



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Programa de Pós-Graduação em Física

Maurício Antônio Coutinho Soares

**Colisões Kink-Antikink no Modelo ϕ^4 na
Presença de Impureza**

São Luís - MA

2024

Maurício Antônio Coutinho Soares

Colisões Kink-Antikink no Modelo ϕ^4 na Presença de Impureza

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Maranhão.

Programa de Pós-Graduação em Física
Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Fabiano de Carvalho Simas

São Luís - MA

2024

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Soares, Maurício Antônio Coutinho.

Colisões kink-antikink no modelo ϕ^4 na presença de impureza / Maurício Antônio Coutinho Soares. - 2024.
50 f.

Orientador(a): Fabiano de Carvalho Simas.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Física/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luis, 2024.

1. Defeitos Topológicos. 2. Modelo ϕ^4 . 3. Impurezas. 4. Colisões. 5. Paredes Espectrais. I. Simas, Fabiano de Carvalho. II. Título.

Maurício Antônio Coutinho Soares

Colisões Kink-Antikink no Modelo ϕ^4 na Presença de Impureza

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Maranhão.

São Luís - MA, 09 de Abril de 2024

Prof. Dr. Fabiano de Carvalho Simas

Orientador

Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Carlos Eduardo da Hora Santos

Examinador Interno

Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Matheus Araújo Marques

Examinador Externo

Universidade Federal da Paraíba

São Luís - MA

2024

*Aos meus imprescindíveis amigos
à minha família
e acima de tudo, a Deus.*

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha mais profunda gratidão a Deus por me guiar ao longo desta jornada. À minha família - minha mãe, Camila de Lélis Coutinho Soares, meu avô, Milton Antônio Soares, e minha avó, Hildene Coutinho Soares - pelo apoio e encorajamento inabaláveis.

Também sou imensamente grato ao meu orientador, Prof. Dr. Fabiano de Carvalho Simas, por sua orientação, paciência e expertise inestimáveis. À CAPES pela concessão da bolsa, que me possibilitou a realização deste trabalho.

Um agradecimento especial aos meus queridos amigos Ana Beatriz Aranha Rodrigues, Lucas Gois Tavares, Denner Cássio Albuquerque, Henrique Silva Dias, Bruno Ribeiro Botelho, Mariana Viegas, Ronald de Araújo Pereira e Jhonnatan Gomes Pereira por sua amizade, incentivo e compreensão.

Este trabalho não teria sido possível sem o apoio e encorajamento de todas essas pessoas maravilhosas. Agradeço do fundo do meu coração.

"Aprendizagem nunca esgota a mente."

(Leonardo da Vinci)

Resumo

Nesta dissertação, realizamos a análise teórica de campos escalares em física, estudamos também a equação de Bogomol'nyii-Prasad-Somerfeld, utilizada para obter a solução da equação de movimento, além do estudo de defeitos topológicos. A análise do modelo ϕ^4 , a partir das colisões do par *kink-antikink*, gerou diversos resultados como janelas de *two-bounce* e *bions*. No cerne do trabalho, realizamos o acoplamento do modelo ϕ^4 com a impureza σ_j , cujo efeito pode ser controlado através da amplitude. Tal acoplamento leva a fenômenos conhecidos como parede espectral (spectral walls), que gera atração sob o par, e parede de vácuo (vacuum wall), que gera uma repulsão sob o par, e influenciam a ação do par *kink-antikink*. Como consequência, novos resultados são observados, como por exemplo, o armadilhamento entre as paredes. Tais paredes funcionam como uma barreira na evolução do par, onde a parede espectral surge onde o modo de oscilação do *kink* entra no espectro contínuo, e a parede de vácuo surge onde está localizado o vácuo do modelo original.

Palavras-chave: Defeitos topológicos, modelo ϕ^4 , impurezas, colisões, paredes espectrais e paredes de vácuo.

Abstract

In this dissertation, we conduct a theoretical analysis of scalar fields in physics. We also study the Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield equation, which is used to obtain the solution to the equation of motion, in addition to the study of topological defects. An analysis of the ϕ^4 model was performed based on collisions of the *kink-antikink* pair, generated various results such as two-bounce windows and bions. At the core of the work, we couple the ϕ^4 model with the impurity σ_j , whose effect can be controlled through its amplitude. Such coupling leads to different phenomena, known as *spectral walls*, which attract the pair, and vacuum walls, which repel the pair, influencing the action of the *kink-antikink* pair. As a result, new outcomes are observed, such as trapping between the walls. These walls act as a barrier in the pair's evolution, where the spectral wall arises when the *kink's* oscillation mode enters the continuous spectrum, and the vacuum wall arises where the vacuum of the original model is localized.

Keywords: Topological defects, ϕ^4 model, impurities, collisions, spectral walls and vacuum walls.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Potencial para o modelo ϕ^4	21
Figura 2 – Kink e Antikink, respectivamente, do modelo ϕ^4 para $\lambda = a = 1$ e $x_0 = 0$	22
Figura 3 – Kink e Antikink com velocidade v	25
Figura 4 – Evolução do campo no espaço-tempo para $v = 0.4$	26
Figura 5 – Campo escalar no centro de massa $\phi(0, t)$ para (a) $v = 0.18$ e (b) $v = 0.222$	27
Figura 6 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(0, t)$ em função do tempo, com $v = 0.2386$ e (b) a evolução do campo no espaço-tempo	27
Figura 7 – Campo escalar no centro de massa $\phi(0, t)$ em função do tempo com (a) $v = 0.193$, (b) $v = 0.2286$ e (c) $v = 0.2382$	28
Figura 8 – Campo escalar no centro de massa $\phi(0, t)$ para (a) $v = 0.223$ e (b) $v = 0.249$	29
Figura 9 – Estrutura de ressonância do modelo ϕ^4	30
Figura 10 – Soluções BPS para vários valores (-2 a 5) da coordenada do espaço modular X para $j = 1$	35
Figura 11 – Comportamento da frequência (ω_n) em função de ϕ_0	38
Figura 12 – Evolução do campo no espaço-tempo para $A_2 = 0.0102$	40
Figura 13 – Para $A_2 = 0.0109$ (a) campo escalar no centro de massa em função do tempo e (b) Evolução do campo no espaço-tempo	40
Figura 14 – Para $A_2 = 0.00983$ Campo escalar no centro de massa em função do tempo e (b) Evolução do campo no espaço-tempo interagindo com a parede de vácuo	41
Figura 15 – Campo escalar no centro de massa $\phi(0, t)$ em função do tempo para (a) $A_2 = 0.00983$ e (b) $A_2 = 0.0090$	41
Figura 16 – Campo escalar no centro de massa $\phi(0, t)$ para $A_2 = 0.0090$ (preto) até $A_2 = 0.0125$ (amarelo), e o caso $A_2 = 0$ (linha tracejada)	42
Figura 17 – Campo escalar no centro de massa $\phi(0, t)$ para $A_2 = 0.0175$ (preto) até $A_2 = 0.0205$ (amarelo). Com a parede de vácuo em $\phi(0, t) = -1$ e a parede espectral em $\phi(0, t) = -0.013$	43
Figura 18 – Campo escalar no centro de massa $\phi(0, t)$ para $A_2 = 0.018246$	43

Lista de tabelas

Tabela 1 – 8 primeiras janelas de <i>Two-bounce</i> para o modelo ϕ^4	28
--	----

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	CAMPOS ESCALARES	14
2.1	Conceitos fundamentais	14
2.2	Formalismo BPS	15
2.3	Estabilidade Linear	18
2.4	Defeitos Topológicos	20
2.5	Exemplos de Defeitos Topológicos	21
3	COLISÕES DO MODELO ϕ^4	24
4	PAREDES ESPECTRAIS	32
4.1	Colisões	38
5	CONCLUSÃO	44
	REFERÊNCIAS	46

1 Introdução

O estudo dos defeitos topológicos, que são irregularidades ou descontinuidades que surgem em sistemas físicos devido à estrutura topológica do espaço em que o sistema está definido, abrange uma ampla gama de fenômenos físicos, desde a física de partículas, matéria condensada, até a cosmologia [1]. Alguns exemplos de defeitos podem ser vistos em bioquímica, que fornece informações sobre o DNA, nos quais padrões de enovelamento e dobramento podem gerar configurações estáveis que não podem ser desfeitas sem a quebra de ligações químicas [2]. Além disso, são considerados como um dos candidatos à matéria escura [3]. As colisões de defeitos topológicos são especialmente relevantes em sistemas físicos descritos por equações não lineares, onde *kinks* e *antikinks*, surgem como soluções estáveis localizadas em equações de campo não-lineares unidimensionais, onde o campo transita suavemente entre dois valores constantes em diferentes regiões do espaço. Na matéria condensada, por exemplo, a colisão dessas soluções pode afetar propriedades magnéticas e elétricas [4], enquanto na cosmologia, esses eventos podem ter ocorrido durante fases primordiais do universo [5], influenciando a evolução do cosmos e deixando vestígios observáveis nos padrões cosmológicos atuais. O entendimento desses processos é crucial para explorar a dinâmica não-linear dos campos e suas consequências em diferentes escalas físicas.

O processo de interação entre um par *kink-antikink* vem sendo estudado ao longo dos últimos anos. Embora *kinks* e *antikinks* sejam os defeitos mais simples, interessantes resultados foram observados. Dentre os modelos mais estudados, se destaca o ϕ^4 , onde a variação da velocidade inicial leva a aniquilação ou espalhamento do par [6, 7]. Para elevados valores de velocidade, o par *kink-antikink* se aproxima, colide uma única vez e se separa da atração mútua. Em contra partida, para baixas velocidades dos *kinks*, o escape não é possível e o par continua interagindo até sua aniquilação. Além disso, quando são inseridas velocidades intermediárias, um comportamento conhecido como *two-bounce* pode ser observado. Este corresponde a interação do par por duas vezes antes da completa separação. A explicação para esse comportamento se dá por um mecanismo de troca de energia entre os modos vibracional e translacional.

O modelo ϕ^4 é um dos modelos mais importantes em teoria de campos, sendo usado em diversos ramos da física teórica para descrever uma variedade de fenômenos físicos, como transições de fase, defeitos topológicos, e interações de partículas [8]. Neste modelo, um campo escalar ϕ é descrito por um potencial que contém termos até a quarta potência do campo, daí o nome ϕ^4 [6]. O potencial de interação é dado por $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4$, onde m é a massa do campo e λ é uma constante de acoplamento que determina a intensidade da interação não linear. A colisão deste modelo por si só já pode levar a

diversos resultados, como a formação de *bions*, onde os *kinks* se ligam e oscilam em torno de um ponto comum; o fenômeno de *two-bounce*, onde os *kinks* colidem, se afastam e depois retornam para uma segunda colisão; além de oscilações complexas e a formação de estruturas intrincadas que podem ser observadas em simulações numéricas e experimentos de física teórica, contribuindo para o entendimento de processos não lineares e dinâmicas de sistemas de defeitos topológicos.

Vários fenômenos surgem ao estudarmos essas interações e, dentre eles, um que podemos destacar são as *paredes espectrais*, que podem surgir em modelos onde impurezas são introduzidas. Para entender o que são paredes espectrais, primeiro precisamos entender alguns conceitos básicos.

Imagine que temos um campo, que é uma quantidade que pode variar em diferentes pontos do espaço. Exemplos desses campos incluem o campo elétrico, magnético ou até mesmo campos associados a partículas subatômicas. Agora, vamos pensar em um tipo específico, chamado campo escalar, que é um tipo simples de campo que possui apenas um número (um valor) em cada ponto do espaço. Por exemplo, a temperatura em cada ponto pode variar: em alguns lugares pode estar mais quente, enquanto em outros pode estar mais fria. Em certos sistemas físicos, um campo escalar pode exibir uma propriedade conhecida como simetria discreta, que permite ao campo adotar um número finito de valores distintos, em vez de variar continuamente. Quando essa simetria discreta é quebrada, ou seja, quando o sistema passa por uma transição que elimina essa propriedade, podem surgir as chamadas paredes espectrais. Essas paredes são pontos no espaço onde o campo escalar faz uma transição entre dois valores diferentes, funcionando como uma fronteira entre duas regiões com valores diferentes do campo [8].

Para visualizar melhor, imagine um campo escalar que representa a magnetização de pequenos ímãs em um material. Antes da quebra de simetria, todos os ímãs estão alinhados na mesma direção, indicando uma configuração uniforme de magnetização. Após a quebra de simetria, causada por mudanças nas condições externas, como temperatura ou campo magnético, a uniformidade é interrompida, e alguns ímãs podem alinhar-se em direções diferentes. Isso resulta na formação de regiões onde a orientação magnética muda abruptamente, criando estruturas conhecidas como paredes espectrais [3].

No presente trabalho, parede espectral é definida como o ponto no qual o modo de oscilação do *kink* entra no espectro contínuo. Além deste fenômeno, surgem também as chamadas paredes de vácuo, que é uma parede que corresponde a um dos valores de vácuo do modelo original. Essa mudança gera diversas interações novas, pois a parede espectral interage diretamente com os sólitons, permitindo que alguns passem, outros fiquem presos e outros sejam refletidos.

O modelo que estudaremos é chamado de modelo de impureza auto-dual ou modelo com campo de fundo. Ele nos permite desligar completamente a força estática entre os

kinks, o que facilita muito a análise. Para baixas velocidades, o processo de aniquilação é descrito por meio da aproximação da geodésica no espaço modular, que descreve o comportamento de certas trajetórias no espaço de configuração semelhantes às geodésicas. Para velocidades maiores, a aniquilação é explicada pela teoria de perturbação linear, onde a cada distância entre os defeitos existe uma solução estática que representa um par *kink-antikink* [9].

No Capítulo 2, estudamos os de campos escalares em (1+1) dimensões. Em seguida, obtemos as equações de movimento e mostramos como o método Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) reduz a ordem das equações de movimento (equações diferenciais). Após isso, estudamos a estabilidade linear das soluções a partir da introdução de pequenas perturbações nas soluções estáticas. Também revisamos os conceitos por trás do estudo de defeitos topológicos e estudamos o defeito mais conhecido e amplamente estudado que é o modelo ϕ^4 . Onde, a partir do seu potencial, obtemos a solução da equação de movimento, sua energia e carga topológica. Além disso, este modelo é de extrema importância para o estudo de paredes espectrais utilizando o modelo com impureza auto-dual no Capítulo 4.

No Capítulo 3 realizou-se diversas colisões *kink-antikink* do modelo ϕ^4 . Além disso, examinou-se os diversos resultados que surgem nas colisões desse modelo, como por exemplo as janelas de *two-bounce*, a aniquilação e *one-bounce*. Tais estudos são fundamentais para entendermos a diferença entre o modelo ϕ^4 padrão e o modelo ϕ^4 acoplado com impurezas que é estudado posteriormente no trabalho.

No Capítulo 4 estudou-se um novo fenômeno: paredes espectrais, ou *spectral walls*. Tal fenômeno surgiu após o acoplamento do modelo ϕ^4 à impureza. Varias colisões foram realizadas variando o parâmetro que controla a "força" da impureza. Como esperado, vimos que para amplitude nula, o modelo ϕ^4 é recuperado. Além da parede espectral, surgiu outro fenômeno intrigante conhecido como parede de vácuo, ou *vacuum wall*, que tem esse nome pois surge onde o vácuo do modelo original está presente, e também influencia o par $K\bar{K}$. Devido a presença dessas paredes, o resultado das colisões foram muito diferentes das vistas no Capítulo 3. Além de surgir novos tipos de interação, outros fenômenos são ausentes, como as janelas de *two-bounce*.

As principais conclusões deste trabalho estão presentes no Capítulo 5.

2 Campos Escalares

No presente capítulo, estudaremos campos escalares em 1+1 dimensões. Na seção 2.1, abordaremos a equação de Euler-Lagrange e obteremos a equação de movimento. Em seguida, utilizaremos o método de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) e discutiremos a estabilidade linear das soluções estáticas. Por fim, apresentaremos o modelo ϕ^4 , modelo este que será útil para os estudos dos capítulos posteriores [10].

2.1 Conceitos fundamentais

Desde o surgimento do eletromagnetismo em meados do século XIX, foi abandonada a ideia de ação à distância, e as interações físicas passaram a ser descritas em termos de campos. Estes campos são os responsáveis por transmitir informações através do espaço. Podemos citar, por exemplo, os campos quânticos, quântico-relativístico e os campos clássicos [11]. Diversos sistemas físicos são descritos por tais campos, como o eletromagnetismo e a mecânica quântica [12]. Vale a pena citar os campos vetoriais, que associam vetores a cada ponto do espaço, e os espinoriais, que são usados para lidar com partículas que possuem uma propriedade chamada spin.

Os campos escalares diferenciam-se dos demais por descreverem quantidades que dependem apenas da posição no espaço, sem direção associada, sendo fundamentais na teoria de campos da física. Campos escalares são estudados em diversas áreas da física, incluindo mecânica quântica, cosmologia e física de partículas. Em modelos onde a quebra espontânea de simetria é possível, as equações de movimento podem admitir soluções que são conhecidas como defeitos topológicos [10].

Para os casos com um único campo escalar, este é descrito como

$$\phi = \phi(x^\mu), \quad (2.1)$$

onde x^μ é um quadrivetor no espaço de Minkowski [13].

A ação que descreve este sistema em 1+1 dimensões é dada por

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) dx dt, \quad (2.2)$$

em que \mathcal{L} é a densidade lagrangiana do sistema, que é uma função do campo e de suas derivadas. Um exemplo de densidade lagrangiana para um campo escalar real ϕ , é dada por [14]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.3)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial que depende do sistema físico que estamos considerando. Ele determinará o comportamento dinâmico do sistema, ou seja, a maneira como o campo em questão evolui ao longo do tempo e do espaço.

A partir da equação de Euler-lagrange [15] obtemos a equação de movimento dada por

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (2.4)$$

Tais soluções devem obedecer as seguintes condições de contorno

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = \phi_i, \quad (2.5)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{d\phi}{dx} = 0. \quad (2.6)$$

Tais limites garantem que a energia do sistema seja finita, pois estamos estabelecendo condições para que a densidade de energia do modelo seja nula nos limites de integração. E as soluções ainda devem satisfazer, assim como as soluções triviais, $\frac{dV(\phi_0)}{dx} = 0$ e $V(\phi_0) = 0$ [16].

Essa é a equação de movimento. Uma equação diferencial parcial de segunda ordem. Embora a obtenção da solução para essa equação seja complicada, podemos obter soluções não triviais a partir da configuração estática deste sistema. Neste caso, a equação (2.4) se torna

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}. \quad (2.7)$$

Para resolver esta equação, utilizaremos o método de quadratura, que tem como objetivo reduzir a ordem da equação [16]

$$\frac{d\phi}{dx} \frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{d\phi}{dx} \frac{dV}{d\phi}, \quad (2.8)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right) = \frac{dV(\phi)}{dx}. \quad (2.9)$$

Desta forma podemos facilmente integrar dos dois lados da equação

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = V(\phi) + C_1 \rightarrow \frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi) + C}. \quad (2.10)$$

onde $C = 2C_1$. Porém, para que a energia seja minimizada e, conseqüentemente, a solução seja estável, essa constante C deve ser nula.

2.2 Formalismo BPS

A formulação de Bogomol'nyi, frequentemente associada à equação de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS), é uma técnica importante na teoria de campos e na física de

partículas, especialmente no estudo de solitons e defeitos topológicos. Essa formulação simplifica a análise de certas equações diferenciais não lineares e permite a identificação de soluções estáveis e de menor energia. A Equação BPS é uma importante equação diferencial que surge em teorias de campo [17, 18]. Uma das características marcantes das soluções BPS é que elas minimizam a energia dentro de uma classe específica de configurações de campo. Isto é, para qualquer configuração que satisfaça as condições impostas pela equação de Bogomol'nyi, a energia associada será a menor possível. O que nos permite encontrar *kinks* que representam transições espaciais entre diferentes estados de mínima energia.

Começaremos estudando o tensor momento energia, que tem a seguinte forma [19]

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \eta_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - V(\phi) \right], \quad (2.11)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ representa a métrica de Minkowski, que é obtido a partir da lagrangiana usando a definição

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\partial_\nu\phi - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (2.12)$$

A densidade de energia vai ser a componente temporal deste tensor, novamente para configurações estáticas [16]

$$T_{00} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) = \rho(x). \quad (2.13)$$

Para obter a energia de uma dada configuração de campo, podemos simplesmente integrar a densidade de energia em todo o espaço. Para este caso, essa integração será dada por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] dx. \quad (2.14)$$

Dentre as possíveis soluções da equação acima, temos particular interesse nas chamados de *kinks* [16].

Considerando ainda os potenciais não-negativos, podemos escrever em termos do *superpotencial*

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2, \quad (2.15)$$

onde $W_\phi = \frac{dW}{d\phi}$ e $W(\phi)$ é chamado de superpotencial quando está associado a teorias supersimétricas [20].

O método BPS ainda nos possibilita escrever a energia para configurações estáticas. Utilizando a Eq. (2.15), podemos reescrever a Eq.(2.13) como

$$\rho(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \pm W_\phi \right)^2 \mp \frac{d\phi}{dx}W_\phi, \quad (2.16)$$

substituindo (2.16) em (2.14), obtemos

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \pm W_{\phi} \right)^2 dx \mp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{dx} W_{\phi} dx, \quad (2.17)$$

de forma que a energia seja mínima, o campo deve assumir

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_{\phi}. \quad (2.18)$$

Logo

$$E = \mp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{dx} W_{\phi} dx = \mp \left[[W]_{\phi \rightarrow \infty} - [W]_{\phi \rightarrow -\infty} \right] = |\Delta W|, \quad (2.19)$$

onde as equações de primeira ordem são chamadas de equações de Bogomol'nyi, e E é conhecida como energia de Bogomol'nyi [17]. Vale a pena destacar que as soluções fisicamente aceitáveis são aquelas cuja energia é finita.

Ainda podemos classificar as soluções a partir de suas características topológicas [21]. Para isso, introduziremos a *corrente topológica*, que é dada por

$$J^{\mu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \partial_{\nu} \phi, \quad (2.20)$$

onde $\epsilon^{\mu\nu}$ é o tensor de Levi-Civita em (1+1) dimensões e o fator $\frac{1}{2}$ é escolhido para que a divergência da corrente topológica (ou seja, $\partial_{\mu} J^{\mu}$ se comporte de maneira desejada. Como este tensor é antissimétrico, ou seja, $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$, percebemos que a corrente deve ser conservada: $\epsilon^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \phi = 0$.

Utilizando o componente temporal da corrente topológica, podemos determinar a carga. Inicialmente, é fundamental estabelecer essa componente, que corresponde precisamente à densidade da corrente topológica, assim temos

$$J^0 = \rho^0 = \frac{1}{2} \partial_0 \phi. \quad (2.21)$$

Sendo a *carga topológica* então a integral da densidade de carga topológica em todo o espaço

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (\epsilon^{01}) d\phi = \frac{1}{2} \phi(\infty) - \frac{1}{2} \phi(-\infty). \quad (2.22)$$

Neste caso, podemos ter duas soluções distintas: a primeira para $Q \neq 0$, que são para valores do campo diferentes nas extremidades $\phi(\infty) \neq \phi(-\infty)$. E a segunda, para $Q = 0$, que são para valores de campo iguais nas extremidades. A diferença fundamental entre elas é que a primeira conecta dois mínimos diferentes, são estas as soluções topológicas. E a segunda, são as soluções não topológicas que conectam um mínimo a um zero não-mínimo do potencial

A estabilidade das soluções topológicas será discutida a seguir.

2.3 Estabilidade Linear

Em um sistema de equações não-lineares, como o caso das soluções da equação de movimento, é necessário analisar a estabilidade da solução. Uma pequena perturbação em torno de uma solução estática pode levar a um comportamento complexo e imprevisível, se o sistema não for linearmente estável. Introduzindo tais perturbações em torno da solução estática, temos

$$\phi(x, t) = \phi_s(x) + \eta(x, t), \quad (2.23)$$

onde $\phi_s(x)$ é a solução *estática* e $\eta(x, t)$ representa uma pequena flutuação em torno da solução [16].

Substituindo (2.23) em (2.4), obtemos

$$\frac{\partial^2 \eta}{dt^2} - \frac{\partial^2 \eta}{dx^2} - \frac{d^2 \phi_s}{dx^2} + \left[\frac{dV}{d\phi} \right]_{\phi=\phi_s+\eta} = 0. \quad (2.24)$$

Expandindo $\frac{dV}{d\phi}$ em série de Taylor $V_\phi = V_\phi(\phi_s + \eta)$ e utilizando somente os termos de primeira ordem no parâmetro η , temos

$$\frac{dV}{d\phi} = \frac{\partial V(\phi_s + \eta)}{\partial \phi} = \frac{\partial V(\phi_s)}{\partial \phi} + \eta \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{\partial V}{\partial \phi} \right] = \frac{\partial V(\phi_s)}{\partial \phi} + \eta \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right]_{\phi=\phi_s+\eta}. \quad (2.25)$$

Substituindo (2.25) em (2.24)

$$\frac{\partial^2 \eta}{dt^2} - \frac{\partial^2 \eta}{dx^2} - \frac{d^2 \phi_s}{dx^2} + \frac{\partial V(\phi_s)}{\partial \phi} + \eta \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right]_{\phi=\phi_s+\eta} = 0. \quad (2.26)$$

Para o caso estático, ou seja, independente do tempo, sabemos que vale

$$-\frac{d^2 \phi_s}{dx^2} + \frac{\partial V(\phi_s)}{\partial \phi} = 0, \quad (2.27)$$

logo a nova equação de movimento (2.26) se torna

$$\frac{\partial^2 \eta}{dt^2} - \frac{\partial^2 \eta}{dx^2} + \eta \mathcal{V}(x) = 0, \quad (2.28)$$

onde $\mathcal{V}(x) = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right]_{\phi=\phi_s}$ é o potencial da equação diferencial acima.

Para começarmos a resolver esta equação diferencial, primeiramente fazemos $\eta = J(x)T(t)$, uma vez que η depende de t e x [22]. Desta forma, chega-se a seguinte equação

$$-\frac{1}{J(x)} \frac{d^2 J(x)}{dx^2} + \mathcal{V} = -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2}. \quad (2.29)$$

Como cada lado da equação depende de variáveis independentes uma da outra, podemos igualar toda a equação a uma constante de desacoplamento [23], que chamaremos de ω_n^2 .

Dessa forma a equação acima pode ser dividida em duas

$$-\frac{1}{J(x)} \frac{d^2 J(x)}{dx^2} + \mathcal{V} = \omega_n^2, \quad (2.30)$$

e

$$-\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \omega_n^2. \quad (2.31)$$

A equação (2.31) é do tipo oscilador harmônico [24, 25], cuja solução conhecida é dada por

$$T(t) = T_0 \cos(\omega t). \quad (2.32)$$

A eq. (2.30) é uma equação do tipo Schrödinger [26] e pode ser reescrita da forma

$$\widehat{H} J_n(x) = \omega_n^2 J_n(x), \quad (2.33)$$

onde

$$\widehat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + \mathcal{V}, \quad (2.34)$$

é o operador hamiltoniano. Notamos também que ω_n são os autovalores e J_n as autofunções de \widehat{H} [27]. Se tivermos $\omega_n^2 > 0$, então ω_n é real, logo a solução será estável. A solução também será estável para o caso $\omega_n^2 = 0$, porém com perturbação constante no tempo. Já para o caso $\omega_n^2 < 0$, então ω_n é imaginário e teremos uma solução instável. Desta forma a estabilidade só será garantida quando $\omega_n^2 \geq 0$. Quando $\omega_n = 0$, é chamado de modo zero [10, 14].

Uma forma de garantir que $\omega_n^2 \geq 0$ é verificando se \widehat{H} pode ser escrito como $\widehat{H} = \widehat{S}^\dagger \widehat{S}$ [27]. Começamos considerando potenciais que admitem a forma $V = \frac{1}{2} W_\phi^2$. Assim, obtemos

$$\widehat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{d\phi^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2 \right] = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{d\phi} \left(\frac{dW}{d\phi} \frac{d^2 W}{d\phi^2} \right). \quad (2.35)$$

Por fim, temos

$$\widehat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2 W}{d\phi} \frac{d^2 W}{d\phi^2} + \frac{dW}{d\phi} \frac{d^3 W}{d\phi^3} = -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi}. \quad (2.36)$$

Tal operador é conhecido como um hamiltoniano fatorável na mecânica quântica supersimétrica [28, 29]. Isso quer dizer que pode ser fatorado como

$$\widehat{H} = \widehat{S}^\dagger \widehat{S}, \quad (2.37)$$

onde

$$\widehat{S}^\dagger = -\frac{d}{dx} \pm [W_{\phi\phi}]_{\phi_s}, \quad (2.38)$$

e

$$\widehat{S} = \frac{d}{dx} \pm [W_{\phi\phi}]_{\phi_s}, \quad (2.39)$$

são operadores em que \widehat{S}^\dagger é o conjugado hermitiano de \widehat{S} . Uma vez que

$$\widehat{S}^\dagger \widehat{S} = -\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{d^2 W}{d\phi^2} \right)^2 + \frac{d^3 W}{d\phi^3} \cdot \frac{d\phi}{dx} = -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi}, \quad (2.40)$$

onde utilizamos (2.18).

Isso garante que \widehat{H} é positivo uma vez que é o produto de dois operadores que são mutualmente adjuntos [26, 27]. Podemos provar tal afirmação a partir da mecânica quântica calculando os valores esperados do operador \widehat{H}

$$\langle J_n | S^\dagger S | J_n \rangle = \langle J_n | \omega_n^2 | J_n \rangle \quad (2.41)$$

Com o operador identidade $I = \sum_m |J_m\rangle\langle J_m|$, obtemos

$$\langle J_n | J_n \rangle \omega_n^2 = \langle J_n | S^\dagger S | J_n \rangle \quad (2.42)$$

O que nos leva a

$$\omega_n^2 = \sum_m \langle J_m | S | J_n \rangle \langle J_m | S^\dagger | J_n \rangle = \sum_m |\langle J_m | S | J_n \rangle|^2 \geq 0 \quad (2.43)$$

Logo, para qualquer autoestado J_n do operador \widehat{H} , seu autovalor sempre será maior ou igual a zero. Desse modo, concluímos que sistemas com um campo escalar real descrito por potenciais não-negativos admitem soluções estáticas que minimizam a energia (soluções BPS) e são linearmente estáveis mediante pequenas perturbações.

2.4 Defeitos Topológicos

Os defeitos topológicos são observados em uma variedade de modelos que sofrem quebra espontânea de simetria, originando soluções clássicas das equações de movimento. Sua presença é evidente no estudo das transições de fase em materiais, abrangendo desde as mudanças de estado entre líquido e gás, como a formação de bolhas durante a ebulição [30], até as transições magnéticas em materiais ferromagnéticos [31]. Além disso, os defeitos topológicos têm implicações práticas em tecnologia de materiais, especialmente em relação a materiais topológicos com propriedades eletrônicas únicas [32].

Na cosmologia, a presença de defeitos topológicos, como cordas cósmicas e monopolos, podem deixar assinaturas observáveis na radiação cósmica de fundo e na distribuição de matéria no universo, fornecendo pistas importantes sobre a evolução do cosmos [1]. Já em teorias de campo de partículas, os defeitos topológicos podem surgir em transições de fase e influenciar a estrutura e interações das partículas fundamentais [33].

Nessa seção, estudaremos um modelo cujas soluções para as equações de movimento são chamadas de *soluções topológicas*. Como estudado anteriormente [6, 16], para que estas soluções surjam, o potencial precisa ser limitado inferiormente e tais teorias precisam apresentar mais de um estado de vácuo, ou seja, possuir mais de um mínimo [34].

2.5 Exemplos de Defeitos Topológicos

Modelo ϕ^4

O modelo ϕ^4 e outros modelos derivados já foram estudados abundantemente, como pode ser visto em [6, 35–38]. O potencial do modelo ϕ^4 é dado por

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2} (a^2 - \phi^2)^2, \quad (2.44)$$

onde λ é uma constante de acoplamento que controla a força da interação no modelo e a é uma constante que define a posição dos mínimos e máximos do potencial. Este potencial pode ser visto na Fig. 1, e apresenta mínimos em $\phi = \pm a$.

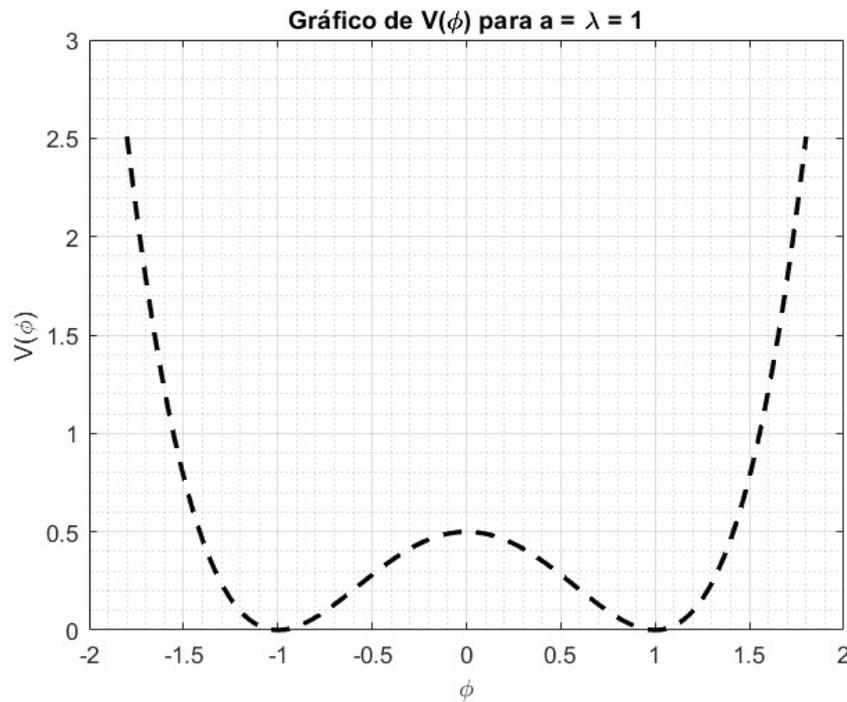


Figura 1 – Potencial para o modelo ϕ^4

Substituindo o potencial em (2.15), temos

$$W_\phi = \sqrt{2V(\phi)} \rightarrow W = \int \sqrt{\lambda (a^2 - \phi^2)^2} d\phi = \sqrt{\lambda} \left(a^2 \phi - \frac{1}{3} \phi^3 \right). \quad (2.45)$$

Em que $W(\phi)$ é o superpotencial do modelo [10].

Substituindo o potencial $V(\phi)$ na equação de movimento, ficamos com

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2\lambda^2 \phi (a^2 - \phi^2) = 0. \quad (2.46)$$

Vimos anteriormente que para campos estáticos para (1+1)D vale (2.7). Logo a equação acima irá se reduzir para

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -2\lambda^2 \phi (a^2 - \phi^2). \quad (2.47)$$

Utilizando a Eq. (2.18), obtemos

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi = \pm\sqrt{\lambda}(a^2 - \phi^2). \quad (2.48)$$

Integrando tal equação, nos leva a

$$\phi(x) = \pm a \tanh(a\sqrt{\lambda}(x - x_0)), \quad (2.49)$$

onde o sinal positivo representa um *kinks* e o sinal negativo representa um *antikink*. Tais soluções podem ser observadas na Fig. 2.

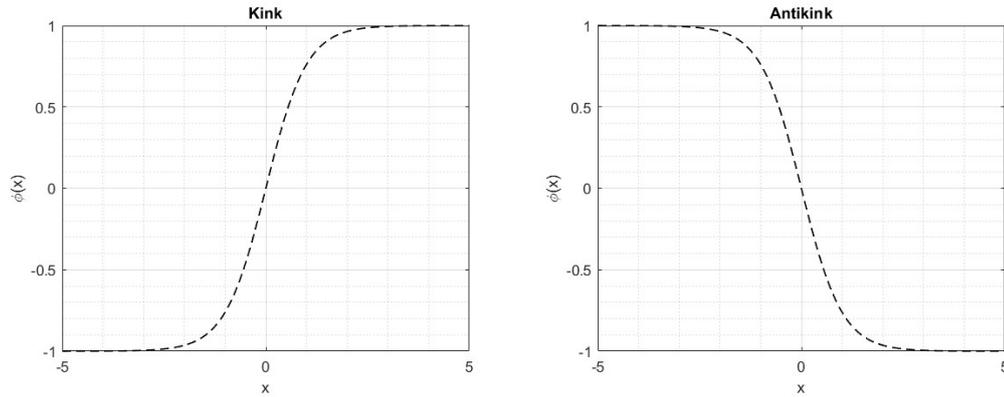


Figura 2 – Kink e Antikink, respectivamente, do modelo ϕ^4 para $\lambda = a = 1$ e $x_0 = 0$.

Note pela figura que tanto o *kinks* quanto o *antikink* convergem para os vácuos do sistema.

A densidade de energia associada ao *kinks* é dada pela relação (2.14), onde ρ é dado por

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda}{2} (a^2 - \phi^2)^2. \quad (2.50)$$

Sabemos que para o caso estático, vale

$$\frac{d\phi}{dx} = \sqrt{\lambda}(a^2 - \phi^2). \quad (2.51)$$

Logo a densidade de energia (2.50), se torna

$$\rho = \lambda(a^4 - 2a^2\phi^2 + \phi^4). \quad (2.52)$$

Agora basta substituímos ϕ . De forma simplificada, ficamos com a densidade de energia do modelo ϕ^4 , assumindo a seguinte forma

$$\rho = \lambda a^4 \operatorname{sech}^4(a\sqrt{\lambda}(x - x_0)). \quad (2.53)$$

Substituindo a densidade de energia encontrada em (2.14), podemos enfim obter a energia do *kink/antikink*

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lambda a^4 \operatorname{sech}^4(a\sqrt{\lambda}(x - x_0)) \right] dx = \frac{4a^3\sqrt{\lambda}}{3}. \quad (2.54)$$

Percebemos assim que a energia é finita. A energia também pode ser obtida utilizando o superpotencial e as condições assintóticas dos campos [39]. Dessa forma, ficamos com

$$E = \pm \left[[W_\phi]_{\phi \rightarrow a} - [W_\phi]_{\phi \rightarrow -a} \right] = \frac{4a^3\sqrt{\lambda}}{3}. \quad (2.55)$$

Como foi discutido anteriormente em 2.2, o caráter topológico do sistema pode ser especificado por meio do valor da *carga topológica*. Então a carga deve ser diferente de zero afim de obtermos uma solução topológica. Para isso, basta calcularmos

$$Q = \frac{1}{2}\phi(\infty) - \frac{1}{2}\phi(-\infty) = a. \quad (2.56)$$

Como a carga não é nula, chamamos a solução de topológica, ou seja, conecta dois mínimos.

Seguindo o que fora estudado ao longo deste capítulo, analisaremos agora a estabilidade linear da solução. Tendo em vista a equação de Schrödinger (2.30)

$$-\frac{d^2 J(x)}{dx^2} + \mathcal{V}J_n = J(x)\omega_n^2, \quad (2.57)$$

onde \mathcal{V} é dado por

$$\mathcal{V}(x) = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right]_{\phi=\phi_s} = \frac{d}{d\phi^2} \left(\frac{\lambda}{2} (a^2 - \phi^2) \right)^2 = 2\lambda (3\phi^2 - a^2). \quad (2.58)$$

Lembrando que ϕ_s representa o caso estático.

Logo (2.30) se torna

$$-\frac{d^2 J_n}{dx^2} + \lambda a^2 (4 - 6 \operatorname{sech}^2(a\sqrt{\lambda}(x - x_0))) J_n = J_n \omega_n^2, \quad (2.59)$$

onde ω_n são os autovalores. O potencial acima é conhecido como potencial de Poschl-Teller modificado [40].

Para o autovalor nulo ($\omega_n = 0$), também conhecido como modo translacional, temos da equação acima

$$-\frac{d^2 J_0}{dx^2} + \lambda a^2 (4 - 6 \operatorname{sech}^2(a\sqrt{\lambda}(x - x_0))) J_0 = 0, \quad (2.60)$$

Que ao resolver, obtemos

$$J_0 = \sqrt{\frac{3}{4}} \operatorname{sech}^2(a\sqrt{\lambda}(x - x_0)). \quad (2.61)$$

O segundo autovalor discreto de (2.59) é chamado de modo vibracional e possui o valor conhecido de $\omega_1 = \sqrt{3\lambda}$ [41], cuja autofunção é dada por

$$J_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \tanh(a\sqrt{\lambda}(x - x_0)) \operatorname{sech}(a\sqrt{\lambda}(x - x_0)) \quad (2.62)$$

3 Colisões do Modelo ϕ^4

Neste capítulo, iremos analisar em detalhes o processo de colisão no modelo ϕ^4 . Estudaremos a interação entre *kinks*, que são configurações espaciais estáveis do campo, e exploraremos efeitos de uma série de fenômenos intrigantes. Estas estruturas desempenham um papel crucial na compreensão de fenômenos topológicos. Primeiramente, a dinâmica das colisões depende significativamente da energia e da velocidade das partículas envolvidas. Em altas energias, o fenômeno de auto-interação ϕ^4 se torna dominante, levando a efeitos não-lineares notáveis que podem ser encontradas em [8, 12].

Solitons são soluções das equações diferenciais não lineares que surgem em uma variedade de contextos na física [42]. Essas soluções têm uma característica notável: elas mantêm sua forma e velocidade ao longo do tempo, mesmo quando interagem umas com as outras [43]. Em outras palavras, os *solitons* são ondas autossustentáveis que não se dispersam nem se deformam durante a propagação. Já as soluções de equações diferenciais não lineares que possuem uma estrutura topológica são chamadas de *kinks*, que são soluções de equações diferenciais parciais que representam transições entre diferentes estados de vácuo.

Iniciaremos a análise das interações *kink-antikink* em (1+1) dimensões no modelo ϕ^4 . O potencial da teoria é dado por (2.44)

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2} (1 - \phi^2)^2. \quad (3.1)$$

Cujas soluções estáticas são dadas por

$$\phi(x) = \pm \tanh(\sqrt{\lambda}(x - x_0)), \quad (3.2)$$

onde x_0 é o centro do *kinks* e $a = 1$, o que claramente nos leva aos mínimos $\phi = \pm 1$.

Para estudarmos a colisão desse modelo, precisamos que as soluções se movam com velocidade $|v|$, uma em direção a outra. Para isso, devemos adicionar o *boost de Lorentz* [44, 45] em (3.2)

$$\phi(x) = \pm \tanh\left(\gamma\sqrt{\lambda}(x - x_0 \mp vt)\right), \quad (3.3)$$

onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}$ é o fator de Lorentz e $\mathbf{v} = v/c$, onde c é a velocidade da luz no vácuo.

Para realizarmos as colisões, é necessário que os *kinks* estejam a uma distância mínima, que tem como objetivo não gerar interações entre o par *kink-antikink*. Dessa forma, a configuração inicial do par é dada pelo perfil do campo ϕ [6].

$$\phi(x, 0) = \phi_K(x + x_0, v, 0) - \phi_K(x - x_0, -v, 0) - 1, \quad (3.4)$$

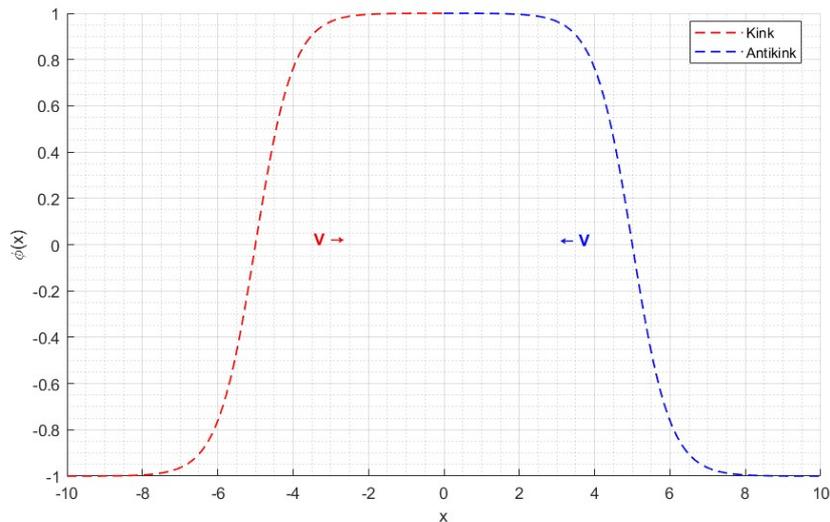


Figura 3 – Kink e Antikink com velocidade v

e outra para sua derivada em função do tempo

$$\dot{\phi}(x, 0) = \dot{\phi}_K(x + x_0, v, 0) - \dot{\phi}_K(x - x_0, -v, 0), \quad (3.5)$$

onde v se refere a velocidade inicial, e o sinal negativo representa a aproximação dos *kinks*. O -1 na Eq. (3.5) é crucial para garantir que o par *kink-antikink* conecte os mínimos do potencial. A Fig. 3 representa o esquema da configuração para o par com $x_0 = 5$ e $\lambda = a = 1$.

Para estudarmos a evolução temporal desse sistema, se torna necessário resolver discretamente a equação de movimento. Um dos métodos utilizados é o conhecido *Runge-Kutta* [46], que tem como objetivo a resolução de equações diferenciais ordinárias (EDOs) e equações diferenciais parciais (EDPs) com boa precisão. Ele consiste em subdividir o intervalo de tempo em passos menores, e utilizar uma combinação ponderada de avaliações da derivada da função, no início e meio do intervalo, para calcular a nova estimativa da solução.

Além disso, também utilizamos o método *diferenças finitas*, que também é utilizado para resolver equações diferenciais. Essa abordagem divide o domínio da função em uma grade finita de pontos, aproximando as derivadas por diferenças entre os valores desses pontos discretos. Ao discretizar o domínio, as equações diferenciais são transformadas em um sistema de equações algébricas, que podem ser resolvidas computacionalmente.

Os resultados das colisões são principalmente associados a variação da velocidade inicial. Por exemplo, para grandes velocidades iniciais, o par *kink-antikink* interage uma única vez e se separa, esse *output* é conhecido como reflexão ou ainda *one-bounce*. No entanto, para pequenas velocidades, o par permanece armadilhado. Esse comportamento é conhecido como *bion*. Além disso, para velocidades intermediárias, os *kinks* colidem duas

vezes antes da completa separação, resultado esse conhecido como *two-bounce*. Para as colisões a seguir, utilizamos $\lambda = 1$ e $x_0 = 12$.

Na Fig. 4 temos o comportamento de reflexão para $v = 0.4$, cuja unidade é a velocidade da luz no vácuo c . Neste caso, o par *kink-antikink* se aproxima e colide apenas uma vez e logo em seguida se separam. Para estes casos, considerando a natureza não integrável da teoria, ou seja, cuja solução não pode ser obtida analiticamente, a velocidade inicial será maior que a velocidade final [6, 10]. Essas são as colisões inelásticas.

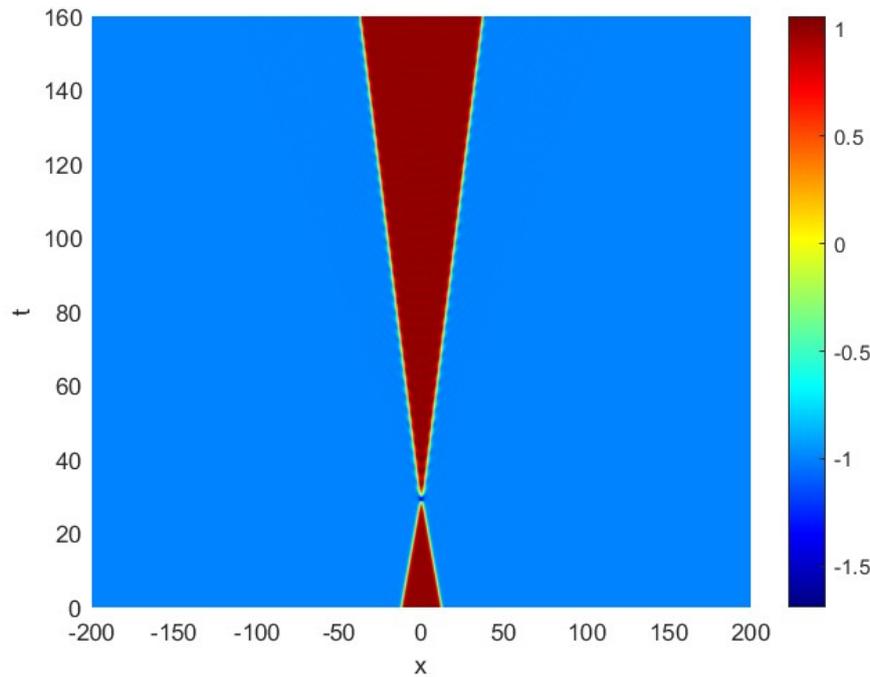


Figura 4 – Evolução do campo no espaço-tempo para $v = 0.4$

Nas Fig 5 (a) e (b), observamos comportamentos de colisões do tipo *bion* para $v = 0.18$ e $v = 0.222$, respectivamente. A figura representa o campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$. Nós podemos perceber que após a aproximação e colisão dos *kinks*, o campo muda do vácuo $\phi(0, t) = 1$ para oscilações em torno do vácuo adjacente. Importante destacar que o processo emite radiação escalar e após longo período colidindo, os *kinks* irão se aniquilar.

Como mencionado anteriormente, há uma faixa de valores de velocidade inicial em que os *kinks* colidem duas vezes antes de escaparem para o infinito. Esse comportamento é característico de modelos não-integráveis [10]. Nesse caso, os *kinks* começam o processo de separação após o primeiro impacto, porém o par não tem energia cinética suficiente e volta a colidir. Logo após a segunda colisão os *kinks* se afastam e não voltam a interagir novamente. As Figs. 6 (a) e (b) representam o campo escalar no centro de massa em função do tempo e a evolução do campo no espaço-tempo, respectivamente, para $v = 0.2386$. Na Fig. 6 (a) observamos que o par se aproxima até um primeiro salto (*bounce*), passando do

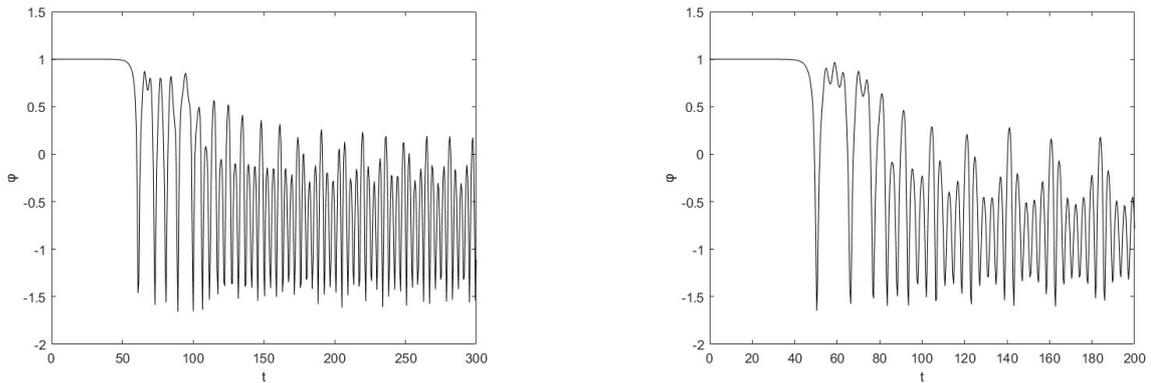


Figura 5 – Campo escalar no centro de massa $\phi(0, t)$ para (a) $v = 0.18$ e (b) $v = 0.222$

vácuo $\phi(0, t) = 1$ para o adjacente em $\phi(0, t) = -1$. Em seguida, os *kinks* oscilam e voltam a interagir, o que dá origem a um novo pico no gráfico. Essas oscilações entre os dois picos maiores representam a localização de cada janela de *two-bounce*. Por exemplo, na Fig. 6 (a) há 3 oscilações, portanto essa colisão pertence a terceira janela de *two-bounce*.

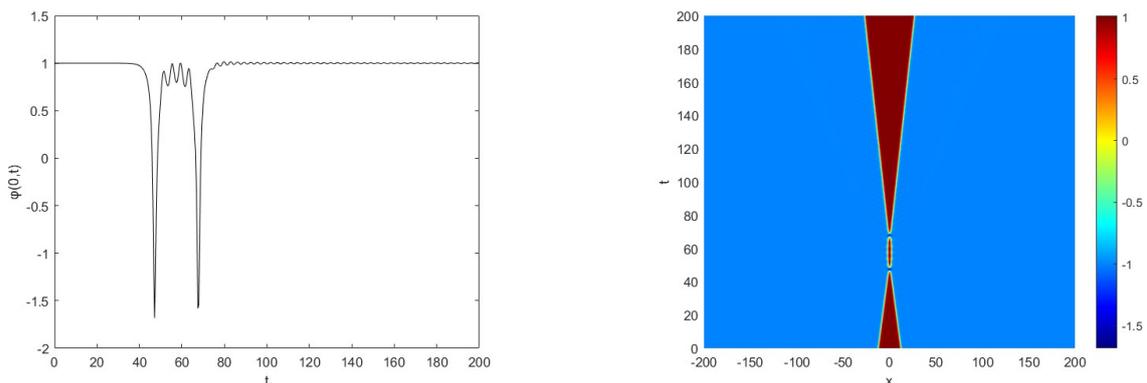


Figura 6 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(0, t)$ em função do tempo, com $v = 0.2386$ e (b) a evolução do campo no espaço-tempo

As oscilações entre os *bounces*, que determinam a localização (ordem) da janela de *two-bounce*, é definida por um número inteiro m . Portanto, quando temos $m = 1$, significa que à apenas uma oscilação entre os saltos, conseqüentemente, pertence a primeira janela de *two-bounce*. A Fig. 7 (a) para $v = 0.1930$, corresponde a um comportamento de *two-bounce* na primeira janela pois existe apenas uma oscilação (ponto de mínimo) entre os dois saltos maiores. Na Fig. 7 (b) também temos um resultado com duas colisões, porém agora ela está localizada na segunda janela de ressonâncias. Isso está relacionado as duas oscilações menores ($m = 2$). Agora, para $v = 0.2382$, observamos um resultado corresponde a terceira janela, uma vez que temos $m = 3$, como mostrado na Fig. 7 (c).

Com base nessa estrutura de janelas de *two-bounce*, que pode ser caracterizada por m , ilustramos na Tabela 1, os resultados numéricos das primeiras oito janelas de ressonância.

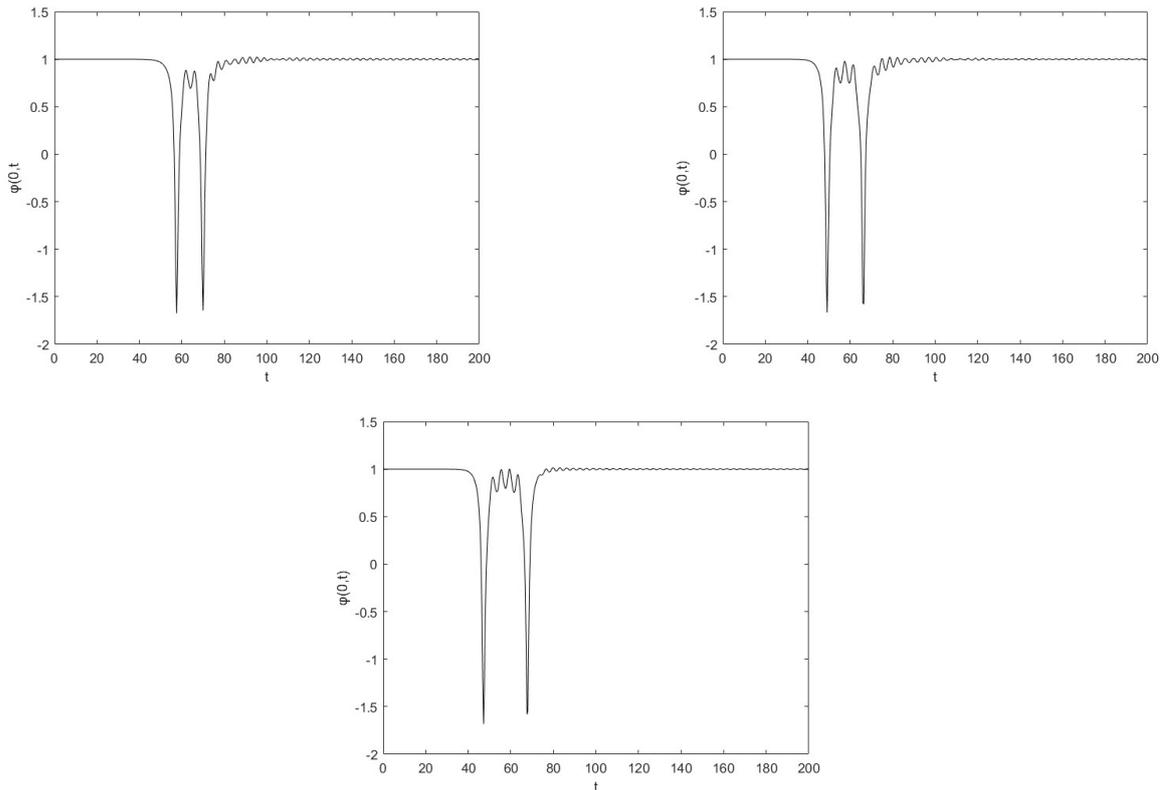


Figura 7 – Campo escalar no centro de massa $\phi(0, t)$ em função do tempo com (a) $v = 0.193$, (b) $v = 0.2286$ e (c) $v = 0.2382$

A primeira coluna corresponde à ordem da janela, v_1 e v_2 indicam, respectivamente, o primeiro e o último valores onde será observado o *two-bounce* e $\Delta v = v_2 - v_1$ representa a largura. Perceba que, a medida que a velocidade aumenta, a espessura das janelas diminui. Tal comportamento irá perdurar até alcançarmos um valor de velocidade crítica (v_{cri}). Para o modelo ϕ^4 , o $v_{cri} = 0.2589$ [10], ao qual, acima desse valor, só ocorre espalhamento do tipo *one-bounce*.

m	v_1	v_2	Δv
1	0.1922	0.2030	0.0108
2	0.2237	0.2286	0.0049
3	0.2368	0.2392	0.0024
4	0.2438	0.2452	0.0014
5	0.2479	0.2488	0.0009
6	0.2505	0.2511	0.0006
7	0.2523	0.2527	0.0004
8	0.2536	0.2538	0.0002

Tabela 1 – 8 primeiras janelas de *Two-bounce* para o modelo ϕ^4

Outro resultado interessante são os comportamentos de maior ordem de colisão. Assim como as janelas de *two-bounce* se aglomeram próximo as janelas de *one-bounce*, o

mesmo acontece para as janelas de *three-bounce*, que por sua vez, aglomeram-se próximo as janelas de *two-bounces*. O mesmo ocorre para as janelas de *four-bounce* e assim por diante. Portanto podemos concluir que as ressonâncias de *n-bounces* diminuem sua espessura e aglomeram-se próximo as janelas de $n - 1$. Esse resultado é conhecido como estrutura fractal [6].

A Fig. 8 mostra os resultados para colisões do tipo *three-bounce*. Nas figuras observamos o campo escalar no centro de massa em relação ao tempo para $v = 0.233$ Fig. 8 (a) e $v = 0.249$ Fig. 8 (b).

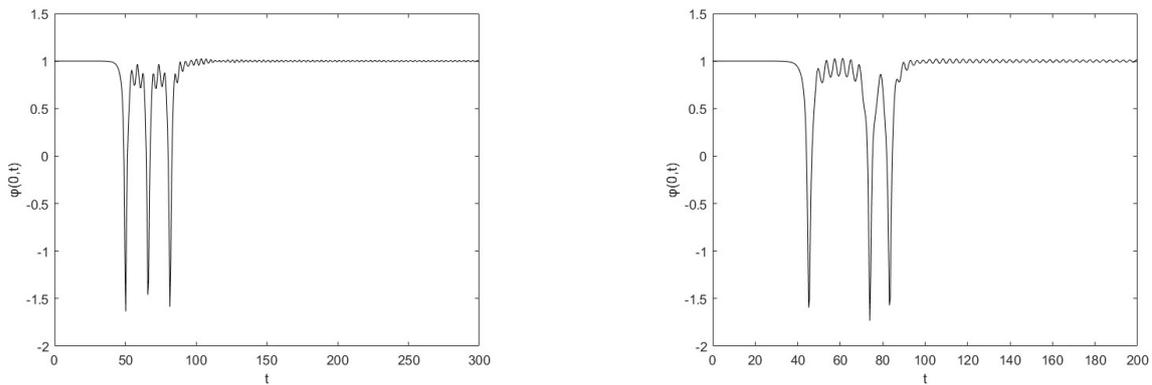


Figura 8 – Campo escalar no centro de massa $\phi(0, t)$ para (a) $v = 0.233$ e (b) $v = 0.249$

A explicação do fenômeno de *two-bounce* esta diretamente ligada à troca de energia entre o modo *translacional* e o modo *vibracional* dos *kinks*, conhecido como *mecanismo de troca de energia ressonante* [47]. Na primeira colisão, uma parcela da energia cinética é armazenada no modo vibracional dos *kinks*, e em seguida os *kinks* se afastam. Porém, o par não tem energia suficiente para se afastar completamente e voltam a colidir. Durante a segunda colisão, parte da energia previamente armazenada no modo vibracional volta ao modo translacional, permitindo que os *kinks* possam escapar.

O mecanismo de troca ressonante deve obedecer a seguinte relação

$$\omega_1 T = 2\pi n + \delta, \quad (3.6)$$

onde T é o intervalo entre as colisões, n um número inteiro que representa as janelas de *two-bounce*, ω_1 é a frequência e δ a mudança de fase.

Afim de elucidar a ideia por trás desse mecanismo, precisamos obter os modos translacional e vibracional do modelo. Para isso começamos introduzindo pequenas perturbações em torno da solução estática $\phi(x, t) = \phi_s(x) + \eta(x, t)$. Substituindo essa expressão na equação de movimento, e levando em consideração apenas os termos lineares de $\eta(x, t)$, ficamos com a seguinte equação

$$\frac{\partial^2 \eta}{dt^2} - \frac{\partial^2 \eta}{dx^2} - \frac{d^2 \phi_s}{dx^2} + \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right]_{\phi=\phi_s} + \eta \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right]_{\phi=\phi_s} = 0, \quad (3.7)$$

onde $\phi_s(x)$ é a solução *estática* e $\eta(x, t)$ representa a pequena perturbação.

Fazemos agora $\eta(x, t) = \eta(x)e^{i\omega t}$, que ao substituir em (3.7), nos leva a seguinte equação

$$-\frac{d^2\eta}{dx^2} + \mathcal{V}(x)\eta = \omega^2\eta. \quad (3.8)$$

Note que está é uma equação do tipo Schrödinger, cujo novo potencial foi obtido em (2.58)

$$\mathcal{V}(x) = 2\lambda(3\phi^2 - a^2). \quad (3.9)$$

Substituindo $\phi = \tanh(x)$, com $\lambda = 1$, obtemos

$$\mathcal{V}(x) = 4 - 6\operatorname{sech}^2(x). \quad (3.10)$$

Esse modelo possui dois modos discretos, e o modo contínuo com frequência angular [48]

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + 2}. \quad (3.11)$$

O primeiro modo discreto é o modo de frequência nulo $\omega_0 = 0$, também conhecido como modo translacional. O segundo modo discreto é chamado de primeiro modo excitado ou ainda de modo vibracional do *kinks* $\omega_1^2 = 3$ [7, 41]. Sendo este modo interno fundamental para o armazenamento de parte da energia durante a primeira colisão do par *kink-antikink*.

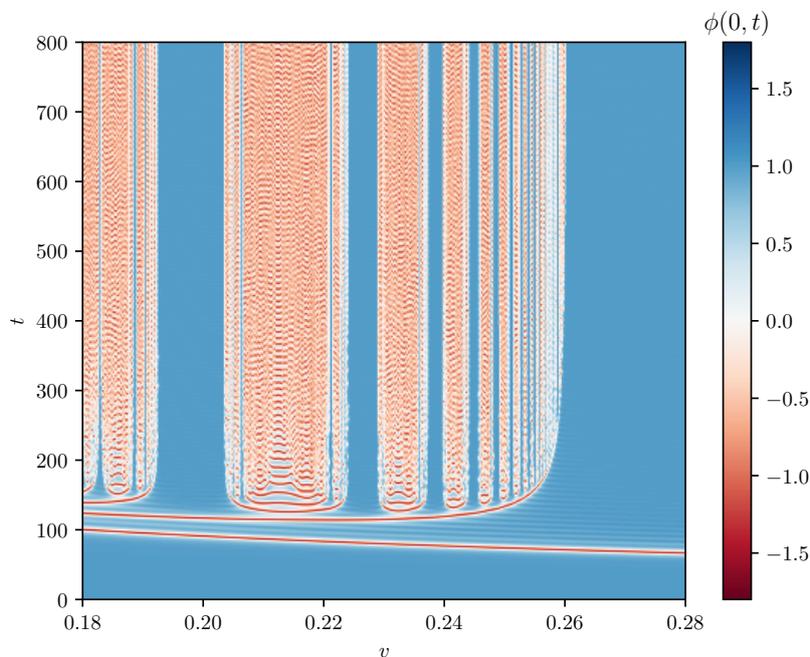


Figura 9 – Estrutura de ressonância do modelo ϕ^4

A função de onda associada ao primeiro estado excitado é dada como se segue

$$\eta = \sqrt{\frac{3}{2}} \tanh x \operatorname{sech} x = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sinh x}{\cosh^2 x} \quad (3.12)$$

A Fig. 9 mostra o comportamento das janelas de ressonância do modelo, onde cada linha horizontal vermelha representa uma colisão. A partir da velocidade crítica $v_{cri} = 0.2589$, ocorre apenas uma colisão. Esse ponto é justamente onde a segunda linha horizontal, que representa a segunda colisão, diverge. Também podemos notar pela figura, os intervalos onde ocorrem somente duas colisões. Como notamos na Tabela 1, essas janelas de *two-bounce* vão ficando cada vez menores até o ponto em que deixam de existir.

4 Paredes Espectrais

Em modelos não integráveis, o estudo sobre as interações de *kinks* e sua aniquilação foram apenas parcialmente resolvidos. Existem alguns pontos que dificultam o completo entendimento das estruturas formadas durante a colisão. Podemos destacar, por exemplo, a força estática aplicada a cada defeito. Além disso, os modos internos e a radiação contribuem para a complexidade do processo [9].

O estudo da dinâmica de sólitons topológicos teve um avanço com o advento do modelo BPS com impurezas, também chamado de impureza auto-dual [49]. Este modelo nos permite estudar as interações entre os sólitons sem a presença de forças estáticas entre os mesmos. Além disso, possui um espaço com soluções estáticas equivalentes, que são soluções de uma equação BPS, ou seja, possui um espaço de módulos não trivial [50]. Porém, estes *kinks* ainda interagem entre si através dos modos internos, quando presentes no modelo. Isso significa que, nestes casos não podemos descreve-lo usando uma aproximação da geodésica comum no espaço modular, já que devemos considerar a interação entre eles.

Nestas situações, a interação é descrita por meio da teoria de perturbação linear, que nos permite fazer uma análise além da aproximação da geodésica [9]. Isso nos leva a fazer uma melhor descrição da dinâmica entre estes sólitons, além de casos onde o espaço modular para o caso em 1+1 dimensões com impurezas se assemelha aos encontrados no estudo para mais dimensões [51, 52].

Como fora visto em [9, 53], o uso da teoria de perturbação linear nos revela um fenômeno conhecido como paredes espectrais ou *spectral walls*, que são estruturas topológicas que surgem quando há uma transição de fase em um sistema físico. Essas transições de fase ocorrem quando um sistema muda de um estado de vácuo ou de equilíbrio para outro. De forma simples, parede espectral é uma divisão no espaço definida pelo ponto onde o modo de oscilação do *kinks* sai do espectro discreto e entra no espectro contínuo.

Os modelos com impurezas auto-dual são de grande ajuda, uma vez que nos dão a chance de estudar as interações entre os *kinks* de forma evolutiva. Isso significa que podemos começar estudando o problema de maneira mais simples e adicionarmos as interações a medida que avançamos.

Neste capítulo estudaremos o modelo ϕ^4 acoplado à impureza, que tem como principal objetivo entender o processo de colisão *kink-antikink* além da aproximação do fluxo da geodésica. E por fim, iremos comparar os resultados obtidos com os que já estão presentes em artigos recentes na literatura [9, 53].

Neste modelo temos o *prepotencial* $U(\phi)$

$$U(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \phi^2), \quad (4.1)$$

onde este prepotencial pode ser escrito em função do potencial $U(\phi) = \sqrt{V(\phi)}$

A impureza σ_j é adicionada ao modelo [53]

$$\sigma_j = \frac{j}{2} \tanh(x) - 1, \quad (4.2)$$

que é uma impureza não localizada e tem como parâmetro de controle $j \in R$.

A energia total dos modelos de impureza auto-dual em 1+1 dimensões é dada por [9]

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \phi_t^2 + \frac{1}{2} \phi_x^2 + U^2 + \sigma_j^2 U^2 + \sqrt{2} \sigma_j U \phi_x + 2U^2 \sigma_j \right] dx. \quad (4.3)$$

É importante destacar que o modelo se reduz a teoria ϕ^4 quando a impureza $\sigma_j \rightarrow 0$.

O acoplamento com a impureza leva a um setor BPS estático, desta forma o potencial possui ao menos dois mínimos. O tensor momento energia é dado por (2.11), e a lagrangiana do modelo auto-dual é dada por

$$L(\phi, \sigma_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \phi_t^2 - \frac{1}{2} (\phi_x + \sqrt{2} \sigma_j U) \right] dx. \quad (4.4)$$

Já para o caso estático, a energia se torna

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \phi_x^2 + U^2 + \sigma_j^2 U^2 + \sqrt{2} \sigma_j U \phi_x + 2U^2 \sigma_j \right] dx, \quad (4.5)$$

que pode ser reescrita como:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (\phi_x + \sqrt{2} W + \sqrt{2} W \sigma_j)^2 - \sqrt{2} W \phi_x \right] dx. \quad (4.6)$$

Para que a energia seja positiva e diferente de zero, precisamos que a seguinte inequação seja verdadeira

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (\phi_x + \sqrt{2} U + \sqrt{2} U \sigma_j)^2 - \sqrt{2} U \phi_x \right] \geq - \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2} U \phi_x dx. \quad (4.7)$$

Onde podemos, por uma simples substituição, transformar a integral em todo o espaço em uma integral entre os mínimos do potencial (ϕ_- e ϕ_+)

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2} U \phi_x dx = - \int_{\phi_-}^{\phi_+} \sqrt{2} Q U(\phi) d\phi, \quad (4.8)$$

onde Q representa a variação total do campo entre seus valores assintóticos. É essencial para garantir que a integral sobre o espaço possa ser corretamente transformada em uma integral sobre o campo.

De (4.7), ainda temos a equação de Bongomol'nyi dada por

$$\phi_x + \sqrt{2}U + \sqrt{2}\sigma U = 0. \quad (4.9)$$

Ao substituirmos o potencial e a impureza (4.2) em (4.9), obtemos a seguinte equação

$$\frac{d\phi}{dx} + 1 - \phi^2 + \left(\frac{j}{2} \tanh x - 1\right) (1 - \phi^2) = 0, \quad (4.10)$$

onde, após uma pequena álgebra, ficamos então com uma EDO não linear de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = - \left(\frac{j}{2} - \frac{j}{2}\phi^2\right) \tanh(x). \quad (4.11)$$

Integrando dos dois lados, ficamos com

$$\int 2 \frac{d\phi}{\phi^2 - 1} = \int -j \cdot \tanh(x) dx, \quad (4.12)$$

que nos leva a

$$-\ln(\phi - 1) + \ln(\phi + 1) = c - j \cdot \ln(\cosh(x)), \quad (4.13)$$

onde c é uma constante.

Fazendo $c = \ln(-a)$ e utilizando a exponencial, ficamos com

$$\frac{\phi + 1}{\phi - 1} = \frac{-a}{\cosh^j(x)}, \quad (4.14)$$

Isolando ϕ na eq (4.14), temos

$$\phi + 1 = -\frac{a(\phi - 1)}{\cosh^j(x)} \rightarrow \phi = -\frac{a(\phi - 1)}{\cosh^j(x)} - 1. \quad (4.15)$$

Então chegamos nas seguintes soluções não triviais

$$\phi = \frac{a - \cosh^j(x)}{\cosh^j(x) + a}. \quad (4.16)$$

Onde $a \in (1, \infty)$ corresponde a uma coordenada do espaço modular. Além disso, outra coordenada do espaço modular é introduzida $a = -1 + e^{jX}$ onde $X \in \mathbb{R}$.

Podemos ainda escrever (4.16) em função do valor do campo na origem $\phi(x=0) = \phi_0$.

$$\phi = \frac{(1 + \phi_0) - (1 - \phi_0) \cosh^2 x}{(1 + \phi_0) + (1 - \phi_0) \cosh^2 x}, \quad (4.17)$$

onde $a \equiv (1 + \phi_0)/(1 - \phi_0)$ e $\phi_0 \in (-\infty, 1)$.

Na Fig. 10 temos a Eq. (4.16) para vários valores da coordenada do espaço modular X , que representam a configuração inicial do par. Percebemos que quanto maior for o valor da coordenada do espaço modular, maior será o afastamento entre o par *kink-antikink* [9].

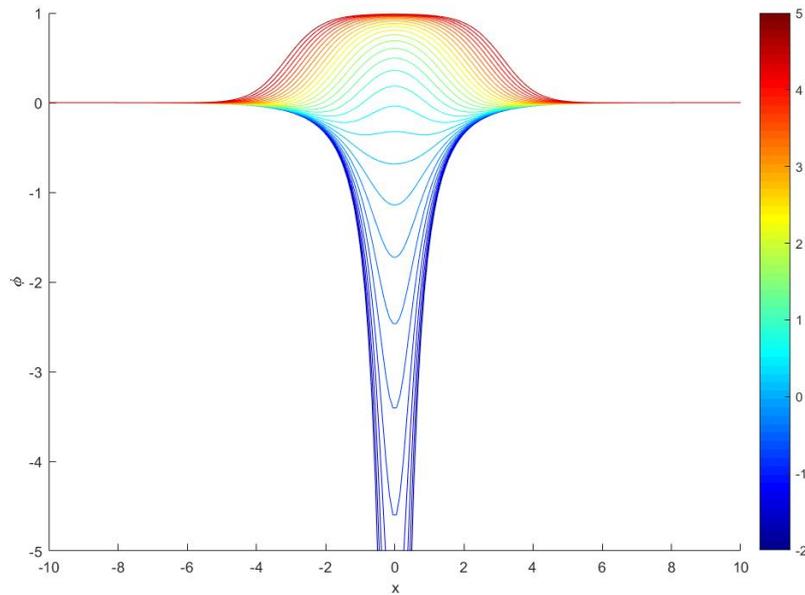


Figura 10 – Soluções BPS para vários valores (-2 a 5) da coordenada do espaço modular X para $j = 1$.

Já para $X = 0$, as soluções se aproximaram e se aniquilaram descendo a $\phi(0, t) = -1$. E para valores ainda menores, a solução chega a valores cada vez menores $\phi \rightarrow -\infty$.

Quando a energia cinética do sistema é pequena, a evolução do mesmo pode ser descrita por uma sequência de soluções BPS que possuem a mesma quantidade de energia [9]. Isso nos permite formular uma teoria efetiva que é representada como

$$L = -\frac{1}{2}M(a)\dot{a}^2, \quad (4.18)$$

onde M é a integral em todo o espaço da derivada de ϕ em relação a coordenada do espaço modular a

$$M_j(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\phi(xa)}{da} \right)^2 dx. \quad (4.19)$$

A derivada de ϕ é dada por

$$\frac{d\phi(x, a)}{da} = \frac{2 \cosh^j(x)}{(\cosh^j(x) + a)^2}. \quad (4.20)$$

Logo

$$M_j(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4 \cosh^{2j}(x)}{(\cosh^j(x) + a)^4} dx, \quad (4.21)$$

este parâmetro é conhecido como a métrica ou a massa do espaço modular.

Para $j = 1$, podemos encontrar a métrica de forma analítica

$$M_{j=1}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4 \cosh^2(x)}{(\cosh(x) + a)^4} dx = -\frac{4}{3(1-a^2)^3} \left(A^4 - 6 - 10a^2 - 6a \frac{4+a^2}{\sqrt{1-a^2}} \arctan \frac{a-1}{\sqrt{1-a^2}} \right). \quad (4.22)$$

Com exceção de quando $a = -1$, a métrica no geral é bem comportada [50].

É esperado que, para um par *kink-antikink* bem separados, a aproximação da geodésica tenha um resultado bem similar ao que temos na equação de movimento. Para encontrar tal equação, começamos lembrando que para o caso estático vale a equação (2.2), dada por

$$\frac{d\phi}{dx} + \frac{j}{2} \tanh x - \frac{j}{2} \phi^2 \tanh x = 0. \quad (4.23)$$

Derivando em relação a x , obtemos

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left(\frac{j}{2} \tanh(x) - \frac{j}{2} \phi^2 \tanh(x) \right) = 0, \quad (4.24)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{j}{2} \cdot \operatorname{sech}^2(x) - \frac{j}{2} \cdot 2\phi \frac{d\phi}{dx} \tanh(x) - \frac{j}{2} \phi^2 \operatorname{sech}^2(x) = 0. \quad (4.25)$$

Ainda da equação (2.2), podemos simplificar

$$\frac{d\phi}{dx} = -\frac{j}{2} \tanh x + \frac{j}{2} \phi^2 \tanh x. \quad (4.26)$$

Substituindo a Eq.(4.26) na Eq. (4.25), ficamos com

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{j}{2} \cdot \operatorname{sech}^2(x) - \frac{j}{2} \cdot 2\phi \left(-\frac{j}{2} \tanh x + \frac{j}{2} \phi^2 \tanh x \right) \tanh(x) - \frac{j}{2} \phi^2 \operatorname{sech}^2(x) = 0, \quad (4.27)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{j}{2} \cdot \operatorname{sech}^2(x) + \frac{j^2}{2} \phi \tanh^2(x) - \frac{j^2}{2} \phi^3 \tanh^2(x) - \frac{j}{2} \phi^2 \operatorname{sech}^2(x) = 0. \quad (4.28)$$

Sabendo das seguintes relações para as funções hiperbólicas

$$\operatorname{sech}^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}, \quad (4.29)$$

e

$$\tanh^2(x) = \frac{\operatorname{senh}^2(x)}{\cosh^2(x)}. \quad (4.30)$$

A equação (4.28) assume a seguinte forma

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{j}{2} \frac{1}{\cosh^2(x)} \left(1 + j\phi \operatorname{senh}^2(x) - j\phi^3 \operatorname{senh}^2(x) - \phi^2 \right) = 0. \quad (4.31)$$

Reescrevendo a expressão em parênteses, temos

$$\left(1 + j\phi \operatorname{senh}^2(x) - j\phi^3 \operatorname{senh}^2(x) - \phi^2 \right) = (1 - \phi^2)(1 + j\phi \operatorname{senh}^2(x)), \quad (4.32)$$

dessa forma obtemos

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{j}{2} \frac{1}{\cosh^2(x)} (1 - \phi^2)(1 + j\phi \sinh^2(x)). \quad (4.33)$$

Para o modelo estático, sabemos que vale

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}, \quad (4.34)$$

onde V é o potencial.

Comparando (4.33) e (4.34), vemos claramente que vale a seguinte igualdade

$$\frac{dV}{d\phi} = -\frac{j}{2} \frac{1}{\cosh^2(x)} (1 - \phi^2)(1 + j\phi \sinh^2(x)). \quad (4.35)$$

Substituindo este resultado em (2.4), obtemos a equação de movimento completa do modelo

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{j}{2} \frac{1}{\cosh^2(x)} (1 - \phi^2)(1 + j\phi \sinh^2(x)) = 0. \quad (4.36)$$

As simulações numéricas que mostram a existência das paredes espectrais serão realizadas a partir da equação de movimento a cima.

Seguindo os passos vistos no Capítulo 2, introduzimos pequenas perturbações em torno da solução estática. Dessa forma, obtemos novamente as duas equações

$$-\frac{1}{J(x)} \frac{d^2J(x)}{dx^2} + \mathcal{V} = \omega_n^2, \quad (4.37)$$

e

$$-\frac{1}{T(t)} \frac{d^2T(t)}{dt^2} = \omega_n^2. \quad (4.38)$$

Onde

$$\mathcal{V} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right]_{\phi=\phi_s} = \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \left(-\frac{j}{2} \frac{1}{\cosh^2(x)} (1 - \phi^2)(1 + j\phi \sinh^2(x)) \right) \right]_{\phi=\phi_s}. \quad (4.39)$$

Ao substituirmos (4.39) na equação tipo Schrödinger (4.37), obtemos

$$-\frac{1}{J(x)} \frac{d^2J}{dx^2} + \frac{j\phi}{\cosh^2(x)} - \frac{j^2}{2} \tanh^2 x + \frac{3j^2}{2} \phi^2 \tanh^2 x = \omega_n^2 \quad (4.40)$$

Podemos observar como a frequência (ω_n) se comporta em relação a ϕ_0 na Fig. 11. Nela vemos o comportamento para as 5 frequências encontradas, incluindo o modo zero em $\omega = 0$. Para valores pequenos de ϕ_0 , as frequências, ou modos vibracionais, entram no espectro contínuo. São nesses pontos que observamos o surgimento de paredes espectrais.

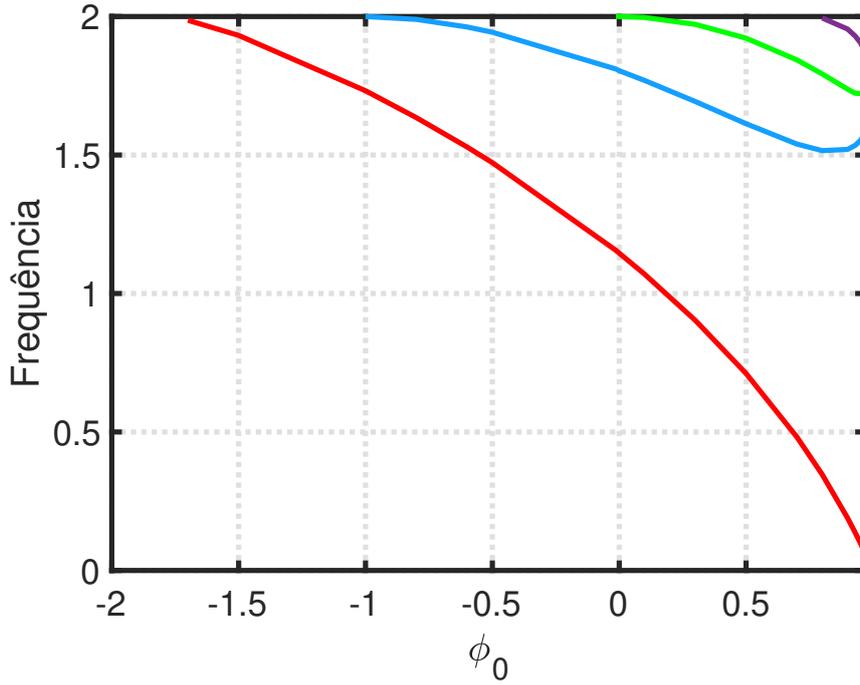


Figura 11 – Comportamento da frequência (ω_n) em função de ϕ_0

4.1 Colisões

Na presente seção vamos discutir sobre o fenômeno conhecido como *paredes espectrais*, que surge através do processo de colisão *kink-antikink* com base nas Refs. [9, 53, 54].

Além disso, estudaremos outro fenômeno que surge na evolução dos sólitons, conhecido como *parede de vácuo*.

Inicialmente o *kinks* e o *antikink* encontram-se separados por uma distância $2x_0$, de modo que não exista nenhuma interação entre eles. Em seguida, estes são impulsionados em direção ao outro. Tal impulso surge ao utilizarmos novamente o *boost de Lorentz*, que permite que os *kinks* e *antikink* se movam com velocidade v . A configuração inicial do problema é composta pelo par *kink-antikink* somando as funções de onda do modelo ϕ^4 , dadas pela Eq. (3.12)

$$\begin{aligned} \phi_{in}(x, t) = & -\tanh\left(\frac{j\gamma(x-x_0-v_it)}{2}\right) + \tanh\left(\frac{j\gamma(x+x_0+v_it)}{2}\right) - 1 - \\ & A_1 \frac{\sinh\left(\frac{j\gamma(x-x_0-v_it)}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{j\gamma(x-x_0-v_it)}{2}\right)} \cos(\omega\gamma(t-v_ix)) + A_2 t \frac{\sinh\left(\frac{j\gamma(x+x_0+v_it)}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{j\gamma(x+x_0+v_it)}{2}\right)} \cos(\omega\gamma(t-v_ix)), \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde $A_2 = -A_1$, que é a amplitude do modo excitado, e a frequência ω . Além da condição do campo ϕ precisamos também da derivada de ϕ em relação ao tempo, ou seja, $\dot{\phi}_{in}(x, t)$,

dada por

$$\begin{aligned}
& \frac{\gamma j v_i (\tanh((\gamma j(x - x_0))/2)^2 - 1)}{2} + \frac{\gamma j v_i (\tanh((\gamma j(x + x_0))/2)^2 - 1)}{2} - \\
& \frac{A_2 \gamma \omega \sinh((\gamma j(x + x_0))/2) \sin(\gamma \omega(-v_i x))}{\cosh((\gamma j(x + x_0))/2)^2} + \frac{A_1 \gamma j v_i \sinh((\gamma j(x - x_0))/2)^2 \cos(\gamma \omega(+v_i x))}{\cosh((\gamma j(x - x_0))/2)^3} - \\
& \frac{A_1 \gamma j v_i \cos(\gamma \omega(+v_i x))}{2 \cosh((\gamma j(x - x_0))/2)} + \frac{A_1 \gamma \omega \sinh((\gamma j(x - x_0))/2) \sin(\gamma \omega(+v_i x))}{\cosh((\gamma j(x - x_0))/2)^2} - \\
& - \frac{A_2 \gamma j v_i \cos(\gamma \omega(-v_i x))}{2 \cosh((\gamma j(x + x_0))/2)} + \frac{A_2 \gamma j v_i \sinh((\gamma j(x + x_0))/2)^2 \cos(\gamma \omega(-v_i x))}{\cosh((\gamma j(x + x_0))/2)^3} \quad (4.42)
\end{aligned}$$

Para analisar o processo de colisão, foi utilizado o método simplético, que resolve as equações diferenciais ao discretizar o tempo e calcular a evolução do sistema em pequenos passos. Para a dependência temporal, usamos o passo $\delta t = 0.02$. Utilizamos o método diferença finitas com $N = 4096$ com passo $\delta x = 0.05$. Definimos $x_0 = 10$ e a velocidade como sendo $v = 0.005$, bem como $j = 2$ e a frequência $\omega = \sqrt{3}$. As colisões *kink-antikink* foram realizadas para vários valores de amplitude.

A Fig. 12 mostra o resultado da interação entre os defeitos para $A_2 = 0.0102$. Perceba que o par se aproxima e, após um longo período, volta a se afastar. Esse comportamento não é observado no espalhamento ϕ^4 . Outro detalhe a se ressaltar é a forma como eles se afastam, já que a curva se mostra muito mais suave do que as vistas no Capítulo 3. Tais detalhes estão ligados a presença da *parede espectral* que atrai o par *kink-antikink* fazendo com que essa curva aconteça. á para o caso com velocidade nula ($v = 0$), o par não se aproxima o suficiente para sofrer interação da parede.

Uma parede espectral nesse contexto, além de atrair o par, funciona de forma efetiva como uma barreira física, um obstáculo na evolução dos *kinks* [54], além de atraí-los. Esse fenômeno surge quando o modo ligado entra no espectro contínuo. Tal interação pode levar a três possíveis resultados: (1) Quando a amplitude tiver um certo valor, que chamaremos de *amplitude crítica* A_c . Nesse caso, o par ficará preso próximo ao ponto na qual o modo entra no espectro contínuo, formando uma solução estacionária [53]. (2) Para $A_2 > A_c$, o sóliton é refletido antes de poder interagir diretamente com a parede ou sofrendo pouca interação, como na Fig 12. E por fim (3), para $A_2 < A_c$, onde os sólitons atravessam a parede espectral sofrendo pouca ou nenhuma interação.

Para o caso em que temos uma grande excitação do modo ligado ($A_2 > A_c$), o par *kink-antikink* é rapidamente refletido de volta como podemos ver na Fig. 13 para $A_2 = 0.0109$. Essa reflexão acontece devido a presença da parede espectral em $\phi(0, t) = 0.36391$, que é onde o modo de oscilação do *kinks* entra no espectro contínuo. Essa parede parece mais visível a medida que aumentamos a amplitude, e gera uma repulsão no par, não permitindo que o mesmo atravesse a parede. Desta forma o par é refletido sem demais interações. Perceba que diferente da Fig. 4, o par tem uma curva mais sutil e o campo leva mais tempo para retornar ao seu valor inicial.

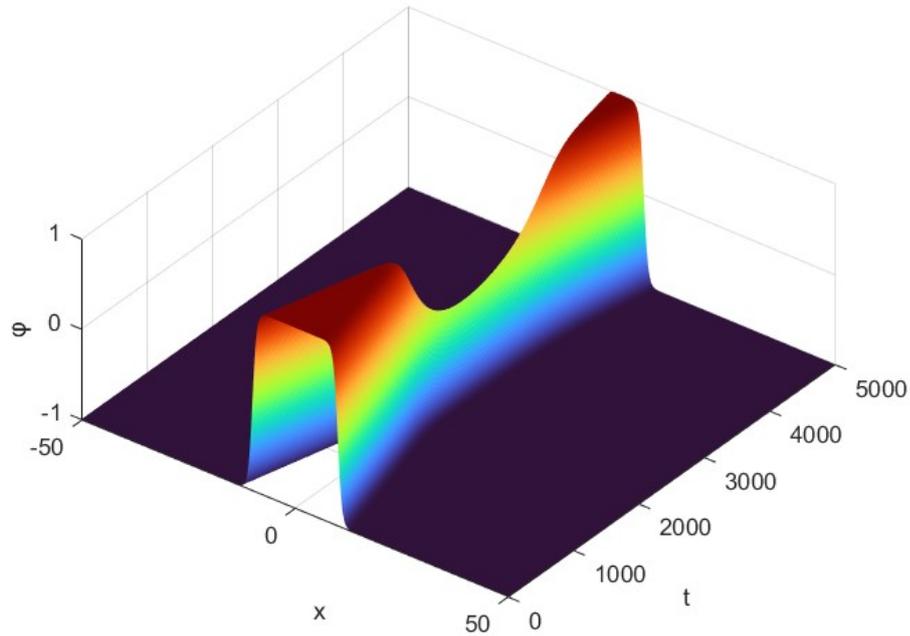


Figura 12 – Evolução do campo no espaço-tempo para $A_2 = 0.0102$

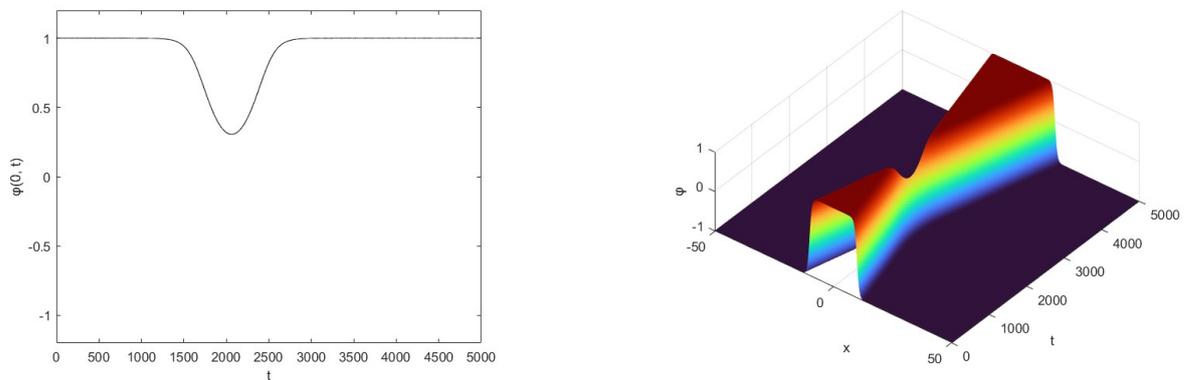


Figura 13 – Para $A_2 = 0.0109$ (a) campo escalar no centro de massa em função do tempo e (b) Evolução do campo no espaço-tempo

Adicionalmente, também são encontradas casos nos quais o par *kink-antikink* gasta um tempo maior para se separar. O par $K\bar{K}$ se aproxima e visita o vácuo $\phi_0 = -1$, que corresponde a um dos vácuos do modelo. Em virtude disso, essa parede localizada nesse ponto corresponde a *parede de vácuo* (*vacuum wall*) [9]. Tal fenômeno pode ser observado na Fig. 14. Perceba que há uma repulsão do par devido a presença da parede.

Há casos em que o par demora para chegar a $\phi(0, t) = 1$ devido à presença da parede espectral em $\phi(0, t) = 0.36391$. Tal parede também gera uma repulsão, que faz uma força oposta a gerada pela parede de vácuo. Porém, devido a grande influência da parede de vácuo e da outra parede espectral, que esta localizada em $\phi(0, t) = -0.013$, o

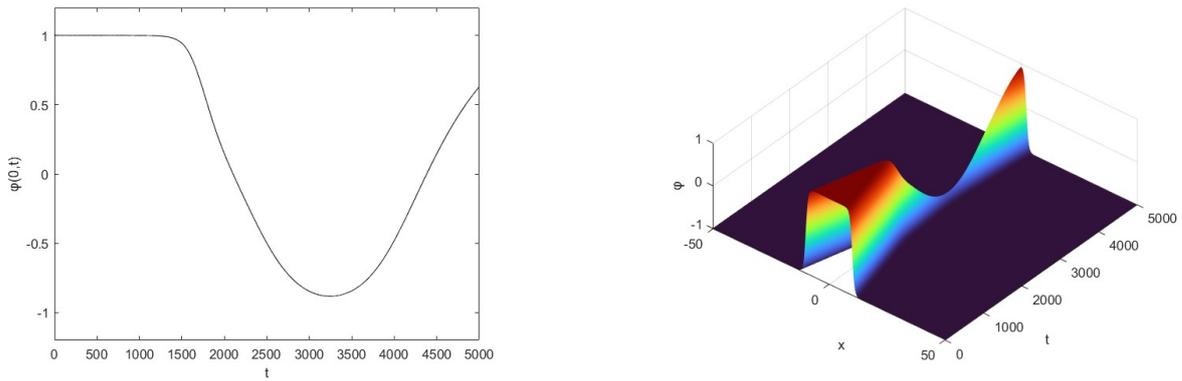


Figura 14 – Para $A_2 = 0.00983$ Campo escalar no centro de massa em função do tempo e (b) Evolução do campo no espaço-tempo interagindo com a parede de vácuo

par eventualmente retorna a $\phi(0, t) = 1$.

Além destes resultados, ainda existe a possibilidade do par atravessar tal barreira, situação essa que surge para valores baixos da amplitude. Os *kink-antikink* podem passar após sofrer alguma interferência da parede de vácuo, mas também podem atravessá-la quase como se ela nem mesmo existisse. Isso acontece para valores ainda menores de A_2 . Podemos observar os dois casos na Fig. 15.

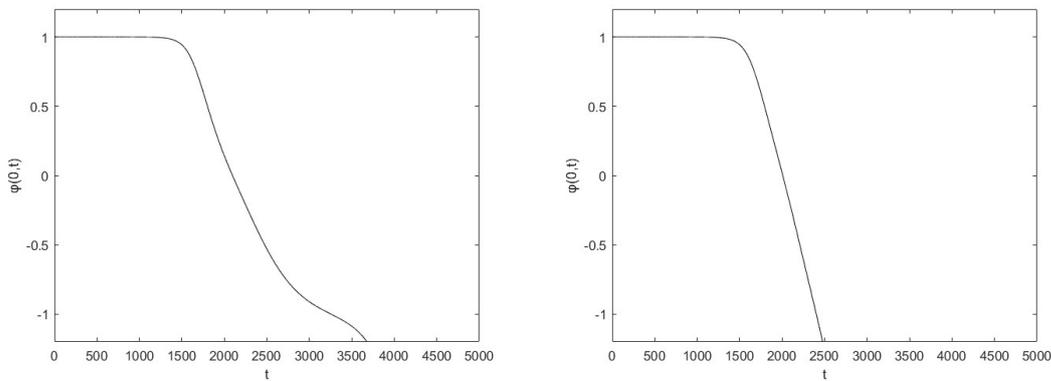


Figura 15 – Campo escalar no centro de massa $\phi(0, t)$ em função do tempo para (a) $A_2 = 0.00983$ e (b) $A_2 = 0.0090$

Quando o campo chega em $\phi(0, t) = -1$ ele sofre um desvio para $A = 0.00983$ (veja Fig. 15a). Já para valores mais baixos, a solução se torna cada vez mais próxima da esperada, através da aproximação da geodésica, onde o caso para $A = 0$ é melhor observada na Fig. 16, no qual tal aproximação é representada pela linha tracejada.

Para o caso no qual estamos trabalhando, espera-se que apareça uma parede espectral que influencie o par *kink-antikink*. Essa parede deve estar localizada em $\phi(0, t) = -0.013$ [54], que é onde o modo ligado entra o espectro contínuo, como já observado na Fig. 11. É esperado que o par colida contra a parede e seja refletido. Além disso, espera-se

também que para certos valores de amplitude, o par oscile ao redor de $\phi(0, t) = -0.013$. Porém, percebemos que na Fig. 16 que existe pouca interação entre o par e a parede. Isso acontece devido à presença da parede de vácuo, localizada em $\phi(0, t) = -1$, que gera uma força repulsiva no par, que é ainda maior do que a gerada pela parede espectral, fazendo com que o par sofra uma força resultante que o afasta de $\phi(0, t) = -0.013$.

Vale ressaltar que a parede de vácuo tem maior influência no par *kink-antikink* em comparação com a parede espectral [9]. Esse comportamento tem como consequência a presença da solução estacionária do par para valores de campo próximos a $\phi(0, t) = -0.013$.

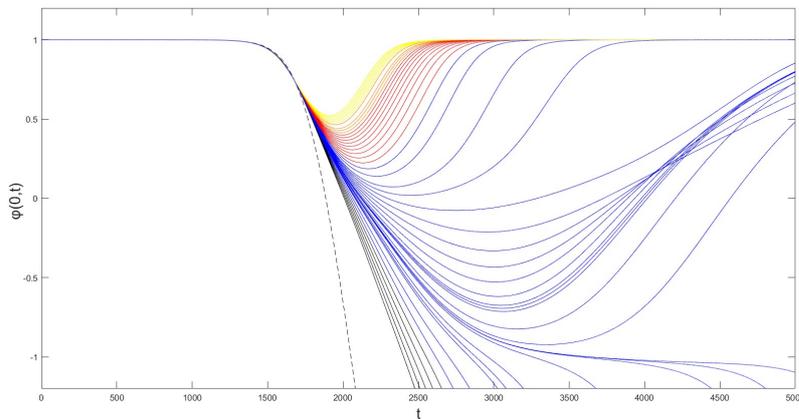


Figura 16 – Campo escalar no centro de massa $\phi(0, t)$ para $A_2 = 0.0090$ (preto) até $A_2 = 0.0125$ (amarelo), e o caso $A_2 = 0$ (linha tracejada)

Na Fig. 16, para alguns valores de A_2 (especialmente as linhas em azul), o par demora para alcançar $\phi(0, t) = 1$ e isso se dá pela influência da parede de vácuo, que exerce uma repulsão no par. Para os casos em que as paredes estão mais espaçadas, o par *kink-antikink* fica preso entre as paredes espectrais. Porém, nesse caso a repulsão gerada pela parede de vácuo, que é mais forte que a atração da parede espectral, faz com que a força resultante que leva o mesmo novamente para $\phi(0, t) = 1$.

Também foram realizadas colisões com velocidade $v = 0.009$. Neste caso, tivemos que aumentar a amplitude (que antes começava $A_2 = 0.0090$), uma vez que devido ao aumento na velocidade, o par *kink-antikink* atravessa a parede de vácuo mais facilmente. Na Fig. 17 realizamos as colisões para $A_2 = 0.0175$ até $A_2 = 0.0205$ e os resultados foram extremamente similares aos encontrados na Fig. 16; a parede espectral em $\phi(0, t) = -0.013$ fica quase que totalmente escondida devido a presença da parede de vácuo em $\phi(0, t) = -1$, que gera uma repulsão no par. E também existe a reflexão que ocorre no ponto no qual o par (para grandes excitações) se aproxima da parede espectral localizada em $\phi(0, t) = 0.36391$. Perceba que tal parede, devido a maior velocidade, só se torna evidente quando a amplitude é consideravelmente mais alta do que a encontrada para o caso com $v = 0.005$.

Além disso, observamos um resultado diferente do obtido para $v = 0.005$. Para

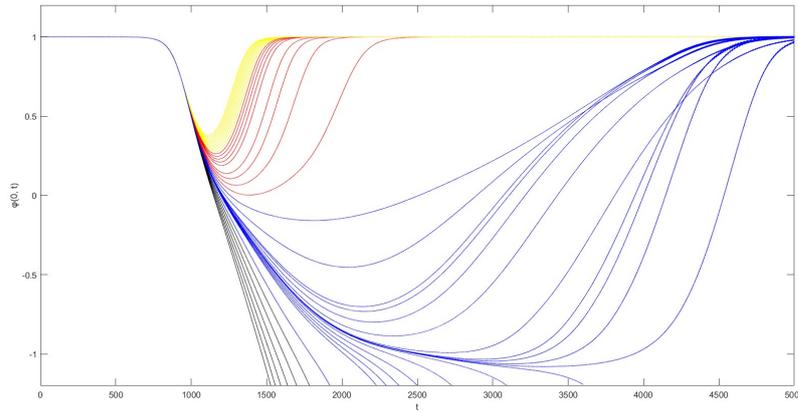


Figura 17 – Campo escalar no centro de massa $\phi(0,t)$ para $A_2 = 0.0175$ (preto) até $A_2 = 0.0205$ (amarelo). Com a parede de vácuo em $\phi(0,t) = -1$ e a parede espectral em $\phi(0,t) = -0.013$

o caso com $A_2 = 0.018246$, o par *kink-antikink* chega a passar a parede de vácuo em $\phi(0,t) = -1$, mas retorna para o vácuo em $\phi(0,t) = 1$ como podemos observar na Fig. 18. Podemos atribuir tal resultado à velocidade mais alta, que permite que o par supere por um breve momento a repulsão gerada a partir da parede de vácuo. Sendo assim o par consegue retornar mesmo após atravessar a parede de vácuo.

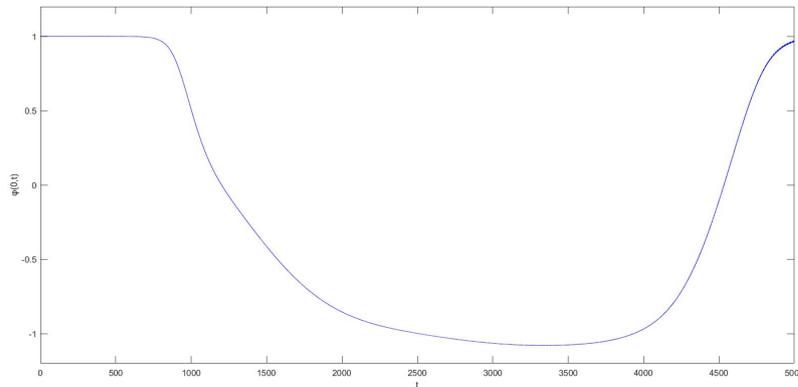


Figura 18 – Campo escalar no centro de massa $\phi(0,t)$ para $A_2 = 0.018246$.

Desta forma, nossos resultados se mostram condizentes com os resultados já obtidos em [9, 54], onde foram demonstrados os resultados para $v = 0.005$. Já para $v = 0.009$, os resultados se mantiveram os mesmos, com o mesmo padrão de comportamento para o par *kink-antikink*, porém com o valor da amplitude devidamente ajustado. Com a ressalva do caso da Fig. 18, com o retorno do par para $\phi(0,t) = 1$, mesmo após atravessar a parede de vácuo em $\phi(0,t) = -1$.

5 Conclusão

O cerne deste trabalho consiste no estudo do modelo ϕ^4 acoplado com impurezas. Destaca-se o surgimento de *paredes espectrais*, que aparecem quando o modo de oscilação do *kinks* entra no espectro contínuo, e de *paredes de vácuo*, que surgem onde o vácuo do modelo original está presente.

No capítulo 2, abordamos os fundamentos dos campos escalares, destacando sua importância na descrição de fenômenos físicos desde o surgimento do eletromagnetismo no século XIX. Os campos clássicos foram discutidos, com ênfase nos campos escalares. Os campos escalares, que descrevem quantidades dependentes apenas da posição no espaço, são fundamentais em diversas áreas da física, incluindo mecânica quântica, teoria de campos, cosmologia e física de partículas. A equação de movimento para um campo escalar foi apresentada, demonstrando sua natureza como uma equação diferencial parcial de segunda ordem não linear. Apesar da complexidade na obtenção de soluções, foi destacado que é possível obter soluções não triviais a partir da configuração estática do sistema, simplificando a equação de movimento para uma equação de primeira ordem, facilitando sua resolução. Essa simplificação foi feita utilizando o método Bogomol'ny-Prasad-Sommerfield (BPS) que é uma importante equação diferencial em teorias de campo quântico, especialmente em teorias de gauge. As soluções BPS minimizam a energia dentro de uma classe específica de configurações de campo, característica que as torna fundamentais na física teórica. Ainda foi desenvolvida a análise da estabilidade linear das soluções uma vez que estamos tratando de um sistema de equações não-lineares, e percebemos que as soluções são, de fato, estáveis perante a perturbações.

Apresentamos ainda os conceitos de defeitos topológicos e focamos no modelo ϕ^4 . Obtivemos também a energia do *kink* de duas formas diferentes: a primeira a partir da densidade de energia e a segunda, através da energia BPS, que foi encontrada a partir do superpotencial. Identificamos que a análise da estabilidade nos leva a um potencial do tipo Poschl-Teller modificado que possui dois modos discretos. O primeiro autovalor ($\omega_0 = 0$) é conhecido como modo translacional e o segundo ($\omega_1 = \sqrt{3\lambda}$) é conhecido como modo vibracional, e são de extrema importância para a explicação quanto a presença da estrutura de ressonância.

No capítulo 3, foi feita uma análise do processo de colisão do modelo ϕ^4 . Para isso, utilizamos o método Runge-Kutta. Tal colisão acontece quando impulsionamos o *kinks* e o *antikink* um em direção ao outro até que eles colidam. Os resultados dessa interação são ricos e complexos e dependem diretamente da velocidade inicial. Para velocidades altas, maiores que a *velocidade crítica* $v_{cri} = 0.2589$, ocorre a reflexão, onde o par *kink-antikink*

colide uma vez e logo em seguida se separam para o infinito (colisões inelásticas). Para velocidades menores que a velocidade crítica, destacam-se principalmente os *bions*, que ocorrem quando o par permanece armadilhado, oscilando indefinidamente, e as *janelas de two-bounce*. Tais janelas surgem para diversos intervalos de velocidade. O comportamento de *two-bounce* acontece quando o par interage por duas vezes antes da completa separação. Tal resultado é explicado através do mecanismo da troca de energia ressonante entre a energia translacional e o modo vibracional. Cada janela pode ser identificada a partir do número de oscilações que o par sofre antes da segunda colisão. Além disso, também pode ser observado o comportamento de maior ordem de *bounce*, como por exemplo, quando o par colide três vezes antes do escape, resultado conhecido como *three-bounce*.

Por fim, no capítulo 4 estudamos o modelo ϕ^4 acoplado com uma *impureza*, também conhecido como modelo com impureza auto-dual. A presença destas impurezas, que é definida como $\sigma_j = \frac{j}{2} \tanh x - 1$, é controlada pelo parâmetro j . A partir desse acoplamento e da energia do modelo, são obtidas as equações BPS, cujas soluções não triviais são dadas por $\phi = \frac{a - \cosh^j(x)}{\cosh^j(x) + a}$. O parâmetro a representa uma coordenada do espaço modular que varia de -1 a ∞ , e percebemos que quanto maior for o valor da coordenada do espaço modular, maior será o afastamento entre o par *kink-antikink*. Temos duas formas de descrever o processo de colisão do par neste modelo: através da equação de movimento e através da aproximação de geodésica. No presente trabalho utilizamos a equação de movimento completa e resolvemos numericamente.

O resultado mostrou a dependência direta da amplitude. O primeiro resultado, para uma amplitude alta, o par é refletido por uma parede espectral localizada em $\phi(0, t) \approx 0.5$. Já para valores intermediários, o par consegue atravessar a parede espectral, mas ao chegar em $\phi(0, t) = -1$ se aproxima ou colide com outra parede, chamada de *parede de vácuo*, que tem esse nome por se localizar no vácuo do modelo original. Nesse caso, devido a repulsão gerada por esta parede, o par volta e retorna ao vácuo original em $\phi(0, t) = 1$. Já para valores ainda mais baixos da amplitude, o par consegue atravessar até mesmo a parede de vácuo, e diverge para valores cada vez menores. E, devido a presença desta parede de vácuo, uma segunda parede espectral que está localizada em $\phi(0, t) = -0.013$ se faz menos evidente, uma vez que sua interação sobre o par é sobrepujada pela força exercida pela parede de vácuo. Estes resultados foram obtidos para valores diferentes de velocidade, com a ressalva de que para valores mais altos da velocidade, há casos nos quais o par consegue atravessar a parede de vácuo, porém ainda consegue voltar para o vácuo original.

Referências

- 1 COLEMAN, S. **Aspects of Symmetry**. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 20.
- 2 YAKUSHEVICH, L. V. **Nonlinear physics of DNA**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2006. Citado na página 11.
- 3 VILENKIN, A.; VILENKIN, A.; SHELLARD, E. **Cosmic strings and other topological defects**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 12.
- 4 KOSEVICH, A. M.; IVANOV, B.; KOVALEV, A. S. Magnetic solitons. **Physics Reports**, Elsevier, v. 194, n. 3-4, p. 117–238, 1990. Citado na página 11.
- 5 AMIN, M. A.; MOCZ, P. Formation, gravitational clustering, and interactions of nonrelativistic solitons in an expanding universe. **Physical Review D**, APS, v. 100, n. 6, p. 063507, 2019. Citado na página 11.
- 6 ANNINOS, P.; OLIVEIRA, S.; MATZNER, R. A. Fractal structure in the scalar $\lambda (\varphi^2 - 1)^2$ theory. **Physical Review D**, APS, v. 44, n. 4, p. 1147, 1991. Citado 6 vezes nas páginas 11, 20, 21, 24, 26 e 29.
- 7 CAMPBELL, D. K.; SCHONFELD, J. F.; WINGATE, C. A. Resonance structure in kink-antikink interactions in φ^4 theory. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, v. 9, n. 1-2, p. 1–32, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 30.
- 8 MANTON, N. S.; SUTCLIFFE, P. M. **Topological Solitons**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 11, 12 e 24.
- 9 ADAM, C. *et al.* Kink-antikink scattering in the ϕ^4 model without static intersoliton forces. **Physical Review D**, APS, v. 101, n. 10, p. 105021, 2020. Citado 9 vezes nas páginas 13, 32, 33, 34, 35, 38, 40, 42 e 43.
- 10 SIMAS, F. de C. Tópicos em defeitos topológicos: Colisões e localização de campos. Citado 5 vezes nas páginas 14, 19, 21, 26 e 28.
- 11 JR, M. M. F. **Formulação Lagrangeana e Hamiltoniana para Campos Clássicos**. 2023. Notas de aula. Citado na página 14.
- 12 PESKIN, M.; SCHROEDER, D. **An Introduction to Quantum Field Theory**. [S.l.]: Westview Press, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 24.
- 13 JR, M. M. F. **O Espaço-tempo de Minkowski, 4-Vetores e Tensores**. 2022. Notas de aula. Citado na página 14.
- 14 OLIVEIRA, S. V. d. *et al.* Uma abordagem sobre a teoria do campo escalar real. Universidade Federal da Paraíba, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 19.
- 15 LEMOS, N. A. **Mecânica analítica**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007. Citado na página 15.

- 16 SOUZA, M. *et al.* Campos escalares reais e a quebra espontânea de simetria: Uma descrição analítica para defeitos topológicos. **Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol**, v. 6, n. 1, p. 47, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 15, 16, 18 e 20.
- 17 BOGOMOLNY, E. B. *Sov. j. nucl. phys.* 24 (1976) 449; *yad. fiz.* 24 (1976) 861. **Sov. J. Nucl. Phys.**, v. 24, p. 449, 1976. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- 18 PRASAD, M. K.; SOMMERFELD, C. M. *Phys. rev. lett.* 35 (1975) 760. **Phys. Rev. Lett.**, v. 35, p. 760, 1975. Citado na página 16.
- 19 MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. **Gravitation**. [S.l.]: W. H. Freeman, 1973. Citado na página 16.
- 20 FRED, C.; AVINASH, K.; UDAY, S. **Supersymmetry in Quantum Mechanics**. New Jersey: World Scientific, 2001. Citado na página 16.
- 21 ALMEIDA, C. A. G. d. **Deformação de Defeitos em Modelos de Campos Escalares**. Tese (Doutorado) — Nome da Instituição, julho 2004. Citado na página 17.
- 22 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. **Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide**. [S.l.]: Academic press, 2011. Citado na página 18.
- 23 BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. 11. ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2016. Citado na página 18.
- 24 MORIN, D. **Introduction to Classical Mechanics**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. Citado na página 19.
- 25 THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. [S.l.]: Cengage Learning, 2011. Citado na página 19.
- 26 GRIFFITHS, D. J.; SCHROETER, D. F. **Introduction to quantum mechanics**. [S.l.]: Cambridge university press, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.
- 27 SCHIFF, L. I. **Quantum mechanics**. [S.l.]: New York: McGraw-Hill Book Company, 3rd Edition, 1968. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.
- 28 KHARE, A.; COOPER, F.; SUKHATME, U. Supersymmetric quantum mechanics and shape invariance. **Phys. Rept.**, v. 251, p. 267, 1995. Citado na página 19.
- 29 JUNKER, G. **Supersymmetric Methods in Quantum Statistical Physics**. Berlin: Springer, 1996. Citado na página 19.
- 30 CHAIKIN, P. M.; LUBENSKY, T. C. **Principles of condensed matter physics**. [S.l.]: Cambridge university press, 2000. Citado na página 20.
- 31 WEISS, P. L'hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique. **J. Phys.**, v. 6, p. 661–690, 1907. Citado na página 20.
- 32 MERMIN, N. D. Topological defects and texture in condensed matter. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 82, p. 3045–3067, Jul 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.82.3045>>. Citado na página 20.

- 33 VACHASPATI, T. **Kinks and Domain Walls - An Introduction to Classical and Quantum Solitons**. New York: Cambridge University Press, 2006. Citado na página 20.
- 34 SILVA, A. **Vórtices em Sistemas Planares**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 1996. Citado na página 20.
- 35 BAZEIA, D.; BELENDRYASOVA, E.; GANI, V. A. Scattering of kinks of the sinh-deformed φ^4 model. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 78, p. 1–14, 2018. Citado na página 21.
- 36 BAZEIA, D. *et al.* Kink scattering in hyperbolic models. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific, v. 34, n. 31, p. 1950200, 2019. Citado na página 21.
- 37 CAMPOS, J. G.; MOHAMMADI, A. Kink-antikink collision in the supersymmetric 4 model. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2022, n. 8, p. 1–23, 2022. Citado na página 21.
- 38 MANTON, N. *et al.* Collective coordinate model of kink-antikink collisions in ϕ^4 theory. **Physical Review Letters**, APS, v. 127, n. 7, p. 071601, 2021. Citado na página 21.
- 39 INÁCIO, A. d. S. Defeitos topológicos em modelos de campos escalares. 2003. Citado na página 23.
- 40 MORSE, P.; FESHBACH, H. **Methods of Mathematical Physics**. New York: McGraw-Hill, 1953. Citado na página 23.
- 41 SUGIYAMA, T. Kink-antikink collisions in the two-dimensional ϕ^4 model. **Progress in Theoretical Physics**, v. 61, n. 5, p. 1550–1563, 1979. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 30.
- 42 ABLOWITZ, M. J.; CLARKSON, P. A. **Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1991. Citado na página 24.
- 43 ZAKHAROV, V. E.; SHABAT, A. B. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. **Soviet Physics-JETP**, v. 34, n. 1, p. 62–69, 1972. Citado na página 24.
- 44 RINDLER, W. **Introduction to Special Relativity**. 2nd. ed. Oxford: Oxford University Press, 2006. Citado na página 24.
- 45 CARROLL, S. **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity**. 2nd. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2019. Citado na página 24.
- 46 PRESS, W. H. *et al.* **Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing**. 3rd. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. Citado na página 25.
- 47 SANTOS, D. P. *et al.* Dinâmica de defeitos topológicos em modelos hiperbólicos generalizados. Universidade Federal do Maranhão, 2022. Citado na página 29.

- 48 ANINOS, P.; OLIVEIRA, S.; MATZNER, R. A. Título do artigo. **Physical Review D**, v. 44, p. 1147, 1991. Citado na página 30.
- 49 ADAM, C.; WERESZCZYNSKI, A. Soliton dynamics in Plücker embedding. **Phys. Rev. D**, v. 98, p. 116001, 2018. Citado na página 32.
- 50 ADAM, C. *et al.* Solvable self-dual impurity models. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 53, n. 35, p. 355401, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 36.
- 51 ADAM, C.; WERESZCZYNSKI, A. Bps property and its breaking in 1+ 1 dimensions. **Physical Review D**, APS, v. 98, n. 11, p. 116001, 2018. Citado na página 32.
- 52 ADAM, C.; ROMANCZUKIEWICZ, T.; WERESZCZYNSKI, A. The ϕ^4 model with the bps preserving defect. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2019, n. 3, p. 1–47, 2019. Citado na página 32.
- 53 ADAM, C. *et al.* Spectral walls in soliton collisions. **Physical review letters**, APS, v. 122, n. 24, p. 241601, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 32, 33, 38 e 39.
- 54 ADAM, C. *et al.* Kink-antikink collisions in a weakly interacting ϕ^4 model. **Physical Review E**, APS, v. 102, n. 6, p. 062214, 2020. Citado 4 vezes nas páginas 38, 39, 41 e 43.