UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Gustavo Henrique Colins Marques

Espaços de Sobolev com peso e Aplicações

São Luís - MA
2024

Gustavo Henrique Colins Marques

Espaços de Sobolev com peso e Aplicações

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Maranhão.

Orientador: Prof. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto

São Luís - MA

2024

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Colins Marques, Gustavo Henrique.
Espaços de Sobolev Com Peso e Aplicações / Gustavo Henrique Colins Marques. - 2024.
64 f.

Orientador(a): Profª Drª Sandra Imaculada Moreira Neto.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2024.

1. P - Laplaciano. 2. Espaços de Sobolev Com Peso. 3. Existência de Solução. 4. . 5. . I. Moreira Neto, Profª Drª Sandra Imaculada. II. Título.

Gustavo Henrique Colins Marques

Espaços de Sobolev com peso e Aplicações

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Maranhão.

Dissertação de Mestrado. São Luís - MA, 31 de Julho de 2024:

Prof. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto
Orientadora
Universidade Estadual do Maranhão

Prof. Dr. Gustavo Silvestre do Amaral Costa
Examinador Interno
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki
Examinador Externo
Universidade Federal de São Carlos

São Luís - MA
2024

Dedico este trabalho a minha mãe, Conceição de Maria Castelo Branco Colins.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus, pela vida, pela saúde, pelas bençãos que ele vem realizando na minha vida. A minha família, em especial a minha mãe Conceição de Maria e minha madrinha Marinalva Colins pelo amor incondicional, pelos incentivos, pelas preocupações que tiveram a respeito de meus trabalhos e pelas condições de estudos que me proporcionaram.

Agradeço a minha orientadora Profª. Drª. Sandra Imaculada Moreira Neto pela amizade, paciência, competência, ensinamentos, por compartilha um pouco de sua experiência e sabedoria e pelos conselhos de vida acadêmica que levarei para vida.

Aos professores do PPGMAT-UFMA que compartilharam um pouco do seu conhecimento matemático. Em especial ao Professor Dr. Gustavo Silvestre do Amaral Costa, cujas disciplinas ministradas contribuíram de forma significativa para a minha formação acadêmica.

Agradeço aos professores Olímpio Hiroshi Miyagaki e Gustavo Silvestre do Amaral Costa pelo interesse e disponibilidade em aceitarem o convite para compor a minha banca de dissertação.

Aos colegas do PPGMAT-UFMA, em particular, Larissa Chagas, Gabriel Araújo e Carlos Eduardo pelas conversas, parceria e apoio durante o curso.

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Capes pelo apoio financeiro.

Por fim, gostaria de agradecer a todos que participaram diretamente e indiretamente da minha trajetória acadêmica.

"A maravilhosa disposição e harmonia do Universo só pode ter tido origem segundo o plano de um Ser que tudo sabe e tudo pode. Isto fica sendo a minha última e mais elevada descoberta."

(Isaac Newton)

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo estudar propriedades qualitativas de soluções para a seguinte classe de equações elípticas dada por

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(w|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x,u), \text{ em } \Omega \\ u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

em domínio limitado, para não linearidade f e função peso w. Além disso foi abordado também neste trabalho a existência de solução não negativa para uma classe de equações elípticas envolvendo o operador Laplaciano com peso.

Palavras-chave: $p-$Laplaciano. Espaços de Sobolev com peso. Existência de solução.

Abstract

The present work aims to study qualitative properties of solutions for class of elliptic equations given by the next lecture

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(w|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x,u), \text{ in } \Omega \\ u = 0, \text{ in } \partial\Omega. \end{cases}$$

in bounded domain, for nonlinearity f and w is weight function. Furthermore, this work also addressed the existence of a nonnegative solution for a class of elliptic equations involving the weighted Laplacian operator.

Keywords: $p-$Laplacian. Sobolev spaces with weight. Existence of solution.

Lista de símbolos

S^+	Conjunto de todos os elementos não negativos do conjunto S;
$\|S\|$	Medida de Lebesgue do espaço S;
Ω	Subconjunto limitado e suave do $\mathbb{R}^N$;
$C_0^\infty(\Omega)$	Espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω;
$\Delta_{p,w}u$	Operador $p-$Laplaciano com peso w, dado por $\Delta_{p,w}u = \text{div}(w\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u)$;
$\Delta_{2,w}u$	Operador Laplaciano com peso $w(x) = \|x\|^{-2a}$ dado por $\Delta_{2,w}u = \text{div}(\|x\|^{-2a}\nabla u)$;
$L^p(\Omega)$	Espaço de Lebesgue, dado por $L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R}; \int_\Omega \|u\|^p dx < +\infty\right\}$, $1 \leq p < +\infty$;
$W^{k,p}(\Omega)$	Espaço de Sobolev, dado por $W^{k,p}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \in L^p(\Omega) \text{ e } D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$, $1 \leq p < +\infty,\ \|\alpha\| \leq k\|$ e $k \in \mathbb{N}$;
$L^p(\Omega, w)$	Espaço de Lebesgue com peso w, dado por $L^p(\Omega, w) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R}; \int_\Omega w(x)\|u\|^p dx < +\infty\right\},\ 1 \leq p < +\infty$;
$W^{1,p}(\Omega, w)$	Espaço de Sobolev com peso w, dado por $W^{1,p}(\Omega, w) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R}; \left(\int_\Omega \|u(x)\|^p dx + \int_\Omega w(x)\|\nabla u(x)\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\right\}, 1 \leq p < \infty$;
$W_0^{1,p}(\Omega, w)$	$W_0^{1,p}(\Omega, w) = \overline{\{C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{1,p,w}\}}$;
$\|\|u\|\|_{L^p}$	Norma da função u no espaço $L^p(\Omega)$ dada por $\|\|u\|\|_{L^p} = \left(\int_\Omega \|u(x)\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$;
$\|\|u\|\|_{W^{k,p}}$	Norma da função u no espaço $W^{k,p}(\Omega)$ dada por $\|\|u\|\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{\|\alpha\| \leq k} \|\|D^\alpha u\|\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}}$;
$\|\|u\|\|_{p,w}$	Norma da função u no espaço $L^p(\Omega, w)$ dada por $\|\|u\|\|_{p,w} = \left(\int_\Omega w(x)\|u(x)\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$;
$\|\|u\|\|_{k,p,w}$	Norma da função u no espaço $W^{k,p}(\Omega, w)$ dada por $\|\|u\|\|_{k,p,w} = \left(\sum_{\|\alpha\| \leq k} \|\|D^\alpha u\|\|_{p,w_\alpha}^p\right)^{\frac{1}{p}}$;
$\|\|u\|\|_{W_0^{1,p}(\Omega,w)}$	Norma da função u no espaço $W_0^{1,p}(\Omega, w)$ dada por $\|\|u\|\|_{W_0^{1,p}(\Omega,w)} = \left(\int_\Omega w(x)\|\nabla u\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$;

$\|\|u\|\|$	Norma da função u no espaço $W_0^{1,2}(\Omega, w)$ dada por $\|\|u\|\| = \left(\int_\Omega \|x\|^{-2a}\|\nabla u\|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ em que $w(x) = \|x\|^{-2a}$ é a função peso;
A_p	Conjunto das funções pesos w, tais que $w \in L^1_{Loc}(\Omega)$ e $w^{-\frac{1}{p-1}} \in L^1_{Loc}(\Omega)$;
$\mathbb{G}$	Conjunto das funções $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ tal que g é uma função de classe C^1;
$\mathbb{M}$	Conjunto das funções $f \in \mathbb{G}$ tal que $f'(y) \geq (p-1)[f(y)]^{\frac{p-2}{p-1}}$ para todo $y > 0$;
$\rightharpoonup$	Convergência fraca, quando $n \to +\infty$;
$\to$	Convergência forte, quando $n \to +\infty$;
$\hookrightarrow$	Imersão contínua;
q.t.p	quase todo ponto;
$o_n(1)$	Sequências que convergem a zero quando $n \to +\infty$;

Sumário

1 Introdução

Neste trabalho vamos estudar propriedades de soluções positivas para a seguinte classe de equações elípticas dada por

$$-\Delta_{p,w}u = f(x,u), \quad 1 < p < \infty, \tag{1.1}$$

em que $w \in A_p$ é a função peso e $\Delta_{p,w}$ é o operador p-Laplaciano com peso, dado por

$$\Delta_{p,w}u := \operatorname{div}(w|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

em um domínio suave limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e não linearidade f. Note que, quando $w = 1$, o operador $\Delta_{p,w}$ torna-se o operador p-Laplaciano Δ_p definido por $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ o que se reduz ainda mais ao Laplaciano clássico Δ para $p = 2$.

Fazendo uma breve análise histórica sobre o problema (1.1) temos inicialmente o trabalho pioneiro de Fabes [19], onde os autores estabeleceram um resultado de regularidade de Hölder local e algum princípio do máximo junto com Poincaré para estudar problemas em operadores elípticos degenerados com pesos de Muckenhoupt. Além disso, resultados relativos às desigualdades com peso de Poincaré e Sobolev foram obtidos por Chanillo e Wheeden [10], enquanto que o teorema de Liouville foi provado para o peso $w(x) = |x|^r$ com $r > N$ e $N > 2$ em De Cicco-Vivaldi [12] e o problema de autovalor degenerado estudado em Kawohl [24]. Em Prashanta [21] estes resultados são melhorados e complementados.

Assim o primeiro objetivo deste trabalho é estudar os resultados obtidos em [21] que fornecem condições suficientes para a função peso w estabelecer a inexistência de supersoluções positivas, desigualdade do tipo Hardy, teorema da comparação e propriedades de simplicidade e monotonicidade do primeiro autovalor para o operador p-Laplaciano com peso na estrutura do espaço de Sobolev com peso. Alguns desses resultados são obtidos como consequência da famosa Identidade de Picone. Vale ainda ressaltar que quando $w = 1$, várias propriedades qualitativas de soluções para a equação (1.1) vem sendo estudadas nos últimos anos, uma boa referência está no artigo de Allegretto-Huang [2].

Posteriormente, inspirados pelos belos trabalhos de [3] e [6] mostraremos a existência de solução não negativa para a seguinte classe de equações elípticas

$$\begin{cases} -\Delta_{2,w}u = f(u)|x|^{-2^*a}, \text{ em } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ u > 0, \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

em que $\Delta_{2,w}$ é o operador Laplaciano com peso, dado por $\Delta_{2,w}u = \operatorname{div}(|x|^{-2a}\nabla u)$ e $N \geq 3$, $-\infty < a < \dfrac{N-2}{2}$, $a \leq e \leq a+1$, $d = 1 + a - e$ e $2^* = \dfrac{2N}{N-2d}$ que denota o expoente crítico de Hardy e Sobolev. Além disso, supomos que f é uma função contínua que satisfaz as seguintes condições:

(f_1) $\displaystyle\lim_{s\to 0}\frac{f(s)}{|s|^{2^*-1}} = \limsup_{|s|\to+\infty}\frac{f(s)}{|s|^{r-1}} = 0$ em que $1 < r \leq 2^* - 1$

(f_2) $\displaystyle\lim_{|s|\to+\infty}\frac{F(s)}{|s|^2} = +\infty$

(f_3) $H(s) = sf(s) - 2F(s)$ é crescente em $|s|$ e $H(0) = 0$.

Obtemos a existência de solução para o problema acima usando uma versão do conhecido Teorema do Passo da Montanha encontrada em [13]. Como ocorre em problemas deste tipo, nos deparamos com a necessidade de mostrar a limitação da sequência de Cerami, para isso adaptamos os resultados de [3]. E para mostrar a convergência forte da sequência de Cerami utilizamos a condição S_+ encontrada na referência [27].

Apresentaremos a seguir a disposição geral deste trabalho. No Capítulo 2, apresentamos alguns resultados preliminares sobre espaços de Lebesgue e espaços de Sobolev que serão essenciais no decorre deste trabalho. No Capítulo 3, faremos uma breve introdução aos espaços de Lebesgue com peso e espaços de Sobolev com peso, enunciando e provando alguns resultados sobre esses espaços. Para o Capítulo 4, fazemos um estudo qualitativo de algumas propriedades de soluções positivas para alguma equação elíptica em um domínio limitado e com não linearidade f. Por fim, no Capítulo 5 mostramos a existência de soluções não negativas para uma classe de problemas elípticos envolvendo o operador Laplaciano com peso.

2 Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados sobre os espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$ e espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, juntamente com o Teorema do Passo da Montanha que serão fundamentais para os capítulos posteriores. Os resultados podem ser encontrados em [1], [8], [9] e [16] .

2.1 Espaços de Lebesgue L^p

Definição 2.1. *Seja $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável e $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o conjunto das funções $u = u(x)$ mensuráveis tal que $\int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty$ dotado da norma*

$$||u||_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

E o espaço $L^\infty(\Omega)$ é o conjunto de funções mensuráveis limitadas, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que $|u(x)| \leq C$ q.t.p sobre Ω dotado da norma

$$||u||_{L^\infty} = \inf\{C; |u(x)| \leq C \quad q.t.p \ sobre \ \ \Omega\}.$$

Chamamos o espaço $L^p(\Omega)$ de *Espaço de Lebesgue*. Além disso, $L^p(\Omega)$ equipado com a norma $||u||_{L^p}$ é um espaço de Banach [9, Teorema 4.8] que é para $1 < p < \infty$ uniformemente convexo e, portanto, reflexivo.

Definição 2.2. *Denotamos por $L^p_{Loc}(\Omega)$ o conjunto das funções $u = u(x)$ definidas em Ω para o qual $u \in L^p(Q)$ para todo conjunto compacto $Q \subset \Omega$.*

Teorema 2.3. ***(Teorema 3.18 - [9], pág. 69)*** *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e (u_n) uma sequência limitada em E, então existe uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) que converge na topologia fraca de E.*

Teorema 2.4. ***(Teorema 4.9 - [9], pág. 94)*** *Seja (u_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e seja $u \in L^p(\Omega)$ tal que $||u_n - u||_{L^p} \to 0$. Então existe uma subsequência (u_{n_k}) e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que*

(i) $u_{n_k}(x) \to u(x)$ *q.t.p em* Ω.

(ii) $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$ *para todo* k *q.t.p em* Ω.

Proposição 2.5. ***(Lema 2.2 - [1], pág. 23)*** *Sejam $a, b \geq 0$ e $1 \leq p < +\infty$, então $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.*

Proposição 2.6. ***(Teorema 1.2.2 - [7], pág. 7)*** *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $1 \leq p < +\infty$, então $|a-b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$.*

Proposição 2.7. ***(Desigualdade de Young - [23], pág. 219)*** *Sejam $p > 1$ e $q > 1$ reais tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dados $a \geq 0$ e $b \geq 0$ então vale*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{2.1}$$

valendo a igualdade se $a^p = b^p$.

Teorema 2.8. ***(Desigualdade de Hölder - [9], pág. 92)*** *Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Suponha que $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e $||uv||_{L^1} \leq ||u||_{L^p}||v||_{L^q}$.*

Lema 2.9. ***(Lema de Fatou - [9], pág. 90)*** *Seja (u_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ tal que*

(i) para todo n, $u_n \geq 0$ q.t.p em Ω.

(ii) $\sup_n \int_\Omega u_n < \infty$.

Para quase todo $x \in \Omega$ definimos $u(x) = \liminf\limits_{n\to\infty} u_n(x) \leq +\infty$. Então $u \in L^1$ e

$$\int_\Omega u_n(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x).$$

Teorema 2.10. ***(Teorema da Convergência Dominada - [9], pág. 90)*** *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que satisfaz*

(i) $f_n(x) \to f(x)$, q.t.p em Ω.

(ii) Existe uma função g em $L^1(\Omega)$ tal que, para todo n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em Ω.

Então f está em $L^1(\Omega)$ e $||f_n - f||_{L^1(\Omega)} \to 0$.

Definição 2.11. *Dizemos que uma sequência (u_n) é uma sequência de Cerami, abreviadamente sequência (C), para um funcional I de classe C^1 se (u_n) satisfaz*

$$I(u_n) \to c \quad e \quad (1 + ||u_n||)I'(u_n) \to 0.$$

Teorema 2.12. ***(Teorema do Passo da Montanha - [4, 13])*** *Seja E um espaço de Banach real e suponha que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaça a condição*

$$\max\{I(0), I(d)\} \leq \alpha < \beta \leq \inf\{I(u)\},$$

para alguma $\alpha < \beta$, $\rho > 0$ e $d \in E$ com $||d||_E > \rho$. Seja $c \leq \beta$ caracterizada por :

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{0\leq t\leq 1} I(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C^0([0,1], E),\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = d\}$ *é o conjunto de caminhos contínuos ligando* 0 *e* d*. Então, existe uma sequência de Cerami de* I *com o nível do passo da mantanha* $c \geq \beta$*.*

2.2 Espaços de Sobolev $W^{k,m}$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Denotaremos por $x = (x_1, \ldots, x_n)$ os pontos de Ω, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^N$ as n-uplas de números inteiros não negativos (ou multi-índice) e por $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ seu comprimento. Além disso, denotamos também

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdot \partial x_n^{\alpha_n}}$$

o operador derivação. Em particular, se $u \in C^1(\Omega)$ então temos que $D^0 = u$ e $D^1 u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, em que $D_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ com $1 \leq i \leq n$. Dizemos que o **suporte** de u, o qual será denotado por $\operatorname{supp}(u)$, é definido como o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$. Se este conjunto for um compacto do $\mathbb{R}^N$ então dizemos que u possui **suporte compacto**. Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis e possuem suporte compacto. As funções $u \in C_0^\infty(\Omega)$ são chamadas de **funções testes**.

Definição 2.13. *Sejam* $u, v \in L^1_{Loc}(\Omega)$ *e* $\alpha \in \mathbb{N}^N$ *um multi-índice. Dizemos que* v *é a* α*-ésima derivada fraca de* u *e escrevemos* $D^\alpha u = v$ *se*

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi$$

para toda função teste $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$*.*

Definição 2.14. *Seja* $k \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq p < +\infty$*. Denotamos por* $W^{k,p}(\Omega)$ *o conjunto de todas as funções* $u \in L^p(\Omega)$ *para o qual as derivadas fracas* $D^\alpha u$ *com* $|\alpha| \leq k$ *existem em* $L^p(\Omega)$*.*

O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é chamado de *Espaço de Sobolev* e equipado com a norma

$$||u||_{W^{k,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha u||^p_{L^p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach [1, Teorema 3.3] que é para $1 < p < +\infty$ um espaço uniformemente convexo e reflexivo [1, Teorema 3.6].

Definição 2.15. *Denotamos por* $W^{k,p}_{Loc}(\Omega)$ *o conjunto das funções* u *definidas em* Ω *para o qual* $u \in W^{k,p}(Q)$ *para todo conjunto compacto* $Q \subset \Omega$*.*

Teorema 2.16. ***(Teorema de Imersão - [16], pág. 21)***

(i) *O espaço de Sobolev está imerso continuamente no espaço de Banach X, ou seja, a estimativa*

$$||u||_X \leq c\ ||u||_{W^{k,p}}$$

vale para cada função $u \in W^{k,p}(\Omega)$ com uma constante $c > 0$ independente de u, onde

(a) *$X = L^q(\Omega)$ com*

$$\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} + \frac{k}{N} \tag{2.2}$$

desde que $kp < N$.

(b) *$X = L^r(\Omega)$ com $r > 1$ arbitrário se $kp < N$.*

(c) *$X = C^{m,k}(\overline{\Omega})$ desde que $kp = N$ onde m é um inteiro não negativo e o número λ são escolhidos de tal forma que qualquer*

$$(k-m-1)p < N < (k-m)p \quad e \quad 0 < \lambda \leq \frac{(k-m)p - N}{p} \tag{2.3}$$

ou $(k-m-1) = N$ e $\lambda \in (0,1)$ arbitrário.

(ii) *Além disso, a imersão (b) é compacta e as imersões (a) e (c) são compactas se as desigualdades (2.2) e (2.3) são estritas.*

Apresentaremos algumas definições que serão úteis nos próximos capítulos. Para maiores detalhes sugerimos [18].

Suponha Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ e considere o problema de Dirichlet homogêneo

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), \ \text{em } \Omega, \\ u = 0, \ \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável, com $|f'(x)| \leq c$ para todo $x \in \Omega$ e para alguma constante $c > 0$.

Definição 2.17. (i) *Uma função $u_1 \in C^2(\Omega)$ é dita **subsolução** de (2.4) se:*

$$\begin{cases} -\Delta u_1 \leq f(x), \ em\ \Omega, \\ u_1 \leq 0, \ em\ \partial\Omega. \end{cases}$$

(ii) *Analogamente, uma função $u_2 \in C^2(\Omega)$ é dita **supersolução** de (2.4) se:*

$$\begin{cases} -\Delta u_2 \geq f(x), \ em\ \Omega, \\ u_2 \geq 0, \ em\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Definição 2.18. (*i*) *Dizemos que* $u_1 \in W^{1,2}(\Omega)$ *é uma* ***subsolução fraca*** *de* (2.4) *se:*

$$\int_\Omega Du_1 \cdot Dv dx \leq \int_\Omega f(x) v dx$$

para cada $v \in C_0^\infty(\Omega),\ v \geq 0$ *q.t.p.*

(*ii*) *Analogamente, uma função* $u_2 \in W^{1,2}(\Omega)$ *é dita* ***supersolução fraca*** *de* (2.4) *se:*

$$\int_\Omega Du_2 \cdot Dv dx \geq \int_\Omega f(x) v dx$$

para cada $v \in C_0^\infty(\Omega),\ v \geq 0$ *q.t.p.*

(*iii*) *Dizemos que* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *é uma* ***solução fraca*** *de* (2.4) *se:*

$$\int_\Omega Du \cdot Dv dx = \int_\Omega f(x) v dx$$

para cada $v \in C_0^\infty$.

3 Introdução aos espaços de Sobolev com peso

Neste capítulo trazemos alguns resultados envolvendo os espaços de Lebesgue com peso e Solobolev com peso.

3.1 Espaços de Lebesgue com peso

Para maiores detalhes sobre o assunto sugerimos Drabek, Hufner e Nicolosi [16] e Kufner [25].

Definição 3.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $1 \leq p < \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega, w)$ o conjunto das funções $u = u(x)$ mensuráveis tal que $\int_\Omega |u(x)|^p w(x)dx < \infty$ onde $w = w(x)$ é uma função positiva e mensurável em Ω. A função $w = w(x)$ é chamada de Função Peso.*

O espaço $L^p(\Omega, w)$ é conhecido como *Espaço de Lebesgue com peso.* Além disso, $L^p(\Omega, w)$ equipado com a norma

$$||u||_{p,w} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach que é para $p > 1$ uniformemente convexo e portanto reflexivo. Conforme veremos abaixo.

Teorema 3.2. ***(Teorema 1.3 - [25], pág. 538)*** *O espaço $L^p(\Omega, w)$, $1 \leq p < \infty$ equipado com a norma $||u||_{p,w}$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega, w)$, por definição, temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0$ então

$$||u_m - u_n||_{p,w} \quad = \quad \left(\int_\Omega |u_m - u_n|^p w^{\frac{p}{p}}\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

o que implica em

$$||u_m - u_n||_{p,w} = \left(\int_\Omega (|u_m w^{\frac{1}{p}} - u_n w^{\frac{1}{p}}|)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Seja $v_m(x) = u_m(x)w^{\frac{1}{p}}(x)$ e $v_n(x) = u_n(x)w^{\frac{1}{p}}(x)$, observemos que (v_n) é uma sequência em $L^p(\Omega)$. Temos também que

$$\left(\int_\Omega |v_m(x) - v_n(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{3.1}$$

isto é,

$$||v_m - v_n||_{L^p} < \varepsilon \text{ sempre que } m, n > n_0. \tag{3.2}$$

Portanto (v_n) é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$ e como $L^p(\Omega)$ é Banach, temos que existe $v(x) \in L^p(\Omega)$ tal que $\lim v_n(x) = v(x)$ em $L^p(\Omega)$. Seja $u(x) = v(x)w^{-\frac{1}{p}}(x)$, por definição temos que $u(x) \in L^p(\Omega, w)$. Como $v_n(x) = u_n(x)w^{\frac{1}{p}}(x)$ é uma sequência em $L^p(\Omega)$ tal que $||v_n - v||_{L^p} \to 0$, segue pelo Teorema 2.4 que existe uma subsequência (v_{n_k}) tal que $v_{n_k}(x) \to v(x)$ q.t.p em Ω. Daí temos que

$$\lim_{k\to\infty} v_{n_k}(x) = v(x) \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} u_{n_k}(x)w^{\frac{1}{p}}(x) = v(x)$$

isto é,

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k}(x) = \frac{v(x)}{w^{\frac{1}{p}}(x)}$$

visto que w é uma função mensurável e positiva. Daí temos que

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k}(x) = \frac{v(x)}{w^{\frac{1}{p}}(x)} = \frac{u(x)w^{\frac{1}{p}}(x)}{w^{\frac{1}{p}}(x)} = u(x) \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Como $(u_n) \subset L^p(\Omega, w)$ é uma sequência de Cauchy e (u_{n_k}) uma subsequência de (u_n) tal que $u_{n_k}(x) \to u(x)$ então por [26, Proposição 3] temos que $u_n(x) \to u(x)$. Assim

$$||u_n - u||_{p,w} = \left(\int_\Omega (|u_n w^{\frac{1}{p}} - u w^{\frac{1}{p}}|)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega |v_n(x) - v(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

logo

$$||u_n - u||_{p,w} = ||v_n - u||_{L^p} \to 0.$$

Portanto $u_n \to u$ em $L^p(\Omega, w)$, isto é, $L^p(\Omega, w)$ é Banach.

□

Lema 3.3. ***(Lema 1.1 - [16], pág. 18)*** *Seja v uma função peso e M_v o operador de multiplicação pontual dado por,*

$$M_v(u) = v(x)u(x), \; x \in \Omega.$$

Se w é uma função peso e $v = w^{\frac{1}{p}}$, $1 < p < \infty$, então $M_v : L^p(\Omega, w) \to L^p(\Omega)$ é um isomorfismo isométrico.

Demonstração. Seja $v(x) = w^{\frac{1}{p}}(x)$, $M_v : L^p(\Omega, w) \to L^p(\Omega)$ dado por $M_v(u) = v(x)u(x)$ e $1 < p < \infty$, iremos mostrar que M_v é um isomorfismo isométrico. Faremos a prova deste fato nas quatro etapas abaixo.

(i) M_v é linear.
De fato, seja $f, g \in L^p(\Omega, w)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então temos que

$$\begin{aligned} M_v(f+\alpha g)(x) &= (f+\alpha g)(x)\cdot v(x) \\ &= f(x)v(x) + \alpha g(x)v(x) \\ &= M_v f(x) + \alpha M_v g(x). \end{aligned}$$

(ii) M_v é uma aplicação injetiva.
Com efeito, tome $f \in Ker(M_v)$, ou seja, $M_v f(x) = 0$. Daí, sendo $v = w^{\frac{1}{p}}$ para $1 \leq p \leq \infty$ temos

$$0 = M_v f(x) = f(x)v(x) = f(x)w^{\frac{1}{p}}.$$

Como w é uma função peso, segue que w é mensurável e positiva, logo $w(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$. Assim, como $M_v f(x) = f(x)w^{\frac{1}{p}} = 0$ e $w > 0$ segue que $f(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$, isto é $f \equiv 0$. Portanto M_v é uma aplicação injetiva.

(iii) M_v é uma aplicação sobrejetiva.
Seja $f \in L^p(\Omega)$. Então como $v = w^{\frac{1}{p}}$ é uma função peso, segue que $v > 0$. Note que, $\frac{f}{v} \in L^p(\Omega, w)$, pois

$$\int_\Omega \left|\frac{f}{v}\right|^p w = \int_\Omega \frac{|f|^p}{v^p} w = \int_\Omega |f|^p < \infty.$$

Assim, temos que $M_v(\frac{f}{v}(x)) = \frac{f(x)}{v(x)} v(x) = f(x)$ para todo $x \in \Omega$ e portanto M_v é uma aplicação sobrejetiva.

(iv) M_v é uma isometria.
Seja $u \in L^p(\Omega, w)$ então temos

$$||M_v u(x)||_{L^p} = ||u(x)v(x)||_{L^p} = ||u(x)w^{\frac{1}{p}}||_{L^p} = \left(\int_\Omega |uw^{\frac{1}{p}}|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

isto é,

$$||M_v u(x)||_{L^p} = \left(\int_\Omega |u|^p w\right)^{\frac{1}{p}} = ||u||_{p,w}.$$

Logo $||M_v u(x)||_{L^p} = ||u||_{p,w}$ para todo $u \in L^p(\Omega, w)$.

De (i), (ii), (iii) e (v) concluímos que M_v é um isomorfismo isométrico. □

Definição 3.4. *Seja $p > 1$. Diremos que uma função peso w satisfaz a condição $B_p(\Omega)$ e escrevemos $w \in B_p(\Omega)$ se*

$$w^{\frac{-1}{(p-1)}} \in L^1_{Loc}(\Omega).$$

Teorema 3.5. ***(Teorema 1.5 - [25], pág. 538)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, $p > 1$, $w \in B_p(\Omega)$ e Q um conjunto compacto em $\mathbb{R}^N$, $Q \subset \Omega$. Então $L^p(\Omega, w) \hookrightarrow L^p(Q)$, ou seja, $L^p(\Omega, w)$ está imerso continuamente em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $u \in L^p(\Omega, w)$, então pela desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}\int_Q |u(x)|dx &= \int_Q |u(x)|w^{\frac{1}{p}}(x)w^{\frac{-1}{p}}(x)dx \\ &\leq \left(\int_Q (|u(x)|w^{\frac{1}{p}}(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_Q w^{\frac{-1}{p-1}}(x)dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \left(\int_Q (|u(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_Q w^{\frac{-1}{p-1}}(x)dx\right)^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$

Como $w \in B_p(\Omega)$ e Q um conjunto compacto em $\mathbb{R}^N$, $Q \subset \Omega$, segue que $w^{\frac{-1}{(p-1)}} \in L^1_{Loc}(\Omega)$. Assim, $\displaystyle\int_Q w^{\frac{-1}{p-1}}(x)dx < \infty$ e portanto

$$||u||_{L^1} \leq c\ ||u||_{p,w}, \text{ para todo } u \in L^p(\Omega, w),$$

onde $c > 0$ é uma constante. □

Proposição 3.6. ***(Observação 1.8 - [25], pág. 539)*** *Seja $w \in B_p(\Omega)$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice fixado. Então*

$$L_\alpha(u) = \int_\Omega u D^\alpha \phi dx, \ u \in L^p(\Omega, w)$$

define um funcional linear contínuo em $L^p(\Omega, w)$.

Demonstração. Com efeito, como $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ então temos que φ tem suporte compacto. Seja $Q = \mathrm{supp}(\phi)$, então sendo $Q \subset \Omega$, segue pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}|L_\alpha(u)| &= \left|\int_\Omega u D^\alpha \phi\right| \leq \int_\Omega |u D^\alpha \phi| \\ &= \int_\Omega |u||D^\alpha \phi| = \int_\Omega |u||D^\alpha \phi| w^{\frac{1}{p}} w^{\frac{-1}{p}} \\ &= \int_\Omega |u| w^{\frac{1}{p}} |D^\alpha \phi| w^{\frac{-1}{p}} \\ &\leq \left(\int_\Omega |u w^{\frac{1}{p}}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |D^\alpha \phi w^{\frac{-1}{p}}|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \left(\int_\Omega |u|^p |w|\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_Q |D^\alpha \phi|^{\frac{p}{p-1}} |w|^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= ||u||_{p,w} \left(\int_Q |D^\alpha \phi|^{\frac{p}{p-1}} |w|^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$

Além disso, sendo $Q \subset \Omega$ um conjunto compacto e $D^\alpha \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ segue pelo Teorema de Weierstrass que $D^\alpha \phi$ admite um ponto de máximo, isto é,

$$|D^\alpha \phi| \leq \max_{x \in Q} |D^\alpha \phi(x)|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |L_\alpha(u)| &\leq ||u||_{p,w} \max_{x\in Q} |D^\alpha \phi(x)| \left(\int_Q |w^{\frac{-1}{p-1}}| \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq c_1 \; c_2 \; ||u||_{p,w} = c \; ||u||_{p,w}, \end{aligned}$$

onde $c_1 = \max_{x\in Q} |D^\alpha \phi(x)|$ e $c_2 = \int_Q |w^{\frac{-1}{p-1}}| dx < +\infty$, pois $w \in B_p(\Omega)$. Portanto $|L^\alpha(u)| \leq c \; ||u||_{p,w}$ para todo $w \in L^p(\Omega, w)$ e $c > 0$.

□

3.2 Espaços de Sobolev com peso

Definição 3.7. *Seja $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ e w uma familía de funções peso w_α, $|\alpha| \leq k$, isto é, $w = \{w_\alpha(x),\ x \in \Omega; |\alpha| \leq k\}$. Denotamos por $W^{k,p}(\Omega, w)$ o conjunto das funções $u \in L^p(\Omega, w_0)$ onde 0 denota o muiti-índice $0 = (0, 0, ..., 0)$ para os quais as derivadas fracas $D^\alpha u$ com $|\alpha| \leq k$ pertencem a $L^p(\Omega, w_\alpha)$.*

Chamamos o espaço $W^{k,p}(\Omega, w)$ de *Espaço de Sobolev com peso* equipado com a norma (veja [16]),

$$||u||_{k,p,w} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha u||^p_{p,w_\alpha} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Neste trabalho, consideraremos apenas o caso em que $k = 1$ com a norma

$$||u||_{1,p,w} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \; w_0(x) dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p w_i(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 3.8. ***(Teorema 1.11 - [25], pág. 540)*** *Seja $w_\alpha \in B_p(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq 1$, então o espaço $W^{1,p}(\Omega, w)$, $1 \leq p < \infty$ equipado com a norma $||u||_{1,p,w}$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em $W^{1,p}(\Omega, w)$, então para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > n_0$ então

$$||u_n - u_m||_{1,p,w} = \left(\sum_{|\alpha|\leq 1} \int_\Omega |D^\alpha (u_n - u_m)|^p \; w_\alpha(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

isto é,

$$\left(\sum_{|\alpha|\leq 1} \int_\Omega |D^\alpha u_n - D^\alpha u_m)|^p \; w_\alpha(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} = ||D^\alpha u_n - D^\alpha u_m)||_{p,w_\alpha} < \varepsilon.$$

Então $(D^\alpha u_n)$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega, w_\alpha)$ para todo $||\alpha|| \leq 1$ e pela completude do espaço de Lebesgue com peso (Teorema 3.2), existe uma funçao $u_\alpha \in$

$L^p(\Omega, w_\alpha)$ tal que $u_\alpha = \lim_{n\to\infty} D^\alpha u_n$ em $L^p(\Omega, w_\alpha)$. Note ainda que pela definição do espaço de Sobolev, como $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega, w)$ então $(u_n) \subset L^p(\Omega, w_0)$ e pela completude do espaço $L^p(\Omega, w_0)$ segue que $u_n \to u_0$ em $L^p(\Omega, w_0)$.
Fixando $|\alpha| \leq 1$ e a função $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, vamos considerar o funcional

$$L_\alpha : L^p(\Omega, w) \to \mathbb{R}, \quad L_\alpha(u) = \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx.$$

Pela Proposição 3.6 temos que o funcional linear L_α é contínuo em $L^p(\Omega, w_0)$, logo

$$L_\alpha(u_n) \to L_\alpha(u_0). \tag{3.3}$$

Seja agora L_0 um funcional linear contínuo em $L^p(\Omega, w_\alpha)$ e sabendo-se que $u_\alpha = \lim_{n\to\infty} D^\alpha u_n$ segue que

$$L_0(D^\alpha u_n) \to L_0(u_\alpha). \tag{3.4}$$

Então pela definição de derivada fraca (ou distribucional) temos que

$$L_0(D^\alpha u_n) \;=\; \int_\Omega D^\alpha u_n \varphi dx = -\int_\Omega u_n D^\alpha \varphi dx = -L_\alpha(u_n).$$

Daí temos que $L_\alpha(u_n) = -L_0(D^\alpha u_n)$. Passando o limite quando $n \to 0$ na igualdade acima e usando (3.3) e (3.4), segue que

$$L_\alpha(u_0) = -L_0(u_\alpha), \tag{3.5}$$

isto é,

$$\int_\Omega u_0 D^\alpha \varphi = -\int_\Omega u_\alpha \varphi, \quad \text{para todo} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Como a iguldade acima é válida para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, segue que u_α é a derivada distribucional de u_0, ou seja, $u_\alpha = D^\alpha u_0$. Como $u_\alpha = D^\alpha u_0 \in L^p(\Omega, w_\alpha)$ e $w_\alpha \in B_p(\Omega)$ segue pelo Teorema 3.5 que $L^p(\Omega, w_\alpha) \subset L^1_{Loc}(\Omega)$, logo $u_\alpha = D^\alpha u_0 \in L^p(\Omega, w_\alpha) = L^p(\Omega, w_\alpha) \cap L^1_{Loc}(\Omega)$. Além disso, note que como $u_n \to u_0$ em $L^p(\Omega, w_0)$ então temos que $u_0 \in L^p(\Omega, w_0)$. Donde concluímos que $u_0 \in W^{1,p}(\Omega, w)$ e

$$||u_n - u_0||^p_{1,p,w} \;=\; \sum_{|\alpha|\leq 1} ||D^\alpha u_n - D^\alpha u_0||^p_{p,w_\alpha} = \sum_{|\alpha|\leq 1} ||D^\alpha u_n - u_\alpha||^p_{p,w_\alpha}$$

tomando o limite quando $n \to \infty$ segue que $||u_n - u_0||^p_{1,p,w} \to 0$, visto que $||D^\alpha u_n - u_\alpha||^p_{p,w_\alpha} \to 0$. Portanto, a sequência de Cauchy (u_n) converge para u_0 em $W^{1,p}(\Omega, w)$, ou seja, $W^{1,p}(\Omega, w)$, é Banach. □

3.3 Espaços de Sobolev com peso $W^{1,p}(\Omega, w)$

Apresentaremos a seguir alguns resultados importantes sobre Espaços de Sobolev com peso. Para maiores detalhes, sugerimos [5], [14], [17] e [21].

Definição 3.9. *A classe de pesos A_p é definida por*

$$A_p = \{w \text{ é uma função peso em } \Omega : w \in L^1_{Loc}(\Omega),\ w^{-\frac{1}{p-1}} \in L^1_{Loc}(\Omega)\}.$$

Exemplo 3.10. $w(x) = |x|^\alpha \in A_p$ *se* $-N < \alpha < N(p-1)$.
A prova deste resultado pode ser vista em [28, pág. 229 e pág. 236]

Definição 3.11. *Para $w \in A_p$ definiremos o espaço de Sobolev com peso $W^{1,p}(\Omega, w)$ como o conjunto de todas as funções mensuráveis de Lebesgue u definidas em Ω para o qual*

$$||u||_{1,p,w} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx + \int_\Omega w(x)|\nabla u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty. \tag{3.6}$$

Proposição 3.12. ***(Teorema 1.3 - [16], pág. 23)*** *Seja $w \in L^1_{Loc}(\Omega)$ então $C_0^\infty(\Omega)$ é um subconjunto de $W^{1,p}(\Omega, w)$.*

Demonstração. Seja $u \in C_0^\infty(\Omega)$, então sabemos que u possui suporte compacto. Seja $K = \text{supp}(u)$. Como $K \subset \Omega$ é compacto e $u \in C^\infty(\Omega)$ segue que

$$\int_\Omega |u|^p dx = \int_K |u|^p dx < +\infty$$

Logo, $u \in L^p(\Omega)$. Resta-nos mostrar que $\nabla u \in L^p(\Omega, w)$. Note que como $u(x) = 0$ para todo $x \in \Omega \backslash K$ então $\nabla u(x) = 0$ para todo $x \in \Omega \backslash K$, isto é, $\text{supp}(\nabla u) \subset K$. Assim por definição, temos que

$$\text{supp}(\nabla u) = \overline{\{x \in \Omega; \nabla u(x) \neq 0\}} \subset K.$$

Por sua vez, como o fecho de qualquer conjunto é um conjunto fechado, segue que $\text{supp}(\nabla u) = K_1$ é um conjunto compacto. Além disso, como $w \in L^1_{Loc}(\Omega)$, segue que para todo conjunto compacto $Q \subset \Omega$ temos

$$\int_Q w(x) dx < +\infty \tag{3.7}$$

Assim, usando a Desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega w(x)|\nabla u|^p dx &= \int_{K_1} w(x)|\nabla u|^p dx \\
&= \int_{K_1} w(x)|\nabla u|^p w(x)^{\frac{1}{p}} w(x)^{-\frac{1}{p}} dx \\
&= \int_{K_1} w(x)^{\frac{p-1}{p}} |\nabla u|^p w(x)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{K_1} w(x) dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{K_1} |\nabla u(x)|^{p^2} w(x)\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Como K_1 é compacto e $\nabla u \in C_0^\infty(\Omega)$, segue pelo Teorema de Weierstrass que a função ∇u admite um ponto de máximo, isto é,

$$|\nabla u| \leq \max_{x \in K_1} |\nabla u|.$$

Assim, por (3.7) e (3.8) segue que

$$\int_{\Omega} w(x)|\nabla u|^p dx \leq M^p \left(\int_{K_1} w(x)dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{K_1} w(x)\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Portanto $\nabla u \in L^p(\Omega, w)$, isto é, $w \in W^{1,p}(\Omega, w)$. □

Definição 3.13. *Como consequência pode-se definir o espaço (veja [25]), $W_0^{1,p}(\Omega, w)$ como o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com relação a norma $||\cdot||_{1,p,w}$, isto é,*

$$W_0^{1,p}(\Omega, w) = \overline{\{C_0^\infty(\Omega), ||\cdot||_{1,p,w}\}}.$$

Definição 3.14. *Definiremos uma nova classe de pesos*

$$A_t = \left\{ w \in A_p : \textit{para alguns} \;\; s \in \left(\frac{N}{p}, \infty\right) \cap \left[\frac{1}{p-1}, \infty\right), \;\; w^{-s} \in L^1(\Omega) \right\}.$$

Assumindo que $p > 2N$ então para $s = \frac{N}{p-2N}$ temos que $p_s = \frac{ps}{s+1} > N$.

Exemplo 3.15. *Observe que $w(x) = |x|^\alpha \in A_t$ se $-N < \alpha < p - 2N$.*

Abaixo apresentamos uma importante desigualdade que iremos usar mais adiante no texto.

Teorema 3.16. ***(Desigualdade de Caffarelli, Kohn, Nirenberg e Xuan - [30], pág. 704)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e suave, com $0 \in \Omega$, $N \geq 3$, $1 < p < N$, $-\infty < a < \frac{N-p}{p}$, $a \leq e \leq a+1$ e $p^* = \frac{Np}{N-dp}$ (chamado de expoente crítico de Hardy-Sobolev) em que $d = 1 + a - e$. Então temos que existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left(\int_{\Omega} |x|^{-\alpha}|u|^r\right)^{\frac{p}{r}} \leq C \int_{\Omega} |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx, \quad \textit{para todo} \;\; u \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \tag{3.9}$$

em que $1 \leq r \leq \dfrac{Np}{N-p}$ e $\alpha \leq (a+1)r + N(1 - \frac{r}{p})$.

Observação 3.17. *Note que para os parâmetros $r = 2^*$, $p = 2$ e $\alpha = 2^* a$ temos que a desigualdade (3.9) é válida, visto que para $1 \leq 2^* \leq \dfrac{2N}{N-2}$ temos que usando a definição do expoente crítico de Hardy-Sobolev temos que*

$$2^* \leq \frac{2N}{N-2} \Leftrightarrow \frac{2N}{N-2d} \leq \frac{2N}{N-2} \Leftrightarrow d \leq 1.$$

Por sua vez, $d = 1 + a - e$, logo

$$d \leq 1 \Leftrightarrow 1 + a - e \leq 1 \Leftrightarrow a \leq e$$

onde esta última desigualdade é verdadeira por hipótese. Vejamos agora o caso em que $2^* a \leq (a+1)2^* + N(1 - \frac{2^*}{2})$. Note que

$$2^* a \leq (a+1)2^* + N(1 - \frac{2^*}{2}) \Leftrightarrow a = \frac{2^* a}{2^*} \leq (a+1) + N\left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{2}\right).$$

Assim, novamente pela definição do expoente crítico de Hardy-Sobolev, temos

$$N\left(\frac{1}{2^*}-\frac{1}{2}\right)=N\left(\frac{N-2d}{N2}-\frac{1}{2}\right)=-d.$$

Logo, sendo $d=1+a-e$, *segue que*

$$a\leq(a+1)-d\Leftrightarrow a\leq e.$$

Assim concluímos que a seguinte desigualdade é verdadeira

$$\left(\int_\Omega |x|^{-2^*a}|u|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}\leq C\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u|^2dx,\quad \textit{para todo}\ \ u\in W_0^{1,2}(\Omega,|x|^{-2a}).$$

A seguir apresentaremos alguns resultados sobre imersões para espaços de Sobolev com peso.

Teorema 3.18. ***(Teorema de Imersão para Espaços de Sobolev com peso - [20], pág. 5)***

(i) *Para qualquer* $w\in A_t$, *temos a imersão contínua*

$$W^{1,p}(\Omega,w)\hookrightarrow W^{1,p_s}(\Omega)\hookrightarrow\begin{cases}L^q(\Omega),\ \textit{para}\ p_s\leq q\leq p_s^*\ \textit{no caso de}\ 1\leq p_s<N,\\ L^q(\Omega),\ \textit{para}\ 1\leq q<+\infty\ \textit{no caso de}\ p_s=N,\\ C(\overline{\Omega})\ \textit{no caso de}\ p_s>N,\end{cases}$$

onde $p_s=\dfrac{ps}{s+1}\in[1,p)$.

(ii) *Além disso, as imersões acima são compactas, exceto para* $q=p_s^*$ *no caso de* $1\leq p_s<N$.

(iii) *O mesmo resultado vale para o espaço* $W_0^{1,p}(\Omega,w)$.

Teorema 3.19. ***(Teorema 2.2 - [11], pág. 12)*** *Seja* $w\in A_p$ *com* $1<p<+\infty$ *então a imersão* $W^{1,p}(\Omega,w)\hookrightarrow L^p(\Omega,w)$ *é compacta.*

Assumiremos também para o resto da dissertação, $h\in\mathbb{G}$ e $f\in\mathbb{M}$, salvo indicação em contrário onde $\mathbb{G}$ e $\mathbb{M}$ são definidos da seguinte forma:

$$\mathbb{G}=\{g:(0,\infty)\to(0,\infty):g\text{ é uma função de classe }\ C^1\}$$

$$\mathbb{M}=\{f\in\mathbb{G}:f'(y)\geq(p-1)[f(y)]^{\frac{p-2}{p-1}}\text{ para todo }y>0\}.$$

Note que $f(x)=x^{p-1}$ pertence a $\mathbb{M}$ visto que f é solução da equação diferencial ordinária $f'(y)=(p-1)[f(y)]^{\frac{p-2}{p-1}}$e portanto a igualdade é alcançada.

O próximo resultado é essencial para as provas de algumas propriedades envolvendo o operador $p-$Lapaciano com peso. A demonstração é baseada na referência [2].

Lema 3.20. ***(Identidade de Picone - [21], pág. 486)*** *Seja Ω um domínio qualquer em $\mathbb{R}^N$, $u \geq 0$, $v > 0$ funções diferenciáveis em Ω e w uma função peso definida em Ω. Seja*

$$L(u,v) = w(x)\left\{|\nabla u|^p - \frac{pu^{p-1}}{f(v)}|\nabla v|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + \frac{u^p f'(v)}{(f(v))^2}|\nabla v|^p\right\}$$

$$R(u,v) = w(x)\left\{|\nabla u|^p - \nabla\left(\frac{u^p}{f(v)}\right) \cdot |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right\}.$$

Então $L(u,v) = R(u,v) \geq 0$ em Ω. Além disso, $L(u,v) = 0$ q.t.p em Ω se, e somente se, $u = cv$ q.t.p em Ω para alguma constante $c > 0$.

Demonstração. Com efeito, seja w uma função peso e $u, v : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em Ω. Expandindo $R(u,v)$, e usando a regra de derivação do quociente, obtemos

$$\nabla\left(\frac{u^p}{f(v)}\right) = \frac{f(v)\nabla u^p - u^p \nabla f(v)}{f(v)^2} = \frac{\nabla u^p}{f(v)} - \frac{u^p \nabla f(v)}{f(v)^2}.$$

Daí, segue pela regra da cadeia que

$$\begin{aligned}
R(u,v) &= w(x)\left\{|\nabla u|^p - \left(\frac{\nabla u^p}{f(v)} - \frac{u^p \nabla f(v)}{f(v)^2}\right) \cdot |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right\}. \\
&= w(x)\left\{|\nabla u|^p - \frac{pu^{p-1}\nabla u|\nabla v|^{p-2}\nabla v}{f(v)} + \frac{u^p f'(v)\nabla v|\nabla v|^{p-2}\nabla v}{f(v)^2}\right\}. \\
&= w(x)\left\{|\nabla u|^p - \frac{pu^{p-1}\nabla u|\nabla v|^{p-2}\nabla v}{f(v)} + \frac{u^p f'(v)\nabla v^2|\nabla v|^p|\nabla v|^{-2}}{f(v)^2}\right\}. \\
&= w(x)\left\{|\nabla u|^p - \frac{pu^{p-1}\nabla u|\nabla v|^{p-2}\nabla v}{f(v)} + \frac{u^p f'(v)|\nabla v|^p}{f(v)^2}\right\}. \\
&= L(u,v).
\end{aligned}$$

Logo, $R(u,v) = L(u,v)$. Mostraremos agora que $L(u,v) = R(u,v) \geq 0$ em Ω. De fato, note que

$$\begin{aligned} L(u,v) &= w(x)\left\{|\nabla u|^p - \frac{pu^{p-1}}{f(v)}|\nabla v|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v + \frac{u^p f'(v)}{(f(v))^2}|\nabla v|^p\right\} \\ &= w(x)\bigg\{|\nabla u|^p + \frac{u^p f'(v)|\nabla v|^p}{(f(v))^2} - \frac{pu^{p-1}|\nabla u||\nabla v|^{p-1}}{f(v)} + \frac{pu^{p-1}|\nabla v|^{p-1}|\nabla u|}{(f(v))} \\ &- \frac{pu^{p-1}|\nabla v|^{p-2}\nabla u\nabla v}{f(v)}\bigg\} \\ &= w(x)\left\{|\nabla u|^p + \frac{u^p f'(v)|\nabla v|^p}{(f(v))^2} - \frac{pu^{p-1}|\nabla u||\nabla v|^{p-1}}{f(v)} + \frac{pu^{p-1}|\nabla v|^{p-2}}{(f(v))}\{|\nabla u||\nabla v| - \nabla u\nabla v\}\right\} \\ &= w(x)\bigg\{p\left(\frac{|\nabla u|^p}{p} + \frac{(u|\nabla v|)^{(p-1)q}}{qf(v)^q}\right) - \frac{p(u|\nabla v|)^{(p-1)q}}{qf(v)^q} + \frac{u^p f'(v)|\nabla v|^p}{(f(v))^2} \\ &- \frac{pu^{p-1}|\nabla u||\nabla v|^{p-1}}{f(v)} + \frac{pu^{p-1}|\nabla v|^{p-2}}{(f(v))}\{|\nabla u||\nabla v| - \nabla u\nabla v\}\bigg\}. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Young, sabemos que dados a, b não negativos, temos que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e a igualdade é válida quando $a^p = b^q$. Aplicando a Desigualdade de Young para $a = |\nabla u|$ e $b = \frac{(u|\nabla v|)^{p-1}}{f(v)}$ segue que

$$\frac{|\nabla u|^p}{p} + \frac{(u|\nabla v|)^{(p-1)q}}{qf(v)^q} \geq \frac{u^{p-1}|\nabla u||\nabla v|^{p-1}}{f(v)}$$

que implica em

$$p\left(\frac{|\nabla u|^p}{p} + \frac{(u|\nabla v|)^{(p-1)q}}{qf(v)^q}\right) \geq \frac{pu^{p-1}|\nabla u||\nabla v|^{p-1}}{f(v)}. \tag{3.10}$$

Como u e $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ são funções não negativas a igualdade (3.10) vale quando

$$|\nabla u|^p = \frac{(u|\nabla v|)^{(p-1)q}}{f(v)^q},$$

ou seja,

$$|\nabla u| = \frac{(u|\nabla v|)^{\frac{(p-1)q}{p}}}{f(v)^{\frac{q}{p}}}.$$

Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, segue que $\frac{(p-1)q}{p} = 1$ e portanto a igualdade é válida quando

$$|\nabla u| = \frac{u|\nabla v|}{f(v)^{\frac{q}{p}}}. \tag{3.11}$$

Por outro lado, usando novamente o fato de que p e q são conjugados de Lebesgue e que $f \in \mathbb{M}$, logo $f'(y) \geq (p-1)f(y)^{\frac{p-2}{p-1}}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{u^p f'(v)|\nabla v|^p}{f(v)^2} &\geq \frac{u^p(p-1)f(v)^{\frac{p-2}{p-1}}|\nabla v|^p}{f(v)^2} = u^p(p-1)f(v)^{-q}|\nabla v|^p \\
&\geq \frac{p(u|\nabla v|)^p}{qf(v)^q} = \frac{p(u|\nabla v|)^{q(p-1)}}{qf(v)^q}
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{u^p f'(v)|\nabla v|^p}{f(v)^2} \geq \frac{p(u|\nabla v|)^{q(p-1)}}{qf(v)^q}. \tag{3.12}$$

A igualdade (3.12) ocorre quando

$$f'(y) = (p-1)f(y)^{\frac{p-2}{p-1}}. \tag{3.13}$$

Combinando (3.10), (3.12) e sabendo que $|\nabla u||\nabla v| \geq \nabla u \nabla v$ temos que

$$\begin{aligned}
L(u,v) &= w(x)\Bigg\{p\left(\frac{|\nabla u|^p}{p} + \frac{(u|\nabla v|)^{(p-1)q}}{qf(v)^q}\right) - \frac{p(u|\nabla v|)^{(p-1)q}}{qf(v)^q} + \frac{u^p f'(v)|\nabla v|^p}{(f(v))^2} \\
&- \frac{pu^{p-1}|\nabla u||\nabla v|^{p-1}}{f(v)} + \frac{pu^{p-1}|\nabla v|^{p-2}}{(f(v))}\{|\nabla u||\nabla v| - \nabla u\nabla v\}\Bigg\} \\
&\geq w(x)\Bigg\{\frac{pu^{p-1}|\nabla u||\nabla v|^{p-1}}{f(v)} - \frac{p(u|\nabla v|)^{(p-1)q}}{qf(v)^q} + \frac{p(u|\nabla v|)^{q(p-1)}}{qf(v)^q} - \frac{pu^{p-1}|\nabla u||\nabla v|^{p-1}}{f(v)} \\
&+ \frac{pu^{p-1}|\nabla v|^{p-2}}{(f(v))}\{|\nabla u||\nabla v| - \nabla u\nabla v\}\Bigg\} \\
&= \frac{pu^{p-1}|\nabla v|^{p-2}}{(f(v))}\{|\nabla u||\nabla v| - \nabla u\nabla v\}w(x) \geq 0
\end{aligned}$$

Portanto, $L(u,v) \geq 0$. A igualdade vale quando (3.11), (3.13) junto com $|\nabla u||\nabla v| = \nabla u \nabla v$ valem simultaneamente. Para finalizarmos, provaremos que $L(u,v) = 0$ q.t.p em Ω, se e somente se, $\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = 0$ q.t.p em Ω. Seja $L(u,v) = 0$ e $u(x_0) \neq 0$ então

(i) $|\nabla u| = \dfrac{u|\nabla v|}{f(v)^{\frac{q}{p}}}$;

(ii) $f'(y) = (p-1)f(y)^{\frac{p-2}{p-1}}$;

(iii) $|\nabla u||\nabla v| = \nabla u \nabla v$.

Resolvendo a equação diferencial ordinária $f'(y) = (p-1)f(y)^{\frac{p-2}{p-1}}$, obtemos

$$f(y) = y^{p-1}. \tag{3.14}$$

De (3.11) e (3.14) temos que

$$|\nabla u| = \frac{u}{v^{\frac{q(p-1)}{p}}}|\nabla v|.$$

Sendo p e q conjugados de Lebesgue, segue que $q(p-1) = p$. Assim, obtemos

$$|\nabla u| = \frac{u}{v}|\nabla v|$$

que é equivalente a

$$\frac{|\nabla u|}{v} = \frac{u|\nabla v|}{v^2} \Leftrightarrow \frac{|\nabla u|}{v} - \frac{u|\nabla v|}{v^2} = 0.$$

Por sua vez, note que se $|\nabla u||\nabla v| = \nabla u \nabla v$ então temos que $|\nabla u| = \nabla u$ e $|\nabla v| = \nabla v$ ou $|\nabla u| = -\nabla u$ e $|\nabla v| = -\nabla v$. Em ambos os casos, temos

$$\frac{|\nabla u|}{v} - \frac{u|\nabla v|}{v^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\nabla u}{v} - \frac{u\nabla v}{v^2} = 0.$$

Consequentemente,

$$\frac{\nabla u}{v} - \frac{u\nabla v}{v^2} = 0 \Leftrightarrow \nabla\left(\frac{u}{v}\right) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Por outro lado, se $S = \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$ então por [22, Lema 7.7] temos $\nabla u = 0$ q.t.p em S. Portanto

$$\nabla\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{v(x)\nabla u(x) - u(x)\nabla v(x)}{v(x)^2} = 0 \quad \text{q.t.p em} \quad S.$$

Donde concluímos que $\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = 0$ q.t.p em Ω. Observe ainda que pelo Teorema do Valor Médio $\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = 0$ se, e somente se, $u = cv$ em Ω para alguma constante c $\square$

Lema 3.21. ***(Lema 3.3 - [21], pág. 486)*** *Para $\phi \in [C_0^\infty(\Omega)]^+$ e $v \in C(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega, w)$ tal que $v > 0$ em Ω nós temos $\dfrac{\phi^p}{h(v)} \in [W_0^{1,p}(\Omega, w)]^+$, desde que $w \in A_p$.*

Demonstração. Seja $h \in C^1(0, \infty)$ e $v \in C(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega, w)$ então temos que h, v são funções contínuas e as restrições de ambas as funções a qualquer subconjunto compacto $K \subset \Omega$ também são contínuas. Assim as funções

$$\begin{aligned} F_1 : K &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto F_1(x) = h'(v)(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F_2 : K &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto F_2(x) = h(v)(x) \end{aligned}$$

são contínuas, visto que são composições de funções contínuas. Como $\phi \in [C_0^\infty(\Omega)]^+$, consideremos $K = \operatorname{supp}(\phi)$. Por sua vez, sendo $K \subset \Omega$ compacto e F_1 contínua, então pelo Teorema de Weierstrass, segue que F_1 admite um ponto de máximo, isto é,

$$|F_1(x)| \leq \max_{x \in K} |F_1(x)| = c. \tag{3.15}$$

De forma análoga F_2 admite um ponto de mínimo, isto é,

$$|F_2(x)| \geq \min_{x\in K} |F_1(x)| = \delta > 0. \tag{3.16}$$

Assim, sendo $\phi \in [C_0^\infty(\Omega)]^+$ e $K \subset \Omega$ seu suporte compacto, segue novamente pelo Teorema de Weierstrass que ϕ admite um ponto de máximo em K, ou seja,

$$|\phi(x)| \leq \max_{x\in K} |\phi(x)| = ||\phi||_\infty \Rightarrow |\phi(x)|^{p^2} \leq ||\phi||_\infty^{p^2}.$$

Daí temos que

$$\int_\Omega \left|\frac{\phi^p}{h(v)}\right|^p \leq \int_\Omega \frac{||\phi||_\infty^{p^2}}{|h(v)|^p}.$$

Sendo $|F_2(x)| \geq \delta > 0$, então pela definição da F_2, obtemos

$$|F_2(x)| = |h(v)(x)| \geq \delta \Rightarrow \frac{1}{|h(v)(x)|} \leq \frac{1}{\delta}.$$

Portanto,

$$\int_\Omega \left|\frac{\phi^p}{h(v)}\right|^p \leq ||\phi||_\infty^{p^2} \int_\Omega \frac{1}{|h(v)|^p} \leq ||\phi||_\infty^{p^2} \int_\Omega \frac{1}{\delta^p} \leq ||\phi||_\infty^{p^2} \frac{1}{\delta^p}|\Omega| < \infty,$$

isto é, $\dfrac{\phi^p}{h(v)} \in L^p(\Omega)$. Por outro lado, usando a regra da cadeia e a desigualdade $|a-b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$, segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega w(x) \left|\nabla\left(\frac{\phi^p}{h(v)}\right)\right|^p &= \int_K w(x) \left|\frac{\nabla\phi^p h(v)}{h(v)^2} - \frac{\nabla h(v)\phi^p}{h(v)^2}\right|^p = \int_K w(x)\left|\frac{p\phi^{p-1}\nabla\phi}{h(v)} - \frac{h'(v)\phi^p\nabla v}{h(v)^2}\right|^p \\
&\leq 2^p \int_K w(x) \left\{\frac{p^p\phi^{p(p-1)}|\nabla\phi|^p}{h(v)^p} + \left(\frac{h'(v)}{h(v)^2}\right)^p \phi^{p^2}|\nabla v|^p\right\}.
\end{aligned}$$

De (3.15) e (3.16), sabendo que $|\phi(x)| \leq ||\phi||_\infty$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega w(x) \left|\nabla\left(\frac{\phi^p}{h(v)}\right)\right|^p &\leq 2^p \int_K w(x) \left\{\frac{p^p\phi^{p(p-1)}|\nabla\phi|^p}{h(v)^p} + \left(\frac{h'(v)}{h(v)^2}\right)^p \phi^{p^2}|\nabla v|^p\right\} \\
&\leq 2^p \int_K w(x) \left\{\frac{p^p||\phi||_\infty^{p(p-1)}|\nabla\phi|^p}{\delta^p} + \frac{c^p||\phi||_\infty^{p^2}}{\delta^{2p}}|\nabla v|^p\right\} \\
&\leq 2^p M_1 \int_K w(x)|\nabla\phi|^p + 2^p M_2 \int_K w(x)|\nabla v|^p.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

onde $M_1 = \frac{p^p||\phi||_\infty^{p(p-1)}}{\delta^p}$ e $M_2 = \frac{c^p||\phi||_\infty^{p^2}}{\delta^{2p}}$. Por sua vez, note que

$$\int_K w(x)|\nabla\phi(x)|^p \leq \int_\Omega |\phi(x)|^p dx + \int_\Omega w(x)|\nabla\phi(x)|^p dx = ||\phi||_{1,p,w}^p \tag{3.18}$$

e

$$\int_K w(x)|\nabla v(x)|^p \leq \int_\Omega |v(x)|^p dx + \int_\Omega w(x)|\nabla v(x)|^p dx = ||v||_{1,p,w}^p. \tag{3.19}$$

De (3.17), (3.18) e (3.19), segue que

$$\int_\Omega w(x)\left|\nabla\left(\frac{\phi^p}{h(v)}\right)\right|^p \leq 2^p M_1||\phi||^p_{1,p,w} + 2^p M_2||v||^p_{1,p,w} < \infty \tag{3.20}$$

ou seja, $\nabla\left(\frac{\phi^p}{h(v)}\right) \in L^p(\Omega, w)$. Portanto $\frac{\phi^p}{h(v)} \in [W^{1,p}(\Omega, w)]^+$. $\square$

Lema 3.22. ***(Lema 3.4 - [21], pág. 487)*** *Seja $w \in A_p$. Então para qualquer $\varepsilon > 0$, temos que $\frac{u^p}{h(v+\varepsilon)} \in [W_0^{1,p}(\Omega, w)]^+$, desde que, $u \in C(\overline{\Omega}) \cap [W_0^{1,p}(\Omega, w)]^+$ e $v \in C(\overline{\Omega}) \cap [W^{1,p}(\Omega, w)]^+$.*

Demonstração. Seja $w \in A_p$, $u \in C(\overline{\Omega}) \cap [W_0^{1,p}(\Omega, w)]^+$ e $v \in C(\overline{\Omega}) \cap [W^{1,p}(\Omega, w)]^+$. Pela Observação 3.13, sabemos que $[W_0^{1,p}(\Omega, w)]^+ = \overline{\{C_0^\infty(\Omega), ||\cdot||_{1,p,w}\}}$, logo $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Seja $K = \text{supp}(u)$, então temos que

$$\int_\Omega \left|\frac{u^p}{h(v+\varepsilon)}\right|^p = \int_\Omega \frac{|u|^{p^2}}{|h(v+\varepsilon)|^p}.$$

Como u é uma função contínua definida num conjunto compacto $K \subset \Omega$, segue pelo Teorema de Weierstrass que u admite um ponto de máximo, isto é,

$$|u(x)| \leq \max_{x\in K}|u(x)| = ||u||_\infty \Rightarrow |u(x)|^{p^2} \leq ||u||^{p^2}_\infty.$$

Além disso, vamos considerar $h \in \mathbb{G}$ uma função monótona decrescente tal que

$$q_\varepsilon(x) = \left|\frac{h'(x+\varepsilon)}{h(x+\varepsilon)^2}\right| \leq M(\varepsilon), \text{ para todo } \varepsilon > 0, x \geq 0, \tag{3.21}$$

onde $M(\varepsilon)$ é uma constante positiva que depende de $\varepsilon > 0$, mas não depende de x. Como h é decrescente, segue que se $\varepsilon \leq v + \varepsilon$ então

$$h(\varepsilon) \leq h(v+\varepsilon) \Rightarrow \frac{1}{h(\varepsilon)} \geq \frac{1}{h(v+\varepsilon)}.$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\frac{u^p}{h(v+\varepsilon)}\right|^p &\leq \int_K \frac{|u|^{p^2}}{|h(v+\varepsilon)|^p} \leq ||u||^{p^2}_\infty \int_K \frac{1}{|h(v+\varepsilon)|^p} \leq ||u||^{p^2}_\infty \int_K \frac{1}{h(\varepsilon)^p} \\ &\leq ||u||^{p^2}_\infty \frac{1}{h(\varepsilon)^p}\int_K d\mu \leq ||u||^{p^2}_\infty \frac{1}{h(\varepsilon)^p}|\Omega| < \infty\end{aligned}$$

ou seja, $\frac{u^p}{h(v+\varepsilon)} \in L^p(\Omega)$. Por outro lado, usando (3.21) e a regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega w(x)\left|\nabla\left(\frac{u^p}{h(v+\varepsilon)}\right)\right|^p &= \int_\Omega w(x)\left|\frac{pu^{p-1}\nabla u}{h(v+\varepsilon)} - \frac{h'(v+\varepsilon)u^p\nabla v}{h(v+\varepsilon)^2}\right|^p \\ &= \int_\Omega w(x)\left|\frac{pu^{p-1}\nabla u}{h(v+\varepsilon)} - \left(\frac{h'(v+\varepsilon)}{h(v+\varepsilon)^2}\right)u^p\nabla v\right|^p \\ &= \int_\Omega w(x)\left|\frac{pu^{p-1}\nabla u}{h(v+\varepsilon)} - q_\varepsilon(v)u^p\nabla v\right|^p.\end{aligned}$$

Pela desigualdade $|a-b|^p \leq 2^p(|a|^p+|b|^p)$, sabendo que $\frac{1}{h(\varepsilon)} \geq \frac{1}{h(v+\varepsilon)}$ segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega w(x)\left|\nabla\left(\frac{u^p}{h(v+\varepsilon)}\right)\right|^p &\leq 2^p\int_\Omega w(x)\left\{\frac{p^p u^{p(p-1)}|\nabla u|^p}{h(v+\varepsilon)^p}+(q_\varepsilon(v))^p u^{p^2}|\nabla v|^p\right\}\\
&\leq 2^p\int_\Omega w(x)\left\{\frac{p^p||u||_\infty^{p(p-1)}|\nabla u|^p}{h(\varepsilon)^p}+(M(\varepsilon))^p||u||_\infty^{p^2}|\nabla v|^p\right\}\\
&\leq 2^p M_1\int_\Omega w(x)|\nabla u|^p+2^p M_2\int_\Omega w(x)|\nabla v|^p
\end{aligned}$$

onde $M_1 = \frac{p^p||u||^{p(p-1)}}{h(\varepsilon)^p}$ e $M_2 = (M(\varepsilon))^p||u||_\infty^{p^2}$. Daí, como

$$\int_\Omega w(x)|\nabla u|^p \leq ||u||_{1,p,w}^p \text{ e } \int_\Omega w(x)|\nabla v|^p \leq ||v||_{1,p,w}^p,$$

tendo em vista que $u \in [W_0^{1,p}(\Omega,w)]^+$ e $v \in [W^{1,p}(\Omega,w)]^+$ concluimos que

$$\int_\Omega w(x)\left|\nabla\left(\frac{u^p}{h(v+\varepsilon)}\right)\right|^p \leq 2^p M_1||u||_{1,p,w}^p+2^p M_2||v||_{1,p,w}^p < \infty,$$

isto é, $\nabla\left(\dfrac{u^p}{h(v+\varepsilon)}\right) \in L^p(\Omega,w)$. Portanto $\dfrac{u^p}{h(v+\varepsilon)} \in [W_0^{1,p}(\Omega,w)]^+$. $\square$

4 Operador p-Laplaciano com peso

Neste capítulo iremos apresentar algumas propriedades das soluções para uma classe de equações envolvendo o operador p-Laplaciano com peso. Consideraremos $f \in \mathbb{M}$ satisfazendo a hipótese (3.21) e $0 \leq g_1, g_2 \in L^q(\Omega),\ q = \dfrac{p}{p-1}$. Assim, suponha que exista uma função $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega, w)$ que satisfaz a equação

$$-\Delta_{p,w} u - g_1(x) f(u) = g_2(x), \quad w \in A_p \tag{4.1}$$

com $u > 0$. Então para qualquer função teste $\varphi \in [W_0^{1,p}(\Omega, w)]^+$ temos que

$$-\Delta_{p,w} u\varphi - g_1(x) f(u)\varphi = g_2(x)\varphi,\ w \in A_p.$$

Daí, integrando em Ω segue que

$$\int_\Omega -\Delta_{p,w} u\varphi - \int_\Omega g_1(x) f(u)\varphi = \int_\Omega g_2(x)\varphi,\ w \in A_p \tag{4.2}$$

para toda $\varphi \in [W_0^{1,p}(\Omega, w)]^+$. Observemos que,

$$\int_\Omega -\Delta_{p,w} u\varphi = \int_\Omega w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi. \tag{4.3}$$

De fato, seja $\vec{F} = w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \varphi$ um campo vetorial em Ω e notemos que

$$\operatorname{div}(w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \varphi) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} w(x)|\nabla u|^{p-2}\varphi, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} w(x)|\nabla u|^{p-2}\varphi\right).$$

Pela definição do operador divergente, temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \varphi) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} w(x)|\nabla u|^{p-2}\varphi\right) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_n} w(x)|\nabla u|^{p-2}\varphi\right). \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \cdot w(x)|\nabla u|^{p-2}\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} w(x)|\nabla u|^{p-2} + \dots + \\
&+ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \cdot w(x)|\nabla|^{p-2}\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n} w(x)|\nabla u|^{p-2} \\
&= \varphi\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \cdot w(x)|\nabla u|^{p-2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \cdot w(x)|\nabla u|^{p-2}\right) + \\
&+ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} w(x)|\nabla u|^{p-2} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n} w(x)|\nabla u|^{p-2}
\end{aligned}$$

donde obtemos,

$$\operatorname{div}(w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \varphi) = \varphi \cdot \operatorname{div}(w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \nabla\varphi \cdot \nabla u\, w(x)|\nabla u|^{p-2}.$$

Assim como o operador p-Laplaciano com peso é dado por $\Delta_{p,w}u = \operatorname{div}(w|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ segue que usando o Teorema da Divergência no campo vetorial $\vec{F}$ sabendo que $\varphi \in [W_0^{1,p}(\Omega, w)]^+$ temos

$$\int_\Omega \operatorname{div}(w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \varphi)dx = \int_{\partial\Omega} w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \varphi dx = 0.$$

Por outro lado,

$$\int_\Omega \operatorname{div}(w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \varphi)dx = \int_\Omega \varphi \cdot \Delta_{p,w}u + \int_\Omega w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi$$

e portanto, $\int_\Omega -\Delta_{p,w}u \cdot \varphi = \int_\Omega w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi$. De (4.2) e (4.3), concluímos que

$$\int_\Omega w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi dx - \int_\Omega g_1(x)f(u)\varphi = \int_\Omega g_2(x)\varphi,\ w \in A_p \tag{4.4}$$

com $0 \leq g_1, g_2 \in L^q(\Omega)$. Note que uma $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega, w)$ que satisfaz (4.4) é chamada de solução fraca e se satisfaz a inequação

$$\int_\Omega w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi dx - \int_\Omega g_1(x)f(u)\varphi \geq \int_\Omega g_2(x)\varphi,\ w \in A_p \tag{4.5}$$

é chamada de supersolução fraca (Definição 2.18).

Teorema 4.1. ***(Inesxistência de supersoluções positivas - [21], pág. 488)*** *Dado $w \in A_p$, se existir $u \in C(\overline{\Omega}) \cap [W_0^{1,p}(\Omega, w)]^+$ tal que*

$$J(u) = \int_\Omega w(x)|\nabla u|^p dx - \int_\Omega g_1(x)u^p dx < 0 \tag{4.6}$$

então (4.1) não tem supersolução fraca positiva em $C(\overline{\Omega}) \cap W_0^{1,p}(\Omega, w)$.

Demonstração. Para fins de contradição, suponhamos que v seja uma supersolução fraca e positiva de (4.1) e $\varepsilon > 0$. Seja $\varphi = \dfrac{u^p}{f(v+\varepsilon)}$ a função teste de (4.5), então como $w \in A_p$ e $u \in C(\overline{\Omega}) \cap [W_0^{1,p}(\Omega, w)]^+$ segue pelo Lema 3.22 que $\varphi \in [W_0^{1,p}(\Omega, w)]^+$. Assim de (4.5)

$$\int_\Omega w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi dx - \int_\Omega g_1(x)f(u)\varphi \geq \int_\Omega g_2(x)\varphi$$

com $\varphi = \dfrac{u^p}{f(v+\varepsilon)}$ e usando o Lema 3.20, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g_1(x)\frac{f(v)}{f(v+\varepsilon)}u^p &\leq \int_\Omega \left\{ w(x)|\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \nabla\left(\frac{u^p}{f(v+\varepsilon)}\right) - g_2(x)\frac{u^p}{f(v+\varepsilon)} \right\} \\
&= \int_\Omega \left\{ w(x)|\nabla u|^p - w(x)|\nabla u|^p + w(x)|\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \nabla\left(\frac{u^p}{f(v+\varepsilon)}\right) \right. \\
&- \left. g_2(x)\frac{u^p}{f(v+\varepsilon)} \right\} \\
&= \int_\Omega w(x)|\nabla u|^p dx - \int_\Omega R(u, v+\varepsilon) - \int_\Omega g_2(x)\frac{u^p}{f(v+\varepsilon)}dx \\
&\leq \int_\Omega w(x)|\nabla u|^p dx,
\end{aligned}$$

daí, temos que

$$0 \leq \int_\Omega w(x)|\nabla u|^p dx - \int_\Omega g_1(x)\frac{f(v)}{f(v+\varepsilon)}u^p. \tag{4.7}$$

Como $g_1(x)\frac{f(v)}{f(v+\varepsilon)} \geq 0$, segue pelo Lema de Fatou

$$\int_\Omega \lim_{\varepsilon\to 0^+} g_1(x)\frac{f(v)}{f(v+\varepsilon)}u^p \leq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\Omega g_1(x)\frac{f(v)}{f(v+\varepsilon)}u^p$$

que implica em

$$\int_\Omega g_1(x)u^p = \int_\Omega \lim_{\varepsilon\to 0^+} g_1(x)\frac{f(v)}{f(v+\varepsilon)}u^p \leq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\Omega g_1(x)\frac{f(v)}{f(v+\varepsilon)}u^p.$$

Tomando o limite em (4.7) com $\varepsilon \to 0^+$, segue que

$$0 \leq \int_\Omega w(x)|\nabla u|^p dx - \int_\Omega g_1(x)u^p = J(u)$$

isto é, $J(u) \geq 0$ o que é uma contradição, pois $J(u) < 0$. Portanto (4.1) não tem supersolução fraca e positiva em $C(\overline{\Omega}) \cap W_0^{1,p}(\Omega, w)$. □

Teorema 4.2. ***(Desigualdade do Tipo Hardy - [21], pág. 488)*** *Seja $w \in A_p$ e assuma que existe $v \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega, w)$ satisfazendo*

$$-\Delta_{p,w}v \geq g(x)f(v),\ \ v > 0 \ \textit{em}\ \Omega,\ \ f \in \mathbb{M} \tag{4.8}$$

para alguma função não negativa $g \in L^q(\Omega)$, $q = \frac{p}{p-1}$. Então para qualquer $u \in [C_0^\infty(\Omega)]^+$ vale que

$$\int_\Omega w(x)|\nabla u|^p dx \geq \int_\Omega g(x)u^p dx.$$

Demonstração. Com efeito, seja $u \in [C_0^\infty(\Omega)]^+$, $v \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega, w)$ tal que $v > 0$ em Ω e $w \in A_p$, então pelo Lema 3.21 segue que $\varphi = \dfrac{u^p}{f(v)} \in [W_0^{1,p}(\Omega, w)]^+$. Assim usando φ como função teste em (4.8), sabendo que $v \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega, w)$ satisfaz

$$-\Delta_{p,w}v \geq g(x)f(v),\ \ v > 0 \text{ em } \Omega,\ \ f \in \mathbb{M}$$

temos que

$$-\Delta_{p,w}v \cdot \varphi \geq g(x)f(v)\cdot\varphi,\ \ v > 0 \text{ em } \Omega,\ \ f \in \mathbb{M}$$

para toda $\varphi \in [W^{1,p}(\Omega, w)]^+$. Integrando ambos os membros em Ω, obtemos

$$\int_\Omega -\Delta_{p,w}v \cdot \varphi dx \geq \int_\Omega g(x)f(v)\cdot\varphi,\ \ \varphi \in [W^{1,p}(\Omega, w)]^+. \tag{4.9}$$

Pelo Teorema da Divergência, temos que

$$\int_\Omega -\Delta_{p,w}v \cdot \varphi dx = \int_\Omega w(x)|\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \nabla\varphi dx. \tag{4.10}$$

Assim, de (4.9) e (4.10)

$$\int_\Omega w(x)|\nabla v|^{p-2}\nabla v\cdot\nabla\varphi dx \geq \int_\Omega g(x)f(v)\cdot\varphi. \tag{4.11}$$

Pelo Lema 3.20, sabemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega R(u,v)dx &= \int_\Omega w(x)\left\{|\nabla u|^p - \nabla\left(\frac{u^p}{f(v)}\right)\cdot|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right\}dx\\ &= \int_\Omega w(x)|\nabla u|^p dx - \int_\Omega w(x)\nabla\left(\frac{u^p}{f(v)}\right)\cdot|\nabla v|^{p-2}\nabla v dx \geq 0.\end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\int_\Omega w(x)|\nabla u|^p dx \geq \int_\Omega w(x)\nabla\left(\frac{u^p}{f(v)}\right)\cdot|\nabla v|^{p-2}\nabla v dx \tag{4.12}$$

e portanto sabendo que $\varphi = \dfrac{u^p}{f(v)}$ segue de (4.11) e (4.12)

$$\int_\Omega g(x)f(v)\cdot\varphi \leq \int_\Omega w(x)|\nabla v|^{p-2}\nabla v\cdot\nabla\varphi dx \leq \int_\Omega w(x)|\nabla u|^p dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega g(x)f(v)\cdot\varphi \leq \int_\Omega w(x)|\nabla u|^p dx$$

donde concluímos que

$$\int_\Omega g(x)\cdot u^p \leq \int_\Omega w(x)|\nabla u|^p dx. \tag{4.13}$$

□

Teorema 4.3. ***(Teorema da Comparação - [21], pág. 489)*** *Seja $w \in A_p$ e assuma que $u \in C(\overline{\Omega})\cap[W^{1,p}(\Omega,w)]^+$ tal que*

$$\begin{cases}-\Delta_{p,w}u = f_1(x)|u|^{p-2}u, \;\; u>0, \;\; \textit{em } \Omega,\\ u=0, \;\; \textit{em } \partial\Omega.\end{cases} \tag{4.14}$$

Então qualquer solução não trivial $v \in C(\overline{\Omega})\cap W^{1,p}(\Omega,w)$ de

$$\begin{cases}-\Delta_{p,w}v = f_2(x)|v|^{p-2}v, \;\; \textit{em } \Omega,\\ v=0, \;\; \textit{em } \partial\Omega.\end{cases} \tag{4.15}$$

onde $0\leq f_1(x)\leq f_2(x)$ q.t.p em Ω e $f_1,f_2\in L^q(\Omega)$, $q=\frac{p}{p-1}$ deve mudar de sinal.

Demonstração. Podemos considerar sem perda de generalidade que $v>0$ em Ω. O caso em que $v<0$ pode ser tratado de forma análoga para a função $-v$. Note que $w\in A_p$, $u\in C(\overline{\Omega})\cap[W_0^{1,p}(\Omega,w)]^+$ e $v\in C(\overline{\Omega})\cap[W^{1,p}(\Omega,w)]^+$ assim, segue do Lema 3.22 que

$\varphi = \dfrac{u^p}{f(v+\varepsilon)} \in [W^{1,p}(\Omega, w)]^+$ em que $f(v+\varepsilon) = (v+\varepsilon)^{p-1}$. Considerando φ como função teste em (4.15) sabendo que $v \in C(\overline{\Omega}) \cap [W^{1,p}(\Omega, w)]^+$ satisfaz

$$-\Delta_{p,w} v = f_2(x)|v|^{p-2}v, \ v > 0, \text{ em } \Omega \text{ e } \ v = 0 \text{ em } \partial\Omega$$

temos que

$$-\Delta_{p,w} v\varphi = f_2(x)|v|^{p-2}v\varphi, \varphi \in [W_0^{1,p}(\Omega, w)]^+.$$

Integrando em Ω ambos os membros, segue que

$$\int_\Omega -\Delta_{p,w} v\varphi = \int_\Omega f_2(x)|v|^{p-2}v\varphi, \varphi \in [W_0^{1,p}(\Omega, w)]^+. \tag{4.16}$$

Pelo Teorema da Divergência, sabemos que

$$\int_\Omega -\Delta_{p,w} v\varphi = \int_\Omega w(x)|\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \nabla\varphi dx \tag{4.17}$$

e portanto de (4.16) e (4.17), tendo em vista que $f(v+\varepsilon) = (v+\varepsilon)^{p-1}$ segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega w(x)|\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \nabla\varphi dx &= \int_\Omega f_2(x)v^{p-2}v\varphi \\
&= \int_\Omega f_2(x)v^{p-2}v\frac{u^p}{(v+\varepsilon)^{p-1}} \\
&= \int_\Omega f_2(x)u^p\frac{v^{p-1}}{(v+\varepsilon)^{p-1}} \\
&= \int_\Omega f_2(x)u^p\left(\frac{v}{v+\varepsilon}\right)^{p-1}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_\Omega w(x)|\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \nabla\varphi dx = \int_\Omega f_2(x)u^p\left(\frac{v}{v+\varepsilon}\right)^{p-1}. \tag{4.18}$$

Por outro lado, considerando $\phi = u$ como função teste em (4.14) e sabendo que $u \in C(\overline{\Omega}) \cap [W_0^{1,p}(\Omega, w)]^+$ satisfaz

$$-\Delta_{p,w} u = f_1(x)|u|^{p-2}u, \ u \geq 0, \text{ em } \Omega \text{ e } \ u = 0 \text{ em } \partial\Omega$$

temos que

$$-\Delta_{p,w} u\phi = f_1(x)|u|^{p-2}u\phi, \quad \phi \in [W_0^{1,p}(\Omega, w)]^+.$$

Integrando em ambos os membros, obtemos

$$\int_\Omega -\Delta_{p,w} u\phi = \int_\Omega f_1(x)|u|^{p-2}u\phi, \quad \phi \in [W_0^{1,p}(\Omega, w)]^+ \tag{4.19}$$

onde novamente pelo Teorema da Divergência,

$$\int_\Omega -\Delta_{p,w} u\phi = \int_\Omega w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\phi dx \tag{4.20}$$

e portanto

$$\int_\Omega w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\phi dx=\int_\Omega f_1(x)|u|^{p-2}u\phi.$$

Por sua vez, sendo $\phi=u$, então

$$\begin{aligned}\int_\Omega w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla u dx &= \int_\Omega f_1(x)u^{p-2}u\cdot u\\ \int_\Omega w(x)|\nabla u|^{p}dx &= \int_\Omega f_1(x)u^{p}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

De (4.18) e (4.21), usando o Lema 3.20 com $f(v+\varepsilon)=(v+\varepsilon)^{p-1}$, obtemos

$$\begin{aligned}0\le\int_\Omega L(u,v+\varepsilon)dx &= \int_\Omega R(u,v+\varepsilon)\\ &= \int_\Omega w(x)|\nabla u|^p-\int_\Omega w(x)\nabla\left(\frac{u^p}{f(v+\varepsilon)}\right)\cdot|\nabla v|^{p-2}\nabla v\\ &= \int_\Omega f_1(x)u^p-\int_\Omega f_2(x)\left(\frac{v}{v+\varepsilon}\right)^{p-1}u^p dx.\end{aligned}\tag{4.22}$$

Como $f_2(x)\left(\frac{v}{v+\varepsilon}\right)^{p-1}u^p\ge 0$, segue pelo Lema de Fatou

$$\int_\Omega\lim_{\varepsilon\to0^+}f_2(x)\left(\frac{v}{f(v+\varepsilon)}\right)^{p-1}u^p\le\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\Omega f_2(x)\left(\frac{v}{f(v+\varepsilon)}\right)^{p-1}u^p$$

que implica em

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_2(x)u^p dx &= \int_\Omega\lim_{\varepsilon\to0^+}f_2(x)\left(\frac{v}{v+\varepsilon}\right)^{p-1}u^p dx\\ &\le \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\Omega f_2(x)\left(\frac{v}{v+\varepsilon}\right)^{p-1}u^p dx.\end{aligned}\tag{4.23}$$

Assim passando o limite em (4.22) com $\varepsilon\to0^+$ temos que

$$0\le\int_\Omega f_1(x)u^p dx-\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\Omega f_2(x)\left(\frac{v}{v+\varepsilon}\right)^{p-1}u^p dx$$

e usando (4.23), obtemos

$$\int_\Omega f_1(x)u^p dx-\int_\Omega f_2(x)u^p dx=\int_\Omega(f_1(x)-f_2(x))u^p dx\ge0.$$

Daí temos que $f_1(x)\ge f_2(x)$ q.t.p em Ω, o que entra em contradição com o fato de que $f_1(x)<f_2(x)$ q.t.p em Ω. Portanto, v muda de sinal. □

Lema 4.4. ***(A desigualdade de Friedrich com peso - [21], pág. 489)*** *Para qualquer $w\in A_t$, a seguinte desigualdade*

$$\int_\Omega|u|^p dx\le C\int_\Omega w(x)|\nabla u|^p dx,\tag{4.24}$$

vale para cada $u\in W_0^{1,p}(\Omega,w)$ e para alguma constante $C>0$ independente de u.

Demonstração. Esta prova foi baseada em [16]. Com efeito, como $w \in A_t$ então pela Teorema 3.18, segue que $W_0^{1,p_s}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_s^*}(\Omega)$, isto é, $W_0^{1,p_s}(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^{p_s^*}(\Omega)$. Assim, existe $c > 0$ tal que

$$||u||_{L^{p_s^*}} \leq c||u||_{W^{1,p_s}}, \quad \text{para todo} \;\; u \in W_0^{1,p_s}(\Omega). \tag{4.25}$$

Por outro lado, usando a Desigualdade de Hölder, com os duais $\alpha = \dfrac{p_s^*}{p}$ e $\alpha' = \dfrac{p_s^*}{p_s^* - p}$ segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x)|^p dx &\leq \left(\int_\Omega (|u(x)|^p)^{\frac{p_s^*}{p}}\right)^{\frac{p}{p_s^*}} \left(\int_\Omega 1^{\frac{p_s^*}{p_s^*-p}}\right)^{\frac{p_s^*-p}{p_s^*}} \\
&= \left(\int_\Omega |u(x)|^{p_s^*}\right)^{\frac{p}{p_s^*}} \left(\int_\Omega 1\right)^{\frac{p_s^*-p}{p_s^*}} \\
&= c_1 \left(\int_\Omega |u(x)|^{p_s^*}\right)^{\frac{p}{p_s^*}}
\end{aligned}$$

onde $c_1 = \left(\int_\Omega dx\right)^{\frac{p_s^*-p}{p_s^*}}$. Daí, obtemos

$$\left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_1^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |u(x)|^{p_s^*}\right)^{\frac{1}{p_s^*}}. \tag{4.26}$$

Assim de (4.25) e (4.26) segue que

$$\left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_2 \left(\int_\Omega (|u(x)|^{p_s} + |\nabla u(x)|^{p_s}) dx\right)^{\frac{1}{p_s}}. \tag{4.27}$$

Além disso da teoria de espaços de Sobolev [9], sabemos que as normas

$$||u||_{W^{1,p}} = \left(\int_\Omega (|u(x)|^p + |\nabla u(x)|^p) dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{e} \quad ||u||_{W_0^{1,p}} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

são equivalentes, isto é, existe uma constante $c_3 > 0$ tal que

$$\left(\int_\Omega (|u(x)|^p + |\nabla u(x)|^p) dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_3 \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.28}$$

e portanto de (4.27) e (4.28) temos

$$\left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_3 \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p_s} dx\right)^{\frac{1}{p_s}}. \tag{4.29}$$

Usando novamente a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p_s} dx &= \int_\Omega |\nabla u|^{p_s} w^{\frac{p_s}{p}} w^{-\frac{p_s}{p}} dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla u(x)^{p_s} \cdot w^{\frac{p_s}{p}}|^{\frac{p}{p_s}}\right)^{\frac{p_s}{p}} \left(\int_\Omega |w^{-\frac{p_s}{p}}|^{s+1}\right)^{\frac{1}{s+1}} \\
&= \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p \cdot w\right)^{\frac{p_s}{p}} \left(\int_\Omega |w^{-\frac{s}{s+1}}|^{s+1} dx\right)^{\frac{1}{s+1}} \\
&= \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p \cdot w\right)^{\frac{p_s}{p}} \left(\int_\Omega |w^{-s}| dx\right)^{\frac{1}{s+1}}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Daí, lembrando que $p_s = \dfrac{ps}{s+1}$, segue que

$$\left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p_s} dx\right)^{\frac{1}{p_s}} \leq \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p \cdot w(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |w^{-s}| dx\right)^{\frac{1}{p_s}}. \tag{4.31}$$

Por sua vez como $w \in A_t$ segue que para algum $s \in \left(\dfrac{N}{p}, \infty\right) \cap \left[\dfrac{1}{p-1}, \infty\right)$ temos $w^{-s} \in L^1(\Omega)$, logo $\int_\Omega |w^{-s}| dx < \infty$ e

$$\left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p_s} dx\right)^{\frac{1}{p_s}} \leq c_4 \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p \cdot w(x)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.32}$$

onde $c_4 = \int_\Omega |w^{-s}| dx$. Assim concluímos de (4.29) e (4.32)

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx \leq C \int_\Omega |\nabla u(x)|^p \cdot w(x) dx \;\; \text{para todo} \;\; u \in C_0^\infty(\Omega)$$

em que $C = c_3 \cdot c_4 > 0$. $\square$

Observe que pelo Lema 4.4 a norma

$$||u||_{W_0^{1,p}(\Omega,w)} = \left(\int_\Omega w(x) |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

do espaço $W_0^{1,p}(\Omega, w)$ é equivalente a norma $||u||_{1,p,w}$ definida em (3.6). A seguir vamos analisar o seguinte problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta_{p,w} u = \lambda \beta(x) |u|^{p-2} u, \;\; \text{em } \Omega, \\ u = 0, \;\; \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.33}$$

onde $w \in A_t$ e $\beta(\geq 0) \in L^\infty(\Omega)$.

Definição 4.5. *Um número real λ tal que o problema de autovalor (4.33) admite uma solução u é chamado de* ***autovalor do operador*** $-\Delta_{p,w}$ *e u sua correspondente* ***autofunção.***

Definição 4.6. *Definimos o primeiro autovalor do operador $-\Delta_{p,w}$ como*

$$\lambda_1 = \inf\left\{\int_\Omega w(x) |\nabla v|^p dx : \int_\Omega \beta(x) |v|^p dx = 1\right\} \tag{4.34}$$

e denotamos por λ_1.

A demonstração dos dois próximos resultados foram adaptações de resultados encontrados em [17].

Teorema 4.7. ***(Simplicidade do primeiro autovalor - [21], pág. 490)*** *O primeiro autovalor λ_1 do operador $-\Delta_{p,w}$ é simples para qualquer $w \in A_t$, desde que sua autofunção $u \in C(\overline{\Omega}) \cap [W_0^{1,p}(\Omega, w)]^+$.*

Demonstração. Sejam u, v duas autofunções associadas ao primeiro autovalor λ_1. Podemos assumir que $u, v \in C(\overline{\Omega}) \cap [W_0^{1,p}(\Omega, w)]^+$ em Ω. Seja $\varepsilon > 0$. Pela Identidade de Picone, com $f(v) = (v+\varepsilon)^{p-1}$ sabemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_\Omega L(u, v+\varepsilon) &= \int_\Omega R(u, v+\varepsilon) \\ &= \int_\Omega w(x)|\nabla u|^p - \int_\Omega w(x) \nabla \left(\frac{u^p}{(v+\varepsilon)^{p-1}} \right) \cdot |\nabla v|^{p-2} \nabla v. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Como $w \in A_p$, segue pelo Lema 3.22 que $\varphi = \dfrac{u^p}{(v+\varepsilon)^{p-1}} \in [W_0^{1,p}(\Omega, w)]^+$. Considerando φ como a função teste em (4.33), temos que

$$-\Delta_{p,w} v \cdot \varphi = \lambda_1 \beta(x) |v|^{p-2} v \cdot \varphi, \quad \varphi \in [W_0^{1,p}(\Omega, w)]^+.$$

Integrando em ambos os membros e usando o Teorema da Divergência, segue que

$$\int_\Omega w(x) |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega \lambda_1 \beta(x) |v|^{p-2} v \varphi. \tag{4.36}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_\Omega w(x) |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla \varphi &= \int_\Omega \lambda_1 \beta(x) |v|^{p-2} v \varphi \\ &= \int_\Omega \lambda_1 \beta(x) v^{p-2} v \left(\frac{u^p}{(v+\varepsilon)^{p-1}} \right) \\ &= \int_\Omega \lambda_1 \beta(x) v^{p-1} \left(\frac{u^p}{(v+\varepsilon)^{p-1}} \right) \\ &= \int_\Omega \lambda_1 \beta(x) u^p \left(\frac{v}{v+\varepsilon} \right)^{p-1}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Por outro lado, considerando $\phi = u$ como função teste em (4.33), temos que

$$-\Delta_{p,w} u \cdot \phi = \lambda_1 \beta(x) |u|^{p-2} u \cdot \phi, \quad \phi \in [W_0^{1,p}(\Omega, w)]^+.$$

Integrando em ambos os membros e usando novamente o Teorema da Divergência, segue que

$$\int_\Omega w(x) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \phi = \int_\Omega \lambda_1 \beta(x) |u|^{p-2} u \phi$$

isto é,

$$\int_\Omega w(x) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla u = \int_\Omega \lambda_1 \beta(x) |u|^{p-2} u^2$$

e portanto

$$\int_\Omega w(x) |\nabla u|^p = \int_\Omega \lambda_1 \beta(x) u^p. \tag{4.38}$$

De (4.35), (4.37) e (4.38), segue que

$$
\begin{aligned}
0 \leq \int_\Omega L(u, v+\varepsilon) &= \int_\Omega w(x)|\nabla u|^p - \int_\Omega w(x)\nabla\left(\frac{u^p}{(v+\varepsilon)^{p-1}}\right)\cdot|\nabla v|^{p-2}\nabla v dx \\
&= \int_\Omega \lambda_1\beta(x)u^p - \int_\Omega \lambda_1\beta(x)u^p\left(\frac{v}{v+\varepsilon}\right)^{p-1}dx \\
&= \lambda_1\left[\int_\Omega \beta(x)u^p - \int_\Omega \beta(x)u^p\left(\frac{v}{v+\varepsilon}\right)^{p-1}dx\right]. \qquad (4.39)
\end{aligned}
$$

Como $\beta(x)u^p\left(\frac{v}{v+\varepsilon}\right)^{p-1} \geq 0$, então pelo Lema de Fatou, segue que

$$
\int_\Omega \lim_{\varepsilon\to 0^+}\beta(x)u^p\left(\frac{v}{v+\varepsilon}\right)^{p-1}dx \leq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\Omega \beta(x)u^p\left(\frac{v}{v+\varepsilon}\right)^{p-1}dx
$$

que implica em

$$
\int_\Omega \beta(x)u^p dx = \int_\Omega \lim_{\varepsilon\to 0^+}\beta(x)u^p\left(\frac{v}{v+\varepsilon}\right)^{p-1}dx \leq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\Omega \beta(x)u^p\left(\frac{v}{v+\varepsilon}\right)^{p-1}dx. \qquad (4.40)
$$

Passando o limite em (4.39) com $\varepsilon \to 0^+$ e usando (4.40), obtemos

$$
\begin{aligned}
0 \leq \int_\Omega L(u, v+\varepsilon) &= \lambda_1\left[\int_\Omega \beta(x)u^p - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\Omega \beta(x)u^p\left(\frac{v}{v+\varepsilon}\right)^{p-1}dx\right] \\
&\leq \lambda_1\left[\int_\Omega \beta(x)u^p - \int_\Omega \beta(x)u^p dx\right] = 0 \qquad (4.41)
\end{aligned}
$$

isto é, $\int_\Omega L(u,v) = 0$. Por sua vez, $\int_\Omega L(u,v) = 0$ implica que $L(u,v) = 0$ q.t.p. em Ω e portanto pela Identidade de Piconne, temos que $u = cv$ em que c é uma constante. Assim, concluímos que λ_1 é simples.

□

Teorema 4.8. ***(Propriedade de monotonicidade do primeiro autovalor - [21], pág. 490)*** *Seja $w \in A_t$ e suponha que $\Omega_1 \subset \Omega_2$ tal que $\Omega_1 \neq \Omega_2$. Então $\lambda_1(\Omega_1) > \lambda_1(\Omega_2)$.*

Demonstração. Sejam u_1, u_2 autofunções positivas associadas aos autovalores $\lambda_1^+(\Omega_1)$ e $\lambda_1^+(\Omega_2)$ respectivamente. Então para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$ temos pelo Lema 3.20 com $f(u_2) = u_2^{p-1}$ e pelo Teorema da Divergência

$$
\begin{aligned}
0 \leq \int_{\Omega_1} L(\varphi, u_2) &= \int_{\Omega_1} R(\varphi, u_2) = \int_{\Omega_1} w(x)|\nabla\varphi|^p - \int_{\Omega_1} w(x)\nabla\left(\frac{\varphi^p}{u_2^{p-1}}\right)\cdot|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \\
&= \int_{\Omega_1} w(x)|\nabla\varphi|^p + \int_{\Omega_1} \Delta_{p,w}u_2\left(\frac{\varphi^p}{u_2^{p-1}}\right) \\
&= \int_{\Omega_1} w(x)|\nabla\varphi|^p - \int_{\Omega_1} -\Delta_{p,w}u_2\left(\frac{\varphi^p}{u_2^{p-1}}\right). \qquad (4.42)
\end{aligned}
$$

Sabendo que $u_1, u_2 > 0$, então de (4.33), temos

$$\begin{aligned} -\Delta_{p,w} u_2 &= \lambda_1^+(\Omega_2)\beta(x)|u_2|^{p-2}u_2 \\ &= \lambda_1^+(\Omega_2)\beta(x)u_2^{p-2}u_2 \\ &= \lambda_1^+(\Omega_2)\beta(x)u_2^{p-1}. \end{aligned} \tag{4.43}$$

De (4.42) e (4.43), obtemos

$$0 \leq \int_{\Omega_1} L(\varphi, u_2) = \int_{\Omega_1} w(x)|\nabla\varphi|^p - \int_{\Omega_1} \lambda_1^+(\Omega_2)\beta(x)u_2^{p-1}\left(\frac{\varphi^p}{u_2^{p-1}}\right)$$

isto é,

$$0 \leq \int_{\Omega_1} L(\varphi, u_2) = \int_{\Omega_1} w(x)|\nabla\varphi|^p - \lambda_1^+(\Omega_2)\int_{\Omega_1} \beta(x)\varphi^p.$$

Como $C_0^\infty(\Omega_1)$ é denso em $W_0^{1,p}(w,\Omega_1)$ segue que para todo $u_1 \in W_0^{1,p}(w,\Omega_1)$, existe uma sequência (φ_n) em $C_0^\infty(\Omega_1)$ tal que $\varphi_n \to u_1$. Assim, temos que para cada n,

$$0 \leq \int_{\Omega_1} L(\varphi_n, u_2) = \int_{\Omega_1} w(x)|\nabla\varphi_n|^p - \lambda_1^+(\Omega_2)\int_{\Omega_1} \beta(x)\varphi_n^p.$$

Fazendo $n \to \infty$ segue que

$$0 \leq \int_{\Omega_1} L(u_1, u_2) = \int_{\Omega_1} w(x)|\nabla u_1|^p - \lambda_1^+(\Omega_2)\int_{\Omega_1} \beta(x)u_1^p. \tag{4.44}$$

Além disso, note que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} w(x)|\nabla u_1|^p &= \int_{\Omega_1} w(x)|\nabla u_1|^p|\nabla u_1|^{-2}|\nabla u_1|^2 \\ &= \int_{\Omega_1} w(x)|\nabla u_1|^{p-2}|\nabla u_1||\nabla u_1| \\ &= \int_{\Omega_1} w(x)|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\nabla u_1 \end{aligned}$$

e pelo Teorema da Divergência, obtemos

$$\int_{\Omega_1} w(x)|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\nabla u_1 = -\int_{\Omega_1} \Delta_{p,w}u_1 \cdot u_1. \tag{4.45}$$

donde concluímos que

$$\int_{\Omega_1} w(x)|\nabla u_1|^p = -\int_{\Omega_1} \Delta_{p,w}u_1 \cdot u_1. \tag{4.46}$$

Por (4.43), (4.44) e (4.46)

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{\Omega_1} L(u_1, u_2) &= -\int_{\Omega_1} \Delta_{p,w}u_1 \cdot u_1 - \lambda_1^+(\Omega_2)\int_{\Omega_1} \beta(x)u_1^p \\ &= \int_{\Omega_1} \lambda_1^+(\Omega_1)\beta(x)u_1^{p-1} \cdot u_1 - \lambda_1^+(\Omega_2)\int_{\Omega_1} \beta(x)u_1^p \\ &= \lambda_1^+(\Omega_1)\int_{\Omega_1} \beta(x)u_1^p - \lambda_1^+(\Omega_2)\int_{\Omega_1} \beta(x)u_1^p. \end{aligned}$$

Logo,

$$0 \leq \int_{\Omega_1} L(u_1, u_2) = (\lambda_1^+(\Omega_1) - \lambda_1^+(\Omega_2)) \int_{\Omega} \beta(x) u_1^p.$$

Como $\beta(x) > 0$ e $u_1^p > 0$ segue que $\displaystyle\int_{\Omega} \beta(x) u_1^p > 0$. Assim, $\lambda_1^+(\Omega_1) - \lambda_1^+(\Omega_2) \geq 0$. Por sua vez, se $\lambda_1^+(\Omega_1) - \lambda_1^+(\Omega_2) = 0$, então teríamos que

$$0 \leq \int_{\Omega_1} L(u_1, u_2) = (\lambda_1^+(\Omega_1) - \lambda_1^+(\Omega_2)) \int_{\Omega} \beta(x) u_1^p = 0$$

ou seja, $L(u_1, u_2) = 0$ q.t.p. em Ω e pelo Lema 3.20, temos que $u_1 = ku_2$ para alguma constante $k > 0$, o que contradiz o fato de que $\Omega_1 \subset \Omega_2$ e $\Omega_1 \neq \Omega_2$. Portanto, $\lambda_1^+(\Omega_1) > \lambda_1^+(\Omega_2)$. □

Enunciaremos a seguir um resultado de grande importância para a continuação deste trabalho.

Proposição 4.9. ***(Corolário 2.1.8 - [29], pág. 18)*** *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seja aberto e $u \in W^{1,p}(\Omega, w)$ onde $1 \leq p < +\infty$ e $w \in A_p$. Seja $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \min\{u, 0\}$. Então u^+, u^- e $|u| \in W^{1,p}(\Omega, w)$ e para $i = 1, \cdots, n$,*

$$D_i u^+ = \begin{cases} D_i u, & se\ u > 0, \\ 0, & se\ u \leq 0, \end{cases}$$

$$D_i u^- = \begin{cases} 0, & se\ u \geq 0, \\ D_i u, & se\ u < 0, \end{cases}$$

e

$$D_i |u| = \begin{cases} D_i u, & se\ u > 0, \\ 0, & se\ u = 0, \\ -D_i u & se\ u < 0. \end{cases}$$

5 Aplicação

5.1 Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos envolvendo o operador Laplaciano com peso

Nesta seção consideraremos $p = 2$ com a função peso dada por $w(x) = |x|^{-2a}$. Observe que pelo Exemplo 3.15 temos $w \in A_t$. Com estas condições apresentaremos uma solução não negativa para o problema (1.2). Para isso, reapresentaremos o problema (1.2) e as condições sobre a função f, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta_{2,w} u = f(u)|x|^{-2^* a}, \text{ em } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ u > 0, \text{ em } \Omega. \end{cases}$$

em que $\Delta_{2,w}$ é o operador Laplaciano com peso, dado por $\Delta_{2,w} = \operatorname{div}(|x|^{-2a}\nabla u)$ e $N \geq 3$, $-\infty < a < \dfrac{N-2}{2}$, $a \leq e \leq a+1$, $d = 1 + a - e$ e $2^* = \dfrac{2N}{N-2d}$ que denota o expoente crítico de Hardy e Sobolev. Além disso, supomos que a nossa f é uma função contínua que satisfaz as seguintes condições:

(f_1) $\displaystyle\lim_{s \to 0} \frac{f(s)}{|s|^{2^*-1}} = \limsup_{|s| \to +\infty} \frac{f(s)}{|s|^{r-1}} = 0$ em que $1 < r \leq 2^* - 1$

(f_2) $\displaystyle\lim_{|s| \to +\infty} \frac{F(s)}{|s|^2} = +\infty$

(f_3) $H(s) = sf(s) - 2F(s)$ é crescente em $|s|$ e $H(0) = 0$.

Observação 5.1. *Note que pela condição (f_3) obtemos $H(s) \geq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e por (f_1) temos que $\displaystyle\limsup_{|s| \to +\infty} \frac{f(s)}{|s|^{r-1}} = 0$ em que $1 < r \leq 2^* - 1$ implica que $\displaystyle\limsup_{|s| \to +\infty} \frac{f(s)}{|s|^{2^*-1}} = 0$. Além disso, por (f_1) temos também que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ e $c_\varepsilon > 0$ tal que*

$$|f(s)s| \leq \varepsilon |s|^{2^*} + c_\varepsilon |s|^r \chi_{\{|t| \geq \delta\}}(s) \tag{5.1}$$

e

$$|F(s)| \leq \varepsilon |s|^{2^*} + c_\varepsilon |s|^r \chi_{\{|t| \geq \delta\}}(s) \tag{5.2}$$

em que χ é a função caracteristica do conjunto $A = \{t \in \mathbb{R} : |t| \geq \delta\}$.

Vamos encontrar uma solução para o problema (1.2) usando um método variacional, isto é, vamos procurar soluções entre os pontos críticos do funcional associado ao problema (1.2). Assim para os nossos objetivos o funcional associado ao problema (1.2) é dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(u)|x|^{-2^* a} dx \tag{5.3}$$

em que $F(u) = \int_0^u f(t)dt$. Observe que por (f_1) temos que

$$|F(s)| \leq C|s|^{2^*} \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}.$$

De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(s)| < \varepsilon |s|^{2^*-1}, \quad \text{sempre que} \quad |s| < \delta.$$

Daí, temos que

$$|F(s)| = \left| \int_0^s f(t)dt \right| \leq \int_0^s |f(t)|dt < \varepsilon \int_0^s |t|^{2^*-1}dt = \varepsilon \frac{|s|^{2^*}}{2^*}.$$

Considerando $C_1 = \dfrac{\varepsilon}{2^*} > 0$ obtemos

$$|F(s)| \leq C_1 |s|^{2^*}, \quad \text{sempre que} \quad |s| < \delta. \tag{5.4}$$

De forma análoga, como $\displaystyle\lim_{|s| \to +\infty} \frac{f(s)}{|s|^{2^*-1}} = 0$, segue que para todo $\varepsilon > 0$, existe $R > \delta > 0$ tal que

$$|F(s)| \leq C_2 |s|^{2^*}, \quad \text{sempre que} \quad |s| > R. \tag{5.5}$$

Por fim, como $[\delta, R]$ é um conjunto compacto e f uma função contínua, segue pelo teorema de Bolzano Weierstrass que f admite um ponto de máximo. Assim $|f(s)| \leq K$ para todo $\delta < |s| < R$. Então $\left| \frac{f(s)}{|s|^{2^*-1}} \right| \leq K$ sempre que $\delta < |s| < R$, isto é,

$$|f(s)| \leq K |s|^{2^*-1}, \quad \delta < |s| < R.$$

Integrando em $[0, s]$, obtemos

$$|F(s)| = \left| \int_0^s f(t)dt \right| \leq \int_0^s |f(t)|dt < K \int_0^s |t|^{2^*-1}dt = K \frac{|s|^{2^*}}{2^*}.$$

Seja $C_3 = \frac{K}{2^*} > 0$, logo

$$|F(s)| \leq C_3 |s|^{2^*}, \quad \text{sempre que} \quad \delta < |s| < R. \tag{5.6}$$

Portanto de (5.4), (5.5) e (5.6) segue que

$$|F(s)| \leq C|s|^{2^*} \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Mostraremos a seguir que o nosso funcional (5.3) está bem definido, isto é, as duas integrais na definição do nosso funcional são finitas. Com efeito, pela Definição 3.13 sabemos que $W_0^{1,p}(\Omega, w) = \overline{\{C_0^\infty(\Omega), || \cdot ||_{1,p,w}\}}$. Assim podemos considerar o espaço $W_0^{1,2}(\Omega, w)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com relação a norma $||u||_{W_0^{1,2}(\Omega,w)}$ onde $w(x) = |x|^{-2a}$ é a função peso, isto é,

$$||u|| = ||u||_{W_0^{1,2}(\Omega,w)} = \left(\int_\Omega |x|^{-2a} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Por outro lado, pela condição (f_1) temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|F(s)| \leq C|s|^{2^*} \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Daí, como a função $|x|^{-2^*a}$ é positiva, segue que

$$|x|^{-2^*a}|F(s)| \leq C|x|^{-2^*a}|s|^{2^*} \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \Omega. \tag{5.7}$$

Para os parâmetros $N \geq 3$, $-\infty < a < \dfrac{N-2}{2}$, $a \leq e \leq a+1$, $d = 1 + a - e$ e $2^* = \dfrac{2N}{N-2d}$ temos a importante desigualdade de Caffarelli, Kohn, Nirenberg e Xuan

$$\left(\int_\Omega |x|^{-2^*a}|u|^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq K\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u|^2 dx, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega, w). \tag{5.8}$$

Por (5.7) e (5.8) temos que

$$\int_\Omega |x|^{-2^*a}F(u)dx \leq \int_\Omega C|x|^{-2^*a}|u|^{2^*} \leq C\left(K\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{2^*}{2}} < +\infty$$

e portanto o nosso funcional está bem definido. Note ainda que pelo Lema A.4 temos que $I \in C^1(W_0^{1,2}(\Omega, w))$ com derivada de Gâteaux dada por

$$I'(u)v = \int_\Omega |x|^{-2a}\nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Omega |x|^{-2^*a}f(u)v dx \text{ para todo } u, v \in W_0^{1,2}(\Omega, w). \tag{5.9}$$

Vamos encontrar uma solução usando o Teorema do Passo da Montanha. Para isso precisamos definir e provar alguns resultados auxiliares.

Lema 5.2. *Suponha (f_1) e (f_2). Então o funcional I satisfaz a Geometria do Passo da Montanha, isto é*

(i) Existem $\alpha, \rho > 0$ tais que $I(u) \geq \alpha$ e $||u|| = \rho$.

(ii) Existe $e \in W_0^{1,2}(\Omega, w)$ tal que $||e|| > \rho$ e $I(e) \leq 0$.

Demonstração. (i) Seja $I(u) = \dfrac{1}{2}||u||^2 - \displaystyle\int_\Omega F(u)|x|^{-2^*a}dx$ em que $||u|| = \left(\displaystyle\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

Por (f_1) sabemos que existe $C > 0$ tal que

$$|F(s)| \leq C|s|^{2^*} \text{ para todo } s \in \mathbb{R},$$

e portanto

$$\int_\Omega F(u)|x|^{-2^*a}dx \leq C\int_\Omega |x|^{-2^*a}|u|^{2^*}. \tag{5.10}$$

Pela desigualdade de Cafarelli, Kohn, Nirenberg e Xuan, temos

$$\int_\Omega |x|^{-2^*a}|u|^{2^*}dx \leq K^{\frac{2^*}{2}}\left(\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{2^*}{2}} \leq K^{\frac{2^*}{2}}||u||^{2^*}. \tag{5.11}$$

De (5.10) e (5.11), obtemos

$$\int_\Omega F(u)|x|^{-2^*a}dx \leq C\int_\Omega |x|^{-2^*a}|u|^{2^*} \leq CK^{\frac{2^*}{2}}||u||^{2^*} = M||u||^{2^*}$$

onde $M = CK^{\frac{2^*}{2}} > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}||u||^2 - \int_\Omega F(u)|x|^{-2^*a}dx \\ &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - M||u||^{2^*} \\ &= ||u||^2\left[\frac{1}{2} - M||u||^{2^*-2}\right]. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Note ainda que,

$$\lim_{||u||\to 0}\left[\frac{1}{2} - M||u||^{2^*-2}\right] = \frac{1}{2}.$$

Assim pela definição de limite temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{1}{2} - M||u||^{2^*-2} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon, \quad \text{sempre que} \;\; 0 < ||u|| < \delta.$$

Tomando $\varepsilon = \frac{1}{4} > 0$, segue que existe $\delta > 0$ tal que se $0 \leq ||u|| < \delta$ então

$$\frac{1}{2} - M||u||^{2^*-2} > \frac{1}{2} - \varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} > 0$$

e consequentemente

$$||u||^2\left[\frac{1}{2} - M||u||^{2^*-2}\right] \geq \frac{1}{4}||u||^2,$$

ou seja, $I(u) \geq \frac{||u||^2}{4}$. Logo,

$$I(u) \geq \frac{||u||^2}{4}, \quad \text{sempre que} \;\; 0 < ||u|| < \delta.$$

Assim se, $||u|| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$, temos que

$$I(u) \geq \frac{||u||^2}{4} = \frac{\delta^2}{16} > 0$$

e portanto, considerando $\rho = \frac{\delta}{2}$ e $\alpha = \frac{\delta^2}{16}$, obtemos

$$I(u) \geq \alpha > 0 \;\; \text{para todo} \;\; u \in W_0^{1,2}(\Omega, w)$$

com $||u|| = \rho$.

(ii) Com efeito, por (f_2) sabemos que $\displaystyle\lim_{|s|\to\infty}\frac{F(s)}{s^2} = +\infty$, isto é, dado $R > 0$ existe $A > 0$ tal que

$$|F(s)| \geq R|s|^2, \quad \text{sempre que} \;\; |s| > A. \tag{5.13}$$

Tomando $u_0 \in C_0^\infty(\Omega)\backslash\{0\}$ temos para $t > 0$ que $tu_0 \in W_0^{1,2}(\Omega, w)$. Logo,

$$\begin{aligned} I(tu_0) &= \frac{1}{2}||tu_0||^2 - \int_\Omega F(tu_0)|x|^{-2^*a}dx \\ &= \frac{1}{2}t^2||u_0||^2 - \int_\Omega F(tu_0)|x|^{-2^*a}dx. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Como a função $|x|^{-2^*a}$ é positiva, segue de (5.13) que

$$|x|^{-2^*a}|F(s)| \geq R|s|^2|x|^{-2^*a}, \quad \text{sempre que} \quad |s| > A. \tag{5.15}$$

De (5.14) e (5.15), obtemos

$$\begin{aligned} I(tu_0) &\leq \frac{1}{2}||tu_0||^2 - R\int_\Omega |tu_0|^2|x|^{-2^*a}dx \\ &\leq \frac{1}{2}t^2||u_0||^2 - Rt^2\int_\Omega |u_0|^2|x|^{-2^*a}dx \\ &\leq t^2\left[\frac{||u_0||^2}{2} - R\int_\Omega |u_0|^2|x|^{-2^*a}dx\right] \end{aligned} \tag{5.16}$$

Tomando $R > 0$ suficientemente grande, temos que $I(tu_0) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$ o que finaliza a prova.

$\square$

O próximo lema será de grande importância para mostrar a convergência da sequência de Cerami (C) em $W_0^{1,2}(\Omega, w)$. Este resultado pode ser visto em [27, Lemma 3.1].

Lema 5.3. ***(Condição S_+ - [27], pág. 22)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave e limitado, com $0 \in \Omega$, $1 < p < N$, $-\infty < a < \frac{N-p}{p}$ e seja $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega, w)$ tal que*

(i) *$u_n \rightharpoonup u$, quando $n \to +\infty$,*

(ii) $\limsup\limits_{n\to+\infty} \int_\Omega |x|^{-pa}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla(u_n - u)dx \leq 0.$

Então existe uma subsequência que converge forte em $W_0^{1,p}(\Omega, w)$.

Pelo Lema 5.2 concluímos que o funcional I satisfaz a geometria do Passo da Montanha, a saber Teorema 2.12. Assim existe (u_n), uma sequência (C) para I, isto é,

$$I(u_n) \to c \;\text{ e }\; (1 + ||u_n||)I'(u_n) \to 0$$

onde

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], W_0^{1,2}(\Omega, w)) : \gamma(0) = 0 \ \text{ e } \ \gamma(1) = e, \quad \text{com} \quad I(e) < 0\}.$$

Mostraremos agora que a sequência de Cerami (C) é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega, w)$. Para isso, provaremos inicialmente o seguinte lema.

Lema 5.4. *Existe uma constante $M > 0$ tal que $I(tu_n) \leq M$ para todo $t \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Como o funcional I satisfaz a Geometria do Passo da Montanha, Teorema 2.12 segue que para todo $t_n \in [0,1]$ podemos considerar $I(t_n u_n) = \max_{t\geq 0} I(t_n u_n)$. Além disso, se $t_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então temos que $I(t_n u_n) = I(0) = 0 < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, se $t_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então como a sequência $(I(u_n))$ é convergente, segue que existe uma constante $R > 0$ tal que $|I(u_n)| \leq R$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, segue que $I(t_n u_n) = I(u_n) \leq R$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, se $t_n = 0$ ou $t_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então o resultado está obtido. Assim, podemos assumir $t_n \in (0,1)$ e $I'(t_n u_n)t_n u_n = 0$. Daí, temos que

$$\begin{aligned}
2I(t_n u_n) &= 2I(t_n u_n) - I'(t_n u_n)t_n u_n \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla t_n u_n|^2 dx - \int_\Omega F(t_n u_n)|x|^{-2^* a} dx\right) \\
&- \int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla t_n u_n| \cdot |\nabla t_n u_n| dx + \int_\Omega |x|^{-2^* a} f(t_n u_n)t_n u_n dx \\
&= \int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla t_n u_n|^2 dx - 2\int_\Omega F(t_n u_n)|x|^{-2^* a} dx \\
&- \int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla t_n u_n|^2 + \int_\Omega |x|^{-2^* a} f(t_n u_n)t_n u_n dx \\
&= \int_\Omega |x|^{-2^* a} f(t_n u_n)t_n u_n dx - 2\int_\Omega F(t_n u_n)|x|^{-2^* a} dx \\
&= \int_\Omega |x|^{-2^* a}(f(t_n u_n)t_n u_n - 2F(t_n u_n))dx \\
&= \int_\Omega |x|^{-2^* a} H(t_n u_n) dx. \qquad (5.17)
\end{aligned}$$

Por (f_3) sabemos que a função $H(s)$ é crescente e como a função $|x|^{-2^* a}$ é positiva, segue que $|x|^{-2^*a}H(t_nu_n) \leq |x|^{-2^*a}H(u_n)$. Assim,

$$\begin{aligned} I(t_nu_n) &= \int_\Omega |x|^{-2^*a}H(t_nu_n)dx \\ &\leq \int_\Omega |x|^{-2^*a}H(u_n)dx \\ &= \int_\Omega |x|^{-2^*a}(f(u_n)u_n - 2F(u_n))dx. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Donde temos que

$$\begin{aligned} 2I(t_nu_n) &= \int_\Omega |x|^{-2^*a}f(u_n)u_n dx - 2\int_\Omega F(u_n)|x|^{-2^*a}dx \\ &= \int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u_n|^2 dx - 2\int_\Omega F(u_n)|x|^{-2^*a}dx \\ &- \int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u_n|^2 + \int_\Omega |x|^{-2^*a}f(u_n)u_n dx \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega F(u_n)|x|^{-2^*a}dx\right) \\ &- \int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u_n|\cdot|\nabla u_n| dx + \int_\Omega |x|^{-2^*a}f(u_n)u_n dx \\ &= 2I(u_n) - I'(u_n)u_n \\ &= 2I(u_n) + o_n(1). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Portanto $2I(t_nu_n) \leq 2I(u_n) + o_n(1)$. Por sua vez, como $I(u_n) \to c$, segue que fazendo $n \to +\infty$ em (5.19) obtemos

$$I(t_nu_n) \leq c$$

para todo $t \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$. □

Lema 5.5. *A sequência de Cerami (u_n) é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega, w)$.*

Demonstração. Para fins de contradição, suponha que $||u_n|| \to +\infty$ e seja $v_n = \dfrac{u_n}{||u_n||}$. Como $||v_n|| = 1$, segue pelo Teorema 2.3 que existe $v \in W_0^{1,2}(\Omega, w)$ tal que $v_n \rightharpoonup v$ em $W_0^{1,2}(\Omega, w)$. Afirmamos que $v = 0$. De fato, como $I(u_n) \to c$ temos que

$$\frac{1}{2}||u_n||^2 - \int_\Omega F(u_n)|x|^{-2^*a}dx = c + o_n(1)$$

isto é,

$$\frac{1}{2} + \frac{o_n(1)}{||u_n||^2} - \frac{c}{||u_n||^2} = \int_\Omega \frac{F(u_n)|x|^{-2^*a}}{||u_n||^2}dx = \int_\Omega \frac{|x|^{-2^*a}F(u_n)}{|u_n|^2}|v_n|^2.$$

A condição (f_2) implica que para todo $M>0$, existe $R>0$ tal que

$$\frac{F(s)}{s^2} \geq M, \quad \text{sempre que} \quad |s| \geq R. \tag{5.20}$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + o_n(1) &\geq \int_\Omega \frac{|x|^{-2^*a}F(u_n)}{|u_n|^2}|v_n|^2 \geq \int_{\Omega_0 \cap \{|u_n| \geq R\}} \frac{|x|^{-2^*a}F(u_n)}{|u_n|^2}|v_n|^2 \\ &\geq M \int_{\Omega_0 \cap \{|u_n| \geq R\}} |x|^{-2^*a}|v_n|^2 \end{aligned} \tag{5.21}$$

em que $\Omega_0 = \{x \in \Omega; v(x) \neq 0\}$. Note que, como $v_n \rightharpoonup v$ em $W_0^{1,2}(\Omega, w)$ então pela imersão compacta $W_0^{1,2}(\Omega, w) \hookrightarrow L^2(\Omega, w)$ (Teorema 3.19), segue que $v_n \to v$ em $L^2(\Omega, w)$ e por sua vez, $w^{\frac{1}{2}}v_n \to w^{\frac{1}{2}}v$ em $L^2(\Omega)$. Daí, pelo Teorema 2.4, temos que existe uma subsequência renomeada (v_n) de $(w^{\frac{1}{2}}v_n)$ tal que $v_n(x) \to v(x)$ q.t.p em Ω e que existe $h \in L^2(\Omega)$ tal que

$$|v_n(x)| \leq h(x) \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega, \quad \text{para todo} \quad n. \tag{5.22}$$

Donde concluímos que

$$\liminf_{n \to +\infty} |v_n|^2|x|^{-2^*a} = |v|^2|x|^{-2^*a} \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega.$$

Logo pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\geq M \liminf_{n \to +\infty} \int_{\Omega_0 \cap \{|u_n| \geq R\}} |x|^{-2^*a}|v_n|^2 dx \\ &\geq M \int_{\Omega_0} \liminf_{n \to +\infty} \chi_{\Omega_0 \cap \{|u_n| \geq R\}} |x|^{-2^*a}|v_n|^2 dx \\ &\geq M \int_{\Omega_0} |x|^{-2^*a}|v|^2 dx \end{aligned} \tag{5.23}$$

isto é, $\frac{1}{2} \geq M \int_{\Omega_0} |x|^{-2^*a}|v|^2 dx$. Tomando $M>0$ suficientemente grande, obtemos uma contradição e portanto $|\Omega_0| = 0$. Por sua vez, como $|\Omega_0| = 0$ segue que $v = 0$ q.t.p em Ω. Além disso, para $A > 0$ tem-se $\frac{A}{||u_n||} \in [0,1]$ para n suficientemente grande. Assim pelo

Lema 5.2, segue que para todo $t \in [0,1]$ temos

$$\begin{aligned} I(t_n u_n) &= \max_{t\geq 0} I(tu_n) \geq I(\frac{A}{||u_n||}u_n) = I(Av_n) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla(Av_n)|^2 dx - \int_\Omega F(Av_n)|x|^{-2^*a}dx \\ &= \frac{1}{2}A^2\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla v_n|^2 dx - \int_\Omega F(Av_n)|x|^{-2^*a}dx \\ &= \frac{A^2}{2}||v_n||^2 - \int_\Omega F(Av_n)|x|^{-2^*a}dx \\ &= \frac{A^2}{2} - \int_\Omega F(Av_n)|x|^{-2^*a}dx. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Como consequência da condição (f_1) temos de (5.2) que

$$|F(Av_n)| \leq \varepsilon|Av_n|^{2^*} + c_\varepsilon|Av_n|^r\chi_{\{|t|\geq\delta\}}(Av_n).$$

Logo,

$$\begin{aligned} I(t_n u_n) &\geq \frac{A^2}{2} - \int_\Omega [\varepsilon|Av_n|^{2^*} + c_\varepsilon|Av_n|^r\chi_{\{|t|\geq\delta\}}(Av_n)]|x|^{-2^*a}dx \\ &= \frac{A^2}{2} - \varepsilon\int_\Omega |Av_n|^{2^*}|x|^{-2^*a} - c_\varepsilon\int_\Omega |Av_n|^r\chi_{\{|t|\geq\delta\}}(Av_n)|x|^{-2^*a} \\ &= \frac{A^2}{2} - \varepsilon A^{2^*}\int_\Omega |v_n|^{2^*}|x|^{-2^*a} - c_\varepsilon A^r\int_\Omega |v_n|^r\chi_{\{|t|\geq\delta\}}(Av_n)|x|^{-2^*a}. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Pela desigualdade de Cafarelli, Kohn, Nirenberg e Xuan, segue que

$$I(t_n u_n) \geq \frac{A^2}{2} - \varepsilon A^2 K^{\frac{2^*}{2}}||v_n||^{2^*} - c_\varepsilon A^r\int_\Omega |v_n|^r\chi_{\{|t|\geq\delta\}}(Av_n)|x|^{-2^*a}.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, obtemos

$$I(t_n u_n) \geq \frac{A^2}{2} - c_\varepsilon A^r\int_\Omega |v_n|^r\chi_{\{|t|\geq\delta\}}(Av_n)|x|^{-2^*a}. \tag{5.26}$$

Por sua vez, como $v_n(x) \to 0$ q.t.p em Ω então $|x|^{-2^*a}|v_n(x)|^r \to 0$ q.t.p em Ω. Além disso, sabemos que $1 < r \leq 2^* - 1$, assim novamente pela Desigualdade de Cafarelli, Kohn, Nirenberg e Xuan

$$\int_\Omega |v_n|^r|x|^{-2^*a}dx \leq \int_\Omega |v_n|^{2^*}|x|^{-2^*a}dx \leq K^{\frac{2^*}{2}}||v_n||^{2^*} < +\infty$$

ou seja, $|v_n|^r|x|^{-2^*a} \in L^1(\Omega)$. Observe também que por Cafarelli, Kohn, Nirenberg e Xuan, temos $h(x)^{2^*}|x|^{-2^*a} \in L^1(\Omega)$ e de (5.22) obtemos $|v_n|^r|x|^{-2^*a} \leq h(x)^{2^*}|x|^{-2^*a}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |v_n|^r\chi_{\{|t|\geq\delta\}}(Av_n)|x|^{-2^*a} = 0. \tag{5.27}$$

Logo, passando o limite em (5.26) com $n \to +\infty$, segue que

$$\liminf_{n\to+\infty} I(t_n u_n) \geq \liminf_{n\to+\infty} \left(\frac{A^2}{2} - c_\varepsilon A^r \int_\Omega |v_n|^r \chi_{\{|t|\geq\delta\}}(Av_n)|x|^{-2^*a}dx \right) = \frac{A^2}{2}$$

para todo $A > 0$, o que constitui uma contradição com o fato de que pelo Lema 5.4, $(I(t_n u_n))$ é limitada. Portanto a sequência (u_n) é limitada.

□

Teorema 5.6. *Assuma que (f_1), (f_2) e (f_3) são válidas. Então o problema (1.2) tem uma solução não negativa.*

Demonstração. Pelo Lema 5.5, temos que a sequência de Cerami (u_n) é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega, w)$ então como $W_0^{1,2}(\Omega, w)$ é um espaço reflexivo, segue pelo Teorema 2.3 que existe uma subsequência que denominaremos por (u_n) que converge na topologia fraca de $W_0^{1,2}(\Omega, w)$, isto é, existe $u \in W_0^{1,2}(\Omega, w)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ W_0^{1,2}(\Omega, w).$$

Além disso como Ω é limitado, então pela imersão compacta $W_0^{1,2}(\Omega, w) \hookrightarrow L^2(\Omega, w)$ (Teorema 3.19) segue que $u_n \to u$ em $L^2(\Omega, w)$. Afirmamos que $I'(u_n)\varphi \to 0$ para todo $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega, w)$. De fato, como (u_n) é uma sequência de Cerami, então temos que $(1 + ||u_n||_{W_0^{1,2}(\Omega,w)})||I'(u_n)|| \to 0$. Assim, sendo

$$0 \leq ||I'(u_n)|| \leq (1 + ||u_n||)||I'(u_n)||$$

então fazendo $n \to +\infty$ na desigualdade acima, obtemos $||I'(u_n)|| \to 0$. Daí, segue que $I'(u_n)\varphi \to 0$ para todo $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega, w)$. Em particular para $\varphi = u$, temos que $I'(u_n)u \to 0$. Além disso, como o funcional I é de classe C^1 e a sequência (u_n) é limitada, segue que fazendo $n \to +\infty$ na seguinte desigualdade

$$|I'(u_n)u_n| \leq ||I'(u_n)|| \cdot ||u_n||$$

obtemos $|I'(u_n)u_n| \to 0$. Donde concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty} I'(u_n)(u_n - u) = 0. \tag{5.28}$$

Note que,

$$I'(u_n)(u_n - u) = \int_\Omega |x|^{-2a}\nabla u_n \cdot \nabla(u_n - u)dx - \int_\Omega |x|^{-2^*a} f(u_n)(u_n - u)dx. \tag{5.29}$$

Como $u_n \to u$ em $L^2(\Omega, w)$, segue que $w^{\frac{1}{2}}u_n \to w^{\frac{1}{2}}u$ em $L^2(\Omega)$. Por sua vez, pelo Teorema 2.4, existe uma subsequência renomeada (u_n) de $(w^{\frac{1}{2}}u_n)$ tal que $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p em Ω e existe $h \in L^2(\Omega)$ tal que

$$|u_n(x)| \leq h(x) \ \text{ q.t.p em } \ \Omega, \ \text{ para todo } \ n. \tag{5.30}$$

Por (f_1) temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega |x|^{-2^*a} f(u_n)(u_n-u)dx\right| &\leq \int_\Omega ||x|^{-2^*a} f(u_n)(u_n-u)|dx \\
&= \int_\Omega |x|^{-2^*a}|f(u_n)||u_n-u|dx \\
&= c\int_\Omega |x|^{-2^*a}|u_n|^{2^*-1}|u_n-u|dx. \qquad (5.31)
\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder com os duais $\alpha = \frac{2^*}{2^*-1}$ e $\alpha' = 2^*$ e usando a Desigualdade de Cafarelli, Kohn, Nirenberg e Xuan, segue que

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega |x|^{-2^*a} f(u_n)(u_n-u)dx\right| &\leq c\int_\Omega |x|^{-2^*a}|u_n|^{2^*-1}|u_n-u|dx \\
&\leq c\int_\Omega |x|^{\frac{-2^*a}{\alpha}}|x|^{\frac{-2^*a}{\alpha'}}|u_n|^{2^*-1}|u_n-u|dx \\
&\leq c\int_\Omega |x|^{\frac{-2^*a}{\alpha}}|u_n|^{2^*-1}|x|^{\frac{-2^*a}{\alpha'}}|u_n-u|dx \\
&\leq c\left(\int_\Omega ||x|^{\frac{-2^*a}{\alpha}}|u_n|^{2^*-1}|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\int_\Omega ||x|^{\frac{-2^*a}{\alpha'}}|u_n-u||^{\alpha'}dx\right)^{\frac{1}{\alpha'}} \\
&\leq c\left(\int_\Omega |x|^{-2^*a}|u_n|^{2^*}dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}}\left(\int_\Omega |x|^{-2^*a}|u_n-u||^{2^*}dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \\
&= c\cdot K_1^{\frac{2^*-1}{2}}\cdot K_2^{\frac{1}{2}}||u_n||^{2^*-1}||u_n-u|| < +\infty \qquad (5.32)
\end{aligned}$$

isto é, $|x|^{-2^*a}|u_n|^{2^*-1}|(u_n-u)(x)| \in L^1(\Omega)$. Além disso, como $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p em Ω, temos que $|x|^{-2^*a}|u_n|^{2^*-1}|(u_n-u)(x)| \to 0$ q.t.p em Ω e existe uma constante $M > 0$ tal que $|(u_n-u)(x)| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim por (5.30), obtemos

$$|x|^{-2^*a}|u_n|^{2^*-1}|(u_n-u)(x)| \leq M|x|^{-2^*a}|u_n|^{2^*-1} \leq M\cdot h(x)^{2^*}|x|^{-2^*a}$$

onde sabemos por Cafarelli, Kohn, Nirenberg e Xuan que $h(x)^{2^*}|x|^{-2^*a} \in L^1(\Omega)$. Logo pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\left|\int_\Omega |x|^{-2^*a} f(u_n)(u_n-u)dx\right| \leq c\int_\Omega |x|^{-2^*a}|u_n|^{2^*-1}|u_n-u|dx = o_n(1). \qquad (5.33)$$

Portanto de (5.28), (5.29) e (5.33), obtemos

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega |x|^{-2a}\nabla u_n\cdot\nabla(u_n-u)dx = o_n(1). \qquad (5.34)$$

Assim, sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave e limitado, com $N \geq 3$, $-\infty < a < \frac{N-2}{2}$, (u_n) uma sequência em $W_0^{1,2}(\Omega, w)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,2}(\Omega, w)$ e vale (5.34) segue pelo Teorema 5.3 que existe uma subsequência renomeada (u_n) em $W_0^{1,2}(\Omega, w)$ tal que

$$u_n \to u \ \text{ em } \ W_0^{1,2}(\Omega, w).$$

Assim, usando que para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega, w)$ o funcional $I'(u_n)\varphi$ é contínuo, temos que

$$I'(u_n)\varphi \to I'(u)\varphi \;\text{ para todo }\; \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega, w).$$

Por outro lado, sabemos que

$$I'(u_n)\varphi \to 0 \;\text{ para todo }\; \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega, w).$$

Logo, pela unicidade do limite, concluímos que $I'(u)\varphi = 0$, para todo $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega, w)$, isto é, u é uma solução fraca de (1.2.) Além disso, observe que u é solução não trivial. De fato, como o funcional I é contínuo e $u_n \to u$ em $W_0^{1,2}(\Omega, w)$, segue que

$$I(u_n) \to I(u).$$

Mas, sabemos que

$$I(u_n) \to c > 0.$$

Então, novamente pela unicidade do limite, segue que $I(u) = c$. Como $I(0) = 0$ e $c \neq 0$ concluímos que u é solução não-trivial. Mostraremos agora que a solução encontrada u é não negativa. Para isso, seja $u \in W_0^{1,2}(\Omega, w)$ então considerando a função teste $\varphi = u^- = \max\{0, -u\}$ temos pelo Corolário 4.9 que $u^- \in W_0^{1,2}(\Omega, w)$. Daí,

$$\int_\Omega |x|^{-2a} \nabla u \cdot \nabla u^- = \int_\Omega |x|^{-2^* a} f(u) u^-. \tag{5.35}$$

Assim, como

$$\int_\Omega |x|^{-2a} \nabla u \cdot \nabla u^- = \int_{[u \geq 0]} |x|^{-2a} \nabla u \cdot \nabla u^- + \int_{[u \leq 0]} |x|^{-2a} \nabla u \cdot \nabla u^-$$

segue novamente pelo Corolário 4.9 que $\nabla u^- = 0$ em $[u \geq 0]$, e portanto

$$\int_\Omega |x|^{-2a} \nabla u \cdot \nabla u^- = \int_{[u \leq 0]} |x|^{-2a} |\nabla u^-|^2. \tag{5.36}$$

Por outro lado,

$$\int_\Omega |x|^{-2^* a} f(u) u^- = \int_{[u \geq 0]} |x|^{-2^* a} f(u) u^- + \int_{[u \leq 0]} |x|^{-2^* a} f(u) u^- = 0. \tag{5.37}$$

De (5.35), (5.36) e (5.37)

$$||u^-||^2_{W_0^{1,2}([u \leq 0], w)} = \int_{[u \leq 0]} |x|^{-2a} |\nabla u^-|^2 = \int_\Omega |x|^{-2a} \nabla u \cdot \nabla u^- = \int_\Omega |x|^{-2^* a} f(u) u^- = 0$$

isto é, $||u^-||^2_{W_0^{1,2}([u \leq 0], w)} = 0$. Por sua vez, $||u^-||^2_{W_0^{1,2}([u \leq 0], w)} = 0$ implica que $u^- = 0$ q.t.p em Ω. Como $u = u^+ + u^-$ e $u^- = 0$, concluímos que $u = u^+$, ou seja, u é uma solução não negativa para o problema. $\square$

A Apêndice

A.1 Operadores diferenciáveis

Apresentaremos a seguir algumas definições e proposições cujas provas podem ser encontradas em [15]. Seja E um espaço de Banach e E^* seu espaço dual.

Definição A.1. *Seja U um aberto em E e $\Phi : E \to \mathbb{R}$. Dizemos que Φ é diferenciável a Fréchet em $x_0 \in U$, com derivada de Fréchet $\Phi'(x_0) \in E^*$ se*

$$\Phi(x_0 + h) = \Phi(x_0) + \Phi'(x_0)h + o(h)$$

em que $\frac{o(h)}{||h||} \to 0$ quando $h \to 0$. Além disso, dizemos que $\Phi \in C^1(U)$ se Φ', a derivada de Fréchet, existe e é contínua em U.

Definição A.2. *Suponha U um aberto em E e $\Phi : E \to \mathbb{R}$. Dizemos que Φ é diferenciável a Gâteaux em $x_0 \in U$, com derivada de Gâteaux $\operatorname{grad} \Phi(x_0) \in E^*$ se*

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\Phi(x_0 + th) - \Phi(x_0)}{t} = \operatorname{grad} \Phi(x_0) \quad \textit{para todo} \quad h \in E.$$

Proposição A.3. *Se o operador $\Phi : E \to \mathbb{R}$ tem derivada de Gâteaux contínua em U então $\Phi \in C^1(U)$.*

Lema A.4. *O funcional I, definido em (5.3) é de classe C^1 com derivada de Gâteaux dada por*

$$I'(u)v = \int_\Omega |x|^{-2a} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Omega |x|^{-2^*a} f(u) v dx \quad \textit{para todos} \quad u, v \in W_0^{1,2}(\Omega, w). \quad \text{(A.1)}$$

Demonstração. Definamos os funcionais Φ_1, Φ_2 em $W_0^{1,2}(\Omega, w)$ dados por $\Phi_1(u) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega |x|^{-2a} |\nabla u|^2 dx$ e $\Phi_2(u) = \displaystyle\int_\Omega |x|^{-2^*a} F(u) dx$ em que $F(u) = \displaystyle\int_0^u f(t) dt$. Mostraremos que $\operatorname{grad} \Phi_2(u)v = \displaystyle\int_\Omega |x|^{-2^*a} f(u) v dx$. Para isso definamos

$$g_t(x) = |x|^{-2^*a} \frac{[F(u(x) + tv(x)) - F(u(x))]}{t}, \quad t \in [0, 1].$$

Por (f_1) temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(s)| < \varepsilon |s|^{2^*-1}, \quad |s| < \delta. \quad \text{(A.2)}$$

Assim usando a desigualdade $(a+b)^r \leq 2^{r-1}(a^r+b^r)$ e o Teorema do valor Médio temos que existe $\theta \in [0,1]$ tal que

$$\begin{aligned} g_t(x) &= |x|^{-2^*a}\frac{[F(u(x)+tv(x))-F(u(x))]}{t} \\ &= |x|^{-2^*a}\frac{F'(u(x)+\theta tv(x))tv(x)}{t} \\ &= |x|^{-2^*a}F'(u(x)+\theta tv(x))v(x) \\ &= |x|^{-2^*a}f(u(x)+\theta tv(x))v(x) \\ &= |x|^{-2^*a}\varepsilon(|u(x)+\theta tv(x)|^{2^*-1})v(x) \\ &= \varepsilon 2^{2^*-2}|x|^{-2^*a}(|u(x)|^{2^*-1}+|\theta tv(x)|^{2^*-1})v(x) \\ &= c|x|^{-2^*a}v(x)|u(x)|^{2^*-1}+c|x|^{-2^*a}|v(x)|^{2^*} \\ &= h(x) \end{aligned} \tag{A.3}$$

em que $c=\varepsilon \cdot 2^{2^*-2}>0$. Pela Desigualdade de Caffarelli, Kohn, Nirenberg e Xuan temos que

$$\int_\Omega |x|^{-2^*a}|v|^{2^*}dx \leq \left(K\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla v|^2 dx\right)^{\frac{2^*}{2}} \leq K^{\frac{2^*}{2}}||v||^{2^*} < +\infty. \tag{A.4}$$

Usando a desigualdade de Hölder com os duais $\alpha = \frac{2^*}{2^*-1}$ e $\alpha' = 2^*$ e novamente a Desigualdade de Caffarelli, Kohn, Nirenberg e Xuan, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |x|^{-2^*a}|u|^{2^*-1}|v|dx &= \int_\Omega |x|^{\frac{-2^*a}{\alpha}}|x|^{\frac{-2^*a}{\alpha'}}|u|^{2^*-1}|v|dx \\ &= \int_\Omega |x|^{\frac{-2^*a}{\alpha}}|u|^{2^*-1}|x|^{\frac{-2^*a}{\alpha'}}|v|dx \\ &\leq \left(\int_\Omega ||x|^{\frac{-2^*a}{\alpha}}|u|^{2^*-1}|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\int_\Omega ||x|^{\frac{-2^*a}{\alpha'}}|v||^{\alpha'}\right)^{\frac{1}{\alpha'}} \\ &= \left(\int_\Omega |x|^{-2^*a}|u|^{2^*}\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}}\left(\int_\Omega |x|^{-2^*a}|v|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \\ &= K_1^{\frac{2^*-1}{2}}K_2^{\frac{1}{2}}||u||^{2^*-1}||v|| \\ &= K||u||^{2^*-1}||v|| < +\infty \end{aligned} \tag{A.5}$$

em que $K = K_1^{\frac{2^*-1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} > 0$. Por (A.4) e (A.5) temos que $h \in L^1(\Omega.)$ Assim, como existe $h \in L^1(\Omega)$ tal que $|g_t| \leq h$ segue pelo Teorema da Convergência Dominada 2.10, temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} \Phi_2(u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_2(u+tv) - \Phi_2(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega |x|^{-2^*a} F(u+tv) - \int_\Omega |x|^{-2^*a} F(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \int_\Omega |x|^{-2^*a} \frac{[F(u+tv) - F(u)]}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \int_\Omega |x|^{-2^*a} f(u+\theta tv)v \\
&= \int_\Omega \lim_{t\to 0} |x|^{-2^*a} f(u+\theta tv)v \\
&= \int_\Omega |x|^{-2^*a} f(u)v. \qquad \text{(A.6)}
\end{aligned}$$

Pela desigualdade (A.5) temos que o grad $\Phi_2(u)v$ é um funcional coninuo em Ω e portanto da Proposição A.3 segue que $\Phi_2 \in C^1(\Omega)$ com derivada de Fréchet dada por

$$\Phi_2'(u)v = \int_\Omega |x|^{-2^*a} f(u)v dx.$$

De modo análogo, mostraremos que

$$\operatorname{grad} \Phi_1(u)v = \int_\Omega |x|^{-2a} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad \text{para todo} \quad u, v \in W_0^{1,2}(\Omega, w)$$

e que grad $\Phi_1 \in C^1(\Omega)$. Por definição temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} \Phi_1(u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_1(u+tv) - \Phi_1(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_\Omega |x|^{-2a} |\nabla(u+tv)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |x|^{-2a} |\nabla(u)|^2 dx}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} \int_\Omega |x|^{-2a} \frac{[|\nabla(u+tv)|^2 - |\nabla(u)|^2]}{t} dx \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} \int_\Omega |x|^{-2a} \frac{[|\nabla u + t\nabla v|^2 - |\nabla(u)|^2]}{t} dx \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} \int_\Omega |x|^{-2a} [2\nabla u \cdot \nabla v + t\nabla v] dx \\
&= \lim_{t\to 0} \int_\Omega |x|^{-2a} \nabla u \cdot \nabla v dx + \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} \int_\Omega t\nabla v dx \\
&= \int_\Omega |x|^{-2a} \nabla u \cdot \nabla v dx. \qquad \text{(A.7)}
\end{aligned}$$

Mostraremos agora que $\operatorname{grad}\Phi_1(u)v$ é contínuo em Ω. De fato, aplicando a Desigualdade de Hölder com os duais $\alpha = 2$ e $\alpha' = 2$ segue que

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{grad}\Phi_1(u)v| &= \left|\int_\Omega |x|^{-2a}\nabla u\cdot\nabla v\;dx\right| \\
&\leq \int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u\cdot\nabla v| \\
&\leq \int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u|\cdot|\nabla v| \\
&\leq \int_\Omega |x|^{\frac{-2a}{\alpha}}|x|^{\frac{-2a}{\alpha'}}|\nabla u|\cdot|\nabla v| \\
&\leq \left(\int_\Omega ||x|^{\frac{-2a}{\alpha}}|\nabla u||^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\int_\Omega ||x|^{\frac{-2a}{\alpha'}}|\nabla v||^{\alpha'}\right)^{\frac{1}{\alpha'}} \\
&\leq \left(\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla v|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq ||u||\cdot||v|| \qquad (A.8)
\end{aligned}
$$

isto é,

$$|\operatorname{grad}\Phi_1(u)| \leq ||u||, \quad \text{para todo} \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega,w).$$

Assim pela Proposição A.3, segue que $\Phi_1 \in C^1(\Omega)$ com derivada de Fréchet

$$\Phi_1'(u)v = \int_\Omega |x|^{-2a}\nabla u\cdot\nabla v dx.$$

Logo, como $I'(u)v = \Phi_1'(u)v + \Phi_2'(u)v$ temos que

$$I'(u)v = \int_\Omega |x|^{-2a}\nabla u\cdot\nabla v dx - \int_\Omega |x|^{-2^*a}f(u)v dx \quad \text{para todo} \quad u,v \in W_0^{1,2}(\Omega,w).$$

□

Bibliografia

[1] ADAMS. Robert; FOURNIER. John JF*; Sobolev spaces*. Elsevier, 2003.

[2] ALLEGRETTO. Walter; XI. Huang Yin*; A Picone's identity for the p-Laplacian and applications*. Vol. 32. 7. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 1998, pp. 819–830.

[3] ALVES. Claudianor O; SOUTO, Marco AS; MONTENEGRO, Marcelo*; Existence of solution for two classes of elliptic problems in* R^N *with zero mass*. Vol. 252. 10. Journal of Differential Equations, 2012, pp. 5735–5750.

[4] AMBROSETTI. Antonio; RABINOWITZ. Paul H*;Dual variational methods in critical point theory and applications*. Vol. 14. 4. Journal of functional Analysis, 1973, pp. 349–381.

[5] BAL. Kaushik*; Generalized Picone's identity and its applications*. Vol. 243. 1-6. Electron. J. Differential Equations, 2013, p. 15.

[6] BASTOS. Waldemar D; MIYAGAKI. Olimpio H; VIEIRA. Rônei S *; Existence of solutions for a class of degenerate quasilinear elliptic equation in* R^N *with vanishing potentials*. Vol. 2013. Boundary Value Problems, 2013, pp. 1–16.

[7] BOTELHO. Geraldo; PELLEGRINO. Daniel; TEIXEIRA. Eduardo*; Fundamentos de Análise Funcional*. 2ª ed. SBM, 2015.

[8] BRÉZIS. Haım; NIRENBERG. Louis; *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*. Vol. 36. 4. Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company New York, 1983, pp. 437–477.

[9] BREZIS. Haim*; Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Vol. 2. 3. Springer, 2011.

[10] CHANILLO. Sagun; WHEEDEN. Richard L*; Weighted Poincaré and Sobolev inequalities and estimates for weighted Peano maximal functions*. Vol. 107. American Journal of Mathematics, 1985, pp. 1191–1226.

[11] CHUA. Seng-Kee; RODNEY. Scott; WHEEDEN. Richard*; A compact embedding theorem for generalized Sobolev spaces*. Vol. 265. 1. Mathematical Sciences Publishers, 2013, pp. 17–57.

[12] DE CICCO. Virginia; VIVALDI. Maria Agostina*; A Liouville type theorem for weighted elliptic equations*. Vol. 9. Adv. Math. Sci. Appl, 1999, pp. 183–207.

[13] COSTA. David G; MIYAGAKI. Olimpio H*; Nontrivial solutions for perturbations of the p-Laplacian on unbounded domains*. Vol. 193. 3. Journal of Mathematical Analysis e Applications, 1995, pp. 737–755.

[14] CUESTA. Mabel*; Eigenvalue problems for the-Laplacian with indefinite weights*. Vol. 2001. Electronic Journal of Differential Equations, 2001, Paper–No.

[15] DEIMLING. Klaus;*; Nonlinear functional analysis*. Courier Corporation, 2010.

[16] DRÁBEK. Pavel; and KUFNER. Alois; and NICOLOSI. Francesco*; Quasilinear elliptic equations with degenerations and singularities*. Vol. 5. Walter de Gruyter, 2011.

[17] DWIVEDI. Gaurav; TYAGI. Jagmohan*; Some qualitative questions on the equation* $-div(a(x, u, \nabla u)) = f(x, u)$. Vol. 446. 1. Journal of Mathematical Analysis e Applications, 2017, pp. 456–469.

[18] EVANS. Lawrence C*; Partial differential equations*. Vol. 19. American Mathematical Society, 2022.

[19] FABES. Eugene B; KENIG. Carlos E; SERAPIONI. Raul P*; The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations*. Vol. 7. 1. Communications in Statistics-Theory e Methods, 1982, pp. 77–116.

[20] GARAIN. Prashanta*; On a degenerate singular elliptic problem*. Vol. 295. 7. Mathematische Nachrichten, 2022, pp. 1354–1377.

[21] GARAIN. Prashanta*; Properties of solutions to some weighted p-Laplacian equation*. Vol. 40. Opuscula Mathematica, 2020, pp. 483–494.

[22] GILBARG. David; TRUDINGER. Neil S*; Elliptic partial differential equations of second order*. Vol. 224. 2. Springer, 1977.

[23] ISNARD. Carlos*; Introdução à medida e integração*. 3ª ed. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2018.

[24] KAWOHL. Bernd; LUCIA. Marcello; PRASHANTH. S*; Simplicity of the principal eigenvalue for indefinite quasilinear problems*. Vol. 12. Adv. Differential Equations, 2007, pp. 407–434.

[25] KUFNER. Alois; OPIC. Bohumír*; How to define reasonably weighted Sobolev spaces*. Vol. 25. 3. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 1984, pp. 537–554.

[26] LIMA. Elon lages*; Espaços métricos*. IMPA, 2014.

[27] RODRIGUES. Rodrigo da Silva*; Sistemas elípticos com pesos envolvendo o expoente crítico de Hardy-Sobolev*. Tese: Universidade Federal de São Carlos, 2007.

[28] TORCHINSKY. Alberto*; Real-variable methods in harmonic analysis*. Academic Press, 1986.

[29] TURESSON. Bengt O;*; Nonlinear potential theory and weighted Sobolev spaces*. Vol. 1736. Springer Science & Business Media, 2000.

[30] XUAN. Benjin*; The solvability of quasilinear Brezis–Nirenberg-type problems with singular weights*. Vol. 62. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2005, pp. 703–725.