

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ELETRICIDADE

Anderson Pablo Freitas Evangelista

**ALGORITMO DE VARIÁVEL INSTRUMENTAL NEBULOSA TIPO-2 NO ESPAÇO DE
ESTADOS PARA IDENTIFICAÇÃO EVOLUTIVA DE SISTEMAS DINÂMICOS
NÃO-ESTACIONÁRIOS**

São Luís - MA

2024

Anderson Pablo Freitas Evangelista

**ALGORITMO DE VARIÁVEL INSTRUMENTAL NEBULOSA TIPO-2 NO ESPAÇO DE
ESTADOS PARA IDENTIFICAÇÃO EVOLUTIVA DE SISTEMAS DINÂMICOS
NÃO-ESTACIONÁRIOS**

Tese submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Eletricidade na Área de Automação e Controle

Orientador: Prof. Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra

São Luís - MA
2024

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Evangelista, Anderson Pablo Freitas.

ALGORITMO DE VARIÁVEL INSTRUMENTAL NEBULOSA TIPO-2 NO
ESPAÇO DE ESTADOS PARA IDENTIFICAÇÃO EVOLUTIVA DE SISTEMAS
DINÂMICOS NÃO-ESTACIONÁRIOS / Anderson Pablo Freitas
Evangelista. - 2024.

130 f.

Orientador(a): Ginalber Luiz de Oliveira Serra.
Tese (Doutorado) - Programa de Pós-graduação em
Engenharia Elétrica/ccet, Universidade Federal do
Maranhão, São Luís - Ma, 2024.

1. Identificação de Sistemas Não-lineares. 2.
Conjunto Nebuloso Tipo-2 Intervalar. 3. Variável
Instrumental Nebulosa Tipo-2. 4. Aprendizado Incremental
Nebuloso. I. Serra, Ginalber Luiz de Oliveira. II.
Título.

Anderson Pablo Freitas Evangelista

ALGORITMO DE VARIÁVEL INSTRUMENTAL NEBULOSA TIPO-2 NO ESPAÇO DE ESTADOS PARA IDENTIFICAÇÃO EVOLUTIVA DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-ESTACIONÁRIOS

Tese submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Eletricidade na Área de Automação e Controle

Trabalho aprovado. São Luís - MA, 13 de agosto de 2024.

Prof. Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra
Orientador

Anselmo Cardoso de Paiva
Professor Dr. (UFMA)

Francisco das Chagas de Souza
Professor Dr. (UFMA)

Omar Andres Carmona Cortes
Professor Dr. (IFMA)

Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita
Professor Dr. (UNICAMP)

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, por sua obra grandiosa em minha vida, por renovar minhas forças e por me conceder ânimo e perseverança, especialmente nos momentos mais desafiadores.

Meu sincero agradecimento ao Dr. Professor Ginalber Serra, cuja orientação foi fundamental para o desenvolvimento desta pesquisa. Sou profundamente grato pela confiança em meu potencial, pela paciência e pelos ensinamentos que foram determinantes para minha formação.

Agradeço à minha amada esposa, Thatiana Evangelista, e à minha família — Ana, João Batista, Luciana e Júnior — por todo o apoio, motivação e cuidado ao longo desses anos de Doutorado. Sem o amor e a compreensão de vocês, essa jornada teria sido muito mais difícil.

Sou grato à Universidade Federal do Maranhão e ao Instituto Federal do Maranhão pelo suporte estrutural que permitiu o desenvolvimento desta pesquisa.

Por fim, agradeço a todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho. Cada ajuda, por menor que tenha parecido, teve um impacto significativo nesta caminhada. A todos, o meu mais sincero muito obrigado.

*"Se o dinheiro for a sua esperança de independência, você jamais a terá.
A única segurança verdadeira consiste numa reserva de
sabedoria, de experiência e de competência.
(Henry Ford)*

*"Se não puder voar, corra.
Se não puder correr, ande.
Se não puder andar, rasteje.
Mas continue em frente de qualquer jeito."
(Martin Luther King Jr.)*

RESUMO

Nesta tese, é apresentado um algoritmo de variável instrumental nebulosa tipo-2 no espaço de estados para a identificação evolutiva de sistemas dinâmicos não estacionários. O modelo neuro-nebuloso tipo-2 intervalar adotado possui cinco camadas: 1) A camada de pré-processamento aplica o algoritmo Recursivo de Análise Espectral Singular para calcular as componentes não observáveis dos dados experimentais. Dentre essas componentes, as mais significativas são escolhidas para calcular o sinal livre de ruído. 2) A camada de estimação evolutiva do antecedente realiza a partição do espaço dos dados por meio do algoritmo de agrupamento nebuloso para definir o número de regras do modelo e estimar os parâmetros das funções de pertinência tipo-2 intervalar. A partição do espaço de dados utiliza uma abordagem multiescala para evitar a etapa de normalização dos dados, o que reduz o esforço computacional e melhora o desempenho para problemas não estacionários. 3) A camada de ativação das regras calcula o grau de ativação de cada regra, fornecendo informações úteis para a atualização dos parâmetros do modelo proposto. 4) A camada do cálculo recursivo dos submodelos realiza a estimação dos parâmetros do modelo de observador de estados do consequente. Essa estimação é realizada pelo método de estimação dos parâmetros de Markov do observador, utilizando variáveis instrumentais nebulosas tipo-2 para obter polarização assintótica nula. Os instrumentos do algoritmo são obtidos a partir dos dados processados na camada 1. 5) A camada de composição das regras realiza a estimação dos limites inferior e superior da saída do modelo neuro-nebuloso, limites estes que definem a região de confiança da saída. Esse aspecto é inovador dentro da literatura de sistemas nebulosos tipo-2 intervalar. Na tese, também são abordados os aspectos de inicialização do algoritmo, complexidade computacional e a análise de convergência. Para demonstrar a aplicabilidade e eficiência da metodologia proposta, foram realizados os seguintes experimentos: Identificação de um sistema dinâmico SISO não linear, identificação de sistema não linear SISO com função descontínua em ambiente ruidoso, estimação online da posição de um foguete de teste em ambiente ruidoso, estimação online de um helicóptero de dois graus de liberdade e a identificação online de um sistema multivariável não linear e variante no tempo em ambiente ruidoso. A partir dos resultados, a metodologia proposta demonstrou ser uma potencial abordagem para a modelagem de sistemas dinâmicos não lineares não estacionários variantes no tempo.

Palavras-chave: Identificação de sistemas não-Lineares. Conjunto nebuloso tipo-2 intervalar. Variável Instrumental Nebulosa Tipo-2. Aprendizado Incremental Nebuloso.

ABSTRACT

In this thesis, a type-2 fuzzy instrumental variable algorithm in the state space is presented for the evolving identification of non-stationary dynamic systems. The adopted interval type-2 neuro-fuzzy model has five layers: 1) The preprocessing layer applies the Singular Spectrum Analysis Recursive Algorithm to compute the unobservable components of experimental data. Among these components, the most significant are chosen to compute the noise-free signal. 2) The evolving antecedent estimation layer partitions the data space using the fuzzy clustering algorithm to define the number of rules and estimate the parameters of type-2 interval fuzzy membership functions of the proposed model. The data space partitioning uses a multiscale approach to avoid data normalization, reducing computational effort and improving performance for non-stationary problems. 3) The rules activation layer computes the activation degree of each rule, providing useful information for updating the parameters of the proposed model. 4) The recursive submodel estimation layer updates the parameters of the state observer model of the consequent. This estimation is performed by the method of estimating the Markov parameters of the observer, using type-2 fuzzy instrumental variables to obtain asymptotic non-polarization. The instruments of the algorithm are obtained from the data processed in layer 1. 5) The rule composition layer estimates the lower and upper bounds of the neuro-fuzzy model output, defining the uncertainty region of the output. This aspect is innovative in the literature of type-2 interval fuzzy systems. The thesis also addresses aspects of algorithm initialization, computational complexity, and convergence analysis. To demonstrate the applicability and efficiency of the proposed methodology, the following experiments were performed: Identification of a non-linear SISO dynamic system, identification of a non-linear SISO system with a discontinuous function in a noisy environment, Online estimation of the position of a test rocket in a noisy environment, Online estimation of the 2DOF Helicopter, and online identification of a non-linear and time-varying multivariable system in a noisy environment. The results showed that the proposed methodology is a potential approach for modeling non-linear, non-stationary, and time-varying dynamic systems.

Key-words: Nonlinear systems identification. Interval Type-2 Fuzzy Sets. Type-2 Fuzzy Instrumental Variable. Incremental Fuzzy Learning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Etapas do processo de identificação de sistemas	22
Figura 2 – Função de pertinência Gaussiana tipo-1	45
Figura 3 – Exemplo de função de pertinência tipo-2, onde a função primária e a secundária são funções gaussianas.	46
Figura 4 – Exemplo de função de pertinência tipo-2 para o caso onde $\mu_{\tilde{X}}(z, v) = 1$	47
Figura 5 – Exemplo de FP tipo-2 intervalar, onde a FPI e a FPS são do tipo gaussiana, sendo a região entre essas duas funções denominada de Rastro de Incerteza (RdI)	47
Figura 6 – Conjuntos \tilde{X}_1 e \tilde{X}_2	49
Figura 7 – Operação $\tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2$	50
Figura 8 – Operação $\tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2$	50
Figura 9 – Operação \tilde{Z}'_1	51
Figura 10 – Demonstração gráfica do exemplo 2.4.	54
Figura 11 – Diagrama de bloco geral de um sistema de lógica nebulosa tipo-2 intervalar	58
Figura 12 – Mapeamento do conjunto de regras definidas no antecedente ao conjunto de funções ou submodelos do consequente para o SLN tipo-1	61
Figura 13 – Mapeamento do conjunto de regras definidas no antecedente ao conjunto de funções ou submodelos do consequente para o caso SLNT2I A2-C1	62
Figura 14 – Diagrama de blocos geral do processo de identificação nebulosa evolutiva	66
Figura 15 – Modelo neuro-nebuloso tipo-2 intervalar no espaço de estados proposto	69
Figura 16 – Fluxograma do método Recursivo de Análise Espectral Singular (RSSA) para filtragem dos dados experimentais	71
Figura 17 – Fluxograma do processo de estimação evolutiva do antecedente via ANET2	75
Figura 18 – Algoritmo de estimação recursiva dos SMOS baseado nos Parâmetros de Markov nebulosos estimados pelo método de VIN no contexto nebuloso tipo-2	81
Figura 19 – Conjuntos de dados da entrada u para o sistemas não-linear SISO – $u _k$	89
Figura 20 – Conjuntos de dados da saída y para o sistemas não-linear SISO – $y _k$	89
Figura 21 – Estimação do saída intervalar (região de confiança) para o sistema não-linear SISO	90
Figura 22 – Variação no número de regras durante o processo de treinamento para identificação de sistema dinâmico não lineares SISO.	91
Figura 23 – Adaptação dos centros das funções de pertinência $(y^{1*}, u^{1,*})$ (regra 1) para o sistema não-linear SISO	91
Figura 24 – Adaptação dos centros das funções de pertinência $(y^{2*}, u^{2,*})$ (regra 2) para o sistema não-linear SISO	91

Figura 25 – Adaptação dos centros das funções de pertinência (y^{3*}, u^{3*}) (regra 3) para o sistema não-linear SISO	92
Figura 26 – Dados da entrada u para estimação online do sistema dinâmico não linear com função descontínua	92
Figura 27 – Dados da saída y para estimação online do sistema dinâmico não linear com função descontínua	93
Figura 28 – Estimação do saída y intervalar (região de confiança) para rastrear a saída do sistema não linear SISO com função descontínua corrompida por ruído colorido.	94
Figura 29 – Adaptação dos centros das funções de pertinência (u^{1*}, y^{1*}) (regra 1) para o sistema dinâmico não linear com função descontínua.	94
Figura 30 – Adaptação dos centros das funções de pertinência (u^{2*}, y^{2*}) (regra 2) para o sistema dinâmico não linear com função descontínua.	94
Figura 31 – Adaptação dos centros das funções de pertinência (u^{3*}, y^{3*}) (regra 3) para o sistema dinâmico não linear com função descontínua.	95
Figura 32 – Esquema de estimativa de trajetória de foguete. O sistema usa os ângulos de azimute e de inclinação (u_1, u_2) e a distância da antena ao foguete $(D_r^a = u_3)$ para determinar a posição do foguete P_{xyz}	95
Figura 33 – Dados do ângulo de azimute (em graus) do foguete obtidos a partir de um lançamento	96
Figura 34 – Dados do ângulo de inclinação (em graus) do foguete obtidos a partir de um lançamento	96
Figura 35 – Dados da distância entre o foguete e a antena obtidos a partir de um lançamento	96
Figura 36 – Posição P_{xyz} do foguete obtido pelo radar do CLA.	97
Figura 37 – Estimação da saída intervalar da posição x do foguete do CLA	98
Figura 38 – Estimação da saída intervalar da posição y do foguete do CLA	98
Figura 39 – Estimação da saída intervalar da posição z do foguete do CLA	99
Figura 40 – Resultado da estimação online da região incerta em torno da trajetória do foguete	99
Figura 41 – Adaptação dos centros das funções de pertinência $(u_1^{1*}, u_2^{1*}, u_3^{1*})$ (regra 1) para o experimento do foguete	99
Figura 42 – Adaptação dos centros das funções de pertinência $(u_1^{2*}, u_2^{2*}, u_3^{2*})$ (regra 2) para o experimento do foguete	100
Figura 43 – Adaptação dos centros das funções de pertinência $(u_1^{3*}, u_2^{3*}, u_3^{3*})$ (regra 3) para o experimento do foguete	100
Figura 44 – Imagem do helicóptero 2DOF.	101
Figura 45 – Conjunto de dados do helicóptero 2DOF para entrada u_1	101
Figura 46 – Conjunto de dados do helicóptero 2DOF para entrada u_2	102
Figura 47 – Conjunto de dados do helicóptero 2DOF para saída y_1	102

Figura 48 – Conjunto de dados do helicóptero 2DOF para saída y_2	102
Figura 49 – Região de confiança estimada para o rastreamento da saída y_1 do helicóptero 2DOF para um SNR 10Db.	104
Figura 50 – Região de confiança estimada para o rastreamento da saída y_2 do helicóptero 2DOF para um SNR 10Db.	104
Figura 51 – Análise do desempenho do MNT2IE conforme a variação da SNR para a saída y_1 para o critério VAF%.	105
Figura 52 – Análise do desempenho do MNT2IE conforme a variação da SNR para a saída y_2 para o critério VAF%.	105
Figura 53 – Adaptação dos centros das funções de pertinência $(u_1^{1*}, u_2^{1*}, y_1^{1*}, u_2^{1*})$ (regra 1) para o helicóptero com 2 graus de liberdade. A linha azul representa o centro em u_1 ; linha vermelha, centro em u_2 ; linha amarela, centro em y_1 e a linha roxa, centro em y_2	106
Figura 54 – Adaptação dos centros das funções de pertinência $(u_1^{2*}, u_2^{2*}, y_1^{2*}, u_2^{2*})$ (regra 2) para o helicóptero com 2 graus de liberdade. A linha azul representa o centro em u_1 ; linha vermelha, centro em u_2 ; linha amarela, centro em y_1 e a linha roxa, centro em y_2	106
Figura 55 – Adaptação dos centros das funções de pertinência $(u_1^{3*}, u_2^{3*}, y_1^{3*}, u_2^{3*})$ (regra 3) para o helicóptero com 2 graus de liberdade. A linha azul representa o centro em u_1 ; linha vermelha, centro em u_2 ; linha amarela, centro em y_1 e a linha roxa, centro em y_2	107
Figura 56 – Adaptação dos centros das funções de pertinência $(u_1^{4*}, u_2^{4*}, y_1^{4*}, u_2^{4*})$ (regra 4) para o helicóptero com 2 graus de liberdade. A linha azul representa o centro em u_1 ; linha vermelha, centro em u_2 ; linha amarela, centro em y_1 e a linha roxa, centro em y_2	107
Figura 57 – Dados da entrada u_1 para estimação online do sistema dinâmico não linear variante no tempo	108
Figura 58 – Dados da entrada u_2 para estimação online do sistema dinâmico não linear variante no tempo	109
Figura 59 – Dados da saída y_1 para estimação online do sistema dinâmico não linear variante no tempo	109
Figura 60 – Dados da saída y_2 para estimação online do sistema dinâmico não linear variante no tempo	109
Figura 61 – Estimação do saída y_1 intervalar (região de confiança) para o sistema dinâmico não linear variante no tempo para SNR=10dB.	110
Figura 62 – Estimação do saída y_2 intervalar (região de confiança) para o sistema dinâmico não linear variante no tempo para SNR=10dB.	110

Figura 63 – Adaptação dos centros das funções de pertinência $(u_1^{1*}, u_2^{1*}, y_1^{1*}, y_2^{1*})$ (regra 1) para o sistema dinâmico não linear variante no tempo. A linha azul representa o centro u_1^{1*} , linha vermelha u_2^{1*} , linha laranja y_1^{1*} e linha lilás y_2^{1*}	111
Figura 64 – Adaptação dos centros das funções de pertinência $(u_1^{2*}, u_2^{2*}, y_1^{2*}, y_2^{2*})$ (regra 2) para o sistema dinâmico não linear variante no tempo. A linha azul representa o centro u_1^{2*} , linha vermelha u_2^{2*} , linha laranja y_1^{2*} e linha lilás y_2^{2*}	111
Figura 65 – Adaptação dos centros das funções de pertinência $(u_1^{3*}, u_2^{3*}, y_1^{3*}, y_2^{3*})$ (regra 3) para o sistema dinâmico não linear variante no tempo. A linha azul representa o centro u_1^{3*} , linha vermelha u_2^{3*} , linha laranja y_1^{3*} e linha lilás y_2^{3*}	112
Figura 66 – Adaptação dos centros das funções de pertinência $(u_1^{4*}, u_2^{4*}, y_1^{4*}, y_2^{4*})$ (regra 4) para o sistema dinâmico não linear variante no tempo. A linha azul representa o centro u_1^{4*} , linha vermelha u_2^{4*} , linha laranja y_1^{4*} e linha lilás y_2^{4*}	112
Figura 67 – Adaptação dos centros das funções de pertinência $(u_1^{5*}, u_2^{5*}, y_1^{5*}, y_2^{5*})$ (regra 5) para o sistema dinâmico não linear variante no tempo. A linha azul representa o centro u_1^{5*} , linha vermelha u_2^{5*} , linha laranja y_1^{5*} e linha lilás y_2^{5*}	113
Figura 68 – Adaptação dos centros das funções de pertinência $(u_1^{6*}, u_2^{6*}, y_1^{1*}, y_2^{6*})$ (regra 6) para o sistema dinâmico não linear variante no tempo. A linha azul representa o centro u_1^{6*} , linha vermelha u_2^{6*} , linha laranja y_1^{6*} e linha lilás y_2^{6*}	113

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Análise comparativa do modelo nebulosos proposto com os modelos presentes na literatura existente.	27
Tabela 2	– Análise comparativa da metodologia proposta com a literatura existente. . .	27
Tabela 3	– Análise comparativa da metodologia desta tese com outras metodologias relevantes para o de sistema dinâmicos não lineares SISO.	90
Tabela 4	– Análise comparativa com base nos critérios MSE e MAE da metodologia proposta com algumas metodologias relevantes citadas na literatura para o sistema dinâmico não linear com função descontínua. Utilizou-se ruído branco com média zero e variância 0.5^2 para esta comparação.	93
Tabela 5	– Métrica de desempenho VAF% para diferentes níveis de ruído para estimativa online de trajetória de foguetes.	98
Tabela 6	– Métrica de desempenho NDEI para diferentes níveis de ruído para estimativa online de trajetória de foguetes.	98
Tabela 7	– Análise comparativa da metodologia proposta com as metodologias apresentadas em (Evangelista; Serra, 2020) e (Filho; Serra, 2018), com base no critério do VAF	103
Tabela 8	– Análise comparativa da metodologia proposta com as metodologias apresentadas em (Evangelista; Serra, 2020) e (Filho; Serra, 2018), com base no critério do NDEI	106
Tabela 9	– Desempenho do MNT2IE para diferentes níveis de ruído para a estimação do sistema dinâmico não linear variante no tempo. Utilizou-se as métrica VAF.	110

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

SLN	Sistema de Lógica Nebulosa
SLNT2I	Sistema de Lógica Nebulosa Tipo-2 Intervalar
FP	Função de Pertinência
FPT2I	Função de Pertinência Tipo-2 Intervalar
FPI	Função de Pertinência Inferior
FPS	Função de Pertinência Superior
FPT2I	Função de Pertinência Tipo-2 Intervalar
RdI	Rastro de Incerteza
TSK	Takagi-Sugeno-Kang
MQ	Mínimos Quadrados
MQE	Mínimos Quadrados Estendidos
MQG	Mínimos Quadrados Generalizados
MQN	Mínimos Quadrados Nebulosos
VI	Variáveis Instrumentais
VIN	Variáveis Instrumentais Nebulosas
PMN	Parâmetros de Markov Nebulosos
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i>
2DOF	<i>2 degree of Freedom</i>
VAF	<i>Variance Accounted For</i>
NDEI	<i>Non-Dimensional Error Index</i>
ARX	<i>AutoRegressive eXoneous</i>
MNT2IEE	modelo neuro-nebuloso tipo-2 intervalar no espaço de estados
ANET2	Algoritmo de Agrupamento Nebuloso Evolutivo Tipo-2
PMN	Parâmetros de Markov Nebulosos

SMOS	Submodelo de Observador de Estado
SISO	<i>Single Input and Single Output</i>)
MIMO	<i>Multiples Inputs and Multiples Outputs</i>)
SSA	<i>Singular Spactrum Analysis</i> (Análise Espectral Singular)
RSSA	<i>Recursive Singular Spactrum Analysis</i> (Análise Espectral Singular)
A2-C0	Antecedente Tipo-2 e Consequente tipo-0 (<i>crisp</i>)
A2-C1	Antecedente Tipo-2 e Consequente tipo-1 (intervalar)

LISTA DE SÍMBOLOS

$ _k$	Instante k no tempo discreto
z_j	j -ésima variável de entrada do sistema nebuloso
X	Conjunto nebuloso tipo-1
n_z	Quantidade de variável de entrada do sistema nebuloso
\tilde{X}	Conjunto nebuloso tipo-2
\mathcal{Z}	Universo de discurso
v	Valor de pertinência primária
J_z	Função de pertinência primária
$\tilde{\mu}_X$	Função de pertinência tipo-2
$\underline{\mu}_X$	Força de ativação inferior
$\bar{\mu}_X$	Função de pertinência superior
$\bar{\beta}(\mathbf{z})$	Força de ativação superior
$\underline{\beta}(\mathbf{z})$	Função de pertinência inferior
σ	Dispersão da função gaussiana
Σ	Zona de influência do agrupamento
z^*	Centro da função gaussiana
η	incerteza paramétrica da função de pertinência tipo-2
θ	Componente não-observável de um sinal
ζ	fator de incertza
\mathbf{A}^i	Matriz de transição de estados da i -ésima regra
\mathbf{B}^i	Matriz de entrada da i -ésima regra
\mathbf{C}^i	Matriz de saída da i -ésima regra
\mathbf{D}^i	Matriz de avanço da i -ésima regra
\mathbf{K}^i	Matriz de ganho do observador de estados da i -ésima regra

ψ^i	regressores para estimação dos parâmetros de Markov da i -th regra
q_p	tamanho da janela de dados passados
q_f	tamanho da janela de dados futuros
$\Xi _k$	Parâmetros de Markov do sistema
$\dot{\Xi} _k$	Parâmetros de Markov do observador de estados

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
1.1	Motivação e relevância	27
1.1.1	Aspectos relevantes sobre variáveis instrumentais	28
1.1.2	Aspectos relevantes sobre modelo nebuloso tipo-2 intervalar	28
1.2	Trabalhos anteriores e contribuições da tese	29
1.3	Objetivos da pesquisa	31
1.3.1	Objetivo geral	31
1.3.2	Objetivos específicos	31
1.4	Produções bibliográficas	31
1.5	Organização da tese de doutorado	32
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	33
2.1	Teoria da realização de sistemas	33
2.1.1	Parâmetros de Markov	33
2.1.2	Controlabilidade e observabilidade	35
2.1.2.1	Controlabilidade	35
2.1.2.2	Observabilidade	36
2.1.3	Formulações estendidas do modelo de espaço de estados	36
2.1.3.1	Formulação via matriz de Toeplitz	36
2.1.3.2	Formulação com observador de estados	37
2.1.4	Método de subespaço via parâmetros de Markov	38
2.1.4.1	Estimação dos parâmetros de Markov do observador	39
2.1.4.2	Estimação em batelada dos estados do sistema	40
2.2	Identificação de sistemas em ambiente ruidoso	42
2.2.1	Problema da polarização no método de mínimos quadrado	42
2.2.2	Método das variáveis instrumentais	43
2.3	Teoria dos conjuntos e sistemas nebulosos tipo-2	44
2.3.1	Definições básicas sobre conjuntos nebulosos tipo-2 intervalares	44
2.3.2	Operações entre conjuntos nebulosos tipo-2 intervalares	48
2.3.3	Variáveis linguísticas e regra nebulosa tipo-2	53
2.3.4	Regra e inferência nebulosa tipo-2 intervalar	55
2.3.5	Sistema de lógica nebulosa tipo-2	57
2.3.6	Sistema de lógica nebulosa tipo-2 Takagi-Sugeno-Kang (TSK)	59
2.4	Identificação nebulosa evolutiva	62

3	METODOLOGIA DE IDENTIFICAÇÃO NEURO-NEBULOSA TIPO-2 INTERVALAR PARA SISTEMAS DINÂMICOS EM AMBIENTE RUIDOSO	67
3.1	O Modelo neuro-nebuloso no espaço de estados	67
3.2	Camada 1 – pré-processamento de dados	70
3.3	Camada 2 – estimação evolutiva do antecedente	71
3.3.1	Mecanismo de criação de regras	73
3.3.2	Mecanismo de fusão de agrupamentos	73
3.3.3	Mecanismo de adaptação dos agrupamentos	74
3.4	Camada 3 – camada de ativação das regras	74
3.5	Camada 4 – cálculo recursivo dos submodelos	76
3.5.1	Definição dos parâmetros de Markov do observador	76
3.5.2	Estimação dos PMN do observador	77
3.5.3	Estimação das matrizes dos submodelos via decomposição QR	78
3.6	Camada 5 – composição das regras tipo-2	80
3.7	Aspectos da metodologia proposta	82
3.7.1	Inicialização paramétrica do algoritmo	82
3.7.2	Análise da convergência - estimação dos parâmetros de Markov do observador	83
3.7.3	Análise da convergência - estimação das matrizes dos submodelos	86
4	RESULTADOS COMPUTACIONAIS E EXPERIMENTAIS	88
4.1	Identificação de um sistema dinâmico não-linear SISO	89
4.2	Identificação de sistema dinâmico não-linear com função descontínua	92
4.3	Estimação online da posição de um foguete de teste	93
4.4	Estimação online do helicóptero com 2 graus de liberdade	97
4.5	Identificação Online de um Sistema Dinâmico Multivariável Não Linear Variante no Tempo	107
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	114
	Referências	117
	APÊNDICE A – CONCEITOS SOBRE MATRIZES E VETORES	126
A.1	Conceitos Básicos	126
	APÊNDICE B – PROPRIEDADES ASSINTÓTICAS DE ESTIMADORES	127
	APÊNDICE C – PROCESSOS ESTOCÁSTICOS	128
C.1	Especificações de Processos Estocásticos	129

C.2	Momentos de Processos Estocásticos	129
C.3	Estacionaridade de Processos Estocásticos	130
C.4	Sistemas Dinâmicos Estacionários	130
C.5	Sistemas Dinâmicos Não-Estacionários	131

1 INTRODUÇÃO

A modelagem matemática é uma disciplina que se concentra na criação ou aprimoramento de representações matemáticas de sistemas, e seu alcance de aplicação abrange uma ampla variedade de campos, incluindo ciência, engenharia, economia, medicina, ecologia, biologia, entre outras (Filho; Serra, 2018). A modelagem matemática pode ser definida formalmente como um processo que visa descrever, analisar e prever o comportamento de sistemas complexos, frequentemente incorporando variáveis, equações e parâmetros para representar as interações e dinâmicas envolvidas (Mitiuszew, 2021; Aguirre, 2007; Ljung, 1999; Juang, 2011). Essa abordagem auxilia a simplificar sistemas complicados e a extrair informações significativas para apoiar a pesquisa, o desenvolvimento e a resolução de problemas. Na engenharia, tanto para fins acadêmicos quanto práticos, houve uma crescente ênfase na pesquisa voltada ao desenvolvimento de ferramentas analíticas precisas, bem como na proposição de metodologias, procedimentos computacionais e na implementação de modelos matemáticos (Ljung, 1999; Torres; Serra, 2018). A literatura destaca os principais objetivos da modelagem (Juang, 1994; Júnior; Serra, 2017; Aguirre, 2007):

- Analisar fenômenos para um entendimento mais abrangente do mesmo (por exemplo, modelos físicos, químicos, entre outros);
- Testar hipóteses;
- Predição do comportamento de um sistema dinâmico a curto prazo (controle adaptativo de um sistema dinâmico variante no tempo, por exemplo) ou a longo prazo (previsão de demanda econômica, comportamento biológico de recursos ou espécies em um determinado meio, entre outros);
- Processamento de sinais (tratamento de ruídos, compressão de dados, filtragem, interpolação);
- Detecção de falhas.

A modelagem matemática pode ser realizada por duas abordagens principais: **Modelagem Teórica** e **Modelagem Experimental**. De acordo com a literatura, a modelagem teórica, frequentemente referida como análise teórica, é um processo que envolve a criação de um modelo com base em equações físicas do sistema, equações fenomenológicas e equações de equilíbrio que descrevem seu comportamento dinâmico. Aplicando métodos de modelagem analítica do sistema, obtêm-se um conjunto de equações que, por fim, resultam em um modelo teórico abrangente que representa tanto a estrutura quanto os parâmetros do sistema dinâmico em vários pontos de operação (Ljung, 1999; Juang, 2011; Aguirre, 2007). Na modelagem experimental, desenvolve-se um modelo matemático com base nas medições (dados experimentais) efetuadas no sistema

dinâmico. Isso significa que o modelo é construído a partir das informações obtidas dos sinais de entrada, estados e saída do sistema em estudo. Com base na modelagem teórica e experimental, a literatura apresenta três abordagens para o desenvolvimento de modelos matemáticos:

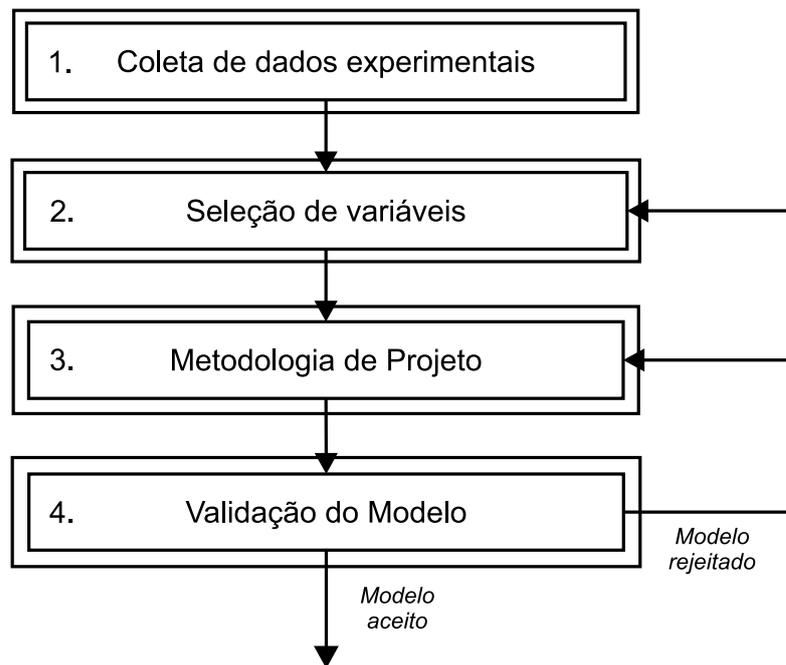
- **Modelagem caixa branca:** Nesta abordagem, o modelo é construído com base em um profundo conhecimento teórico do sistema. As equações que descrevem o comportamento do sistema são derivadas diretamente dos princípios físicos ou químicos que regem seu funcionamento. (Aguirre, 2007; Filho, 2017b).
- **Modelagem caixa preta ou identificação de sistemas:** nesta abordagem, o sistema é representado sem considerar ou entender completamente sua estrutura interna ou mecanismos subjacentes. Em vez de descrever o sistema com base em princípios físicos ou teóricos, a modelagem caixa preta se concentra na caracterização das relações entre as entradas e saídas do sistema, utilizando métodos estatísticos ou técnicas de identificação de sistemas (Arnold; Narendra, 1965; Ljung, 1999; Aguirre, 2007; Filho, 2017b).
- **A modelagem caixa cinza** oferece um ponto intermediário entre as abordagens caixa branca e caixa preta, combinando conhecimento prévio sobre o sistema com dados experimentais. Essa abordagem é particularmente útil em situações onde o conhecimento teórico é limitado, mas há informações suficientes para estruturar um modelo inicial. (Aguirre, 2007; Filho, 2017b).

Considerando que os sistemas dinâmicos atuais estão se tornando mais complexos, criar modelos matemáticos baseados em leis físicas e conhecimento dos fenômenos envolvidos se torna um processo oneroso. Por isso, as técnicas de identificação de sistemas estão ganhando importância, uma vez que não exigem conhecimento profundo das leis físicas. A identificação de sistemas desempenha um papel crucial em várias áreas. Na engenharia, é usada para projetar e otimizar sistemas de controle; na economia e finanças, ajuda a modelar e prever o comportamento do mercado; e na medicina, auxilia na compreensão de sistemas biológicos. Os métodos de identificação de sistemas lineares, como modelos autoregressivos, identificação por modelos de espaço de estados e identificação por funções de transferência, são amplamente utilizados para modelar sistemas dinâmicos lineares, invariantes no tempo e com uma quantidade finita de entradas e saídas. Esses métodos são aplicados em sistemas que podem ser descritos por equações diferenciais lineares ou por modelos de espaço de estados, como sistemas mecânicos, elétricos, térmicos e hidráulicos. Cada abordagem tem suas vantagens e aplicações específicas, e a escolha do método depende das características do sistema e dos objetivos da modelagem. Enquanto para sistemas não-lineares, os métodos de identificação abrangem uma variedade de abordagens, como modelos polinomiais, redes neurais, sistemas nebulosos entre outros.

A modelagem por sistemas nebulosos apresenta a capacidade para lidar com a incerteza e a imprecisão inerentes a problemas do mundo real. Ao contrário de abordagens tradicionais que requerem valores precisos e definidos, a modelagem nebulosa permite a representação

e manipulação de conceitos vagos e ambíguos, refletindo de forma mais precisa a natureza complexa do sistema a ser modelado (Wang, 1996; Serra; Bottura, 2007). Isso resulta em vantagens significativas, incluindo uma maior flexibilidade na descrição de fenômenos complexos, uma melhor captura da variabilidade e das nuances presentes nos dados, e uma capacidade aprimorada de lidar com informações incompletas ou imprecisas. Para uma modelagem eficaz por meio de sistemas nebulosos, deve-se seguir o fluxograma ilustrado na Fig. 1, onde as etapas são descritas a seguir:

Figura 1 – Etapas do processo de identificação de sistemas



Fonte: Autor

Passo 1: Coleta de dados experimentais — Este é um passo inicial crucial para a identificação de um sistema dinâmico, uma vez que esses dados fornecem informações valiosas sobre o comportamento do sistema físico em estudo. É preferível que o(s) sinal(is) de entrada aplicado(s) ao sistema o excite(m) em toda a sua faixa de operação, abrangendo amplitude e frequência, aprimorando assim a capacidade do modelo nebuloso em rastrear a(s) saída(s) do sistema dinâmico. Além disso, a quantidade de amostras é um fator crucial, pois conjuntos de amostras mais extensos proporcionam uma compreensão mais abrangente da dinâmica do sistema físico.

Passo 2: Seleção de variáveis — Nesta etapa, a seleção das variáveis a serem utilizadas no processo de identificação é realizada com base no conjunto de dados experimentais obtido anteriormente. Ao buscar definir um modelo nebuloso que dinamicamente relacione duas ou mais variáveis de um sistema dinâmico, parte-se da premissa de que existe uma correlação significativa entre essas variáveis, indicando uma relação de causa e efeito. Portanto, é necessário eleger as variáveis mais relevantes dentro do escopo desejado para a identificação. Para

determinar a quantidade de variáveis adequadas, pode-se utilizar teste de correlação entre os dados experimentais coletados (Aguirre, 2007; Ljung, 1999).

Passo 3: Metodologia de projeto — Nesta fase, define-se a estrutura do Sistema de Lógica Nebulosa (SLN) e os métodos que serão empregados para obter um modelo nebuloso que simule o comportamento dinâmico do sistema físico. A escolha da estrutura envolve a determinação das funções de pertinência na proposição do antecedente, bem como a estrutura dos submodelos na proposição do consequente (modelo auto-regressivo, função de transferência, modelo no espaço de estados, etc). Uma vez que a estrutura do SLN está definida, aplicam-se métodos para estimar os parâmetros das funções de pertinência e dos submodelos no consequente, buscando obter os parâmetros do SLN. Dentro desse contexto, destacam-se duas abordagens principais para a integração de conhecimento e dados na definição do conjunto de regras para um modelo nebuloso: **métodos de ajuste de modelo** e **métodos de identificação de modelo** (Babuska, 2012).

Passo 4: Validação do modelo — Nesta etapa, realiza-se uma avaliação do modelo nebuloso obtido, verificando se o mesmo atende aos requisitos estabelecidos no início do processo de identificação. Considerações sobre a capacidade de generalização e a interpretabilidade da base de regras podem ser fatores cruciais durante a validação do modelo. Após as análises, é possível concluir se o modelo nebuloso é aceitável ou deve ser rejeitado. No último caso, ajustes na estratégia de identificação nos passos 2 ou 3 podem ser considerados para aprimorar os resultados.

Para os problemas de identificação caracterizados pela variabilidade temporal do sistema dinâmico (sistemas variantes no tempo), a aplicação de conceitos de aprendizado incremental, conhecidos também como abordagem evolutiva, para a adaptação dos parâmetros do modelo nebuloso é pertinente. Tais algoritmos demonstram a capacidade de ajustar a estrutura e os parâmetros do modelo conforme novos dados são adquiridos. (Angelov; Filev, 2004; Angelov; Lughofer; Klement, 2005; Lughofer, 2008; Lughofer; Bouchot; Shaker, 2011; Lin *et al.*, 2013; Ge; Zeng, 2018; Severiano *et al.*, 2021; Souza; Lughofer, 2022; Sun *et al.*, 2022).

No mundo real, os dados usados na identificação de sistemas podem estar corrompidos por erros de medição, perturbações externas e ruído autocorrelacionado, fatores que podem gerar modelos imprecisos durante o processo de estimação dos parâmetros. Portanto, desenvolver técnicas para lidar com essas incertezas é essencial para representar com precisão e prever o comportamento de sistemas complexos (Arnold; Narendra, 1965; Bendat, 1990; Juang, 1994; Soderstrom; Stoica, 2002; Keesman, 2011; Aguirre, 2007). Neste cenário, os modelos nebulosos clássicos apresentam limitações em lidar com problemas com alto grau de incerteza e/ou ruídos correlacionados (Castillo, 2007). Assim, a teoria nebuloso tipo-2 surge como uma ferramenta poderosa, pois pode capturar e modelar incertezas e lidar com sistemas não-estacionários de forma mais eficaz, uma vez que funções de pertinências apresentam incertezas. O conceito sobre conjuntos nebuloso tipo-2 foi primeiramente apresentado por Zadeh como uma extensão dos

conjuntos nebuloso convencionais (ZADEH, 1975). Entretanto, os primeiros trabalhos abordando especificamente esses conjuntos foram publicados na década de 90. Em Karnik e Mendel (1998), os primeiros conceitos sobre conjuntos nebuloso tipo-2 são apresentados, incluindo as operações entre conjuntos, operação de redução de tipo e defuzzificação. Especificamente, o processo de redução de tipo é desafiador, uma vez que não pode ser realizado por meio de uma fórmula fechada, exigindo, portanto, um maior esforço computacional. Isso ocorre devido à complexidade do cálculo dos limites superior e inferior da saída (redução de tipo) a partir do Rastro de Incerteza (RdI) das funções de pertinência tipo-2 (Castillo, 2007; Castillo, 2011). Um caso especial de conjunto nebuloso tipo-2, denominado de conjunto nebuloso tipo-2 intervalar, foi proposto em Karnik, Mendel e Liang (1999) e Liang e Mendel (2000b). Nesse tipo de conjunto, a terceira dimensão possui valores constantes, sempre iguais a 1. Dessa maneira, é possível definir o conjunto nebuloso tipo-2 através da formulação de uma função de pertinência superior e outra inferior. Em comparação aos conjuntos nebuloso tipo-2 gerais, o processo de redução de tipo é menos oneroso computacionalmente. Com base na teoria de conjuntos nebulosos intervalares, diversas técnicas de redução de tipo para sistemas nebulosos tipo-2 intervalares foram desenvolvidas (Liang; Mendel, 2000a; Wu; Mendel, 2002; Nie; Tan, 2008) e aplicadas em diversas áreas, tais como controle (Hagras, 2004; Li *et al.*, 2015; Tahamipour-Z.; Akbarzadeh-T.; Baghbani, 2022; Lu *et al.*, 2021; Nasir; Razak, 2022), predição de séries temporais (Lin *et al.*, 2013; Lee; Chang; Lin, 2014; Baklouti; Abraham; Alimi, 2018; Yin; Sheng; Qin, 2022) e identificação de sistemas (Abiyev; Kaynak; Kayacan, 2013; Kayacan; Kayacan; Khanesar, 2015; Wang; Luo; Wang, 2019; Zhao; Li, 2021). Na identificação de sistemas baseada em modelos nebulosos tipo-2 intervalares, a análise dos dados experimentais de entradas/saídas de um sistema dinâmico, a fim de definir as funções de pertinência tipo-2 adequadas para um problema específico, é desafiadora, demanda tempo e exige conhecimento especializado sobre o problema. Portanto, realizar o projeto de um Sistema de Lógica Nebulosa Tipo-2 (SLN T2) e realizar um bom uso de suas características ainda é um importante e aberto campo de pesquisa. Desta maneira, utilizar métodos de aprendizagem para estimar/ajustar os parâmetros de um Sistema de Lógica Nebulosa tipo-2 Intervalar (SLN T2I) é uma abordagem em destaque (Juang; Tsao, 2008; Tung; Quek; Guan, 2013; Lin *et al.*, 2015). Em Bencherif e Chouireb (2019), é proposto um algoritmo de aprendizado incremental para uma rede tipo-2 neuro-nebulosa Takagi-Sugeno recorrente. Para o aprendizado da estrutura, é utilizada uma abordagem baseada na força de ativação das regras. Para novos dados, a força de ativação tipo-2 para cada regra é calculada, onde a regra com a maior força de ativação é considerada para o mecanismo de criação de regras. A atualização dos parâmetros é realizada por meio de um algoritmo de gradiente descendente. O problema de rastreamento de trajetória de um robô móvel é usado para demonstrar a aplicabilidade da metodologia. Em Montazeri-Gh e Yazdani (2020), é apresentado a aplicação de SLN T2I para diagnóstico de falhas em turbinas a gás, com o objetivo de reduzir custos de manutenção e tempo de inatividade. A Base de Regras nebulosa é estimada usando agrupamento nebuloso *C-Means* tipo-2 intervalar. Os parâmetros do SLN T2I são otimizados com um algoritmo meta-heurístico.

O desempenho do sistema é comparado a outras técnicas de classificação, mostrando resultados promissores em termos de aplicabilidade online, precisão e robustez. Em Khalifa *et al.* (2020), é apresentado uma estrutura Wiener nebulosa tipo-2 intervalar para a identificação de sistemas dinâmicos, com uma estrutura em cascata composta por uma parte dinâmica linear seguida por uma parte estática não linear. A componente não linear estática do modelo utiliza um sistema Takagi-Sugeno-Kang (TSK) T2I e a parte linear é representada por um modelo autoregressivo de média móvel. Os parâmetros do modelo Wiener são atualizados usando a função de Lyapunov para garantir a estabilidade do modelo. Os resultados da simulação demonstram a eficácia da estrutura Wiener proposta na modelagem de aplicações de engenharia não lineares, mesmo na presença de incertezas e dados de medição ruidosos.

Na modelagem nebulosa, dois tipos de modelos nebulosos são predominantemente considerados: o modelo Mamdani ou o modelo TSK. A abordagem de Mamdani, também conhecida como abordagem linguística, tem tanto seu consequente como o antecedente formados por conjuntos nebulosos (Wang, 1996; Wozniak *et al.*, 2021). A segunda abordagem, também conhecida como abordagem quantitativa, envolve a adoção de funções matemáticas no consequente, que podem ser lineares ou não lineares (Babuska, 2012). Nesta última, versões nebulosas dos métodos clássicos de identificação de sistemas são amplamente utilizadas, como, por exemplo, métodos de mínimos quadrados e Filtro de Kalman (Babuska, 2012; Serra; Bottura, 2007; Angelov; Zhou, 2006; Angelov; Filev, 2005; Torres; Serra, 2018; Filho; Serra, 2018; Gomes; Serra, 2021; Gomes; Serra, 2024). Na literatura, modelos lineares são comumente utilizados na parte consequente, como modelos autorregressivos e modelos no espaço de estados. Esta abordagem tem como objetivo identificar comportamentos lineares do sistema dinâmico a partir dos dados experimentais, no qual tais comportamentos são representados por modelos lineares (Babuska, 2012). Tomando em consideração os modelos no espaço de estados, estes apresentam uma característica interessante: uma fórmula compacta que mostra a relação entre as variáveis internas e os dados experimentais (sinais de saída e entrada) (Ljung, 1999; Pires, 2018; Zhang *et al.*, 2024; Yan *et al.*, 2024). Na literatura, pode-se observar diversas metodologias de modelos nebulosos que utilizam submodelos no espaço de estados como consequente (Rigatos; Siano, 2015; Han, 2018; Torres; Serra, 2018). Em (Gil; Oliveira; Palma, 2018) é apresentado uma estrutura de modelo neuro-nebuloso de espaço de estados recorrente geral. Neste estudo é comprovado que o sistema generalizado de espaço de estados Takagi-Sugeno é um aproximador universal, e algumas condições de estabilidade são derivadas para esse sistema. O treinamento online é realizado com base em um filtro de Kalman *unscented* restrito, onde os pesos, funções de pertinência e consequentes são atualizados de forma recursiva. Resultados de experimentos em um sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO) demonstram a aplicabilidade da abordagem para identificação de sistemas. Em (Rodrigues; Serra, 2022), uma Rede Neuro-Fuzzy Evolutiva é proposta para a previsão de séries temporais experimentais univariadas e multivariadas. O algoritmo de Análise de Espectro Singular Recursiva Paralela é empregado para calcular os componentes não observáveis, que são subsequentemente considerados como estados e entradas

do modelo espaço de estados. A base de regras é definida através da Aprendizagem Autônoma de Sistemas Multi-Modelo. Em (Gomes; Serra, 2024), um filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo do tipo-2 intervalar é apresentado. Esta metodologia utiliza o algoritmo de Identificação de Filtro de Kalman/Observador do tipo-2 intervalar (OKID) para estimar os submodelos no espaço de estados. O algoritmo de aprendizagem da estrutura é implementado usando o algoritmo de agrupamento Takagi–Sugeno evolutivo (eTS).

Em problemas de identificação, é fundamental garantir eficiência na mitigação dos efeitos do ruído no ajuste dos parâmetros do consequente das regras. Em ambientes ruidosos, o método de Variáveis Instrumentais (VI) é considerado uma ferramenta relevante para a modelagem de sistemas (Ljung, 1999). Ao ser comparado com outros métodos de identificação, observa-se que no método de IV, a necessidade de um modelo preciso de ruído não é necessária (Ljung, 1999; Soderstrom; Stoica, 2002; Serra; Bottura, 2009). De acordo com a literatura, a precisão do método de VI depende da seleção dos instrumentos adequado, que devem garantir uma estimação não polarizada dos parâmetros (Ljung, 1999; Aguirre, 2007). Este método é aplicado a sistemas dinâmicos lineares, mostrando-se assim menos eficaz em situações em que o sistema exibe um alto grau de não-linearidade. Com base na abordagem de modelagem não polarizada de sistemas não lineares, o pesquisador Ginalber Serra propôs o método de variáveis instrumentais nebulosas tipo-1 em sua tese de doutorado (Serra, 2005), sendo as potencialidades da metodologia internacionalmente reconhecidas pelos artigos Serra e Bottura (2007) e Serra e Bottura (2009). O algoritmo de VI nebuloso tipo-1 é apresentado como uma extensão do algoritmo VI tradicional aplicado a problemas lineares. Nesta abordagem, propõe-se que o sistema dinâmico não linear possa ser representado por um modelo nebuloso Takagi-Sugeno, em que os consequentes são submodelos lineares autorregressivos com entrada exógena, cujos parâmetros são estimados por meio de variáveis instrumentais nebulosas. Por meio de três lemas e um teorema, demonstra-se que, a partir do vetor de instrumentos adequado, o algoritmo apresenta convergência assintótica e ausência de polarização nos parâmetros dos submodelos.

Esta pesquisa propõe um novo método de aprendizado incremental para modelos neuro-nebulosos evolutivos tipo-2 no espaço de estados. A principal contribuição consiste na introdução de variáveis instrumentais nebulosas tipo-2 (T2-VI) para a estimação não polarizada dos parâmetros do consequente. Um algoritmo recursivo de análise espectral é empregado para identificar as componentes não observáveis do sistema, as quais são utilizadas como instrumentos no algoritmo T2-VI. Essa abordagem permite a obtenção de dados experimentais descorrelacionados do ruído, garantindo a qualidade da estimação. Os parâmetros de Markov do observador nebuloso são estimados por meio do algoritmo T2-VI, e as matrizes dos submodelos no espaço de estados são obtidas via algoritmo de subespaço. Para a estimação do antecedente, um algoritmo de agrupamento nebuloso tipo-2 intervalar com abordagem multiescala é utilizado, eliminando a necessidade de normalização dos dados e aprimorando o desempenho em sistemas não estacionários. As Tabelas 1 e 2 apresenta um comparativo geral entre a metodologia proposta e as mencionadas anteriormente.

Tabela 1 – Análise comparativa do modelo nebulosos proposto com os modelos presentes na literatura existente.

Metodologia	Antecedente	Consequente	Aprendizado
(Serra; Bottura, 2009)	Conjuntos nebulosos tipo-1	TSK - autoregressivo	Recursivo - IV
(Filho; Serra, 2018)	Conjuntos nebulosos tipo-1	TSK - autoregressivo	Evolutivo - IV
(Rodrigues; Serra, 2022)	Conjuntos nebulosos tipo-1	TSK - Espaço de Estados crisp	Evolutivo - Componentes não-observáveis
(Gomes; Serra, 2024)	Conjuntos nebulosos tipo-2 intervalares	TSK - Espaço de Estados intervalar	Evolutivo - MQ - ERA/OKID
Proposta da tese	Conjuntos nebulosos tipo-2 intervalares	TSK - Espaço de Estados crisp	Evolutivo - IV - Subespaço

Tabela 2 – Análise comparativa da metodologia proposta com a literatura existente.

Metodologias	Principais diferenças para a metodologia proposta
(Serra; Bottura, 2009)	A utilização da teoria dos conjuntos nebulosos tipo-2 torna o algoritmo proposto mais robusto a ruídos. A metodologia proposta utiliza um sistema evolutivo e os submodelos são no espaço de estados, sendo um <i>framework</i> mais apropriado para sistema MIMO.
(Filho; Serra, 2018)	A utilização da teoria dos conjuntos nebulosos tipo-2 torna o algoritmo proposto mais robusto a ruídos. Os submodelos são no espaço de estados, sendo um framework mais apropriado para sistema MIMO.
(Rodrigues; Serra, 2022)	A utilização da teoria dos conjuntos nebulosos tipo-2 torna o algoritmo proposto mais robusto a ruídos.
(Gomes; Serra, 2024)	O algoritmo proposto apresenta menor custo computacional, uma vez que utiliza consequente <i>crisp</i> , ou seja, sem considerar um submodelo intervalar. O algoritmo de subespaço pode apresentar um custo computacional menor, uma vez que não utiliza um método iterativo para cálculo dos parâmetros e Markov do sistema.

1.1 Motivação e relevância

A modelagem matemática desempenha um papel fundamental em uma variedade de campos científicos e de engenharia, fornecendo uma estrutura precisa para entender, analisar e prever fenômenos complexos. Através de modelos matemáticos, é possível realizar uma ampla gama de análises, estimar quantidades, conduzir testes de hipóteses, realizar filtragem e previsão de sinais, bem como controlar sistemas dinâmicos, entre outras aplicações (Fowler, 1997; Umulis; Othmer, 2014; Mishra *et al.*, 2021). No entanto, quando se lida com dados experimentais em aplicações de modelagem, é comum deparar-se com complexidades, incertezas, ruído correlacionado, não linearidades, variações temporais e perturbações. Esses desafios têm atraído a atenção de pesquisadores, resultando no desenvolvimento de várias abordagens para lidar com essas complexidades.

1.1.1 Aspectos relevantes sobre variáveis instrumentais

Com base na teoria de identificação de sistemas lineares, a aplicação de métodos baseados em Mínimos Quadrados (MQ) é adequada em cenários onde o nível de ruído nos dados é baixo. Contudo, em ambientes com níveis elevados de ruído, o método de MQ sofre de polarização na estimação dos parâmetros. Para mitigar esse problema, métodos como Mínimos Quadrados Generalizados (MQG), Mínimos Quadrados Estendidos (MQE) e Predição de Erro foram desenvolvidos, visando melhorar a identificação de sistemas em ambientes ruidosos (Ljung, 1999).

Um aspecto crítico desses métodos é a necessidade de modelar com precisão o sinal de ruído. Essa exigência, no entanto, pode ser evitada por meio do uso de métodos de Variáveis Instrumentais (VI). O método VI baseia-se na seleção de variáveis instrumentais que apresentem alta correlação com a dinâmica do sistema e baixa correlação com o ruído (Aguirre, 2007; Soderstrom; Stoica, 2002). Quando instrumentos adequados são escolhidos, é possível obter uma estimação consistente dos parâmetros do modelo, com propriedades estatísticas ótimas (Ljung, 1999; Soderstrom; Stoica, 2002; Serra; Bottura, 2009).

De acordo com Serra e Bottura (2007), o método de VI pode ser aplicado na estimação dos parâmetros consequentes em ambientes ruidosos, apresentando a vantagem de reduzir o esforço computacional e a complexidade do modelo, sem a necessidade de modelar explicitamente o ruído.

1.1.2 Aspectos relevantes sobre modelo nebuloso tipo-2 intervalar

A utilização de modelos nebulosos tipo-2 intervalares frente à versão tipo-1 se destaca pelo fato de lidar com incertezas e variabilidades significativas em um sistema. Neste aspecto, destaca-se:

- **Modelagem de Incerteza:** Um modelo nebuloso tipo-2 intervalar oferece uma abordagem robusta para a representação de incertezas, utilizando uma estrutura intervalar caracterizada como uma região de confiança. Essa modelagem permite capturar tanto a incerteza epistêmica, associada a limitações no conhecimento ou crenças, quanto a incerteza aleatória, decorrente de variações estocásticas. Essa capacidade de caracterizar diferentes fontes de incerteza de forma mais abrangente é especialmente vantajosa na análise de sistemas complexos, onde a quantificação precisa das incertezas é inviável devido à natureza intrínseca das variabilidades envolvidas. (Castillo, 2007).
- **Tolerância a Variações Significativas:** Os sistemas do mundo real muitas vezes apresentam variações significativas devido a diversas razões, como mudanças nas condições operacionais ou ruído nos dados de entrada. Nestes casos, o modelo nebuloso tipo-2 intervalar tende a apresentar maior robustez (Kayacan, 2011).

- **Adaptação a Ambientes Ruidosos:** Em ambientes ruidosos, onde a precisão dos dados é limitada, os modelos nebulosos tipo-2 intervalares destacam-se como uma abordagem eficaz para lidar com as incertezas introduzidas pelo ruído, possibilitando uma estimação e predição mais robustas (Karnik; Mendel; Liang, 1999; ZADEH, 1975). No estudo de Kayacan e Khanesar (2016), foi analisado o impacto do ruído de entrada na base de regras e comparado o desempenho do Sistema Lógico Nebuloso Tipo-2 Intervalar (SLN T2I) com sua contraparte do tipo-1 em condições ruidosas. Os resultados demonstraram que os modelos nebulosos tipo-2 intervalares apresentam desempenho significativamente superior em relação aos modelos do tipo-1 em ambientes com ruído, corroborando achados similares reportados na literatura.

Apesar de importantes contribuições na área de identificação nebulosa no espaço de estados (Torres; Serra, 2018; Santos; Serra, 2018; Pires; Serra, 2018) e em identificação de sistemas não-lineares em ambiente ruidoso (Serra; Bottura, 2007; Filho; Serra, 2018), a integração dessas abordagens é uma questão em aberto. Portanto, o objetivo desta tese de doutorado é propor uma metodologia de identificação nebulosa no espaço de estados evolutiva, baseada na teoria de conjuntos nebulosos tipo-2 intervalares e no método de variáveis instrumentais.

1.2 Trabalhos anteriores e contribuições da tese

O trabalho desenvolvido nesta tese é uma evolução dos resultados apresentados na dissertação de mestrado do mesmo autor, orientada pelo Prof. Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra e intitulada "Metodologia de Identificação de Sistemas Dinâmicos Multivariáveis Baseada em Modelo Neuro-Fuzzy no Espaço de Estados com Inferência Evolutiva Tipo-2 Intervalar" (Evangelista; Serra, 2019). A dissertação teve como objetivo principal o desenvolvimento de uma metodologia para identificação de sistemas no espaço de estados, utilizando o conceito de conjuntos nebulosos tipo-2 intervalares. Para isso, foi empregado um método de agrupamento evolutivo nebuloso baseado em gaussianas multivariáveis, integrado a um algoritmo de estimação de subespaço fundamentado na abordagem de mínimos quadrados.

Apesar de seu mérito, a metodologia apresentada na dissertação enfrentava uma limitação relevante: sua incapacidade de tratar problemas de identificação não estacionários, em grande parte devido à dependência do algoritmo de mínimos quadrados. A pesquisa desenvolvida nesta tese aprimorou e expandiu essa metodologia para abordar tais limitações, possibilitando a identificação de sistemas dinâmicos não lineares em ambientes ruidosos, caracterizados por ruído autocorrelacionado. Para isso, foi desenvolvido um algoritmo de agrupamento evolutivo e intervalar do tipo-2, baseado em uma abordagem multi-escala, combinado com um algoritmo recursivo de subespaço fundamentado em variáveis instrumentais nebulosas.

Uma contribuição notável desta tese foi a implementação de um algoritmo Recursivo de Análise Espectral Singular (RSSA, do inglês *Recursive Singular Spectrum Analysis*) para a obtenção dos instrumentos necessários ao algoritmo de variáveis instrumentais. Esse algoritmo

realiza a decomposição do sinal em componentes não observáveis, que contêm informações tanto da dinâmica do sistema quanto do ruído. Com essa abordagem, foi possível construir um vetor de instrumentos descorrelacionado do ruído, eliminando as componentes relacionadas a este e permitindo a estimação não polarizada dos parâmetros do modelo. Além disso, o algoritmo de Análise Espectral Singular foi implementado na primeira camada do modelo neuro-nebuloso, contribuindo para a mitigação dos efeitos do ruído na estimação da saída.

No que diz respeito à saída do modelo neuro-nebuloso, a abordagem adotada foi baseada em uma saída intervalar, gerada pelos conjuntos nebulosos tipo-2. Esse intervalo foi interpretado como a região de confiança da saída do modelo, representando uma inovação em relação aos estudos existentes na literatura. Tal abordagem não apenas proporciona maior robustez ao lidar com incertezas, mas também aprimora a confiabilidade das estimativas realizadas, tornando esta contribuição um diferencial significativo desta pesquisa.

Em resumo, a originalidade e as principais contribuições da metodologia de variável instrumental nebulosa tipo-2 no espaço de estados para identificação evolutiva de sistemas dinâmicos não-estacionários são destacadas a seguir:

- Proposta de um algoritmo de variáveis instrumentais no contexto nebuloso tipo-2 intervalar para estimação recursiva de parâmetros de Markov;
- Utilização de componentes não observáveis para obtenção do vetor de variáveis instrumentais, que está correlacionado com a dinâmica do sistema e descorrelacionado com o ruído.
- Aprendizado evolutivo baseado em algoritmo de agrupamento nebuloso tipo-2 de multi-escala, no qual a normalização dos dados não é necessária.
- Proposta de uma composição de regras nebulosa tipo-2 para estimação de uma região incerta. O ajuste da região incerta é realizado através de uma regra de adaptação baseada na ação proporcional-integral.

A metodologia proposta apresenta os seguintes aspectos de interesse

- **Adaptabilidade do modelo:** O algoritmo de aprendizado proposto permite a adaptação da estrutura e dos parâmetros do modelo de observador de espaço nebuloso tipo-2 apresentado por meio de uma abordagem evolutiva. Essa abordagem é orientada à dados experimentais e torna possível a aplicação da metodologia proposta em problemas de identificação online e em tempo real.
- **Tratabilidade de incertezas e de ruídos correlacionados presentes nos dados experimentais:** Com a aplicação da filtragem por meio de componentes não observáveis e da estimação não polarizada utilizando variáveis instrumentais nebulosas do tipo-2, é possível mitigar significativamente os efeitos de ruídos correlacionados no aprendizado da

estrutura do modelo e estimação dos parâmetros dos submodelos. Isso evita a formação de agrupamentos devido a dados espúrios e contribui para a estimação dos parâmetros dos submodelos, uma vez que o algoritmo de variáveis instrumentais garante convergência assintótica não polarizada.

1.3 Objetivos da pesquisa

1.3.1 Objetivo geral

A presente tese tem como objetivo desenvolver uma metodologia de identificação de sistemas não lineares em ambiente ruidosos baseada em modelagem neuro-nebulosa tipo-2 evolutiva com robustez a ruídos na estimação tanto do antecedente como do consequente das regras.

1.3.2 Objetivos específicos

Neste trabalho são apresentadas os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver uma metodologia que integra as técnicas de Sistemas nebulosos tipo-2 intervalares, Variáveis Instrumentais aplicada na identificação no espaço de estados e modelos evolutivos.
- Apresentar uma metodologia de modelagem no espaço de estados considerando o abordagem de subespaço via dados experimentais.
- Abordar questões de convergência e consistência do algoritmo desenvolvido;
- Avaliar o desempenho da metodologia proposta e comparar os resultados obtidos com metodologias presentes na literatura.

1.4 Produções bibliográficas

As publicações produzidas durante a pesquisa de doutorado até o momento são apresentadas a seguir:

- Evangelista, A. P. F.; Serra, G. L. O. Type-2 fuzzy instrumental variable algorithm for evolving neural-fuzzy modeling of nonlinear dynamic systems in noisy environment. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, v. 109, p. 104620, 2022. DOI: <<https://doi.org/10.1016/j.engappai.2021.104620>>. (Evangelista; Serra, 2022)
- EVANGELISTA, Anderson P. F.; SERRA, Ginalber L. O. *A type-2 fuzzy state observer model for non-stationary dynamic system identification: an incremental learning method with noise handling*. In: CHEN, Peter; NAZIR, Muhammad Shahzad (Eds.). *Nonlinear systems - recent advances and application*. [S.l.]: Intech Open, 2024. p. –. DOI: <<https://doi.org/10.5772/intechopen.1004751>>. (Evangelista; Serra, 2024)

1.5 Organização da tese de doutorado

Esta tese objetiva apresentar um Algoritmo de Variável Instrumental Nebulosa Tipo-2 no Espaço de Estados para Identificação Evolutiva de Sistemas Dinâmicos Não-estacionários. No capítulo 2, são expostos conceitos fundamentais necessários para o desenvolvimento da metodologia proposta, tais como sistemas nebulosos tipo-2, abordagem das variáveis instrumentais e sistemas evolutivos. A estrutura do modelo adotada é apresentada no capítulo 3, sendo esta um modelo neuro-nebuloso tipo-2 intervalar de observador de estados, acompanhada pela descrição de cada camada da rede. Os resultados computacionais e experimentais que demonstram a eficiência e aplicabilidade da metodologia proposta são abordados no capítulo 4, onde foram adotados os seguintes experimentos: Identificação de um sistema dinâmico SISO não linear, identificação de sistema não linear SISO com função descontínua em ambiente ruidoso, estimação online da posição de um foguete de teste em ambiente ruidoso, estimação online de um helicóptero de dois graus de liberdade e a identificação online de um sistema multivariável não linear e variante no tempo em ambiente ruidoso. Finalmente, no capítulo 5, são delineadas as conclusões desta tese.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Teoria da realização de sistemas

Nesta seção são apresentados os conceitos fundamentais relacionados à identificação de sistemas no espaço de estados, também conhecida como realização de sistemas. A teoria de realização de sistemas é uma área fundamental da identificação de sistemas, que se concentra na representação matemática de sistemas dinâmicos a partir de dados observados experimentalmente. Essa representação, conhecida como modelo de realização, descreve as relações entre as entradas, saídas e estados do sistema, permitindo análises detalhadas do comportamento dinâmico e a construção de modelos que capturam as características essenciais do sistema real (Ljung, 1999; Juang, 1994). Este método pode ser utilizado tanto na identificação de sistemas de entrada única e saída única (do inglês SISO - *Single-input and single-output*) como para sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas (do inglês MIMO - *Multiple-input and multiple-output*). A teoria de realização de sistemas é aplicável a uma ampla gama de áreas, incluindo engenharia de controle, processamento de sinais, robótica, economia e biologia, onde a compreensão e modelagem de sistemas dinâmicos são essenciais para o projeto e desenvolvimento de sistemas complexos.

Considere um sistema dinâmico Linear Invariante no Tempo (LIT) descrito pela equação:

$$\mathbf{x}|_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}|_k + \mathbf{B}\mathbf{u}|_k \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}|_k = \mathbf{C}\mathbf{x}|_k + \mathbf{D}\mathbf{u}|_k \quad (2.2)$$

onde n, m, p são a ordem do sistema, número de entradas e número de saídas, respectivamente. As matrizes $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ são os parâmetros do modelo de espaço de estados, $\mathbf{x}|_k = [x_1|_k \ x_2|_k \ \cdots \ x_n|_k] \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\mathbf{y}|_k = [y_1|_k \ y_2|_k \ \cdots \ y_p|_k] \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saídas, $\mathbf{u}|_k = [u_1|_k \ u_2|_k \ \cdots \ u_m|_k] \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas. Deste modo, o problema de realização é definido da seguinte forma: dado uma medição $y|_k$, o objetivo é estimar as matrizes do modelo de espaço de estados $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]$, de modo que a medições da saída y sejam reproduzidas de acordo com as equações do espaço de estados (Juang; Pappa, 1985).

2.1.1 Parâmetros de Markov

Na teoria de identificação de sistemas, existem vários tipos de sinais de entrada que são particularmente importantes, tanto em aspectos teóricos quanto práticos. Entre esses sinais, o sinal de **impulso** é comumente utilizado para estimar os parâmetros modais de sistemas dinâmicos (Juang, 2011). Considerando um sistema dinâmico SISO, dado pelas Eqs. (2.1)-(2.2), com condições iniciais $x_0 = 0$, a aplicação de uma entrada impulso resulta na propagação dos

estados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}|_0 = \mathbf{0} & \implies \mathbf{y}|_0 = \mathbf{D} \\
 \mathbf{x}|_1 = \mathbf{B} & \implies \mathbf{y}|_1 = \mathbf{CB} \\
 \mathbf{x}|_2 = \mathbf{AB} & \implies \mathbf{y}|_2 = \mathbf{CAB} \\
 & \vdots \\
 \mathbf{x}|_k = \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} & \implies \mathbf{y}|_k = \mathbf{CA}^{k-1}\mathbf{B}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde os parâmetros de Markov são definidos por:

$$\Xi|_j = \begin{cases} \mathbf{D} & \text{se } j = 0 \\ \mathbf{C}(\mathbf{A})^{j-1}\mathbf{B} & \text{se } j > 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Os parâmetros de Markov são amplamente utilizados como base em muitos métodos de identificação de sistemas dinâmicos lineares, uma vez que, como observado em (2.4), as matrizes $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$ formam a matriz de parâmetros de Markov Ξ . Para uma entrada impulso, os parâmetros de Markov devem ser únicos para um sistema dinâmico linear. Assim, uma transformação no vetor de estados de um sistema, tal como $\hat{\mathbf{x}}|_k = \mathbf{T}\mathbf{x}|_k$, produz os mesmos parâmetros de Markov (Juang, 2011), tal que:

$$\Xi = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})^{k-1}\mathbf{T}\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \tag{2.5}$$

Desta forma, há um infinito número de transformações que geram a mesma sequência de parâmetros de Markov. Conclui-se, portanto, que a tripla $[\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \mathbf{T}\mathbf{B}, \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}]$ também é uma realização do sistema dado pelas Eqs. (2.1)-(2.2), desde que os autovalores (parâmetros modais) de \mathbf{A} sejam mantidos.

Para um sistema dinâmico ser assintoticamente estável, este deve satisfazer a condição de matriz nilpotente para a matriz \mathbf{A} , ou seja, o sistema é estável se existir um inteiro positivo q_p suficientemente grande tal que $\mathbf{A}^{q_p} \approx \mathbf{0}$ (ver Apêndice A.1). Atendida esta condição e para $k > q_p$, a relação entrada-saída do sistema pode ser dada em função dos parâmetros de Markov e pelo histórico dos sinais de entrada e saída, como segue:

$$\mathbf{y}|_k = \sum_{j=1}^k \mathbf{C}\mathbf{A}^{j-1}\mathbf{B}u|_{k-j} + \mathbf{D}u|_k \tag{2.6}$$

Limitando o número de parâmetros de Markov a q_p , tem-se:

$$\mathbf{y}|_k = \sum_{j=1}^{q_p} \mathbf{C}\mathbf{A}^{j-1}\mathbf{B}u|_{k-j} + \mathbf{D}u|_k \tag{2.7}$$

Desta forma, uma vez que o sistema é assintoticamente estável, a matriz de parâmetros de Markov pode ser estimada por meio do método dos mínimos quadrados, conforme descrito a seguir:

$$\Xi = \mathbf{Y}|_k \mathbf{U}|_k^T [\mathbf{U}|_k \mathbf{U}|_k^T]^{-1} \tag{2.8}$$

onde

$$\mathbf{Y}|_k = [y|_{q_p}, y|_{q_p+1}, \dots, y|_k] \quad (2.9)$$

$$\mathbf{U}|_k = \begin{bmatrix} u|_{q_p} & u|_{q_p+1} & \cdots & u|_k \\ u|_{q_p-1} & u|_{q_p} & \cdots & u|_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u|_0 & u|_1 & \cdots & u|_{k-q_p} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

2.1.2 Controlabilidade e observabilidade

Na área de controle e identificação de sistemas, um questionamento pertinente é se todos os estados de um dado sistema são controláveis e/ou observáveis. Tal questão pode ser verificada a partir de técnicas utilizadas na representação no espaço de estados. A solução para Eqs. (2.1)-(2.2), no tempo discreto, é dado por:

$$\mathbf{x}|_k = \mathbf{A}^k \mathbf{x}|_0 + \sum_{j=1}^k \mathbf{A}^{j-1} \mathbf{B} \mathbf{u}|_{k-j} \quad (2.11)$$

ou na forma matricial

$$\mathbf{x}|_k = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}|_{k-1} \\ \mathbf{u}|_{k-2} \\ \mathbf{u}|_{k-3} \\ \vdots \\ \mathbf{u}|_0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

2.1.2.1 Controlabilidade

Um sistema LIT é dito controlável se os estados \mathbf{x} podem ser alcançados a partir de qualquer estado inicial do sistema em um intervalo finito de tempo por alguma ação de controle. Em outras palavras, se for possível obter uma entrada capaz de transferir todas as variáveis de estado de um valor inicial desejado para um estado final desejado, o sistema é dito **controlável** (Nise, 2011).

Para determinar a controlabilidade de um sistema em um determinado instante de tempo, é condição necessária e suficiente que o estados nulos, em vez de todas as condições iniciais possíveis, possam ser transferidos para todos os estados finais possíveis. Para justificar essa afirmação, a equação de estado (2.11) pode ser formulada como segue:

$$\hat{\mathbf{x}}|_k = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}|_{k-1} \\ \mathbf{u}|_{k-2} \\ \mathbf{u}|_{k-3} \\ \vdots \\ \mathbf{u}|_0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Desta forma, se for possível demonstrar que o sistema pode ir do estado nulo $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ até um estado final desejado $\hat{\mathbf{x}}|_k$, então pode-se mover os estados de qualquer ponto inicial $\mathbf{x}|_0$ à um ponto final $\hat{\mathbf{x}}|_k$.

Teorema 2.1. *Um sistema LIT, de dimensão finita, discreto no tempo, de ordem n é controlável se, e somente se, a matriz de controlabilidade $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{n \times km}$ possuir posto cheio, onde*

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Prova: ver Chen (1998)

2.1.2.2 Observabilidade

Um sistema LIT é dito observável se o conhecimento do sinal de entrada $\mathbf{u}|_j$ e da saída $\mathbf{y}|_j$ em um intervalo de tempo finito $0 < j < k$ determinarem completamente o estado $\mathbf{x}|_k$. Em outras palavras, se for possível obter um vetor de estado inicial $\mathbf{x}|_0$, a partir da medida de $\mathbf{u}|_k$ e de $\mathbf{y}|_k$ durante um intervalo de tempo finito a partir de um instante inicial, o sistema é dito observável (Nise, 2011).

Para determinar a observabilidade de um sistema, é condição necessária e suficiente que os estados iniciais da resposta a entrada nula possam ser determinados a partir da saída $\mathbf{y}|_j$, ($j = 0, 1, \dots, k-1$), porque o conhecimento do estado inicial $\mathbf{x}|_0$ e da entrada $\mathbf{u}|_j$ permite o cálculo do estado $\mathbf{x}|_{k-1}$ a partir de (2.11).

Teorema 2.2. *Um sistema LIT, de dimensão finita, discreto no tempo, de ordem n , com cálculo de saída dada por (2.2), é observável se, e somente se, a matriz de observabilidade $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{n \times kp}$ possuir posto cheio, onde*

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{k-1} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Prova: ver Chen (1998)

2.1.3 Formulações estendidas do modelo de espaço de estados

A partir das equações do modelo de espaço de estados (2.1)-(2.2), formulações importantes para os métodos de identificação no espaço de estados de sistemas dinâmicos são apresentadas a seguir.

2.1.3.1 Formulação via matriz de Toeplitz

Seja um sistema dinâmico descrito pelas Eqs. (2.1)-(2.2), o histórico de saídas $\check{\mathbf{y}}|_{k+q_f} \in \mathbb{R}^{p(q-1f)}$ entre os instantes $k, k+1, \dots, k+q_f$, dado por $\check{\mathbf{y}}|_{k+q_f} = [\mathbf{y}^T|_k, \mathbf{y}^T|_{k+1}, \mathbf{y}^T|_{k+2},$

$\dots, \mathbf{y}^T|_{k+q_f}]^T$, obedece a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{y}}|_{k+q_f} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{q_f-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}|_k + \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CA}^{q_f-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{q_f-3}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}|_k \\ \mathbf{u}|_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}|_{k+q_f-1} \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{O}\mathbf{x}|_k + \mathcal{T}\check{\mathbf{u}}|_{k+q_f} \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde \mathcal{O} é a matriz de observabilidade, $\check{\mathbf{u}}|_{k+q_f}$ é definida de forma similar a $\check{\mathbf{y}}|_{k+q_f}$ e \mathcal{T} é a matriz de resposta ao impulso, também denominada matriz de Toeplitz, sendo composta pelos parâmetros de Markov, tal que:

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \Xi|_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \Xi|_1 & \Xi|_0 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Xi|_{j-1} & \Xi|_{j-2} & \cdots & \Xi|_0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

2.1.3.2 Formulação com observador de estados

Baseado na teoria de Filtro de Kalman (FK), adicionando um observador de estados \mathbf{K} nas Eqs. (2.1)-(2.2), tem-se

$$\begin{cases} \mathbf{x}|_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}|_k + \mathbf{B}\mathbf{u}|_k + \mathbf{K}\mathbf{e}|_k \\ \mathbf{y}|_k = \mathbf{C}\mathbf{x}|_k + \mathbf{D}\mathbf{u}|_k + \mathbf{e}|_k \end{cases} \quad (2.18)$$

onde $\mathbf{e}|_k = \mathbf{y}|_k - \hat{\mathbf{y}}|_k$ é um sequência de ruído branco com $E[\mathbf{e}|_k \mathbf{e}^T|_k] = \mathbf{R}_e$, $\hat{\mathbf{y}}|_k$ é a estimação do modelo e \mathbf{K} é o ganho do Filtro de Kalman. Reescrevendo (2.18) como segue:

$$\begin{cases} \mathbf{x}|_{k+1} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{x}|_k + \dot{\mathbf{B}}\mathbf{u}|_k + \mathbf{K}\mathbf{y}|_k \\ \mathbf{y}|_k = \mathbf{C}\mathbf{x}|_k + \mathbf{D}\mathbf{u}|_k + \mathbf{e}|_k \end{cases} \quad (2.19)$$

onde $\dot{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}]$ e $\dot{\mathbf{B}} = [\mathbf{B} - \mathbf{K}\mathbf{D}]$. Considerando o histórico de dados em uma janela de tempo dada de $k - q_p$ até $k - 1$, os seguinte vetores são definidos: $\check{\mathbf{u}}_{k-q_p} = [\mathbf{u}|_{k-q_p}^T, \mathbf{u}|_{k-q_p+1}^T, \dots, \mathbf{u}|_{k-1}^T]^T \in \mathbb{R}^{m(q_p-1)}$, $\check{\mathbf{y}}|_{k+q_p} = [\mathbf{y}^T|_{k-q_p}, \mathbf{y}^T|_{k-q_p+1}, \dots, \mathbf{y}^T|_{k-1}]^T \in \mathbb{R}^{p(q_p-1)}$, sendo q_p e q_f deslocamentos à esquerda e à direita no tempo discreto, respectivamente. Desta forma, uma representação baseada na matriz de Toeplitz para (2.18) é dado a seguir:

$$\begin{cases} \mathbf{x}|_k = \mathbf{A}^{q_p}\mathbf{x}|_{k-q_p} + \mathcal{C}_B\check{\mathbf{u}}_{k-q_p} + \mathcal{C}_K\check{\mathbf{e}}|_{k-q_p} \\ \check{\mathbf{y}}|_{k+q_f} = \mathcal{O}\mathbf{x}|_k + \mathcal{T}\check{\mathbf{u}}|_{k+q_f} + \mathcal{H}\check{\mathbf{e}}|_{k+q_f} \end{cases} \quad (2.20)$$

onde

$$\mathcal{C}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{k-2}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

$$\mathcal{C}_K = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{K} & \mathbf{A}^{k-2}\mathbf{K} & \cdots & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CK} & \mathbf{I} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CA}^{q_f-2}\mathbf{K} & \mathbf{CA}^{q_f-3}\mathbf{K} & \cdots & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

e $\check{\mathbf{e}}_{k-q_p} = [\mathbf{e}|_{k-q_p}^T, \mathbf{e}|_{k-q_p+1}^T \cdots \mathbf{e}|_{k-1}^T]^T \in \mathbb{R}^{p(q_p-1)}$. Para (2.19), a representação baseada na matriz de Toeplitz é dada como segue:

$$\begin{cases} \mathbf{x}|_k = \dot{\mathbf{A}}^{q_p}\mathbf{x}|_{k-q_p} + \dot{\mathcal{C}}_B\check{\mathbf{u}}_{k-q_p} + \dot{\mathcal{C}}_K\check{\mathbf{y}}_{k-q_p} \\ \check{\mathbf{y}}|_{k+q_f} = \dot{\mathcal{O}}\mathbf{x}|_{k+q_f} + \dot{\mathcal{T}}\check{\mathbf{u}}|_{k+q_f} + (\mathbf{I} - \dot{\mathcal{H}})\check{\mathbf{y}}|_{k+q_f} + \check{\mathbf{e}}|_{k+q_f} \end{cases}, \quad (2.24)$$

onde $\dot{\mathcal{C}}_B$, $\dot{\mathcal{C}}_K$, $\dot{\mathcal{O}}$ e $\dot{\mathcal{T}}$ são definidas de forma similar a Eqs.(2.21), (2.22), (2.15) e (2.17) e

$$\dot{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{CK} & \mathbf{I} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{CA}^{q_f-2}\mathbf{K} & \mathbf{CA}^{q_f-3}\mathbf{K} & \cdots & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Assumindo que o sistema dinâmico é assintoticamente estável, isso implica que existe um número inteiro suficientemente grande, denominado aqui de q_p , tal que $\dot{\mathbf{A}}^{q_p} \approx \mathbf{0}$. Em outras palavras, se a matriz $\dot{\mathbf{A}}$ é nilpotente (ver Apêndice A.1) o sistema é assintoticamente estável. Nesse termo, (2.24) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{x}|_k = \dot{\mathcal{C}}_B\check{\mathbf{u}}|_{k-q_p} + \dot{\mathcal{C}}_K\check{\mathbf{y}}|_{k-q_p}, \quad (2.26)$$

assim, os estados $\mathbf{x}|_k$ podem ser estimados a partir de amostras de entradas e saídas em instantes passados.

2.1.4 Método de subespaço via parâmetros de Markov

Pré-multiplicando a matriz de observabilidade $\dot{\mathcal{O}}$ em (2.26), tem-se:

$$\dot{\mathcal{O}}\mathbf{x}|_k = \dot{\mathcal{O}}\dot{\mathcal{C}}_B\check{\mathbf{u}}|_{k-q_p} + \dot{\mathcal{O}}\dot{\mathcal{C}}_K\check{\mathbf{y}}|_{k-q_p}, \quad (2.27)$$

tal que

$$\dot{O}\dot{C}_B = \begin{bmatrix} C\dot{A}^{q_p-1}\dot{B} & C\dot{A}^{q_p-2}\dot{B} & \dots & C\dot{B} \\ C\dot{A}^{q_p}\dot{B} & C\dot{A}^{q_p-1}\dot{B} & \dots & C\dot{A}\dot{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C\dot{A}^{q_p+q_f-2}\dot{B} & C\dot{A}^{q_p+q_f-3}\dot{B} & \dots & C\dot{A}^{q_f-1}\dot{B} \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

$$\dot{O}\dot{C}_K = \begin{bmatrix} C\dot{A}^{q_p-1}K & C\dot{A}^{q_p-2}K & \dots & CK \\ C\dot{A}^{q_p}K & C\dot{A}^{q_p-1}K & \dots & C\dot{A}K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C\dot{A}^{q_p+q_f-2}K & C\dot{A}^{q_p+q_f-3}K & \dots & C\dot{A}^{q_f-1}K \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Os elementos das matrizes acima são os parâmetros de Markov da representação de espaço de estados com observador (em(2.18)), tal que

$$\dot{\Xi}_u|_{k-j} = \begin{cases} D & \text{if } j = 0 \\ C(\dot{A})^{j-1}\dot{B} & \text{if } j > 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\dot{\Xi}_y|_{k-j} = C(\dot{A})^{j-1}K, \quad (2.31)$$

onde $\dot{\Xi}_u|_{k-j}$ são os parâmetros de Markov relacionados aos sinais de entrada e $\dot{\Xi}_y|_{k-j}$ são os parâmetros de Markov relacionados aos sinais de saída do sistema dinâmico. Considerando que \dot{A} é nilpotente, as matrizes $\dot{O}\dot{C}_B$ e $\dot{O}\dot{C}_K$ são reescritas como segue:

$$\dot{O}\dot{C}_B = \begin{bmatrix} \dot{\Xi}_u|_{k-q_p} & \dot{\Xi}_u|_{k-q_p+1} & \dots & \dot{\Xi}_u|_{k-q_p+q_f-1} & \dots & \dot{\Xi}_u|_{k-q_p-1} \\ 0 & \dot{\Xi}_u|_{k-q_p} & \dots & \dot{\Xi}_u|_{k-q_p+q_f-2} & \dots & \dot{\Xi}_u|_{k-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dot{\Xi}_u|_{k-q_p} & \dots & \dot{\Xi}_u|_{k-q_p+q_f} \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

e

$$\dot{O}\dot{C}_K = \begin{bmatrix} \dot{\Xi}_y|_{k-q_p} & \dot{\Xi}_y|_{k-q_p+1} & \dots & \dot{\Xi}_y|_{k-q_p+q_f-1} & \dots & \dot{\Xi}_y|_{k-q_p-1} \\ 0 & \dot{\Xi}_y|_{k-q_p} & \dots & \dot{\Xi}_y|_{k-q_p+q_f-2} & \dots & \dot{\Xi}_y|_{k-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dot{\Xi}_y|_{k-q_p} & \dots & \dot{\Xi}_y|_{k-q_p+q_f} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

2.1.4.1 Estimação dos parâmetros de Markov do observador

Chiuso e Picci (2005) demostram que um modelo auto-regressivo com entradas exógenas (no inglês *Vector Auto-Regressive eXogenous input VARX*), descrito por

$$\mathbf{y}|_k = \sum_{j=0}^{q_p} \dot{\Xi}_u|_{k-j} \mathbf{u}|_{k-j} + \sum_{j=1}^{q_p} \dot{\Xi}_y|_{k-j} \mathbf{y}|_{k-j}, \quad (2.34)$$

pode ser utilizado para aproximar a dinâmica de um sistema descrito por (2.18).

Proposição 2.1. *Se o sistema for assintoticamente estável, a matriz $\dot{\mathbf{A}}$ será nilpotente (ver Apêndice A.1). Como consequência, a contribuição dos estados $\mathbf{x}|_k$ para $k > q_p$ em (2.20) torna-se desprezível, o que implica que o estado atual $\mathbf{x}|_k$ passa a depender exclusivamente dos valores das entradas e saídas do sistema. Assim, os parâmetros de Markov associados ao observador podem ser diretamente relacionados aos parâmetros de um modelo VARX, conforme apresentado em (2.34). **Prova:** ver Chiuso e Picci (2005).*

Portanto (2.34) pode ser reescrita como segue:

$$\mathbf{y}|_k = \dot{\mathbf{\Xi}}\phi|_k + \mathbf{e}|_k, \quad (2.35)$$

onde $\phi|_k = [\check{\mathbf{u}}^T|_k, \mathbf{u}^T|_{k-q_p}, \check{\mathbf{y}}^T|_{k-q_p}]^T$, $\phi|_k \in \mathbb{R}^{(m+p)q_p+m}$, é o vetor de regressores e $\dot{\mathbf{\Xi}} = [\dot{\mathbf{\Xi}}_u|_{k-q_p}, \dots, \dot{\mathbf{\Xi}}_u|_k, \dot{\mathbf{\Xi}}_y|_{k-q_p}, \dots, \dot{\mathbf{\Xi}}_y|_{k-1}]$ ($\dot{\mathbf{\Xi}} \in \mathbb{R}^{p \times [(m+p)q_p+m]}$) é matriz de parâmetros de Markov do observador. Seja um conjunto de dados experimentais entre os instantes q_p e k ($k > q_p$), uma formulação em batelada é expressa por:

$$\mathbf{Y}|_k = \dot{\mathbf{\Xi}}\Phi|_k, \quad (2.36)$$

onde

$$\mathbf{Y}|_k = [\mathbf{y}|_{q_p+1} \ \mathbf{y}|_{q_p+2} \ \cdots \ \mathbf{y}|_k] \in \mathbb{R}^{p \times (k-q_p)}, \quad (2.37)$$

$$\Phi|_k = [\phi|_{q_p+1} \ \phi|_{q_p+2} \ \cdots \ \phi|_k] \in \mathbb{R}^{[q_p(p+m)+m] \times (k-q_p)}. \quad (2.38)$$

Com base em (2.36), os parâmetros de Markov do observador podem ser estimados via método dos mínimos quadrados, ou seja

$$\dot{\mathbf{\Xi}} = \mathbf{Y}|_k(\Phi|_k)^T \left[\Phi|_k(\Phi|_k)^T \right]^{-1} \quad (2.39)$$

2.1.4.2 Estimação em batelada dos estados do sistema

Descrição do problema: Dado um conjunto de dados de entradas e saídas do instante $k = \{0, 1, \dots, N-1\}$, estimar as matrizes $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{K}]$. Baseado nos parâmetros de Markov do observador e em (2.27), a estimação em batelada do histórico dos estados \mathbf{X} pode ser realizada aplicando os seguintes passos:

Passo 1: Estimar os parâmetros de Markov da representação com observador de estados (ver (2.39)).

Passo 2: Calcular as matrizes $\dot{\mathcal{O}}\dot{\mathcal{C}}_B$ ((2.32)) e $\dot{\mathcal{O}}\dot{\mathcal{C}}_L$ ((2.33)).

Passo 3: Calcular a formulação em batelada de (2.27) como segue:

$$\check{\mathbf{O}}\mathbf{X} = \check{\mathcal{O}}\dot{\mathcal{C}}_B\check{\mathbf{U}}|_{q_p} + \dot{\mathcal{O}}\dot{\mathcal{C}}_K\check{\mathbf{Y}}|_{q_p} \quad (2.40)$$

onde

$$\check{\mathbf{U}}|_{qp} = [\check{\mathbf{u}}|_0 \ \check{\mathbf{u}}|_1 \ \check{\mathbf{u}}|_2 \ \cdots \ \check{\mathbf{u}}|_{N-qp}]^T$$

e

$$\check{\mathbf{Y}}|_{qp} = \left[\check{\mathbf{y}}|_0 \ \check{\mathbf{y}}|_1 \ \check{\mathbf{y}}|_2 \ \cdots \ \check{\mathbf{y}}|_{N-qp} \right]^T$$

tal que N é o número de dados na batelada.

Passo 4: Aplicar decomposição de valores singulares (do inglês *Singular Value Decomposition - SVD*) no lado direito de (2.40), resultando em:

$$\check{\mathbf{O}}\mathbf{X} = [U_n \ U_{\perp}] \begin{bmatrix} \Sigma_n^s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n \\ V_{\perp} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

onde a ordem do sistema n é definida pelos n valores singulares mais significativos, tal que $\sigma_n \gg \sigma_{n+1}$.

Passo 5: Estimar o histórico dos valores de estados como segue:

$$\hat{\mathbf{X}} = (\Sigma_n^s)^{1/2} V_n \quad (2.42)$$

Uma vez que o histórico de estados \mathbf{X} é calculado, pode-se estimar as matrizes $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$. Considerando a formulação em batelada das Eqs. (2.1) e (2.1), tem-se:

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{A}\mathbf{X}_{N-1} + \mathbf{B}\mathbf{U}_{N-1}, \quad (2.43)$$

$$\mathbf{Y}_N = \mathbf{C}\mathbf{X}_N + \mathbf{D}\mathbf{U}_N, \quad (2.44)$$

onde $\mathbf{X}_N = [\mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_N]$, $\mathbf{U}_N = [\mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_N]$ e $\mathbf{Y}_N = [\mathbf{y}_2 \ \mathbf{y}_3, \dots, \mathbf{y}_N]$. Reescrevendo (2.43), tem-se:

$$\mathbf{X}_N = [\mathbf{A} \ \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N-1} \\ \mathbf{U}_{N-1} \end{bmatrix} = \Theta^{(x)} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N-1} \\ \mathbf{U}_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Desta forma, a solução de mínimos quadrados para (2.45) é dada por:

$$\Theta^{(x)} = \mathbf{X}_N \left[\mathbf{X}_{N-1}^T \ \mathbf{U}_{N-1}^T \right] \left(\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N-1} \\ \mathbf{U}_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N-1}^T & \mathbf{U}_{N-1}^T \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (2.46)$$

De modo similar, desenvolvendo (2.44), tem-se:

$$\mathbf{Y}_N = [\mathbf{C} \ \mathbf{D}] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N-1} \\ \mathbf{U}_{N-1} \end{bmatrix} = \Theta^{(y)} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N-1} \\ \mathbf{U}_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

A solução de mínimos quadrados para (2.47) é dada por:

$$\Theta^{(y)} = \mathbf{Y}_N \left[\mathbf{X}_{N-1}^T \ \mathbf{U}_{N-1}^T \right] \left(\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N-1} \\ \mathbf{U}_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N-1}^T & \mathbf{U}_{N-1}^T \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (2.48)$$

2.2 Identificação de sistemas em ambiente ruidoso

A obtenção de estimativas precisas de parâmetros em presença de ruído é um problema fundamental em diversas aplicações científicas e de engenharia. A contaminação dos dados por ruídos e incertezas exige o emprego de técnicas de estimação que considerem a natureza aleatória dos dados. Essas técnicas, baseadas em modelos probabilísticos, visam minimizar os efeitos do ruído e fornecer estimativas confiáveis dos parâmetros de interesse.

2.2.1 Problema da polarização no método de mínimos quadrado

A fim de analisar o problema da polarização de estimadores, seja um sistema real e um modelo matemático paramétrico que busca representá-lo. Esse modelo, na forma de uma equação de regressão, será utilizado para estimar os parâmetros do sistema a partir de dados observados. Assim

$$y|_k = \boldsymbol{\psi}^T|_{k-1} \boldsymbol{\theta} + e|_k \quad (2.49)$$

onde $\boldsymbol{\psi}|_{k-1} = [y|_{k-n_y} \cdots y|_{k-1} u|_{k-n_u} \cdots u|_k]^T$ é o vetor de regressores, n_y e n_u são o número de instantes da saída e da entrada, respectivamente, $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros e $e|_k$ é o vetor de erro. Uma estimação dos parâmetros $\boldsymbol{\Theta}$ pode ser obtidos por estimadores do tipo

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \check{\mathbf{y}}\mathbf{H} \quad (2.50)$$

onde \mathbf{H} é a matriz do estimador, $\check{\mathbf{y}}$ é o histórico da saída do sistema do instante 0 até o N e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ são os parâmetros estimados, sendo esta uma variável aleatória. O problema de polarização é definido matematicamente como (Aguirre, 2007; Ljung, 1999):

$$\mathbf{b} = E[\hat{\boldsymbol{\theta}}] - \boldsymbol{\theta} \quad (2.51)$$

sendo \mathbf{b} é o fator de polarização, ou *bias* em inglês, e $E[\bullet]$ é o operador de esperança matemática. Considerando (2.50) em (2.51), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= E[\check{\mathbf{y}}\mathbf{H}] - \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{b} &= E[(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\Psi} + \check{\mathbf{e}})\mathbf{H}] - \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{b} &= \boldsymbol{\theta}E[\boldsymbol{\Psi}\mathbf{H} - \mathbf{I}] - E[\check{\mathbf{e}}\mathbf{H}] \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde $\boldsymbol{\Psi} [\boldsymbol{\psi}|_1 \ \boldsymbol{\psi}|_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\psi}|_{k-1}]$ é a matriz de regressores. Pela literatura, algumas considerações devem ser observadas para que a polarização seja nula, ou seja, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ (Aguirre, 2007; Ljung, 1999; Soderstrom; Stoica, 2002):

Consideração 2.1. A matriz \mathbf{H} deve ser tal que: $\boldsymbol{\Psi}\mathbf{H} = \mathbf{I}$.

Consideração 2.2. \mathbf{H} e $\check{\mathbf{e}}$ devem ser estatisticamente independentes tal que $E[\check{\mathbf{e}}\mathbf{H}] = E[\check{\mathbf{e}}]E[\mathbf{H}]$.

Consideração 2.3. O vetor de erros $\check{\mathbf{e}}$ deve possuir média zero, ou seja, $E[\check{\mathbf{e}}] = \mathbf{0}$.

Consideração 2.4. O vetor de erros $\check{\epsilon}$ é ortogonal as linhas de \mathbf{H} (ver Seção A.2), tal que $E[\check{\epsilon}\mathbf{H}] = \mathbf{0}$.

Portanto, para garantir polarização nula, é necessário que a Consideração 2.1 seja atendida. Além disso, é preciso que uma das seguintes condições seja satisfeita: (i) tanto a Consideração 2.2 quanto a Consideração 2.3 sejam verdadeiras, ou (ii) a Consideração 2.4 seja verdadeira.

Analisando o métodos dos mínimos quadrados (MQ), onde a solução de θ é dada pela equação

$$\hat{\theta}_{MQ} = \check{y}\Psi^T [\Psi\Psi^T]^{-1} \quad (2.53)$$

tem-se que $\mathbf{H} = \Psi^T [\Psi\Psi^T]^{-1}$. Portanto, para casos em que os dados não estão livres de ruídos e/ou os vetores $\check{\epsilon}$ e ψ são correlacionados, as considerações 2.2 e 2.3 não serão atendidas, resultando em $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

2.2.2 Método das variáveis instrumentais

Para problemas de identificação com ruído correlacionado, o método de MQ apresenta estimação polarizada. uma estratégia para superar essa limitação é definir um vetor de variáveis que sejam estatisticamente independentes do ruído, mas que ainda estejam correlacionadas com o vetor de regressores ψ . Segundo Soderstrom e Stoica (2002) e Aguirre (2007), uma abordagem inicial é utilizar um vetor de variáveis instrumentais \mathbf{v} descorrelacionado da perturbação do sistema dinâmico, de modo que a equação (2.53) seja reescrita da seguinte forma:

$$\hat{\theta} = \check{y}\mathbf{V}^T (\Psi\mathbf{V}^T)^{-1} \quad (2.54)$$

onde $\mathbf{V} = [\mathbf{v}|_1 \ \mathbf{v}|_2 \ \cdots \ \mathbf{v}|_{k-1}]$ é a matriz de variáveis instrumentais, sendo o vetor \mathbf{v} de mesmo tamanho que o vetor ψ . O método de variáveis instrumentais se baseia na redução da polarização à medida que o número de amostras cresce, ou seja, esta técnica considera a polarização assintótica \mathbf{b}_a de estimadores(ver Apêndice B). Partindo desse conceito, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_a &= \lim_{N \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}(N)] - \theta \\ \mathbf{b}_a &= \text{plim} [\hat{\theta}] - \theta \\ \mathbf{b}_a &= \text{plim} [(\theta\Psi + \check{\epsilon})\mathbf{H}] - \theta \\ \mathbf{b}_a &= \text{plim} [\check{\epsilon}\mathbf{H}] \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde $\text{plim} [\bullet]$ é o limite de probabilidade (ver Definição B.4) e a Eq. (2.55) é obtida considerando que $\Psi\mathbf{H} = \mathbf{I}$ (Consideração 2.1). Para garantir que a polarização assintótica seja nula ($\mathbf{b}_a = \mathbf{0}$), deve-se assegurar que $\text{plim} [\check{\epsilon}\mathbf{H}] = \mathbf{0}$. Retomando a Eq. (2.55), considerando que $\mathbf{H} = \mathbf{V}^T (\Psi\mathbf{V}^T)^{-1}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_a &= \text{plim} \left[\tilde{\mathbf{e}} \mathbf{V}^T (\Psi \mathbf{V}^T)^{-1} \right] \\
\mathbf{b}_a &= \text{plim} \left[\tilde{\mathbf{e}} \mathbf{V}^T \right] \text{plim} \left[(\Psi \mathbf{V}^T)^{-1} \right] && \text{(ver propriedade B.1)} \\
\mathbf{b}_a &= N \cdot \mathbf{c} \cdot \text{plim} \left[(\Psi \mathbf{V}^T)^{-1} \right] && \text{(ver propriedade B.2)} \quad (2.56)
\end{aligned}$$

onde \mathbf{c} é o vetor de correlação cruzada entre as colunas de \mathbf{V} , geradas pelas variáveis instrumentais e o ruído $\tilde{\mathbf{e}}$ (Aguirre, 2007). A partir da Eq. (2.56), nota-se que uma forma de garantir que a polarização assintótica seja nula é tornando $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Essa condição é atendida ao escolher variáveis instrumentais que sejam descorrelacionadas do ruído (Aguirre, 2007; Soderstrom; Stoica, 2002; Filho, 2017a).

Na literatura, foram propostas diversas abordagens para a escolha dos instrumentos (Soderstrom; Stoica, 2002; Aguirre, 2007; Young, 2011; Filho; Serra, 2018). Uma alternativa é selecionar os instrumentos a partir das estimações do modelo $\hat{\mathbf{y}}_k$, como segue:

$$\mathbf{v}|_{k-1} = \left[\hat{\mathbf{y}}|_{k-1} \cdots \hat{\mathbf{y}}|_{k-n_y} \mathbf{u}|_{k-1} \cdots \mathbf{u}|_{k-n_u} \right] \quad (2.57)$$

Outra alternativa seria utilizar amostras da entrada do sistema como instrumentos, onde

$$\mathbf{v}|_{k-1} = \left[\mathbf{u}|_{k-1} \mathbf{u}|_{k-2} \mathbf{u}|_{k-3} \cdots \mathbf{u}|_{k-n_u-n_y} \right] \quad (2.58)$$

Outra maneira seria utilizar os dados de saída e/ou entrada filtradas como instrumentos, sendo

$$\mathbf{v}|_{k-1} = \left[\mathbf{y}_f|_{k-1} \cdots \mathbf{y}_f|_{k-n_y} \mathbf{u}_f|_{k-1} \cdots \mathbf{u}_f|_{k-n_u} \right] \quad (2.59)$$

2.3 Teoria dos conjuntos e sistemas nebulosos tipo-2

Nesta seção, serão apresentados conceitos importantes relacionados aos conjuntos nebulosos tipo-2, bem como as bases matemáticas que auxiliam na compreensão desse tema. Além disso, será discutida a aplicação desses conceitos na formação de bases de regras nebulosas tipo-2 intervalar.

2.3.1 Definições básicas sobre conjuntos nebulosos tipo-2 intervalares

Para melhor compreensão dos conjuntos nebulosos tipo-2, é útil revisar a definição de um conjunto nebuloso tipo-1.

Definição 2.1: Seja um conjunto nebuloso tipo-1, denominado por X , o qual está nos termos de uma variável z de um dado espaço de dados, ou seja, $z \in \mathcal{Z}$. Este conjunto é definido formalmente por (Castillo, 2007; Kayacan, 2011):

$$X = \{(z, \mu_X(z)) \mid \forall z \in \mathcal{Z}\} \quad (2.60)$$

onde $\mu_X(z)$ é uma função de pertinência (FP) tipo-1 e \mathcal{Z} é o universo de discurso de z .

Segundo Kayacan (2011), o conjunto X pode ser definido também como:

$$\int_{z \in \mathcal{Z}} \mu_X(z)/z \quad (2.61)$$

onde \int denota união¹ sobre todo z admissível, sendo que $0 \leq \mu_X(z) \leq 1$. Portanto, a definição 2.1 diz que um conjunto nebuloso tipo-1 X é definido dentro de um universo de discurso \mathcal{Z} e é caracterizado por uma FP μ_X que mapeia cada elemento em \mathcal{Z} em um valor de pertinência entre 0 e 1 (Castillo, 2007). Na Fig. 2 é apresentada um exemplo de FP gaussiana tipo-1, dada pela equação

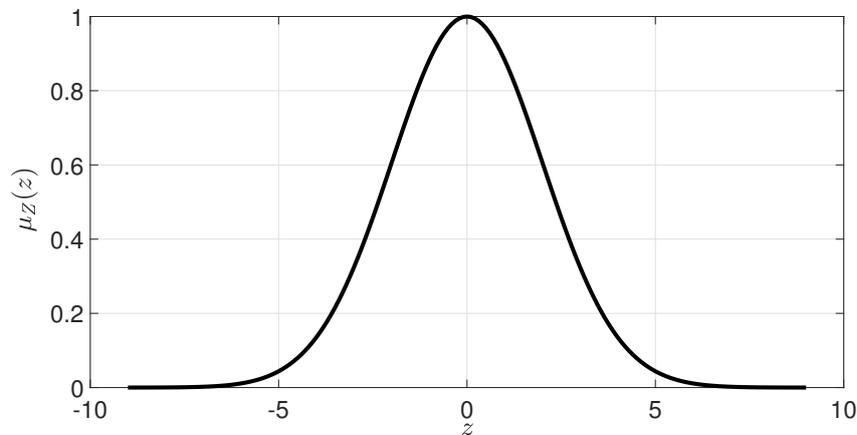
$$\mu_X(x) = \exp\left(\frac{z - z^*}{\sigma}\right) \quad (2.62)$$

onde z^* e σ é o centro e a dispersão da gaussiana, respectivamente. Vale ressaltar que

$$\mu_X$$

pode ser qualquer função já apresentada dentro da literatura, como, por exemplo, triangulares, função seno, entre outras.

Figura 2 – Função de pertinência Gaussiana tipo-1



Fonte: Autor

Como pode ser visto, as FPs monovariáveis tipo-1 são definidas em um espaço bidimensional. A partir de (2.62), nota-se que suas pertinências são certas, ou seja, não há representação de incerteza sobre a pertinência. Isto resulta em valores de pertinência certos, ou *crisp*, como observa-se na Fig. 2. Caso seja considerada um grau de incerteza em torno da função de pertinência, um valor específico z' terá um valor de pertinência dentro de uma região de confiança. Considerando isso para todos os elementos de \mathcal{Z} , cria-se uma FP tridimensional, denominada de FP tipo-2, a qual está associada a um conjunto nebuloso tipo-2 (Mendel; John; Liu, 2006). Partindo desse argumento, pode-se definir um conjunto nebuloso tipo-2 geral da seguinte forma:

¹ Neste contexto, o termo **união** não se refere a operação entre conjuntos nebulosos

Definição 2.2: Um conjunto nebuloso tipo-2, denominado por \tilde{X} , o qual está nos termos de uma variável $z \in \mathcal{Z}$ e é definido como

$$\tilde{X} = \{((z, v), \mu_{\tilde{X}}(z, v)) \mid \forall z \in \mathcal{Z}, \forall v \in J_z \subseteq [0, 1]\} \quad (2.63)$$

onde $\mu_{\tilde{X}}$ representa a Função de Pertinência (FP) de tipo-2, com valores no intervalo $0 \leq \mu_{\tilde{X}}(z, v) \leq 1$, e J_z corresponde à FP primária associada a z (Mendel; John; Liu, 2006; Kayacan, 2011).

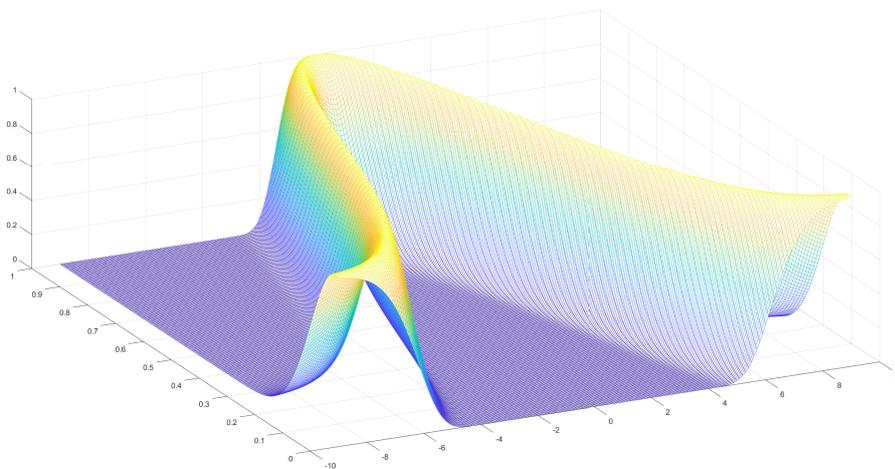
O conjunto nebuloso \tilde{X} pode ser escrito também por

$$\tilde{X} = \int_{z \in \mathcal{Z}} \int_{v \in J_z} \mu_{\tilde{X}}(z, v)/(z, v) \quad (2.64)$$

onde $\int \int$ denota a união¹ sobre todo z e v admissíveis e $\mu_{\tilde{X}}(z, v)/(z, v)$ denota o a FP tipo-2 dado um valor de z e e função primária v .

Segundo Mendel, John e Liu (2006), a definição 2.2 tem algumas restrições: 1) que $\forall v \in J_z \subseteq [0, 1]$ é consistente com a limitação no contexto tipo-1 que $0 \leq \mu_X(z) \leq 1$, ou seja, quando as incertezas desaparecem, a FP tipo-2 é reduzida à uma FP tipo-1, neste caso $v = \mu_X(z)$. 2) que $0 \leq \mu_{\tilde{X}}(z, v) \leq 1$ é consistente com o fato que a amplitude de um FP deve está contida entre entre 0 ou 1. A forma de uma função de pertinência (FP) tipo-2 geral apresenta grande flexibilidade, permitindo combinações variadas de funções de pertinência tipo-1. Por exemplo, a função primária pode ser triangular e a secundária gaussiana. Essa flexibilidade possibilita modelar de forma mais precisa a incerteza presente em diversos sistemas reais. Um exemplo de Função de Pertinência (FP) tipo-2 geral é mostrado na Fig. 3, no qual as funções primária e secundária são representadas por gaussianas.

Figura 3 – Exemplo de função de pertinência tipo-2, onde a função primária e a secundária são funções gaussianas.



Fonte: Autor

Definição 2.3: Um conjunto nebuloso tipo-2 intervalar é definido quando $\mu_{\tilde{X}}(z, v) = 1$ (exemplo na Fig. 4). Nesse caso, a terceira dimensão da Função de Pertinência (FP) tipo-2 pode ser

desconsiderada. Dessa forma, a incerteza associada à FP primária é representada por uma Função de Pertinência Inferior (FPI) tipo-1, $\underline{\mu}_X(z)$, e uma Função de Pertinência Superior (FPS) tipo-1, $\bar{\mu}_X(z)$, conforme exemplificado na Fig. 5. Esse tipo de função é denominado FP tipo-2 intervalar (Mendel; John; Liu, 2006; Kayacan, 2011). Formalmente, tal conjunto nebuloso tipo-2 intervalar pode ser definido como:

$$\tilde{X} = \{((z, v), \mu_{\tilde{X}}(z, v) = 1) \mid \forall z \in \mathcal{Z}, \forall v \in [\underline{\mu}_{\tilde{X}}(z), \bar{\mu}_{\tilde{X}}(z)] \subseteq [0, 1]\} \quad (2.65)$$

ou então

$$\tilde{X} = \int_{z \in \mathcal{Z}} \int_{v \in J_z} \mu_{\tilde{X}}(z, v) = 1 / (z, v) \quad (2.66)$$

Figura 4 – Exemplo de função de pertinência tipo-2 para o caso onde $\mu_{\tilde{X}}(z, v) = 1$.

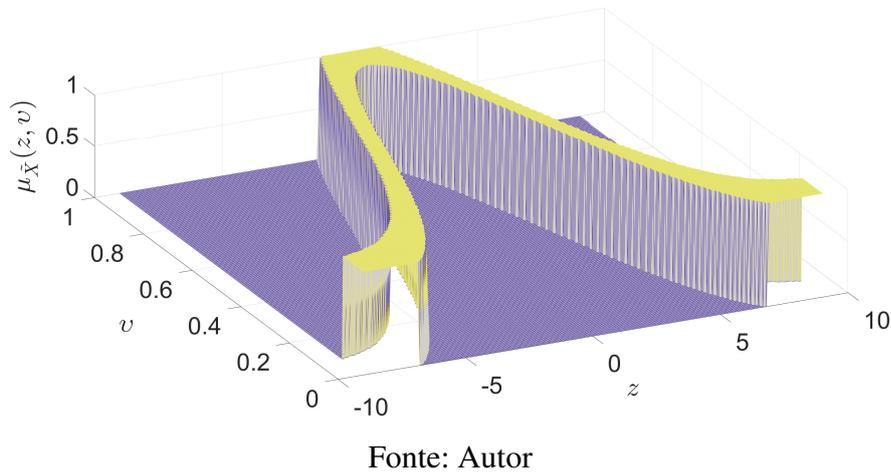
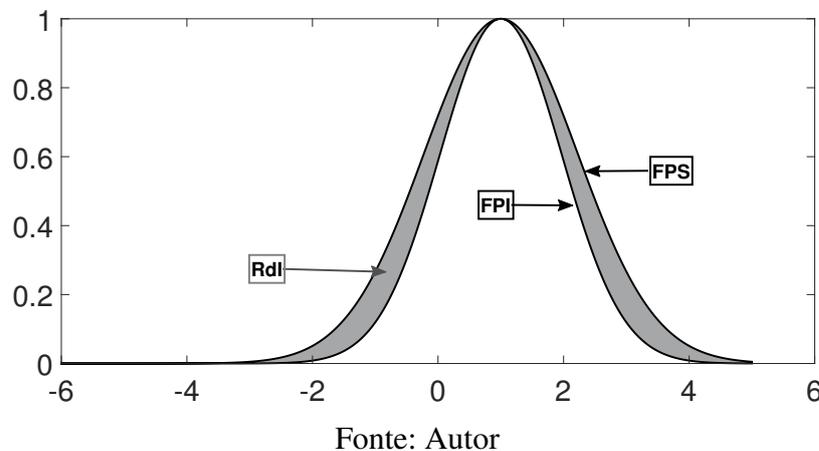


Figura 5 – Exemplo de FP tipo-2 intervalar, onde a FPI e a FPS são do tipo gaussiana, sendo a região entre essas duas funções denominada de **Rastro de Incerteza (RdI)**.



Na teoria de conjuntos nebulosos tipo-2 intervalares, o Rastro de Incerteza (RdI) é definido como a região que delimita a incerteza em torno da FP primária de um conjunto nebuloso tipo-2

\tilde{X} . Essa região é delimitada pela FP Inferior (FPI) e pela FP Superior (FPS), ambas do tipo-1. Quanto maior o RdI, maior é o grau de incerteza sobre o valor de pertinência associado a um dado valor da variável z .

De acordo com Kayacan (2011), embora os pesquisadores estejam familiarizados com a carga computacional exigida pelos SLN tipo-2, na literatura é mais comum utilizar os SLN tipo-2 intervalares devido à sua menor carga computacional. Desta forma, esta pesquisa utilizará esse tipo de SLN. Os próximos conceitos serão abordados considerando as FP tipo-2 intervalares (FPT2I). Para melhor entendimento das definições matemáticas a seguir, define-se um conjunto nebuloso tipo-2 \tilde{X} intervalar como

$$\tilde{X} = \tilde{\mu}_X(z), \quad \forall z \in \mathcal{Z} \quad (2.67)$$

tal que

$$\tilde{\mu}_X(z) = [\underline{\mu}_X(z), \bar{\mu}_X(z)] \quad (2.68)$$

onde $\tilde{\mu}_X(z)$ é uma FPT2I, $\underline{\mu}_X(z)$ é uma FPI e $\bar{\mu}_X(z)$ é uma FPS.

2.3.2 Operações entre conjuntos nebulosos tipo-2 intervalares

Outro aspecto importante para implementação e um SLN tipo-2 intervalar (SLNT2I) é a definição das operações entre FPT2I, as quais são: união, intercessão e complemento. O modo para calcular tais operações é dado pelo princípio de extensão de Zadeh (ZADEH, 1975). Portanto, seja dois conjuntos nebuloso tipo-2 intervalares, definidos como segue:

$$\tilde{X}_1 = \tilde{\mu}_{X_1}(z) = [\bar{\mu}_{X_1}(z), \underline{\mu}_{X_1}(z)] \quad (2.69)$$

$$\tilde{X}_2 = \tilde{\mu}_{X_2}(z) = [\bar{\mu}_{X_2}(z), \underline{\mu}_{X_2}(z)] \quad (2.70)$$

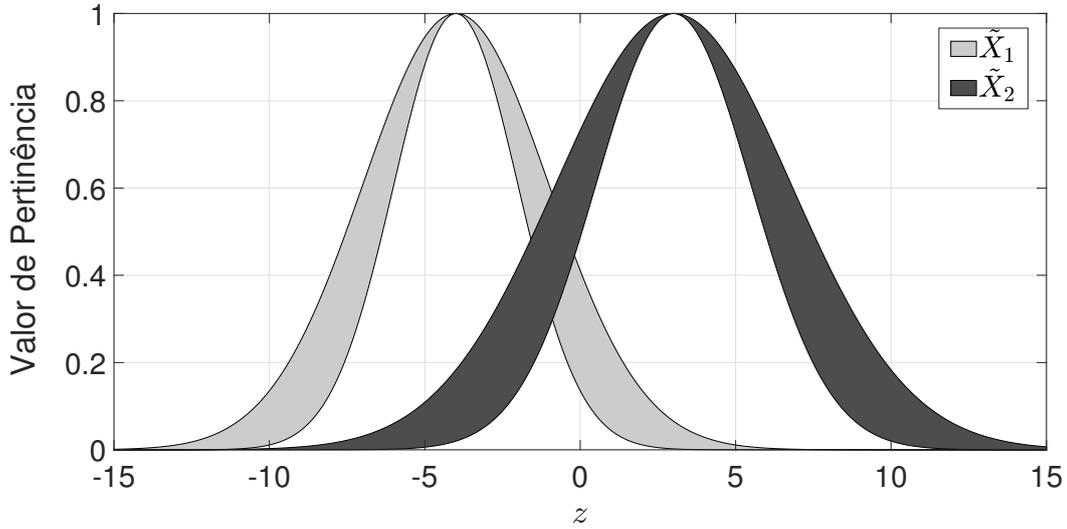
Para ilustrar visualmente as operações descritas nesta seção, consideram-se duas Funções de Pertinência Tipo-2 Intervalares (FPT2I) de formato Gaussiano. Essas FPT2I são definidas por uma Função de Pertinência Gaussiana tipo-2 intervalar com incerteza na dispersão ($\tilde{\sigma}$), expressa de forma geral como:

$$\tilde{\mu}_X(z) = \exp\left(\frac{z - z^*}{\tilde{\sigma}}\right), \quad \tilde{\sigma} = [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}] \quad (2.71)$$

$$\underline{\mu}_X(z) = \exp\left(\frac{z - z^*}{\underline{\sigma}}\right) \quad (2.72)$$

$$\bar{\mu}_X(z) = \exp\left(\frac{z - z^*}{\bar{\sigma}}\right) \quad (2.73)$$

onde $\tilde{\sigma} = \sigma \pm \kappa$, sendo κ o grau de incerteza e a gráfico essas FPs são mostradas na Fig. 6. A seguir, serão apresentadas as definições das operações entre conjuntos nebulosos tipo-2 intervalares.

Figura 6 – Conjuntos \tilde{X}_1 e \tilde{X}_2 

Fonte: Autor

Definição 2.4: *União nebulosa tipo-2 intervalar:* A operação de união $\tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2$ entre os conjuntos \tilde{X}_1 e \tilde{X}_2 é dada por uma **norma-S** ($s[\bullet]$), tal que:

$$\mu_{\tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2}(z) = [\underline{\mu}_{X_1}(z) \cup \underline{\mu}_{X_2}(z), \bar{\mu}_{X_1}(z) \cup \bar{\mu}_{X_2}(z)], \forall z \in \mathcal{Z} \quad (2.74)$$

$$\mu_{\tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2}(z) = [s[\underline{\mu}_{X_1}(z), \underline{\mu}_{X_2}(z)], s[\bar{\mu}_{X_1}(z), \bar{\mu}_{X_2}(z)]] \quad (2.75)$$

ou seja, a união de dois conjuntos nebulosos tipo-2 intervalares é realizada pela operação da união entre os conjuntos nebulosos superiores e pela união dos conjuntos nebulosos inferiores.

Exemplo 2.1: Para ilustrar a união entre duas FPT2I, considera-se o operador de máximo valor, $\max[\bullet]$, como norma-S, tal que

$$\mu_{\tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2}(z) = \left[\max(\underline{\mu}_{X_1}(z), \underline{\mu}_{X_2}(z)), \max(\bar{\mu}_{X_1}(z), \bar{\mu}_{X_2}(z)) \right] \quad (2.76)$$

Assim, a operação de união entre \tilde{X}_1 e \tilde{X}_2 é mostrada na Fig. 7. Vale ressaltar que se pode utilizar qualquer norma-S definida na literatura, como, por exemplo, as normas-S descritas por Wang (1996).

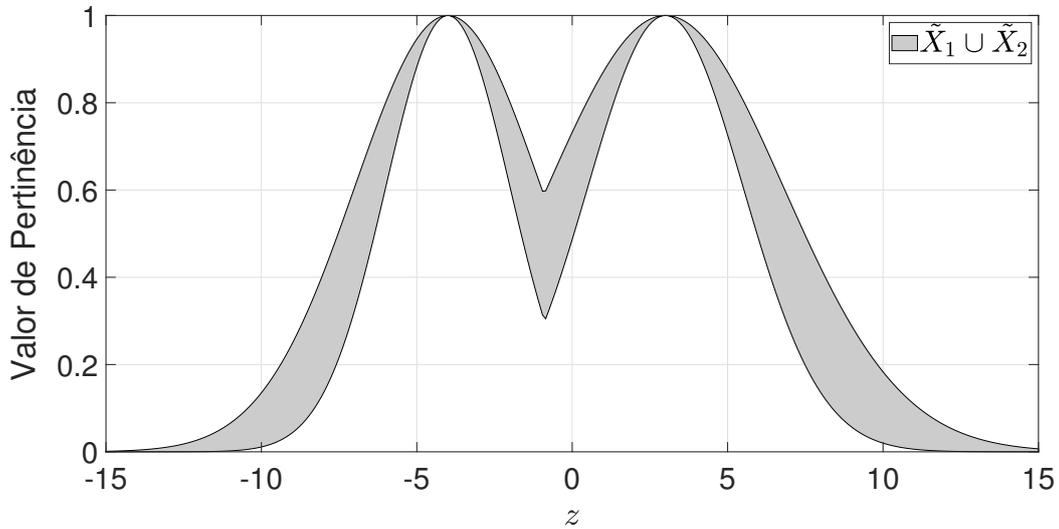
Definição 2.5: *interseção nebulosa tipo-2 intervalar:* A operação de intersecção $\tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2$ entre os conjuntos \tilde{X}_1 e \tilde{X}_2 é dada por uma **norma-T** ($t[\bullet]$), tal que:

$$\mu_{\tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2}(z) = [\underline{\mu}_{X_1}(z) \cap \underline{\mu}_{X_2}(z), \bar{\mu}_{X_1}(z) \cap \bar{\mu}_{X_2}(z)], \forall z \in \mathcal{Z} \quad (2.77)$$

$$\mu_{\tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2}(z) = [t[\underline{\mu}_{X_1}(z), \underline{\mu}_{X_2}(z)], t[\bar{\mu}_{X_1}(z), \bar{\mu}_{X_2}(z)]] \quad (2.78)$$

Ou seja, a união de dois conjuntos nebulosos tipo-2 intervalares é realizada pela operação da intersecção entre os conjuntos nebulosos superiores e pela união dos conjuntos nebulosos inferiores.

Figura 7 – Operação $\tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2$



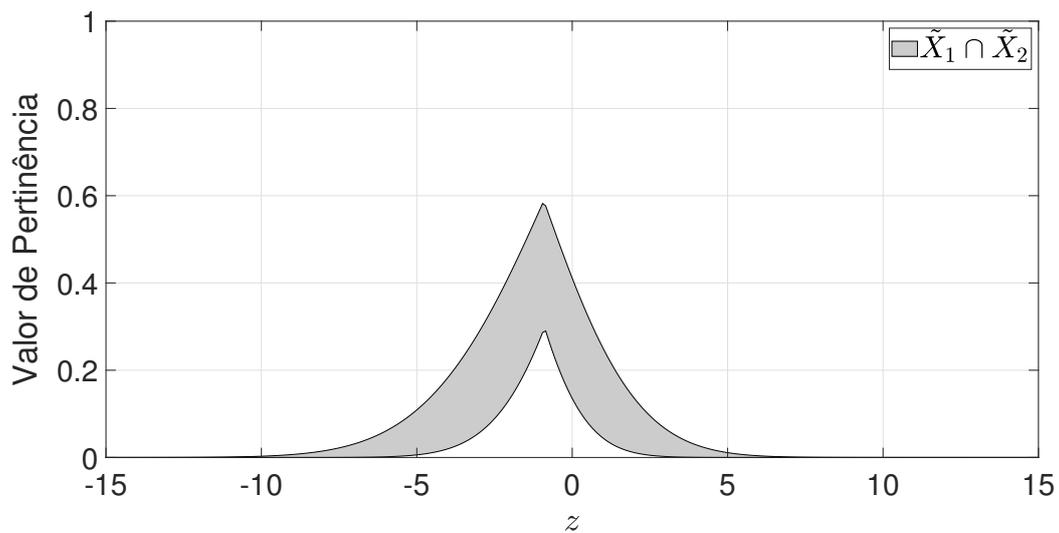
Fonte: Autor

Exemplo 2.2: Para ilustrar a interseção entre duas FPT2I, considera-se o operador de mínimo valor, $\min[\bullet]$, como norma-T, tal que

$$\mu_{\tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2}(z) = \left[\min(\underline{\mu}_{\tilde{X}_1}(z), \underline{\mu}_{\tilde{X}_2}(z)), \min(\bar{\mu}_{X_1}(z), \bar{\mu}_{X_2}(z)) \right] \quad (2.79)$$

Assim, a operação de interseção entre \tilde{X}_1 e \tilde{X}_2 é mostrada na Fig. 8. Vale ressaltar que se pode utilizar qualquer norma-S definida na literatura, como, por exemplo, as normas-T descritas por Wang (1996).

Figura 8 – Operação $\tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2$



Fonte: Autor

Definição 2.6: *Complemento:* O complemento de um conjunto \tilde{Z} é dada por:

$$\mu_{\tilde{Z}'} = [c[\bar{\mu}_{X'}(z)], c[\underline{\mu}_{X'}(z)]], \forall z \in \mathcal{Z} \quad (2.80)$$

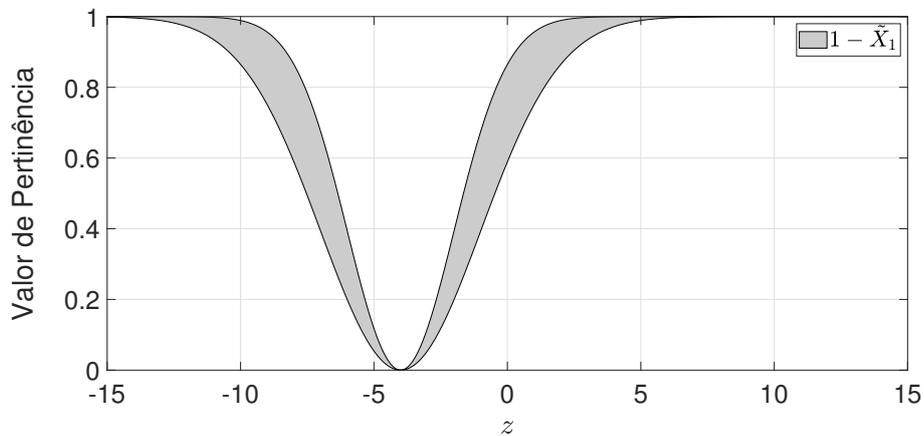
onde $c[\bullet]$ é um complemento. Portanto, complemento de um conjunto nebuloso tipo-2 intervalar é realizada pela operação de complemento nos conjuntos nebuloso superior e inferior. A operação de complemento é ilustrada na Fig. 9. Vale ressaltar que pode-se utilizar quaisquer operadores de complemento já definidos na literatura.

Exemplo 2.3: Considerando a seguinte operação de complemento

$$\mu_{\tilde{X}'} = [1 - \bar{\mu}_X(z), 1 - \underline{\mu}_X(z)]. \quad (2.81)$$

A operação de complemento é ilustrada na Fig. 9. Vale ressaltar que pode-se utilizar quaisquer operadores de complemento já definidos na literatura.

Figura 9 – Operação \tilde{Z}'_1



Fonte: Autor

Como pode ser observado nas definições 2.4, 2.5 e 2.6, as operações entre conjuntos nebulosos tipo-2 intervalares são uma extensão das operações apresentadas para o caso tipo-1. Portanto, as **normas-S** e **normas-T** desenvolvidas para o caso tipo-1, conforme mostrado em Wang (1996, pág. 35–44), podem ser estendidas para o caso tipo-2. Desta forma, segue a apresentação das definições formais de complementos, normas-T e norma-S estendidas para o caso tipo-2 intervalar.

Definição 2.7: *Definição de complemento nebuloso:* Qualquer função $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que satisfaça os seguinte axiomas:

1. Condição de limite: $c(0) = 1$ e $c(1) = 0$
2. Para todo $a, b \in [0, 1]$, if $a < b$, então $c(a) \geq c(b)$, onde a e b denotam uma função de pertinência de algum conjunto nebuloso, tal que $a = \mu_{\tilde{A}}(z)$ e $b = \mu_{\tilde{B}}(z)$.

é definida como uma função de complemento nebuloso. Wang (1996) apresenta a classe Sugeno de complementos, definidas como:

$$c_\lambda(a) = \frac{1 - a}{1 + \lambda a} \quad (2.82)$$

onde $\lambda \in (-1, \infty)$.

Outra classe de complementos apresentada por Wang (1996) é a classe *Yager*. definida como:

$$c_w = (1 - a^w)^{1/w} \quad (2.83)$$

onde $w \in (0, \infty)$.

Definição 2.8: *Definição de norma-S:* Qualquer função $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que satisfaça os seguintes axiomas:

1. $s(1, 1) = 1$, $s(0, a) = s(a, 0) = a$ (condições de limite)
2. $s(a, b) = s(b, a)$ (condição de comutatividade)
3. Se $a \leq a'$ e $b \leq b'$, então $s(a, b) \leq s(a', b')$

é definida como uma função de norma-S. Além norma-S *max*, na literatura apresenta as seguintes classes de norma S.

- classe Dombi:

$$s_\lambda(a, b) = \frac{1}{1 + [(1/a - 1)^{-\lambda} + (1/b - 1)^{-\lambda}]^{-1/\lambda}} \quad (2.84)$$

onde $\lambda \in (0, \infty)$

- classe Doboir-Prade:

$$s_\alpha(a, b) = \frac{a + b - ab - \min(a, b, 1 - \alpha)}{\max(1 - a, 1 - b, \alpha)} \quad (2.85)$$

onde $\alpha \in (0, 1)$

- classe Yager:

$$s_w(a, b) = \min \left[1, (a^w + b^w)^{1/w} \right] \quad (2.86)$$

onde $w \in (0, \infty)$

Definição 2.9: *Definição de normas-T:* Qualquer função $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que satisfaça os seguintes axiomas:

1. $t(0, 0) = 0$, $t(1, a) = t(a, 1) = a$ (condição de limite)
2. $t(a, b) = t(b, a)$ (condição de comutatividade)
3. Se $a \leq a'$ e $b \leq b'$, então $s(a, b) \leq s(a', b')$
4. $t[t(a, b), c] = t[a, t(b, c)]$ (condição de associabilidade)

é considerada como uma função de norma-T. Além da função min e da multiplicação algébrica, temos na literatura as seguintes classes de norma-T:

- classe Dombi:

$$t_\lambda(a, b) = \frac{1}{1 + [(1/a - 1)^\lambda + (1/b - 1)^\lambda]^{1/\lambda}} \quad (2.87)$$

onde $\lambda \in (0, \infty)$

- classe Doboier-Prade:

$$t_\alpha(a, b) = \frac{ab}{\max(a, b, \alpha)} \quad (2.88)$$

onde $\alpha \in (0, 1)$

- classe Yager:

$$t_w(a, b) = 1 - \min \left[1, ((1 - a)^w + (1 - b)^w)^{1/w} \right] \quad (2.89)$$

onde $w \in (0, \infty)$

2.3.3 Variáveis linguísticas e regra nebulosa tipo-2

Segundo Babuska (2012), termos linguísticos podem ser interpretados como valores quantitativos utilizados para descrever uma relação específica por meio de regras nebulosas. Esses termos são, geralmente, definidos no domínio de uma variável escalar z . Quando z assume valores linguísticos, ela passa a ser chamada de variável linguística. Assim, uma variável linguística L é formalmente definida por:

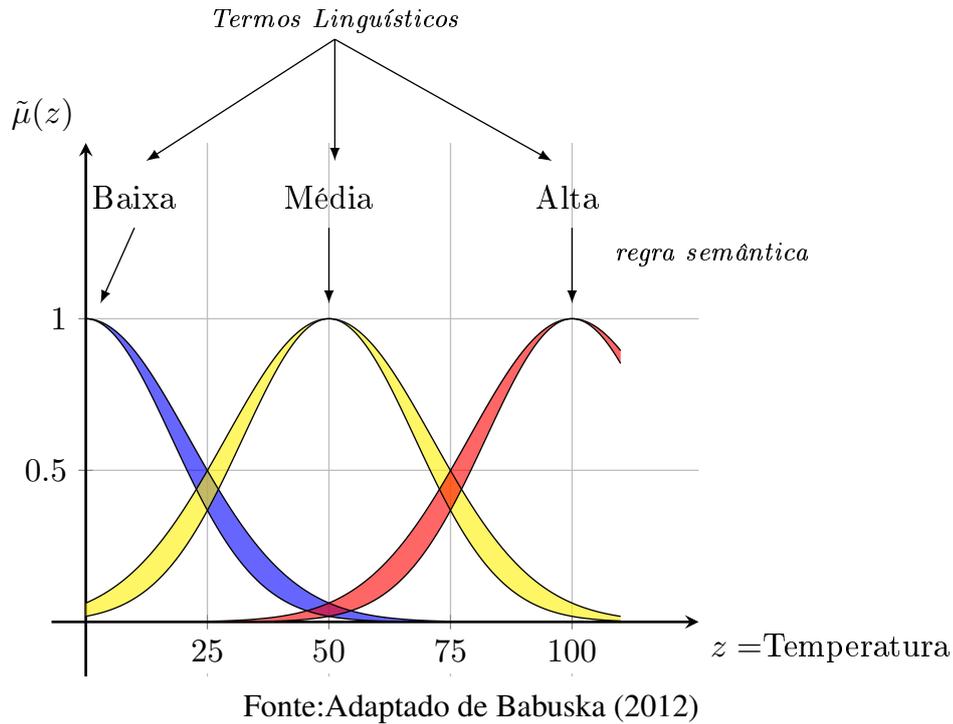
$$L = (z, \tilde{X}, \mathcal{Z}, g, o) \quad (2.90)$$

onde z é uma variável, $\tilde{X} = \{\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_c\}$ é o conjunto de termos linguísticos, \mathcal{Z} é o universo de discurso de z , c é o número de conjuntos nebulosos, g é a regra sintática para gerar os termos linguísticos e o é a regra semântica que atribui significado a cada termo linguístico, ou seja, a FPT2I em \mathcal{Z} que define o (Wang, 1996; Babuska, 2012). Segue um exemplo:

Exemplo 2.4: Seja a um problema envolvendo temperatura de um sistema, como define-se três FP: baixo, médio, alta. Desta forma:

- Temperatura como variável z ;
- As palavras **baixo, médio, alta** são os termos linguísticos;
- \tilde{X} é o universo de discurso, ou seja, os valores que a variável z pode tomar. Neste caso, pode-se considerar o intervalar de $[0^\circ C, 100^\circ C]$;
- As regras semânticas o são as FPT2I que definem matematicamente os termos linguísticos.

Figura 10 – Demonstração gráfica do exemplo 2.4.



Este exemplo é ilustrado na Fig. 10.

Os termos linguísticos devem satisfazer as propriedades de *cobertura* (Pedrycz, 1995). Nesta propriedade, para cada elemento de \mathcal{Z} , existe pelo menos um conjunto nebuloso no qual o valor de pertinência para esse elemento é maior que zero. Em outras palavras,

$$\forall z, \exists i, \mu_{X_i}(z) > 0 \quad (2.91)$$

A condição de *participação nebulosas* para conjuntos nebulosos gerados por algoritmos de agrupamento a partir de dados experimentais pode ser expressa matematicamente como:

$$\sum_{i=1}^c \mu_{X_i}(z) = 1, \quad \forall z \in \mathcal{Z}, \quad (2.92)$$

onde c é o número de conjuntos nebulosos (funções de pertinência) e $\mu_{\tilde{X}_i}(z)$ representa o grau de pertinência do elemento z no conjunto \tilde{X}_i . Em termos simples, isso significa que, para qualquer elemento z no espaço de dados \mathcal{Z} , a soma de todos os graus de pertinência atribuídos pelos conjuntos nebulosos deve ser igual a 1. Essa propriedade garante que a partição dos dados seja nebulosa, ou seja, que cada elemento seja distribuído proporcionalmente entre os diferentes conjuntos, sem deixar lacunas ou sobreposições desbalanceadas.

Dessa forma, a soma unitária das pertinências assegura que o elemento z pertença de maneira fracionada e compartilhada entre os conjuntos nebulosos, refletindo a essência da lógica nebulosa de atribuir múltiplos graus de pertinência simultaneamente.

2.3.4 Regra e inferência nebulosa tipo-2 intervalar

Uma regra nebulosa tipo-2 intervalar segue a mesma estrutura do caso tipo-1, desta forma

SE < Proposição do antecedente > **ENTÃO** < Proposição do consequente >

onde a proposição do antecedente pode ser denominada de proposição nebulosa. Assim como no caso tipo-1, a proposição nebulosa pode ser simples ou composta. A proposição simples consiste em uma única declaração z é \tilde{X} , enquanto a proposição composta envolve a combinação de múltiplas declarações, como por exemplo, z_1 é \tilde{X}_1 e z_2 é \tilde{X}_2 , onde z_1 e z_2 são variáveis linguísticas diferentes.

Conforme destacado por Wang (1996), as proposições nebulosas compostas podem ser interpretadas como relações nebulosas. Assim, são identificados os seguintes tipos de relações nebulosas na literatura:

- **Relação pelo conectivo "E"**: Na proposição z_1 é \tilde{X}_1 E z_2 é \tilde{X}_2 , o conectivo "E" deve ser interpretado como uma relação nebulosa $\tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2$, ou seja

$$\tilde{\mu}_{X_1 \cap X_2}(x_1, x_2) = t[\tilde{\mu}_{X_1}(x), \tilde{\mu}_{X_2}(x)] \Rightarrow \quad (2.93)$$

$$\bar{\mu}_{X_1 \cap X_2}(x_1, x_2) = t[\bar{\mu}_{X_1}(x), \bar{\mu}_{X_2}(x)] e \quad (2.94)$$

$$\underline{\mu}_{X_1 \cap X_2}(x_1, x_2) = t[\underline{\mu}_{X_1}(x), \underline{\mu}_{X_2}(x)] \quad (2.95)$$

sendo $t[\bullet]$ é uma **norma-T**.

- **Relação pelo conectivo "OU"**: Na proposição z_1 é \tilde{X}_1 OU z_2 é \tilde{X}_2 , o conectivo "OU" deve ser interpretado como uma relação nebulosa $\tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2$, ou seja

$$\tilde{\mu}_{X_1 \cup X_2}(x_1, x_2) = s[\tilde{\mu}_{X_1}(x), \tilde{\mu}_{X_2}(x)] \Rightarrow \quad (2.96)$$

$$\bar{\mu}_{X_1 \cup X_2}(x_1, x_2) = s[\bar{\mu}_{X_1}(x), \bar{\mu}_{X_2}(x)] e \quad (2.97)$$

$$\underline{\mu}_{X_1 \cup X_2}(x_1, x_2) = s[\underline{\mu}_{X_1}(x), \underline{\mu}_{X_2}(x)] \quad (2.98)$$

sendo $s[\bullet]$ é uma **norma-S**

As relações mostradas acima podem ser estendidas para n_z variáveis, tal como:

$$z_1 \text{ é } \tilde{X}_1 \text{ E } \dots \text{ E } z_{n_z} \text{ é } \tilde{X}_{n_z} \Rightarrow \quad (2.99)$$

$$t[\tilde{\mu}_{X_1}(x), \dots, \tilde{\mu}_{X_{n_z}}(x)]$$

Desta forma, (2.99) representa um conjunto nebuloso tipo-2 intervalar multivariável, formado pela interseção de n_z conjuntos nebulosos tipo-2 intervalares univariáveis, definido em um espaço dado pelo produto cartesiano $\mathcal{Z}_1 \times \dots \times \mathcal{Z}_{n_z}$.

Outra questão relevante sobre as FP diz respeito à **granularidade** de um sistema nebuloso. A granularidade está relacionada com a quantidade de termos linguísticos, o formato e a sobreposição² das FP, e como esses fatores influenciam na precisão e capacidade de representação

² A sobreposição de funções de pertinência nebulosas ocorre quando um mesmo elemento do espaço de dados pertence simultaneamente a mais de um conjunto nebuloso, com diferentes graus de pertinência.

de qualquer sistema nebuloso (Babuska, 2012). Segundo Babuska (2012), um mapeamento *bem definido* pode ser precisamente representado por uma baixa **granularidade**, onde, por exemplo, FP triangulares podem reproduzir funções multi-lineares. As FP podem ser definidas de duas formas: através do conhecimento de especialistas ou a partir de dados. No primeiro caso, utiliza-se conhecimento a priori ou a experimentação, sendo comumente empregado na abordagem de controle nebuloso baseado em conhecimento. Nessas situações, as FP possuem significados linguísticos em um contexto específico. No caso das FP definidas por dados, são aplicados métodos de estimação ou adaptação baseados em dados para definir os parâmetros das FP.

Uma vez compreendida a questão das proposições nebulosas, é importante entender a inferência em uma regra nebulosa tipo-2 intervalar. Seja o exemplo:

$$\text{Se } z \text{ é } \tilde{X} \text{ ENTÃO } y \text{ é } \tilde{B} \quad (2.100)$$

onde \tilde{B} é o conjunto nebuloso da saída e y é a variável de saída. A Eq.2.100 pode ser abordada com uma relação nebulosa de implicação $\tilde{\mu}_X(z) \rightarrow \tilde{\mu}_B(y)$. A partir da teoria de lógica clássica, esta expressão pode ser dada por

$$\tilde{\mu}'_X(z) \cup \tilde{\mu}_B(y) \quad (2.101)$$

onde $'$ é o símbolo para complemento e \cup é o símbolo de união. Segue abaixo alguns exemplos de implicações nebulosas encontradas na literatura, estendidos do caso tipo-2 intervalar (Babuska, 2012; Wang, 1996):

- **Implicação de Lukasiewicz:** esta implicação é dada por:

$$\tilde{\mu}_X(z) \rightarrow \tilde{\mu}_B(y) = \min(1, 1 - \tilde{\mu}_X(z) + \tilde{\mu}_B(y)) \Rightarrow \quad (2.102)$$

$$\underline{\mu}_X(z) \rightarrow \underline{\mu}_B(y) = \min(1, 1 - \underline{\mu}_X(z) + \underline{\mu}_B(y)) \quad (2.103)$$

$$\bar{\mu}_X(z) \rightarrow \bar{\mu}_B(y) = \min(1, 1 - \bar{\mu}_X(z) + \bar{\mu}_B(y)) \quad (2.104)$$

- **Implicação de Kleene-Diene:** esta implicação é dada por:

$$\tilde{\mu}_X(z) \rightarrow \tilde{\mu}_B(y) = \max(1 - \tilde{\mu}_X(z), \tilde{\mu}_B(y)) \Rightarrow \quad (2.105)$$

$$\underline{\mu}_X(z) \rightarrow \underline{\mu}_B(y) = \max(1 - \underline{\mu}_X(z), \underline{\mu}_B(y)) \quad (2.106)$$

$$\bar{\mu}_X(z) \rightarrow \bar{\mu}_B(y) = \max(1 - \bar{\mu}_X(z), \bar{\mu}_B(y)) \quad (2.107)$$

$$(2.108)$$

- **Relação de Mamdani:** Ao contrário das implicações anteriores, em que cada regra está em um contexto global, a implicação de Mamdani considera que a implicação nebulosa $\tilde{\mu}_X(z) \rightarrow \tilde{\mu}_B(y)$ está em um contexto local (Wang, 1996), ou seja, em um sistema nebuloso com duas regras, com implicações $\tilde{\mu}_{X1}(z) \rightarrow \tilde{\mu}_{B1}(y)$ e $\tilde{\mu}_{X2}(z) \rightarrow \tilde{\mu}_{B2}(y)$, a

implicação 1 representa apenas uma situação local e não informa nada sobre a implicação 2. A implicação de Mamdani é dada por:

$$\tilde{\mu}_X(z) \rightarrow \tilde{\mu}_B(y) = \tilde{\mu}_X(z) \cap \tilde{\mu}_B(y) \quad (2.109)$$

Assim, a implicação passa a ser dada por uma interseção nebulosa (**norma-T**) (Wang, 1996). Considerando a multiplicação algébrica como **norma-T**, tem-se:

$$\tilde{\mu}_X(z) \rightarrow \tilde{\mu}_B(y) = \tilde{\mu}_X(z) \cdot \tilde{\mu}_B(y) \Rightarrow \quad (2.110)$$

$$\underline{\mu}_X(z) \rightarrow \underline{\mu}_B(y) = \underline{\mu}_X(z) \cdot \underline{\mu}_B(y) \quad (2.111)$$

$$\bar{\mu}_X(z) \rightarrow \bar{\mu}_B(y) = \bar{\mu}_X(z) \cdot \bar{\mu}_B(y) \quad (2.112)$$

2.3.5 Sistema de lógica nebulosa tipo-2

Como visto na Seção 2.3.3, nota-se que as definições apresentadas são extensões dos conceitos dos conjuntos nebulosos tipo-1. Segundo Karnik, Mendel e Liang (1999), as bases da lógica nebulosa não muda do caso tipo-1 para o tipo-2, e isto pode ser generalizado para conjuntos nebulosos tipo- n .

No contexto dos sistemas nebulosos, os conjuntos nebulosos tipo-2 podem ser aplicados para representar incertezas em uma função de pertinência tipo-1. Essas incertezas podem surgir de termos linguísticos não bem definidos ou de dados numéricos incertos (Castillo, 2007). No último caso, quando as funções de pertinência são determinadas ou ajustadas com base em dados numéricos incertos, como dados ruidosos, essas incertezas são transferidas para as funções de pertinência. Dessa forma, a escolha de FPT2I pode ser considerada para mitigar os efeitos dessas incertezas na proposição do antecedente.

Um SLNT2I consiste em um conjunto de regras SE-ENTÃO, como mostrado a seguir:

$$\text{Regra}^i : \text{Se } z_1 \text{ é } \tilde{X}_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_{n_z} \text{ é } \tilde{X}_{n_z}^i \text{ ENTÃO } y \text{ é } \tilde{B} \quad (2.113)$$

onde n_z é o número de variáveis linguísticas, ou variáveis de entrada, $i = 1, \dots, c$ é o índice da regra e c é o número regras nebulosas. O diagrama de bloco de um SLNT2I, segundo Mendel, John e Liu (2006), é mostrada na Fig. 11.

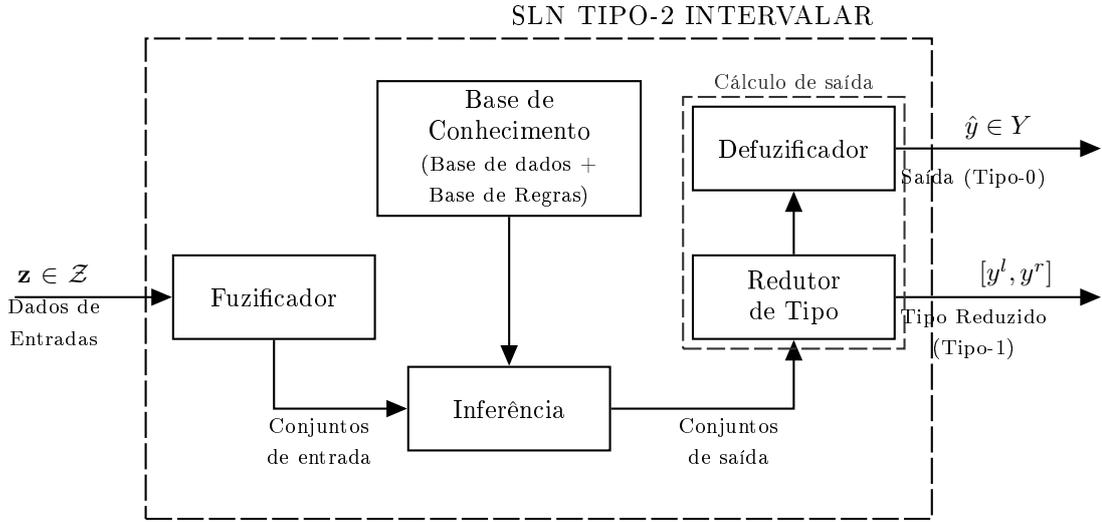
A seguir, as definições de cada bloco da Fig. 11 são apresentadas.

Definição 2.10: *Fuzificador:* Este bloco realiza o mapeamento de um ponto $z_j \in \mathcal{Z}_j$ em um conjunto tipo-2 \tilde{X}_j , ou seja, $\tilde{\mu}_{X_j}(z_j) = [\underline{\mu}_{X_j}(z_j), \bar{\mu}_{X_j}(z_j)]$, onde $j = 1, 2, \dots, n_z$.

Definição 2.11: *Regras:* Este bloco representa o conjunto de regras do SLNT2I, onde cada regra é dada pela Eq. (2.113).

Definição 2.12: *Inferência:* O bloco de inferência realiza a composição das regras, resultando em um mapeamento dos conjuntos tipo-2 de entrada para conjuntos tipo-2 de saída (Castillo, 2007). Nesse bloco, são realizadas as operações de união (\cup) e interseção (\cap). Seja a proposição

Figura 11 – Diagrama de bloco geral de um sistema de lógica nebulosa tipo-2 intervalar



Fonte: Adaptado de Mendel, John e Liu (2006) e Castillo (2007)

do antecedente dada pela relação nebulosa $\tilde{X}_1^i \times \dots \times \tilde{X}_{n_z}^i = \tilde{X}_t^i$. Portanto, a Eq. (2.113) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$Regra^i : \tilde{X}_1^i \times \tilde{X}_2^i \times \dots \times \tilde{X}_{n_z}^i \rightarrow \tilde{B}^i = \tilde{X}_t^i \rightarrow \tilde{B}^i \quad (2.114)$$

Exemplo 2.5: Considerando a multiplicação algébrica como **norma-T** para $\tilde{X}_1^i \times \dots \times \tilde{X}_{n_z}^i = \tilde{X}_t^i$ e a implicação de Mamdani, a Eq. (2.114) pode ser calculada como:

$$\tilde{\mu}_{X^i}(z) \rightarrow \tilde{\mu}_B(y) = \tilde{\mu}_{X_1^i}(z_1) \cdot \dots \cdot \tilde{\mu}_{X_{n_z}^i}(z_{n_z}) \cdot \tilde{\mu}_B(y) \quad (2.115)$$

Para uma regra nebulosa tipo-2 de n_z variáveis de entrada, pode-se calcular a força de ativação inferior e superior $[\underline{\beta}^i(\mathbf{z}), \bar{\beta}^i(\mathbf{z})]$ da i -ésima regra pelas equações abaixo:

$$\bar{\beta}^i(\mathbf{z}) = \bar{\mu}_{X_1^i}(z_1) \cap \dots \cap \bar{\mu}_{X_{n_z}^i}(z_{n_z}) \quad (2.116)$$

$$\underline{\beta}^i(\mathbf{z}) = \underline{\mu}_{X_1^i}(z_1) \cap \dots \cap \underline{\mu}_{X_{n_z}^i}(z_{n_z}) \quad (2.117)$$

Definição 2.13: *Redutor de Tipo:* Este bloco realiza a redução de tipo dos conjuntos nebulosos tipo-2 de saída em um valor intervalar (tipo-1) $\tilde{y} = [y^l, y^r]$. Estes limites são calculados pelo método de redução de tipo dos centros dos conjuntos (cdc) o qual é definido por (Karnik; Mendel, 2001; Castillo, 2011):

$$y_{cdc} = [y^l, y^r] = \int_{y_1 \in [(y^r)^1, (y^l)^1]} \dots \int_{y_c \in [(y^l)^c, (y^r)^c]} \int_{\tilde{X}_t^1} \dots \int_{\tilde{X}_t^c} \frac{\sum_{j=1}^c \tilde{X}_t^j(\mathbf{z}) y_j}{\sum_{j=1}^c \tilde{X}_t^j(\mathbf{z})} \quad (2.118)$$

O cálculo da Eq. (2.118) não pode ser realizado por uma fórmula fechada. No entanto, os valores reais dos limites $[y^l, y^r]$ podem ser aproximados por métodos iterativos, como o algoritmo Karnik-Mendel proposto por Karnik, Mendel e Liang (1999), que é amplamente utilizado na literatura. Em Wu e Mendel (2009), é proposta uma melhoria no algoritmo Karnik-Mendel, que reduz o tempo de cálculo dos limites $[y^l, y^r]$. Na literatura, também foram propostos métodos não iterativos para o cálculo dos limites $[y^l, y^r]$, como em Liang e Mendel (2000a), Wu e Mendel (2002), Nie e Tan (2008). Embora esses métodos não apresentem a mesma precisão dos métodos iterativos, eles possuem menor carga computacional e, portanto, são mais indicados para aplicações em tempo real, como identificação online e controle de processos.

Definição 2.14: *Defuzificador:* Este bloco realiza o cálculo da saída crisp, também conhecida como saída tipo-0, \hat{y} , do SLNT2I. Uma vez calculados os limites $y_{cdc} = [y^l, y^r]$, a saída y é determinada com base nesses limites, ou seja, $\hat{y} = f(y^l, y^r)$. Na literatura, o defuzificador comumente utilizado é o seguinte:

$$\hat{y} = \frac{y^r + y^l}{2} \quad (2.119)$$

.

2.3.6 Sistema de lógica nebulosa tipo-2 Takagi-Sugeno-Kang (TSK)

Os sistemas nebulosos do tipo Takagi-Sugeno-Kang (TSK) são uma extensão dos sistemas nebulosos tradicionais e são amplamente utilizados em problemas de modelagem e controle de sistemas dinâmicos. Uma característica dos sistemas TSK é a possibilidade de utilizar funções lineares no consequente das regras. Esses termos lineares permitem expressar a saída do sistema como uma combinação linear das variáveis de entrada z_j , o que pode reduzir a quantidade de regras necessárias para aproximar comportamentos dinâmicos complexos (Babuska, 2012). A forma geral de uma regra nebulosa tipo-2 intervalar TSK é a seguinte:

$$R^i : \mathbf{SE} \ z_1 \text{ é } \tilde{X}_1^i \ \mathbf{E} \ z_2 \text{ é } \tilde{X}_2^i \ \mathbf{E} \ \dots \ \mathbf{E} \ z_{n_z} \text{ é } \tilde{X}_{n_z}^i, \quad (2.120)$$

$$\mathbf{ENTÃO} \ y^i = h^i(\mathbf{z})$$

onde $h^i(\mathbf{z})$ é uma função baseada no vetor de variáveis de entrada $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_{n_z}]^T$. No contexto da modelagem nebulosa, comumente são utilizados os dados experimentais de entrada u e saída y do sistema dinâmico para compor o vetor de variáveis de entrada \mathbf{z} . Assim, $z_j = y_1|_k$ e/ou $z_j = u_1|_k$ e, conseqüentemente, $h^i(\mathbf{y}|_k, \mathbf{u}|_k)$.

Na abordagem de SLNT2I, existem dois tipos de sistemas que podem ser considerados:

- **Sistema nebuloso A2-C0:** Esse sistema apresenta conjuntos nebulosos tipo-2 no antecedente e uma saída *crisp* (tipo-0) no consequente.
- **Sistema nebuloso A2-C1:** Esse sistema apresenta conjuntos nebulosos tipo-2 no antecedente e uma saída intervalar (tipo-1) no consequente.

Para exemplificar cada sistema nebuloso citado acima, considera-se que o consequente é dado por uma combinação linear das variáveis de entrada $[z_1, \dots, z_{n_z}]$. Para o sistema nebuloso A2-C0, a regra nebulosa tem a seguinte forma

$$R^i : \mathbf{SE} \ z_1 \text{ é } \tilde{X}_1^i \ \mathbf{E} \ \dots \ \mathbf{E} \ z_{n_z} \text{ é } \tilde{X}_{n_z}^i \ \mathbf{ENTÃO} \ y^i = \sum_{j=1}^{n_z} a_j^i z_j, \quad (2.121)$$

onde os coeficientes a_j^i da i -ésima regra são *crisp*. A definição formal da defuzificação de um sistema nebuloso A2-C0 é dado como segue (Kayacan, 2011):

$$y_{A2-C0} = [y^l, y^r] = \int_{\beta^1 \in [\underline{\beta}^1, \bar{\beta}^1]} \dots \int_{\beta^c \in [\underline{\beta}^c, \bar{\beta}^c]} \frac{\sum_{j=1}^c \beta^j(\mathbf{z}) y_j}{\sum_{l=1}^c \beta^j(\mathbf{z})}. \quad (2.122)$$

Segundo Begian, Melek e Mendel (2008), o cálculo de y_{A2-C0} pode ser realizado pela fórmula fechada

$$y_{A2-C0} = \frac{\sum_{j=1}^c \underline{\beta}^j(\mathbf{z}) \cdot y^j}{\sum_{j=1}^c (\underline{\beta}^j(\mathbf{z}) + \bar{\beta}^j(\mathbf{z}))} + \frac{\sum_{j=1}^c \bar{\beta}^j(\mathbf{z}) \cdot y^j}{\sum_{j=1}^c (\underline{\beta}^j(\mathbf{z}) + \bar{\beta}^j(\mathbf{z}))}. \quad (2.123)$$

Para o sistema nebuloso A2-C1, a regra nebulosa tem a seguinte forma

$$R^i : \mathbf{SE} \ z_1 \text{ é } \tilde{X}_1^i \ \mathbf{E} \ \dots \ \mathbf{E} \ z_{n_z} \text{ é } \tilde{X}_{n_z}^i \ \mathbf{ENTÃO} \ \tilde{y}^i = \sum_{l=1}^{n_z} \tilde{a}_j^i z_j \quad (2.124)$$

Os coeficientes \tilde{a}_j^i da i -ésima regra são intervalares, ou seja, $\tilde{a}_j^i = [\underline{a}_j^i, \bar{a}_j^i] = [a_l^i - s_l^i, a_l^i + s_l^i]$, onde s_l^i representa o grau de incerteza do l -ésimo parâmetro da i -ésima regra. A \tilde{y}_j^i é a saída da i -ésima regra, onde $\tilde{y}^i = [\underline{y}^i, \bar{y}^i]$. O cálculo da saída do sistema nebuloso A2-C1 é dado pelas Eqs. (2.118)-(2.119). Em Liang e Mendel (1999) apresenta-se o processo iterativo para o cálculo dos pontos $[y^l, y^r]$. Considerando um sistema nebuloso com c regras, cálculo para estimar o ponto y^l é descrito a seguir:

1. Ordenar \underline{y}^i em ordem crescente, tal que $\underline{y}^1 < \dots < \underline{y}^c$.
2. Determinar $\beta_m^i = (\underline{\beta}^i + \bar{\beta}^i)/2$, $y^i = \underline{y}^i$ e calcular a equação a seguir

$$y = \frac{\sum_{i=1}^c \beta_m^i y^i}{\sum_{i=1}^c \beta_m^i} \quad (2.125)$$

e definir $y^l = y$

3. Encontrar $L (1 \leq L \leq c - 1)$, tal que $\underline{y}^L \leq y^l \leq \underline{y}^{L+1}$.
4. Definir $\beta_m^i = \bar{\beta}^i$ para $i \leq L$ e $\beta_m^i = \underline{\beta}^i$ para $i > L$ e calcular y com a Eq. (2.125).
5. Se $y^l = y$, parar. Caso contrário, alterar o valor de y^l para y e voltar para o passo 3.

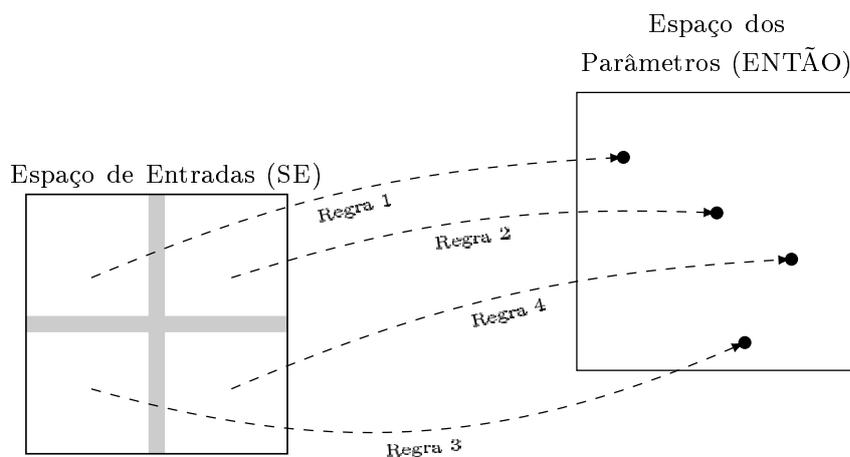
O cálculo para estimar o ponto y^r é descrito a seguir:

1. Ordenar \bar{y}^i em ordem crescente, tal que $\bar{y}^1 < \dots < \bar{y}^c$.
2. Determinar $\beta_m^i = (\bar{\beta}^i + \underline{\beta}^i)/2$, $y^i = \bar{y}^i$ e y pela Eq. (2.125) e definir $y^r = y$
3. Encontrar $L(1 \leq L \leq c - 1)$, tal que $\bar{y}^L \leq y^r \leq \bar{y}^{L+1}$.
4. Definir $\beta_m^i = \underline{\beta}^i$ para $i \leq L$ e $\beta_m^i = \bar{\beta}^i$ para $i > L$ e calcular y com a Eq. (2.125).
5. Se $y^r = y$, parar. Caso contrário, alterar o valor de y^r para y e voltar para o passo 3.

Devido à sua natureza iterativa, o desempenho do algoritmo pode ser impactado pelo tamanho da base de regras do sistema nebuloso. Quanto maior for o número de regras, mais complexas e demoradas se tornam as operações necessárias para combinar as informações de pertinência e realizar a defuzzificação. Isso pode levar a um aumento significativo no tempo de processamento, especialmente em sistemas com muitas entradas ou regras interdependentes.

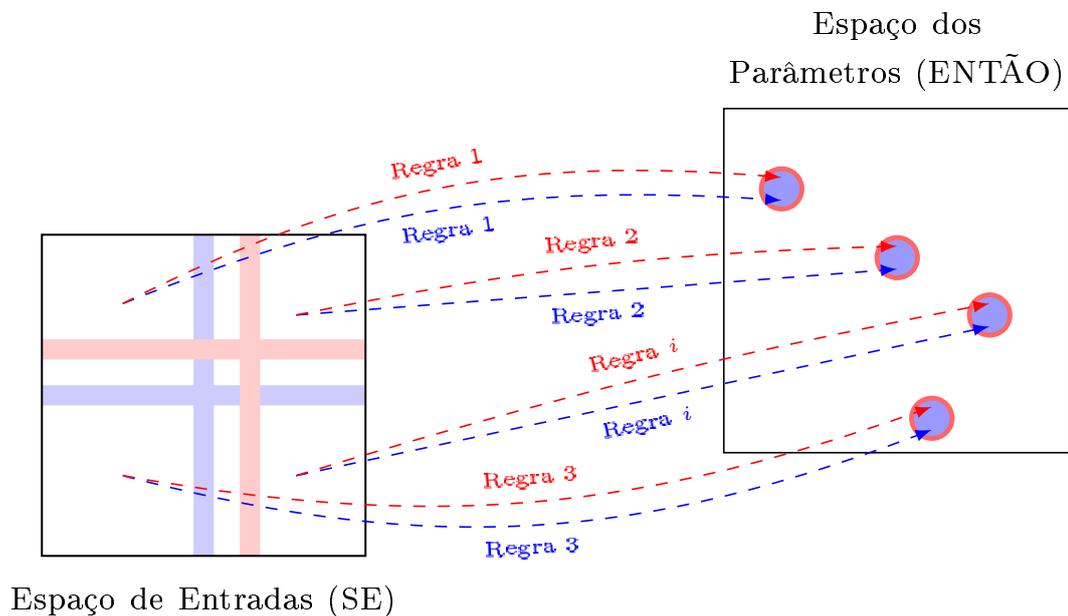
No caso tipo-1, um modelo TSK pode ser visto como um mapeamento do espaço de entradas (espaço do antecedente) para pontos de convergência no espaço dos submodelos locais, que são definidos pelos parâmetros do consequente. Além disso, observa-se que uma partição i , definida pelo antecedente da regra i , está relacionada a um submodelo, conforme ilustrado na Figura 12 (Babuska, 2012; Serra; Bottura, 2009; Filho; Serra, 2018). Para o caso do modelo A2-C1, as incertezas nos parâmetros do antecedente resultam em duas partições, como pode ser observado na Figura 13, representadas pelas divisões azul e vermelha. Cada partição (azul e vermelha) da regra i converge agora para uma região específica no espaço dos submodelos, definida pelas áreas azul e vermelha no espaço de parâmetros apresentado na Figura 13.

Figura 12 – Mapeamento do conjunto de regras definidas no antecedente ao conjunto de funções ou submodelos do consequente para o SLN tipo-1



Fonte: Adaptado de Babuska (2012) e (Pires, 2018)

Figura 13 – Mapeamento do conjunto de regras definidas no antecedente ao conjunto de funções ou submodelos do consequente para o caso SLNT2I A2–C1



Fonte: Autor

2.4 Identificação nebulosa evolutiva

O desenvolvimento de modelos matemáticos de sistemas reais é um tópico fundamental em diversas áreas da ciência e engenharia. Por meio de um modelo matemático, é possível realizar simulações, controle e análise do comportamento do sistema (Babuska, 2012; Aguirre, 2007). Portanto, utilizar metodologias que produzam um modelo matemático adequado é uma tarefa importante. Na engenharia de controle, as etapas de modelagem e identificação são importantes para os projetos de controladores, supervisão e detecção de falhas (Babuska, 2012). Com o aumento da complexidade dos sistemas industriais, os quais são em grande parte não-lineares e não-estacionários, é crucial que um sistema de controle seja capaz de garantir um bom desempenho em uma ampla faixa de pontos de operação. Nesse sentido, o processo de modelagem desempenha um papel fundamental no desenvolvimento de sistemas de controle eficazes (Babuska, 2012). Um ponto importante a ser considerado é a capacidade de generalização do modelo, bem como sua complexidade, o que gera um desafio de equilíbrio (*tradeoff*). Portanto, no processo de identificação do modelo, busca-se obter um modelo preciso com o menor grau de complexidade possível.

Um sistema real pode ser representado por modelos matemáticos de diferentes estruturas, como, por exemplo, equações algébricas, equações diferenciais, máquinas de estados finitos, redes neurais e sistemas nebulosos. Os sistemas nebulosos descrevem as relações entre as variáveis do sistema real por meio de regras do tipo SE-ENTÃO, conforme a Eq. (2.113). Na literatura, os modelos nebulosos são aplicados em problemas de modelagem para lidar com dados incertos e imprecisos (Babuska, 2012; Serra; Bottura, 2009; Pires; Serra, 2020; Filho;

Serra, 2018; Evangelista; Serra, 2017; Angelov, 2012; Wang, 1996). A identificação nebulosa é um conjunto de abordagens para estimar modelos nebulosos a partir de dados experimentais (Babuska, 2012; Angelov; Filev, 2004; Lughofer, 2008). A estimação desses modelos nebulosos pode ser realizada de duas maneiras: batelada ou evolutiva. Na estimação em batelada, os parâmetros são estimados através do processamento de um conjunto de dados com N amostras na etapa de treino do modelo. Na abordagem evolutiva, denominada também como aprendizado incremental, o modelo é treinado incrementalmente, onde os parâmetros e a estrutura do modelo são atualizados a cada novo dado processado. Vale ressaltar que o termo evolutivo não deve ser confundido com o evolucionário, onde o último se refere a algoritmos que se baseiam no processo de evolução encontrado na natureza, ou seja, são bioinspirados (Lemos; Caminhas; Gomide, 2011). Os modelos nebulosos evolutivos são especialmente relevantes em cenários onde a capacidade de armazenamento é limitada e há a necessidade de lidar com grandes volumes de informações para realizar a modelagem de sistemas complexos (Bouchachia; Lughofer; Sayed-Mouchaweh, 2014). Outros cenários onde sistemas nebulosos evolutivos são relevantes são (Lughofer, 2011):

- Atualização de um modelo já existente a partir de novas informações, no sentido de agregar novas dinâmicas do sistema físico ainda que não foram modeladas, de modo a melhorar a predição, ação de controle e melhor cobertura do espaço de dados para evitar extrapolações quando operando com novas amostras;
- Esquecimento de dinâmicas aprendidas anteriormente, no sentido de permitir uma adaptação gradual dos parâmetros em tempo de reagir as mudanças no comportamento temporal do sistema dinâmico.

A identificação nebulosa evolutiva utiliza, em grande parte, algoritmos de agrupamento nebuloso, que têm como principal objetivo agrupar dados semelhantes e organizar esses agrupamentos de forma coerente. Esses algoritmos pertencem à classe de métodos de aprendizado não supervisionado, pois não requerem identificadores de classe *a priori*.

Uma característica fundamental frequentemente empregada nesses algoritmos é o conceito de **similaridade**, segundo o qual os dados dentro de um mesmo grupo apresentam características mais próximas entre si quando comparados a dados de outros grupos no espaço de dados experimentais (Bezdek, 1981).

No caso dos algoritmos de agrupamento nebulosos, o objetivo é particionar um conjunto de dados $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}^{(j)}, j = 0, \dots, N\}$, permitindo que cada elemento pertença simultaneamente a diferentes grupos com graus de pertinência variados, refletindo a incerteza ou ambiguidade inerente aos dados. Cada agrupamento encontrado representa uma partição nebulosa, onde um conjunto de c partições cumpre as seguintes condições (Babuska, 2012):

$$\mu^i(\mathbf{z}|_k) \in [0, 1], \quad 1 \leq i \leq c \quad (2.126)$$

$$\sum_1^c \mu^i(\mathbf{z}|_k) = 1 \quad (2.127)$$

$$0 < \sum_{k=1}^N \mu^i(\mathbf{z}|_k) < N, \quad 1 \leq i \leq c \quad (2.128)$$

onde a Eq. (2.126) significa que a FP da partição i terá um valor entre 0 e 1; a Eq. (2.127) significa que a somatória dos valores de pertinência de todas as partições é igual a 1; e a Eq. (2.128) significa que o somatório de do valor de pertinência de todos os dados para a partição i é maior que 0 e menor que N .

Um agrupamento está localizado em um espaço de dados $\mathcal{Z}_1 \times \dots \times \mathcal{Z}_{n_z}$ e é caracterizado por um centro \mathbf{z}^* e uma zona de influência Σ . Os algoritmos de agrupamento são baseados na análise de um vetor de dados $\mathbf{z}|_k = [z_1|_k, \dots, z_{n_z}|_k]^T$, em que os elementos desse vetor representam dados experimentais do sistema a ser identificado. Para encontrar agrupamentos, esses algoritmos analisam o espaço de dados à medida que um novo dado é processado, permitindo a evolução e adaptação paramétrica do SLN. A seguir, são apresentados os mecanismos utilizados no processo de aprendizado:

Criação de agrupamento: Tem como objetivo encontrar novos agrupamentos no espaço de dados. A partir de um novo dado, este mecanismo analisa a necessidade de criar um novo agrupamento por meio de métricas, tais como potencial de representatividade (Angelov; Filev, 2004; Júnior; Serra, 2017), distância (Zdešar; Dovžan; Škrjanc, 2014; Filho; Serra, 2018) ou grau de compatibilidade (Lemos; Caminhas; Gomide, 2011; Angelov, 2012). A partir destas métricas, uma condição para criação de uma nova regra é determinada. Uma vez que a condição é verdadeira, um novo grupo é criado, onde

$$c|_{k+1} = c|_k + 1 \quad (2.129)$$

$$\mathbf{z}^{c^*}|_{k+1} = \mathbf{z}|_k \quad (2.130)$$

$$\Sigma^c|_{k+1} = \Sigma_0 \quad (2.131)$$

onde Σ_0 é a zona de influência inicial do agrupamento.

Adaptação dos agrupamentos: Este mecanismo é executado quando não há criação de um novo agrupamento e tem como objetivo atualizar a posição dos centros e as zonas de influência dos agrupamentos existentes. A forma geral da atualização dos parâmetros é apresentada a seguir:

$$\mathbf{z}^{i^*}|_{k+1} = \mathbf{z}^{i^*}|_k + \Delta_{\mathbf{z}^{i^*}}(\mathbf{z}|_k) \quad (2.132)$$

$$\Sigma^i|_{k+1} = \Sigma^i|_k + \Delta_{\Sigma^i}(\mathbf{z}|_k) \quad (2.133)$$

onde $\Delta_{\mathbf{z}^{i*}}(\mathbf{z}|_k)$ representa o ajuste do i -ésimo centro e $\Delta\Sigma^i(\mathbf{z}|_k)$ representa o ajuste da i -ésima zona de influência, ambos em função do novo dado $\mathbf{z}|_k$.

Fusão de agrupamentos: Tem como objetivo realizar a fusão de agrupamentos sobrepostos. A cada instante de tempo, esse mecanismo analisa a disposição dos agrupamentos no espaço de dados, levando em consideração a posição dos centros e a sobreposição das zonas de influência entre dois candidatos de fusão, $\mathbf{z}^{i*}|_k$ e $\mathbf{z}^{j*}|_k$. Uma vez que a condição de fusão é atendida, os dois agrupamentos são combinados para formar um novo agrupamento.

$$c|_{k+1} = c|_k - 1 \quad (2.134)$$

$$\mathbf{z}^{\text{fusão},*}|_{k+1} = f(\mathbf{z}^{i*}|_k, \mathbf{z}^{j*}|_k) \quad (2.135)$$

$$\Sigma^{\text{fusão},*}|_{k+1} = f(\Sigma^i|_k, \Sigma^j|_k) \quad (2.136)$$

O processo de fusão de regras desempenha um papel crucial nos algoritmos de agrupamento nebulosos, especialmente em contextos que envolvem incerteza e variabilidade nos dados. Em SLN, as regras servem como a base para a modelagem de relações complexas entre variáveis. No entanto, em aplicações práticas, especialmente em cenários com grandes volumes de dados ou múltiplas fontes de conhecimento, as regras podem ser redundantes, conflitantes ou excessivamente numerosas, comprometendo a eficiência e a interpretabilidade do modelo.

Portanto, a fusão de regras permite consolidar e otimizar as regras existentes, reduzindo redundâncias e promovendo uma maior consistência entre elas. Isso contribui para modelos mais compactos, sem perda significativa de precisão ou expressividade, e facilita a análise e compreensão dos resultados. Adicionalmente, ao eliminar conflitos entre regras que podem surgir durante o processo de agrupamento, a fusão aumenta a robustez e a confiabilidade do sistema, melhorando a sua capacidade de lidar com dados ruidosos ou incompletos.

Exclusão de agrupamento: Tem como objetivo eliminar agrupamentos que não são relevantes para a base de regras do SLN. Esse mecanismo verifica o grau de representatividade de cada agrupamento e, caso esse grau seja inferior a um limiar definido pelo especialista, o agrupamento é removido da base de conhecimento. Isso permite uma seleção mais precisa e eficiente dos agrupamentos que contribuem significativamente para a base de regras do sistema.

No contexto de sistemas de inferência tipo-2, os parâmetros das funções de pertinência possuem incertezas associadas ou à posição dos centros ou à zona de influência, ou seja

$$\tilde{\mathbf{z}}^{i*} = [\mathbf{z}^{i*} + \boldsymbol{\eta}_z^i, \mathbf{z}^{i*} - \boldsymbol{\eta}_z^i] \quad (2.137)$$

ou

$$\tilde{\Sigma}^i = [\Sigma^i + \boldsymbol{\eta}_\Sigma^i, \Sigma^i - \boldsymbol{\eta}_\Sigma^i] \quad (2.138)$$

onde $\boldsymbol{\eta}_z^i$ é a incerteza sobre a posição do centro e $\boldsymbol{\eta}_\Sigma^i$ é a incerteza sobre a zona de influência no i -ésimo agrupamento. A estimação das incertezas sobre os parâmetros da função de pertinência tipo-2 pode ser realizada por meio de duas abordagens:

Ajuste baseado no erro de estimação: Nessa abordagem, as incertezas η^i são estimadas com o objetivo de otimizar o desempenho do modelo nebuloso tipo-2. Técnicas de aprendizagem baseadas no gradiente descendente são amplamente empregadas para ajustar as incertezas associadas às funções de pertinência tipo-2 (Juang; Tsao, 2008; Lin *et al.*, 2013; Tung; Quek; Guan, 2013). Nesse contexto, o processo de adaptação das incertezas nas funções de pertinência é descrito por:

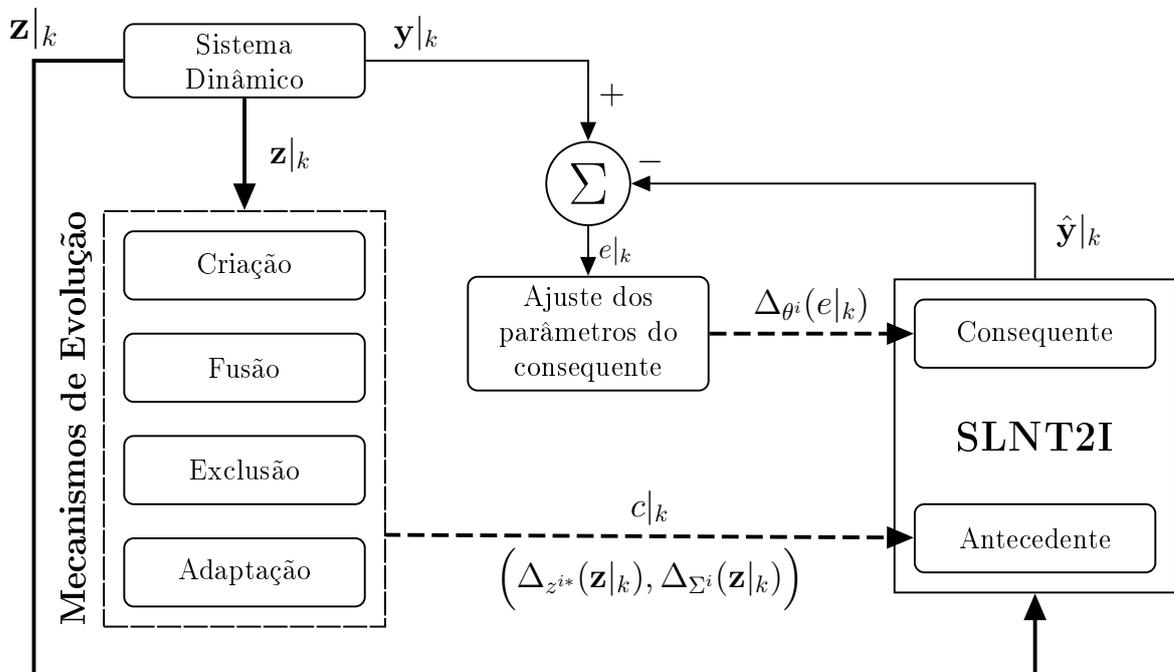
$$\eta^i|_{k+1} = \eta^i|_k + \Delta_{\eta^i}(e|_k) \tag{2.139}$$

Ajuste em função do novo dado experimental: Nesta abordagem, o algoritmo de agrupamento evolutivo define as incertezas η^i de acordo com o fluxo de dados. Na literatura, algoritmos apresentados por Das, Subramanian e Sundaram (2015) e Pratama *et al.* (2017) representam esta abordagem. Neste contexto, o processo de adaptação das incertezas associadas as funções de pertinência é dada por:

$$\eta^i|_{k+1} = \eta^i|_k + \Delta_{\eta^i}(z|_k) \tag{2.140}$$

A Fig. 14 mostra o diagrama de blocos genérico da identificação nebulosa evolutiva de um sistema dinâmico baseada em SLN. Vale ressaltar que os algoritmos de agrupamentos evolutivo presentes na literatura não aplicam todos os mecanismo de evolução, tal que os mecanismos utilizados são definidos de acordo com cada metodologia.

Figura 14 – Diagrama de blocos geral do processo de identificação nebulosa evolutiva



Fonte: Autor

3 METODOLOGIA DE IDENTIFICAÇÃO NEURO-NEBULOSA TIPO-2 INTERVALAR PARA SISTEMAS DINÂMICOS EM AMBIENTE RUIDOSO

Os modelos nebulosos do tipo TSK se apresentam como uma alternativa para a identificação de sistemas dinâmicos incertos e não lineares. De acordo com Babuska (2012), sistemas dinâmicos não lineares podem ser representados por modelos nebulosos, onde os submodelos lineares são usados no consequente das regras, enquanto as não linearidades são modeladas pela composição das funções de pertinência do antecedente das regras. No contexto evolutivo, a estimação dos submodelos do consequente deve ser realizada de forma incremental. Isso significa que a cada nova informação, um método de atualização dos parâmetros dos submodelos é aplicado. Essa abordagem permite que o modelo evolua e se adapte continuamente à medida que novas informações são incorporadas, garantindo uma representação mais precisa e atualizada do sistema ao longo do tempo. Neste sentido, as metodologias de estimação evolutiva são amplamente empregadas para identificação de sistemas não lineares complexos (Angelov; Buswell, 2002; Angelov; Filev, 2004; Li *et al.*, 2017; Filho; Serra, 2018; Serra; Bottura, 2007; Santos; Barreto, 2018; Wei *et al.*, 2020; Evangelista; Serra, 2020; Rodrigues; Silva; Lemos, 2022; Sun *et al.*, 2022). Em situações de estimação em ambientes ruidosos, especialmente quando o ruído é autocorrelacionado, é necessário utilizar estimadores que não sofram com estimação polarizada dos parâmetros. Uma possível solução para isso é o uso de um estimador VI (Ljung, 1999; Soderstrom; Stoica, 2002; Aguirre, 2007; Serra; Bottura, 2007; Young, 2011; Filho; Serra, 2018).

Neste capítulo, será apresentada a metodologia de identificação no espaço de estados baseada em variáveis instrumentais nebulosas tipo-2 no contexto evolutivo. Além disso, serão discutidos aspectos relacionados à convergência e estabilidade do método proposto.

3.1 O Modelo neuro-nebuloso no espaço de estados

Nesta metodologia, adotou-se uma estrutura de modelo neuro-nebulosa TSK. Este modelo é comumente utilizado na literatura, sendo uma ferramenta de modelagem e controle que combina elementos da lógica nebulosa e de redes neurais.

Esses modelos são utilizados para descrever sistemas complexos e não lineares, onde a relação entre as variáveis de entrada e saída não é trivial (Öztürk; Özkol, 2021; Morales *et al.*, 2021; Nakrani; Joshi, 2022, 2022; Qin; Zhao; Dian, 2023; Mendoza; Yu, 2023). Cada regra tem uma forma específica para a saída, geralmente uma função linear, cujos parâmetros são ajustados durante o treinamento do modelo. Assim, o modelo TSK é capaz de representar relações complexas entre as variáveis de entrada e saída de forma adaptativa e flexível. A estrutura típica desse modelo é composta por camadas, cada uma realizando uma função específica para determinar a saída. Neste estudo adotou-se um modelo neuro-nebuloso tipo-2 intervalar no espaço de estados (MNT2IEE) para a identificação de sistemas dinâmicos não lineares em

ambientes ruidosos. O MNT2IEE é composto por cinco camadas distintas: a **Camada de Pré-processamento**, a **Camada de Estimação Evolutiva do Antecedente**, a **Camada de Ativação das Regras**, a **Camada de Cálculo Recursivo dos Submodelos** e a **Camada de Composição das Regras Tipo-2**. A estrutura geral das regras do MNT2IEE é apresentada a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i : \text{ SE } z_1^i|_k \text{ é } \tilde{X}_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_{n_z}^i|_k \text{ é } \tilde{X}_{n_z}^i \\ \text{ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{x}^i|_{k+1} &= \mathbf{A}^i \mathbf{x}^i|_k + \mathbf{B}^i \mathbf{u}|_k + \mathbf{K}^i \mathbf{e}|_k \\ \mathbf{y}^i|_k &= \mathbf{C}^i \mathbf{x}^i|_k + \mathbf{D}^i \mathbf{u}|_k \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde

- $i = 1, 2, \dots, c$ é o índice da regra;
- $z_1|_k \in \mathcal{Z}_1, \dots, z_{n_z}|_k \in \mathcal{Z}_{n_z}$ são variáveis da parte antecedente. $\mathcal{Z}_{j=1, \dots, n_z}$ é o j -ésimo universo de discurso.
- $\tilde{X}_{j=1, \dots, n_z}^i$ representa funções de pertinência Gaussiana do tipo-2 por intervalo, que definem a i -ésima partição nebulosa do tipo-2 (T2FP) no espaço de dados \mathcal{Z} . Este espaço de dados é caracterizado pelo produto cartesiano de n_z universos de discurso, denotado como $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 \times \dots \times \mathcal{Z}_{n_z}$.

O proposição do consequente é definida por um submodelo de observador de estados (SMOS), tal que:

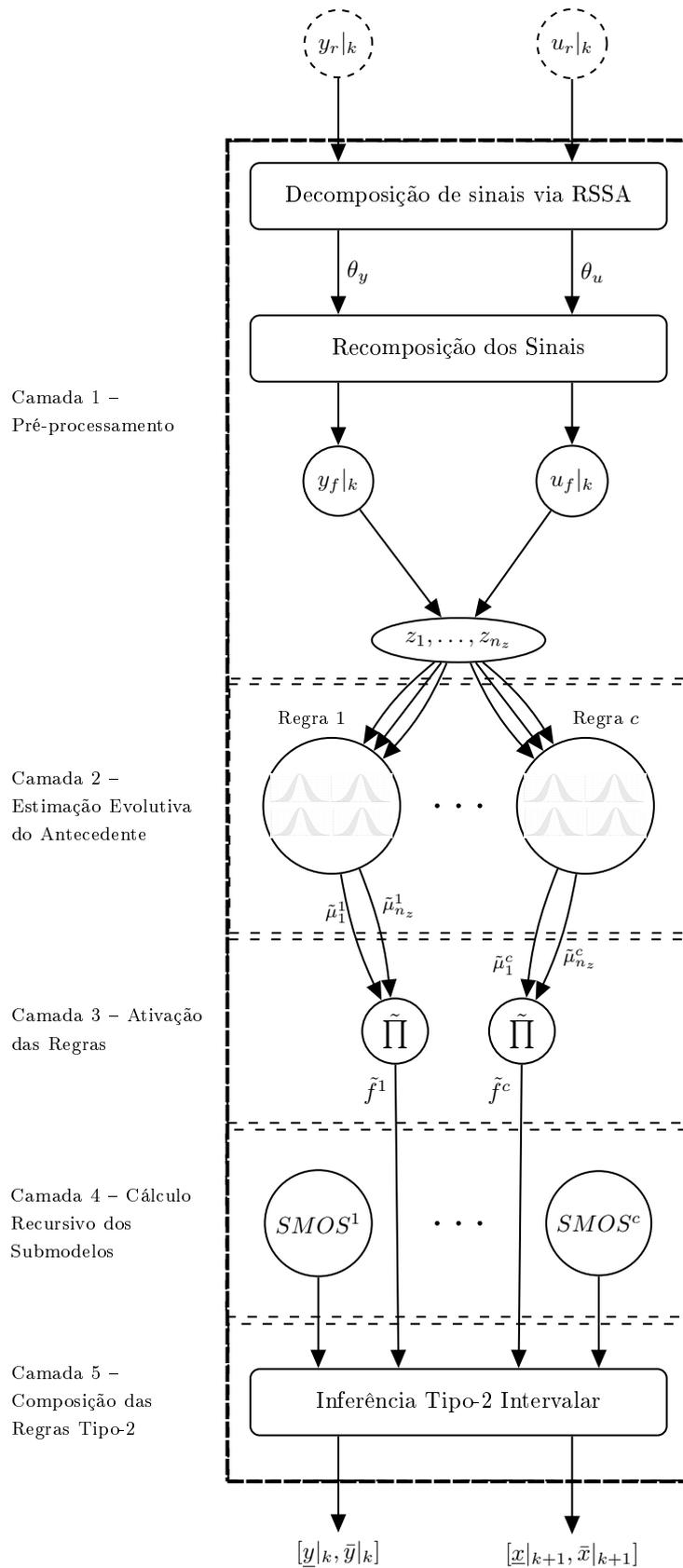
- $\mathbf{x}_k^i = [x_1^i|_k \ x_2^i|_k \ \dots \ x_n^i|_k] \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado da i -ésima regra;
- $\mathbf{y}_k^i = [y_1^i|_k \ y_2^i|_k; \ \dots \ y_p^i|_k] \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída;
- $\mathbf{u}_k = [u_1|_k \ u_2|_k \ \dots \ u_m|_k] \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de sinal de entrada;
- $\mathbf{A}^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}^i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C}^i \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\mathbf{D}^i \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $\mathbf{K}^i \in \mathbb{R}^{n \times p}$ são as matrizes do submodelo do observador de estado;
- $\mathbf{e}^i|_k = [e_1^i|_k \ e_2^i|_k \ \dots \ e_p^i|_k] \in \mathbb{R}^p$ é um vetor de erro residual do i -ésimo submodelo, que é calculado por:

$$\mathbf{e}|_k = \mathbf{y}|_k - \frac{\bar{\mathbf{y}}|_k + \underline{\mathbf{y}}|_k}{2} \quad (3.2)$$

onde $\bar{\mathbf{y}}|_k$ e $\underline{\mathbf{y}}|_k$ denotam os limites superiores e inferiores dos valores de saída, respectivamente, compreendendo a saída de intervalo estimada pelo MNT2IEE.

Na Figura 15 é apresentada a estrutura da MNT2IEE. Os detalhes de cada camada são discutidas nas próximas seções.

Figura 15 – Modelo neuro-nebuloso tipo-2 intervalar no espaço de estados proposto



Fonte: Autor

3.2 Camada 1 – pré-processamento de dados

A primeira camada do MNT2IEE realiza a filtragem dos dados experimentais. Considerando que o sistema dinâmico está sujeito a ruídos, torna-se necessário pré-processar os dados para otimizar o desempenho do algoritmo evolutivo. Os dados experimentais do sistema dinâmico são processados pelo método de Análise Espectral Singular Recursiva (RSSA - do inglês *Recursive Singular Spectrum Analysis*), introduzido por Júnior e Serra (2017). Esse algoritmo propõe uma abordagem recursiva para o método clássico de Análise Espectral Singular amplamente reconhecido na literatura (Vautard; Yiou; Ghil, 1992; Golyandina; Nekrutkin; Zhigljavsky, 2001). Antes de iniciar o processo recursivo, é necessário obter um conjunto de N amostras do sinal de interesse e definir o parâmetro L , que indica o tamanho da matriz de covariância do algoritmo. A partir desse conjunto, uma matriz de trajetória $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{L \times K_N}$ é formada da seguinte maneira:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{m}_1 \ \mathbf{m}_2 \ \cdots \ \mathbf{m}_{K_N}] \quad (3.3)$$

onde $K_N = N - L - 1$ e $\mathbf{m}_j \in \mathbb{R}^L$ é um vetor com L amostras do sinal y , ou seja,

$$\mathbf{m}_j = [y_j \ \cdots \ y_{j+L-1}]^T, \text{ para } j = 1, \dots, K_N \quad (3.4)$$

A partir da matriz \mathbf{M} , calcula-se a matriz de covariância inicial $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{L \times L}$, tal que

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{M}^T \quad (3.5)$$

Para realizar a decomposição da amostra atual $y|_k$, deve-se atualizar a matriz de covariância \mathbf{T} recursivamente. A atualização de \mathbf{T} é dada pela equação a seguir:

$$\mathbf{T}|_k = \mathbf{T}|_{k-1} + \mathbf{m}|_k \mathbf{m}|_k^T \quad (3.6)$$

sendo $\mathbf{m}|_k = [y|_{k-L+1} \ \cdots \ y_k]^T$. O próximo passo é aplicar a Decomposição em Valores Singulares (SVD – do inglês *Singular Value Decomposition*) na matriz $\mathbf{T}|_k$, obtendo, assim, os autovalores λ_j e autovetores \mathbf{p}_j , tal que

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_L \quad (3.7)$$

$$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_L \quad (3.8)$$

Examinando os autovalores, é possível relacionar quais autovetores estão associados à dinâmica do sistema e quais estão associados ao ruído. Conforme indicado pela literatura (Golyandina; Nekrutkin; Zhigljavsky, 2001; Júnior; Serra, 2017), os autovetores relacionados à dinâmica do sistema exibem autovalores significativamente maiores em comparação aos autovetores associados ao ruído. Dessa maneira, são analisados os autovalores de $\mathbf{T}|_k$ e selecionados os d mais significativos. A partir da vetor de dados $\mathbf{m}|_k$ e dos autovetores, calcula-se as componentes não-observáveis $\theta_j|_k$ do sinal y pela equação a seguir

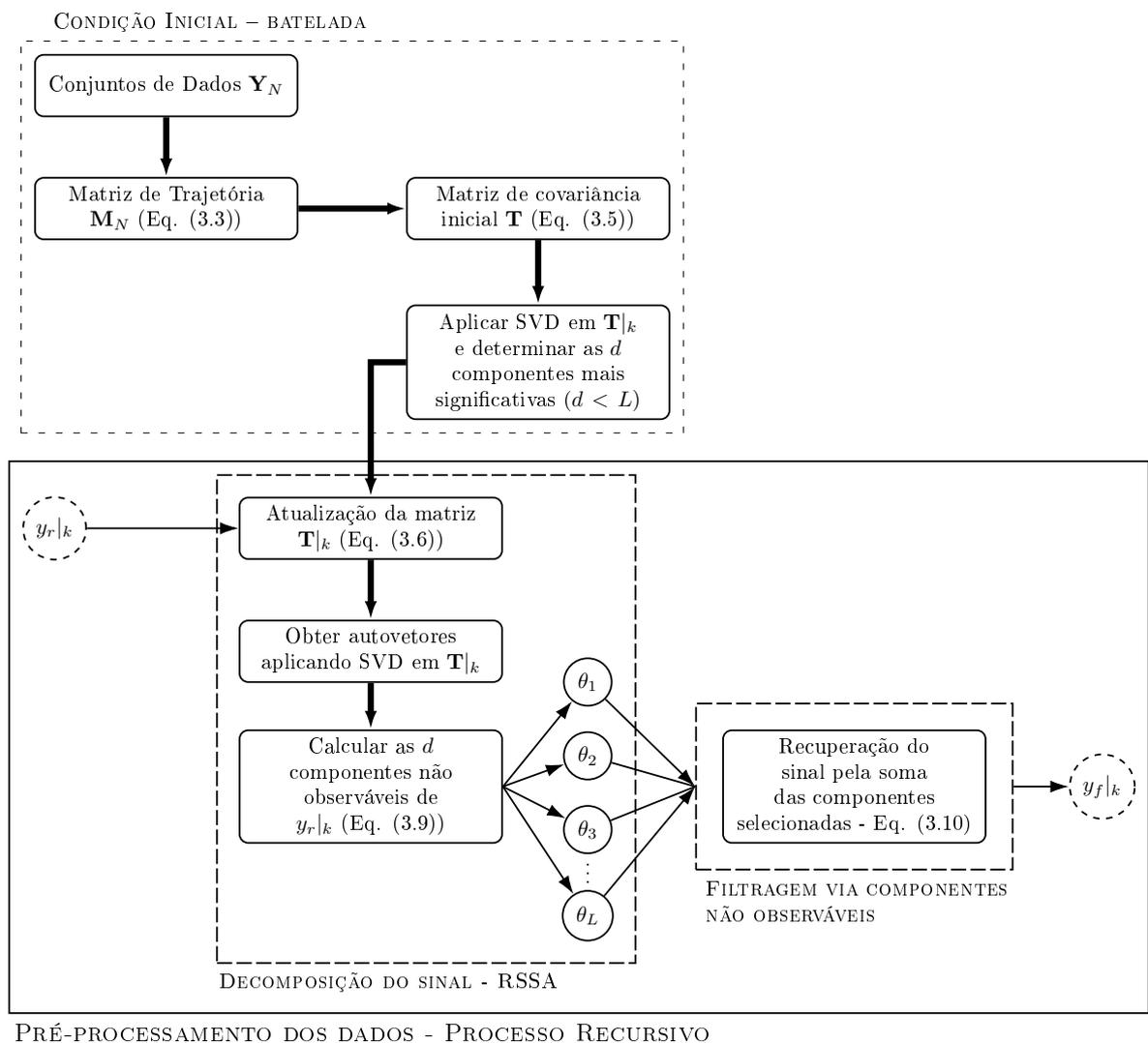
$$\theta_j|_k = \dot{p}_j \mathbf{m}|_k^T \mathbf{p}_j, \quad j = 1, 2, \dots, d \quad (3.9)$$

onde \hat{p}_j é o último elemento do autovetor \mathbf{p}_j . O sinal filtrado $y_f|_k$ é obtido pela soma das componentes com d autovalores mais significativos, ou seja,

$$y_f|_k = \sum_{j=1}^d \theta_j|_k \tag{3.10}$$

A Figura 16 apresenta o fluxograma do algoritmo de RSSA aplicado dentro da primeira camada do MNT2IE. Uma vez que os dados experimentais de entrada passam pelo pré-processamento, forma-se o vetor de entradas $\mathbf{z}|_k$ que alimentará a próxima camada do modelo neuro-nebuloso.

Figura 16 – Fluxograma do método Recursivo de Análise Espectral Singular (RSSA) para filtragem dos dados experimentais



Fonte: Autor

3.3 Camada 2 – estimação evolutiva do antecedente

Uma vez que o vetor $\mathbf{z}|_k$ é gerado, pode-se iniciar o processo de estimação evolutiva do antecedente. O objetivo esta camada é evoluir a base de conhecimento do MNT2IEE por meio de

uma metodologia de aprendizado incremental. Portanto, a base de conhecimento pode variar em número de regras, modificando, assim, a estrutura do modelo (Angelov; Filev, 2004; Lughofer, 2008; Lughofer, 2011; Lin *et al.*, 2013). A metodologia de aprendizado incremental adotado é o Algoritmo de Agrupamento Nebuloso Evolutivo Tipo-2 (ANET2). Este método de agrupamento particiona o espaço de entrada \mathcal{Z} ($\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_{n_z}$), onde cada partição é caracterizada por n_z funções de pertinência tipo-2 intervalares, uma para cada eixo do espaço de entrada. A função de pertinência adotada é a função gaussiana tipo-2 intervalar com incerteza na dispersão, descrita pela equação a seguir

$$\tilde{\mu}_{X_j^i}(z_j|k) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z_j|k - z_j^{i*}|k}{\tilde{\sigma}_j^i|k} \right)^2 \right] \quad (3.11)$$

$$\bar{\mu}_{X_j^i}(z_j|k) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z_j|k - z_j^{i*}|k}{\bar{\sigma}_j^i|k} \right)^2 \right] \quad (3.12)$$

$$\underline{\mu}_{X_j^i}(z_j|k) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z_j|k - z_j^{i*}|k}{\underline{\sigma}_j^i|k} \right)^2 \right] \quad (3.13)$$

onde z_j^* , $\tilde{\sigma}_j^i$ são o centro e a dispersão incerta do j -ésimo eixo da i -ésima regra, respectivamente. Neste algoritmo de agrupamento, a normalização dos dados não é necessária, já que ele emprega uma abordagem multiescala, proporcionando um melhor desempenho em problemas não estacionários (Ashrafi; Prasad; Quek, 2020). Uma característica crucial é que a metodologia proposta não requer uma base de conhecimento prévia. Em outras palavras, a base de regras está vazia no início do processo de aprendizagem.

Inicialmente, para o instante $k = 1$, o vetor de entrada do antecedente $\mathbf{z}|_k = [z_1|k \ \dots \ z_{n_z}|k] \in \mathbb{R}^{n_z}$ se torna o centro do primeiro agrupamento, com uma dispersão inicial tipo-1 σ_0 definida pelo projetista, e as dispersões superiores $\bar{\sigma}_j^i$ e inferiores $\underline{\sigma}_j^i$ são calculadas em função de σ^i da seguinte forma:

$$\bar{\sigma}_j^i = \sigma_j^i + \zeta \sigma_j^i \quad (3.14)$$

$$\underline{\sigma}_j^i = \sigma_j^i - \zeta \sigma_j^i \quad (3.15)$$

onde o ζ é um fator de incerteza definida pelo projetista.

Para $k > 1$, os valores de pertinência inferior e superior $\tilde{\mu}_j^i = [\underline{\mu}_{X_j^i}, \bar{\mu}_{X_j^i}]$ são calculados usando (3.12)–(3.13). A partir dos valores de pertinência, pode-se calcular as forças de ativação de cada regra pelas seguintes equações:

$$\bar{\beta}^i|_k = \prod_{j=1}^{n_z} \bar{\mu}_{X_j^i}(z_j|k) \quad (3.16)$$

$$\underline{\beta}^i|_k = \prod_{j=1}^{n_z} \underline{\mu}_{X_j^i}(z_j|k) \quad (3.17)$$

3.3.1 Mecanismo de criação de regras

No ANET2 utiliza-se a média da força de ativação das regras para determinar se um novo agrupamento deve ser criado, ou seja,

$$\beta_m^i|_k = \frac{\bar{\beta}^i|_k + \underline{\beta}^i|_k}{2} \quad (3.18)$$

Desta forma, procura-se o agrupamento com maior força de ativação para o dado mais recente

$$\chi = \arg \max_{i \in [1, c_k]} \beta_m^i|_k \quad (3.19)$$

onde χ é o índice da regra com maior média de força de ativação, $c|_k$ é a quantidade de regras no instante k . Portanto, a condição para criação de um novo agrupamento é dado a seguir:

$$\text{SE } \beta_m^\chi|_k < T_f \text{ ENTÃO criar uma nova regra } (c|_{k+1}) \quad (3.20)$$

onde T_f é o limiar de força de ativação determinado pelo projetista. Uma vez que (3.20) é satisfeita, os dados do vetor $\mathbf{z}|_k$ se tornam o centro do novo agrupamento, ou seja, $z_j^{c|_{k+1}*} = z_j|_k$. Para determinar a dispersão das FPT2I, calcula-se a dispersão tipo-1 por

$$\sigma_j^{c|_{k+1}} = \alpha |z_j|_k - z_j^{\varepsilon_j}|_k| \quad (3.21)$$

onde α é o fator de sobreposição e ε é o índice da função de pertinência com maior valor para o dado $z_j|_k$ no eixo j , dada por

$$\varepsilon_j = \arg \max_{i \in [1, c_k]} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z_j|_k - z_j^{i*}|_k}{\sigma_j^i|_k} \right)^2 \right] \quad (3.22)$$

onde $\sigma_j^i|_k = (\bar{\sigma}_j^i + \underline{\sigma}_j^i)/2$. O cálculo de $\bar{\sigma}_j^{c|_{k+1}}$ e $\underline{\sigma}_j^{c|_{k+1}}$ é realizado utilizando (3.14) e (3.15), respectivamente.

3.3.2 Mecanismo de fusão de agrupamentos

Esse mecanismo verifica se não há uma sobreposição significativa entre a FPT2I recém criada e alguma FPT2I já existente na base de conhecimento. Considerando duas FPT2Is $\tilde{\mu}_{X_j^{c|_{k+1}}}$ e $\tilde{\mu}_{X_j^i}$, tal que $(c|_{k+1}) \neq i$, analisa-se o grau de similaridade das FPT2Is para o eixo j pela equação a seguir:

$$S(z_j^{c|_{k+1},*}, z_j^{\varepsilon_j,*}) = \max \left(\mu_j^{c|_{k+1}}(z_j^{\varepsilon_j,*}), \mu_j^{\varepsilon_j}(z_j^{c|_{k+1},*}) \right) \quad (3.23)$$

onde $\mu_j^{c|_{k+1}}(z_j^{i,*})$ e $\mu_j^i(z_j^{c|_{k+1},*})$ são calculadas da seguinte forma:

$$\mu_j^{c|_{k+1}}(z_j^{\varepsilon_j,*}) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z_j^{\varepsilon_j,*} - z_j^{c|_{k+1},*}}{\sigma_j^{\varepsilon_j}} \right)^2 \right] \quad (3.24)$$

$$\mu_j^{\varepsilon_j}(z_j^{c|_{k+1},*}) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z_j^{c|_{k+1},*} - z_j^{\varepsilon_j,*}}{\sigma_j^{c|_{k+1}}} \right)^2 \right] \quad (3.25)$$

Considerando um limiar superior T_u e um limiar inferior T_l , determina-se os seguintes casos:

1. Se $S > T_u$, a FPT2I $\mu_j^{c_{k+1}}$ deve ser substituída por μ_j^ε na regra $c|_{k+1}$.
2. Se $T_l < S < T_u$, as duas FPT2I devem ser fundidas e a nova FPT2I gerada terá seus parâmetros definidos pelas seguintes equações

$$z^{new} = \frac{z_j^{c_{k+1}} + N_p^i z_j^i}{1 + N_p^i} \quad (3.26)$$

$$\sigma^{new} = \frac{\sigma_j^{c_{k+1}} + \sigma_j^i}{\sqrt{\pi}} \quad (3.27)$$

onde N_p^i é o número de pontos pertencentes ao agrupamento i .

3. Se $S < T_l$, a FPT2I recém criada é mantida.

3.3.3 Mecanismo de adaptação dos agrupamentos

No contexto do processo evolutivo, pode haver situações em que um agrupamento permanece em uma região com baixa densidade de dados. Nesse cenário, é vantajoso usar um mecanismo de adaptação para deslocar o centro do agrupamento para uma área com maior densidade de dados. Nesta tese, adotou-se a atualização do agrupamento com o maior valor de pertinência em relação ao vetor de dados $\mathbf{z}|_k$, desde que não tenha ocorrido a criação de novas regras. A atualização é realizada por meio das seguintes equações:

$$N_p^\chi = N_p^\chi + 1 \quad (3.28)$$

$$\Delta_z = \frac{z_j^{\chi^*}|_k N_p^\chi}{N_p^\chi - 1} + \frac{z_j|_k}{N_p^\chi} \quad (3.29)$$

$$z_j^{\chi^*}|_{k+1} = z_j^{\chi^*}|_k + \varsigma (\Delta_z - z_j^{\chi^*}|_k) \quad (3.30)$$

onde ς é a taxa de aprendizagem definida pelo projetista, Δ_z é o ajuste do centro e N_p^χ é quantidade de pontos pertencentes ao agrupamento χ . Para melhor entendimento do processo evolutivo, o fluxograma do ANET2 é apresentado na Fig. 17.

3.4 Camada 3 – camada de ativação das regras

Esta camada tem o objetivo de calcular a força de ativação inferior e superior das regras do MNT2IE. Cada nó realiza o cálculo de norma-T entre as FPT2I de uma regra do modelo, ou seja,

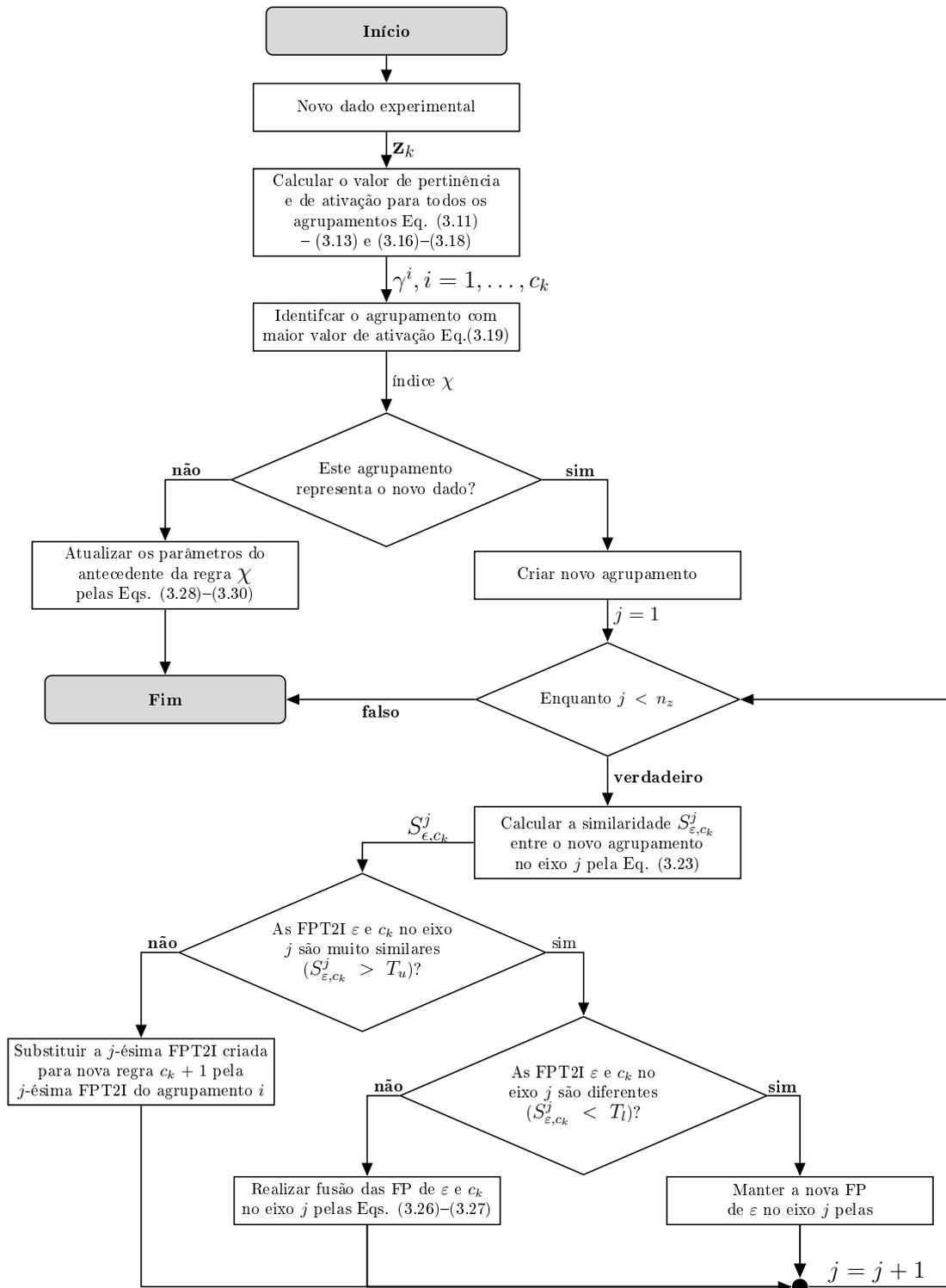
$$\text{Regra } i : \tilde{\mu}_{X_1^i} \times \cdots \times \tilde{\mu}_{X_{n_z}^i} \quad (3.31)$$

Em (3.31) é calculada pelos seguintes passos:

1. Calcular (3.12) e (3.13) para regra i .
2. Calcular (3.17) e (3.16).

Os passos acima são realizados para todas as regras existentes no instante k .

Figura 17 – Fluxograma do processo de estimação evolutiva do antecedente via ANET2



Fonte: Autor

3.5 Camada 4 – cálculo recursivo dos submodelos

A quarta camada do MNT2IEE contém os submodelos de observador de estados (SMOS) de cada regra criada até o instante k , sendo estes submodelos descritos por

$$\begin{cases} \mathbf{x}^i|_{k+1} &= \mathbf{A}^i \mathbf{x}^i|_k + \mathbf{B}^i \mathbf{u}|_k + \mathbf{K}^i \mathbf{e}|_k \\ \mathbf{y}^i|_k &= \mathbf{C}^i \mathbf{x}^i|_k + \mathbf{D}^i \mathbf{u}|_k \end{cases} \quad (3.32)$$

Para a estimação das matrizes \mathbf{A}^i , \mathbf{B}^i , \mathbf{C}^i , \mathbf{D}^i e \mathbf{K}^i , é proposto um algoritmo recursivo de identificação de submodelos no espaço de estados baseado em Parâmetros de Markov Nebulosos (PMN) (Torres; Serra, 2018; Pires; Serra, 2018; Pires; Serra, 2020; Evangelista; Serra, 2020) e nas Variáveis Instrumentais nebulosas (VIN) (Serra; Bottura, 2009; Filho; Serra, 2018) no contexto de conjuntos nebulosos tipo-2 intervalares.

Como discutido na Seção 2.2.1, o algoritmo de estimação de MQ apresenta polarização não nula quando há presença de ruído correlacionado nos dados. Analisando o método de MQ nebuloso (MQN) para um conjunto de k dados, tem-se a seguinte solução para a abordagem local (Angelov; Filev, 2004; Angelov, 2012):

$$\Theta^i = \mathbf{Y}^i \tilde{\Gamma}^i|_k (\Psi^i)^T [\Psi^i \tilde{\Gamma}^i (\Psi^i)^T]^{-1} \quad (3.33)$$

onde Ψ^i é a matriz de regressores e \mathbf{Y}_k^f é a matriz de dados da saída do sistema dinâmico, ambas de dimensões adequadas, $\tilde{\Gamma}^i \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é uma matriz diagonal, $\tilde{\Gamma}^i = \text{diag}([\tilde{\gamma}^i|_1, \tilde{\gamma}^i|_2, \dots, \tilde{\gamma}^i|_k])$, tal que $\tilde{\gamma}^i|_k$ é o grau de ativação normalizado tipo-2, calculado como segue (Evangelista; Serra, 2020)

$$\tilde{\gamma}^i|_k = \frac{\bar{\beta}^i|_k + \underline{\beta}^i|_k}{\sum_{j=1}^{c_k} (\bar{\beta}^j|_k + \underline{\beta}^j|_k)} \quad (3.34)$$

Uma vez que a matriz $\tilde{\Gamma}^i$ pode ser considerada como uma matriz de pesos, o estimador (3.33) mantém os mesmo problemas de polarização do método de MQ, como já descrito na Seção 2.2.1 (Ljung, 1999; Aguirre, 2007). Considerando que na literatura utiliza-se frequentemente o método de MQN (Pires; Serra, 2018; Pires; Serra, 2020; Santos; Serra, 2018; Torres; Serra, 2018; Angelov, 2012; Lin *et al.*, 2014; Pratama *et al.*, 2017; Kayacan; Kayacan; Khanesar, 2015), o qual apresenta o problema de polarização, esta tese visa aplicar a abordagem de Variáveis Instrumental nebulosas tipo-2 para garantir polarização assintótica nula para a metodologia de identificação no espaço de estados baseada nos parâmetros de Markov do Observador.

3.5.1 Definição dos parâmetros de Markov do observador

Considere um modelo autorregressivo de entradas exógenas (ARX - *AutoRegressive eXogenous*) dado por

$$\mathbf{y}_k^i = \sum_{j=0}^{q_p} \hat{\Xi}_u^i|_{k-j} \mathbf{u}|_{k-j} + \sum_{j=1}^{q_p} \hat{\Xi}_y^i|_{k-j} \mathbf{y}^i|_{k-j} \quad (3.35)$$

onde q_p é a janela de tempo no passado, onde (3.35) é utilizada para estimar a saída de um sistema representado por (3.32). Conforme discutido por Chiuso e Picci (2005), se a matriz \mathbf{A}^i é nilpotente (ver Apêndice A.1), os parâmetros $\dot{\Xi}_u^i|_k$ e $\dot{\Xi}_y^i|_k$ do modelo (3.35) estão vinculados aos PMNs do observador do modelo (3.32). Esses PMNs são definidos por:

$$\dot{\Xi}_u^i|_{k-j} = \begin{cases} \mathbf{D}^i & \text{if } j = 0 \\ \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{j-1}\mathbf{B}^i & \text{if } j > 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

$$\dot{\Xi}_y^i|_{k-j} = \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{j-1}\mathbf{K}^i \quad (3.37)$$

Para simplificar a formulação matemática dos PMNs, (3.35) será reescrita na forma matricial, conforme segue:

$$\mathbf{y}_k^i = \dot{\Xi}^i \boldsymbol{\psi}^i|_k + \boldsymbol{\xi}|_k \quad (3.38)$$

onde $\boldsymbol{\xi}|_k$ são os resíduos e $\dot{\Xi}^i \in \mathbb{R}^{p \times (p+m)q_p+m}$ é a matriz de PMN do observador, definida por

$$\dot{\Xi}^i = \left[\dot{\Xi}_u^i|_{k-q_p}, \dots, \dot{\Xi}_u^i|_k, \dot{\Xi}_y^i|_{k-q_p}, \dots, \dot{\Xi}_y^i|_{k-1} \right] \quad (3.39)$$

e $\boldsymbol{\psi}_k^i = [\mathbf{u}^T|_{k-q_p} \dots \mathbf{u}^T|_k \mathbf{y}^T|_{k-q_p} \dots \mathbf{y}^T|_k]^T$ ($\boldsymbol{\psi}_k^i \in \mathbb{R}^{(p+m)q_p+m}$) é o vetor de regressores.

Para um conjunto de dados experimentais com k amostras, onde $k \gg q_p$, podemos determinar a seguinte equação em batelada para o i -ésimo submodelo a partir de (3.38).

$$\mathbf{Y}^i = \dot{\Xi}^i \boldsymbol{\Psi}^i \quad (3.40)$$

onde $\mathbf{Y}^i \in \mathbb{R}^{p \times (k-q_p+1)}$, $\boldsymbol{\Psi}^i \in \mathbb{R}^{(p+m)q_p+m \times (k-q_p+1)}$, sendo

$$\mathbf{Y}^i = \begin{bmatrix} (\mathbf{y}^i|_{q_p+1})^T \\ (\mathbf{y}^i|_{q_p+2})^T \\ \vdots \\ (\mathbf{y}^i|_k)^T \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Psi}^i = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\psi}^i|_{q_p+1})^T \\ (\boldsymbol{\psi}^i|_{q_p+2})^T \\ \vdots \\ (\boldsymbol{\psi}^i|_k)^T \end{bmatrix}$$

A partir da teoria dos modelos TSK nebulosos, o cálculo em batelada dos sinais de saída do modelo nebuloso pode ser expressa por

$$\mathbf{Y}_k = \sum_{i=1}^c \dot{\Xi}^i \boldsymbol{\Psi}^i \tilde{\Gamma}^i \quad (3.41)$$

onde $\tilde{\Gamma}_k^i = \text{diag}([\tilde{\gamma}^i|_{q_p+1}, \tilde{\gamma}^i|_{q_p+2}, \dots, \tilde{\gamma}^i|_k])$ ($\tilde{\Gamma}_k^i \in \mathbb{R}^{k \times k}$) e $\tilde{\gamma}^i|_k$ é calculado em (3.34).

3.5.2 Estimação dos PMN do observador

Considerando que o sistema a ser identificado está em um ambiente ruidoso, o vetor de regressores estará contaminado por ruído, tal que

$$\boldsymbol{\psi}_e^i|_k = \boldsymbol{\psi}^i|_k + \mathbf{v}_k$$

sendo $\mathbf{v}|_k$ o vetor de ruído autocorrelacionado, onde o j -ésimo elemento deste vetor pode ser calculado por

$$v_j|_k = \frac{J(z^{-1})}{V(z^{-1})} e|_k = \frac{1 + \sum_{j=1}^{n_b} b_j z^{-j}}{1 + \sum_{l=1}^{n_a} a_l z^{-l}} e|_k \quad (3.42)$$

onde e_k é k -ésima de um ruído branco definido como $e = \mathcal{N}(0, \sigma_e^2 I)$, n_a é o número de termos no denominador, n_b é o número de termos no numerador, a_j é a j -ésima constante do denominador e b_j é a l -ésima constante do numerador.

De acordo com Serra e Bottura (2009), Filho e Serra (2018), a estimação de uma matriz de parâmetros a partir de dados ruidosos pode ser não polarizada utilizando vetores de variáveis instrumentais $\mathbf{v}^i|_k$ que sejam descorrelacionados do ruído e altamente correlacionados com a dinâmica do sistema. Para a metodologia desta tese, considera-se que $\mathbf{v}^i|_{k \in \mathbb{R}^{(p+m)q_p+m}}$ é composto por **dados experimentais filtrados, obtidos a partir da camada 1 do MNT2IEE**. A partir de (3.41), obtêm-se a seguinte solução de VIN

$$\hat{\Xi}^i = \mathbf{Y}^i \tilde{\Gamma}^i|_k (\mathbf{V}^i|_k)^T [\mathbf{V}^i|_k \tilde{\Gamma}^i (\Psi_e^i|_k)^T]^{-1} \quad (3.43)$$

onde $\mathbf{V}^i|_k \in \mathbb{R}^{(k-q_p) \times (q_p(m+p)+m)}$ é a matriz estendida de variáveis instrumentais. Baseado no método recursivo de VI nebulosas tipo-1, a estimação recursiva dos PMN tipo-2 é realizada pelas seguintes equações

$$\mathbf{L}^i|_{k+1} = \tilde{\gamma}^i|_k \frac{\mathbf{P}^i|_k \mathbf{v}^i|_k}{\rho + \tilde{\gamma}^i|_k (\mathbf{v}^i|_k)^T \mathbf{P}^i|_k \boldsymbol{\psi}_e|_k} \quad (3.44)$$

$$\hat{\Xi}^i|_{k+1} = \hat{\Xi}^i|_k + \tilde{\gamma}^i|_k \mathbf{e}|_k (\mathbf{L}^i|_{k+1})^T \quad (3.45)$$

$$\mathbf{P}^i|_{k+1} = \frac{1}{\rho} [\mathbf{I} - \mathbf{L}^i|_{k+1} (\boldsymbol{\psi}_e|_k)^T] \mathbf{P}^i|_k \quad (3.46)$$

onde $\rho \in [1, 0.95]$ é o fator de esquecimento, $\mathbf{L}^i \in \mathbb{R}^{(p+m)q_p+m}$ é a matriz de ganho do método VI nebuloso, $\mathbf{P}^i \in \mathbb{R}^{(p+m)q_p+m \times (p+m)q_p+m}$ é uma matriz de variância, (3.44)–(3.46) são extensões do caso tipo-1 apresentadas em Serra (2005) e Filho e Serra (2018).

3.5.3 Estimação das matrizes dos submodelos via decomposição QR

De acordo com NI *et al.* (2018) e Ni, Liu e Wu (2018), uma vez obtidos os PMN do observador por (3.45), pode-se estimar o vetor de estados $\mathbf{x}^i|_k$ pela equação

$$\mathbf{x}^i|_k = \mathbf{S} [\boldsymbol{\Lambda}^i|_k \check{\mathbf{u}}_{k-q_p} + \boldsymbol{\Upsilon}^i|_k \check{\mathbf{y}}_{k-q_p}] \quad (3.47)$$

onde $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times (mq_f - n)}$ é uma matriz definida positiva, $\mathbf{\Lambda}_k^i \in \mathbb{R}^{(mq_f - n) \times (mq_p)}$ e $\mathbf{\Upsilon}_k^i \in \mathbb{R}^{(pq_f - n) \times (pq_p)}$ são matrizes formadas pelos PMN do observador, de modo que

$$\mathbf{\Lambda}_k^i = \begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_u^i|_{k-q_p} & \dot{\hat{\mathbf{x}}}_u^i|_{k-q_p+1} & \cdots & \dot{\hat{\mathbf{x}}}_u^i|_{k-q_p+q_f-1} & \cdots & \dot{\hat{\mathbf{x}}}_u^i|_{k-1} \\ \mathbf{0} & \dot{\hat{\mathbf{x}}}_u^i|_{k-q_p} & \cdots & \dot{\hat{\mathbf{x}}}_u^i|_{k-q_p+q_f-2} & \cdots & \dot{\hat{\mathbf{x}}}_u^i|_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \dot{\hat{\mathbf{x}}}_u^i|_{k-q_p} & \cdots & \dot{\hat{\mathbf{x}}}_u^i|_{k-q_f} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

e

$$\mathbf{\Upsilon}_k^i = \begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_y^i|_{k-q_p} & \dot{\hat{\mathbf{x}}}_y^i|_{k-q_p+1} & \cdots & \dot{\hat{\mathbf{x}}}_y^i|_{k-q_p+q_f-1} & \cdots & \dot{\hat{\mathbf{x}}}_y^i|_{k-1} \\ \mathbf{0} & \dot{\hat{\mathbf{x}}}_y^i|_{k-q_p} & \cdots & \dot{\hat{\mathbf{x}}}_y^i|_{k-q_p+q_f-2} & \cdots & \dot{\hat{\mathbf{x}}}_y^i|_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \dot{\hat{\mathbf{x}}}_y^i|_{k-q_p} & \cdots & \dot{\hat{\mathbf{x}}}_y^i|_{k-q_f} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

onde os vetores $\check{\mathbf{u}}_{k-q_p}$ e $\check{\mathbf{y}}_{k-q_p}$ para o método proposto são dados por:

$$\check{\mathbf{u}}_{k-q_p} = [\mathbf{u}_f^T|_{k-q_p} \cdots \mathbf{u}_f^T|_{k-1}]^T \quad (3.50)$$

$$\check{\mathbf{y}}_{k-q_p} = [\mathbf{y}_f^T|_{k-q_p} \cdots \mathbf{y}_f^T|_{k-1}]^T \quad (3.51)$$

A partir de (3.47), é possível calcular os vetores de estados $\mathbf{x}^i|_k$ dos $c|_k$ submodelos e, assim, determinar o vetor de estados do MNT2IEE, como segue:

$$\tilde{\mathbf{x}}|_k = \sum_{i=1}^{c|_k} \tilde{\gamma}_k^i \mathbf{x}^i|_k \quad (3.52)$$

De acordo com Aguirre (2007), Ljung (1999), conhecendo os estados e o sinal de entrada, pode-se estimar as matrizes de estados $[\mathbf{A}_k^i, \mathbf{B}_k^i, \mathbf{K}_k^i]$. Portanto, seja a forma matricial da equação de estados expressa por

$$(\mathbf{x}^i|_k)^T = \left[(\mathbf{x}^i|_{k-1})^T, \mathbf{u}^T|_{k-1}, \mathbf{e}^T|_{k-1} \right] \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^i|_k)^T \\ (\mathbf{B}^i|_k)^T \\ (\mathbf{K}^i|_k)^T \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\varphi}^i|_{k-1})^T (\boldsymbol{\Theta}_x^i|_k)^T \quad (3.53)$$

onde $\boldsymbol{\varphi}^i|_{k-1} \in \mathbb{R}^{n+m+p}$ é um vetor de regressores e $\boldsymbol{\Theta}_x^i|_k \in \mathbb{R}^{n \times (n+m+p)}$. Considerando a solução local para os modelos TSK, utiliza-se a solução MQN para (3.53), a qual é dada a seguir

$$(\boldsymbol{\Theta}_x^i|_k)^T = (\boldsymbol{\Phi}^T|_k \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}^i|_k \boldsymbol{\Phi}|_k)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T|_k \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}^i|_k \mathbf{X}|_k \quad (3.54)$$

$$(\boldsymbol{\Theta}_x^i|_k)^T = (\mathbf{H}|_k)^{-1} \mathbf{T}|_k$$

$$\mathbf{H}|_k (\boldsymbol{\Theta}_x^i|_k)^T = \mathbf{T}|_k \quad (3.55)$$

Uma vez que as matrizes $\mathbf{H}|_k$ e $\mathbf{T}|_k$ são matrizes de variância, estas podem ser atualizadas pelos seguintes cálculos recursivos

$$\mathbf{H}|_{k+1} = \mathbf{H}|_k + \tilde{\gamma}^i|_k \boldsymbol{\varphi}_x^i|_k (\boldsymbol{\varphi}^i|_k)^T \quad (3.56)$$

$$\mathbf{T}|_{k+1} = \mathbf{T}|_k + \tilde{\gamma}^i|_k \boldsymbol{\varphi}^i|_k (\mathbf{x}^i|_{k-1})^T \quad (3.57)$$

Aplicando a decomposição QR na matriz $\mathbf{H}|_k$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{QR}[\boldsymbol{\Theta}_x^i]^T &= \mathbf{T}|_k \\ \mathbf{R}[\boldsymbol{\Theta}_x^i]^T &= \mathbf{Q}^T \mathbf{T}|_k \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde \mathbf{Q} é uma matriz ortogonal, ou seja, $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$, e \mathbf{R} é triangular superior com elementos diagonais não nulos. Portanto, $\boldsymbol{\Theta}_x^i$ é calculada por substituição retroativa. (Serra; Bottura, 2009).

Agora, seja a forma matricial da equação da saída do MNT2IEE

$$(\mathbf{y}^i|_k)^T = \begin{bmatrix} (\mathbf{x}^i|_k)^T, & \mathbf{u}^T|_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{C}^i|_k)^T \\ (\mathbf{D}^i|_k)^T \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\phi}^i|_{k-1})^T (\boldsymbol{\Theta}_y^i|_k)^T \quad (3.59)$$

Seguindo os mesmos passos para a solução de $\boldsymbol{\Theta}^{i,x}$, a solução para $\boldsymbol{\Theta}_y^i$ pode ser dada por

$$\mathbf{G}|_k (\boldsymbol{\Theta}_y^i)^T = \mathbf{F}|_k \quad (3.60)$$

onde

$$\mathbf{G}|_{k+1} = \mathbf{G}|_k + \tilde{\gamma}^i|_k \boldsymbol{\phi}_y^i|_k (\boldsymbol{\phi}^i|_{k-1})^T \quad (3.61)$$

$$\mathbf{F}|_{k+1} = \mathbf{F}|_k + \tilde{\gamma}^i|_k \boldsymbol{\phi}^i|_k (\mathbf{y}^i|_k)^T \quad (3.62)$$

Aplicando a decomposição QR na matriz $\mathbf{P}_{\phi\phi}^i|_k$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{QR}[\boldsymbol{\Theta}_y^i]^T &= \mathbf{F}|_k \\ \mathbf{R}[\boldsymbol{\Theta}_y^i]^T &= \mathbf{Q}^T \mathbf{F}|_k \end{aligned} \quad (3.63)$$

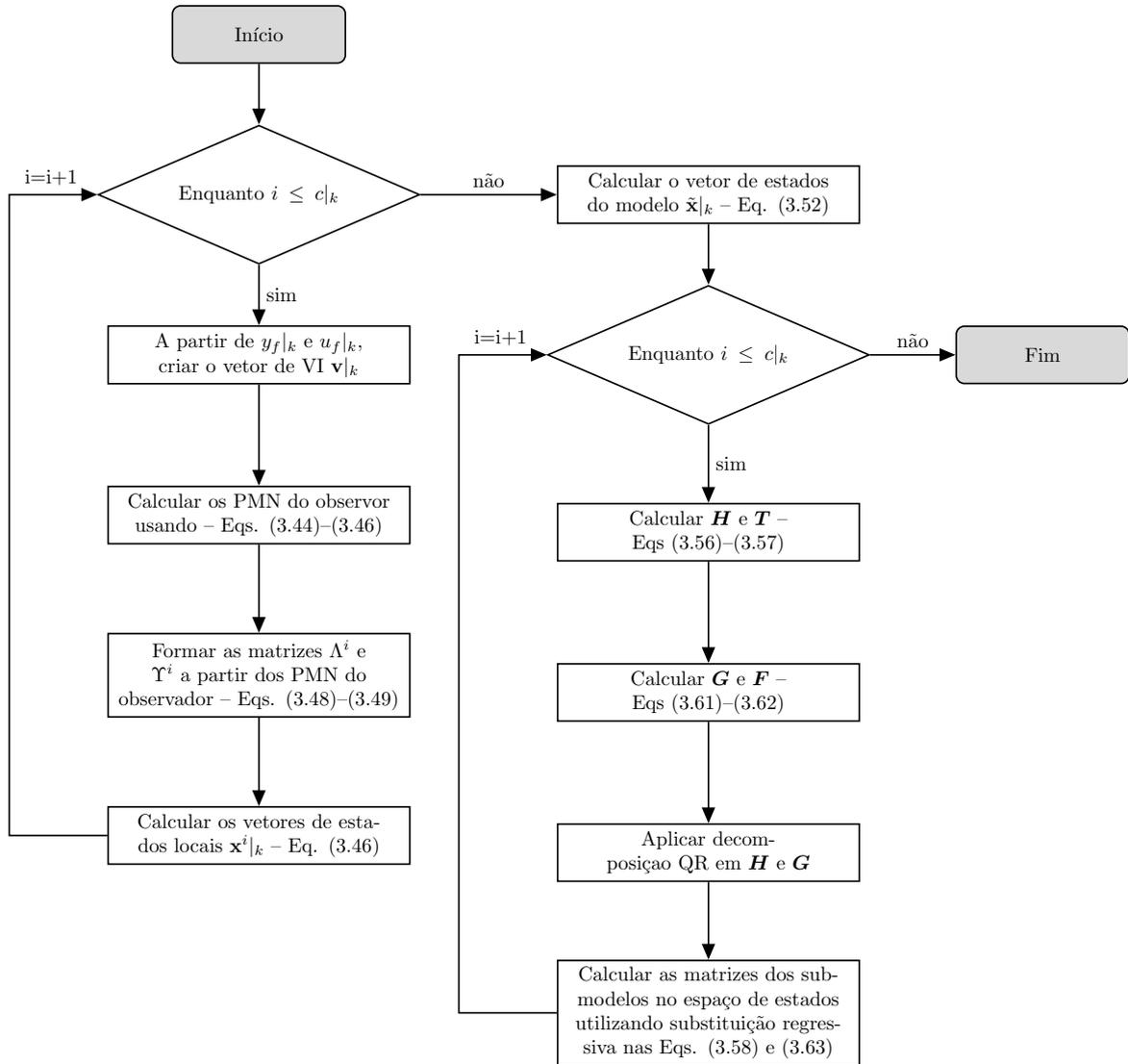
onde (3.63) é resolvida por substituição regressiva.

Para melhor visualização, a Fig. 18 apresenta o Fluxograma do algoritmo de estimação dos submodelos pelo método dos PMN estimados via VIN.

3.6 Camada 5 – composição das regras tipo-2

Esta camada tem como objetivo realizar o processo de inferência nebulosa tipo-2 do MNT2IEE. A partir das forças de ativação calculadas na camada 3 e dos submodelos das regras obtidos na camada 4, é estimada a região de confiança da saída, a qual é definida pelos limites superior $\bar{y}|_k$ e inferior $\underline{y}|_k$. Para o estimar de $\bar{y}|_k$ e $\underline{y}|_k$, calcula-se as forças de ativação

Figura 18 – Algoritmo de estimação recursiva dos SMOS baseado nos Parâmetros de Markov nebulosos estimados pelo método de VIN no contexto nebuloso tipo-2



Fonte: Autor

superior e inferior normalizadas por meio das seguintes equações

$$\bar{\gamma}^i|_k = \frac{\bar{\beta}^i|_k}{\sum_{j=1}^{c|k} \bar{\beta}^j|_k} \quad (3.64)$$

$$\underline{\gamma}^i|_k = \frac{\underline{\beta}^i|_k}{\sum_{j=1}^{c|k} \underline{\beta}^j|_k} \quad (3.65)$$

Assim, calcula-se $[y_r|_k, y_l|_k]$ com as equações abaixo

$$y_r|_k = \sum_{i=1}^{c|_k} \bar{\gamma}^i|_k \mathbf{y}^i|_k \quad (3.66)$$

$$y_l|_k = \sum_{i=1}^{c|_k} \underline{\gamma}^i|_k \mathbf{y}^i|_k \quad (3.67)$$

A partir de $[y_r|_k, y_l|_k]$, os limites superior e inferior da saída são calculados pelas equações:

$$\bar{y}|_k = \max(y_r|_k, y_l|_k) + \dot{y}|_k \quad (3.68)$$

$$\underline{y}|_k = \min(y_r|_k, y_l|_k) - \dot{y}|_k \quad (3.69)$$

onde $\dot{y}|_k$ é o grau de incerteza adaptativo da i -ésima regras, o qual é ajustado por

$$\dot{y}|_{k+1} = \begin{cases} \dot{y}|_k \cdot r_f & \text{para } \underline{y}|_k \leq y_f|_k \leq \bar{y}|_k \\ \dot{y}|_k + g_p |e|_k + g_i \left| \sum_{j=k-w}^k e|_j \right| & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.70)$$

onde r_f é um fator de redução, w é o tamanho da janela de tempo, g_p é o fator proporcional, g_i é o fator integral e $e|_k$ é o erro da zona de confiança, sendo calculado como segue:

$$e|_k = y|_k - \frac{\bar{y}|_k + \underline{y}|_k}{2}$$

onde (3.70) é baseada no algoritmo de controle proporcional-integral (Nise, 2011).

3.7 Aspectos da metodologia proposta

Nesta seção serão discutidos aspectos importantes sobre a metodologia proposta nesta tese, como inicialização dos parâmetros do algoritmo, complexidade computacional e convergência.

3.7.1 Inicialização paramétrica do algoritmo

A metodologia proposta fundamenta-se no aprendizado incremental, onde o modelo nebuloso se ajusta ao comportamento do sistema dinâmico a cada novo conjunto de dados experimentais. Antes de o processo de aprendizado, é crucial determinar os seguintes parâmetros, os quais desempenham papel fundamental:

- **A dispersão inicial do primeiro agrupamento**, denotada por $\sigma_0|_j$ para $j = 1, \dots, n_z$, requer uma seleção cuidadosa desses parâmetros e depende do conhecimento do usuário. Essa escolha é crucial, pois um valor inadequado pode impactar a formação de agrupamento apropriados. O principal fator a se observar é a faixa de valores que cada dado experimental pode assumir.

- **Limiar de força de ativação** T_f : Este parâmetro controla a criação de novas regras. Quando T_f se aproxima de zero ($T_f \rightarrow 0$), muitas regras serão criadas, e quando T_f se aproxima de um ($T_f \rightarrow 1$), nenhuma regra será criada. Uma relação observada é que quanto maior o valor de n_z menor deve ser o valor de T_f para evitar o problema de criação excessiva de regras (maldição da dimensionalidade (Wang, 1996; Serra; Bottura, 2009)).
- **Limite Superior** T_u e **Limite Inferior** T_l : Esses parâmetros desempenham um papel no mecanismo de fusão. Recomenda-se que $0,7 < T_u \leq 0,9$ e $0,3 < T_l \leq 0,5$ para garantir uma fusão adequada e uma representação eficaz das relações nebulosas no sistema.
- **Tamanho da janela de tempo no passado** q_p : Este é um parâmetro definido pelo usuário que determina o número de parâmetros Markov do observador que será calculado pelo algoritmo. De acordo com a literatura, um valor mais alto resulta em modelos de espaço de estados mais precisos, mas também aumenta a carga computacional (Juang, 2011; Katayama, 2005). Para a estimação do consequente, deve-se escolher os parâmetros q_p e q_f de tal forma que:

$$q_p > q_f \geq \frac{n}{p} \quad (3.71)$$

onde n é a ordem dos submodelos, que deve ser definido pelo projetista, e p é a quantidade de saídas do sistema dinâmico.

- **Grau de incerteza na saída** \dot{y} : Este parâmetro define a incerteza associada aos dados de saída e é calculado utilizando (3.70)

$$\dot{y}[k+1] = \begin{cases} \dot{y} \cdot r_f & \text{for } \underline{y} \leq y_f \leq \bar{y} \\ \dot{y} + g_p |e| + g_i \left| \sum_{j=k-w}^k e \right| & \text{otherwise} \end{cases}$$

onde g_p é o ganho proporcional e g_i é o ganho integral. A primeira equação é utilizada para evitar aumento indefinido no grau de incerteza estimado, ou seja, sempre que o dado de saída no instante k estiver entre a estimação superior e inferior, o algoritmo de aprendizado reduz o valor de \dot{y} . A segunda equação é baseada no algoritmo de controle digital Proporcional-Integral e ajusta o valor de \dot{y} . Caso o valor da saída filtrada esteja fora do intervalo de $[\underline{y}, \bar{y}]$, essa equação irá aumentar o grau de incerteza estimado. No início do processo, determina-se $\dot{y} \approx 0$, ou seja, assumi-se incerteza mínima inicialmente.

3.7.2 Análise da convergência - estimação dos parâmetros de Markov do observador

Nesta seção, serão discutidas as condições de convergência da estimação dos parâmetros de Markov do Observador via algoritmo de VIN tipo-2 proposto nesta tese. Portanto, seja a solução de VIN tipo-2 demonstrada na equação (3.43)

$$(\hat{\Xi}^i)^T = (\mathbf{V}^i |_k \tilde{\Gamma}^i \Psi_e^i |_k)^{-1} \mathbf{V}^i |_k \tilde{\Gamma}^i \mathbf{Y}_e^i |_k$$

Reescrevendo a equação (3.43), tem-se:

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}^i|_k \tilde{\Gamma}^i \Psi_e^i|_k) (\dot{\Xi}^i)^T &= \mathbf{V}^i|_k \tilde{\Gamma}^i \mathbf{Y}^i|_k \\ \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\gamma}^i|_k \mathbf{v}^i|_k (\psi_e^i|_k)^T \right) (\dot{\Xi}^i)^T &= \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\gamma}^i|_k \mathbf{v}^i|_k (\mathbf{y}_e^i|_k)^T \right) \end{aligned} \quad (3.72)$$

onde $\tilde{\gamma}^i$ é o grau de ativação normalizado tipo-2, calculado em (3.34), \mathbf{v}^i é o vetor de variáveis instrumentais e ψ_e^i é o vetor de regressores. Considerando que o vetor de regressores ψ_e^i e o vetor de saídas \mathbf{y}_e^i apresentam ruídos correlacionados, tem-se que

$$\psi_e^i|_k = \psi^i|_k + \xi|_k \quad (3.73)$$

$$\mathbf{y}_e^i|_k = \mathbf{y}^i|_k + \nu|_k \quad (3.74)$$

onde ξ é o ruído nos regressores e ν é o ruído na saída. Subsistindo (3.73) e (3.74) em (3.72), tem-se:

$$\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\gamma}^i|_k \mathbf{v}^i|_k (\psi^i|_k + \xi|_k)^T \right) (\dot{\Xi}^i)^T = \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \tilde{\gamma}^i|_k \mathbf{v}^i|_k (\mathbf{y}^i|_k + \nu|_k)^T \right) \quad (3.75)$$

Lema 3.1. Considerando um vetor de instrumentos (variáveis instrumentais) \mathbf{v}^i associado com a dinâmica do sistema, onde a dimensão de \mathbf{v}^i é a mesma do vetor de regressores ψ^i . Seja também o grau de ativação normalizado tipo-2 $\tilde{\gamma}^i$, calculado pela (3.34) utilizando dados associados a ψ^i para $i = 1, \dots, c_k$. Dado esse cenário e o limite de $N \rightarrow \infty$, o termo do lado esquerdo da igualdade em (3.75) resultará em um vetor nulo, ou seja

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\gamma}^i|_k \mathbf{v}^i|_k (\xi|_k)^T = \mathbf{0} \quad (3.76)$$

Prova: Uma vez que $\tilde{\gamma}^i$ é um escalar, limitado a $1 > \tilde{\gamma}^i > 0$, e \mathbf{v}^i é decorrelacionado do ruído $\xi|_k$, o produto

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\gamma}^i|_k \mathbf{v}^i|_k (\xi|_k)^T$$

resultará em uma matriz nula.

Lema 3.2. Considerando um vetor de instrumentos (variáveis instrumentais) \mathbf{v}^i associado com a dinâmica do sistema, onde a dimensão de \mathbf{v}^i é a mesma do vetor de regressores ψ^i . Seja também o grau de ativação normalizado tipo-2 $\tilde{\gamma}^i$, calculado pela (3.34) utilizando dados associados a ψ^i para $i = 1, \dots, c_k$. Dado esse cenário e o limite de $N \rightarrow \infty$, o termo do lado direito da igualdade em (3.75) resultará em um vetor nulo, ou seja

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\gamma}^i|_k \mathbf{v}^i|_k (\nu|_k)^T = \mathbf{0} \quad (3.77)$$

Prova: Considerando que o vetor de instrumentos \mathbf{v}^i é descorrelacionado do ruído de saída ν então, tem-se que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{v}^i |_k (\nu |_k)^T$$

é igual a matriz nula.

Lema 3.3. Considerando um vetor de instrumentos (variáveis instrumentais) \mathbf{v}^i associado com a dinâmica do sistema, onde a dimensão de \mathbf{v}^i é a mesma do vetor de regressores $\boldsymbol{\psi}^i$. Seja também o grau de ativação normalizado tipo-2 $\tilde{\gamma}^i$, calculado pela (3.34) utilizando dados associados a $\boldsymbol{\psi}^i$ para $i = 1, \dots, c_k$. Dado esse cenário e o limite de $N \rightarrow \infty$, o termo do lado esquerdo da igualdade em (3.75) resultará em um vetor não nulo, ou seja

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\gamma}^i |_k \mathbf{v}^i |_k (\boldsymbol{\psi}^i |_k + \xi |_k)^T = \mathbf{c}_{\boldsymbol{\psi} \mathbf{v}} \neq \mathbf{0} \quad (3.78)$$

Prova: Aplicando a propriedade distributiva no termo a esquerda da igualdade em (3.78), obtém-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\gamma}^i |_k \mathbf{v}^i |_k (\boldsymbol{\psi}^i |_k + \xi |_k)^T \\ & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\gamma}^i |_k (\mathbf{P}_{\mathbf{v} \boldsymbol{\psi}} |_k + \mathbf{P}_{\mathbf{v} \xi} |_k) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Conforme o Lema 3.2, $\mathbf{P}_{\mathbf{v} \xi} |_k = \tilde{\gamma}^i |_k \mathbf{v}^i |_k (\nu |_k)^T = \mathbf{0}$, portanto

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\gamma}^i |_k \mathbf{P}_{\mathbf{v} \boldsymbol{\psi}} |_k \quad (3.80)$$

Como os vetores \mathbf{v}^i e $\boldsymbol{\psi}^i$ estão correlacionados com a dinâmica do sistema, então esses vetores apresentam correlação entre si, logo $\mathbf{P}_{\mathbf{v} \boldsymbol{\psi}} \neq \mathbf{0}$.

Teorema 3.1. Considerando um vetor de instrumentos (variáveis instrumentais) \mathbf{v}^i associado com a dinâmica do sistema, onde a dimensão de \mathbf{v}^i é a mesma do vetor de regressores $\boldsymbol{\psi}^i$. Seja também o grau de ativação normalizado tipo-2 $\tilde{\gamma}^i$, calculado pela (3.34) utilizando dados associados a $\boldsymbol{\psi}^i$ para $i = 1, \dots, c_k$. Dado esse cenário e o limite de $N \rightarrow \infty$, o estimador de variáveis instrumentais nebulosa tipo-2 intervalar apresenta polarização assintótica nula, ou seja

$$\text{plim} [\hat{\Xi}^i |_k - \hat{\Xi}_R^i] = \mathbf{0} \quad (3.81)$$

onde o R subscrito indica o parâmetro real e $\hat{\Xi}^i |_k$ são os parâmetros de Markov estimados no instante k .

Prova: Seja o estimador VI nebuloso tipo-2, dado em (3.43)

$$(\dot{\Xi}^i)^T = (\mathbf{V}^i|_k \tilde{\Gamma}^i \Psi_e^i|_k)^{-1} \mathbf{V}^i|_k \tilde{\Gamma}^i \mathbf{Y}_e^i|_k$$

Considerando que

$$\mathbf{Y}_e^i = \Psi_e^i|_k (\dot{\Xi}_R^i)^T + \nu|_k \quad (3.82)$$

Substituindo (3.82) em (3.43), obtém-se

$$\begin{aligned} (\dot{\Xi}^i)^T &= (\mathbf{V}^i|_k \tilde{\Gamma}^i \Psi_e^i|_k)^{-1} \mathbf{V}^i|_k \tilde{\Gamma}^i (\Psi_e^i|_k (\dot{\Xi}_R^i)^T + \nu|_k) \\ (\mathbf{V}^i|_k \tilde{\Gamma}^i \Psi_e^i|_k) (\dot{\Xi}^i)^T &= \mathbf{V}^i|_k \tilde{\Gamma}^i (\Psi_e^i|_k (\dot{\Xi}_R^i)^T + \nu|_k) \\ (\mathbf{V}^i|_k \tilde{\Gamma}^i \Psi_e^i|_k) [(\dot{\Xi}^i)^T - (\dot{\Xi}_R^i)^T] &= \mathbf{V}^i|_k \tilde{\Gamma}^i (\nu|_k) \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\gamma}^i|_k \mathbf{v}^i|_k (\psi_e^i|_j)^T \right) [(\dot{\Xi}^i)^T - (\dot{\Xi}_R^i)^T] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\gamma}^i|_k \mathbf{v}^i|_k (\nu|_k)^T \quad (3.84)$$

Aplicando o limite de $N \rightarrow \infty$ e o teorema de Slutsky (Serra, 2005), tem-se

$$\begin{aligned} \text{plim} [(\dot{\Xi}^i)^T - (\dot{\Xi}_R^i)^T] &= \\ \text{plim} \left[\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\gamma}^i|_k \mathbf{v}^i|_k (\psi_e^i|_j)^T \right)^{-1} \right] &\text{plim} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\gamma}^i|_k \mathbf{v}^i|_k (\nu|_k)^T \right] \end{aligned} \quad (3.85)$$

De acordo com os Lemas 3.1 e 3.3, tem-se

$$\text{plim} [(\dot{\Xi}^i)^T - (\dot{\Xi}_R^i)^T] = \text{plim} [\mathbf{P}_{\nu\psi}] \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad (3.86)$$

Portanto, (3.86) indica que o método de variáveis instrumentais nebulosas tipo-2 apresenta polarização assintótica nula.

3.7.3 Análise da convergência - estimação das matrizes dos submodelos

Portanto, para esclarecer como garantir o erro de convergência, considere uma rede neuro-nebulosa tipo-2 com c regras. Assim, seja o seguinte suposição:

Suposição 3.1: O sistema não linear multivariável pode ser representado por um MNT2IE (Figura 15) com c_R regras, de modo que a forma da regra é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i : \text{ SE } z_1^i \text{ é } \tilde{X}_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_n^i \text{ é } \tilde{X}_n^i \\ \text{ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{x}^i|_{k+1} &= \mathbf{A}_R^i \mathbf{x}^i|_k + \mathbf{B}_R^i \mathbf{u} + \mathbf{K}_R^i \mathbf{e}| \\ \mathbf{y}^i|_k &= \mathbf{C}_R^i \mathbf{x}^i|_k + \mathbf{D}_R^i \mathbf{u} \end{cases} \end{aligned}$$

onde $(\bullet)_R$ (subscrito R) representa os parâmetros reais da rede neuro-nebulosa tipo-2.

Considerando a estimação em batelada da saída do modelo do MNT2IE, dada por:

$$\mathbf{Y}^i = \Phi^i \Theta_y^i|_R + \mathbf{E}^i \quad (3.87)$$

e a solução de MQ para Θ_y^i

$$(\Theta_x^i)^T = (\Phi \tilde{\Gamma}^i \Phi)^{-1} \Phi \tilde{\Gamma}^i Y \quad (3.88)$$

onde E^i é a matriz de erro de estimação para i -ésima regra. Substituindo (3.87) em (3.88), tem-se:

$$(\Theta_y^i)^T = (\Theta_y^i)_R^T + (\Phi \tilde{\Gamma}^i \Phi)^{-1} \Phi \tilde{\Gamma}^i E^i \quad (3.89)$$

O termo $\Phi \tilde{\Gamma}^i \Phi$ pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\Phi \tilde{\Gamma}^i \Phi = P_{\phi\phi}^i = \left[\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \tilde{\gamma}^i |l \phi^i |l (\phi^i |l)^T \right] \quad (3.90)$$

e o termo $\Phi \tilde{\Gamma}^i E^i$ pode ser representada da seguinte forma:

$$\Phi \tilde{\Gamma}^i E^i = P_{\phi e}^i = \left[\sum_{l=1}^N \tilde{\gamma}^i |l \phi^i |l (e^i |l)^T \right] \quad (3.91)$$

Desta forma, (3.88) pode ser reescrita como segue:

$$(\Theta_y^i)^T = (\Theta_y^i)_R^T + \frac{1}{N} P_{\phi e}^i (P_{\phi\phi}^i)^{-1} \quad (3.92)$$

A análise da convergência da solução MQ é necessário avaliar (3.92) para $N \rightarrow \infty$. Portanto, assumindo que e^i é um processo estacionário, pode assumir que $P_{\phi e}^i$ é constante para $N \rightarrow \infty$, ou seja, (ver sec. B.2)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{\phi e}^i = (P_{\phi e}^i)_{const} \quad (3.93)$$

Assmindo que $P_{\phi\phi}^i$ é um processo quasi-estacionário, tem-se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{\phi\phi}^i = (P_{\phi\phi}^i)_{const} \quad (3.94)$$

Desta forma, (3.92) pode ser expressa por:

$$(\Theta_y^i)^T = (\Theta_y^i)_R^T + (P_{\phi e}^i)_{const} ((P_{\phi\phi}^i)_{const})^{-1} \quad (3.95)$$

Desta forma, para garantir que a estimação dos parâmetros Θ_y^i seja **convergente e consistente**, ou seja, $\Theta_y^i \rightarrow (\Theta_y^i)_R$, as seguinte condição necessárias devem ser satisfeita:

- (C.1): $(P_{\phi\phi}^i)_{const}$ é uma matriz não singular. Esta condição é satisfeita se u e e_k^i são independentes e u é um sinal persistentemente excitante, com N suficientemente grande;
- (C.2): e_k é uma sequência de ruído branco. Neste caso $(P_{\phi e}^i)_{const}$ onde $e|_k$ não depende de seus valores até o instante $k - 1$.
- (C.3): Em consequência de (C.1), o grau de ativação normalizado tipo-2 é maior que zero para todo k e para qualquer regra i , i. e., $\tilde{\gamma}^i |k > 0 \quad \forall i, \forall k$.

4 RESULTADOS COMPUTACIONAIS E EXPERIMENTAIS

Neste capítulo, serão apresentados os resultados computacionais e experimentais com o intuito de demonstrar a aplicabilidade e eficiência da metodologia apresentada nesta tese. As seguintes métricas foram utilizadas para validar os resultados obtidos:

- Mean Square Error - MSE

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\tilde{e}_{r,k})^2 \quad (4.1)$$

- Maximum Absolute Error - MAE

$$\text{MAE} = \max_k |\tilde{e}_{r,k}| \quad (4.2)$$

- Non-Dimensional Error Index - NDEI:

$$\text{NDEI} = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\tilde{e}_{r|k})^2}}{\text{std}(\mathbf{y})} \quad (4.3)$$

onde $\text{std}(\bullet)$ é o desvio padrão.

- Variance accounted for - VAF%:

$$\text{VAF}(\%) = \left[1 - \frac{\tilde{\mathbf{e}}_r}{\text{var}(\mathbf{y})} \right] \times 100 \quad (4.4)$$

onde $\text{var}(\bullet)$ é a variância.

onde $\tilde{e}_{r|k}$ é o erro de estimação da saída intervalar do MNT2IE, o qual é descrito como segue

$$\tilde{e}_{r|k} = \begin{cases} 0 & \text{if } \underline{y}|_k < y|_k < \bar{y}|_k \\ y|_k - \bar{y}|_k & \text{if } \bar{e}|_k < e|_k \\ y|_k - \underline{y}|_k & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.5)$$

tal que

$$\bar{e}|_k = |y|_k - \bar{y}|_k|, \quad e|_k = |y|_k - \underline{y}|_k| \quad (4.6)$$

Para uma análise mais aprofundada do desempenho da metodologia proposta, empregou-se o método Monte Carlo nos casos 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5, onde foram realizadas 50 execuções do experimento. A média das execuções foi então calculada, seguida pela determinação das métricas de desempenho relevantes para o estudo de caso. Essa abordagem proporciona uma estimativa confiável do desempenho da metodologia, permitindo a extração de conclusões significativas da análise. Para alguns experimentos, utilizou-se a Relação Sinal-Ruído (do inglês SNR - *Signal to Noise Ratio*), o qual é calculado pela seguinte equação:

$$\text{SNR} = 10 \times \log \left(\frac{\text{Pot}(y)}{\text{Pot}(r)} \right) \quad (4.7)$$

onde $\text{Pot}(y)$ e $\text{Pot}(r)$ são a potência do sinal e a potência do ruído, respectivamente.

4.1 Identificação de um sistema dinâmico não-linear SISO

Para este estudo de caso, considera-se um sistema não-linear de uma entrada e uma saída (SISO - do inglês *Single Input, Single Output*) descrito pela seguinte equação:

$$y|_k = \frac{y|_{k-1}y|_{k-2}(y|_{k-1}+0.5)}{1 + y^2|_{k-1}+y^2|_{k-2}} + u|_{k-1} \quad (4.8)$$

onde o sinal de entrada é dado por $u|_k = \sin(2k\pi/25)$. Para o processo de identificação, foi gerado um conjunto de dados com 1300 amostras, o qual é apresentado nas Figuras 19 e 20, sendo as primeiras 1000 amostras destinadas à etapa de treinamento e as 300 amostras restantes para a etapa de validação. Os parâmetros do algoritmo foram definidos com os seguintes valores: $d = 1$, $L = 3$; $T_f = 0.002$, $T_u = 0.7$, $T_l = 0.5$, $q_p = 11$, $q_f = 6$, $n = 2$, $w = 5$, $r_f = 0.99$, $g_p = 10^{-2}$, e $g_i = 10^{-3}$. Os valores dos parâmetros foram escolhidos por experimentação.

Figura 19 – Conjuntos de dados da entrada u para o sistemas não-linear SISO – $u|_k$

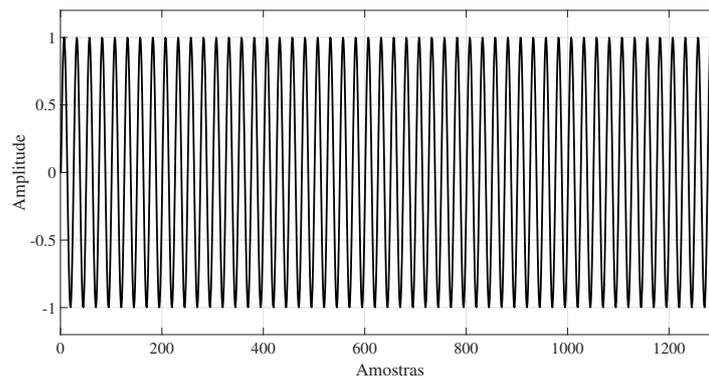
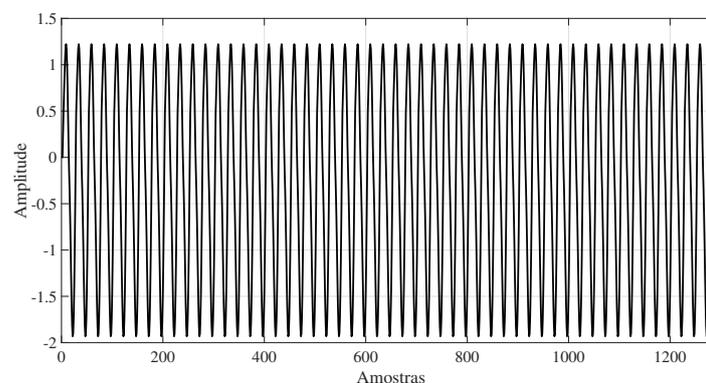


Figura 20 – Conjuntos de dados da saída y para o sistemas não-linear SISO – $y|_k$



Fonte: Autor

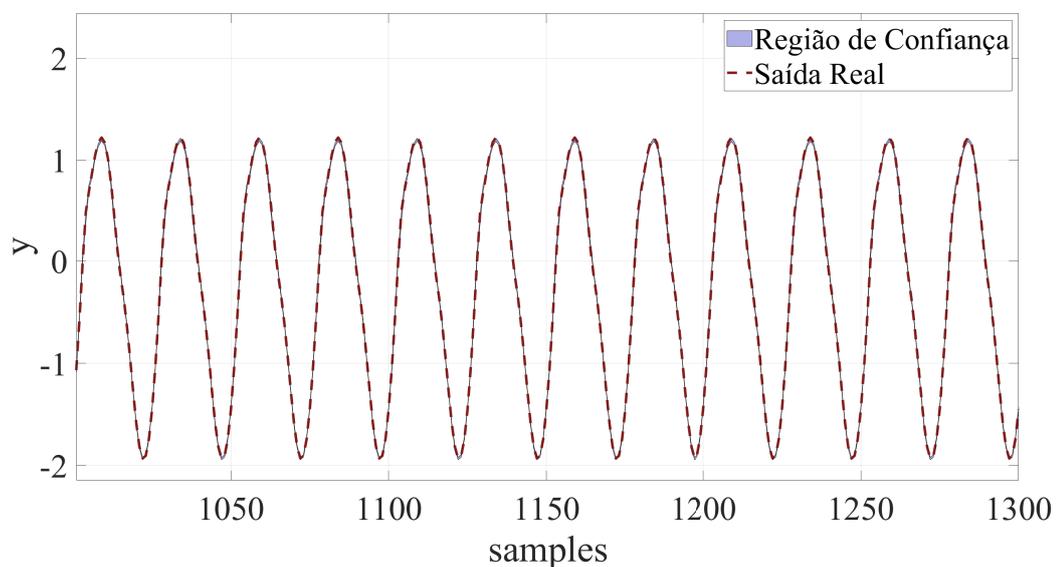
Para uma análise comparativa, foram considerados os modelos eTS (Angelov; Filev, 2005), xTS (citado em (Angelov; Zhou, 2006)), DENFIS (Kasabov; Song, 2002), eTF (Angelov; Lughofer; Klement, 2005), eMG (Lemos; Caminhas; Gomide, 2011) e RIV-NFM (Filho; Serra, 2018). Os desempenhos, de acordo com a métrica **NDEI**, são apresentados na Tabela 3. A Fig. 21

exibe a região de confiança estimada pelo MNT2IEE para o conjunto de dados de validação. A partir da métrica NDEI, observa-se que a metodologia proposta apresenta desempenho superior em comparação com as outras metodologias citadas, assim como esta gerou menos regras para descrever o comportamento do sistema dinâmico. Desta forma, pode-se observar a potencialidade da metodologia proposta em rastrear as não linearidades inerentes ao sistema dinâmico

Tabela 3 – Análise comparativa da metodologia desta tese com outras metodologias relevantes para o de sistema dinâmicos não lineares SISO.

Modelo	Nº de Regras	NDEI
eTS (Angelov; Filev, 2005)	7	0.1038
xTS citado em(Angelov; Zhou, 2006)	7	0.0936
DENFIS (Kasabov; Song, 2002)	7	0.0842
eFT (Angelov; Lughofer; Klement, 2005)	7	0.0653
eMG (Lemos; Caminhas; Gomide, 2011)	7	0.0501
RIV-NFM (Filho; Serra, 2018)	6	0.0413
MNT2IEE (Tese)	3	0.0203

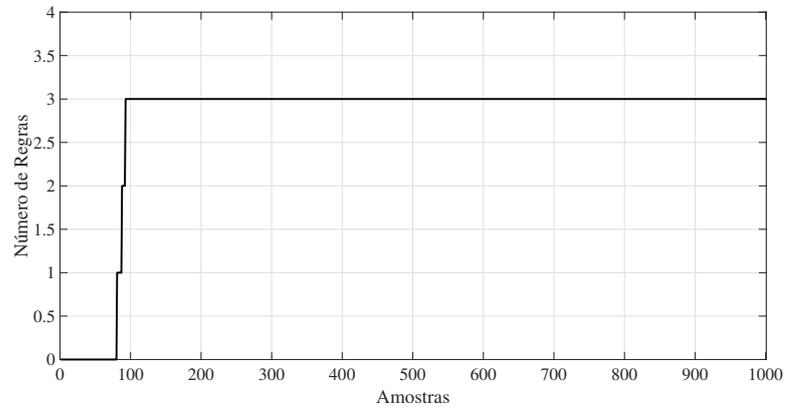
Figura 21 – Estimação do saída intervalar (região de confiança) para o sistema não-linear SISO



Fonte: Autor

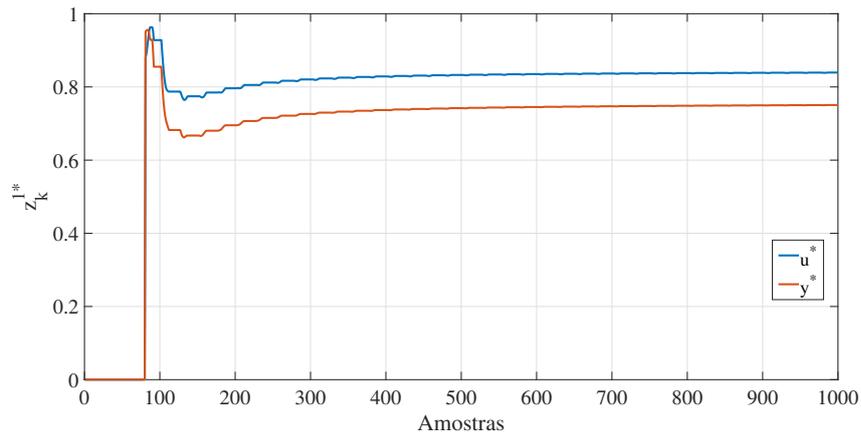
Além do desempenho do MNT2IEE para experimento do sistema SISO não linear, outros aspectos da evolução do modelo proposto são apresentados. A evolução da base de regras durante a etapa de treinamento é ilustrada na Figura 22, e a adaptação da posição dos centros para cada regra é mostrada nas Figuras 23–25.

Figura 22 – Variação no número de regras durante o processo de treinamento para identificação de sistema dinâmico não lineares SISO.



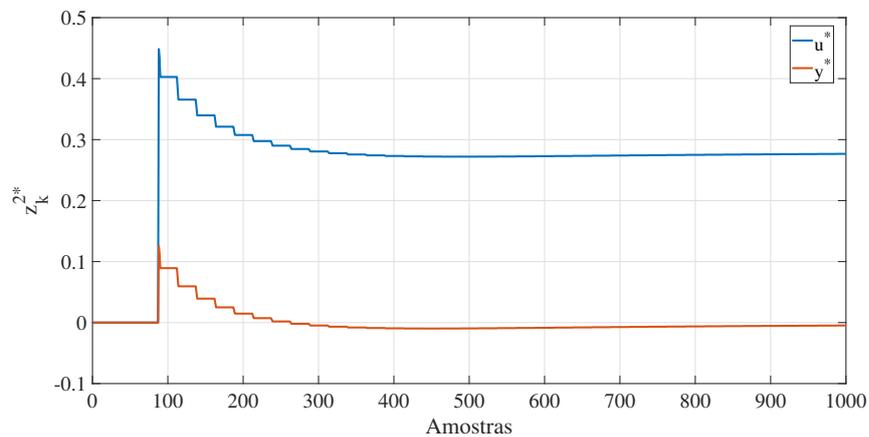
Fonte: Autor

Figura 23 – Adaptação dos centros das funções de pertinência ($y^{1*}, u^{1,*}$) (regra 1) para o sistema não-linear SISO



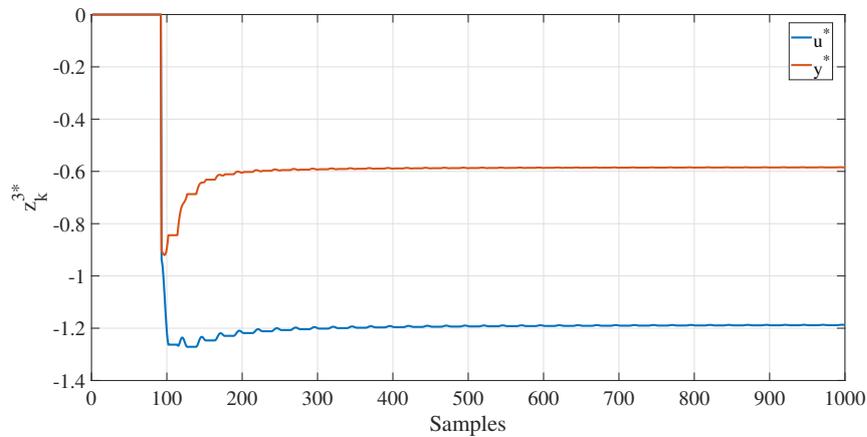
Fonte: Autor

Figura 24 – Adaptação dos centros das funções de pertinência ($y^{2*}, u^{2,*}$) (regra 2) para o sistema não-linear SISO



Fonte: Autor

Figura 25 – Adaptação dos centros das funções de pertinência (y^{3*}, u^{3*})(regra 3) para o sistema não-linear SISO



Fonte: Autor

4.2 Identificação de sistema dinâmico não-linear com função descontínua

Seja um sistema dinâmico não-linear SISO com função descontínua regido pelas seguintes equações:

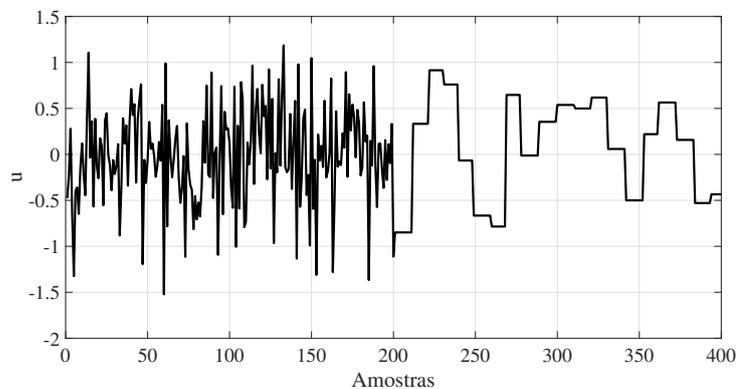
$$v|_k = 2 + 2 \tanh(u_k) - 2 \exp(0.1u_k) \tag{4.9}$$

$$y|_k = \frac{0.8z^{-1} + 0.3z^{-2}}{1 - 1.2z^{-1} + 0.6z^{-2}}v_k + v|_k \tag{4.10}$$

$$v|_k = e|_k + 0.6e|_{k-1} + 0.3e|_{k-2} \tag{4.11}$$

onde $e|_k$ é um ruído branco com média zero e variância σ^2 , v_k é o ruído colorido e v_k é o sinal intermediário. Um sinal gaussiano com média zero e variância $0,5^2$ e um sinal de degrau aleatório de amplitude entre $[-1, 1]$ são usados para identificação. O conjunto de dados de treinamento gerado é mostrado nas Figs 26–27.

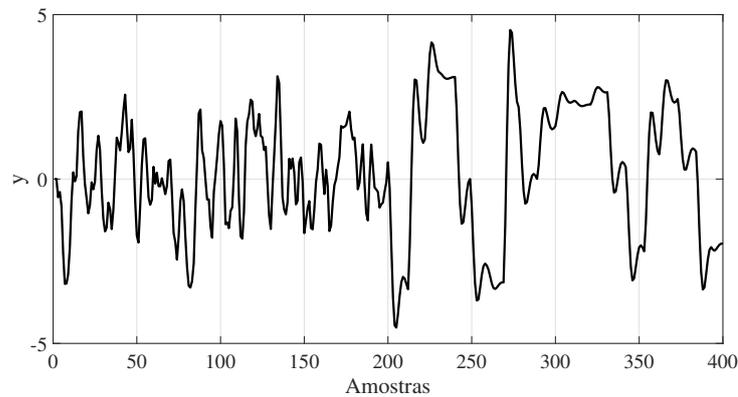
Figura 26 – Dados da entrada u para estimação online do sistema dinâmico não linear com função descontínua



Fonte: Autor

Na identificação online do sistema dinâmico não linear com função descontínua, o vetor de agrupamento $\mathbf{z}_k = [u|_{k-1} \ y|_{k-1}]$ foi adotado. Os parâmetros do algoritmo foram definidos com

Figura 27 – Dados da saída y para estimação online do sistema dinâmico não linear com função descontínua



Fonte: Autor

os seguintes valores: $L = 6$; $d = 4$; $T_f = 0.005$; $T_u = 0.7$; $T_l = 0.5$; $q_p = 10$; $q_f = 6$; $n = 4$; $w = 7$; $g_p = 2 \times 10^{-2}$, $f_f = 0.92$ e $g_i = 3 \times 10^{-4}$.

Para validar o MNT2IE, um novo conjunto de dados com 200 amostras foi gerado. A estimação da região de confiança é mostrada na Fig 28, onde observa-se que a região estimada engloba grande parte do sinal real da saída do sistema dinâmico. Para avaliar o desempenho do MNT2IE, foram consideradas duas metodologias para comparação: Ding, Shi e Chen (2007) e Li *et al.* (2017). A Tabela 4 apresenta o desempenho da metodologia proposta em comparação com as metodologias citadas.

Tabela 4 – Análise comparativa com base nos critérios MSE e MAE da metodologia proposta com algumas metodologias relevantes citadas na literatura para o sistema dinâmico não linear com função descontínua. Utilizou-se ruído branco com média zero e variância 0.5^2 para esta comparação.

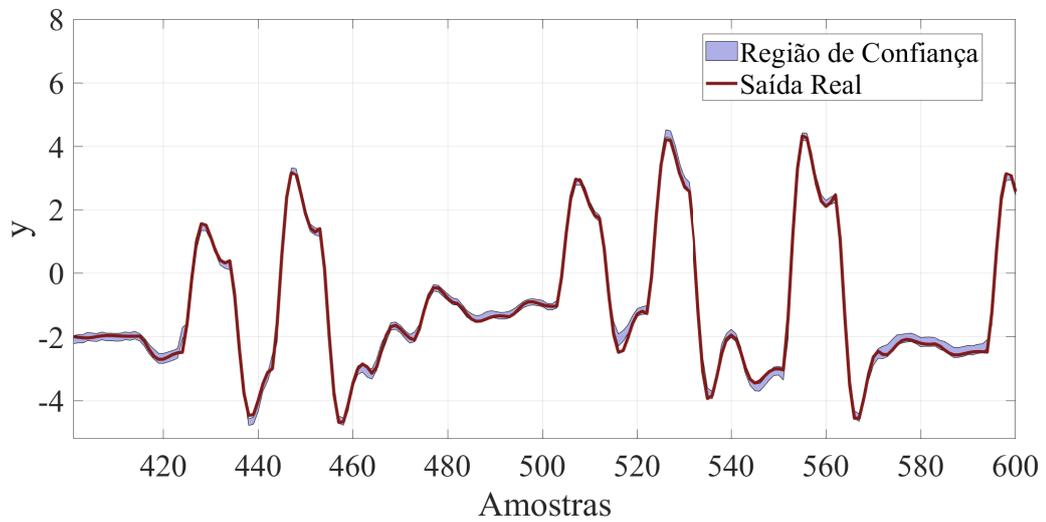
Modelo	MSE (\pm DesP)	MAE
Ding, Shi e Chen (2007)	$3.4 \times 10^{-2} (6.1 \times 10^{-3})$	0.580
Li <i>et al.</i> (2017)	$5.4 \times 10^{-3} (3.8 \times 10^{-3})$	0.187
MNT2IE	$3.8 \times 10^{-3} (6.5 \times 10^{-4})$	0.023

Além do desempenho do MNT2IE para o experimento do sistema dinâmico não linear com função descontínua, outros aspectos da evolução do modelo proposto são apresentados. Durante o processo de treinamento, o algoritmo encontrou, em média, 3 regras por realização. As Figs 29–31 mostram a atualização dos centros das regras.

4.3 Estimação online da posição de um foguete de teste

O sistema de posicionamento de foguetes apresentado neste experimento baseia-se no Centro de Lançamento de Alcântara (CLA), localizado no Maranhão, Brasil. Este sistema utiliza antenas para obter os ângulos de azimute e de inclinação (u_1, u_2), bem como a distância da antena

Figura 28 – Estimação do saída y intervalar (região de confiança) para rastrear a saída do sistema não linear SISO com função descontínua corrompida por ruído colorido.



Fonte: Autor

Figura 29 – Adaptação dos centros das funções de pertinência (u^{1*}, y^{1*}) (regra 1) para o sistema dinâmico não linear com função descontínua.

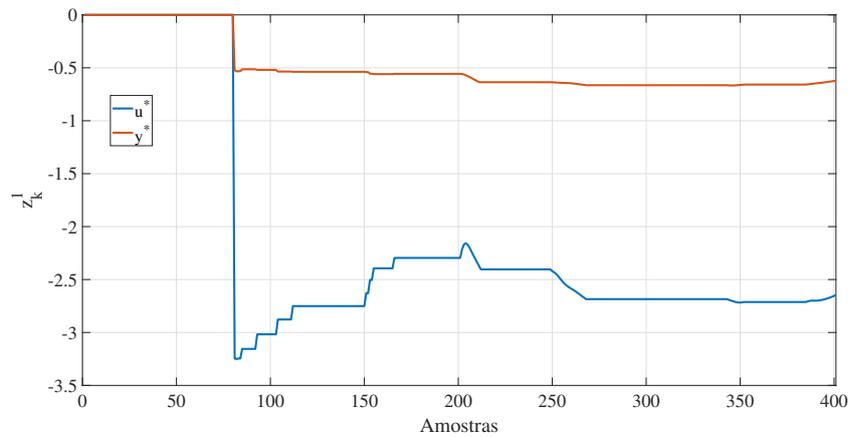


Figura 30 – Adaptação dos centros das funções de pertinência (u^{2*}, y^{2*}) (regra 2) para o sistema dinâmico não linear com função descontínua.

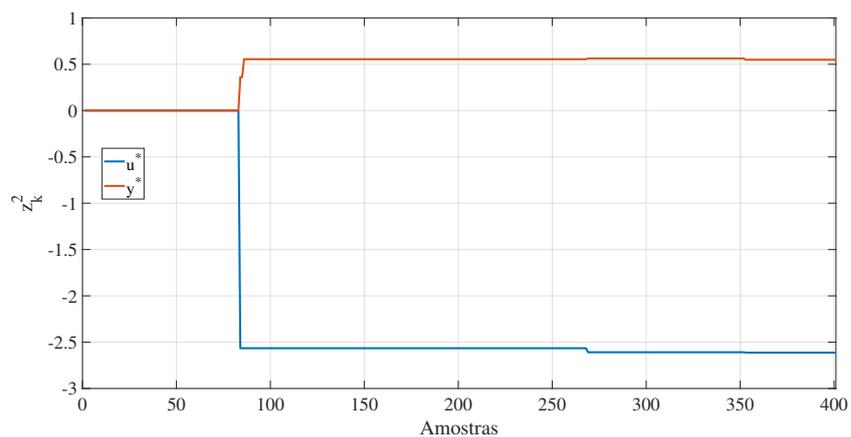
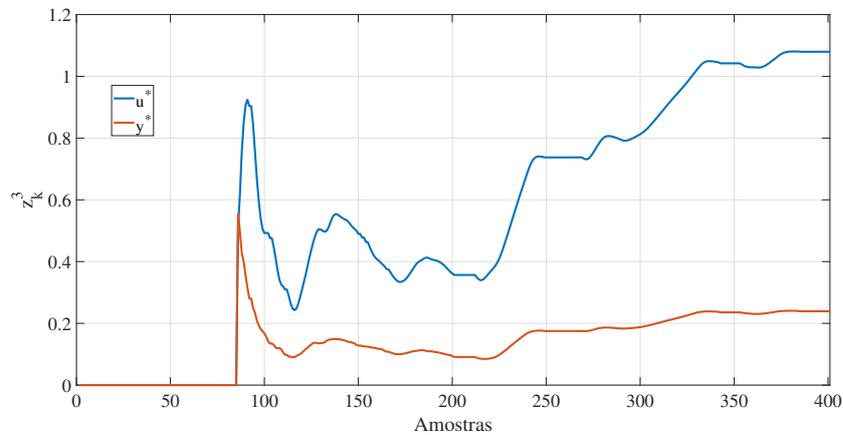
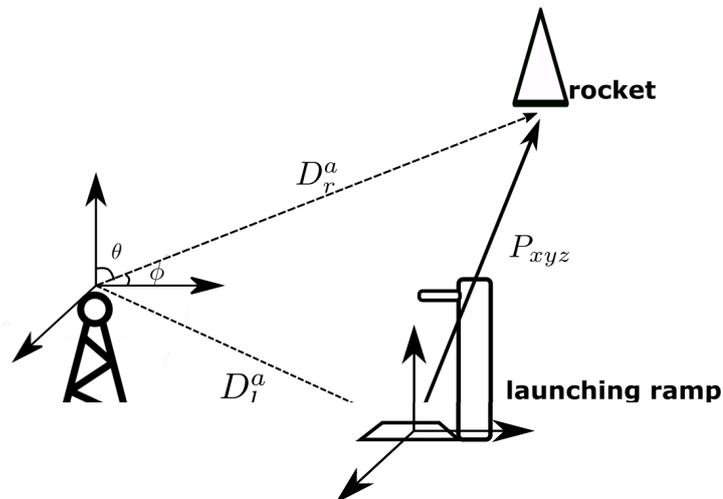


Figura 31 – Adaptação dos centros das funções de pertinência (u^{3*}, y^{3*}) (regra 3) para o sistema dinâmico não linear com função descontínua.



ao foguete ($D_r^a = u_3$), conforme ilustrado na Fig 32, onde D_l^a representa a distância entre a antena e a rampa de lançamento. A partir desses dados, a posição P_{xyz} pode ser calculada por meio de um radiogoniômetro. No CLA, dois sistemas de posicionamento são utilizados: radiogoniometria e radares. Portanto, o problema de identificação online consiste em estimar a posição real ($y = [x \ y \ z]^T$) do foguete usando os dados obtidos de uma antena. A partir de um lançamento realizado, foram coletadas 1453 amostras das entradas u_1, u_2, u_3 e da posição P_{xyz} , conforme mostrado nas Figs de 33 – 36.

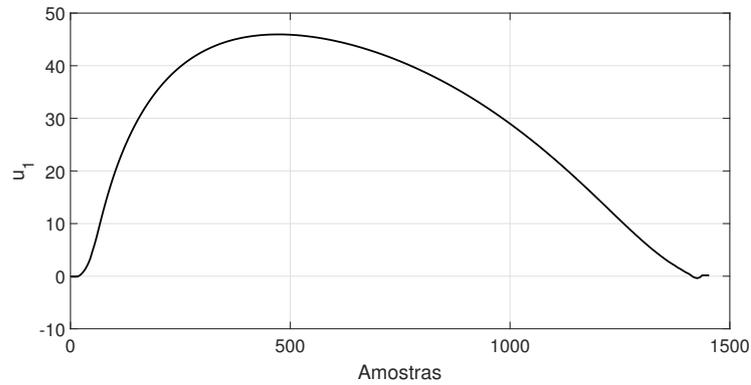
Figura 32 – Esquema de estimativa de trajetória de foguete. O sistema usa os ângulos de azimute e de inclinação (u_1, u_2) e a distância da antena ao foguete ($D_r^a = u_3$) para determinar a posição do foguete P_{xyz} .



Fonte: Autor

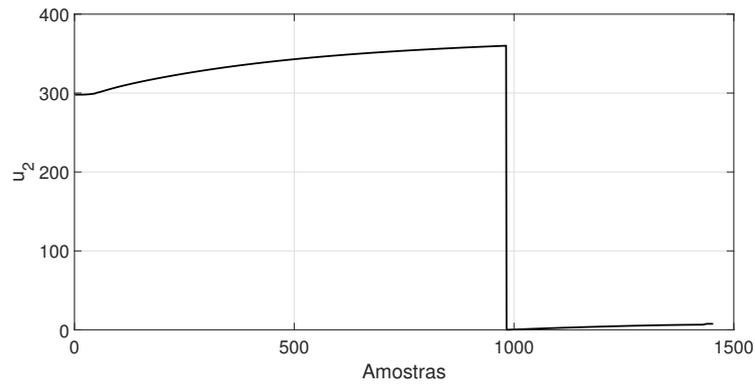
Para simular um ambiente ruidoso, foram gerados ruídos de medida autocorrelacionados

Figura 33 – Dados do ângulo de azimute (em graus) do foguete obtidos a partir de um lançamento



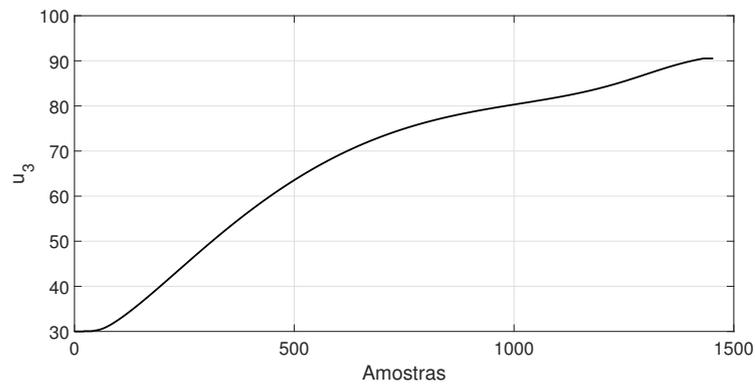
Fonte: Autor

Figura 34 – Dados do ângulo de inclinação (em graus) do foguete obtidos a partir de um lançamento

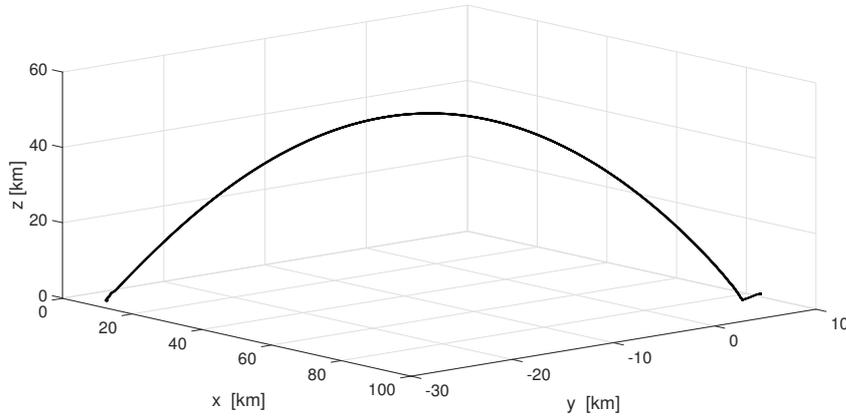


Fonte: Autor

Figura 35 – Dados da distância entre o foguete e a antena obtidos a partir de um lançamento



Fonte: Autor

Figura 36 – Posição P_{xyz} do foguete obtido pelo radar do CLA.

Fonte:Autor

para os dados de saída, os quais são descritos pelas seguintes equações:

$$\nu^x|_k = \frac{1 + 0.2z^{-1}}{1 + 0.2z^{-1} + 0.1z^{-2}} e|_k \quad (4.12)$$

$$\nu^y|_k = \frac{1 + 0.1z^{-1}}{1 + 0.4z^{-1} + 0.1z^{-2}} e|_k \quad (4.13)$$

$$\nu^z|_k = \frac{1 + 0.2z^{-1}}{1 + 0.2z^{-1} + 0.1z^{-2}} e|_k \quad (4.14)$$

onde $e|_k$ é um ruído branco de média zero e variância σ_e^2 . Para a identificação online, adotou-se o vetor de agrupamento $\mathbf{z}^k = [u_1|_{k-1} \ u_2|_{k-1} \ D_r^a|_{k-1}]$. Para inicializar o MNT2IE, as 500 primeiras amostras foram usadas, enquanto as 953 amostras subsequentes foram empregadas para a identificação online. As métricas de desempenho adotadas foram o **VAF%** e o **NDEI**. Os parâmetros do algoritmo foram definidos com os seguintes valores: $L = 10$; $d = 2$; $T_f = 0.001$; $T_u = 0.7$; $T_l = 0.4$; $q_p = 13$; $q_f = 6$; $n = 6$; $w = 15$; $g_p = 6 \times 10^{-2}$, $r_f = 0.99$ e $g_i = 10^{-3}$.

Para análise comparativa, considerou-se a metodologia apresentada por Evangelista e Serra (2020). A performance do rastreamento das posições x , y e z da trajetória do foguete, de acordo com a variação da SNR para o critério VAF% e NDEI, são mostradas nas Tabelas. 5 e 6, respectivamente. Observa-se que o MNT2IE apresenta desempenhos satisfatórios para diferentes níveis de ruído correlacionado. A Figs 37–39 mostra a região incerta estimada pelo MNT2IEE para as posições x , y , z e a Fig 40 apresenta a visualização 3D. Nestas figuras, observa-se uma grande variação em torno da amostra de 1000. Isso se deve à variação abrupta do ângulo de inclinação (Fig 34).

Além do desempenho do MNT2IEE para experimento do foguete, outros aspectos da evolução do modelo proposto são apresentados. A adaptação dos centros das FPT2I são mostradas nas Figs 41–43.

4.4 Estimação online do helicóptero com 2 graus de liberdade

O helicóptero com dois graus de liberdade (2DOF), apresentado na Figura 44, é um sistema multivariável complexo e não-linear com parâmetros inacessíveis em alguns casos (Subramanian;

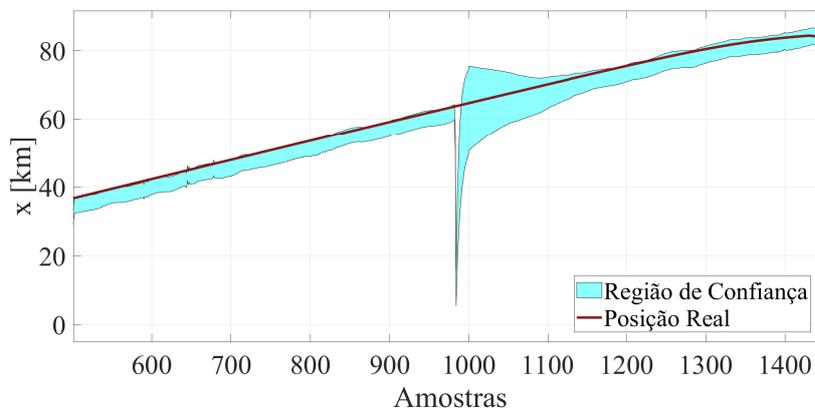
Tabela 5 – Métrica de desempenho **VAF%** para diferentes níveis de ruído para estimativa online de trajetória de foguetes.

— SNR	MNT2IE (\pm DesP)			Evangelista e Serra (2020)		
	x	y	z	x	y	z
10	99.67%(\pm 2.61)	96.20%(\pm 4.17)	98.45%(\pm 2.29)	46.72%(\pm 9.11)	32.86%(\pm 12.39)	36.49%(\pm 10.07)
15	99.64%(\pm 2.11)	96.90%(\pm 2.36)	98.15%(\pm 1.95)	78.15%(\pm 7.61)	52.64%(\pm 9.22)	63.32%(\pm 8.38)
20	99.71%(\pm 2.29)	97.06%(\pm 1.79)	98.62%(\pm 1.65)	86.72%(\pm 3.72)	63.31%(\pm 4.38)	78.88%(\pm 4.10)
25	99.72%(\pm 2.61)	97.23%(\pm 2.61)	98.90%(\pm 2.61)	94.06%(\pm 2.61)	81.14%(\pm 2.61)	89.87%(\pm 2.61)
30	99.82%(\pm 2.61)	98.12%(\pm 2.61)	98.82%(\pm 2.61)	99.18%(\pm 2.61)	97.27%(\pm 2.61)	98.14%(\pm 2.61)
35	99.83%(\pm 2.61)	98.34%(\pm 2.61)	98.83%(\pm 2.61)	99.60%(\pm 2.61)	98.06%(\pm 2.61)	98.24%(\pm 2.61)

Tabela 6 – Métrica de desempenho **NDEI** para diferentes níveis de ruído para estimativa online de trajetória de foguetes.

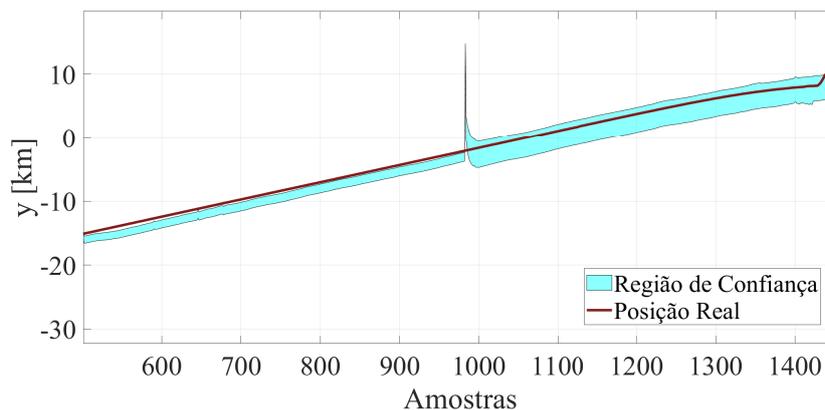
— SNR	MNT2IEE			Evangelista e Serra (2020)		
	x	y	z	x	y	z
10	0.132	0.125	0.145	0.538	0.517	0.384
15	0.119	0.088	0.128	0.419	0.427	0.293
20	0.103	0.079	0.113	0.284	0.301	0.106
25	0.098	0.077	0.111	0.119	0.225	0.210
30	0.097	0.075	0.109	0.106	0.118	0.135
35	0.092	0.074	0.103	0.095	0.088	0.120

Figura 37 – Estimação da saída intervalar da posição x do foguete do CLA



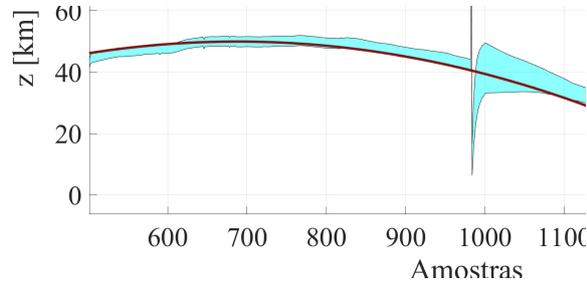
Fonte: Autor

Figura 38 – Estimação da saída intervalar da posição y do foguete do CLA



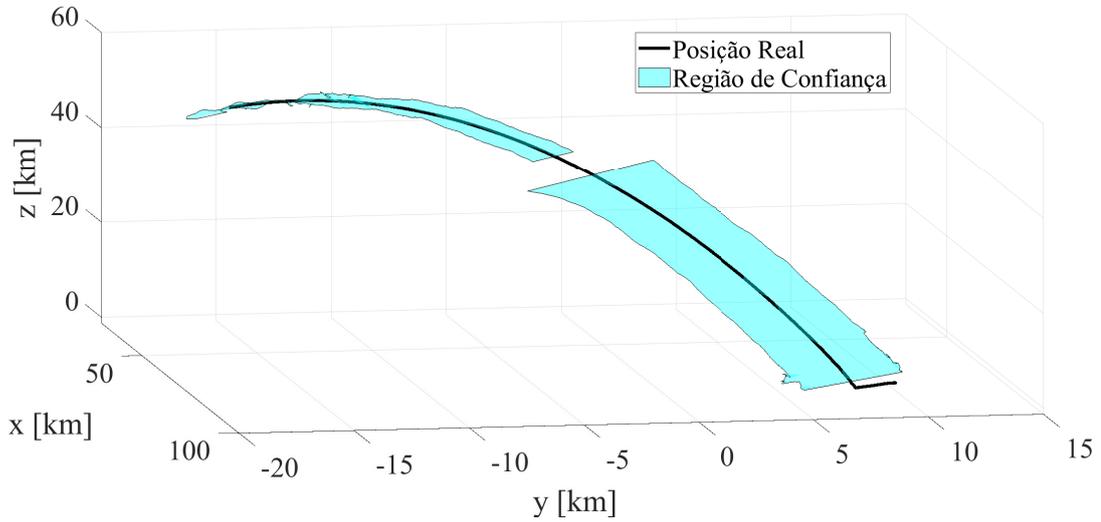
Fonte: Autor

Figura 39 – Estimação da saída intervalar da posição z do foguete do CLA



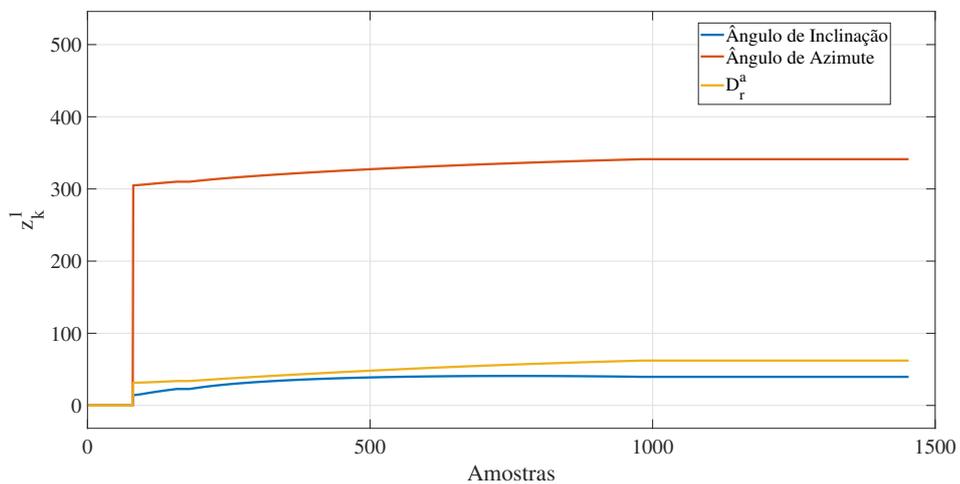
Fonte: Autor

Figura 40 – Resultado da estimação online da região incerta em torno da trajetória do foguete



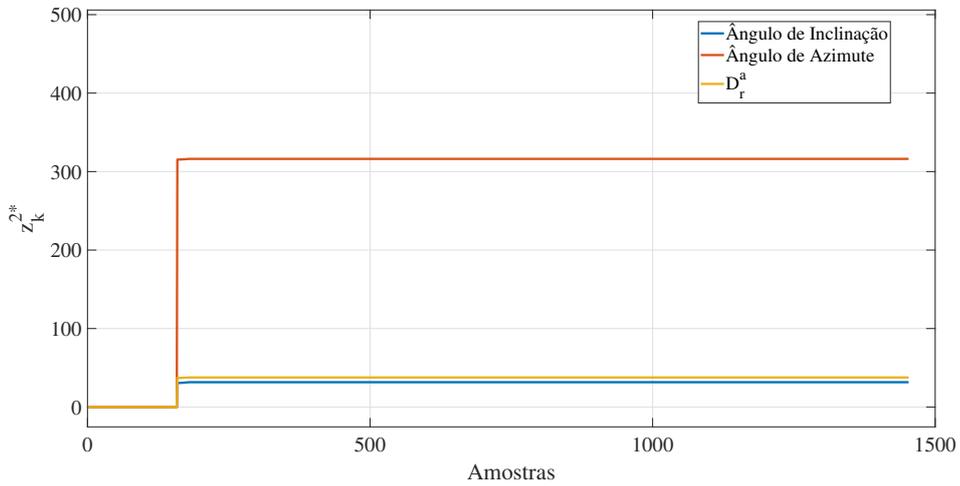
Fonte: Autor

Figura 41 – Adaptação dos centros das funções de pertinência $(u_1^{1*}, u_2^{1*}, u_3^{1*})$ (regra 1) para o experimento do foguete



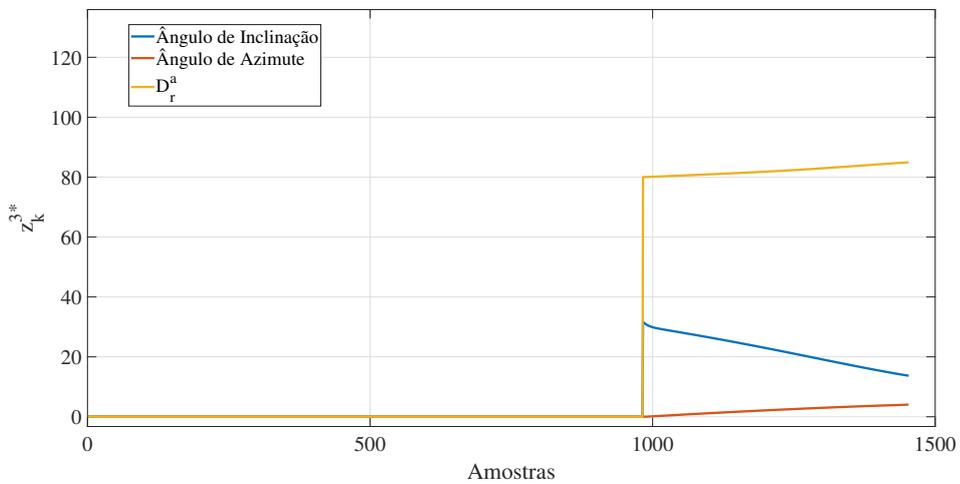
Fonte: Autor

Figura 42 – Adaptação dos centros das funções de pertinência ($u_1^{2*}, u_2^{2*}, u_3^{2*}$) (regra 2) para o experimento do foguete



Fonte: Autor

Figura 43 – Adaptação dos centros das funções de pertinência ($u_1^{3*}, u_2^{3*}, u_3^{3*}$) (regra 3) para o experimento do foguete



Fonte: Autor

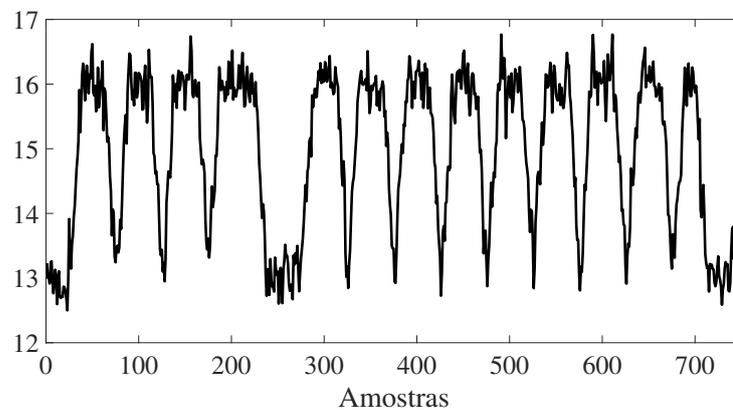
Elumalai, 2016; Zdešar; Dovžan; Škrjanc, 2014). Este helicóptero possui duas variáveis de entrada: a tensão aplicada no rotor principal u_1 e a tensão aplicada no motor da cauda u_2 , assim como duas saídas: o ângulo de azimute y_1 e o ângulo de elevação y_2 . No contexto deste experimento, foram utilizadas 750 amostras de entradas e saídas para a identificação do helicóptero 2DOF, onde 300 amostras foram utilizadas para inicialização do MNT2IE e 450 foram utilizadas para a identificação online. Os dados experimentais coletados estão ilustrados nas Figura 45–48.

Figura 44 – Imagem do helicóptero 2DOF.



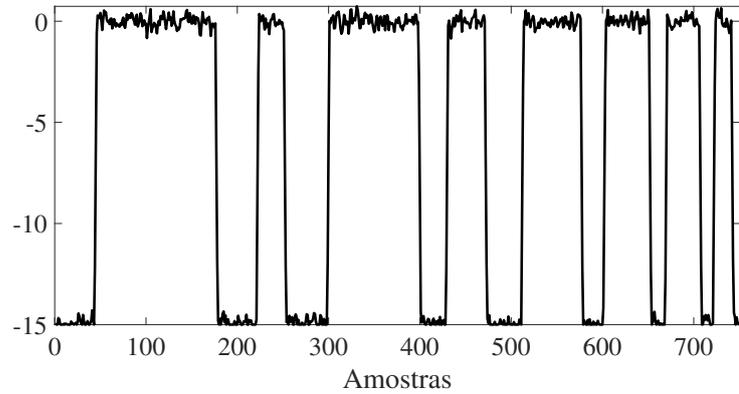
Fonte: Autor

Figura 45 – Conjunto de dados do helicóptero 2DOF para entrada u_1 .



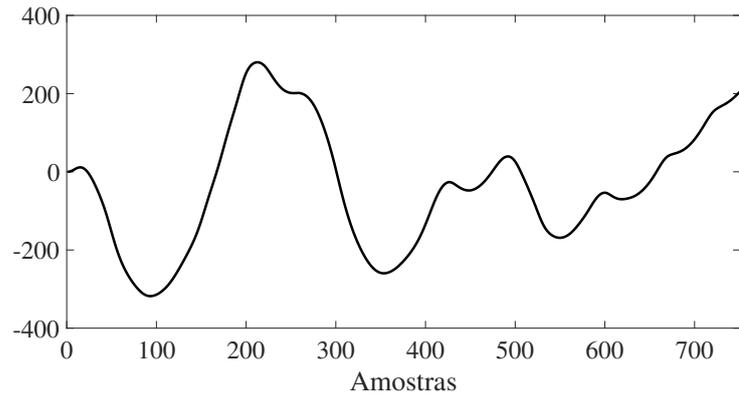
Fonte: Autor

Figura 46 – Conjunto de dados do helicóptero 2DOF para entrada u_2 .



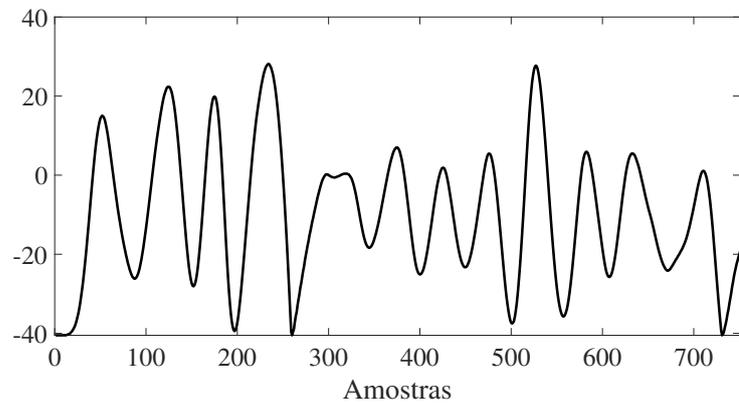
Fonte: Autor

Figura 47 – Conjunto de dados do helicóptero 2DOF para saída y_1 .



FONTE: Autor

Figura 48 – Conjunto de dados do helicóptero 2DOF para saída y_2 .



Fonte: Autor

Neste experimento, saídas com ruído de medição foram simuladas, onde esses ruídos foram gerados por meio das seguintes equações:

$$\nu_k^{y_1} = \frac{1 + 0.2z^{-1}}{1 + 0.2z^{-1} + 0.1z^{-2}} e_k \quad (4.15)$$

$$\nu_k^{y_2} = \frac{1 + 0.1z^{-1}}{1 + 0.3z^{-1} + 0.2z^{-2}} e_k \quad (4.16)$$

Na identificação online do helicóptero com 2 graus de liberdade, o vetor de agrupamento $\mathbf{z}_k = [\mathbf{u}^T|_{k-1} \ \mathbf{y}^Y|_{k-1}^T]$ foi adotado. Os parâmetros do algoritmo foram definidos com os seguintes valores: $T_f = 0.002$; $T_u = 0.8$; $T_l = 0.6$; $q_p = 12$; $q_f = 6$; $n = 6$; $w = 15$; $g_p = 9 \times 10^{-3}$, $f_f = 0.97$ e $g_i = 2 \times 10^{-4}$.

Para análise comparativa, a metodologia proposta é comparada com a metodologia apresentada Evangelista e Serra (2020), que se baseia na abordagem RLS e no algoritmo nebuloso neural tipo-1 VI presente em Filho e Serra (2018). Nas Tabelas 7-8 e Figuras 51-52 são mostradas as métricas VAF% e NDEI, onde observa-se que a metodologia proposta apresenta desempenho competitivo quando comparada com metodologias na literatura. No processo evolutivo, a média de regras em cada simulação foi de 4. A estimativa online das saídas do helicóptero 2DOF é mostrada na Figuras 49 e 50, onde a SNR adotada é de 10 dB.

Tabela 7 – Análise comparativa da metodologia proposta com as metodologias apresentadas em (Evangelista; Serra, 2020) e (Filho; Serra, 2018), com base no critério do VAF

SNR	MNT2IE		Evangelista e Serra (2020)		Filho e Serra (2018)	
	$y_1 (\pm \text{DesP})$	$y_2 (\pm \text{DesP})$	$y_1 (\pm \text{DesP})$	$y_2 (\pm \text{DesP})$	$y_1 (\pm \text{DesP})$	$y_2 (\pm \text{DesP})$
10	99.21 (2.03)	97.23 (2.71)	46.71 (8.21)	33.03 (9.47)	97.81 (-)	92.62 (-)
15	99.27 (1.44)	99.38 (1.93)	71.13 (6.76)	55.32 (7.35)	98.94(-)	97.15 (-)
20	99.35 (0.97)	99.54 (1.25)	86.71 (4.03)	78.87 (4.23)	99.35(-)	97.46 (-)
25	99.54 (0.91)	99.55 (0.98)	94.05 (2.61)	89.87 (3.04)	99.42(-)	97.61 (-)
30	99.53 (0.65)	99.67 (0.76)	99.01 (1.58)	98.14 (2.01)	99.51(-)	97.92 (-)
35	99.71 (0.31)	99.65 (0.71)	99.01 (0.75)	98.27 (0.86)	99.64(-)	98.07 (-)
40	99.80 (0.29)	99.74 (0.53)	99.63 (0.58)	98.83 (0.73)	99.72 (-)	98.19 (-)

Além do desempenho do MNT2IE para o experimento do helicóptero com 2 graus de liberdade, outros aspectos da evolução do modelo proposto são apresentados. Durante o processo de treinamento, o algoritmo encontrou, em média, 63 regras por realização. As Figuras 53–56 mostram a atualização dos centros das regras, e as Figuras ??–?? mostram a atualização dos elementos das matrizes de parâmetros de Markov para as regras de 1 a 6 durante o processo de treinamento com uma SNR de 10 dB. Observa-se nestas figuras a estabilidade e convergência da estimação dos parâmetros do antecedente e do consequente.

Figura 49 – Região de confiança estimada para o rastreamento da saída y_1 do helicóptero 2DOF para um SNR 10Db.

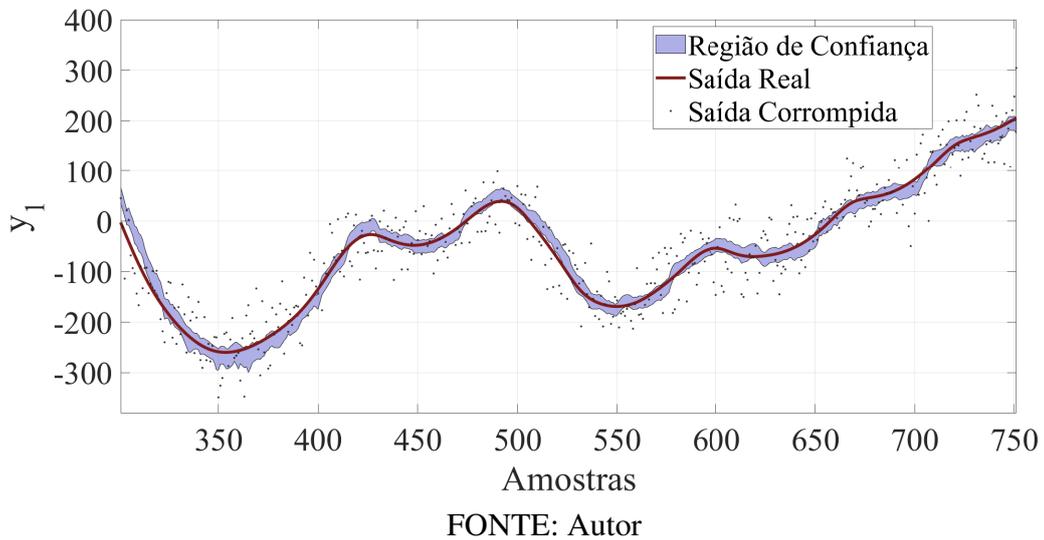


Figura 50 – Região de confiança estimada para o rastreamento da saída y_2 do helicóptero 2DOF para um SNR 10Db.

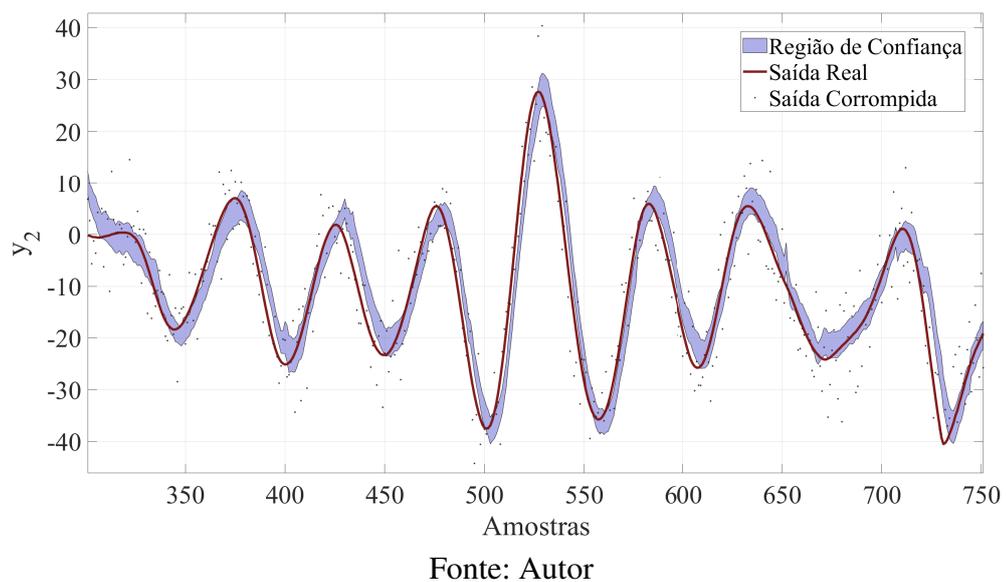
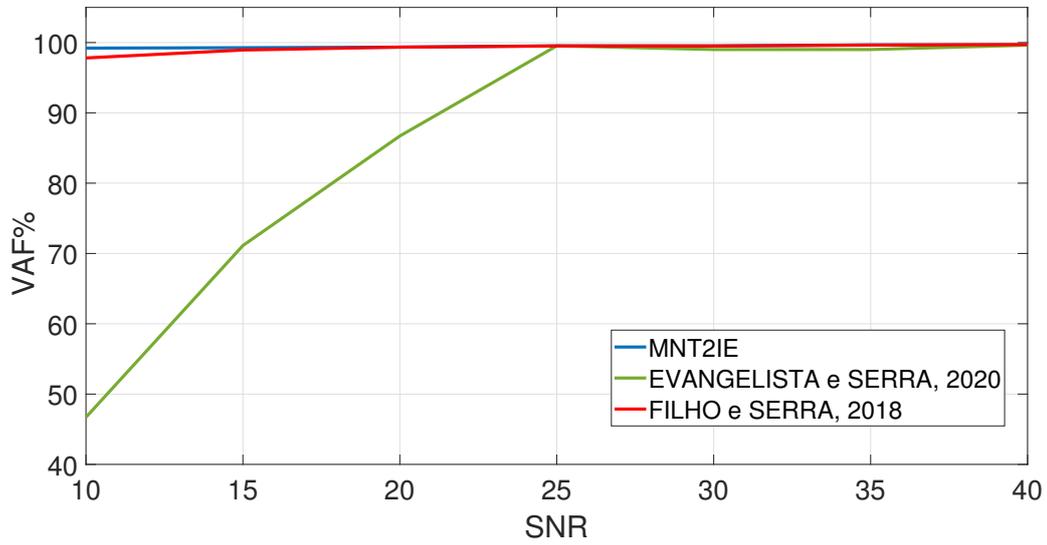
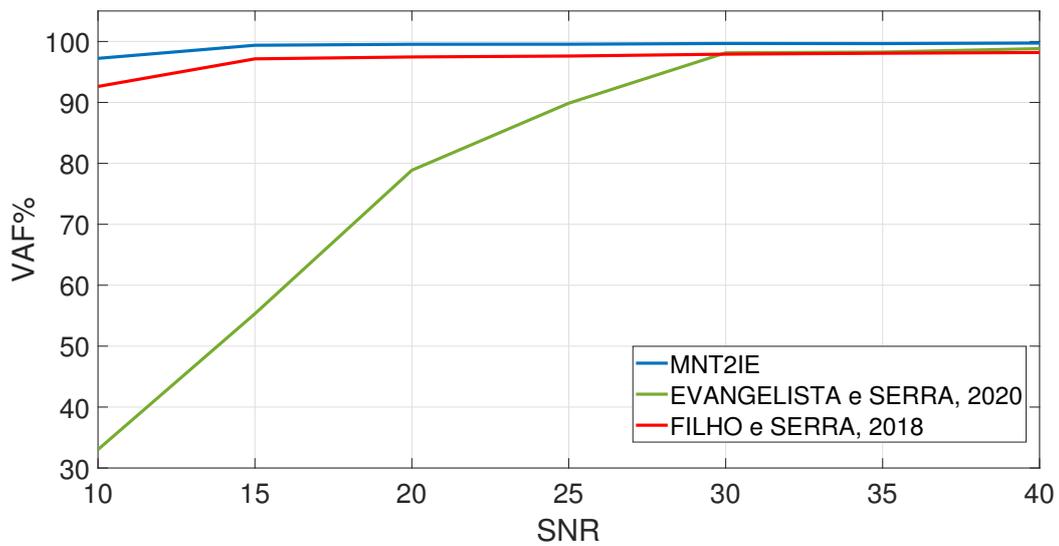


Figura 51 – Análise do desempenho do MNT2IE conforme a variação da SNR para a saída y_1 para o critério VAF%.



FONTE: Autor

Figura 52 – Análise do desempenho do MNT2IE conforme a variação da SNR para a saída y_2 para o critério VAF%.



Fonte: Autor

Tabela 8 – Análise comparativa da metodologia proposta com as metodologias apresentadas em (Evangelista; Serra, 2020) e (Filho; Serra, 2018), com base no critério do NDEI

SNR	MNT2IE		Evangelista e Serra (2020)		Filho e Serra (2018)	
	y_1	y_2	y_1	y_2	y_1	y_2
10	0.117	0.106	0.739	0.882	0.152	0.273
15	0.108	0.056	0.538	0.699	0.098	0.206
20	0.091	0.039	0.367	0.464	0.093	0.185
25	0.067	0.020	0.245	0.318	0.092	0.171
30	0.067	0.016	0.161	0.211	0.092	0.168
35	0.056	0.014	0.100	0.136	0.092	0.166
40	0.056	0.016	0.060	0.088	0.091	0.157

Figura 53 – Adaptação dos centros das funções de pertinência ($u_1^{1*}, u_2^{1*}, y_1^{1*}, u_2^{1*}$) (regra 1) para o helicóptero com 2 graus de liberdade. A linha azul representa o centro em u_1 ; linha vermelha, centro em u_2 ; linha amarela, centro em y_1 e a linha roxa, centro em y_2 .

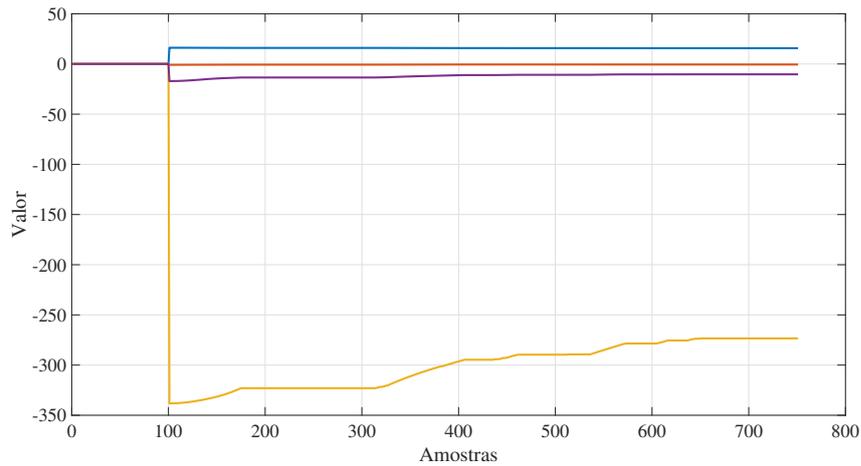


Figura 54 – Adaptação dos centros das funções de pertinência ($u_1^{2*}, u_2^{2*}, y_1^{2*}, u_2^{2*}$) (regra 2) para o helicóptero com 2 graus de liberdade. A linha azul representa o centro em u_1 ; linha vermelha, centro em u_2 ; linha amarela, centro em y_1 e a linha roxa, centro em y_2 .

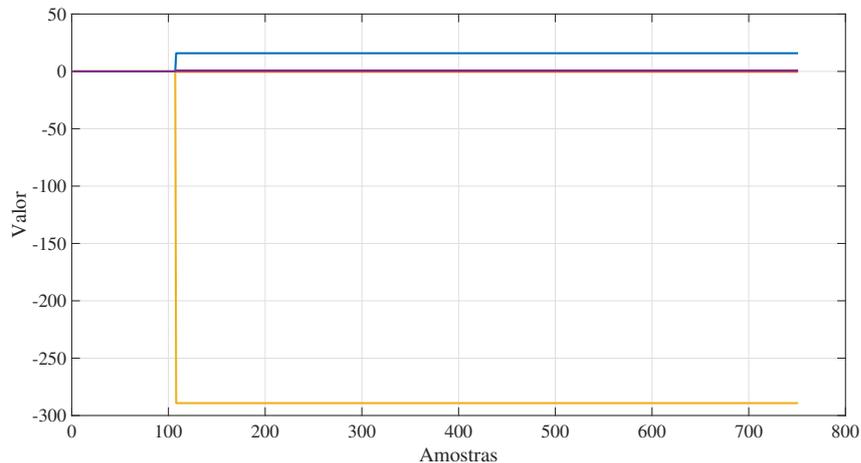


Figura 55 – Adaptação dos centros das funções de pertinência ($u_1^{3*}, u_2^{3*}, y_1^{3*}, u_2^{3*}$) (regra 3) para o helicóptero com 2 graus de liberdade. A linha azul representa o centro em u_1 ; linha vermelha, centro em u_2 ; linha amarela, centro em y_1 e a linha roxa, centro em y_2 .

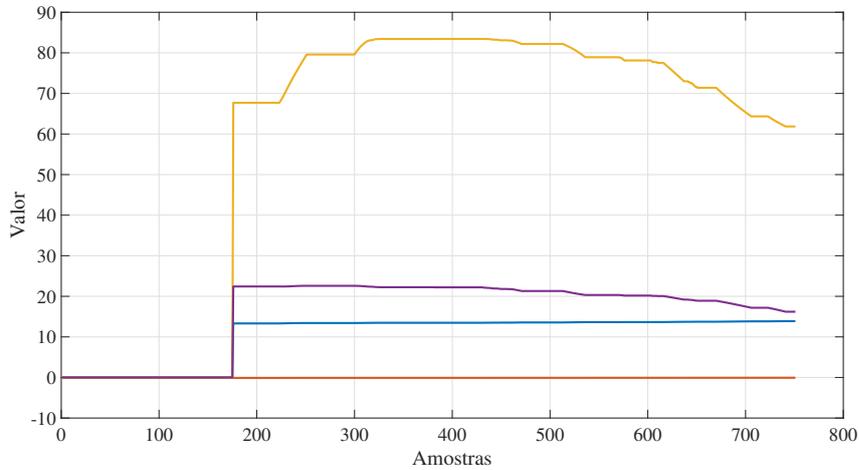
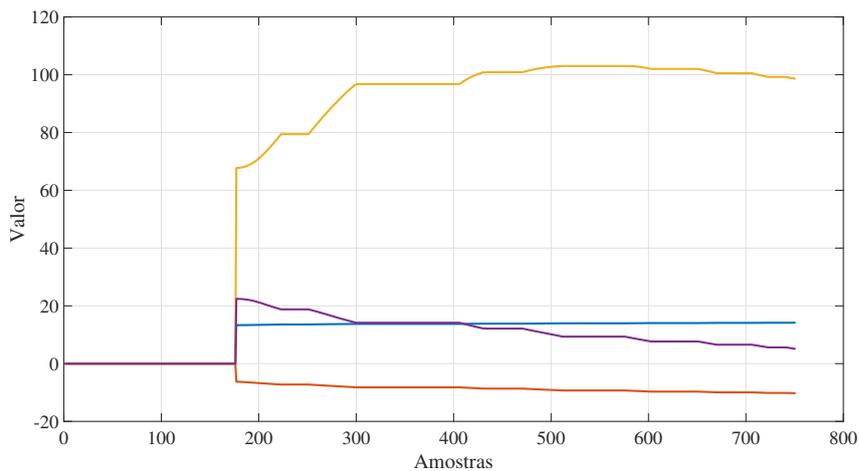


Figura 56 – Adaptação dos centros das funções de pertinência ($u_1^{4*}, u_2^{4*}, y_1^{4*}, u_2^{4*}$) (regra 4) para o helicóptero com 2 graus de liberdade. A linha azul representa o centro em u_1 ; linha vermelha, centro em u_2 ; linha amarela, centro em y_1 e a linha roxa, centro em y_2 .



4.5 Identificação Online de um Sistema Dinâmico Multivariável Não Linear Variante no Tempo

Um sistema dinâmico MIMO não linear variante no tempo é considerado para ilustrar a adaptabilidade da metodologia proposta para sistemas dinâmicos variantes no tempo. O sistema dinâmico MIMO não linear é governado pelas seguintes equações:

$$\mathbf{v}_k = \begin{cases} v_1|_{k+1} = \frac{v_1|_{k-1}}{v_1^2|_{k+1}} + \frac{1}{v_2^2|_{k+5}} + u_1^3|_k \\ v_2|_{k+1} = 0.1v_2|_k v_1|_{k-1} - 0.2v_2|_k u_2|_k \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{y}|_k = \mathbf{G}|_k \mathbf{v}|_k \quad (4.18)$$

onde

$$\mathbf{G}|_k = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} & \text{para } k < 1400 \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

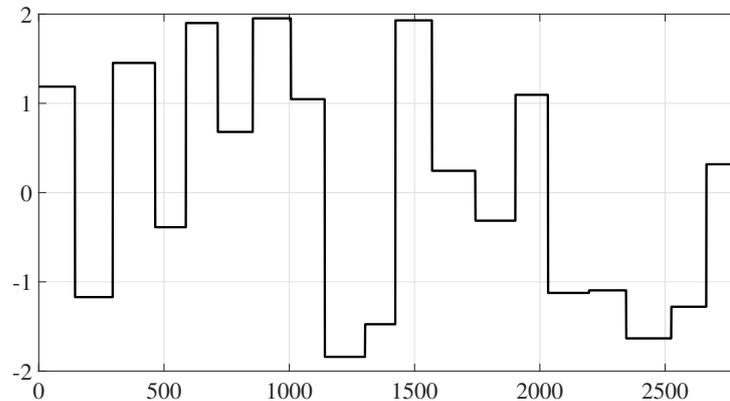
e $\mathbf{u}|_k = [u_1|_k \ u_2|_k]^T$, u_1 é um sinal de múltiplos degraus com distribuição uniforme entre $[-2, 2]$, u_2 é um sinal de múltiplos degraus com distribuição uniforme entre $[-1, 1]$ e o $\mathbf{v}|_k = [v_1|_k \ v_2|_k]^T$ é o vetor de sinais intermediários. Os sinais de saída são corrompidos por ruídos correlacionados, que são dados por:

$$\nu^{y_1}|_k = \frac{1 + 0,2z^{-1}}{1 + 0,6z^{-1} + 0,2z^{-2}} e|_k \quad (4.19)$$

$$\nu^{y_2}|_k = \frac{1 + 0,2z^{-1}}{1 + 0,3z^{-1} + 0,1z^{-2}} e|_k \quad (4.20)$$

onde $e|_k$ é um ruído branco com média igual a zero e variância de σ_e^2 . O conjunto de dados possui 2.800 amostras, onde 500 são utilizadas para inicializar o MNT2IE e 2.400 amostras são utilizadas para identificação online. As métricas de desempenho adotadas são **VAF%** e **NDEI**. O conjunto de dados é mostrado nas Figuras 57–60.

Figura 57 – Dados da entrada u_1 para estimação online do sistema dinâmico não linear variante no tempo



Na identificação online do sistema dinâmico não linear multivariável variante no tempo, o vetor de agrupamento $\mathbf{z}_k = [u_1|_{k-1} \ u_2|_{k-1} \ y_1|_{k-1} \ y_2|_{k-1}]$ foi adotado. Os parâmetros do algoritmo foram definidos com os seguintes valores: $L = 8$; $d = 1$; $T_f = 0.001$; $T_u = 0.7$; $T_l = 0.5$; $q_p = 12$; $q_f = 7$; $n = 4$; $w = 3$; $g_p = 5 \times 10^{-3}$, $f_f = 0.985$ e $g_i = 3 \times 10^{-5}$.

A Tabela 9 apresenta os resultados da estimação online para os valores de SNR = [10, 15, 20, 25, 30], com as métricas de avaliação VAF% e NDEI. A estimação da região de confiança para as saídas y_1 e y_2 são mostradas nas Figuras 61–62.

Além do desempenho do MNT2IE para o experimento do sistema dinâmico não linear variante no tempo, outros aspectos da evolução do modelo proposto são apresentados. Durante o

Figura 61 – Estimação do saída y_1 intervalar (região de confiança) para o sistema dinâmico não linear variante no tempo para SNR=10dB.

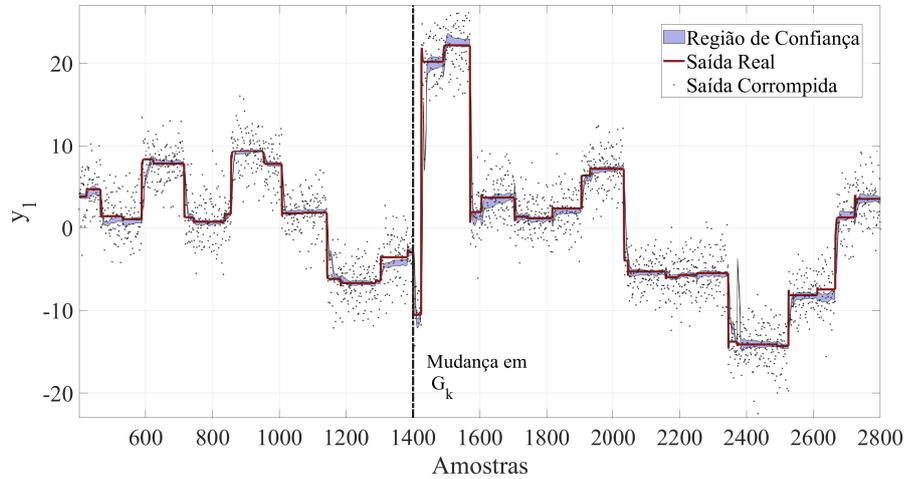


Figura 62 – Estimação do saída y_2 intervalar (região de confiança) para o sistema dinâmico não linear variante no tempo para SNR=10dB.

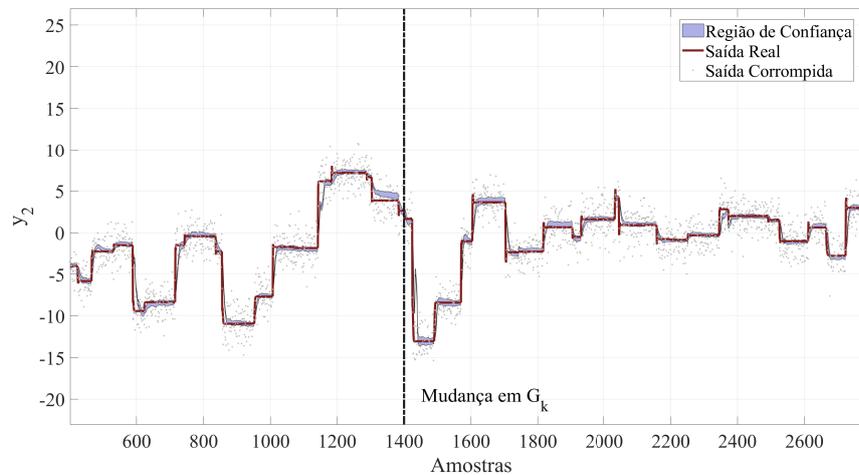


Tabela 9 – Desempenho do MNT2IE para diferentes níveis de ruído para a estimação do sistema dinâmico não linear variante no tempo. Utilizou-se as métrica VAF.

SNR	MNT2IE		Evangelista e Serra (2020)	
	$y_1 (\pm \text{DesP})$	$y_2 (\pm \text{DesP})$	$y_1 (\pm \text{DesP})$	$y_2 (\pm \text{DesP})$
10	95.83 (2.02)	95.10 (1.63)	47.72 (6.01)	41.65 (5.20)
15	96.34 (1.34)	95.61 (1.03)	69.02 (5.44)	62.72 (4.51)
20	96.62 (0.98)	95.80 (0.77)	85.82 (4.31)	81.01 (3.00)
25	97.01 (0.61)	95.93 (0.50)	91.09 (2.71)	91.98 (1.88)
30	97.27 (0.33)	96.16 (0.32)	96.29 (1.54)	96.74 (1.09)

processo de treinamento, o algoritmo encontrou, em média, 6 regras por realização. As Figuras 63–68 mostram a atualização dos centros das regras.

Figura 63 – Adaptação dos centros das funções de pertinência $(u_1^{1*}, u_2^{1*}, y_1^{1*}, y_2^{1*})$ (regra 1) para o sistema dinâmico não linear variante no tempo. A linha azul representa o centro u_1^{1*} , linha vermelha u_2^{1*} , linha laranja y_1^{1*} e linha lilás y_2^{1*}

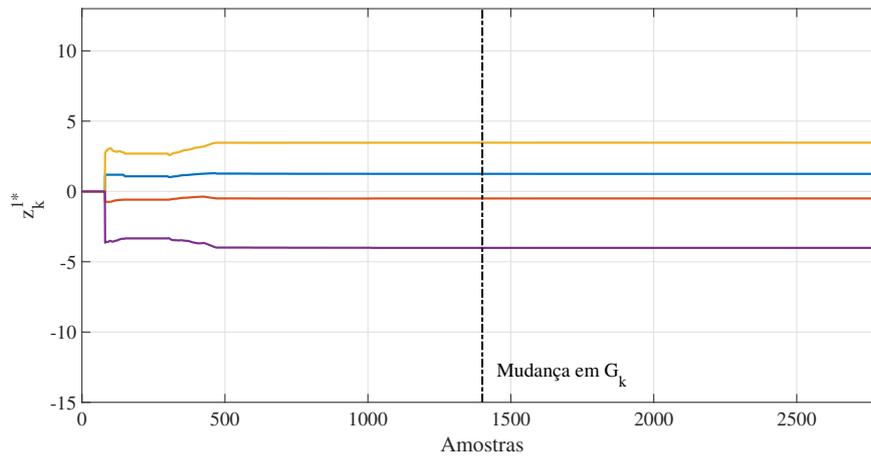


Figura 64 – Adaptação dos centros das funções de pertinência $(u_1^{2*}, u_2^{2*}, y_1^{2*}, y_2^{2*})$ (regra 2) para o sistema dinâmico não linear variante no tempo. A linha azul representa o centro u_1^{2*} , linha vermelha u_2^{2*} , linha laranja y_1^{2*} e linha lilás y_2^{2*}

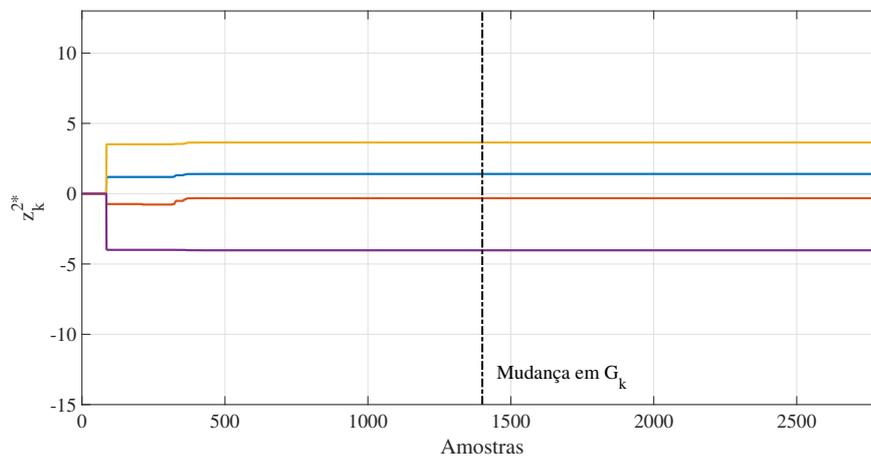


Figura 65 – Adaptação dos centros das funções de pertinência ($u_1^{3*}, u_2^{3*}, y_1^{3*}, y_2^{3*}$) (regra 3) para o sistema dinâmico não linear variante no tempo. A linha azul representa o centro u_1^{3*} , linha vermelha u_2^{3*} , linha laranja y_1^{3*} e linha lilás y_2^{3*}

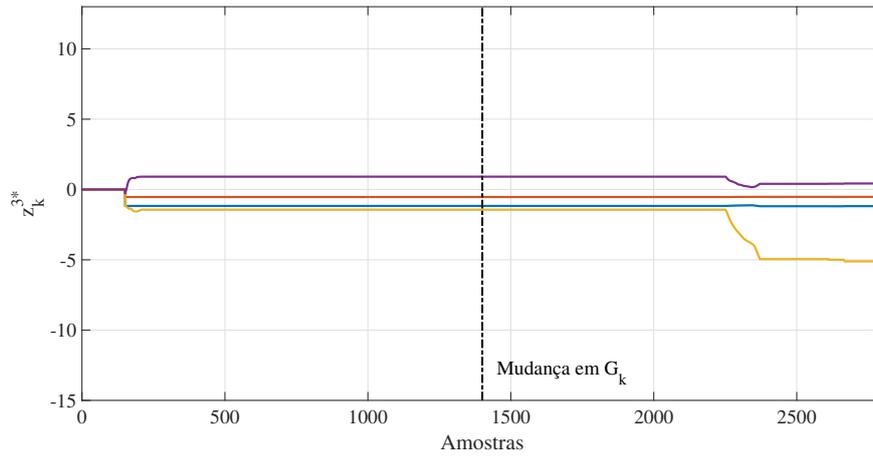


Figura 66 – Adaptação dos centros das funções de pertinência ($u_1^{4*}, u_2^{4*}, y_1^{4*}, y_2^{4*}$) (regra 4) para o sistema dinâmico não linear variante no tempo. A linha azul representa o centro u_1^{4*} , linha vermelha u_2^{4*} , linha laranja y_1^{4*} e linha lilás y_2^{4*}

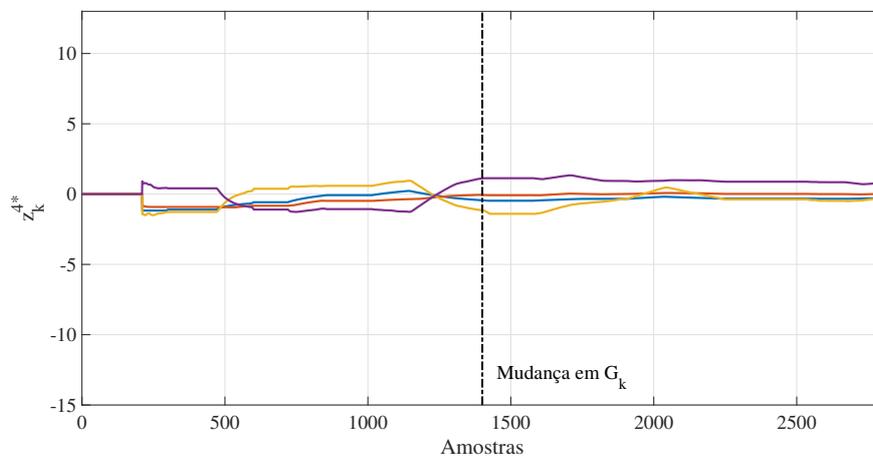


Figura 67 – Adaptação dos centros das funções de pertinência ($u_1^{5*}, u_2^{5*}, y_1^{5*}, y_2^{5*}$) (regra 5) para o sistema dinâmico não linear variante no tempo. A linha azul representa o centro u_1^{5*} , linha vermelha u_2^{5*} , linha laranja y_1^{5*} e linha lilás y_2^{5*}

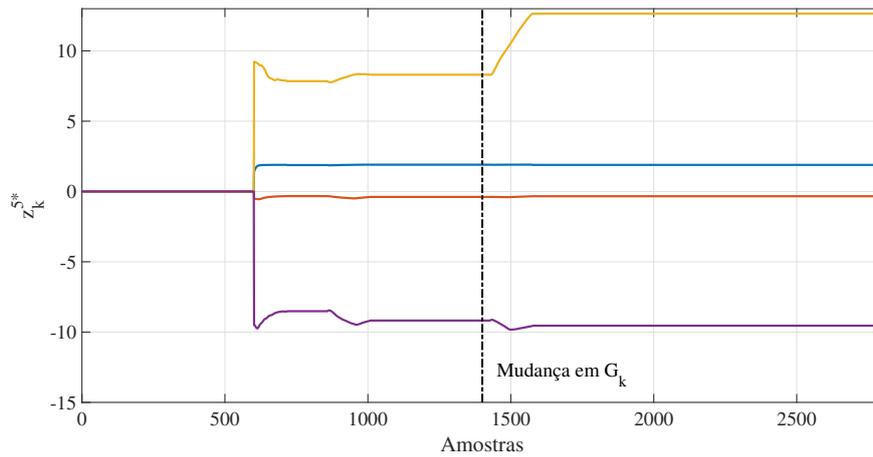
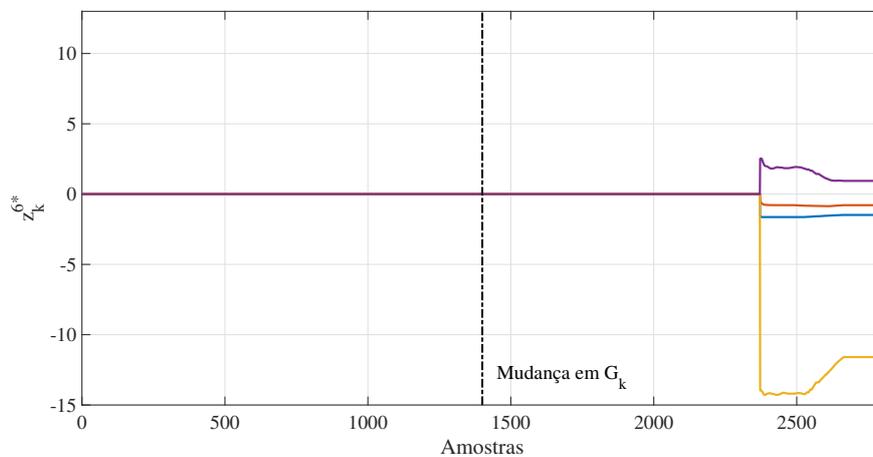


Figura 68 – Adaptação dos centros das funções de pertinência ($u_1^{6*}, u_2^{6*}, y_1^{6*}, y_2^{6*}$) (regra 6) para o sistema dinâmico não linear variante no tempo. A linha azul representa o centro u_1^{6*} , linha vermelha u_2^{6*} , linha laranja y_1^{6*} e linha lilás y_2^{6*}



5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta tese, uma Metodologia de Identificação Neuro-Nebulosa Tipo-2 Intervalar para sistemas dinâmicos em ambientes ruidosos foi apresentada. Foi introduzido o algoritmo ANET2 para atualizar a estrutura e os parâmetros do antecedente do modelo. A cada novo dado, este algoritmo analisa a base de conhecimento e verifica se uma nova regra precisa ser criada para adaptar o modelo a um novo comportamento do sistema dinâmico. Por meio do método de criação e fusão de agrupamentos, a base de regras tende a apresentar baixa similaridade entre as FPT2Is, garantindo maior interpretabilidade à base de conhecimento. A principal contribuição deste estudo é a proposta do algoritmo de Variáveis Instrumentais Nebulosas Tipo-2 Intervalar no contexto do espaço de estados. Nesta abordagem, utilizou-se o algoritmo RSSA para filtrar os dados experimentais, gerando dados descorrelacionados dos ruídos e formando assim o vetor de instrumentos adequados para garantir a polarização assintótica nula. Com o vetor de instrumentos definido, aplicou-se as equações do algoritmo VIN tipo-2 intervalar do para estimar os parâmetros de Markov do observador. Os lemas e o teorema que provam que o método VIN tipo-2 intervalar garante a polarização assintótica nula foram mostrados na Seção 3.7.2. Um aspecto fundamental da metodologia proposta é a ausência da necessidade de uma base de regras previamente definida para a inicialização do algoritmo. Em outras palavras, o modelo neuro-nebuloso tipo-2 intervalar pode ser concebido de forma a iniciar sem nenhuma regra preexistente, permitindo que as regras sejam geradas de maneira adaptativa e incremental ao longo do processo. Essa característica proporciona maior flexibilidade ao modelo, viabilizando sua aplicação em cenários nos quais não se dispõe de conhecimento especializado suficiente para a definição inicial de regras, além de favorecer a escalabilidade e a adaptabilidade do sistema em ambientes dinâmicos.

Como demonstrado na Seção 3.5.1, os parâmetros de Markov do observador é composto pelas matrizes do modelo no espaço de estado com observador. Desta forma, demonstrou-se que a partir dos parâmetros de Markov é possível calcular o vetor de estados no instante k para cada submodelo do MNT2IE. Uma vez conhecidos os vetores de estados para cada submodelo, utilizou-se a decomposição QR para estimar as matrizes do modelo no espaço de estados. Esta abordagem prover as seguintes vantagens:

- é numericamente estável, o que significa que pequenos erros nos dados de entrada não resultam em grandes erros nos resultados.
- é mais eficiente computacionalmente do que outras técnicas de resolução, especialmente para matrizes grandes e esparsas.
- é útil para resolver problemas de matrizes mal-condicionadas, onde outras técnicas, tais como MQ, podem falhar devido à instabilidade numérica.

Considerando os resultados experimentais e os aspectos metodológicos da abordagem de modelagem proposta, as seguintes observações finais são feitas:

- A metodologia proposta é um algoritmo de aprendizado baseado em dados, onde tanto a estrutura quanto os parâmetros são adaptados a cada novo conjunto de dados recebido. A normalização de dados não é realizada, melhorando sua capacidade de lidar com problemas de identificação não estacionários.
- O método proposto demonstra robustez a outliers e ruídos por meio da incorporação de um processo de filtragem, conjuntos nebulosos tipo-2 e o método de variáveis instrumentais. O processo de filtragem precede o processo de aprendizado, trazendo melhoras significativas na etapa de criação de regras, enquanto o algoritmo de variáveis instrumentais nebulosas tipo-2 fornece uma estimativa não polarizada dos parâmetros do modelo local do observador de estado.
- Os resultados experimentais demonstraram que a metodologia proposta é eficaz na modelagem de sistemas dinâmicos complexos caracterizados por incerteza, não linearidade e aspectos mono e multivariáveis, mesmo na presença de ruído correlacionado.

Entre os projetos práticos e problemas que podem ser resolvidos pelo algoritmo, os seguintes têm sido amplamente considerados para pesquisa:

- Controle baseado em modelo caixa preta, onde a planta apresenta não linearidade, comportamento incerto e ruído correlacionado, como posicionamento de satélites (Juang, 2011), manipuladores móveis múltiplos, motor de indução (Serra, 2012).
- Modelagem computacional de dados experimentais, onde os dados são não lineares, incertos e/ou corrompidos por ruído correlacionado, como estimativa de parâmetros da dinâmica de veículos, sistemas mecatrônicos, navegação de robôs móveis e processos não estacionários (Serra, 2018).

Apesar das vantagens apresentadas, a técnica em questão apresenta algumas limitações que devem ser consideradas:

- Requerimento de conhecimento prévio acerca dos ruídos que afetam o sistema. Tal conhecimento é necessário para ajustar os parâmetros da filtragem realizada pelo método RSSA de forma eficiente, minimizando a perda de informações relacionadas à dinâmica dos sinais filtrados.
- Dependência da definição de parâmetros pelo usuário. Essa característica implica que o desempenho do algoritmo está diretamente relacionado à seleção adequada dos parâmetros. Essa limitação será analisada em estudos futuros, visando uma possível automação ou redução dessa dependência.

- Emprego sucessivo dos algoritmos de VI e MQ por meio da decomposição QR. Esse procedimento contribui para o aumento do tempo necessário para a convergência da estimação dos parâmetros consequentes, ou seja, dos submodelos associados ao espaço de estados.

Como perspectivas para futuras pesquisas, destacam-se: (a) o desenvolvimento de uma técnica de identificação no espaço de estados, adaptada para sistemas nebulosos tipo-2, que utilize projeções do espaço de dados experimentais para estimar os submodelos de forma mais precisa; (b) a adaptação de metodologias de conversão de sistemas estocásticos para sistemas determinísticos ao contexto nebuloso, com o intuito de modelar sistemas estocásticos não-lineares; e (c) a exploração de novos métodos de seleção de variáveis instrumentais, mais eficientes para sistemas multivariáveis, visando reduzir o tempo computacional dos algoritmos de identificação.

REFERÊNCIAS

- ABIYEV, R. H.; KAYNAK, O.; KAYACAN, E. A type-2 fuzzy wavelet neural network for system identification and control. **Journal of the Franklin Institute**, Elsevier BV, v. 350, n. 7, p. 1658–1685, sep 2013. 24
- AGUIRRE, L. A. **Introducao a Identificacao de Sistemas – Tecnicas Lineares e Nao-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais**. 3. ed. [S.l.: s.n.]: Editora UFMG, 2007. 20, 21, 23, 26, 28, 42, 43, 44, 62, 67, 76, 79, 127
- ALBUQUERQUE, J. M. P.; FORTES, W. A. F. **Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processo Estocásticos**. [S.l.: s.n.]: PUC Rio, 2008. 128, 129
- ANGELOV, P. **Autonomous Learning Systems**. [S.l.: s.n.]: Wiley-Blackwell, 2012. ISBN 1119951526. 62, 63, 64, 76
- ANGELOV, P.; BUSWELL, R. Identification of evolving fuzzy rule-based models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 10, n. 5, p. 667–677, oct 2002. 67
- ANGELOV, P.; FILEV, D. An approach to online identification of takagi-sugeno fuzzy models. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B (Cybernetics)**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 34, n. 1, p. 484–498, feb 2004. 23, 63, 64, 67, 72, 76
- ANGELOV, P.; FILEV, D. Simpl_eTS: a simplified method for learning evolving takagi-sugeno fuzzy models. *In: The 14th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. [S.l.: s.n.]: IEEE, 2005. 25, 89, 90
- ANGELOV, P.; LUGHOFER, E.; KLEMENT, E. Two approaches to data-driven design of evolving fuzzy systems: eTS and FLEXFIS. *In: NAFIPS 2005 - 2005 Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society*. [S.l.: s.n.]: IEEE, 2005. 23, 89, 90
- ANGELOV, P.; ZHOU, X. Evolving fuzzy systems from data streams in real-time. *In: 2006 International Symposium on Evolving Fuzzy Systems*. [S.l.: s.n.]: IEEE, 2006. 25, 89, 90
- ARNOLD, C. R.; NARENDRA, K. S. **The characterization and identification of systems**. [S.l.: s.n.]: Harvard University, 1965. 21, 23
- ASHRAFI, M.; PRASAD, D. K.; QUEK, C. IT2-GSETSK: An evolving interval type-II TSK fuzzy neural system for online modeling of noisy data. **Neurocomputing**, Elsevier BV, v. 407, p. 1–11, sep 2020. 72
- BABUSKA, R. **Fuzzy Modeling for Control**. [S.l.: s.n.]: Springer Netherlands, 2012. ISBN 9401060401. 23, 25, 53, 54, 56, 59, 61, 62, 63, 67
- BAKLOUTI, N.; ABRAHAM, A.; ALIM, A. A beta basis function interval type-2 fuzzy neural network for time series applications. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, Elsevier BV, v. 71, p. 259–274, may 2018. 24

- BEGIAN, M. B.; MELEK, W. W.; MENDEL, J. M. Parametric design of stable type-2 TSK fuzzy systems. *In: NAFIPS 2008 - 2008 Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society*. [S.l.: s.n.]: IEEE, 2008. 60
- BENCHERIF, A.; CHOUIREB, F. A recurrent TSK interval type-2 fuzzy neural networks control with online structure and parameter learning for mobile robot trajectory tracking. **Applied Intelligence**, Springer Science and Business Media LLC, v. 49, n. 11, p. 3881–3893, may 2019. 24
- BENDAT, J. S. Nonlinear system analysis and identification from random data. (**No Title**), 1990. 23
- BEZDEK, J. C. **Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms**. [S.l.: s.n.]: Springer US, 1981. 63
- BOUCHACHIA, A.; LUGHOFER, E.; SAYED-MOUCHAWEH, M. Special issue: Evolving soft computing techniques and applications. **Applied Soft Computing**, Elsevier BV, v. 14, p. 141–143, jan 2014. 63
- CASTILLO, O. **Type-2 Fuzzy Logic in Intelligent Control Applications**. [S.l.: s.n.]: Springer-Verlag GmbH, 2011. ISBN 3642246621. 24, 58
- CASTILLO, P. M. O. **Type-2 Fuzzy Logic: Theory and Applications**. [S.l.: s.n.]: Springer Berlin Heidelberg, 2007. 23, 24, 28, 44, 45, 57, 58
- CHEN, C.-T. **Linear System Theory and Design**. 3rd. ed. New York, NY, USA: Oxford University Press, Inc., 1998. ISBN 0195117778. 36
- CHIUSO, A.; PICCI, G. Consistency analysis of some closed-loop subspace identification methods. **Automatica**, Elsevier BV, v. 41, n. 3, p. 377–391, mar 2005. 39, 40, 77
- DAS, A. K.; SUBRAMANIAN, K.; SUNDARAM, S. An evolving interval type-2 neurofuzzy inference system and its metacognitive sequential learning algorithm. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 23, n. 6, p. 2080–2093, dec 2015. 66
- DING, F.; SHI, Y.; CHEN, T. Auxiliary model-based least-squares identification methods for hammerstein output-error systems. **Systems & Control Letters**, Elsevier BV, v. 56, n. 5, p. 373–380, may 2007. 93
- EVANGELISTA, A. P. F.; SERRA, G. L. d. O. Type-2 fuzzy instrumental variable algorithm for evolving neural-fuzzy modeling of nonlinear dynamic systems in noisy environment. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, Elsevier BV, v. 109, p. 104620, mar. 2022. ISSN 0952-1976. 31
- EVANGELISTA, A. P. F.; SERRA, G. L. de O. **Metodologia de Identificação de Sistemas Dinâmicos Multivariáveis Baseada em Modelo Neuro-fuzzy no Espaço de Estados com Inferência Evolutiva Tipo-2 Intervalar**. 2019. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Maranhão, 2019. 29
- EVANGELISTA, A. P. F.; SERRA, G. L. O. Algoritmo recursivo para identificação nebulosa tipo-2 de sistemas dinâmicos não-lineares. *In: Anais do XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 2065–2070. 62, 63

- EVANGELISTA, A. P. F.; SERRA, G. L. O. State space black-box modelling via markov parameters based on evolving type-2 neural-fuzzy inference system for nonlinear multivariable dynamic systems. **Fuzzy Sets and Systems**, Elsevier BV, v. 394, p. 1–39, sep 2020. 12, 67, 76, 97, 98, 103, 106, 110
- EVANGELISTA, A. P. F.; SERRA, G. L. O. Nonlinear systems - recent advances and application. *In: ____*. [S.l.: s.n.]: Intech Open, 2024. cap. A Type-2 Fuzzy State Observer Model for Non-Stationary Dynamic System Identification: An Incremental Learning Method with Noise Handling, p. –. 31
- FILHO, O. D. R. **Modelagem Baseada em Agrupamento Nebuloso Evolutivo de Máxima Verossimilhança Aplicada a sistemas Dinâmicos Operando em Ambiente Não-Estacionário**. 2017. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Maranhão, 2017. 44
- FILHO, O. D. R. **Modelagem Baseada em Agrupamento Nebuloso Evolutivo de Máxima Verossimilhança Aplicada a Sistemas Dinâmicos Operando em Ambiente Não-Estacionário**. 2017. Tese (Doutorado) — UFMA, 2017. 21
- FILHO, O. D. R.; SERRA, G. L. O. Recursive fuzzy instrumental variable based evolving neuro-fuzzy identification for non-stationary dynamic system in a noisy environment. **Fuzzy Sets and Systems**, Elsevier BV, v. 338, p. 50–89, may 2018. 12, 20, 25, 27, 29, 44, 61, 62, 63, 64, 67, 76, 78, 89, 90, 103, 106
- FOWLER, A. C. Mathematical models in the applied sciences. **SIAM Review**, 1997. 27
- GE, D.; ZENG, X.-J. Learning evolving t-s fuzzy systems with both local and global accuracy – a local online optimization approach. **Applied Soft Computing**, Elsevier BV, v. 68, p. 795–810, jul. 2018. ISSN 1568-4946. 23
- GIL, P.; OLIVEIRA, T.; PALMA, L. B. Online non-affine nonlinear system identification based on state-space neuro-fuzzy models. **Soft Computing**, Springer Science and Business Media LLC, v. 23, n. 16, p. 7425–7438, jul 2018. 25
- GOLYANDINA, N.; NEKRUTKIN, V.; ZHIGLJAVSKY, A. **Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques**. [S.l.: s.n.]: CRC Press, 2001. 70
- GOMES, D. C. dos S.; SERRA, G. L. de O. A novel interval type-2 fuzzy kalman filtering and tracking of experimental data. **Evolving Systems**, Springer Science and Business Media LLC, v. 13, n. 2, p. 243–264, apr 2021. 25
- GOMES, D. C. dos S.; SERRA, G. L. de O. Interval type-2 evolving fuzzy kalman filter for processing of unobservable spectral components from uncertain experimental data. **Journal of the Franklin Institute**, Elsevier BV, v. 361, n. 2, p. 637–669, jan. 2024. ISSN 0016-0032. 25, 26, 27
- HAGRAS, H. A. A hierarchical type-2 fuzzy logic control architecture for autonomous mobile robots. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 12, n. 4, p. 524–539, aug 2004. 24
- HAN, D. A study on application of fuzzy adaptive unscented kalman filter to nonlinear turbojet engine control. **International Journal of Aeronautical and Space Sciences**, Springer Science and Business Media LLC, v. 19, n. 2, p. 399–410, may 2018. 25

- JUANG, C.-F.; TSAO, Y.-W. A self-evolving interval type-2 fuzzy neural network with online structure and parameter learning. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 16, n. 6, p. 1411–1424, dec 2008. 24, 66
- JUANG, J. **Applied system identification**. [S.l.: s.n.]: Prentice Hall, 1994. 20, 23, 33
- JUANG, J.-N.; PAPPAS, R. S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. **Journal of guidance, control and dynamics**, v. 8, n. 5, p. 620–627, 1985. 33
- JUANG, M. Q. P. J.-N. **Identification and Control of Mechanical Systems**. [S.l.: s.n.]: CAMBRIDGE UNIV PR, 2011. ISBN 0521783550. 20, 33, 34, 83, 115
- JÚNIOR, S. E. R.; SERRA, G. L. de O. A novel intelligent approach for state space evolving forecasting of seasonal time series. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, Elsevier BV, v. 64, p. 272–285, sep 2017. 20, 64, 70
- KARNIK, N.; MENDEL, J. M. Centroid of a type-2 fuzzy set. **Information Sciences**, 2001. 58
- KARNIK, N. N.; MENDEL, J. M. Introduction to type-2 fuzzy logic systems. In: **1998 IEEE International Conference on Fuzzy Systems Proceedings. IEEE World Congress on Computational Intelligence (Cat. No.98CH36228)**. [S.l.: s.n.]: IEEE, 1998. 24
- KARNIK, N. N.; MENDEL, J. M.; LIANG, Q. Type-2 fuzzy logic systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 7, n. 6, p. 643–658, 1999. 24, 29, 57, 59
- KASABOV, N.; SONG, Q. DENFIS: dynamic evolving neural-fuzzy inference system and its application for time-series prediction. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 10, n. 2, p. 144–154, apr 2002. 89, 90
- KATAYAMA, T. **Subspace Methods for System Identification**. [S.l.: s.n.]: Springer-Verlag GmbH, 2005. ISBN 1852339810. 83
- KAYACAN, E. **Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems: Theory and Design**. jul. 2011. Tese (phdthesis) — Bogaziçi, jul. 2011. 28, 44, 45, 46, 47, 48, 60
- KAYACAN, E.; KAYACAN, E.; KHANESAR, M. A. Identification of nonlinear dynamic systems using type-2 fuzzy neural networks—a novel learning algorithm and a comparative study. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 62, n. 3, p. 1716–1724, mar 2015. 24, 76
- KAYACAN, E.; KHANESAR, M. A. Noise reduction property of type-2 fuzzy neural networks. In: **Fuzzy Neural Networks for Real Time Control Applications**. [S.l.: s.n.]: Elsevier, 2016. p. 161–172. 29
- KEESMAN, K. J. **System Identification**. [S.l.: s.n.]: Springer London, 2011. 23
- KHALIFA, T. R. *et al.* A novel fuzzy wiener-based nonlinear modelling for engineering applications. **ISA Transactions**, Elsevier BV, v. 97, p. 130–142, feb 2020. 25
- LEE, C.-H.; CHANG, F.-Y.; LIN, C.-M. An efficient interval type-2 fuzzy CMAC for chaos time-series prediction and synchronization. **IEEE Transactions on Cybernetics**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 44, n. 3, p. 329–341, mar 2014. 24

- LEMOS, A.; CAMINHAS, W.; GOMIDE, F. Multivariable gaussian evolving fuzzy modeling system. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 19, n. 1, p. 91–104, feb 2011. 63, 64, 89, 90
- LI, F. *et al.* Neuro-fuzzy based identification method for hammerstein output error model with colored noise. **Neurocomputing**, Elsevier BV, v. 244, p. 90–101, jun 2017. 67, 93
- LI, H. *et al.* Control of nonlinear networked systems with packet dropouts: Interval type-2 fuzzy model-based approach. **IEEE Transactions on Cybernetics**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 45, n. 11, p. 2378–2389, nov 2015. 24
- LIANG, Q.; MENDEL, J. An introduction to type-2 TSK fuzzy logic systems. *In: FUZZ-IEEE'99. 1999 IEEE International Fuzzy Systems. Conference Proceedings (Cat. No.99CH36315)*. [S.l.: s.n.]: IEEE, 1999. 60
- LIANG, Q.; MENDEL, J. M. Equalization of nonlinear time-varying channels using type-2 fuzzy adaptive filters. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 8, n. 5, p. 551–563, 2000. 24, 59
- LIANG, Q.; MENDEL, J. M. Interval type-2 fuzzy logic systems: theory and design. **IEEE Trans. Fuzzy Syst.**, Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), v. 8, n. 5, p. 535–550, 2000. 24
- LIN, C.-T. *et al.* An interval type-2 neural fuzzy system for online system identification and feature elimination. **IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 26, n. 7, p. 1442–1455, jul 2015. ISSN 2162-237X. 24
- LIN, Y.-Y. *et al.* A mutually recurrent interval type-2 neural fuzzy system (MRIT2nfs) with self-evolving structure and parameters. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 21, n. 3, p. 492–509, jun 2013. 23, 24, 66, 72
- LIN, Y.-Y. *et al.* Simplified interval type-2 fuzzy neural networks. **IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 25, n. 5, p. 959–969, may 2014. 76
- LJUNG, L. **System Identification: Theory for the User**. [S.l.: s.n.]: Prince Hall, 1999. ISBN 0138816409. 20, 21, 23, 25, 26, 28, 33, 42, 67, 76, 79
- LU, Y.-N. *et al.* Secondary factor induced wind speed time-series prediction using self-adaptive interval type-2 fuzzy sets with error correction. **Energy Reports**, Elsevier BV, v. 7, p. 7030–7047, nov. 2021. ISSN 2352-4847. 24
- LUGHOFER, E. FLEXFIS: A robust incremental learning approach for evolving takagi–sugeno fuzzy models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 16, n. 6, p. 1393–1410, dec 2008. 23, 63, 72
- LUGHOFER, E. **Evolving Fuzzy Systems: Methodologies, Advanced Concepts and Applications**. [S.l.: s.n.]: Springer, 2011. ISBN 9783642180866. 63, 72
- LUGHOFER, E.; BOUCHOT, J.-L.; SHAKER, A. On-line elimination of local redundancies in evolving fuzzy systems. **Evolving Systems**, Springer Nature, v. 2, n. 3, p. 165–187, may 2011. 23

- MENDEL, J. M.; JOHN, R. I.; LIU, F. Interval type-2 fuzzy logic systems made simple. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 14, n. 6, p. 808–821, dec 2006. 45, 46, 47, 57, 58
- MENDOZA, A. M. E. R.; YU, W. Fuzzy adaptive control law for trajectory tracking based on a fuzzy adaptive neural pid controller of a multi-rotor unmanned aerial vehicle. **International Journal of Control, Automation and Systems**, Springer Science and Business Media LLC, v. 21, n. 2, p. 658–670, jan. 2023. ISSN 2005-4092. 67
- MISHRA, B. K. *et al.* Mathematical model, forecast and analysis on the spread of COVID-19. **Chaos Solitons Fractals**, Elsevier BV, v. 147, p. 110995, jun 2021. 27
- MITIUSZEW, W. **Introduction to mathematical modeling and computer simulations**. First issued in paperback. Boca Raton: CRC Press Taylor e Francis Group, 2021. Literaturverzeichnis: Seiten 217- 220. ISBN 103209575X. 20
- MONTAZERI-GH, M.; YAZDANI, S. Application of interval type-2 fuzzy logic systems to gas turbine fault diagnosis. **Applied Soft Computing**, Elsevier BV, v. 96, p. 106703, nov 2020. 24
- MORALES, Y. *et al.* A self-identification neuro-fuzzy inference framework for modeling rainfall-runoff in a chilean watershed. **Journal of Hydrology**, Elsevier BV, v. 594, p. 125910, mar 2021. 67
- MORETTIN, C. **Análise de Séries Temporais**. [*S.l.: s.n.*]: Blucher, 2006. 131
- NAKRANI, N. M.; JOSHI, M. M. A comparative analysis between proposed neuro-fuzzy, fuzzy, and heuristic-neuro-fuzzy controller for autonomous vehicle parking in the dynamic environment. **SN Computer Science**, Springer Science and Business Media LLC, v. 3, n. 6, set. 2022. ISSN 2661-8907. 67
- NASIR, A. N. K.; RAZAK, A. A. A. Opposition-based spiral dynamic algorithm with an application to optimize type-2 fuzzy control for an inverted pendulum system. **Expert Systems with Applications**, Elsevier BV, v. 195, p. 116661, jun. 2022. ISSN 0957-4174. 24
- NI, Z.; LIU, J.; WU, Z. Identification of the time-varying modal parameters of a spacecraft with flexible appendages using a recursive predictor-based subspace identification algorithm. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering**, SAGE Publications, p. 1–19, apr 2018. 78
- NI, Z. *et al.* Identification of the state-space model and payload mass parameter of a flexible space manipulator using a recursive subspace tracking method. **Chinese Journal of Aeronautics**, Elsevier BV, may 2018. 78
- NIE, M.; TAN, W. W. Towards an efficient type-reduction method for interval type-2 fuzzy logic systems. *In: 2008 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (IEEE World Congress on Computational Intelligence)*. [*S.l.: s.n.*]: IEEE, 2008. 24, 59
- NISE, N. **Control Systema Engineering**. [*S.l.: s.n.*]: John Wiley & Sons, Inc., 2011. 35, 36, 82
- PAPOULIS, A. **Probability, random variables, and stochastic processes**. [*S.l.: s.n.*]: McGraw-Hill Kogakush, 2002. 583 p. ISBN 9780070486584. 128, 129
- PEDRYCZ, W. **Fuzzy sets engineering: CRC**. [*S.l.: s.n.*]: FL Boca Raton, 1995. 54

- PIRES, D.; SERRA, G. An approach for fuzzy kalman filter modeling based on evolving clustering of experimental data. **Journal of Intelligent & Fuzzy Systems**, IOS Press, v. 35, n. 2, p. 1819–1834, Aug 2018. ISSN 1064-1246. 29, 76
- PIRES, D. S. **Metodologia para Modelagem de Filtros de Kalman Nebulosos Evolutivos de Realização Mínima no Espaço de Estados Via Dados Experimentais**. 2018. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Maranhão, 2018. 25, 61
- PIRES, D. S.; SERRA, G. L. Methodology for modeling fuzzy kalman filters of minimum realization from evolving clustering of experimental data. **ISA Transactions**, Elsevier BV, v. 105, p. 1–23, oct 2020. 62, 63, 76
- PRATAMA, M. *et al.* An incremental learning of concept drifts using evolving type-2 recurrent fuzzy neural networks. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 25, n. 5, p. 1175–1192, oct 2017. 66, 76
- QIN, P.; ZHAO, T.; DIAN, S. Interval type-2 fuzzy neural network-based adaptive compensation control for omni-directional mobile robot. **Neural Computing and Applications**, Springer Science and Business Media LLC, v. 35, n. 16, p. 11653–11667, fev. 2023. ISSN 1433-3058. 67
- RIGATOS, G.; SIANO, P. Fuzzy kalman filter validation using the local statistical approach. **Intelligent Industrial Systems**, Springer Science and Business Media LLC, v. 1, n. 1, p. 15–28, may 2015. 25
- RODRIGUES, F. P. S.; SILVA, A. M.; LEMOS, A. P. Evolving fuzzy predictor with multivariable gaussian participatory learning and multi-innovations recursive weighted least squares: eFMI. **Evolving Systems**, Springer Science and Business Media LLC, fev 2022. 67
- RODRIGUES, S. E.; SERRA, G. L. de O. An approach for evolving neuro-fuzzy forecasting of time series based on parallel recursive singular spectrum analysis. **Fuzzy Sets and Systems**, Elsevier BV, v. 443, p. 1–29, ago. 2022. ISSN 0165-0114. 25, 27
- SANTOS, J. A.; SERRA, G. L. O. Recursive identification approach of multivariable nonlinear dynamic systems based on evolving fuzzy hammerstein models. *In: 2018 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. [S.l.: s.n.]: IEEE, 2018. 29, 76
- SANTOS, J. D. A.; BARRETO, G. A. Novel sparse LSSVR models in primal weight space for robust system identification with outliers. **Journal of Process Control**, Elsevier BV, v. 67, p. 129–140, jul 2018. 67
- SERRA, G.; BOTTURA, C. An IV-QR algorithm for neuro-fuzzy multivariable online identification. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 15, n. 2, p. 200–210, apr 2007. 22, 25, 26, 28, 29, 67
- SERRA, G.; BOTTURA, C. Fuzzy instrumental variable approach for nonlinear discrete-time systems identification in a noisy environment. **Fuzzy Sets and Systems**, Elsevier BV, v. 160, n. 4, p. 500–520, fev 2009. 26, 27, 28, 61, 62, 63, 76, 78, 80, 83
- SERRA, G. L. (ed.). **Frontiers in Advanced Control Systems**. [S.l.: s.n.]: InTech, 2012. 115
- SERRA, G. L. de O. (ed.). **Kalman Filters - Theory for Advanced Applications**. [S.l.: s.n.]: InTech, 2018. 115

SERRA, G. L. O. **Propostas de metodologias para identificação e controle inteligentes**. 2005. Tese (Doutorado) — UNICAMP, 2005. 26, 78, 86

SEVERIANO, C. A. *et al.* Evolving fuzzy time series for spatio-temporal forecasting in renewable energy systems. **Renewable Energy**, Elsevier BV, v. 171, p. 764–783, jun. 2021. ISSN 0960-1481. 23

SHUMWAY, R. H.; STOFFER, D. S. **Time Series Analysis and Its Applications: With R Examples**. [S.l.: s.n.]: Springer, 2017. 131

SODERSTROM, T.; STOICA, P. Instrumental variable methods for system identification. **Circuits, Systems, and Signal Processing**, Springer Science and Business Media LLC, v. 21, n. 1, p. 1–9, jan 2002. 23, 26, 28, 42, 43, 44, 67

SOUZA, P. V. de C.; LUGHOFER, E. Efmn-nulluni: An evolving fuzzy neural network based on null-uniform. **Fuzzy Sets and Systems**, Elsevier BV, v. 449, p. 1–31, nov. 2022. ISSN 0165-0114. 23

SUBRAMANIAN, R. G.; ELUMALAI, V. K. Robust MRAC augmented baseline LQR for tracking control of 2 DoF helicopter. **Robotics and Autonomous Systems**, Elsevier BV, v. 86, p. 70–77, dec 2016. 101

SUN, J. *et al.* A self-evolving fuzzy system online prediction-based dynamic multi-objective evolutionary algorithm. **Information Sciences**, Elsevier BV, v. 612, p. 638–654, out. 2022. ISSN 0020-0255. 23, 67

TAHAMIPOUR-Z., S. M.; AKBARZADEH-T., M.-R.; BAGHBANI, F. Interval type-2 generalized fuzzy hyperbolic modelling and control of nonlinear systems. **Applied Soft Computing**, Elsevier BV, v. 123, p. 108859, jul. 2022. ISSN 1568-4946. 24

TORRES, L. M. M.; SERRA, G. L. O. State-space recursive fuzzy modeling approach based on evolving data clustering. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, Springer Nature, v. 29, n. 4, p. 426–440, jun 2018. 20, 25, 29, 76

TUNG, S.; QUEK, C.; GUAN, C. eT2fis: An evolving type-2 neural fuzzy inference system. **Information Sciences**, Elsevier BV, v. 220, p. 124–148, jan 2013. 24, 66

UMULIS, D. M.; OTHMER, H. G. The role of mathematical models in understanding pattern formation in developmental biology. **Bulletin of Mathematical Biology**, Springer Science and Business Media LLC, v. 77, n. 5, p. 817–845, oct 2014. 27

VAUTARD, R.; YIOU, P.; GHIL, M. Singular-spectrum analysis: A toolkit for short, noisy chaotic signals. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier BV, v. 58, n. 1–4, p. 95–126, set. 1992. ISSN 0167-2789. 70

WANG, H.; LUO, C.; WANG, X. Synchronization and identification of nonlinear systems by using a novel self-evolving interval type-2 fuzzy LSTM-neural network. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, Elsevier BV, v. 81, p. 79–93, may 2019. 24

WANG, L.-X. **A Course in Fuzzy Systems and Control**. [S.l.: s.n.]: PRENTICE HALL, 1996. ISBN 0135408822. 22, 25, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 56, 57, 62, 63, 83

- WEI, C. *et al.* A t–s fuzzy model identification approach based on evolving MIT2-FCRM and WOS-ELM algorithm. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, Elsevier BV, v. 92, p. 103653, jun 2020. 67
- WOZNIAK, M. *et al.* 6g-enabled IoT home environment control using fuzzy rules. **IEEE Internet of Things Journal**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 8, n. 7, p. 5442–5452, apr 2021. 25
- WU, D.; MENDEL, J. Enhanced karnik–mendel algorithms. **IEEE Trans. Fuzzy Syst.**, Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), v. 17, n. 4, p. 923–934, aug 2009. 59
- WU, H.; MENDEL, J. M. Introduction to uncertainty bounds and their use in the design of interval type-2 fuzzy logic systems. *In: 10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems. (Cat. No.01CH37297)*. [S.l.: s.n.]: IEEE, 2002. 24, 59
- YAN, Y. *et al.* Optimal fuzzy event-triggered fault-tolerant control of fractional-order nonlinear stochastic systems. **Information Sciences**, Elsevier BV, v. 678, p. 120877, set. 2024. ISSN 0020-0255. 25
- YIN, Y.; SHENG, Y.; QIN, J. Interval type-2 fuzzy c-means forecasting model for fuzzy time series. **Applied Soft Computing**, Elsevier BV, v. 129, p. 109574, nov. 2022. ISSN 1568-4946. 24
- YOUNG, P. C. **Recursive Estimation and Time-Series Analysis**. 2. ed. [S.l.: s.n.]: Springer, 2011. 44, 67
- ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - 1. **Information Sciences**, v. 8x, p. 199–249, 1975. 24, 29, 48
- ZDEŠAR, A.; DOVŽAN, D.; ŠKRJANC, I. Self-tuning of 2 DOF control based on evolving fuzzy model. **Applied Soft Computing**, Elsevier BV, v. 19, p. 403–418, jun 2014. 64, 101
- ZHANG, X. *et al.* Observer-based command filtered adaptive fuzzy control for fractional-order mimo nonlinear systems with unknown dead zones. **Expert Systems with Applications**, Elsevier BV, v. 255, p. 124623, dez. 2024. ISSN 0957-4174. 25
- ZHAO, Z.; LI, J. Identification of continuous stirred tank reactor based on PCA-interval type-2 fuzzy logic system method. **Procedia Computer Science**, Elsevier BV, v. 183, p. 230–236, 2021. 24
- ÖZTÜRK, M.; ÖZKOL, İ. Comparison of self-tuned neuro-fuzzy controllers on 2 DOF helicopter: an application. **SN Applied Sciences**, Springer Science and Business Media LLC, v. 3, n. 1, jan 2021. 67

APÊNDICE A – CONCEITOS SOBRE MATRIZES E VETORES

A.1 Conceitos Básicos

Definição A.1: Matriz Nilpotente: Uma matriz quadrada de ordem n é considerada uma matriz nilpotente se existe um número natural q tal que $\mathbf{A}^q = \mathbf{0}$, em que $\mathbf{0}$ representa a matriz nula. O menor número natural que satisfaz a igualdade $\mathbf{A}^q = \mathbf{0}$ é denominado o índice de nilpotência da matriz \mathbf{A} .

Definição A.2: Ortogonalidade: Seja dois vetores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Esses vetores são *ortogonais* se $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$. Para o caso estocástico, a condição de ortogonalidade é $E[\mathbf{x}^T \mathbf{y}] = 0$.

APÊNDICE B – PROPRIEDADES ASSINTÓTICAS DE ESTIMADORES

Propriedades Assintóticas são propriedades estatísticas que variam à medida que o número de observações tende a infinito, ou seja $N \rightarrow \infty$ (Aguirre, 2007). Propriedades estatísticas que não dependem o número de dados são chamadas de propriedades para pequenas amostras.

Propriedades de um estimador verificadas para o caso de pequenas amostras também são validas para o caso assintótico. Entretanto o caso contrário não é necessariamente verdadeiro (Aguirre, 2007).

Definição B.1: Se a distribuição de probabilidade de um determinado estimador variar à medida que $N \rightarrow \infty$, então a distribuição para a qual ela tende será a distribuição assintótica.

Definição B.2: A *média assintótica* de $\hat{\theta}(N)$ é definida como

$$\text{média}_A(\hat{\theta}(N)) = \lim_{N \rightarrow \infty} E [\hat{\theta}(N)] \quad (\text{B.1})$$

Definição B.3: A polarização de um estimador qualquer $\hat{\theta}(N)$ é definida como

$$\mathbf{b}_a = \lim_{N \rightarrow \infty} E [\hat{\theta}(N)] - \theta \quad (\text{B.2})$$

Definição B.4: Limite de probabilidade: Diz-se que $\hat{\theta}(N)$ tende em probabilidade para θ , ou seja, $\text{plim} [\hat{\theta}(N)] = \theta$, se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Prob} [|\hat{\theta}(N) - \theta| < \epsilon] > 1 - \eta, N > N_0 \quad (\text{B.3})$$

onde $0 < (\epsilon, \eta) \ll 1$. A seguir são apresentadas algumas propriedades o limite de probabilidade.

Propriedade B.1: Seja duas matrizes A e B de dimensões compatíveis e funções das mesmas variáveis aleatórias. Então

$$\text{plim} [AB] = \text{plim} [A] \text{plim} [B] \quad (\text{B.4})$$

Propriedade B.2:

$$\text{plim} \left[\frac{1}{N} \mathbf{e} \Psi^T \right] = \mathbf{c} \quad (\text{B.5})$$

sendo \mathbf{c} um vetor. Se \mathbf{e} for estacionário, então \mathbf{c} é o vetor que contem os índices de de correlação entre \mathbf{e} e as colunas de Ψ .

APÊNDICE C – PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Neste apêndice será apresentado alguns conceitos básicos sobre processos Estocásticos e estacionaridade. Estes conceitos auxiliam no entendimento dos estudos realizados nesta tese e do problema alvo. Para mais detalhes, consultar as seguintes referências: Albuquerque e Fortes (2008), Papoulis (2002).

Definição C.1: *variável aleatória*: Uma variável aleatória é uma função que mapeia os resultados de um espaço amostral para valores numéricos. Formalmente, seja Ω o espaço amostral de um experimento aleatório, e seja X uma variável aleatória. Então, $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ é uma função que atribui um valor real $X(\omega)$ para cada elemento $\omega \in \Omega$.

Existem dois tipos principais de variáveis aleatórias:

- **Variável Aleatória Discreta:** Se o conjunto dos possíveis valores de X for finito ou enumerável, a variável é chamada de variável aleatória discreta. Neste caso, a função de probabilidade discreta $P(X = x)$ associa a probabilidade de ocorrer cada valor específico x .
- **Variável Aleatória Contínua:** Se o conjunto dos possíveis valores de X é um intervalo contínuo de números reais, a variável é chamada de variável aleatória contínua. Neste caso, a função de densidade de probabilidade $f(x)$ fornece a probabilidade de a variável assumir um valor dentro de um intervalo específico.

Definição C.2: *vetor aleatório*: O vetor aleatório \mathbf{X} uma função vetorial que mapeia cada resultado $\omega \in \Omega$ em um vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ de n valores reais, onde $x_i = X_i(\omega)$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Definição C.3: *Processo Estocástico*: Um processo estocástico, também conhecido como processo aleatório, é uma coleção de variáveis aleatórias indexadas por um parâmetro, geralmente o tempo. Formalmente, um processo estocástico é definido como uma família de variáveis aleatórias $X|_k$, $k \in T$, onde $X|_k$ é a variável aleatória associada ao instante de tempo k . O conjunto T é chamado de conjunto de índices ou espaço de índices, podendo este ser discreto ou contínuo, de acordo com a natureza do processo estocástico.

- Se T é discreto (conjunto finito ou enumerável), o processo estocástico é denominado de processo estocástico discreto no tempo.
- Se T é contínuo (intervalo contínuo de números reais), o processo estocástico é denominado de processo estocástico contínuo no tempo.

Deste modo, pode-se dizer que um processo estocástico é um conjunto de variáveis aleatórias, que supõem-se definidas e num espaço de probabilidade. Matematicamente, um processo estocástico é uma função $x(k, \omega_j)$, $j = 1, 2, \dots$ é o valor na j -ésima variável aleatória em cada instante de tempo k

$$x : \begin{array}{l} \Omega \rightarrow \mathbb{F} \\ \omega \rightarrow x(k, \omega) \end{array} \quad (\text{C.1})$$

C.1 Especificações de Processos Estocásticos

Seja um processo estocástico $x(k)$, cujo valor do parâmetro k está fixo, obtendo-se uma variável aleatória $x|_k$. Para esta variável estão associada uma função de probabilidade $F_{x|_k}(\mathbf{X})$ e, conseqüentemente, uma função de densidade de probabilidade $p_{x|_k}(\mathbf{X})$ (Papoulis, 2002; Albuquerque; Fortes, 2008). Nestes termos, segue algumas definições importantes:

Definição C.4: Especificação de 1ª de um processo estocástico – Um processo estocástico é determinado de até primeira ordem se a função de densidade de probabilidade $p_{x|_k}(\mathbf{X})$ é conhecida para qualquer valor de k .

Definição C.5: Especificação de 2ª de um processo estocástico – Um processo estocástico é determinado de até segunda ordem se a função de densidade de probabilidade conjunta $p_{x_1|_k, x_2|_k}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ é conhecida.

Definição C.6: Especificação de ordem m de um processo estocástico – Um processo estocástico é determinado de até a ordem m se a função de densidade de probabilidade conjunta $p_{x_1|_k, x_2|_k, \dots, x_m|_k}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m)$ é conhecida.

C.2 Momentos de Processos Estocásticos

Os momentos de um processo estocástico são medidas estatísticas que fornecem informações sobre a distribuição de probabilidade dos seus valores. Eles são importantes para descrever as características do processo e são frequentemente usados na análise e modelagem estatística. Os momentos mais maior importância para tese são descritos a seguir:

Definição C.7: Valor Esperado (média) de um processo estocástico – A média de um processo estocástico $\mathbf{X} = \{x, k\}$ é definida como a média da variável aleatória $x(k)$ associada a um instante k , ou seja,

$$M(x(k)) = E[x(k)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(k) p_{x(k)} dx(k), \quad k \in N \quad (\text{C.2})$$

Definição C.8: Autocorrelação de um processo estocástico – a função de autocorrelação de um processo estocástico $x(k)$, representada por $R(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$, é definida como a correlação entre as variáveis aleatória \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 associadas a quaisquer valores de k , tal que

$$R(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = E[\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2], \quad k \in N \quad (\text{C.3})$$

Definição C.9: Autocovariância de um processo estocástico – a função de autocovariância de um processo estocástico $x(k)$, representada por $C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$, é definida como a covariância entre as variáveis aleatória \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 associadas a quaisquer valores de k , tal que

$$C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = E[(\mathbf{X}_1 - M(x(k)))(\mathbf{X}_2 - M(x(k)))], \quad k \in N \quad (\text{C.4})$$

C.3 Estacionaridade de Processos Estocásticos

Definição C.10: Estacionaridade de um processo estocástico de ordem m – um processo estocástico $x(k)$ é dito estacionário de ordem m quando a função de densidade conjunta não se altera com o deslocamento no tempo, ou seja,

$$p_{x_1|k, \dots, x_m|k}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m) = p_{x_1|k+\tau, \dots, x_m|k+\tau}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m), \quad \forall \tau \quad (\text{C.5})$$

Definição C.11: Estacionariedade no sentido estrito (ou estacionariedade forte) – Um processo estocástico é estritamente estacionário se todas as suas variáveis aleatórias têm a mesma distribuição de probabilidade e se as distribuições conjuntas de qualquer conjunto finito de variáveis aleatórias são invariantes com relação a qualquer deslocamento temporal.

Definição C.12: Estacionariedade no sentido fraco (ou estacionariedade fraca) – Um processo estocástico é fracamente estacionário se a média e a função de autocovariância (ou autocorrelação) entre as variáveis aleatórias são constantes ao longo do tempo, ou seja, não dependem do instante de tempo em si.

C.4 Sistemas Dinâmicos Estacionários

Seja um sistema dinâmico estocástico, definido por

$$\mathbf{x}|_k = f(\mathbf{x}|_{k-1}, \mathbf{u}|_{k-1}) + \text{erro}|_k \quad (\text{C.6})$$

onde $\mathbf{x}|_{k-1}$, \mathbf{u} são os estados e entradas do sistema, respectivamente, e $\text{erro}|_k$ é o erro estocástico no instante k . Um sistema dinâmico é dito estacionário se suas propriedades estatísticas não

dependem do instante de tempo absoluto. Em outras palavras, um sistema dinâmico estacionário possui as mesmas características estatísticas ao longo do tempo. Matematicamente, um sistema dinâmico estacionário é definido por duas propriedades:

- **Média Constante:** O valor esperado do sistema dinâmico estocástico é constante para todo instante k

$$E[\mathbf{x}|_k] = \zeta \quad (\text{C.7})$$

onde ζ é uma constante.

- **Autocovariância Constante:** A função de autocovariância do processo \mathbf{x} depende apenas da diferença de tempo $\tau = k - s$ e não do instante de tempo k ou s em si. Em outras palavras, para qualquer t e s , a autocovariância é igual a função de autocovariância deslocada

$$C(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_s) = C(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{k-\tau}) \quad (\text{C.8})$$

C.5 Sistemas Dinâmicos Não-Estacionários

Definição C.13: Um sistema dinâmico não-estacionário é um tipo de processo estocástico cujas propriedades estatísticas variam ao longo do tempo (Morettin, 2006; Shumway; Stoffer, 2017). Em contraste com os sistemas dinâmicos estacionários, os sistemas não-estacionários não possuem uma média constante ou uma função de autocovariância constante. Portanto, um sistema dinâmico não-estacionário pode apresentar tendências, variações sazonais ou mudanças estruturais ao longo do tempo, o que torna sua análise e modelagem mais complexas em comparação com sistemas estacionários.