$ . Uma matriz de covariância  $\mathbf{S}$  é calculada como segue:

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}\mathbf{H}^T, \quad \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{p\delta \times p\delta} \quad (5.3)$$

A Decomposição em Valores Singulares (SVD) da matriz  $\mathbf{S}$  é equivalente à SVD de  $\mathbf{H}$  e resulta em uma coleção de  $\delta$  autovalores ( $\sigma^1 \geq \sigma^2 \geq \dots \geq \sigma^\delta \geq 0$ ) e  $\delta$  autovetores ( $\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^\delta$ ). A SVD de  $\mathbf{H}$  resulta em:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^1 + \mathbf{H}^2 + \dots + \mathbf{H}^d \quad (5.4)$$

onde  $d = \max\{\varrho, \text{tal que } \sigma^\varrho > 0\}$  e a matriz  $\mathbf{H}^\varrho|_{\varrho=1, \dots, d}$  é obtida por:

$$\mathbf{H}^\varrho = \sqrt{\sigma^\varrho} \phi^\varrho \mathbf{V}^{\varrho T}, \quad \mathbf{H}^\varrho \in \mathbb{R}^{\delta \times \rho} \quad (5.5)$$

onde

$$\mathbf{V}^\varrho = \frac{\mathbf{H}^T \phi^\varrho}{\sqrt{\sigma^\varrho}}, \quad \varrho = 1, \dots, d \quad (5.6)$$

As matrizes  $\mathbf{H}^\varrho|_{\varrho=1, \dots, d}$ , obtidas a partir da Equação (5.5), são reagrupadas em  $\xi$  termos disjuntos, tal que  $\xi \leq d$ , como segue:

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}^1 + \mathbf{I}^2 + \dots + \mathbf{I}^\xi \quad (5.7)$$

onde  $\mathbf{I}^j|_{j=1, \dots, \xi}$  são os termos resultantes após o reagrupamento das matrizes  $\mathbf{H}^\varrho|_{\varrho=1, \dots, d}$  e  $\xi$  corresponde ao número de componentes espectrais não-observáveis extraídas dos dados experimentais, o qual é um parâmetro definido pelo usuário. Nesta tese, o valor adequado para o parâmetro  $\xi$  foi determinado por meio da métrica VAF - *Variance Accounted For* de forma a melhor representar o conjunto de dados original. Considerando  $\delta^* = \min(\delta, \rho)$  e  $\rho^* = \max(\delta, \rho)$ , o vetor  $\alpha^j$  que contém as  $\xi$  componentes espectrais não-observáveis referentes às  $p$  séries temporais de dados experimentais é obtido de  $\mathbf{I}^j|_{j=1, \dots, \xi}$ , da seguinte forma:

$$\alpha_k^j = \begin{cases} \frac{1}{k} \sum_{\nu=1}^{k+1} \mathbf{I}_{\nu, k-\nu+1}^j & 1 \leq k \leq \delta^* \\ \frac{1}{\delta^*} \sum_{\nu=1}^{\delta^*} \mathbf{I}_{\nu, k-\nu+1}^j & \delta^* \leq k \leq \rho^* \\ \frac{1}{N-k+1} \sum_{\nu=k-\rho^*+1}^{N-\rho^*+1} \mathbf{I}_{\nu, k-\nu+1}^j & \rho^* < k \leq N \end{cases} \quad (5.8)$$

### 5.1.2 Atualização Recursiva das Componentes Espectrais Não-Observáveis

Após a inicialização do algoritmo de análise espectral singular recursiva multi-variável, conforme descrito na Seção 5.1.1, as componentes espectrais não-observáveis são atualizadas em  $k = N + 1, N + 2, \dots$  conforme formulado a seguir. A variável  $\rho$  é atualizada da seguinte forma:

$$\rho = k - \delta + 1 \quad (5.9)$$

e a matriz de covariância  $\mathcal{S}_k$  é atualizada para o instante de tempo  $k$  como segue:

$$\mathcal{S}_k = \mathcal{S}_{k-1} + \Upsilon_k, \quad \mathcal{S}_k \in \mathbb{R}^{p\delta \times p\delta} \quad (5.10)$$

onde  $\Upsilon_k = \boldsymbol{\psi}_k \boldsymbol{\psi}_k^T \in \mathbb{R}^{p\delta \times p\delta}$  com  $\boldsymbol{\psi}_k = [\mathbf{y}_\rho, \mathbf{y}_{\rho+1}, \dots, \mathbf{y}_k]^T$ . O conjunto de autovalores  $\sigma_k^1, \sigma_k^2, \dots, \sigma_k^\delta$  e seus respectivos autovetores  $\boldsymbol{\phi}_k^1, \boldsymbol{\phi}_k^2, \dots, \boldsymbol{\phi}_k^\delta$  são atualizados no instante de tempo  $k$  a partir da aplicação do procedimento de SVD para atualização da matriz de covariância  $\mathcal{S}_k$ , tal que  $\mathbf{y}_k$  pode ser reescrito como segue:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k^1 + \mathbf{h}_k^2 + \dots + \mathbf{h}_k^d \quad (5.11)$$

onde  $\mathbf{h}_k^\varrho = \kappa_k^\varrho \boldsymbol{\psi}_k^T \boldsymbol{\phi}_k^\varrho$ ,  $\varrho = 1, \dots, d$ , tal que  $\kappa_k^\varrho$  corresponde ao último elemento do autovetor  $\boldsymbol{\phi}_k^\varrho$ . Os termos  $\mathbf{h}_k^\varrho |^{\varrho=1, \dots, d}$  são reagrupados em  $\xi$  termos disjuntos  $\mathcal{I}_k^j |^{j=1, \dots, \xi}$ , como segue:

$$\mathbf{y}_k = \mathcal{I}_k^1 + \mathcal{I}_k^2 + \dots + \mathcal{I}_k^\xi \quad (5.12)$$

onde  $\mathcal{I}_k^j = \boldsymbol{\alpha}_k^j$ , com  $j = 1, \dots, \xi$  e  $k = N + 1, N + 2, \dots$ . A Análise Espectral Singular Recursiva Multivariável, conforme descrito na Seção 5.1, é implementado pelo Algoritmo 1.

## 5.2 Estimação Paramétrica do Filtro de Kalman Fuzzy Tipo-2 Evolutivo

O filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo apresenta a  $i^{|i=1,2,\dots,L|}$ -ésima regra *fuzzy*, como segue:

$$R^{(i)} : \quad \text{SE } \mathcal{Z}_k \text{ É } \widetilde{W}^i$$

$$\text{ENTÃO } \begin{cases} \widetilde{\mathbf{x}}_{k+1}^i = \widetilde{\mathbf{A}}_k^i \widetilde{\mathbf{x}}_k^i + \widetilde{\mathbf{B}}_k^i \mathbf{u}_k + \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k^i \\ \widetilde{\mathbf{y}}_k^i = \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \widetilde{\mathbf{x}}_k^i + \widetilde{\mathbf{D}}_k^i \mathbf{u}_k \end{cases} \quad (5.13)$$

onde a proposição do antecedente é definida pelos seguintes termos:

- $\mathcal{Z}_k \in \mathbb{R}^{r \times N}$  é a variável linguística da proposição do antecedente com  $r$  séries temporais e  $N$  amostras;

**Algoritmo 1:** Análise Espectral Singular Recursiva Multivariável**Entradas:**  $\mathbf{y}, \delta, \xi$ **Saídas:**  $\alpha_k^j |_{j=1, \dots, \xi}$ 

%Estimação Inicial das Componentes Espectrais Não-Observáveis

- 1) Calcular  $\rho = N - \delta + 1$ ;
- 2) Construir  $\mathcal{H}$  - Eq. (5.2);
- 3) Calcular a matriz  $\mathcal{S}$  - Eq. (5.3);
- 4) Aplicar o método de SVD à matriz de covariância  $\mathcal{S}$ ;
- 5) Reescrever a SVD da matriz  $\mathcal{S}$  - Eq. (5.4);
- 6) Reagrupar as matrizes  $\mathcal{H}^e |_{e=1, \dots, d}$  em  $\xi$  termos matriciais linearmente independentes  $\mathbf{I}^j |_{j=1, \dots, \xi}$  - Eq. (5.7);
- 7) Calcular as componentes não-observáveis  $\alpha_k^j |_{j=1, \dots, \xi}$  - Eq. (5.8);

%Atualização Recursiva das Componentes Espectrais Não-Observáveis

**while**  $k \geq N + 1$  **do**

- 1) Atualizar  $\rho$  - Eq. (5.9);
- 2) Atualizar  $\mathcal{S}_k$  - Eq. (5.10);
- 3) Atualizar o conjunto de autovalores  $\sigma_k^1, \sigma_k^2, \dots, \sigma_k^\delta$  e seus respectivos autovetores  $\phi_k^1, \phi_k^2, \dots, \phi_k^\delta$  aplicando o método de SVD em  $\mathcal{S}_k$ ;
- 4) Reescrever a amostra  $\mathbf{y}_k$  no formato da Eq. (5.11);
- 5) Reagrupar os termos  $\mathbf{h}_k^e |_{e=1, \dots, d}$  em  $\xi$  termos disjuntos  $\mathcal{I}_k^j |_{j=1, \dots, \xi}$  - Eq. (5.12);

**end**

- $\widetilde{W}^i$  é o conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar correspondente a  $i$ -ésima regra;

e a proposição do consequente é definida por um submodelo no espaço de estados como segue:

- $\widetilde{\mathbf{x}}_k^i = \left[ \widetilde{x}_{1_k}^i \ \dots \ \widetilde{x}_{n_k}^i \right]^T \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor de estados intervalar estimado com  $n$ -ésima ordem;
- $\widetilde{\mathbf{y}}_k^i = \left[ \widetilde{y}_{1_k}^i \ \dots \ \widetilde{y}_{p_k}^i \right]^T \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de saídas local intervalar estimado;
- $\mathbf{u}_k = [u_{1_k} \ \dots \ u_{m_k}]^T \in \mathbb{R}^m$  é o sinal de entrada;
- $\widetilde{\mathbf{A}}_k^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\widetilde{\mathbf{B}}_k^i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\widetilde{\mathbf{C}}_k^i \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $\widetilde{\mathbf{D}}_k^i \in \mathbb{R}^{p \times m}$  e  $\widetilde{\mathbf{K}}_k^i \in \mathbb{R}^{n \times p}$  são, respectivamente, matriz de estados, matriz de entrada, matriz de saída, matriz de transmissão direta e matriz de ganho de Kalman, os quais são parâmetros intervalares;

- $\tilde{\epsilon}_k^i = [\underline{\epsilon}_k^i \quad \bar{\epsilon}_k^i]$  é o erro residual intervalar, o qual serve como mecanismo de ajuste para a estimação dos ganhos de Kalman do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, definido em termos dos erros de estimação inferior  $\underline{\epsilon}_k^i \in \mathbb{R}^{n \times p}$  e superior  $\bar{\epsilon}_k^i \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , dados por:

$$\underline{\epsilon}_k^i = |y_k - \hat{y}_k^i| \quad (5.14)$$

$$\bar{\epsilon}_k^i = |y_k - \bar{y}_k^i| \quad (5.15)$$

$$(5.16)$$

onde  $\hat{y}_k^i$  e  $\bar{y}_k^i$  são os valores dos limites inferior e superior da saída estimada pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, e  $y_k$  é o valor verdadeiro da saída experimental no instante  $k$ . O procedimento para calcular o vetor de erro residual  $\tilde{\epsilon}_k^i$  é ilustrado na Figura 22.

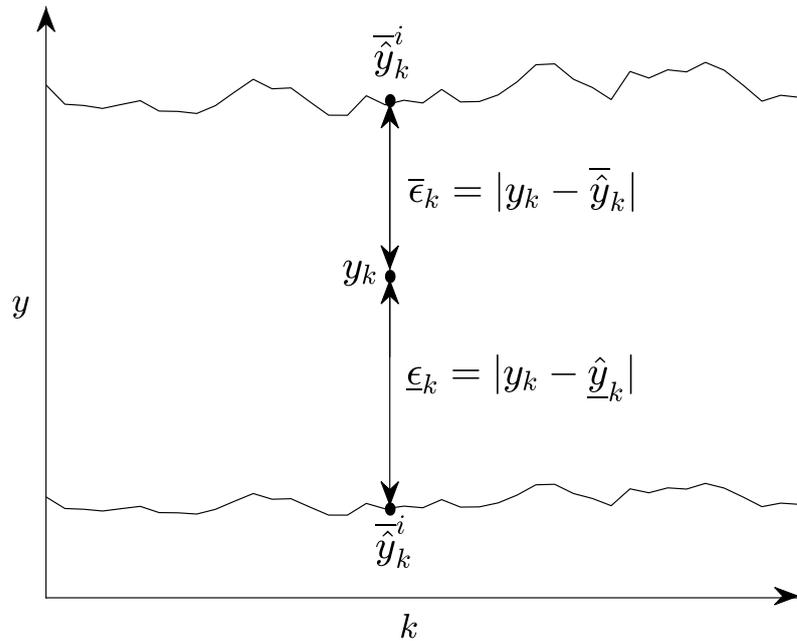


Figura 22 – Ilustração do vetor de erro residual  $\tilde{\epsilon}_k^i$ .

O comportamento dinâmico dos dados experimentais é aproximado pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo através da soma ponderada de filtros de Kalman definidos na proposição do consequente em função dos graus de ativação intervalares  $\tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{z}_k)$ , como segue:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \sum_{i=1}^L \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{z}_k) \tilde{\mathbf{A}}_k^i \tilde{\mathbf{x}}_k + \sum_{i=1}^L \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{z}_k) \tilde{\mathbf{B}}_k^i \mathbf{u}_k + \sum_{i=1}^L \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{z}_k) \tilde{\mathbf{K}}_k^i \tilde{\epsilon}_k^i \quad (5.17)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \sum_{i=1}^L \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}(\mathbf{z}_k) \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{x}}_k + \sum_{i=1}^L \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}(\mathbf{z}_k) \tilde{\mathbf{D}}_k^i \mathbf{u}_k \quad (5.18)$$

onde  $L$  é o número de regras do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo no instante  $k$  e  $\tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}(\mathbf{z}_k) = [\underline{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{z}_k), \bar{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{z}_k)]$ , tal que  $\underline{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{z}_k)$  e  $\bar{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{z}_k)$  correspondem aos graus de ativação inferior e superior da  $i$ -ésima regra, respectivamente, tal que:

$$\sum_{i=1}^L \underline{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{z}_k) = 1 \quad (5.19)$$

$$\sum_{i=1}^L \bar{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{z}_k) = 1 \quad (5.20)$$

$$\underline{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{z}_k) \in [0, 1] \quad (5.21)$$

$$\bar{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{z}_k) \in [0, 1] \quad (5.22)$$

O procedimento para o cálculo da saída intervalar  $\tilde{\mathbf{y}}_k$ , estimada pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, é mostrada na Figura 23.

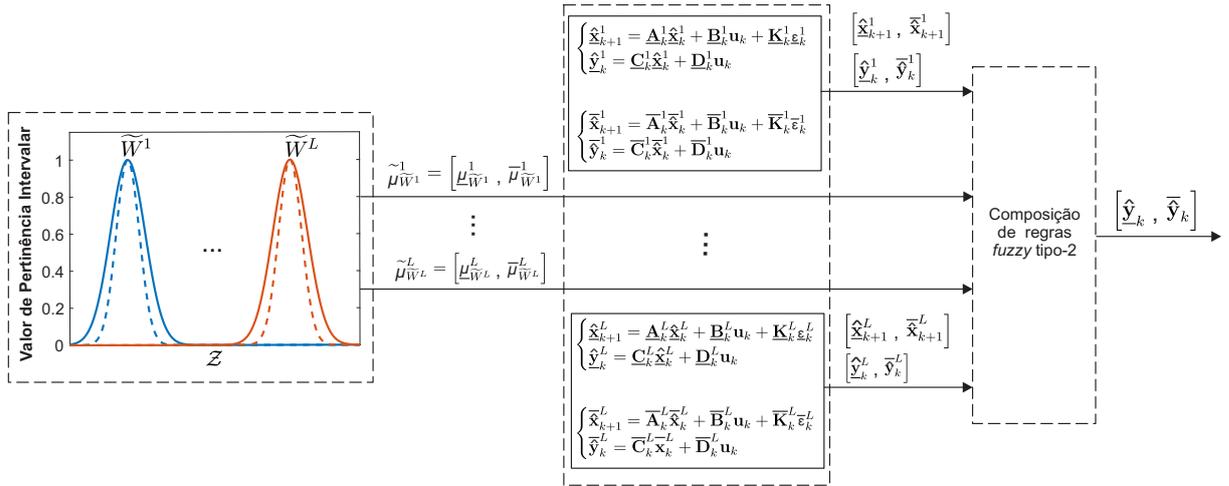


Figura 23 – Procedimento para o cálculo da resposta intervalar do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo proposto.

### 5.2.1 Estimação Inicial da Proposição do Antecedente do Filtro de Kalman Fuzzy Tipo-2 Evolutivo

A proposição do antecedente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo proposto é inicialmente estimada pelo algoritmo de agrupamento Gustafson-Kessel tipo-2 intervalar, conforme descrito a seguir. Seja os dados experimentais  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{p \times N}$ , a primeira etapa do algoritmo de agrupamento Gustafson-Kessel tipo-2 intervalar é o cálculo dos protótipos dos *clusters*  $\tilde{\mathbf{v}}^{i(l)}$ , com base na matriz de partição inicial aleatória  $\tilde{\mathbf{U}}^{(0)} \in \mathbb{R}^{L \times N}$ , como

segue:

$$\tilde{\mathbf{v}}^{i(l)} = \frac{\sum_{k=1}^N \left( \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{z}_k)^{(l-1)} \right)^{\tilde{m}} \mathbf{z}_k}{\sum_{k=1}^N \left( \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{z}_k)^{(l-1)} \right)^{\tilde{m}}}, \quad 1 \leq i \leq L \quad (5.23)$$

onde  $\mathbf{z}_k$  corresponde aos dados experimentais no instante  $k$ ,  $L$  é o número inicial de agrupamentos, tal que  $1 < L < N$ ,  $\tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{z}_k)$  é o grau de pertinência intervalar da amostra  $\mathbf{z}_k$  no  $i$ -ésimo agrupamento e  $\tilde{m} = [\underline{m}, \overline{m}]$  é o expoente de ponderação intervalar tal que  $\underline{m}$  e  $\overline{m}$  correspondem, respectivamente, ao expoente de ponderação das funções de pertinência superior e inferior do conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\tilde{W}^i$ . As matrizes de covariância  $\tilde{\mathbf{F}}^i$  são calculadas para cada agrupamento, como segue:

$$\tilde{\mathbf{F}}^i = \frac{\sum_{k=1}^N \left( \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{z}_k)^{(l-1)} \right)^{\tilde{m}} (\mathbf{z}_k - \tilde{\mathbf{v}}^{i(l)}) (\mathbf{z}_k - \tilde{\mathbf{v}}^{i(l)})^T}{\sum_{k=1}^N \left( \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{z}_k)^{(l-1)} \right)^{\tilde{m}}}, \quad (5.24)$$

$$1 \leq i \leq L, \quad 1 \leq k \leq N$$

A partir das matrizes de covariância  $\tilde{\mathbf{F}}^i$ , obtidas a partir da Equação 5.24, as distâncias  $\tilde{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^i}^i$  são dadas por:

$$\tilde{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^i}^i = \sqrt{(\mathbf{z}_k - \tilde{\mathbf{v}}^{i(l)})^T \left[ \det(\tilde{\mathbf{F}}^i)^{1/n} (\tilde{\mathbf{F}}^i)^{-1} \right] (\mathbf{z}_k - \tilde{\mathbf{v}}^{i(l)})} \quad (5.25)$$

O termo  $\left[ \det(\tilde{\mathbf{F}}^i)^{1/n} (\tilde{\mathbf{F}}^i)^{-1} \right]$  na Equação (5.25) corresponde à matriz de norma induzida  $\mathbf{A}^i |^{i=1, \dots, L}$  relacionada a cada agrupamento, a qual permite adaptar o formato dos agrupamentos à estrutura topológica dos dados experimentais (BABUSKA, 1998). A matriz de partição  $\tilde{\mathbf{U}}^{(l)}$  é atualizada como segue:

Se  $\tilde{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^i}^i > 0$  para  $1 \leq i \leq L, 1 \leq k \leq N$

$$\tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^{i(l)}(\mathbf{z}_k) = \left[ \underline{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{z}_k), \overline{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{z}_k) \right] \quad (5.26)$$

onde

$$\underline{\mu}_{\tilde{W}^i}^{i(l)}(\mathbf{z}_k) = \min \left[ \frac{1}{\sum_{j=1}^L \left( \underline{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^j}^j / \underline{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^i}^i \right)^{2/(\underline{m}-1)}}, \frac{1}{\sum_{j=1}^L \left( \overline{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^j}^j / \overline{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^i}^i \right)^{2/(\overline{m}-1)}} \right] \quad (5.27)$$

$$\overline{\mu}_{\tilde{W}^i}^{i(l)}(\mathbf{z}_k) = \max \left[ \frac{1}{\sum_{j=1}^L \left( \underline{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^j}^j / \underline{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^i}^i \right)^{2/(\underline{m}-1)}}, \frac{1}{\sum_{j=1}^L \left( \overline{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^j}^j / \overline{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^i}^i \right)^{2/(\overline{m}-1)}} \right] \quad (5.28)$$

caso contrário

$\tilde{\mu}_{W_i}^{i(l)}(\mathbf{z}_k) = [0, 0]$ . Estas etapas são repetidas iterativamente para  $l = 1, 2, \dots$ , até que a seguinte condição seja satisfeita:

$$\|\tilde{\mathbf{U}}^{(l)} - \tilde{\mathbf{U}}^{(l-1)}\| < \mathcal{E} \quad (5.29)$$

onde  $\mathcal{E}$  é a tolerância para finalização do algoritmo. O algoritmo de agrupamento Gustafson-Kessel *fuzzy* tipo-2 intervalar, conforme descrito na Seção 5.2, é implementado pelo Algoritmo 2.

**Algoritmo 2:** Algoritmo de Agrupamento *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar Gustafson-Kessel

**Entradas:**  $\mathcal{Z}, \tilde{m}, \mathcal{E}, \tilde{\mathbf{U}}^{(0)}$

**Saídas:**  $\tilde{\mathbf{U}}$

$l = 0;$

**repeat**

$l = l + 1;$

**for**  $i = 1$  **to**  $L$  **do**

        1) Calcular os protótipos dos agrupamentos  $\tilde{\mathbf{v}}^{i(l)}$  - Eq. (5.23);

        2) Calcular as matrizes de covariância dos agrupamentos  $\tilde{\mathbf{F}}^i$  - Eq. (5.24);

        3) Calcular as distância  $\tilde{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^i}^i$  - Eq. (5.25);

        4) Atualizar a matriz de partição intervalar  $\tilde{\mathbf{U}}^{(l)}$  - Eq. (5.26)-(5.28);

**end**

**until**  $\|\tilde{\mathbf{U}}^{(l)} - \tilde{\mathbf{U}}^{(l-1)}\| < \mathcal{E};$

### 5.2.2 Atualização Evolutiva da Proposição do Antecedente do Filtro de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 Evolutivo

A partição do universo de discurso da variável linguística  $\mathbf{z}_k$  é atualizada por uma formulação *fuzzy* tipo-2 intervalar do algoritmo de agrupamento *evolving* Takagi-Sugeno (eTS), a qual é proposta nesta tese a fim de adaptar a estrutura do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo à dinâmica inerente aos dados experimentais, a partir da evolução do número de regras *fuzzy*, conforme descrito no Capítulo 4. O algoritmo é baseado na densidade  $D_k(z_k^j)$  da amostra  $\mathbf{z}_k$  dos dados experimentais, para a  $j$ -ésima dimensão, a que é calculada por (AGELOV; FILEV; KASABOV, 2010):

$$D_k(z_k^j) = \frac{k-1}{(k-1)(\delta_k+1) + \sigma_k - 2\rho_k} \quad (5.30)$$

onde

$$\delta_k = \sum_{j=1}^{o+1} (z_k^j)^2 \quad (5.31)$$

$$\sigma_k = \sigma_{k-1} + \sum_{j=1}^{o+1} (z_{k-1}^j)^2 \quad (5.32)$$

$$\rho_k = \sum_{j=1}^{o+1} z_k^j \alpha_k \quad (5.33)$$

$$\alpha_k = \alpha_{k-1} + z_{k-1}^j \quad (5.34)$$

tal que  $D_1(z_1^j) = 1$ ,  $\alpha_1 = 0$  e  $\sigma_1 = 0$ . A densidade dos protótipos dos agrupamentos  $D_k(z^{i*})$ ,  $i = 1, \dots, L$ , é atualizada, de forma recursiva, como segue:

$$D_k(z^{i*}) = (k-1) + (k-2) \left( \frac{1}{D_{k-1}(z^{i*})} - 1 \right) + \sum_{j=1}^{o+1} (z_k^j - z_{k-1}^j)^2 \quad (5.35)$$

O mecanismo de adaptação é baseado na comparação entre a densidade de uma nova amostra a partir dos dados experimentais e a densidade de todos os protótipos dos agrupamentos existentes. Assim, a cada instante de tempo  $k$ , algumas condições são avaliadas para avaliar a qualidade do particionamento e, assim, adaptar a estrutura do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo de acordo com a variabilidade dos dados experimentais. Tais condições são descritas a seguir (ANGELOV, 2013):

- A **Condição A** seleciona uma amostra como novo protótipo de agrupamento, a qual é descrita por:

$$D_k(z_k^j) > \max_{i=1}^L D(z^{i*}) \text{ OR } D_k(z_k^j) < \min_{i=1}^L D(z^{i*}) \quad (5.36)$$

Se a condição A é satisfeita, então um novo agrupamento é definido ( $L \leftarrow L + 1$ ;  $z^{i*} \leftarrow z_k^j$ ;  $D(z^{i*}) = D_k(z_k^j)$ );

- A **Condição B** evita a redundância e sobreposição de regras *fuzzy*, a qual é descrita por:

$$\begin{aligned} \text{SE } \tilde{\mu}_{\tilde{W}_k^i}(z_k^j) > e^{-1}, \quad i = 1, \dots, L-1 \\ \text{ENTÃO } L \leftarrow L-1 \end{aligned} \quad (5.37)$$

- A **Condição C** garante que a base de regras tenha apenas regras *fuzzy* com algum nível de contribuição, e elimina regras com baixo nível de utilidade  $U_k^i$ , a qual é calculada por:

$$U_k^i = \frac{\sum_{l=1}^k \tilde{\mu}_{\tilde{W}_k^i}^l(z_l^j)}{k - I^{i*}} \quad (5.38)$$

onde  $I^{i*}$  é o instante de tempo em que a  $i$ -ésima regra *fuzzy* é criada. Portanto, a Condição C é dada por:

$$\text{SE } U_k^i < \eta, \quad i = 1, \dots, L, \quad \text{ENTÃO } L \leftarrow L - 1 \quad (5.39)$$

tal que  $\eta = [0.01 \quad 0.3]$ .

O algoritmo de agrupamento *evolving* Takagi-Sugeno tipo-2 intervalar, conforme descrito na Seção 5.2.2, é implementado de acordo com o Algoritmo 3.

**Algoritmo 3:** Algoritmo de Agrupamento *Evolutionary* Takagi-Sugeno tipo-2 Intervalar

```

Entradas:  $\mathbf{z}_k, \tilde{\sigma}_1^i, m_{\underline{\mu}}, \eta$ 
Saídas:  $\tilde{\mu}_{\tilde{W}_k^i}^i(\mathbf{z}_k)$ 
%Inicialização;
 $z^{i*} = z_k^j$ ;
 $D_k(z_k^j) = 1$ ;
 $I^{i*} = N$ ;
%Atualização Evolutiva da Proposição do Antecedente;
while  $k > N$  do
    Calcular a densidade  $D_k(z_k^j)$  - Eq. (5.30);
    for  $i = 1$  to  $L$  do
        Calcular a densidade  $D_k(z^{i*})$  - Eq. (5.35);
    end
    if Condição A then
         $z^{i*} = z_k^j$ ;
         $D(z^{i*}) = D_k(z_k^j)$ ;
         $I^{i*} = k$ ;
    end
    if Condição B then
        Excluir regras pela Eq. (5.37);
    end
    if Condition C then
        Excluir regras pela Eq. (5.39);
    end
end

```

### 5.2.3 Estimação Inicial da Proposição do Consequente do Filtro de Kalman Fuzzy Tipo-2 Evolutivo

Uma vez que o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo é obtido utilizando-se a abordagem de modelagem caixa preta, faz-se necessário a estimação das matrizes que compõem a proposição do consequente do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo a partir de dados experimentais, conforme formulado na Equação (5.13). Neste sentido, a estimação paramétrica inicial da proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo é obtida usando uma formulação *fuzzy* tipo-2 intervalar do algoritmo OKID (*Observer/Kalman Filter Identification*) (JUANG, 1994). Este algoritmo de identificação de sistemas possui uma relação direta com o algoritmo de filtro de Kalman clássico apresentado no Capítulo 2, onde o ganho de Kalman é obtido de forma direta a partir da resposta ao pulso do sistema identificado (WU et al., 2015). Isto é, a matriz de ganho de Kalman é obtida sem a necessidade da aplicação das equações da etapa de propagação do algoritmo clássico de Kalman (JUANG, 1994).

A versão *fuzzy* tipo-2 desenvolvida para o algoritmo de OKID é baseada nos valores de pertinência intervalares obtidos inicialmente pelo algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 Gustafson-Kessel, conforme descrito na Seção 5.2.1, e nas componentes espectrais não-observáveis extraídas dos dados experimentais. Seja o conjunto de dados experimentais  $\mathbf{Z}$ , tal que  $\mathbf{Z}_k = [\mathbf{u}_k \quad \boldsymbol{\alpha}_k^*]^T$ , onde  $\boldsymbol{\alpha}_k^*$  corresponde às componentes espectrais mais significativas extraídas a partir dos dados experimentais, uma matriz de regressores  $\mathbf{\Lambda}$  is calculada por:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_q & \mathbf{u}_{q+1} & \cdots & \mathbf{u}_{N-1} \\ \mathbf{Z}_{q-1} & \mathbf{Z}_q & \cdots & \mathbf{Z}_{N-2} \\ \mathbf{Z}_{q-2} & \mathbf{Z}_{q-1} & \cdots & \mathbf{Z}_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_0 & \mathbf{Z}_1 & \cdots & \mathbf{Z}_{N-q-1} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

onde  $q$  é o número de parâmetros Markov definidos pelo usuário. Para aplicações que envolvem o rastreamento de séries temporais, onde não há a presença de uma variável de entrada, deve-se considerar a matriz de regressores, dada na Eq. (5.40), a partir da segunda linha com  $\mathbf{Z}_k = [\boldsymbol{\alpha}_k^*]^T$ . A partir da matriz de regressores dada na Equação 5.40, o vetor composto pelos parâmetros do observador Markov  $\widetilde{\mathbf{Y}}^i$  é obtido pela seguinte equação:

$$\widetilde{\mathbf{y}}^T = \sum_{i=1}^L \widetilde{\Gamma}^i \mathbf{\Lambda}^T \widetilde{\mathbf{Y}}^i \quad (5.41)$$

onde

$$\tilde{\Gamma}^i = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathcal{Z}_q) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathcal{Z}_{q+1}) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathcal{Z}_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

é a matriz diagonal de ponderação da  $i$ -ésima regra *fuzzy* obtida a partir do algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 intervalar Gustafson-Kessel e

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_k^i & \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{B}}_k^i & \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{A}}_k^i \tilde{\mathbf{B}}_k^i & \dots & \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{A}}_k^{i(q-1)} \tilde{\mathbf{B}}_k^i \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{Y}} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_0 & \tilde{\mathbf{Y}}_1 & \tilde{\mathbf{Y}}_2 & \dots & \tilde{\mathbf{Y}}_q \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.43)$$

é o vetor com os parâmetros de Markov do observador, e

$$\tilde{\mathbf{A}}_k^i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_k^i + \tilde{\mathbf{K}}_k^i \tilde{\mathbf{C}}_k^i \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_k^i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_k^i + \tilde{\mathbf{K}}_k^i \tilde{\mathbf{D}}_k^i, -\tilde{\mathbf{K}}_k^i \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

correspondem às matrizes de estados e entradas acopladas, uma vez que possuem informações do comportamento dinâmico inerente aos dados experimentais e do ganho de Kalman intervalar. Usando a abordagem local na Equação (5.41), tem-se:

$$\Lambda \tilde{\Gamma}^i \mathbf{y}^T = \Lambda \tilde{\Gamma}^i \Lambda^T \tilde{\mathbf{Y}}^{iT} \quad (5.46)$$

onde  $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \dots \ \mathbf{y}_N] \in \mathbb{R}^{p \times N}$  corresponde à janela inicial de dados experimentais reais. Considerando  $\tilde{\mathbf{u}}^i = \Lambda \tilde{\Gamma}^i \Lambda^T$  e  $\tilde{\mathbf{s}}^i = \Lambda \tilde{\Gamma}^i \mathbf{y}^T$ , a Equação (5.46) é reescrita como segue:

$$\tilde{\mathbf{u}}^i \tilde{\mathbf{Y}}^{iT} = \tilde{\mathbf{s}}^i \quad (5.47)$$

A Equação (5.47) é solucionada aplicando o método de fatoração QR no termo  $\tilde{\mathbf{u}}^i$ , resultado em (CHEN, 1999):

$$\tilde{\mathbf{Q}}^i \tilde{\mathbf{R}}^i \tilde{\mathbf{Y}}^{iT} = \tilde{\mathbf{s}}^i \quad (5.48)$$

onde  $\tilde{\mathbf{Q}}^i$  possui colunas ortonormais, isto é  $(\tilde{\mathbf{Q}}^i)^{-1} = (\tilde{\mathbf{Q}}^i)^T$ , e  $\tilde{\mathbf{R}}^i$  é triangular superior cujos elementos da diagonal principal são diferentes de zero. Os parâmetros de Markov do observador  $\tilde{\mathbf{Y}}^i$  são obtidos por substituição retroativa a partir da Equação (5.48), uma vez que a matriz  $\tilde{\mathbf{R}}^i$  é triangular superior. Assim, os parâmetros de Markov do ganho do

observador e os parâmetros de Markov do sistema são extraídos de  $\widetilde{\mathbf{Y}}^i$ , como segue:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_0^i = \widetilde{\mathbf{D}}_k^i \quad (5.49)$$

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_j^i = \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \widetilde{\mathbf{A}}^{(j-1)} \widetilde{\mathbf{B}}_k^i \quad (5.50)$$

$$= \left[ \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \left( \widetilde{\mathbf{A}}_k^i + \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \right)^{(j-1)} \left( \widetilde{\mathbf{B}}_k^i + \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \widetilde{\mathbf{D}}_k^i \right), -\widetilde{\mathbf{C}}_k^i \left( \widetilde{\mathbf{A}}_k^i + \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \right)^{(j-1)} \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \right] \quad (5.51)$$

$$= \left[ \widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i(1)}, -\widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \right], \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (5.52)$$

Os parâmetros de Markov do sistema  $\widetilde{\mathbf{Y}}_j^i$  são calculados por:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_0^i = \widetilde{\mathbf{Y}}_0^i = \widetilde{\mathbf{D}}_k^i \quad (5.53)$$

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_j^i = \widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i(1)} - \sum_{\iota=1}^j \widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \widetilde{\mathbf{Y}}_{j-\iota}^i, \quad \text{for } j = 1, \dots, q \quad (5.54)$$

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_j^i = -\sum_{\iota=1}^q \widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \widetilde{\mathbf{Y}}_{j-\iota}^i, \quad \text{for } j = q+1, \dots, \infty \quad (5.55)$$

e o vetor de parâmetros de Markov do ganho do observador  $\widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i^\circ}$  é obtido por:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_1^{i^\circ} = \widetilde{\mathbf{Y}}_1^{i(2)} = \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \quad (5.56)$$

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i^\circ} = \widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} - \sum_{\iota=1}^{j-1} \widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \widetilde{\mathbf{Y}}_{j-\iota}^{i^\circ}, \quad \text{para } j = 2, \dots, q \quad (5.57)$$

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i^\circ} = -\sum_{\iota=1}^q \widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \widetilde{\mathbf{Y}}_{j-\iota}^{i^\circ}, \quad \text{para } j = q+1, \dots, \infty \quad (5.58)$$

Os parâmetros de Markov do sistema  $\widetilde{\mathbf{Y}}_j^i$  são usados para construir a matriz de Hankel  $\widetilde{\mathbf{H}}^i(j-1) \in \mathbb{R}^{\gamma p \times \beta m}$ , como segue:

$$\widetilde{\mathbf{H}}^i(j-1) = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{Y}}_j^i & \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+1}^i & \cdots & \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+\beta-1}^i \\ \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+1}^i & \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+2}^i & \cdots & \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+\beta}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+\gamma-1}^i & \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+\gamma}^i & \cdots & \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+\gamma+\beta-2}^i \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

onde  $\gamma$  e  $\beta$  são inteiros definidos pelo usuário. Considerando  $j = 1$  e aplicando o procedimento de Decomposição em Valores Singulares em  $\widetilde{\mathbf{H}}^i(0)$ , tem-se:

$$\widetilde{\mathbf{H}}^i(0) = \widetilde{\mathbf{\Xi}}^i \widetilde{\mathbf{\Sigma}}^i \widetilde{\mathbf{\Psi}}^{iT} \quad (5.60)$$

onde  $\widetilde{\mathbf{\Xi}}^i \in \mathbb{R}^{\gamma p \times \gamma p}$  e  $\widetilde{\mathbf{\Psi}}^i \in \mathbb{R}^{\beta m \times \beta m}$  são matrizes ortogonais e  $\widetilde{\mathbf{\Sigma}}^i \in \mathbb{R}^{\gamma p \times \beta m}$  é composta

pelos valores singulares dada por:

$$\tilde{\Sigma}^i = \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_n^i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

onde  $n$  é o número de valores singulares significativos e corresponde a ordem mínima do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo. A dimensão das matrizes na Equação (5.60) é reduzida para a ordem mínima, como segue:

$$\tilde{\mathbf{H}}_n^i(0) = \tilde{\Xi}_n^i \tilde{\Sigma}_n^i \tilde{\Psi}_n^{iT} \quad (5.62)$$

onde  $\tilde{\Xi}_n^i \in \mathbb{R}^{\gamma p \times n}$ ,  $\tilde{\Psi}_n^i \in \mathbb{R}^{n \times \beta m}$ ,  $\tilde{\Sigma}_n^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são as matrizes após a redução para a ordem mínima. A matriz de observabilidade  $\tilde{\mathbf{P}}_\gamma^i$  e a matriz de controlabilidade  $\tilde{\mathbf{Q}}_\beta^i$  são calculadas, como segue:

$$\tilde{\mathbf{P}}_\gamma^i = \tilde{\Xi}_n^i (\tilde{\Sigma}_n^i)^{1/2} \quad (5.63)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_\beta^i = (\tilde{\Sigma}_n^i)^{1/2} \tilde{\Psi}_n^{iT} \quad (5.64)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{P}}_\gamma^i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_k^i \\ \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{A}}_k^i \\ \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{A}}_k^{i2} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{A}}_k^{i\gamma-1} \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_\beta^i = [\tilde{\mathbf{B}}_k^i \quad \tilde{\mathbf{A}}_k^i \tilde{\mathbf{B}}_k^i \quad \tilde{\mathbf{A}}_k^{i2} \tilde{\mathbf{B}}_k^i \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{A}}_k^{i\beta-1} \tilde{\mathbf{B}}_k^i] \quad (5.66)$$

Por fim, as matrizes definidas na proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo são dadas por:

$$\tilde{\mathbf{A}}_k^i = (\tilde{\Sigma}_n^i)^{-1/2} \tilde{\Xi}_n^{iT} \tilde{\mathbf{H}}_n^i(1) \tilde{\Psi}_n^{iT} (\tilde{\Sigma}_n^i)^{-1/2} \quad (5.67)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_k^i = \text{primeiras } m \text{ colunas de } \tilde{\mathbf{Q}}_\beta^i \quad (5.68)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_k^i = \text{primeiras } p \text{ linhas de } \tilde{\mathbf{P}}_\gamma^i \quad (5.69)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_k^i = \tilde{\mathbf{Y}}_0^i \quad (5.70)$$

A matriz de ganho de Kalman intervalar  $\tilde{\mathbf{K}}_k^i$ , na  $i$ -ésima regra, é dada por:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_j^{i^o} = -\tilde{\mathbf{P}}_\gamma^i \tilde{\mathbf{K}}_k^i \quad (5.71)$$

onde  $\widetilde{\mathbf{K}}_k^i$  é a matriz de ganho de Kalman intervalar. Usando a abordagem local na Equação (5.71), tem-se:

$$\widetilde{\mathbf{P}}_\gamma^{iT} \widetilde{\Gamma}^i \widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i'o} = -\widetilde{\mathbf{P}}_\gamma^{iT} \widetilde{\Gamma}^i \widetilde{\mathbf{P}}_\gamma^i \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \quad (5.72)$$

A matriz de ganho de Kalman intervalar  $\widetilde{\mathbf{K}}_k^i$  é obtida usando fatoração QR no lado esquerdo de Equação (5.72).

#### 5.2.4 Atualização Recursiva da Proposição do Consequente do Filtro de Kalman Fuzzy Tipo-2 Evolutivo

Após a estimação inicial do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, os filtros de Kalman, definidos na proposição do consequente do sistema de inferência, são atualizados recursivamente nos instantes de tempo  $k = N_b + 1, k = N_b + 2, \dots$ , a cada nova amostra do conjunto de dados experimentais. Considerando o vetor de regressores, no instante  $k$ , dado por:

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{Z}_k \\ \mathbf{Z}_{k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_{k-q} \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

os parâmetros de Markov do observador intervalares  $\widetilde{\mathbf{Y}}_k^i$  são obtidos pela atualização recursiva de (5.47), como segue:

$$\widetilde{\boldsymbol{\mu}}_k^i = \widetilde{\boldsymbol{\mu}}_{k-1}^i + \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k \boldsymbol{\lambda}_k^T \quad (5.74)$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_k^i = \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{k-1}^i + \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k \mathbf{y}_k^T \quad (5.75)$$

Uma vez que  $\widetilde{\boldsymbol{\mu}}_k^i$  e  $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_k^i$  foram atualizados e aplicando-se fatoração QR em  $\widetilde{\boldsymbol{\mu}}_k^i$ , os parâmetros de Markov do observador  $\widetilde{\mathbf{Y}}_k^i$  são atualizados. A proposição do consequente das regras *fuzzy* é atualizado recursivamente repetindo os Passos 3 a 7. De forma similar, a matriz de ganho de Kalman intervalar  $\widetilde{\mathbf{K}}_k^i$  é obtida pela atualização recursiva da Equação (5.71), como segue:

$$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_k^i = \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{k-1}^i + \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k \boldsymbol{\lambda}_k^T \quad (5.76)$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\nu}}_k^i = \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_{k-1}^i + \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k \boldsymbol{\lambda}_k^T \quad (5.77)$$

Uma vez que  $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_k^i$  e  $\widetilde{\boldsymbol{\nu}}_k^i$  foram atualizados e aplicando-se o método de fatoração QR em  $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_k^i$ , a matriz de ganho de Kalman *fuzzy* intervalar é atualizada a cada instante de tempo  $k$ .

**Algoritmo 4:** Algoritmo OKID *fuzzy* tipo-2 intervalar**entrada:**  $\mathbf{Z}, \gamma, \beta, q, \tilde{\Gamma}^i$ **saída** :  $\tilde{\mathbf{A}}_k^i, \tilde{\mathbf{B}}_k^i, \tilde{\mathbf{C}}_k^i, \tilde{\mathbf{D}}_k^i, \tilde{\mathbf{K}}_k^i$ Construir a matriz de regressores  $\mathbf{\Lambda}$  - Eq. (5.40);

%Estimação Inicial;

**for**  $i = 1$  **to**  $L$  **do**

- 1) Calcular os parâmetros de Markov do observador intervalares  $\tilde{\mathbf{Y}}^i$  - Eq. (5.46)-(5.48);
- 2) Calcular os parâmetros de Markov do sistema intervalares  $\tilde{\mathbf{Y}}^i$  - Eq. (5.53)-(5.55);
- 3) Calcular os parâmetros de Markov do ganho do observador intervalares  $\tilde{\mathbf{Y}}^{i^o}$  - Eq. (5.56)-(5.58);
- 4) Construir as matrizes de Hankel  $\tilde{\mathbf{H}}^i(0)$  e  $\tilde{\mathbf{H}}^i(1)$  - Eq. (5.59);
- 5) Decompor  $\tilde{\mathbf{H}}^i(0)$  utilizando o método de SVD - Eq. (5.60) e determinar a ordem mínima  $n$  do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar - Eq. (5.61);
- 6) Calcular a matriz de observabilidade  $\tilde{\mathcal{P}}_\gamma^i$  - Eq. (5.63) e a matriz de controlabilidade  $\tilde{\mathcal{Q}}_\beta^i$  - Eq. (5.64);
- 7) Calcular as matrizes  $\tilde{\mathbf{A}}_k^i, \tilde{\mathbf{B}}_k^i, \tilde{\mathbf{C}}_k^i, \tilde{\mathbf{D}}_k^i$  - Eq. (5.67)-(5.70);
- 8) Calcular a matriz de ganho de Kalman intervalar  $\tilde{\mathbf{K}}_k^i$  - Eq. (5.71)-(5.72);

**end**%Atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo;**while**  $k \geq N_b + 1$  **do**

- 1) Construir o vetor de regressores  $\boldsymbol{\lambda}_k$  - Eq. (5.73);
- for**  $i = 1$  **to**  $L$  **do**
- 2) Atualizar os parâmetros de Markov do observador intervalares - Eq. (5.74)-(5.75);
  - 3) Repetir do Item 3 ao Item 7 descritos na etapa de treinamento;
  - 4) Atualizar a matriz de ganho de Kalman intervalar - Eq. (5.76)-(5.77)

**end****end**

O algoritmo *fuzzy* tipo-2 intervalar *Observer/Kalman Filter Identification*, de acordo com a metodologia proposta, é implementado conforme descrito no Algoritmo 4. No sentido de ilustrar as etapas sequenciais dos aspectos computacionais para o projeto do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, para melhor compreensão dos leitores, um fluxograma da metodologia proposta é mostrado na Figura 24.

### 5.3 Análise da Complexidade Computacional da Metodologia Proposta

A complexidade computacional do algoritmo de filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo proposto nesta tese será avaliada em termos da quantidade de operações necessárias para sua execução em cada iteração. Uma vez que o algoritmo proposto possui as etapas de pré-processamento dos dados, estimação inicial e atualização recursiva da estrutura do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo, conforme apresentado na Seção 5.2, nas quais são empregados algoritmos distintos, o número de operações necessárias em cada uma destas etapas é apresentado separadamente. Na Tabela 2 é mostrado a quantidade e o tipo de operações necessárias para a execução do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo.

Tabela 2 – Análise da complexidade computacional do algoritmo de filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo.

Etapa	Adições	Subtrações	Multiplicações	Divisões	Comparações
Pré-processamento dos dados	$N + 2\xi - 1$	1	$5\xi + 2$	$\xi + N - 1$	-
Estimação inicial	$N - 1$	$4N + 2q$	$5N + L(4q + 6) + 1$	$2L$	$l + 3$
Atualização recursiva	$L + 6$	$7N$	$4L + 1$	$3N$	$6N$

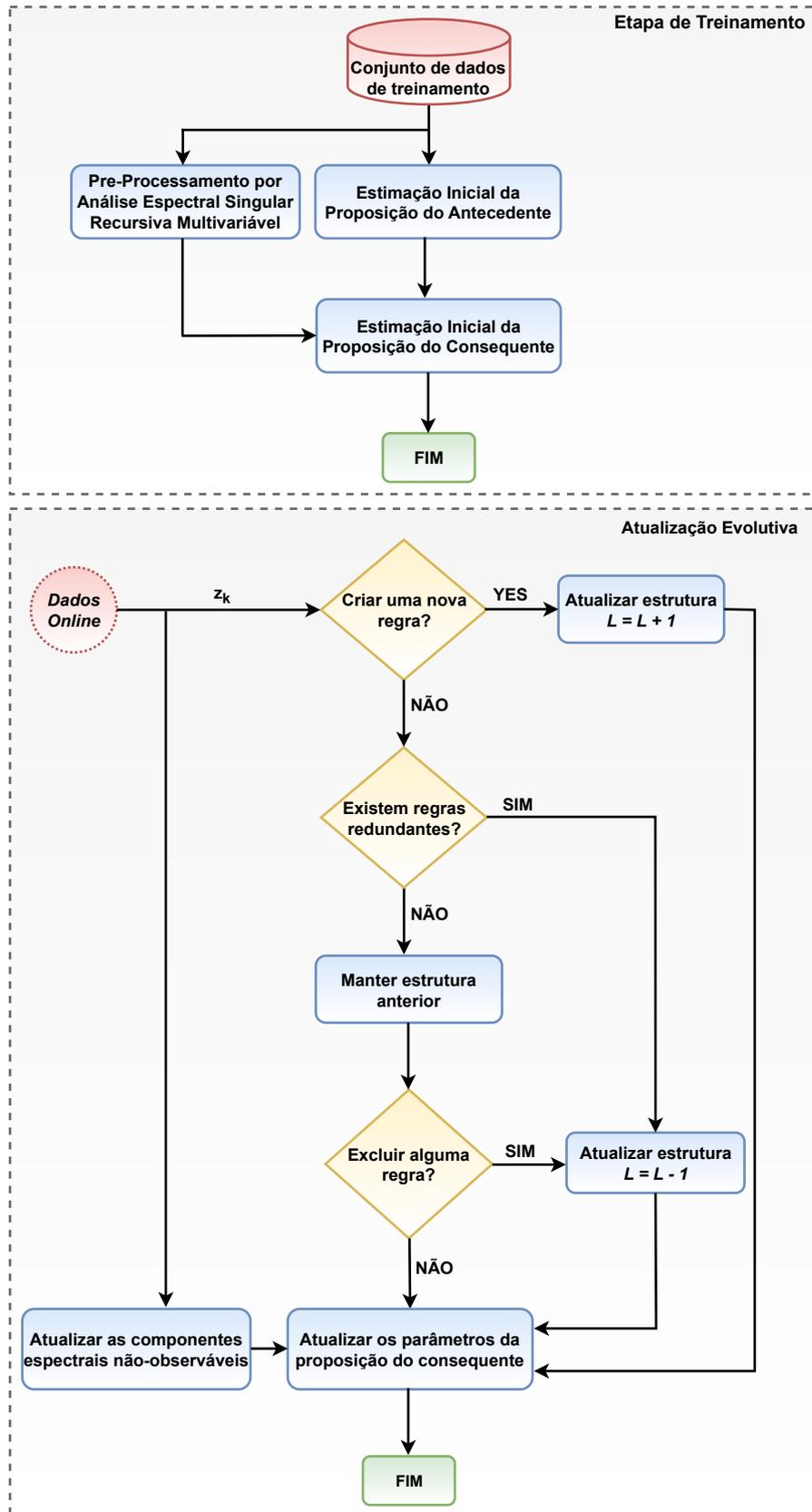


Figura 24 – Fluxograma da metodologia proposta correspondente aos aspectos computacionais para projeto do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo.

## 6 Análise Computacional da Metodologia Proposta

Neste capítulo, resultados computacionais a partir do rastreamento e previsão da série temporal caótica de Mackey-Glass, bem como filtragem e previsão da trajetória de veículos aeroespaciais, incluindo discussões e análise comparativa com abordagens relevantes em (CHEN; YANG; DONG, 2006; DHAHRI; ALIMI, 2006; GU; WANG, 2007; TUNG; GUAN, 2009; CASTRO et al., 2009; ALMARAASHI; JOHN, 2011; LIN; CHANG; LIN, 2013; USLAN; SEKER; JOHN, 2014; GAXIOLA et al., 2016; ZHANG et al., 2018; EYOH et al., 2018; USTUNDAG; KULAGLIC, 2020; SHI et al., 2021; FRASER; ULRICH, 2021), são apresentados.

### 6.1 Filtragem e Rastreamento de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar Evolutivo Aplicado à Série Temporal de Mackey-Glass

Nesta seção, resultados computacionais para filtragem e rastreamento do conjunto de dados referentes à série temporal de Mackey-Glass, são apresentados. A série temporal caótica de Mackey-Glass é dada por (EYOH et al., 2018):

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{0.2x(t - \tau)}{1 + x^{10}(t - \tau)} - 0.1x(t) \quad (6.1)$$

onde  $\tau$  representa um atraso de tempo. Para validação da metodologia proposta, foram realizados três experimentos distintos considerando os seguintes valores de atraso de tempo:  $\tau = 17$ ,  $\tau = 22$  e  $\tau = 30$ , a fim de explorar diferentes níveis de comportamento caótico da série temporal de Mackey-Glass. O valor inicial para a variável  $x(t)$  foi definido como  $x(0) = 1.2$  em todos os experimentos.

#### 6.1.1 Experimento 1: Filtragem e Rastreamento de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar Evolutivo Aplicado à Série Temporal de Mackey-Glass considerando o atraso de tempo $\tau = 17$

A partir da Equação (6.1), um conjunto de dados com comprimento total de 1000 amostras foi obtido por simulação em ambiente computacional, o qual é mostrado na Figura 25, e em formato tridimensional na Figura 26, considerando o tempo de amostragem  $t_s$  de  $1 \times 10^{-3}s$  e o método de integração de Runge-Kutta (ZHENG; ZHANG, 2017).

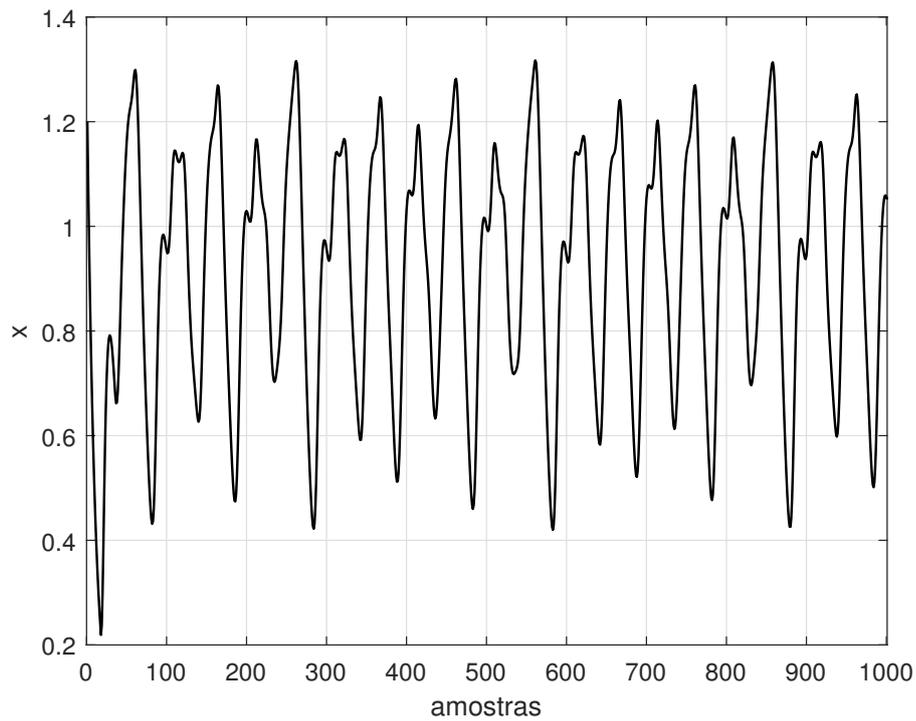


Figura 25 – Dados computacionais referentes à série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando  $\tau = 17$ .

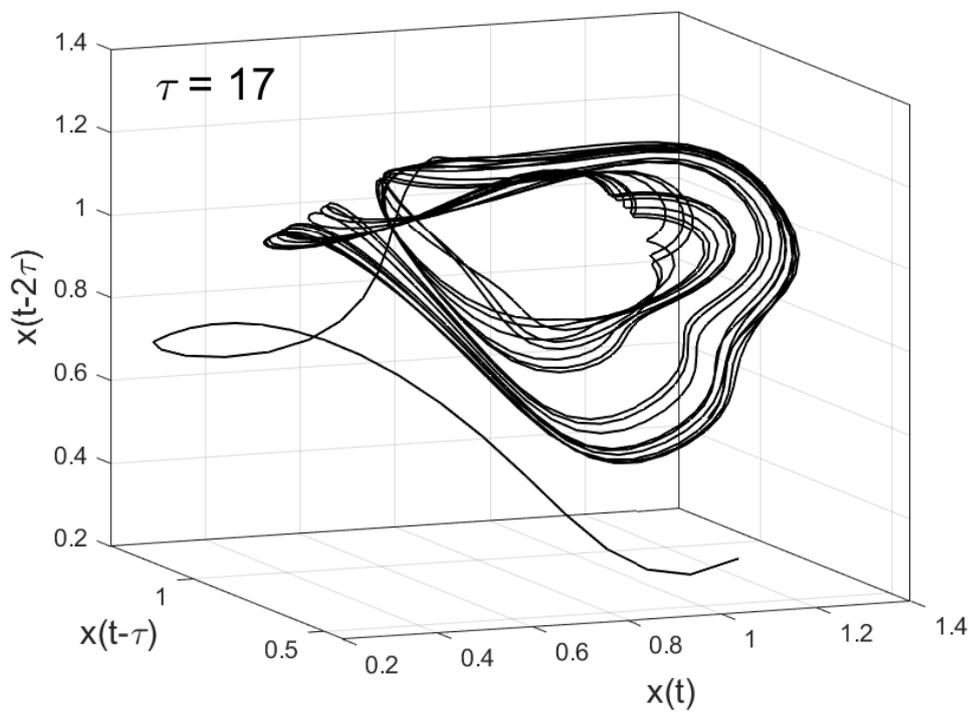


Figura 26 – Dados computacionais referentes à série temporal caótica de Mackey-Glass, exibidos em formato tridimensional, considerando  $\tau = 17$ .

Considerando as primeiras 500 amostras do conjunto de dados referente à série temporal de Mackey-Glass, mostrado na Figura 25, o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, conforme descrito na Equação (5.13), foi inicialmente estimado durante a etapa de treinamento.

A Análise Espectral Singular Multivariável, conforme descrito na Seção 5.1, foi capaz de obter as componentes espectrais relacionados à série temporal caótica de Mackey-Glass. O número de componentes espectrais não-observáveis foi definido de acordo com o critério *Variance Accounted For* (VAF), dentro de um intervalo de 2 a 10 componentes, conforme mostrado na Figura 27. Na Tabela 3 é mostrado a eficiência de diferentes

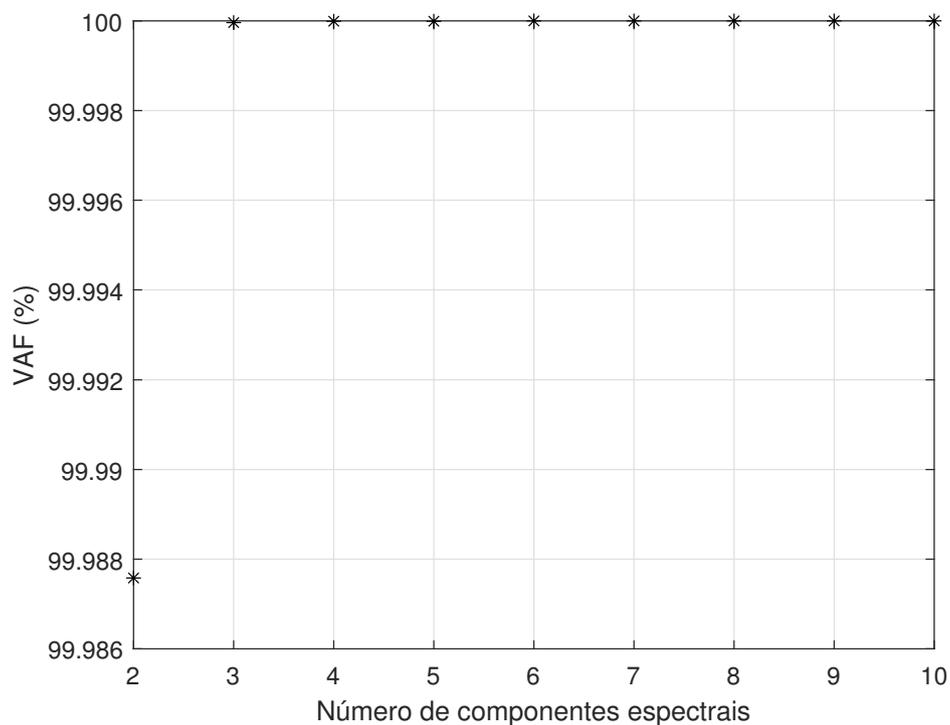


Figura 27 – Eficiência de diferentes números de componentes espectrais não-observáveis para representação do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass, de acordo com o critério VAF.

quantidades de componentes espectrais representado na Figura 27 para representação da série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o critério VAF, as quais estão relacionadas com a capacidade das componentes espectrais em representar o conjunto de dados original. A quantidade de componentes espectrais extraídas a partir do conjunto de dados experimentais influencia diretamente o custo computacional e a eficiência do algoritmo do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo, conforme expresso nas Equações (5.7), (5.8) e (5.40). Portanto, a partir da Figura 27 e da Tabela 3, considerando o balanço custo-benefício para aplicação prática da metodologia proposta nesta tese, o número apropriado de componentes não-observáveis obtido foi  $\xi = 2$ , com valor de VAF de 99.98 % de eficiência para representar o conjunto de dados experimentais e que ao mesmo tempo reduz a carga computacional do algoritmo do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar

evolutivo. As componentes espectrais não-observáveis extraídas da série temporal caótica de Tabela 3 – Eficiência de diferentes quantidades de componentes espectrais não-observáveis para representação da série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o critério VAF.

Número de componentes não-observáveis $\xi$	VAF(%)
2	99.98
3	99.991
4	99.993
5	99.997
6	99.9992
7	99.994
8	99.9997
9	99.9998
10	99.9999

Mackey-Glass são mostradas na Figura 28. Conforme pode ser observado a partir da Figura 28, a componente espectral  $\alpha^1$  possui baixa correlação com o comportamento dinâmico da série temporal caótica de Makey-Glass, enquanto a componente  $\alpha^2$ , mais correlacionada ao conjunto de dados original, foi utilizada para a estimação paramétrica dos submodelos no espaço de estados definidos na proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo proposto. O particionamento dos dados experimentais relacionados às

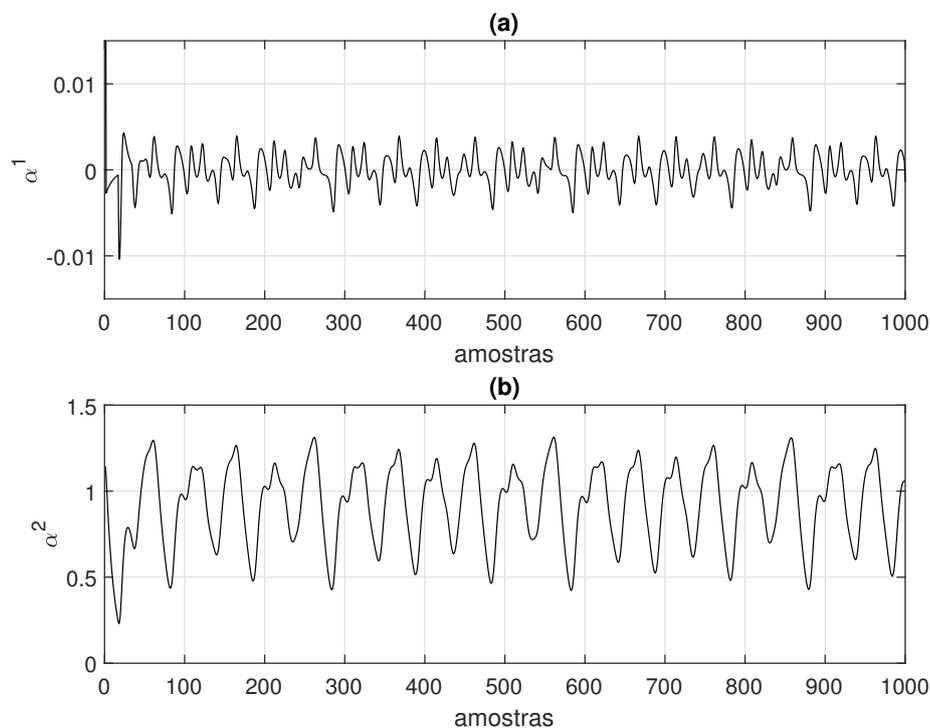


Figura 28 – Componentes espectrais não-observáveis  $\alpha^j | j=1, \dots, 2$  extraídas do conjunto de dados referente à série temporal caótica de Mackey-Glass.

primeiras 500 amostras da série temporal caótica de Mackey-Glass, conforme mostrado

na Figura 25, foi realizado pela formulação *fuzzy* tipo-2 do algoritmo de agrupamento Gustafson-Kessel, conforme descrito em Seção 5.2.1, durante a etapa de treinamento, considerando os seguintes parâmetros:  $L = 3$  (número inicial de regras *fuzzy*), expoente de ponderação intervalar  $\tilde{m} = [1.7 \ 2.2]$  e tolerância  $\mathcal{E} = 10^{-4}$ . As funções de pertinência *fuzzy* tipo-2 intervalares obtidas a partir da etapa de treinamento do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, considerando as primeiras 500 amostras da série temporal caótica de Mackey-Glass, são mostradas na Figura 29. A estimação inicial da proposição do consequente do

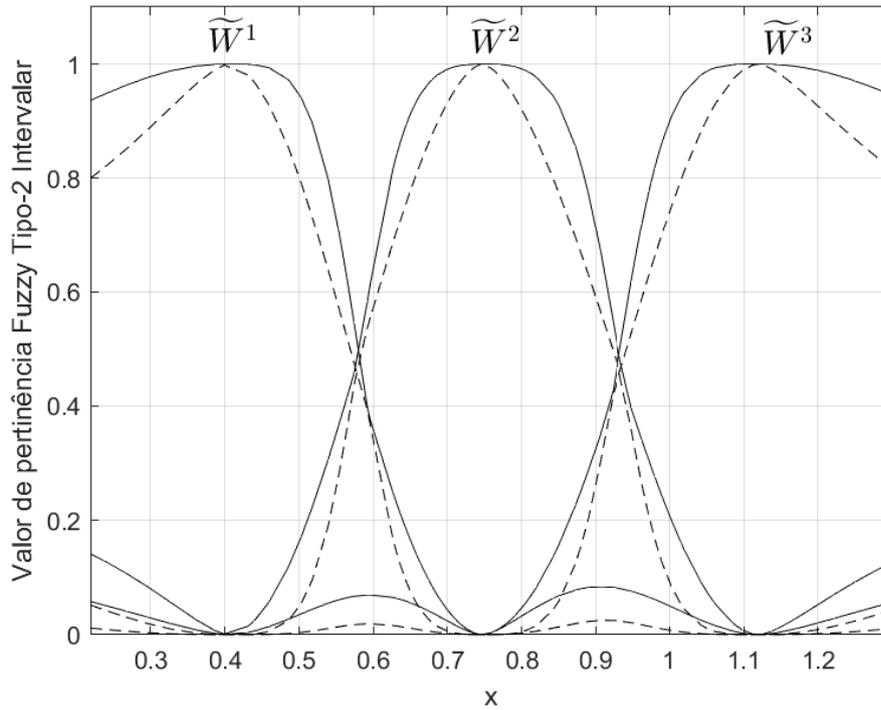


Figura 29 – Funções de pertinência *fuzzy* intervalares resultantes da estimação paramétrica inicial da proposição do antecedente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, com base nas primeiras 500 amostras da série temporal caótica de Mackey-Glass. A linha tracejada corresponde à função de pertinência inferior e a linha sólida corresponde à função de pertinência superior.

filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar foi realizada pelo algoritmo OKID *fuzzy* tipo-2 intervalar, conforme descrito na Seção 5.2.3, considerando os seguintes parâmetros: número de parâmetros de Markov  $q = 1$ , dimensões da matriz de Hankel  $\gamma = 30$  e  $\beta = 30$ .

A partir da amostra 501, as partições do conjunto de dados relacionado à série temporal caótica de Mackey-Glass foram atualizadas pela formulação *fuzzy* tipo-2 proposta para o algoritmo de agrupamento *evolving* Takagi-Sugeno, conforme descrito na Seção 5.2.2, de modo que a proposição do antecedente e o número de regras *fuzzy* pode ser estimado com sucesso a cada instante de tempo  $k$  durante a etapa de atualização do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo. Para a implementação do algoritmo de agrupamento *evolving* Takagi-Sugeno *fuzzy* tipo-2 intervalar, foi adotado o valor de  $\eta = 0,01$  (relacionado à

Condição C). O algoritmo OKID *fuzzy* tipo-2 intervalar foi implementado para atualização recursiva da proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, conforme a Equação (5.13), considerando as partições atualizadas do conjunto de dados como critério de ponderação, bem como as componentes espectrais não-observáveis. A região de confiança, obtida durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, é mostrada na Figura 30, ilustrando a eficiência da metodologia proposta para o rastreamento do conjunto de dados referente à série temporal caótica de Mackey-Glass. O número de regras *fuzzy* variante no tempo do sistema de inferência do filtro de Kalman

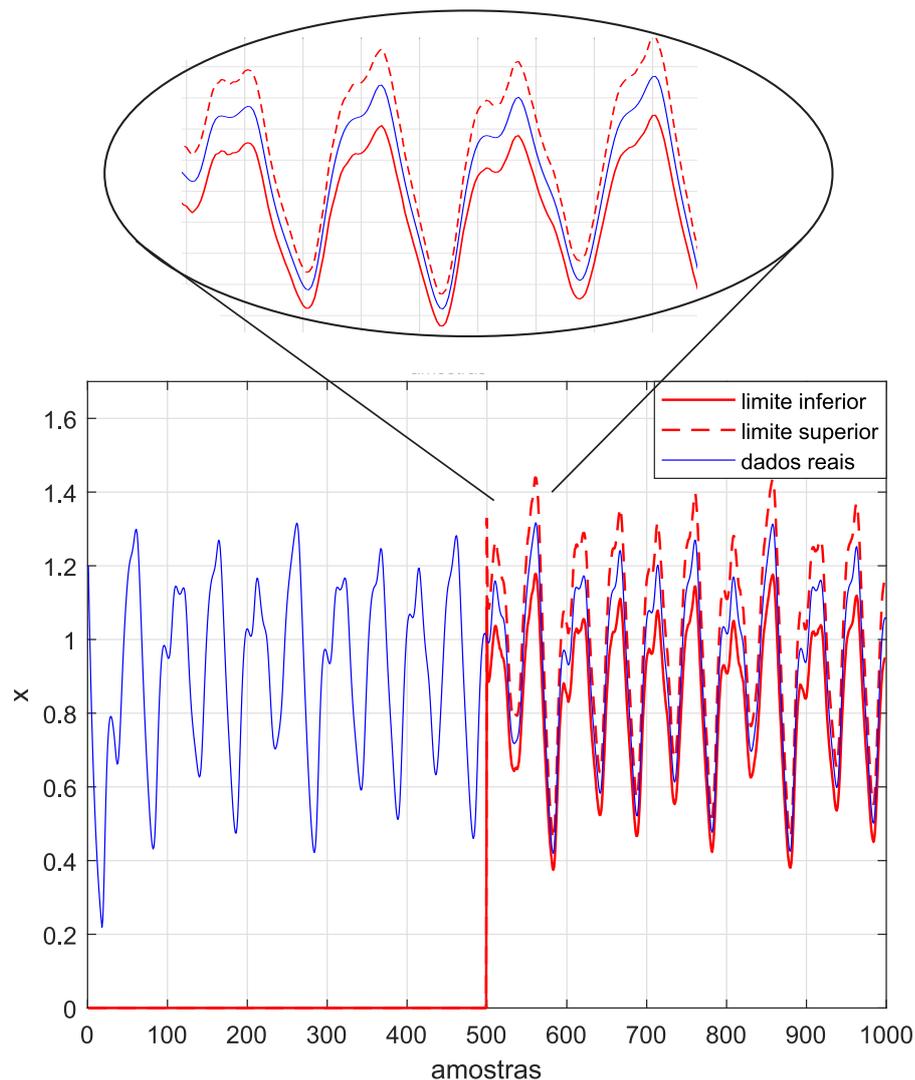


Figura 30 – Região de confiança obtida pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass, durante sua etapa de atualização recursiva, considerando o atraso de tempo  $\tau = 17$ .

*fuzzy* tipo-2 evolutivo, de acordo com as flutuações dinâmicas da série temporal caótica de Mackey-Glass, é ilustrado na Figura 31. Os ganhos de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalares estimados  $\mathbf{K}^i |_{i=1, \dots, 10}$ , durante as etapas de treinamento e recursiva do filtro de Kalman

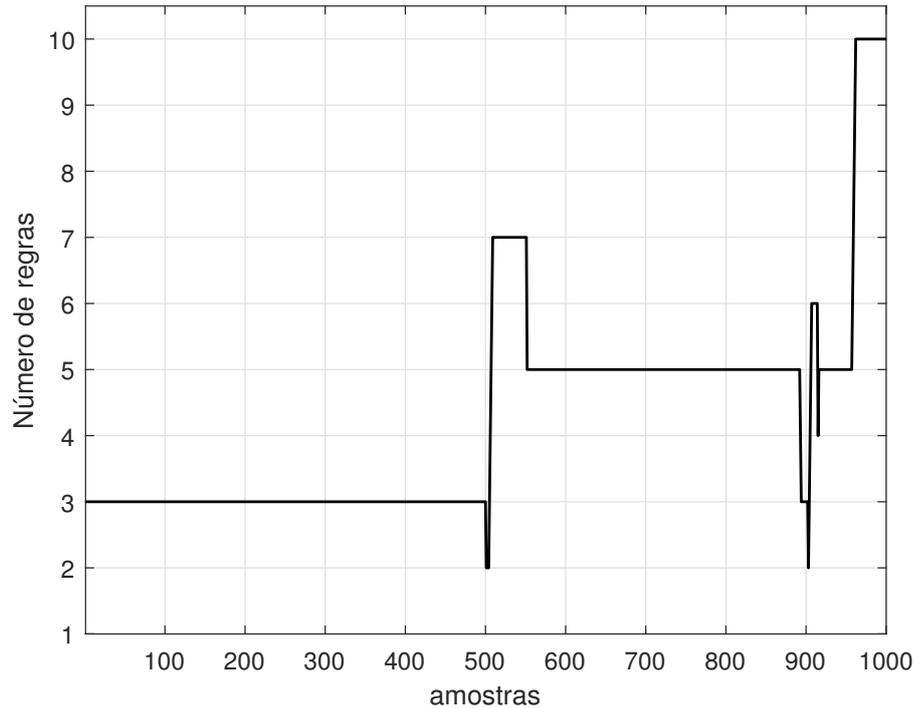


Figura 31 – Comportamento variável no tempo do número de regras *fuzzy* para o rastreamento dinâmico do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass.

*fuzzy* tipo-2 evolutivo para o rastreamento da série temporal caótica de Mackey-Glass, é mostrado na Figura 32. Uma vez que nesta aplicação não há a presença de variáveis de entrada e o objetivo é realizar o rastreamento e previsão dos dados da série temporal de Mackey-Glass, a estimação das matrizes *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\tilde{\mathbf{A}}^i$  e  $\tilde{\mathbf{C}}^i$ , com  $i = 1, \dots, 10$ , as quais compõem os submodelos lineares na proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, é mostrada nas Figuras 33 e 34, respectivamente. Os graus de ativação superior e inferior das regras *fuzzy* do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, durante a etapa de atualização recursiva, para rastreamento da série temporal caótica de Mackey-Glass, são mostrados na Figura 35.

### 6.1.2 Experimento 2: Filtragem e Rastreamento de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar Evolutivo Aplicado à Série Temporal de Mackey-Glass considerando o atraso de tempo $\tau = 22$

O conjunto de dados com comprimento total de 1000 amostras, obtidos a partir da Equação 6.1, considerando o atraso de tempo  $\tau = 22$  e o tempo de amostragem  $t_s = 1 \times 10^{-3}s$ , é mostrado na Figura 36 e em formato tridimensional na Figura 37. Considerando as primeiras 500 amostras do conjunto de dados referente à série temporal de Mackey-Glass, mostrado na Figura 36, o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, conforme

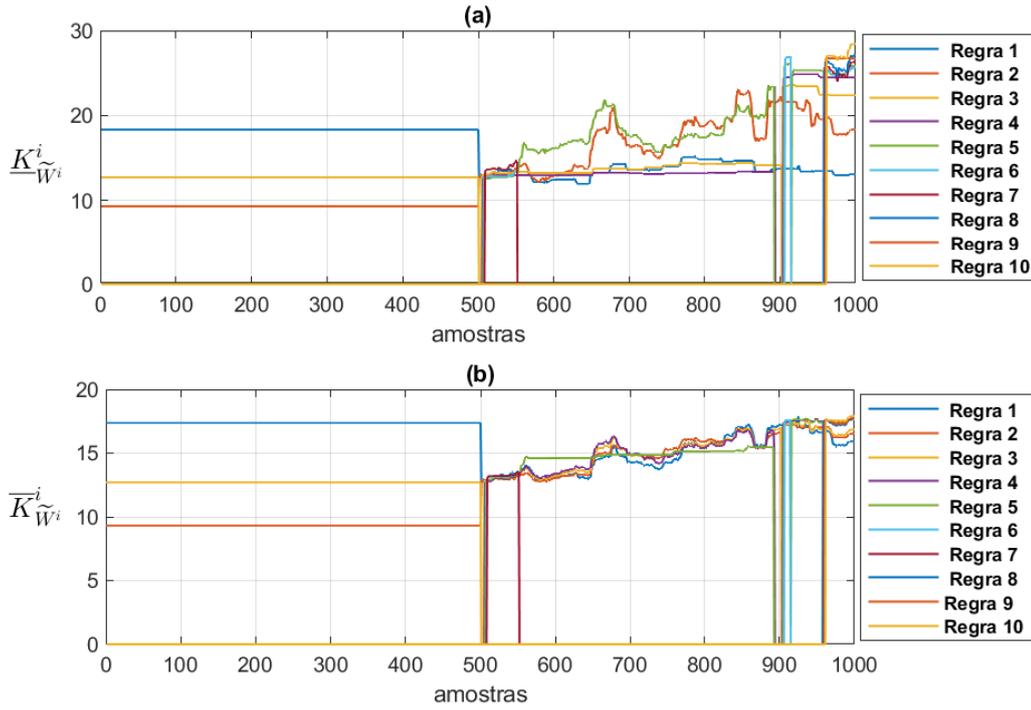


Figura 32 – Ganhos de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\widetilde{\mathbf{K}}_{\widetilde{W}_i}^i |_{i=1,\dots,10}$ , durante as etapas de treinamento e de atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal de Mackey-Glass: (a) Ganho de Kalman inferior  $\underline{K}_{\widetilde{W}_i}^i$ , (b) Ganho de Kalman superior  $\overline{K}_{\widetilde{W}_i}^i$ .

descrito na Equação (5.13), foi inicialmente estimado durante a etapa de treinamento. A Análise Espectral Singular Multivariável, conforme descrito na Seção 5.1, foi capaz de obter as componentes espectrais relacionados à série temporal caótica de Mackey-Glass. O número apropriado de componentes espectrais não-observáveis a serem extraídas do conjunto de dados foi estimado como  $\xi = 2$ , conforme critério baseado na métrica VAF descrito na seção 6.1, para os novos dados da série temporal de Mackey-Glass considerando  $\tau = 22$ . As componentes espectrais não-observáveis extraídas da série temporal caótica de Mackey-Glass são mostradas na Figura 38.

O particionamento dos dados experimentais relacionados às primeiras 500 amostras da série temporal caótica de Mackey-Glass, conforme mostrado na Figura 36, foi realizado pela formulação *fuzzy* tipo-2 do algoritmo de agrupamento Gustafson-Kessel, conforme descrito em Seção 5.2.1, durante a etapa de treinamento, considerando os seguintes parâmetros:  $L = 3$  (número inicial de regras *fuzzy*), expoente de ponderação intervalar  $\widetilde{m} = [1.7 \ 2.2]$  e tolerância  $\mathcal{E} = 10^{-4}$ . A estimação inicial da proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar foi realizada pelo algoritmo OKID *fuzzy* tipo-2 intervalar, conforme descrito na Seção 5.2.3, considerando os seguintes parâmetros: número de parâmetros de Markov  $q = 1$ , dimensões da matriz de Hankel  $\gamma = 30$  e  $\beta = 30$ .

A partir da amostra 501, as partições do conjunto de dados relacionado à série

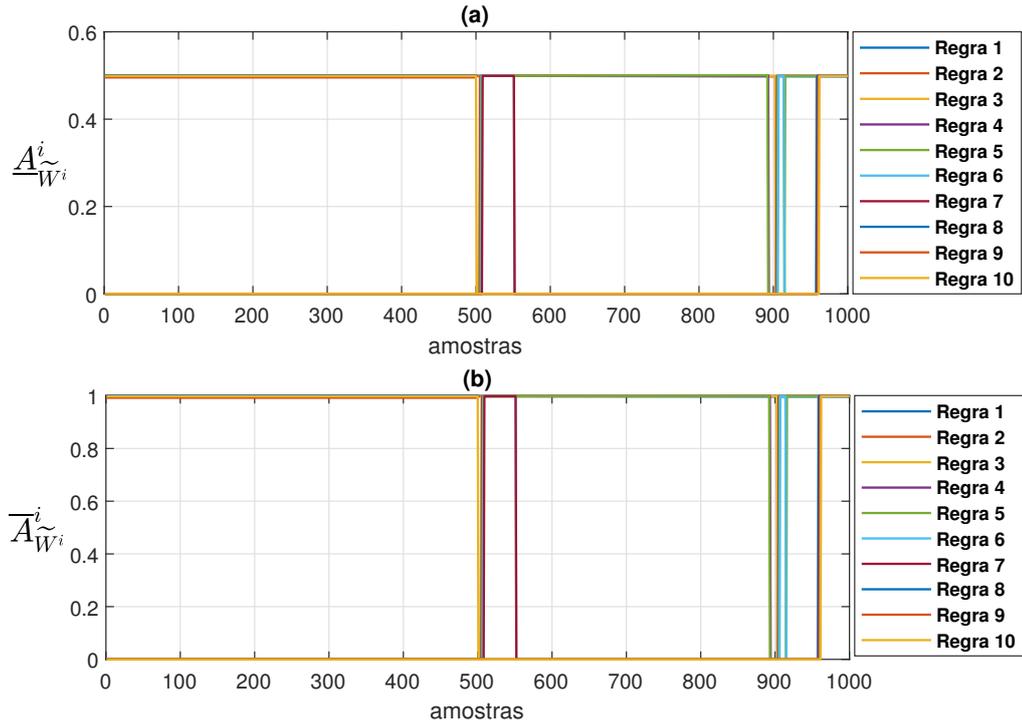


Figura 33 – Estimação da matriz de estados intervalar  $\tilde{\mathbf{A}}_{\tilde{W}^i}^i |_{i=1,\dots,10}$  para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal de Mackey-Glass: (a) Limite inferior  $\underline{\mathbf{A}}_{\tilde{W}^i}^i$ , (b) Limite superior  $\overline{\mathbf{A}}_{\tilde{W}^i}^i$ .

temporal caótica de Mackey-Glass foram atualizadas pela formulação *fuzzy* tipo-2 proposta para o algoritmo de agrupamento *evolving* Takagi-Sugeno, no qual foi adotado o valor de  $\eta = 0,01$  (relacionado à Condição C). O algoritmo OKID *fuzzy* tipo-2 intervalar foi implementado para atualização recursiva da proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, conforme a Equação (5.13), considerando as partições atualizadas do conjunto de dados como critério de ponderação, bem como as componentes espectrais não-observáveis. A região de confiança, obtida durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, é mostrada na Figura 39, ilustrando a eficiência da metodologia proposta para o rastreamento do conjunto de dados referente à série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando um atraso de tempo de  $\tau = 22$ . O número de regras *fuzzy* variante no tempo do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, de acordo com as flutuações dinâmicas da série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo  $\tau = 22$ , é ilustrado na Figura 40. Os ganhos de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalares estimados  $\mathbf{K}^i |_{i=1,\dots,7}$ , durante as etapas de treinamento e recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo para o rastreamento da série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo  $\tau = 22$ , é mostrado na Figura 41. Uma vez que nesta aplicação não há a presença de variáveis de entrada e o objetivo é realizar o rastreamento e previsão dos dados da série temporal de Mackey-Glass, a estimação das matrizes *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\tilde{\mathbf{A}}^i$  e  $\tilde{\mathbf{C}}^i$ , com  $i = 1, \dots, 7$ , as quais compõe

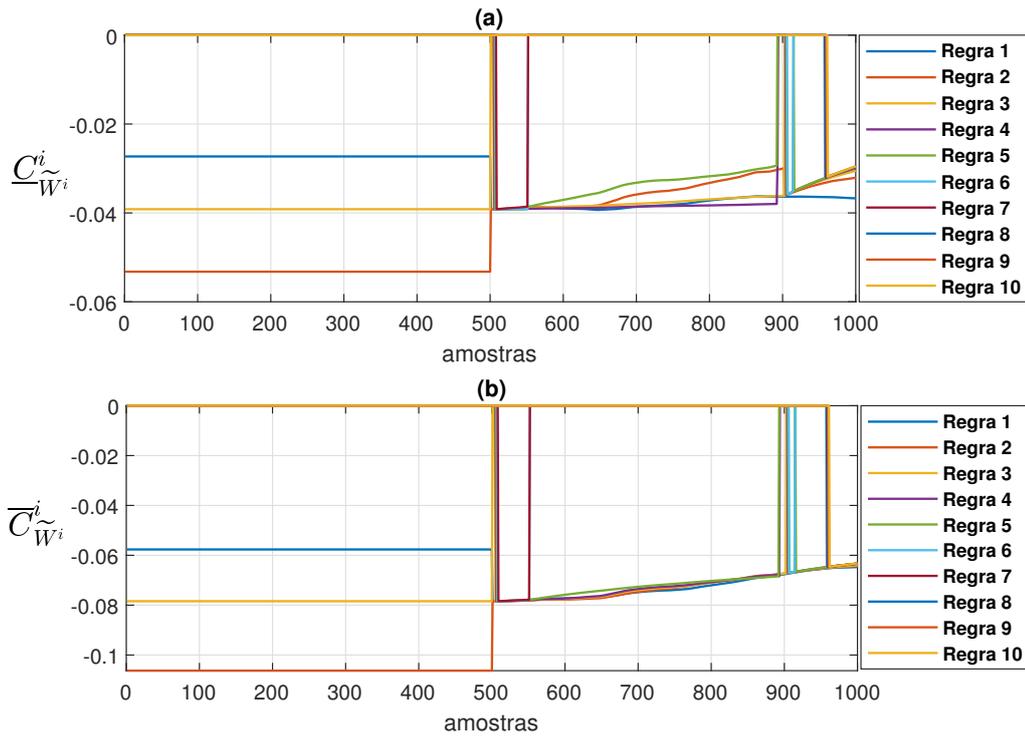


Figura 34 – Estimação da matriz de saída intervalar  $\tilde{C}_{W_i}^i |_{i=1, \dots, 10}$  para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal de Mackey-Glass: (a) Limite inferior  $\underline{C}_{W_i}^i$ , (b) Limite superior  $\overline{C}_{W_i}^i$ .

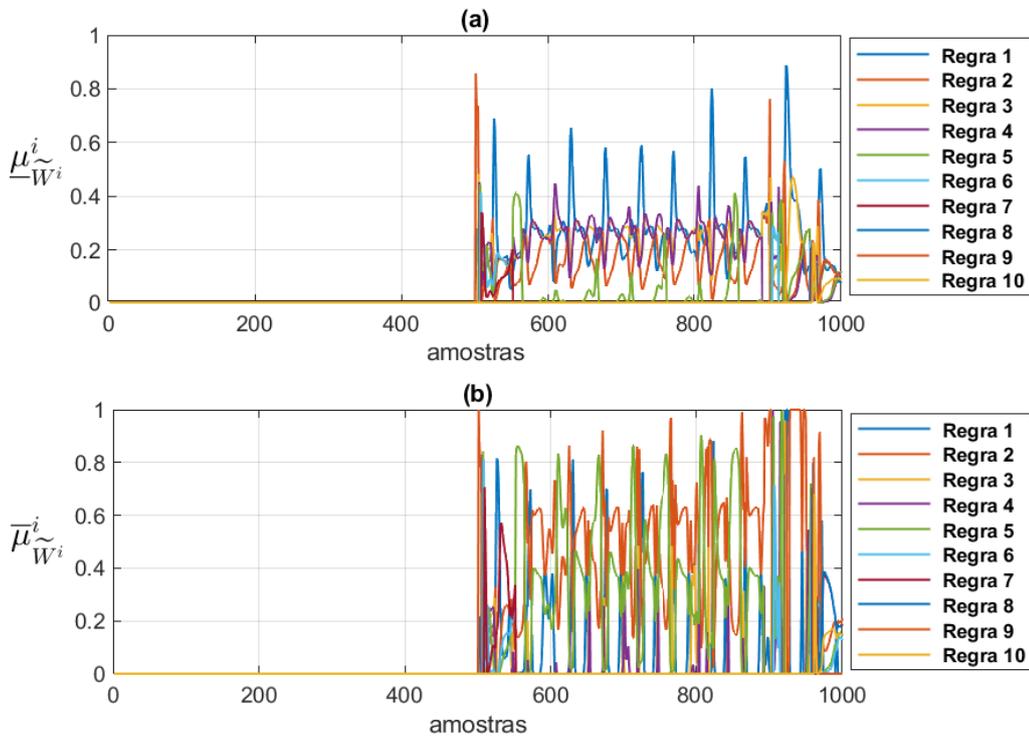


Figura 35 – Graus de ativação *fuzzy* normalizados instantâneos para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass: (a) Graus de ativação inferiores, (b) Graus de ativação superiores.

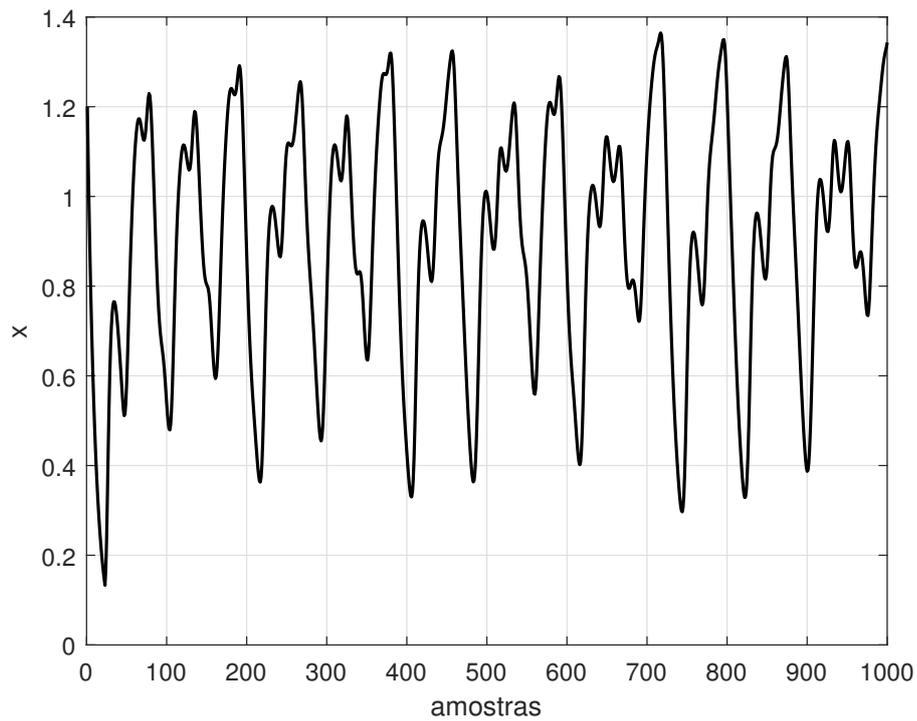


Figura 36 – Dados computacionais referentes à série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando  $\tau = 22$ .

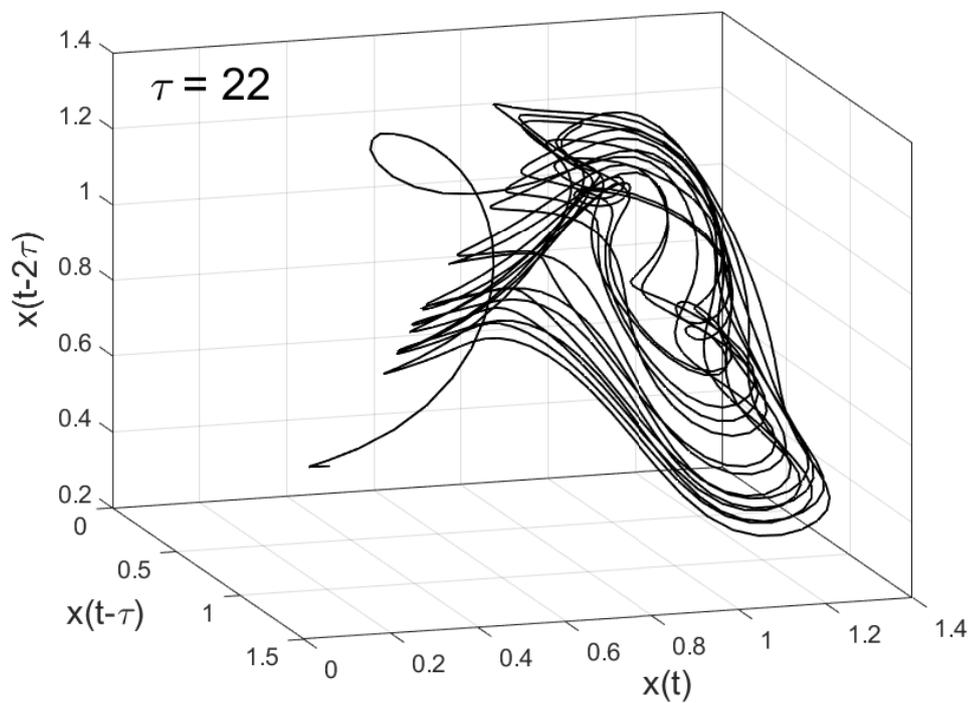


Figura 37 – Dados computacionais referentes à série temporal caótica de Mackey-Glass, exibidos em formato tridimensional, considerando  $\tau = 22$ .

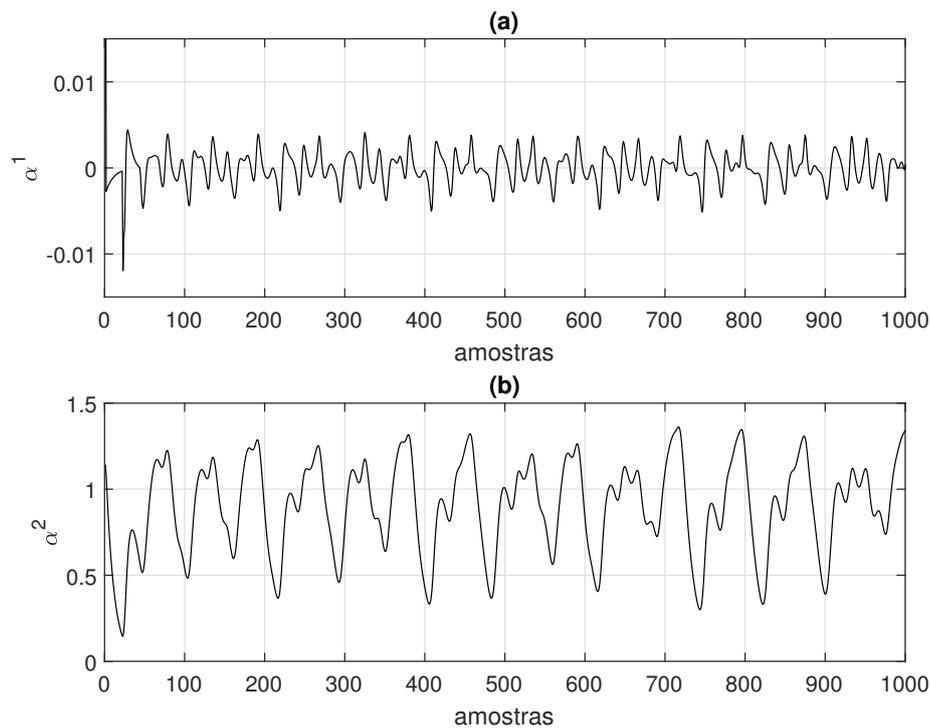


Figura 38 – Componentes espectrais não-observáveis  $\alpha^j |_{j=1, \dots, 2}$  extraídas do conjunto de dados referente à série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo  $\tau = 22$ .

os submodelos lineares na proposição do conseqüente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, é mostrada nas Figuras 42 e 43, respectivamente. Os graus de ativação superior e inferior das regras *fuzzy* do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, durante a etapa de atualização recursiva, para rastreamento da série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo  $\tau = 22$ , são mostrados na Figura 44.

### 6.1.3 Experimento 3: Filtragem e Rastreamento de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar Evolutivo Aplicado à Série Temporal de Mackey-Glass considerando o atraso de tempo $\tau = 30$

O conjunto de dados com comprimento total de 1000 amostras, obtidos a partir da Equação 6.1, considerando o atraso de tempo  $\tau = 30$  e o tempo de amostragem  $t_s = 1 \times 10^{-3}s$ , é mostrado na Figura 45 e em formato tridimensional na Figura 46. Considerando as primeiras 500 amostras do conjunto de dados referente à série temporal de Mackey-Glass, mostrado na Figura 45, o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, conforme descrito na Equação (5.13), foi inicialmente estimado durante a etapa de treinamento. A Análise Espectral Singular Multivariável, conforme descrito na Seção 5.1, foi capaz de obter as componentes espectrais relacionados à série temporal caótica de Mackey-Glass. O número apropriado de componentes espectrais não-observáveis a serem extraídas do

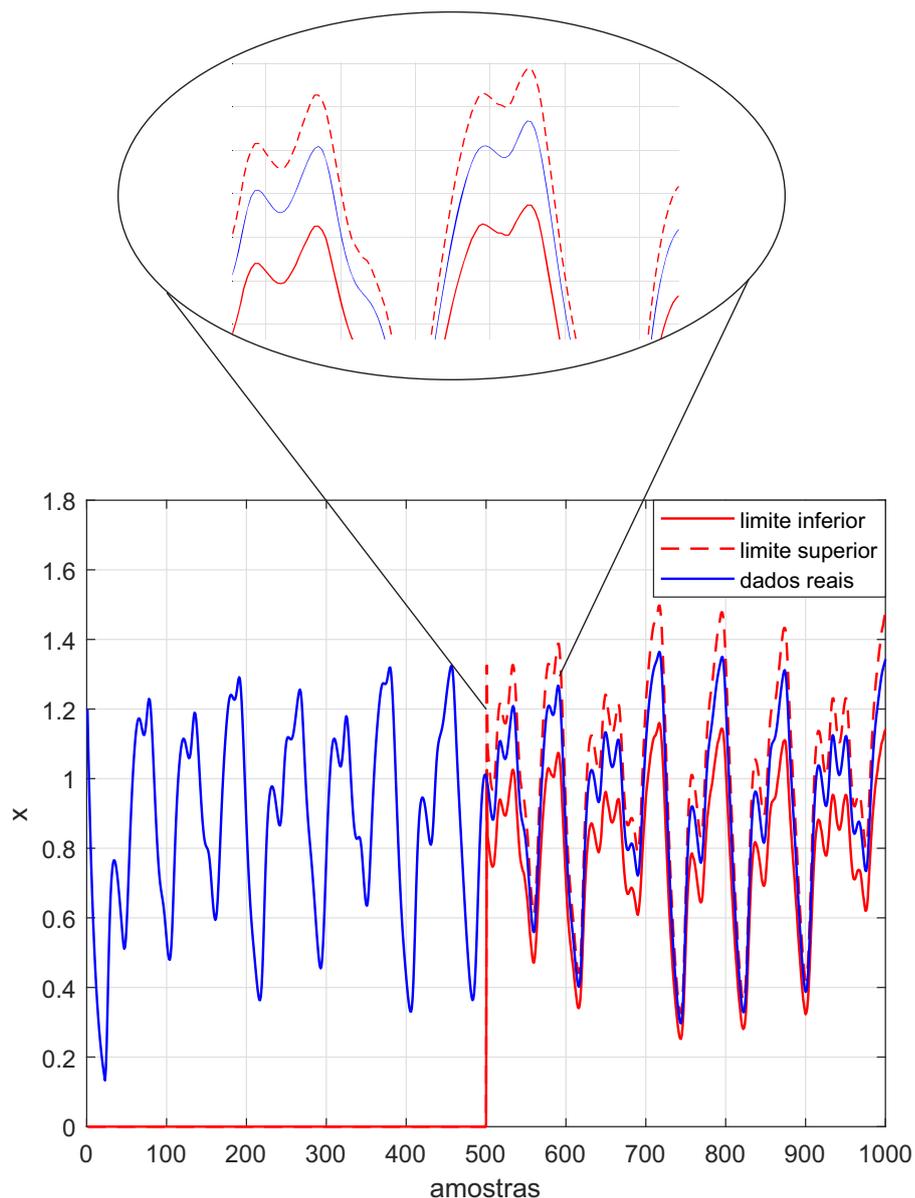


Figura 39 – Região de confiança obtida pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass, durante sua etapa de atualização recursiva, considerando o atraso de tempo  $\tau = 22$ .

conjunto de dados foi estimado como  $\xi = 2$ , conforme critério baseado na métrica VAF descrito na seção 6.1, para os novos dados da série temporal de Mackey-Glass considerando  $\tau = 30$ . As componentes espectrais não-observáveis extraídas da série temporal caótica de Mackey-Glass são mostradas na Figura 47.

O particionamento dos dados experimentais relacionados às primeiras 500 amostras da série temporal caótica de Mackey-Glass, conforme mostrado na Figura 45, foi realizado pela formulação *fuzzy* tipo-2 do algoritmo de agrupamento Gustafson-Kessel, conforme descrito em Seção 5.2.1, durante a etapa de treinamento, considerando os seguintes parâmetros:  $L = 3$  (número inicial de regras *fuzzy*), expoente de ponderação intervalar

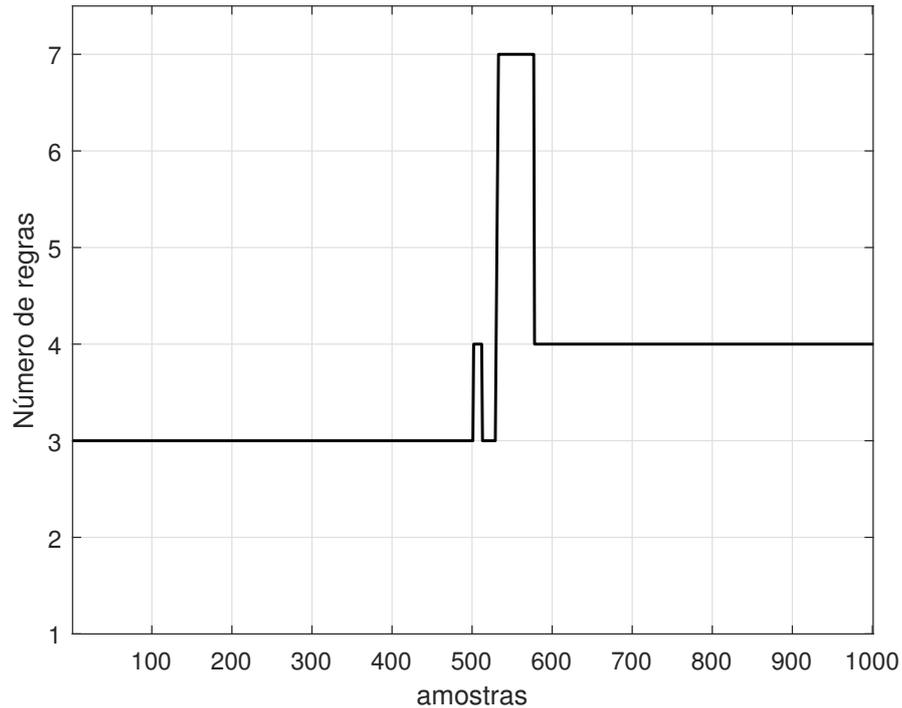


Figura 40 – Comportamento variável no tempo do número de regras *fuzzy* para o rastreamento dinâmico do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo  $\tau = 22$ .

$\tilde{m} = [1.7 \ 2.2]$  e tolerância  $\mathcal{E} = 10^{-4}$ . A estimação inicial da proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar foi realizada pelo algoritmo OKID *fuzzy* tipo-2 intervalar, conforme descrito na Seção 5.2.3, considerando os seguintes parâmetros: número de parâmetros de Markov  $q = 1$ , dimensões da matriz de Hankel  $\gamma = 30$  e  $\beta = 30$ .

A partir da amostra 501, as partições do conjunto de dados relacionado à série temporal caótica de Mackey-Glass foram atualizadas pela formulação *fuzzy* tipo-2 proposta para o algoritmo de agrupamento *evolving* Takagi-Sugeno, no qual foi adotado o valor de  $\eta = 0,01$  (relacionado à Condição C). O algoritmo OKID *fuzzy* tipo-2 intervalar foi implementado para atualização recursiva da proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, conforme a Equação (5.13), considerando as partições atualizadas do conjunto de dados como critério de ponderação, bem como as componentes espectrais não-observáveis. A região de confiança, obtida durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, é mostrada na Figura 48, ilustrando a eficiência da metodologia proposta para o rastreamento do conjunto de dados referente à série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando um atraso de tempo de  $\tau = 30$ . O número de regras *fuzzy* variante no tempo do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, de acordo com as flutuações dinâmicas da série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo  $\tau = 30$ , é ilustrado na Figura 49. Os ganhos de

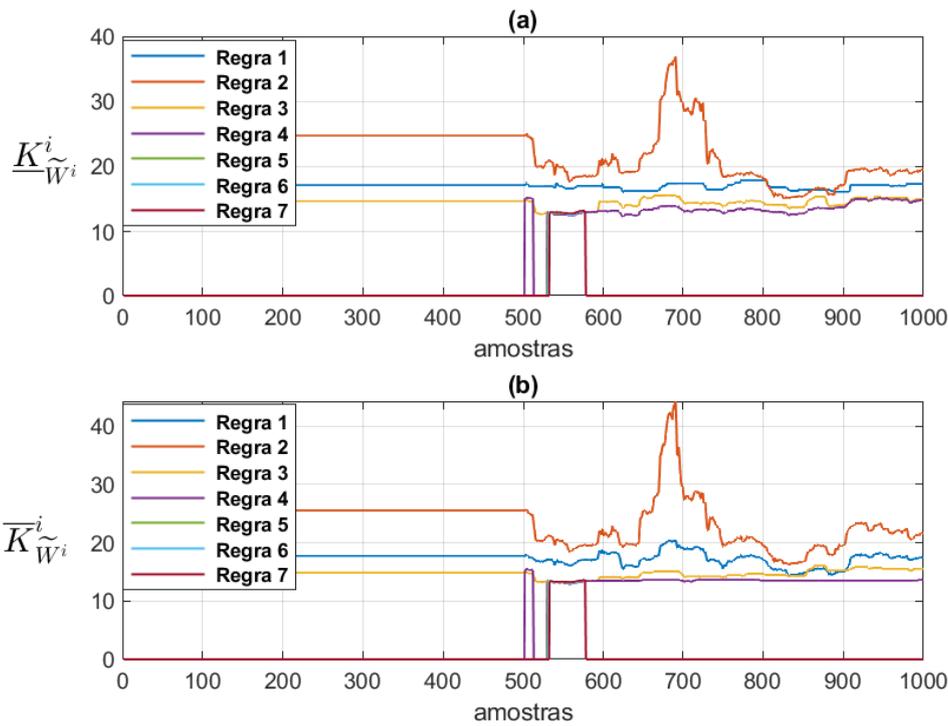


Figura 41 – Ganhos de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\mathbf{K}_{\tilde{W}^i}^i |^{i=1,\dots,7}$ , durante as etapas de treinamento e de atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo  $\tau = 22$ : (a) Ganho de Kalman inferior  $\underline{K}_{\tilde{W}^i}^i$ , (b) Ganho de Kalman superior  $\overline{K}_{\tilde{W}^i}^i$ .

Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalares estimados  $\mathbf{K}^i |^{i=1,\dots,8}$ , durante as etapas de treinamento e recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo para o rastreamento da série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo  $\tau = 30$ , é mostrado na Figura 50. Uma vez que nesta aplicação não há a presença de variáveis de entrada e o objetivo é realizar o rastreamento e previsão dos dados da série temporal de Mackey-Glass, a estimação das matrizes *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\tilde{\mathbf{A}}^i$  e  $\tilde{\mathbf{C}}^i$ , com  $i = 1, \dots, 8$ , as quais compõe os submodelos lineares na proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, é mostrada nas Figuras 51 e 52, respectivamente. Os graus de ativação superior e inferior das regras *fuzzy* do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, durante a etapa de atualização recursiva, para rastreamento da série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo  $\tau = 30$ , são mostrados na Figura 53.

#### 6.1.4 Análise Comparativa e Discussões

Nesta seção, uma discussão mais detalhada sobre os resultados apresentados na Seção 6.1, para o rastreamento da série temporal caótica de Mackey-Glass, de acordo com a análise comparativa da metodologia proposta com as abordagens em (CHEN; YANG; DONG, 2006; DHAHRI; ALIM, 2006; GU; WANG, 2007; TUNG; GUAN, 2009; CASTRO

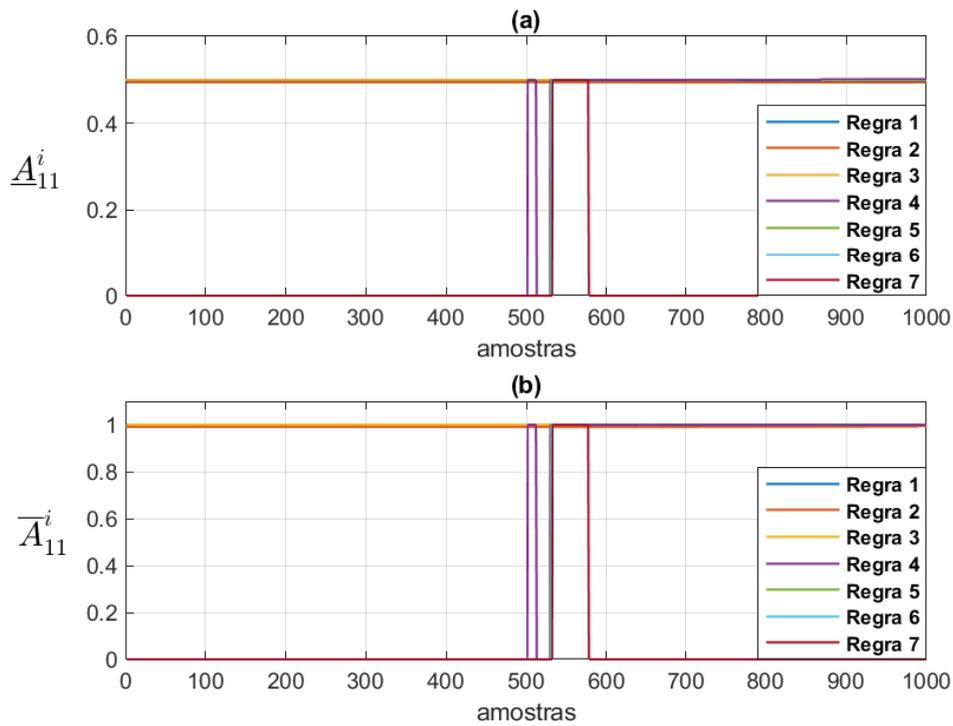


Figura 42 – Estimação da matriz de estados intervalar  $\widetilde{\mathbf{A}}_{\widetilde{W}^i}^i |_{i=1,\dots,7}$  para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo  $\tau = 22$ : (a) Limite inferior  $\underline{\mathbf{A}}_{\widetilde{W}^i}^i$ , (b) Limite superior  $\overline{\mathbf{A}}_{\widetilde{W}^i}^i$ .

et al., 2009; ALMARAASHI; JOHN, 2011; LIN; CHANG; LIN, 2013; USLAN; SEKER; JOHN, 2014; GAXIOLA et al., 2016; ZHANG et al., 2018; EYOH et al., 2018; USTUNDAG; KULAGLIC, 2020; SHI et al., 2021; BAO et al., 2018), é apresentada, considerando a métrica RMSE (*Root Mean Square Error*), a qual é dada por:

$$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(erro)^2}{N}} \quad (6.2)$$

onde  $N$  é o comprimento total do conjunto de dados. Uma vez que a estimativa realizada pela metodologia proposta é intervalar, a variável “erro” da Eq. (6.2) é obtido fazendo-se as seguintes considerações:

- Se  $y_i \in [\underline{y}_i, \overline{y}_i]$ , isto é, caso o valor verdadeiro  $y_i$  esteja contido dentro da região intervalar estimada pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo proposto, é considerado um erro de estimação nulo, isto é  $erro = 0$ ;
- Se  $y_i \notin [\underline{y}_i, \overline{y}_i]$ , isto é, caso o valor verdadeiro  $y_i$  não esteja contido dentro da região intervalar estimada pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo proposto, o erro de estimação é obtido como segue:

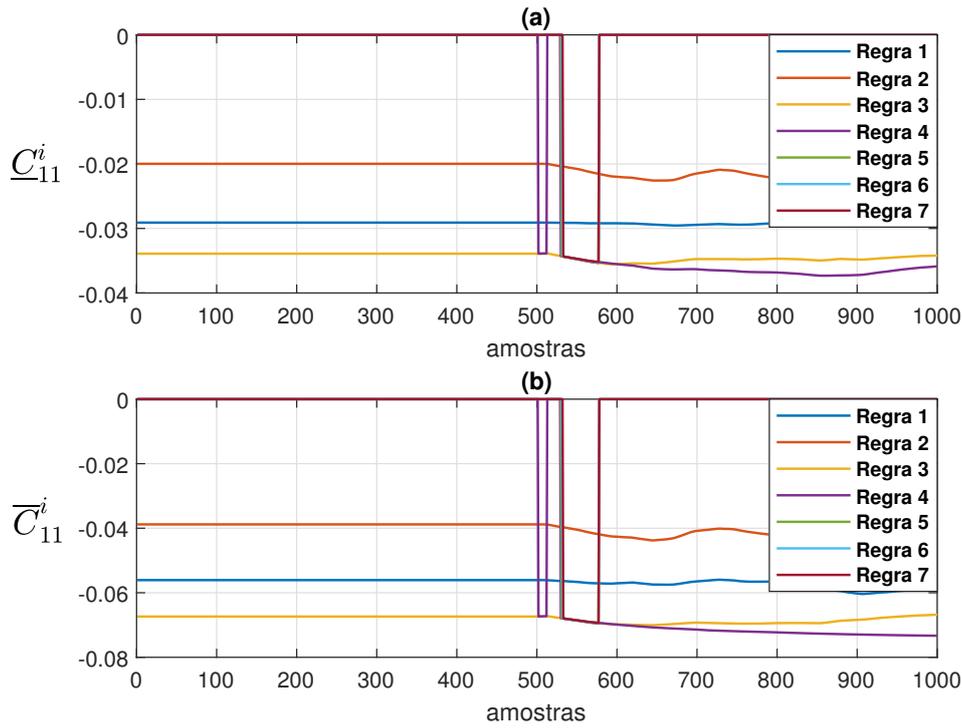


Figura 43 – Estimação da matriz de saída intervalar  $\tilde{C}_{\tilde{W}i}^i |^{i=1,\dots,7}$  para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo  $\tau = 22$ : (a) Limite inferior  $\underline{C}_{\tilde{W}i}^i$ , (b) Limite superior  $\overline{C}_{\tilde{W}i}^i$ .

$$erro = \min \left[ \left( \underline{y}_i - y_i \right), \left( \overline{y}_i - y_i \right) \right] \quad (6.3)$$

Neste último caso, o valor estimado para  $y_i$  é considerado como o valor mais próximo deste entre os valores de  $\underline{y}_i$  e  $\overline{y}_i$ .

A eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, considerando o atraso de tempo  $\tau = 17$ , de acordo com a formulação teórica descrita na Seção 5, para rastrear a série temporal caótica Mackey-Glass, comparada com as abordagens em (CHEN; YANG; DONG, 2006; DHAHRI; ALIM, 2006; GU; WANG, 2007; TUNG; GUAN, 2009; CASTRO et al., 2009; ALMARAASHI; JOHN, 2011; LIN; CHANG; LIN, 2013; USLAN; SEKER; JOHN, 2014; GAXIOLA et al., 2016; ZHANG et al., 2018; EYOH et al., 2018; USTUNDAG; KULAGLIC, 2020; SHI et al., 2021; BAO et al., 2018), considerando a métrica RMSE, descrita na Eq. (6.2), é mostrado na Tabela 4. Conforme pode ser visto, de acordo com os resultados apresentados na Tabela 4, o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo proposto apresenta melhor desempenho preditivo embora algumas abordagens apresentem resultados competitivos em relação à metodologia proposta, cujos resultados são brevemente discutidos a seguir.

A abordagem em (EYOH et al., 2018) é baseada em um sistema *fuzzy* intuicionista tipo-2 cujas proposições do antecedente e consequente são estimadas pelos métodos de

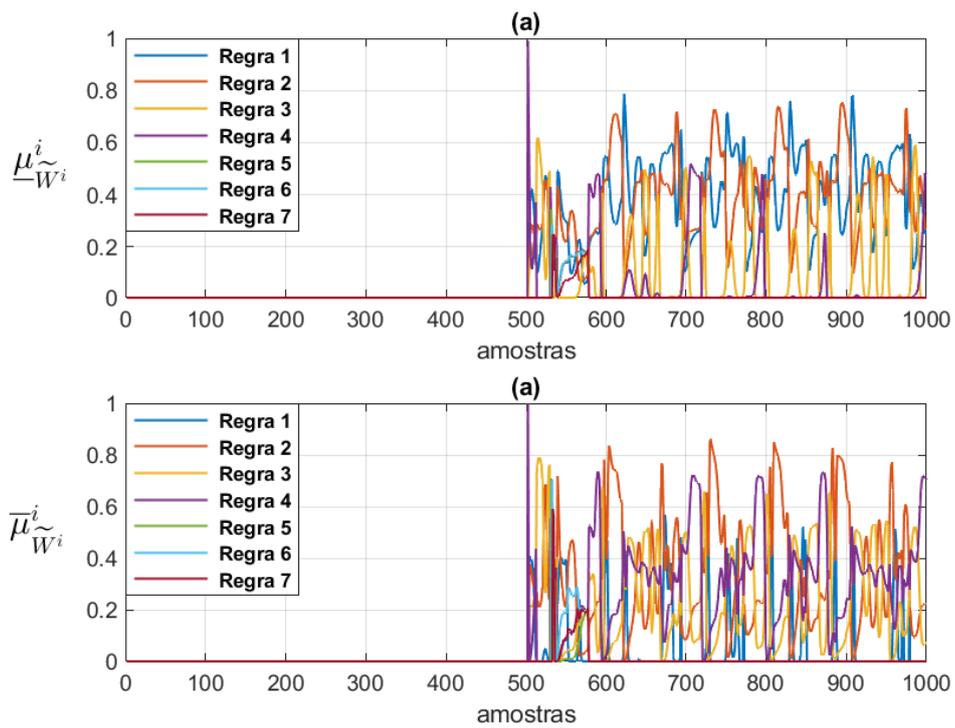


Figura 44 – Graus de ativação *fuzzy* normalizados instantâneos para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo  $\tau = 22$ : (a) Graus de ativação inferiores, (b) Graus de ativação superiores.

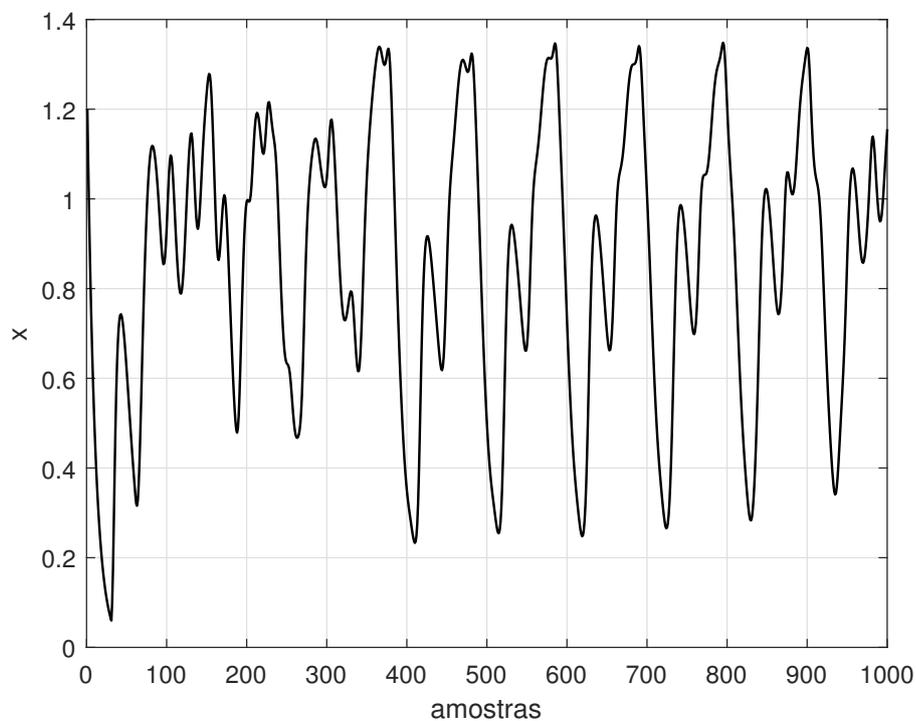


Figura 45 – Dados computacionais referentes à série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando  $\tau = 30$ .

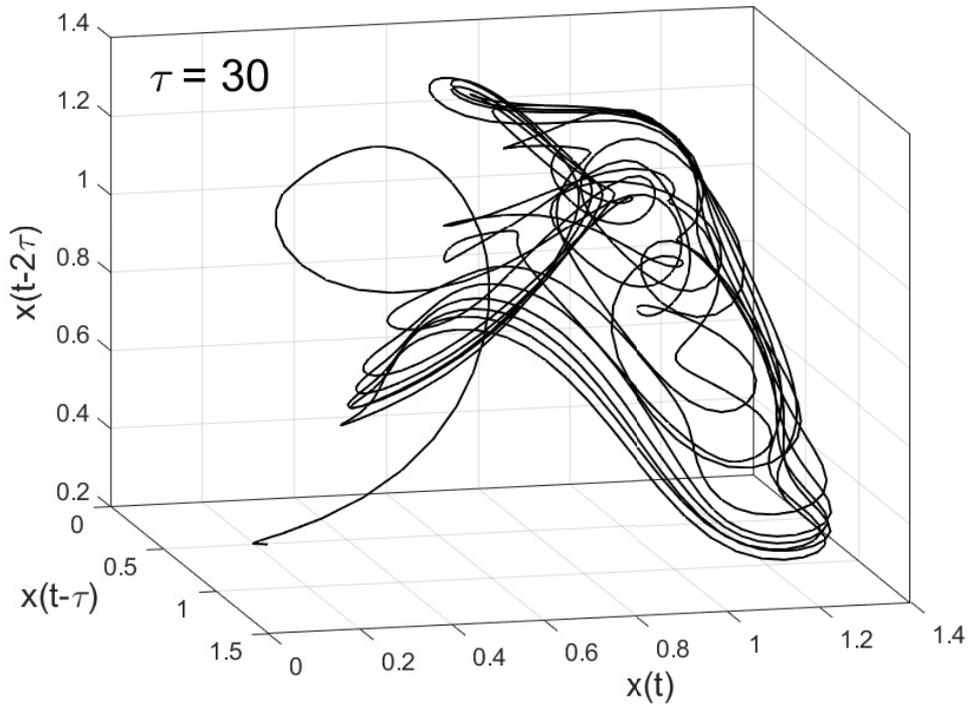


Figura 46 – Dados computacionais referentes à série temporal caótica de Mackey-Glass, exibidos em formato tridimensional, considerando  $\tau = 30$ .

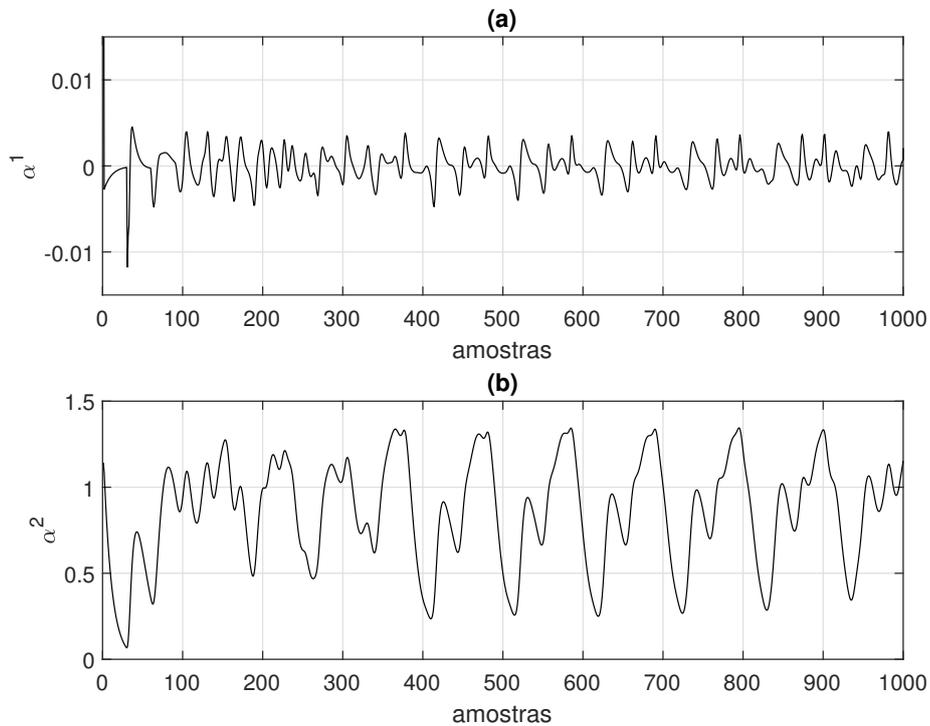


Figura 47 – Componentes espectrais não-observáveis  $\alpha^j |_{j=1, \dots, 2}$  extraídas do conjunto de dados referente à série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo  $\tau = 30$ .

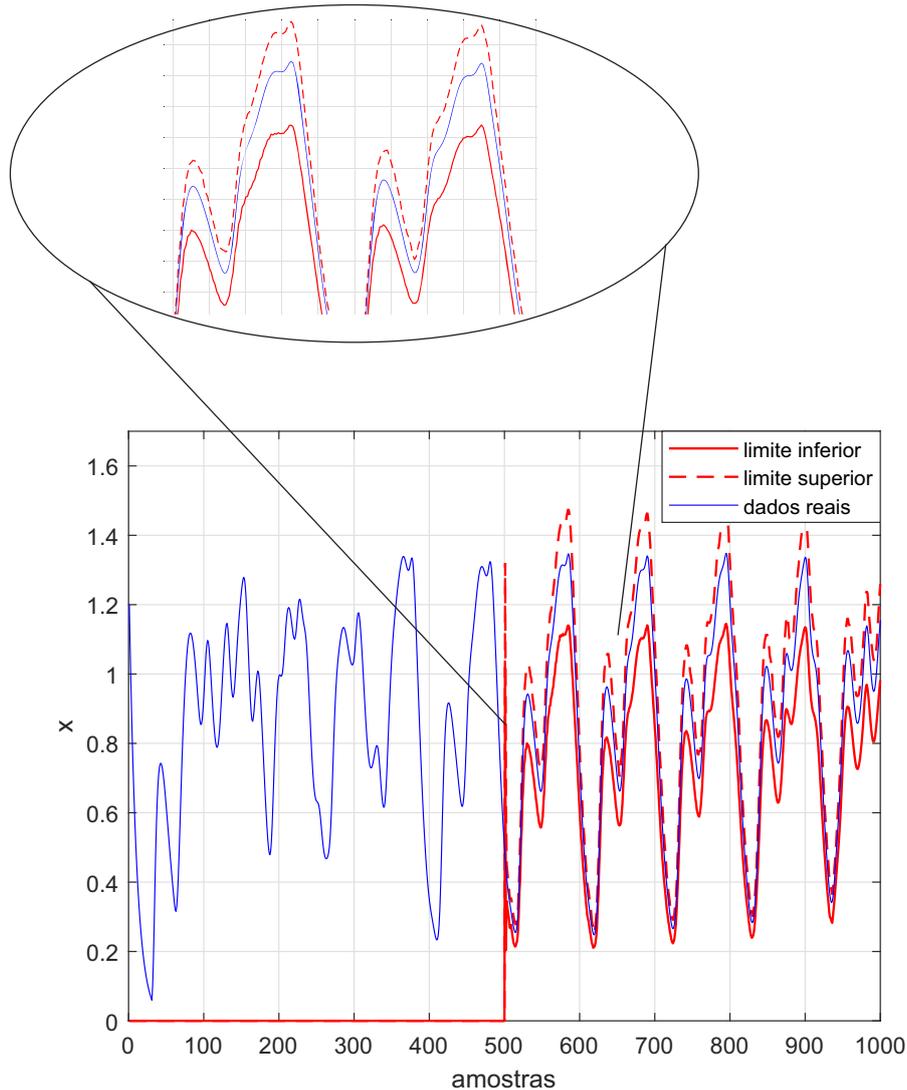


Figura 48 – Região de confiança obtida pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass, durante sua etapa de atualização recursiva, considerando o atraso de tempo  $\tau = 30$ .

gradiente descendente (GD) e filtro de Kalman estendido desacoplado (DEKF), respectivamente. Embora a abordagem em (EYOH et al., 2018) utilize sistemas *fuzzy* tipo-2 para o processamento da série temporal caótica de Mackey-Glass, ela apresenta resultados inferiores em comparação com a metodologia proposta por não considerar a dinâmica variável no tempo do conjunto de dados. Por outro lado, o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo proposto apresenta melhor desempenho devido ao seu mecanismo de parametrização evolutivo para rastrear o conjunto de dados. A abordagem em (CHEN; YANG; DONG, 2006) é baseada em um modelo de Rede Neural Local Linear *Wavelet* (LLWNN) cujo treinamento é baseado em otimização por enxame de partículas (PSO) e descida de gradiente (GD). Conforme pode ser visto, na Tabela 4, a abordagem em (CHEN; YANG; DONG, 2006) apresenta desempenho satisfatório uma vez que as redes neurais têm uma forte capacidade de aproximar quaisquer funções desconhecidas de sistemas dinâmicos.

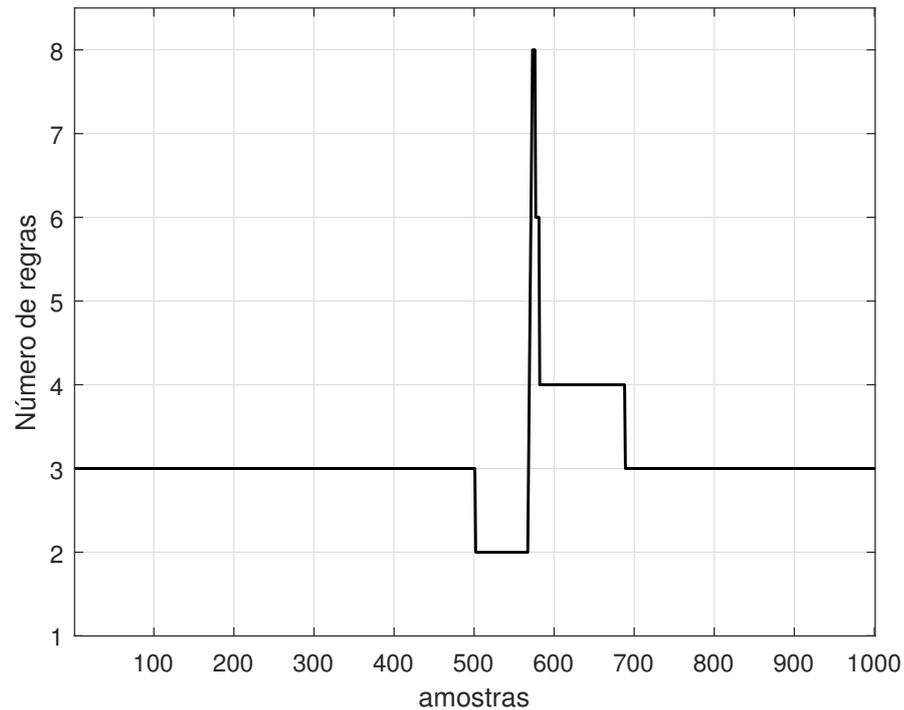


Figura 49 – Comportamento variável no tempo do número de regras *fuzzy* para o rastreamento dinâmico do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo  $\tau = 30$ .

micos descritos por um conjunto de dados, mas seu desempenho é inferior à metodologia proposta. O filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo realiza o ajuste de seus parâmetros conforme o comportamento dinâmico do conjunto de dados e processa as incertezas do mesmo dentro de uma região de confiança, o que proporciona seu melhor desempenho. A abordagem em (CASTRO et al., 2009) é baseada em redes neurais *fuzzy* tipo-2 intervalares (IT2FNN) treinadas a partir de algoritmos de aprendizado híbrido. Embora a abordagem em (CASTRO et al., 2009) faça a combinação de sistemas *fuzzy* tipo-2 e redes neurais para o processamento do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass, seu desempenho é ligeiramente inferior comparado ao da metodologia proposta devido à sua estrutura fixa. O filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo possui uma estrutura adaptativa resultante da atualização do número de regras *fuzzy* e do processamento recursivo dos componentes espectrais não-observáveis extraídas a partir do conjunto de dados. Na abordagem (BAO et al., 2018) é proposto um sistema neural *fuzzy* evolutivo baseado usado para aproximação de sistemas não-lineares. Embora a abordagem em (BAO et al., 2018) utilize a teoria de sistemas *fuzzy* evolutivos, com complexidade semelhante à metodologia proposta, seu desempenho é inferior quando comparado ao filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo proposto devido ao seu processamento intervalar dos dados experimentais.

Em abordagens que realizam estimativas intervalares, a largura do intervalo e o

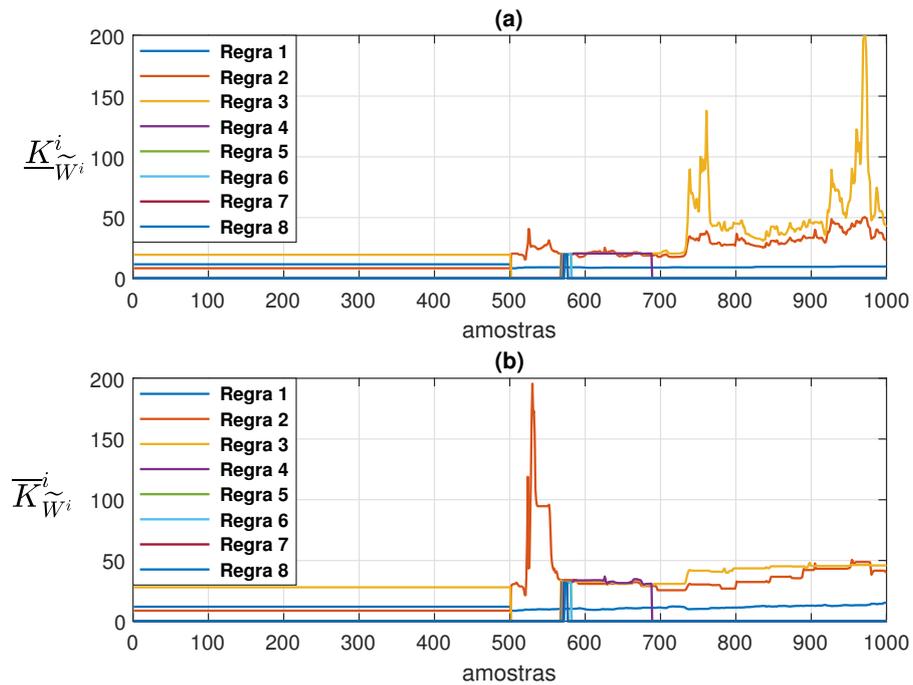


Figura 50 – Ganhos de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\widetilde{\mathbf{K}}_{\widetilde{W}^i}^i |^{i=1,\dots,8}$ , durante as etapas de treinamento e de atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo  $\tau = 30$ : (a) Ganho de Kalman inferior  $\underline{K}_{\widetilde{W}^i}^i$ , (b) Ganho de Kalman superior  $\overline{K}_{\widetilde{W}^i}^i$ .

Tabela 4 – Análise comparativa do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo para o rastreamento da série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo  $\tau = 17$ .

Metodologia	Número de Regras	RMSE
(CHEN; YANG; DONG, 2006)	-	0.0036
(DHAHRI; ALIM, 2006)	-	0.0130
(GU; WANG, 2007)	10	0.0120
(TUNG; GUAN, 2009)	-	0.0190
(CASTRO et al., 2009)	16	0.0035
(ALMARAASHI; JOHN, 2011)	16	0.0089
(LIN; CHANG; LIN, 2013)	5	0.0039
(USLAN; SEKER; JOHN, 2014)	-	0.0080
(GAXIOLA et al., 2016)	-	0.0431
(ZHANG et al., 2018)	129	0.1410
(EYOH et al., 2018)	16	0.0040
(USTUNDAG; KULAGLIC, 2020)	-	0.0050
(SHI et al., 2021)	-	0.2191
(BAO et al., 2018)	5	0.0679
<b>Metodologia proposta</b>	<b>10</b>	<b>0.0026</b>

seu nível de cobertura são características importantes a serem consideradas para validação da metodologia proposta. Para fins de validação da qualidade e eficiência do intervalo de

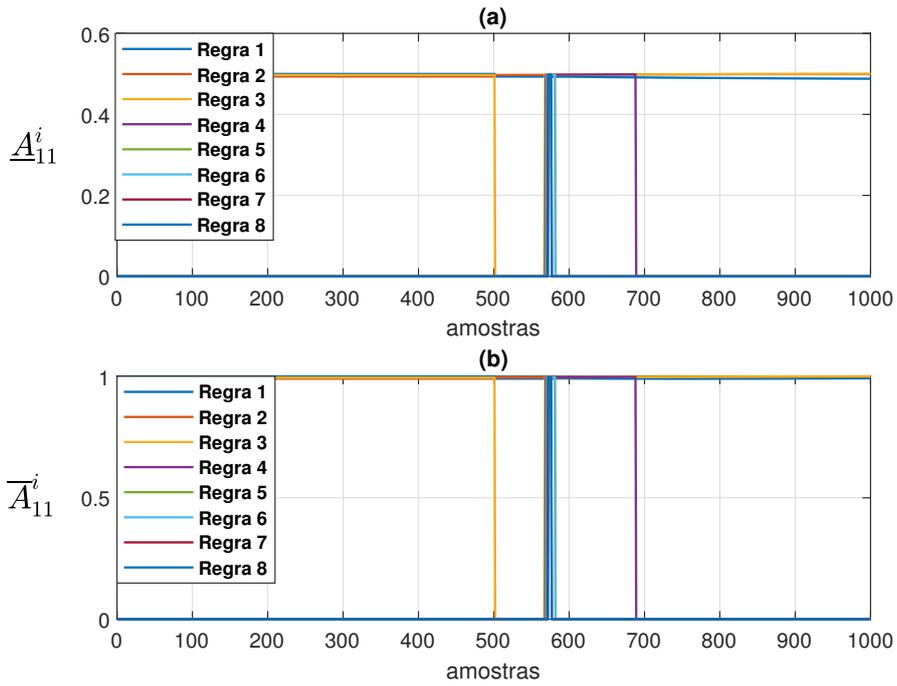


Figura 51 – Estimação da matriz de estados intervalar  $\tilde{\mathbf{A}}_{\tilde{W}^i}^i |_{i=1, \dots, 8}$  para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo  $\tau = 30$ : (a) Limite inferior  $\underline{\mathbf{A}}_{\tilde{W}^i}^i$ , (b) Limite superior  $\overline{\mathbf{A}}_{\tilde{W}^i}^i$ .

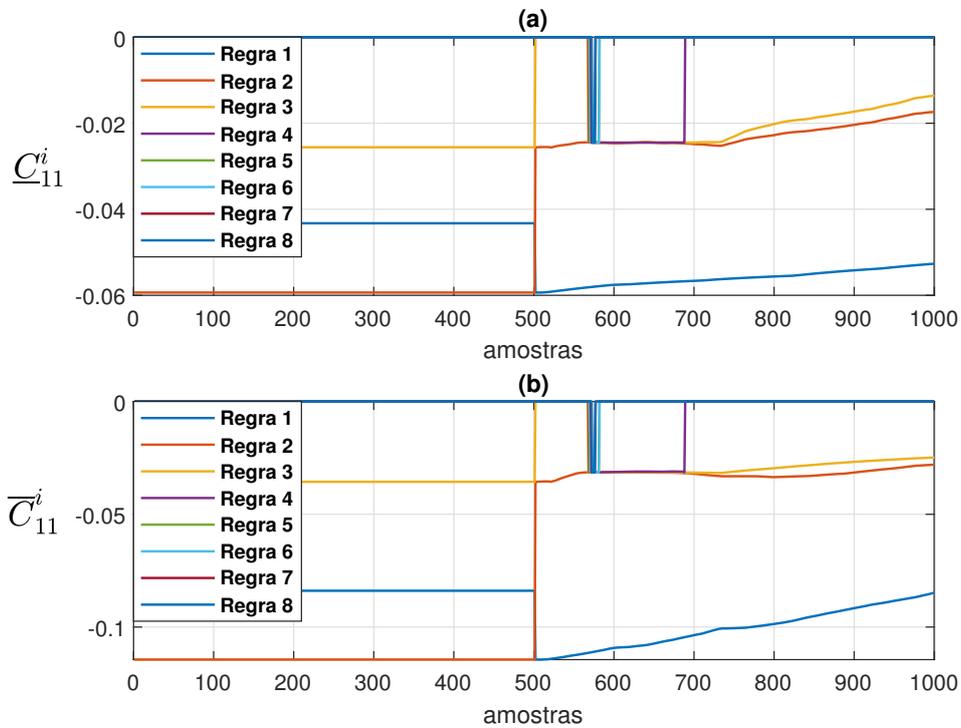


Figura 52 – Estimação da matriz de saída intervalar  $\tilde{\mathbf{C}}_{\tilde{W}^i}^i |_{i=1, \dots, 8}$  para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo  $\tau = 30$ : (a) Limite inferior  $\underline{\mathbf{C}}_{\tilde{W}^i}^i$ , (b) Limite superior  $\overline{\mathbf{C}}_{\tilde{W}^i}^i$ .

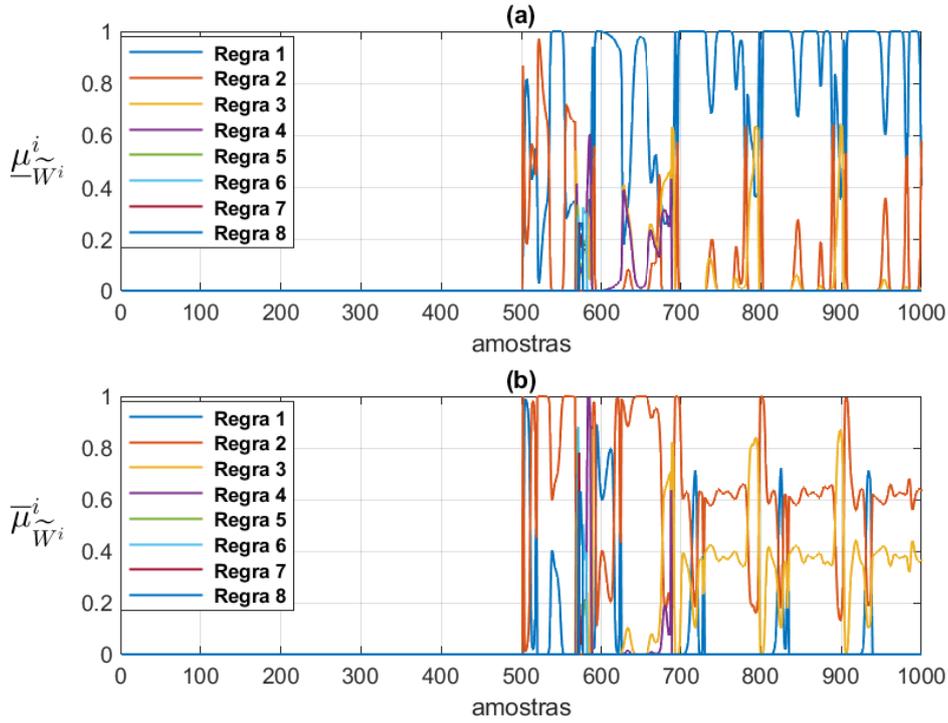


Figura 53 – Graus de ativação *fuzzy* normalizados instantâneos para o rastreamento do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando o atraso de tempo  $\tau = 30$ : (a) Graus de ativação inferiores, (b) Graus de ativação superiores.

previsão estimado pela metodologia proposta nesta tese para a série temporal caótica de Mackey-Glass, considerando diferentes valores para o atraso de tempo  $\tau$ , foram utilizadas as métricas PICP (*Prediction Interval Coverage Probability*) e PINAW (*Prediction Interval Normalized Average Width*) (SERRANO-GUERRERO et al., 2021; CARTAGENA et al., 2023). Formalmente, a métrica PICP é definida como segue:

$$PICP = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N c_k \quad (6.4)$$

onde  $N$  é a quantidade de amostras do conjunto de dados e

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se } y_k \in [\hat{y}_k, \bar{y}_k] \\ 0 & \text{se } y_k \notin [\hat{y}_k, \bar{y}_k] \end{cases} \quad (6.5)$$

Entretanto, somente o PICP é uma métrica insuficiente para indicar se o intervalo de previsão é adequado, pois um intervalo grande garante um valor alto do PICP. Conseqüentemente, a métrica PINAW é necessária como métrica complementar, a qual é definida como segue:

$$PINAW = \frac{1}{NR} \sum_{k=1}^N (\bar{\hat{y}}_k - \hat{y}_k) \quad (6.6)$$

onde  $R = \max \{y_k\} - \min \{y_k\}$ , corresponde a faixa de valores do conjunto de dados e  $N$  é a quantidade de amostras do conjunto de dados. A eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, de acordo com a formulação teórica descrita na Seção 5, para rastrear a série temporal caótica Mackey-Glass, para diferentes valores de atraso de tempo  $\tau$ , considerando as métricas PICP e PINAW, é mostrada na Tabela 5. O objetivo da utilização das métricas PICP e PINAW neste exemplo de aplicação é avaliar o efeito dos diferentes valores de atraso de tempo  $\tau$  na eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo proposto. Conforme pode ser observado através da Tabela 5, o aumento do atraso de tempo  $\tau$  e consequente aumento do nível de caoticidade da série temporal de Mackey-Glass tem pouca interferência no desempenho da metodologia proposta. Em outras palavras, o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo proposto nesta tese demonstra ser bastante eficiente no rastreamento de séries temporais com acentuado comportamento caótico.

Tabela 5 – Eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo para o rastreamento da série temporal caótica de Mackey-Glass, para diferentes valores de atraso de tempo  $\tau$ , considerando as métricas PICP e PINAW.

Atraso de tempo	PICP	PINAW (%)
$\tau = 17$	0,98	21,18
$\tau = 22$	0,95	13,56
$\tau = 30$	0,97	17,41

## 6.2 Filtragem de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar Evolutiva Aplicada ao Rastreamento e Previsão da Trajetória de Veículos Aeroespaciais

Nesta seção, resultados computacionais para o rastreamento e previsão da trajetória relativa entre dois satélites, em ambiente ruidoso, são apresentados. Neste exemplo de aplicação, ambos os veículos aeroespaciais estão em formação, movendo-se de forma coordenada e relativamente próxima (FRASER; ULRICH, 2021). Uma das espaçonaves serve como referência para o movimento, denominada “*target*”, enquanto a outra é referenciada como “*chaser*”. As configurações de formação entre os dois satélites são ilustradas na Figura 54. O movimento relativo do veículo *chaser* em relação ao *target* é modelado e estimado através do sistema de coordenadas Local-Vertical Local-Horizontal (LVLH) denotado por  $\mathcal{F}_L$ , o qual tem sua origem no veículo *target* e possui as direções radiais  $\vec{\mathcal{L}}_x$ ,

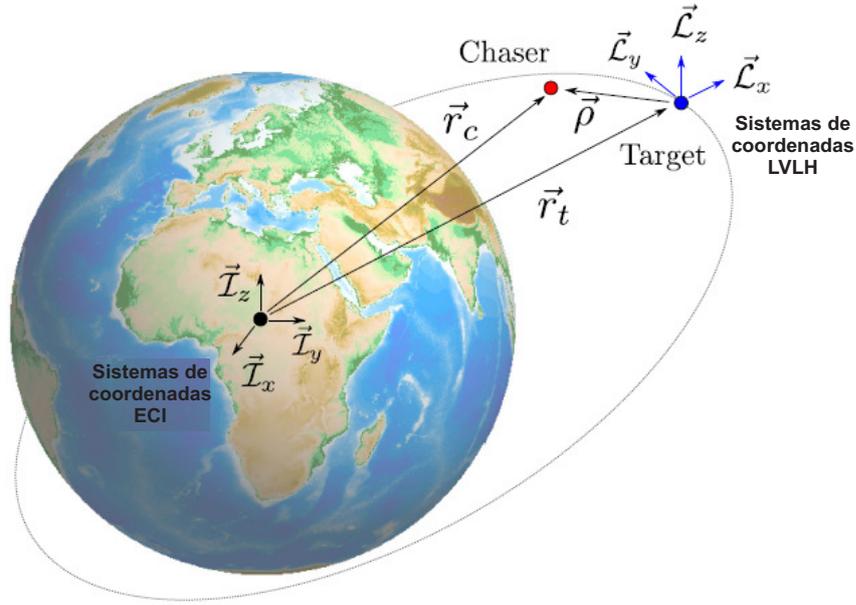


Figura 54 – Configuração de formação entre os satélites *target* and *chaser*. Fonte: Adaptado de (FRASER; ULRICH, 2021).

$\vec{\mathcal{L}}_y$  e  $\vec{\mathcal{L}}_z$ . Estas direções radiais são definidas por vetores unitários ortogonais como segue:

$$\vec{\mathcal{L}}_x = \frac{\vec{r}_t}{r_t} \quad (6.7)$$

$$\vec{\mathcal{L}}_y = \vec{\mathcal{L}}_x \times \vec{\mathcal{L}}_z \quad (6.8)$$

$$\vec{\mathcal{L}}_z = \frac{\vec{r}_t \times \vec{v}_t}{|\vec{r}_t \times \vec{v}_t|} \quad (6.9)$$

onde  $\vec{r}_t$  e  $\vec{v}_t$  são os vetores posição e velocidade do *target* no sistema de coordenadas Inercial Centrado na Terra (*Earth-Centered Inertial* - ECI), denotado por  $\mathcal{F}_I$ , cuja representação é dada em termos dos vetores unitários  $\vec{\mathcal{I}}_x$ ,  $\vec{\mathcal{I}}_y$  e  $\vec{\mathcal{I}}_z$ . Além disso, a variável  $r_t = |\vec{r}_t|$  corresponde a magnitude do vetor posição do veículo *target*. Os termos de posição cartesiana  $x$ ,  $y$  e  $z$  referem-se a posição do *chaser* em relação ao *target*, as quais são as componentes de interesse nesta tese para o rastreamento da posição relativa entre os veículos aeroespaciais. A magnitude do vetor posição do veículo *chaser* é dado por  $r_c = |\vec{r}_c| = \sqrt{(r_t + x)^2 + y^2 + z^2}$  e o movimento do sistema de coordenadas LVLH é definido em termos da anomalia verdadeira  $\theta$  e  $r_t$ , o quais determinam a posição do veículo *target*. O movimento relativo entre os veículos espaciais é regido por um conjunto de cinco equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, as quais são dadas por (FRASER, 2018):

$$\ddot{x} = \dot{\theta}^2 x + 2\dot{\theta} \left( \dot{y} - y \frac{\dot{r}_t}{r_t} \right) + \frac{\mu}{r_t^2} - \frac{\mu}{r_c^3} (r_t + x) \quad (6.10)$$

$$\ddot{y} = \dot{\theta}^2 y + 2\dot{\theta} \left( \dot{x} - x \frac{\dot{r}_t}{r_t} \right) - \frac{\mu}{r_t^3} y \quad (6.11)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu}{r_t^3} z \quad (6.12)$$

$$\ddot{\theta} = -2 \frac{\dot{r}_t}{r_t} \dot{\theta} \quad (6.13)$$

$$\ddot{r}_t = \dot{\theta}^2 r_t - \frac{\mu}{r_t^2} \quad (6.14)$$

onde  $\mu$  é o parâmetro gravitacional da terra. O método de Runge-Kutta foi aplicado para discretização do conjunto de Equações (6.10)-(6.14) e um conjunto de dados com comprimento total de 600 amostras referente as componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  foi obtido através de ambiente computacional de simulação, o qual é mostrado nas Figuras 55-57. O ruído considerado para a aquisição do conjunto de dados relacionado às variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ , conforme mostrado nas Figuras 55-57, é um ruído branco, com distribuição normal e média nula, tal que a relação sinal ruído (*Signal Noise Ratio* - SNR) foi estabelecido em  $SNR = 20dB$ . A trajetória tridimensional ruidosa descrita pelo *chaser* em relação ao

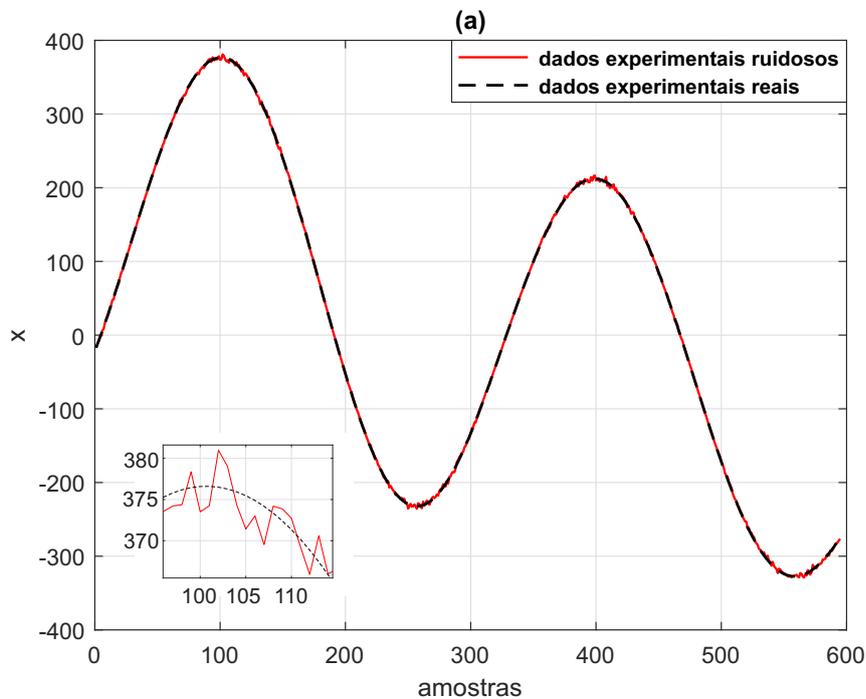


Figura 55 – Conjunto de dados referente a componente cartesiana  $x$  da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial *chaser*.

*target* é mostrada na Figura 58. Considerando as primeiras 200 amostras do conjunto de dados referente às séries temporais ruidosas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , mostradas nas Figuras 55-57, o filtro

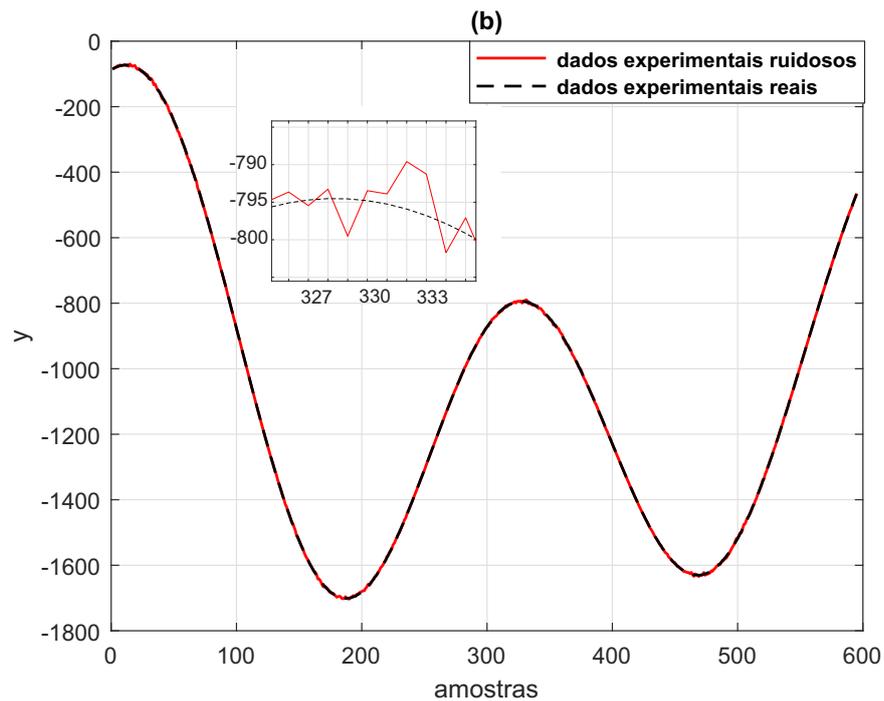


Figura 56 – Conjunto de dados referente a componente cartesiana  $y$  da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial *chaser*.

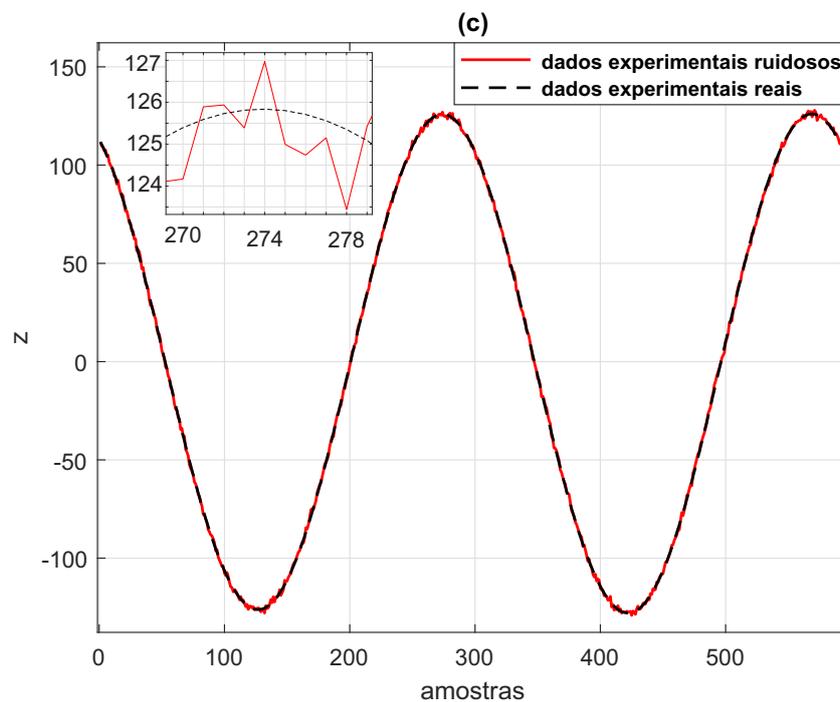


Figura 57 – Conjunto de dados referente a componente cartesiana  $z$  da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial *chaser*.

de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, conforme descrito na Equação (5.13), foi inicialmente estimado durante a etapa de treinamento. A Análise Espectral Singular Multivariável, conforme descrita na Seção 5.1, foi capaz de obter as componentes espectrais relacionados às

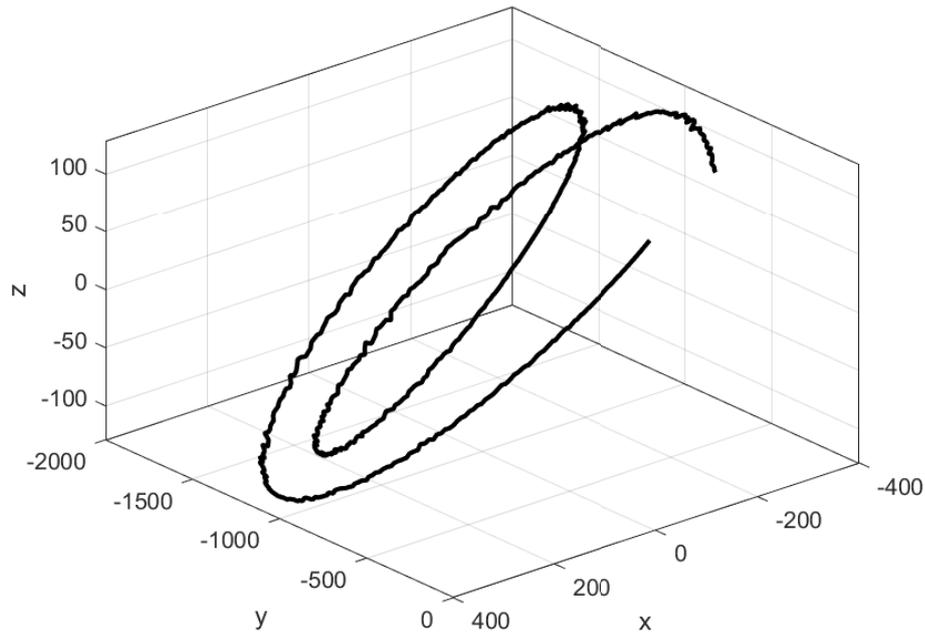


Figura 58 – Trajetória tridimensional descrita pelo veículo aeroespacial *target*.

séries temporais  $x$ ,  $y$  e  $z$ . O número apropriado de componentes espectrais não-observáveis extraídas a partir do conjunto de dados foi estimado como  $\xi = 6$  com valor de VAF de 99,85% de eficiência para representação do conjunto de dados. As componentes espectrais não-observáveis extraídas das séries temporais  $x$ ,  $y$  e  $z$  são mostradas na Figura 59-61. O

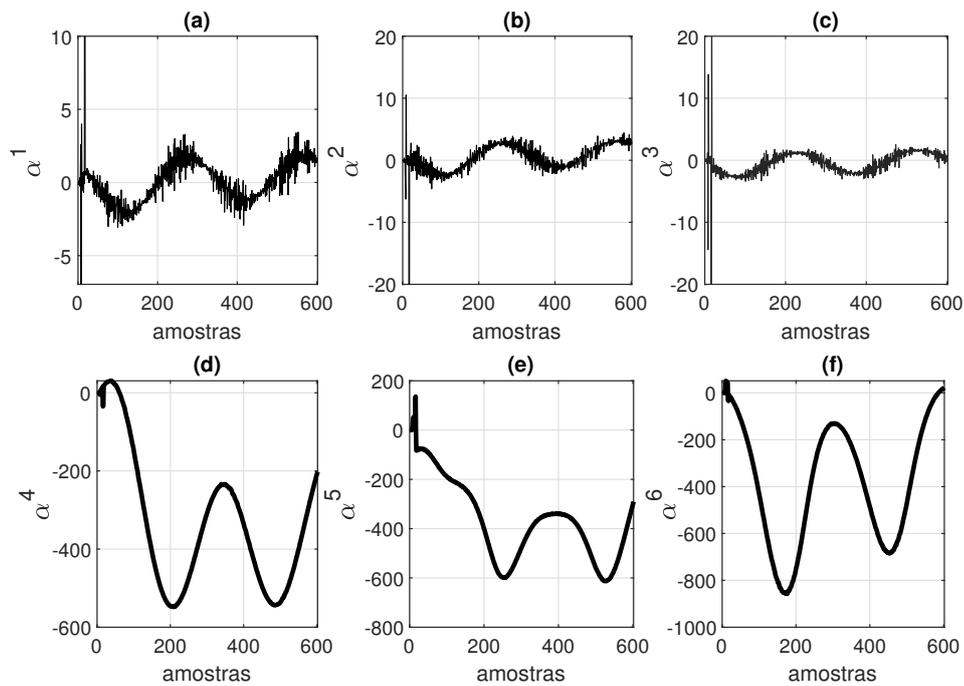


Figura 59 – Componentes espectrais não-observáveis  $\alpha^j | j=1, \dots, 6$  extraídas do conjunto de dados referente à série temporal  $x$  da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial *chaser*.

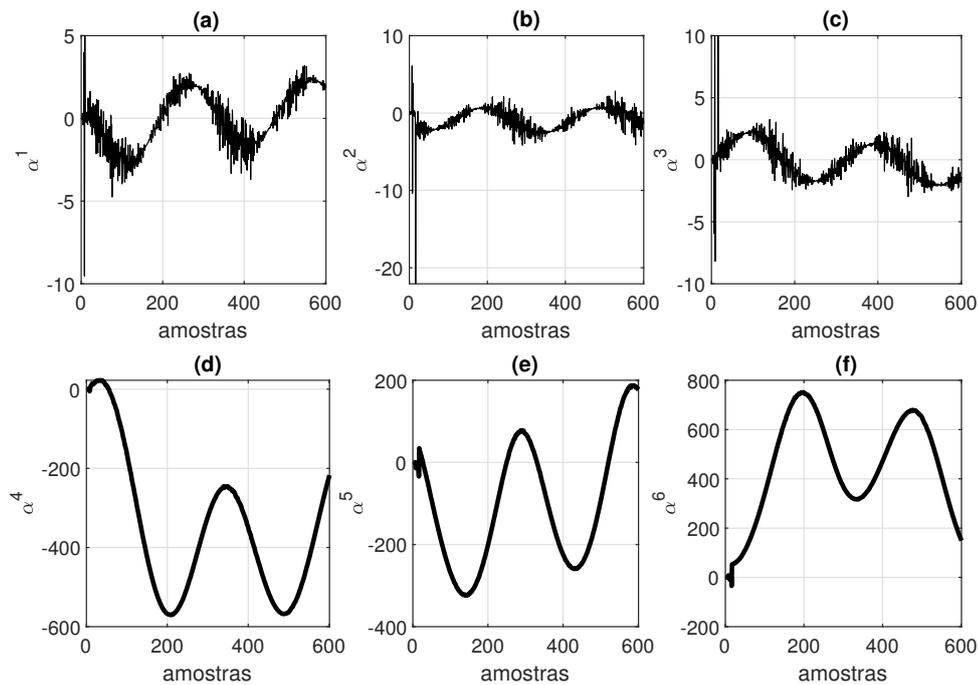


Figura 60 – Componentes espectrais não-observáveis  $\alpha^j | j=1, \dots, 6$  extraídas do conjunto de dados referente à série temporal  $y$  da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial *chaser*.

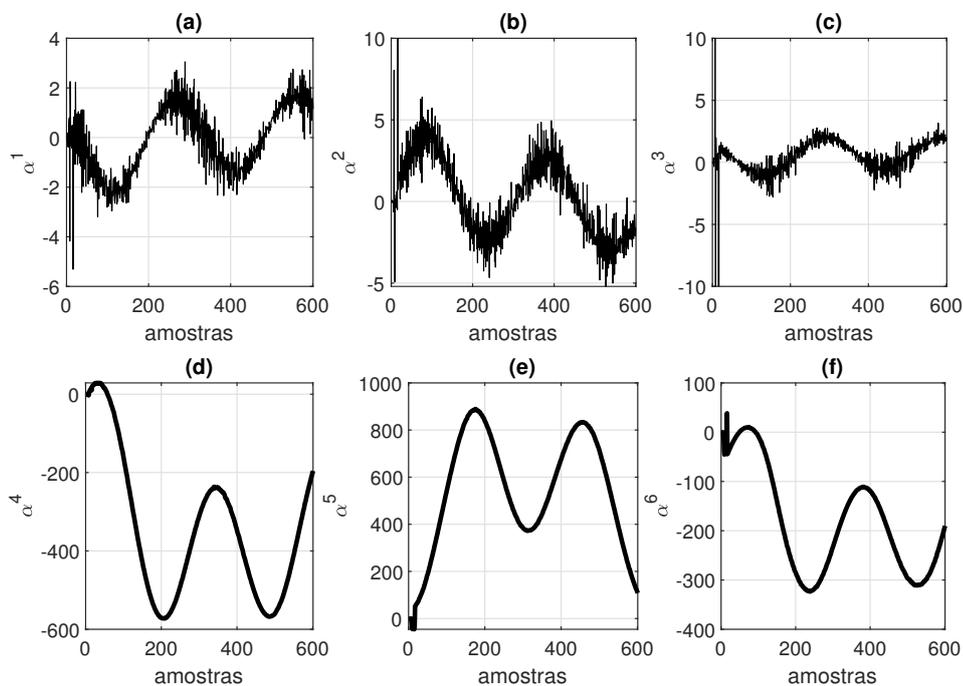


Figura 61 – Componentes espectrais não-observáveis  $\alpha^j | j=1, \dots, 6$  extraídas do conjunto de dados referente à série temporal  $z$  da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial *chaser*.

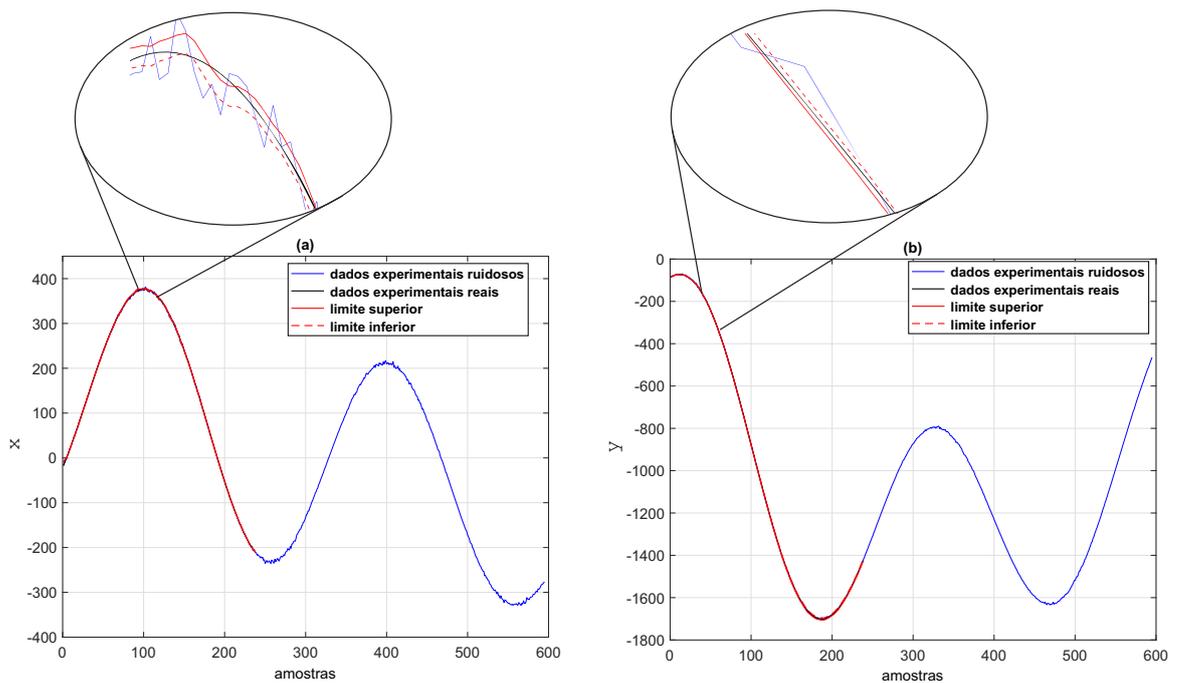
particionamento dos dados experimentais relacionados às primeiras 200 amostras das séries temporais  $x$ ,  $y$  e  $z$ , mostradas nas Figuras 55-57, foi realizado pela formulação *fuzzy* tipo-2 do algoritmo de agrupamento Gustafson-Kessel, conforme descrito em Seção 5.2.1, durante

a etapa de treinamento, considerando os seguintes parâmetros:  $L = 3$  (número inicial de regras *fuzzy*), expoente de ponderação intervalar  $\tilde{m} = [1.7 \ 2.2]$  e tolerância  $\mathcal{E} = 10^{-4}$ . A estimação inicial da proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar foi realizada pelo algoritmo OKID *fuzzy* tipo-2 intervalar, conforme descrito na Seção 5.2.3, considerando os seguintes parâmetros: número de parâmetros de Markov  $q = 1$ , dimensões da matriz de Hankel  $\gamma = 30$  e  $\beta = 30$ .

A partir da amostra 201, as partições do conjunto de dados relacionado às séries temporais  $x$ ,  $y$  e  $z$  foram atualizadas pela formulação *fuzzy* tipo-2 proposta para o algoritmo de agrupamento *evolving* Takagi-Sugeno, no qual foi adotado o valor de  $\eta = 0,01$  (relacionado à Condição C). O algoritmo OKID *fuzzy* tipo-2 intervalar foi implementado para atualização recursiva da proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, conforme a Equação (5.13), considerando as partições atualizadas do conjunto de dados como critério de ponderação, bem como as componentes espectrais não-observáveis. A região de confiança, obtida durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, é mostrada nas Figuras 62a-62c, ilustrando a eficiência da metodologia proposta para o rastreamento do conjunto de dados referente às séries temporais  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

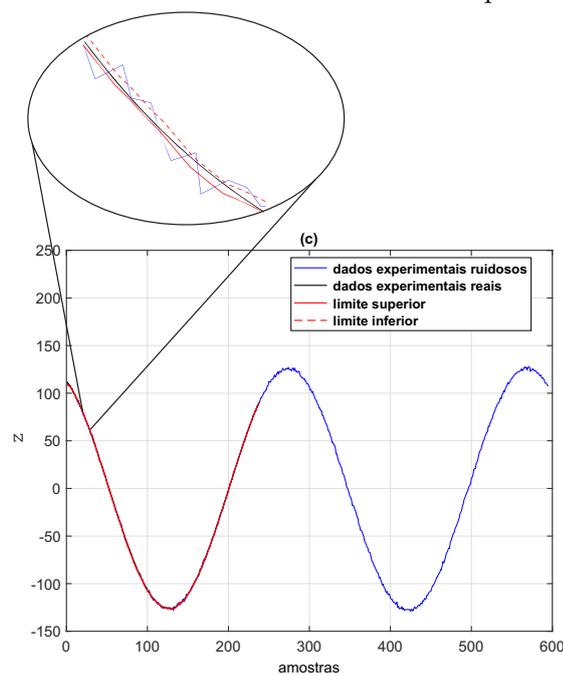
A partir da região de confiança mostrada nas Figuras 62a-62c, projeções intervalares foram estimadas a partir da saída intervalar do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo proposto, definindo os limites superior e inferior para previsão da trajetória do veículo aeroespacial *chaser* em relação ao veículo *target*. A eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo baseado em sua estimação inicial a partir do conjunto de dados das séries temporais ruidosas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , para previsão da posição futura (validação) do veículo *chaser*, é mostrada na Figura 63. Conforme é observado que a previsão não é mais suficiente para representar o comportamento dinâmico dos dados de validação, faz-se necessária uma nova atualização das projeções intervalares, baseada no rastreamento em tempo real do conjunto de dados pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, para obtenção de novas previsões da trajetória descrita pelo veículo *chaser*. Os resultados de atualização do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial *chaser*, são mostrados nas Figuras 64 - 66.

O número de regras *fuzzy* variante no tempo do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, de acordo com as flutuações dinâmicas das séries temporais  $x$ ,  $y$  e  $z$ , é ilustrado na Figura 68. Os ganhos de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalares estimados  $\mathbf{K}^i |_{i=1, \dots, 8}$ , durante as etapas de treinamento e recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo para o rastreamento e previsão da trajetória do veículo aeroespacial *chaser*, é mostrado na Figura 69. Uma vez que nesta aplicação não há a presença de variáveis de entrada e o objetivo é realizar o rastreamento e previsão dos dados das séries temporais  $x$ ,  $y$  e  $z$ , a estimação das matrizes *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\tilde{\mathbf{A}}^i$  e  $\tilde{\mathbf{C}}^i$ , com  $i = 1, \dots, 8$ , as quais compõe os submodelos lineares na proposição do consequente do filtro de Kalman



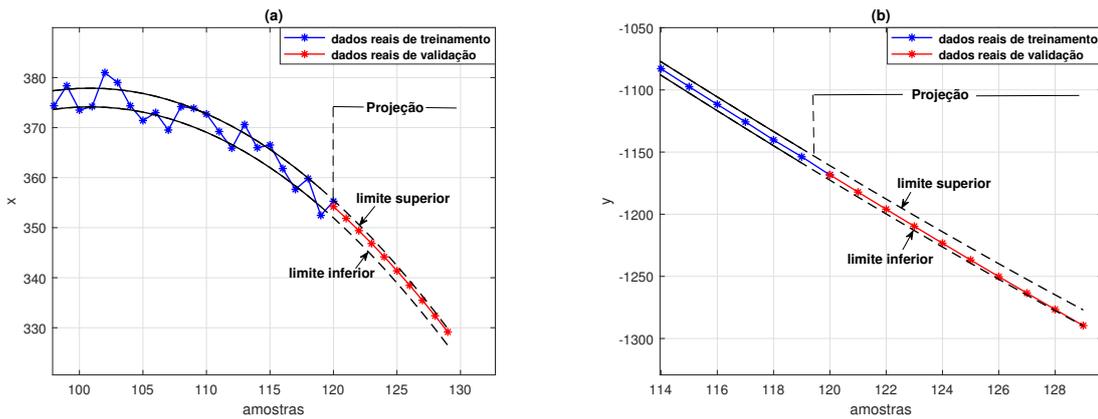
(a) Rastreamento inicial da série temporal referente à componente cartesiana  $x$ .

(b) Rastreamento inicial da série temporal referente à componente cartesiana  $y$ .



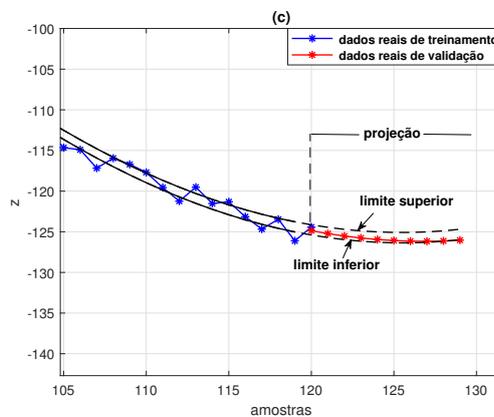
(c) Rastreamento inicial da série temporal referente à componente cartesiana  $z$ .

Figura 62 – Região de confiança obtida pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo para o rastreamento inicial da trajetória do veículo aeroespacial *chaser*: (a) componente cartesiana  $x$ ; (b) componente cartesiana  $y$ ; (c) componente cartesiana  $z$ .



(a) Previsão da amostra 119 a amostra 128 para a série temporal  $x$ .

(b) Previsão da amostra 119 a amostra 128 para a série temporal  $y$ .



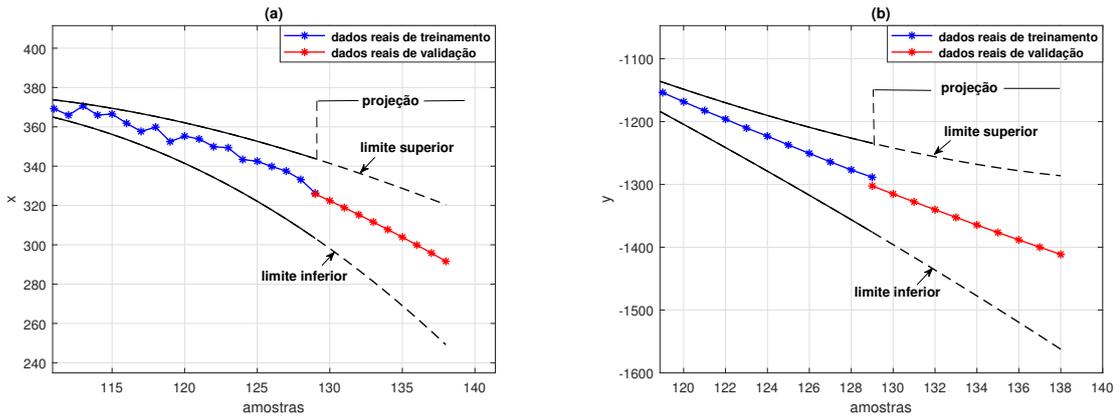
(c) Previsão da amostra 119 a amostra 128 para a série temporal  $z$ .

Figura 63 – Desempenho do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo para previsão da trajetória do veículo aeroespacial *chaser* baseado no rastreamento inicial do conjunto de dados: (a) previsão da série temporal  $x$ ; (b) previsão da série temporal  $y$ ; (c) previsão da série temporal  $z$ .

*fuzzy* tipo-2 evolutivo, é mostrada nas Figuras 70 e 71, respectivamente. Os graus de ativação superior e inferior das regras *fuzzy* do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, durante a etapa de atualização recursiva, para rastreamento e previsão dos dados das séries temporais  $x$ ,  $y$  e  $z$ , são mostrados na Figura 72.

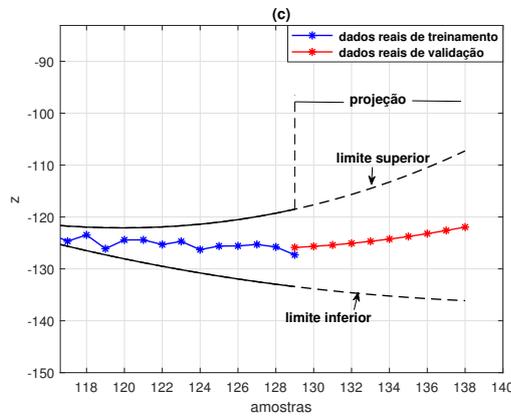
### 6.2.1 Análise Comparativa e Discussões

Nesta seção, uma discussão mais detalhada sobre os resultados apresentados na Seção 6.2, para o rastreamento e previsão da trajetória de veículos aeroespaciais, de acordo com a análise comparativa da metodologia proposta com a abordagens em (FRASER; ULRICH, 2021) é apresentada, considerando a métrica 3D-RMSE (*Root Mean Square Error*) tridimensional, a qual é dada por (FRASER; ULRICH, 2021):



(a) Previsão da amostra 129 a amostra 138 para a série temporal  $x$ .

(b) Previsão da amostra 129 a amostra 138 para a série temporal  $y$ .

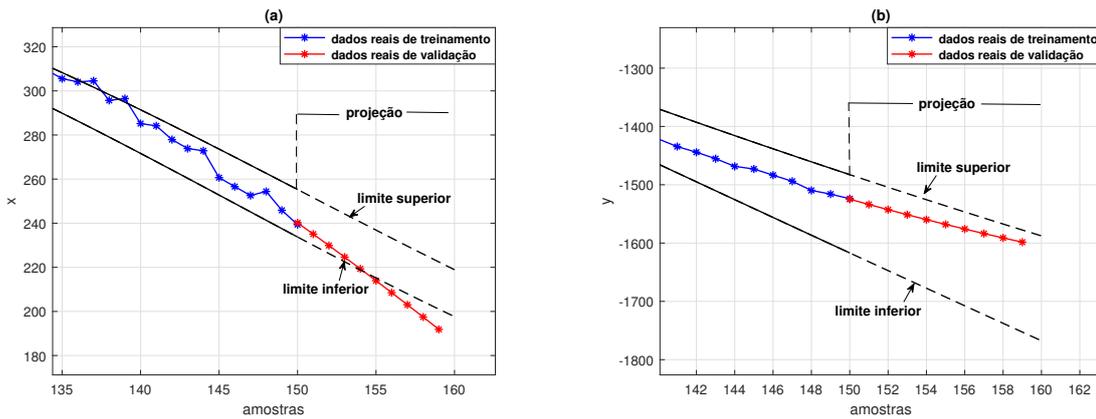


(c) Previsão da amostra 129 a amostra 138 para a série temporal  $z$ .

Figura 64 – Desempenho do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo para previsão da trajetória do veículo aeroespacial *chaser* baseado na atualização evolutiva realizada nas amostras 118 a 129: (a) previsão da série temporal  $x$ ; (b) previsão da série temporal  $y$ ; (c) previsão da série temporal  $z$ .

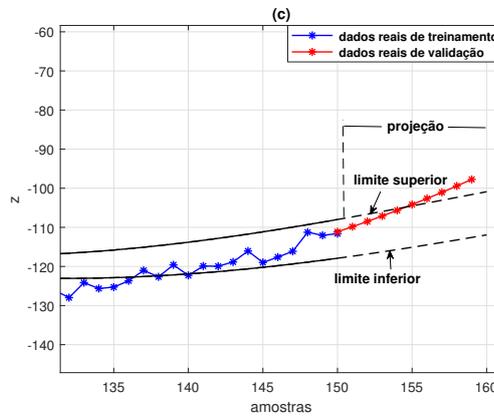
$$3D - RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=j_0}^n \left[ (x_j - \tilde{x}_j)^2 + (y_j - \tilde{y}_j)^2 + (z_j - \tilde{z}_j)^2 \right]} \quad (6.15)$$

A quantidade de pontos de dados utilizados no cálculo do 3D-RMSE é  $N = n - j_0 + 1$ , onde  $n$  representa o número total de pontos dos dados coletados na simulação e  $j_0$  representa o ponto inicial para o cálculo do 3D-RMSE. A abordagem proposta em (FRASER; ULRICH, 2021) é baseada em duas formulações para o filtro de Kalman estendido (FKE) adaptativo. A fim de melhorar a resposta do filtro de Kalman, as matrizes de covariância em (FRASER; ULRICH, 2021) são adaptadas através de técnicas de estimação em máxima verossimilhança (Q - MLE-AEKF) ou através de um sistema *fuzzy* (FAEKF). A eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, de acordo com a formulação teórica descrita na



(a) Previsão da amostra 150 a amostra 159 para a série temporal  $x$ .

(b) Previsão da amostra 150 a amostra 159 para a série temporal  $y$ .



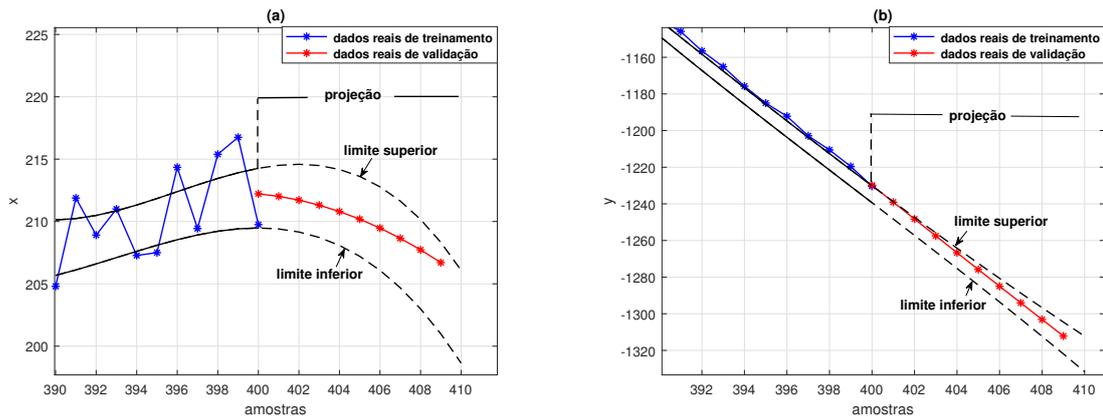
(c) Previsão da amostra 150 a amostra 159 para a série temporal  $z$ .

Figura 65 – Desempenho do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo para previsão da trajetória do veículo aeroespacial *chaser* baseado na atualização evolutiva realizada nas amostras 130 a 151: (a) previsão da série temporal  $x$ ; (b) previsão da série temporal  $y$ ; (c) previsão da série temporal  $z$ .

Seção 5, para rastreamento e previsão da trajetória do veículo aeroespacial *fraser*, comparada com a abordagem proposta em (FRASER; ULRICH, 2021), considerando a métrica 3D-RMSE, é mostrado na Tabela 6. Conforme pode ser visto, de acordo com os resultados apresentados na Tabela 6, o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo proposto apresenta melhor desempenho quando comparado a abordagem em (FRASER; ULRICH, 2021). Embora a abordagem proposta em (FRASER; ULRICH, 2021) utilize técnicas para

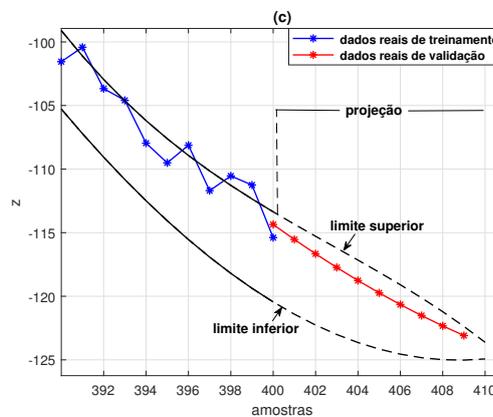
Tabela 6 – Análise comparativa entre o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo e a abordagem em (FRASER; ULRICH, 2021) para previsão da trajetória do veículo aeroespacial *chaser*.

Metodologia	3D-RMSE
abordagem Q-MLE-AEKF (FRASER; ULRICH, 2021)	23.89 cm
abordagem Q-FAEKF (FRASER; ULRICH, 2021)	26.46 cm
filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar evolutivo	8.36 cm



(a) Previsão da amostra 400 a amostra 409 para a série temporal  $x$ .

(b) Previsão da amostra 400 a amostra 409 para a série temporal  $y$ .

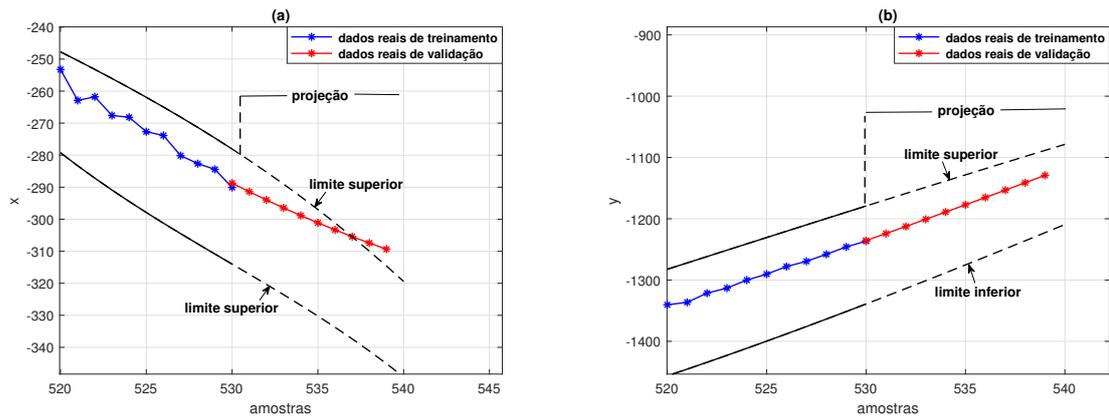


(c) Previsão da amostra 400 a amostra 409 para a série temporal  $z$ .

Figura 66 – Desempenho do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo para previsão da trajetória do veículo aeroespacial *chaser* baseado na atualização evolutiva realizada nas amostras 382 a 400: (a) previsão da série temporal  $x$ ; (b) previsão da série temporal  $y$ ; (c) previsão da série temporal  $z$ .

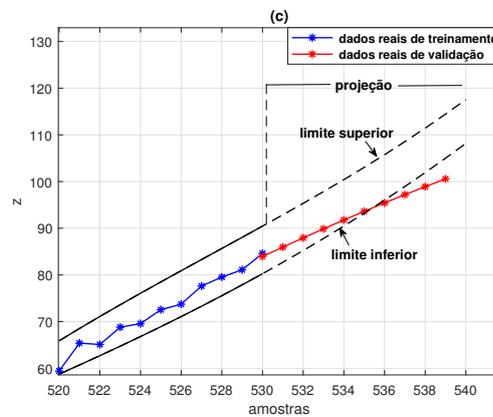
processamento de incertezas e adaptação do filtro de Kalman, seu desempenho é inferior se comparado ao filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo proposto nesta tese devido sua estrutura fixa durante todo o tratamento dos dados. Por outro lado, o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo proposto possui a capacidade de adaptar sua estrutura ao comportamento dinâmico descrito pelo conjunto de dados proporcionando melhor processamento de incertezas em diferentes regiões de operação do problema sob análise.

Para fins de validação estatística da metodologia proposta, os valores do erro quadrático médio tridimensional, usado como critério de verificação de desempenho neste exemplo de aplicação, considerando o efeito de 100 realizações no processo de filtragem e rastreamento do conjunto de dados de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , para um nível de ruído branco de  $20dB$ , é mostrado na Figura 73. O valor médio para a métrica 3D-RMSE obtido foi de  $7.8074\text{ cm}$  com variância de  $14.7740$  e desvio padrão de  $3.8437$ .



(a) Previsão da amostra 530 a amostra 539 para a série temporal  $x$ .

(b) Previsão da amostra 530 a amostra 539 para a série temporal  $y$ .



(c) Previsão da amostra 530 a amostra 539 para a série temporal  $z$ .

Figura 67 – Desempenho do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo para previsão da trajetória do veículo aeroespacial *chaser* baseado na atualização evolutiva realizada nas amostras 521 a 530: (a) previsão da série temporal  $x$ ; (b) previsão da série temporal  $y$ ; (c) previsão da série temporal  $z$ .

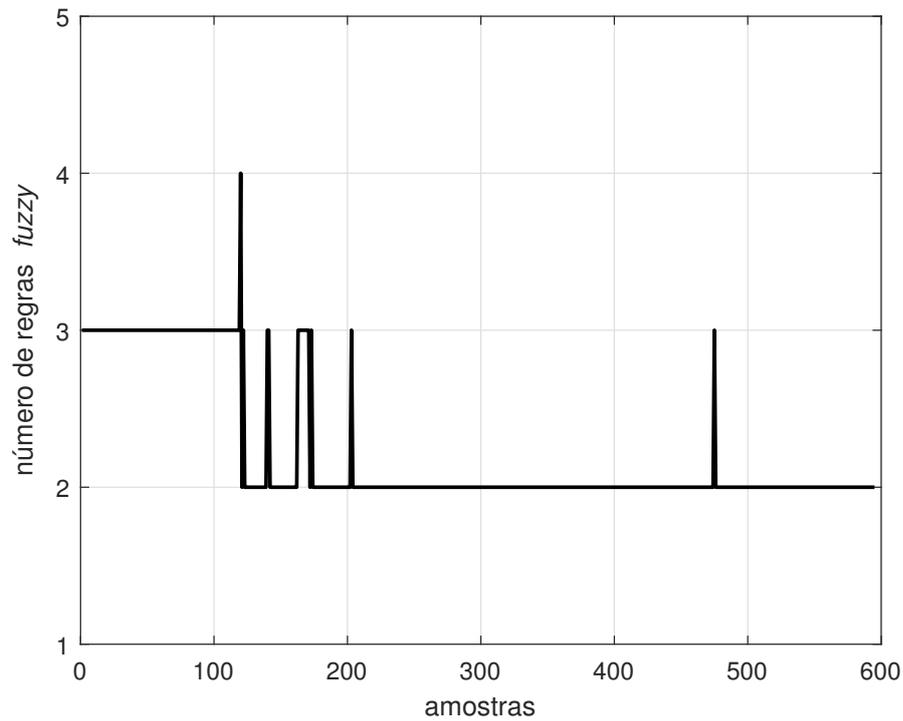


Figura 68 – Comportamento variável no tempo do número de regras *fuzzy* para o rastreamento dinâmico e previsão da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial *chaser*.

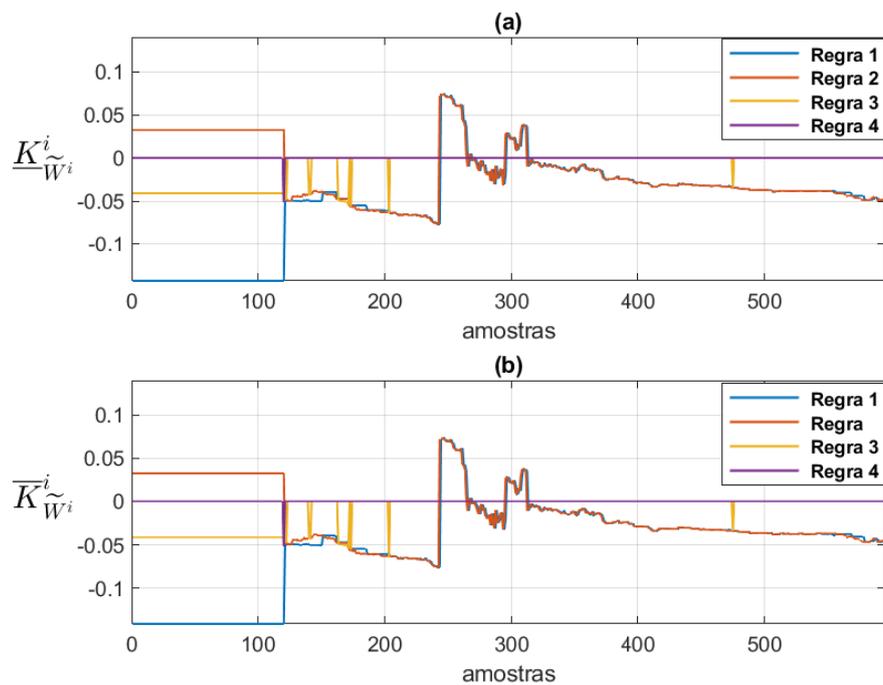


Figura 69 – Ganhos de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\widetilde{\mathbf{K}}_{\widetilde{W}^i}^i |_{i=1, \dots, 8}$ , durante as etapas de treinamento e de atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo para o rastreamento dinâmico e previsão da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial *chaser*: (a) Ganho de Kalman inferior  $\underline{K}_{\widetilde{W}^i}^i$ , (b) Ganho de Kalman superior  $\overline{K}_{\widetilde{W}^i}^i$ .

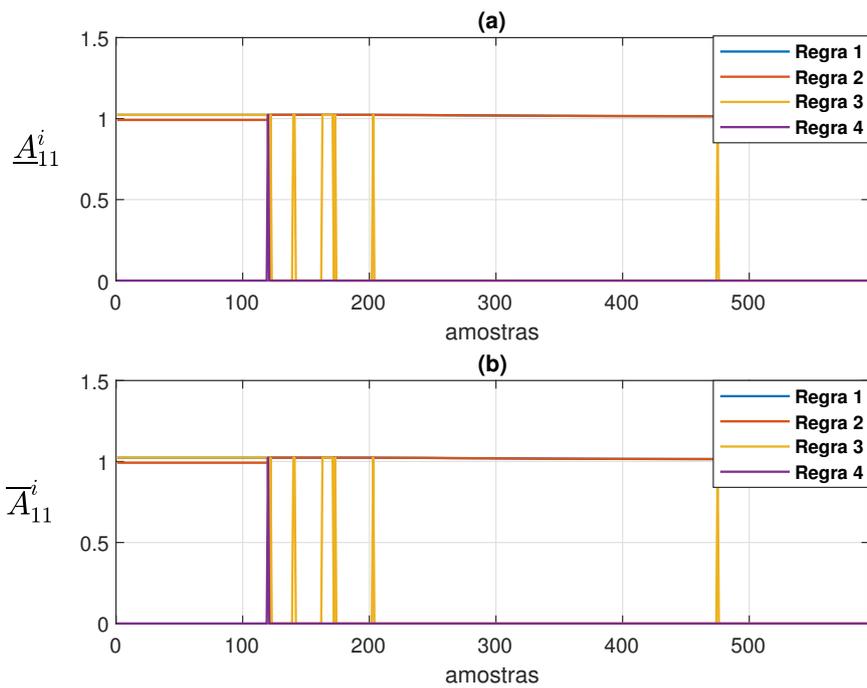


Figura 70 – Estimação da matriz de estados intervalar  $\tilde{\mathbf{A}}_{\tilde{W}i}^i |_{i=1,\dots,8}$  para o rastreamento dinâmico e previsão da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial *chaser*: (a) Limite inferior  $\underline{\mathbf{A}}_{\tilde{W}i}^i$ , (b) Limite superior  $\overline{\mathbf{A}}_{\tilde{W}i}^i$ .

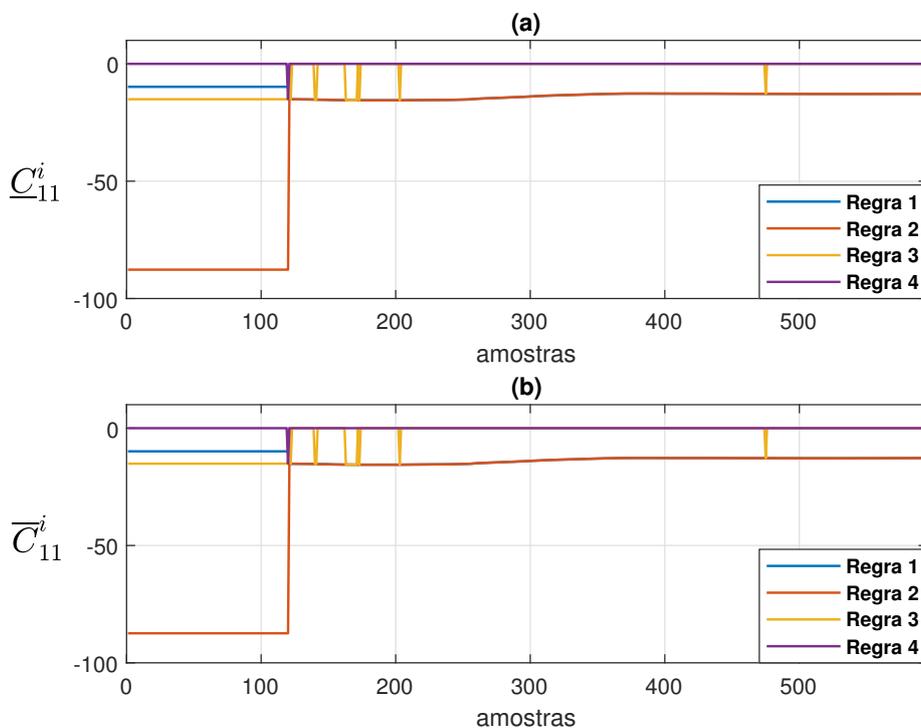


Figura 71 – Estimação da matriz de saída intervalar  $\tilde{\mathbf{C}}_{\tilde{W}i}^i |_{i=1,\dots,8}$  para o rastreamento dinâmico e previsão da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial *chaser*: (a) Limite inferior  $\underline{\mathbf{C}}_{\tilde{W}i}^i$ , (b) Limite superior  $\overline{\mathbf{C}}_{\tilde{W}i}^i$ .

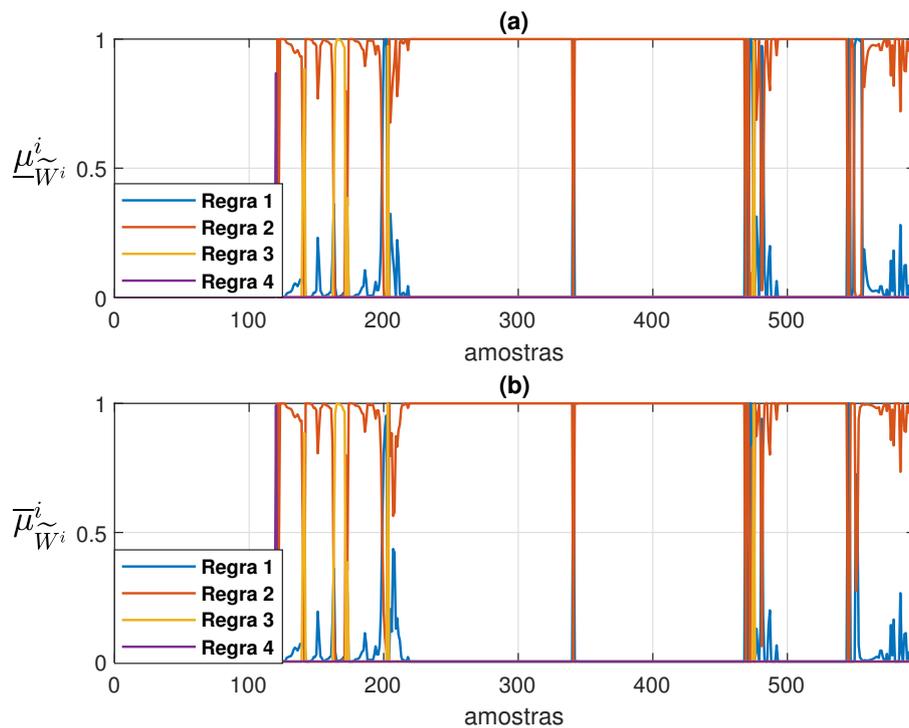


Figura 72 – Graus de ativação *fuzzy* normalizados instantâneos para o rastreamento dinâmico e previsão da trajetória descrita pelo veículo aeroespacial *chaser*: (a) Graus de ativação inferiores, (b) Graus de ativação superiores.

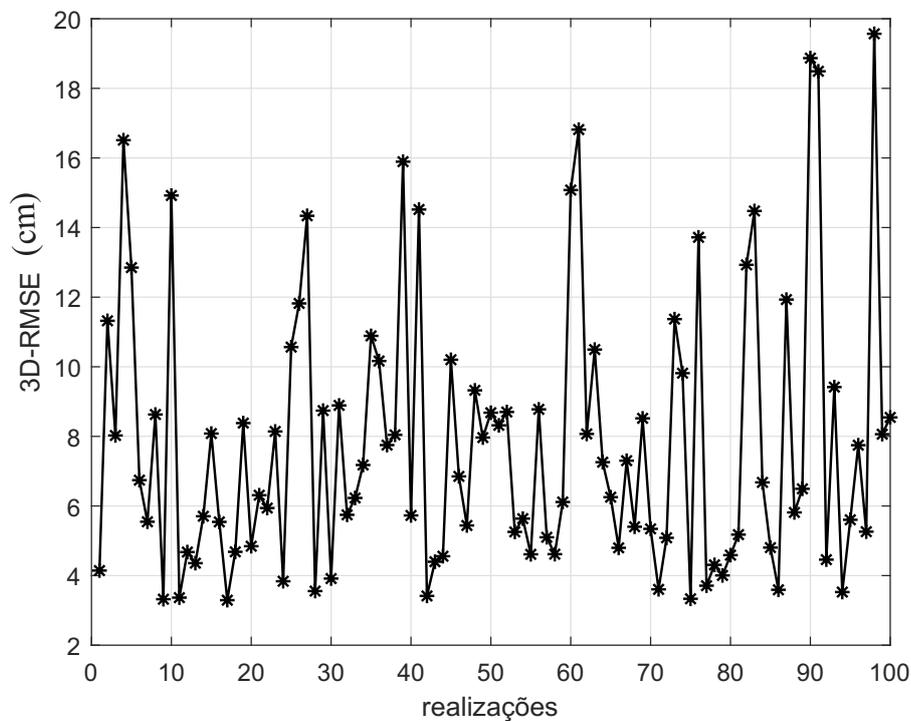


Figura 73 – Valores de erro quadrático médio tridimensional (3D-RMSE) considerando o efeito de 100 realizações do processo de filtragem e rastreamento do conjunto de dados de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , referentes a trajetória do veículo aeroespacial *chaser*, para um nível de ruído branco de  $20dB$ .

## 7 Análise Experimental da Metodologia Proposta

Neste capítulo, resultados experimentais para análise e previsão do comportamento de propagação dinâmica do Coronavírus, considerando os dados experimentais de óbitos diários e novos casos diários registrados por COVID-19 no Brasil, bem como a filtragem e rastreamento de um helicóptero com dois graus de liberdade, incluindo discussões e análise comparativa com as abordagens em (ARUNKUMAR et al., 2021; HAZARIKA; GUPTA, 2020; GAUTAM, 2021; DAIRI et al., 2021; AL-QANESS et al., 2021; EVANGELISTA; SERRA, 2022), são apresentados.

### 7.1 Filtragem e Rastreamento de Kalman *Fuzzy* Evolutivo Tipo-2 Intervalar Aplicado aos Dados de Propagação da COVID-19 no Brasil

Nesta seção, resultados experimentais para rastreamento adaptativo e previsão em tempo real da propagação dinâmica da Covid-19 no Brasil são apresentados. Os dados experimentais correspondentes às notificações de óbitos diários registrados no período de 29 de Fevereiro de 2020 a 24 de Maio de 2021 no Brasil, são mostrados na Figura 74, os quais foram obtidos na base de dados disponibilizada pelo Ministério da Saúde<sup>1</sup>. O pré-processamento da série temporal correspondente ao número de óbitos diários no Brasil, através da análise espectral singular recursiva multivariável, conforme descrito na Seção 5.1, foi capaz de extrair as componentes espectrais não-observáveis associadas ao número de óbitos diários. A métrica *Variance Accounted For* (VAF) foi considerada como critério para avaliação do número adequado de componentes a serem extraídas, dentro de uma faixa de 2 a 15 componentes, para melhor representação do conjunto de dados experimentais epidemiológicos, conforme mostrado na Figura 75. Na Tabela 7 é mostrado a eficiência de diferentes quantidades de componentes espectrais representado na Figura 75 para representação da dinâmica inerente ao conjunto de dados relacionado ao número de óbitos diários por Covid-19 no Brasil, considerando o critério VAF, as quais estão relacionadas com a capacidade das componentes espectrais em representar o conjunto de dados original. A partir da Figura 75 e da Tabela 7, considerando a relação custo-benefício para aplicação prática computacional da metodologia proposta nesta tese, o número apropriado de componentes não-observáveis foi de  $\xi = 10$ , com valor de VAF

<sup>1</sup> Disponível em: <<https://covid.saude.gov.br/>>

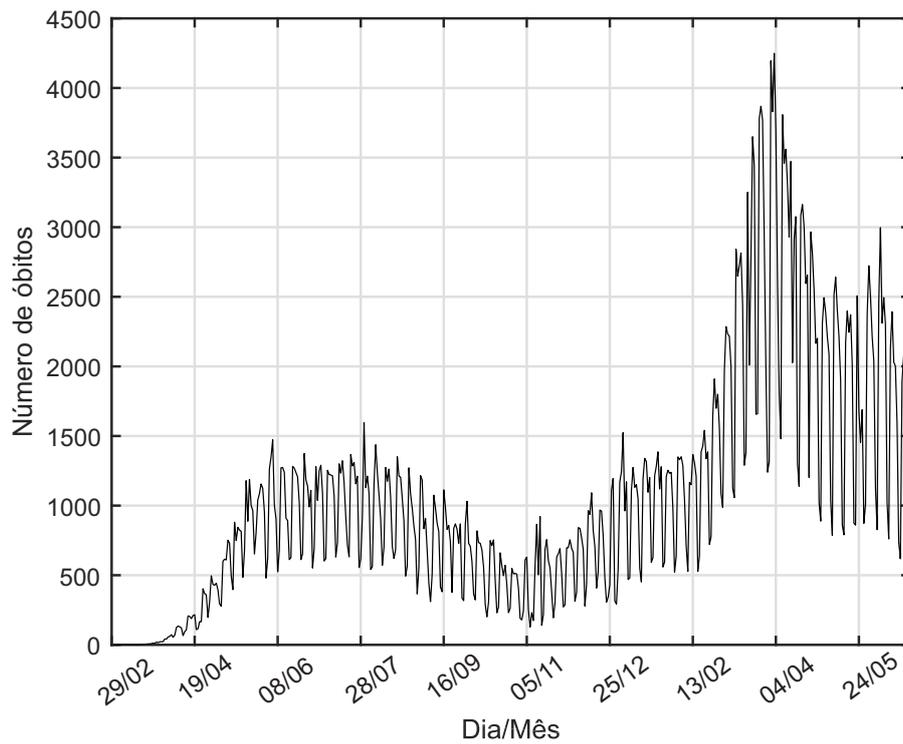


Figura 74 – Dados experimentais epidemiológicos de óbitos diários por COVID-19, registrados no período de 29 de Fevereiro de 2020 a 24 de Maio de 2021, no Brasil.

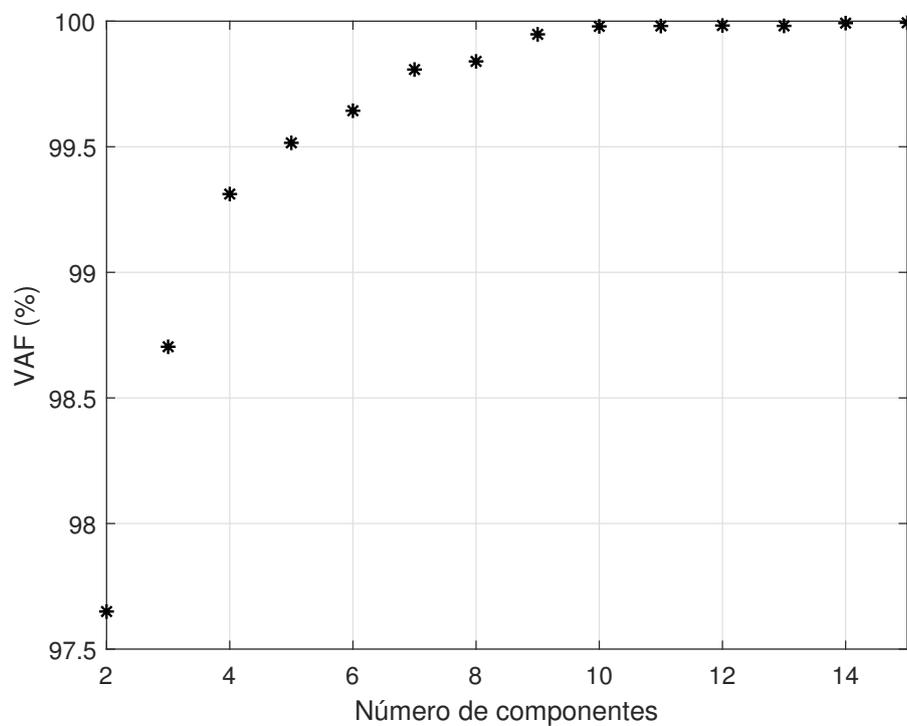


Figura 75 – Eficiência das componentes não-observáveis, de acordo com o critério VAF, para representar os dados experimentais de óbitos diários registrados no Brasil.

Tabela 7 – Eficiência de diferentes quantidades de componentes espectrais não-observáveis para representação do conjunto de dados relacionado ao número de órbitos diários por Covid-19 no Brasil, considerando o critério VAF.

Número de componentes não-observáveis $\xi$	VAF(%)
2	97.65
3	98.62
4	99.31
5	99.52
6	99.63
7	99.78
8	99.81
9	99.89
10	99.991
11	99.996
12	99.998
13	99.9991
14	99.9994
15	99.9998

de 99,98% de eficiência para a representação mais precisa possível do conjunto de dados experimentais e que, ao mesmo tempo, reduz a carga computacional do algoritmo de filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo. As componentes espectrais não-observáveis, extraídas da série temporal relacionada ao número de órbitos diários por Covid-19 no Brasil, são mostradas na Figura 76. As partições dos dados experimentais relacionados ao número de órbitos diários foram obtidas pelo algoritmo de agrupamento *evolving* Takagi-Sugeno tipo-2 conforme descrito na Seção 5.2.2, tal que a proposição do antecedente e o número de regras *fuzzy* puderam ser estimadas com sucesso em cada instante de tempo  $k$  durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo. A implementação do algoritmo OKID *fuzzy* tipo-2 intervalar, para estimação paramétrica da proposição consequente do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, na Equação (5.13), considera as partições obtidas sobre o número de órbitos diários como critério de ponderação e os seguintes valores de parâmetros  $q = 1$ ,  $\gamma = 10$  e  $\beta = 10$ . De acordo com os dados experimentais de propagação da Covid-19 no Brasil mostrados na Figura 74, as componentes espectrais não-observáveis pre-processadas mostradas na Figura 76 e os valores de pertinência *fuzzy* normalizados tipo-2 intervalares obtidos pelo algoritmo de agrupamento *evolving* Takagi-Sugeno *fuzzy* tipo-2, a estimação paramétrica do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo foi obtida durante sua atualização recursiva. A região de confiança, conforme mostrado na Figura 77, obtida durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, ilustra a eficiência da metodologia proposta para o rastreamento dos dados experimentais de órbitos diários por Covid-19 no Brasil. A partir da região de confiança mostrada na Figura 77, projeções intervalares foram estimadas a partir da saída intervalar do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo proposto, definindo os

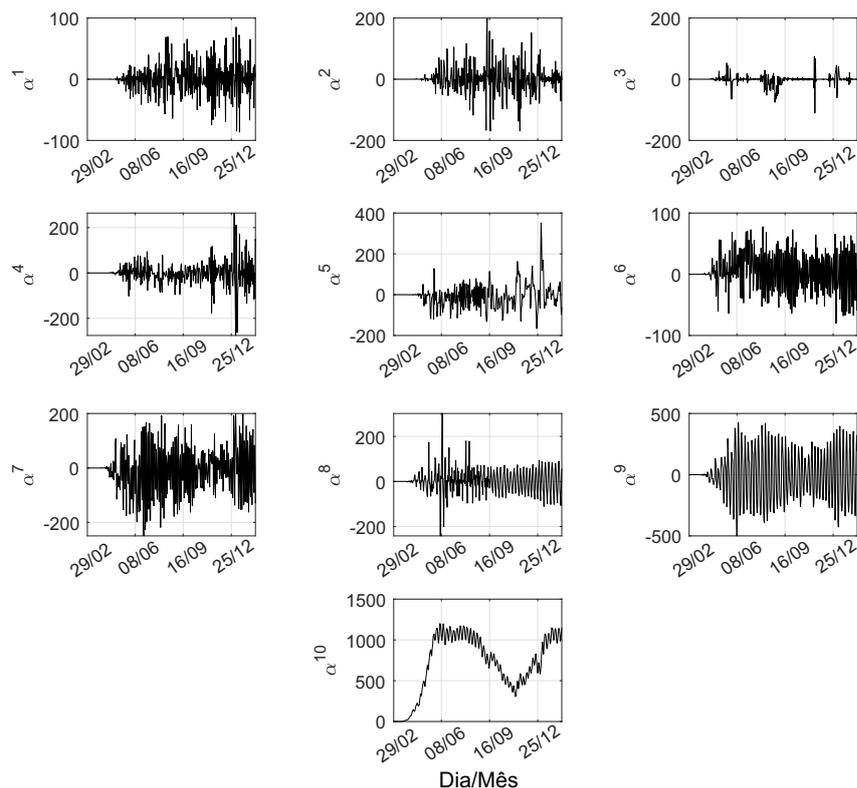


Figura 76 – Comportamento temporal das componentes não-observáveis espectrais  $\alpha^j |_{j=1, \dots, 10}$ , as quais foram extraídas a partir dos dados experimentais de óbitos diários registrados no período de 29 de Fevereiro de 2020 a 24 de Maio de 2021 no Brasil.

limites superior e inferior para previsão dos futuros óbitos diários no Brasil. A eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo baseado em sua estimação inicial a partir dos dados experimentais de óbitos diários de COVID-19, registrados no período de 29 de fevereiro de 2020 a 13 de fevereiro 2021 no Brasil, para previsão de futuros (validação) óbitos diários, é mostrada na Figura 78a. Conforme é observado que a previsão não é mais suficiente para representar o comportamento dinâmico dos dados epidemiológicos de validação, faz-se necessária uma nova atualização das projeções intervalares, baseada no rastreamento em tempo real dos dados experimentais pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, para obtenção de novas previsões de óbitos diários por Covid-19 no Brasil. Os resultados de atualização do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão da propagação dinâmica da Covid-19 relacionada aos óbitos diários, são mostrados nas Figuras 78b - 78d. Pode ser observada a eficiência da metodologia proposta quanto a adaptabilidade das projeções intervalares obtidas em tempo real pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo, o que ilustra sua aplicabilidade para o rastreamento dinâmico e previsão dos dados experimentais de propagação da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no Brasil. A variação do número de regras *fuzzy* do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, de acordo com as flutuações dinâmicas do conjunto de dados experimentais, no período de 29 de fevereiro de 2020 a 24 de maio de 2021, é ilustrada na Figura 79. A estimação das matrizes de ganho de Kalman *fuzzy* tipo-2

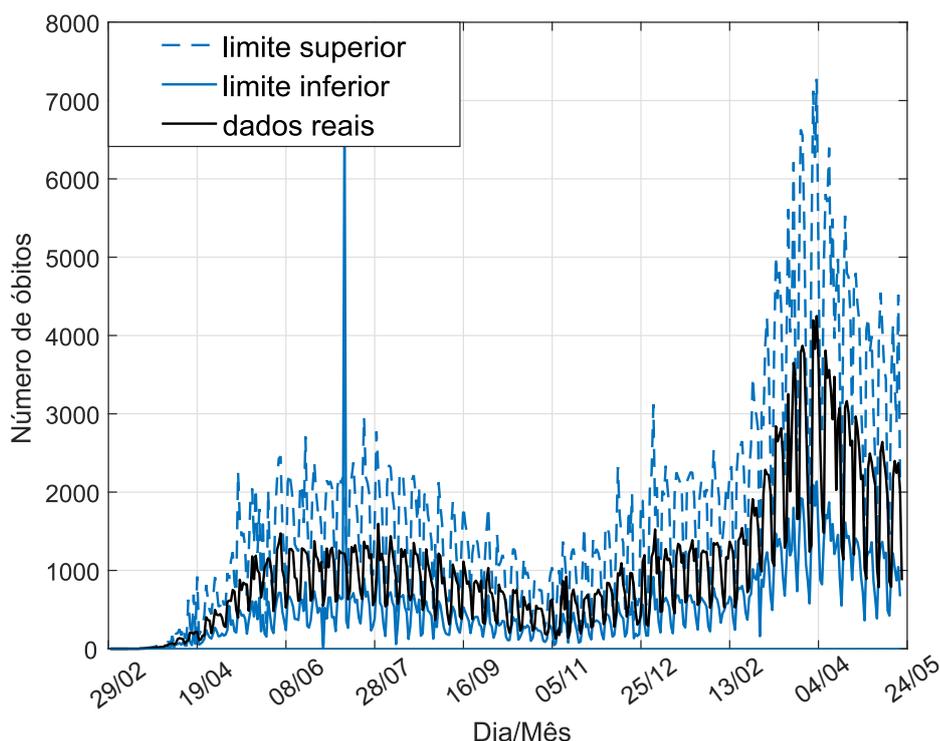
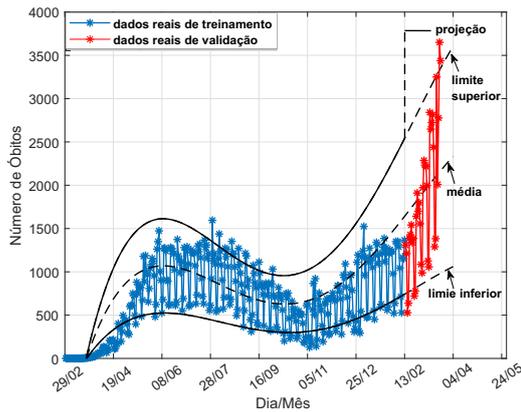


Figura 77 – Região de confiança obtida pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo para o rastreamento dos dados experimentais de óbitos diários, de 29 de fevereiro de 2020 a 13 de fevereiro de 2021, no Brasil.

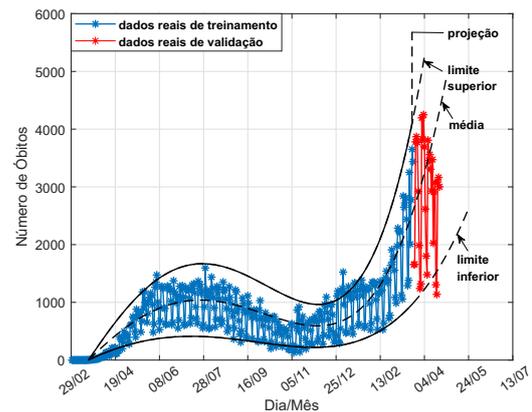
$\mathbf{K}^i |^{i=1, \dots, 5}$ , durante o treinamento incremental do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, no período de 29 de Fevereiro de 2020 a 24 de Maio de 2021, é mostrada na Figura 80. Uma vez que nesta aplicação não há a presença de variáveis de entrada e o objetivo é realizar a previsão da dinâmica de propagação da COVID-19 no Brasil a partir dos dados experimentais de óbitos diários, a estimação recursiva das matrizes *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\tilde{\mathbf{A}}^i$  e  $\tilde{\mathbf{C}}^i$ , com  $i = 1, \dots, 5$ , que compõem a proposição consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, durante seu treinamento incremental, no período de 29 de Fevereiro de 2020 a 24 de Maio de 2021, são mostradas nas Figuras 81 e 82, respectivamente. Os graus de ativação instantâneos superior e inferior referentes ao sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, durante seu treinamento incremental, no período de 29 de Fevereiro de 2020 a 24 de Maio de 2021, são mostrados na Figura 83.

### 7.1.1 Análise Comparativa e Discussões

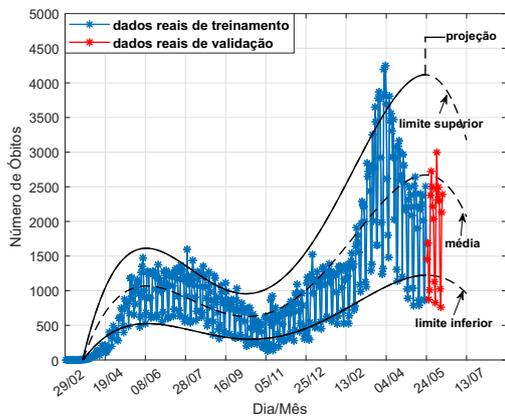
Nesta seção, uma discussão mais detalhada sobre os resultados mostrados na Seção 7.1, conforme análise comparativa da metodologia proposta com as abordagens em (ARUNKUMAR et al., 2021; HAZARIKA; GUPTA, 2020; GAUTAM, 2021; DAIRI et al., 2021; AL-QANESS et al., 2021), considerando as métricas RMSE (Erro Médio Quadrado Médio), MAE (Erro Médio Absoluto), coeficiente de determinação ( $R^2$ ) e MAPE (Erro Percentual Médio Absoluto), é apresentada.



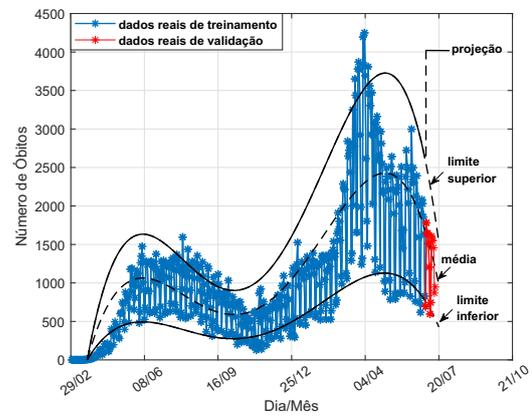
(a) Previsão no período de 14 de Fevereiro de 2021 a 14 de Março de 2021 para o Brasil.



(b) Previsão no período de 15 de Março de 2021 a 20 de Abril de 2021 para o Brasil.



(c) Previsão no período de 25 de Maio de 2021 a 15 de Junho de 2021 para o Brasil.



(d) Previsão no período de 07 de Julho de 2021 a 20 de Julho de 2021 para o Brasil.

Figura 78 – Desempenho do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo para o rastreamento e previsão da propagação dinâmica da COVID-19 relacionada aos óbitos diários no Brasil: (a) atualização em 13 de fevereiro de 2021; (b) atualização em 14 de março de 2021; (c) atualização em 24 de maio de 2021; (d) atualização em 06 de julho de 2021.

A abordagem em (ARUNKUMAR et al., 2021) é baseada em modelos *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA) e *Seasonal Auto-Regressive Integrated Moving Average* (SARIMA) para previsão da dinâmica de propagação da COVID-19 no Brasil, considerando um horizonte de previsão de 60 dias. A eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, comparada com a abordagem em (ARUNKUMAR et al., 2021), é mostrada na Tabela 8. Embora a abordagem em (ARUNKUMAR et al., 2021) seja capaz de capturar a sazonalidade e as tendências no conjunto de dados experimental por meio do modelo SARIMA, ela apresenta desempenho inferior em comparação ao filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, uma vez que ambos os modelos ARIMA e SARIMA consideram apenas características lineares do conjunto de dados utilizado para modelagem da dinâmica de propagação da COVID-19, o que tende a aumentar os erros de previsão de dados epidemiológicos variantes no tempo (ZHANG, 2003). Diferentemente da abordagem em (ARUNKUMAR et al., 2021), o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo considera uma

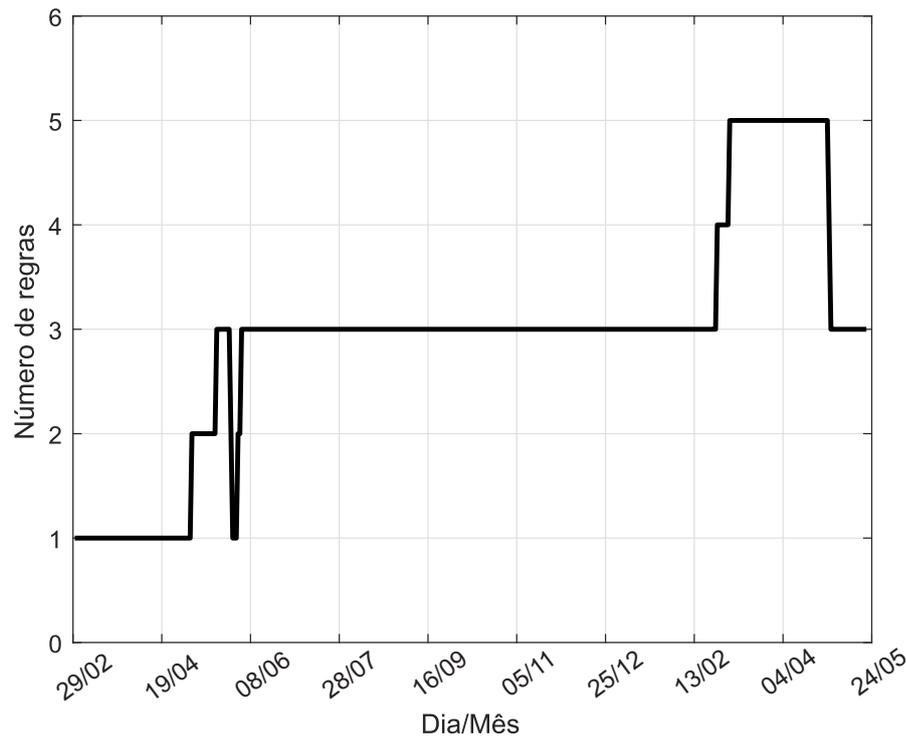


Figura 79 – Variação do número de regras *fuzzy*, durante o treinamento incremental do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, para rastreamento dinâmico e previsão dos dados experimentais referentes aos órbitos diários por Covid-19 registrados no período de 29 de Fevereiro de 2020 a 24 de Maio de 2021 no Brasil.

compensação paralela e distribuída associada a cada região de operação intervalar definida sobre o conjunto de dados experimentais para melhor aproximação da dinâmica variável no tempo inerente aos dados de propagação da COVID-19.

Tabela 8 – Análise comparativa entre o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo e a abordagem em (ARUNKUMAR et al., 2021) para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil.

Metodologia	RMSE	MAE	R <sup>2</sup>	MAPE(%)
abordagem em (ARUNKUMAR et al., 2021)	$1.53 \times 10^2$	$1.36 \times 10^2$	0.9123	0.254
filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo	127.5724	44.1667	0.9951	$3.4836 \times 10^{-4}$

Na abordagem em (HAZARIKA; GUPTA, 2020) é proposta uma rede *Wavelet-Coupled Random Vector Functional Link* (WCRVFL), baseada em transformada *wavelet*, para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil, dentro de um horizonte de 60 dias, usando um procedimento de normalização do conjunto de dados a partir da seguinte formulação:

$$\check{z}_k = \frac{z_k - \min(\mathbf{Z})}{\max(\mathbf{Z}) - \min(\mathbf{Z})}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (7.1)$$

onde  $\mathbf{Z} = [z_1, z_2, \dots, z_N]^T$  é o conjunto de dados experimentais,  $\check{z}_k$  é o valor normalizado de  $z_k$ , e  $\min(\mathbf{Z})$  e  $\max(\mathbf{Z})$  são os valores máximo e mínimo de  $\mathbf{Z}$ , respectivamente.

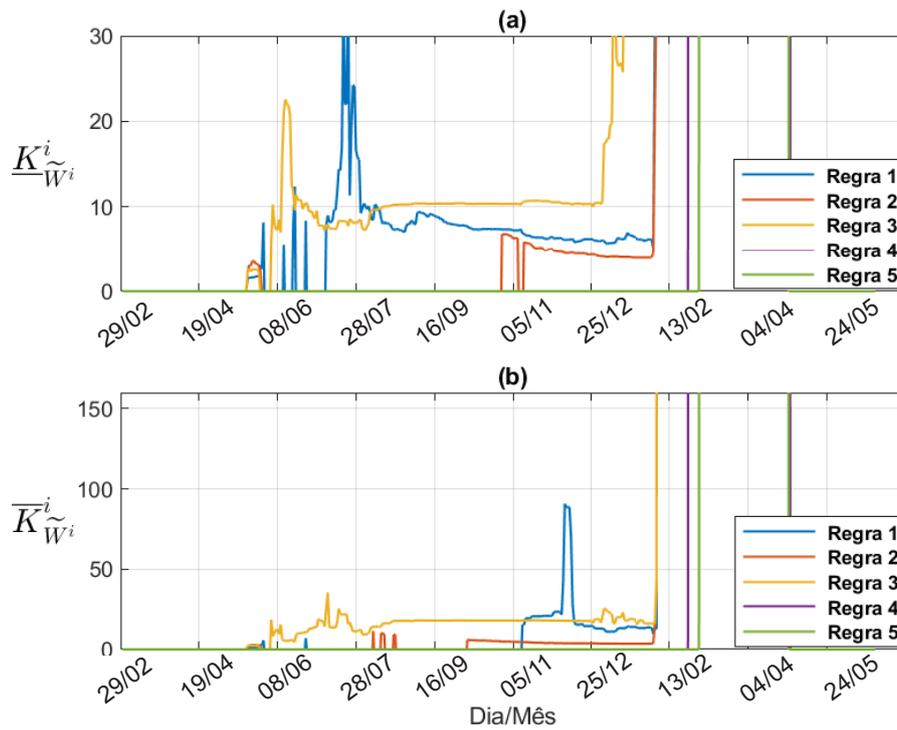


Figura 80 – Ganhos de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalares, durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários diários no período de 29 de Fevereiro de 2020 a 24 de Maio de 2021, no Brasil: (a) Ganho de Kalman inferior, (b) Ganho de Kalman superior.

A eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, comparado à abordagem em (HAZARIKA; GUPTA, 2020), é mostrada na Tabela 9. Conforme pode ser visto, uma vez que a abordagem em (HAZARIKA; GUPTA, 2020) utiliza diferentes tipos de transformada *wavelet* para processar a não estacionariedade do conjunto de dados experimentais, esta apresenta resultados competitivos em relação ao filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, porém seu desempenho é ligeiramente inferior devido à sua limitação quanto a determinação do número ótimo de nós da camada oculta da rede WCRVFL, o ajuste da escala da faixa de randomização uniforme para o estimador *wavelet* e quanto a precisão dos dados disponíveis.

Tabela 9 – Análise comparativa entre o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo e a abordagem em (HAZARIKA; GUPTA, 2020) para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil.

Metodologia	RMSE	MAE	R <sup>2</sup>	MAPE(%)
abordagem em (HAZARIKA; GUPTA, 2020)	0.006190	0.004880	0.999450	0.00745
filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo	0.002875	0.000526	0.999856	0.00642

A abordagem em (GAUTAM, 2021) é baseada em rede neural do tipo *Long Short-Term Memory* (LSTM) e no método de aprendizado por transferência para previsão da

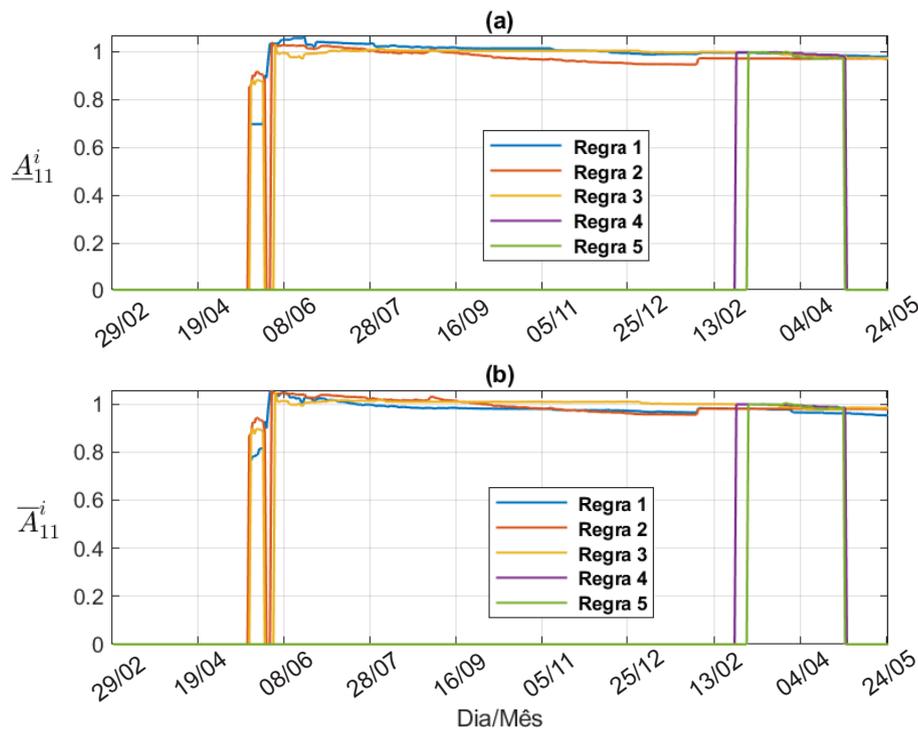


Figura 81 – Estimação recursiva da matriz de estados *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\widetilde{\mathbf{A}}^i$ , para rastreamento dinâmico e previsão dos dados experimentais referentes aos órbitos diários no Brasil: (a) Matriz de estados inferior, (b) Matriz de estados superior.

dinâmica de propagação da COVID-19 no Brasil, considerando um horizonte de 5 dias. A eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, comparada com a abordagem em (GAUTAM, 2021), é mostrada na Tabela 10. Como pode ser visto, uma vez que a abordagem em (GAUTAM, 2021) aplica o método de aprendizado por transferência para estimação dos parâmetros da rede neural LSTM para modelagem da dinâmica não-linear do conjunto de dados experimental, ela apresenta desempenho ligeiramente inferior em comparação ao filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo uma vez não considera a variabilidade da dinâmica do conjunto de dados experimentais para atualização das previsões da propagação da COVID-19 (YANG; DAI; ZHANG, 2020). Por outro lado, o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo apresenta maior eficiência devido ao mecanismo de adaptação de sua estrutura, com o aumento ou redução do número de regras *fuzzy*, de acordo com a dinâmica variável no tempo dos dados de propagação da COVID-19.

Tabela 10 – Análise comparativa entre o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo e a abordagem em (GAUTAM, 2021) para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil.

Metodologia	RMSE	MAE	R <sup>2</sup>	MAPE(%)
abordagem em (GAUTAM, 2021)	0.3800	0.3400	0.99913	1.23 × 10 <sup>-1</sup>
filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo	0.2500	0.0625	0.99954	1.54 × 10 <sup>-3</sup>

A abordagem em (DAIRI et al., 2021) investiga o desempenho de diferentes modelos

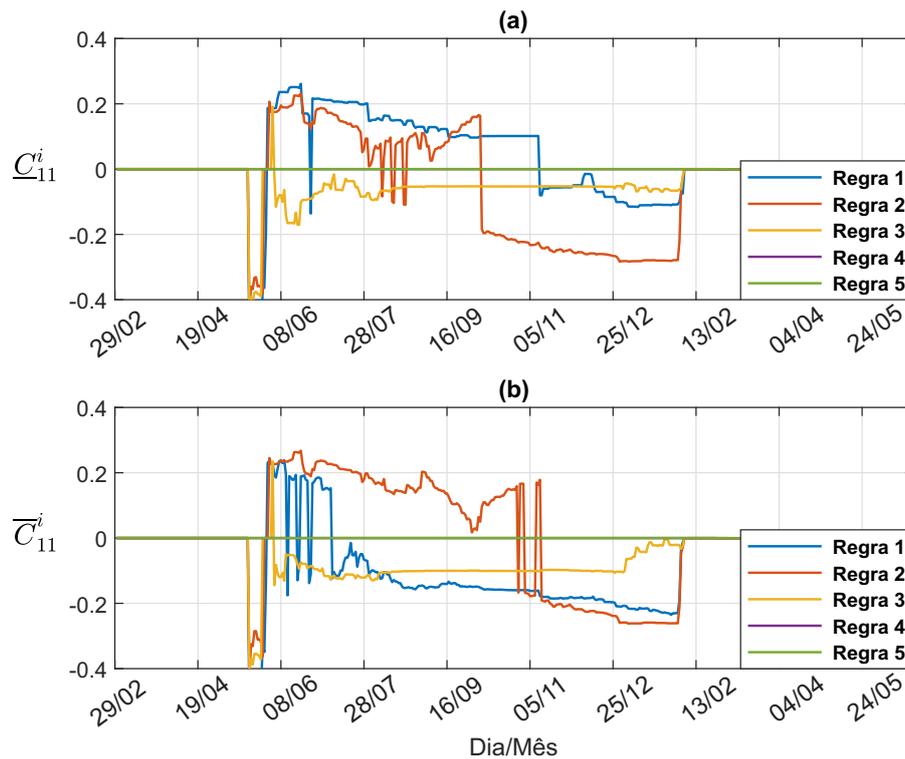


Figura 82 – Estimação recursiva da matriz de saída *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\tilde{C}_{11}^i$ , para rastreamento dinâmico e previsão dos dados experimentais referentes aos órbitos diários no Brasil: (a) Matriz de saída inferior, (b) Matriz de saída superior.

de aprendizado profundo (*deep learning*) e aprendizado de máquina (*machine learning*) para previsão da dinâmica de propagação da COVID-19 no Brasil, considerando previsões de um passo à frente. O modelo investigado está baseado em redes neurais convolucionais híbridas - *Long Short Term Memory* (LSTM-CNN). A eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, comparada com a abordagem em (DAIRI et al., 2021), é mostrada na Tabela 11. Como pode ser visto, embora a abordagem em (DAIRI et al., 2021) apresente resultados satisfatórios, uma vez que o modelo LSTM-CNN tem a capacidade de aprender características de alto nível inerentes ao conjunto de dados, seu desempenho é inferior ao do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo devido à sua limitação computacional durante o ajuste dos hiperparâmetros do modelo e na determinação do número de camadas, do número de unidades neurais por camada, da função de ativação, da taxa de aprendizado e outros parâmetros (AGGARWAL, 2019).

Tabela 11 – Análise comparativa entre o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo e a abordagem em (DAIRI et al., 2021) para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil.

Metodologia	RMSE	MAE	R <sup>2</sup>	MAPE(%)
abordagem em (DAIRI et al., 2021)	$4.490 \times 10^4$	$3.39 \times 10^4$	0.99900	2.891
filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo	$1.122 \times 10^4$	158.2717	0.99998	$3.834 \times 10^{-5}$

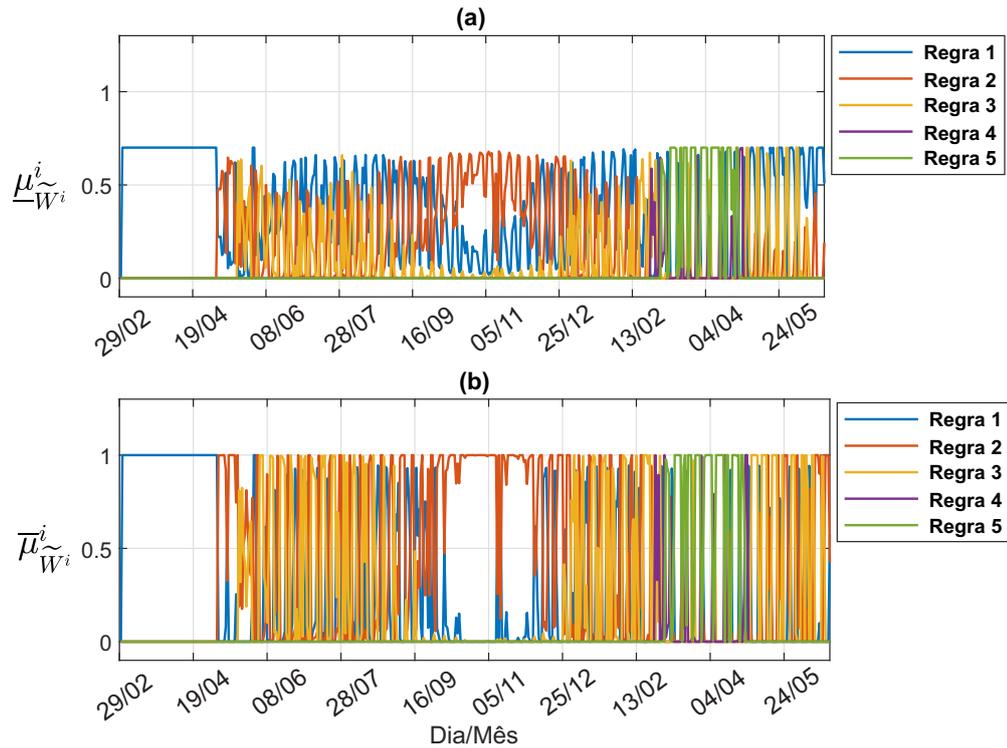


Figura 83 – Graus de ativação *fuzzy* normalizados instantâneos do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, durante seu treinamento incremental para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 no período de 29 de fevereiro de 2020 a 06 de julho de 2021, no Brasil: (a) Graus de ativação superiores, (b) Graus de ativação inferiores.

A abordagem em (AL-QANESS et al., 2021) é baseada em um novo modelo de previsão de curto prazo usando uma versão aprimorada do sistema de inferência neuro-*fuzzy* adaptativo (do inglês *Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System* - ANFIS) para previsão da dinâmica de propagação da COVID-19 no Brasil, considerando um horizonte de 12 dias. A eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, comparada com a abordagem em (AL-QANESS et al., 2021), é mostrada na Tabela 12. Uma vez que a abordagem em (AL-QANESS et al., 2021) considera as incertezas inerentes à dinâmica de propagação da COVID-19 por meio da aplicação da teoria de sistemas *fuzzy*, ela apresenta resultados competitivos em comparação com o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, mas seu desempenho é inferior devido a sua estrutura fixa para previsão da dinâmica variável no tempo dos dados epidemiológicos experimentais. Por outro lado, as incertezas inerentes ao conjunto de dados experimentais são processadas pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo proposto através da aproximação do comportamento dinâmico em regiões de operação *fuzzy* intervalares definidas sobre as flutuações dinâmicas da propagação da COVID-19 a cada novo instante de tempo, proporcionando a redução de erros de rastreamento e previsão.

Tabela 12 – Análise comparativa entre o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo e a abordagem em (AL-QANESS et al., 2021) para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil.

Metodologia	RMSE	MAE	R <sup>2</sup>	MAPE(%)
abordagem em (AL-QANESS et al., 2021)	19.432	14.273	0.904	0.3117
filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 evolutivo	11.547	3.330	0.999	$6.33 \times 10^{-6}$

## 7.2 Filtragem e Rastreamento de Kalman *Fuzzy* Evolutivo Tipo-2 Intervalar Aplicado aos Dados de um 2DoF Helicóptero

O filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo proposto foi aplicado para a filtragem e rastreamento dos dados experimentais de entrada e saída de um helicóptero com dois graus de liberdade (2DoF), o qual é mostrado na Figura 84 e seu respectivo diagrama de corpo livre é mostrado na Figura 85. O helicóptero é um sistema dinâmico MIMO (*Multiple Inputs and Multiple Outputs*), o qual possui duas variáveis de entrada (tensão de controle do ângulo de elevação  $u_\varphi \in [-15V, +15V]$  e tensão de controle do ângulo de azimute  $u_\vartheta \in [-24V, +24V]$ ) e duas variáveis de saída (ângulo de elevação  $y_\varphi \in [-40^\circ, +40^\circ]$  e ângulo de azimute  $y_\vartheta \in [-360^\circ, +360^\circ]$ ). Os dados experimentais, com comprimento total de 751 amostras, relacionados às variáveis de entrada  $u_\varphi$  e  $u_\vartheta$  do helicóptero 2DoF, obtidos em experimento prático na planta estudada, são mostrados nas Figuras 86-87. Os dados experimentais, com comprimento total de 751 amostras, relacionados às variáveis de saída  $y_\varphi$  e  $y_\vartheta$  do helicóptero 2DoF são mostrados nas Figuras 88-89.

Considerando as primeiras 300 amostras de dados experimentais de entrada e saída do helicóptero 2DoF, o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo foi inicialmente estimado, considerando  $\mathbf{z} = [y_\varphi \ y_\vartheta]^T$  na Eq. (5.13). A análise espectral singular recursiva multivariável foi capaz de obter os componentes espectrais relacionados aos dados experimentais de entrada e saída do helicóptero 2DoF. O número de componentes espectrais não-observáveis foi definido de acordo com a métrica *Variance Accounted For*, dentro de um intervalo de 2 a 10 componentes, conforme mostrado na Fig. 90. A eficiência de diferentes quantidades de componentes espectrais não-observáveis na Fig. 90 para representar o conjunto de dados experimentais de entrada e saída do helicóptero 2DoF, de acordo com o critério VAF, é mostrada na Tabela 7. A partir da Figura 90 e da Tabela 13, considerando o balanço custo-benefício para aplicação prática da metodologia proposta, o número apropriado de componentes não-observáveis foi estabelecido como  $\xi = 2$ , com valor VAF de 99,99 % de eficiência para representar o conjunto de dados experimentais original e que, ao mesmo tempo, reduz a carga computacional do algoritmo do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo. Os componentes espectrais não-observáveis extraídas dos dados experimentais de entrada e saída do helicóptero 2DoF são mostrados nas Figuras 91-94.



Figura 84 – Sistema dinâmico MIMO referente ao helicóptero 2DoF. Fonte: Elaborado pela autora.

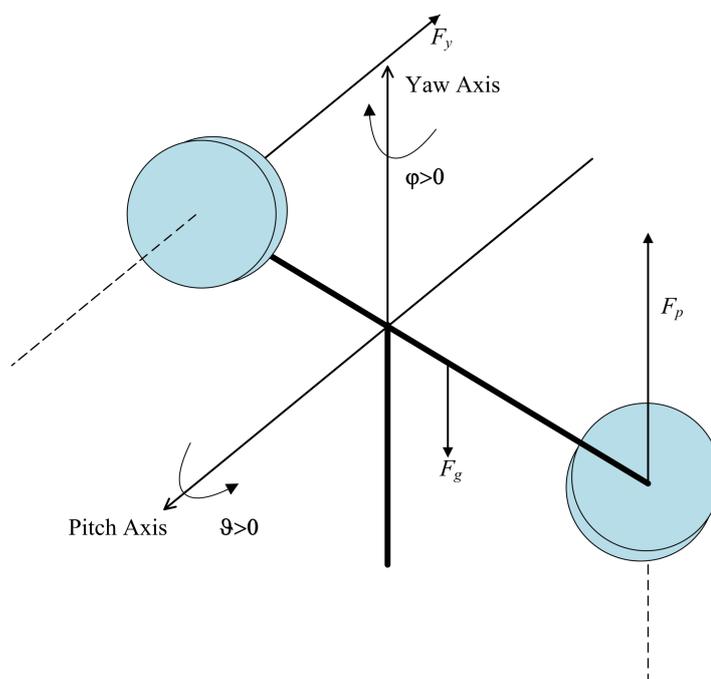


Figura 85 – Diagrama de corpo livre do helicóptero 2DoF. Fonte: Manual do usuário Quanser - *2DoF Helicopter* (QUANSER, 2012).

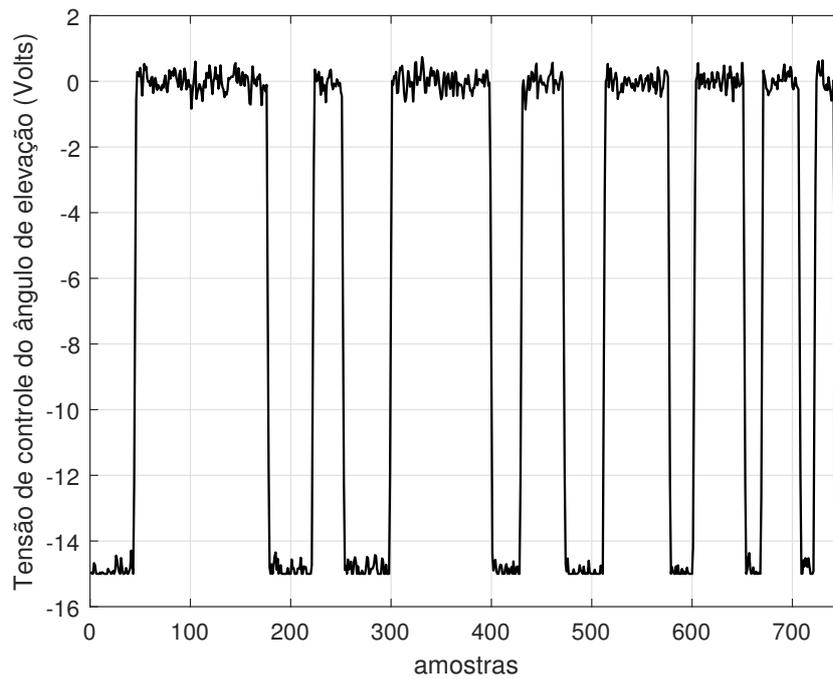


Figura 86 – Variável de entrada do helicóptero 2DoF referente a tensão de controle do ângulo de elevação  $u_\varphi$ .

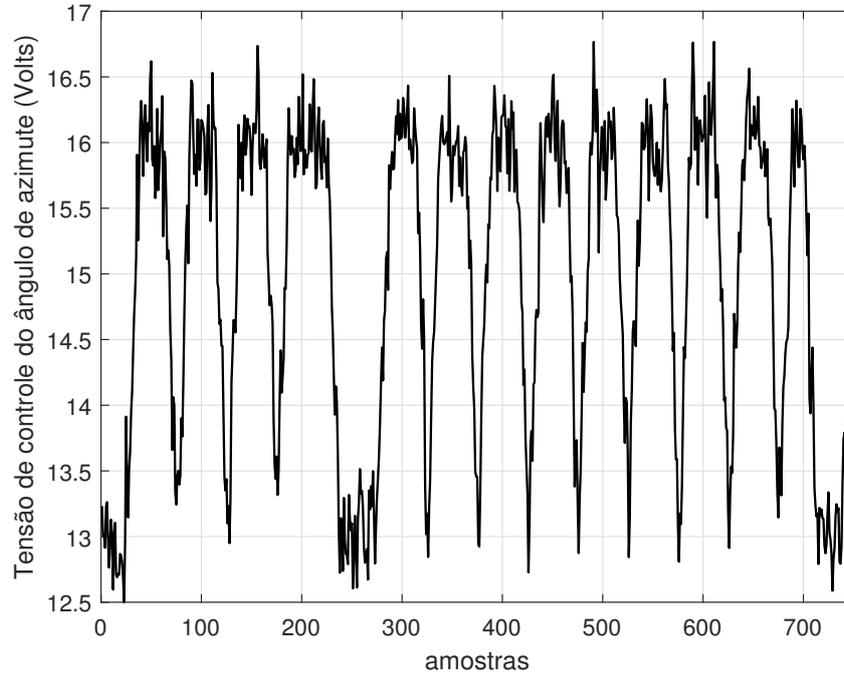
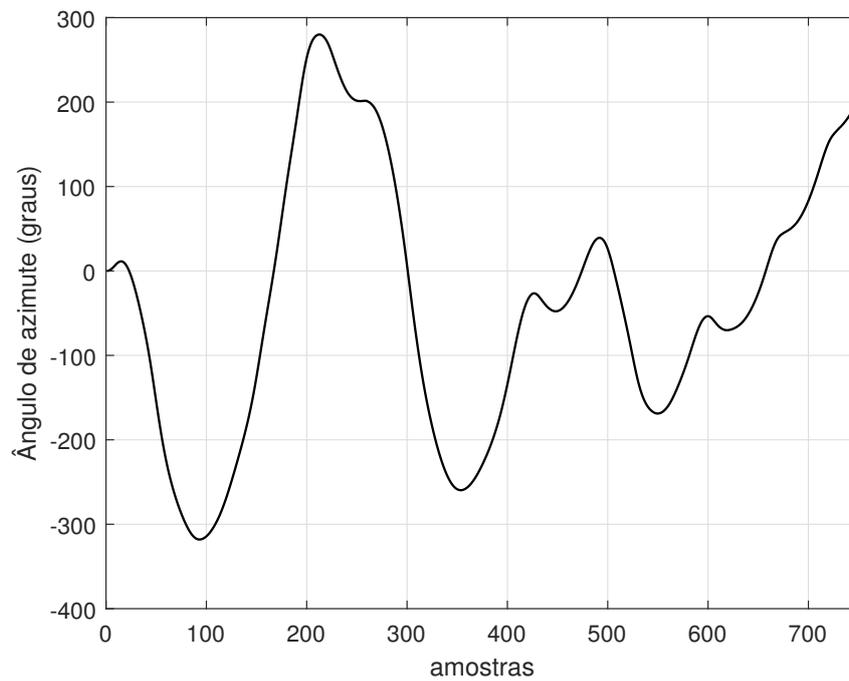
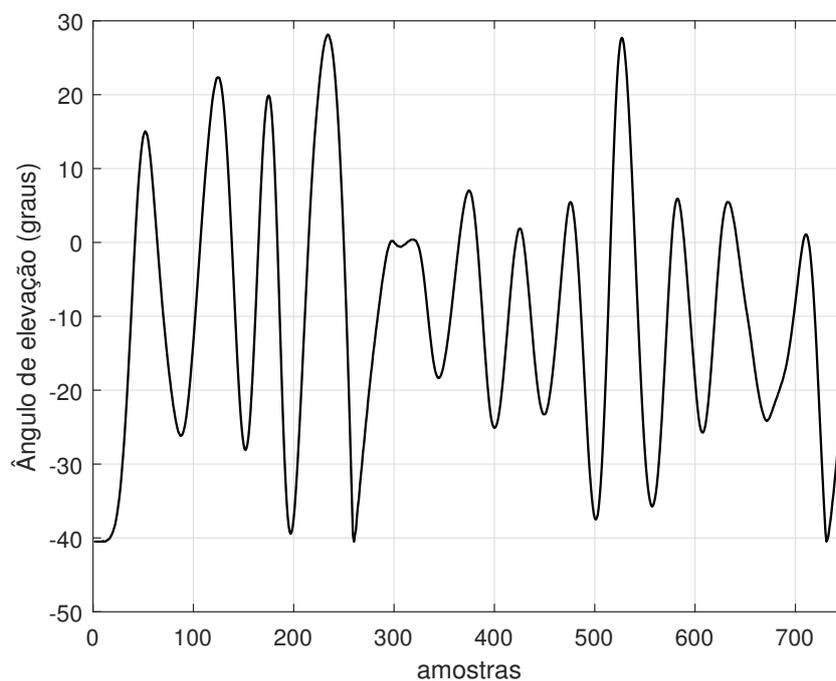


Figura 87 – Variável de entrada do helicóptero 2DoF referente a tensão de controle do ângulo de azimute  $u_\theta$ .

Como pode ser visto nas Figuras 91-94, as componentes espectrais  $\alpha^1$  estão associadas a ruído, enquanto as componentes  $\alpha^2$  estão mais correlacionadas com os conjuntos de dados originais de entrada e saída do helicóptero 2DoF. Portanto, os componentes  $\alpha^2$  foram

Figura 88 – Variável de saída do helicóptero 2DoF referente ao ângulo de elevação  $y_\varphi$ .Figura 89 – Variável de saída do helicóptero 2DoF referente ao ângulo de azimute  $y_\theta$ .

utilizados para estimação paramétrica dos submodelos no espaço de estados definidos na proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo.

O particionamento do universo discursivo de  $\mathcal{Z}$  foi realizado pela formulação *fuzzy* tipo-2 do algoritmo de agrupamento Gustafson-Kessel, conforme descrito na Seção 5.2.1,

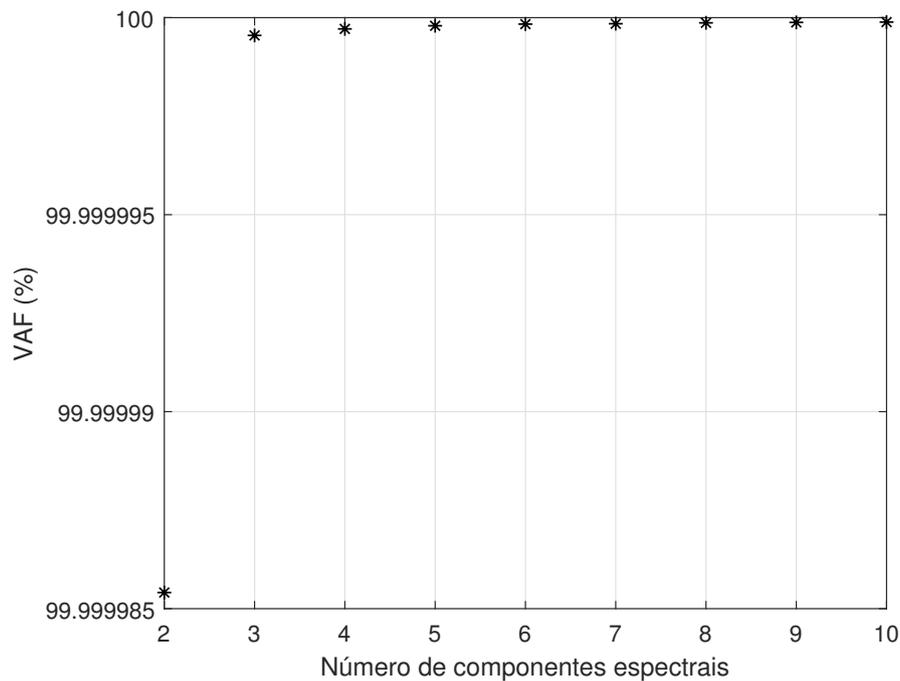


Figura 90 – Eficiência das componentes espectrais não-observáveis para representação dos dados experimentais do helicóptero 2DoF, considerando a métrica VAF.

Tabela 13 – Eficiência de diferentes quantidades de componentes espectrais para representação do conjunto de dados de entrada e saída do helicóptero 2DoF, considerando a métrica VAF.

Número de componentes não-observáveis $\xi$	VAF(%)
2	99.999988
3	99.999997
4	99.999998
5	99.999999
6	99.9999994
7	99.9999996
8	99.9999997
9	99.9999998
10	99.9999999

durante a etapa de treinamento, considerando os seguintes parâmetros:  $L = 3$ , expoente de ponderação  $\tilde{m} = [1.7 \ 2.2]$  e  $\mathcal{E} = 10^{-4}$ . O algoritmo OKID *fuzzy* tipo-2 foi utilizado para obter a estimativa inicial da proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo, conforme descrito na Seção 5.2.3, considerando os seguintes valores de parâmetros: número de parâmetros de Markov  $q = 1$ , dimensões da matriz de Hankel  $\gamma = 30$  e  $\beta = 30$ .

A partir da amostra 301, as partições de  $\mathcal{Z}$  relacionadas às variáveis de saída do helicóptero 2DoF foram atualizadas pela formulação *fuzzy* tipo-2 intervalar do algoritmo de agrupamento *evolving* Takagi-Sugeno, conforme descrito na Seção 5.2.2, tal que a

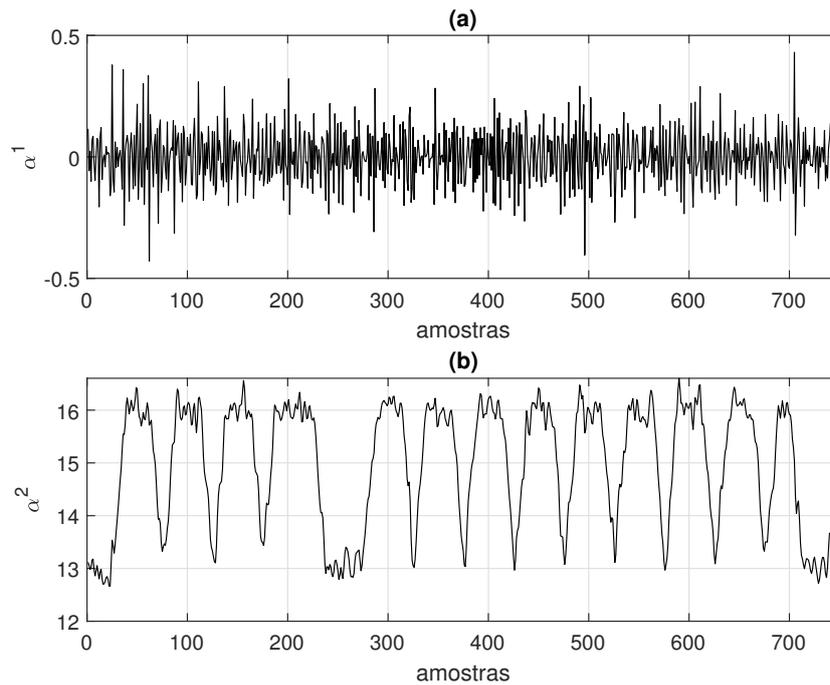


Figura 91 – Comportamento temporal das componentes espectrais não-observáveis  $\alpha^j |_{j=1, \dots, 2}$ , as quais foram extraídas do conjunto de dados referente à variável de entrada da tensão de controle do ângulo de elevação  $u_\varphi$  do helicóptero 2DoF.

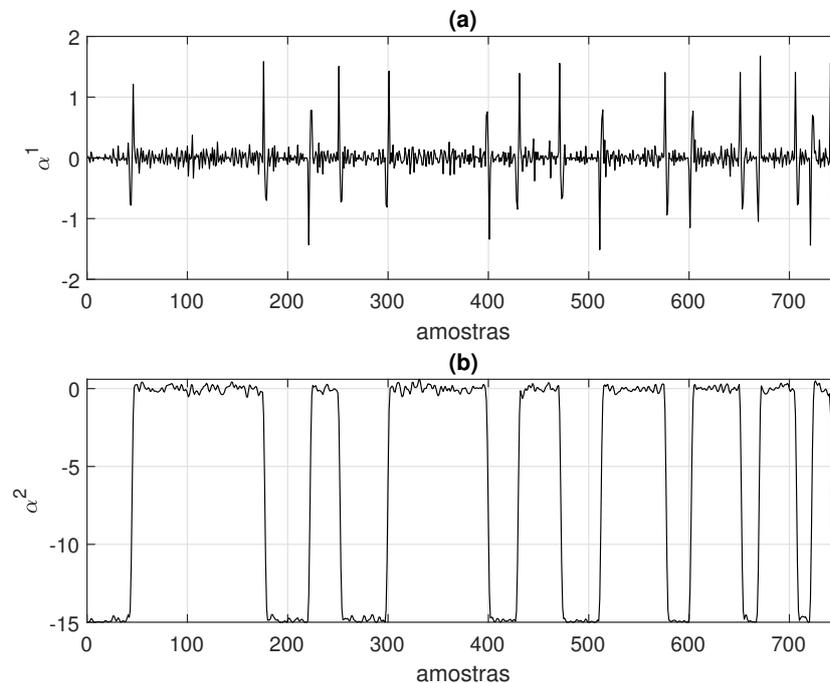


Figura 92 – Comportamento temporal das componentes espectrais não-observáveis  $\alpha^j |_{j=1, \dots, 2}$ , as quais foram extraídas do conjunto de dados referente à variável de entrada da tensão de controle do ângulo de azimute  $u_\varphi$  do helicóptero 2DoF.

proposição do antecedente e o número de regras *fuzzy* puderam ser estimados em cada

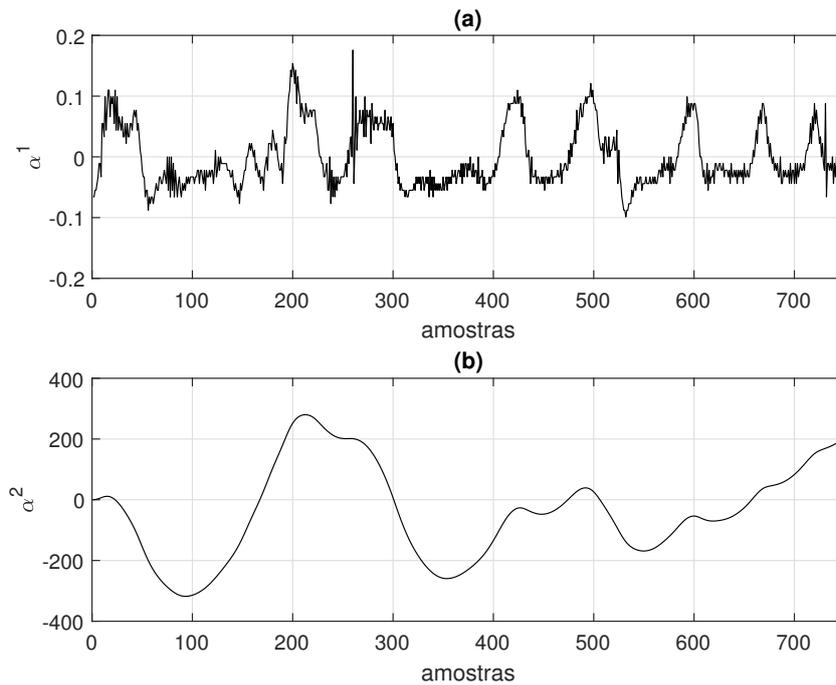


Figura 93 – Comportamento temporal das componentes espectrais não-observáveis  $\alpha^j |_{j=1, \dots, 2}$ , as quais foram extraídas do conjunto de dados referente à variável de saída do ângulo de azimute  $u_\vartheta$  do helicóptero 2DoF.

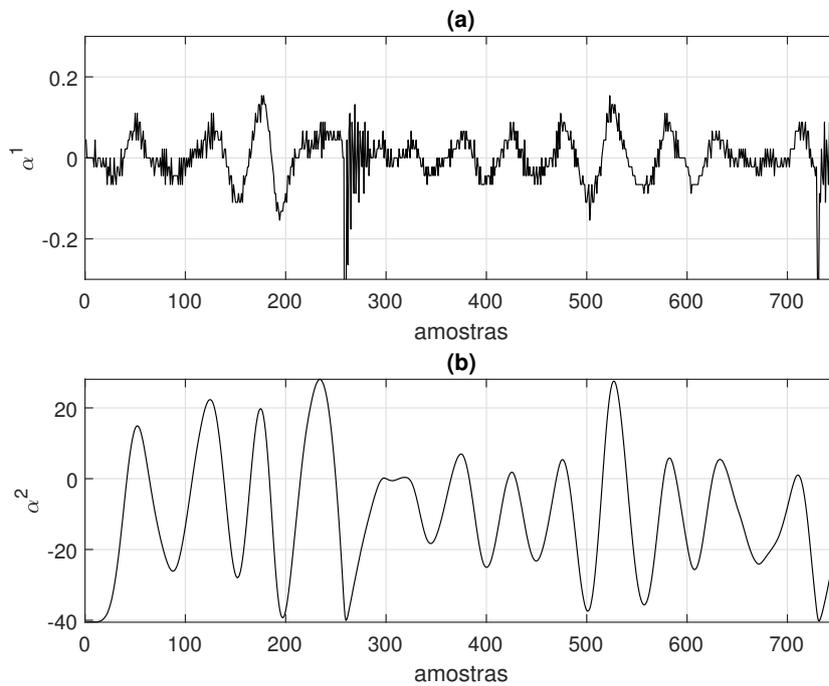


Figura 94 – Comportamento temporal das componentes espectrais não-observáveis  $\alpha^j |_{j=1, \dots, 2}$ , as quais foram extraídas do conjunto de dados referente à variável de saída do ângulo de elevação  $u_\varphi$  do helicóptero 2DoF.

instante de tempo  $k$  durante a etapa de atualização do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2

intervalar evolutivo. Para a implementação do algoritmo de agrupamento *evolving* Takagi-Sugeno tipo-2, foi adotado o valor de  $\eta = 0.01$  (Condição C). O algoritmo OKID *fuzzy* tipo-2 intervalar foi implementado para atualização recursiva da proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo, conforme Eq. (5.13), levando em consideração as partições atualizadas dos dados experimentais como critério de ponderação, bem como as componentes espectrais não-observáveis. A região de confiança, conforme mostrado nas Figuras 95-96, durante a etapa recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo, ilustra a eficiência da metodologia proposta para o rastreamento do ângulo de elevação  $y_\varphi$  e do ângulo de azimute  $y_\theta$  do helicóptero 2DoF. O comportamento

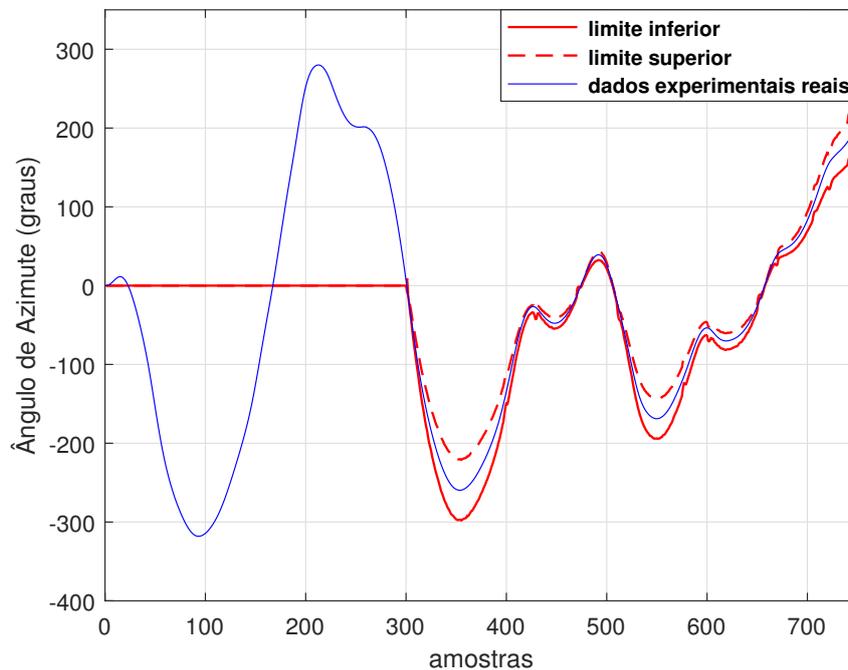


Figura 95 – Região de confiança para o rastreamento dos dados experimentais da saída do ângulo de azimute  $y_\theta$  do helicóptero 2DoF, durante a etapa recursiva.

variável do número de regras *fuzzy* do sistema de inferência filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo, de acordo com as flutuações dinâmicas dos dados experimentais do helicóptero 2DoF, é ilustrado na Fig. 97. A estimação dos elementos da diagonal principal das matrizes de ganho de Kalman *fuzzy* tipo 2 intervalar  $\mathbf{K}^i |^{i=1,\dots,4}$ , durante as etapas de treinamento e recursivas, para o rastreamento do helicóptero 2DoF, são mostrados nas Figuras 98-99. O comportamento temporal do primeiro elemento das matrizes  $\tilde{\mathbf{A}}^i$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}^i$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}^i$  e  $\tilde{\mathbf{D}}^i$ , com  $i = 1, \dots, 4$ , que compõem aos submodelos no espaço de estados da proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, durante as etapas de treinamento e recursiva, para rastreamento do helicóptero 2DoF, são mostrado nas Figuras 100-103. Os graus de ativação superior  $\bar{\mu}_{\tilde{W}^i}^i$  e inferior  $\underline{\mu}_{\tilde{W}^i}^i$  das regras *fuzzy* do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo, em sua etapa de atualização recursiva para o rastreamento do helicóptero 2DoF, são mostrados na Figura 104.

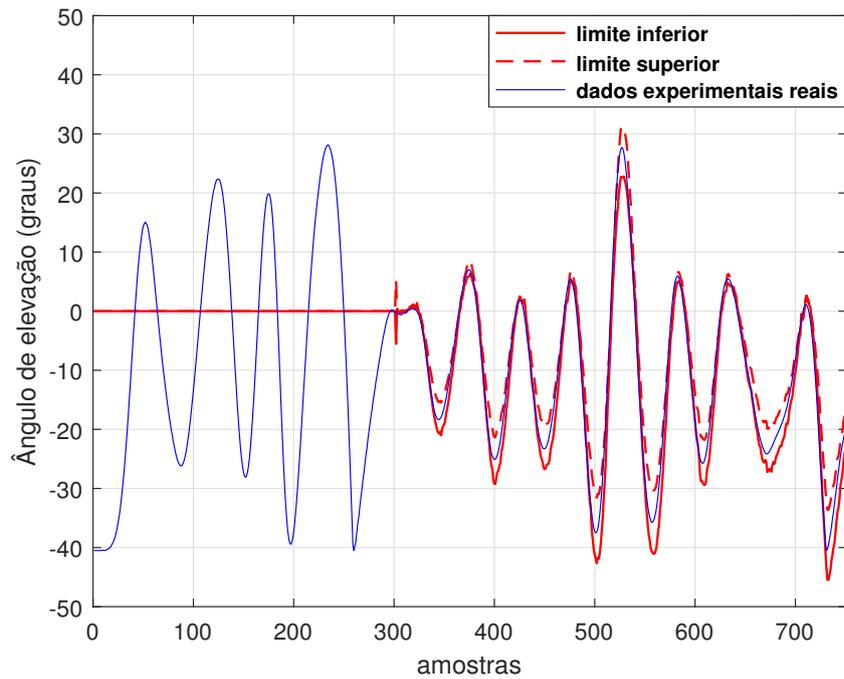


Figura 96 – Região de confiança para o rastreamento dos dados experimentais da saída do ângulo de elevação  $y_\varphi$  do helicóptero 2DoF, durante a etapa recursiva.

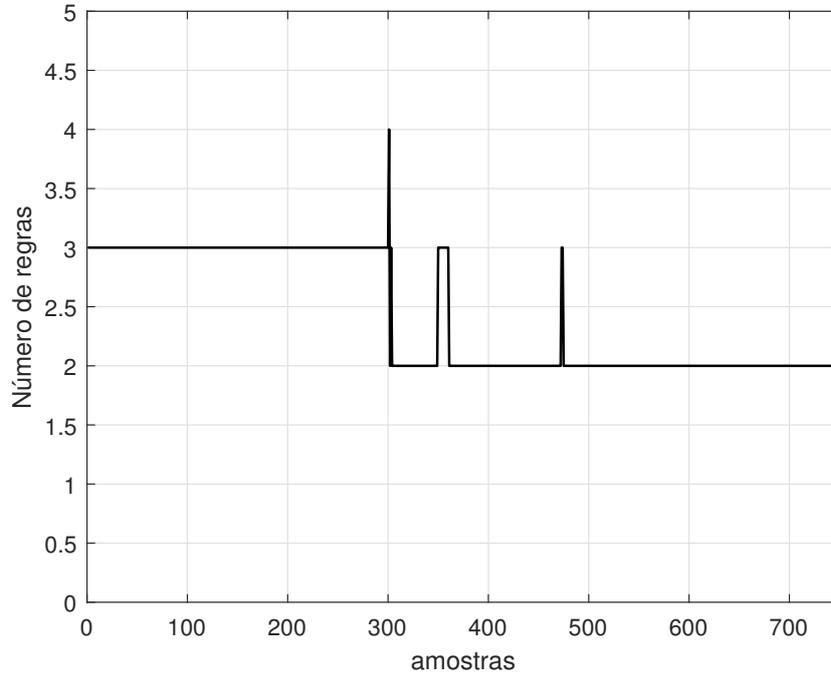


Figura 97 – O comportamento variável no tempo do número de regras fuzzy, durante o treinamento e etapas recursivas, para rastreamento dinâmico do helicóptero 2DoF.

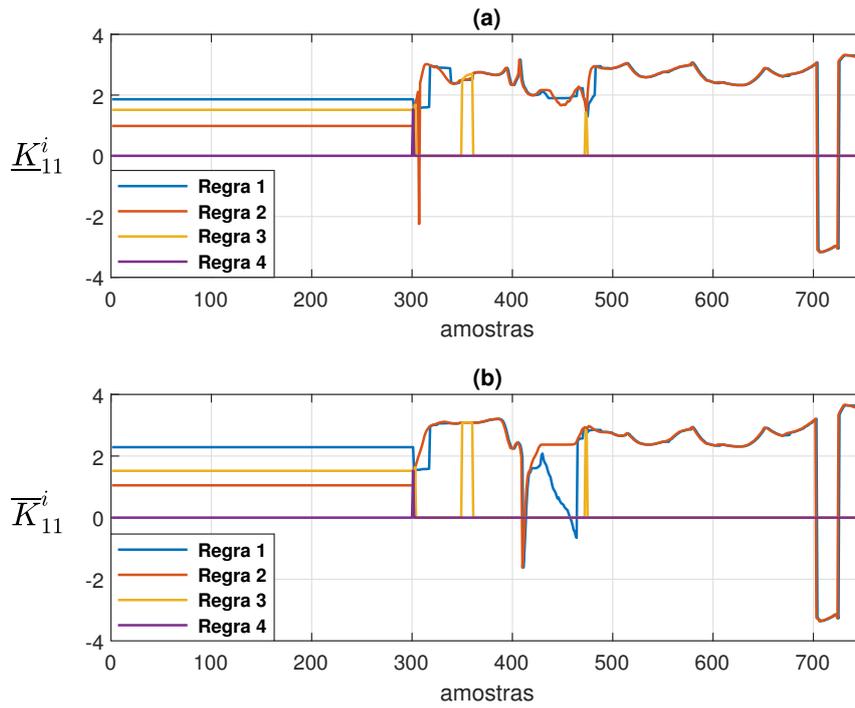


Figura 98 – Estimação do elemento  $\widetilde{K}_{11}^i$  da matriz de ganho de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\widetilde{\mathbf{K}}_{\widetilde{W}^i}^i |_{i=1,\dots,4}$ , durante as etapas de treinamento e recursiva, para rastreamento do helicóptero 2DoF: (a) ganho de Kalman inferior  $\underline{K}_{11}^i$ , (b) ganho de Kalman superior  $\overline{K}_{11}^i$ .

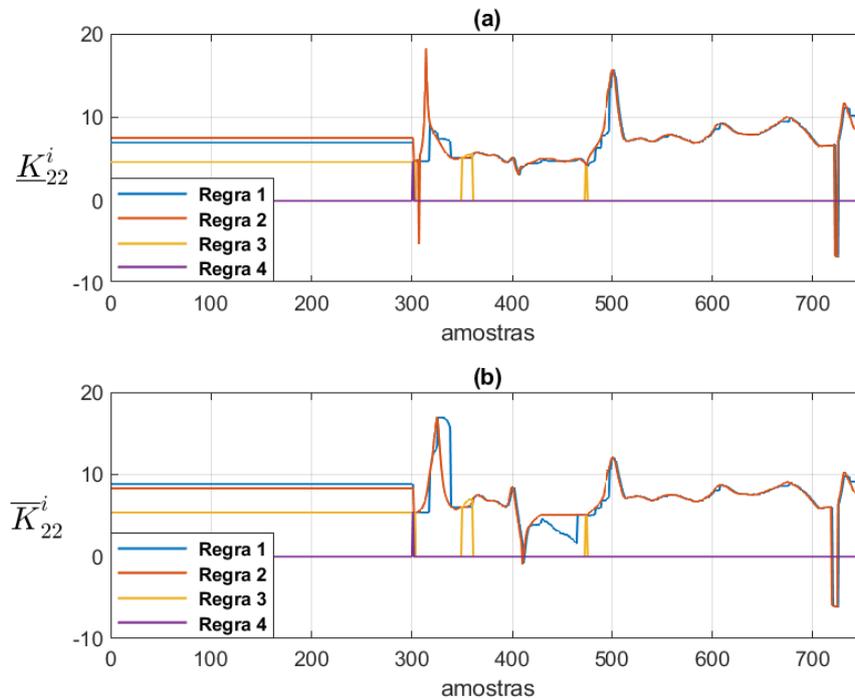


Figura 99 – Estimação do elemento  $\widetilde{K}_{22}^i$  da matriz de ganho de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\widetilde{\mathbf{K}}_{\widetilde{W}^i}^i |_{i=1,\dots,4}$ , durante as etapas de treinamento e recursiva, para rastreamento do helicóptero 2DoF: (a) ganho de Kalman inferior  $\underline{K}_{11}^i$ , (b) ganho de Kalman superior  $\overline{K}_{11}^i$ .

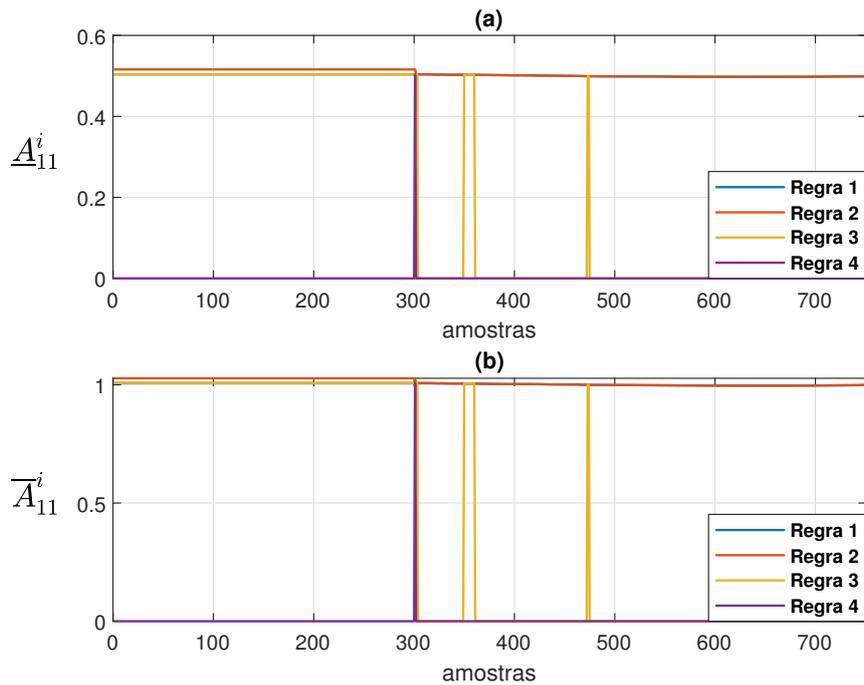


Figura 100 – Comportamento temporal do elemento  $\tilde{A}_{11}^i$  da matriz *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\tilde{\mathbf{A}}_{W^i}^i |^{i=1,\dots,4}$ , durante as etapas de treinamento e recursiva, para rastreamento do helicóptero 2DoF: (a) Limite inferior  $\underline{\mathbf{A}}_{11}^i$ , (b) Limite superior  $\overline{\mathbf{A}}_{11}^i$ .

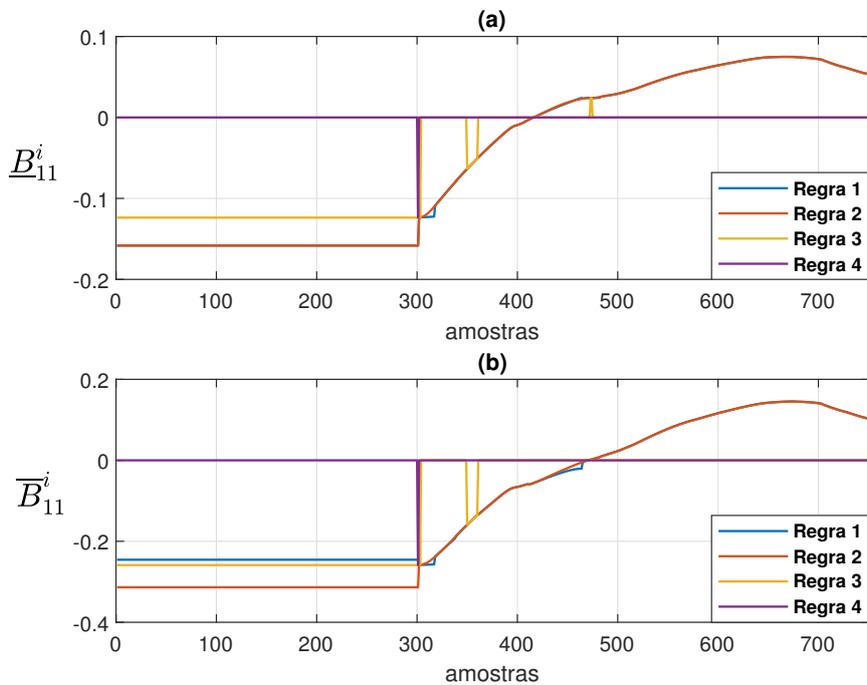


Figura 101 – Comportamento temporal do elemento  $\tilde{B}_{11}^i$  da matriz *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\tilde{\mathbf{B}}_{W^i}^i |^{i=1,\dots,4}$ , durante as etapas de treinamento e recursiva, para rastreamento do helicóptero 2DoF: (a) Limite inferior  $\underline{\mathbf{B}}_{11}^i$ , (b) Limite superior  $\overline{\mathbf{B}}_{11}^i$ .

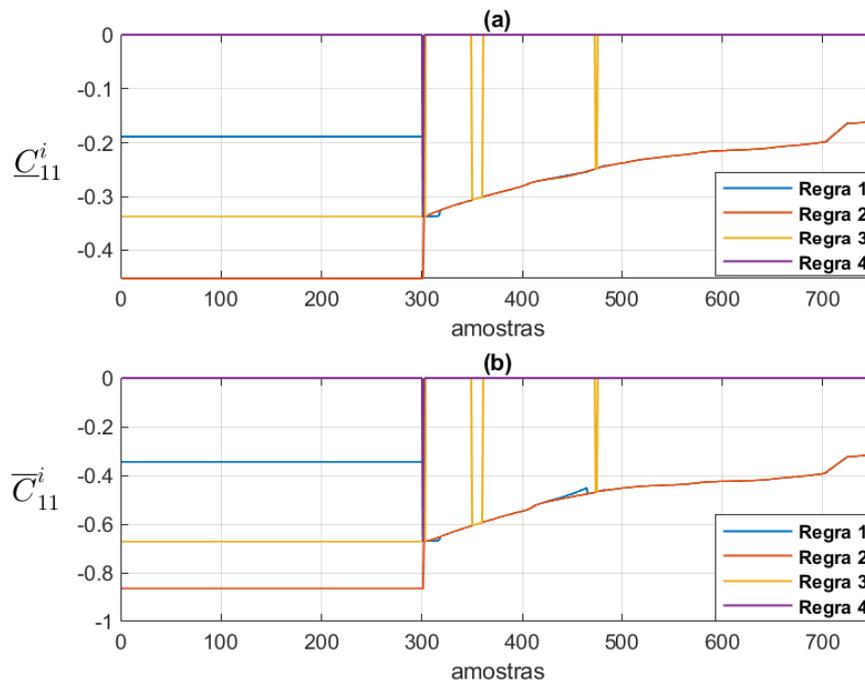


Figura 102 – Comportamento temporal do elemento  $\tilde{C}_{11}^i$  da matriz *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\tilde{C}_{\tilde{W}_i}^i |_{i=1,\dots,4}$ , durante as etapas de treinamento e recursiva, para rastreamento do helicóptero 2DoF: (a) Limite inferior  $\underline{A}_{11}^i$ , (b) Limite superior  $\overline{C}_{11}^i$ .

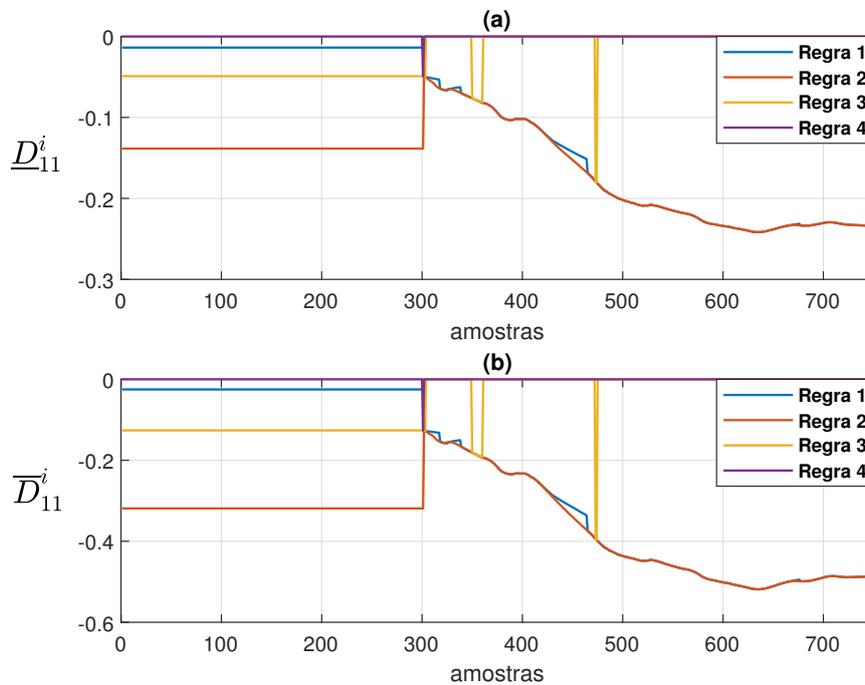


Figura 103 – Comportamento temporal do elemento  $\tilde{D}_{11}^i$  da matriz *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\tilde{D}_{\tilde{W}_i}^i |_{i=1,\dots,4}$ , durante as etapas de treinamento e recursiva, para rastreamento do helicóptero 2DoF: (a) Limite inferior  $\underline{D}_{11}^i$ , (b) Limite superior  $\overline{D}_{11}^i$ .

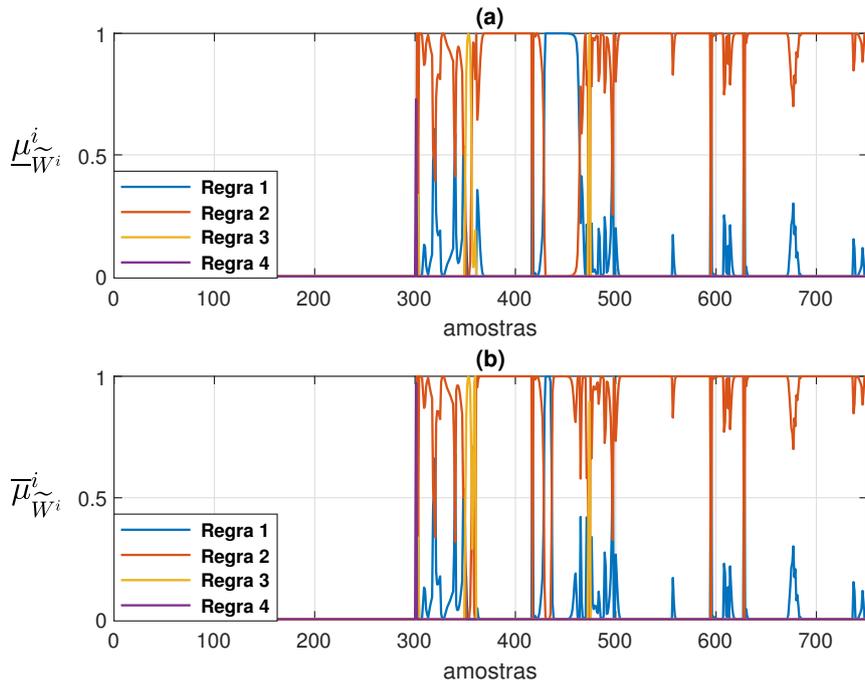


Figura 104 – Graus de ativação *fuzzy* normalizados instantâneos para o rastreamento dos dados experimentais do helicóptero 2DoF: (a) Graus de ativação inferiores  $\underline{\mu}_{W_i}^i$ , (b) Graus de ativação superiores  $\bar{\mu}_{W_i}^i$ .

### 7.2.1 Análise Comparativa e Discussões

Nesta seção, uma discussão acerca dos resultados apresentados na Seção 7.2, bem como uma análise comparativa entre a metodologia proposta e a abordagem em (EVANGELISTA; SERRA, 2022), para a filtragem e rastreamento do helicóptero 2DoF, considerando a métrica VAF, são apresentados. A eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo, de acordo com a formulação teórica descrita no Capítulo 5, para o rastreamento do helicóptero 2DoF, comparada à abordagem em (EVANGELISTA; SERRA, 2022), é mostrada na Tabela 14. Como pode ser observado, conforme Tabela 14, o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo proposto apresenta melhor desempenho quando comparada com a abordagem (EVANGELISTA; SERRA, 2022), largamente citadas na literatura. A abordagem em (EVANGELISTA; SERRA, 2022) apresenta resultados competitivos em relação à metodologia proposta, conforme brevemente discutido na sequência. Na abordagem (EVANGELISTA; SERRA, 2022) é proposto um algoritmo de aprendizagem baseado em variáveis instrumentais *fuzzy* tipo-2 intervalares para modelagem neural-*fuzzy* evolutiva aplicada ao helicóptero 2DoF. Esta abordagem emprega a teoria de sistemas *fuzzy* tipo-2 para o processamento das incertezas inerentes aos dados experimentais e obteve resultados competitivos quando comparado ao filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo proposto para o problema de rastreamento do helicóptero 2DoF. Entretanto, o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo proposto nesta tese apresenta resultados

ligeiramente superiores quando comparado a abordagem em (EVANGELISTA; SERRA, 2022).

Tabela 14 – Análise comparativa do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo para o rastreamento do helicóptero 2DoF.

	Saída	Metodologia	
		Proposta	(EVANGELISTA; SERRA, 2022)
VAF (%)	Azimute $\varphi$	99.9874	99.631
	Elevação $\vartheta$	99.8863	98.837

## Parte IV

### Contextualização Final

## 8 Considerações Finais

Uma abordagem para o projeto de filtros de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivos, baseada na decomposição espectral de dados experimentais, foi proposta neste trabalho de tese de doutorado. A metodologia adotada permite atualizar de forma evolutiva os parâmetros do modelo do filtro em tempo real de modo a adaptá-lo às alterações dinâmicas apresentadas pelo conjunto de dados, bem como permite o processamento das incertezas inerentes às regiões de operação intervalares, estabelecendo uma região de confiança de possíveis soluções como saída do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo.

Uma formulação matemática *fuzzy* tipo-2 foi proposta para o algoritmo de agrupamento *evolving* Takagi-Sugeno a fim de realizar a estimação paramétrica da proposição do antecedente das regras *fuzzy*, bem como o número de regras a cada instante de tempo conforme dinâmica do conjunto de dados. Ainda, uma versão recursiva multivariável do algoritmo de Análise Espectral Singular foi desenvolvida, a fim de extrair componentes espectrais não-observáveis de dados experimentais multivariáveis. A proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo foi atualizada utilizando uma versão *fuzzy* tipo-2 intervalar do algoritmo OKID (*Observer/Kalman Filter Identification*), em função das componentes espectrais não-observáveis, para identificação dos parâmetros dos submodelos lineares no espaço de estados, definidos no consequente das regras *fuzzy*, baseada no método de fatoração QR, o que garante robustez numérica na estimação dos parâmetros de Markov e evita problemas relacionados a estabilidade e tempo de convergência do algoritmo.

Os resultados obtidos demonstram a eficiência e aplicabilidade da metodologia proposta. Os resultados computacionais mostraram a eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo projetado, devido ao pré-processamento espectral realizado, no processo de filtragem e rastreamento do conjunto de dados experimentais da série temporal caótica de Mackey-Glass, quando comparado a várias outras abordagens amplamente citadas na literatura. A metodologia proposta também foi aplicada ao problema de filtragem e rastreamento da trajetória de um veículo aeroespacial, em ambiente ruidoso, demonstrando maior eficiência quando comparada a outras abordagens presentes na literatura.

A aplicabilidade do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo projetado foi verificada por meio dos resultados experimentais obtidos para o rastreamento evolutivo e previsão em tempo real da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil, apresentando melhor desempenho em relação às outras abordagens propostas na literatura neste contexto, devido ao mecanismo de atualização evolutivo de sua estrutura e ao tratamento das incertezas

inerentes aos dados epidemiológicos experimentais. Nesta aplicação, especificamente, a metodologia proposta está contribuindo para preencher uma lacuna no que diz respeito ao tratamento e análise dos dados epidemiológicos, com o objetivo de auxiliar os profissionais da saúde, os órgãos governamentais de saúde, e demais setores da sociedade, em caráter preditivo, no diagnóstico sobre a forma e duração da propagação das ondas de infecção epidemiológicas. Assim, com base nos resultados de previsão é possível tomar decisões e estabelecer planejamentos, com antecipação, no sentido de prevenir maiores danos causados por possíveis avanços de doenças epidemiológicas. A metodologia proposta foi aplicada ainda ao problema de filtragem e rastreamento de um helicóptero com dois graus de liberdade, apresentando maior eficiência quando comparado a outras abordagens presentes na literatura.

## 9 Propostas de Trabalhos Futuros

A metodologia apresentada nesta proposta de tese para o projeto de filtros de Kalman *fuzzy* evolutivos utilizando modelos *fuzzy* tipo-2 intervalares evolutivos, baseado em decomposição espectral de dados experimentais multivariáveis, tendo em vista os resultados alcançados, abre espaço para o desenvolvimento de trabalhos futuros, considerando os seguintes aspectos de interesse:

- Aplicação em novos estudos de caso em problemas reais em diversas áreas de aplicação tais como na indústria, medicina, biomédica, identificação de sistemas, etc;
- Implementação do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo proposto com a ordem do modelo no espaço de estados variante no tempo usando estratégias de processamento paralelo, a fim de minimizar o custo computacional do algoritmo e, assim, garantir alta velocidade de processamento;
- Atualização da estrutura do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo considerando o erro de estimação da série temporal.

## Referências

- ABDOLLAHZADE, M. et al. A new hybrid enhanced local linear neuro-fuzzy model based on the optimized singular spectrum analysis and its application for nonlinear and chaotic time series forecasting. *Information Sciences*, Elsevier BV, v. 295, p. 107–125, feb 2015. Citado na página 63.
- AFRAKHTE, H.; BAYAT, P. A self-evolving type-2 fuzzy energy management strategy for multi-microgrid systems. *Computers and Electrical Engineering*, Elsevier BV, v. 85, p. 106702, jul 2020. Citado na página 28.
- AGELOV, P.; FILEV, D. P.; KASABOV, N. *Evolving Intelligent Systems: Methodology and Applications*. [S.l.]: IEEE COMPUTER SOC PR, 2010. ISBN 0470287195. Citado 3 vezes nas páginas 54, 60 e 70.
- AGGARWAL, C. C. *Neural Networks and Deep Learning*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2019. ISBN 3030068560. Citado na página 130.
- AGUIRRE, L. A. *Introdução à Identificação de Sistemas*. [S.l.]: Editora UFMG, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 38.
- AL-QANESS, M. A. et al. Efficient artificial intelligence forecasting models for COVID-19 outbreak in russia and brazil. *Process Safety and Environmental Protection*, Elsevier BV, v. 149, p. 399–409, may 2021. Citado 5 vezes nas páginas 17, 121, 125, 131 e 132.
- ALMARAASHI, M.; JOHN, R. Tuning of type-2 fuzzy systems by simulated annealing to predict time series. In: *Proc. World Congr. Eng.* [S.l.: s.n.], 2011. v. 2, p. 976–980. Citado 5 vezes nas páginas 81, 95, 96, 97 e 102.
- ALVES, K. S. T. R.; AGUIAR, E. P. de. A novel rule-based evolving fuzzy system applied to the thermal modeling of power transformers. *Applied Soft Computing*, Elsevier BV, v. 112, p. 107764, nov 2021. Citado na página 28.
- ANGELOV, P. *Autonomous Learning Systems: From Data Streams to Knowledge in Real-Time*. [S.l.]: Wiley, 2013. ISBN 1119951526. Citado 3 vezes nas páginas 55, 57 e 71.
- ANGELOV, P.; FILEV, D. An approach to online identification of takagi-sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 34, n. 1, p. 484–498, feb 2004. Citado na página 59.
- ANGELOV, P. P. *Evolving Rule-Based Models*. [S.l.]: Physica-Verlag HD, 2002. ISBN 3790814571. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 57.
- ANTSAKLIS, A. N. M. P. J. *Linear Systems*. [S.l.]: Birkhäuser, 2005. Citado na página 29.
- ARUNKUMAR, K. et al. Forecasting the dynamics of cumulative COVID-19 cases (confirmed, recovered and deaths) for top-16 countries using statistical machine learning models: Auto-regressive integrated moving average (ARIMA) and seasonal auto-regressive

- integrated moving average (SARIMA). *Applied Soft Computing*, Elsevier BV, v. 103, p. 107161, may 2021. Citado 5 vezes nas páginas [17](#), [121](#), [125](#), [126](#) e [127](#).
- ASSA, A.; PLATANIOTIS, K. N. Adaptive kalman filtering by covariance sampling. *IEEE Signal Processing Letters*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 24, n. 9, p. 1288–1292, sep 2017. Citado 2 vezes nas páginas [36](#) e [37](#).
- BABUSKA, R. *Fuzzy Modeling for Control*. [S.l.]: Springer, 1998. Citado na página [69](#).
- BAO, R.-J. et al. Correntropy-based evolving fuzzy neural system. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 26, n. 3, p. 1324–1338, jun 2018. Citado 5 vezes nas páginas [95](#), [96](#), [97](#), [101](#) e [102](#).
- BARTH, R. et al. Synthetic bootstrapping of convolutional neural networks for semantic plant part segmentation. *Computers and Electronics in Agriculture*, Elsevier BV, v. 161, p. 291–304, jun. 2019. ISSN 0168-1699. Nenhuma citação no texto.
- BARUAH, R. D.; ANGELOV, P. DEC: Dynamically evolving clustering and its application to structure identification of evolving fuzzy models. *IEEE Transactions on Cybernetics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 44, n. 9, p. 1619–1631, sep 2014. Citado na página [59](#).
- BASKOV, O. Dual type-2 fuzzy cones and their application in multicriteria choice. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier BV, feb 2022. Citado na página [27](#).
- BROWN, R. G.; HWANG, P. Y. C. *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2012. Citado na página [36](#).
- CADY, F. *The Data Science Handbook*. [S.l.]: Wiley, 2017. ISBN 1119092949. Citado na página [27](#).
- CARTAGENA, O. et al. Evolving fuzzy prediction intervals in nonstationary environments. *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), p. 1–14, 2023. Citado na página [104](#).
- CASTILLO, O. *Type-2 Fuzzy Logic in Intelligent Control Applications*. [S.l.]: Springer-Verlag GmbH, 2011. ISBN 3642246621. Citado na página [51](#).
- CASTILLO, P. M. O. *Type-2 Fuzzy Logic: Theory and Applications*. [S.l.]: Springer-Verlag GmbH, 2007. ISBN 9783540762843. Citado na página [46](#).
- CASTRO, J. R. et al. A hybrid learning algorithm for a class of interval type-2 fuzzy neural networks. *Information Sciences*, Elsevier BV, v. 179, n. 13, p. 2175–2193, jun 2009. Citado 6 vezes nas páginas [81](#), [95](#), [96](#), [97](#), [101](#) e [102](#).
- CHANG, G. et al. Variational bayesian adaptation of process noise covariance matrix in kalman filtering. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier BV, v. 358, n. 7, p. 3980–3993, may 2021. Citado 2 vezes nas páginas [36](#) e [37](#).
- CHEN, C. et al. Interval type-2 fuzzy disturbance observer-based t–s fuzzy control for a pneumatic flexible joint. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 69, n. 6, p. 5962–5972, jun 2022. Citado na página [27](#).

CHEN, C. T. *Linear System Theory and Design*. [S.l.]: Oxford University Press, 1999. Citado na página 74.

CHEN, J.; ZHAO, C. Exponential stationary subspace analysis for stationary feature analytics and adaptive nonstationary process monitoring. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 17, n. 12, p. 8345–8356, dec 2021. Citado na página 54.

CHEN, K. et al. Online nonlinear dynamic system identification with evolving spatial–temporal filters: Case study on turbocharged engine modeling. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 29, n. 3, p. 1364–1371, may 2021. Citado na página 54.

CHEN, Y.; YANG, B.; DONG, J. Time-series prediction using a local linear wavelet neural network. *Neurocomputing*, Elsevier BV, v. 69, n. 4-6, p. 449–465, jan 2006. Citado 6 vezes nas páginas 81, 95, 96, 97, 100 e 102.

DAIRI, A. et al. Comparative study of machine learning methods for COVID-19 transmission forecasting. *Journal of Biomedical Informatics*, Elsevier BV, v. 118, p. 103791, jun 2021. Citado 5 vezes nas páginas 17, 121, 125, 129 e 130.

DELL'ANNA, D.; JAMSHIDNEJAD, A. Evolving fuzzy logic systems for creative personalized socially assistive robots. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Elsevier BV, v. 114, p. 105064, sep 2022. Citado na página 54.

DHAHRI, H.; ALIM, A. The modified differential evolution and the RBF (MDE-RBF) neural network for time series prediction. In: *The 2006 IEEE International Joint Conference on Neural Network Proceedings*. [S.l.]: IEEE, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 81, 95, 96, 97 e 102.

DIXIT, A.; JAIN, S. Intuitionistic fuzzy time series forecasting method for non-stationary time series data with suitable number of clusters and different window size for fuzzy rule generation. *Information Sciences*, Elsevier BV, v. 623, p. 132–145, apr 2023. Citado na página 54.

DOMBI, J.; HUSSAIN, A. Data-driven interval type-2 fuzzy inference system based on the interval type-2 distending function. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 31, n. 7, p. 2345–2359, jul 2023. Citado na página 30.

EVANGELISTA, A. P. F.; SERRA, G. L. de O. Type-2 fuzzy instrumental variable algorithm for evolving neural-fuzzy modeling of nonlinear dynamic systems in noisy environment. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Elsevier BV, v. 109, p. 104620, mar 2022. Citado 4 vezes nas páginas 27, 121, 144 e 145.

EYOH, I. et al. Hybrid learning for interval type-2 intuitionistic fuzzy logic systems as applied to identification and prediction problems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 26, n. 5, p. 2672–2685, oct 2018. Citado 6 vezes nas páginas 81, 95, 96, 97, 100 e 102.

FRASER, C. T. *Adaptive Extended Kalman Filtering Strategies for Autonomous Relative Navigation of Formation Flying Spacecraft*. Tese (Doutorado) — Carleton University, 2018. Citado na página 106.

- FRASER, C. T.; ULRICH, S. Adaptive extended kalman filtering strategies for spacecraft formation relative navigation. *Acta Astronautica*, Elsevier BV, v. 178, p. 700–721, jan. 2021. ISSN 0094-5765. Citado 8 vezes nas páginas [11](#), [17](#), [81](#), [105](#), [106](#), [113](#), [114](#) e [115](#).
- FU, L. et al. Robust tracking control of interval type-2 positive takagi-sugeno fuzzy systems with external disturbance. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 30, n. 10, p. 4057–4068, oct 2022. Citado na página [47](#).
- GARCIA, C.; LEITE, D.; SKRJANC, I. Incremental missing-data imputation for evolving fuzzy granular prediction. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 28, n. 10, p. 2348–2362, oct 2020. Citado na página [28](#).
- GAUTAM, Y. Transfer learning for COVID-19 cases and deaths forecast using LSTM network. *ISA Transactions*, Elsevier BV, jan 2021. Citado 5 vezes nas páginas [17](#), [121](#), [125](#), [128](#) e [129](#).
- GAXIOLA, F. et al. Optimization of type-2 fuzzy weights in backpropagation learning for neural networks using GAs and PSO. *Applied Soft Computing*, Elsevier BV, v. 38, p. 860–871, jan 2016. Citado 5 vezes nas páginas [81](#), [95](#), [96](#), [97](#) e [102](#).
- GE, D.; ZENG, X.-J. A self-evolving fuzzy system which learns dynamic threshold parameter by itself. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 27, n. 8, p. 1625–1637, aug 2019. Citado na página [28](#).
- GHORBANI, S.; JANABI-SHARIFI, F. Extended kalman filter state estimation for aerial continuum manipulation systems. *IEEE Sensors Letters*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 6, n. 8, p. 1–4, aug 2022. Citado na página [36](#).
- GHOZZI, Y. et al. Interval type-2 beta fuzzy near sets approach to content-based image retrieval. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 30, n. 3, p. 805–817, mar 2022. Citado na página [27](#).
- GOLYANDINA, N.; ZHIGLJAVSKY, A. *Singular Spectrum Analysis for Time Series*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2013. Citado na página [63](#).
- GOMES, D. C. dos S. *Metodologia para Filtragem de Kalman Fuzzy Tipo-2 Intervalar Baseada em Modelagem Computacional das Componentes Espectrais Não-Observáveis de Dados Experimentais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Maranhão, 2021. Citado 8 vezes nas páginas [8](#), [46](#), [47](#), [48](#), [49](#), [50](#), [51](#) e [52](#).
- GOMES, D. C. dos S.; SERRA, G. L. de O. Machine learning model for computational tracking and forecasting the COVID-19 dynamic propagation. *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 25, n. 3, p. 615–622, mar 2021. Citado 2 vezes nas páginas [27](#) e [28](#).
- GOMES, D. C. dos S.; SERRA, G. L. de O. A novel interval type-2 fuzzy kalman filtering and tracking of experimental data. *Evolving Systems*, Springer Science and Business Media LLC, v. 13, n. 2, p. 243–264, apr 2021. Citado na página [36](#).
- GREWAL, A. P. A. M. S. *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB [With CDROM]*. [S.l.]: WILEY, 2008. ISBN 0470173661. Citado na página [36](#).

- GU, H.; WANG, H. Fuzzy prediction of chaotic time series based on singular value decomposition. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier BV, v. 185, n. 2, p. 1171–1185, feb 2007. Citado 5 vezes nas páginas [81](#), [95](#), [96](#), [97](#) e [102](#).
- GU, X. Multilayer ensemble evolving fuzzy inference system. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 29, n. 8, p. 2425–2431, aug 2021. Citado na página [28](#).
- GUO, J. et al. Finite quantized-output feedback tracking control of possibly non-minimum phase linear systems. *IEEE Control Systems Letters*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 6, p. 2407–2412, 2022. Citado na página [30](#).
- GUO, Y. et al. Adaptive fuzzy learning superpixel representation for PolSAR image classification. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 60, p. 1–18, 2022. Citado na página [27](#).
- HASHEMI, B.; TAHERI, S.; CRETU, A.-M. Systematic analysis and computational intelligence based modeling of photovoltaic power generation in snow conditions. *IEEE Journal of Photovoltaics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 12, n. 1, p. 406–420, jan 2022. Citado na página [30](#).
- HAYKIN, S. *Adaptive Filter Theory*. [S.l.]: Pearson, 2014. Citado 2 vezes nas páginas [36](#) e [37](#).
- HAZARIKA, B. B.; GUPTA, D. Modelling and forecasting of COVID-19 spread using wavelet-coupled random vector functional link networks. *Applied Soft Computing*, Elsevier BV, v. 96, p. 106626, nov 2020. Citado 5 vezes nas páginas [17](#), [121](#), [125](#), [127](#) e [128](#).
- HUANG, H. et al. Jointly evolving and compressing fuzzy system for feature reduction and classification. *Information Sciences*, Elsevier BV, v. 579, p. 218–230, nov 2021. Citado na página [28](#).
- HUANG, Z. et al. Multi-aspect streaming tensor ring completion for dynamic incremental data. *IEEE Signal Processing Letters*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 29, p. 2657–2661, 2022. Citado na página [54](#).
- HURTIK, P.; MOLEK, V.; HULA, J. Data preprocessing technique for neural networks based on image represented by a fuzzy function. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 28, n. 7, p. 1195–1204, jul 2020. Citado na página [30](#).
- JAHANDARI, S.; KALHOR, A.; ARAABI, B. N. Online forecasting of synchronous time series based on evolving linear models. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 50, n. 5, p. 1865–1876, may 2020. Citado na página [54](#).
- JIANG, B.; DAI, H.; WEI, X. A cell-to-pack state estimation extension method based on a multilayer difference model for series-connected battery packs. *IEEE Transactions on Transportation Electrification*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 8, n. 2, p. 2037–2049, jun 2022. Citado na página [36](#).
- JIMÉNEZ, V.; ALVARADO, B. P.; MATÍA, F. A set of practical experiments to validate the fuzzy kalman filter. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier BV, v. 417, p. 152–170, aug 2021. Citado na página [28](#).

JUANG, J. N. *Applied System Identification*. [S.l.]: Prentice Hall, 1994. Citado 6 vezes nas páginas [16](#), [37](#), [73](#), [162](#), [167](#) e [168](#).

KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, ASME International, v. 82, n. 1, p. 35–45, mar 1960. Citado 2 vezes nas páginas [27](#) e [36](#).

KARNIK, N.; MENDEL, J. Introduction to type-2 fuzzy logic systems. In: *1998 IEEE International Conference on Fuzzy Systems Proceedings. IEEE World Congress on Computational Intelligence (Cat. No.98CH36228)*. [S.l.]: IEEE, 1998. Citado na página [42](#).

KARNIK, N.; MENDEL, J.; LIANG, Q. Type-2 fuzzy logic systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 7, n. 6, p. 643–658, 1999. Citado na página [42](#).

KARNIK, N. N.; MENDEL, J. M. Centroid of a type-2 fuzzy set. *Information Sciences*, Elsevier BV, v. 132, n. 1-4, p. 195–220, feb 2001. Citado na página [52](#).

KASABOV, N. *Foundations of Neural Networks, Fuzzy Systems, and Knowledge Engineering*. [S.l.]: The MIT Press, 1996. ISBN 9780262112123. Citado na página [57](#).

KAYACAN, E. *Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems: Theory and Design*. Tese (Doutorado) — Institute for Graduate Studies in Science and Engineerin, 2011. Citado na página [52](#).

KOPETZ, H. *Real-Time Systems*. [S.l.]: Springer US, 2011. Citado na página [55](#).

LIANG, Q.; MENDEL, J. Interval type-2 fuzzy logic systems: theory and design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 8, n. 5, p. 535–550, 2000. Citado na página [46](#).

LIN, H. et al. Distributed kalman filter with fuzzy noises over multiagent systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 30, n. 7, p. 2550–2562, jul 2022. Citado na página [29](#).

LIN, Y.-Y.; CHANG, J.-Y.; LIN, C.-T. Identification and prediction of dynamic systems using an interactively recurrent self-evolving fuzzy neural network. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 24, n. 2, p. 310–321, feb 2013. Citado 5 vezes nas páginas [81](#), [95](#), [96](#), [97](#) e [102](#).

LU, M. et al. Computational experiments for complex social systems—part II: The evaluation of computational models. *IEEE Transactions on Computational Social Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 9, n. 4, p. 1224–1236, aug 2022. Citado na página [30](#).

LUGHOFER, E. *Evolving Fuzzy Systems - Methodologies, Advanced Concepts and Applications*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2011. ISBN 3642180868. Citado 5 vezes nas páginas [54](#), [55](#), [57](#), [59](#) e [60](#).

LUO, C. et al. An evolving recurrent interval type-2 intuitionistic fuzzy neural network for online learning and time series prediction. *Applied Soft Computing*, Elsevier BV, v. 78, p. 150–163, may 2019. Citado na página [28](#).

- MA, Z.; MA, H. Adaptive fuzzy backstepping dynamic surface control of strict-feedback fractional-order uncertain nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 28, n. 1, p. 122–133, jan 2020. Citado na página 30.
- MARTYNYUK, A. A.; YU., A.; MARTYNYUK-CHERNIENKO. *Uncertain Dynamical Systems: Stability and Motion Control*. [S.l.]: CRC Press, 2019. Citado na página 29.
- MATÍA, F. et al. The fuzzy kalman filter: Improving its implementation by reformulating uncertainty representation. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier BV, v. 402, p. 78–104, jan 2021. Citado na página 28.
- MAYA-RODRIGUEZ, M. C. et al. Integration of CNN in a dynamic model-based controller for control of a 2dof helicopter with tail rotor perturbations. *IEEE Access*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 10, p. 73474–73483, 2022. Nenhuma citação no texto.
- MENDEL, J.; JOHN, R. Type-2 fuzzy sets made simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 10, n. 2, p. 117–127, apr 2002. Citado na página 47.
- NAIK, V.; SINGH, S. P. A novel interval type-2 fuzzy-based direct torque control of induction motor drive using five-level diode-clamped inverter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 68, n. 1, p. 149–159, jan 2021. Citado na página 47.
- NINO-RUIZ, E. D.; GUZMAN, L.; JABBA, D. An ensemble kalman filter implementation based on the ledoit and wolf covariance matrix estimator. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier BV, v. 384, p. 113163, mar 2021. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- NUGROHO, S. A.; TAHA, A. F.; QI, J. Robust dynamic state estimation of synchronous machines with asymptotic state estimation error performance guarantees. *IEEE Transactions on Power Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 35, n. 3, p. 1923–1935, may 2020. Citado na página 36.
- PEDRYCZ. *Knowledge-Based Clustering*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2005. ISBN 0471469661. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 57.
- QUANSER. *Aerospace Plant: 2-DOF Helicopter Position Control*. [S.l.], 2012. Disponível em: <<https://www.quanser.com/products/2-dof-helicopter/>>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 133.
- RABCAN, J. et al. EEG signal classification based on fuzzy classifiers. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 18, n. 2, p. 757–766, feb 2022. Citado na página 27.
- RHIF, M. et al. Veg-w2tcn: A parallel hybrid forecasting framework for non-stationary time series using wavelet and temporal convolution network model. *Applied Soft Computing*, Elsevier BV, v. 137, p. 110172, apr 2023. Citado na página 54.
- SAAD, H. H. Y.; ISA, N. A. M.; AHMED, M. M. A structural evolving approach for fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 28, n. 2, p. 273–287, feb 2020. Citado na página 27.

- SERRA, G. L. O. (Ed.). *Frontiers in Advanced Control Systems*. [S.l.]: InTech, 2012. Citado na página 27.
- SERRA, G. L. O. (Ed.). *Kalman Filters - Theory for Advanced Applications*. [S.l.]: InTech, 2018. Citado na página 27.
- SERRANO-GUERRERO, X. et al. A new interval prediction methodology for short-term electric load forecasting based on pattern recognition. *Applied Energy*, Elsevier BV, v. 297, p. 117173, sep 2021. Citado na página 104.
- SHI, J. et al. Optimal variational mode decomposition and integrated extreme learning machine for network traffic prediction. *IEEE Access*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 9, p. 51818–51831, 2021. Citado 5 vezes nas páginas 81, 95, 96, 97 e 102.
- ŠKRJANC, I. et al. Evolving fuzzy and neuro-fuzzy approaches in clustering, regression, identification, and classification: A survey. *Information Sciences*, Elsevier BV, v. 490, p. 344–368, jul 2019. Citado 4 vezes nas páginas 55, 58, 59 e 60.
- SONG, L. et al. A deep fuzzy model for diagnosis of COVID-19 from CT images. *Applied Soft Computing*, Elsevier BV, v. 122, p. 108883, jun 2022. Citado na página 27.
- SU, W.-C.; JUANG, C.-F.; HSU, C.-M. Multiobjective evolutionary interpretable type-2 fuzzy systems with structure and parameter learning for hexapod robot control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 52, n. 5, p. 3066–3078, may 2022. Citado na página 27.
- TEH, C. Y. et al. On modelling of data-driven monotone zero-order TSK fuzzy inference systems using a system identification framework. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), p. 1–1, 2018. Citado na página 27.
- TOMÁS-RODRÍGUEZ, M.; BANKS, S. P. *Linear, Time-varying Approximations to Nonlinear Dynamical Systems*. [S.l.]: Springer London, 2010. Citado na página 29.
- TSAI, S.-H.; CHEN, Y.-W. A novel interval type-2 fuzzy system identification method based on the modified fuzzy c-regression model. *IEEE Transactions on Cybernetics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 52, n. 9, p. 9834–9845, sep 2022. Citado na página 47.
- TUNG, C. Q. S. W.; GUAN, C. T2-hyfis-yager: Type 2 hybridneural fuzzy inference system realizing yager inference. In: *Proc. IEEE Int. Conf. Fuzzy Syst.* [S.l.: s.n.], 2009. p. 80–85. Citado 5 vezes nas páginas 81, 95, 96, 97 e 102.
- TURK, S. et al. Interval type-2 fuzzy sets improved by simulated annealing for locating the electric charging stations. *Information Sciences*, Elsevier BV, v. 547, p. 641–666, feb 2021. Citado na página 47.
- USLAN, V.; SEKER, H.; JOHN, R. A support vector-based interval type-2 fuzzy system. In: *2014 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. [S.l.]: IEEE, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 81, 95, 96, 97 e 102.

- USTUNDAG, B. B.; KULAGLIC, A. High-performance time series prediction with predictive error compensated wavelet neural networks. *IEEE Access*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 8, p. 210532–210541, 2020. Citado 5 vezes nas páginas 81, 95, 96, 97 e 102.
- WANG, L.-X. *A Course in Fuzzy Systems and Control*. [S.l.]: Prentice-Hall International, Inc., 1997. Citado 4 vezes nas páginas 30, 42, 43 e 45.
- WANG, L.-X.; MENDEL, J. Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least-squares learning. *IEEE Transactions on Neural Networks*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 3, n. 5, p. 807–814, 1992. Citado na página 57.
- WANG, Y. et al. Novelty detection and online learning for chunk data streams. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 43, n. 7, p. 2400–2412, jul 2021. Citado na página 54.
- WANG, Y. et al. Estimation of sideslip angle and tire cornering stiffness using fuzzy adaptive robust cubature kalman filter. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 52, n. 3, p. 1451–1462, mar 2022. Citado na página 29.
- WANG, Y. et al. Image reconstruction based on fuzzy adaptive kalman filter in electrical capacitance tomography. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 70, p. 1–10, 2021. Citado na página 28.
- WANG ZHISHEN DUAN, Y. Y. J. *Analysis and Control of Nonlinear Systems with Stationary Sets: Time-Domain and Frequency-Domain Methods*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2009. Citado na página 29.
- WILLIAMS, R. *Real-Time Systems Development*. [S.l.]: Elsevier, 2006. Citado na página 55.
- WU, C.-Y. et al. A novel on-line observer/kalman filter identification method and its application to input-constrained active fault-tolerant tracker design for unknown stochastic systems. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier BV, v. 352, n. 3, p. 1119–1151, mar 2015. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 73.
- WU, D.; MENDEL, J. Enhanced karnik–mendel algorithms. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 17, n. 4, p. 923–934, aug 2009. Citado na página 52.
- WU, F.; LI, W.; QIU, W. Examining non-linear relationship between streetscape features and propensity of walking to school in hong kong using machine learning techniques. *Journal of Transport Geography*, Elsevier BV, v. 113, p. 103698, dec 2023. Citado na página 29.
- XIAO, H. et al. Edge intelligence: A computational task offloading scheme for dependent IoT application. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 21, n. 9, p. 7222–7237, sep 2022. Citado na página 30.

YANG, Q.; DAI, W.; ZHANG, Y. *Transfer Learning*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2020. ISBN 1107016908. Citado na página 129.

YANG, Z.; DONG, S. A novel decomposition-based approach for non-stationary hub-height wind speed modelling. *Energy*, Elsevier BV, v. 283, p. 129081, nov 2023. Citado na página 30.

YANG, Z.-X. et al. Statistically evolving fuzzy inference system for non-gaussian noises. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 30, n. 7, p. 2649–2664, jul 2022. Citado na página 28.

YOU, Z. et al. Fuzzy-dependent-switching control of nonlinear systems with aperiodic sampling. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 29, n. 11, p. 3349–3359, nov 2021. Citado na página 27.

YU, H.; LU, J.; ZHANG, G. Topology learning-based fuzzy random neural networks for streaming data regression. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 30, n. 2, p. 412–425, feb 2022. Citado na página 28.

ZADEH, L. Fuzzy sets. *Information and Control*, Elsevier BV, v. 8, n. 3, p. 338–353, jun 1965. Citado na página 42.

ZADEH, L. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—i. *Information Sciences*, Elsevier BV, v. 8, n. 3, p. 199–249, jan 1975. Citado 3 vezes nas páginas 42, 56 e 57.

ZAMZAM, A. S.; LIU, Y.; BERNSTEIN, A. Model-free state estimation using low-rank canonical polyadic decomposition. *IEEE Control Systems Letters*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 5, n. 2, p. 605–610, apr 2021. Citado na página 36.

ZAREI, H.; KHASTAN, A.; RODRÍGUEZ-LÓPEZ, R. Suboptimal control of linear fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier BV, may 2022. Citado na página 27.

ZHANG, C. et al. A data-driven method for online monitoring tube wall thinning process in dynamic noisy environment. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 19, n. 1, p. 441–456, jan 2022. Citado na página 30.

ZHANG, G. Time series forecasting using a hybrid ARIMA and neural network model. *Neurocomputing*, Elsevier BV, v. 50, p. 159–175, jan 2003. Citado na página 126.

ZHANG, L. et al. On the identification of noise covariances and adaptive kalman filtering: A new look at a 50 year-old problem. *IEEE Access*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 8, p. 59362–59388, 2020. Citado na página 36.

ZHANG, S. et al. Sequential outlier criterion for sparsification of online adaptive filtering. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 29, n. 11, p. 5277–5291, nov 2018. Citado 5 vezes nas páginas 81, 95, 96, 97 e 102.

ZHANG, X. et al. State of charge estimation for lithium-ion battery based on adaptive extended kalman filter with improved residual covariance matrix estimator. *Journal of Power Sources*, Elsevier BV, v. 589, p. 233758, jan 2024. Citado na página 36.

ZHAO, F. et al. HCache: A hash-based hybrid caching model for real-time streaming data analytics. *IEEE Transactions on Services Computing*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 14, n. 5, p. 1384–1396, sep 2021. Citado na página 54.

ZHAO, T.; TONG, W.; MAO, Y. Hybrid nonsingleton fuzzy strong tracking kalman filtering for high precision photoelectric tracking system. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 19, n. 3, p. 2395–2408, mar 2023. Citado na página 28.

ZHENG, L.; ZHANG, X. *Modeling and Analysis of Modern Fluid Problems*. [S.l.]: Elsevier, 2017. Citado na página 81.

ZHOU, S.; HAN, Y. Extended dissipativity and control synthesis of interval type-2 fuzzy systems via line-integral lyapunov function. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 28, n. 10, p. 2631–2644, oct 2020. Citado na página 47.

# Apêndices

# APÊNDICE A – Algoritmo *Observer/Kalman Filter Identification* (OKID)

Considerando-se o sistema dinâmico linear multivariável, no domínio do tempo discreto, descrito por (JUANG, 1994):

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (\text{A.1})$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \quad (\text{A.2})$$

onde  $x_k$  é o vetor de estados com dimensão  $n \times 1$ ,  $y_k$  é o vetor de saídas com dimensão  $p \times 1$  e  $u_k$  é o vetor de entradas com dimensão  $m \times 1$  com  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  sendo as matrizes que descrevem o comportamento dinâmico do sistema com dimensões apropriadas. Quando os estados do sistema dinâmico não podem diretamente medidas, um observador pode ser aplicado para estimar estes estados a partir dos dados de entrada e saída. Adicionando e subtraindo o termo  $Ky_k$  ao lado direito da Equação (A.1), obtém-se o seguinte resultado:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Ky_k - Ky_k \quad (\text{A.3})$$

$$= (A + KC)x_k + (B + KD)u_k - Ky_k \quad (\text{A.4})$$

ou

$$x_{k+1} = \bar{A}x_k + \bar{B}v_k \quad (\text{A.5})$$

onde

$$\bar{A} = A + KC$$

$$\bar{B} = [B + KD, \quad -K] \quad (\text{A.6})$$

$$v_k = \begin{bmatrix} u_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

e  $K$  é uma matriz arbitrária com dimensão  $n \times p$  escolhida de modo a tornar a matriz  $\bar{A}$  tão estável quanto desejado. Considerando condição inicial não nula, ou seja,  $x_0 \neq 0$ , a Equação (A.5) pode ser estendida da seguinte forma:

$$x_{k+1} = \bar{A}x_k + \bar{B}v_k,$$

$$\begin{aligned} x_{k+2} &= \bar{A}x_{k+1} + \bar{B}v_{k+1} \\ &= \bar{A}^2x_k + \bar{A}\bar{B}v_k + \bar{B}v_{k+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{k+3} &= \bar{A}x_{k+2} + \bar{B}v_{k+2} \\ &= \bar{A}^3x_k + \bar{A}^2\bar{B}v_k + \bar{A}\bar{B}v_{k+1} + \bar{B}v_{k+2}, \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} x_{k+q} &= \bar{A}x_{k+q-1} + \bar{B}v_{k+q-1} \\ &= \bar{A}^qx_k + \bar{A}^{p-1}\bar{B}v_k + \bar{A}^{q-2}\bar{B}v_{k+1} + \bar{B}v_{k+q-1} \end{aligned}$$

De forma análoga, utilizando a Equação (A.2), obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} y_{k+q} &= Cx_{k+q} + Du_{k+q} \\ &= C\bar{A}^qx_k + C\bar{A}^{p-1}\bar{B}v_k + C\bar{A}^{q-2}\bar{B}v_{k+1} + C\bar{B}v_{k+q-1} + Du_{k+q} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

O conjunto destas equações, considerando a sequência de  $k = 0, \dots, \ell - 1$  podem ser reescritas como

$$\bar{y} = C\bar{A}^q x + \bar{Y}\bar{V} \quad (\text{A.8})$$

onde

$$\bar{y} = [y_q \quad y_{q+1} \quad y_{q+2} \quad \cdots \quad y_{\ell-1}] \quad (\text{A.9})$$

$$x = [x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{\ell-q-2}] \quad (\text{A.10})$$

$$\bar{Y} = [D \quad C\bar{B} \quad C\bar{A}\bar{B} \quad \cdots \quad C\bar{A}^{q-1}\bar{B}] \quad (\text{A.11})$$

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} u_q & u_{p+1} & \cdots & u_{\ell-1} \\ v_{q-1} & v_q & \cdots & v_{\ell-2} \\ v_{q-2} & v_{q-1} & \cdots & v_{\ell-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ v_0 & v_1 & \cdots & v_{\ell-q-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m\ell \times \ell} \quad (\text{A.12})$$

Uma vez que o termo  $C\bar{A}^q x$  na Equação (A.8) representa o efeito dos instantes de tempo anteriores a  $q - 1$  e, considerando-se o caso onde  $\bar{A}^p$  é suficientemente pequeno sendo todos os estados  $x$  limitados, a Equação (A.8) pode ser aproximada por:

$$\bar{y} \approx \bar{Y}\bar{V} \quad (\text{A.13})$$

a qual possui a seguinte solução por mínimos quadrados:

$$\bar{Y} = \bar{y}\bar{V}^T [\bar{V}\bar{V}^T] \quad (\text{A.14})$$

onde o número de amostras do conjunto de dados  $\ell$  deve ser suficientemente grande para que  $[\bar{V}\bar{V}^T]$  exista.

## A.1 Cálculo dos Parâmetros de Markov

Os parâmetros de Markov do observador  $\bar{Y}$ , obtidos por meio da Equação (A.14), incluem os parâmetros de Markov do sistema, os quais serão utilizados para o cálculo das matrizes do sistema  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , e os parâmetros de Markov do ganho do observador que, por sua vez, serão utilizados para o cálculo da matriz de ganho do observador  $K$ .

### A.1.1 Parâmetros de Markov do Sistema

A matriz de parâmetros de Markov  $\bar{Y}$  é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \begin{bmatrix} D & C\bar{B} & C\bar{A}\bar{B} & \dots & C\bar{A}^{(q-1)}\bar{B} \end{bmatrix} \\ &= [\bar{Y}_0 \quad \bar{Y}_1 \quad \bar{Y}_2 \quad \dots \quad \bar{Y}_q] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{Y}_0 &= D, \\ \bar{Y}_j &= C\bar{A}^{(j-1)}\bar{B} \\ &= \begin{bmatrix} C(A + KC)^{(j-1)}(B + KD), & -C(A + KC)^{(j-1)}K \end{bmatrix} \\ &= [\bar{Y}_j^{(1)}, -\bar{Y}_j^{(2)}], \quad j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

A partir da Equação (A.16), os parâmetros de Markov do sistema são calculados como segue:

$$\begin{aligned}
 Y_0 &= \bar{Y}_0 = D \\
 Y_j &= \bar{Y}_j^{(1)} - \sum_{\iota=1}^j \bar{Y}_j^{(2)} Y_{j-\iota}, \quad \text{para } j = 1, \dots, q \\
 Y_j &= - \sum_{\iota=1}^q \bar{Y}_j^{(2)} Y_{j-\iota}, \quad \text{para } j = q + 1, \dots, \infty
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

### A.1.2 Parâmetros de Markov do Ganho do Observador

Os parâmetros de Markov do ganho do observador são dados por:

$$\begin{aligned}
 Y_1^o &= \bar{Y}_1^{(2)} = CK \\
 Y_j^o &= \bar{Y}_j^{(2)} - \sum_{\iota=1}^{j-1} \bar{Y}_j^{(2)} Y_{j-\iota}^o, \quad \text{para } j = 2, \dots, q \\
 Y_j^o &= - \sum_{\iota=1}^q \bar{Y}_j^{(2)} Y_{j-\iota}^o, \quad \text{para } j = q + 1, \dots, \infty
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

## A.2 Algoritmo de Realização de Autosistemas - ERA

O algoritmo de realização de autosistemas (*Eigensystem Realization Algorithm - ERA*), o qual é desenvolvido a partir da teoria de realização mínima, é utilizado para a identificação dos parâmetros do modelo no espaço de estados que descreve o comportamento do sistema dinâmico. A partir dos parâmetros de Markov do sistema, obtidos anteriormente, uma matriz de Hankel  $H(j-1)$  é obtida como segue:

$$H(j-1) = \begin{bmatrix} Y_j & Y_{j+1} & \dots & Y_{j+\beta-1} \\ Y_{j+1} & Y_{j+2} & \dots & Y_{j+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{j+\gamma-1} & Y_{j+\gamma} & \dots & Y_{j+\gamma+\beta-2} \end{bmatrix} \tag{A.19}$$

onde  $\gamma$  e  $\beta$  são inteiros arbitrários suficientemente grandes definidos pelo usuário. Em seguida, considerando-se  $j = 1$ , a matriz de Hankel  $H(0)$  é decomposta em um produto matricial por meio da aplicação do procedimento de Decomposição em Valores Singulares (*Singular Value Decomposition - SVD*) como segue:

$$H(0) = \Xi \Sigma \Psi^T \tag{A.20}$$

onde as matrizes  $\Xi$  e  $\Psi$  são ortonormais e  $\Sigma$  é a matriz diagonal de valores singulares definida como:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

tal que

$$\Sigma_n = \text{diag} [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n_{min}}, \sigma_{n_{min}+1}, \dots, \sigma_n] \quad (\text{A.22})$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{n_{min}} \gg \sigma_{n_{min}+1} \geq \dots \geq \sigma_n > 0 \quad (\text{A.23})$$

Os valores singulares  $\sigma_{n_{min}+1}, \dots, \sigma_n$  são relativamente pequenos e, portanto, insignificantes para a determinação da realização do sistema dinâmico. Logo, o termo  $n_{min}$  constitui o número de valores singulares mais significativos e determina a ordem mínima de realização. Sejam  $\Xi_{n_{min}}$  e  $\Psi_{n_{min}}$  matrizes formadas pelas primeiras  $n_{min}$  colunas de  $\Xi$  e  $\Psi$ , respectivamente, a Equação (A.20) é reescrita da seguinte forma

$$H(0) = \Xi_{n_{min}} \Sigma_{n_{min}} \Psi_{n_{min}}^T \quad (\text{A.24})$$

A partir da Equação (A.24), as matrizes de observabilidade  $\mathcal{P}_\gamma$  e controlabilidade  $\mathcal{Q}_\beta$  são obtidas como segue

$$\mathcal{P}_\gamma = \Xi_{n_{min}} (\Sigma_{n_{min}})^{1/2} \quad (\text{A.25})$$

$$\mathcal{Q}_\beta = (\Sigma_{n_{min}})^{1/2} \Psi_{n_{min}}^T \quad (\text{A.26})$$

onde

$$\mathcal{P}_\gamma = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{\gamma-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

$$\mathcal{Q}_\beta = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{\beta-1}B] \quad (\text{A.28})$$

Por fim, as estimações das matrizes que compõe o modelo no espaço de estados são dadas por:

$$\hat{A} = (\Sigma_{n_{min}})^{-1/2} \Xi_{n_{min}}^T H(1) \Psi_{n_{min}} (\Sigma_{n_{min}})^{-1/2} \quad (\text{A.29})$$

$$\hat{B} = \text{primeiras } m \text{ colunas de } \mathcal{Q}_\beta \quad (\text{A.30})$$

$$\hat{C} = \text{primeiras } p \text{ linhas de } \mathcal{P}_\gamma \quad (\text{A.31})$$

$$\hat{D} = \bar{Y}_0 \quad (\text{A.32})$$

onde o símbolo “ $\wedge$ ” significa quantidades estimadas para distinção das quantidades verdadeiras. O ganho do observador  $K$  é obtido a partir dos parâmetros de Markov do ganho do observador como segue:

$$K = \left( \mathcal{P}_\gamma^T \mathcal{P}_\gamma \right) \mathcal{P}_\gamma^T Y^o \quad (\text{A.33})$$

A relação entre o observador identificado e o Filtro de Kalman é estabelecida incluindo os ruídos de processo e medição no modelo descrito pelas Equações (A.1) e (A.2):

$$x_{k+1} = \hat{A}x_k + \hat{B}u_k + w_k \quad (\text{A.34})$$

$$y_k = \hat{C}x_k + \hat{D}u_k + v_k \quad (\text{A.35})$$

onde o ruído de processo  $w_k$  e o ruído de medição  $v_k$  são ruídos brancos, de média zero, com covariâncias  $Q$  e  $R$ , respectivamente, e são considerados como sinais independentes. Então, o filtro de Kalman típico pode ser escrito como:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{A}\hat{x}_k + \hat{B}u_k + K\varepsilon_k \quad (\text{A.36})$$

$$\hat{y}_k = \hat{C}\hat{x}_k + \hat{D}u_k \quad (\text{A.37})$$

onde  $\hat{x}_k$  é o vetor de estado estimado e  $\varepsilon_k$  é definido como a diferença entre a medida real  $y_k$  e seu valor estimado  $\hat{y}_k$ . Quando o erro residual  $\varepsilon_k$  é uma sequência aleatória, o ganho do observador  $K$  converge para o ganho do filtro Kalman de estado estacionário para  $K = -G$ , onde  $G$  denota o ganho do filtro de Kalman. Uma discussão mais detalhada sobre este aspecto pode ser obtida em (JUANG, 1994). Na Figura 105 é ilustrado um fluxograma para ilustrar as etapas computacionais de implementação do algoritmo OKID.

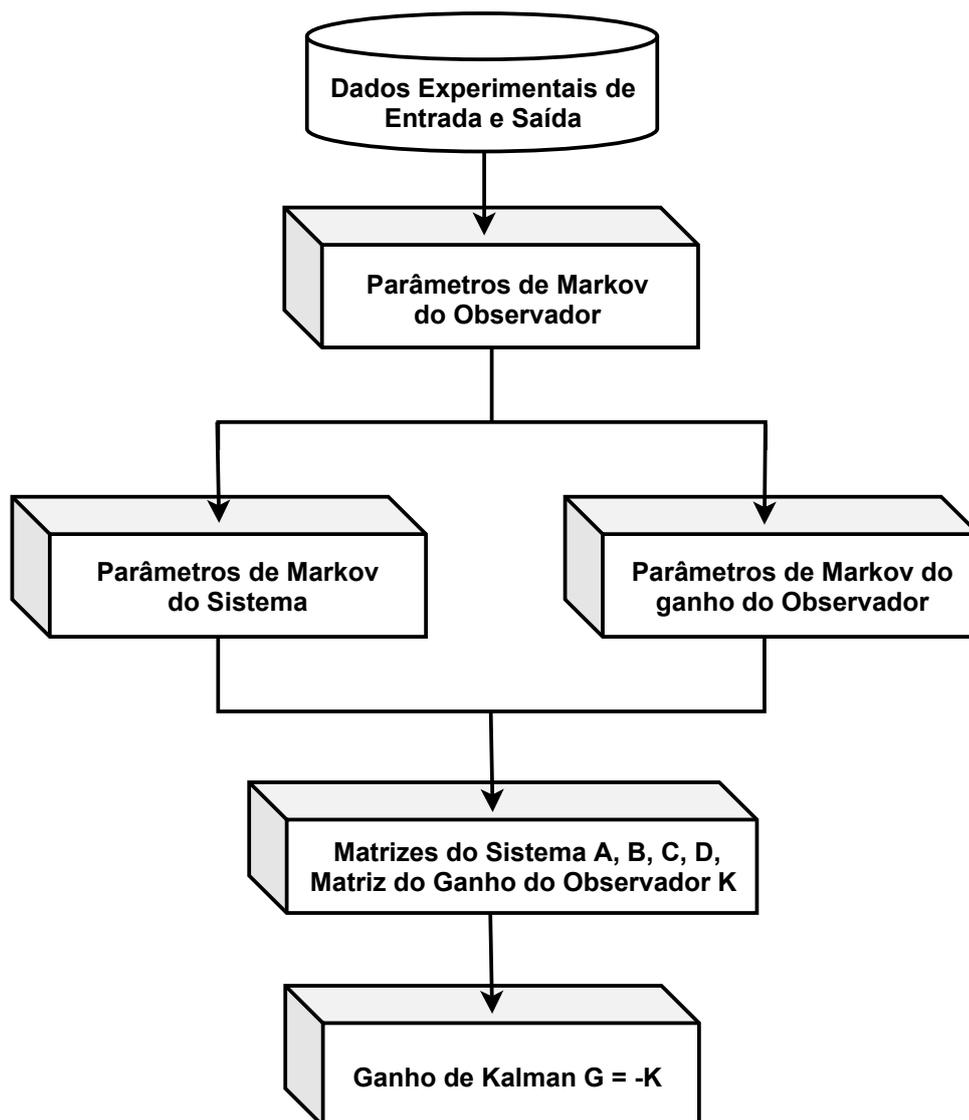


Figura 105 – Fluxograma para o algoritmo OKID. Fonte: Adaptado de (JUANG, 1994).