



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Janielton Oliveira de Andrade

**Caracterização de coerência em sistemas  
quânticos de dimensão finita**

São Luís - MA

2024

Janielton Oliveira de Andrade

# **Caracterização de coerência em sistemas quânticos de dimensão finita**

Dissertação apresentada como requisito  
parcial para obtenção do título de Mestre em  
Física, ao Programa de Pós-Graduação em  
Física, da Universidade Federal do Maranhão.

Programa de Pós-Graduação em Física  
Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Diego Paiva Pires

São Luís - MA

2024

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Oliveira de Andrade, Janielton.

Caracterização de coerência em sistemas quânticos de  
dimensão finita / Janielton Oliveira de Andrade. - 2024.  
116 p.

Orientador(a): Diego Paiva Pires.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em  
Física/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís,  
2024.

1. Informação Quântica. 2. Coerência Quântica. 3.  
Ordens de Coerência. I. Paiva Pires, Diego. II. Título.

Janielton Oliveira de Andrade

## **Caracterização de coerência em sistemas quânticos de dimensão finita**

Dissertação apresentada como requisito  
parcial para obtenção do título de Mestre em  
Física, ao Programa de Pós-Graduação em  
Física, da Universidade Federal do Maranhão.

São Luís - MA, Brasil, 05 de Setembro de 2024

---

**Prof. Dr. Diego Paiva Pires**  
Universidade Federal do Maranhão

---

**Prof. Dr. Diogo de Oliveira Soares  
Pinto**  
Universidade de São Paulo  
Instituto de Física de São Carlos

---

**Prof. Dr. Edilberto Oliveira Silva**  
Universidade Federal do Maranhão

---

**Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira  
Junior**  
Universidade Federal do Maranhão

São Luís - MA  
2024

# Agradecimentos

Gostaria de expressar minha mais profunda gratidão à minha família e amigos pelo apoio incondicional ao longo desta jornada.

À minha família, agradeço pelo amor, compreensão e incentivos constantes. Vocês foram minha base e minha inspiração em cada etapa deste percurso. Em especial, agradeço aos meus pais, Maurício José de Oliveira e Maria do Amparo Oliveira de Andrade, por acreditarem em mim e me apoiarem incondicionalmente. Suas palavras de encorajamento e os sacrifícios que fizeram tornaram este sonho possível.

Aos meus amigos, sou grato pela amizade e apoio emocional durante os momentos desafiadores. Agradeço pelos momentos de descontração, pelas palavras de incentivo e pelas conversas que me ajudaram a manter a sanidade e o foco. Em especial, agradeço a Jucelino Ferreira de Sousa pela paciência e pela companhia nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador, Diego Paiva Pires, expresso minha mais sincera gratidão pelo seu apoio e orientação ao longo deste trabalho. Sua expertise, paciência e dedicação foram fundamentais para o desenvolvimento desta dissertação. Agradeço pelas inúmeras reuniões, pelas valiosas sugestões e pelo constante incentivo. Seu comprometimento e entusiasmo foram uma fonte de inspiração.

A todos vocês, meu sincero obrigado por estarem ao meu lado nesta importante etapa da minha vida. Sem vocês, esta conquista não teria sido possível.

*"Aprendizagem nunca esgota a mente."*

(Leonardo da Vinci)

# Resumo

A última década testemunhou importantes avanços teórico-experimentais voltados à compreensão da coerência quântica, um recurso quântico que encontra aplicações na metrologia quântica, computação quântica, e termodinâmica quântica. Neste contexto, destaca-se o formalismo de Baumgratz-Cramer-Plenio (BCP) que permite caracterizar coerência através de medidas de distinguibilidade de estados quânticos. Em virtude do caráter não-unívoco destas medidas, segue que diversos quantificadores de coerência decorrem deste formalismo, por exemplo, a norma- $\ell_1$  de coerência, e a entropia relativa de coerência. Em contrapartida, o estudo da coerência também pode ser implementado através do formalismo de ordens de coerência. Por sua vez, tal técnica envolve a análise dos efeitos de interferência entre estados quânticos de prova e vetores de base fixos. Neste trabalho, investigamos a caracterização de coerência em sistemas quânticos de dimensão finita. Promovemos uma comparação entre o formalismo BCP e a abordagem de ordens de coerência. Mostramos a existência de um vínculo entre ambos casos para estados de 1-qubit. Em especial, derivamos um invariante que relaciona coerência e pureza de estados de dimensão finita. Estudamos a dinâmica de coerência em sistemas quânticos abertos, sobretudo avaliando estados de 1-qubit e 2-qubits. Investigamos a evolução de medidas de coerência de estados de sistemas bipartido cuja dinâmica não-unitária é descrita pelo mapa de defasagem. Por fim, abordamos a dinâmica efetiva de estados de 2-qubits em termos do mapa de atenuação de amplitude, a qual exhibe transições entre os regimes Markoviano e não-Markoviano. Neste caso, mostramos que a caracterização de coerência permite certificar efeitos de memória por meio de assinaturas não-Markovianas da dinâmica do sistema quântico aberto.

**Palavras-chave:** Informação quântica. Coerência quântica. Ordens de coerência.

# Abstract

The last decade has witnessed important theoretical and experimental advances aimed at understanding quantum coherence, a quantum resource that finds applications in quantum metrology, quantum computing, and quantum thermodynamics. In this context, the formalism proposed by Baumgratz-Cramer-Plenio (BCP) stands out, which allows characterizing coherence through measures of distinguishability of quantum states. Due to the nonuniqueness character of these measures, it follows that several coherence quantifiers derive from this formalism, for example, the  $\ell_1$ -norm of coherence, and the relative entropy of coherence. In contrast, the study of coherence can also be implemented through the coherence order formalism. In turn, such a technique involves the analysis of the interference effects between quantum states and fixed basis vectors. In this work, we investigate the characterization of coherence in finite-dimensional quantum systems. We compare the BCP formalism with the coherence order approach. We show the existence of a link between both cases for 1-qubit states. In particular, we derive an invariant that relates coherence and purity of finite-dimensional states. We study the dynamics of coherence in open quantum systems, mainly evaluating 1-qubit and 2-qubit states. We investigate the evolution of coherence measures of bipartite systems whose non-unitary dynamics is described by the dephasing map. Finally, we address the effective dynamics of 2-qubit states in terms of the amplitude damping map, which exhibits crossovers between the Markovian and non-Markovian regimes. In this case, we show that the coherence characterization allows us to certify memory effects through non-Markov signatures of the dynamics of the open quantum system.

**Keywords:** Quantum information. Quantum coherence. Coherence orders.



# Lista de ilustrações

|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |    |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 | – Representação pictórica da seleção de estados quânticos. O experimento consiste em um dispositivo físico que seleciona e emite de forma aleatória um estado quântico $ \psi_k\rangle$ do <i>ensemble</i> $\{ \psi_k\rangle\}_{k=1,\dots,d}$ para cada clique no botão vermelho. O aparato emite um único estado por rodada do experimento, o qual é repetido em um número $m$ de vezes. O experimentalista não tem controle sobre os estados de saída, ou seja, estados iguais ou diferentes podem ser selecionados ao longo de cada rodada. Fonte: Elaborada pelo autor.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 23 |
| Figura 2 | – Esfera de Bloch de estados quânticos de qubit único, onde $0 \leq r \leq 1$ , $0 \leq \theta \leq \pi$ , $0 \leq \phi < 2\pi$ . Nesta representação, estados puros definem pontos na superfície da esfera de raio unitário, ou seja, $r = 1$ . Por sua vez, estados mistos definem pontos no interior da esfera, de tal forma que $0 \leq r < 1$ . O pólo norte (sul) da esfera localiza o vetor de estado $ 0\rangle$ ( $ 1\rangle$ ) da base computacional. No centro da esfera, $r = 0$ , temos o estado maximamente misturado. Fonte: Imagem adaptada da Ref. [1].                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 29 |
| Figura 3 | – Equivalência entre a representação operador-soma de Kraus e o formalismo de matrizes densidade reduzidas. Fonte: Elaborada pelo autor.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 37 |
| Figura 4 | – Representação ilustrativa da contratividade relativa a operação quântica $\Lambda(\bullet)$ , isto é, um mapa completamente positivo e que preserva traço (CPTP), em relação ao par de estados $\rho, \delta \in \mathcal{H}$ . Em geral, segue que a distinguibilidade entre os estados quânticos deve diminuir sob ação de mapas CPTP físicos. Fonte: Imagem adaptada da Ref. [1].                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 45 |
| Figura 5 | – Medidas de coerência para estados puros de qubit único em relação a base $\{ 0\rangle,  1\rangle\}$ formada por autoestados do observável de spin $(\hbar/2)\sigma_z$ . A curva azul representa a norma- $\ell_1$ de coerência, $C_{\ell_1,z}(\rho)$ [veja Eq. (4.47)], e a curva vermelha indica a entropia relativa de coerência normalizada, $C_{\text{rel. ent.,}z}(\rho)/\ln(2)$ [veja Eq. (4.48)]. Fonte: Elaborada pelo autor.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 54 |
| Figura 6 | – Gráficos de medidas de coerência para estados quânticos de qubit único. (a) Mapeamento da intensidade da norma $\ell_1$ de coerência $C_{\ell_1,z}(\rho)$ [veja Eq. (4.47)] de estados puros de qubit único na esfera de Bloch. (b) Mapeamento da intensidade da entropia relativa de coerência normalizada $C_{\text{rel. ent.,}z}(\rho)/\ln 2$ [veja Eq. (4.48)] de estados puros de qubit único na esfera de Bloch. (c) Gráfico de densidade da norma $\ell_1$ de coerência $C_{\ell_1,z}(\rho)$ [veja Eq. (4.36)] de estados mistos de qubit único, em função dos parâmetros $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq \pi$ . (d) Gráfico de densidade da entropia relativa de coerência normalizada $C_{\text{rel. ent.,}z}(\rho)/\ln 2$ [veja Eq. (4.46)] de estados mistos de qubit único, em função dos parâmetros $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq \pi$ . Fonte: Elaborada pelo autor. | 55 |

- Figura 7 – Medidas de coerência na base computacional para estados quânticos de qubit único sob ação do mapa de atenuação de fase, sendo  $\alpha = 0.7$  o parâmetro de decoerência. (a) Mapeamento das intensidades da norma- $\ell_1$  de coerência  $C_{\ell_1}(\rho_\alpha)$  de estados puros de qubit único na esfera de Bloch deformada pela ação do mapa de atenuação de fase. (b) Mapeamento das intensidades da entropia relativa de coerência  $C_{\text{rel. ent.}}(\rho_\alpha)$  de estados puros de qubit único na esfera de Bloch deformada pela ação do mapa de atenuação de fase. (c) Diagrama de fases da norma- $\ell_1$  de coerência de estados mistos de qubit único sob ação do mapa de inversão de atenuação de fase, em função dos parâmetros  $0 \leq r \leq 1$  e  $0 \leq \theta \leq \pi$ . (d) Diagrama de fases da entropia relativa de coerência de estados mistos de qubit único sob ação do mapa de atenuação de fase, em função dos parâmetros  $0 \leq r \leq 1$  e  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Fonte: Elaborada pelo autor. 59
- Figura 8 – Medidas de coerência na base computacional para estados quânticos de qubit único sob ação do mapa de atenuação de amplitude, sendo  $\alpha = 0.7$  o parâmetro de decoerência. (a) Mapeamento das intensidades da norma- $\ell_1$  de coerência de estados puros de qubit único na esfera de Bloch. (b) Mapeamento das intensidades da entropia relativa de coerência de estados puros de qubit único na esfera de Bloch. (c) Diagrama de fases da norma- $\ell_1$  de coerência de estados mistos de qubit único sob ação do mapa atenuação de amplitude, em função dos parâmetros  $0 \leq r \leq 1$  e  $0 \leq \theta \leq \pi$ . (d) Diagrama de fases da entropia relativa de coerência de estados mistos de qubit único sob ação do mapa atenuação de amplitude, em função dos parâmetros  $0 \leq r \leq 1$  e  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Fonte: Elaborada pelo autor. . . . . 62
- Figura 9 – Ordens de coerência de estados de qubit único em relação a base de autoestados fixa do observável  $(1/2)\sigma_z$ . Fonte: Elaborada pelo autor. . . . . 64
- Figura 10 – Ordens de coerência de estados de 2-qubits em relação a base de autoestados fixa do observável coletivo  $(1/2)(\sigma_z \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_2 \otimes \sigma_z)$ . Fonte: Elaborada pelo autor. . . . 65
- Figura 11 – Gráficos da intensidade de múltiplo *quantum* (IMQ),  $I_m^{x,y}(\rho_\alpha)$  [veja Eqs. (6.38), (6.39), (6.40) e (6.41)], e pureza quântica,  $\mathcal{P}(\rho_\alpha)$  [veja Eq. (6.37)], em função do parâmetro de mistura  $0 \leq r \leq 1$ , respectivos a estados de 1-qubit sob ação canal de atenuação de fase. As coerências são avaliadas em relação a base de autoestados dos observáveis  $(1/2)\sigma_{x,y}$ , e o parâmetro de decoerência é  $\alpha = 0.5$ . O estado inicial do sistema é dado por um estado de 1-qubit em que  $\phi = \pi/4$ , sendo o ângulo polar: (a)  $\theta = \pi/2$ , (b)  $\theta = \pi/4$ , (c)  $\theta = \pi/6$ , (d)  $\theta = 0$ . Fonte: Elaborada pelo autor. . . . . 75
- Figura 12 – Gráficos da intensidade de múltiplo *quantum* (IMQ),  $I_m^z(\rho_\alpha)$  [veja Eqs. (6.42) e (6.43)], e pureza quântica,  $\mathcal{P}(\rho_\alpha)$  [veja Eq. (6.37)], em função do parâmetro de mistura  $0 \leq r \leq 1$ , respectivos a estados de 1-qubit sob ação canal de atenuação de fase. As coerências são avaliadas em relação a base de autoestados do observável  $(1/2)\sigma_z$ , e o parâmetro de decoerência é  $\alpha = 0.5$ . O estado inicial do sistema é dado por um estado de 1-qubit em que: (a)  $\theta = 0$ , (b)  $\theta = \pi/6$ , (c)  $\theta = \pi/4$ , (d)  $\theta = \pi/2$ . Fonte: Elaborada pelo autor. . . . . 76

- Figura 13 – Gráficos da intensidade de múltiplo *quantum* (IMQ),  $I_m^{x,y}(\rho_\alpha)$  [veja Eqs. (6.45), (6.46), (6.47) e (6.48)], e pureza quântica,  $\mathcal{P}(\rho_\alpha)$  [veja Eq. (6.44)], em função do parâmetro de mistura  $0 \leq r \leq 1$ , respectivos a estados de 1-qubit sob ação canal de atenuação de amplitude. As coerências são avaliadas em relação a base de autoestados do observável  $(1/2)\sigma_{x,y}$ , e o parâmetro de decoerência é  $\alpha = 0.5$ . O estado inicial do sistema é dado por um estado de 1-qubit em que  $\phi = \pi/4$ , sendo o ângulo polar: (a)  $\theta = \pi/2$ , (b)  $\theta = \pi/4$ , (c)  $\theta = \pi/6$ , (d)  $\theta = 0$ . Fonte: Elaborada pelo autor. . . . . 77
- Figura 14 – Gráficos da intensidade de múltiplo *quantum* (IMQ),  $I_m^z(\rho_\alpha)$  [veja Eqs. (6.49) e (6.50)], e pureza quântica,  $\mathcal{P}(\rho_\alpha)$  [veja Eq. (6.44)], em função do parâmetro de mistura  $0 \leq r \leq 1$ , respectivos a estados de 1-qubit sob ação canal de atenuação de amplitude. As coerências são avaliadas em relação a base de autoestados do observável  $(1/2)\sigma_z$ , e o parâmetro de decoerência é  $\alpha = 0.5$ . O estado inicial do sistema é dado por um estado de 1-qubit em que: (a)  $\theta = 0$ , (b)  $\theta = \pi/6$ , (c)  $\theta = \pi/4$ , (d)  $\theta = \pi/2$ . Fonte: Elaborada pelo autor. . . . . 78
- Figura 15 – Descrição pictórica de um sistema físico de 2-qubits interagindo de forma coletiva com um reservatório de modos de frequência, o qual induz uma interação efetiva entre os qubits. Em sistemas fotônicos, por exemplo, o ambiente é descrito por uma cavidade óptica que condiciona modos de frequência do campo de eletromagnético. Por sua vez, os qubits podem ser realizados a partir de níveis eletrônicos de nuvens atômicas imersas nesta cavidade. A dinâmica reduzida do par de qubits é descrita pelo mapa de defasagem. Fonte: Imagem adaptada da Ref. [2] . . . . . 82
- Figura 16 – Gráficos da norma- $\ell_1$  de coerência,  $C_{\ell_1}(\rho(t))$ , e concorrência de emaranhamento,  $\text{Conc}(\rho(t))$ , em função do parâmetro adimensional  $\omega_c t$ , para o estado reduzido  $\rho(t)$  da dinâmica de dois qubits em contato com um reservatório coletivo. O estado inicial do sistema é dado por um estado Bell-diagonal com coeficientes: (a, b)  $c_1 = \pm 1$ ,  $c_2 = \mp 1$ ,  $c_3 = 1$ , (c, d)  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = 1$ . Em cada painel, analisamos os casos  $\omega_c t_s = 0.01$  (curva sólida azul),  $\omega_c t_s = 0.1$  (curva traço-pontilhada verde),  $\omega_c t_s = 1$  (curva pontilhada vermelha),  $\omega_c t_s = 10$  (curva tracejada preta). Fonte: Elaborada pelo autor. . . . . 85
- Figura 17 – Gráficos de IMQs,  $I_m(\rho(t))$ , e pureza quântica,  $\mathcal{P}(\rho(t))$ , em função do parâmetro adimensional  $\omega_c t$ , para o estado reduzido  $\rho(t)$  da dinâmica de dois qubits em contato com um reservatório coletivo, respectivos aos casos (a)  $\omega_c t_s = 0.01$ , (b)  $\omega_c t_s = 0.1$ , (c)  $\omega_c t_s = 1$ , (d)  $\omega_c t_s = 10$ . O estado inicial do sistema é dado pelo estado Bell-diagonal emaranhado com coeficientes  $c_1 = \pm 1$ ,  $c_2 = \mp 1$ ,  $c_3 = 1$  [veja Eq. (7.1)]. Fonte: Elaborada pelo autor. . . . . 88

- Figura 18 – Gráficos de IMQs,  $I_m(\rho(t))$ , e pureza quântica,  $\mathcal{P}(\rho(t))$ , em função do parâmetro adimensional  $\omega_c t$ , para o estado reduzido  $\rho(t)$  da dinâmica de dois qubits em contato com um reservatório coletivo, respectivos aos casos (a)  $\omega_c t_s = 0.01$ , (b)  $\omega_c t_s = 0.1$ , (c)  $\omega_c t_s = 1$ , (d)  $\omega_c t_s = 10$ . O estado inicial do sistema é dado pelo estado Bell-diagonal não-emaranhado com coeficientes  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = 0$  [veja Eq. (7.1)].  
Fonte: Elaborada pelo autor. . . . . 89
- Figura 19 – Descrição pictórica de um sistema físico de 2-qubits interagindo com reservatórios individuais de modos de frequência. Por hipótese, o estado quântico do par de qubits exibe correlações quânticas suscetíveis aos efeitos de decoerência devidos a cada ambiente. Neste sistema, a interação com o reservatório induz efeitos dissipativos a partir da emissão de fótons no decaimento do sistema de dois níveis. A dinâmica reduzida do par de qubits é descrita pelo canal quântico de atenuação de amplitude.  
Fonte: Imagem adaptada da Ref. [2]. . . . . 90
- Figura 20 – Gráficos da norma- $\ell_1$  de coerência,  $C_{\ell_1}(\rho(t))$ , e concorrência de emaranhamento,  $\text{Conc}(\rho(t))$ , em função do parâmetro adimensional  $\lambda t$ , para o estado reduzido  $\rho(t)$  da dinâmica de dois qubits acoplados com reservatórios individuais. O estado inicial do sistema é dado por um estado Bell-diagonal emaranhado com coeficientes: (a, b)  $c_1 = \pm 1$ ,  $c_2 = \mp 1$ ,  $c_3 = 1$ , (c, d)  $c_1 = \pm 1$ ,  $c_2 = \pm 1$ ,  $c_3 = -1$ . Em cada painel, analisamos os casos  $r = 0.01$  (curva sólida azul),  $r = 0.1$  (curva traço-pontilhada verde),  $r = 1$  (curva pontilhada vermelha),  $r = 10$  (curva tracejada preta). Fonte: Elaborada pelo autor. . . . . 94
- Figura 21 – Diagrama de fases da medida de não-Markovianidade  $\sigma(\rho_1(t), \rho_2(t))$ , em função dos parâmetros adimensionais  $\lambda t$  e  $r$ , para estados quânticos de 2-qubits interagindo com reservatórios individuais. Neste gráfico, a função  $\sigma(\rho_1(t), \rho_2(t))$  é avaliada para estados instantâneos  $\rho_{1,2}(t)$  na Eq. (7.37) em termos das seguintes tuplas de coeficientes: (i)  $\rho_1(t)$ , onde  $c_1 = \pm 1$ ,  $c_2 = \mp 1$ ,  $c_3 = 1$ ; (ii)  $\rho_2(t)$ , onde  $c'_1 = \pm 1$ ,  $c'_2 = \pm 1$ ,  $c'_3 = -1$ . Fonte: Elaborada pelo autor. . . . . 95
- Figura 22 – Gráficos de IMQs,  $I_m(\rho(t))$ , e pureza quântica,  $\mathcal{P}(\rho(t))$ , em função do parâmetro adimensional  $\lambda t$ , para o estado reduzido  $\rho(t)$  da dinâmica de dois qubits interagindo com reservatórios individuais, respectivos aos casos (a)  $r = 0.01$ , (b)  $r = 0.1$ , (c)  $r = 1$ , (d)  $r = 10$ . O estado instantâneo do sistema é dado pela Eq. (7.37) com coeficientes  $c_1 = \pm 1$ ,  $c_2 = \mp 1$ ,  $c_3 = 1$ . Fonte: Elaborada pelo autor. . . . . 97
- Figura 23 – Gráficos de IMQs,  $I_m(\rho(t))$ , e pureza quântica,  $\mathcal{P}(\rho(t))$ , em função do parâmetro adimensional  $\lambda t$ , para o estado reduzido  $\rho(t)$  da dinâmica de dois qubits interagindo com reservatórios individuais, respectivos aos casos (a)  $r = 0.01$ , (b)  $r = 0.1$ , (c)  $r = 1$ , (d)  $r = 10$ . O estado instantâneo do sistema é dado pela Eq. (7.37) com coeficientes  $c_1 = \pm 1$ ,  $c_2 = \pm 1$ ,  $c_3 = -1$ . Fonte: Elaborada pelo autor. . . . . 98

Figura 24 – Gráficos de IMQs,  $I_m(\rho(t))$ , e pureza quântica,  $\mathcal{P}(\rho(t))$ , em função do parâmetro adimensional  $\lambda t$ , para o estado reduzido  $\rho(t)$  da dinâmica de dois qubits interagindo com reservatórios individuais, respectivos aos casos (a)  $r = 0.01$ , (b)  $r = 0.1$ , (c)  $r = 1$ , (d)  $r = 10$ . O estado instantâneo do sistema é dado pela Eq. (7.37) com coeficientes  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = 0$ . Fonte: Elaborada pelo autor. . . . . 99

Figura 25 – Descrição dos contornos de integração utilizados no cálculo da função de correlação na Eq. (A.2), onde  $z = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z)$  é um número complexo arbitrário no plano complexo. Nesta figura,  $C_+$  ( $C_-$ ) descreve o contorno fechado no semi-plano superior (inferior), orientado no sentido anti-horário (horário), que envolve o pólo  $z = +i\lambda$  ( $z = -i\lambda$ ). Por sua vez, segue que  $\Sigma_R^+$  ( $\Sigma_R^-$ ) é a curva de raio  $R$ , orientada no sentido anti-horário (horário). O intervalo de integração no eixo real é dado por  $-R \leq \text{Re}(z) \leq R$ , onde  $R \rightarrow \infty$ . Fonte: Elaborada pelo autor. . . . . 114

# Sumário

|       |                                                                     |    |
|-------|---------------------------------------------------------------------|----|
| 1     | INTRODUÇÃO . . . . .                                                | 15 |
| 1.1   | Contextualização e estado da arte . . . . .                         | 15 |
| 1.2   | Desafios experimentais . . . . .                                    | 18 |
| 1.3   | Objetivos e definição do problema de estudo . . . . .               | 19 |
| 1.4   | Estrutura do texto . . . . .                                        | 20 |
| 2     | FORMALISMO DA MATRIZ DENSIDADE . . . . .                            | 22 |
| 2.1   | O formalismo da matriz densidade . . . . .                          | 22 |
| 2.2   | Propriedades da matriz densidade . . . . .                          | 24 |
| 2.3   | Pureza de estados quânticos . . . . .                               | 26 |
| 2.4   | Matriz densidade reduzida . . . . .                                 | 27 |
| 2.5   | Estados de 1-qubit e a esfera de Bloch . . . . .                    | 28 |
| 3     | DINÂMICA DE SISTEMAS QUÂNTICOS . . . . .                            | 32 |
| 3.1   | Operações quânticas e mapas quânticos . . . . .                     | 32 |
| 3.2   | Operações quânticas não-unitárias . . . . .                         | 34 |
| 3.3   | Dinâmica não-unitária e estados de qubit único . . . . .            | 38 |
| 4     | CARACTERIZAÇÃO DA COERÊNCIA QUÂNTICA . . . . .                      | 41 |
| 4.1   | O formalismo de Baumgratz-Cramer-Plenio . . . . .                   | 41 |
| 4.2   | Medidas de coerência e distâncias entre estados quânticos . . . . . | 44 |
| 4.2.1 | Norma- $\ell_1$ de coerência . . . . .                              | 46 |
| 4.2.2 | Entropia relativa de coerência . . . . .                            | 46 |
| 4.3   | Coerência de estados de 1-qubit . . . . .                           | 48 |
| 4.3.1 | Norma- $\ell_1$ de coerência e estados de 1-qubit . . . . .         | 50 |
| 4.3.2 | Entropia relativa de coerência e estados de 1-qubit . . . . .       | 51 |
| 4.3.3 | Análise dos resultados . . . . .                                    | 53 |
| 5     | DINÂMICA DE COERÊNCIA QUÂNTICA DE ESTADOS DE 1-<br>QUBIT . . . . .  | 57 |
| 5.1   | Dinâmica de atenuação de fase . . . . .                             | 57 |
| 5.2   | Dinâmica de atenuação de amplitude . . . . .                        | 60 |
| 6     | ORDENS DE COERÊNCIA . . . . .                                       | 63 |
| 6.1   | O formalismo de ordens de coerência . . . . .                       | 63 |
| 6.2   | Intensidade de múltiplo <i>quantum</i> (IMQ) . . . . .              | 67 |
| 6.3   | IMQs e pureza quântica . . . . .                                    | 68 |

|       |                                                                                         |     |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.4   | Ordens de coerência de estados quânticos de 1-qubit . . . . .                           | 69  |
| 6.5   | Ordens de coerência e estados de 1-qubit em sistemas quânticos abertos . . . . .        | 73  |
| 6.5.1 | IMQs e dinâmica de atenuação de fase . . . . .                                          | 73  |
| 6.5.2 | IMQs e dinâmica de atenuação de amplitude . . . . .                                     | 76  |
| 7     | COERÊNCIA DE SISTEMAS QUÂNTICOS ABERTOS BIPARTIDO                                       | 80  |
| 7.1   | O estado Bell-diagonal de 2-qubits . . . . .                                            | 80  |
| 7.2   | Dinâmica de defasagem e estados de 2-qubits . . . . .                                   | 81  |
| 7.2.1 | A norma- $\ell_1$ de coerência . . . . .                                                | 84  |
| 7.2.2 | Ordens de coerência e IMQs . . . . .                                                    | 86  |
| 7.3   | Dinâmica de atenuação de amplitude e estados de 2-qubits . . . . .                      | 90  |
| 7.3.1 | A norma- $\ell_1$ de coerência . . . . .                                                | 93  |
| 7.3.2 | Ordens de coerência e IMQs . . . . .                                                    | 96  |
| 8     | CONCLUSÕES . . . . .                                                                    | 101 |
|       | REFERÊNCIAS . . . . .                                                                   | 103 |
|       | APÊNDICES                                                                               | 111 |
|       | APÊNDICE A – CÁLCULOS ALGÉBRICOS . . . . .                                              | 112 |
| A.1   | Cálculo da função de correlação $f(t)$ na dinâmica de atenuação de amplitude . . . . .  | 112 |
| A.2   | Cálculo da função de decoerência $g(t)$ na dinâmica de atenuação de amplitude . . . . . | 113 |

# 1 Introdução

A coerência quântica caracteriza-se como uma propriedade genuinamente quântica subjacente ao fenômeno de interferência quântica, e sua compreensão remonta ao cerne da Mecânica Quântica [3, 4]. Desenvolvimentos recentes no escopo da ciência da informação quântica têm contribuído para uma compreensão profunda do papel da coerência quântica de sistemas físicos em nível microscópico. Neste contexto, a caracterização da coerência quântica exhibe aspectos similares ao estudo de emaranhamento em sistemas quânticos de muitas partículas e encontra aplicações em diferentes ramos da ciência da informação quântica [5–8]. Logo, percebe-se que a coerência quântica perfaz um recurso essencial ao processamento da informação quântica [1]. Neste capítulo, apresentaremos um panorama geral acerca da caracterização de coerência quântica na perspectiva da ciência da informação, analisando o estado da arte deste assunto e contextualizando os resultados centrais. Por fim, discutiremos as propostas deste trabalho, elaborando o objeto de estudo no recorte de sistemas quânticos de dimensão finita.

## 1.1 Contextualização e estado da arte

O estudo da coerência quântica no âmbito da óptica contempla uma longa história, sobretudo contribuindo para realizações tecnológicas tais como o *laser* e o *maser*. Neste contexto, a coerência quântica está vinculada aos modos do campo de radiação, tal que sua descrição envolve distribuições espaciais de fase e funções de correlação do campo eletromagnético [9–11].

Na última década, a ciência da informação quântica promoveu uma reavaliação de fenômenos em nível microscópico em termos de recursos quânticos, no sentido de que podem ser explorados para realizar tarefas que de outra forma não seriam possíveis no domínio da física clássica. Em geral, um recurso descreve uma propriedade de um sistema físico que está disponível para execução de certas tarefas. No âmbito quântico, tais recursos podem ser consumidos em processos físicos no intuito de superar limites clássicos, por exemplo, envolvendo o processamento de informação. Dentre estes recursos quânticos, destacam-se coerência e emaranhamento. Este ponto de vista motivou o desenvolvimento de teorias para a coerência quântica, a qual perfaz um recurso importante em protocolos de processamento de informação. Nos últimos anos, o estudo da coerência de sistemas quânticos de dimensão finita tem repercutido importantes desenvolvimentos no escopo da termodinâmica quântica [12], metrologia quântica [13], e biologia quântica [14], além de ser usada como um recurso em tecnologias quânticas [4].

De forma geral, a coerência quântica descreve um recurso frágil e extremamente



suscetível a efeitos de decoerência relativos a ruídos externos e graus de liberdade externos ao sistema físico. Neste contexto, o estudo da robustez de coerência quântica em sistemas abertos tem suscitado diversos trabalhos no âmbito da ciência da informação quântica [4, 15]. Por sua vez, a caracterização formal e rigorosa das propriedades da coerência de sistemas quânticos de dimensão finita ocorreu por meio do trabalho seminal de Baumgratz, Cramer e Plenio [15]. De forma geral, neste trabalho, os autores estabelecem certos critérios necessários para que uma dada figura de mérito seja considerada um quantificador de coerência. Na prática, este artigo despertou interesse em uma gama de sistemas de mecânica quântica e nanoescala [16–18].

Nos últimos anos, diversos trabalhos surgiram no escopo da ciência da informação buscando desenvolver um formalismo teórico adequado para a caracterização da coerência de sistemas quânticos de dimensão finita. Em geral, tais esforços envolvem a descrição da coerência em termos de medidas de distância entre o estado quântico de prova e estados incoerentes em relação a uma dada base fixa [15]. Nesta abordagem, um quantificador fiel de coerência deve satisfazer um conjunto mínimo de propriedades algébricas respaldadas cujo significado físico remonta sobretudo ao vínculo de conservação da coerência do sistema físico [4, 15, 19, 20]. Importante destacar que esta descrição exhibe nuances comuns à caracterização de emaranhamento e demais correlações quânticas outrora estabelecidas na literatura [8, 21–26].

A formalização em nível teórico das propriedades da coerência quântica de sistemas de dimensão finita baseou-se nos conceitos de estados livres e operações livres, os quais são conceitos oriundos da chamada teoria de recursos. Em síntese, a teoria de recursos propõe-se a ressignificar em nível axiomático características genuinamente quânticas como coerência e emaranhamento, estabelecendo regras para tais recursos [4, 27–32]. Por um lado, os estados livres são identificados como estados incoerentes, ou seja, estados que são diagonais em uma dada base fixa de referência. Na prática, chamamos de estados livres aqueles estados quânticos que podem ser preparados sem que haja perda das suas propriedades quânticas, sobretudo coerência quântica. Por outro lado, as operações livres descrevem as transformações físicas que podem ser implementadas sem consumo de recursos genuinamente quânticos. A última década testemunhou o desenvolvimento de diversas abordagens acerca do conceito de operações livres no escopo da teoria da coerência, sobretudo envolvendo diferentes perspectivas físicas e matemáticas [4].

Na perspectiva da teoria de recursos, a caracterização da coerência quântica envolve os conceitos de operações incoerentes (IO<sup>1</sup>) [15], operações maximamente incoerentes (MIO<sup>2</sup>) e operações estritamente incoerentes (SIO<sup>3</sup>) [27]. As operações incoerentes podem ser interpretadas como operações que não podem criar coerência. Por sua vez, operações

<sup>1</sup> Operações incoerentes, do inglês *Incoherent Operations*.

<sup>2</sup> Operações estritamente incoerentes, do inglês *Maximally Incoherent Operations*.

<sup>3</sup> Operações estritamente incoerentes, do inglês *Strictly Incoherent Operations*.

maximamente incoerentes caracterizam uma classe de operações quânticas que não podem criar coerência a partir de estados incoerentes, como discutido em mais detalhes na Ref. [19]. Neste contexto, operações estritamente incoerentes descrevem aquelas operações quânticas que não podem criar coerência e que são dadas em termos de operadores de Kraus incoerentes em relação a uma dada base de estados fixa. É importante destacar que existem outras classes de operações discutidas na literatura, conforme descrito na Ref. [4]. Por exemplo, podemos destacar a chamada teoria de assimetria de recursos [33]. Porém, nesse trabalho daremos ênfase apenas às operações incoerentes.

A caracterização de coerência quântica tem papel importante em diversos cenários da ciência da informação quântica. No contexto de computação quântica, sabe-se que a coerência de estados multipartido relaciona-se de forma direta com as correlações quânticas não-triviais presentes nestes estados [34, 35]. Este é o caso, por exemplo, da chamada discórdia quântica, um tipo distinto de correlação quântica que pode estar presente mesmo em estados não-emaranhados [28]. Em especial, este vínculo tem papel relevante em algoritmos quânticos no âmbito do modelo de computação quântica determinística de estados de qubit único (DQC1) [36].

Na metrologia quântica, o estudo da coerência de estados quânticos busca superar o limite clássico na precisão de estimativa de fases codificadas em protocolos metrológicos, por exemplo, através de interferometria [37, 38]. É sabido que estados que exibem maior coerência implicam em uma menor flutuação na leitura da informação armazenada no sistema físico [39]. Neste contexto, recorrendo a estados de prova com coerência finita, é possível mitigar o papel de flutuações quânticas a partir de operações quânticas unitárias repetidas de forma sequencial [40].

Em especial, a caracterização da coerência quântica sob a égide da teoria de recursos tem contribuído significativamente com diversos avanços na área de termodinâmica quântica [41]. De fato, pode-se verificar que sistemas quânticos em temperatura finita exibem valores máximos de coerência quando sujeitos a certas operações quânticas unitárias [42]. Este processo envolve correlações quânticas e um custo energético que depende dos recursos quânticos disponíveis na implementação da operação quântica. Por sua vez, sabe-se que a coerência também desempenha um papel importante na operação de máquinas térmicas quânticas, como motores térmicos e refrigeradores [43, 44].

O estudo de quantificadores de coerência tem mostrado-se útil na caracterização de transições de fase em sistemas quânticos de muitos corpos à temperatura zero. Em geral, as propriedades críticas do sistema físico são capturadas explorando a relação entre flutuações quânticas no estado fundamental e suas coerências relativas aos autoestados de algum observável de referência. Neste contexto, os pontos críticos são identificados através de assinaturas singulares dos quantificadores de coerência, por exemplo, pontos de inflexão, cúspides, ou divergências em termos do parâmetro de ordem do sistema físico [4]. Estudos

recentes têm investigado transições de fase quântica em modelos de spin por meio da norma- $\ell_1$  de coerência, entropia relativa de coerência, e a chamada medida de assimetria de Wigner-Yanase [45, 46]. Em síntese, estes quantificadores avaliam as coerências de estados quânticos de prova a partir da base de autoestados fixa de um certo observável.

## 1.2 Desafios experimentais

De forma geral, a investigação experimental da coerência de sistemas quânticos tem concentrado plataformas físicas de teste no âmbito da ressonância magnética nuclear (RMN), fotônica, circuitos supercondutores, íons armadilhados e átomos frios [47]. Em especial, a caracterização experimental de coerência de sistemas nucleares em RMN tipicamente envolve a técnica de tomografia de estados quânticos, a qual requer o acesso de todos os elementos da matriz densidade do sistema [48, 49]. Por exemplo, a tomografia de um estado  $\rho_N$  de  $N$ -qubits envolve a estimativa de um número de elementos de matriz da ordem

$$\#_{\text{total}}(\rho_N) = \#_{\text{populações}}(\rho_N) + \#_{\text{coerências}}(\rho_N) , \quad (1.1)$$

onde  $\#_{\text{populações}}$  representa o número de elementos de matriz relativos às populações do estado quântico, e se escreve na forma

$$\#_{\text{populações}}(\rho_N) = 2^N - 1 , \quad (1.2)$$

sendo  $\#_{\text{coerências}}$  o número de elementos de matriz não-diagonais relativos às coerências do estado quântico de  $N$ -qubits, o qual é dado por

$$\#_{\text{coerências}}(\rho_N) = 2^{2N-1} + 2^{N-1} - 2^N . \quad (1.3)$$

Destacamos que as Eqs. (1.2) e (1.3) podem ser verificadas através de indução finita, e se aplicam para todo  $N \in \mathbb{N}$ . Por um lado, o número de elementos de matriz de populações na Eq. (1.2) leva em conta o vínculo de normalização da matriz densidade,  $\text{Tr}(\rho_N) = 1$ , e que por sua vez são números reais. Por outro lado, o número de elementos de matriz relativos às coerências do estado quântico na Eq. (1.3) pressupõe o vínculo de Hermiticidade da matriz densidade, i.e.,  $\rho_N^\dagger = \rho_N$ . Por sua vez, os elementos de matriz não-diagonais são números complexos, ou seja, exibem parte real e imaginária, o que implica que a estimativa experimental das coerências deste estado requer na verdade o dobro do número de elementos indicados na Eq. (1.3).

As Eqs. (1.2) e (1.3) revelam que, no limite  $N \gg 1$ , o processo tomográfico exibe uma complexidade que escala exponencialmente com o número de partículas do sistema físico. Este fato inviabiliza a tarefa da estimativa de coerências de estados quânticos de sistemas de muitos corpos, sobretudo em cenários físicos onde não é necessário acessar completamente as propriedades do estado quântico. De fato, o processamento da informação

quântica requer o conhecimento de informação codificada em subespaços rotulados por certos números quânticos, ou seja, setores específicos da matriz densidade. Neste caso, a tomografia completa do estado forneceria informação de graus de liberdade sobressalentes, a um custo experimental que cresce rapidamente com o tamanho do sistema. Desta forma, seria interessante pensar em experimentos que acessem a coerência sem recorrer a métodos tomográficos [50]. Neste contexto, surge o formalismo ordens de coerência, moldado nas plataformas experimentais de RMN, usado para analisar a coerência codificada em subespaços da matriz de densidade do sistema físico a partir da base de estados de algum observável de referência [51]. Apesar do amplo trabalho em nível teórico na proposição de quantificadores de coerência ao longo da última década, poucos avanços ocorreram no que tange a estimativas experimentais diretas e eficientes destas quantidades.

### 1.3 Objetivos e definição do problema de estudo

Nos últimos anos, o estudo da coerência de sistemas quânticos de dimensão finita tem envolvido elementos conceituais e ferramentas técnicas cuja origem remonta à teoria de recursos [15]. Em detrimento da variedade de resultados algébricos e simulações numéricas acerca deste assunto, é notável a escassez de trabalhos experimentais que corroborem estas previsões, sobretudo realizações experimentais que promovam o acesso direto a coerência dos estados quânticos. De fato, boa parte das previsões teóricas demandam informações por vezes inacessíveis em certas plataformas experimentais, o que justifica a origem destas lacunas no âmbito teórico-experimental. Propostas experimentais recentes têm promovido a caracterização de coerência quântica em sistemas de ressonância magnética nuclear, íons armadilhados, átomos ultrafrios, e circuitos supercondutores [52].

O formalismo de quantificadores de coerência proposto por Baumgratz, Cramer e Plenio (BCP) [15] estabeleceu um novo paradigma no estudo de coerência de sistemas quânticos. Na prática, a caracterização da coerência requer a introdução de certas medidas de distinguibilidade que avaliem a distância do estado de prova ao conjunto de estados incoerentes. É importante destacar que a caracterização da coerência quântica não é unívoca, o que a torna dependente da escolha da base de estados e do funcional de distância de estados quânticos. Estes resultados têm se mostrado bastante úteis em nível teórico, mas pouco progresso tem sido feito acerca de sua conciliação com realizações experimentais típicas. Neste contexto, o formalismo de ordens de coerência se apresenta como uma alternativa pertinente à caracterização de coerência de estados quânticos. De forma geral, esta técnica prevê acesso cirúrgico à coerência relativa a subespaços respectivos ao espectro de um certo observável do sistema físico. Neste formalismo, a caracterização da coerência não requer a tomografia completa do estado quântico. Por sua vez, este fato revela uma vantagem desta metodologia, sobretudo se pensarmos que técnicas tomográficas exibem complexidade que cresce de forma exponencial com o tamanho do sistema.

Neste trabalho, investigaremos as propriedades da coerência de estados quânticos: (i) na perspectiva do formalismo BCP [15]; (ii) através do formalismo de ordens de coerência; (iii) por meio da comparação de ambas abordagens, avaliando de forma crítica os resultados e propondo alternativas na tentativa de conciliar resultados analíticos e respostas experimentais. Em especial, utilizaremos a abordagem de ordens de coerência na descrição da coerência de sistemas quânticos de dimensão finita, sobretudo sistemas de baixa dimensionalidade. Nesta perspectiva, investigaremos a caracterização da coerência a partir de estados de qubit único, além de estados do tipo Bell-diagonal de 2-qubits, ambos sujeitos a canais quânticos recorrentes na literatura. Investigamos então a distribuição de coerência em cada um dos subespaços de ordem de coerência em relação a matriz densidade do estado global do sistema físico.

## 1.4 Estrutura do texto

Nessa dissertação, discutiremos a caracterização de coerência em termos da ideia de distinguibilidade de estados quânticos, sobretudo na perspectiva da formulação axiomática introduzida pela Ref. [15]. Em contrapartida, investigaremos o conceito de ordens de coerência, o qual tem respaldo experimental em termos de plataformas de ressonância magnética nuclear. A organização dos capítulos está dada a seguir.

No Capítulo 2, discutimos o formalismo da matriz densidade e *ensemble* de estados quânticos. Neste contexto, abordaremos os conceitos de pureza, correlações quânticas, além de promover o estudo da representação geométrica de estados de qubit único em termos da esfera de Bloch.

No Capítulo 3, discutimos a dinâmica de sistemas quânticos compostos, sobretudo avaliando a dinâmica local não-unitária que decorre da interação entre um sistema quântico de dimensão finita e suas vizinhanças. Em especial, nossa abordagem explora o conceito de operações quânticas e a chamada representação operador-soma no formalismo de Kraus.

No Capítulo 4, revisamos em detalhes o formalismo de caracterização de coerência quântica proposto por Baumgratz, Cramer e Plenio [15]. Em especial, o estudo tem como recorte quantificadores de coerência recorrentes na literatura especializada, a saber, a norma- $\ell_1$  de coerência e a entropia relativa de coerência. Neste contexto, investigaremos as coerências de estados de qubit único em relação a base de observáveis de spin-1/2.

No Capítulo 5, discutimos a dinâmica da coerência de estados de qubit único sob evolução ruidosa dos canais quânticos atenuação de amplitude e atenuação de fase. O estudo tem como premissa a investigação da norma- $\ell_1$  de coerência e entropia relativa de coerência de estados de 1-qubit, explorando a representação geométrica destes estados na esfera de Bloch. De fato, clarificamos o significado geométrico das medidas de coerência a partir da interpretação geométrica do efeito decoerente dos canais quânticos na esfera de

Bloch.

No Capítulo 6, discutiremos a caracterização de coerência quântica em termos do formalismo de ordens de coerência. Neste contexto, introduziremos a chamada intensidade de múltiplo-quantum (IMQ<sup>4</sup>), investigando suas propriedades gerais e possibilidades de medição experimental em plataformas de RMN. Em especial, demonstramos um vínculo fundamental entre IMQs e a pureza de estados quânticos de dimensão finita, portanto caracterizando uma das contribuições originais deste trabalho. Na prática, a soma dos IMQs perfaz um invariante na perspectiva de dinâmicas unitárias e não-unitárias. No regime de estados de 1-qubit, mostramos que os IMQs e a norma- $\ell_1$  de coerência estão diretamente relacionados, o que pode respaldar uma rota de estimativa experimental da coerência quântica em sistemas de dois níveis.

No Capítulo 7, discutimos a dinâmica de ordens de coerência em sistemas quânticos abertos, sobretudo avaliando estados de qubit único e estados Bell-diagonais de 2-qubits. Na perspectiva da representação operador-soma, investigamos os IMQs relativos a estados quânticos sob ação dos canais atenuação de fase e atenuação de amplitude. Por um lado, estudamos a dinâmica de IMQs de um sistema bipartido de qubits, cuja evolução não-unitária é descrita pelo mapa de defasagem no regime Markoviano. Para fins de comparação, investigamos a dinâmica da norma- $\ell_1$  de coerência e da chamada concorrência de emaranhamento<sup>5</sup> do estado quântico global do sistema bipartido. Por outro lado, abordamos a dinâmica efetiva de um sistema de 2-qubits cuja evolução é modelada pelo mapa de atenuação de amplitude, a qual exhibe *crossovers* entre os regimes Markoviano e não-Markoviano. Em especial, investigamos os IMQs no regime ressonante da dinâmica aberta, além de estudar a concorrência e norma- $\ell_1$  de coerência do estado global de 2-qubits.

Por fim, no Capítulo 8, apresentamos as conclusões do trabalho e suas perspectivas. Em especial, os Capítulos 4, 6 e 7 incluem resultados inéditos na literatura, os quais serão posteriormente organizados e submetidos para revisão de pares em revistas indexadas de envergadura internacional.

<sup>4</sup> Intensidade de múltiplo-quantum, do inglês *Multiple Quantum Intensity*.

<sup>5</sup> Concorrência de emaranhamento, do inglês *Concurrence*.

## 2 Formalismo da matriz densidade

A caracterização de estados quânticos em termos de matrizes densidade perfaz um aspecto importante da ciência da informação quântica. Neste capítulo, apresentaremos uma revisão de literatura das referências básicas do formalismo teórico-conceitual acerca de matrizes densidade, a qual será de suma importância no estudo de medidas de coerência que abordaremos nos próximos capítulos. Em detalhes, a Sec. 2.1 introduz o ferramental técnico envolvendo matrizes densidade, explorando as devidas perspectivas físicas. Na Sec. 2.2, discutimos as propriedades da matriz densidade. Na Sec. 2.3, avaliamos a chamada pureza de estados quânticos na perspectiva de matrizes densidade, a qual estabelece um critério que discrimina estados puros e mistos. Na Sec. 2.4, avaliamos a chamada densidade reduzida de um sistema composto. Por fim, a Sec. 2.5 fornece a perspectiva geométrica de estados quânticos de qubit único em termos da chamada esfera de Bloch. Destacamos que este capítulo consiste em uma revisão bibliográfica detalhada da literatura especializada no assunto.

### 2.1 O formalismo da matriz densidade

O formalismo da matriz densidade ou operador densidade foi originalmente proposto por J. von Neumann em 1927 [53]. Em geral, esta abordagem permite a descrição de sistemas físicos em termos de *ensembles* de estados puros e mistos [54]. Além disso, perfaz uma ferramenta eficaz no estudo de sistemas quânticos compostos que envolvem muitas partículas, sobretudo no que se refere ao estado reduzido de sistemas quânticos multipartido. Em seguida, discutiremos a forma geral da matriz densidade para um sistema quântico de dimensão finita. A inspiração nesta abordagem tem origem na Ref. [55].

Considere um sistema quântico cuja descrição envolve um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimensão finita  $d = \dim \mathcal{H}$ . Neste espaço, seja a base  $\{|\psi_k\rangle\}_{k=1,\dots,d}$  formada pelo conjunto de autoestados de um observável  $O \in \mathcal{H}$ . Por hipótese, este conjunto de estados encontra-se disponível para medições de propriedades de outros observáveis do sistema físico. A Fig. 1 ilustra de forma pictórica o processo experimental nestas medições, o qual envolve um dispositivo fictício que prepara estados da base. Em detalhes, o dispositivo prepara de forma aleatória o  $k$ -ésimo estado  $|\psi_k\rangle$  do *ensemble* em resposta a um clique no botão vermelho indicado nesta figura. Por meio deste estado de saída, investigamos o valor esperado  $\langle \psi_k | A | \psi_k \rangle$  de um certo observável  $A$ . É importante esclarecer que o aparato prepara um único estado por clique, e estados iguais ou diferentes podem ser selecionados ao longo das rodadas do experimento. Isto significa que dispomos de um tipo de incerteza clássica neste processo, ou seja, um tipo de ignorância acerca do estado de saída.



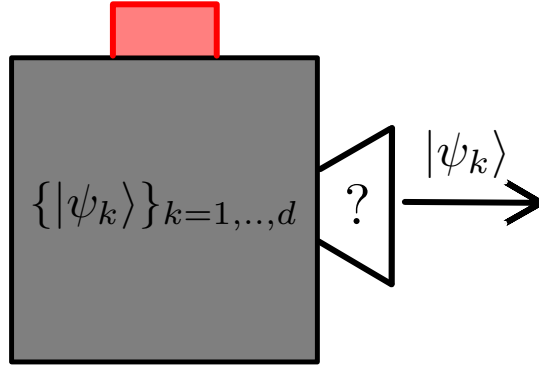


Figura 1 – Representação pictórica da seleção de estados quânticos. O experimento consiste em um dispositivo físico que seleciona e emite de forma aleatória um estado quântico  $|\psi_k\rangle$  do *ensemble*  $\{|\psi_k\rangle\}_{k=1,\dots,d}$  para cada clique no botão vermelho. O aparato emite um único estado por rodada do experimento, o qual é repetido em um número  $m$  de vezes. O experimentalista não tem controle sobre os estados de saída, ou seja, estados iguais ou diferentes podem ser selecionados ao longo de cada rodada. Fonte: Elaborada pelo autor.

Seja  $m$  o número de rodadas deste experimento, sendo  $x_k$  o número de vezes em que o  $k$ -ésimo estado  $|\psi_k\rangle$  é obtido na sequência de medições. Por um lado, comparando o número  $d$  de vetores de estado da base e o número  $m$  de rodadas do experimento, é possível que (i)  $m < d$ , (ii)  $m = d$ , ou (iii)  $m > d$ . Por outro lado, segue que  $x_k \leq m$  para todo  $k \in \{1, \dots, d\}$ . De forma geral, tem-se que  $p_k = x_k/m$  perfaz um tipo de frequência de repetições do  $k$ -ésimo estado  $|\psi_k\rangle$  ao longo do experimento, onde  $0 \leq p_k \leq 1$ . Por sua vez, as frequências  $p_k$  satisfazem o vínculo de normalização

$$\sum_{k=1}^d p_k = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^d x_k = \frac{m}{m} = 1. \quad (2.1)$$

De fato, as frequências  $p_k = x_k/m$  descrevem as probabilidades de ocorrência do  $k$ -ésimo estado do *ensemble* no experimento. Neste contexto, o valor esperado total do observável  $A$  pode ser encontrado fazendo a média ponderada dos valores esperados  $\langle \psi_k | A | \psi_k \rangle$  em relação aos pesos  $p_k$  de repetição dos estados ao longo de todas as rodadas, a saber

$$\langle A \rangle = \sum_{k=1}^d p_k \langle \psi_k | A | \psi_k \rangle. \quad (2.2)$$

Por sua vez, a Eq. (2.2) pode ser reescrita na forma

$$\langle A \rangle = \sum_{k=1}^d p_k \text{Tr}(A |\psi_k\rangle \langle \psi_k|), \quad (2.3)$$

onde  $|\psi_k\rangle \langle \psi_k|$  representa um projetor, e utilizamos a propriedade de traço  $\text{Tr}(|\psi_k\rangle \langle \psi_k|) = \langle \psi_k | \psi_k \rangle$  destes projetores. Por meio da linearidade do traço em relação à soma de matrizes,



segue que a Eq. (2.3) permite concluir o resultado

$$\begin{aligned}\langle A \rangle &= \text{Tr} \left[ A \left( \sum_{k=1}^d p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \right) \right] , \\ &= \text{Tr}(A\rho) ,\end{aligned}\tag{2.4}$$

onde introduzimos a matriz

$$\rho := \sum_{k=1}^d p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| .\tag{2.5}$$

A matriz quadrada na Eq. (2.5) representa a chamada matriz densidade do sistema físico de dimensão finita [1, 54, 56]. Em geral, tendo em vista que a operação de traço é independente de escolhas específicas de vetores de base, segue que a quantidade  $\text{Tr}(A\rho) = \text{Tr}(\rho A)$  pode ser calculada usando qualquer base conveniente. Desta forma, segue que o operador densidade na Eq. (2.5) codifica a informação física disponível a respeito do *ensemble* em questão [1, 56].

## 2.2 Propriedades da matriz densidade

De forma geral, a matriz densidade  $\rho$  na Eq. (2.5) representa um operador (i) Hermitiano, (ii) normalizado à unidade pela operação de traço, e (iii) positivo semi-definido. Em seguida, discutiremos os detalhes de cada uma destas propriedades.

Em primeiro lugar, a matriz densidade representa um observável do sistema físico, ou seja, é um operador Hermitiano. Isto significa que a matriz densidade na Eq. (2.5) é invariante pela operação de transposição (conjugação) e conjugação (transposição), a saber

$$\rho^\dagger = \left( \sum_{k=1}^d p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \right)^\dagger = \sum_{k=1}^d p_k^* (|\psi_k\rangle \langle \psi_k|)^\dagger = \sum_{k=1}^d p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| = \rho .\tag{2.6}$$

Em termos físicos, segue que  $p_k$  define a probabilidade de medida do  $k$ -ésimo estado do *ensemble*. Neste caso, temos que  $p_k^* = p_k$  são números reais, o que corrobora o fato de que a matriz densidade é um operador Hermitiano. Cabe lembrar ainda que  $0 \leq p_k \leq 1$ , para todo  $k \in \{1, \dots, d\}$ .

Em segundo lugar, segue que a matriz densidade é normalizada à unidade sob operação de traço, tal que

$$1 = \text{Tr}(\rho) = \text{Tr} \left( \sum_{k=1}^d p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \right) = \sum_{k=1}^d p_k \text{Tr}(|\psi_k\rangle \langle \psi_k|) = \sum_{k=1}^d p_k ,\tag{2.7}$$

onde utilizamos que  $\text{Tr}(|\psi_k\rangle \langle \psi_k|) = \langle \psi_k | \psi_k \rangle = 1$  para todo  $k \in \{1, \dots, d\}$ . A Eq. (2.7) revela que a normalização da matriz densidade decorre em essência do vínculo de conservação de probabilidades de medição dos estados no *ensemble* do sistema físico, ou seja,

$$\sum_{k=1}^d p_k = 1 .\tag{2.8}$$

Por fim, tem-se que a matriz densidade define um operador positivo semi-definido, ou seja, segue que  $\langle \phi | \rho | \phi \rangle \geq 0$  para qualquer vetor de estado  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ . De fato, a partir da Eq. (2.5) pode-se concluir a relação

$$\langle \phi | \rho | \phi \rangle = \sum_{k=1}^d p_k \langle \phi | \psi_k \rangle \langle \psi_k | \phi \rangle = \sum_{k=1}^d p_k |\langle \phi | \psi_k \rangle|^2 \geq 0 . \quad (2.9)$$

Na Eq. (2.9), observe que  $|\langle \phi | \psi_k \rangle|^2$  são números reais, positivos, os quais definem amplitudes de probabilidade respectivas ao *overlap* entre o vetor de estado  $|\phi\rangle$  e o  $k$ -ésimo estado no *ensemble* do sistema quântico.

De forma geral, o resultado na Eq. (2.9) reflete a positividade dos elementos diagonais da matriz densidade, independente da base na qual refere-se a representação desta matriz [1, 54, 56]. Por exemplo, tomando uma base arbitrária de estados  $\{|u_j\rangle\}_{j=1,\dots,d}$ , sendo  $\langle u_j | u_k \rangle = \delta_{jk}$  e  $\sum_{j=1}^d |u_j\rangle \langle u_j| = \mathbb{I}_d$ , segue que os elementos diagonais  $\rho_{jj} = \langle u_j | \rho | u_j \rangle$  da matriz densidade serão sempre não-negativos. Por outro lado, os elementos de matriz não-diagonais  $\rho_{jk} = \langle u_j | \rho | u_k \rangle$  são números definidos no corpo dos complexos  $\mathbb{C}$ .

De forma geral, o formalismo da matriz densidade envolve duas classes de estados quânticos, a saber, estados puros e estados mistos. Por um lado, estados puros referem-se à descrição unívoca de um sistema quântico, ou seja, no cenário em que o estado do sistema é conhecido. Neste caso, é suficiente trabalhar com um vetor de estado  $|\psi\rangle$ , tal que a matriz densidade do estado puro se escreve na forma

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi| . \quad (2.10)$$

O estado puro na Eq. (2.10) satisfaz o vínculo  $\rho^2 = \rho$ , ou seja, define um tipo de operador de projeção. Na prática, a Eq. (2.10) refere-se a uma ignorância mínima acerca do estado do sistema quântico. Por outro lado, quando o estado do sistema quântico não é completamente conhecido, segue que sua descrição física será dada em termos de uma mistura de estados. Neste caso, será impossível descrever essa mistura em termos de um único vetor de estado. Isto significa que a matriz densidade do estado misto será dada em termos de uma média ponderada envolvendo os possíveis estados  $\{|\psi_k\rangle\}_{k=1,\dots,d}$  do sistema e as respectivas probabilidades de medição  $\{p_k\}_{k=1,\dots,d}$ , a saber [1, 54, 56]

$$\rho = \sum_{k=1}^d p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| , \quad (2.11)$$

onde  $0 \leq p_k \leq 1$  e  $\sum_{k=1}^d p_k = 1$ . Cabe ressaltar que  $\rho_k = |\psi_k\rangle \langle \psi_k|$  define um estado puro, tal que a Eq. (2.11) refere-se à mistura estatística de estados puros a partir de valores distintos de probabilidade de medida.

## 2.3 Pureza de estados quânticos

A pureza quântica descreve um critério útil para avaliar o grau de mistura de um dado estado quântico. A partir do operador densidade  $\rho$ , o funcional de pureza é definido na forma

$$\mathcal{P}(\rho) := \text{Tr}(\rho^2) . \quad (2.12)$$

De forma geral, o funcional de pureza pode ser reescrito em termos dos autovalores da matriz densidade. Para tanto, devemos recorrer à decomposição espectral deste estado quântico, dada na forma

$$\rho = \sum_{j=1}^d \lambda_j |j\rangle\langle j| , \quad (2.13)$$

onde  $\{\lambda_j\}_{j=1,\dots,d}$  refere-se ao conjunto de autovalores da matriz densidade, e  $\{|j\rangle\}_{j=1,\dots,d}$  define o conjunto de autoestados normalizados do operador densidade [1, 56]. Em outras palavras, a matriz densidade é diagonal nesta base. É relevante pontuar que a Eq. (2.13) decorre do fato de que a matriz densidade define um operador normal, ou seja, um operador que satisfaz o vínculo  $\rho\rho^\dagger = \rho^\dagger\rho$  [1]. Considerando a decomposição espectral  $\rho = \sum_{j=1}^d \lambda_j |j\rangle\langle j|$  da matriz densidade, segue que a pureza será dependente da soma dos quadrados dos autovalores deste estado, a saber,

$$\mathcal{P}(\rho) = \sum_{j,k=1}^d \lambda_j \lambda_k \langle j|k\rangle\langle k|j\rangle = \sum_{j,k=1}^d \lambda_j \lambda_k \delta_{jk} = \sum_{j=1}^d \lambda_j^2 . \quad (2.14)$$

Lembrando que  $0 \leq \lambda_j \leq 1$ , a Eq. (2.14) revela que a pureza é uma quantidade positiva, ou seja,  $\mathcal{P}(\rho) \geq 0$ , para toda matriz densidade.

A pureza exibe comportamento distinto para estados puros e mistos. Por um lado, sabemos que o operador densidade de um *ensemble* puro caracteriza um operador de projeção ou idempotente, ou seja,  $\rho^2 = \rho$ . De fato, pode-se verificar que o estado puro exibe espectro  $\{1, 0, \dots, 0\}$ , tal que o autovalor nulo possui degenerescência de ordem  $d - 1$ . Neste caso, a pureza de um estado puro arbitrário é igual a unidade, ou seja,

$$\mathcal{P}(\rho) = \text{Tr}(\rho^2) = \text{Tr}(\rho) = 1 . \quad (2.15)$$

Por outro lado, avaliando estados quânticos relativos a um *ensemble* misto, a expressão da pureza na Eq. (2.14) se reescreve na forma

$$\mathcal{P}(\rho) = \sum_{j=1}^d \lambda_j^2 = d \left( \frac{\sum_{j=1}^d \lambda_j^2}{\sum_{j=1}^d \frac{1}{d}} \right) \geq d \left( \frac{\sum_{j=1}^d \lambda_j}{\sum_{j=1}^d \frac{1}{d}} \right)^2 , \quad (2.16)$$

onde utilizamos a desigualdade de Jensen [57], a saber,

$$\frac{\sum_{j=1}^d a_j \varphi(\lambda_j)}{\sum_{j=1}^d a_j} \geq \varphi \left( \frac{\sum_{j=1}^d a_j \lambda_j}{\sum_{j=1}^d a_j} \right) , \quad (2.17)$$

sendo  $\varphi(u) = u^2$  uma função convexa<sup>1</sup>, e fixamos os coeficientes  $a_j = 1/d$  para todo  $j \in \{1, \dots, d\}$ . Lembrando que  $\sum_{j=1}^d \lambda_j = 1$  e  $\sum_{j=1}^d \frac{1}{d} = 1$ , segue que a Eq. (2.16) implica um limite inferior para a pureza de estados mistos, a saber,

$$\mathcal{P}(\rho) \geq \frac{1}{d} . \quad (2.18)$$

A desigualdade na Eq. (2.18) é saturada para estados maximamente misturados, ou seja,  $\rho = \mathbb{I}/d$ . O espectro de um estado maximamente misturado é formado pelos autovalores  $\{1/d, 1/d, \dots\}$  com degenerescência de ordem  $d$ , o que significa ignorância máxima na medição de propriedades do sistema físico. Por fim, combinando as Eqs. (2.15) e (2.18), conclui-se que a pureza satisfaz a seguinte hierarquia de desigualdades

$$\frac{1}{d} \leq \mathcal{P}(\rho) \leq 1 , \quad (2.19)$$

em que o limite inferior  $\mathcal{P}(\rho) = 1/d$  corresponde à pureza de um estado maximamente misturado  $\rho = \mathbb{I}/d$ , enquanto o limite superior  $\mathcal{P}(\rho) = 1$  indica a pureza de um estado puro [1, 55, 56].

## 2.4 Matriz densidade reduzida

O formalismo da matriz densidade é pertinente na descrição de subsistemas individuais que compõem sistemas quânticos compostos. Essa descrição é dada em termos da chamada matriz densidade reduzida. Os estados reduzidos do sistema são conhecidos como estados marginais. Em seguida, ilustraremos estes conceitos para um sistema quântico bipartido  $AB$ , o qual é composto pelos subsistemas  $A$  e  $B$ .

O espaço de Hilbert do sistema global é dado por  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , onde  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$  são espaços de Hilbert respectivos aos subsistemas  $A$  e  $B$ , respectivamente. O subespaço  $\mathcal{H}_A$  tem dimensão finita  $d_A = \dim(\mathcal{H}_A)$ , e é gerado pela base de estados  $\{|j_A\rangle\}_{j=1, \dots, d_A}$ . O subespaço  $\mathcal{H}_B$  tem dimensão finita  $d_B = \dim(\mathcal{H}_B)$ , e está munido com a base de estados  $\{|l_B\rangle\}_{l=1, \dots, d_B}$ . Por sua vez, o espaço global  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  tem dimensão  $d_{AB} = \dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) = d_A d_B$ , e dispõe da base  $\{|j_A, l_B\rangle\}_{j=1, \dots, d_A}^{l=1, \dots, d_B}$ . Neste contexto, seja  $\rho_{AB}$  a matriz densidade global que descreve o estado quântico do sistema bipartido, o qual pode ser separável ou emaranhado. Os estados dos subsistemas  $A$  e  $B$  são dados em termos das matrizes densidade reduzidas

$$\rho_{A,B} = \text{Tr}_{B,A}(\rho_{AB}) , \quad (2.20)$$

onde  $\text{Tr}_A(\bullet)$  descreve a operação de traço parcial em relação ao subsistema  $A$ , dada por

$$\text{Tr}_A(\bullet) = \sum_{j=1}^{d_A} (\langle j_A| \otimes \mathbb{I}_B) \bullet (|j_A\rangle \otimes \mathbb{I}_B) , \quad (2.21)$$

<sup>1</sup> Uma função é chamada convexa se um segmento de reta que conecta quaisquer dois pontos distintos da função se localiza acima da curva da função avaliada nestes pontos.

e por sua vez  $\text{Tr}_B(\bullet)$  define o traço parcial em relação ao subsistema  $B$ , dado por

$$\text{Tr}_B(\bullet) = \sum_{j=1}^{d_B} (\mathbb{I}_A \otimes \langle j_B |) \bullet (\mathbb{I}_A \otimes |j_B\rangle) . \quad (2.22)$$

Para ilustrar esta operação, considere um estado quântico bipartido de 2-qubits cuja matriz densidade global é dada por  $\rho_{AB} = |\Psi_+\rangle\langle\Psi_+|$ , onde  $|\Psi_+\rangle = (1/\sqrt{2})(|0_A, 0_B\rangle + |1_A, 1_B\rangle)$  é um estado da base de Bell [1]. Neste caso, o subespaço  $\mathcal{H}_A$  tem base  $\{|k_A\rangle\}_{k=0,1}$ , onde  $\sum_{k=0,1} |k_A\rangle\langle k_A| = \mathbb{I}_A$ . O subespaço  $\mathcal{H}_B$  tem base  $\{|k_B\rangle\}_{k=0,1}$ , onde  $\sum_{k=0,1} |k_B\rangle\langle k_B| = \mathbb{I}_B$ . Cabe ressaltar que os vetores  $\{|0_{A,B}\rangle, |1_{A,B}\rangle\}$  são estados da base computacional, ou seja, são autoestados da matriz de Pauli  $\sigma_z$ . A matriz densidade reduzida do subsistema  $A$  é dada por

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{Tr}_B(\rho_{AB}) \\ &= \sum_{k=0,1} (\mathbb{I}_A \otimes \langle k_B |) \rho_{AB} (\mathbb{I}_A \otimes |k_B\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (|0_A\rangle\langle 0_A| + |1_A\rangle\langle 1_A|) \\ &= \frac{\mathbb{I}_A}{2} . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Por sua vez, a matriz densidade reduzida do subsistema  $B$  é dada por

$$\begin{aligned} \rho_B &= \text{Tr}_A(\rho_{AB}) \\ &= \sum_{j=0,1} (\langle j_A | \otimes \mathbb{I}_B) \rho_{AB} (|j_A\rangle \otimes \mathbb{I}_B) \\ &= \frac{1}{2} (|0_B\rangle\langle 0_B| + |1_B\rangle\langle 1_B|) \\ &= \frac{\mathbb{I}_B}{2} . \end{aligned} \quad (2.24)$$

As Eqs. (2.23) e (2.24) revelam que os subsistemas  $A$  e  $B$  são descritos por estados maximamente misturados  $\mathbb{I}_A/2$  e  $\mathbb{I}_B/2$ , os quais têm autovalores  $1/2$  de degenerescência dupla. Isto significa que temos uma ignorância máxima na tentativa de obter informações do sistema global a partir dos estados marginais do sistema bipartido. A partir das Eqs. (2.23) e (2.24), pode-se verificar que a matriz densidade global  $\rho_{AB} = |\Psi_+\rangle\langle\Psi_+|$  do sistema bipartido de 2-qubits não pode ser representada por um estado produto, ou seja,  $\rho_{AB} \neq \rho_A \otimes \rho_B$ . Isto implica que o estado global é emaranhado. Esta é uma propriedade intrínseca de sistemas quânticos compostos, chamada de emaranhamento [1, 56], e representa uma característica genuinamente quântica.

## 2.5 Estados de 1-qubit e a esfera de Bloch

O *bit* clássico dispõe de uma configuração de valores binários, 0 ou 1. O *bit* quântico ou *qubit* exibe uma gama de configurações relativas a superposições de vetores de estado

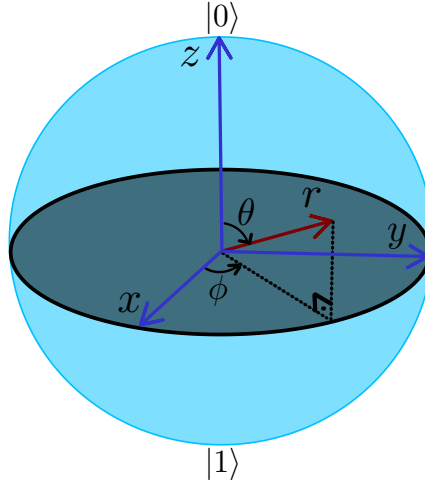


Figura 2 – Esfera de Bloch de estados quânticos de qubit único, onde  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ . Nesta representação, estados puros definem pontos na superfície da esfera de raio unitário, ou seja,  $r = 1$ . Por sua vez, estados mistos definem pontos no interior da esfera, de tal forma que  $0 \leq r < 1$ . O pólo norte (sul) da esfera localiza o vetor de estado  $|0\rangle$  ( $|1\rangle$ ) da base computacional. No centro da esfera,  $r = 0$ , temos o estado maximamente misturado. Fonte: Imagem adaptada da Ref. [1].

de base. O qubit refere-se a um sistema de dois níveis, o qual é descrito em termos de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$  de dimensão  $d = \dim \mathcal{H} = 2$ . Os estados de base neste espaço vetorial são tipicamente dados em termos da base computacional, a saber, os vetores  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  que perfazem autoestados do observável de spin  $(1/2)\sigma_z$ . Destacamos que a base computacional é de suma importância no contexto da computação quântica [1]. Neste caso, um estado de qubit único se escreve em termos da seguinte superposição desses estados na forma [1]

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (2.25)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são coeficientes complexos, e por sua vez devem satisfazer o vínculo  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  no intuito de corroborar a normalização  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$  do estado de qubit único. De forma geral, a Eq. (2.25) indica que o estado  $|\psi\rangle$  exibe probabilidade  $|\alpha|^2$  de ser encontrado no estado  $|0\rangle$ , e probabilidade  $|\beta|^2 = 1 - |\alpha|^2$  de ser encontrado no estado  $|1\rangle$ . A matriz densidade do estado puro de qubit único na Eq. (2.25) se escreve

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = |\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1| + \alpha\beta^*|0\rangle\langle 1| + \alpha^*\beta|1\rangle\langle 0|. \quad (2.26)$$

Na Eq. (2.26), segue que  $|\alpha|^2$  e  $|\beta|^2$  definem as populações da matriz densidade, onde  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , enquanto  $\alpha\beta^*$  e  $\alpha^*\beta$  representam as coerências do estado de qubit único em relação aos vetores da base computacional, tal que  $(\alpha^*\beta)^* = \alpha\beta^*$ .

O conjunto de estados de qubit único dispõe de uma representação geométrica no espaço tridimensional real. A Fig. 2 ilustra de forma pictórica a visualização geométrica destes estados em termos da chamada esfera de Bloch. De forma geral, o estado puro de

qubit único na Eq. (2.25) pode ser mapeado na forma [1]

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle, \quad (2.27)$$

onde estabelecemos as parametrizações  $\alpha = \cos(\theta/2)$  e  $\beta = e^{i\phi}\sin(\theta/2)$ , sendo  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  ângulos reais. Neste caso, os estados de qubit único mapeiam-se em termos de pontos na superfície da esfera de raio unitário ( $r = 1$ ) na Fig. 2, tal que cada estado é localizado em termos de um par de ângulos  $(\theta, \phi)$ . Por um lado, o estado  $|0\rangle$  localiza-se no pólo norte da esfera, o qual é obtido a partir da escolha  $\theta = 0$ . Por outro lado, fixando  $\theta = \pi$ , temos o estado  $|1\rangle$  no pólo sul da esfera de Bloch. Por sua vez, ambos estados não exibem coerências em relação aos elementos da base computacional. Em seguida, tomando  $\theta = \pi/2$  e  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ , temos os estados localizados ao longo do equador da esfera de Bloch. Por exemplo, fixando  $\theta = \pi/2$ , a Eq. (2.27) fornece os estados de superposição  $|\psi\rangle = (1/\sqrt{2})(|0\rangle + e^{i\phi}|1\rangle)$ , os quais exibem uma fase local  $\phi \in [0, 2\pi]$  que codifica informação no estado de qubit único. Estes estados exibem coerências não-nulas em relação a base computacional, o que se reflete em termos de contribuições máximas nas superposições entre os estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ .

Em essência, a Eq. (2.27) contempla apenas estados puros de qubit único. De forma geral, a descrição geométrica de estados mistos de qubit único deve levar em conta a informação acerca do grau de mistura. De fato, os estados mistos de qubit único mapeiam-se em termos de pontos na esfera localizados a partir de variáveis  $(r, \theta, \phi)$ , onde  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , e  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Desta forma, temos a matriz densidade do estado de 1-qubit na forma

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}), \quad (2.28)$$

onde  $\mathbb{I}$  é a matriz identidade de dimensão  $2 \times 2$ , e  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  é o vetor das matrizes de Pauli [1, 55], sendo

$$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta), \quad (2.29)$$

o qual representa um vetor no espaço tridimensional, e cujas entradas são números reais. O estado misto de qubit único na Eq. (2.28) exhibe a decomposição espectral a seguir

$$\rho = \sum_{j=1,2} p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|, \quad (2.30)$$

onde  $\{p_1, p_2\}$  caracterizam os autovalores da matriz densidade, dados por

$$p_1 = \frac{1}{2}(1 + r), \quad p_2 = 1 - p_1 = \frac{1}{2}(1 - r), \quad (2.31)$$

os quais correspondem, respectivamente, aos autoestados  $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$  a seguir

$$|\psi_1\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle, \quad (2.32)$$

$$|\psi_2\rangle = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle - e^{i\phi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle. \quad (2.33)$$

A Eq. (2.31) revela que os autovalores da matriz densidade de qubit único serão positivos desde que  $r \in [0, 1]$ . Os vetores nas Eqs. (2.32) e (2.33) definem uma base completa no espaço de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$  de dimensão  $d = 2$ , ou seja, tem-se que  $\langle \psi_j | \psi_l \rangle = \delta_{jl}$  para todo  $j = \{1, 2\}$ , e  $\sum_{j=1,2} |\psi_j\rangle \langle \psi_j| = \mathbb{I}_2$ . Pode-se perceber que o par de vetores nas Eqs. (2.32) e (2.33) dependem apenas dos ângulos  $(\theta, \phi)$ , isto é,  $|\psi_{1,2}\rangle \equiv |\psi_{1,2}(\theta, \phi)\rangle$ . Observe que existe um tipo de quadratura entre estes vetores na forma  $|\psi_2(\theta, \phi)\rangle = |\psi_1(\theta + \pi/2, \phi)\rangle$ .

A partir da Eq. (2.14), pode-se verificar que o funcional de pureza do estado quântico na Eq. (2.28) é dado por

$$\mathcal{P}(\rho) = \frac{1}{2}(1 + |\vec{r}|^2) = \frac{1}{2}(1 + r^2) . \quad (2.34)$$

A Eq. (2.34) mostra que o parâmetro  $r$  controla o grau de mistura do estado quântico. Neste caso, os estados são distribuídos no volume da esfera ilustrada na Fig. 2, inclusive em sua superfície. Por um lado, o caso  $r = 1$  restringe estados puros na superfície da esfera de Bloch na Fig. 2, os quais têm pureza  $\mathcal{P}(\rho) = 1$ . Por outro lado, o caso  $r = 0$  implica o estado maximamente misturado localizado no centro desta esfera, e exibe pureza  $\mathcal{P}(\rho) = 1/2$ . Por fim, estados mistos são obtidos escolhendo valores do parâmetro de mistura no intervalo  $r \in [0, 1)$ , que por sua vez definem pontos no volume da esfera de Bloch a partir da escolha do par de ângulos  $(\theta, \phi)$ , e têm pureza  $1/2 \leq \mathcal{P}(\rho) < 1$ .

Diversos sistemas quânticos exibem uma descrição efetiva em termos da física do sistema de dois níveis e, por sua vez, os estados quânticos nestes sistemas são dados a partir de estados de qubit único, puros ou mistos. Estes sistemas físicos possuem graus de liberdade em que se pode codificar um qubit de informação, por exemplo, polarização de fótons [58], íons armadilhados [59, 60], spins nucleares [61], eletrodinâmica quântica em cavidades e átomos de Rydberg [62].



## 3 Dinâmica de sistemas quânticos

Neste capítulo, discutiremos os elementos da dinâmica de sistemas quânticos de dimensão finita, sobretudo explorando o formalismo de operações quânticas utilizado na descrição da evolução não unitária de sistemas quânticos abertos. Em especial, a Sec. 3.1 introduz o conceito de operações quânticas, além de elencar as propriedades de uma dada transformação linear relativa a evoluções físicas genéricas. Em especial, ilustramos os tipos de operações quânticas, a saber, unitárias e não-unitárias, as quais descrevem dinâmicas de sistemas quânticos fechados e abertos, respectivamente. Na Sec. 3.2, abordamos a chamada representação operador-soma, a qual permite descrever de forma efetiva a dinâmica de sistemas quânticos abertos em termos dos chamados operadores de Kraus. Na Sec. 3.3, discutimos a dinâmica não-unitária do sistema de dois níveis, investigando canais quânticos típicos na literatura. É importante destacar que estes resultados serão úteis nas discussões abordadas nos próximos capítulos deste trabalho. Este capítulo consiste em uma revisão bibliográfica detalhada da literatura especializada no assunto.

### 3.1 Operações quânticas e mapas quânticos

O estudo da dinâmica de um sistema quântico depende sobretudo do formalismo voltado à descrição da interação entre o sistema de interesse e os graus de liberdade do ambiente. Por um lado, a evolução de sistemas quânticos fechados é dada em termos de uma dinâmica unitária, a qual relaciona-se sobremaneira a equação de Schrödinger [54]. Por outro lado, a evolução de um sistema quântico aberto é descrita por uma dinâmica não-unitária, em especial no que se refere a evolução local de subsistemas que compõem o sistema quântico aberto [63]. Por exemplo, é possível descrever de forma efetiva a evolução de um sistema quântico aberto por meio do formalismo de equações mestras [64]. O formalismo de operações quânticas perfaz uma poderosa ferramenta que permite descrever a evolução de sistemas quânticos de forma arbitrária, contemplando tanto a dinâmica unitária quanto não-unitária.

O formalismo de operações quânticas é dado em termos de mapas quânticos, os quais vamos representar na forma  $\varepsilon(\bullet)$ . Em geral, evoluções físicas são aquelas nas quais um estado quântico é mapeado em outro estado quântico, ou seja, uma matriz densidade  $\rho \in \mathcal{H}$  é mapeada de forma injetiva em uma matriz densidade  $\varepsilon(\rho) \in \mathcal{H}$ . Neste caso, o mapa quântico deve satisfazer a algumas propriedades básicas, a saber, (i) linearidade, (ii) positividade, e (iii) normalização ou preservação de traço. Em seguida, vamos discutir estas propriedades em detalhes. Esta discussão tem por motivação as Refs. [1, 65].

Sejam os estados quânticos  $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{H}$ , onde o espaço de Hilbert tem dimensão

finita  $d = \dim \mathcal{H}$ . Por sua vez, a combinação convexa  $q\rho_1 + (1 - q)\rho_2 \in \mathcal{H}$  também define um estado válido neste espaço vetorial, onde  $0 \leq q \leq 1$ . Neste contexto, um mapa quântico  $\varepsilon(\bullet)$  é dito linear desde que satisfaça a relação

$$\varepsilon(q\rho_1 + (1 - q)\rho_2) = q\varepsilon(\rho_1) + (1 - q)\varepsilon(\rho_2) . \quad (3.1)$$

Cabe ressaltar que a Eq. (3.1) pode ser reformulada no intuito de incluir combinações convexas gerais. Por exemplo, escolhendo a combinação convexa  $\sum_{l=1}^d q_l \rho_l$ , onde  $0 \leq q_l \leq 1$ ,  $\sum_{l=1}^d q_l = 1$ , e  $\rho_l \in \mathcal{H}$  para todo  $l = \{1, \dots, d\}$ , então a linearidade de um mapa  $\varepsilon(\bullet)$  está condicionada ao vínculo

$$\varepsilon\left(\sum_{l=1}^d q_l \rho_l\right) = \sum_{l=1}^d q_l \varepsilon(\rho_l) . \quad (3.2)$$

A Eq. (3.2) revela que um mapa linear caracteriza uma transformação linear no espaço de Hilbert.

Um mapa linear  $\varepsilon(\rho)$  é positivo semi-definido se, para todo  $\rho \in \mathcal{H}$  e qualquer vetor de estado  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ , vale a relação

$$\langle \phi | \varepsilon(\rho) | \phi \rangle \geq 0 . \quad (3.3)$$

Por exemplo, analisando a combinação convexa na Eq. (3.1), temos

$$\langle \phi | \varepsilon(q\rho_1 + (1 - q)\rho_2) | \phi \rangle = q\langle \phi | \varepsilon(\rho_1) | \phi \rangle + (1 - q)\langle \phi | \varepsilon(\rho_2) | \phi \rangle \geq 0 , \quad (3.4)$$

onde  $0 \leq q \leq 1$ . De forma geral, fixando a combinação convexa  $\sum_{l=1}^d q_l \rho_l$ , o mapa quântico linear será positivo semi-definido desde que  $\langle \phi | \varepsilon(\rho_l) | \phi \rangle \geq 0$ , ou seja, tal que

$$\langle \phi | \varepsilon(\rho) | \phi \rangle = \sum_{l=1}^d q_l \langle \phi | \varepsilon(\rho_l) | \phi \rangle \geq 0 . \quad (3.5)$$

A positividade do mapa na Eq. (3.5) está condicionada a escolha de um vetor  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$  arbitrário, para todo  $l = \{1, \dots, d\}$ . Pode-se mostrar que a positividade de um mapa linear por si só não garante que o mapeamento injetivo de estados físicos em outros estados físicos [1, 65]. Este é o caso, por exemplo, de sistemas físicos que incluem diversos subsistemas, e o estado do sistema pode exibir correlações quânticas. Neste sentido, deve-se exigir que o mapa seja completamente positivo (CP). Por exemplo, seja um sistema físico cujo espaço de Hilbert é dado por  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , onde  $\dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) = d_A d_B$ . Note que  $\mathcal{H}_B$  descreve um tipo de subespaço auxiliar ao espaço vetorial  $\mathcal{H}_A$ , e vice-versa. Por hipótese, o mapa  $\varepsilon(\bullet)$  define uma operação quântica em estados no subespaço  $\mathcal{H}_A$ . Este mapa será completamente positivo desde que a operação composta  $(\varepsilon \otimes \mathcal{I}_B)(\bullet)$  seja positiva semi-definida, onde  $\mathcal{I}_B$  descreve o mapa identidade no subespaço  $\mathcal{H}_B$ . Neste caso, dado um estado  $\rho_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , a positividade completa do mapa quântico  $\varepsilon(\bullet)$  é dada em termos da relação  $\langle \phi_{AB} | (\varepsilon \otimes \mathcal{I}_B)(\rho_{AB}) | \phi_{AB} \rangle \geq 0$ , para todo  $|\phi_{AB}\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Isto significa que a evolução do sistema quântico global deve representar uma evolução física, independente do

subsistema auxiliar em questão. Logo, a evolução do sistema global não deve ser alterada pela presença de um dado sistema auxiliar, o qual tem papel irrelevante nesta composição.

Uma operação quântica  $\varepsilon(\bullet)$  caracteriza-se como um mapa linear que preserva traço se, para qualquer matriz densidade  $\rho \in \mathcal{H}$ , onde  $\text{Tr}(\rho) = 1$ , vale a relação

$$\text{Tr}[\varepsilon(\rho)] = \text{Tr}(\rho) = 1. \quad (3.6)$$

para qualquer  $\rho \in \mathcal{H}$ . Esta condição revela que os estados permanecem normalizados ao longo da operação quântica, tendo como consequência direta a conservação de probabilidades na evolução do sistema quântico. Em termos da combinação convexa na Eq. (3.1) de estados  $\rho_1$  e  $\rho_2$  normalizados, ou seja,  $\text{Tr}(\rho_1) = \text{Tr}(\rho_2) = 1$ , tem-se que

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\varepsilon(q\rho_1 + (1-q)\rho_2)] &= q\text{Tr}[\varepsilon(\rho_1)] + (1-q)\text{Tr}[\varepsilon(\rho_2)] \\ &= q\text{Tr}(\rho_1) + (1-q)\text{Tr}(\rho_2) \\ &= 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Cabe destacar que as Eqs. (3.6) e (3.7) devem valer para combinações convexas gerais, bem como operações quânticas arbitrárias, isto é, evoluções unitárias ou não-unitárias.

Os critérios discutidos acima implicam um conjunto de propriedades necessárias para que uma dada operação quântica se caracterize como um mapa completamente positivo e que preserva traço (CPTP). Logo, um mapa quântico  $\varepsilon(\bullet)$  corresponde a uma evolução física caso se caracterize como um mapa CPTP [1, 65].

## 3.2 Operações quânticas não-unitárias

Em geral, operações quânticas não-unitárias referem-se a evolução de sistemas quânticos abertos [64]. Por sua vez, a dinâmica de sistemas quânticos abertos envolve a interação do sistema físico de interesse, ou subsistema  $S$ , e o ambiente externo, chamado de subsistema  $E$ . Juntos, sistema  $S$  e ambiente  $E$  formam um sistema quântico fechado cuja evolução global  $S + E$  é unitária. Em geral, a informação em nível global se preserva, pois o sistema  $S + E$  é fechado e isolado. Entretanto, a dinâmica reduzida local dos subsistemas  $S$  e/ou  $E$  é dada em termos de evoluções não-unitárias. Isto significa que a quantidade de informação pode variar nestes subsistemas, redistribuir-se em diferentes graus de liberdade em  $S$  e/ou  $E$ , mantendo o vínculo de conservação no sistema global  $S + E$ . Em seguida, vamos investigar em detalhes a evolução temporal de sistemas quânticos abertos, obtendo ao final a representação operador-soma para mapas quânticos não-unitários.

Seja um sistema quântico aberto cujo espaço de Hilbert é dado por  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ , e cuja dimensão é  $d = \dim(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E) = d_S d_E$ , onde  $d_S = \dim \mathcal{H}_S$  e  $d_E = \dim \mathcal{H}_E$ . Por exemplo, o subsistema  $S$  pode ser dado em termos de um sistema de dois níveis que se realiza em níveis eletrônicos de um átomo, ou mesmo em configurações de spins nucleares  $up$  e

down [65]. Cabe destacar que o espaço  $\mathcal{H}_S$  tem dimensão finita. Por sua vez, o subsistema  $E$  pode perfazer um tipo de reservatório de modos bosônicos de frequência do campo eletromagnético, tal que o subespaço  $\mathcal{H}_E$  pode exibir dimensão infinita [64]. Neste contexto, o Hamiltoniano do sistema quântico aberto é dado por

$$H_{SE} = H_S \otimes \mathbb{I}_E + \mathbb{I}_S \otimes H_E + V_{SE} , \quad (3.8)$$

onde  $H_S$  é o Hamiltoniano do subsistema  $S$ ,  $H_E$  é o Hamiltoniano do subsistema  $E$ , e  $V_{SE}$  descreve o termo de interação entre os subsistemas  $S$  e  $E$ , ou seja, sistema e ambiente. Por simplicidade, vamos considerar que o Hamiltoniano  $H_{SE}$  é independente do tempo, ou seja, os termos  $H_S$ ,  $H_E$  e  $V_{SE}$  são estáticos. Neste caso, a evolução do sistema global  $S + E$  é unitária, dada em termos do operador

$$U_{SE}(t) = e^{-itH_{SE}} , \quad (3.9)$$

onde  $U_{SE}^\dagger(t) = U_{SE}^{-1}(t)$ , tal que  $U_{SE}^\dagger(t)U_{SE}(t) = U_{SE}(t)U_{SE}^\dagger(t) = \mathbb{I}_S \otimes \mathbb{I}_E$  para qualquer instante  $t \geq 0$ . Cabe ressaltar que a interação entre os subsistemas  $S$  e  $E$  pode incluir os regimes de acoplamento fraco ou forte, tal que o formalismo discutido neste capítulo é independente deste aspecto.

Por simplicidade, vamos considerar que o estado inicial do sistema global  $S + E$  no instante  $t = 0$  seja dado pelo estado produto  $\rho_{SE}(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_E(0)$ . É importante pontuar que esta hipótese pode ser relaxada, sobretudo tendo em vista que a interação entre sistema e ambiente induz correlações nos subsistemas  $S$  e  $E$ . No entanto, em muitos casos de interesse físico, é razoável supor um estado inicial do sistema  $S + E$  separável [1]. Neste caso, o estado do sistema global  $S + E$  no instante de tempo  $t \geq 0$  é dado por

$$\rho_{SE}(t) = U_{SE}(t)\rho_{SE}(0)U_{SE}^\dagger(t) = U_{SE}(t)(\rho_S(0) \otimes \rho_E(0))U_{SE}^\dagger(t) . \quad (3.10)$$

O estado instantâneo na Eq. (3.10) inclui graus de liberdade dos subsistemas  $S$  e  $E$ , ou seja, leva em conta informação tanto do sistema principal quanto do ambiente.

Na dinâmica de sistemas quânticos abertos, a descrição física do ambiente demanda um tipo de modelagem fenomenológica que busca corroborar informações típicas do sistema físico de interesse. Em geral, estas respostas baseiam-se em um número restrito de dados acerca dos possíveis graus de liberdade do ambiente. No intuito de contornar estas dificuldades, é pertinente descartar os graus de liberdade do subsistema  $E$  no estado instantâneo na Eq. (3.10). Por sua vez, esta operação é implementada por meio do traço parcial sobre estes graus de liberdade. Neste caso, teremos como resultado o estado reduzido instantâneo do subsistema  $S$ , o qual é dado por

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_E [U_{SE}(t)(\rho_S(0) \otimes \rho_E(0))U_{SE}^\dagger(t)] . \quad (3.11)$$

O estado reduzido  $\rho_S(t)$  satisfaz uma dinâmica não-unitária, irreversível no tempo, tendo em vista a troca de informação entre sistema e ambiente. Em seguida, vamos mostrar que

a Eq. (3.11) pode ser reescrita em termos de uma operação quântica não-unitária, a qual deve satisfazer o conjunto de propriedades discutidas na Sec. 3.1.

Seja  $\{|e_l\rangle\}_{l=1,\dots,d_E}$  um conjunto ortonormal completo de estados que define uma base no subsistema  $E$ , sendo  $\langle e_l|e_r\rangle = \delta_{lr}$  e  $\sum_{l=1}^{d_E} |e_l\rangle\langle e_l| = \mathbb{I}_E$ . Por sua vez, vamos considerar que o subsistema  $E$  exibe o estado inicial misto  $\rho_E(0) = \sum_{j=1}^{d_E} q_j |E_j\rangle\langle E_j|$ , onde  $\{|E_j\rangle\}_{j=1,\dots,d_E}$  representam os autoestados da matriz densidade do ambiente, sendo  $0 \leq q_j \leq 1$  e  $\sum_j q_j = 1$ , tal que  $\text{Tr}_E(\rho_E(0)) = 1$ , e ainda  $\langle E_j|E_v\rangle = \delta_{jv}$  e  $\sum_{j=1}^{d_E} |E_j\rangle\langle E_j| = \mathbb{I}_E$ . Neste caso, a Eq. (3.11) se reescreve na forma

$$\begin{aligned} \rho_S(t) &= \sum_{j,l} q_j (\mathbb{I}_S \otimes \langle e_l|) [U_{SE}(t) (\rho_S(0) \otimes |E_j\rangle\langle E_j|) U_{SE}^\dagger(t)] (\mathbb{I}_S \otimes |e_l\rangle) \\ &= \sum_{j,l} q_j \langle e_l| U_{SE}(t) |E_j\rangle \rho_S(0) \langle E_j| U_{SE}^\dagger(t) |e_l\rangle \\ &= \sum_{j,l} (\sqrt{q_j} \langle e_l| U_{SE}(t) |E_j\rangle) \rho_S(0) (\sqrt{q_j} \langle E_j| U_{SE}^\dagger(t) |e_l\rangle) \\ &= \sum_{j,l} K_{j,l} \rho_S(0) K_{j,l}^\dagger, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde  $K_{j,l} \equiv K_{j,l}(t) \in \mathcal{H}_S$  caracterizam os chamados operadores de Kraus, os quais são definidos na forma

$$K_{j,l} := \sqrt{q_j} \langle e_l| U_{SE}(t) |E_j\rangle. \quad (3.13)$$

Por sua vez, os operadores de Kraus na Eq. (3.13) satisfazem um vínculo de soma em analogia a condição de completude de estados de base, a saber,

$$\begin{aligned} \sum_{j,l} K_{j,l}^\dagger K_{j,l} &= \sum_{j,l} q_j \langle E_j| U_{SE}^\dagger(t) |e_l\rangle \langle e_l| U_{SE}(t) |E_j\rangle \\ &= \sum_j q_j \langle E_j| U_{SE}(t) \left( \sum_l |e_l\rangle\langle e_l| \right) U_{SE}^\dagger(t) |E_j\rangle \\ &= \text{Tr}_E [\rho_E(0) U_{SE}(t) U_{SE}^\dagger(t)] \\ &= \text{Tr}_E [\rho_E(0) (\mathbb{I}_S \otimes \mathbb{I}_E)] \\ &= \mathbb{I}_S, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde  $\mathbb{I}_S$  é a matriz identidade no subespaço  $\mathcal{H}_S$  do sistema principal. De forma geral, os operadores de Kraus são não-Hermitianos, ou seja,  $K_{j,l}^\dagger \neq K_{j,l}$ . Entretanto, os operadores de Kraus em certas dinâmicas não-unitárias podem se caracterizar como operadores normais, isto é,  $K_{j,l}^\dagger K_{j,l} = K_{j,l} K_{j,l}^\dagger$ . Neste caso, o mapa dinâmico é dito ser unital [1], e a Eq. (3.14) se reescreve na forma  $\sum_{j,l} K_{j,l}^\dagger K_{j,l} = \sum_{j,l} K_{j,l} K_{j,l}^\dagger = \mathbb{I}_S$ .

A Eq. (3.12) revela que o estado marginal instantâneo do subsistema  $S$  é dado em termos de uma operação quântica  $\varepsilon(\bullet)$  na forma

$$\varepsilon(\rho_S(0)) = \rho_S(t) = \sum_{j,l} K_{j,l} \rho_S(0) K_{j,l}^\dagger. \quad (3.15)$$

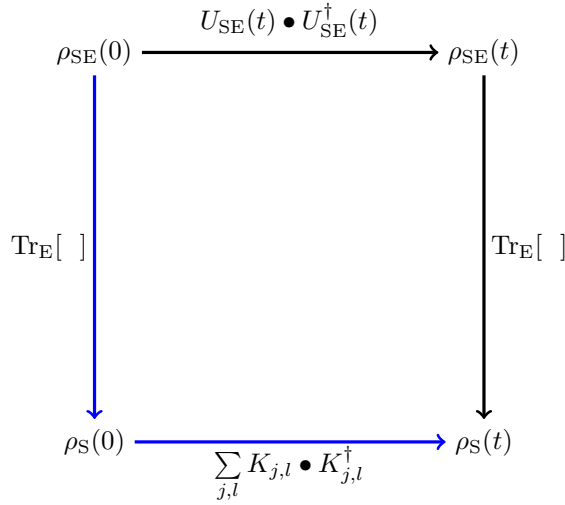


Figura 3 – Equivalência entre a representação operador-soma de Kraus e o formalismo de matrizes densidade reduzidas. Fonte: Elaborada pelo autor.

O resultado na Eq. (3.15) define a chamada representação operador-soma acerca da dinâmica de sistemas quânticos abertos. É importante destacar que esta operação quântica está definida no subespaço  $\mathcal{H}_S$ , e induz o mapeamento injetivo de estados físicos em estados físicos no subsistema  $S$ . Na Fig. 3, ilustramos a relação de equivalência entre a matriz densidade reduzida do subsistema  $S$  [veja Eq. (3.11)] e a representação operador-soma em termos de operadores de Kraus [veja Eq. (3.15)]. Por meio deste mapa quântico, é possível caracterizar completamente a dinâmica do subsistema  $S$  a partir do estado inicial  $\rho_S(0)$ , e ainda sabendo os operadores de Kraus que codificam o papel da decoerência na interação sistema e ambiente.

Em seguida, vamos mostrar que a operação quântica na Eq. (3.15) é linear, positiva semi-definida, e preserva traço. Sejam estados  $\rho_{S,1}(0), \rho_{S,2}(0) \in \mathcal{H}_S$ , tal que a combinação convexa  $q\rho_{S,1}(0) + (1 - q)\rho_{S,2}(0) \in \mathcal{H}_S$  define um estado válido neste subespaço. Neste caso, temos que

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(q\rho_{S,1}(0) + (1 - q)\rho_{S,2}(0)) &= \sum_{j,l} K_{j,l} (q\rho_{S,1}(0) + (1 - q)\rho_{S,2}(0)) K_{j,l}^\dagger \\
 &= q \sum_{j,l} K_{j,l} \rho_{S,1}(0) K_{j,l}^\dagger + (1 - q) \sum_{j,l} K_{j,l} \rho_{S,2}(0) K_{j,l}^\dagger \\
 &= q\varepsilon(\rho_{S,1}(0)) + (1 - q)\varepsilon(\rho_{S,2}(0)) ,
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

ou seja, segue que a operação quântica  $\varepsilon(\bullet)$  é linear. Em seguida, vamos investigar a condição de normalização do estado reduzido na perspectiva do mapa não-unitário. Neste

caso, temos

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}_S[\varepsilon(\rho_S(0))] &= \sum_{j,l} \text{Tr}_S \left( K_{j,l} \rho_S(0) K_{j,l}^\dagger \right) \\
 &= \sum_{j,l} \text{Tr}_S \left( K_{j,l}^\dagger K_{j,l} \rho_S(0) \right) \\
 &= \text{Tr}_S \left[ \left( \sum_{j,l} K_{j,l}^\dagger K_{j,l} \right) \rho_S(0) \right] .
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

A partir do resultado na Eq. (3.14), segue que a operação quântica na Eq. (3.15) preserva traço, ou seja,

$$\text{Tr}_S[\varepsilon(\rho_S(0))] = \text{Tr}_S(\mathbb{I}_S \rho_S(0)) = \text{Tr}_S(\rho_S(0)) = 1 . \tag{3.18}$$

Por fim, resta verificar que o mapa dinâmico induz estados quânticos positivo semi-definidos. Dado o vetor de estado  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_S$ , é razoável esperar que  $\langle \phi | \varepsilon(\rho_S(0)) | \phi \rangle = \langle \phi | \rho_S(t) | \phi \rangle \geq 0$ . De fato, a operação quântica não-unitária mapeia estados físicos em estados físicos, ou seja, tanto o estado inicial  $\rho_S(0)$  quanto o estado instantâneo  $\rho_S(t)$  devem ser ambos positivo semi-definidos. Portanto, pode-se concluir que a operação quântica na Eq. (3.15) define um mapa dinâmico CPTP, ou seja, completamente positivo e que preserva traço.

### 3.3 Dinâmica não-unitária e estados de qubit único

Nesta seção, vamos investigar a ação de mapas não-unitários em estados de qubit único. Esta discussão tem como motivação as Refs. [1, 66]. Nesta perspectiva, mostraremos que a ação de um mapa não-unitário no sistema de dois níveis pode ser interpretada geometricamente, sobretudo recorrendo a abordagem da esfera de Bloch discutida no Capítulo 2. O espaço de Hilbert do sistema de dois níveis é dado por  $\mathcal{H}_S = \mathbb{C}^2$ , o qual tem dimensão  $d_S = 2$ . No instante  $t = 0$ , o estado inicial do sistema de dois níveis será dado pelo estado misto a seguir

$$\rho(0) = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{r}_0 \cdot \vec{\sigma}) , \tag{3.19}$$

onde  $\vec{r}_0 = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$  é o vetor da esfera de Bloch<sup>1</sup>, sendo  $\mathbb{I}$  a matriz identidade no espaço de Hilbert, e  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  o vetor de matrizes de Pauli. Em geral, a Eq. (3.19) indica que o estado misto pode ser escrito em termos de uma combinação linear do conjunto de matrizes  $\{\mathbb{I}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$  que gera o espaço vetorial complexo  $\mathcal{H}_S = \mathbb{C}^2$ .

De forma geral, a evolução não-unitária do estado de qubit único na Eq. (3.19) pode ser descrita em termos da operação quântica a seguir

$$\varepsilon(\rho(0)) = \rho(t) = \sum_{j=0,1} K_j \rho(0) K_j^\dagger , \tag{3.20}$$

<sup>1</sup> Para rever os detalhes acerca da esfera de Bloch, bem como demais propriedades espectrais do estado de qubit único, verifique Capítulo 2, Sec. 2.5.

onde os operadores de Kraus satisfazem a relação de completeza  $\sum_{j=0,1} K_j^\dagger K_j = \mathbb{I}$ , e por sua vez são operadores dependentes do tempo. Em detrimento ao resultado indicado na Eq. (3.15), os operadores de Kraus  $\{K_j\}_{j=0,1}$  na Eq. (3.20) dependem apenas de um índice de soma. De fato, não há nenhuma perda de generalidade neste processo, sobretudo se considerarmos que o ambiente tem como estado inicial em  $t = 0$  um estado puro, em vez do estado misto discutido na Sec. 3.2. Em termos do conjunto de geradores  $\{\mathbb{I}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ , segue que os operadores de Kraus são escritos na forma

$$K_j = \sum_{l=0}^3 a_{jl} \sigma_l, \quad (3.21)$$

onde os coeficientes  $a_{jl}$  são dados por

$$a_{jl} = \frac{1}{2} \text{Tr}(K_j \sigma_l). \quad (3.22)$$

Combinando as Eqs. (3.19), (3.20) e (3.21), pode-se mostrar que o estado instantâneo do sistema de dois níveis sob ação do mapa não-unitário é dado por

$$\varepsilon(\rho(0)) = \rho(t) = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{r}_t \cdot \vec{\sigma}), \quad (3.23)$$

onde o vetor  $\vec{r}_t$  é definido na forma

$$\vec{r}_t = \eta_t \vec{r}_0 + \vec{\xi}_t. \quad (3.24)$$

Por um lado, tem-se que  $\eta_t$  representa a chamada matriz de deformação, ou seja, uma matriz de dimensão  $3 \times 3$  de elementos reais, definida na forma

$$(\eta_t)_{jl} = \frac{1}{2} \text{Tr}[\varepsilon(\sigma_l) \sigma_j]. \quad (3.25)$$

Por outro lado, segue que  $\vec{\xi}_t$  caracteriza o chamado vetor de translação, isto é, um vetor tridimensional cujas componentes são dadas por

$$(\vec{\xi}_t)_l = 2i \sum_{s=0}^1 \sum_{p,r=1}^3 \epsilon_{rpl} a_{sr} a_{sp}^*. \quad (3.26)$$

Em particular, segue que  $\vec{\xi}_t = (0, 0, 0)$  para qualquer mapa quântico unital, ou seja, uma operação quântica na qual  $\sum_{j=0,1} K_j^\dagger K_j = \sum_{j=0,1} K_j K_j^\dagger = \mathbb{I}$  [1].

A Eq. (3.23) mostra que a operação quântica mapeia estados de qubit únicos em estados de qubit únicos. Neste caso, a ação do mapa não-unitário está codificada de forma completa no vetor  $\vec{r}_t$  no estado resultante, que por sua vez exhibe visualização geométrica distinta daquela da esfera de Bloch. Em linhas gerais, a matriz de deformação  $\eta_t$  traduz os efeitos destrutivos de decoerência oriundos da interação sistema e ambiente na forma de deformações dos elementos do vetor  $\vec{r}_0$  do estado inicial de qubit único. O papel do vetor  $\vec{\xi}_t$  consiste em promover a translação do centro da esfera de Bloch em direção a



algum ponto fixo da dinâmica não-unitária. Este é o caso, por exemplo, do mapa quântico chamado atenuação de amplitude [65]. Neste processo, a esfera de Bloch é deformada em outro objeto geométrico tridimensional, por exemplo, um elipsóide de revolução. Este é o caso, por exemplo, dos mapas quânticos atenuação de fase, inversão de bit, inversão de fase, inversão de bit e fase [1]. Por fim, destacamos que estes resultados serão úteis na caracterização de coerência quântica discutida nos próximos capítulos.

## 4 Caracterização da coerência quântica

Neste capítulo, discutiremos a caracterização de coerência em sistemas quânticos de dimensão finita. Na Sec. 4.1, abordaremos o formalismo de caracterização de coerência quântica que baseia-se no resultado seminal da Ref. [15]. Na Sec. 4.2, discutiremos algumas figuras de mérito dedicadas ao estudo da coerência de sistemas quânticos, a saber, norma- $\ell_1$  de coerência e entropia relativa de coerência, sobretudo calcadas em medidas de distância entre estados quânticos no espaço de Hilbert. Por fim, na Sec. 4.3 investigaremos a norma- $\ell_1$  de coerência e entropia relativa de coerência para estados de qubit único. As Secs. 4.1 e 4.2 contêm revisões detalhadas de bibliografia, enquanto a Sec. 4.3 exhibe resultados obtidos ao longo do trabalho de pesquisa.

### 4.1 O formalismo de Baumgratz-Cramer-Plenio

A busca pela compreensão das propriedades da coerência de sistemas físicos em nível microscópico remonta às origens da teoria quântica. Em especial, diversos avanços em nível teórico nesta seara devem-se a pesquisas recentes tendo como pano de fundo a ciência de informação. Cabe pontuar que estes progressos surgiram na esteira do sucesso da teoria de emaranhamento consolidada no início dos anos 2000, sobretudo explorando as similaridades entre ambos recursos quânticos [8, 24]. Neste contexto, pode-se elencar a formalização dos efeitos de superposição em sistemas quânticos de dimensão finita proposta no âmbito da ciência da informação quântica há cerca de duas décadas [19]. Em paralelo à chamada teoria de recursos [20, 29, 30, 67, 68], este trabalho motivou a proposição de um formalismo geral na caracterização de coerência quântica, por sua vez proposto por Baumgratz, Cramer e Plenio (BCP) em um artigo seminal publicado há uma década [15]. O sucesso do formalismo BCP pode ser aferido sobretudo pelo *boom*<sup>1</sup> no número de citações e publicações decorrentes deste trabalho, bem como pela relevância e grande interesse que este tópico suscita ainda hoje. Em seguida, discutiremos os detalhes do formalismo BCP, explorando de forma crítica suas nuances.

De forma geral, cumpre destacar que coerência quântica perfaz uma quantidade física cuja descrição envolve uma base de estados fixada a priori. Neste sentido, estados quânticos podem exibir coerências em relação a uma dada base, e não possuir qualquer coerência em termos de outra base. Seja um sistema quântico cujo espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  tem dimensão finita  $d = \dim \mathcal{H}$ , sendo  $A \in \mathcal{H}$  um observável definido neste espaço vetorial.

<sup>1</sup> No momento, a Ref. [15] informa um número de 1777 citações de artigos indexados em revistas internacionais. Por sua vez, o [Google Scholar](#) mostra um número de 2573 citações, o qual deve levar em conta pre-prints em revisão de pares e manuscritos não-publicados, além das publicações indexadas.

Por hipótese, este observável exibe a decomposição espectral  $A = \sum_{j=1}^d a_j |j\rangle\langle j|$ , onde  $\{a_j\}_{j=1,\dots,d}$  são autovalores reais, e  $\{|j\rangle\}_{j=1,\dots,d}$  perfaz o respectivo conjunto de autoestados normalizados de  $A$ , tal que  $\langle j|l\rangle = \delta_{jl}$  e  $\sum_{j=1}^d |j\rangle\langle j| = \mathbb{I}_d$ . Neste contexto, a discussão de medidas de coerência terá como ponto de partida a base de autoestados fixa  $\{|j\rangle\}_{j=1,\dots,d}$  do observável  $A$ .

O formalismo BCP tem como premissa básica os conceitos de estados incoerentes e operações incoerentes. Por um lado, estados incoerentes caracterizam-se como matrizes diagonais na base de referência do observável  $A$ , a saber

$$\delta = \sum_{j=1}^d \delta_j |j\rangle\langle j| , \quad (4.1)$$

onde  $0 \leq \delta_j \leq 1$  e  $\sum_{j=1}^d \delta_j = 1$ . De fato, o estado na Eq. (4.1) exibe apenas elementos diagonais em relação à base de referência, e logo possui coerências nulas nesta base. O conjunto dos estados incoerentes será denotado por  $\mathcal{I}$ , o qual é um subespaço do espaço de Hilbert do sistema, ou seja,  $\mathcal{I} \subset \mathcal{H}$ . Por outro lado, operações incoerentes são aquelas operações quânticas que não podem criar coerência, sobretudo a partir de estados quânticos incoerentes nos quais este recurso não está disponível. Por exemplo, a operação quântica respectiva a um certo conjunto de operadores de Kraus  $\{K_n\}_n$  será incoerente desde que  $K_n \mathcal{I} K_n^\dagger \subset \mathcal{I}$ , para todo  $n > 0$ .

A partir destes conceitos, o formalismo BCP estabelece um conjunto de critérios comuns a qualquer figura de mérito dedicada à caracterização de coerência de estados quânticos. Por figura de mérito, entenda-se um tipo de funcional  $C(\rho)$  que retorna um valor finito e não-nulo caso o estado de prova  $\rho$  possua alguma coerência em relação à base de estados fixa. Em especial, os funcionais utilizados na caracterização de coerência quântica têm origem em medidas de distância de estados quânticos. Em seguida, vamos abordar os critérios em detalhes.

O primeiro critério (C1) refere-se à positividade da medida de coerência, ou seja, o funcional de coerência deve satisfazer a relação

$$C(\rho) \geq 0 , \quad (4.2)$$

para todo estado  $\rho \in \mathcal{H}$ . De fato, espera-se que a figura de mérito  $C(\rho) > 0$  seja positiva para estados com coerência finita e não-nula. Em particular, segue que a medida de coerência será nula para estados incoerentes na forma da Eq. (4.1), ou seja,  $C(\rho) = 0$  se  $\rho = \delta = \sum_{j=1}^d \delta_j |j\rangle\langle j|$ .

O segundo critério (C2) refere-se à monotonicidade da medida de coerência. De forma geral, sabe-se que a coerência não aumenta sob a ação de operações incoerentes em processos físicos arbitrários, tal que

$$C(\rho) \geq C(\Lambda(\rho)) , \quad (4.3)$$

onde  $\Lambda(\rho) = \sum_n K_n \rho K_n^\dagger$  define uma operação quântica incoerente. Por exemplo, os efeitos de decoerência na dinâmica de sistemas quânticos abertos induzem o consumo de informação disponível na forma de recursos quânticos como coerência e emaranhamento. Cabe ressaltar que a informação deve se conservar a nível global, o que implica em fluxo de informação entre sistema e ambiente. Por sua vez, a medida de coerência de estados quânticos deve ser capaz de capturar este aspecto, ou seja, a coerência do estado sob ação da operação incoerente é limitada superiormente pela coerência do estado de prova. Cabe destacar que estes critérios representam requisitos mínimos a todas as medidas de coerência.

O terceiro critério (C3) ressignifica o critério C2 de forma mais robusta, e portanto perfaz um tipo de critério de monotonicidade forte. Em linhas gerais, segue que a coerência de um estado quântico não aumenta, em média, sob operações incoerentes seletivas, ou seja,

$$C(\rho) \geq \sum_n q_n C(\rho_n) , \quad (4.4)$$

onde  $\rho_n = K_n \rho K_n^\dagger / q_n$  descreve o estado do sistema físico obtido após uma medição cujo resultado é dado por  $n$ , o qual ocorre com probabilidade  $q_n = \text{Tr}(K_n \rho K_n^\dagger)$ . A Eq. (4.4) revela que a média das coerências  $C(\rho_n)$  dos estados obtidos nas medições, ponderada pelas probabilidades de ocorrência de cada um dos resultados, é limitada superiormente pela coerência  $C(\rho)$  do estado de prova inicial. Este resultado implica que a coerência não deve aumentar sob medições incoerentes, mesmo que se tenha acesso aos resultados de medição individuais.

O quarto critério (C4) refere-se à convexidade da medida de coerência, a saber

$$\sum_n q_n C(\rho_n) \geq C\left(\sum_n q_n \rho_n\right) , \quad (4.5)$$

onde  $0 \leq q_n \leq 1$  e  $\sum_n q_n = 1$ , sendo

$$C\left(\sum_n q_n \rho_n\right) = C\left(\sum_n K_n \rho K_n^\dagger\right) = C(\Lambda(\rho)) . \quad (4.6)$$

Por sua vez, a Eq. (4.5) revela que a coerência  $C(\Lambda(\rho))$  do estado sob ação da operação quântica deve ser limitada superiormente pela média das coerências  $C(\rho_n)$  dos estados obtidos nas medições, ponderada pelas probabilidades  $q_n$  de ocorrência de cada um dos resultados. Em essência, a coerência de um estado misto é sempre menor do que a média das coerências de cada um dos estados envolvidos na mistura estatística.

Portanto, um funcional  $C(\rho)$  será uma medida de coerência de estados quânticos desde que satisfaça os critérios C1, C2, C3 e C4 [4, 69]. Neste contexto, segue que a combinação destes critérios implica a hierarquia de desigualdades [veja Eqs. (4.3), (4.4), (4.5) e (4.6)]

$$C(\rho) \geq \sum_n q_n C(\rho_n) \geq C(\Lambda(\rho)) . \quad (4.7)$$

Em geral, as incertezas de uma medição corroboram significado duplo. Por um lado, temos uma incerteza clássica vinculada à ignorância acerca do estado do sistema, o que se reflete na mistura estatística. Por outro lado, temos uma incerteza quântica associada ao fato de que a medição deve modificar o estado do sistema. A coerência quântica do estado  $\rho$ , contemplada pelo funcional  $C(\rho)$ , deve incorporar estes aspectos na medida que satisfaz os critérios elencados pelo formalismo BCP.

## 4.2 Medidas de coerência e distâncias entre estados quânticos

Na seção anterior, discutimos os critérios que uma dada figura de mérito deve satisfazer para que seja eleita uma medida de coerência de estados quânticos. Neste sentido, devemos buscar pelos possíveis funcionais de informação que compartilhem destas características, a saber, positividade (C1), monotonicidade (C2 e C3) e convexidade (C4). Em especial, nossa análise tem como recorte as chamadas medidas de distinguibilidade de estados quânticos, que por sua vez descrevem medidas de distância no espaço de estados. Esta escolha tem algumas motivações práticas, as quais discutiremos a seguir.

No intuito de caracterizar a coerência de um certo estado quântico de prova, é natural promover sua comparação com algum estado de referência, sobretudo um estado quântico incoerente em relação a alguma base fixa. Desta forma, é razoável introduzir uma figura de mérito de coerência que testemunhe a presença deste recurso quântico na forma de distinguibilidade entre estes estados. Portanto, a medida de coerência deve sinalizar o quão distinto o estado de prova é em relação a um estado que não exhibe coerências em relação à base de referência. Cabe destacar que a escolha desta figura de mérito não é única. De fato, o chamado teorema de Morozova, Cencov e Petz corrobora a existência de uma classe infinita de funcionais de distinguibilidade de estados quânticos [70, 71]. Em essência, tal aspecto tem origem na natureza não-comutativa entre estados quânticos distintos. Isto explica a grande variedade de medidas de coerência pautadas em medidas de distinguibilidade de estados quânticos no escopo do formalismo BCP.

Uma medida de distinguibilidade  $D(\rho, \delta)$  deve satisfazer os critérios C1, C2, C3 e C4 discutidos outrora, sendo  $\rho, \delta \in \mathcal{H}$  estados quânticos arbitrários. Isto ocorre com grande parte das medidas de distinguibilidade de estados quânticos investigadas no âmbito da ciência da informação. Em especial, esta figura de mérito perfaz um tipo de medida de distância no espaço de estados quânticos. Por um lado, o funcional de distância satisfaz o critério C1 desde que seja positivo, ou seja,  $D(\rho, \delta) \geq 0$ , tal que  $D(\rho, \delta) = 0$  se, e somente se,  $\rho = \delta$ . Por outro lado, o funcional de distância obedece os critérios C2 e C3 desde que seja monotônico para operações quânticas incoerentes completamente positivas e que preservam traço (CPTP). Neste caso, o funcional deve ser contrativo sob operações

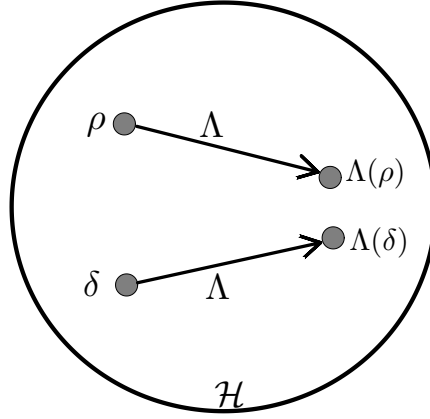


Figura 4 – Representação ilustrativa da contratividade relativa a operação quântica  $\Lambda(\bullet)$ , isto é, um mapa completamente positivo e que preserva traço (CPTP), em relação ao par de estados  $\rho, \delta \in \mathcal{H}$ . Em geral, segue que a distinguibilidade entre os estados quânticos deve diminuir sob ação de mapas CPTP físicos. Fonte: Imagem adaptada da Ref. [1].

quânticas CPTP, a saber

$$D(\Lambda(\rho), \Lambda(\delta)) \leq D(\rho, \delta) . \quad (4.8)$$

A Eq. (4.8) indica que nenhum processo físico é capaz de aumentar a distância entre dois estados quânticos. A Fig. 4 ilustra de forma pictórica a contratividade do funcional de distância para estados  $\rho$  e  $\delta$  sob ação do mapa  $\Lambda(\bullet)$  CPTP. De fato, uma operação quântica não é capaz de criar informação, a qual deve se conservar em nível global no sistema quântico. Isto significa, por exemplo, que a informação é redistribuída entre os subsistemas de um sistema quântico aberto, e por sua vez flui do subsistema de interesse para o ambiente. Por fim, o funcional satisfaz o critério C4 em resposta a convexidade conjunta em relação a estados mistos, a saber,

$$D\left(\sum_j p_j \rho_j, \sum_j p_j \delta_j\right) \leq \sum_j p_j D(\rho_j, \delta_j) , \quad (4.9)$$

onde  $\rho_j$  e  $\delta_j$  são estados puros, e  $p_j$  são probabilidades que ponderam a contribuição destes estados na mistura estatística.

O formalismo BCP corrobora medidas de coerência baseadas em medidas de distinguibilidade  $D(\rho, \delta)$  entre um estado quântico de prova  $\rho$  e um estado incoerente  $\delta = \sum_{j=1}^d \delta_j |j\rangle\langle j|$  em relação a base de autoestados  $\{|j\rangle\}_{j=1,\dots,d}$  de observável  $A$  de referência. Em virtude dos possíveis estados  $\delta \in \mathcal{I}$  disponíveis no espaço de estados incoerentes, a priori distintos entre si, segue que a medida de coerência é obtida pelo valor mínimo da distância  $D(\rho, \delta)$  entre o estado  $\rho$  e um dos estados incoerentes  $\delta$  neste espaço [15]. Neste caso, o formalismo BCP implica medidas de coerência na forma

$$C(\rho) = \min_{\delta \in \mathcal{I}} D(\rho, \delta) . \quad (4.10)$$

É importante pontuar que a medida de coerência  $C(\rho)$  na Eq. (4.10) satisfaz os critérios C1, C2, C3 e C4 [veja Sec. 4.1] desde que o funcional de distinguibilidade de estados  $D(\rho, \delta)$  satisfaça estas restrições. Conforme mencionado anteriormente, existem diversos candidatos a medidas de distância de estados quânticos que corroboram o formalismo BCP [30, 72]. Em especial, destacam-se funcionais baseados em normas matriciais e medidas entrópicas de informação [15]. Dentre as normas matriciais, destaca-se a chamada norma- $\ell_1$  de coerência, a qual leva em conta os elementos não-diagonais da matriz densidade. Dentre as medidas entrópicas, destaca-se a chamada entropia relativa de coerência. Em seguida, investigaremos os detalhes de ambas medidas.

#### 4.2.1 Norma- $\ell_1$ de coerência

O formalismo BCP instigou o estudo de medidas de coerência baseadas em normas matriciais. Em especial, sabe-se que a norma- $\ell_1$  propicia uma medida de coerência de grande interesse na literatura, a qual se escreve na forma [15]

$$C_{\ell_1}(\rho) = \min_{\delta \in \mathcal{I}} \|\rho - \delta\|_{\ell_1} = \sum_{j \neq l} |\langle j | \rho | l \rangle|, \quad (4.11)$$

onde  $\{|j\rangle\}_{j=1,\dots,d}$  representa a base de autoestados fixa do observável  $A$  de referência. De fato, a medida de coerência na Eq. (4.11) depende dos elementos não-diagonais do estado quântico de prova  $\rho$  em relação aos vetores da base de referência.

Por um lado, pode ser verificado que a norma- $\ell_1$  de coerência satisfaz os critérios de positividade, monotonicidade, contratividade e convexidade em acordo com o formalismo BCP. Por outro lado, segue que a Eq. (4.11) é operacionalmente simples, sobretudo para sistemas quânticos de baixa dimensionalidade. Este é o caso, por exemplo, da medida de coerência de estados de qubit único.

Nos últimos anos, a norma- $\ell_1$  de coerência tem motivado estudos no intuito de compreender a coerência em sistemas quânticos realizados em diferentes plataformas experimentais. Por exemplo, o estudo da norma- $\ell_1$  de coerência propiciou a investigação da natureza ondulatória em protocolos de interferência quântica [73, 74]. Além disso, destacam-se realizações experimentais envolvendo tomografia de estados quânticos no intuito de acessar as coerências de estados multipartido em sistemas de spin [75].

#### 4.2.2 Entropia relativa de coerência

O estudo de quantificadores de informação entrópicos tem desempenhado papel relevante na caracterização de coerência quântica. Neste contexto, pode-se destacar a chamada entropia relativa de coerência, a qual é obtida por meio da entropia relativa de Umegaki. A entropia relativa de coerência tem aplicações no âmbito da termodinâmica quântica. Por exemplo, sabe-se que a entropia relativa de coerência perfaz uma figura

de mérito acerca do mecanismo de produção de entropia [76]. Recentemente, a entropia relativa de coerência de um sistema de dois níveis foi acessada experimentalmente em plataformas fotônicas [77].

Em seguida, vamos explorar em detalhes esta relação, abordando as propriedades destes quantificadores. A entropia relativa é definida na forma

$$\begin{aligned} S(\rho\|\delta) &= \text{Tr}(\rho \ln \rho) - \text{Tr}(\rho \ln \delta) \\ &= -S(\rho) - \text{Tr}(\rho \ln \delta) , \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde  $\rho$  e  $\delta$  são matrizes densidades arbitrárias. Por um lado, a desigualdade de Klein implica que a entropia relativa é um quantificador de informação estritamente positivo para qualquer par de matrizes densidade, a saber,  $S(\rho\|\delta) \geq 0$  [1]. Esta desigualdade é saturada para operadores densidade iguais entre si, ou seja, teremos  $S(\rho\|\delta) = 0$  se  $\rho = \delta$  [4, 55]. Por outro lado, segue que a entropia relativa não representa uma medida simétrica, ou seja,  $S(\rho\|\delta) \neq S(\delta\|\rho)$ , e também não satisfaz a desigualdade triangular. Neste caso, a entropia relativa não perfaz uma métrica fiel no espaço de matrizes densidade.

Seja a base de estados fixa  $\{|j\rangle\}_{j=1,\dots,d}$ , sendo  $\langle j|l\rangle = \delta_{jl}$ , e  $\sum_{j=1}^d |j\rangle\langle j| = \mathbb{I}_d$ , onde  $\mathbb{I}_d$  é a matriz identidade no espaço de Hilbert  $d$ -dimensional. Neste contexto, podemos decompor a matriz densidade  $\rho$  na forma

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{j,l} \rho_{jl} |j\rangle\langle l| \\ &= \rho_{\text{diag}} + \rho_{\text{off-diag}} , \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde definimos a contribuição dos elementos diagonais da matriz densidade, a saber,

$$\rho_{\text{diag}} := \sum_j \rho_{jj} |j\rangle\langle j| , \quad (4.14)$$

e a contribuição de termos não-diagonais da matriz densidade

$$\rho_{\text{off-diag}} := \sum_{j \neq l} \rho_{jl} |j\rangle\langle l| . \quad (4.15)$$

A partir das Eqs. (4.14) e (4.15), segue que a entropia relativa na Eq. (4.12) reescreve-se na forma

$$S(\rho\|\delta) = -S(\rho) - \text{Tr}(\rho_{\text{diag}} \ln \delta) - \text{Tr}(\rho_{\text{off-diag}} \ln \delta) . \quad (4.16)$$

Em especial, a Eq. (4.16) pode ser reformulada convenientemente em termos da entropia de von Neumann  $S(\rho_{\text{diag}})$  respectiva a contribuição diagonal do estado quântico de prova. De fato, temos o resultado

$$\begin{aligned} S(\rho\|\delta) &= S(\rho_{\text{diag}}) - S(\rho) - S(\rho_{\text{diag}}) - \text{Tr}(\rho_{\text{diag}} \ln \delta) - \text{Tr}(\rho_{\text{off-diag}} \ln \delta) , \\ &= S(\rho_{\text{diag}}) - S(\rho) + S(\rho_{\text{diag}}\|\delta) - \text{Tr}(\rho_{\text{off-diag}} \ln \delta) . \end{aligned} \quad (4.17)$$



Por sua vez, o último termo no lado direito da Eq. (4.17) é identicamente nulo, a saber

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\rho_{\text{off-diag}} \ln \delta) &= \text{Tr} \left[ \left( \sum_{j \neq l} \rho_{jl} |j\rangle \langle l| \right) \ln \left( \sum_s \delta_{ss} |s\rangle \langle s| \right) \right] , \\
&= \sum_{j \neq l} \sum_s \rho_{jl} \ln \delta_{ss} \text{Tr}(|j\rangle \langle l| |s\rangle \langle s|) , \\
&= \sum_{j \neq l} \sum_s \rho_{jl} \ln \delta_{ss} \langle s|j\rangle \langle l|s\rangle , \\
&= 0 ,
\end{aligned} \tag{4.18}$$

onde utilizamos que  $\delta = \sum_s \delta_{ss} |s\rangle \langle s|$  é um estado incoerente em relação a base  $\{|s\rangle\}_{s=1,\dots,d}$  [veja Sec. 4.1], bem como o fato de que  $\langle s|j\rangle \langle l|s\rangle = 0$  para  $j \neq l$ . Desta forma, podemos concluir a relação algébrica

$$S(\rho \| \delta) = S(\rho_{\text{diag}}) - S(\rho) + S(\rho_{\text{diag}} \| \delta) . \tag{4.19}$$

No âmbito do formalismo BCP, segue que um quantificador de coerência do estado  $\rho$  é obtido através da minimização da distância entre esta matriz densidade e os elementos  $\delta \in \mathcal{I}$  que caracterizam o conjunto de estados incoerentes [15]. Neste contexto, a chamada entropia relativa de coerência é definida na forma

$$C_{\text{rel. ent.}}(\rho) = \min_{\delta \in \mathcal{I}} S(\rho \| \delta) . \tag{4.20}$$

Em seguida, substituindo a Eq. (4.19) na Eq. (4.20), temos:

$$\begin{aligned}
C_{\text{rel. ent.}}(\rho) &= \min_{\delta \in \mathcal{I}} [S(\rho_{\text{diag}}) - S(\rho) + S(\rho_{\text{diag}} \| \delta)] , \\
&= S(\rho_{\text{diag}}) - S(\rho) + \min_{\delta \in \mathcal{I}} S(\rho_{\text{diag}} \| \delta) .
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Por meio do chamado lema de Klein, é sabido que a entropia relativa caracteriza uma quantidade positiva semidefinida, ou seja,  $S(\rho_1 \| \rho_2) \geq 0$  para qualquer  $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}$ , além de exibir valor nulo se  $\rho_1 = \rho_2$ . Portanto, o valor mínimo da medida de coerência na Eq. (4.21) será obtido escolhendo o estado incoerente  $\delta = \rho_{\text{diag}}$ , tal que obtemos o resultado

$$C_{\text{rel. ent.}}(\rho) = S(\rho_{\text{diag}}) - S(\rho) . \tag{4.22}$$

A entropia relativa de coerência atende às condições de positividade (C1), monotonicidade forte (C2 e C3), e convexidade (C4) para um dado conjunto de operações, sobretudo para operações incoerentes [15]. Na literatura há investigações experimentais acerca da entropia relativa de coerência, por exemplo, envolvendo medições em estados de polarização de fótons em plataformas óticas [78].

### 4.3 Coerência de estados de 1-qubit

Nesta seção vamos discutir a caracterização das coerências de estados de qubit único, ou seja, matrizes densidade no espaço de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$  de dimensão  $d = \dim \mathcal{H} = 2$ .

De forma geral, estes estados exibem a forma matricial a seguir

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{01}^* & \rho_{11} \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

onde  $\rho^\dagger = \rho$ ,  $\rho \geq 0$ , e  $\text{Tr}(\rho) = \rho_{00} + \rho_{11} = 1$ . Para tanto, devemos fixar uma base de referência, a qual discutiremos em seguida. Por hipótese, seja o observável de spin-1/2 dado por

$$A = \frac{\hbar}{2}(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}), \quad (4.24)$$

onde  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  é o vetor de matrizes de Pauli, e  $\hat{n}$  é o versor de direção respectivo ao vetor tridimensional real  $\vec{n}$ , tal que

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}, \quad \vec{n} = (n_x, n_y, n_z), \quad \|\vec{n}\| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}. \quad (4.25)$$

Por sua vez, a Eq. (4.24) descreve a forma mais geral de representação de observáveis de spin no espaço vetorial complexo  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ . Por exemplo, tomando a direção  $\hat{n} = \{1, 0, 0\}$ , obtemos o observável  $(\hbar/2)\sigma_x$ . Em seguida, fixando a direção  $\hat{n} = \{0, 1, 0\}$ , tem-se o observável  $(\hbar/2)\sigma_y$ . Além disso, escolhendo a direção  $\hat{n} = \{0, 0, 1\}$ , obtemos o observável  $(\hbar/2)\sigma_z$ . O observável  $A$  na Eq. (4.24) dispõe dos autovalores  $\{-\hbar/2, +\hbar/2\}$ , os quais correspondem de forma respectiva aos autoestados

$$|\phi_1\rangle = \frac{n_z - \|\vec{n}\|}{\sqrt{2\|\vec{n}\|(\|\vec{n}\| - n_z)}}|0\rangle + \frac{n_x + in_y}{\sqrt{2\|\vec{n}\|(\|\vec{n}\| - n_z)}}|1\rangle, \quad (4.26)$$

$$|\phi_2\rangle = \frac{n_z + \|\vec{n}\|}{\sqrt{2\|\vec{n}\|(\|\vec{n}\| + n_z)}}|0\rangle + \frac{n_x + in_y}{\sqrt{2\|\vec{n}\|(\|\vec{n}\| + n_z)}}|1\rangle, \quad (4.27)$$

onde  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  são autovetores da matriz de Pauli  $\sigma_z$ , os quais caracterizam a base computacional padrão. Por sua vez, o conjunto de vetores  $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$  define uma base completa no espaço vetorial complexo  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ , ou seja,  $\langle\phi_j|\phi_l\rangle = \delta_{jl}$  para  $j, l = \{1, 2\}$ , e  $\sum_{j=1,2} |\phi_j\rangle\langle\phi_j| = \mathbb{I}_2$ . Neste contexto, o conjunto de vetores  $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$  será escolhido como a base de referência na qual investigaremos o comportamento das medidas de coerência de qubit único.

Partindo deste cenário geral, vamos avaliar medidas de coerência. Na Subsec. 4.3.1, vamos discorrer sobre a coerência de estados de qubit único em termos da norma- $\ell_1$ , enquanto na Subsec. 4.3.2 usaremos a entropia relativa de coerência para tratar da coerência destes estados. Por fim, na Subsec. 4.3.3 analisaremos de forma comparativa os resultados das subseções anteriores, traçando paralelos e verificando diferenças importantes.

### 4.3.1 Norma- $\ell_1$ de coerência e estados de 1-qubit

Em relação a base de referência  $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$  nas Eqs. (4.26) e (4.27), segue que a norma- $\ell_1$  de coerência para estados de qubit único se escreve na forma

$$C_{\ell_1}(\rho) = \sum_{\substack{j,l=1,2 \\ j \neq l}} |\langle \phi_j | \rho | \phi_l \rangle| = 2|\langle \phi_1 | \rho | \phi_2 \rangle|. \quad (4.28)$$

Em seguida, substituindo as Eqs. (4.23), (4.26) e (4.27) na Eq. (4.28), obtemos o resultado a seguir

$$C_{\ell_1}(\rho) = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \left( \sum_{k=x,y,z} n_k^2 C_{\ell_1,k}^2(\rho) - \Phi_{n_x, n_y, n_z}(\rho) \right)^{1/2}, \quad (4.29)$$

onde definimos

$$C_{\ell_1,x}(\rho) = \sqrt{(\rho_{00} - \rho_{11})^2 + 4[\text{Im}(\rho_{01})]^2}, \quad (4.30)$$

e

$$C_{\ell_1,y}(\rho) = \sqrt{(\rho_{00} - \rho_{11})^2 + 4[\text{Re}(\rho_{01})]^2}, \quad (4.31)$$

e

$$C_{\ell_1,z}(\rho) = 2|\rho_{01}|, \quad (4.32)$$

e introduzimos a função auxiliar

$$\begin{aligned} \Phi_{n_x, n_y, n_z}(\rho) &= 4n_x \text{Re}(\rho_{01})[n_z(\rho_{00} - \rho_{11}) - n_y \text{Im}(\rho_{01})] \\ &\quad - 4n_y \text{Im}(\rho_{01})[n_z(\rho_{00} - \rho_{11}) + n_x \text{Re}(\rho_{01})]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

A Eq. (4.29) descreve a norma- $\ell_1$  de coerência de estados de qubit único [veja Eq. (4.23)] em relação a base de referência do observável de spin arbitrário  $A$  [veja Eq. (4.24)]. Note que este resultado contempla estados puros e mistos de qubit único.

De forma geral, a Eq. (4.29) revela que a norma- $\ell_1$  de coerência  $C_{\ell_1}(\rho)$  obtida a partir dos autoestados do observável  $A$  se escreve em função da soma das medidas de coerência  $C_{\ell_1,x}(\rho)$  [veja Eq. (4.30)],  $C_{\ell_1,y}(\rho)$  [veja Eq. (4.31)], e  $C_{\ell_1,z}(\rho)$  [veja Eq. (4.32)] respectivas aos autoestados dos observáveis  $(\hbar/2)\sigma_x$ ,  $(\hbar/2)\sigma_y$  e  $(\hbar/2)\sigma_z$ , respectivamente. Em especial, observa-se a presença do termo  $\Phi_{n_x, n_y, n_z}(\rho)$  cuja contribuição é oriunda de superposições entre elementos de base destes observáveis. Cabe ressaltar que este termo é não-nulo apenas no cenário geral do observável  $A$  na Eq. (4.24), ou seja, deve assumir valor zero caso se considere cada um dos observáveis  $(\hbar/2)\sigma_{x,y,z}$  de forma individual. Por exemplo, tomando a direção  $\hat{n} = \{1, 0, 0\}$  respectiva ao observável  $(\hbar/2)\sigma_x$ , segue que  $\Phi_{1,0,0}(\rho) = 0$  e  $C_{\ell_1}(\rho) = C_{\ell_1,x}(\rho)$ . Além disso, fixando a direção  $\hat{n} = \{0, 1, 0\}$  associada ao observável  $(\hbar/2)\sigma_y$ , temos que  $\Phi_{0,1,0}(\rho) = 0$  e  $C_{\ell_1}(\rho) = C_{\ell_1,y}(\rho)$ . Por fim, escolhendo a direção  $\hat{n} = \{0, 0, 1\}$  relativa ao observável  $(\hbar/2)\sigma_z$ , obtemos  $\Phi_{0,0,1}(\rho) = 0$  e  $C_{\ell_1}(\rho) = C_{\ell_1,z}(\rho)$ .

Os resultados nas Eqs. (4.29), (4.30), (4.31), (4.32) e (4.33) podem ser reformulados explorando a representação geométrica do estado de qubit único. Em primeiro lugar, a

matriz densidade na Eq. (4.23) deve ser reescrita em termos do mapeamento  $\rho_{00} = (1/2)(1 + r_z)$ ,  $\rho_{11} = (1/2)(1 - r_z)$ , e  $\rho_{01} = (1/2)(r_x - ir_y)$ , tal que o estado de qubit único resulta  $\rho = (1/2)(\mathbb{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})$ . Cabe destacar que vetor  $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$  descreve um vetor de coeficientes reais no espaço tridimensional, e sobretudo caracteriza o vetor da esfera de Bloch de raio unitário<sup>2</sup>. Em seguida, introduzimos a parametrização do vetor  $\vec{r}$  em termos de coordenadas esféricas, tal que  $r_x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $r_y = r \sin \theta \sin \phi$ , e  $r_z = r \cos \theta$ , onde  $r \in [0, 1]$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ , e  $\phi \in [0, 2\pi]$ . Neste contexto, segue que as medidas de coerência nas Eqs. (4.30), (4.31), e (4.32) reescrevem-se, respectivamente,

$$C_{\ell_1,x}(\rho) = \sqrt{r_z^2 + r_y^2} = r \sqrt{\sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta}, \quad (4.34)$$

e

$$C_{\ell_1,y}(\rho) = \sqrt{r_x^2 + r_z^2} = r \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta}, \quad (4.35)$$

e ainda

$$C_{\ell_1,z}(\rho) = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = r \sin \theta. \quad (4.36)$$

As Eqs. (4.34) e (4.35) revelam que as medidas de coerência  $C_{\ell_1,x}(\rho)$  e  $C_{\ell_1,y}(\rho)$  diferem em termos de um tipo de quadratura no ângulo  $\phi$ . De fato, a norma- $\ell_1$  de coerência  $C_{\ell_1,x}(\rho)$  respectiva ao observável  $(\hbar/2)\sigma_x$  corrobora a norma- $\ell_1$  de coerência  $C_{\ell_1,y}(\rho)$  respectiva ao observável  $(\hbar/2)\sigma_y$  através do mapa  $\phi \rightarrow \phi + \pi/2$ . Isto é razoável já que as direções  $\hat{n} = \{1, 0, 0\}$  e  $\hat{n} = \{0, 1, 0\}$  relativas a estes observáveis são ortogonais entre si. Em especial, a medida de coerência  $C_{\ell_1,z}(\rho)$  na Eq. (4.36) é independente do ângulo  $\phi$ , o que reflete a simetria de rotação em termos da direção  $\hat{n} = \{0, 0, 1\}$  na qual se localizam os vetores  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  da base computacional.

Na prática, as medidas  $C_{\ell_1,x,y,z}(\rho)$  indicam valores mínimos de distância entre estados na esfera de Bloch e estados incoerentes da base de referência. Por um lado, a medida  $C_{\ell_1,x}(\rho)$  na Eq. (4.34) perfaz a menor distância entre pontos na esfera de Bloch e o eixo  $\hat{n} = \{1, 0, 0\}$  de estados incoerentes relativos a base de autoestados do observável  $(\hbar/2)\sigma_x$ . Por um lado, a norma- $\ell_1$  de coerência  $C_{\ell_1,y}(\rho)$  na Eq. (4.35) descreve a distância mínima entre pontos na esfera de Bloch e o eixo  $\hat{n} = \{0, 1, 0\}$  de estados incoerentes na base de autoestados do observável  $(\hbar/2)\sigma_y$ . Por fim, segue que  $C_{\ell_1,z}(\rho)$  na Eq. (4.36) representa o valor mínimo de distância entre pontos na esfera de Bloch e o eixo  $\hat{n} = \{0, 0, 1\}$  de estados incoerentes da base de autoestados do observável  $(\hbar/2)\sigma_z$ .

### 4.3.2 Entropia relativa de coerência e estados de 1-qubit

Em relação a base de referência  $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$  nas Eqs. (4.26) e (4.27), o estado de qubit único na Eq. (4.23) se escreve na forma  $\rho = \rho_{\text{diag}} + \rho_{\text{off-diag}}$ , onde a contribuição

<sup>2</sup> Para rever os detalhes acerca da esfera de Bloch, verifique Capítulo 2, Sec. 2.5.

diagonal da matriz densidade é dada por<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}\rho_{\text{diag}} &= \sum_{j=1,2} \langle \phi_j | \rho | \phi_j \rangle | \phi_j \rangle \langle \phi_j | \\ &= \langle \phi_1 | \rho | \phi_1 \rangle | \phi_1 \rangle \langle \phi_1 | + (1 - \langle \phi_1 | \rho | \phi_1 \rangle) | \phi_2 \rangle \langle \phi_2 | ,\end{aligned}\quad (4.37)$$

sendo o elemento de matriz  $\langle \phi_1 | \rho | \phi_1 \rangle$  definido a seguir

$$\langle \phi_1 | \rho | \phi_1 \rangle = \frac{1}{2\|\vec{n}\|} (\|\vec{n}\| + n_z(\rho_{11} - \rho_{00}) - 2[n_x \text{Re}(\rho_{01}) - n_y \text{Im}(\rho_{01})]) . \quad (4.38)$$

De acordo com a Eq. (4.22), a entropia relativa de coerência do estado de qubit único é dada por

$$C_{\text{rel. ent.}}(\rho) = S(\rho_{\text{diag}}) - S(\rho) . \quad (4.39)$$

Portanto, substituindo as Eqs. (4.23), (4.37) e (4.38) na Eq. (4.39), obtemos o resultado

$$C_{\text{rel. ent.}}(\rho) = f(p_1) - f(\langle \phi_1 | \rho | \phi_1 \rangle) , \quad (4.40)$$

onde introduzimos a função auxiliar<sup>4</sup>

$$f(u) = u \ln u + (1 - u) \ln(1 - u) , \quad 0 \leq u \leq 1 , \quad (4.41)$$

e sendo  $p_1$  dos autovalores do estado de qubit único na Eq. (4.23), o qual se escreve na forma

$$p_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{(\rho_{00} - \rho_{11})^2 + 4|\rho_{01}|^2} \right) . \quad (4.42)$$

Apenas para deixar claro, o estado  $\rho$  exibe o par de autovalores  $\{p_1, p_2\}$ , tal que  $p_1 + p_2 = 1$  de forma a respeitar a condição de normalização  $\text{Tr}(\rho) = 1$ .

Por fim, vamos reescrever estes resultados em termos da representação geométrica do estado de qubit único. Para tanto, devemos estabelecer o mapeamento  $\rho_{00} = (1/2)(1 + r_z)$ ,  $\rho_{11} = (1/2)(1 - r_z)$ , e  $\rho_{01} = (1/2)(r_x - ir_y)$ , onde  $r_x$ ,  $r_y$ , e  $r_z$  são parâmetros reais. Em seguida, tomamos a parametrização  $r_x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $r_y = r \sin \theta \sin \phi$ , e  $r_z = r \cos \theta$ , onde  $r \in [0, 1]$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ , e  $\phi \in [0, 2\pi]$ . Neste contexto, pode-se mostrar que  $\langle \phi_1 | \rho | \phi_1 \rangle = (1/2)[1 + r(\hat{n} \cdot \hat{r})]$  e  $p_1 = (1/2)(1 - r)$ , onde  $\hat{r} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ , tal que a entropia relativa de coerência na Eq. (4.40) resulta

$$C_{\text{rel. ent.}}(\rho) = f\left(\frac{1 \pm r}{2}\right) - f\left(\frac{1 \pm r(\hat{n} \cdot \hat{r})}{2}\right) , \quad (4.43)$$

onde utilizamos que  $f(u) = f(1 - u)$ . A Eq. (4.43) depende de duas contribuições com significados distintos. Por um lado, o termo  $f((1 \pm r)/2)$  leva em conta apenas o grau de

<sup>3</sup> Para maiores detalhes na decomposição da matriz densidade na base de referência para o cálculo da entropia relativa de coerência, verifique Sec. 4.2.2.

<sup>4</sup> Por construção, segue que  $f(0) = f(1) = 0 \ln 0 \equiv 0$ . Esta condição está em acordo com a definição da entropia de von Neumann [1].

pureza do estado de qubit único. Por outro lado, o termo  $f((1 \pm r(\hat{n} \cdot \hat{r}))/2)$  depende tanto do grau de pureza  $r$ , quanto das coerências do estado de qubit único na Eq. (4.23) em relação a base de autoestados do observável na Eq. (4.24). A dependência em coerência se manifesta na contribuição  $\hat{n} \cdot \hat{r}$ , ou seja, a projeção do versor de direção  $\hat{r}$  do raio vetor da esfera de Bloch em relação ao versor de direção  $\hat{n}$  do operador de spin. Por um lado, no limite em que  $\hat{n} \cdot \hat{r} = 1$ , ou seja, ambos versores  $\hat{n}$  e  $\hat{r}$  são paralelos, segue que  $C_{\text{rel. ent.}}(\rho) = 0$  já que neste caso o estado de prova é incoerente em relação a base de referência. Por outro lado, no limite em que  $\hat{n} \cdot \hat{r} = 0$ , ou seja, os versores  $\hat{n}$  e  $\hat{r}$  são perpendiculares, obtemos o valor  $C_{\text{rel. ent.}}(\rho) = f((1 \pm r)/2) + \ln(2)$  para a entropia relativa de coerência.

Em conclusão, resta avaliar alguns casos particulares da Eq. (4.43). Por exemplo, tomando a direção  $\hat{n} = \{1, 0, 0\}$  respectiva ao observável  $(\hbar/2)\sigma_x$ , segue que

$$C_{\text{rel. ent.,x}}(\rho) = f\left(\frac{1 \pm r}{2}\right) - f\left(\frac{1 \pm r \sin \theta \cos \phi}{2}\right). \quad (4.44)$$

Em seguida, fixando a direção  $\hat{n} = \{0, 1, 0\}$  associada ao observável  $(\hbar/2)\sigma_y$ , temos que

$$C_{\text{rel. ent.,y}}(\rho) = f\left(\frac{1 \pm r}{2}\right) - f\left(\frac{1 \pm r \sin \theta \sin \phi}{2}\right). \quad (4.45)$$

Por fim, escolhendo a direção  $\hat{n} = \{0, 0, 1\}$  relativa ao observável  $(\hbar/2)\sigma_z$ , obtemos

$$C_{\text{rel. ent.,z}}(\rho) = f\left(\frac{1 \pm r}{2}\right) - f\left(\frac{1 \pm r \cos \theta}{2}\right). \quad (4.46)$$

Na próxima subseção, vamos investigar numericamente estes resultados, levando em conta também os resultados obtidos para a norma- $\ell_1$  de coerência.

### 4.3.3 Análise dos resultados

Nesta subseção, forneceremos simulações numéricas dos resultados das Subsecs. 4.3.1 e 4.3.2, sobretudo investigando as Eqs. (4.36) e (4.46) respectivas as medidas de coerência em relação a base de autoestados  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  do observável de spin  $(\hbar/2)\sigma_z$ . Neste contexto, investigaremos o caso de estados puros e mistos.

No limite de estados puros de qubit único, ou seja,  $r = 1$ , segue que as Eqs. (4.36) e (4.46) se reescrevem

$$C_{\ell_1,z}(\rho) = \sin \theta, \quad (4.47)$$

e

$$\begin{aligned} C_{\text{rel. ent.,z}}(\rho) &= -f\left(\frac{1 \pm \cos \theta}{2}\right) \\ &= \ln[\tan(\theta/2)] \cos \theta - \ln[(1/2) \sin \theta], \end{aligned} \quad (4.48)$$

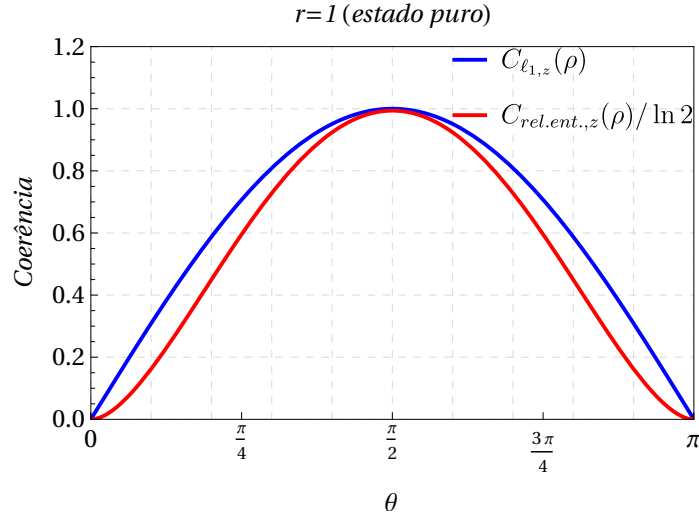


Figura 5 – Medidas de coerência para estados puros de qubit único em relação a base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  formada por autoestados do observável de spin  $(\hbar/2)\sigma_z$ . A curva azul representa a norma- $\ell_1$  de coerência,  $C_{\ell_1,z}(\rho)$  [veja Eq. (4.47)], e a curva vermelha indica a entropia relativa de coerência normalizada,  $C_{rel.ent.,z}(\rho)/\ln(2)$  [veja Eq. (4.48)]. Fonte: Elaborada pelo autor.

onde utilizamos que  $f(0) = 0$ . A Fig. 5 exibe as curvas para a norma- $\ell_1$  de coerência [veja Eq. (4.47)], e entropia relativa de coerência normalizada [veja Eq. (4.48)], em função do ângulo polar  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Observe que  $C_{rel.ent.,z}(\rho)/\ln(2)$  é limitada superiormente por  $C_{\ell_1,z}(\rho)$ , para todo  $\theta \in [0, \pi]$ . Por um lado, ambas medidas exibem valores nulos nos pólos da esfera de Bloch, ou seja, segue que  $C_{\ell_1,z}(\rho) = C_{rel.ent.,z}(\rho) = 0$  para  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ . De fato, nestes casos o estado de qubit único perfaz estados incoerentes  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , respectivamente, com coerências nulas na base computacional. Por outro lado, segue que  $C_{\ell_1,z}(\rho) = C_{rel.ent.,z}(\rho)/\ln(2) = 1$  para  $\theta = \pi/2$ , ou seja, ambas medidas de coerência exibem valores máximos para estados puros dispostos ao longo do equador da esfera de Bloch. Cabe destacar que a Fig. 5 concorda com os resultados obtidos nas Refs. [79, 80], as quais demonstram que, no limite de estados puros, a entropia relativa de coerência tem por limite superior a norma- $\ell_1$  de coerência, a saber,

$$C_{\ell_1}(\rho) \geq C_{rel.ent.}(\rho) , \quad (4.49)$$

onde  $\rho$  é necessariamente um estado puro. Entretanto, estes resultados estão em desacordo com a Ref. [4], a qual afirma que ambas medidas de coerência são iguais para qualquer estado puro, ou seja, para todo valor de  $\theta \in [0, \pi]$ . Por sua vez, a Fig. 5 prova que o resultado na Ref. [4] está equivocado, sobretudo em relação a base de estados computacional.

Em seguida, investigaremos os resultados nas Eqs. (4.47) e (4.48) explorando o aspecto geométrico do estado puro de qubit único. As Figs. 6(a) e 6(b) ilustram, respectivamente, o mapeamento da norma  $\ell_1$  de coerência e entropia relativa de coerência normalizada de estados puros de qubit único na superfície da esfera de Bloch. Em ambas figuras, a escala de cores revela que estas medidas exibem valores mais intensos ao redor da equador da esfera, os quais vão diminuindo em direção aos polos norte e sul. Isso

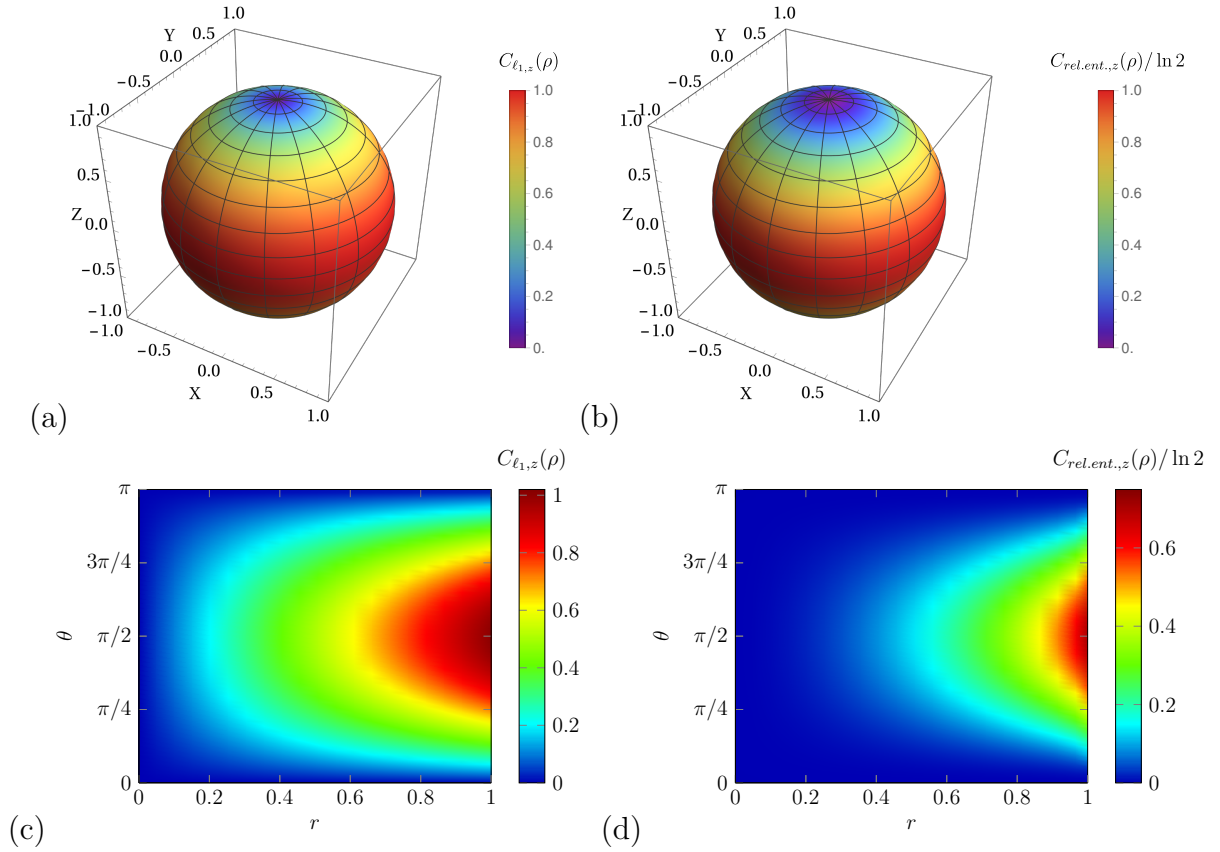


Figura 6 – Gráficos de medidas de coerência para estados quânticos de qubit único. (a) Mapeamento da intensidade da norma  $\ell_1$  de coerência  $C_{\ell_1,z}(\rho)$  [veja Eq. (4.47)] de estados puros de qubit único na esfera de Bloch. (b) Mapeamento da intensidade da entropia relativa de coerência normalizada  $C_{\text{rel. ent.},z}(\rho)/\ln 2$  [veja Eq. (4.48)] de estados puros de qubit único na esfera de Bloch. (c) Gráfico de densidade da norma  $\ell_1$  de coerência  $C_{\ell_1,z}(\rho)$  [veja Eq. (4.36)] de estados mistos de qubit único, em função dos parâmetros  $0 \leq r \leq 1$  e  $0 \leq \theta \leq \pi$ . (d) Gráfico de densidade da entropia relativa de coerência normalizada  $C_{\text{rel. ent.},z}(\rho)/\ln 2$  [veja Eq. (4.46)] de estados mistos de qubit único, em função dos parâmetros  $0 \leq r \leq 1$  e  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Fonte: Elaborada pelo autor.

acontece porque no equador da esfera se localizam os estados de superposição na base computacional, enquanto a contribuição dessa superposição diminui à medida que nos aproximamos dos estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , atingindo o seu valor mínimo nesses polos. Importante destacar que  $C_{\ell_1,z}(\rho)$  e  $C_{\text{rel. ent.},z}(\rho)$  independem do ângulo polar  $\phi \in [0, 2\pi]$ , o que assinala a invariância de ambas medidas de coerência para estados quânticos que diferem por fases locais no plano  $xy$ . Isto sugere que, tomando um valor fixo para o ângulo azimutal  $\theta$ , existe uma simetria de rotação em torno do eixo  $z$  ao longo do qual estão dispostos os estados incoerentes na base computacional.

Por fim, investigaremos as medidas de coerência nas Eqs. (4.36) e (4.46) para estados mistos de qubit único. As Figs. 6(c) e 6(d) ilustram, respectivamente, o comportamento da norma  $\ell_1$  de coerência e entropia relativa de coerência normalizada para estados mistos de qubit único, em função dos parâmetros  $0 \leq r \leq 1$  e  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Por um lado, tomando um valor fixo para o ângulo polar  $\theta$ , tem-se que ambas medidas de coerência aumentam



em intensidade à medida que o parâmetro  $r$  cresce. Em outras palavras, estados mistos exibem coerência menor em detrimento de estados puros. Em especial, as Eqs. (4.36) e (4.46) mostram que o estado maximamente misturado é completamente incoerente em termos da base computacional, ou seja, tem coerência zero nesta base. Por outro lado, fixando o parâmetro  $r$ , pode-se perceber que ambas medidas de coerência exibem um pico de intensidade para  $\theta = \pi/2$ .

## 5 Dinâmica de coerência quântica de estados de 1-qubit

Neste capítulo, discutiremos a caracterização de coerência quântica para estados de qubit único em sistemas quânticos abertos. Neste contexto, a evolução do sistema de dois níveis é obtida por meio da representação operador-soma na figura de operadores de Kraus respectivos a certos processos físicos paradigmáticos na literatura da informação quântica. Por um lado, a Sec. 5.1 aborda a quantificação de coerência quântica no processo de atenuação de fase, o qual descreve de maneira efetiva os efeitos de perda de coerência induzidos pelo ambiente. Por outro lado, a Sec. 5.2 discute a caracterização de coerência em processos de atenuação de amplitude, ou seja, sistemas quânticos abertos em que o estado quântico exibe redução de ocupação nas populações e perda de coerências. Em ambos casos, discutiremos o comportamento da norma- $\ell_1$  de coerência e entropia relativa de coerência em relação a base computacional  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , portanto explorando resultados analíticos e suas implicações geométricas. As Secs. 5.1 e 5.2 apresentam resultados obtidos ao longo do trabalho de pesquisa.

### 5.1 Dinâmica de atenuação de fase

O mapa de atenuação de fase descreve a evolução de sistemas quânticos sujeitos a efeitos de decoerência, como a perda gradual de informação de fase em um qubit, mas sem que haja perda de energia [1]. Por um lado, podemos utilizar esse mapa para descrever os efeitos de perturbações em estados eletrônicos devido a interação com cargas elétricas distantes [1]. Por outro lado, o mapa de atenuação de fase pode ser utilizado para modelar a supressão da interferência quântica em nível macroscópico devido a perda de superposição coerente provocada pelo processo de decoerência [65].

No processo de atenuação de fase, o sistema quântico sofre perda de coerência sem dissipação de energia, tal que as populações do estado permanecem inalteradas enquanto as coerências são gradualmente suprimidas durante a ação do mapa. O ruído da atenuação de fase quântico é modelado por meio de dois operadores de Kraus, a saber,

$$K_0 = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-\alpha}|1\rangle\langle 1|, \quad K_1 = \sqrt{\alpha}|1\rangle\langle 1|, \quad (5.1)$$

onde  $0 \leq \alpha \leq 1$  é o parâmetro do mapa atenuação de fase. Por um lado, observe que o estado  $|0\rangle$  é invariante sob ação do operador de Kraus  $K_0$ , enquanto o estado  $|1\rangle$  tem sua amplitude reduzida por um fator  $\sqrt{1-\alpha}$  sob ação deste operador. Por outro lado, o operador de Kraus  $K_1$  destrói a ocupação do estado fundamental  $|0\rangle$ , e reduz a amplitude

do estado  $|1\rangle$  pelo fator  $\sqrt{\alpha}$  [1]. A partir da ação dos operadores de Kraus do mapa de atenuação de fase, o estado de qubit único do sistema de dois níveis é dado por

$$\begin{aligned}\rho_\alpha &= \sum_{j=0}^1 K_j \rho_0 K_j^\dagger \\ &= \rho_{\alpha,00} |0\rangle\langle 0| + (1 - \rho_{\alpha,00}) |1\rangle\langle 1| + \rho_{\alpha,01} |0\rangle\langle 1| + \rho_{\alpha,01}^* |1\rangle\langle 0| ,\end{aligned}\quad (5.2)$$

onde definimos os elementos de matriz a seguir

$$\rho_{\alpha,00} = \frac{1}{2}(1 + r \cos \theta) , \quad (5.3)$$

$$\rho_{\alpha,01} = \frac{1}{2}\sqrt{1-\alpha} r e^{i\phi} \sin \theta . \quad (5.4)$$

Em linhas gerais, enquanto as populações do estado inicial de qubit único permanecem invariantes sob ação do mapa de atenuação de fase [veja Eq. (5.3)], as coerências da matriz densidade sofrem um decréscimo por meio do fator  $\sqrt{1-\alpha}$  [veja Eq. (5.4)].

Em seguida, vamos promover a caracterização das coerências da matriz densidade  $\rho_\alpha$  em termos da norma- $\ell_1$  de coerência, bem como a entropia relativa de coerência. Por um lado, a norma- $\ell_1$  de coerência para o estado de qubit único sob ação do mapa de atenuação de fase é dada por

$$C_{\ell_1}(\rho_\alpha) = \sqrt{1-\alpha} r \sin \theta . \quad (5.5)$$

De acordo com a Eq. (5.5), a norma- $\ell_1$  de coerência é função do parâmetro de mistura  $0 \leq r \leq 1$  e do ângulo polar  $0 \leq \theta \leq \pi$  respectivos ao estado inicial do sistema físico, bem como do parâmetro de decoerência  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Este resultado é independente do ângulo  $\phi$ , portanto revelando um tipo de simetria de rotação em torno do eixo  $z$  que localiza os estados incoerentes na base computacional. Além disso, a Eq. (5.5) revela que  $C_{\ell_1}(\rho_\alpha) = \sqrt{1-\alpha} C_{\ell_1}(\rho_0)$ , onde  $C_{\ell_1}(\rho_0) = r \sin \theta$  é a medida de coerência do estado inicial  $\rho_0$  do sistema de dois níveis. Na prática, a ação do mapa de atenuação de fase perfaz um decréscimo na amplitude da medida de coerência, o qual é função do parâmetro de decoerência. Por outro lado, a entropia relativa de coerência respectiva ao estado misto pode ser escrita na forma

$$C_{\text{rel. ent.}}(\rho_\alpha) = f(p_1) - f(1 - \rho_{\alpha,00}) , \quad (5.6)$$

onde  $f(x) := x \ln x + (1-x) \ln(1-x)$ , sendo  $\rho_{\alpha,00}$  o elemento de matriz definido na Eq. (5.3), enquanto  $p_\alpha$  descreve um dos autovalores de energia da matriz densidade, dado por

$$p_\alpha = \frac{1}{2} \left( 1 - r \sqrt{1-\alpha} \sin^2 \theta \right) . \quad (5.7)$$

Em analogia ao caso da norma- $\ell_1$  de coerência, note que a entropia relativa de coerência depende apenas dos parâmetros  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , e  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Em especial, a

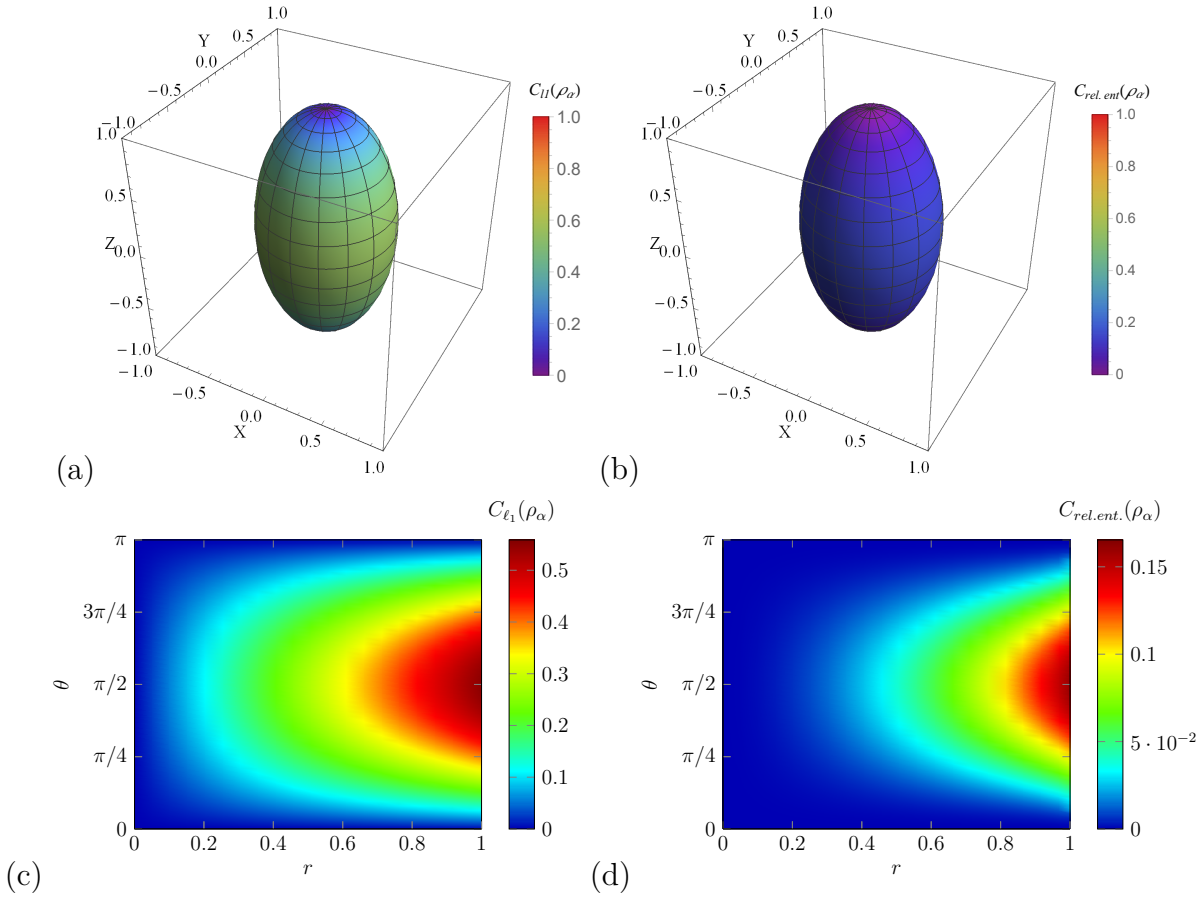


Figura 7 – Medidas de coerência na base computacional para estados quânticos de qubit único sob ação do mapa de atenuação de fase, sendo  $\alpha = 0.7$  o parâmetro de decoerência. (a) Mapeamento das intensidades da norma- $\ell_1$  de coerência  $C_{\ell_1}(\rho_\alpha)$  de estados puros de qubit único na esfera de Bloch deformada pela ação do mapa de atenuação de fase. (b) Mapeamento das intensidades da entropia relativa de coerência  $C_{rel.ent.}(\rho_\alpha)$  de estados puros de qubit único na esfera de Bloch deformada pela ação do mapa de atenuação de fase. (c) Diagrama de fases da norma- $\ell_1$  de coerência de estados mistos de qubit único sob ação do mapa de inversão de atenuação de fase, em função dos parâmetros  $0 \leq r \leq 1$  e  $0 \leq \theta \leq \pi$ . (d) Diagrama de fases da entropia relativa de coerência de estados mistos de qubit único sob ação do mapa de atenuação de fase, em função dos parâmetros  $0 \leq r \leq 1$  e  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Fonte: Elaborada pelo autor.

Eq. (5.6) é função das populações e dos autovalores do estado quântico. É sabido que o mapa de atenuação de fase modifica as coerências do estado quântico, deixando as populações invariantes. Neste caso, segue que  $C_{rel.ent.}(\rho_\alpha)$  será suscetível as variações no espectro da matriz densidade que são induzidas pela ação do mapa quântico.

Em resposta a ação do mapa quântico, observa-se um fluxo dos estados distribuídos na esfera de Bloch em direção ao eixo  $z$ , ou seja, a região que contempla todos os estados incoerentes na base computacional. Neste processo, a esfera de Bloch é deformada de maneira contínua num elipsóide de revolução, conforme ilustrado pelas Figs. 7(a) e 7(b). Em especial, segue que os estados localizados ao longo do eixo  $z$  permanecem invariantes sob ação do mapa, enquanto aqueles estados sobre o plano  $xy$  são contraídos ao longo deste eixo em virtude da perda de coerência. As Figs. 7(c) e 7(d) ilustram, respectivamente, os

diagramas de fase para a norma- $\ell_1$  de coerência e entropia relativa de coerência de estados mistos de qubit único sob ação do mapa de atenuação de fase. Em ambos casos, utilizamos o fator de decoerência  $\alpha = 0.7$ , sem perda de generalidade dos resultados. De acordo com as Figs. 7(c) e 7(d), tomando um valor de  $\theta$  fixo, segue que a intensidade da coerência do sistema físico diminui à medida que o parâmetro  $r$  diminui. De fato, esperamos que a coerência seja menor para estados próximos ao eixo  $z$ , onde se localizam os estados incoerentes na base computacional. Nesse processo, as populações da matriz densidade permanecem intactas, enquanto as coerências são gradualmente suprimidas sob ação do mapa quântico.

## 5.2 Dinâmica de atenuação de amplitude

O mapa de atenuação de amplitude descreve a física de sistemas quânticos sujeitos a processos de dissipação de energia [1]. Por exemplo, este mapa quântico pode descrever a (i) dinâmica de um átomo de dois níveis durante a emissão de um fóton, ou mesmo quando sujeito à interação com modos de radiação do campo eletromagnético [81]; (ii) a dinâmica de sistemas de spins em temperatura finita se aproximando do equilíbrio com o ambiente; (iii) o estado de um fóton em um interferômetro (ou cavidade) quando sujeito a efeitos de espalhamento e atenuação [1]. Em sistemas de dois níveis, a ação do mapa atenuação de amplitude é dada em termos dos operadores de Kraus a seguir

$$K_0 = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-\alpha}|1\rangle\langle 1|, \quad K_1 = \sqrt{\alpha}|0\rangle\langle 1|, \quad (5.8)$$

onde  $0 \leq \alpha \leq 1$  descreve o parâmetro decoerência do mapa quântico. Em detalhes, o parâmetro  $\alpha \equiv \alpha(t) = 1 - e^{-\Gamma t}$  define a probabilidade de decaimento, e  $1/\Gamma$  estabelece uma escala de tempo característico desse processo. O operador de Kraus  $K_1$  descreve a transição entre os estados excitado  $|1\rangle$  e fundamental  $|0\rangle$  com probabilidade  $\alpha$ , onde podemos associar fisicamente a emissão de um *quanta* de energia para o ambiente. Por outro lado, o operador de Kraus  $K_0$  descreve a redução na taxa de ocupação do estado excitado com probabilidade  $1 - \alpha$ , atenuando a amplitude desse estado  $|1\rangle$  sem trocar o estado  $|0\rangle$ . Podemos notar que o estado  $|0\rangle\langle 0|$  se mantém inalterado sob ação desse mapa, ou seja, no limite assintótico  $t \rightarrow \infty$  as coerências da matriz densidade evoluída do sistema tendem a zero, e apenas o estado fundamental  $|0\rangle\langle 0|$  terá ocupação não-nula [1].

Por conveniência, a dinâmica reduzida do sistema de dois níveis será obtida a partir da representação operador-soma dada pelos operadores de Kraus na Eq. (5.8). Neste contexto, a matriz densidade de qubit único assume a forma

$$\begin{aligned} \rho_\alpha &= \sum_{j=0}^1 K_j \rho_0 K_j^\dagger \\ &= \rho_{\alpha,00}|0\rangle\langle 0| + (1 - \rho_{\alpha,00})|1\rangle\langle 1| + \rho_{\alpha,01}|0\rangle\langle 1| + \rho_{\alpha,01}^*|1\rangle\langle 0|, \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde introduzimos os elementos de matriz

$$\rho_{\alpha,00} := \langle 0 | \rho_{\alpha} | 0 \rangle = \frac{1}{2} [2 - (1 - \alpha)(1 - r \cos \theta)] , \quad (5.10)$$

$$\rho_{\alpha,01} := \langle 0 | \rho_{\alpha} | 1 \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \alpha} r e^{-i\phi} \sin \theta . \quad (5.11)$$

Estas expressões revelam que tanto as populações [veja Eq. (5.10)] quanto as coerências [veja Eq. (5.11)] do estado de qubit único estão sujeitos aos efeitos do ruído. Por um lado, a redução nas populações reflete o processo troca de energia entre sistema e ambiente inerente ao mapa quântico. Por outro lado, a degradação dos efeitos de interferência entre os estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  da base computacional sinaliza o efeito da decoerência intrínseco a evolução do sistema quântico aberto. No regime de tempos longos, o sistema de dois níveis será descrito de forma assintótica pelo estado fundamental, o que significa perda de ocupação e coerências em relação ao estado excitado. Este processo pode ser visualizado em termos da representação geométrica dos estados de qubit único na esfera de Bloch, a qual descreve o conjunto de possíveis estados iniciais do sistema de dois níveis. De fato, o efeito deste mapa consiste em deformar de maneira contínua a esfera de Bloch em direção ao estado  $|0\rangle$  localizado no pólo norte da esfera de Bloch. Neste caso, os estados sob ação do mapa se distribuem no esferóide oblato de revolução ilustrado nas Figs. 8(a) e 8(b).

Em seguida, abordaremos a análise das coerências do estado de qubit único na Eq. (5.9) por meio da norma- $\ell_1$  de coerência e da entropia relativa de coerência. Por definição, a norma- $\ell_1$  corresponde a soma do valor absoluto dos elementos não-diagonais da matriz densidade, o que implica o resultado a seguir

$$C_{\ell_1}(\rho_{\alpha}) = \sqrt{1 - \alpha} r \sin \theta . \quad (5.12)$$

Por sua vez, a entropia relativa de coerência respectiva ao estado de qubit único sob ação do mapa de atenuação de amplitude escreve-se na forma

$$C_{\text{rel. ent.}}(\rho_{\alpha}) = f(p_1) - f(1 - \rho_{\alpha,00}) , \quad (5.13)$$

onde  $f(x) := x \ln x + (1 - x) \ln(1 - x)$ , sendo  $\rho_{\alpha,00}$  o elemento de matriz dado na Eq. (5.10), enquanto  $p_{\alpha}$  descreve um dos autovalores de energia da matriz densidade na Eq. (5.9), dado por

$$p_{\alpha} = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - (1 - \alpha)[1 - r^2 + \alpha(1 - r \cos \theta)^2]} \right) . \quad (5.14)$$

O painel na Fig. 8 exibe gráficos para as medidas de coerência nas Eqs. (5.12) e (5.13), fixando o parâmetro  $\alpha = 0.7$  sem perda de generalidade. As Figs. 8(a) e 8(b) ilustram, respectivamente, as intensidades da norma- $\ell_1$  de coerência,  $C_{\ell_1}(\rho_{\alpha})$ , e entropia relativa de coerência,  $C_{\text{rel. ent.}}(\rho_{\alpha})$ , para estados de qubit único sob ação do mapa de atenuação de amplitude. Em cada figura, as intensidades das medidas de coerência são mapeadas ao longo do esferóide oblato de revolução obtido pela deformação da esfera de

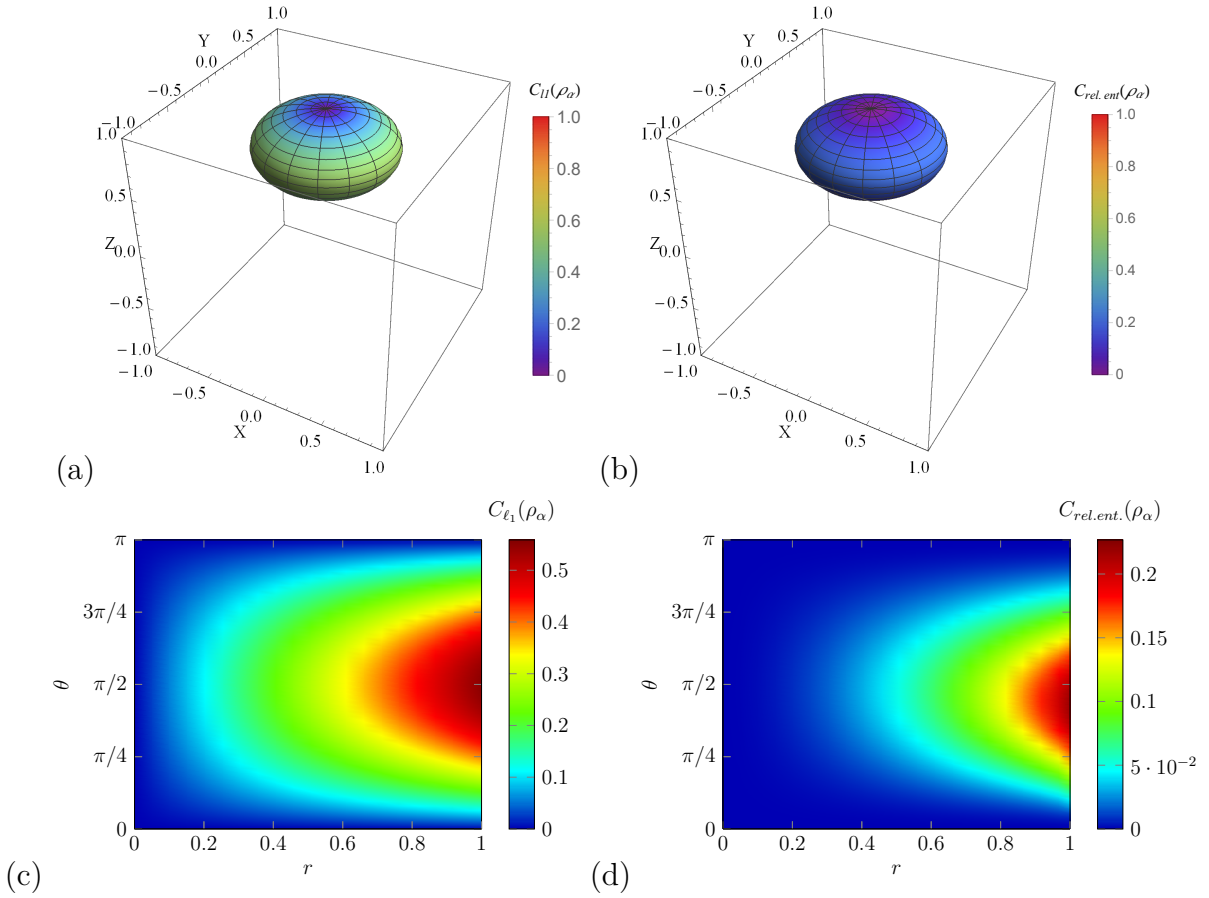


Figura 8 – Medidas de coerência na base computacional para estados quânticos de qubit único sob ação do mapa de atenuação de amplitude, sendo  $\alpha = 0.7$  o parâmetro de decoerência. (a) Mapeamento das intensidades da norma- $\ell_1$  de coerência de estados puros de qubit único na esfera de Bloch. (b) Mapeamento das intensidades da entropia relativa de coerência de estados puros de qubit único na esfera de Bloch. (c) Diagrama de fases da norma- $\ell_1$  de coerência de estados mistos de qubit único sob ação do mapa atenuação de amplitude, em função dos parâmetros  $0 \leq r \leq 1$  e  $0 \leq \theta \leq \pi$ . (d) Diagrama de fases da entropia relativa de coerência de estados mistos de qubit único sob ação do mapa atenuação de amplitude, em função dos parâmetros  $0 \leq r \leq 1$  e  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Fonte: Elaborada pelo autor.

Bloch sob ação do mapa quântico. Em especial, estados quânticos com coerência finita estão localizados ao longo do equador do esferóide oblato de revolução, enquanto o pólo norte descreve o lugar geométrico dos estados incoerentes na base computacional. Em virtude da simetria azimutal corroborada pelas Eqs. (5.12) e (5.13), observa-se uma homogeneidade na distribuição de intensidades das coerência para qualquer valor  $0 \leq \theta \leq \pi$ , com revolução completa de  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  em torno do eixo do esferóide oblato de revolução. Por sua vez, as Figs. 8(c) e 8(d) exibem, respectivamente, diagramas de fase para a norma- $\ell_1$  de coerência e entropia relativa de coerência para estados mistos de qubit único. Observe que ambos gráficos exibem comportamentos qualitativos similares, embora  $C_{\text{rel.ent.}}(\rho_\alpha)$  apresente amplitudes menores se comparada a  $C_{\ell_1}(\rho_\alpha)$ . Em ambos casos, a intensidade da medida de coerência vai diminuindo quando consideramos estados cada vez mais misturados, isto é, quando o parâmetro de mistura  $r$  assume valores cada vez menores.

## 6 Ordens de coerência

Neste capítulo, abordaremos o conceito de ordens de coerência no que tange a caracterização de coerência de sistemas quânticos de dimensão finita. Por meio deste formalismo, as coerências de um estado quântico são classificadas em termos de números quânticos relativos aos níveis de energia de um observável fixo. Neste contexto, as ordens de coerência mapeiam subespaços de coerência respectivos aos efeitos de interferência oriundos da superposição entre o estado quântico de prova e os autoestados de energia do observável de referência. O capítulo está organizado na forma a seguir. Na Sec. 6.1, introduzimos o formalismo de ordens de coerência, além de explorar os aspectos técnicos e propriedades gerais. Na Sec. 6.2, abordamos a chamada intensidade de múltiplo *quantum* (IMQ), a qual perfaz uma figura de mérito alternativa na caracterização de coerência quântica. Na Sec. 6.3, investigamos a relação entre IMQs e o grau de pureza de estados quânticos. Na Sec. 6.4, analisamos as ordens de coerência para estados de qubit único, explorando os vínculos entre esta abordagem e o formalismo BCP. Por fim, na Sec. 6.5 exploramos o formalismo de ordens de coerência para estados quânticos de 1-qubit em sistemas quânticos abertos. As Secs. 6.1 e 6.2 contêm revisões detalhadas de bibliografia, enquanto as Secs. 6.3, 6.4 e 6.5 apresentam resultados obtidos ao longo do trabalho de pesquisa.

### 6.1 O formalismo de ordens de coerência

O conceito de ordem de coerência refere-se a um formalismo de caracterização de coerência quântica introduzido no âmbito da comunidade de ressonância magnética nuclear (RMN) [82, 83]. Em especial, esta linguagem operacional envolve quantidades físicas que podem ser realizadas e acessadas em experimentos típicos envolvendo spins nucleares [52]. Este aspecto justifica o apelo ao formalismo, sobretudo em comparação com as medidas de coerência oriundas no âmbito da abordagem BCP que carecem sobremaneira de respaldo experimental. De fato, a literatura especializada tem se dedicado nos últimos anos na busca de estimativas experimentais factíveis destes quantificadores em diferentes plataformas físicas [47].

De forma geral, este formalismo se baseia na análise de subespaços de coerência de um estado de prova em relação a base de autoestados de um observável fixo. Os subespaços de coerência são rotulados em termos de números inteiros associados a diferenças nos níveis de energia do espectro deste observável. Por sua vez, tais espaçamentos descrevem possíveis transições entre níveis de energia, por exemplo, em virtude de emissão ou absorção de um fóton em que ocorre variação de *quantum* de energia.



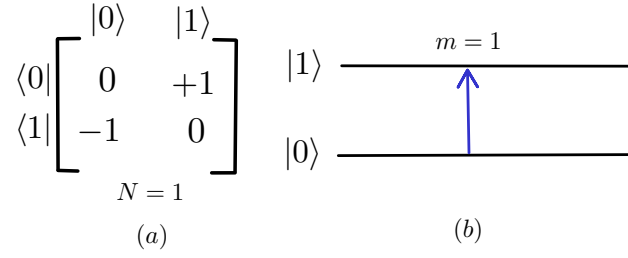


Figura 9 – Ordens de coerência de estados de qubit único em relação a base de autoestados fixa do observável  $(1/2)\sigma_z$ . Fonte: Elaborada pelo autor.

Seja um sistema quântico cujo espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  tem dimensão finita  $d = \dim \mathcal{H}$ . Para formular as ordens de coerência, precisamos primeiro fixar uma base de estados de referência. Neste caso, vamos considerar a base  $\{|j\rangle\}_{j=1,\dots,d}$  formada pelos autoestados de um observável de referência  $A = \sum_{j=1}^d \lambda_j |j\rangle\langle j|$ , sendo  $\{\lambda_j\}_{j=1,\dots,d}$  autovalores reais. Os estados da base satisfazem a condição de ortonormalidade, isto é,  $\langle j|l\rangle = \delta_{jl}$  para todo  $j, l = \{1, \dots, d\}$ , e completeza, isto é,  $\sum_{j=1}^d |j\rangle\langle j| = \mathbb{I}_d$ , onde  $\mathbb{I}_d$  é a matriz identidade no espaço  $\mathcal{H}$ . Neste contexto, vamos investigar as coerências de um estado quântico de prova  $\rho$  arbitrário, onde  $\rho^\dagger = \rho$ ,  $\rho \geq 0$ , e  $\text{Tr}(\rho) = 1$ . Nesta base, podemos escrever

$$\rho = \sum_{j,l=1}^d \langle j|\rho|l\rangle |j\rangle\langle l|, \quad (6.1)$$

onde  $\langle l|\rho|j\rangle^* = \langle j|\rho|l\rangle$ . O cerne do formalismo consiste em reescrever a matriz densidade  $\rho$  por meio da decomposição em subespaços de coerência na base do observável  $A$  rotulados por números quânticos que indicam transições entre os níveis de energia do sistema [51, 84]. Por hipótese, o espaçamento nos níveis de energia do espectro do observável  $A$  correspondem a números inteiros  $m \in \{-N, \dots, +N\} \in \mathbb{Z}$ , ou seja, segue que  $\lambda_j - \lambda_l = m$  para todo  $j, l = \{1, \dots, d\}$  [51]. Esta restrição será aplicada na soma dupla na Eq. (6.1), de tal forma a obter blocos matriciais vinculados a estes inteiros, os quais classificam as respectivas ordens de coerência do estado  $\rho$  na base de  $A$ . Neste caso, obtemos o resultado

$$\rho = \sum_m \rho_m, \quad (6.2)$$

onde definimos

$$\rho_m := \sum_{\lambda_j - \lambda_l = m} \langle j|\rho|l\rangle |j\rangle\langle l|. \quad (6.3)$$

Por sua vez, os blocos matriciais  $\{\rho_m\}$  codificam todas as coerências relativas a interferência entre os autoestados  $|j\rangle$  e  $|l\rangle$  do observável  $A$ , tais que  $\lambda_j - \lambda_l = m$ , com  $m \in \mathbb{Z}$ . Por construção, segue que cada bloco  $\rho_m$  descreve uma matriz não-Hermitiana. Como a matriz densidade  $\rho$  é Hermitiana, segue que as ordens de coerência sempre ocorre em pares  $\pm m$ , ou seja, a soma na Eq. (6.2) deve incluir os blocos  $\rho_{\pm m}$ , para todo  $m \in \mathbb{Z}$ . Em seguida,

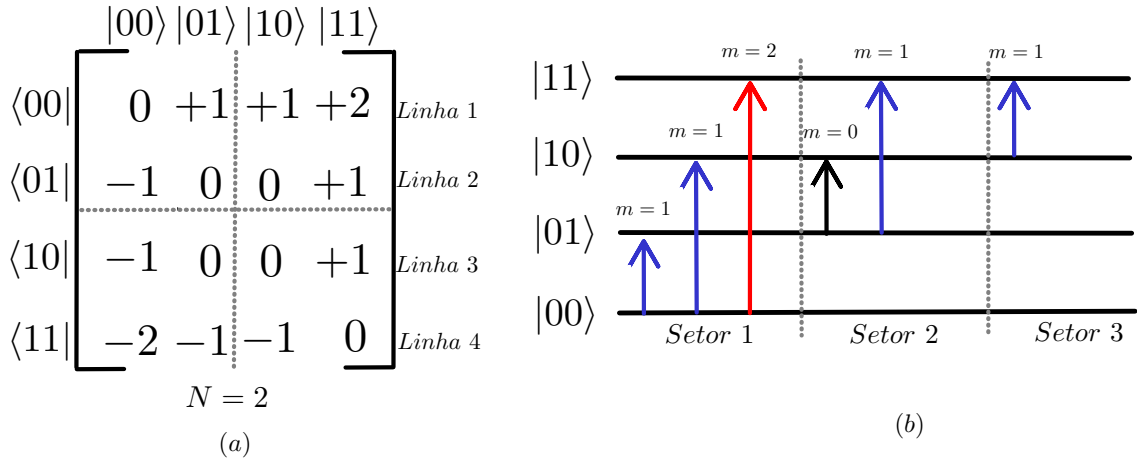


Figura 10 – Ordens de coerência de estados de 2-qubits em relação a base de autoestados fixa do observável coletivo  $(1/2)(\sigma_z \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_2 \otimes \sigma_z)$ . Fonte: Elaborada pelo autor.

ilustraremos estas ideias em sistemas qubits, investigando os casos de 1-qubit ( $N = 1$ ) e 2-qubits ( $N = 2$ ).

Por exemplo, seja um sistema quântico de dois níveis cujo espaço de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$  tem dimensão  $d = 2$ . Neste caso, selecionamos a base de referência  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  de autoestados do observável de spin<sup>1</sup>  $(1/2)\sigma_z$ , o qual tem autovalores  $\{+1/2, -1/2\}$ . Neste caso, esperamos as ordens de coerência  $m = \{-1, 0, +1\}$ <sup>2</sup>. A Fig. 9 mostra o mecanismo de ordens de coerência do estado  $\rho$  de qubit único nesta base. Na Fig. 9(a), identificamos as ordens de coerência  $m = -1$ ,  $m = 0$  e  $m = +1$  na representação pictórica da matriz densidade. Na Fig. 9(b), ilustramos a transição entre níveis a partir do estado fundamental  $|0\rangle$ . De fato, esta figura mostra que a transição entre os estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  está associada ao inteiro  $m = +1$ , o que envolve um *quantum* de energia. Isto está indicado na primeira linha da matriz na Fig. 9(a). O processo contrário descreve a ordem  $m = -1$ , com emissão de energia. Na ausência de transições, temos  $m = 0$ .

Considere agora um sistema quântico de quatro níveis, ou seja, 2-qubits, cujo espaço de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  tem dimensão  $d = 4$ . Neste caso, selecionamos a base de referência  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  de autoestados do observável de spin coletivo  $(1/2)(\sigma_z \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_2 \otimes \sigma_z)$ , o qual tem autovalores  $\{-1, 0, 0, +1\}$ . Neste caso, esperamos as ordens de coerência  $m = \{-2, -1, 0, +1, +2\}$ <sup>3</sup>. Na Fig. 10(a), identificamos as ordens de coerência  $m = \pm 2$ ,  $m = \pm 1$  e  $m = 0$  na representação pictórica da matriz densidade. Na Fig. 10(b), ilustramos

<sup>1</sup> Por simplicidade, consideramos o sistema de unidades naturais em que  $\hbar = 1$ .

<sup>2</sup> Dados os autovalores  $\{+1/2, -1/2\}$ , segue que  $m = -1/2 - (+1/2) = -1$ ,  $m = -1/2 - (-1/2) = +1/2 - (+1/2) = 0$ , e  $m = +1/2 - (-1/2) = +1$ .

<sup>3</sup> Dados os autovalores  $\{-1, 0, 0, +1\}$ , segue que  $m = -1 - (+1) = -2$ ,  $m = -1 - 0 = 0 - 1 = -1$ ,  $m = +1 - 0 = 0 - (-1) = +1$ , e  $m = 1 - (-1) = +2$ .

as transições entre níveis a partir do estado fundamental  $|00\rangle$ , as quais estão separadas em três setores, cada qual respectivo a uma dada linha da matriz na Fig. 10(a). No setor 1, temos transições envolvendo as ordens  $m = 1$  ( $|00\rangle \rightarrow |01\rangle$  e  $|00\rangle \rightarrow |10\rangle$ ) e  $m = 2$  ( $|00\rangle \rightarrow |11\rangle$ ). No setor 2, observamos transições envolvendo as ordens  $m = 0$  ( $|01\rangle \rightarrow |10\rangle$ ) e  $m = 1$  ( $|01\rangle \rightarrow |11\rangle$ ). Por fim, o setor 3 indica a transição de ordem  $m = 1$  ( $|10\rangle \rightarrow |11\rangle$ ). Em todos os casos, transições de ordem  $m = 0$  levam em conta emissão e absorção de mesma quantidade de energia, enquanto transições de ordens  $m = 1$  e  $m = 2$  envolvem absorção de 1 *quantum* e 2 *quanta* de energia. Nestas transições, temos efeitos de superposição entre os respectivos níveis de energia classificados em subespaços de coerência específicos em cada processo. A partir desta ideia, investigamos a decomposição de estado quântico de prova. Esperamos que estes exemplos tenham deixado a ideia clara.

Em seguida, discutiremos algumas propriedades satisfeitas pelo conjunto de blocos não-Hermitianos na Eq. (6.3). Por um lado, cada bloco  $\rho_m$  é assimétrico sob operação de transposição e conjugação complexa, a saber,  $\rho_m^\dagger = \rho_{-m}$ . Em detalhes, segue que

$$\begin{aligned}\rho_m^\dagger &= \sum_{\lambda_j - \lambda_l = m} \langle j|\rho|l\rangle^* |l\rangle\langle j| \\ &= \sum_{\lambda_l - \lambda_j = -m} \langle l|\rho|j\rangle |l\rangle\langle j| \\ &= \sum_{\lambda_j - \lambda_l = -m} \langle j|\rho|l\rangle |j\rangle\langle l| \\ &= \rho_{-m} ,\end{aligned}\tag{6.4}$$

onde induzimos a troca nos índices de soma  $j \leftrightarrow l$  na transição entre as duas primeiras linhas da Eq. (6.4), além de reconhecer o bloco  $\rho_{-m}$  na última linha. Esta propriedade implica que tais blocos se apresentam aos pares, ou seja,  $\rho_m$  e  $\rho_{-m}$ , no intuito de garantir que o operador densidade  $\rho$  na Eq. (6.2) seja uma matriz Hermitiana.

Por outro lado, o par de blocos  $\rho_m$  e  $\rho_n$  é ortogonal em relação ao produto interno de Hilbert-Schmidt, ou seja,  $\text{Tr}(\rho_m^\dagger \rho_n) = 0$  se  $n \neq -m$ . De fato, temos que

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\rho_m^\dagger \rho_n) &= \sum_{\lambda_j - \lambda_l = m} \sum_{\lambda_r - \lambda_s = n} \langle j|\rho|l\rangle^* \langle r|\rho|s\rangle \text{Tr}(|l\rangle\langle j|r\rangle\langle s|) \\ &= \sum_{\lambda_j - \lambda_l = m} \sum_{\lambda_r - \lambda_s = n} \langle l|\rho|j\rangle \langle r|\rho|s\rangle \langle s|l\rangle \langle j|r\rangle \\ &= \sum_{\lambda_j - \lambda_l = m} \sum_{\lambda_r - \lambda_s = n} \langle l|\rho|j\rangle \langle r|\rho|s\rangle \delta_{s,l} \delta_{r,j} \\ &= \sum_{\lambda_j - \lambda_l = m} \sum_{\lambda_j - \lambda_l = n} |\langle j|\rho|l\rangle|^2 .\end{aligned}\tag{6.5}$$

Observe que o lado direito da Eq. (6.5) exibe valor não-nulo somente quando  $m = n$ . Em outras palavras, dados autovalores  $\lambda_j$  e  $\lambda_l$ , não existem inteiros  $m$  e  $n$  tais que  $\lambda_j - \lambda_l = m$  e  $\lambda_j - \lambda_l = n$  de forma concomitante. Desta forma, pode-se concluir

$$\text{Tr}(\rho_m^\dagger \rho_n) = \text{Tr}(\rho_{-m} \rho_n) = \delta_{n,m} \text{Tr}(\rho_{-m} \rho_m) .\tag{6.6}$$

Em termos práticos, segue que o resultado na Eq. (6.6) estabelece um tipo de regra de seleção em termos das ordens de coerência  $m$  e  $n$  [51, 85].

Por fim, o bloco  $\rho_m$  exibe uma fase local sob rotações unitárias geradas pelo observável  $A$ , ou seja,  $R_\phi(\rho_m) = e^{-im\phi}\rho_m$ , onde  $R_\phi(\bullet) = e^{-i\phi A} \bullet e^{i\phi A}$  descreve uma transformação unitária em que o parâmetro  $\phi \in (0, 2\pi]$  é codificado no estado de prova. Em essência, temos que

$$\begin{aligned}
 R_\phi(\rho_m) &= \sum_{\lambda_j - \lambda_\ell = m} \langle j|\rho|l\rangle e^{-i\phi A} |j\rangle \langle l| e^{i\phi A} \\
 &= \sum_{\lambda_j - \lambda_\ell = m} \langle j|\rho|l\rangle e^{-i\phi(\lambda_j - \lambda_\ell)} |j\rangle \langle l| \\
 &= \sum_{\lambda_j - \lambda_\ell = m} \langle j|\rho|l\rangle e^{im\phi} |j\rangle \langle l| \\
 &= e^{-im\phi} \sum_{\lambda_j - \lambda_\ell = m} \langle j|\rho|l\rangle |j\rangle \langle l| \\
 &= e^{-im\phi} \rho_m .
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Em especial, a Eq. (6.7) implica que o subespaço de ordem de coerência zero é invariante sob tal processo de codificação de fase, ou seja, segue que  $R_\phi(\rho_0) = \rho_0$ . Em termos da teoria de recursos, é sabido que a operação  $R_\phi(\bullet)$  perfaz uma classe de evoluções chamadas covariantes. Neste caso, segue que o modo de coerência  $m = 0$  é translacionalmente simétrico em relação ao observável  $A$  [51, 85]. Esta propriedade tem sido explorada no âmbito do processamento da informação quântica, sobretudo na busca por subespaços livres de decoerência na dinâmica de sistemas quânticos abertos.

## 6.2 Intensidade de múltiplo *quantum* (IMQ)

Nesta seção, vamos introduzir uma medida quantitativa da contribuição das ordens de coerência nas Eqs. (6.2) e (6.3) vinculadas aos diferentes subespaços de coerência do sistema quântico de dimensão finita. Por um lado, esta medida de coerência deve ser positiva para qualquer matriz densidade. Neste caso, deve exibir valor zero para estados incoerentes, e valor não-nulo para estados quânticos com coerência finita. Por outro lado, esta medida deve ser invariante em relação aos blocos de coerência  $\pm m$ , ou seja, vislumbramos que a medida seja simétrica em termos da paridade dos blocos de coerência. De fato, devemos lembrar que  $\rho_m^\dagger = \rho_{-m}$ , isto é, os blocos de ordem de coerência  $\pm m$  estão vinculados pela operação de transposição e conjugação complexa.

Neste contexto, levando em conta os possíveis blocos  $\rho_m$  de ordem de coerência,

introduzimos a chamada intensidade de múltiplo *quantum* (IMQ) na forma [52]

$$\begin{aligned} I_m(\rho) &:= \|\rho_m\|_2^2 \\ &= \text{Tr}(\rho_m^\dagger \rho_m) \\ &= \text{Tr}(\rho_{-m} \rho_m) , \end{aligned} \tag{6.8}$$

onde  $\|O\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(O^\dagger O)}$  define o produto interno de Hilbert-Schmidt, também conhecido como norma Schatten-2. Por sua vez, a Eq. (6.8) satisfaz os critérios outrora elencados, ou seja, tem-se que  $I_m(\rho) = \|\rho_m\|_2^2 \geq 0$  é positivo para todo estado quântico  $\rho$ , e  $I_{-m}(\rho) = \text{Tr}(\rho_m \rho_{-m}) = I_m(\rho)$  é simétrico para qualquer  $m \in \mathbb{Z}$ .

Cabe pontuar que o IMQ na Eq. (6.8) não satisfaz o critério de convexidade elencado no formalismo BCP. Entretanto, o IMQ perfaz uma figura de mérito fiel na caracterização de coerência, destacando-se sobretudo em virtude de sua realização experimental. De fato, o IMQ pode ser acessado em termos de técnicas tomográficas em plataformas de ressonância magnética nuclear por meio de transformadas de Fourier do sinal de radiofrequência [47].

### 6.3 IMQs e pureza quântica

Nesta seção, vamos provar que os IMQs estão vinculados a pureza de estados quânticos de dimensão finita<sup>4</sup>. Seja a decomposição em blocos de ordem de coerência  $\rho = \sum_m \rho_m$  do estado quântico de dimensão finita [veja Eq. (6.2)]. Neste contexto, a pureza quântica deste estado se escreve na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\rho) &= \text{Tr}(\rho^2) \\ &= \text{Tr} \left( \sum_{l,m} \rho_l \rho_m \right) \\ &= \sum_{l,m} \text{Tr}(\rho_l \rho_m) , \end{aligned} \tag{6.9}$$

onde utilizamos a linearidade da operação de traço em relação a soma de matrizes. Lembrando da relação de ortogonalidade  $\text{Tr}(\rho_l \rho_m) = \delta_{l,-m} \text{Tr}(\rho_m \rho_{-m})$  relativa a decomposição em blocos da matriz densidade [veja Eq. (6.6)], obtemos os resultados

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\rho) &= \sum_{l,m} \delta_{l,-m} \text{Tr}(\rho_{-m} \rho_m) \\ &= \sum_m \text{Tr}(\rho_{-m} \rho_m) \\ &= \sum_m \text{Tr}(\rho_m^\dagger \rho_m) . \end{aligned} \tag{6.10}$$

Em seguida, reconhecendo a intensidade de múltiplo *quantum* (IMQ) na Eq. (6.10), segue que

$$\mathcal{P}(\rho) = \sum_m I_m(\rho) . \tag{6.11}$$

<sup>4</sup> Para rever propriedades da pureza de estados quânticos, verifique Sec. 2.3, Capítulo 2.

A Eq. (6.11) perfaz um invariante geral, ou seja, um tipo de quantidade conservada, o qual é válido para estados arbitrários em sistemas quânticos de dimensão finita. Este resultado revela que, embora cada uma dos IMQs dependa da escolha da base de referência na representação em ordens de coerência, a Eq. (6.11) implica que a soma de todos os IMQs independe de base. De fato, a pureza de um estado quântico não depende de base. Cabe ressaltar que este é um dos resultados centrais deste trabalho.

O resultado na Eq. (6.11) revela ainda que a soma de IMQs não pode assumir qualquer valor real. De fato, segue que a pureza de um estado quântico  $\rho$  satisfaz a cadeia de desigualdades  $1/d \leq \mathcal{P}(\rho) \leq 1$ , onde o limite inferior refere-se ao estado maximamente misturado, e o limite superior indica estados puros. Neste caso, o vínculo na Eq. (6.11) implica a relação a seguir

$$\frac{1}{d} \leq \sum_m I_m(\rho) \leq 1. \quad (6.12)$$

Por sua vez, a Eq. (6.12) fornece a faixa de valores na qual soma de IMQs é limitada para estados quânticos arbitrários em um espaço de dimensão finita  $d$ .

Por fim, a Eq. (6.11) pode fornecer uma estimativa para a pureza em termos de um número mínimo de IMQs. Por exemplo, segue que a pureza é limitada inferiormente pela soma dos IMQs de ordem  $m = 0$  e  $m = \pm N$ , a saber

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\rho) &= \sum_m I_m(\rho) \\ &= I_{-N}(\rho) + I_{-(N-1)}(\rho) + \dots + I_0(\rho) + \dots + I_{N-1}(\rho) + I_N(\rho) \\ &\geq I_{-N}(\rho) + I_0(\rho) + I_N(\rho), \end{aligned} \quad (6.13)$$

onde utilizamos o fato de que  $I_m(\rho) \geq 0$  para todo  $m \in \mathbb{Z}$ . Este resultado tem potencial aplicação na investigação experimental de coerência de sistemas quânticos de muitas partículas. Por exemplo, a medida experimental de coerência em sistemas nucleares em RMN envolve técnicas tomográficas cuja complexidade escala com o número de partículas. Em sistemas de muitos spins, a caracterização de coerência exige um grande número de medidas para acessar os possíveis IMQs, o que pode inviabilizar o experimento. Neste caso, a Eq. (6.13) oferece um limite inferior no valor da pureza do estado de spins caso sejam conhecidos ao menos os IMQs  $I_{\pm N}(\rho)$  e  $I_0(\rho)$  em nível experimental.

## 6.4 Ordens de coerência de estados quânticos de 1-qubit

Nesta seção vamos discutir a caracterização das coerências de estados de qubit único por meio do formalismo de ordens de coerência. Desta forma, vamos considerar matrizes densidade no espaço de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$  de dimensão  $d = \dim \mathcal{H} = 2$ , cuja forma matricial é dada por

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{01}^* & \rho_{11} \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

onde  $\rho^\dagger = \rho$ ,  $\rho \geq 0$ , e  $\text{Tr}(\rho) = \rho_{00} + \rho_{11} = 1$ . Por sua vez, segue que a pureza deste estado quântico é dada por

$$\mathcal{P}(\rho) = \rho_{00}^2 + 2|\rho_{01}|^2 + \rho_{11}^2 . \quad (6.15)$$

É importante esclarecer que o estado de qubit único na Eq. (6.14) pode ser puro ou misto. De fato, a pureza na Eq. (6.15) captura tal informação.

No intuito de avaliar os respectivos IMQs, devemos fixar uma base de referência, a qual discutiremos em seguida. Por hipótese, seja o observável de spin-1/2 dado por<sup>5</sup>

$$A = \frac{1}{2}(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) , \quad (6.16)$$

onde  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  é o vetor de matrizes de Pauli, e  $\hat{n}$  é o versor de direção respectivo ao vetor tridimensional real  $\vec{n}$ , tal que

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} , \quad \vec{n} = (n_x, n_y, n_z) , \quad \|\vec{n}\| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} . \quad (6.17)$$

A Eq. (6.16) codifica diferentes tipos de observáveis de spin no espaço vetorial complexo  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ . Por exemplo, tomando a direção  $\hat{n} = \{1, 0, 0\}$ , obtemos o observável  $(1/2)\sigma_x$ . Em seguida, fixando a direção  $\hat{n} = \{0, 1, 0\}$ , tem-se o observável  $(1/2)\sigma_y$ . Além disso, escolhendo a direção  $\hat{n} = \{0, 0, 1\}$ , obtemos o observável  $(1/2)\sigma_z$ . Por sua vez, o observável geral na Eq. (6.16) exibe a decomposição espectral  $A = \sum_{j=1,2} \lambda_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$ , onde os autovalores  $\lambda_1 = -1/2$  e  $\lambda_2 = 1/2$  correspondem, respectivamente, aos autoestados a seguir

$$|\phi_1\rangle = \frac{n_z - \|\vec{n}\|}{\sqrt{2\|\vec{n}\|(\|\vec{n}\| - n_z)}} |0\rangle + \frac{n_x + in_y}{\sqrt{2\|\vec{n}\|(\|\vec{n}\| - n_z)}} |1\rangle , \quad (6.18)$$

$$|\phi_2\rangle = \frac{n_z + \|\vec{n}\|}{\sqrt{2\|\vec{n}\|(\|\vec{n}\| + n_z)}} |0\rangle + \frac{n_x + in_y}{\sqrt{2\|\vec{n}\|(\|\vec{n}\| + n_z)}} |1\rangle , \quad (6.19)$$

em que  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  são autovetores da matriz de Pauli  $\sigma_z$ . O conjunto de vetores  $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$  define uma base completa no espaço vetorial complexo  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ , ou seja, satisfazem o vínculo de ortonormalidade  $\langle\phi_j|\phi_l\rangle = \delta_{jl}$  para  $j, l = \{1, 2\}$ , e a relação de completeza  $\sum_{j=1,2} |\phi_j\rangle\langle\phi_j| = \mathbb{I}_2$ .

Neste contexto, o conjunto de vetores  $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$  será escolhido como a base de referência na qual investigaremos as ordens de coerência e IMQs. Em termos desta base, o estado de qubit único na Eq. (6.14) exibe a decomposição em ordens de coerência a seguir

$$\rho = \sum_{m=0,\pm 1} \rho_m , \quad (6.20)$$

onde o bloco de ordem de coerência  $m = 0$  é dado por

$$\rho_0 = \sum_{\lambda_j - \lambda_l = 0} \rho_{jl} |\phi_j\rangle\langle\phi_l| = \langle\phi_1|\rho|\phi_1\rangle |\phi_1\rangle\langle\phi_1| + \langle\phi_2|\rho|\phi_2\rangle |\phi_2\rangle\langle\phi_2| , \quad (6.21)$$

<sup>5</sup> Por simplicidade, consideramos o sistema de unidades naturais em que  $\hbar = 1$ .

e os blocos de ordens de coerência  $m = \pm 1$  se escrevem na forma

$$\rho_{-1} = \sum_{\lambda_j - \lambda_l = -1} \rho_{jl} |\phi_j\rangle \langle \phi_l| = \langle \phi_1 | \rho | \phi_2 \rangle |\phi_1\rangle \langle \phi_2| , \quad (6.22)$$

$$\rho_{+1} = \sum_{\lambda_j - \lambda_l = +1} \rho_{jl} |\phi_j\rangle \langle \phi_l| = \langle \phi_2 | \rho | \phi_1 \rangle |\phi_2\rangle \langle \phi_1| , \quad (6.23)$$

Por meio das Eqs. (6.18), (6.19), (6.21), (6.22) e (6.23), podemos avaliar os IMQs respectivos as ordens de coerência  $m = 0$  e  $m = \pm 1$  do estado na Eq. (6.14), a saber,  $I_0(\rho) = \text{Tr}(\rho_0^\dagger \rho_0)$  e  $I_{\pm 1}(\rho) = \text{Tr}(\rho_{\pm 1}^\dagger \rho_{\pm 1})$ , respectivamente. Neste sentido, obtemos os resultados gerais

$$I_0(\rho) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\{n_z(\rho_{00} - \rho_{11}) + 2[n_x \text{Re}(\rho_{01}) - n_y \text{Im}(\rho_{01})]\}^2}{\|\vec{n}\|^2} \right) , \quad (6.24)$$

e

$$I_{\pm 1}(\rho) = \frac{1}{4} \left( 4|\rho_{01}|^2 + (\rho_{00} - \rho_{11})^2 - \frac{\{n_z(\rho_{00} - \rho_{11}) + 2[n_x \text{Re}(\rho_{01}) - n_y \text{Im}(\rho_{01})]\}^2}{\|\vec{n}\|^2} \right) . \quad (6.25)$$

A partir dos resultados nas Eqs. (6.24) e (6.25), pode-se verificar que o vínculo entre pureza e a soma de IMQs é satisfeito, a saber,

$$\sum_{m=0,\pm 1} I_m(\rho) = \rho_{00}^2 + 2|\rho_{01}|^2 + \rho_{11}^2 = \mathcal{P}(\rho) , \quad (6.26)$$

e, portanto, recobramos a expressão da pureza quântica na Eq. (6.15), a qual se aplica para estados de qubit únicos arbitrários.

Em seguida, vamos ressignificar as Eqs. (6.24) e (6.25) geometricamente. Neste sentido, induzimos a parametrização  $\rho_{00} = (1/2)(1 + r_z)$ ,  $\rho_{11} = (1/2)(1 - r_z)$ , e  $\rho_{01} = (1/2)(r_x - ir_y)$ , onde  $r_x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $r_y = r \sin \theta \sin \phi$ , e  $r_z = r \cos \theta$ , sendo  $r \in [0, 1]$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ , e  $\phi \in [0, 2\pi]$ . Desta forma, pode-se mostrar que os IMQs na base do observável  $A$  resultam

$$I_0(\rho) = \frac{1}{2} \left( 1 + r^2 (\hat{n} \cdot \hat{r})^2 \right) , \quad (6.27)$$

e

$$I_{\pm 1}(\rho) = \frac{r^2}{4} \left( 1 - (\hat{n} \cdot \hat{r})^2 \right) . \quad (6.28)$$

Os IMQs nas Eqs. (6.27) e (6.28) dependem da projeção do versor de direção  $\hat{r}$  que orienta o raio vetor da esfera de Bloch, em relação ao versor de direção  $\hat{n}$  que caracteriza o observável de spin. No regime em que  $\hat{n} \cdot \hat{r} = 0$ , segue que  $I_0(\rho) = 1/2$  e  $I_{\pm 1}(\rho) = r^2/4$ , ou seja, o estado de qubit único tem coerência máxima na base de referência. No limite em que  $\hat{n} \cdot \hat{r} = \pm 1$ , tem-se que  $I_0(\rho) = (1/2)(1 + r^2)$  e  $I_{\pm 1}(\rho) = 0$ , ou seja, o estado de qubit único exhibe coerência nula já que é incoerente na base de referência.

Os IMQs nas Eqs. (6.24) e (6.25) englobam diversos casos particulares oriundos de escolhas específicas do observável de spin  $A$  no espaço vetorial complexo  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ . Por



exemplo, fixando o observável  $(1/2)\sigma_x$  relativo a direção  $\hat{n} = \{1, 0, 0\}$ , obtemos os IMQs a seguir

$$I_0^x(\rho) = \frac{1}{2}\{1 + 4[\text{Re}(\rho_{01})]^2\} , \quad I_{\pm 1}^x(\rho) = \frac{1}{4}\{(\rho_{00} - \rho_{11})^2 + 4[\text{Im}(\rho_{01})]^2\} . \quad (6.29)$$

Neste caso, segue que  $I_0^x(\rho)$  é função do elemento não-diagonal  $\rho_{01}$ , e por sua vez o  $I_{\pm 1}^x(\rho)$  depende das populações  $\{\rho_{00}, \rho_{11}\}$  e do termo não-diagonal da matriz densidade. Nesta base, segue que os IMQs  $I_{\pm 1}^x(\rho)$  estão vinculados a norma- $\ell_1$  de coerência  $C_{\ell_1, x}(\rho)$  de qubit único [veja Eq. (4.30)], a saber

$$I_{\pm 1}^x(\rho) = \frac{1}{4}[C_{\ell_1, x}(\rho)]^2 . \quad (6.30)$$

Em seguida, fixando a direção  $\hat{n} = \{0, 1, 0\}$ , tem-se o observável  $(1/2)\sigma_y$ , tal que os IMQs oriundos das ordens de coerência  $m = 0$  e  $m = \pm 1$  têm a forma

$$I_0^y(\rho) = \frac{1}{2}\{1 + 4[\text{Im}(\rho_{01})]^2\} , \quad I_{\pm 1}^y(\rho) = \frac{1}{4}\{(\rho_{00} - \rho_{11})^2 + 4[\text{Re}(\rho_{01})]^2\} . \quad (6.31)$$

Em analogia ao caso anterior, note que  $I_{\pm 1}^y(\rho)$  depende de populações e coerências do estado de qubit único, e  $I_0^y(\rho)$  é função apenas do termo não-diagonal da matriz densidade. Os resultados nas Eqs. (6.29) e (6.31) indicam que os IMQs avaliados em termos das bases dos observáveis  $(1/2)\sigma_x$  e  $(1/2)\sigma_y$  diferem pela troca das partes real e imaginária do elemento não-diagonal  $\rho_{01}$  do estado de 1-qubit. Nesta base, verifica-se que os IMQs  $I_{\pm 1}^y(\rho)$  estão vinculados a norma- $\ell_1$  de coerência  $C_{\ell_1, y}(\rho)$  [veja Eq. (4.31)], tal que

$$I_{\pm 1}^y(\rho) = \frac{1}{4}[C_{\ell_1, y}(\rho)]^2 . \quad (6.32)$$

Por fim, tomando o observável de spin  $(1/2)\sigma_z$  devido a direção  $\hat{n} = \{0, 0, 1\}$ , dispomos dos IMQs a seguir

$$I_0^z(\rho) = \text{Tr}(\rho_0^2) = \rho_{00}^2 + \rho_{11}^2 , \quad I_{\pm 1}^z(\rho) = |\rho_{01}|^2 . \quad (6.33)$$

Observe que  $I_0^z(\rho)$  é função apenas das populações da matriz densidade, e  $I_{\pm 1}^z(\rho)$  depende somente do termo não-diagonal do estado de qubit único na Eq. (6.14). Por sua vez, os IMQs  $I_{\pm 1}^z(\rho)$  estão vinculados a norma- $\ell_1$  de coerência  $C_{\ell_1, z}(\rho)$  de qubit único [veja Eq. (4.32)], a saber

$$I_{\pm 1}^z(\rho) = \frac{1}{4}[C_{\ell_1, z}(\rho)]^2 . \quad (6.34)$$

De forma geral, percebe-se que os IMQs têm comportamento distinto em termos da base de autoestados de referência, sobretudo no que se refere aos elementos de matriz do estado de 1-qubit.

Os resultados nas Eqs. (6.30), (6.32) e (6.34) estabelecem uma conexão entre o formalismo BCP<sup>6</sup> e a abordagem de ordens de coerência no cenário de estados de qubit

<sup>6</sup> Para rever os detalhes do formalismo BCP, verifique Sec. 4.1, Capítulo 4.

único. Este resultado pode motivar pesquisas futuras buscando certificar este *link* para sistemas quânticos de dimensão  $d > 2$  finita. Em conclusão, vamos mostrar que tais resultados permitem expressar uma cadeia de desigualdades entre a norma- $\ell_1$  de coerência e o IMQ de ordem  $m = 0$ . De fato, tomando o vínculo de pureza e soma de IMQs, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\rho) &= \sum_{m=0,\pm 1} I_m^{x,y,z}(\rho) \\ &= I_{-1}^{x,y,z}(\rho) + I_0^{x,y,z}(\rho) + I_{+1}^{x,y,z}(\rho) \\ &= I_0^{x,y,z}(\rho) + \frac{1}{2} [C_{\ell_1}^{x,y,z}(\rho)]^2 .\end{aligned}\tag{6.35}$$

Observe que a Eq. (6.35) é válida para bases de referência de quaisquer dos observáveis  $(1/2)\sigma_{x,y,z}$ . No espaço vetorial complexo de dimensão  $d = 2$ , segue que a pureza satisfaz os vínculos<sup>7</sup>  $1/2 \leq \mathcal{P}(\rho) \leq 1$ . Neste caso, obtemos a cadeia de desigualdades a seguir

$$\sqrt{1 - 2I_0^{x,y,z}(\rho)} \leq C_{\ell_1}^{x,y,z}(\rho) \leq \sqrt{2[1 - I_0^{x,y,z}(\rho)]} .\tag{6.36}$$

O resultado na Eq. (6.36) fornece limites inferior e superior para a norma- $\ell_1$  de coerência em termos do IMQ relativo a ordem de coerência  $m = 0$  de estados de qubit único. Em essência, o resultado estabelece uma faixa de valores possíveis para  $C_{\ell_1}^{x,y,z}(\rho)$ , o qual tem potencial aplicação em cenários experimentais nos quais apenas a quantidade  $I_0^{x,y,z}(\rho)$  é acessível. Este é o caso, por exemplo, de plataformas de RMN, onde o acesso ao IQM  $I_0^{x,y,z}(\rho)$  demanda baixo custo experimental.

## 6.5 Ordens de coerência e estados de 1-qubit em sistemas quânticos abertos

Nesta seção, vamos investigar a decomposição de ordens de coerência de estados de qubit único em sistemas quânticos abertos. O espaço de Hilbert é dado pelo espaço vetorial complexo  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$  de dimensão  $d = \dim \mathcal{H} = 2$ . O sistema físico tem estado inicial dado pelo estado de qubit único  $\rho = (1/2)(\mathbb{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})$ , onde  $\vec{r} = \{r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta\}$  é o vetor da esfera de Bloch,  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  é o vetor de matrizes de Pauli. Cabe destacar que  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , e  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Em especial, investigaremos as dinâmicas não-unitárias descritas pelos mapas de atenuação de fase e atenuação de amplitude.

### 6.5.1 IMQs e dinâmica de atenuação de fase

Nesta subseção, vamos investigar a decomposição de ordens de coerência em sistemas de dois níveis cuja dinâmica é dada em termos do mapa de atenuação de fase. Em termos da representação operador-soma, o estado evoluído é dado por  $\rho_\alpha = \sum_{j=0,1} K_j \rho K_j^\dagger$ , onde

<sup>7</sup> Para rever propriedades da pureza de estados quânticos, verifique Sec. 2.3, Capítulo 2.

os operadores de Kraus do mapa de atenuação de fase são  $K_0 = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-\alpha}|1\rangle\langle 1|$ , e  $K_1 = \sqrt{\alpha}|1\rangle\langle 1|$ , sendo  $\alpha$  o parâmetro de decoerência. Os detalhes da dinâmica não-unitária deste mapa foram outrora discutidos na Sec. 5.1, Capítulo 5. Desta forma, omitiremos detalhes no intuito de evitar repetições. A pureza deste estado quântico é dada por

$$\mathcal{P}(\rho_\alpha) = \frac{1}{2} \left[ 1 + r^2(1 - \alpha \sin^2 \theta) \right] . \quad (6.37)$$

Por sua vez, a pureza quântica na Eq. (6.37) é função do grau de mistura  $r$ , do ângulo azimutal  $\theta$ , bem como do parâmetro de decoerência  $\alpha$ .

Em seguida, discutiremos os IMQs respectivos às ordens  $m = 0$  e  $m = \pm 1$ , para diferentes escolhas da base de referência na decomposição em ordens de coerência. Por um lado, fixaremos a base de referência  $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$  formada pelos autoestados do observável de spin  $(1/2)\sigma_x$ , onde  $|\pm\rangle_x = (1/\sqrt{2})(|0\rangle \pm |1\rangle)$ , os quais correspondem aos autovalores  $\lambda_\pm = \pm 1/2$ . Neste caso, obtemos os IMQs a seguir

$$I_0^x(\rho_\alpha) = \frac{1}{2} \left[ 1 + (1 - \alpha)r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi \right] , \quad (6.38)$$

$$I_{\pm 1}^x(\rho_\alpha) = \frac{r^2}{4} \left[ 1 - \alpha \sin^2 \theta - (1 - \alpha) \sin^2 \theta \cos^2 \phi \right] . \quad (6.39)$$

Os termos nas Eqs. (6.38) e (6.39) dependem do parâmetro de mistura  $r$ , bem como dos ângulos azimutal  $\theta$  e polar  $\phi$ . No regime em que  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ , para todo  $\phi \in [0, 2\pi]$ , temos os resultados  $I_0^x(\rho_\alpha) = 1/2$  e  $I_{\pm 1}^x(\rho_\alpha) = r^2/4$ , os quais são independentes do parâmetro de decoerência. No limite em que  $\phi = \pi/2$  ou  $\phi = 3\pi/2$ , para todo  $\theta \in [0, \pi]$ , segue que  $I_0^x(\rho_\alpha) = 1/2$  e  $I_{\pm 1}^x(\rho_\alpha) = (r^2/4)(1 - \alpha \sin^2 \theta)$ .

Por outro lado, tomamos a base de referência  $\{|+\rangle_y, |-\rangle_y\}$  formada pelos autoestados do observável de spin  $(1/2)\sigma_y$ , onde  $|\pm\rangle_y = (1/\sqrt{2})(|0\rangle \pm i|1\rangle)$ , os quais correspondem aos autovalores  $\lambda_\pm = \pm 1/2$ . Para esta base de referência, obtemos os IMQs na forma

$$I_0^y(\rho_\alpha) = \frac{1}{2} \left[ 1 + (1 - \alpha)r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \right] , \quad (6.40)$$

$$I_{\pm 1}^y(\rho_\alpha) = \frac{r^2}{4} \left[ 1 - \alpha \sin^2 \theta - (1 - \alpha) \sin^2 \theta \sin^2 \phi \right] . \quad (6.41)$$

As Eqs. (6.40) e (6.41) codificam diversos casos particulares. No regime em que  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ , para todo  $\phi \in [0, 2\pi]$ , obtemos os resultados  $I_0^y(\rho_\alpha) = 1/2$  e  $I_{\pm 1}^y(\rho_\alpha) = r^2/4$ , os quais são independentes do parâmetro de decoerência. No limite em que  $\phi = 0$  ou  $\phi = \pi$ , para todo  $\theta \in [0, \pi]$ , segue que  $I_0^y(\rho_\alpha) = 1/2$  e  $I_{\pm 1}^y(\rho_\alpha) = (r^2/4)(1 - \alpha \sin^2 \theta)$ .

As Eqs. (6.38), (6.39), (6.40) e (6.41) revelam que os IMQs  $I_{0,\pm 1}^y(\rho_\alpha)$  e  $I_{0,\pm 1}^x(\rho_\alpha)$  estão relacionados por um tipo de quadratura no ângulo  $\phi$ . Neste caso, podemos mapear os resultados por meio da relação  $\phi \rightarrow \phi + \pi/2$ . Em especial, fixando  $\phi = \pi/4$ , segue que  $I_0^x(\rho_\alpha) = I_0^y(\rho_\alpha)$  e  $I_{\pm 1}^x(\rho_\alpha) = I_{\pm 1}^y(\rho_\alpha)$ . Na Fig. 11, ilustramos os gráficos de  $I_0^{x,y}(\rho_\alpha)$  [veja Eqs. (6.38) e (6.40)],  $I_{\pm 1}^{x,y}(\rho_\alpha)$  [veja Eqs. (6.39) e (6.41)], e  $\mathcal{P}(\rho_\alpha)$  [veja Eq. (6.37)], em

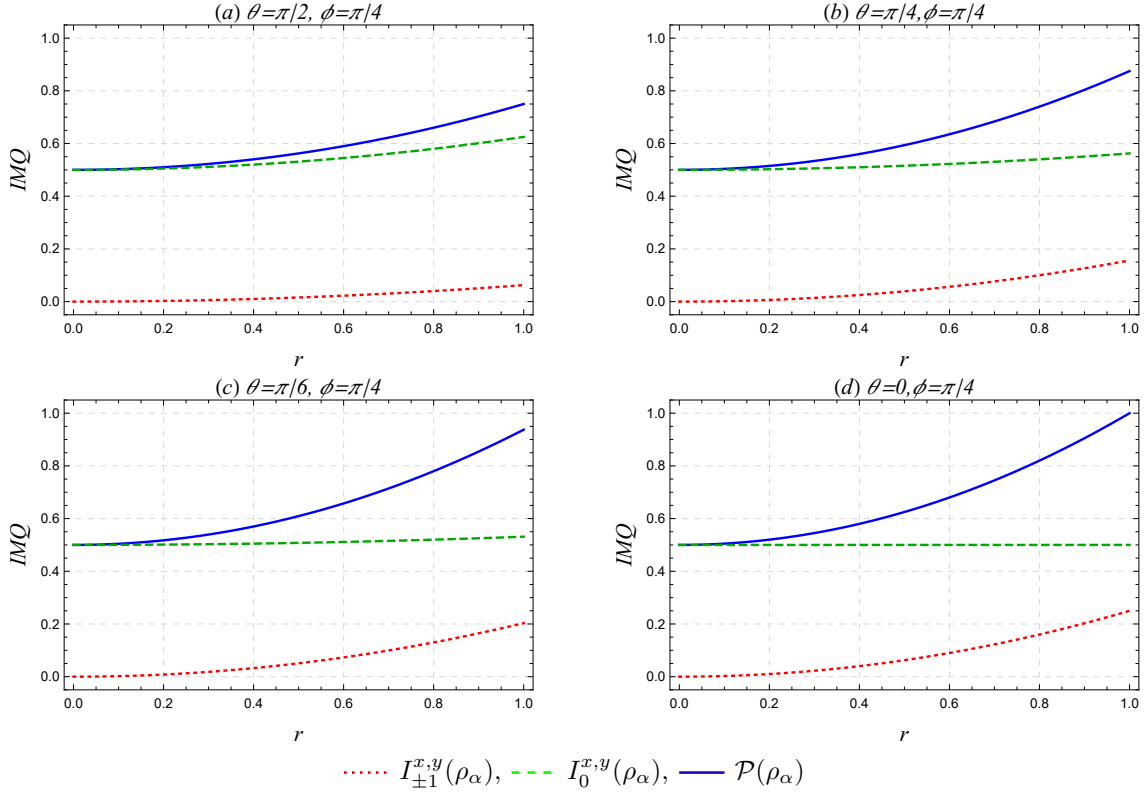


Figura 11 – Gráficos da intensidade de múltiplo *quantum* (IMQ),  $I_m^{x,y}(\rho_\alpha)$  [veja Eqs. (6.38), (6.39), (6.40) e (6.41)], e pureza quântica,  $\mathcal{P}(\rho_\alpha)$  [veja Eq. (6.37)], em função do parâmetro de mistura  $0 \leq r \leq 1$ , respectivos a estados de 1-qubit sob ação canal de atenuação de fase. As coerências são avaliadas em relação a base de autoestados dos observáveis  $(1/2)\sigma_{x,y}$ , e o parâmetro de decoerência é  $\alpha = 0.5$ . O estado inicial do sistema é dado por um estado de 1-qubit em que  $\phi = \pi/4$ , sendo o ângulo polar: (a)  $\theta = \pi/2$ , (b)  $\theta = \pi/4$ , (c)  $\theta = \pi/6$ , (d)  $\theta = 0$ . Fonte: Elaborada pelo autor.

função de  $r$ , para diferentes valores do ângulo azimutal  $\theta$ , no regime  $\phi = \pi/4$ . O parâmetro de decoerência é  $\alpha = 0.5$ . Em todos os painéis, percebe-se que os IMQs e a pureza variam quadraticamente em função de  $r$ . Os valores de  $\theta$  estão indicados em ordem decrescente no intuito de selecionar estados de 1-qubit a partir do plano  $xy$  ( $\theta = \pi/2$ ), até o eixo  $z$  ( $\theta = 0$ ).

Por fim, escolhemos a base de referência  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  formada pelos autoestados do observável de spin  $(1/2)\sigma_z$ , os quais correspondem aos autovalores  $\lambda_0 = 1/2$  e  $\lambda_1 = -1/2$ . Em relação a esta base, obtemos os IMQs na forma

$$I_0^z(\rho_\alpha) = \frac{1}{2} (1 + r^2 \cos^2 \theta) , \quad (6.42)$$

$$I_{\pm 1}^z(\rho_\alpha) = \frac{1}{4} (1 - \alpha) r^2 \sin^2 \theta . \quad (6.43)$$

Na Fig. 12, ilustramos os gráficos de  $I_0^z(\rho_\alpha)$  [veja Eq. (6.42)],  $I_{\pm 1}^z(\rho_\alpha)$  [veja Eq. (6.43)], e  $\mathcal{P}(\rho_\alpha)$  [veja Eq. (6.37)], em função do parâmetro de mistura  $0 \leq r \leq 1$ , para diferentes valores do ângulo azimutal  $\theta$ . O parâmetro de decoerência é  $\alpha = 0.5$ . A Fig. 12(a) ilustra o caso  $\theta = 0$  ( $\theta = \pi$ ), segue que  $I_0^z(\rho_\alpha) = \mathcal{P}(\rho_\alpha) = (1/2)(1 + r^2)$ , e  $I_{\pm 1}^z(\rho_\alpha) = 0$ . Em ambos casos, temos estados incoerentes robustos ao papel da decoerência induzida pela dinâmica

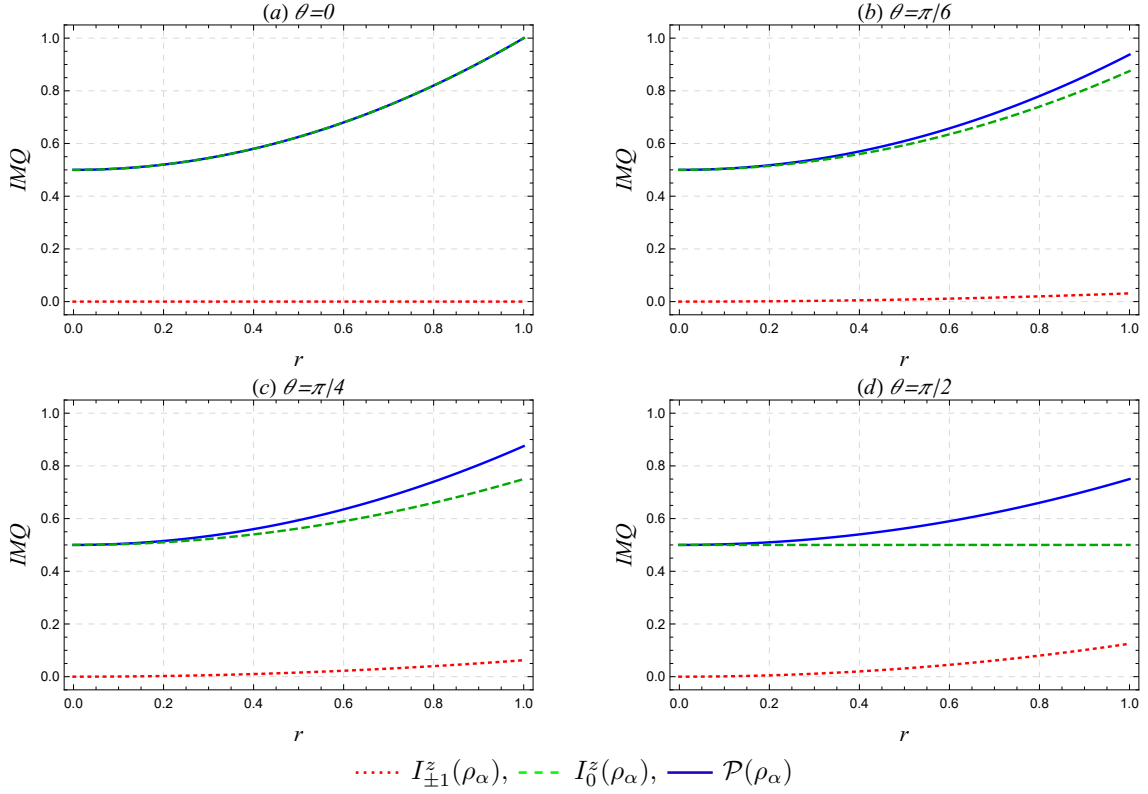


Figura 12 – Gráficos da intensidade de múltiplo *quantum* (IMQ),  $I_m^z(\rho_\alpha)$  [veja Eqs. (6.42) e (6.43)], e pureza quântica,  $\mathcal{P}(\rho_\alpha)$  [veja Eq. (6.37)], em função do parâmetro de mistura  $0 \leq r \leq 1$ , respectivos a estados de 1-qubit sob ação canal de atenuação de fase. As coerências são avaliadas em relação a base de autoestados do observável  $(1/2)\sigma_z$ , e o parâmetro de decoerência é  $\alpha = 0.5$ . O estado inicial do sistema é dado por um estado de 1-qubit em que: (a)  $\theta = 0$ , (b)  $\theta = \pi/6$ , (c)  $\theta = \pi/4$ , (d)  $\theta = \pi/2$ . Fonte: Elaborada pelo autor.

não-unitária, tal que  $I_0^z(\rho_\alpha)$  e  $\mathcal{P}(\rho_\alpha)$  crescem de forma quadrática com o grau de mistura  $r$ . As Figs. 12(b) e 12(c) mostram que os IMQs e a pureza escalam quadraticamente com  $r$ . A Fig. 12(d) exibe o caso  $\theta = \pi/2$ , onde  $I_0^z(\rho_\alpha) = 1/2$ ,  $I_{\pm 1}^y(\rho_\alpha) = (r^2/4)(1 - \alpha)$ , e  $\mathcal{P}(\rho_\alpha) = (1/2)[1 + r^2(1 - \alpha)]$ , tal que temos estados com coerência não-nula suscetíveis aos efeitos de decoerência.

### 6.5.2 IMQs e dinâmica de atenuação de amplitude

Nesta subseção, vamos investigar a decomposição de ordens de coerência em sistemas de dois níveis cuja dinâmica é dada em termos do mapa de atenuação de amplitude. Em termos da representação operador-soma, o estado evoluído é dado por  $\rho_\alpha = \sum_{j=0,1} K_j \rho K_j^\dagger$ , onde os operadores de Kraus do mapa de atenuação de amplitude são  $K_0 = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-\alpha}|1\rangle\langle 1|$ , e  $K_1 = \sqrt{\alpha}|0\rangle\langle 1|$ , sendo  $\alpha$  o parâmetro de decoerência. Os detalhes da dinâmica não-unitária deste mapa foram outrora discutidos na Sec. 5.2, Capítulo 5. Desta forma, omitiremos detalhes no intuito de evitar repetições. A pureza deste estado quântico é dada por

$$\mathcal{P}(\rho_\alpha) = \frac{1}{4} \left\{ 2 + 2\alpha^2 + r(1 - \alpha) [(2 - \alpha)r + \alpha (4 \cos \theta - r \cos(2\theta))] \right\}. \quad (6.44)$$

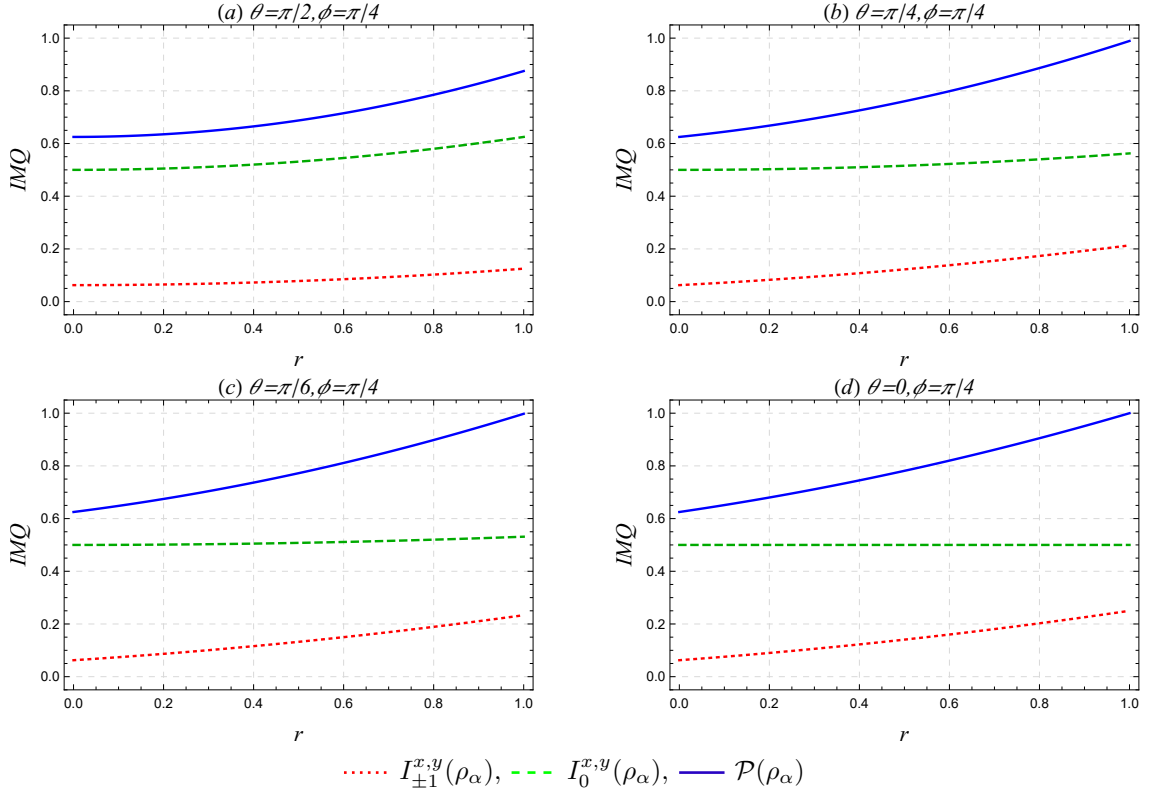


Figura 13 – Gráficos da intensidade de múltiplo *quantum* (IMQ),  $I_m^{x,y}(\rho_\alpha)$  [veja Eqs. (6.45), (6.46), (6.47) e (6.48)], e pureza quântica,  $\mathcal{P}(\rho_\alpha)$  [veja Eq. (6.44)], em função do parâmetro de mistura  $0 \leq r \leq 1$ , respectivos a estados de 1-qubit sob ação canal de atenuação de amplitude. As coerências são avaliadas em relação a base de autoestados do observável  $(1/2)\sigma_{x,y}$ , e o parâmetro de decoerência é  $\alpha = 0.5$ . O estado inicial do sistema é dado por um estado de 1-qubit em que  $\phi = \pi/4$ , sendo o ângulo polar: (a)  $\theta = \pi/2$ , (b)  $\theta = \pi/4$ , (c)  $\theta = \pi/6$ , (d)  $\theta = 0$ . Fonte: Elaborada pelo autor.

Por sua vez, a pureza quântica na Eq. (6.44) é função do grau de mistura  $r$ , do ângulo azimutal  $\theta$ , bem como do parâmetro de decoerência  $\alpha$ .

Em seguida, discutiremos os IMQs respectivos às ordens  $m = 0$  e  $m = \pm 1$ , para diferentes escolhas da base de referência na decomposição em ordens de coerência. Em primeiro lugar, fixaremos a base de referência  $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$  formada pelos autoestados do observável de spin  $(1/2)\sigma_x$ , onde  $|\pm\rangle_x = (1/\sqrt{2})(|0\rangle \pm |1\rangle)$ , os quais correspondem aos autovalores  $\lambda_\pm = \pm 1/2$ . Neste caso, obtemos os IMQs a seguir

$$I_0^x(\rho_\alpha) = \frac{1}{2} \left[ 1 + (1 - \alpha)r^2 \sin^2\theta \cos^2\phi \right], \quad (6.45)$$

e

$$I_{\pm 1}^x(\rho_\alpha) = \frac{1}{4} \left[ (\alpha + (1 - \alpha)r \cos\theta)^2 + (1 - \alpha)r^2 \sin^2\theta \sin^2\phi \right]. \quad (6.46)$$

Em seguida, tomamos a base de referência  $\{|+\rangle_y, |-\rangle_y\}$  formada pelos autoestados do observável de spin  $(1/2)\sigma_y$ , onde  $|\pm\rangle_y = (1/\sqrt{2})(|0\rangle \pm i|1\rangle)$ , os quais correspondem aos autovalores  $\lambda_\pm = \pm 1/2$ . Para esta base de referência, obtemos os IMQs na forma

$$I_0^y(\rho_\alpha) = \frac{1}{2} \left[ 1 + (1 - \alpha)r^2 \sin^2\theta \sin^2\phi \right], \quad (6.47)$$

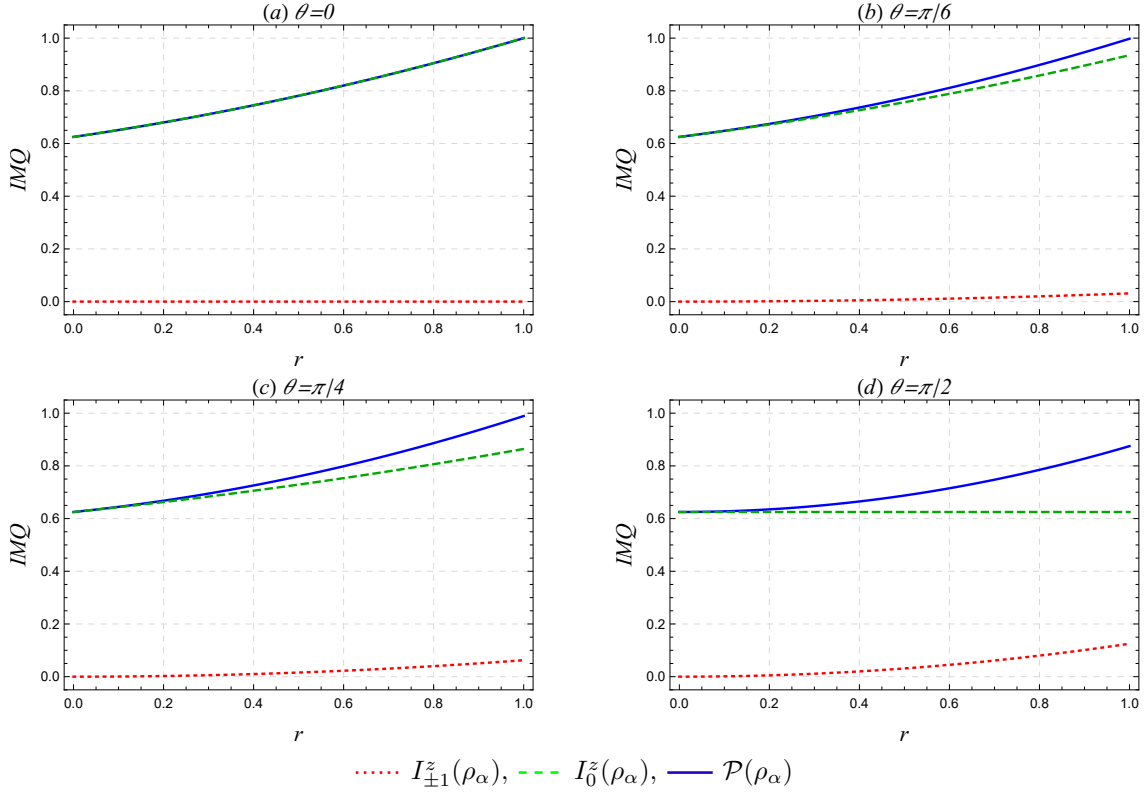


Figura 14 – Gráficos da intensidade de múltiplo *quantum* (IMQ),  $I_m^z(\rho_\alpha)$  [veja Eqs. (6.49) e (6.50)], e pureza quântica,  $\mathcal{P}(\rho_\alpha)$  [veja Eq. (6.44)], em função do parâmetro de mistura  $0 \leq r \leq 1$ , respectivos a estados de 1-qubit sob ação canal de atenuação de amplitude. As coerências são avaliadas em relação a base de autoestados do observável  $(1/2)\sigma_z$ , e o parâmetro de decoerência é  $\alpha = 0.5$ . O estado inicial do sistema é dado por um estado de 1-qubit em que: (a)  $\theta = 0$ , (b)  $\theta = \pi/6$ , (c)  $\theta = \pi/4$ , (d)  $\theta = \pi/2$ . Fonte: Elaborada pelo autor.

e

$$I_{\pm 1}^y(\rho_\alpha) = \frac{1}{4} \left[ (\alpha + (1 - \alpha) r \cos \theta)^2 + (1 - \alpha) r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi \right]. \quad (6.48)$$

As Eqs. (6.45), (6.46), (6.47) e (6.48) revelam que os IMQs  $I_{0,\pm 1}^x(\rho_\alpha)$  e  $I_{0,\pm 1}^y(\rho_\alpha)$  diferem por um fator de fase no ângulo  $\phi$ . Neste caso, podemos mapear os resultados por meio da relação  $\phi \rightarrow \phi + \pi/2$ . Em especial, fixando  $\phi = \pi/4$ , segue que  $I_0^x(\rho_\alpha) = I_0^y(\rho_\alpha)$  e  $I_{\pm 1}^x(\rho_\alpha) = I_{\pm 1}^y(\rho_\alpha)$ . Na Fig. 13, ilustramos os gráficos de  $I_0^{x,y}(\rho)$  [veja Eqs. (6.45) e (6.47)],  $I_{\pm 1}^{x,y}(\rho)$  [veja Eqs. (6.46) e (6.48)], e  $\mathcal{P}(\rho_\alpha)$  [veja Eq. (6.44)], em função de  $r$ , para diferentes valores do ângulo azimutal  $\theta$ , no regime  $\phi = \pi/4$ . O parâmetro de decoerência é  $\alpha = 0.5$ . Em todos os painéis, percebe-se que os IMQs e a pureza variam quadraticamente em função de  $r$ . Os valores de  $\theta$  estão indicados em ordem decrescente no intuito de selecionar estados de 1-qubit a partir do plano  $xy$  ( $\theta = \pi/2$ ), até o eixo  $z$  ( $\theta = 0$ ).

Por fim, escolhemos a base de referência  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  formada pelos autoestados do observável de spin  $(1/2)\sigma_z$ , os quais correspondem aos autovalores  $\lambda_0 = 1/2$  e  $\lambda_1 = -1/2$ .

Em relação a esta base, obtemos os IMQs na forma

$$I_0^z(\rho_\alpha) = \frac{1}{2} \left[ 1 + (\alpha + (1 - \alpha)r \cos \theta)^2 \right] , \quad (6.49)$$

$$I_{\pm 1}^z(\rho_\alpha) = \frac{1}{4}(1 - \alpha)r^2 \sin^2 \theta . \quad (6.50)$$

A Fig. 14 exibe os gráficos de  $I_0^z(\rho_\alpha)$  [veja Eq. (6.49)],  $I_{\pm 1}^z(\rho_\alpha)$  [veja Eq. (6.50)], e  $\mathcal{P}(\rho_\alpha)$  [veja Eq. (6.44)], em função do parâmetro de mistura  $0 \leq r \leq 1$ , para diferentes valores do ângulo azimutal  $\theta$ . O parâmetro de decoerência é  $\alpha = 0.5$ . A Fig. 14(a) ilustra o caso  $\theta = 0$ , em que  $I_0^z(\rho_\alpha) = \mathcal{P}(\rho_\alpha) = (1/2)[1 + (\alpha + (1 - \alpha)r)^2]$ , e  $I_{\pm 1}^z(\rho_\alpha) = 0$ . Neste regime, segue que  $I_0^z(\rho_\alpha)$  e  $\mathcal{P}(\rho_\alpha)$  crescem de forma quadrática com o grau de mistura  $r$ . As Figs. 14(b) e 14(c) mostram que os IMQs e a pureza variam quadraticamente com  $r$ . A Fig. 14(d) exibe o caso  $\theta = \pi/2$ , onde  $I_0^z(\rho_\alpha) = (1/2)(1 + \alpha^2)$ ,  $I_{\pm 1}^z(\rho_\alpha) = (r^2/4)(1 - \alpha)$ , e  $\mathcal{P}(\rho_\alpha) = (1/2)[1 + \alpha^2 + r^2(1 - \alpha)]$ , tal que temos estados com coerência não-nula suscetíveis aos efeitos de decoerência.



## 7 Coerência de sistemas quânticos abertos bipartido

Nesse capítulo, ilustraremos a caracterização da coerência de estados de 2-qubits em sistemas quânticos abertos. Em especial, a análise tem como ponto de partida estados Bell-diagonais de 2-qubits, os quais podem ser puros ou mistos, emaranhados ou separáveis. Na Sec. 7.1, exploramos aspectos físicos gerais destes estados. Na Sec. 7.2, investigamos a coerência quântica do par de qubits interagindo com um reservatório coletivo de modos do campo de radiação, e cuja dinâmica reduzida é modelada pelo mapa de defasagem. Na Sec. 7.3, estudamos a coerência quântica de um par de qubits que interage individualmente com reservatórios idênticos, e cuja evolução é descrita em termos efetivos pelo mapa de atenuação de amplitude. A Sec. 7.1 exibe uma revisão de bibliografia, enquanto as Secs. 7.2 e 7.3 contêm resultados obtidos ao longo do trabalho de pesquisa.

### 7.1 O estado Bell-diagonal de 2-qubits

Nesta seção, discutiremos as propriedades de estados Bell-diagonais em sistemas quânticos bipartidos de 2-qubits em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  de dimensão  $d_{AB} = \dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) = 4$ , sendo  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$  espaços vetoriais relativos a sistemas de dois níveis em que  $d_A = \dim(\mathcal{H}_A) = 2$  e  $d_B = \dim(\mathcal{H}_B) = 2$ , respectivamente. Em especial, escolhemos a classe de estados do tipo Bell-diagonal de 2-qubits, cuja matriz densidade é dada por<sup>1</sup>

$$\rho_{BD} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + c_3 & 0 & 0 & c_1 - c_2 \\ 0 & 1 - c_3 & c_1 + c_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & 1 - c_3 & 0 \\ c_1 - c_2 & 0 & 0 & 1 + c_3 \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

onde  $\{c_1, c_2, c_3\}$  são coeficientes reais, tal que  $c_l \in [-1, 1]$  para todo  $l = \{1, 2, 3\}$ . De forma geral, pode-se mostrar que a matriz densidade na Eq. (7.1) (i) é Hermitiana,  $\rho_{BD}^\dagger = \rho_{BD}$ ; (ii) é positiva semi-definida,  $\langle \psi | \rho_{BD} | \psi \rangle \geq 0$  para todo  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ; (iii) possui traço igual à unidade,  $\text{Tr}(\rho_{BD}) = 1$ . Neste contexto, o estado quântico exibe decomposição espectral  $\rho_{BD} = \sum_{s=\pm} (\lambda_{\Psi_s} |\Psi_s\rangle \langle \Psi_s| + \lambda_{\Phi_s} |\Phi_s\rangle \langle \Phi_s|)$ , onde os autovalores têm a forma

$$\lambda_{\Psi_{\pm}} = \frac{1}{4} (1 \mp c_1 \mp c_2 - c_3), \quad (7.2)$$

$$\lambda_{\Phi_{\pm}} = \frac{1}{4} (1 \mp c_1 \pm c_2 + c_3), \quad (7.3)$$

<sup>1</sup> Pode-se mostrar que o estado Bell-diagonal de 2-qubits também exibe a representação  $(1/4) \left( \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \sum_{l=1}^3 c_l \sigma_l \otimes \sigma_l \right)$ , onde  $\sigma_1 = \sigma_x$ ,  $\sigma_2 = \sigma_y$ , e  $\sigma_3 = \sigma_z$  são as matrizes de Pauli usuais.

onde  $0 \leq \lambda_{\Psi_{\pm}} \leq 1$ ,  $0 \leq \lambda_{\Phi_{\pm}} \leq 1$ ,  $\sum_{s=\pm}(\lambda_{\Psi_s} + \lambda_{\Phi_s}) = 1$ , e os respectivos autoestados normalizados são dados por

$$|\Psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle \pm |1,1\rangle) , \quad (7.4)$$

$$|\Phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle \pm |1,0\rangle) , \quad (7.5)$$

onde  $\langle\Psi_j|\Psi_l\rangle = \delta_{jl}$ ,  $\langle\Phi_j|\Phi_l\rangle = \delta_{jl}$ , e  $\sum_{s=\pm}(|\Psi_s\rangle\langle\Psi_s| + |\Phi_s\rangle\langle\Phi_s|) = \mathbb{I}_4$ . O conjunto de vetores  $\{|\Psi_+\rangle, |\Psi_-\rangle, |\Phi_+\rangle, |\Phi_-\rangle\}$  define uma base no espaço de Hilbert do sistema de 2-qubits, a qual é conhecida como base de Bell.

No espaço de parâmetros tridimensional definido pelos coeficientes  $\{c_1, c_2, c_3\}$ , pode-se verificar que o conjunto de estados Bell-diagonais compõe um tetraedro centrado na origem  $\{0,0,0\}$ , e com vértices  $\{-1, -1, -1\}$ ,  $\{-1, 1, 1\}$ ,  $\{1, -1, 1\}$ , e  $\{1, 1, -1\}$ . Por sua vez, a classe de estados Bell-diagonais inclui estados separáveis e emaranhados, sobretudo a partir da escolha dos coeficientes  $\{c_1, c_2, c_3\}$ . Dentre as figuras de mérito dedicadas a análise de correlações quânticas em estados de 2-qubits, podemos destacar a concorrência<sup>2</sup> de um estado  $\rho$  definida na forma [86]

$$\text{Conc}(\rho) := \max(0, e_1 - e_2 - e_3 - e_4) , \quad (7.6)$$

onde  $e_1 \geq e_2 \geq e_3 \geq e_4$  são autovalores, ordenados em ordem decrescente, da matriz a seguir

$$M = \sqrt{\sqrt{\rho}(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)\sqrt{\rho}} . \quad (7.7)$$

Neste contexto, a concorrência  $\text{Conc}(\rho_{BD})$  do estado Bell-diagonal é obtida a partir da combinação da Eq. (7.6) e o conjunto de autovalores  $(1/4)|1 - c_1 + c_2 + c_3|$ ,  $(1/4)|1 + c_1 + c_2 - c_3|$ ,  $(1/4)|1 + c_1 - c_2 + c_3|$ ,  $(1/4)|1 - c_1 - c_2 - c_3|$ .

Em seguida, ilustraremos a caracterização das coerências de sistemas quânticos abertos para estados de 2-qubits. Por simplicidade, vamos considerar que o sistema físico tem estado inicial dado pelo estado Bell-diagonal na Eq. (7.1). Neste cenário, vamos abordar o papel dos recursos quânticos frente a decoerência induzida por processos físicos de defasagem e atenuação de amplitude.

## 7.2 Dinâmica de defasagem e estados de 2-qubits

Considere um sistema quântico de 2-qubits,  $A$  e  $B$ , os quais estão separados espacialmente por uma distância  $D$  finita e não-nula. Os qubits estão acoplados a um reservatório bosônico de frequências em temperatura zero, o qual é comum a ambos sistemas de dois níveis [87]. A Fig. 15 ilustra de forma esquemática o sistema físico sob análise. Por sua vez, a interação com os graus de liberdade do ambiente induz um mecanismo de

<sup>2</sup> Concorrência, do inglês *entanglement concurrence*.

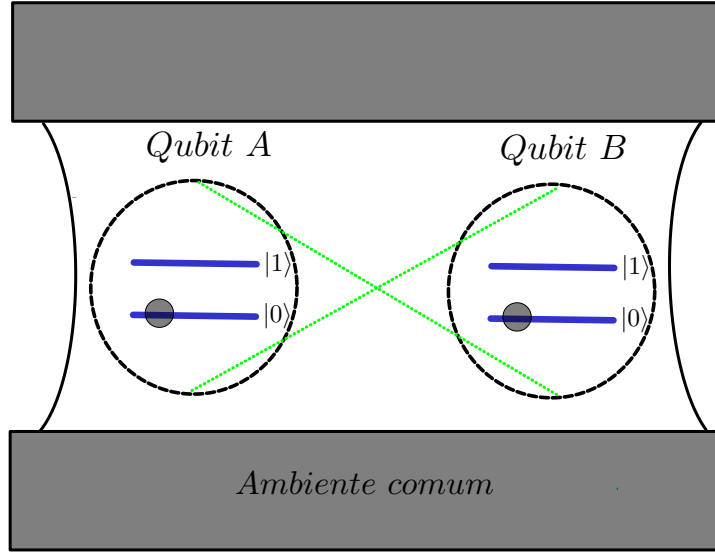


Figura 15 – Descrição pictórica de um sistema físico de 2-qubits interagindo de forma coletiva com um reservatório de modos de frequência, o qual induz uma interação efetiva entre os qubits. Em sistemas fotônicos, por exemplo, o ambiente é descrito por uma cavidade óptica que condiciona modos de frequência do campo de eletromagnético. Por sua vez, os qubits podem ser realizados a partir de níveis eletrônicos de nuvens atômicas imersas nesta cavidade. A dinâmica reduzida do par de qubits é descrita pelo mapa de defasagem. Fonte: Imagem adaptada da Ref. [2]

defasagem no sistema de qubits, cuja dinâmica é exatamente solúvel [88]. O Hamiltoniano do sistema composto é dado por [89]

$$H_{SE} = \omega_0^A \sigma_z^A + \omega_0^B \sigma_z^B + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_{\alpha \in \{A,B\}} \sum_k \sigma_z^\alpha (g_k^\alpha a_k^\dagger + g_k^{\alpha*} a_k) , \quad (7.8)$$

onde  $\sigma_z^A = \sigma_z^A \otimes \mathbb{I}_B$ ,  $\sigma_z^B = \mathbb{I}_A \otimes \sigma_z^B$ , e fixamos  $\hbar = 1$ . Os dois primeiros termos no lado direito da Eq. (7.8) descrevem as energias dos qubits, onde  $\omega_0^A$  e  $\omega_0^B$  são as frequências relativas aos qubits  $A$  e  $B$ , respectivamente. Por sua vez, o terceiro termo modela a energia do reservatório, onde  $\omega_k$  é frequência do  $k$ -ésimo modo do reservatório bosônico, enquanto  $a_k^\dagger$  e  $a_k$  são operadores de criação e aniquilação respectivos a este modo de radiação. Por fim, o último termo descreve a interação entre os qubits e os graus de liberdade do ambiente, sendo  $g_k^{A,B}$  as constantes de acoplamento entre o  $k$ -ésimo modo de radiação e o par de qubits [64].

Pode-se mostrar que a dinâmica não-unitária do sistema de dois qubits é dada em termos da matriz densidade reduzida a seguir<sup>3</sup>

$$\rho(t) = \text{Tr}_E[U_{SE}(t)(\rho(0) \otimes |\emptyset\rangle\langle\emptyset|)U_{SE}^\dagger(t)] , \quad (7.9)$$

<sup>3</sup> É possível mostrar que a matriz densidade na Eq. (7.9) satisfaz uma equação mestra na forma de Lindblad, ou seja, explorando o regime de aproximação de Born-Markov, acoplamento fraco e aproximação secular. Neste contexto, a dinâmica reduzida do par de qubits será solução da equação diferencial  $d\rho(t)/dt = (1/2)(\gamma_1(t) + \gamma_2(t))\mathcal{L}_+[\rho(t)] + (1/2)(\gamma_1(t) - \gamma_2(t))\mathcal{L}_-[\rho(t)]$ , onde  $\mathcal{L}_\pm[\bullet] := (\sigma_z^A \pm \sigma_z^B) \bullet (\sigma_z^A \pm \sigma_z^B) - (1/2)\{(\sigma_z^A \pm \sigma_z^B)(\sigma_z^A \pm \sigma_z^B), \bullet\}$  são super-operadores de Liouville, e  $\gamma_{1,2}(t)$  são taxas de decaimento do sistema quântico devido ao acoplamento com o reservatório bosônico [87, 90].

onde  $\text{Tr}_E[\bullet]$  indica o traço parcial sobre os graus de liberdade do ambiente, e  $U_{SE}(t) = e^{-itH_{SE}}$  é o operador de evolução que leva em conta graus de liberdade dos qubits e do reservatório, o qual tem estado inicial dado pelo vácuo  $|\emptyset\rangle$  de modos de ocupação. Na Eq. (7.9), segue que  $\rho(0)$  é o estado inicial do par de qubits, o qual pode ser puro ou misto, emaranhado ou separável. É possível mostrar que a matriz densidade reduzida na Eq. (7.29) se escreve em termos da representação operador-soma a seguir

$$\rho(t) = \sum_{j=1}^5 K_j \rho(0) K_j^\dagger, \quad (7.10)$$

onde  $K_j = \langle j|U_{SE}(t)|\emptyset\rangle$  são operadores de Kraus dados por [91]

$$K_1 = (e^{-\gamma_-(t)} - 1)\sqrt{1 + e^{-\gamma_-(t)}} |0, 0\rangle\langle 0, 0|, \quad (7.11)$$

$$K_2 = (e^{-\gamma_+(t)} - 1)\sqrt{1 + e^{-\gamma_+(t)}} |0, 1\rangle\langle 0, 1|, \quad (7.12)$$

$$K_3 = \sqrt{1 - e^{-\gamma_-(t)}} (|1, 1\rangle\langle 1, 1| - e^{-\gamma_-(t)} |0, 0\rangle\langle 0, 0|), \quad (7.13)$$

$$K_4 = \sqrt{1 - e^{-\gamma_+(t)}} (|1, 0\rangle\langle 1, 0| - e^{-\gamma_+(t)} |0, 1\rangle\langle 0, 1|), \quad (7.14)$$

$$K_5 = e^{-\frac{\gamma_-(t)}{2}} \sum_{j=0,1} |j, j\rangle\langle j, j| + e^{-\frac{\gamma_+(t)}{2}} \sum_{\substack{j,l=0,1 \\ j \neq l}} |j, l\rangle\langle j, l|. \quad (7.15)$$

Os operadores de Kraus satisfazem a relação algébrica  $\sum_{j=1}^5 K_j^\dagger K_j = \sum_{j=1}^5 K_j K_j^\dagger = \mathbb{I}_4$ , tal que a evolução não-unitária perfaz um canal quântico unital [1]. Por sua vez, segue que  $\gamma_\pm(t)$  são chamadas funções de decoerência coletivas dadas por [92]

$$\gamma_\pm(t) = 8 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2} J(\omega) [1 - \cos(\omega t)] [1 \pm \cos(\omega t_s)], \quad (7.16)$$

onde  $J(\omega)$  é a densidade espectral do reservatório, a qual revela como a intensidade da interação varia em termos das frequências dos modos do reservatório [87, 88, 93]. Por sua vez, segue que  $t_s$  define uma escala típica de tempo na qual ocorre troca de informação entre os qubits por meio da emissão de um pulso de frequência  $\omega$ . É sabido que  $t_s$  é proporcional a separação  $D$  entre os qubits e inversamente proporcional a frequência  $\omega$  do pulso, ou seja,  $t_s \sim D/\omega$ . Em especial, o limite  $t_s \gg 1$  ( $D \gg 1$ ) descreve de forma efetiva a física de qubits acoplados a ambientes independentes [92].

As funções de correlação coletivas na Eq. (7.16) satisfazem os vínculos  $d\gamma_\pm(t)/dt = 4[\gamma_1(t) \pm \gamma_2(t)]$ , onde  $\gamma_{1,2}(t)$  são taxas de decaimento efetivas do sistema quântico devido ao acoplamento com o ambiente. Por um lado, sabe-se que  $\gamma_1(t)$  fornece a escala de tempo característica do processo de defasagem de cada qubit devido a interação com o ambiente de frequências. Por outro lado, segue que  $\gamma_2(t)$  codifica um tipo de correção efetiva a este processo, sobretudo em virtude da existência de correlações entre os qubits que são mediadas pelo reservatório que é comum a ambos.

De forma geral, a densidade espectral é modelada na forma [91, 94]

$$J(\omega) = \omega_c^{1-q} \omega^q e^{-\omega/\omega_c}, \quad (7.17)$$

onde  $\omega_c$  é a frequência de corte, e  $q > 0$  representa o chamado parâmetro de ohmicidade. Neste contexto, o reservatório pode ser classificado dentre três tipos de regime de interação [91, 94]: (i) sub-ôhmico ( $0 < q < 1$ ); (ii) ôhmico ( $q = 1$ ); (iii) super-ôhmico ( $q > 1$ ). Em particular, este trabalho tem como recorte o regime de interação ôhmico ( $q = 1$ ) entre os qubits e o reservatório bosônico, o qual pode ser simulado em sistemas de átomos ultrafrios aprisionados [89]. Neste caso, a densidade espectral na Eq. (7.17) reduz-se a  $J(\omega) = \omega e^{-\omega/\omega_c}$ . Portanto, substituindo esta expressão na Eq. (7.16), e em seguida avaliando a integral no espaço de frequências, obtemos as funções de decoerência coletivas no regime ôhmico na forma [91]

$$\gamma_{\pm}(t) = 4 \left\{ \ln(1 + \omega_c^2 t^2) \mp \ln(1 + y^2) \pm \frac{1}{2} \ln [1 + 2(\omega_c^2 t^2 + y^2) + (\omega_c^2 t^2 - y^2)^2] \right\}, \quad (7.18)$$

onde definimos o parâmetro adimensional

$$y = \omega_c t_s. \quad (7.19)$$

Pode-se verificar que  $\gamma_{\pm}(0) = 0$  para todo  $y \geq 0$ . Por fim, as funções de decoerência na Eq. (7.18) são positivas em todo espectro de frequências dos modos do reservatório, ou seja, segue que  $\gamma_+(t) > 0$  e  $\gamma_-(t) > 0$  para todo  $t \geq 0$  e  $y \geq 0$ .

Em face do sistema quântico aberto em questão, investigaremos suas propriedades dinâmicas levando em conta a representação operador-soma na Eq. (7.10), bem como as taxas de decaimento na Eq. (7.18) oriundas da interação com reservatório coletivo. Por hipótese, o estado inicial do par de qubits será dado pelo estado Bell-diagonal na Eq. (7.1), ou seja,  $\rho(0) = \rho_{BD}$ , o qual pode exibir correlações quânticas. O estado instantâneo do sistema de dois qubits é obtido pela Eq. (7.10), o qual tem a forma explícita dada por

$$\rho(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + c_3 & 0 & 0 & e^{-2\gamma_-(t)}(c_1 - c_2) \\ 0 & 1 - c_3 & e^{-2\gamma_+(t)}(c_1 + c_2) & 0 \\ 0 & e^{-2\gamma_+(t)}(c_1 + c_2) & 1 - c_3 & 0 \\ e^{-2\gamma_-(t)}(c_1 - c_2) & 0 & 0 & 1 + c_3 \end{pmatrix}. \quad (7.20)$$

A matriz densidade na Eq. (7.20) é Hermitiana,  $\rho^\dagger(t) = \rho(t)$ , positiva semi-definida,  $\rho(t) \geq 0$ , e tem traço igual à unidade,  $\text{Tr}[\rho(t)] = 1$ , para todo  $t \geq 0$ . No regime de tempos longos, ou seja,  $\omega_c t \gg 1$ , segue  $\rho(t) \approx (1/4)[\mathbb{I}_4 + c_3(\sigma_z \otimes \sigma_z)]$  tal que o sistema será descrito por um estado Bell-diagonal de pureza  $(1/4)(1 + c_3^2)$ . A interação ruidosa entre os qubits e o reservatório coletivo se reflete no decaimento exponencial dos elementos não-diagonais da matriz densidade, enquanto as populações do estado quântico são preservadas.

### 7.2.1 A norma- $\ell_1$ de coerência

Em seguida, vamos discutir a caracterização da coerência do estado instantâneo  $\rho(t)$  na Eq. (7.20), investigando a norma- $\ell_1$  de coerência, ordens de coerência, e os

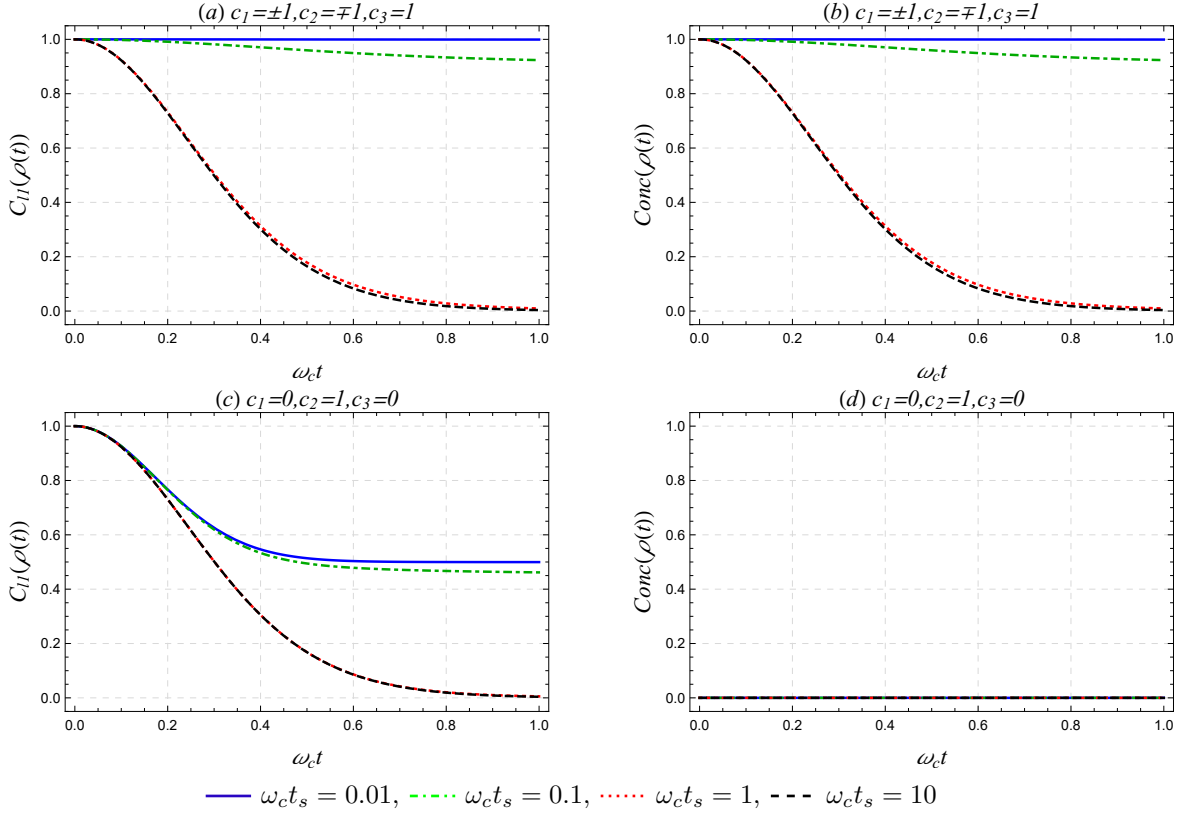


Figura 16 – Gráficos da norma- $\ell_1$  de coerência,  $C_{\ell_1}(\rho(t))$ , e concorrência de emaranhamento,  $\text{Conc}(\rho(t))$ , em função do parâmetro adimensional  $\omega_c t$ , para o estado reduzido  $\rho(t)$  da dinâmica de dois qubits em contato com um reservatório coletivo. O estado inicial do sistema é dado por um estado Bell-diagonal com coeficientes: (a, b)  $c_1 = \pm 1, c_2 = \mp 1, c_3 = 1$ , (c, d)  $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 1$ . Em cada painel, analisamos os casos  $\omega_c t_s = 0.01$  (curva sólida azul),  $\omega_c t_s = 0.1$  (curva traço-pontilhada verde),  $\omega_c t_s = 1$  (curva pontilhada vermelha),  $\omega_c t_s = 10$  (curva tracejada preta). Fonte: Elaborada pelo autor.

respectivos IMQs. Neste contexto, a base de estados de referência será dada pelo conjunto de autovetores do observável  $S_z = (1/2)(\sigma_z \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_2 \otimes \sigma_z)$ , o qual perfaz um tipo de magnetização coletiva de spin no sistema de dois qubits. Em detalhes, o operador  $S_z$  tem autovetores  $\{|0, 0\rangle, |0, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, 1\rangle\}$ , os quais relacionam-se aos autovalores  $\{1, 0, 0, -1\}$ . Em relação a esta base, segue que a norma- $\ell_1$  de coerência é dada por

$$C_{\ell_1}(\rho(t)) = \frac{(1+y^2)^8}{2(1+\omega_c^2 t^2)^8} \left\{ \frac{|c_1 - c_2| [(1 - \omega_c^2 t^2 + y^2)^2 + 4\omega_c^2 t^2]^4}{(1+y^2)^{16}} + \frac{|c_1 + c_2|}{[(1 - \omega_c^2 t^2 + y^2)^2 + 4\omega_c^2 t^2]^4} \right\}. \quad (7.21)$$

Note que o primeiro termo no lado direito da Eq. (7.21) anula-se para estados iniciais tais que  $c_1 = c_2$ . Por sua vez, segue que a segunda contribuição no lado direito da Eq. (7.21) será identicamente nula desde para estados Bell-diagonais tais que  $c_1 = -c_2$ . Este resultado revela que a norma- $\ell_1$  de coerência do estado instantâneo do sistema de qubits é independente do coeficiente  $c_3 \in [-1, 1]$  que caracteriza o estado Bell-diagonal do par de qubits. Na Fig. 16, ilustramos a simulação numérica da norma- $\ell_1$  de coerência  $C_{\ell_1}(\rho(t))$  [veja Eq. (7.21)], bem como investigamos o papel de correlações quânticas por

meio da concorrência de emaranhamento  $\text{Conc}(\rho(t))$  [veja Eqs. (7.6) e (7.7)], no sistema de qubits. Em especial, utilizamos os parâmetros adimensionais  $\omega_c t_s = 0.01$ ,  $\omega_c t_s = 0.1$ ,  $\omega_c t_s = 1$  e  $\omega_c t_s = 10$ .

As Figs. 16(a) e 16(b) exibem curvas de  $C_{\ell_1}(\rho(t))$  e  $\text{Conc}(\rho(t))$ , respectivamente, em função do parâmetro adimensional  $\omega_c t$ , tomando estados iniciais Bell-diagonais com coeficientes  $c_1 = \pm 1$ ,  $c_2 = \mp$  e  $c_3 = 1$ . Observe que o estado do par de qubits exibe valores máximos de coerência e emaranhamento no instante  $t = 0$ . No regime em que  $\omega_c t_s = 0.01$ , tem-se que estes valores permanecem fixos no intervalo  $\omega_c t \in [0, 1]$ , portanto revelando a robustez da coerência e emaranhamento do par de qubits frente a interação com o ambiente coletivo. Em resposta ao acréscimo no parâmetro  $\omega_c t_s$ , segue que coerência e emaranhamento decrescem monotonicamente ao longo da dinâmica do sistema. Na prática, tal decaimento é mais acentuado tomando os valores  $\omega_c t_s = 1$  e  $\omega_c t_s = 10$ .

As Figs. 16(c) e 16(d) exibem curvas de  $C_{\ell_1}(\rho(t))$  e  $\text{Conc}(\rho(t))$ , respectivamente, em função do parâmetro adimensional  $\omega_c t$ , tomando o estado inicial Bell-diagonal não-emaranhado com coeficientes  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$  e  $c_3 = 0$ . A Fig. 16(c) mostra que a norma- $\ell_1$  de coerência decresce monotonicamente ao longo da dinâmica, exibindo decaimentos acentuados em resposta ao aumento no valor do parâmetro  $\omega_c t_s$ . No regime de tempos longos da dinâmica, observe que  $C_{\ell_1}(\rho(t))$  exibe valores estacionários não-nulos para  $\omega_c t = 0.01$  e  $\omega_c t = 0.1$ . Por sua vez, a Fig. 16(d) mostra que o estado quântico é não-emaranhado para todo  $t \geq 0$ .

Por um lado, tomando  $\omega_c t_s = 0.01$  e  $\omega_c t_s = 0.1$ , observe que o decréscimo na coerência do estado emaranhado [Fig. 16(a)] é menor se comparado ao estado separável [Fig. 16(c)]. Isto significa que o estado separável é mais suscetível aos efeitos de decoerência induzidos pela interação com o reservatório no regime  $\omega_c t_s \ll 1$ . Por outro lado, tomando  $\omega_c t_s = 1$  e  $\omega_c t_s = 10$ , observa-se que  $C_{\ell_1}(\rho(t))$  exibe o mesmo comportamento qualitativo para ambos estados separável e emaranhado. De fato, no regime em que  $\omega_c t_s \gg 1$  ( $t_s \gg 1$  e  $D \gg 1$ ) teremos os qubits suficientemente afastados. Neste caso, o sistema descreve de forma efetiva a física de dois qubits interagindo com reservatórios individuais, o que explica a similaridade dos resultados neste regime.

### 7.2.2 Ordens de coerência e IMQs

Em seguida, investigaremos as ordens de coerência e IMQs do estado instantâneo na Eq. (7.20), cuja decomposição em blocos de ordens de coerência na base de autoestados do observável  $(1/2)(\sigma_z \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_2 \otimes \sigma_z)$  é dada por

$$\rho(t) = \sum_{m=-2, \dots, +2} \rho_m(t) = \rho_{-2}(t) + \rho_0(t) + \rho_2(t) , \quad (7.22)$$

onde

$$\rho_2(t) = \frac{1}{4}e^{-2\gamma_-(t)}(c_1 - c_2)|0,0\rangle\langle 1,1|, \quad \rho_{-2}(t) = \rho_2^\dagger(t), \quad (7.23)$$

e

$$\begin{aligned} \rho_0(t) = & \frac{1}{4}(1 + c_3) \sum_{j=0,1} |j,j\rangle\langle j,j| + \frac{1}{4}(1 - c_3)(|0,1\rangle\langle 0,1| + |1,0\rangle\langle 1,0|) \\ & + \frac{1}{4}e^{-2\gamma_+(t)}(c_1 + c_2)(|0,1\rangle\langle 1,0| + |1,0\rangle\langle 0,1|). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Destacamos que o estado do sistema de qubits não exibe ordens de coerência  $m = \pm 1$ . Em seguida, calculamos os IMQs respectivos a cada ordem de coerência, obtendo os resultados

$$I_0(\rho(t)) = \frac{(1 + y^2)^{16}(c_1 + c_2)^2}{8(1 + \omega_c^2 t^2)^{16} [(1 - \omega_c^2 t^2 + y^2)^2 + 4\omega_c^2 t^2]^8} + \frac{(1 + c_3^2)}{4}, \quad (7.25)$$

e

$$I_{\pm 2}(\rho(t)) = \frac{(c_1 - c_2)^2 [(1 - \omega_c^2 t^2 + y^2)^2 + 4\omega_c^2 t^2]^8}{16(1 + \omega_c^2 t^2)^{16}(1 + y^2)^{16}}. \quad (7.26)$$

Observe que  $I_{\pm 1}(\rho(t)) = 0$ , pois a matriz densidade na Eq. (7.20) não exibe ordens de coerência relativas ao subespaço  $m = \pm 1$ . Em particular, o primeiro termo no lado direito da Eq. (7.25) será nulo para todo estado inicial Bell-diagonal em que  $c_1 = -c_2$ . Neste caso, o IMQ respectivo a ordem de coerência  $m = 0$  exibirá o valor constante  $(1 + c_3^2)/4$ . Por sua vez, a Eq. (7.26) revela que  $I_{\pm 2}(\rho(t)) = 0$  para todo estado inicial Bell-diagonal com coeficientes  $c_1 = c_2$ . Por fim, a pureza do estado quântico instantâneo na Eq. (7.20) é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\rho(t)) = & \frac{(1 + y^2)^{16}(c_1 + c_2)^2}{8(1 + \omega_c^2 t^2)^{16} [(1 - \omega_c^2 t^2 + y^2)^2 + 4\omega_c^2 t^2]^8} \\ & + \frac{(c_1 - c_2)^2 [(1 - \omega_c^2 t^2 + y^2)^2 + 4\omega_c^2 t^2]^8}{8(1 + \omega_c^2 t^2)^{16}(y^2 + 1)^{16}} + \frac{(1 + c_3^2)}{4}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Por meio das Eqs. (7.25) e (7.26), pode-se verificar que a soma dos IMQs de ordem  $m = 0$  e  $m = \pm 2$  recobra a pureza do estado quântico de dois qubits na Eq. (7.27), isto é,  $\mathcal{P}(\rho(t)) = I_{-2}(\rho(t)) + I_0(\rho(t)) + I_{+2}(\rho(t))$ . Desta forma, certificamos o vínculo entre a soma dos IMQs e a pureza para a dinâmica reduzida do sistema de dois qubits interagindo com o reservatório coletivo.

A Fig. 17 mostra os gráficos dos IMQs  $I_{0,\pm 2}(\rho(t))$  [Eqs. (7.25) e (7.26)], e pureza quântica  $\mathcal{P}(\rho(t))$  [Eq. (7.27)], em função do parâmetro adimensional  $\omega_c t$ , para o estado reduzido  $\rho(t)$  da dinâmica de dois qubits em contato com um reservatório coletivo [Eq. (7.20)]. Em cada painel, estabelecemos valores distintos do parâmetro  $\omega_c t_s$ , a saber,  $\omega_c t_s = 0.01$ ,  $\omega_c t_s = 0.1$ ,  $\omega_c t_s = 1$ ,  $\omega_c t_s = 10$ , respectivamente. O estado inicial do sistema é dado pelo estado Bell-diagonal emaranhado com coeficientes  $c_1 = \pm 1$ ,  $c_2 = \mp 1$ ,  $c_3 = 1$ . Em resposta a esta escolha, observe o IMQ respectivo a ordem de coerência  $m = 0$  exibe o



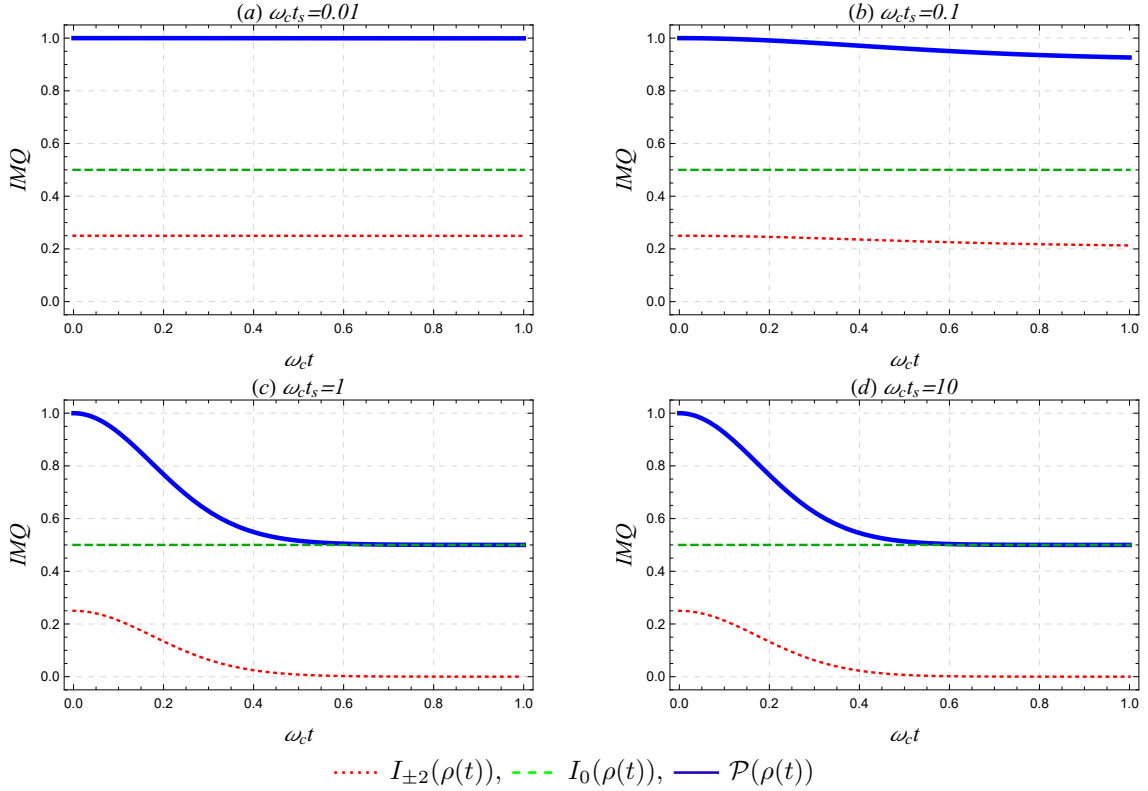


Figura 17 – Gráficos de IMQs,  $I_m(\rho(t))$ , e pureza quântica,  $\mathcal{P}(\rho(t))$ , em função do parâmetro adimensional  $\omega_c t$ , para o estado reduzido  $\rho(t)$  da dinâmica de dois qubits em contato com um reservatório coletivo, respectivos aos casos (a)  $\omega_c t_s = 0.01$ , (b)  $\omega_c t_s = 0.1$ , (c)  $\omega_c t_s = 1$ , (d)  $\omega_c t_s = 10$ . O estado inicial do sistema é dado pelo estado Bell-diagonal emaranhado com coeficientes  $c_1 = \pm 1$ ,  $c_2 = \mp 1$ ,  $c_3 = 1$  [veja Eq. (7.1)]. Fonte: Elaborada pelo autor.

valor constante  $I_0(\rho(t)) = (1 + c_3^2)/4 = 1/2$ , para todo  $\omega_c t_s$  e  $t \geq 0$ . Conforme ilustrado na Fig. 17(a), segue que  $I_{\pm 2}(\rho(t))$  e  $\mathcal{P}(\rho(t))$  permanecem constantes no regime  $\omega_c t_s = 0.01$ , para todo  $t \geq 0$ . Isto sinaliza que o reservatório não exerce papel preponderante sobre as coerências do estado de dois qubits no regime em que  $t_s \ll 1$ . Entretanto, as Fig. 17(b), 17(c) e 17(d) mostram que  $I_{\pm 2}(\rho(t))$  e  $\mathcal{P}(\rho(t))$  decrescem monotonicamente no tempo à medida que aumentamos o valor do parâmetro  $\omega_c t_s$ . Nos regimes  $\omega_c t_s = 1$  [Fig. 17(c)] e  $\omega_c t_s = 10$  [Fig. 17(d)], as curvas de  $I_{\pm 2}(\rho(t))$  e  $\mathcal{P}(\rho(t))$  têm o mesmo comportamento qualitativo ao longo da dinâmica. Em ambos casos, observe que os IMQs de ordem  $m = \pm 2$  anulam-se a partir de  $\omega_c t \approx 0.6$ . Neste instante, a pureza recobra o IMQ de ordem  $m = 0$  e exibe valor assintótico  $\mathcal{P}(\rho(t)) \approx 1/2$ . Isto significa que as coerências do estado quântico de dois qubits serão fortemente degradadas no regime de tempos longos da dinâmica. Este resultado é consistente com aquele mostrado na Fig. 16(a), onde a norma- $\ell_1$  de coerência se anula para tempos longos.

A Fig. 18 mostra os gráficos dos IMQs  $I_{0,\pm 2}(\rho(t))$  [Eqs. (7.25) e (7.26)], e pureza quântica  $\mathcal{P}(\rho(t))$  [Eq. (7.27)], em função do parâmetro adimensional  $\omega_c t$ , para o estado reduzido  $\rho(t)$  da dinâmica de dois qubits em contato com um reservatório coletivo [Eq. (7.20)]. Em cada painel, estabelecemos valores distintos do parâmetro  $\omega_c t_s$ , a saber,

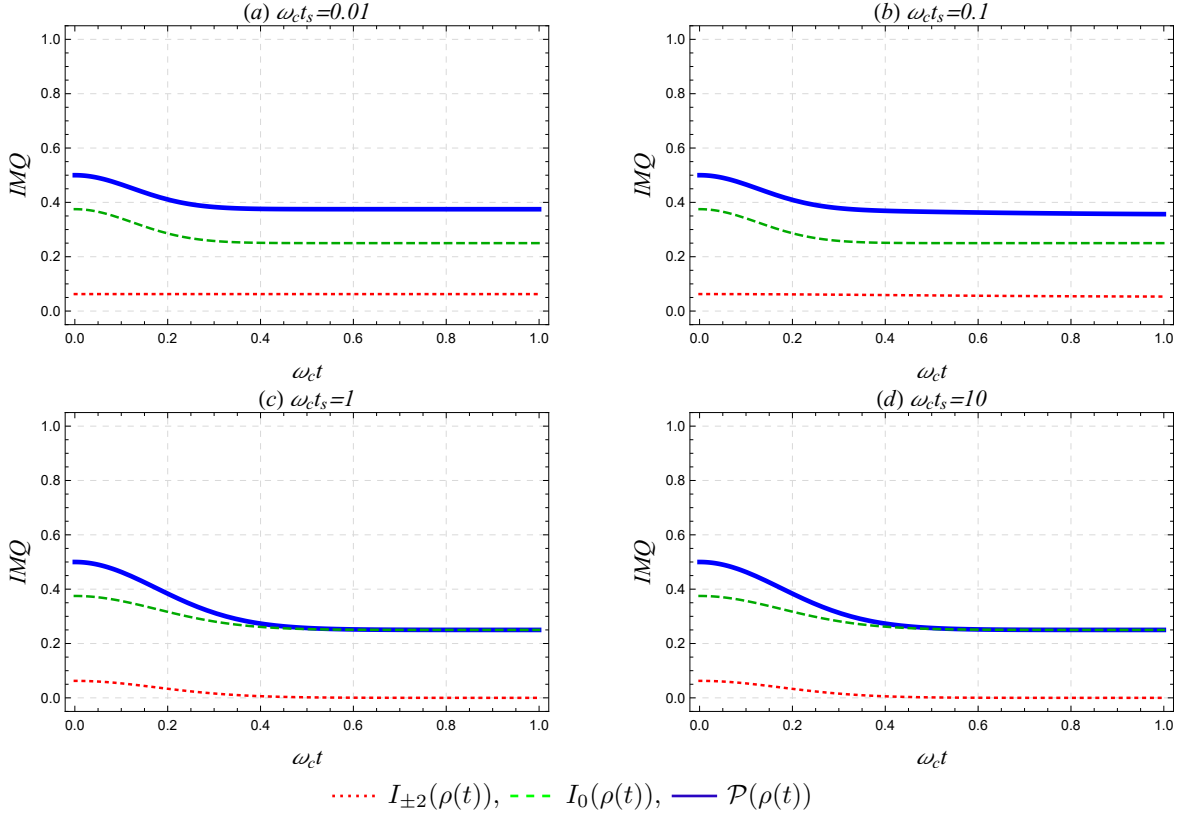


Figura 18 – Gráficos de IMQs,  $I_m(\rho(t))$ , e pureza quântica,  $\mathcal{P}(\rho(t))$ , em função do parâmetro adimensional  $\omega_c t$ , para o estado reduzido  $\rho(t)$  da dinâmica de dois qubits em contato com um reservatório coletivo, respectivos aos casos (a)  $\omega_c t_s = 0.01$ , (b)  $\omega_c t_s = 0.1$ , (c)  $\omega_c t_s = 1$ , (d)  $\omega_c t_s = 10$ . O estado inicial do sistema é dado pelo estado Bell-diagonal não-emaranhado com coeficientes  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = 0$  [veja Eq. (7.1)]. Fonte: Elaborada pelo autor.

$\omega_c t_s = 0.01$ ,  $\omega_c t_s = 0.1$ ,  $\omega_c t_s = 1$ ,  $\omega_c t_s = 10$ , respectivamente. O estado inicial do sistema é dado pelo estado Bell-diagonal não-emaranhado com coeficientes  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = \mp 1$ ,  $c_3 = 0$ . Os painéis mostram que os IMQs e a pureza quântica decrescem de forma monotônica no tempo em resposta ao acréscimo de  $\omega_c t_s$ . Por um lado, as Figs. 18(a) e 18(b) mostram que  $I_{\pm 2}(\rho(t))$  exibe valor constante não-nulo para  $\omega_c t_s = 0.01$  e  $\omega_c t_s = 0.1$ , respectivamente, para todo  $t \geq 0$ . Neste caso, observa-se que  $I_0(\rho(t))$  e  $\mathcal{P}(\rho(t))$  decrescem até atingir valores assintóticos constantes distintos. Este comportamento também é capturado pela norma- $\ell_1$  de coerência na Fig. 16(a), a qual assume valores estacionários para  $\omega_c t_s = 0.01$  e  $\omega_c t_s = 0.1$  por volta de  $\omega_c t \approx 0.6$ . Por outro lado, analisando os casos  $\omega_c t_s = 1$  e  $\omega_c t_s = 10$ , as Figs. 18(c) e 18(d) mostram que  $I_{\pm 2}(\rho(t))$  decresce monotonicamente até atingir valor zero para tempos longos da dinâmica. Neste regime, tem-se que  $I_0(\rho(t))$  e  $\mathcal{P}(\rho(t))$  decrescem até atingir os mesmos valores assintóticos, tal que  $I_0(\rho(t)) \approx \mathcal{P}(\rho(t))$  para  $\omega_c t \approx 0.5$ . Este resultado concorda com as curvas na Fig. 16(c) para  $\omega_c t_s = 1$  e  $\omega_c t_s = 10$ , em que a norma- $\ell_1$  de coerência se anula para tempos longos.

Em seguida, podemos comparar a contribuição de estados emaranhados na Fig. 17 e não-emaranhados na Fig. 18 para a dinâmica de coerências sistema quântico aberto. Note

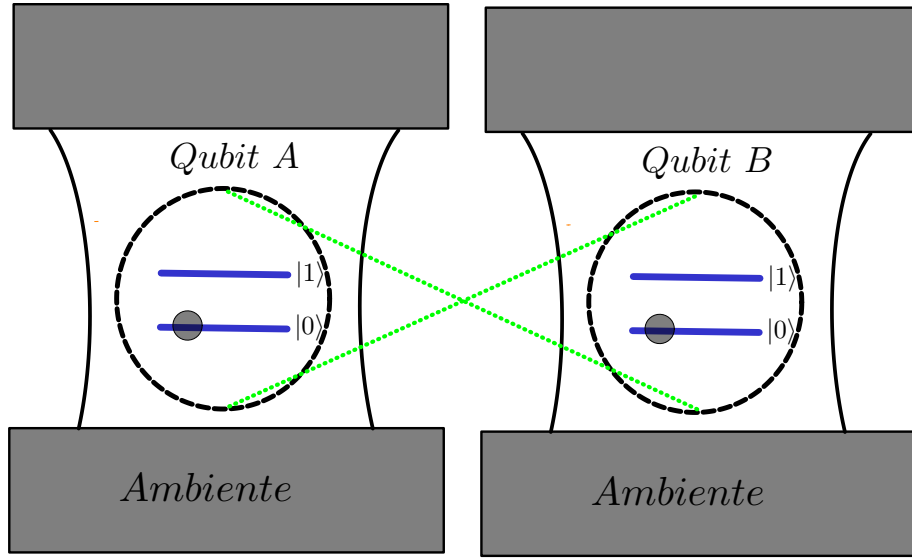


Figura 19 – Descrição pictórica de um sistema físico de 2-qubits interagindo com reservatórios individuais de modos de frequência. Por hipótese, o estado quântico do par de qubits exibe correlações quânticas suscetíveis aos efeitos de decoerência devidos a cada ambiente. Neste sistema, a interação com o reservatório induz efeitos dissipativos a partir da emissão de fótons no decaimento do sistema de dois níveis. A dinâmica reduzida do par de qubits é descrita pelo canal quântico de atenuação de amplitude. Fonte: Imagem adaptada da Ref. [2].

que as curvas de pureza e IMQs de ordem  $m = \pm 2$  e  $m = 0$  para estados emaranhados na Fig. 17 exibem magnitudes maiores do que as curvas respectivas ao estado separável. De fato, o estado separável possui a coerência como único recurso quântico sujeito a ação da decoerência, enquanto o estado emaranhado dispõe de coerência e correlações quânticas ao longo da dinâmica. No regime  $\omega_c t_s \ll 1$ , o estado separável [veja Figs. 18(a) e 18(b)] é mais suscetível ao efeito do ruído do que o estado emaranhado em interação com o reservatório coletivo [veja Figs. 17(a) e 17(b)].

### 7.3 Dinâmica de atenuação de amplitude e estados de 2-qubits

Seja um sistema quântico de 2-qubits,  $A$  e  $B$ , os quais estão acoplados a reservatórios independentes em temperatura zero [87]. A Fig. 19 ilustra o sistema físico em questão. O par de qubits exibe frequências dadas por  $\omega_0$ , ou seja, ambos sistemas de dois níveis têm o mesmo *gap* de energia. Por sua vez, os reservatórios são dados por conjuntos de osciladores harmônicos no estado de vácuo. Neste contexto, segue que a interação entre os qubits e os respectivos ambientes induz perda de coerências e dissipação de energia, de tal forma que a dinâmica do sistema quântico é modelada por um processo de atenuação de amplitude [88]. O Hamiltoniano do sistema composto é dado por [2, 89, 92]

$$H_{SE} = \omega_0(\sigma_z^A + \sigma_z^B) + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_{k,l} (g_k^A a_k^\dagger \sigma_+^A + g_k^{A*} a_k \sigma_-^A)(g_l^B a_l^\dagger \sigma_+^B + g_l^{B*} a_l \sigma_-^B), \quad (7.28)$$

onde  $\sigma_z^A = \sigma_z^A \otimes \mathbb{I}_B$ ,  $\sigma_z^B = \mathbb{I}_A \otimes \sigma_z^B$ ,  $\sigma_\pm^A = (\sigma_x^A \pm i\sigma_y^A) \otimes \mathbb{I}_B$ , e  $\sigma_\pm^B = \mathbb{I}_A \otimes (\sigma_x^B \pm i\sigma_y^B)$ . O primeiro termo no lado direito da Eq. (7.28) descreve as energias dos qubits, em que fixamos  $\hbar = 1$ . Por sua vez, o segundo termo é a energia do reservatório, onde  $\omega_k$  é frequência do  $k$ -ésimo modo do reservatório de osciladores harmônicos, enquanto  $a_k^\dagger$  e  $a_k$  são operadores de criação e aniquilação. Por fim, o último termo descreve a interação entre os qubits e o ambiente, sendo  $g_k^{A,B}$  as constantes de acoplamento entre os qubits e o  $k$ -ésimo modo do reservatório [64].

A dinâmica do sistema de dois qubits é dada em termos da matriz densidade reduzida a seguir

$$\rho(t) = \text{Tr}_E[U_{SE}(t)(\rho(0) \otimes |\emptyset\rangle\langle\emptyset|)U_{SE}^\dagger(t)] , \quad (7.29)$$

onde  $U_{SE}(t) = e^{-itH_{SE}}$  é o operador de evolução que leva em conta graus de liberdade dos qubits e do reservatório. Por um lado, segue que  $\rho(0)$  é o estado inicial do par de qubits, o qual pode ser puro ou misto, emaranhado ou separável. Por outro lado, temos que  $|\emptyset\rangle$  define o vácuo de excitações do reservatório, o qual descreve o estado inicial do ambiente. É possível mostrar que a matriz densidade reduzida na Eq. (7.29) se escreve em termos da representação operador-soma a seguir [91]

$$\rho(t) = \sum_{j,l=1,2} (K_j \otimes K_l) \rho(0) (K_j^\dagger \otimes K_l^\dagger) , \quad (7.30)$$

onde  $K_j = \langle j|U_{SE}(t)|\emptyset\rangle$  representam operadores de Kraus dados por

$$K_1 = |0\rangle\langle 0| + g(t)|1\rangle\langle 1| , \quad K_2 = \sqrt{1 - |g(t)|^2} |0\rangle\langle 1| . \quad (7.31)$$

Os operadores de Kraus na Eq. (7.31) são não-Hermitianos, ou seja,  $K_j^\dagger \neq K_j$ , dependentes do tempo, e satisfazem o vínculo de normalização  $\sum_{j=1,2} K_j^\dagger K_j = \mathbb{I}_2$ . Por sua vez, a função  $g(t)$  satisfaz a equação integro-diferencial a seguir [64]

$$\frac{dg(t)}{dt} = - \int_0^t dt' f(t-t')g(t') , \quad (7.32)$$

onde  $0 \leq |g(t)| \leq 1$ , sendo  $g(0) = 1$ , e  $f(t)$  é uma função de correlação que relaciona-se à densidade espectral  $J(\omega)$  do reservatório por meio da transformada de Fourier

$$f(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega J(\omega) e^{-i(\omega-\omega_0)(t-t')} . \quad (7.33)$$

A densidade espectral  $J(\omega)$  descreve de forma efetiva a distribuição do espectro de frequências do campo de radiação no reservatório, a qual exhibe o aspecto da função Lorentziana a seguir [64]

$$J(\omega) = \frac{\gamma_m \lambda^2}{2\pi[(\omega_0 - \omega - \Delta)^2 + \lambda^2]} , \quad (7.34)$$

onde  $\omega_0$  é a frequência dos qubits, e  $\gamma_m$  descreve uma constante de acoplamento efetiva que decorre da interação entre os qubits e o reservatório. Neste contexto, segue que  $\tau_1 \approx 1/\gamma_m$

define um tipo de escala de tempo relativa ao decaimento do sistema de dois níveis. O parâmetro  $\lambda$  define a largura espectral da distribuição de frequências, onde  $\tau_2 \approx 1/\lambda$  indica a escala de tempo de correlação do reservatório. Por sua vez, tem-se que  $\Delta = \omega_0 - \omega_c$  define o parâmetro de *detuning*, ou seja, o desvio relativo entre a frequência  $\omega_0$  dos qubits e o pico de frequência  $\omega_c$  do reservatório. No limite ressonante  $\Delta = 0$ , ou seja,  $\omega_0 = \omega_c$ , segue que a densidade espectral na Eq. (7.34) implica a função de correlação  $f(t) = (\gamma_m \lambda / 2) e^{-\lambda t}$ , tal que a função de decoerência é dada por<sup>4</sup>

$$g(t) = e^{-\frac{\lambda t}{2}} \left[ \cosh \left( \frac{\lambda t}{2} \sqrt{1 - 2r} \right) + \frac{1}{\sqrt{1 - 2r}} \sinh \left( \frac{\lambda t}{2} \sqrt{1 - 2r} \right) \right], \quad (7.35)$$

onde definimos o parâmetro adimensional

$$r = \frac{\gamma_m}{\lambda}. \quad (7.36)$$

Neste regime, sabe-se que o mapa dinâmico que governa a evolução do sistema de qubits é não-divisível se  $r > 1/2$  [64].

Em face do sistema quântico aberto em questão, investigaremos suas propriedades dinâmicas levando em conta a representação operador-soma na Eq. (7.30), bem como a função de decoerência na Eq. (7.35) que tem origem na interação sistema e ambiente. Por hipótese, o estado inicial do par de qubits será dado pelo estado Bell-diagonal na Eq. (7.1), ou seja,  $\rho(0) = \rho_{BD}$ , o qual pode exibir correlações quânticas. O estado instantâneo do sistema de dois qubits é obtido pela Eq. (7.30), o qual tem a forma explícita dada por

$$\begin{aligned} \rho(t) = \frac{|g(t)|^2}{4} & \begin{pmatrix} |g(t)|^2(1 + c_3) & 0 & 0 & c_1 - c_2 \\ 0 & |g(t)|^2(1 - c_3) & c_1 + c_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & |g(t)|^2(1 - c_3) & 0 \\ c_1 - c_2 & 0 & 0 & |g(t)|^2(1 + c_3) \end{pmatrix} \\ & + \frac{(1 - |g(t)|^2)}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2|g(t)|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2|g(t)|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.37)$$

A matriz densidade na Eq. (7.37) é Hermitiana,  $\rho^\dagger(t) = \rho(t)$ , positiva semi-definida,  $\rho(t) \geq 0$ , e tem traço igual à unidade,  $\text{Tr}[\rho(t)] = 1$ , para todo  $t \geq 0$ . Lembrando que  $g(0) = 1$ , segue que  $\rho(0) = \rho_{BD}$ , tendo em vista que o segundo termo na Eq. (7.37) torna-se identicamente nulo para  $t = 0$ . Por conveniência, escrevemos a matriz densidade em termos da soma de duas contribuições distintas. Por um lado, a interação individual entre cada qubit e seu respectivo ambiente induz efeitos de decoerência nos elementos não-diagonais da matriz densidade. Em especial, o primeiro termo no lado direito da Eq. (7.37) revela que os elementos não-diagonais do estado instantâneo escalam quadraticamente com a

<sup>4</sup> Para maiores detalhes, verifique o Apêndice A, Secs. A.1 e A.2.

função de decoerência. Por outro lado, a variação temporal nas populações do estado quântico reflete a natureza dissipativa do sistema quântico aberto. Neste caso, percebemos que os elementos diagonais do estado instantâneo exibem dependências quadráticas e quárticas na função de decoerência. No regime de tempos longos, ou seja,  $\lambda t \gg 1$ , segue que  $g(t) \approx 0$  e o estado na Eq. (7.37) será dado por  $\rho(t) \approx |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0|$ . De fato, neste regime o estado global do sistema será separável, e cada qubit descrito pelo estado puro  $|0\rangle\langle 0|$ .

### 7.3.1 A norma- $\ell_1$ de coerência

Em seguida, vamos discutir a caracterização da coerência do estado instantâneo  $\rho(t)$  na Eq. (7.37), investigando a norma- $\ell_1$  de coerência, ordens de coerência, e os respectivos IMQs. A base de estados de referência será dada pelo conjunto de autovetores do observável  $S_z = (1/2)(\sigma_z \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_2 \otimes \sigma_z)$ , o qual perfaz um tipo de magnetização coletiva de spin no sistema de dois qubits. Em detalhes, o operador  $S_z$  tem autovetores  $\{|0, 0\rangle, |0, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, 1\rangle\}$ , os quais relacionam-se respectivamente ao conjunto de autovalores  $\{1, 0, 0, -1\}$ . Neste contexto, a norma- $\ell_1$  de coerência do estado instantâneo será dada por

$$C_{\ell_1}(\rho(t)) = \frac{e^{-\lambda t}}{2}(|c_1 - c_2| + |c_1 + c_2|) \left[ \cosh\left(\frac{\lambda t}{2}\sqrt{1-2r}\right) + \frac{\sinh\left(\frac{\lambda t}{2}\sqrt{1-2r}\right)}{\sqrt{1-2r}} \right]^2, \quad (7.38)$$

onde  $0 \leq r < 1/2$ , e

$$C_{\ell_1}(\rho(t)) = \frac{e^{-\lambda t}}{6}(|c_1 - c_2| + |c_1 + c_2|)(\lambda t + 2)^2, \quad (7.39)$$

onde  $r = 1/2$ , e ainda

$$C_{\ell_1}(\rho(t)) = \frac{e^{-\lambda t}}{2}(|c_1 - c_2| + |c_1 + c_2|) \left[ \cos\left(\frac{\lambda t}{2}\sqrt{2r-1}\right) + \frac{\sin\left(\frac{\lambda t}{2}\sqrt{2r-1}\right)}{\sqrt{2r-1}} \right]^2, \quad (7.40)$$

onde  $r > 1/2$ . As Eqs. (7.38), (7.39) e (7.40) revelam que a norma- $\ell_1$  de coerência depende apenas dos parâmetros  $c_1 \in [-1, 1]$  e  $c_2 \in [-1, 1]$ .

A Fig. 20 mostra os gráficos da norma- $\ell_1$  de coerência,  $C_{\ell_1}(\rho(t))$ , e concorrência de emaranhamento,  $\text{Conc}(\rho(t))$ , em função do parâmetro adimensional  $\lambda t$ , para o estado reduzido  $\rho(t)$  da dinâmica de dois qubits acoplados com reservatórios individuais. Nas Figs. 20(a) e 20(b), o estado inicial do sistema é dado por um estado Bell-diagonal emaranhado com coeficientes  $c_1 = \pm 1$ ,  $c_2 = \mp 1$ ,  $c_3 = 1$ . Por sua vez, as Figs. 20(c) e 20(d) referem-se ao estado inicial Bell-diagonal em que  $c_1 = \pm 1$ ,  $c_2 = \pm 1$ ,  $c_3 = -1$ . Em cada painel, investigamos os casos  $r = 0.01$ ,  $r = 0.1$ ,  $r = 1$ , e  $r = 10$ . De forma geral, ambos recursos quânticos exibem curvas qualitativamente similares, as quais decrescem de forma monotônica em resposta ao acréscimo do parâmetro  $r$  no intervalo  $0 \leq r \leq 1$ . Entretanto, note que  $C_{\ell_1}(\rho(t))$  e  $\text{Conc}(\rho(t))$  têm comportamento não-monotônico no regime

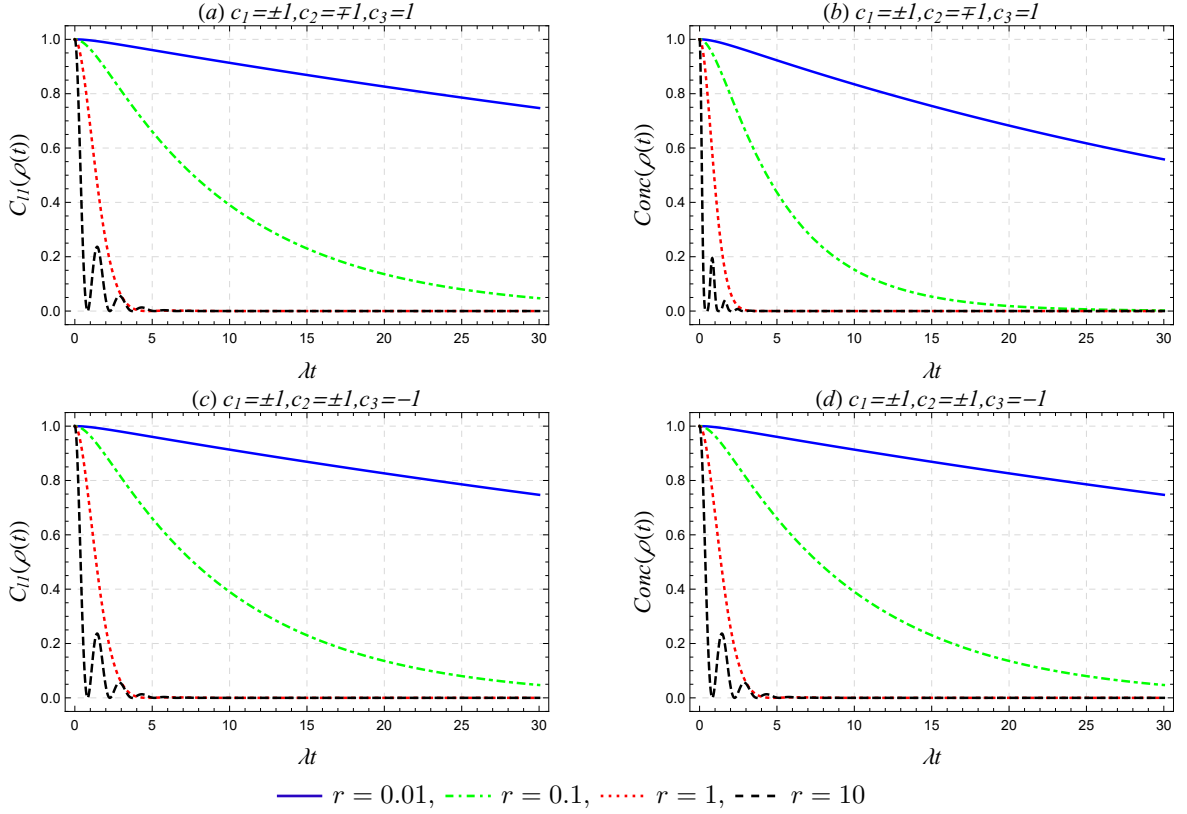


Figura 20 – Gráficos da norma- $\ell_1$  de coerência,  $C_{\ell_1}(\rho(t))$ , e concorrência de emaranhamento,  $\text{Conc}(\rho(t))$ , em função do parâmetro adimensional  $\lambda t$ , para o estado reduzido  $\rho(t)$  da dinâmica de dois qubits acoplados com reservatórios individuais. O estado inicial do sistema é dado por um estado Bell-diagonal emaranhado com coeficientes: (a, b)  $c_1 = \pm 1, c_2 = \mp 1, c_3 = 1$ , (c, d)  $c_1 = \pm 1, c_2 = \pm 1, c_3 = -1$ . Em cada painel, analisamos os casos  $r = 0.01$  (curva sólida azul),  $r = 0.1$  (curva traço-pontilhada verde),  $r = 1$  (curva pontilhada vermelha),  $r = 10$  (curva tracejada preta). Fonte: Elaborada pelo autor.

$r = 10$  para tempos curtos da dinâmica, em especial exibindo recorrências ou *revivals* após atingir abruptamente o valor zero. Neste processo, ambos recursos quânticos oscilam no tempo, exibindo amplitudes que decrescem de forma exponencial, conforme previsto na Eq. (7.40). Em particular, este resultado revela uma assinatura não-Markoviana da dinâmica não-unitária, a qual discutiremos em seguida.

Por um lado, sistemas quânticos abertos Markovianos não exibem efeitos de memória, ou seja, suas propriedades físicas em um instante  $t \geq 0$  independem do histórico da dinâmica do sistema em instantes  $t' < t$ . Neste contexto, coerência e emaranhamento decrescem monotonicamente no tempo, o que significa que a informação é transferida do sistema para o ambiente. Por outro lado, sistemas quânticos abertos não-Markovianos envolvem efeitos de memória na interação entre sistema e ambiente, tal que a dinâmica é não-local no tempo. Em especial, observa-se um mecanismo de refluxo ou *backflow* de informação, ou seja, parte da coerência e/ou emaranhamento transferida do sistema para o ambiente retorna ao sistema [95]. Neste caso, a dinâmica destes recursos quânticos tem assinatura não-monotônica, ou seja, coerência e emaranhamento oscilam descrevendo recorrências seguidas de decaimentos abruptos a valores nulos. É o que se observa, por

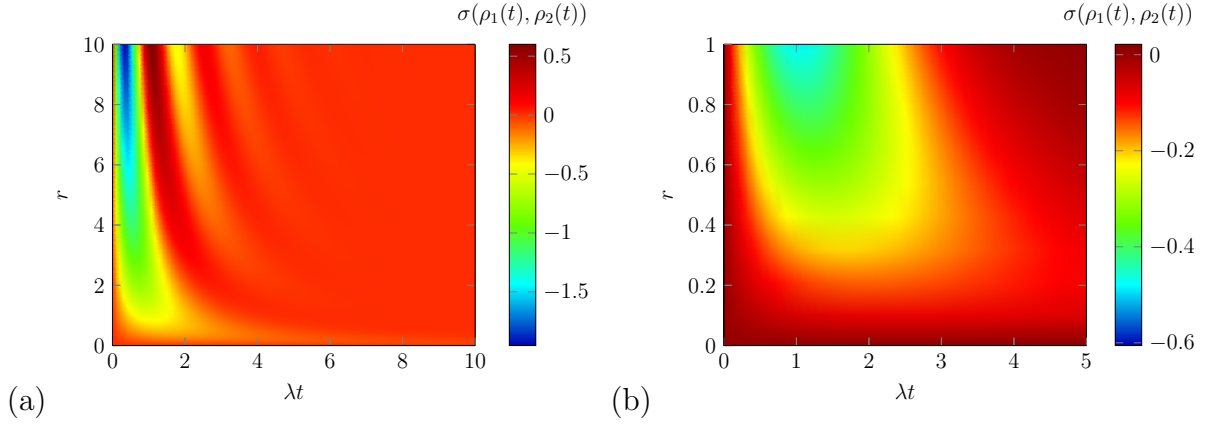


Figura 21 – Diagrama de fases da medida de não-Markovianidade  $\sigma(\rho_1(t), \rho_2(t))$ , em função dos parâmetros adimensionais  $\lambda t$  e  $r$ , para estados quânticos de 2-qubits interagindo com reservatórios individuais. Neste gráfico, a função  $\sigma(\rho_1(t), \rho_2(t))$  é avaliada para estados instantâneos  $\rho_{1,2}(t)$  na Eq. (7.37) em termos das seguintes tuplas de coeficientes: (i)  $\rho_1(t)$ , onde  $c_1 = \pm 1$ ,  $c_2 = \mp 1$ ,  $c_3 = 1$ ; (ii)  $\rho_2(t)$ , onde  $c'_1 = \pm 1$ ,  $c'_2 = \pm 1$ ,  $c'_3 = -1$ . Fonte: Elaborada pelo autor.

exemplo, na Fig. 20 no regime  $r = 10$ .

Dentre os critérios de caracterização de não-Markovianidade, destacam-se as medidas de (i) Rivas, Huelga e Plenio (RHP) [96]; (ii) Breuer, Lane e Piilo (BLP) [97, 98]. Por sua vez, a medida BLP tem maior sinergia com este trabalho, tendo em vista que relaciona o refluxo de informação com a distinguibilidade de estados da dinâmica do sistema quântico aberto. A medida BLP de não-Markovianidade é definida a partir do funcional [97, 98]

$$\sigma(\rho_1(t), \rho_2(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \text{Tr}(|\rho_1(t) - \rho_2(t)|) , \quad (7.41)$$

onde  $|A| := \sqrt{A^\dagger A}$ , sendo  $\rho_1(t)$  e  $\rho_2(t)$  estados instantâneos do sistema obtidos a partir de estados iniciais  $\rho_1(0)$  e  $\rho_2(0)$ , respectivamente. Em linhas gerais, a medida BLP na Eq. (7.41) explora a contratividade da dinâmica não-unitária a partir da distância entre pares de estados do sistema quântico. No regime não-Markoviano, sabe-se que a contratividade é violada, ou seja, os estados tornam-se cada vez mais distinguíveis ao longo da dinâmica, e portanto  $\sigma(\rho_1(t), \rho_2(t)) > 0$  para algum instante  $t \geq 0$ . No regime Markoviano, a dinâmica é contrativa tendo em vista que os estados tornam-se cada vez mais indistinguíveis, tal que  $\sigma(\rho_1(t), \rho_2(t)) < 0$  para um certo instante  $t \geq 0$ .

Em seguida, ilustraremos o cálculo do funcional  $\sigma(\rho_1(t), \rho_2(t))$  para a dinâmica de dois qubits interagindo com reservatórios individuais. Os estados instantâneos do sistema quântico aberto são obtidos por meio da Eq. (7.37), tal que o estado  $\rho_1(t)$  é dado em termos dos coeficientes  $\{c_1, c_2, c_3\}$ , e o estado  $\rho_2(t)$  é definido em termos dos coeficientes



$\{c'_1, c'_2, c'_3\}$ . Desta forma, obtemos a expressão analítica a seguir

$$\begin{aligned} \sigma(\rho_1(t), \rho_2(t)) = & \left\{ |a_1 + bg(t)^2| + |a_1 - bg(t)^2| + |a_2 + bg(t)^2| + |a_2 - bg(t)^2| \right. \\ & \left. + bg(t)^2 \left[ \frac{(a_1 + bg(t)^2)}{|a_1 + bg(t)^2|} - \frac{(a_1 - bg(t)^2)}{|a_1 - bg(t)^2|} + \frac{(a_2 + bg(t)^2)}{|a_2 + bg(t)^2|} - \frac{(a_2 - bg(t)^2)}{|a_2 - bg(t)^2|} \right] \right\} \frac{g(t)}{4} \frac{dg(t)}{dt}, \end{aligned} \quad (7.42)$$

onde  $g(t)$  é dada na Eq. (7.35), e introduzimos os parâmetros

$$a_1 = c_1 - c'_1 + c_2 - c'_2, \quad a_2 = c_1 - c'_1 - c_2 + c'_2, \quad b = c_3 - c'_3. \quad (7.43)$$

A Fig. 21 mostra o diagrama de fases do funcional  $\sigma(\rho_1(t), \rho_2(t))$  na Eq. (7.42) em termos dos parâmetros adimensionais  $\lambda t$  e  $r$ . A simulação numérica leva em conta os estados  $\rho_1(t)$  com coeficientes  $c_1 = \pm 1$ ,  $c_2 = \mp 1$ ,  $c_3 = 1$ , e  $\rho_2(t)$  com coeficientes  $c'_1 = \pm 1$ ,  $c'_2 = \pm 1$ ,  $c'_3 = -1$ . Os gráficos mostram transições entre os regimes Markoviano,  $\sigma(\rho_1(t), \rho_2(t)) < 0$ , e não-Markoviano,  $\sigma(\rho_1(t), \rho_2(t)) > 0$ , para diferentes valores de  $\lambda t$  e  $r$ . Desta forma, o diagrama de fases revela que a dinâmica do sistema exhibe *crossovers*, ou seja, transições entre os regimes Markoviano e não-Markoviano.

### 7.3.2 Ordens de coerência e IMQs

Por fim, vamos discutir as ordens de coerência e os IMQs respectivos ao estado instantâneo do par de qubits acoplados a reservatórios individuais. A decomposição da matriz densidade  $\rho(t)$  na Eq. (7.37) em ordens de coerência é dada por

$$\rho(t) = \sum_{m=-2, \dots, 2} \rho_m(t) = \rho_{-2}(t) + \rho_0(t) + \rho_2(t), \quad (7.44)$$

a qual exhibe blocos não-nulos de ordens de coerência para  $m = \pm 2$  e  $m = 0$  na forma a seguir

$$\rho_2(t) = \frac{|g(t)|^2}{4} (c_1 - c_2) |0, 0\rangle \langle 1, 1|, \quad \rho_{-2}(t) = \rho_2^\dagger(t), \quad (7.45)$$

e

$$\begin{aligned} \rho_0(t) = & \left[ (1 - |g(t)|^2) + \frac{|g(t)|^4}{4} (1 + c_3) \right] |0, 0\rangle \langle 0, 0| + \frac{|g(t)|^4}{4} (1 + c_3) |1, 1\rangle \langle 1, 1| \\ & + \frac{|g(t)|^2}{2} \left[ 1 - \frac{|g(t)|^2}{2} (1 + c_3) \right] (|1, 0\rangle \langle 1, 0| + |0, 1\rangle \langle 0, 1|) \\ & + \frac{|g(t)|^2}{4} (c_1 + c_2) (|0, 1\rangle \langle 1, 0| + |1, 0\rangle \langle 0, 1|). \end{aligned} \quad (7.46)$$

Por meio deste conjunto de blocos de ordens de coerência, obtemos o conjunto de IMQs a seguir

$$I_0(\rho(t)) = \frac{g(t)^4}{8} \left[ 2c_3^2 g(t)^4 + 4c_3 (g(t)^2 - 1)^2 + (c_1 + c_2)^2 \right] + \frac{1}{4} (g(t)^4 - 2g(t)^2 + 2)^2, \quad (7.47)$$

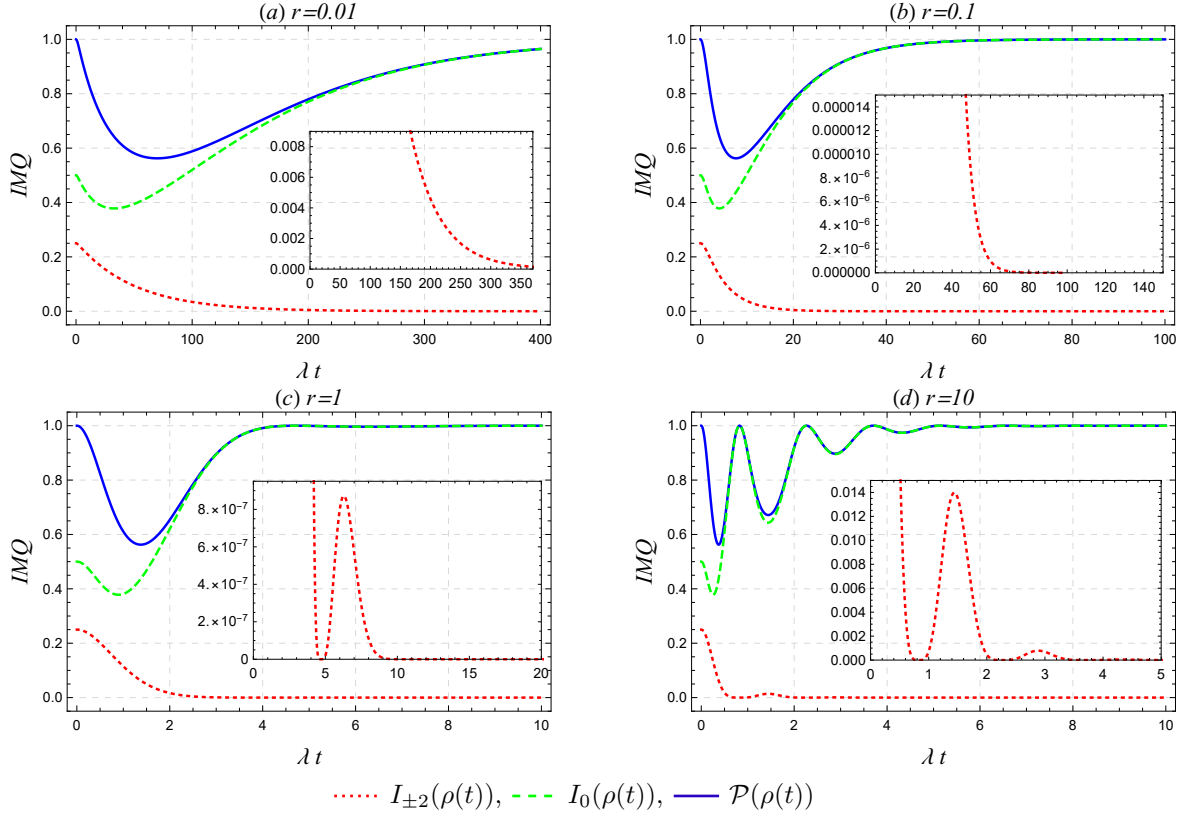


Figura 22 – Gráficos de IMQs,  $I_m(\rho(t))$ , e pureza quântica,  $\mathcal{P}(\rho(t))$ , em função do parâmetro adimensional  $\lambda t$ , para o estado reduzido  $\rho(t)$  da dinâmica de dois qubits interagindo com reservatórios individuais, respectivos aos casos (a)  $r = 0.01$ , (b)  $r = 0.1$ , (c)  $r = 1$ , (d)  $r = 10$ . O estado instantâneo do sistema é dado pela Eq. (7.37) com coeficientes  $c_1 = \pm 1$ ,  $c_2 = \mp 1$ ,  $c_3 = 1$ . Fonte: Elaborada pelo autor.

e

$$I_{\pm 2}(\rho(t)) = \frac{g(t)^4}{16} (c_1 - c_2)^2, \quad (7.48)$$

lembrando ainda que  $I_{\pm 1}(\rho(t)) = 0$  já que o estado na Eq. (7.37) não exibe ordens de coerência  $m = \pm 1$ . A Eq. (7.48) mostra que os IMQs de ordem  $m = \pm 2$  se anulam para um estado Bell-diagonal com coeficientes  $c_1 = c_2$ , e independem do coeficiente  $c_3$ . Por fim, a pureza quântica do estado instantâneo é dada por

$$\mathcal{P}(\rho(t)) = \frac{1}{4} \left\{ g(t)^4 \left[ c_3 \left( c_3 g(t)^4 + 2(g(t)^2 - 1)^2 \right) + c_1^2 + c_2^2 \right] + \left( g(t)^4 - 2g(t)^2 + 2 \right)^2 \right\}. \quad (7.49)$$

Por meio das Eqs. (7.47) e (7.48), pode-se mostrar que a soma dos IMQs de ordem  $m = 0$  e  $m = \pm 2$  recobra precisamente a pureza do estado quântico de dois qubits na Eq. (7.49). Desta forma, certificamos o vínculo entre a soma dos IMQs e a pureza sob ação do canal quântico.

A Fig. 22 mostra os gráficos dos IMQs  $I_{0,\pm 2}(\rho(t))$  [Eqs. (7.47) e (7.48)], e pureza quântica  $\mathcal{P}(\rho(t))$  [Eq. (7.49)], em função do parâmetro adimensional  $\lambda t$ , para o estado  $\rho(t)$  reduzido de dois qubits em contato com reservatórios individuais [Eq. (7.37)]. Nos painéis da figura, estabelecemos valores distintos do parâmetro  $r$ , a saber,  $r = 0.01$ ,  $r = 0.1$ ,  $r = 1$ ,

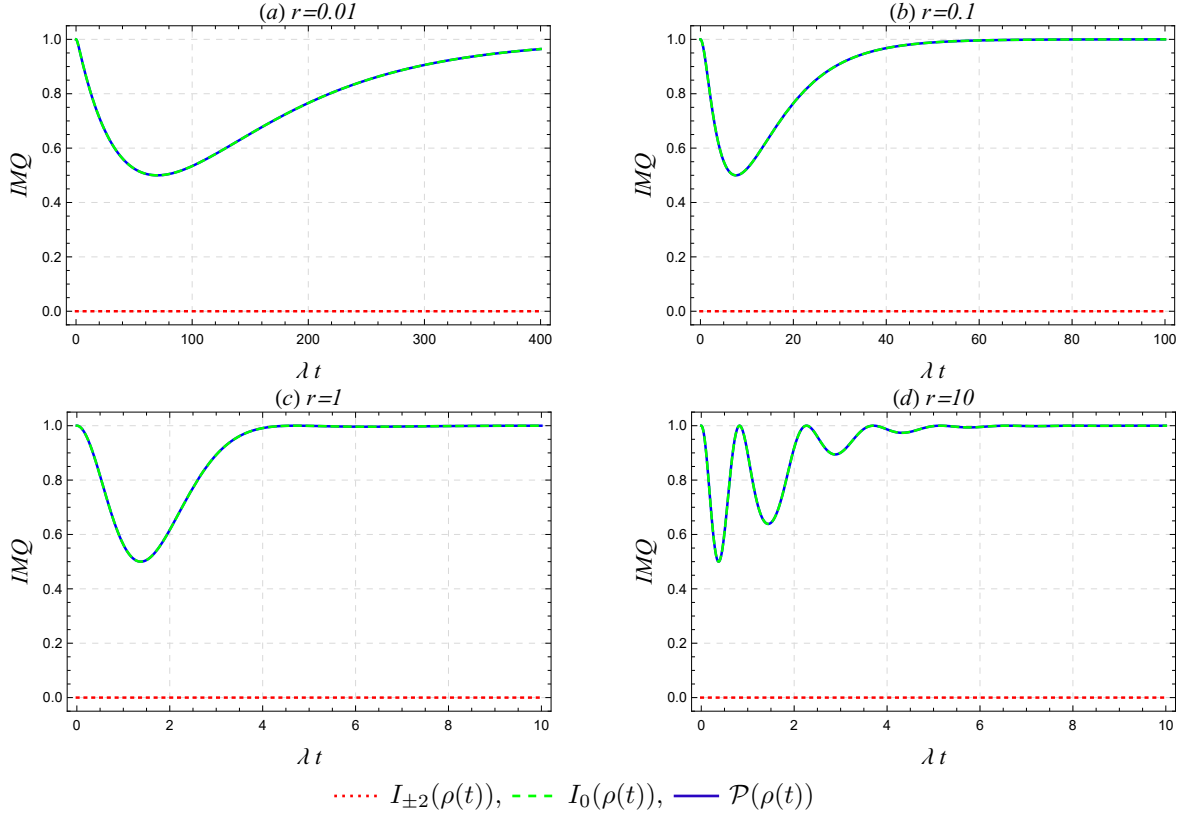


Figura 23 – Gráficos de IMQs,  $I_m(\rho(t))$ , e pureza quântica,  $\mathcal{P}(\rho(t))$ , em função do parâmetro adimensional  $\lambda t$ , para o estado reduzido  $\rho(t)$  da dinâmica de dois qubits interagindo com reservatórios individuais, respectivos aos casos (a)  $r = 0.01$ , (b)  $r = 0.1$ , (c)  $r = 1$ , (d)  $r = 10$ . O estado instantâneo do sistema é dado pela Eq. (7.37) com coeficientes  $c_1 = \pm 1$ ,  $c_2 = \pm 1$ ,  $c_3 = -1$ . Fonte: Elaborada pelo autor.

$r = 10$ , respectivamente. O estado inicial do sistema é dado pelo estado Bell-diagonal emaranhado com coeficientes  $c_1 = \pm 1$ ,  $c_2 = \mp 1$ ,  $c_3 = 1$ . Em cada painel, as curvas de  $I_0(\rho(t))$  e  $\mathcal{P}(\rho(t))$  têm perfil não-monotônico em função do tempo, e tendem ao valor estacionário  $I_0(\rho(t)) \approx \mathcal{P}(\rho(t)) \approx 1$  no regime de tempos longos da dinâmica não-unitária. Isto está em acordo com o fato de que o estado na Eq. (7.37) tende ao estado puro  $|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0|$  no limite  $\lambda t \gg 1$ . Por sua vez, tem-se que  $I_{\pm 2}(\rho(t))$  exibe aspecto distintos para valores de  $r$  diversos. Por um lado, as Figs. 22(a) e 22(b) mostram que os IMQs de ordem  $m = \pm 2$  decrescem de forma monotônica para  $r = 0.01$  e  $r = 0.1$ , respectivamente. Por outro lado, os *insets* nas Figs. 22(c) e 22(d) mostram que  $I_{\pm 2}(\rho(t))$  têm comportamento não-monotônico para  $r = 1$  e  $r = 10$ . Nestes casos, observa-se que  $I_{\pm 2}(\rho(t))$  decresce abruptamente, atinge valor zero, e em seguida exibe recorrências em baixas amplitudes no regime de tempos curtos da dinâmica. Este aspecto se reflete nitidamente nas curvas de  $I_0(\rho(t))$  e  $\mathcal{P}(\rho(t))$  na Fig. 22(d), as quais exibem oscilações pronunciadas no tempo. Em especial, este resultado revela que o IMQ respectivo a ordem de coerência máxima ( $m = \pm 2$ ) do estado de dois qubits perfaz um indicador de não-Markovianidade, e sobretudo concorda com a previsão do diagrama de fases na Fig. 21.

A Fig. 23 mostra os gráficos dos IMQs  $I_{0,\pm 2}(\rho(t))$  [Eqs. (7.47) e (7.48)], e pureza

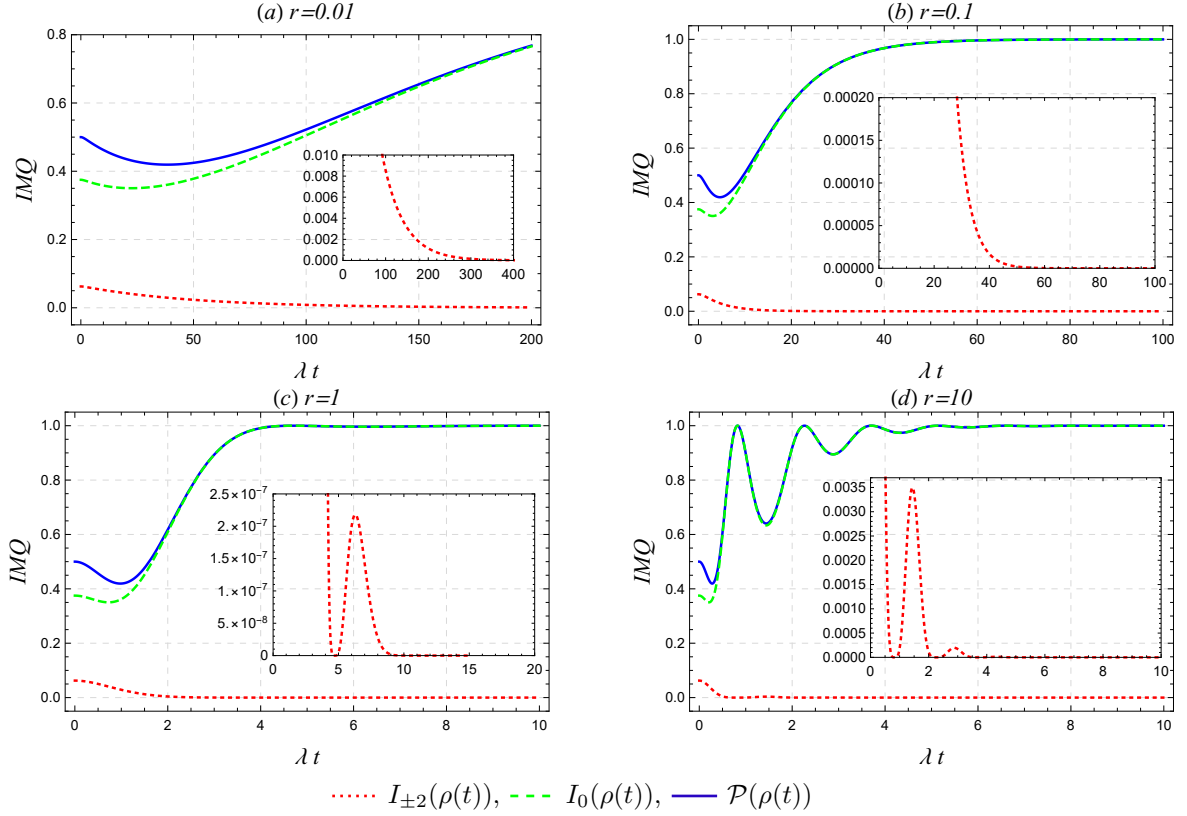


Figura 24 – Gráficos de IMQs,  $I_m(\rho(t))$ , e pureza quântica,  $\mathcal{P}(\rho(t))$ , em função do parâmetro adimensional  $\lambda t$ , para o estado reduzido  $\rho(t)$  da dinâmica de dois qubits interagindo com reservatórios individuais, respectivos aos casos (a)  $r = 0.01$ , (b)  $r = 0.1$ , (c)  $r = 1$ , (d)  $r = 10$ . O estado instantâneo do sistema é dado pela Eq. (7.37) com coeficientes  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = 0$ . Fonte: Elaborada pelo autor.

quântica  $\mathcal{P}(\rho(t))$  [Eq. (7.49)], em função do parâmetro adimensional  $\lambda t$ , para o estado  $\rho(t)$  reduzido de dois qubits em contato com reservatórios individuais [Eq. (7.37)]. Nos painéis da figura, estabelecemos valores distintos do parâmetro  $r$ , a saber,  $r = 0.01$ ,  $r = 0.1$ ,  $r = 1$ ,  $r = 10$ , respectivamente. O estado inicial do sistema é dado pelo estado Bell-diagonal emaranhado com coeficientes  $c_1 = \pm 1$ ,  $c_2 = \pm 1$ ,  $c_3 = -1$ . A simulação numérica de  $I_{\pm 2}(\rho(t))$  está em acordo com a previsão da Eq. (7.48), segundo a qual o IMQ de ordem  $m = \pm 2$  é nulo para estados Bell-diagonais em que  $c_1 = c_2$ . Neste contexto, segue que a  $I_0(\rho(t))$  e  $\mathcal{P}(\rho(t))$  são iguais entre si para todo instante de tempo, portanto respeitando o vínculo entre a pureza e a soma de IMQs. Em cada painel, as curvas de  $I_0(\rho(t))$  e  $\mathcal{P}(\rho(t))$  têm perfil não-monotônico em função do tempo, e tendem aos mesmos valores estacionários no regime de tempos longos da dinâmica não-unitária. Cabe pontuar que as oscilações na Fig. 23(d) no regime  $r = 10$  não têm relação direta com assinaturas de não-Markovianidade.

A Fig. 24 mostra os gráficos dos IMQs  $I_{0,\pm 2}(\rho(t))$  [Eqs. (7.47) e (7.48)], e pureza quântica  $\mathcal{P}(\rho(t))$  [Eq. (7.49)], em função do parâmetro adimensional  $\lambda t$ , para o estado  $\rho(t)$  reduzido de dois qubits em contato com reservatórios individuais [Eq. (7.37)], escolhendo o estado inicial Bell-diagonal separável com coeficientes  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = 0$ . Nos painéis

da figura, estabelecemos valores distintos do parâmetro  $r$ , a saber,  $r = 0.01$ ,  $r = 0.1$ ,  $r = 1$ ,  $r = 10$ , respectivamente. Em comparação com o estado emaranhado na Fig. 22, observe que o estado não-emaranhado na Fig. 24 exibe pureza e IMQs com amplitudes ligeiramente menores. Por um lado, as curvas de  $I_0(\rho(t))$  e  $\mathcal{P}(\rho(t))$  têm perfil não-monotônico em função do tempo, e tendem ao valor estacionário  $I_0(\rho(t)) \approx \mathcal{P}(\rho(t)) \approx 1$  no regime de tempos longos. Por outro lado, as Figs. 24(a) e 24(b) mostram que  $I_{\pm 2}(\rho(t))$  decresce de forma monotônica para  $r = 0.01$  e  $r = 0.1$ , respectivamente, e anula-se para tempos longos. Por outro lado, os *insets* nas Figs. 24(c) e 24(d) mostram que os IMQs de ordem  $m = \pm 2$  decrescem abruptamente, atingem valor zero, e em seguida exibem recorrências em baixas amplitudes no regime de tempos curtos da dinâmica. Estas oscilações indicam comportamento não-monotônico para  $r = 1$  e  $r = 10$ , além de testemunhar uma assinatura de não-Markovianidade do processo físico.

Em conclusão, as Figs. 22 e 24 oferecem evidências de que a ordem de coerência máxima perfaz um indicador de não-Markovianidade na dinâmica reduzida de dois qubits interagindo com reservatórios individuais. Este é um dos resultados centrais na caracterização de coerência deste sistema físico. Em detrimento as ordens de coerência mais baixas ( $m = 0$ ), as ordens de coerência máximas ( $m = \pm 2$ ) são mais suscetíveis aos efeitos da decoerência na interação entre sistema e ambiente. Em especial, mostramos que estas ordens podem capturar o refluxo de informação que é característico de dinâmicas não-Markovianas. Por fim, destacamos as possíveis vantagens em nível experimental deste resultado. Por exemplo, a ordem de coerência máxima pode ser acessada experimentalmente em plataformas de ressonância magnética, sobretudo combinando tomografia de estados quânticos e a análise do sinal do espectro de frequências do sistema. Neste caso, seria possível detectar a assinatura não-Markoviana da dinâmica em termos da caracterização desta ordem de coerência.

## 8 Conclusões

Neste trabalho, investigamos a caracterização de coerência de sistemas quânticos de dimensão finita. A proposta do trabalho está em linha com desenvolvimentos recentes no âmbito da ciência da informação quântica, e propõe-se a delinear aspectos do estado da arte da área. O trabalho tem por espinha dorsal a análise do formalismo de caracterização de coerência quântica introduzido por Baumgratz, Plenio e Cramer (BCP), e a abordagem de ordens de coerência largamente utilizada no âmbito de ressonância magnética nuclear (RMN).

Em nível de revisão, o trabalho discute os fundamentos da teoria da matriz densidade, estados quânticos puros e mistos, bem como elementos básicos da ciência da informação. Em especial, investigamos a representação de estados quânticos de 1-qubit em termos da esfera de Bloch, que por sua vez perfaz ingrediente essencial no estudo da geometria da informação. Além disso, apresentamos uma discussão de operações quânticas, dedicando especial atenção ao caso de dinâmicas não-unitárias que modelam a evolução de sistemas quânticos abertos.

Por meio da revisão do formalismo BCP, estudamos a caracterização de coerência em termos de medidas de distância entre estados quânticos. Em especial, investigamos as propriedades da chamada norma- $\ell_1$  de coerência e entropia relativa de coerência em relação a base fixa de um observável de referência. Em especial, apresentamos resultados gerais destas medidas para estados de qubit único na base de observáveis de spin-1/2 arbitrários. Além disso, investigamos a dinâmica destas medidas de coerência para estados de qubit único, sobretudo analisando dinâmicas não-unitárias dadas pelos mapas de atenuação de fase e atenuação de amplitude. Neste contexto, fornecemos interpretações em nível geométrico das coerências do estado de 1-qubit por meio do mapeamento norma- $\ell_1$  de coerência e entropia relativa de coerência na esfera de Bloch.

No âmbito do formalismo de ordens de coerência, ilustramos o conceito dos subespaços de coerência vinculados ao espaçamento de níveis de energia de um observável do sistema quântico. Neste caso, a matriz densidade se reescreve em termos de blocos não-Hermitianos que levam em conta efeitos de interferência entre este estado e os elementos de base. O aspecto quantitativo destes efeitos é dado pela chamada intensidade de múltiplo *quantum* (IMQ), a qual perfaz a figura de mérito no estudo de coerência. Em especial, apresentamos um invariante geral entre os IMQs e a pureza de estados quânticos em sistemas de dimensão finita. Neste contexto, apresentamos resultados gerais para os IMQs de estados de qubit único a partir da base de observáveis de spin-1/2 arbitrários. Além disso, revelamos um vínculo entre IMQs e a norma- $\ell_1$  de coerência para estados de 1-qubit,

portanto clarificando a conexão entre o formalismo BCP e a abordagem de ordens de coerência. Este resultado pode fomentar novas pesquisas em busca da validação desta propriedade em sistemas de maior dimensão. Em seguida, analisamos os IMQs para dinâmica não-unitária de estados de 1-qubit.

Por fim, investigamos ambos formalismos de caracterização de coerência em sistemas quânticos bipartido. Esta análise tem como recorte estados iniciais do tipo Bell-diagonais de 2-qubits, levando em conta a base de referência de observáveis de spin coletivos ao longo da direção  $z$ . Por um lado, estudamos a evolução da coerência quântica em processos físicos de defasagem, ou seja, um par de qubits separados espacialmente e acoplados a um reservatório coletivo que induz efeitos de decoerência. Neste caso, avaliamos o comportamento da norma- $\ell_1$  de coerência e IMQs em termos dos parâmetros da dinâmica efetiva, além de investigar o papel de correlações quântica nestas quantidades. Por outro lado, analisamos a evolução da coerência quântica em sistemas físicos dados por pares de qubits interagindo com reservatórios bosônicos individuais e idênticos que induzem efeitos de decoerência e dissipação. A dinâmica deste sistema pode exibir assinaturas não-Markovianas, em que ocorre refluxo de coerência entre o ambiente e os qubits. Neste contexto, estudamos o comportamento da norma- $\ell_1$  de coerência e IMQs, além de investigar o papel de correlações quântica nestas quantidades. Os resultados oferecem evidências de que a ordem máxima de coerência captura a assinatura não-Markoviana na dinâmica efetiva. Isto sugere que tal comportamento poderia ser certificado em nível experimental, sobretudo explorando técnicas tomográficas em RMN na medida dos IMQs.

Em conclusão, cabe ressaltar que este trabalho pavimenta possíveis caminhos de pesquisas futuras. Por exemplo, o vínculo entre os IMQs e a norma- $\ell_1$  de coerência obtido para estados de 1-qubit levanta a possibilidade de validação deste resultado para estados de maior dimensão. Além disso, podemos generalizar a caracterização de coerência em sistemas bipartido escolhendo outros estados de 2-qubits, por exemplo, estados GHZ e W. Por fim, cabe investigar se os IMQs capturam assinaturas de não-Markovianidade em cenários gerais, tomando outras dinâmicas e outros estados iniciais.

Por fim, reforçamos que os Capítulos 4, 6 e 7 incluem resultados inéditos na literatura, os quais serão posteriormente organizados e submetidos para revisão de pares em revistas indexadas de envergadura internacional.

# Referências

- 1 NIELSEN, M.; CHUANG, I. L. **Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition**. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- 2 FRANCO, R. L. *et al.* Dynamics of quantum correlations in two-qubit systems within non-markovian environments. **Int. J. Mod. Phys. B**, v. 27, p. 1245053, 2013. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1142/S0217979213450537>>.
- 3 FICEK, Z.; SWAIN, S. **Quantum Interference and Coherence: Theory and Experiments**. New York: Springer, 2005. v. 100. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1007/b100106>>.
- 4 STRELTSOV, A.; ADESSO, G.; PLENIO, M. B. Colloquium: Quantum coherence as a resource. **Rev. Mod. Phys.**, v. 89, n. 4, p. 041003, 2017. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.89.041003>>.
- 5 KILLORAN, N.; STEINHOFF, F. E. S.; PLENIO, M. B. Converting nonclassicality into entanglement. **Phys. Rev. Lett.**, v. 116, n. 8, p. 080402, 2016. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.080402>>.
- 6 STRELTSOV, A. *et al.* Measuring quantum coherence with entanglement. **Phys. Rev. Lett.**, v. 115, n. 2, p. 020403, 2015. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.020403>>.
- 7 MA, J. *et al.* Converting Coherence to Quantum Correlations. **Phys. Rev. Lett.**, v. 116, p. 160407, 2016. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.160407>>.
- 8 HORODECKI, R. *et al.* Quantum entanglement. **Rev. Mod. Phys.**, v. 81, n. 2, p. 865, 2009. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.81.865>>.
- 9 GLAUBER, R. J. The quantum theory of optical coherence. **Phys. Rev.**, v. 130, n. 6, p. 2529, 1963. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.130.2529>>.
- 10 MANDEL, L.; WOLF, E. Coherence Properties of Optical Fields. **Rev. Mod. Phys.**, v. 37, p. 231, 1965. Disponível em: <<https://dx.doi.org/doi/10.1103/RevModPhys.37.231>>.
- 11 SUDARSHAN, E. C. G. Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams. **Phys. Rev. Lett.**, v. 10, p. 277, 1963. Disponível em: <<https://dx.doi.org/doi/10.1103/PhysRevLett.10.277>>.
- 12 HORODECKI, M.; OPPENHEIM, J. Fundamental limitations for quantum and nanoscale thermodynamics. **Nat. Commun.**, v. 100, p. 2059, 2013. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1038/ncomms3059>>.
- 13 LI, L. *et al.* Quantum coherence measures based on Fisher information with applications. **Phys. Rev. A**, v. 103, n. 1, p. 012401, 2021. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.103.012401>>.



- 14 LAMBERT, N. *et al.* Quantum biology. **Nat. Phys.**, v. 9, p. 10, 2013. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1038/nphys2474>>.
- 15 BAUMGRATZ, T.; CRAMER, M.; PLENIO, M. B. Quantifying Coherence. **Phys. Rev. Lett.**, v. 113, n. 14, p. 140401, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.140401>>.
- 16 GIROLAMI, D. Observable Measure of Quantum Coherence in Finite Dimensional Systems. **Phys. Rev. Lett.**, v. 113, p. 170401, 2014. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.170401>>.
- 17 YAO, Y. *et al.* Quantum coherence in multipartite systems. **Phys. Rev. A**, v. 92, p. 022112, 2015. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.92.022112>>.
- 18 CHANDA, T.; BHATTACHARYA, S. Delineating incoherent non-Markovian dynamics using quantum coherence. **Ann. Phys.**, v. 366, p. 1, 2016. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2016.01.004>>.
- 19 ABERG, J. Quantifying superposition. **arXiv:quant-ph/0612146**, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.48550/arXiv.quant-ph/0612146>>.
- 20 LEVI, F.; MINTERT, F. A quantitative theory of coherent delocalization. **New J. Phys.**, v. 16, n. 3, p. 033007, 2014. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/16/3/033007>>.
- 21 HORODECKI, M.; OPPENHEIM, J. (Quantumness in the context of) Resource theories. **Int. J. Mod. Phys. B**, v. 27, n. 01n03, p. 1345019, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0217979213450197>>.
- 22 ADESSO, G.; BROMLEY, T. R.; CIANCIARUSO, M. Measures and applications of quantum correlations. **J. Phys. A: Math. Theor.**, v. 49, n. 47, p. 473001, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8113/49/47/473001>>.
- 23 MODI, K. *et al.* The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures. **Rev. Mod. Phys.**, v. 84, n. 4, p. 1655, 2012. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.84.1655>>.
- 24 PLENIO, M. B.; VIRMANI, S. An Introduction to Entanglement Measures. **Quant. Inf. Comput.**, v. 7, n. 1, p. 1, 2007. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.26421/QIC7.1-2-1>>.
- 25 SPERLING, J.; VOGEL, W. Convex ordering and quantification of quantumness. **Phys. Scr.**, v. 90, n. 7, p. 074024, 2015. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0031-8949/90/7/074024>>.
- 26 STRELTISOV, A. **Quantum Discord and its Role in Quantum Information Theory**. 1st. ed. New York: Springer, 2014. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-09656-8>>.
- 27 DANA, K. B. *et al.* Resource theory of coherence: Beyond states. **Phys. Rev. A**, v. 95, n. 6, p. 062327, 2017. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.95.062327>>.

- 28 MATERA, J. M. *et al.* Coherent control of quantum systems as a resource theory. **Quantum Sci. Technol.**, v. 1, n. 1, p. 01LT01, 2016. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/2058-9565/1/1/01LT01>>.
- 29 CHITAMBAR, E.; GOUR, G. Critical examination of incoherent operations and a physically consistent resource theory of quantum coherence. **Phys. Rev. Lett.**, v. 117, n. 3, p. 030401, 2016. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.030401>>.
- 30 WINTER, A.; YANG, D. Operational resource theory of coherence. **Phys. Rev. Lett.**, v. 116, n. 12, p. 120404, 2016. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.120404>>.
- 31 GOUR, G.; SPEKKENS, R. W. The resource theory of quantum reference frames: manipulations and monotones. **New J. Phys.**, v. 10, n. 3, p. 033023, 2008.
- 32 BRANDÃO, F. G. S. L. *et al.* Resource theory of quantum states out of thermal equilibrium. **Phys. Rev. Lett.**, v. 111, n. 25, p. 250404, 2013.
- 33 MARVIAN, I.; SPEKKENS, R. W. Extending Noether's theorem by quantifying the asymmetry of quantum states. **Nat. Commun.**, v. 5, n. 1, p. 3821, 2014. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1038/ncomms4821>>.
- 34 DEUTSCH, D.; JOZSA, R. Rapid solution of problems by quantum computation. **Proc. R. Soc. A: Math. Phys. Sci.**, v. 439, n. 1907, p. 553, 1992. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1098/rspa.1992.0167>>.
- 35 HILLERY, M. Coherence as a resource in decision problems: The Deutsch-Jozsa algorithm and a variation. **Phys. Rev. A**, v. 93, p. 012111, 2016. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.93.012111>>.
- 36 KNILL, E.; LAFLAMME, R. Power of One Bit of Quantum Information. **Phys. Rev. Lett.**, v. 81, p. 5672, 1998. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.5672>>.
- 37 BRAUNSTEIN, S. L.; CAVES, C. M. Statistical distance and the geometry of quantum states. **Phys. Rev. Lett.**, v. 72, p. 3439, 1994. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.72.3439>>.
- 38 BRAUNSTEIN, S. L.; CAVES, C. M.; MILBURN, G. J. Generalized Uncertainty Relations: Theory, Examples, and Lorentz Invariance. **Ann. Phys.**, v. 247, n. 1, p. 135, 1996. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1006/aphy.1996.0040>>.
- 39 GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L. Quantum Metrology. **Phys. Rev. Lett.**, v. 96, p. 010401, 2006. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.010401>>.
- 40 GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L. Quantum-enhanced measurements: Beating the standard quantum limit. **Science**, v. 306, n. 5700, p. 1330, 2004. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1126/science.1104149>>.
- 41 LANDI, G. T.; PATERNOSTRO, M. Irreversible entropy production: From classical to quantum. **Rev. Mod. Phys.**, v. 93, p. 035008, 2021. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.93.035008>>.

- 42 MISRA, A. *et al.* Energy cost of creating quantum coherence. **Phys. Rev. A**, v. 93, p. 052335, 2016. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.93.052335>>.
- 43 RAHAV, S.; HARBOLA, U.; MUKAMEL, S. Heat fluctuations and coherences in a quantum heat engine. **Phys. Rev. A**, v. 86, p. 043843, 2012. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.86.043843>>.
- 44 SCULLY, M. O. *et al.* Quantum heat engine power can be increased by noise-induced coherence. **Proc. Natl. Acad. Sci.**, v. 108, n. 37, p. 15097, 2011. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1073/pnas.1110234108>>.
- 45 CHEN, J.-J. *et al.* Coherence susceptibility as a probe of quantum phase transitions. **Phys. Rev. A**, v. 94, p. 022112, 2016. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.94.022112>>.
- 46 LI, Y.-C.; LIN, H.-Q. Quantum coherence and quantum phase transitions. **Sci. Rep.**, v. 6, n. 1, p. 26365, 2016. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1038/srep26365>>.
- 47 WU, K.-D. *et al.* Experimental Progress on Quantum Coherence: Detection, Quantification, and Manipulation. **Adv. Quantum Technol.**, v. 4, n. 9, p. 2100040, 2021. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1002/qute.202100040>>.
- 48 JAMES, D. F. V. *et al.* Measurement of qubits. **Phys. Rev. A**, v. 64, p. 052312, 2001. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.64.052312>>.
- 49 LVOVSKY, A. I.; RAYMER, M. G. Continuous-variable optical quantum-state tomography. **Rev. Mod. Phys.**, v. 81, p. 299, 2009. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.81.299>>.
- 50 LIMA, B. B. de. Proposal for a direct measurement of the von Neumann entropy and the relative entropy of coherence. **Phys. Scr.**, v. 95, n. 4, p. 045104, 2020. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1402-4896/ab6359>>.
- 51 PIRES, D. P. *et al.* Coherence orders, decoherence, and quantum metrology. **Phys. Rev. A**, v. 98, n. 3, p. 032101, 2018. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.98.032101>>.
- 52 GÄRTTNER, M.; HAUKE, P.; REY, A. M. Relating Out-of-Time-Order Correlations to Entanglement via Multiple-Quantum Coherences. **Phys. Rev. Lett.**, v. 120, p. 040402, 2018. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.040402>>.
- 53 HAAR, D. T. Theory and applications of the density matrix. **Rep. Prog. Phys.**, v. 24, n. 1, p. 304, 1961. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/24/1/307>>.
- 54 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. J. **Modern Quantum Mechanics**. Cambridge: Pearson, 2014.
- 55 LANDI, G. T. **Quantum Information and Quantum Noise**. São Paulo, 2019. Disponível em: <[http://www.fmt.if.usp.br/~gtlandi/courses/lecture-notes\\_v2-18.pdf](http://www.fmt.if.usp.br/~gtlandi/courses/lecture-notes_v2-18.pdf)>.
- 56 SCHLOSSHAUER, M. A. **Decoherence and the quantum-to-classical transition**. 1st. ed. Berlin: Springer, 2007. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-35775-9>>.

- 57 RUDIN, W. **Real and Complex Analysis**. 3rd. ed. New York: McGraw-Hill, 1987.
- 58 MARCIKIC, I. *et al.* Long-distance teleportation of qubits at telecommunication wavelengths. **Nature**, v. 421, n. 6922, p. 509, 2003. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1038/nature01376>>.
- 59 CIRAC, J. I.; ZOLLER, P. Quantum computations with cold trapped ions. **Phys. Rev. Lett.**, v. 74, n. 20, p. 4091, 1995. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.4091>>.
- 60 WIEMAN, C. E.; PRITCHARD, D. E.; WINELAND, D. J. Atom cooling, trapping, and quantum manipulation. **Rev. Mod. Phys.**, v. 71, n. 2, p. S253, 1999. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.71.S253>>.
- 61 VANDERSYPEN, L. M. K.; CHUANG, I. L. NMR techniques for quantum control and computation. **Rev. Mod. Phys.**, v. 76, n. 4, p. 1037, 2005. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.76.1037>>.
- 62 RAIMOND, J.-M.; BRUNE, M.; HAROCHE, S. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. **Rev. Mod. Phys.**, v. 73, n. 3, p. 565, 2001. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.73.565>>.
- 63 SCHLOSSHAUER, M. Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics. **Rev. Mod. Phys.**, v. 76, n. 4, p. 1267, 2005. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.76.1267>>.
- 64 BREUER, H.-P.; PETRUCCIONE, F. **The theory of open quantum systems**. 1st. ed. Oxford: Oxford University Press, 2002. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199213900.001.0001>>.
- 65 WILDE, M. M. **Quantum information theory**. 1st. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1017/CBO9781139525343>>.
- 66 PIRES, D. P. **Geometria da informação quântica: uma abordagem geral acerca do tempo de evolução**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.11606/T.76.2017.tde-17032017-104320>>.
- 67 CHITAMBAR, E.; GOUR, G. Comparison of incoherent operations and measures of coherence. **Phys. Rev. A**, v. 94, n. 5, p. 052336, 2016. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.94.052336>>.
- 68 YADIN, B. *et al.* Quantum Processes Which do Not Use Coherence. **Phys. Rev. X**, v. 6, n. 4, p. 041028, 2016. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevX.6.041028>>.
- 69 PLENIO, M. B.; VIRMANI, S. S. An Introduction to Entanglement Theory. In: **Quantum information and coherence**. Switzerland: Springer, 2014. p. 173. Disponível em: <[https://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-04063-9\\_8](https://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-04063-9_8)>.
- 70 MOROZOVA, E. A.; CHENTSOV, N. N. Markov invariant geometry on manifolds of states. **J. Math. Sci.**, v. 56, p. 2648, 1991. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1007/BF01095975>>.

- 71 PETZ, D. Monotone metrics on matrix spaces. **Linear Algebra Appl.**, v. 244, p. 81, 1996. Disponível em: <[https://dx.doi.org/10.1016/0024-3795\(94\)00211-8](https://dx.doi.org/10.1016/0024-3795(94)00211-8)>.
- 72 STRELTISOV, A. *et al.* Structure of the Resource Theory of Quantum Coherence. **Phys. Rev. Lett.**, v. 119, p. 140402, 2017. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.140402>>.
- 73 BERA, M. N. *et al.* Duality of quantum coherence and path distinguishability. **Phys. Rev. A**, v. 92, p. 012118, 2015. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.92.012118>>.
- 74 YUAN, Y. *et al.* Experimental demonstration of wave-particle duality relation based on coherence measure. **Opt. Express**, v. 26, n. 4, p. 4470, 2018. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1364/OE.26.004470>>.
- 75 WANG, Y.-T. *et al.* Directly Measuring the Degree of Quantum Coherence using Interference Fringes. **Phys. Rev. Lett.**, v. 118, p. 020403, 2017. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.020403>>.
- 76 RODRÍGUEZ-ROSARIO, C. A.; FRAUENHEIM, T.; ASPURU-GUZI, A. Thermodynamics of quantum coherence. **arXiv:1308.1245**, 2013. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.48550/arXiv.1308.1245>>.
- 77 HUANG, X. *et al.* Experimental Direct Measurement of the Relative Entropy of Coherence. **Photonics**, v. 10, p. 1004, 2023. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.3390/photonics10091004>>.
- 78 YUAN, Y. *et al.* Direct estimation of quantum coherence by collective measurements. **npj Quantum Inf.**, v. 6, p. 46, 2020. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1038/s41534-020-0280-6>>.
- 79 RANA, S.; PARASHAR, P.; LEWENSTEIN, M. Trace-distance measure of coherence. **Phys. Rev. A**, v. 93, n. 1, p. 012110, 2016. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.93.012110>>.
- 80 CHEN, J. *et al.* Quantifying the coherence of pure quantum states. **Phys. Rev. A**, v. 94, n. 4, p. 042313, 2016. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.94.042313>>.
- 81 MAZIERO, J. A representação de Kraus para a dinâmica de sistemas quânticos abertos. **RBEF**, v. 38, 2016. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2015-0005>>.
- 82 MUNOWITZ, M.; PINES, A. *et al.* Principles and applications of multiple-quantum nmr. **Adv. Chem. Phys.**, Wiley Online Library, v. 1, p. 1, 1987. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1590/doi.org/10.1002/9780470142929.ch1>>.
- 83 SØRENSEN, O. W. *et al.* Product operator formalism for the description of nmr pulse experiments. **Prog. Nucl. Magn. Reson. Spectrosc.**, v. 16, p. 163, 1984. Disponível em: <[https://dx.doi.org/10.1016/0079-6565\(84\)80005-9](https://dx.doi.org/10.1016/0079-6565(84)80005-9)>.
- 84 PARIS, M. G. A. Quantum estimation for quantum technology. **Int. J. Quantum Inf.**, v. 7, n. supp01, p. 125, 2009. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1142/S02197499090004839>>.



- 85 PIRES, D. P.; SMERZI, A.; MACRÌ, T. Relating relative Rényi entropies and Wigner-Yanase-Dyson skew information to generalized multiple quantum coherences. **Phys. Rev. A**, v. 102, p. 012429, 2020. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.102.012429>>.
- 86 WOOTTERS, W. K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. **Phys. Rev. Lett.**, v. 80, p. 2245, 1998. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>>.
- 87 PALMA, G. M.; SUOMINEN, K.-A.; EKERT, A. Quantum computers and dissipation. **Proc. R. Soc. Lond. A**, v. 452, n. 1946, p. 567, 1996. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1098/rspa.1996.0029>>.
- 88 REINA, J. H.; QUIROGA, L.; JOHNSON, N. F. Decoherence of quantum registers. **Phys. Rev. A**, v. 65, n. 3, p. 032326, 2002. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.65.032326>>.
- 89 HAIKKA, P. *et al.* Quantifying, characterizing, and controlling information flow in ultracold atomic gases. **Phys. Rev. A**, v. 84, p. 031602, 2011. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.84.031602>>.
- 90 MCENDOO, S. *et al.* Entanglement control via reservoir engineering in ultracold atomic gases. **EPL**, v. 101, n. 6, p. 60005, 2013. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1209/0295-5075/101/60005>>.
- 91 ADDIS, C. *et al.* Comparative study of non-Markovianity measures in exactly solvable one- and two-qubit models. **Phys. Rev. A**, v. 90, p. 052103, 2014. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.90.052103>>.
- 92 ADDIS, C. *et al.* Two-qubit non-Markovianity induced by a common environment. **Phys. Rev. A**, v. 87, p. 052109, 2013. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.87.052109>>.
- 93 ŁUCZKA, J. Spin in contact with thermostat: Exact reduced dynamics. **Physica A: Stat. Mech. Appl.**, v. 167, n. 3, p. 919, 1990. Disponível em: <[https://dx.doi.org/10.1016/0378-4371\(90\)90299-8](https://dx.doi.org/10.1016/0378-4371(90)90299-8)>.
- 94 RITSCH, G.; EISFELD, A. Analytic representations of bath correlation functions for ohmic and superohmic spectral densities using simple poles. **J. Chem. Phys.**, v. 141, p. 094101, 2014. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1063/1.4893931>>.
- 95 FANCHINI, F. F. *et al.* Non-Markovianity through Accessible Information. **Phys. Rev. Lett.**, v. 112, p. 210402, 2014. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.210402>>.
- 96 RODRÍGUEZ, C. A.; FRAUENHEIM, T.; ASPURU-HUZI, A. Quantum non-Markovianity: characterization, quantification and detection. **Rep. Prog. Phys.**, v. 77, n. 9, p. 094001, 2014. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/77/9/094001>>.
- 97 BREUER, H.-P.; LAINE, E.-M.; PILO, J. Measure for the Degree of Non-Markovian Behavior of Quantum Processes in Open Systems. **Phys. Rev. Lett.**, v. 103, p. 210401, 2009. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.210401>>.

98 LAINE, E.-M.; PIILO, J.; BREUER, H.-P. Measure for the non-Markovianity of quantum processes. **Phys. Rev. A**, v. 81, p. 062115, 2010. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.81.062115>>.

99 BROWN, J. W.; CHURCHILL, R. V. **Complex Variables and Applications**. 8th. ed. New York: Mc Graw-Hill, 2009.

## Apêndices



# APÊNDICE A – Cálculos algébricos

Neste apêndice, discutiremos derivações analíticas envolvendo funções de correlação e taxas de decaimento acerca da dinâmica não-unitária de sistemas quânticos bipartido. Por um lado, a Sec. A.1 aborda o cálculo da função de correlação  $f(t)$  do reservatório para densidades espectrais de frequência Lorentzianas. Por outro lado, a Sec. A.2 discute o cálculo da função de decoerência respectiva a dinâmica do sistema de qubits acoplados a reservatórios individuais.

## A.1 Cálculo da função de correlação $f(t)$ na dinâmica de atenuação de amplitude

Considere a densidade espectral Lorentziana na Eq. (7.34) no regime ressonante  $\Delta = 0$ , a saber,

$$J(\omega) = \frac{\gamma_m \lambda^2}{2\pi[(\omega_0 - \omega)^2 + \lambda^2]} , \quad (\text{A.1})$$

onde  $\gamma_m$  é a constante de acoplamento efetiva,  $\omega_0$  é a frequência dos qubits, e  $\lambda$  é a largura da distribuição de frequências. Neste caso, a função de correlação do reservatório dada na Eq. (7.33) se escreve na forma

$$\begin{aligned} f(t - t') &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega J(\omega) e^{-i(\omega - \omega_0)(t - t')} \\ &= \frac{\gamma_m \lambda^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{e^{-iz(t - t')}}{z^2 + \lambda^2} , \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde estabelecemos a mudança de variável  $z = \omega - \omega_0$ . O integrando no lado direito da Eq. (A.2) é singular nos pontos  $z = \pm i\lambda$ , os quais caracterizam os pólos na Fig. 25 ao longo do eixo imaginário do plano complexo. Na prática, a integral pode ser avaliada através do teorema dos resíduos para funções analíticas [99], portanto estabelecendo o semi-plano complexo e os contornos de integração respectivos a cada singularidade. Neste caso, será necessário avaliar a diferença de tempos  $t - t'$  que reflete o aspecto não-local da função de correlação. De fato, a partir do número complexo  $z = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z)$ , segue que  $e^{-iz(t-t')} = e^{-i\text{Re}(z)(t-t')} e^{\text{Im}(z)(t-t')}$ , e pode-se concluir:

- se  $t > t'$ , a integral na Eq. (A.2) será convergente desde que avaliada no semi-plano complexo inferior tal que  $\text{Im}(z) < 0$ , portanto escolhendo o contorno fechado  $C_-$  orientado no sentido horário que envolve o pólo  $z = -i\lambda$ , e a curva  $\Sigma_R^-$  de raio de

curvatura  $R$  [veja Fig. 25]. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-iz(t-t')}}{z^2 + \lambda^2} &= \oint_{C_-} dz \frac{e^{-iz(t-t')}}{z^2 + \lambda^2} - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R^-} dz \frac{e^{-iz(t-t')}}{z^2 + \lambda^2} \\ &= -2\pi i \operatorname{Res} \left[ \frac{e^{-iz(t-t')}}{(z - i\lambda)(z + i\lambda)} \right]_{z=-i\lambda} \\ &= \frac{\pi}{\lambda} e^{-\lambda(t-t')} , \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

onde utilizamos o fato de que a integral na curva  $\Sigma_R^-$  é desprezível no limite  $R \rightarrow \infty$  em acordo com o lema de Jordan [99].

- se  $t < t'$ , a integral na Eq. (A.2) será convergente desde que avaliada no semi-plano complexo superior tal que  $\operatorname{Im}(z) > 0$ , portanto escolhendo o contorno fechado  $C_+$  orientado no sentido anti-horário que envolve o pólo  $z = +i\lambda$ , e a curva  $\Sigma_R^+$  de raio de curvatura  $R$  [veja Fig. 25]. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{iz(t'-t)}}{z^2 + \lambda^2} &= \oint_{C_+} dz \frac{e^{iz(t'-t)}}{z^2 + \lambda^2} - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R^+} dz \frac{e^{iz(t'-t)}}{z^2 + \lambda^2} \\ &= 2\pi i \operatorname{Res} \left[ \frac{e^{iz(t'-t)}}{(z - i\lambda)(z + i\lambda)} \right]_{z=+i\lambda} \\ &= \frac{\pi}{\lambda} e^{-\lambda(t'-t)} , \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

onde utilizamos o fato de que a integral na curva  $\Sigma_R^+$  é negligível no limite  $R \rightarrow \infty$  em acordo com o lema de Jordan [99].

A partir dos resultados nas Eqs. (A.3) e (A.4), dispomos da expressão analítica abaixo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-iz(t-t')}}{z^2 + \lambda^2} = \frac{\pi}{\lambda} e^{-\lambda|t-t'|} , \quad (\text{A.5})$$

onde  $|x| = x$  se  $x \geq 0$ , e  $|x| = -x$  se  $x < 0$ . Portanto, substituindo a Eq. (A.5) na Eq. (A.2), temos

$$f(t - t') = \frac{\gamma_m \lambda}{2} e^{-\lambda|t-t'|} . \quad (\text{A.6})$$

Importante destacar que o resultado da Eq. (A.6) está de acordo com a expressão da função de correlação obtida na Ref. [64].

## A.2 Cálculo da função de decoerência $g(t)$ na dinâmica de atenuação de amplitude

Conforme discutido no texto principal da dissertação, é sabido que a função  $g(t)$  satisfaz a equação integro-diferencial a seguir [64]

$$\frac{dg(t)}{dt} = - \int_0^t dt' f(t - t') g(t') , \quad (\text{A.7})$$

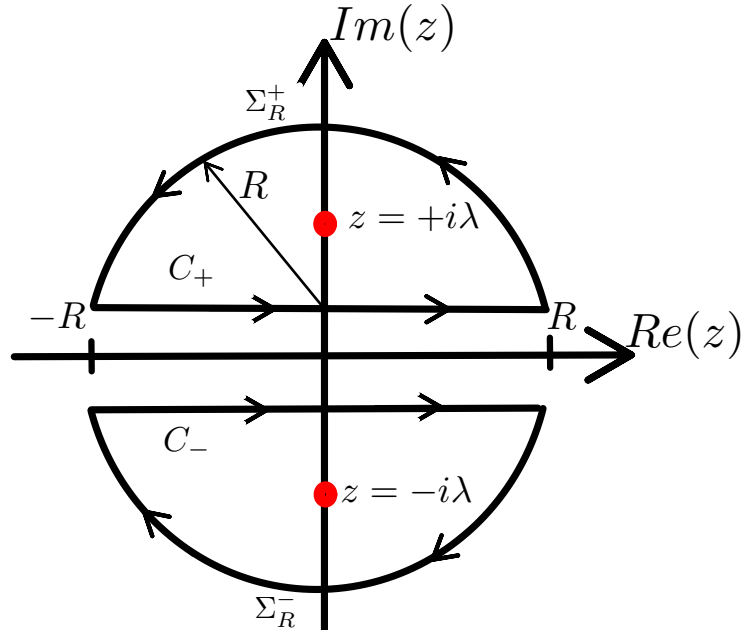


Figura 25 – Descrição dos contornos de integração utilizados no cálculo da função de correlação na Eq. (A.2), onde  $z = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z)$  é um número complexo arbitrário no plano complexo. Nesta figura,  $C_+$  ( $C_-$ ) descreve o contorno fechado no semi-plano superior (inferior), orientado no sentido anti-horário (horário), que envolve o pólo  $z = +i\lambda$  ( $z = -i\lambda$ ). Por sua vez, segue que  $\Sigma_R^+$  ( $\Sigma_R^-$ ) é a curva de raio  $R$ , orientada no sentido anti-horário (horário). O intervalo de integração no eixo real é dado por  $-R \leq \text{Re}(z) \leq R$ , onde  $R \rightarrow \infty$ . Fonte: Elaborada pelo autor.

onde  $0 \leq |g(t)| \leq 1$ , sendo  $g(0) = 1$ , e  $f(t)$  é a função de correlação do reservatório. Pode-se determinar a função  $g(t)$  explorando a transformada de Laplace da equação integro-diferencial na Eq. (A.7), a qual depende da convolução entre as funções  $f(t)$  e  $g(t)$ . Neste caso, tomando a transformada de Laplace do lado direito da Eq. (A.7), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \int_0^t dt' f(t-t')g(t') \right\} &= \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} \\ &= F(s)G(s) , \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

onde  $X(s) = \{F(s), G(s)\}$  define a transformada de Laplace da função  $x(t) = \{f(t), g(t)\}$  na forma

$$X(s) := \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty du x(u)e^{-su} . \quad (\text{A.9})$$

Em seguida, vamos avaliar a transformada de Laplace do lado esquerdo da Eq. (A.7). De forma geral, segue que a transformada de Laplace da  $n$ -ésima derivada de uma função  $g(t)$  se escreve na forma

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n}{dt^n} g(t) \right\} = s^n G(s) - \sum_{l=0}^{n-1} s^{n-l-1} \left( \frac{d^l}{dt^l} g(t) \right)_{t=0} . \quad (\text{A.10})$$

É importante destacar que o resultado na Eq. (A.10) é válido para  $n > 0$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} g(t) = 0$  seja uma função convergente. Em especial, fixando  $n = 1$ , temos

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dg(t)}{dt} \right\} = sG(s) - g(0) = sG(s) - 1, \quad (\text{A.11})$$

em que utilizamos o vínculo  $g(0) = 1$ . Juntando as Eqs. (A.7), (A.8) e (A.11), obtemos

$$sG(s) - 1 = -F(s)G(s), \quad (\text{A.12})$$

o que permite concluir a relação

$$G(s) = \frac{1}{s + F(s)}. \quad (\text{A.13})$$

Neste caso, a função  $g(t)$  é calculada tomando a transformada de Laplace inversa da Eq. (A.13), a saber,

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + F(s)} \right\}. \quad (\text{A.14})$$

Em seguida, ilustraremos o cálculo da função  $g(t)$  a partir da função de correlação obtida na Eq. (A.6), a qual tem origem na densidade espectral Lorentziana na Eq. (A.1). O cálculo será restrito ao regime causal  $t > t'$ , o qual reflete a não-localidade da função de decoerência. Neste caso, a transformada de Laplace da função de correlação na Eq. (A.6) resulta

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\lambda\gamma_m}{2(s + \lambda)}. \quad (\text{A.15})$$

Substituindo a Eq. (A.15) na Eq. (A.14) e realizando algumas manipulações algébricas, temos

$$g(t) = \left( \frac{\lambda + s_+}{s_+ - s_-} \right) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - s_+} \right\} - \left( \frac{\lambda + s_-}{s_+ - s_-} \right) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - s_-} \right\}, \quad (\text{A.16})$$

onde

$$s_{\pm} = \frac{\lambda}{2} \left( -1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\gamma_m}{\lambda}} \right). \quad (\text{A.17})$$

Por meio da transformada de Laplace inversa  $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s - s_{\pm})\} = e^{ts_{\pm}}$ , a Eq. (A.16) pode ser reescrita na forma

$$g(t) = \left( \frac{\lambda + s_+}{s_+ - s_-} \right) e^{ts_+} - \left( \frac{\lambda + s_-}{s_+ - s_-} \right) e^{ts_-}. \quad (\text{A.18})$$

Usando a Eq. (A.17), podemos escrever a Eq. (A.18) da seguinte forma

$$g(t) = e^{-\lambda t/2} \left[ \cosh \left( \frac{\lambda t}{2} \sqrt{1 - \frac{2\gamma_m}{\lambda}} \right) + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\gamma_m}{\lambda}}} \sinh \left( \frac{\lambda t}{2} \sqrt{1 - \frac{2\gamma_m}{\lambda}} \right) \right]. \quad (\text{A.19})$$

O resultado na Eq. (A.19) está em consonância com aquele dado na Ref. [64]. Por conveniência, esta expressão pode ser organizada na forma

$$g(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left[ \cosh \left( \frac{x}{2} \sqrt{1 - 2r} \right) + \frac{1}{\sqrt{1 - 2r}} \sinh \left( \frac{x}{2} \sqrt{1 - 2r} \right) \right], \quad (\text{A.20})$$

onde definimos os parâmetros adimensionais

$$x = \lambda t , \quad r = \frac{\gamma_m}{\lambda} . \quad (\text{A.21})$$

A Eq. (A.20) revela que a função  $g(x)$  pode exibir comportamentos distintos a partir dos valores do parâmetro  $r \in [0, \infty)$ . Em especial, podemos separar os regimes dados a seguir

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{2}} \left[ \cosh \left( \frac{x}{2} \sqrt{1-2r} \right) + \frac{1}{\sqrt{1-2r}} \sinh \left( \frac{x}{2} \sqrt{1-2r} \right) \right] , & \text{para } 0 \leq r < 1/2 , \\ e^{-\frac{x}{2}} (1 + x/2) , & \text{para } r = 1/2 , \\ e^{-\frac{x}{2}} \left[ \cos \left( \frac{x}{2} \sqrt{2r-1} \right) + \frac{1}{\sqrt{2r-1}} \sin \left( \frac{x}{2} \sqrt{2r-1} \right) \right] , & \text{para } r > 1/2 . \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Por fim, observamos que  $0 \leq |g(x)| \leq 1$  e  $g(0) = 1$ , para todo  $r \in [0, \infty)$ .