



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - CCET  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PPGMAT

FILIPE BASTOS RIBEIRO

**POLINÔMIOS ORTOGONAIS NO CÍRCULO UNITÁRIO OBTIDOS A  
PARTIR DE UMA RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA DE TRÊS TERMOS:  
UM TEOREMA DO TIPO FAVARD**

São Luís – MA

2024

**FILIPPE BASTOS RIBEIRO**

**POLINÔMIOS ORTOGONAIS NO CÍRCULO UNITÁRIO OBTIDOS A  
PARTIR DE UMA RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA DE TRÊS TERMOS:  
UM TEOREMA DO TIPO FAVARD**

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado em  
Matemática da UFMA, como requisito parcial para  
sua conclusão.

**Orientador: Prof. Dr. Jairo Santos da Silva**

**São Luís – MA**

**2024**

**FILIPPE BASTOS RIBEIRO**

**POLINÔMIOS ORTOGONAIS NO CÍRCULO UNITÁRIO OBTIDOS A  
PARTIR DE UMA RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA DE TRÊS TERMOS:  
UM TEOREMA DO TIPO FAVARD**

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado em  
Matemática da UFMA, como requisito parcial para  
sua conclusão.

São Luís, 15/08/2024.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Jairo Santos da Silva  
Universidade Federal do Maranhão - UFMA  
(Orientador)

---

Prof. Dr. Junior Augusto Pereira  
Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG  
(Avaliador Externo)

---

Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo  
Universidade Federal do Maranhão - UFMA  
(Avaliador Interno)

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Ribeiro, Filipe Bastos.

Polinômios Ortogonais No Círculo Unitário Obtidos A Partir de Uma Relação de Recorrência de Três Termos: Um Teorema do Tipo Favard / Filipe Bastos Ribeiro. - 2024.  
94 p.

Orientador(a): Jairo Santos da Silva.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís - Ma, 2024.

1. Matemática. 2. Análise. 3. Polinômios Ortogonais.  
4. . 5. . I. Silva, Jairo Santos da. II. Título.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus. Agradeço também aos professores das disciplinas do Programa de Pós-graduação em Matemática da UFMA. Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual o presente trabalho não seria possível. Agradeço ao orientador desta dissertação, Prof. Dr. Jairo Santos da Silva e a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, foram importantes para realização deste trabalho.

## RESUMO

Na reta real existe um importante teorema, conhecido como Teorema de Favard, que garante a existência de uma única medida de probabilidade em relação a qual certos polinômios, que satisfazem uma relação de recorrência de três termos, são ortogonais. Para o círculo unitário existe uma conhecida versão deste resultado, entretanto a medida obtida é tal que os respectivos polinômios ortogonais não satisfazem uma relação de recorrência de três termos como no caso real. O objetivo deste trabalho é estudar um teorema do tipo Favard para o círculo unitário associado a polinômios que satisfazem uma relação de recorrência de três termos em que os coeficientes que aparecem na relação de recorrência são sequências reais, sendo uma delas uma sequência encadeada positiva. A metodologia aplicada nesse trabalho foi a pesquisa bibliográfica, onde utilizou-se, para a fundamentação teórica, de materiais encontrados em base de dados como Scielo, CAPES, sites de Universidades, bem como materiais impressos, artigos científicos, dissertações, teses, revistas e outros periódicos. A revisão de literatura, aqui proposta, mostra a importância do estudo e conexão da Teoria de frações contínuas e sequências encadeadas positivas para caracterização de medidas de probabilidade não triviais no círculo unitário.

**Palavras-chave:** Polinômios ortogonais no círculo unitário. Relação de recorrência de três termos. Sequências encadeadas. Frações contínuas.

## ABSTRACT

On the real line there is an important theorem, known as Favard's Theorem, which guarantees the existence of a single probability measure in relation to which certain polynomials, which satisfy a three-term recurrence relation, are orthogonal. For the unit circle there is a known version of this result, however the measure obtained is such that the respective orthogonal polynomials do not satisfy a recurrence relation of three terms as in the real case. The objective of this work is to study a theorem of Favard type for the unit circle associated with polynomials that satisfy a three-term recurrence relation in which the coefficients that appear in the recurrence formula are real sequences, one of which is a positive chained sequence. The methodology applied in this work was bibliographical research, which used, for the theoretical foundation, materials found in databases such as Scielo, CAPES, University websites, as well as printed materials, scientific articles, dissertations, theses, magazines and other periodicals. The literature review proposed here shows the importance of studying and connecting the Theory of continued fractions and positive chained sequences to characterize non-trivial probability measures in the unit circle.

**Keywords:** Orthogonal polynomials on the unit circle. Three-term recurrence formula. Chain sequences. Continued fractions

# Lista de Símbolos

Lista de símbolos do alfabeto grego, do alfabeto romano e não alfabéticos.

## Alfabeto Grego

|                |   |
|----------------|---|
| $\alpha_n$     | coeficiente de Verblunsky; veja Teorema 2.20                                  |
| $\beta_n$      | constante complexa na relação de recorrência de três termos; veja Teorema 2.9 |
| $B(p, q)$      | função Beta; veja Seção 2.5   |
| $\gamma$       | distribuição, ou medida (positiva); veja Definição 2.4                        |
| $\Gamma(z)$    | função Gama de Euler; veja Seção 2.5  |
| $\delta_{m,n}$ | delta de Kronecker; veja Seção 2.1  |
| $\Delta_n$     | determinante de Toeplitz; veja Seção 2.2                                      |
| $k_n$          | constante de normalização; veja Definição 2.17                                |
| $\mu$          | medida no círculo unitário; veja Definição 2.12                               |
| $\mu(\{z_0\})$ | medida do ponto puro $z_0$ ; veja Seção 2.2                                   |
| $\mu_n$        | momento (trigonométrico) associado à medida $\mu$ ; veja Definição 2.12       |
| $v_n$          | momento definido em função de $\mu_n$ . Veja Lema 3.6 e Seção 3.4             |

## Alfabeto Romano

|                          |   |
|--------------------------|---|
| $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ | sequência de números reais; veja Capítulo 3   |
| $\mathbb{C}$             | conjunto dos números complexos  |
| $\mathcal{C}$            | círculo unitário; veja Seção 2.2  |
| $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ | sequência encadeada positiva; veja Definição 2.27   |
| ${}_2F_1$                | função hipergeométrica; veja Seção 2.5  |
| $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ | sequência de parâmetros para $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ ; veja Definição 2.27                 |
| $H_n$                    | determinante de Hankel de ordem $n + 1$ ; veja Seção 2.1                                    |
| $\mathcal{I}m(z)$        | parte imaginária do número complexo $z$ ;   |
| $\mathcal{L}$            | funcional linear; veja Seção 2.2  |
| $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ | sequência de parâmetros minimal da sequência $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ ; veja Definição 2.30 |
| $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ | sequência de parâmetros maximal da sequência $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ ; veja Definição 2.31 |



|                       |  |
|-----------------------|--|
| $P$                   | partição do intervalo $[a, b]$ ; veja Definição 2.1  |
| $P_n$                 | sequência de polinômios ortogonais com relação a uma medida no intervalo $(a, b)$ ; veja Definição 2.6 |
| $\mathbb{R}$          | conjunto dos números reais;  |
| $\mathcal{R}e(z)$     | parte real do número complexo $z$ ;  |
| $\text{supp}(\gamma)$ | suporte para a função $\gamma$ ; veja Definição 2.3  |
| $S_n(z)$              | polinômio de Szegő associado a uma medida no círculo unitário; veja Seção 2.2                          |
| $S_n^*(z)$            | polinômio recíproco de $S_n(z)$ ; veja Definição 2.19  |
| $T_n$                 | matriz de Toeplitz; veja Seção 2.2   |
| $v(\gamma; P)$        | variação limitada; veja Definição 2.1  |
| $V(\gamma)$           | variação total; veja Definição 2.1   |
| $z_{n,j}$             | zeros dos polinômios $R_n(z)$ ; veja Lema 3.1  |
| $ z $                 | módulo do número complexo $z$ ;  |
| $\bar{z}$             | conjugado do número complexo $z$ ;   |
| $\mathbb{Z}$          | conjunto dos números inteiros.   |

### Não Alfabético

|   |   |
|---|---|
| $\int_{\mathcal{C}} f d\mu$             | integral complexa de $f$ em $\mathcal{C}$ em relação a medida $\mu$ ; veja Definição 2.12               |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\gamma}$ | produto interno associado a uma medida $\gamma$ no intervalo $(a, b)$ ; veja Seção 2.1                  |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle$          | produto interno associado a uma medida não trivial com suporte no círculo unitário; veja Definição 2.16 |
| $(x)_k$                                 | símbolo de Pochhammer; veja Seção 2.5   |
| $\rightarrow$                           | convergência pontual;   |
| ■                                       | indica o final de uma demonstração.   |

# Sumário

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>   | <b>8</b>  |
| <b>2</b> | <b>PRELIMINARES</b>   | <b>13</b> |
| 2.1      | Polinômios ortogonais na reta real . . . . .                                      | 13        |
| 2.2      | Polinômios ortogonais no círculo unitário (OPUC) . . . . .                        | 20        |
| 2.3      | Sequências encadeadas positivas . . . . .   | 30        |
| 2.4      | Frações contínuas . . . . .   | 34        |
| 2.5      | Funções Especiais . . . . .   | 36        |
| <b>3</b> | <b>UM TEOREMA DO TIPO FAVARD EM <math>\mathcal{C}</math> VIA SEQUÊNCIAS REAIS</b> | <b>39</b> |
| 3.1      | Uma introdução . . . . .  | 39        |
| 3.2      | Alguns resultados preliminares . . . . .  | 41        |
| 3.3      | Propriedades assintóticas e um funcional de momento auxiliar . . . . .            | 45        |
| 3.4      | A medida no círculo unitário e o respectivo funcional de momento . . . . .        | 61        |
| 3.5      | Outras propriedades de $R_n(z)$ e os OPUC associados . . . . .                    | 71        |
| 3.6      | Um exemplo . . . . .  | 75        |
|          | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>   | <b>91</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>   | <b>92</b> |

# 1 INTRODUÇÃO

Os polinômios ortogonais, desde a sua origem, estão baseados nas áreas de Análise e Trigonometria e são relacionados mais diretamente a Frações Contínuas. Isso porque a origem destes polinômios deu-se a partir de frações contínuas de casos especiais, estudadas por matemáticos tais como Stieltjes, Gauss, Jacobi, entre outros (veja, por exemplo, Szegő [31]).

A teoria dos polinômios ortogonais auxilia substancialmente a resolução de problemas envolvendo diversas áreas da Matemática Pura e Ciências Aplicadas. Por exemplo, os polinômios ortogonais vem contribuindo em estudos relacionados a equações diferenciais, interpolação, aproximação numérica, frações contínuas, estabilidade numérica, além de ter aplicação no ramo da Mecânica Quântica, Física Estatística e outros. Sua aplicação também está bastante relacionada com a revolução dos computadores e ao aumento da atividade na teoria da aproximação e análise numérica (mais detalhes sobre aplicações dos polinômios ortogonais podem ser encontrados, por exemplo, em [1], [5], [6] e [16]).

Uma sequência de polinômios  $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$  é chamada de sequência de polinômios ortogonais com relação à medida  $\gamma$  no intervalo  $(a, b)$ , se  $P_n$  é de grau exatamente  $n$  e

$$\langle P_m, P_n \rangle_{\gamma} = \int_a^b P_m(x)P_n(x)d\gamma(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \rho_n \neq 0, & \text{se } m = n \end{cases}.$$

Neste caso, a medida (positiva)  $\gamma$  é uma função real, definida no intervalo  $(a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ , limitada, não decrescente, com infinitos pontos de aumento e tal que as integrais de Stieltjes

$$\mu_n = \int_a^b x^n d\gamma(x), \quad n = 0, 1, \dots,$$

existam.

Os polinômios ortogonais na reta real gozam de propriedades bem particulares e importantes. Por exemplo, seus zeros são todos reais, simples, pertencem ao intervalo de ortogonalidade  $(a, b)$  dado, além de satisfazerem uma interessante propriedade de entrelaçamento. Estes mesmos zeros podem ser usados como os nós das “famosas” fórmulas

de quadratura Gaussianas, que têm máximo grau de precisão algébrico, e seus estudos são de grande utilidade na resolução de problemas das ciências e engenharias.

Uma outra propriedade extremamente útil, e que merece destaque, relativa aos polinômios ortogonais na reta real, é o fato desses polinômios satisfazerem uma relação de recorrência de três termos. Essa relação para polinômios mônicos (ou seja, polinômios cujo coeficiente do termo de maior grau,  $a_{n,n}$ , é igual a 1) é dada por:

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha_{n+1})P_n(x) - \beta_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

com  $P_0(x) = 1$ ,  $P_{-1}(x) = 0$  e  $\beta_{n+1}, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ .

Um conhecido resultado da literatura, chamado Teorema de Favard, garante que se  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  é uma sequência de polinômios mônicos satisfazendo a relação de recorrência de três termos acima, então, sobre certas condições na sequência real  $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ , é possível obter-se uma única medida de probabilidade em relação à qual a sequência de polinômios  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  é ortogonal (veja, por exemplo, Chihara [9]).

A teoria dos polinômios ortogonais também pode ser discutida no círculo unitário, onde é, justamente, o foco desse trabalho. Neste caso, o estudo desses polinômios (também chamados polinômios de Szegő) iniciou-se na primeira metade do século XX por Gabor Szegő e, atualmente, vêm chamando a atenção de muitos pesquisadores, sobretudo devido suas aplicações em diversas áreas e temas da Matemática, tais como, regras de quadratura, processamento de sinais e teoria espectral (para outras aplicações veja, por exemplo, [7, 22, 25, 26, 32]).

Se  $\mu(z) = \mu(e^{i\theta})$  é uma medida de probabilidade não trivial no círculo unitário  $\mathcal{C} = \{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ , uma sequência de polinômios ortogonais, no círculo unitário,  $\{S_n\}_{n=0}^\infty$ , com relação à medida  $\mu$ , pode ser definida por

$$\int_{\mathbb{T}} S_n(z) \overline{S_m(z)} d\mu(z) = \int_0^{2\pi} S_n(e^{i\theta}) \overline{S_m(e^{i\theta})} d\mu(e^{i\theta}) = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \kappa_n^{-2} \neq 0, & \text{se } m = n \end{cases},$$

onde  $S_n$  é um polinômio de grau exatamente  $n$ . Aqui, conforme a terminologia adotada por Simon [27], a medida  $\mu$  é não trivial se o seu suporte é um conjunto infinito e  $\mu$  é uma medida de probabilidade se  $\mu(\mathcal{C}) = 1$ . Além disso, diz-se que  $z_0 \in \mathcal{C}$  é um *ponto puro* (ou *ponto de massa*) de  $\mu$ , se a medida desse ponto é positiva, ou seja,  $\mu(\{z_0\}) > 0$ .

Diferentemente dos polinômios ortogonais na reta real, os polinômios ortogonais no círculo unitário não satisfazem uma relação de recorrência de três termos. Todavia,

quando mônicos, esses polinômios satisfazem as relações

$$\begin{aligned} S_n(z) &= zS_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1} S_{n-1}^*(z), \\ S_n(z) &= (1 - |\alpha_{n-1}|^2)zS_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1} S_n^*(z), \end{aligned} \quad n \geq 1, \quad (1.1)$$

onde  $S_0(z) = S_0^*(z) = 1$ ,  $\alpha_{n-1} := -\overline{S_n(0)}$  e  $S_n^*(z) := z^n \overline{S_n(1/\bar{z})}$  denota o polinômio recíproco de  $S_n(z)$ .

Os números complexos  $\alpha_n$  são usualmente conhecidos na literatura como coeficientes de Verblunsky, e por serem oriundos da sequência de polinômios ortogonais  $\{S_n\}_{n=0}^\infty$ , satisfazem a condição de que  $|\alpha_n| < 1$  para todo  $n \geq 0$ .

Uma conhecida versão do Teorema de Favard para o círculo unitário assegura que se  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$  é uma sequência arbitrária de números complexos tais que  $|\alpha_n| < 1$ ,  $n \geq 0$ , então, associada a esta sequência, é possível obter-se uma única medida de probabilidade não trivial  $\mu$ , suportada no círculo unitário, tal que os polinômios  $S_n(z)$ ,  $n \geq 0$ , gerados pelas relações (1.1), são os respectivos polinômios de Szegő mônicos (veja, por exemplo, [15] ou [27, Teorema 1.7.11]).

Vale ressaltar que na versão do Teorema de Favard para o círculo unitário mencionada acima as relações de recorrências para os polinômios de Szegő não são relações de recorrência de três termos (como no caso real) e, além disso, os coeficientes envolvidos não são compostos apenas de sequências reais, já que no caso envolvem a sequência de números complexos  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ .

Neste sentido, surgiram alguns questionamentos que nortearam a presente pesquisa, tais como: seria possível obter-se um teorema do “tipo Favard” para o círculo unitário envolvendo polinômios que satisfizessem uma relação de recorrência de três termos? Os coeficientes dessa relação poderiam ser apenas sequências reais? Que condições essas sequências deveriam satisfazer? É possível caracterizar completamente a medida e os polinômios ortogonais nesse caso?

Diante dessas indagações, a presente pesquisa, tem como principal objetivo apresentar um teorema do tipo Favard para o círculo unitário associado a polinômios que satisfazem uma relação de recorrência de três termos em que os coeficientes que aparecem na relação de recorrência são sequências reais, sendo uma delas uma sequência encadeada positiva. Vale mencionar que, segundo Chihara [9], uma sequência  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é denominada

sequência encadeada positiva se existe uma outra sequência  $\{g_n\}_{n=0}^\infty$  tal que

$$0 \leq g_0 < 1, \quad 0 < g_n < 1, \text{ para } n \geq 1, \quad \text{e} \quad d_n = (1 - g_{n-1})g_n, \text{ para } n \geq 1.$$

Neste caso, a sequência  $\{g_n\}_{n=0}^\infty$  (que pode não ser necessariamente única) é denominada sequência de parâmetros para a sequência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ . Ademais, toda sequência encadeada positiva possui uma sequência de parâmetros minimal e uma sequência de parâmetros maximal, denotadas, respectivamente, por  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$  e  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ .

Para ser preciso, neste trabalho, deseja-se discutir os resultados estabelecidos em Castillo et al. [8], onde os autores mostraram que a partir do par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva, é possível obter-se uma única medida de probabilidade  $\mu$ , no círculo unitário, tal que a sequência de polinômios  $\{R_n(z) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(z)\}_{n=0}^\infty$  é a sequência de polinômios de Szegő com relação a esta medida  $\mu$ . Aqui, a sequência  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ , que é utilizada para gerar a sequência de polinômios ortogonais em relação a  $\mu$ , é a sequência de parâmetros minimal da sequência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ . Além disso, os polinômios  $R_n(z)$ ,  $n \geq 0$ , também utilizados para gerar a sequência de polinômios ortogonais, satisfazem a relação de recorrência de três termos

$$R_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]R_n(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (1.2)$$

com  $R_0(z) = 1$  e  $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$ .

Vale salientar que no trabalho de Costa, Felix e Sri Ranga [11] também foi possível recuperar-se a medida de probabilidade associada ao par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , porém, por um método diferente daquele empregado em Castillo et al. [8], o qual partindo de certas funções racionais que seguem dos polinômios  $R_n(z)$ , utiliza a Teoria de frações contínuas, expansões em séries, no infinito e na origem, e o Teorema da Seleção de Helly para obter a medida associada  $\mu$  como o limite de uma subsequência de medidas discretas,  $\psi_n(e^{i\theta})$ , cujos pontos puros (aqueles diferente de  $z = 1$ ) são exatamente os zeros de  $R_n(z)$ .

Observe que uma discussão dentro dessa temática possibilitará a compreensão de muitos outros resultados relacionados a Teoria dos polinômios ortogonais no círculo unitário, uma vez que o uso da Teoria de sequências encadeadas positivas para caracterização de medidas de probabilidade não triviais no círculo unitário teve grande destaque, na literatura, a partir do trabalho de Castillo et al. [8] (bem como do trabalho de Costa, Felix

e Sri Ranga [11]), o que pode contribuir para obtenção de novos resultados sobre o tema, os quais estão relacionados, de forma intrínseca, ao crescimento científico e tecnológico do país.

Na busca de atingir os objetivos da pesquisa, optou-se em elaborar-se uma pesquisa bibliográfica que fundamentasse o tema em questão, onde foram consultadas obras bibliografias específicas voltadas à Teoria dos Polinômios Ortogonais, encontradas em livros, dissertações, teses, artigos científicos, revistas e outros periódicos, tendo como ponto de partida os resultados fornecidos em Castillo et al. [8].

A presente dissertação está organizado em três capítulos (além das considerações finais e referências utilizadas), onde o primeiro deles é a introdução e os demais descritos, resumidamente, como segue.

O Capítulo 2 é dedicado a apresentação de algumas definições e resultados clássicos da Teoria dos polinômios ortogonais, bem como de outros temas auxiliares, essenciais para a compreensão dos assuntos discutidos nesse trabalho. Especificamente, são apresentadas definições e principais resultados relativos à polinômios ortogonais (na reta real e no círculo unitário), à teoria de frações contínuas e à teoria de sequências encadeadas positivas.

Já no Capítulo 3 são apresentados os principais resultados estabelecidos em Castillo et al. [8], cujo principal objetivo é obter, a partir do par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva, uma única medida de probabilidade  $\mu$ , no círculo unitário, tal que a sequência de polinômios  $\{R_n(z) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(z)\}_{n=0}^\infty$  é a sequência de polinômios ortogonais no círculo unitário com relação a esta medida  $\mu$ . Precisamente, a partir dos polinômios  $R_n(z)$ , gerados pela relação de recorrência de três termos (1.2), defini-se a função racional  $Q_n(z)/R_n(z)$  (onde os polinômios  $Q_n(z)$ ,  $n \geq 0$ , satisfazem a mesma relação de recorrência (1.2) satisfeita por  $R_n(z)$ , mudando-se apenas as condições iniciais, ou seja,  $Q_0(z) = 0$  e  $Q_1(z) = 2d_1$ ) e obtém-se suas expansões em séries, em torno de zero e do infinito, com o uso das frações contínuas, da teoria das funções hipergeométricas e outras funções especiais, que serão essenciais para obter a medida de probabilidade  $\mu$  desejada. A partir daí, com a utilização de um dos teoremas apresentados nesse mesmo texto, obtém-se os coeficientes de Verblunsky e os polinômios ortogonais no círculo unitário associados a essa medida.

## 2 PRELIMINARES

Este capítulo apresenta definições e propriedades básicas sobre a Teoria dos polinômios ortogonais na reta real e no círculo unitário, frações contínuas, sequências encadeadas positivas e funções especiais, limitando-se ao essencial para a compreensão do texto, servindo assim, de preparação para o próximo capítulo que trata sobre os principais resultados que se deseja discutir nesse trabalho. Este capítulo faz a exposição de teoremas e outros resultados, omitindo algumas demonstrações. Para um estudo mais detalhado sobre esses tópicos, veja, por exemplo, Chihara [9], Cuyt [12], Ismail [19], Simon [27, 28] e Szegő [31].

### 2.1 Polinômios ortogonais na reta real

Antes de introduzir a Teoria dos polinômios ortogonais no círculo unitário, que está diretamente relacionada com o principal objetivo desta pesquisa, apresenta-se, nesta seção, um pouco da Teoria clássica dos polinômios ortogonais na reta real, todavia, apenas o necessário para um bom entendimento das próximas seções. Para um estudo mais detalhado sobre a Teoria dos polinômios ortogonais na reta real, pode-se consultar, por exemplo, os textos de Chihara [9], Ismail [19] e Szegő [31].

Inicia-se essa seção com a noção de integral de Riemann-Stieltjes essencial para compreensão do conceito de medida (positiva), em relação a qual os polinômios, aqui estudados, serão ortogonais.

**Definição 2.1** *Uma função  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  tem variação limitada se existe uma constante  $M > 0$  tal que para qualquer partição  $P = a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  de  $[a, b]$  tem-se*

$$v(\gamma; P) = \sum_{k=0}^{n-1} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq M.$$

A variação total de  $\gamma$ ,  $V(\gamma)$ , é definida por

$$V(\gamma) = \sup\{v(\gamma; P); P \text{ é partição de } [a, b]\}.$$

Observe que  $V(\gamma) \leq M \leq \infty$ . Além disso, se  $\gamma$  é real e não-decrescente, então tem variação total,  $V(\gamma) = \gamma(b) - \gamma(a)$ .



**Teorema 2.2** *Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  uma função de variação limitada e suponha que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  seja contínua. Então existe um número complexo  $I$  tal que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que quando  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$  é uma partição de  $[a, b]$  com  $\|P\| = \max\{t_k - t_{k-1}; 1 \leq k \leq n\} < \delta$  tem-se*

$$\left| I - \sum_{k=1}^n f(t'_k) [\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] \right| < \epsilon$$

para qualquer ponto fixo  $t'_k$ , com  $t_{k-1} \leq t'_k \leq t_k$ .

O número  $I$  é chamado de *integral de Riemann-Stieltjes* de  $f$  em relação a  $\gamma$  no intervalo  $[a, b]$ , sendo denotado por

$$I = \int_a^b f d\gamma = \int_a^b f(x) d\gamma(x).$$

Essa integral possui as mesmas propriedades que a integral de Riemann (para mais detalhes veja [10]).

**Definição 2.3** *Seja  $\gamma$  uma função de valores reais, não-decrescente e definida no intervalo  $(a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ . Um ponto de aumento da função  $\gamma$  é todo ponto  $\eta$  tal que  $\gamma(\eta + \epsilon) - \gamma(\eta - \epsilon) > 0$ , para todo  $\epsilon > 0$ . O conjunto desses pontos,*

$$\text{supp}(\gamma) = \{\eta \in (a, b); \gamma(\eta + \epsilon) - \gamma(\eta - \epsilon) > 0, \text{ para todo } \epsilon > 0\},$$

é chamado de *suporte* de  $\gamma$ .

Em Chihara [9], o conjunto  $\text{supp}(\gamma)$  também é chamado de *espectro* de  $\gamma$ . E os pontos de aumento de  $\gamma$  são chamados de *pontos espectrais*.

**Definição 2.4** *Se  $\gamma$  é uma função real, definida no intervalo  $(a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ , não-decrescente, limitada, com suporte infinito (isto é, infinitos pontos de aumento) e tal que as integrais de Riemann-Stieltjes*

$$\mu_n := \int_a^b x^n d\gamma(x), \quad n = 0, 1, \dots$$

*existem, então diz-se que  $\gamma$  é uma distribuição ou medida (positiva) não trivial no intervalo  $(a, b)$ .*

Os números  $\mu_n$  são chamados de *momentos* de  $\gamma$  de ordem  $n$ . Quando o intervalo  $(a, b)$  é limitado, os momentos  $\mu_n$  sempre existem. Por outro lado, se o intervalo for ilimitado, isso nem sempre ocorre, porque a integral acima pode não convergir.

Quando  $\mu_0 = 1$  diz-se que  $\gamma$  é uma *medida de probabilidade*. Além disso, se a medida  $\gamma$  for definida em um intervalo  $(-a, a)$ , com  $0 < a \leq \infty$  e satisfaz  $d\gamma(x) = -d\gamma(-x)$ , diz-se que  $\gamma$  é uma *medida simétrica*.

**Observação 2.5** Note que se  $\gamma$  é uma medida positiva em um intervalo  $(a, b)$  e  $p$  é um polinômio de grau  $n$ , com  $p(x) \geq 0$ , então quando  $x \in \text{supp}(\gamma)$ , a definição 2.4 permite escrever

$$\int_a^b p(x) d\gamma(x) > 0.$$

De fato, se  $\gamma$  tem infinitos pontos de aumento, então pelo menos um desses pontos difere dos zeros de  $p(x)$ . Seja então  $x_k$  esse zero. Assim,  $p(x_k) \neq 0$ , isto é,  $p(x_k) > 0$  e  $\gamma(x_k + \epsilon) - \gamma(x_k - \epsilon) > 0$ .

Logo, existe um intervalo  $(t_{k-1} = x_k - \epsilon, t_k = x_k + \epsilon)$  tal que

$$p(t'_k)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] > 0,$$

com  $t_{k-1} \leq t'_k \leq t_k$ . Por outro lado, como  $\gamma$  é não-decrescente, então, para qualquer intervalo  $(t_{i-1}, t_i)$ , obtém-se  $\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \geq 0$ . Dessa forma, pela definição da integral de Riemman-Stieltjes, tem-se

$$\int_a^b p(x) d\gamma(x) > 0.$$

Do exposto na Observação 2.5 é possível definir-se o *produto interno*  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\gamma$ , dado por:

$$\langle f, g \rangle_\gamma := \int_a^b f(x)g(x) d\gamma(x),$$

onde  $f$  e  $g$  são funções contínuas definidas em  $(a, b)$ . A partir daí, e observando que polinômios são funções contínuas, tem-se a seguinte definição.

**Definição 2.6** Uma sequência de polinômios  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  é ortogonal, com relação à medida  $\gamma$  no intervalo  $(a, b)$ , quando  $P_n$  tem grau  $n$  e

$$\langle P_m, P_n \rangle_\gamma = \int_a^b P_m(x)P_n(x) d\gamma(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \rho_n \neq 0, & \text{se } m = n \end{cases}.$$

Levando em consideração o *delta de Kronecker*, definido por

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ 1, & \text{se } m = n \end{cases}, \quad (2.1)$$

pode-se reescrever a definição acima na forma

$$\langle P_m, P_n \rangle_\gamma = \int_a^b P_m(x)P_n(x)d\gamma(x) = \rho_n \delta_{m,n}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Quando  $\rho_n = 1$  para todo  $n \geq 0$ , a sequência de polinômios ortogonais é chamada de *sequência de polinômios ortonormais* em relação a medida  $\gamma$ , a qual denota-se, usualmente, por  $\{P_n^*\}_{n=0}^\infty$ . Além disso, se a medida  $\gamma$  associada aos polinômios  $P_n$ , com  $n \geq 0$ , for simétrica, então os polinômios  $P_n$ , para  $n \geq 0$ , são chamados de *polinômios ortogonais simétricos*.

Segue das propriedades de ortogonalidade da Álgebra Linear (veja, por exemplo, [23]), que a sequência  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ , da Definição 2.6, forma uma base infinita para o espaço vetorial dos polinômios  $\mathbb{P}$ . Em particular,  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  constitui uma base finita para o espaço vetorial dos polinômios de grau máximo  $n$ ,  $\mathbb{P}_n$ .

**Observação 2.7** *Por conveniência, a expressão “sequência de polinômios ortogonais” será substituída por sua correspondente sigla em inglês, a saber: OPS. Além disso, salienta-se que polinômios mônicos são polinômios nos quais o coeficiente do termo de maior grau,  $a_{n,n}$ , é igual a 1.*

Dada uma sequência de momentos reais,  $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ , é possível formar-se uma matriz de ordem  $n + 1$ , denominada *matriz de Hankel*, e seu determinante, chamado *determinante de Hankel*,

$$H_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}, \quad n \geq 0.$$

Um resultado bem conhecido na literatura garante que existe uma OPS, em relação a medida positiva  $\gamma$ , se, e somente se,  $H_n \neq 0$  para todo  $n \geq 0$ . Uma demonstração dessa afirmativa pode ser encontrada, por exemplo, em Chihara [9].

Outro fato essencial que caracteriza as OPS,  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ , é que seus polinômios  $P_n(x)$  satisfazem uma *fórmula de recorrência de três termos*. Mais precisamente, tem-se o seguinte resultado:

**Teorema 2.8** *Sejam  $\gamma$  uma medida positiva não trivial e  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  uma OPS mônica. Então existem constantes  $\alpha_n$  e  $\beta_{n+1} > 0$ ,  $n \geq 1$ , tais que*

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha_{n+1})P_n(x) - \beta_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

com  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x - \alpha_1$  e

$$\alpha_{n+1} = \frac{\langle xP_n, P_n \rangle_\gamma}{\rho_n}, \quad n \geq 0, \quad e \quad \beta_{n+1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Uma demonstração para o teorema acima pode ser encontrada em Chihara [9] ou Simon [27]. A recíproca desse resultado é válida e é apresentada a seguir.

**Teorema 2.9** (Favard) *Sejam  $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$  seqüências de números reais, onde  $\alpha_n \in \mathbb{R}$  e  $\beta_{n+1} > 0$  para  $n \geq 1$ . Se  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  é uma seqüência de polinômios mônicos satisfazendo a fórmula de recorrência de três termos*

$$P_n(x) = (x - \alpha_n)P_{n-1}(x) - \beta_n P_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots,$$

com  $P_0(x) = 1$  e  $P_1(x) = x - \alpha_1$ , então existe uma única medida  $\gamma$  com suporte em  $\mathbb{R}$  tal que a seqüência de polinômios  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  é ortogonal em relação a essa medida.

Para uma demonstração veja Simon [27] ou Szegő [31]. Uma consequência dos teoremas 2.8 e 2.9 é o seguinte resultado.

Entre os resultados consequentes da relação de recorrência de três termos (Teorema 2.8) está a chamada *Identidade de Christoffel-Darboux* que tem importantes implicações no contexto de zeros de polinômios ortogonais. Tal identidade é apresentada no próximo teorema e sua demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em Chihara [9].

**Teorema 2.10** *Se  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  é uma OPS mônicos, em relação a uma medida positiva  $\gamma$ , então*

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(y)}{\beta_1\beta_2 \cdots \beta_{k+1}} = (\beta_1\beta_2 \cdots \beta_{n+1})^{-1} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x - y}, \quad (2.3)$$

onde  $\beta_j$ , com  $j = 1, 2, \dots, n + 1$ , são os mesmos coeficientes da fórmula de recorrência (2.2).

Observe que somando-se e subtraindo-se  $P_{n+1}(x)P_n(x)$  no numerador do segundo membro da equação (2.3), obtém-se

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(y)}{\beta_1\beta_2 \cdots \beta_{k+1}} = \frac{P_n(x)(P_{n+1}(x) - P_{n+1}(y)) - P_{n+1}(x)(P_n(x) - P_n(y))}{\beta_1\beta_2 \cdots \beta_{n+1}(x - y)}.$$

Consequentemente, quando  $y \rightarrow x$ , tem-se

$$\sum_{k=0}^n \frac{(P_k(x))^2}{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{k+1}} = \left[ \frac{P_n(x)(P_{n+1}(x))' - P_{n+1}(x)(P_n(x))'}{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{n+1}} \right] > 0,$$

de onde segue que

$$P_n(x)(P_{n+1}(x))' - P_{n+1}(x)(P_n(x))' > 0. \quad (2.4)$$

Por meio da desigualdade (2.4) pode-se mostrar que os zeros de  $P_n(x)$  e  $P_{n+1}(x)$  se alternam em ordem crescente, isto é,

$$x_{n+1,1} < x_{n,1} < x_{n+1,2} < x_{n,2} < \cdots < x_{n+1,n} < x_{n,n} < x_{n+1,n+1},$$

onde  $x_{n,j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , são os zeros de  $P_n(x)$  e  $x_{n+1,j}$  são os zeros de  $P_{n+1}(x)$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ . Essa propriedade dos polinômios ortogonais é conhecida como *propriedade de entrelaçamento de zeros*. Além disso, é possível mostrar que esses zeros são todos reais distintos e que estão em  $(a, b)$ , isto é, no intervalo de ortogonalidade dos polinômios (para mais detalhes sobre essas e outras propriedades dos polinômios ortogonais na reta real, confira, por exemplo, [9] e [31]).

As sequências de polinômios ortogonais na reta real mais conhecidas na literatura são aquelas definidas por Agarwal e Milovanović [1] como sequências de *polinômios ortogonais clássicos* (veja também Chihara [9]). Dentre esses polinômios tem-se, por exemplo, os *polinômios de Chebyshev de segunda espécie*, descritos no exemplo a seguir.

**Exemplo 2.11** Os polinômios de Chebyshev de segunda espécie, denotados por  $U_n(x)$ , são ortogonais no intervalo  $(-1, 1)$  com relação à medida  $d\gamma(x) = (1 - x^2)^{1/2} dx$ . Esses polinômios podem ser definidos por:

$$U_n(x) = \frac{\text{sen}((n+1) \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\text{sen}((n+1)\theta)}{\text{sen } \theta}, \quad x \in [-1, 1], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

onde  $x = \cos \theta$  e  $\theta \in (0, \pi)$ . Note que, usando a relação trigonométrica

$$\text{sen}(n+2)\theta + \text{sen}(n\theta) = 2 \cos \theta \text{sen}(n+1)\theta$$

com  $x = \cos \theta$ , e a definição dada em (2.5), a relação de recorrência de três termos para os polinômios de Chebyshev de 2ª espécie fica:

$$U_{n+1}(x) = 2x U_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (2.6)$$

tendo  $U_0(x) = 1$  e  $U_1(x) = 2x$  como condições iniciais. Por outro lado, uma vez que

$$U_0(x) = \frac{\text{sen}(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\text{sen } \theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = 1$$

e

$$U_1(x) = \frac{\text{sen}(2\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\text{sen}\theta\cos\theta}{\text{sen}\theta} = 2x,$$

utilizando a relação de recorrência de três termos (2.6), obtém-se

$$U_2(x) = 2x U_1(x) - U_0(x) = 2^2 x^2 - 1$$

$$U_3(x) = 2x U_2(x) - U_1(x) = 2^3 x^3 - 4x$$

⋮

$$U_n(x) = 2^n x^n + \dots$$

Ou seja, por recorrência, conclui-se que os polinômios de Chebyshev de  $2^{\text{a}}$  espécie,  $U_n(x)$ , não são mônicos. Precisamente, o coeficiente do termo de maior grau para esses polinômios é dado por:

$$a_{n,n} = 2^n, \quad n \geq 0.$$

Em relação à ortogonalidade dos polinômios de Chebyshev de  $2^{\text{a}}$  espécie  $U_n(x)$ , usando a definição dada em (2.5), é possível verificar que a relação de ortogonalidade (com respeito à medida  $d\gamma(x) = (1-x^2)^{1/2}dx$ ), para esses polinômios, é tal que:

$$\langle U_n, U_m \rangle_\gamma = \int_{-1}^1 U_n(x) U_m(x) (1-x^2)^{1/2} dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Finalmente, os zeros dos polinômios de Chebyshev de  $2^{\text{a}}$  espécie  $U_n(x)$ ,  $n \geq 1$ , definidos como em (2.5), são os pontos  $x_{n,k}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) tais que

$$\text{sen}[(n+1)\theta_{n,k}] = U_n(x_{n,k}) = 0, \quad \text{para } 0 < \theta_{n,k} < \pi,$$

onde  $x_{n,k} = \cos \theta_{n,k}$ . Consequentemente, esses zeros são dados, explicitamente, por

$$x_{n,k} = \cos \theta_{n,k} = \cos \left( \frac{k\pi}{n+1} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

## 2.2 Polinômios ortogonais no círculo unitário (OPUC)

Nesta seção serão apresentadas algumas definições e resultados clássicos referentes à Teoria de polinômios ortogonais no círculo unitário (na sigla em inglês, chamados abreviadamente de OPUC). O objetivo aqui é fornecer apenas o suficiente para o bom entendimento do próximo capítulo onde se encontram os principais resultados desse trabalho. Para mais detalhes sobre a Teoria de polinômios ortogonais no círculo unitário, sugere-se, por exemplo, os textos de Ismail [19], Simon [27, 28] e Szegő [31].

**Definição 2.12** *Uma medida positiva  $\mu$ , no círculo unitário  $\mathcal{C} = \{z = e^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  é uma função real, limitada e não-decrescente com suporte infinito sobre  $\mathcal{C}$ . E, seus momentos (trigonométricos) são definidos por*

$$\mu_m = \int_{\mathcal{C}} z^{-m} d\mu(z) = \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} d\mu(e^{i\theta}), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.7)$$

De acordo com Simon [27], a medida  $\mu$  é chamada não trivial se seu suporte é um conjunto infinito e é chamada *medida de probabilidade* se  $\mu(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} d\mu(z) = \mu_0 = 1$ . Além disso, diz-se que  $z_0 \in \mathbb{C}$  é um *ponto puro* ou *ponto de massa* de  $\mu$ , se a medida desse ponto é positiva, ou seja,  $\mu(\{z_0\}) > 0$ . Um ponto de massa  $z_0$  é chamado *isolado* ou *discreto* quando existe uma bola aberta  $\mathcal{B}(z_0, r)$  tal que  $\mu(\mathcal{B}(z_0, r) - \{z_0\}) = 0$ .

**Observação 2.13** *(i) Não é difícil verificar que a medida  $\mu(e^{i\theta})$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , da Definição 2.12, induz uma outra medida positiva  $\tilde{\mu}(\theta)$ , também com suporte infinito no intervalo  $[0, 2\pi]$ , a qual será denotada simplesmente por  $\mu(\theta)$ . Essa notação será utilizada algumas vezes longo desse trabalho.*

*(ii) Os momentos trigonométricos, dados na Definição 2.12, são tais que:  $\bar{\mu}_{-m} = \mu_m$ .*

*De fato,*

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{-m} &= \overline{\int_{\mathcal{C}} z^m d\mu(z)} = \overline{\int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\mu(e^{i\theta})} = \overline{\int_0^{2\pi} [\cos(m\theta) + i \operatorname{sen}(m\theta)] d\mu(e^{i\theta})} \\ &= \overline{\int_0^{2\pi} \cos(m\theta) d\mu(e^{i\theta}) + i \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(m\theta) d\mu(e^{i\theta})} \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(m\theta) d\mu(e^{i\theta}) - i \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(m\theta) d\mu(e^{i\theta}) \\ &= \int_0^{2\pi} [\cos(m\theta) - i \operatorname{sen}(m\theta)] d\mu(e^{i\theta}). \end{aligned}$$

Consequentemente, como a função seno é ímpar e a função cosseno é par, obtém-se

$$\begin{aligned}
 \bar{\mu}_{-m} &= \int_0^{2\pi} [\cos(m\theta) - i \operatorname{sen}(m\theta)] d\mu(e^{i\theta}) \\
 &= \int_0^{2\pi} [\cos(-m\theta) + i \operatorname{sen}(-m\theta)] d\mu(e^{i\theta}) \\
 &= \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} d\mu(e^{i\theta}) = \int_{\mathcal{C}} z^{-m} d\mu(z) \\
 &= \mu_m.
 \end{aligned}$$

Dada a medida não trivial  $\mu$  (com suporte no círculo unitário  $\mathcal{C}$ ), pode-se definir o funcional linear (chamado de *funcional de momento*)

$$\mathcal{L}[z^m] := \int_{\mathcal{C}} z^m d\mu(z) = \mu_{-m}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.8)$$

tomando elementos no espaço dos *polinômios de Laurent*, ou seja, funções  $\ell(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , dadas por

$$\ell(z) = \sum_{k=i}^j c_k z^k, \quad c_k \in \mathbb{C},$$

onde  $i$  e  $j$  são números inteiros tais que  $i \leq j$ .

Observe que sendo a medida  $\mu$  de suporte infinito em  $\mathcal{C}$ , tem-se

$$\mathcal{L}[p] = \int_0^{2\pi} (p(e^{i\theta}) d\mu\theta) > 0,$$

onde  $p$  é um polinômio tal que  $p(e^{i\theta}) \geq 0$ , mas não identicamente nulo em  $[0, 2\pi]$ . Daí, como no caso dos polinômios ortogonais na reta real, é possível utilizar o funcional linear  $\mathcal{L}$  para definir o produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  da seguinte forma:

$$\langle p, q \rangle := \mathcal{L}[p(z)\overline{q(z)}] = \int_{\mathcal{C}} p(z)\overline{q(z)} d\mu(z) = \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})\overline{q(e^{i\theta})} d\mu(\theta), \quad (2.9)$$

onde os polinômios  $p$  e  $q$  são definidos no círculo unitário  $\mathcal{C}$ .

Agora, em relação à sequência de momentos  $\{\mu_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ , pode-se definir *matriz de Toeplitz*,

$$T_n := \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{pmatrix}, \quad n \geq 0,$$



onde seu determinante (chamado *determinante de Toeplitz*) é dado como segue

$$\Delta_{-1} := 1 \quad \text{e} \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix}, \quad n \geq 0. \quad (2.10)$$

**Definição 2.14** Diz-se que um funcional linear  $\mathcal{L}$ , com  $\mathcal{L}[z^{-m}] = \mu_m$ , é positivo definido se  $\Delta_n > 0$ , com  $n \geq 0$ , e quase definido se  $\Delta_n \neq 0$ , com  $n \geq 0$ . Além disso, a sequência  $\{\mu_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$  é chamada hermitiana se  $\mu_n = \bar{\mu}_{-n}$ , com  $n \geq 0$ , e é chamada hermitiana positiva definida se  $\Delta_n > 0$ , com  $n \geq 0$ .

**Observação 2.15** Usando-se as definições do funcional linear  $\mathcal{L}$  e do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , dadas, respectivamente, em (2.8) e (2.9), e levando-se em consideração o item (ii) da Observação 2.13, é possível mostrar que dada uma medida positiva (não trivial) no círculo unitário  $\mathcal{C}$ , a sequência de momentos  $\{\mu_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ , definidos por (2.7), forma uma sequência hermitiana positiva definida.

Diante da terminologia apresentada nesse capítulo, é possível definir, nesse momento, sequências de polinômios ortogonais com relação ao funcional de momento  $\mathcal{L}$  e, posteriormente, em relação a uma medida  $\mu$  suportada no círculo unitário  $\mathcal{C}$ , a saber:

**Definição 2.16** Para um funcional linear  $\mathcal{L}$  positivo definido (ou quase definido), a sequência de polinômios  $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$  é chamada de sequência de polinômios ortogonais em relação a  $\mathcal{L}$  quando

$$\langle S_n, S_m \rangle = \mathcal{L}[S_n(z)\overline{S_m(z)}] = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ k_n^{-2} \neq 0, & \text{se } m = n \end{cases}. \quad (2.11)$$

Trocando  $S_m$  por um polinômio qualquer  $\pi_m$  de grau  $m \leq n$ , tem-se que a ortogonalidade dada (2.11) também pode ser reescrita como

$$\langle S_n, \pi_m \rangle = \mathcal{L}[S_n(z)\overline{\pi_m(z)}] = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n \\ k_n^* \neq 0, & \text{se } m = n \end{cases}. \quad (2.12)$$

Além disso, quando  $\mu$  é uma medida positiva com suporte em  $\mathcal{C}$ , considerando o delta de Kronecker (2.1) e o produto interno (2.9), obtém-se a seguinte definição:

**Definição 2.17** *Seja  $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$  uma seqüência de polinômios e  $\mu(z)$  uma medida com suporte no círculo unitário  $\mathcal{C} = \{z = e^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ . Diz-se que  $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$  é uma seqüência de polinômios ortogonais (OPS) em relação à medida  $\mu(z)$  se cada polinômio  $S_n$  tem grau  $n$  e*

$$\int_{\mathcal{C}} S_n(z) \overline{S_m(z)} d\mu(z) = \int_0^{2\pi} S_n(e^{i\theta}) \overline{S_m(e^{i\theta})} d\mu(e^{im\theta}) = k_n^{-2} \delta_{m,n}, \quad m, n = 0, 1, \dots,$$

onde  $k_n^{-2} = \int_{\mathcal{C}} |S_n(z)|^2 d\mu(z) = \|S_n\|^2 \neq 0$ , sendo os respectivos polinômios ortonormais em  $\mathcal{C}$  dados por  $s_n(z) = k_n S_n(z)$ ,  $n \geq 0$ .

**Observação 2.18** (i) *Neste texto, os polinômios ortogonais no círculo unitário, denotados por  $S_n$ , serão sempre considerados em sua forma mônica, ou seja, com o coeficiente do termo de maior grau iguais a 1.*

(ii) *Os polinômios ortogonais no círculo unitário também são chamados de polinômios de Szegő.*

Agora, seja  $S_n(z) := \sum_{k=0}^n b_{n,k} z^k$  com  $b_{n,k} \in \mathbb{C}$ ,  $b_{n,n} = 1$  e  $n \geq 0$ . Então, usando a definição do funcional linear  $\mathcal{L}$ , dada em (2.8), é possível observar que

$$\begin{aligned} \langle S_n, z^m \rangle &= \mathcal{L}[S_n(z) \overline{z^m}] = \int_{\mathcal{C}} S_n \overline{z^m} d\mu(z) \\ &= \int_{\mathcal{C}} S_n \frac{1}{z^m} d\mu(z) = \int_{\mathcal{C}} \left( \sum_{k=0}^n b_{n,k} z^k \right) \frac{1}{z^m} d\mu(z) \\ &= \int_{\mathcal{C}} \left( \sum_{k=0}^n b_{n,k} z^{k-m} \right) d\mu(z) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \int_{\mathcal{C}} z^{-(m-k)} d\mu(z) \\ &= \sum_{k=0}^n b_{n,k} \mu_{m-k}. \end{aligned}$$

Aqui, o fato de se ter  $z = e^{i\theta} = \cos\theta + isen\theta$ , para  $0 < \theta < 2\pi$ , garante que  $|z| = 1$  e, conseqüentemente,  $\overline{z^m} = 1/z^m = z^{-m}$ .

Observe que da última igualdade e da ortogonalidade dada em (2.12), tem-se

$$\sum_{k=0}^n b_{n,k} \mu_{m-k} = \langle S_n, z^m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n \\ \tilde{k}_n \neq 0, & \text{se } m = n \end{cases}. \quad (2.13)$$

Daí, fazendo-se  $m = 0, 1, 2, \dots, n$  em (2.13), obtém-se um sistema de equações lineares,

que na forma matricial fica

$$\begin{pmatrix} \mu_0 b_{n,0} + \mu_{-1} b_{n,1} + \cdots + \mu_{-n+1} b_{n,n-1} + \mu_{-n} b_{n,n} \\ \mu_1 b_{n,0} + \mu_0 b_{n,1} + \cdots + \mu_{-n+2} b_{n,n-1} + \mu_{-n+1} b_{n,n} \\ \vdots \\ \mu_{n-1} b_{n,0} + \mu_{n-2} b_{n,1} + \cdots + \mu_0 b_{n,n-1} + \mu_{-1} b_{n,n} \\ \mu_n b_{n,0} + \mu_{n-1} b_{n,1} + \cdots + \mu_1 b_{n,n-1} + \mu_0 b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tilde{k}_n \end{pmatrix}.$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_1 & \mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n,0} \\ b_{n,1} \\ \vdots \\ b_{n,n-1} \\ b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tilde{k}_n \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

Note que os índices  $i$  de  $\mu_i$  na primeira coluna da matriz em (2.14) indicam o valor de  $m$  já que  $k = 0$  naquela coluna.

Agora, considerando

$$\Delta_\xi = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & 0 \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & 0 \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_1 & \tilde{k}_n \end{vmatrix},$$

pela *Regra de Cramer*, tem-se

$$b_{n,n} = \frac{\Delta_\xi}{\Delta_n}.$$

onde  $\Delta_n$  é o determinante de Toeplitz dado em (2.10). Mas, uma vez que

$$\Delta_\xi = \tilde{k}_n (-1)^{n+n+2} \Delta_{n-1} = \tilde{k}_n \Delta_{n-1},$$

então

$$b_{n,n} = \frac{\tilde{k}_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n}.$$

Daí, como  $b_{n,n} = 1$ , já que os polinômios  $S_n$  são mônicos, obtém-se

$$\tilde{k}_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}},$$

e, conseqüentemente, por (2.13), chega-se a

$$\langle S_n, z^m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m = 0, 1, \dots, n-1 \\ \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, & \text{se } m = n \end{cases}. \quad (2.15)$$

Observe que substituindo a última linha do sistema (2.14) por  $S_n(z) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} z^k$ , obtém-se o sistema

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ z^0 & z^1 & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n,0} \\ b_{n,1} \\ \vdots \\ b_{n,n-1} \\ b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ S_n(z) \end{pmatrix}.$$

De forma semelhante, usando a Regra de Cramer para calcular  $b_{n,n}$ , é possível observar que os polinômios  $S_n$ ,  $n \geq 0$ , podem ser reescritos da seguinte forma:

$$S_0(z) = 1 \quad \text{e} \quad S_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix}. \quad (2.16)$$

Este procedimento permite verificar a existência e a unicidade dos OPUC mônicos, já que  $\Delta_{n-1} \neq 0$ , além de apresentar um método para construir esses polinômios a partir da seqüência de momentos  $\{\mu_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ .

**Definição 2.19** *Seja  $q_n(z)$  um polinômio no círculo unitário, de grau no máximo  $n$ . Seu polinômio recíproco é definido por*

$$q_n^*(z) := z^n \overline{q_n(1/\bar{z})}.$$

Os polinômios recíprocos satisfazem propriedades de ortogonalidade que decorrem das propriedades de ortogonalidade dos polinômios ortogonais no círculo unitário. Assim, a partir das definições de polinômio recíproco e do funcional linear  $\mathcal{L}$ , dada por (2.8), e de (2.15), pode-se mostrar uma importante propriedade de ortogonalidade (que será utilizada mais adiante) satisfeita por esses polinômios, a saber:

$$\langle S_n^*(z), z^m \rangle = \begin{cases} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, & \text{se } m = 0, \\ 0, & \text{se } m = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (2.17)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\langle S_n^*(z), z^m \rangle &= \left\langle z^n \overline{S_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, z^m \right\rangle = \left\langle z^n \overline{S_n\left(\frac{1}{z}\right)}, z^m \right\rangle = \langle z^n \overline{S_n(z)}, z^m \rangle \\
&= \int_{\mathcal{C}} z^n \overline{S_n(z)} \cdot z^m d\mu(z) = \int_{\mathcal{C}} z^n \overline{S_n(z)} \cdot \frac{1}{z^m} d\mu(z) = \int_{\mathcal{C}} z^{n-m} \overline{S_n(z)} d\mu(z) \\
&= \langle z^{n-m}, S_n(z) \rangle = \begin{cases} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, & \text{se } m = 0, \\ 0, & \text{se } m = 1, 2, \dots, n. \end{cases}
\end{aligned}$$

Como mencionado na introdução desse trabalho, os polinômios ortogonais no círculo unitário não satisfazem uma relação de recorrência de três termos do tipo (2.2), como é o caso dos polinômios ortogonais na reta real. Todavia, utilizando os polinômios recíprocos dados na Definição 2.19, quando mônicos, esses polinômios satisfazem as relações dadas pelo seguinte teorema:

**Teorema 2.20** *Os polinômios ortogonais no círculo unitário mônicos,  $S_n(z)$ , satisfazem as fórmulas de recorrência*

$$S_n(z) = zS_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1} S_{n-1}^*(z), \quad (2.18)$$

$$S_n(z) = (1 - |\alpha_{n-1}|^2)zS_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1} S_n^*(z), \quad n \geq 1, \quad (2.19)$$

onde  $S_0(z) = S_0^*(z) = 1$ ,  $\alpha_{n-1} := -\overline{S_n(0)}$  e  $S_n^*(z) := z^n \overline{S_n(1/\bar{z})}$  denota o polinômio recíproco de  $S_n(z)$ .

Para a demonstração do Teorema 2.20, veja, por exemplo, [29].

Na literatura, os coeficientes  $\alpha_n$  que aparecem nas fórmulas de recorrência do Teorema 2.20 são chamados, por exemplo, de *coeficientes de Verblunsky*, como em Simon [27]. Tais coeficientes cumprem, para  $n \geq 1$ , as seguintes condições:

$$\bar{\alpha}_{n-1} = \frac{\langle zS_{n-1}, 1 \rangle}{\langle S_{n-1}^*, 1 \rangle} \quad (2.20)$$

e

$$1 - |\alpha_{n-1}|^2 = \frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2} > 0. \quad (2.21)$$

Com efeito, utilizando (2.18), o produto interno  $\langle S_n(z), 1 \rangle$  fica

$$\begin{aligned}
\langle S_n(z), 1 \rangle &= \int_{\mathcal{C}} S_n(z) \bar{1} d\mu(z) = \int_{\mathcal{C}} S_n(z) d\mu(z) \\
&= \int_{\mathcal{C}} [zS_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1}S_{n-1}^*(z)] d\mu(z) \\
&= \int_{\mathcal{C}} zS_{n-1}(z) \bar{1} d\mu(z) - \bar{\alpha}_{n-1} \int_{\mathcal{C}} S_{n-1}^*(z) \bar{1} d\mu(z) \\
&= \langle zS_{n-1}(z), 1 \rangle - \bar{\alpha}_{n-1} \langle S_{n-1}^*(z), 1 \rangle.
\end{aligned}$$

Daí, uma vez que por (2.15) tem-se  $\langle S_n(z), 1 \rangle = \langle S_n(z), z^0 \rangle = 0$ , a última igualdade pode ser reescrita como

$$\bar{\alpha}_{n-1} \langle S_{n-1}^*(z), 1 \rangle = \langle zS_{n-1}(z), 1 \rangle.$$

ou, equivalentemente,

$$\bar{\alpha}_{n-1} = \frac{\langle zS_{n-1}(z), 1 \rangle}{\langle S_{n-1}^*(z), 1 \rangle},$$

que é o resultado desejado em (2.20).

Agora para chegar a (2.21), basta calcular o produto interno  $\langle S_n(z), z^n \rangle$  usando (2.19). Assim,

$$\begin{aligned}
\langle S_n(z), z^n \rangle &= \langle (1 - |\alpha_{n-1}|^2)zS_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1}S_n^*(z), z^n \rangle \\
&= \int_{\mathcal{C}} [(1 - |\alpha_{n-1}|^2)zS_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1}S_n^*(z)] \bar{z}^n d\mu(z) \\
&= (1 - |\alpha_{n-1}|^2) \int_{\mathcal{C}} zS_{n-1}(z) \bar{z}^n d\mu - \bar{\alpha}_{n-1} \int_{\mathcal{C}} S_n^*(z) \bar{z}^n d\mu(z) \\
&= (1 - |\alpha_{n-1}|^2) \langle zS_{n-1}(z), z^n \rangle - \bar{\alpha}_{n-1} \langle S_n^*(z), z^n \rangle. \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, como

$$\begin{aligned}
\langle zS_{n-1}(z), z^n \rangle &= \int_{\mathcal{C}} zS_{n-1}(z) \bar{z}^n d\mu(z) = \int_{\mathcal{C}} zS_{n-1}(z) \frac{1}{z^n} d\mu(z) \\
&= \int_{\mathcal{C}} S_{n-1}(z) \frac{1}{z^{n-1}} d\mu(z) = \int_{\mathcal{C}} S_{n-1}(z) \bar{z}^{n-1} d\mu(z) \\
&= \langle S_{n-1}(z), z^{n-1} \rangle,
\end{aligned}$$

e de (2.15) e (2.17), tem-se, respectivamente, que

$$\langle S_{n-1}(z), z^{n-1} \rangle = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}, \quad \langle S_n(z), z^n \rangle = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \quad \text{e} \quad \langle S_n^*(z), z^n \rangle = 0,$$

a igualdade em (2.22) se torna

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = (1 - |\bar{\alpha}_{n-1}|^2) \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}},$$

de onde segue que

$$1 - |\bar{\alpha}_{n-1}|^2 = \frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2},$$

como se desejava demonstrar.

**Observação 2.21** *Observe que a igualdade em (2.21) garante que  $|\alpha_n| < 1$ , para todo  $n \geq 0$ . Além disso, usando a relação dada em (2.16), obtém-se*

$$\bar{\alpha}_n = -S_{n+1}(0) = \frac{(-1)^n}{\Delta_n} \begin{vmatrix} \mu_{-1} & \mu_{-2} & \cdots & \mu_{-n} & \mu_{-n-1} \\ \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-2} & \mu_{n-3} & \cdots & \mu_{-1} & \mu_{-2} \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \end{vmatrix}, \quad n \geq 0. \quad (2.23)$$

Dessa forma, pode-se afirmar que associada a uma medida de probabilidade não trivial  $\mu$ , suportada no círculo unitário  $\mathcal{C}$ , existe uma única sequência de números complexos  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ , tal que  $|\alpha_n| < 1$ , com  $n \geq 0$ . O teorema seguinte (cuja prova pode ser encontrada, por exemplo, em [27]) traz a recíproca dessa afirmação. Esse resultado é conhecido como teorema de Verblunsky ou teorema de Favard para o círculo unitário.

**Teorema 2.22** (Verblunsky) *Associada a uma sequência de números complexos  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ , com  $|\alpha_n| < 1$  para  $n \geq 0$ , existe uma única medida de probabilidade não trivial  $\mu$ , suportada no círculo unitário, tal que os polinômios  $S_n$ ,  $n \geq 0$ , gerados por (2.19) (ou por (2.18)) são os respectivos polinômios ortogonais (em relação a  $\mu$ ) no círculo unitário.*

Abaixo apresenta-se um exemplo bem conhecido na literatura de uma medida de probabilidade não trivial suportada no círculo unitário  $\mathcal{C}$ , com respectivos momentos, sequência de polinômios ortogonais e coeficientes de Verblunsky a ela associados. Este exemplo é tratado em Simon [27], como “caso livre”.

**Exemplo 2.23** *A medida de Lebesgue,  $\omega_0$ , definida, como uma medida de probabilidade, por*

$$d\omega_0(z) = (2\pi iz)^{-1} dz, \quad z \in \mathcal{C},$$

*é tal que  $\text{supp}(\omega_0) = \mathcal{C}$ . Além disso, é fácil ver que os momentos trigonométricos associados a esta medida, definidos em (2.7) e denotados por  $\mu_n^{(\omega_0)}$ , satisfazem*

$$\mu_n^{(\omega_0)} = \delta_{0,n}, \quad n \geq 0,$$

onde  $\delta_{0,n}$  é o delta de Kronecker, definido em (2.1).

Por outro lado, usando (2.10) e (2.16), não é difícil ver que os polinômios ortogonais no círculo unitário com relação a  $\omega_0$ , denotados por  $S_n^{(\omega_0)}$ , são tais que

$$S_n^{(\omega_0)}(z) = z^n, \quad n \geq 0.$$

Consequentemente, os coeficientes de Verblunsky associados à medida de Lebesgue  $\omega_0$  são dados, explicitamente, por

$$\alpha_n^{(\omega_0)} = -\overline{S_{n+1}^{(\omega_0)}(0)} = 0, \quad n \geq 0.$$

Observe também que os zeros,  $z_{n,k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , dos polinômios  $S_n^{(\omega_0)}(z) = z^n$ ,  $n \geq 1$ , são todos iguais a zero. Neste caso, os zeros de  $S_n^{(\omega_0)}$  são de multiplicidade  $n$  e não estão localizados em  $\mathcal{C}$ , já que, para todo  $1 \leq k \leq n$ , tem-se  $|z_{n,k}| = |0| = 0$ .

Em relação aos zeros dos polinômios ortogonais no círculo unitário  $S_n$ , tem-se o seguinte resultado.

**Teorema 2.24** *Todos os zeros dos polinômios de Szegő  $S_n$ , com  $n \geq 1$ , estão situados no disco unitário aberto  $|z| < 1$ .*

A demonstração do Teorema 2.24 pode ser encontrada, por exemplo, no texto de Sri Ranga, Bracciali e Andrade [29]. Observe que, neste caso, diferentemente dos polinômios ortogonais na reta real que tem todos os seus zeros simples e localizados no suporte da medida (no caso, o intervalo  $(a, b)$ ), os polinômios de Szegő não gozam de uma tal propriedade. Todavia, relacionado aos polinômios ortogonais no círculo unitário, existe uma importante classe de polinômios, os *polinômios para-ortogonais*, que satisfazem essa propriedade. De acordo com Jones, Njastad e Thron [20], esses polinômios podem ser definidos por

$$S_n(w_n, z) = S_n(z) + w_n S_n^*(z), \quad (2.24)$$

onde  $w_n \in \mathbb{C}$ ,  $|w_n| = 1$  e  $\{S_n(z)\}_{n=0}^\infty$  são os polinômios de Szegő em relação a medida  $\mu$ , sendo  $S_n^*(z)$ ,  $n \geq 0$ , os seus respectivos polinômios recíprocos.

Assim, considerando as relações de ortogonalidade (2.15) e (2.17), tem-se

$$\begin{aligned} \langle S_n(w, z), 1 \rangle &= \langle S_n(z), 1 \rangle + w_n \langle S_n^*(z), 1 \rangle \neq 0, \\ \langle S_n(w, z), z^m \rangle &= \langle S_n(z), z^m \rangle + w_n \langle S_n^*(z), z^m \rangle = 0, \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, n-1, \\ \langle S_n(w, z), z^n \rangle &= \langle S_n(z), z^n \rangle + w_n \langle S_n^*(z), z^n \rangle \neq 0. \end{aligned}$$



Existe, portanto, uma diferença em relação aos polinômios de Szegő devido a primeira das três igualdades acima. Isso motiva a seguinte definição.

**Definição 2.25** *Diz-se que uma sequência de polinômios  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  é uma sequência de polinômios para-ortogonais em relação a uma medida  $\mu$  se cada  $X_n$ , com  $n \geq 0$ , tem grau  $n$  e satisfaz*

$$\begin{aligned} \langle X_n, 1 \rangle &\neq 0, \\ \langle X_n, z^m \rangle &= 0, \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, n-1, \\ \langle X_n, z^n \rangle &\neq 0. \end{aligned}$$

Esses polinômios, além de se caracterizarem pela propriedade  $\langle X_n, 1 \rangle \neq 0$ , possuem apenas zeros simples e situados no círculo unitário  $\mathcal{C}$ , o que em geral não ocorre com os polinômios  $S_n(z)$ . Para mais detalhes sobre esses polinômios, veja [20].

**Observação 2.26** *Usando as relações dadas em (2.18) e (2.19), é possível obter-se uma outra representação para os polinômios para-ortogonais  $S_n(w_n, z)$ , dados por (2.24) (na forma mônica), a saber:*

$$S_n(\tilde{w}_n, z) = zS_{n-1}(z) + \tilde{w}_n S_{n-1}^*(z), \quad \text{com } |\tilde{w}_n| = 1, \quad n \geq 1, \quad (2.25)$$

onde  $S_0(\tilde{w}_n, z) = 1$ .

No próximo capítulo serão utilizados certos polinômios para-ortogonais do tipo (2.25) (os polinômios  $R_n(z)$ ) para se obter uma medida  $\mu$  com suporte no círculo unitário. Como mencionado na introdução desse trabalho, essa medida será dada como o limite de uma subsequência de medidas discretas,  $\psi_n(e^{i\theta})$ , cujos pontos puros (aqueles diferente de  $z = 1$ ) são exatamente os zeros de  $R_n(z)$ .

## 2.3 Sequências encadeadas positivas

As sequências encadeadas positivas possuem relações bem interessantes com a Teoria dos polinômios ortogonais associados às medidas suportadas tanto na reta real como no círculo unitário. Essas sequências tiveram papel crucial na Teoria dos polinômios ortogonais no círculo unitário no trabalho recente de Costa, Felix e Sri Ranga [11] e também no trabalho de Castillo et al. [8], sendo este último, justamente, o trabalho que

será discutido no próximo capítulo dessa dissertação. Por isso, nesta seção, apresenta-se algumas definições e propriedades essenciais referentes a Teoria de sequência encadeadas positivas. Para um estudo mais detalhado e demonstrações veja, por exemplo, Chihara [9] e Wall [33].

**Definição 2.27** *Diz-se que uma sequência  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência encadeada positiva se existe uma outra sequência  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$  tal que*

$$0 \leq g_0 < 1 \quad e \quad 0 < g_n < 1, \quad \text{para } n \geq 1,$$

e

$$d_n = (1 - g_{n-1})g_n, \quad \text{para } n \geq 1.$$

A sequência  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ , da definição acima, é chamada de *sequência de parâmetros* para a sequência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ , e  $g_0$  é chamado de *parâmetro inicial*.

Os próximos dois resultados encontrados em Chihara [9], trazem a relação entre sequências de parâmetros distintas para uma sequência encadeada positiva.

**Teorema 2.28** *Dada uma sequência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ , se  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$  e  $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$  são sequências de parâmetros de  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ , então*

$$g_n < h_n \quad \text{para } n \geq 1 \text{ se, e somente se, } g_0 < h_0.$$

**Teorema 2.29** *Seja  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  uma sequência encadeada positiva. Se  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  possui uma sequência de parâmetros  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$  tal que  $g_0 > 0$ , então para cada  $h_0$  tal que  $0 \leq h_0 < g_0$ , existe uma correspondente sequência de parâmetros  $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ .*

A partir dos dois teoremas acima, é possível observar que as sequências de parâmetros podem existir em número infinito e também podem ser comparadas entre si. Além disso, toda sequência encadeada positiva possui uma sequência de parâmetros  $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$  tal que  $m_0 = 0$  e  $m_n < g_n$ ,  $n \geq 1$ , para qualquer outra sequência de parâmetros  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$  de  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ , e uma sequência de parâmetros  $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$  tal que  $M_n > g_n$ ,  $n \geq 0$ , para qualquer outra sequência de parâmetros  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$  de  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Isso motiva as seguintes definições:

**Definição 2.30** *Seja  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  uma sequência encadeada positiva. Uma sequência de parâmetros  $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$  é chamada de sequência de parâmetros minimal para  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ , se  $m_0 = 0$ .*

**Definição 2.31** *Seja  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  uma sequência encadeada positiva. Uma sequência de parâmetros  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$  é chamada de sequência de parâmetros maximal para  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ , se  $M_n > g_n$ ,  $n \geq 0$ , para qualquer outra sequência de parâmetros  $\{g_n\}_{n=0}^\infty$  de  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ .*

Em relação às sequências de parâmetros, tem-se o seguinte resultado (conhecido na literatura como *critério de Wall*, e cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em Chihara [9]) o qual é bem útil para verificar se uma determinada sequência de parâmetros (de uma dada sequência encadeada positiva) é maximal:

**Teorema 2.32** *Dada uma sequência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ , a sequência  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$  é a sequência de parâmetros maximal para  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  se, e somente se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1 M_2 \cdots M_n}{(1 - M_1)(1 - M_2) \cdots (1 - M_n)} = \infty.$$

**Observação 2.33** (i) *Do exposto acima (veja teoremas 2.28 e 2.29) pode-se afirmar que toda sequência encadeada positiva possui uma sequência de parâmetros minimal e uma sequência de parâmetros maximal.*

(ii) *Se  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva com sequências de parâmetros minimal,  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ , e maximal,  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ , coincidentes (ou, equivalentemente, caso  $m_0 = M_0 = 0$ ), diz-se que a sequência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  determina seus parâmetros unicamente ou, ainda, que  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é unicamente determinada. Caso contrário, diz-se que  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva não unicamente determinada.*

Abaixo ilustra-se um simples exemplo de sequência encadeada positiva (não unicamente determinada) com respectivas sequências de parâmetros minimal e maximal.

**Exemplo 2.34** *A sequência constante  $\{d_n\}_{n=1}^\infty = \{1/4, 1/4, \dots\}$  é uma sequência encadeada positiva com sequências de parâmetros minimal e maximal dadas, respectivamente, por*

$$m_n = \frac{n}{2(n+1)} \quad e \quad M_n = \frac{1}{2}, \quad n \geq 0. \quad (2.26)$$

*De fato, para verificar que  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva, sendo as sequências  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$  e  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ , dadas por (2.26), sequências de parâmetros para  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ , basta observar que, para  $n \geq 1$ , tem-se*

$$d_n = \frac{1}{4} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} = (1 - M_{n-1})M_n,$$

e, para  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{4} = \left(\frac{n+1}{2n}\right) \frac{n}{2(n+1)} = \left(\frac{2n - (n-1)}{2n}\right) \frac{n}{2(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{n-1}{2n}\right) \frac{n}{2(n+1)} = (1 - m_{n-1})n_n, \end{aligned}$$

sendo  $d_1 = 1/4 = (1-0)1/4 = (1-m_0)m_1$ .

Além disso, como  $m_0 = 0$ , segue que  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ , dada em (2.26), é a sequência de parâmetros minimal de  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ . Por outro lado, como a sequência  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ , dada em (2.26), é tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1 M_2 \cdots M_n}{(1-M_1)(1-M_2)\cdots(1-M_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{(1/2)^n} = \infty,$$

o Teorema 2.32 garante que a sequência de parâmetros  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$  é a sequência de parâmetros maximal de  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ .

Um último, mas não menos importante, teorema relacionado a Teoria de sequências encadeadas positivas (cuja prova também pode ser encontrada, por exemplo, em Chihara [9]) lida com sequências oriundas de outras sequências encadeadas positivas por supressão dos primeiros termos destas. Ou seja, o próximo teorema garante que se  $\{d_1, d_2, d_3, \dots\}$  é uma sequência encadeada positiva, então  $\{d_2, d_3, d_4, \dots\}$  também é sequência encadeada positiva, bem como  $\{d_3, d_4, d_5, \dots\}$ ,  $\{d_4, d_5, d_6, \dots\}$ , etc. Precisamente, tem-se o seguinte resultado:

**Teorema 2.35** *Seja  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  uma sequência encadeada positiva com sequência de parâmetros  $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ . Então,*

(1)  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty := \{d_{n+1}\}_{n=1}^\infty$  é, também, uma sequência encadeada positiva com sequência de parâmetros  $\{g_{1,n}\}_{n=0}^\infty := \{g_{n+1}\}_{n=0}^\infty$ ;

(2) Se  $\{\hat{m}_n\}_{n=0}^\infty$  denota a sequência de parâmetros minimal de  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty$ , então

$$\hat{m}_n < m_{1,n}, \quad \text{para } n \geq 0;$$

(3)  $\{M_{1,n}\}_{n=0}^\infty := \{M_{n+1}\}_{n=0}^\infty$  é sequência de parâmetros maximal para  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty$ .

Note que a sequência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  pode ser tal que  $M_0 = m_0 = 0$ , ou seja,  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é unicamente determinada (veja item (ii) da Observação 2.33). Mas, é importante observar que sempre se tem  $0 < m_{1,0} \leq M_{1,0} < 1$ , onde

a igualdade  $m_{1,0} = M_{1,0}$  permanece quando a sequência encadeada  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  é unicamente determinada.

Para as demonstrações de todos os resultados vistos nesta seção sugere-se, também, a consulta dos textos [19],[27] e [31].

## 2.4 Frações contínuas

Nesta seção serão apresentados os conceitos mais relevantes para este texto sobre a Teoria de frações contínuas. Essas frações, como será visto no próximo capítulo, possuem relações bem importantes com a Teoria dos polinômios ortogonais, particularmente, no círculo unitário. Para um estudo mais detalhado das frações contínuas indica-se, por exemplo, as obras de Cuty et al. [12], Jones e Thron [21] e Lorentzen e Waadeland[24].

Sejam  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  e  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  duas sequências quaisquer de números complexos. Uma *fração contínua* é uma expressão da forma:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \frac{a_4}{b_4 + \dots}}}}, \quad (2.27)$$

a qual também pode ser denotada por

$$b_0 + \left| \frac{a_1}{b_1} \right| + \left| \frac{a_2}{b_2} \right| + \left| \frac{a_3}{b_3} \right| + \left| \frac{a_4}{b_4} \right| + \dots .$$

As frações contínuas dadas em (2.27) podem ser do tipo finita ou infinita. Além disso, considerando a sequência  $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ , definida por

$$C_0 = b_0, \quad C_1 = b_0 + \frac{a_1}{b_1}, \quad C_2 = b_0 + \left| \frac{a_1}{b_1} \right| + \left| \frac{a_2}{b_2} \right|, \quad \dots, \quad (2.28)$$

o seu termo geral,  $C_n$  (que é uma fração contínua finita), expresso por

$$C_n = b_0 + \left| \frac{a_1}{b_1} \right| + \left| \frac{a_2}{b_2} \right| + \dots + \left| \frac{a_n}{b_n} \right|, \quad (2.29)$$

é chamado  $n$ -ésimo convergente da fração contínua (2.27), que pode convergir ou divergir de acordo com a definição abaixo.

**Definição 2.36** *Uma fração contínua do tipo (2.27) converge para o valor  $k$  (finito) se no máximo um número finito de termos  $C_n$  é indefinido e se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = k.$$

*Caso contrário, diz-se que a fração contínua diverge. No caso em que a fração contínua (2.27) converge para  $k$ , escreve-se*

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} + \cdots = k.$$

**Exemplo 2.37** *Pode-se mostrar que a fração contínua*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} + \cdots$$

*é uma fração contínua convergente tal que*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} + \cdots = \sqrt{2},$$

*isto é, converge para  $\sqrt{2}$ .*

É possível mostrar que os termos da sequência  $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ , definida por (2.28) (com termo geral dado por (2.29)) podem ser reescritos como

$$C_n = \frac{A_n}{B_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde, considerando-se  $A_{-1} := 1$ ,  $B_{-1} := 0$  e  $b_n \neq 0$  para  $n \geq 1$ , tem-se

$$\begin{aligned} A_0 &= b_0 & \text{e} & & B_0 &= 1, \\ A_1 &= b_0b_1 + a_1 = b_1A_0 + a_1A_{-1} & \text{e} & & B_1 &= b_1 = b_1B_0 + a_1B_{-1}, \\ A_2 &= b_0b_1b_2 + b_0a_2 + a_1b_2 = b_2A_1 + a_2A_0 & \text{e} & & B_2 &= b_1b_2 + a_2 = b_2B_1 + a_2B_0, \\ & & & & & \vdots \\ A_n &= b_nA_{n-1} + a_nA_{n-2} & \text{e} & & B_n &= b_nB_{n-1} + a_nB_{n-2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

As expressões para  $A_n$  e  $B_n$  obtidas (por indução) em (2.30) são conhecidas na literatura como *fórmula de Wallis* e são válidas para todo  $n \geq 1$  (desde que  $b_n \neq 0$ ), com as condições iniciais  $A_{-1} = 1$ ,  $A_0 = b_0$ ,  $B_{-1} = 0$  e  $B_0 = 1$ . Além disso, os números  $A_n$  e  $B_n$  são chamados, respectivamente, de  *$n$ -ésimo numerador parcial* e  *$n$ -ésimo denominador parcial* do  $n$ -ésimo convergente  $C_n$  da fração contínua.

Agora, observe que multiplicando-se a primeira equação de (2.30) por  $B_{n-1}$  e a segunda por  $A_{n-1}$ , subtraindo-se o resultado desta segunda operação do resultado da primeira, obtém-se

$$A_nB_{n-1} - B_nA_{n-1} = -a_n[A_{n-1}B_{n-2} - B_{n-1}A_{n-2}],$$

de onde pode-se mostrar, recursivamente, que

$$A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1} = (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n, \quad n \geq 1. \quad (2.31)$$

A equação (2.31) é conhecida como *fórmula do determinante* (veja, Wall [33]) e tem grande importância na Teoria de frações contínuas. Essa fórmula também pode ser reescrita como

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n}{B_{n-1} B_n}. \quad (2.32)$$

Uma vez que  $A_0 = b_0$  e  $B_0 = 1$ , tem-se  $A_0/B_0 = b_0$ . Logo, somando-se membro a membro a expressão obtida em (2.32) (trocando-se  $n$  por  $k$  e considerando-se  $k = 1, 2, \dots, n$ ), tem-se

$$\frac{A_n}{B_n} = b_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} a_1 a_2 \cdots a_k}{B_{k-1} B_k},$$

desde que  $b_k \neq 0$  e  $B_k \neq 0$  para  $1 \leq k \leq n$ .

O último resultado dessa seção conecta a Teoria de frações contínuas à Teoria de seqüências encadeadas positivas e sua demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em Andrade e Bracciali [2] (veja também Chihara [9, Teorema 3.1]).

**Lema 2.38** *Seja  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$  uma seqüência de parâmetros para a seqüência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Então*

$$1 - \frac{d_1}{1} - \frac{d_2}{1} - \cdots - \frac{d_n}{1} - \cdots = g_0 + \frac{1 - g_0}{1 + F},$$

onde

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \cdots g_n}{(1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_n)}.$$

## 2.5 Funções Especiais

Nesta seção serão apresentadas algumas *funções especiais* que serão utilizadas neste texto. Para demonstrações e um estudo mais detalhado sobre tais funções veja, por exemplo, Andrews [4].

A *função Gama* foi descoberta por Euler por volta de 1729 (confira [4]) no estudo do problema de estender o domínio da função fatorial, e pode ser definida como:

**Definição 2.39** Para todo  $x \in \mathbb{C}$ , com  $x \neq 0, -1, -2, \dots$ , a função Gama, denotada por  $\Gamma(x)$ , é dada por

$$\Gamma(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k! k^{x-1}}{(x)_k}.$$

Aqui,  $(x)_k := x(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  (com  $(x)_0 := 1$ ), é conhecido na literatura como *símbolo de Pochhammer*. Observe que, por exemplo, se  $a = 1$ , tem-se  $(1)_n = n!$  para todo  $n \geq 0$ .

Vale salientar que uma outra forma de definir a função Gama é por meio da *integral de Euler de segunda espécie*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt,$$

para  $x \in \mathbb{C}$  e  $\operatorname{Re}(x) > 0$ .

A função Gama satisfaz muitas propriedades interessantes, dentre elas tem-se:

$$\begin{aligned} x \Gamma(x) &= x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{(x)_n} = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)} \frac{(x+n)n}{(x+n)n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)(x+n)} \frac{x+n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{(x+1)_n} = \Gamma(x+1), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x).$$

Uma outra importante propriedade da função Gama, a qual será utilizada neste trabalho, é enunciada no teorema abaixo (a prova pode ser encontrada, por exemplo, em [4]).

**Teorema 2.40** (*Fórmula de reflexão de Euler*) Se  $x \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ , então

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}. \quad (2.33)$$

Dentre as chamadas funções especiais, também existe uma outra importante função conectada à Teoria dos polinômios ortogonais, a saber: a *função Beta*. Tal função pode ser definida através da *integral de Euler de primeira espécie* como:

**Definição 2.41** Para todo  $x, y \in \mathbb{C}$ , com  $\operatorname{Re}(x) > 0$  e  $\operatorname{Re}(y) > 0$ , a função Beta, denotada por  $B(x, y)$ , é dada por

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Uma importante relação entre as funções Gama e Beta é dada no teorema a seguir, cuja demonstração pode ser vista, por exemplo, em [3].



**Teorema 2.42** *A função Beta pode ser dada em termos da função Gama da seguinte forma:*

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (2.34)$$

com  $x, y \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re}(x) > 0$  e  $\operatorname{Re}(y) > 0$ .

Outra função que será utilizada mais adiante (no exemplo da Seção 3.6) é a função hipergeométrica definida a seguir.

**Definição 2.43** *Sejam  $a, b, c \in \mathbb{C}$ , com  $c \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}_-$ . A função hipergeométrica, denotada por  ${}_2F_1(a, b; c; z)$ , é dada por*

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!}.$$

Aqui,  $\mathbb{Z}_-$  denota o conjunto dos números inteiros não positivos, isto é,  $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, \dots\}$ .

Antes de finalizar este capítulo cabe citar um importante resultado, que será utilizado mais adiante neste trabalho para a obtenção da medida de probabilidade, em relação a qual certos polinômios são ortogonais, o *teorema de seleção de Helly* (veja [20]), cujo enunciado é dado com segue:

**Teorema 2.44** *Seja  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência uniformemente limitada de funções  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , isto é, existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais  $a \leq f_n \leq b$  para todo  $n$ . Então, a sequência  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admite uma subsequência pontualmente convergente.*

## 3 UM TEOREMA DO TIPO FAVARD EM $\mathcal{C}$ VIA SEQUÊNCIAS REAIS

O objetivo deste capítulo é estudar diretamente um teorema tipo Favard associado com a fórmula de recorrência de três termos

$$R_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]R_n(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}(z), \quad n \geq 1,$$

com  $R_0(z) = 1$  e  $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$ , onde  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência real e  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência encadeada positiva. Precisamente, será mostrado, nesse capítulo, que associado ao par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{d_n\}_{n=1}^{\infty}\}$  existe uma única medida de probabilidade não trivial  $\mu$  no círculo unitário  $\mathcal{C}$  (a qual foi obtida em [11] por um método diferente) para a qual  $\{R_n(z) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(z)\}$  dá a sequência de polinômios ortogonais com relação a essa medida. Aqui,  $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$  é a sequência de parâmetros minimal da sequência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ . O elemento  $d_1$  da sequência encadeada, o qual não afeta os polinômios  $R_n$ , tem influência na medida de probabilidade  $\mu$  obtida e, portanto, nos associados polinômios ortogonais no círculo unitário. Para ser mais preciso, se  $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$  é a sequência de parâmetros maximal da sequência encadeada, então a medida  $\mu$  é tal que  $M_0$  é o ponto massa em  $z = 1$ . Ao final do capítulo, um exemplo é fornecido para ilustrar completamente os resultados obtidos. Vale ressaltar que os resultados aqui apresentados foram estabelecidos no trabalho de Castillo et al. [8].

### 3.1 Uma introdução

Em quase todos os estudos recentes relacionados aos polinômios ortogonais no círculo unitário (OPUC),  $S_n$ , é notório que as relações de recorrência (2.18) e (2.19) (que não são relações de recorrência de três termos) e os coeficientes de Verblunsky (dados por (2.23)) desempenham um papel fundamental na construção dos resultados ali obtidos. Nesta dissertação, contudo, como mencionado anteriormente, o ponto de partida da análise aqui proposta é a fórmula de recorrência de três termos

$$R_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]R_n(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (3.1)$$

com  $R_0(z) = 1$  e  $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$ , onde  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência de números reais e  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência encadeada positiva.

Embora o primeiro elemento  $d_1$  da sequência encadeada não afete a sequência de polinômios  $\{R_n\}$ , seu uso irá se tornar aparente quando for introduzida, mais adiante, a sequência de polinômios  $\{Q_n\}$  e, em particular, a sequência de funções racionais  $\{A_n/B_n\}$  na Seção 3.3.

É importante salientar que a fórmula de recorrência (3.1) foi considerada por Delsarte e Genin [13], na seguinte forma

$$\tilde{R}_{n+1}(z) = (\bar{\beta}_n z + \beta_n)\tilde{R}_n(z) - z\tilde{R}_{n-1}(z), \quad n = 0, 1, \dots, m.$$

A equivalência desse sistema finito de equações à recorrência (3.1) para  $n = 1, 2, \dots, m$  é obtida com

$$R_n(z) = \frac{\tilde{R}_n(z)}{\prod_{k=1}^n \mathcal{R}e(\beta_k)}, \quad c_n = \frac{-\mathcal{I}m(\beta_n)}{\mathcal{R}e(\beta_n)} \quad \text{e} \quad d_{n+1} = \frac{1}{4\mathcal{R}e(\beta_{n-1})\mathcal{R}e(\beta_n)}.$$

Em [13], as fórmulas de recorrência e o sistema finito resultante dos OPUC são analisados sob a condição de que as matrizes tridiagonais

$$J_n = \begin{bmatrix} 2\mathcal{R}e(\beta_0) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2\mathcal{R}e(\beta_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2\mathcal{R}e(\beta_n) \end{bmatrix},$$

são positivo-definidas para  $n = 0, 1, \dots, m-1$  e não negativo-definidas para  $n = m$ . Lembrando que uma matriz real  $M$ , de ordem  $n \times n$ , é *positivo-definida* se  $z^T M z > 0$  para todos os vetores não-nulos  $z$  com entradas reais (isto é,  $z \in \mathbb{R}^n$ ), em que  $z^T$  denota o transposto de  $z$ . Por outro lado,  $M$  é dita *não negativo-definida* se  $z^T M z \geq 0$ , para todo vetor  $z \in \mathbb{R}^n$ .

Note que, usando resultados encontrados em Wall e Wetzel [34] (veja, ainda, Wall [33, Teorema 16.2]), estas condições podem também ser expressas em termos da sequência  $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{m-1} = \{1/(4\mathcal{R}e(\beta_{n-1})\mathcal{R}e(\beta_n))\}_{n=1}^{m-1}$ , sendo esta última uma sequência encadeada positiva finita.

No trabalho de Castillo et al. [8] que será discutido nesse capítulo, os autores consideram a relação de recorrência de três termos (3.1) como um conjunto infinito de

fórmulas (para  $n \geq 1$ ) e, usando uma técnica diferente de [13], descrevem completamente os associados funcionais de momentos, medida positiva e polinômios ortogonais no círculo unitário.

## 3.2 Alguns resultados preliminares

Os resultados apresentados nessa seção fornecem algumas informações importantes relacionadas aos zeros dos polinômios  $R_n(z)$ . Esses resultados serão de grande utilidade na obtenção da medida de probabilidade não trivial  $\mu$  (no círculo unitário) que está associada ao par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$  por meio da relação de recorrência de três termos (3.1), pois, como mencionado na introdução deste trabalho, tal medida será obtida como o limite de uma subsequência de medidas discretas,  $\psi_n(e^{i\theta})$ , cujos pontos puros (aqueles diferente de  $z = 1$ ) são exatamente os zeros de  $R_n(z)$ .

**Lema 3.1** *Todos os  $n$  zeros dos polinômios  $R_n(z)$  são simples e estão no círculo unitário  $\mathcal{C}$ . Além disso, se denotarmos os zeros de  $R_n$  por  $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , então*

$$0 < \theta_{n+1,1} < \theta_{n,1} < \theta_{n+1,2} < \dots < \theta_{n,n} < \theta_{n+1,n+1} < 2\pi, \quad n \geq 1. \quad (3.2)$$

**Demonstração:** Este lema é parte de um resultado um pouco mais geral estabelecido no trabalho de Dimitrov e Sri Ranga [14] com o uso das funções  $G_n(x)$ , definidas no intervalo  $[-1, 1]$ , por

$$G_n(x) = (4z)^{-n/2} R_n(z), \quad n \geq 0, \quad (3.3)$$

onde  $2x = z^{1/2} + z^{-1/2}$  e  $z = e^{i\theta}$ . Em [14] os autores mostraram que, para todo  $n \geq 1$ , as funções  $G_n(x)$  tem exatamente  $n$  zeros distintos em  $[-1, 1]$ . Precisamente, denotando esses zeros por  $x_{n,j}$ , mostrou-se que  $x_{n,j} = \cos(\theta_{n,j}/2)$ , com  $j = 1, 2, \dots, n$ , onde esses zeros também satisfazem a propriedade de entrelaçamento

$$-1 < x_{n+1,n+1} < x_{n,n} < x_{n+1,n} < \dots < x_{n+1,2} < x_{n,1} < x_{n+1,1} < 1. \quad (3.4)$$

Dessa forma, usando a relação (3.3), que conecta os polinômios  $R_n(z)$  com as funções  $G_n(x)$ , definidas em  $[-1, 1]$ , por meio da transformação

$$2x = z^{1/2} + z^{-1/2} \quad \text{com} \quad z = e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

e levando-se em consideração que os polinômios  $R_n(z)$  (gerados pela relação de recorrência (3.1)) tem grau  $n$  ( $n \geq 1$ ), e que cada um de seus zeros, denotados por  $z_{n,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , gera um zero da função  $G_n(x)$  (e vice-versa), já que

$$(4z)^{-n/2} = \frac{1}{(4z)^{n/2}} = \frac{1}{(4e^{i\theta})^{n/2}} \neq 0,$$

pode-se concluir que todos os  $n$  zeros dos polinômios  $R_n(z)$  são simples, estão no círculo unitário  $\mathcal{C}$  e são tais que

$$2x_{n,j} = z_{n,j}^{1/2} + z_{n,j}^{-1/2}, \quad \text{com} \quad z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}, \quad 0 < \theta_{n,j} < 2\pi.$$

Ademais, a propriedade (3.2), satisfeita pelos argumentos  $\theta_{n,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , de  $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$ , segue diretamente da propriedade de entrelaçamento (3.4), satisfeita pelos zeros,  $x_{n,j} = \cos(\theta_{n,j}/2)$ , das funções  $G_n(x)$ . ■

**Observação 3.2** (i) *Uma vez que os zeros  $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , dos polinômios  $R_n(z)$ ,  $n \geq 1$ , são tais que  $0 < \theta_{n,j} < 2\pi$  para todo  $j = 1, 2, \dots, n$ , tem-se que  $z = 1$  não é um zero de  $R_n(z)$ ,  $n \geq 1$ , isto é,  $z_{n,j} \neq 1$  para todo  $j = 1, 2, \dots, n$ , ou ainda,*

$$R_n(1) \neq 0, \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

(ii) *Em Dimitrov e Sri Ranga [14] também foi mostrado que as funções  $G_n(x)$ , dadas por (3.3), satisfazem a fórmula de recorrência de três termos*

$$G_{n+1}(x) = \left(x - c_{n+1}\sqrt{1-x^2}\right) G_n(x) - d_{n+1}G_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

*com  $G_0(x) = 1$  e  $G_1(x) = x - c_1\sqrt{1-x^2}$ . Além disso, as funções de Christoffel-Darboux associadas (ou Wronskianos)*

$$W_n(x) = G'_n(x)G_{n-1}(x) - G'_{n-1}(x)G_n(x), \quad n \geq 1, \quad (3.5)$$

*as quais não são necessariamente positivas ao longo de todo o intervalo  $[-1, 1]$ , satisfazem, nos zeros de  $G_n(x)$ ,  $n \geq 1$ , em  $[-1, 1]$ ,*

$$W_n(x_{n,j}) > 0 \quad \text{e} \quad W_{n+1}(x_{n,j}) = d_{n+1}W_n(x_{n,j}) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.6)$$

*Neste caso, sendo  $x_{n,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , um zero de  $G_n(x)$ , tem-se, por (3.5), que*

$$W_n(x_{n,j}) = G'_n(x_{n,j})G_{n-1}(x_{n,j}) \quad \text{e} \quad W_{n+1}(x_{n,j}) = -G'_n(x_{n,j})G_{n+1}(x_{n,j}).$$

Agora, considerando os Wronskianos

$$V_n(z) = R'_n(z)R_{n-1}(z) - R'_{n-1}(z)R_n(z), \quad n \geq 1, \quad (3.7)$$

associados com os polinômios  $R_n(z)$ , vale o seguinte resultado:

**Lema 3.3** *Sejam  $V_n(z)$  e  $W_n(x)$  os Wronskianos associados, respectivamente, aos polinômios  $R_n(z)$  e às funções  $G_n(x)$ ,  $n \geq 1$ , dados, respectivamente, por (3.5) e (3.7). Se  $z_{n,j}$  e  $x_{n,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , são, respectivamente, os zeros de  $R_n(z)$  e  $G_n(x)$ , então, para  $n \geq 1$ , tem-se*

$$\frac{(z_{n,j})^{-(n-2)}}{z_{n,j} - 1} V_n(z_{n,j}) = 2^{2n-3} W_n(x_{n,j}), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

**Demonstração:** Uma vez que a relação em (3.3) é tal que

$$2x = z^{1/2} + z^{-1/2}, \quad (3.9)$$

com  $z = e^{i\theta}$ ,  $0 < \theta < 2\pi$ , é possível considerar  $z$  como uma função de  $x$ , de modo que, por (3.3), tem-se

$$G'_n(x) = [(4z)^{-n/2} R_n(z)]' = -\frac{n}{2} (4z)^{-(n/2)-1} (4z') R_n(z) + (4z)^{-n/2} R'_n(z) z'. \quad (3.10)$$

Por outro lado, derivando-se, membro a membro, a igualdade (3.9) implicitamente em relação a  $x$ , obtém-se

$$2 = \frac{1}{2} z^{-1/2} z' - \frac{1}{2} z^{-3/2} z' = \left( \frac{1}{2z^{1/2}} - \frac{1}{2z^{3/2}} \right) z',$$

de onde segue que

$$z' = \frac{4z^{3/2}}{z-1}. \quad (3.11)$$

Consequentemente, substituindo (3.11) na expressão de  $G'_n(x)$ , dada em (3.10), tem-se

$$\begin{aligned} G'_n(x) &= -\frac{n}{2} (4z)^{-(n/2)-1} \left[ 4 \left( \frac{4z^{3/2}}{z-1} \right) \right] R_n(x) + (4z)^{-n/2} R'_n(z) \left( \frac{4z^{3/2}}{z-1} \right) \\ &= \frac{-2n(4z)^{-(n+2)/2} 4z^{3/2}}{z-1} R_n(z) + \frac{(4z)^{-n/2} (4z^{3/2})}{z-1} R'_n(z) \\ &= \frac{-n(4z)^{-(n+2)/2} (4z)^{3/2}}{z-1} R_n(z) + \frac{(4z)^{-n/2} (2z)(4z)^{1/2}}{z-1} R'_n(z) \\ &= \frac{-n(4z)^{-(n+1)/2}}{z-1} R_n(z) + \frac{2z(4z)^{(-n+1)/2}}{z-1} R'_n(z) \\ &= \frac{(4z)^{-(n-1)/2}}{z-1} \left[ 2z R'_n(z) - n R_n(z) \right]. \end{aligned}$$

Daí, considerando  $G_n(x)$  definido como em (3.3), os Wronskianos  $W_n(x)$ , dados por (3.5), satisfazem

$$\begin{aligned}
W_n(x) &= G'_n(x)G_{n-1}(x) - G'_{n-1}(x)G_n(x) \\
&= \frac{(4z)^{-(n-1)/2}}{z-1} \left[ 2zR'_n(z) - nR_n(z) \right] (4z)^{-(n-1)/2} R_{n-1}(z) \\
&\quad - \frac{(4z)^{-(n-2)/2}}{z-1} \left[ 2zR'_{n-1}(z) - (n-1)R_{n-1}(z) \right] (4z)^{-n/2} R_n(z) \\
&= \frac{(4z)^{-(n-1)}}{z-1} \left[ 2zR'_n(z)R_{n-1}(z) - nR_n(z)R_{n-1}(z) \right] \\
&\quad - \frac{(4z)^{-(n-1)}}{z-1} \left[ 2zR'_{n-1}(z)R_n(z) - (n-1)R_{n-1}(z)R_n(z) \right] \\
&= \frac{(4z)^{-(n-1)}}{z-1} \left\{ 2z \left[ R'_n(z)R_{n-1}(z) - R'_{n-1}(z)R_n(z) \right] - R_n(z)R_{n-1}(z) \right\}.
\end{aligned}$$

Agora, levando-se em consideração os Wronskianos  $V_n(z)$  (associados aos polinômios  $R_n(z)$ ), dados por (3.7), a igualdade anterior pode ser reescrita como

$$W_n(x) = \frac{(4z)^{-(n-1)}}{z-1} [2zV_n(z) - R_n(z)R_{n-1}(z)], \quad n \geq 1.$$

Logo, se  $z_{n,j}$  e  $x_{n,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , são, respectivamente, os zeros de  $R_n(z)$  e  $G_n(x)$ ,  $n \geq 1$ , então, para todo  $j = 1, 2, \dots, n$ , tem-se, por (3.3), que

$$R_n(z_{n,j}) = G_n(x_{n,j})(4z_{n,j})^{n/2} = 0 \cdot (4z)^{n/2} = 0$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
W_n(x_{n,j}) &= \frac{(4z_{n,j})^{-(n-1)}}{z_{n,j}-1} [2z_{n,j}V_n(z_{n,j}) - R_n(z_{n,j})R_{n-1}(z_{n,j})] \\
&= \frac{(4z_{n,j})^{-(n-1)}}{z_{n,j}-1} [2z_{n,j}V_n(z_{n,j})],
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\frac{(z_{n,j})^{-(n-2)}}{z_{n,j}-1} V_n(z_{n,j}) = 2^{2n-3} W_n(x_{n,j}), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad n \geq 1. \quad \blacksquare$$

**Observação 3.4** Da fórmula de recorrência para a sequência  $\{R_n(z)\}$  em (3.1), tem-se

$$\frac{R_{n+1}(z) - [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]R_n(z)}{-4zR_{n-1}(z)} = d_{n+1}.$$

Daí, para  $z = 1$ , obtém-se

$$\begin{aligned}
d_{n+1} &= \frac{R_{n+1}(1) - 2R_n(1)}{-4R_{n-1}(1)} = \frac{2R_n(1) - R_{n+1}(1)}{4R_{n-1}(1)} = \frac{R_n(1)}{2R_{n-1}(1)} - \frac{R_{n+1}(1)}{4R_{n-1}(1)} \\
&= \frac{R_n(1)}{2R_{n-1}(1)} - \frac{R_n(1)}{R_n(1)} \frac{R_{n+1}(1)}{4R_{n-1}(1)} = \frac{R_n(1)}{2R_{n-1}(1)} - \frac{R_n(1)}{2R_{n-1}(1)} \frac{R_{n+1}(1)}{2R_n(1)}, \\
&= \frac{R_n(1)}{2R_{n-1}(1)} \left[ 1 - \frac{R_{n+1}(1)}{2R_n(1)} \right], \quad n \geq 1.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Agora, considerando a sequência  $\{\hat{m}_n\}_{n=0}^\infty$  tal que

$$\hat{m}_n = 1 - \frac{R_{n+1}(1)}{2R_n(1)}, \quad n \geq 0,$$

é possível observar que esta sequência é a sequência de parâmetros minimal da sequência encadeada positiva  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty$ , onde  $d_{1,n} = d_{n+1}$ ,  $n \geq 1$  (veja Teorema 2.35). De fato, usando a igualdade em (3.12), tem-se

$$\begin{aligned} (1 - \hat{m}_{n-1})\hat{m}_n &= \left[ 1 - \left( 1 - \frac{R_n(1)}{2R_{n-1}(1)} \right) \right] \left( 1 - \frac{R_{n+1}(1)}{2R_n(1)} \right) \\ &= \frac{R_n(1)}{2R_{n-1}(1)} \left( 1 - \frac{R_{n+1}(1)}{2R_n(1)} \right) \\ &= d_{n+1} = d_{1,n}. \end{aligned}$$

Além disso, uma vez que as condições iniciais da relação de recorrência (3.1) são tais que  $R_0(z) = 1$  e  $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$ , então

$$\hat{m}_0 = 1 - \frac{R_1(1)}{2R_0(1)} = 1 - \frac{(1 + ic_1) + (1 - ic_1)}{2} = 0.$$

Por outro lado, como

$$(1 - \hat{m}_{n-1})\hat{m}_n = d_{n+1} = d_{1,n}, \quad n \geq 1,$$

e  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva, tem-se  $0 < d_{1,n} < 1$  para todo  $n \geq 1$ , ou, equivalentemente,

$$0 < d_{1,n} = (1 - \hat{m}_{n-1})\hat{m}_n < 1, \quad n \geq 1,$$

de onde segue que

$$0 < \hat{m}_n < 1, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Assim, por definição,  $\{\hat{m}_n\}_{n=0}^\infty$  é a sequência de parâmetros minimal para a sequência encadeada positiva  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty$ .

### 3.3 Propriedades assintóticas e um funcional de momento auxiliar

Seja  $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$  a sequência de polinômios dada pela expressão de fração contínua

$$\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \cfrac{2d_1}{(1 + ic_1)z + (1 - ic_1)} - \cfrac{4d_2z}{(1 + ic_2)z + (1 - ic_2)} - \dots - \cfrac{4d_nz}{(1 + ic_n)z + (1 - ic_n)}.$$



Da teoria de frações contínuas (veja, Seção 2.4 ou ainda, as fórmulas de Wallis dadas em (2.30)) pode-se afirmar que os polinômios  $Q_n$  são dados por

$$Q_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})] Q_n(z) - 4d_{n+1}zQ_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (3.13)$$

com  $Q_0(z) = 0$  e  $Q_1(z) = 2d_1$ .

O primeiro lema dessa seção fornece um resultado assintótico associado com a sequência  $\{Q_n(1)/R_n(1)\}$ . Precisamente, tem-se o seguinte resultado:

**Lema 3.5** *Sejam  $\{R_n\}_{n=0}^\infty$  e  $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$  seqüências de polinômios gerados, respectivamente, pelas relações de recorrência de três termos (3.1) e (3.13), a partir do par de seqüências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma seqüência encadeada positiva. Então,*

$$d_1 = \frac{Q_1(1)}{R_1(1)} < \frac{Q_2(1)}{R_2(1)} < \dots < \frac{Q_{n-1}(1)}{R_{n-1}(1)} < \frac{Q_n(1)}{R_n(1)} < (1 - M_0) \quad (3.14)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(1)}{R_n(1)} = (1 - M_0). \quad (3.15)$$

**Demonstração:** Observe que fazendo-se  $z = 1$  na expressão em fração contínua do quociente  $\{Q_n(z)/R_n(z)\}$  (dada no início da seção), e, em seguida, realizando-se um simples processo de fatoração da fração contínua obtida, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{Q_n(1)}{R_n(1)} &= \frac{2d_1}{2} - \frac{4d_2}{2} - \frac{4d_3}{2} - \dots - \frac{4d_n}{2} \\ &= \frac{d_1}{1} - \frac{d_2}{1} - \frac{d_3}{1} - \dots - \frac{d_n}{1}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Agora, se  $A_n/B_n$  denota o  $n$ -ésimo convergente da fração contínua

$$1 - \frac{d_1}{1} - \frac{d_2}{1} - \frac{d_3}{1} - \dots - \frac{d_n}{1} - \dots,$$

então, por (3.16), tem-se

$$\frac{A_n}{B_n} = 1 - \frac{Q_n(1)}{R_n(1)}. \quad (3.17)$$

Logo, se  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$  é a seqüência de parâmetros maximal para a seqüência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ , então, da igualdade em (3.17), dos resultados apresentados na Seção 2.3 relativos à Teoria de seqüências encadeadas positivas (veja Teorema 2.32) e do Lema 2.38, obtém-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{Q_n(1)}{R_n(1)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = M_0 + \frac{1 - M_0}{1 + F}, \quad (3.18)$$

onde

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_1 M_2 \cdots M_k}{(1 - M_1)(1 - M_2) \cdots (1 - M_k)} = \infty.$$

Consequentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(1)}{R_n(1)} = (1 - M_0),$$

o que representa o resultado (3.15) do lema.

Para verificar o resultado estabelecido em (3.14), basta observar que, de (3.17) e (3.18), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{Q_n(1)}{R_n(1)} &= 1 - \frac{A_n}{B_n} = 1 - \left[ M_0 + \frac{1 - M_0}{1 + F_n} \right] \\ &= \frac{(1 - M_0)(1 + F_n) - (1 - M_0)}{1 + F_n} \\ &= (1 - M_0) \frac{F_n}{1 + F_n}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde, para  $n \geq 1$ ,

$$F_n = \sum_{k=1}^n \frac{M_1 M_2 \cdots M_k}{(1 - M_1)(1 - M_2) \cdots (1 - M_k)} < \infty.$$

Neste caso, como  $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$  é a seqüência de parâmetros maximal para a seqüência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ , então  $d_n = (1 - M_{n-1})M_n$ , com  $0 \leq M_0 < 1$  e  $0 < M_n < 1$  para  $n \geq 1$ , de onde segue que cada parcela da soma  $F_n$  é tal que  $F_n > 0$ . Portanto, para  $n \geq 2$ ,  $G_{n-1} < F_n$  e, consequentemente,  $G_{n-1}(1 + F_n) < G_n(1 + G_{n-1})$  ou ainda, usando (3.19),

$$\frac{Q_{n-1}(1)}{R_{n-1}(1)} = (1 - M_0) \frac{G_{n-1}}{1 + G_{n-1}} < (1 - M_0) \frac{G_n}{1 + G_n} = \frac{Q_n(1)}{R_n(1)}, \quad n \geq 2.$$

Finalmente, por (3.16) e (3.19), tem-se, respectivamente, que

$$\frac{Q_1(1)}{R_1(1)} = d_1 \quad \text{e} \quad \frac{Q_n(1)}{R_n(1)} < (1 - M_0) \frac{F_n}{1 + F_n} < (1 - M_0), \quad n \geq 1,$$

e isto conclui a prova do lema. ■

O próximo lema dessa seção lida com as expansões em séries das funções racionais  $Q_n(z)/R_n(z)$ , as quais serão discutidas daqui em diante. Observe que, da fórmula de recorrência de três termos para os polinômios  $R_n(z)$  (dada em (3.1)), se  $R_n(z) = \sum_{j=0}^n r_{n,j} z^j$ , então é possível verificar que

$$R_n(z) = \sum_{j=0}^n r_{n,j} z^j = \sum_{j=0}^n \bar{r}_{n,n-j} z^j = R_n^*(z), \quad n \geq 0, \quad (3.20)$$

e, em particular,

$$r_{0,0} = 1 \quad \text{e} \quad r_{n,n} = \bar{r}_{n,0} = \prod_{k=1}^n (1 + ic_k), \quad n \geq 1, \quad (3.21)$$

onde  $R_n^*(z) = z^n \overline{R_n(1/\bar{z})}$  representa o polinômio recíproco de  $R_n(z)$ . De fato, uma vez que

$$\overline{R_n(1/\bar{z})} = \overline{\sum_{j=0}^n r_{n,j} (1/\bar{z})^j} = \sum_{j=0}^n \bar{r}_{n,j} (1/z)^j,$$

tem-se

$$\begin{aligned} R_n^*(z) &= z^n \overline{R_n(1/\bar{z})} = z^n \sum_{j=0}^n \bar{r}_{n,j} (1/z)^j \\ &= \bar{r}_{n,0} z^n + \bar{r}_{n,1} z^{n-1} + \cdots + \bar{r}_{n,n} z^0 \\ &= \sum_{j=0}^n \bar{r}_{n,n-j} z^j \end{aligned}$$

Por outro lado, usando a fórmula de recorrência (3.1), em que  $R_0(z) = 1$  (de onde segue que  $r_{0,0} = 1$ ) e  $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$ , obtém-se, respectivamente, que

$$\begin{aligned} R_2(z) &= [(1 + ic_2)z + (1 - ic_2)]R_1(z) - 4d_2zR_0(z) \\ &= [(1 + ic_2)z + (1 - ic_2)][(1 + ic_1)z + (1 - ic_1)] - 4d_2z \\ &= \prod_{k=1}^2 (1 + ic_k)z^2 + a_1z + \prod_{k=1}^2 (1 - ic_k), \quad \text{onde } a_1 \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3(z) &= [(1 + ic_3)z + (1 - ic_3)]R_2(z) - 4d_3zR_1(z) \\ &= [(1 + ic_3)z + (1 - ic_3)] \left[ \prod_{k=1}^2 (1 + ic_k)z^2 + a_1z + \prod_{k=1}^2 (1 - ic_k) \right] \\ &\quad - 4d_3z [(1 + ic_1)z + (1 - ic_1)] \\ &= \prod_{k=1}^3 (1 + ic_k)z^3 + [b_2z^2 + b_1z] + \prod_{k=1}^3 (1 - ic_k), \quad \text{onde } b_1, b_2 \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

e, por recorrência,

$$R_n(z) = \prod_{k=1}^n (1 + ic_k)z^n + [w_{n-1}z^{n-1} + w_{n-2}z^{n-2} + \cdots + w_1z] + \prod_{k=1}^n (1 - ic_k)z^n,$$

onde  $w_{n-1}, w_{n-2}, \dots, w_1 \in \mathbb{C}$ . Assim,

$$r_{n,n} = \prod_{k=1}^n (1 + ic_k) = \overline{\prod_{k=1}^n (1 - ic_k)} = \bar{r}_{n,0}, \quad n \geq 1.$$

Finalmente a igualdade entre os polinômios  $R_n(z)$  e  $R_n^*(z)$ , isto é,

$$R_n(z) = R_n^*(z), \quad n \geq 0,$$

segue do fato desses polinômios satisfazerem a mesma fórmula de recorrência de três termos (dada em (3.1)) e com as mesmas condições iniciais, já que

$$R_0^*(z) = z^0 \overline{R_0(1/\bar{z})} = 1 = R_0(z),$$

$$\begin{aligned} R_1^*(z) &= z^1 \overline{R_1(1/\bar{z})} = z \overline{[(1 + ic_1)(1/\bar{z}) + (1 - ic_1)]} \\ &= z[(1 - ic_1)(1/z) + (1 + ic_1)] = R_1(z) \end{aligned}$$

e, pela relação de recorrência (3.1),

$$R_{n+1}(1/\bar{z}) = [(1 + ic_{n+1})(1/\bar{z}) + (1 - ic_{n+1})]R_n(1/\bar{z}) - 4d_{n+1}(1/\bar{z})R_{n-1}(1/\bar{z}),$$

ou ainda,

$$\overline{R_{n+1}(1/\bar{z})} = [(1 - ic_{n+1})(1/z) + (1 + ic_{n+1})]\overline{R_n(1/\bar{z})} - 4d_{n+1}(1/z)\overline{R_{n-1}(1/\bar{z})},$$

de onde se obtém que

$$\begin{aligned} z^{n+1} \overline{R_{n+1}(1/\bar{z})} &= [(1 - ic_{n+1})(1/z) + (1 + ic_{n+1})]z \left[ z^n \overline{R_n(1/\bar{z})} \right] \\ &\quad - 4d_{n+1}(1/z)z^2 \left[ z^{n-1} \overline{R_{n-1}(1/\bar{z})} \right], \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$R_{n+1}^*(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]R_n^*(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}^*(z), \quad n \geq 1,$$

com as condições iniciais  $R_0^*(z) = 1 = R_0(z)$  e  $R_1^*(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1) = R_1(z)$ .

Polinômios que satisfazem a propriedade (3.20) são conhecidos na literatura como *polinômios auto-inversivos*. Dessa forma, os polinômios  $R_n$ ,  $n \geq 0$ , são polinômios auto-inversivos e, analogamente, os polinômios  $Q_n$  de grau  $n-1$  ( $n \geq 1$ ), os quais também satisfazem uma relação de recorrência de três termos do tipo (3.1) (veja (3.13)) com condições iniciais  $Q_1(z) = 2d_1$  e  $Q_2(z) = 2d_1[(1 + ic_1)z + (1 - ic_1)]$ , são polinômios auto-inversivos, ou seja,

$$Q_n^*(z) = z^{n-1} \overline{Q_n(1/\bar{z})} = Q_n(z), \quad n \geq 1.$$

Observe que aplicando a fórmula do determinante (2.31) na fração contínua expressa para  $Q_n(z)/R_n(z)$  no início dessa seção, e considerando

$$U_n(z) = \begin{vmatrix} Q_n(z) & R_n(z) \\ Q_{n-1}(z) & R_{n-1}(z) \end{vmatrix} = Q_n(z)R_{n-1}(z) - Q_{n-1}(z)R_n(z), \quad n \geq 1, \quad (3.22)$$

tem-se  $U_1(z) = 2d_1$  e

$$U_{n+1}(z) = 4d_{n+1}zU_n(z) = 2^{2n+1}d_1d_2 \cdots d_{n+1}z^n, \quad n \geq 1. \quad (3.23)$$

De fato, uma vez que  $Q_0(z) = 0$ ,  $Q_1(z) = 2d_1$  e  $R_0(z) = 1$  (veja condições iniciais para as relações de recorrência de três termos de  $\{R_n\}_{n=0}^\infty$  e  $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$  dadas, respectivamente, por (3.1) e (3.13)), obtém-se

$$U_1(z) = Q_1(z)R_0(z) - Q_0(z)R_1(z) = 2d_1 \cdot 1 - 0 \cdot R_1(z) = 2d_1$$

Além disso, uma aplicação direta da fórmula do determinante (2.31) na fração contínua de  $Q_n(z)/R_n(z)$  fornece, para todo  $n \geq 1$ , que

$$\begin{aligned} U_{n+1}(z) &= Q_{n+1}(z)R_n(z) - Q_n(z)R_{n+1}(z) \\ &= (-1)^{[(n+1)+1]}(2d_1)(-4d_2z) \cdots (-4d_nz)(-4d_{n+1}z) \\ &= 4d_{n+1}z(-1)^{n+1}(2d_1)(-4d_2z) \cdots (-4d_nz) \\ &= 4d_{n+1}zU_n(z), \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} U_{n+1}(z) &= 4d_{n+1}z(-1)^{n+1}(2d_1)(-4d_2z) \cdots (-4d_nz) \\ &= 4d_{n+1}z(-1)^{n+1}[2(-1)^{n-1}4^{n-1}d_1d_2 \cdots d_nz^{n-1}] \\ &= 2^{2n+1}d_1d_2 \cdots d_{n+1}z^n. \end{aligned}$$

Agora, considerando expansões em séries em torno da origem e do infinito, utilizando (3.23), é possível afirmar que

$$\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} - \frac{Q_{n-1}(z)}{R_{n-1}(z)} = \begin{cases} \frac{\bar{\gamma}_{n-1}}{\bar{r}_{n-1,n-1}} z^{n-1} + O_1(z^n) \\ \frac{\gamma_{n-1}}{r_{n-1,n-1}} \frac{1}{z^n} + O_2((1/z)^{n+1}) \end{cases}, \quad n \geq 1, \quad (3.24)$$

onde, para  $n \geq 1$ , denota-se  $\gamma_{n-1} =: (2^{2n-1}d_1d_2 \cdots d_n)/r_{n,n}$ ,

$$O_1(z^n) =: l_n z^n + l_{n+1} z^{n+1} + \cdots, \quad l_{n-1+k} \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N},$$

e

$$O_2((1/z)^{n+1}) =: \tilde{l}_{n+1}(1/z)^{n+1} + \tilde{l}_{n+2}(1/z)^{n+2} + \dots, \quad \tilde{l}_{n+k} \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Aqui, considera-se expansões em séries em torno da origem e do infinito do tipo

$$\frac{1}{1-\tilde{z}} = 1 + \tilde{z} + \tilde{z}^2 + \dots, \quad e \quad \frac{1}{1-(1/\tilde{w})} = 1 + (1/\tilde{w}) + (1/\tilde{w})^2 + \dots,$$

em que  $|\tilde{z}| < 1$  e  $|1/\tilde{w}| < 1$ . De fato, utilizando (3.23), onde  $U_n(z) = Q_n(z)R_{n-1}(z) - Q_{n-1}(z)R_n(z)$ , e levando em consideração que, para  $n \geq 0$ ,  $R_n(z) = \sum_{j=0}^n r_{n,j}z^j$ , e que, por (3.21),  $r_{n,n} = \bar{r}_{n,0}$  para  $n \geq 1$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} - \frac{Q_{n-1}(z)}{R_{n-1}(z)} &= \frac{U_n(z)}{R_n(z)R_{n-1}(z)} = \frac{2^{2n-1}d_1d_2 \dots d_n z^{n-1}}{R_n(z)R_{n-1}(z)} \\ &= \frac{2^{2n-1}d_1d_2 \dots d_n z^{n-1}}{\left(\sum_{j=0}^n r_{n,j}z^j\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} r_{n-1,j}z^j\right)} \\ &= \frac{2^{2n-1}d_1d_2 \dots d_n z^{n-1}}{r_{n,0}r_{n-1,0} + (r_{n,0}r_{n-1,1} + r_{n,1}r_{n-1,0})z + \dots + r_{n,n}r_{n-1,n-1}z^{2n-1}} \\ &= \frac{2^{2n-1}d_1d_2 \dots d_n z^{n-1}}{r_{n,0}r_{n-1,0} \left(1 + \frac{r_{n,0}r_{n-1,1} + r_{n,1}r_{n-1,0}}{r_{n,0}r_{n-1,0}}z + \dots + \frac{r_{n,n}r_{n-1,n-1}}{r_{n,0}r_{n-1,0}}z^{2n-1}\right)} \\ &= \frac{2^{2n-1}d_1d_2 \dots d_n z^{n-1}}{\bar{r}_{n,n}\bar{r}_{n-1,n-1}} \left[ \frac{1}{1 - (\tilde{r}_1 z + \dots + \tilde{r}_{2n-1} z^{2n-1})} \right] \\ &= \frac{\bar{\gamma}_{n-1}}{\bar{r}_{n-1,n-1}} z^{n-1} [1 + (\tilde{r}_1 z + \dots + \tilde{r}_{2n-1} z^{2n-1}) + (\tilde{r}_1 z + \dots + \tilde{r}_{2n-1} z^{2n-1})^2 + \dots] \\ &= \frac{\bar{\gamma}_{n-1}}{\bar{r}_{n-1,n-1}} z^{n-1} + l_n z^n + l_{n+1} z^{n+1} + \dots \\ &= \frac{\bar{\gamma}_{n-1}}{\bar{r}_{n-1,n-1}} z^{n-1} + O_1(z^n), \end{aligned}$$

onde

$$l_n = \tilde{r}_1 \frac{\bar{\gamma}_{n-1}}{\bar{r}_{n-1,n-1}}, \quad l_{n+1} = (\tilde{r}_2 + \tilde{r}_1^2) \frac{\bar{\gamma}_{n-1}}{\bar{r}_{n-1,n-1}}, \quad \dots,$$

e, de modo geral,  $l_{n+k} \in \mathbb{C}$  para  $k \in \mathbb{N}$ , com

$$\begin{aligned} \tilde{r}_1 &= -\frac{r_{n,0}r_{n-1,1} + r_{n,1}r_{n-1,0}}{r_{n,0}r_{n-1,0}}, \\ \tilde{r}_2 &= -\frac{r_{n,0}r_{n-1,2} + r_{n,1}r_{n-1,1} + r_{n,2}r_{n-1,0}}{r_{n,0}r_{n-1,0}}, \\ &\vdots \\ \tilde{r}_{2n-1} &= -\frac{r_{n,n}r_{n-1,n-1}}{r_{n,0}r_{n-1,0}}. \end{aligned}$$

Analogamente, também pode-se obter

$$\begin{aligned}
\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} - \frac{Q_{n-1}(z)}{R_{n-1}(z)} &= \frac{U_n(z)}{R_n(z)R_{n-1}(z)} = \frac{2^{2n-1}d_1d_2 \cdots d_n z^{n-1}}{R_n(z)R_{n-1}(z)} \\
&= \frac{2^{2n-1}d_1d_2 \cdots d_n z^{n-1}}{r_{n,n}r_{n-1,n-1}z^{2n-1} + (r_{n,n-1}r_{n-1,n-1} + r_{n,n}r_{n-1,n-2})z^{2n-2} + \cdots + r_{n,0}r_{n-1,0}} \\
&= \frac{2^{2n-1}d_1d_2 \cdots d_n z^{n-1}}{r_{n,n}r_{n-1,n-1}z^{2n-1} \left( 1 + \frac{r_{n,n-1}r_{n-1,n-1} + r_{n,n}r_{n-1,n-2}}{r_{n,n}r_{n-1,n-1}} \frac{1}{z} + \cdots + \frac{r_{n,0}r_{n-1,0}}{r_{n,n}r_{n-1,n-1}} \frac{1}{z^{2n-1}} \right)} \\
&= \frac{\gamma_{n-1}}{r_{n-1,n-1}} \frac{1}{z^n} \left[ \frac{1}{1 + \frac{r_{n,n-1}r_{n-1,n-1} + r_{n,n}r_{n-1,n-2}}{r_{n,n}r_{n-1,n-1}} \frac{1}{z} + \cdots + \frac{r_{n,0}r_{n-1,0}}{r_{n,n}r_{n-1,n-1}} \frac{1}{z^{2n-1}}} \right] \\
&= \frac{\gamma_{n-1}}{r_{n-1,n-1}} \frac{1}{z^n} \left\{ \frac{1}{1 - \left[ \tilde{w}_1 \frac{1}{z} + \cdots + \tilde{w}_{2n-1} \frac{1}{z^{2n-1}} \right]} \right\} \\
&= \frac{\gamma_{n-1}}{r_{n-1,n-1}} \frac{1}{z^n} \left\{ 1 + \left[ \tilde{w}_1 \frac{1}{z} + \cdots + \tilde{w}_{2n-1} \frac{1}{z^{2n-1}} \right] + \left[ \tilde{w}_1 \frac{1}{z} + \cdots + \tilde{w}_{2n-1} \frac{1}{z^{2n-1}} \right]^2 + \cdots \right\} \\
&= \frac{\gamma_{n-1}}{r_{n-1,n-1}} \frac{1}{z^n} + \tilde{l}_{n+1}(1/z)^{n+1} + \tilde{l}_{n+2}(1/z)^{n+2} + \cdots \\
&= \frac{\gamma_{n-1}}{r_{n-1,n-1}} \frac{1}{z^n} + O_2((1/z)^{n+1}),
\end{aligned}$$

onde

$$\tilde{l}_{n+1} = \tilde{w}_1 \frac{\gamma_{n-1}}{r_{n-1,n-1}}, \quad \tilde{l}_{n+2} = (\tilde{w}_2 + \tilde{w}_1^2) \frac{\gamma_{n-1}}{r_{n-1,n-1}}, \quad \dots,$$

e, de modo geral,  $l_{n+k} \in \mathbb{C}$  para  $k \in \mathbb{N}$ , com

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_1 &= -\frac{r_{n,n-1}r_{n-1,n-1} + r_{n,n}r_{n-1,n-2}}{r_{n,n}r_{n-1,n-1}}, \\
\tilde{w}_2 &= -\frac{r_{n,n}r_{n-1,n-3} + r_{n,n-1}r_{n-1,n-2} + r_{n,n-2}r_{n-1,n-1}}{r_{n,n}r_{n-1,n-1}}, \\
&\vdots \\
\tilde{w}_{2n-1} &= -\frac{r_{n,0}r_{n-1,0}}{r_{n,n}r_{n-1,n-1}}.
\end{aligned}$$

A igualdade estabelecida em (3.24) significa que existem expansões formais em séries  $E_0(z)$  e  $E_\infty(z)$ , respectivamente em torno da origem e em torno do infinito, tais que

$$E_0(z) - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + O_1(z^{n+1}), \quad n \geq 0. \quad (3.25)$$

e

$$E_\infty(z) - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+1}} + O_2((1/z)^{n+2}), \quad n \geq 0. \quad (3.26)$$

Por razões que serão esclarecidas mais adiante, defini-se

$$E_0(z) =: -v_1 - v_2 z - v_3 z^2 - v_4 z^3 - \dots \quad (3.27)$$

e

$$E_\infty(z) =: \frac{v_0}{z} + \frac{v_{-1}}{z^2} + \frac{v_{-2}}{z^3} + \frac{v_{-3}}{z^4} + \dots \quad (3.28)$$

Agora, como  $R_n$  e  $Q_n$  são polinômios auto-inversivos, segue de (3.26) que

$$z^{-1} \overline{E_\infty(1/\bar{z})} - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + O_2(z^{n+1}), \quad n \geq 0.$$

Com efeito, por hipótese,  $R_n(z) = R_n^*(z) = z^n \overline{R_n(1/\bar{z})}$  e  $Q_n(z) = Q_n^*(z) = z^{n-1} \overline{Q_n(1/\bar{z})}$ .

Logo, considerando a igualdade em (3.26), para  $n \geq 0$ , tem-se

$$E_\infty(1/\bar{z}) - \frac{Q_n(1/\bar{z})}{R_n(1/\bar{z})} = \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{(1/\bar{z})^{n+1}} + O_2(\bar{z}^{n+2}),$$

ou ainda,

$$\overline{E_\infty(1/\bar{z})} - \frac{\overline{Q_n(1/\bar{z})}}{\overline{R_n(1/\bar{z})}} = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^{n+1} + O_2(z^{n+2}),$$

de onde segue que,

$$z^{-1} \overline{E_\infty(1/\bar{z})} - \frac{z^{n-1} \overline{Q_n(1/\bar{z})}}{z^n \overline{R_n(1/\bar{z})}} = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + O_2(z^{n+1}),$$

ou seja,

$$z^{-1} \overline{E_\infty(1/\bar{z})} - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + O_2(z^{n+1}), \quad n \geq 0.$$

Comparando a última igualdade com (3.25) tem-se, então, a propriedade simétrica

$$z^{-1} \overline{E_\infty(1/\bar{z})} = E_0(z),$$

a qual garante que

$$v_j = -\bar{v}_{-j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (3.29)$$

já que, de (3.28), tem-se

$$E_\infty(1/\bar{z}) = v_0 \bar{z} + v_{-1} \bar{z}^2 + v_{-2} \bar{z}^3 + v_{-3} \bar{z}^4 + \dots,$$

ou, equivalentemente,

$$z^{-1} \overline{E_\infty(1/\bar{z})} = \bar{v}_0 + \bar{v}_{-1} z + \bar{v}_{-2} z^2 + \bar{v}_{-3} z^3 + \dots$$



Daí, como vale a a propriedade simétrica  $z^{-1}\overline{E_\infty(1/\bar{z})} = E_0(z)$ , pode-se concluir, por (3.27), que

$$\bar{v}_0 + \bar{v}_{-1}z + \bar{v}_{-2}z^2 + \bar{v}_{-3}z^3 + \cdots = -v_1 - v_2z - v_3z^2 - v_4z^3 - \cdots .$$

Finalmente, o resultado em (3.29) é estabelecido quando se compara, respectivamente, os coeficientes de  $z^n$ ,  $n \geq 0$ , na última igualdade.

Considerando agora a igualdade em (3.25), tem-se

$$E_0(z)R_n(z) - Q_n(z) = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}}z^n R_n(z) + O_3(z^{n+1}), \quad (3.30)$$

onde  $O_3(z^{n+1}) := O_1(z^{n+1})R_n(z)$ . Consequentemente, como  $E_0(z) = \sum_{j=1}^{\infty} -v_j z^{j-1}$  (veja (3.27)), denotando  $R_n(z) = \sum_{j=0}^n r_{n,j} z^j$  e  $Q_n(z) = \sum_{j=0}^{n-1} q_{n,j} z^j$ , a igualdade em (3.30) pode ser reescrita como

$$\left( \sum_{j=1}^{\infty} -v_j z^{j-1} \right) \left( \sum_{j=0}^n r_{n,j} z^j \right) - \sum_{j=0}^{n-1} q_{n,j} z^j = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n \left( \sum_{j=0}^n r_{n,j} z^j \right) + O_3(z^{n+1}),$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} & (-v_1 z^0 - v_2 z^1 - \cdots - v_{n+1} z^n - \cdots) (r_{n,0} z^0 + r_{n,1} z^1 + \cdots + r_{n,n} z^n) \\ & \quad - (q_{n,0} z^0 + q_{n,1} z^1 + \cdots + q_{n,n-1} z^{n-1}) \\ & = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} (r_{n,0} z^n + r_{n,1} z^{n+1} + \cdots + r_{n,n} z^{2n}) + O_3(z^{n+1}). \end{aligned}$$

Assim, comparando-se os coeficientes de  $z^0$  em ambos os membros da equação acima, obtém-se

$$-v_1 r_{n,0} - q_{n,0} = 0.$$

Para os coeficientes de  $z^1$ , tem-se

$$-v_2 r_{n,0} - v_1 r_{n,1} - q_{n,1} = 0.$$

Seguindo o mesmo procedimento até  $z^{n-1}$ , conclui-se que

$$-v_n r_{n,0} - \cdots - v_1 r_{n,n-1} - q_{n,n-1} = 0.$$

Já em relação aos coeficientes de  $z^n$ , tem-se

$$-v_{n+1} r_{n,0} - \cdots - v_2 r_{n,n-1} - v_1 r_{n,n} = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} r_{n,0} = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} \bar{r}_{n,n} = \bar{\gamma}_n,$$

onde a igualdade  $r_{n,0} = \bar{r}_{n,n}$  é consequência do resultado obtido em (3.21).

Dessa forma, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} -v_1 r_{n,0} & -q_{n,0} & & = 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -v_n r_{n,0} & \cdots & -v_1 r_{n,n-1} - q_{n,n-1} & = 0 \\ -v_{n+1} r_{n,0} & \cdots & -v_2 r_{n,n-1} - v_1 r_{n,n} & = \bar{\gamma}_n \end{cases}. \quad (3.31)$$

De modo análogo, considerando  $O_4((1/z)^2) =: O_2((1/z)^{n+2})R_n(z)$ , a igualdade em (3.26), fornece

$$E_\infty(z)R_n(z) - Q_n(z) = \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+1}} R_n(z) + O_4((1/z)^2). \quad (3.32)$$

Consequentemente, como  $E_0(z) = \sum_{j=1}^{\infty} -v_j z^{j-1}$  (veja (3.28)), sendo  $R_n(z) = \sum_{j=0}^n r_{n,j} z^j$  e  $Q_n(z) = \sum_{j=0}^{n-1} q_{n,j} z^j$ , é possível reescrever a igualdade (3.32) da seguinte forma

$$\left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{v_{-j+1}}{z^j} \right) \left( \sum_{j=0}^n r_{n,j} z^j \right) - \sum_{j=0}^{n-1} q_{n,j} z^j = \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+1}} \left( \sum_{j=0}^n r_{n,j} z^j \right) + O_4((1/z)^2),$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{v_0}{z} + \frac{v_{-1}}{z^2} + \cdots + \frac{v_{-n}}{z^{n+1}} + \cdots \right) (r_{n,0} + r_{n,1}z + \cdots + r_{n,n}z^n) \\ & \quad - (q_{n,0} + q_{n,1}z + \cdots + q_{n,n-1}z^{n-1}) \\ & = \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \left( \frac{r_{n,0}}{z^{n+1}} + \frac{r_{n,1}}{z^{n+1}} + \cdots + \frac{r_{n,n}}{z} \right) + O_4((1/z)^2). \end{aligned}$$

Daí, comparando-se os coeficientes de  $(1/z) = z^{-1}$  em ambos os lados desta última equação, obtém-se

$$v_0 r_{n,0} + v_{-1} r_{n,1} + \cdots + v_{-n} r_{n,n} = \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} r_{n,n} = \gamma_n.$$

De igual modo, para os coeficientes de  $z^0$ , tem-se

$$v_0 r_{n,1} + v_{-1} r_{n,2} + \cdots + v_{-(n-1)} r_{n,n} - q_{n,0} = 0.$$

Seguindo o mesmo procedimento até  $z^{n-1}$ , chega-se a igualdade

$$v_0 r_{n,n} - q_{n,n-1} = 0.$$

Assim, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} v_0 r_{n,0} + v_{-1} r_{n,1} + \cdots + v_{-n} r_{n,n} & = \gamma_n \\ v_0 r_{n,1} + \cdots + v_{-n+1} r_{n,n} - q_{n,0} & = 0 \\ \ddots & \vdots \\ v_0 r_{n,n} - q_{n,n-1} & = 0 \end{cases}. \quad (3.33)$$

Note que a última equação do sistema (3.31) e a primeira do sistema (3.33) são as mesmas já que por (3.20) tem-se, para  $n \geq 0$ ,  $r_{n,j} = \bar{r}_{n,n-j}$ ,  $j \geq 0$ , e, por (3.29), tem-se  $v_j = -\bar{v}_{-j+1}$ ,  $j \geq 1$ .

Agora, a partir dos sistemas de equações (3.31) e (3.33), é possível observar que

$$\gamma_n = (-1)^n \frac{H_{n+1}^{(-n)}}{H_n^{(-n+1)}} r_{n,n} \quad n \geq 1, \quad (3.34)$$

onde

$$H_n^{(m)} = \begin{vmatrix} v_m & v_{m+1} & \cdots & v_{m+n-1} \\ v_{m+1} & v_{m+2} & \cdots & v_{m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{m+n-1} & v_{m+n} & \cdots & v_{m+2n-2} \end{vmatrix}, \quad (3.35)$$

são os determinantes de Hankel associados com a sequência dupla  $\{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ . De fato, subtraindo-se membro a membro as equações de (3.31) que contêm os termos  $-q_{n,0}, -q_{n,1}, \dots, -q_{n,n-1}$  das respectivas equações de (3.33) que contêm esses mesmos termos, obtém-se o sistema (acrescentado da primeira equação de (3.33))

$$\begin{cases} v_0 r_{n,0} + v_{-1} r_{n,1} + \cdots + v_{-n} r_{n,n} & = \gamma_n \\ v_0 r_{n,1} + \cdots + v_{-n+1} r_{n,n} - q_{n,0} - (-v_1 r_{n,0} - q_{n,0}) & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ v_0 r_{n,n} - q_{n,n-1} - (-v_n r_{n,0} - \cdots - v_1 r_{n,n-1} - q_{n,n-1}) & = 0 \end{cases},$$

ou, de forma equivalente, o sistema

$$\begin{cases} v_0 r_{n,0} + v_{-1} r_{n,1} + \cdots + v_{-n} r_{n,n} & = \gamma_n \\ v_1 r_{n,0} + v_0 r_{n,1} + \cdots + v_{-n+1} r_{n,n} & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ v_n r_{n,0} + v_{n-1} r_{n,1} + \cdots + v_0 r_{n,n} & = 0 \end{cases}. \quad (3.36)$$

que, na forma matricial, pode, ainda, ser reescrito como

$$\begin{pmatrix} v_{-n} & \cdots & v_{-1} & v_0 \\ v_{-n+1} & \cdots & v_0 & v_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_0 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{n,n} \\ \vdots \\ r_{n,1} \\ r_{n,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_n \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mas, pela regra de Cramer, considerando  $H_{n+1}^{(-n)}$  definido como em (3.35),

tem-se

$$r_{n,n} = \frac{1}{H_{n+1}^{(-n)}} \begin{vmatrix} \gamma_n & v_{-n+1} & \cdots & v_{-1} & v_0 \\ 0 & v_{-n+2} & \cdots & v_0 & v_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & v_1 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{vmatrix}.$$

Portanto,

$$r_{n,n} = \frac{\gamma_n}{H_{n+1}^{(-n)}} \begin{vmatrix} v_{-n+2} & \cdots & v_0 & v_1 \\ v_{-n+3} & \cdots & v_1 & v_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_1 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{vmatrix} = \frac{\gamma_n}{H_{n+1}^{(-n)}} H_n^{(-n+2)}, \quad (3.37)$$

onde a última igualdade é consequência de (3.35) quando se considera  $m = -n + 2$  para se obter  $H_n^{(-n+2)}$ .

Por outro lado, uma vez que  $v_j = -\bar{v}_{-j+1}$ ,  $j \geq 1$  (veja (3.29)), tem-se

$$\begin{aligned} H_n^{(-n+2)} &= \begin{vmatrix} v_{-n+2} & \cdots & v_0 & v_1 \\ v_{-n+3} & \cdots & v_1 & v_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_1 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\bar{v}_{n-1} & \cdots & -\bar{v}_1 & -\bar{v}_0 \\ -\bar{v}_{n-2} & \cdots & -\bar{v}_0 & -\bar{v}_{-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\bar{v}_0 & \cdots & -\bar{v}_{-n+2} & -\bar{v}_{-n+1} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n \begin{vmatrix} \bar{v}_{n-1} & \cdots & \bar{v}_1 & \bar{v}_0 \\ \bar{v}_{n-2} & \cdots & \bar{v}_0 & \bar{v}_{-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \bar{v}_0 & \cdots & \bar{v}_{-n+2} & \bar{v}_{-n+1} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \bar{v}_{-n+1} & \bar{v}_{-n+2} & \cdots & \bar{v}_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{v}_{-1} & \bar{v}_0 & \cdots & \bar{v}_{n-2} \\ \bar{v}_0 & \bar{v}_1 & \cdots & \bar{v}_{n-1} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

onde as duas últimas igualdades são consequências das propriedades de determinantes.

Assim, considerando-se

$$\bar{H}_n^{(-n+1)} = \begin{vmatrix} v_{-n+1} & v_{-n+2} & \cdots & v_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{-1} & v_0 & \cdots & v_{n-2} \\ v_0 & v_1 & \cdots & v_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{v}_{-n+1} & \bar{v}_{-n+2} & \cdots & \bar{v}_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{v}_{-1} & \bar{v}_0 & \cdots & \bar{v}_{n-2} \\ \bar{v}_0 & \bar{v}_1 & \cdots & \bar{v}_{n-1} \end{vmatrix},$$

conclui-se que

$$H_n^{(-n+2)} = (-1)^n \bar{H}_n^{(-n+1)},$$

de onde segue, por (3.37), que

$$\gamma_n = (-1)^n \frac{H_{n+1}^{(-n)}}{\bar{H}_n^{(-n+1)}} r_{n,n} \quad n \geq 1,$$

e isto é exatamente o resultado afirmado em (3.34).

Diante do exposto é possível, agora, estabelecer o seguinte lema.

**Lema 3.6** *Sejam  $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$  e  $\{Q_n(z)\}_{n=0}^\infty$  as seqüências de polinômios obtidas da seqüência real  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ , da seqüência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  e das respectivas fórmulas de recorrência de três termos (3.1) e (3.13). Então, as funções racionais  $Q_n(z)/R_n(z)$  satisfazem as correspondentes propriedades dadas por (3.25) e (3.26). Além disso, se o funcional de momento  $\mathcal{N}$  é tal que*

$$\mathcal{N}[\zeta^{-n}] = v_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.38)$$

então os polinômios  $R_n(z)$  satisfazem

$$\mathcal{N}[\zeta^{-n+j}R_n(\zeta)] = \begin{cases} -\bar{\gamma}_n, & \text{se } j = -1 \\ 0, & \text{se } j = 0, 1, \dots, n-1, \\ \gamma_n, & \text{se } j = n, \end{cases} \quad n \geq 1, \quad (3.39)$$

onde  $\gamma_0 = v_0 = \frac{2d_1}{1+ic_1}$  e  $\gamma_n = \frac{4d_{n+1}}{1+ic_{n+1}}\gamma_{n-1}$ , para  $n \geq 1$ .

**Demonstração:** A primeira parte do lema, isto é, que as funções racionais  $Q_n(z)/R_n(z)$  satisfazem as correspondentes propriedades dadas por (3.25) e (3.26), segue da construção estabelecida após a prova do Lema (3.5) até a obtenção das referidas propriedades. Resta provar as relações de ortogonalidades (3.39), satisfeitas pelos polinômios  $R_n(z)$ , em relação ao funcional de momento  $\mathcal{N}$ . Para isso, utiliza-se, novamente, o sistema (3.36) (obtido de (3.31) e (3.33)), porém, desta vez, incluindo-se a última equação de (3.31) em (3.36), isto é, considerando o sistema

$$\begin{cases} v_0 r_{n,0} + v_{-1} r_{n,1} + \dots + v_{-n} r_{n,n} & = & \gamma_n \\ v_1 r_{n,0} + v_0 r_{n,1} + \dots + v_{-n+1} r_{n,n} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \quad \vdots \\ v_n r_{n,0} + v_{n-1} r_{n,1} + \dots + v_0 r_{n,n} & = & 0 \\ v_{n+1} r_{n,0} + v_n r_{n,1} + \dots + v_1 r_{n,n} & = & -\bar{\gamma}_n \end{cases},$$

e observando que  $R_n(\zeta) = \sum_{k=0}^n r_{n,k} \zeta^k$ , obtém-se, por (3.38), que

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}[\zeta^{-n+j}R_n(\zeta)] &= \mathcal{N}\left[\zeta^{-n+j}\sum_{k=0}^n r_{n,k}\zeta^k\right] = \mathcal{N}\left[\sum_{k=0}^n r_{n,k}\zeta^{-n+j+k}\right] \\
&= \sum_{k=0}^n r_{n,k}\mathcal{N}[\zeta^{-n+j+k}] = \sum_{k=0}^n r_{n,k}v_{n-j-k} \\
&= r_{n,0}v_{n-j} + r_{n,1}v_{n-j-1} + \cdots + r_{n,n}v_{-j} \\
&= \begin{cases} -\bar{\gamma}_n, & \text{se } j = -1 \\ 0, & \text{se } j = 0, 1, \dots, n-1, \quad n \geq 1, \\ \gamma_n, & \text{se } j = n. \end{cases}
\end{aligned}$$

Além disso, considerando  $n = 0$  na primeira equação do sistema acima, tem-se  $\gamma_0 = r_{0,0}v_0 = v_0$ , já que, por (3.21),  $r_{0,0} = 1$ . Consequentemente, como  $\gamma_{n-1} = (2^{2n-1}d_1d_2\cdots d_n)/r_{n,n}$  para  $n \geq 1$  (veja (3.24)), e, por (3.21),  $r_{1,1} = 1 + ic_1$ , conclui-se que

$$v_0 = \gamma_0 = \frac{2d_1}{r_{1,1}} = \frac{2d_1}{1 + ic_1}.$$

Finalmente, usando-se, mais uma vez, a definição de  $\gamma_k$  ( $k \geq 0$ ) e a igualdade em (3.21), obtém-se

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \frac{2^{2(n+1)-1}d_1d_2\cdots d_{n+1}}{r_{n+1,n+1}} = \frac{2^{2n+2-1}d_1d_2\cdots d_{n+1}}{\prod_{k=1}^{n+1}(1 + ic_k)} \\
&= \frac{2^2d_{n+1} \cdot \frac{2^{2n-1}d_1d_2\cdots d_n}{(1 + ic_{n+1})\prod_{k=1}^n(1 + ic_k)}}{1 + ic_{n+1}} = \frac{4d_{n+1}}{1 + ic_{n+1}} \frac{2^{2n-1}d_1d_2\cdots d_n}{r_{n,n}} \\
&= \frac{4d_{n+1}}{1 + ic_{n+1}}\gamma_{n-1}, \quad n \geq 1,
\end{aligned}$$

e isto conclui a prova do lema. ■

Em termos de  $\gamma_n = \mathcal{N}[R_n(\zeta)]$ ,  $n \geq 0$  (obtido quando  $j = n$ ), os elementos de  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  satisfazem

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\bar{\gamma}_0}, \quad i\frac{c_1}{d_1} = \frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\bar{\gamma}_0}$$

e

$$\frac{1}{2d_{n+1}} = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} + \frac{\bar{\gamma}_{n-1}}{\bar{\gamma}_n}, \quad i\frac{c_{n+1}}{2d_{n+1}} = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} - \frac{\bar{\gamma}_{n-1}}{\bar{\gamma}_n}, \quad n \geq 1.$$

De fato, uma vez que  $\gamma_0 = 2d_1/(1 + ic_1)$ , tem-se  $\bar{\gamma}_0 = 2d_1/(1 - ic_1)$  e, portanto,

$$\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\bar{\gamma}_0} = \frac{1 + ic_1}{2d_1} + \frac{1 - ic_1}{2d_1} = \frac{1}{d_1}.$$

e

$$\frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\bar{\gamma}_0} = \frac{1 + ic_1}{2d_1} - \frac{1 - ic_1}{2d_1} = i \frac{c_1}{d_1}.$$

Por outro lado, como

$$\gamma_n = \frac{4d_{n+1}}{1 + ic_{n+1}} \gamma_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

então

$$\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} = \frac{1 + ic_{n+1}}{4d_{n+1}} \quad \text{e} \quad \frac{\bar{\gamma}_{n-1}}{\bar{\gamma}_n} = \frac{1 - ic_{n+1}}{4d_{n+1}}.$$

Consequentemente, para  $n \geq 1$ , tem-se

$$\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} + \frac{\bar{\gamma}_{n-1}}{\bar{\gamma}_n} = \frac{1 + ic_{n+1}}{4d_{n+1}} + \frac{1 - ic_{n+1}}{4d_{n+1}} = \frac{1}{2d_{n+1}}$$

e

$$\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} - \frac{\bar{\gamma}_{n-1}}{\bar{\gamma}_n} = \frac{1 + ic_{n+1}}{4d_{n+1}} - \frac{1 - ic_{n+1}}{4d_{n+1}} = i \frac{c_{n+1}}{2d_{n+1}}.$$

Observe, ainda, que é possível escrever-se

$$\mathcal{N} \left[ \frac{1}{z - \zeta} \right] = \begin{cases} E_0(z), & \text{para } z \sim 0, \\ E_\infty(z), & \text{para } z \sim \infty. \end{cases}$$

De fato, uma vez que

$$\mathcal{N} \left[ \frac{1}{z - \zeta} \right] = \mathcal{N} \left[ \frac{-1}{\zeta - z} \right] = \mathcal{N} [ -(\zeta - z)^{-1} ] = -\mathcal{N} [ (\zeta - z)^{-1} ],$$

considerando  $E_0(z)$  e  $E_\infty(z)$  definidos, respectivamente, como em (3.27) e (3.28), e o funcional  $\mathcal{N}$  satisfazendo (3.38), obtém-se, para  $z \sim 0$ , que

$$\mathcal{N} \left[ \frac{1}{z - \zeta} \right] = -\mathcal{N} [ \zeta^{-1} ] = -v_1 = E_0(z),$$

e, para  $z \sim \infty$ , tem-se

$$\mathcal{N} \left[ \frac{1}{z - \zeta} \right] = \mathcal{N}[0] = \mathcal{N}[0 \cdot \zeta^{-n}] = 0 \cdot \mathcal{N}[\zeta^{-n}] = 0 \cdot v_n = 0 = E_\infty(z).$$

**Observação 3.7** *A existência do funcional de momento  $\mathcal{N}$  tal que  $\mathcal{N}[\zeta^{-n+j} R_n(\zeta)] = 0$  para  $0 \leq j < n$  (onde os polinômios  $R_n(z)$  são aqueles gerados pela relação de recorrência (3.1)), segue também de Ismail e Masson [18, Teorema 2.1]. Os autores em [18] consideram a fórmula de recorrência da forma*

$$\hat{R}_n(z) = (z - \beta_n^{(1)}) \hat{R}_{n-1}(z) - \beta_n^{(2)} (z - \beta_n^{(3)}) \hat{R}_{n-2}(z), \quad n \geq 1,$$

com  $\hat{R}_{-1}(z) = 0$  e  $\hat{R}_1(z) = 1$ , a qual é reduzida para a fórmula de recorrência do tipo considerado no presente texto quando  $\{\beta_n^{(3)}\}_{n=1}^\infty$  é a sequência nula. Para comparar exatamente com a fórmula de recorrência (3.1), pode-se ainda impor outras restrições sobre as sequências  $\{\beta_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty$  e  $\{\beta_n^{(2)}\}_{n=1}^\infty$ . Por exemplo, a restrição sobre  $\{\beta_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty$  é  $|\beta_n^{(1)}| = 1$  para  $n \geq 1$ . De [18, Teorema 2.3], junto com o fato que os zeros de  $R_n$  são todos simples e pertencem círculo unitário  $|z| = 1$ , pode-se deduzir que o funcional de momento  $\mathcal{N}$  pode ser escrito como  $\mathcal{N}[f] = \int_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\alpha(\zeta)$ . Com as condições específicas assumidas em (3.1), será estabelecido na próxima seção que  $d\alpha(\zeta) = (1 - \zeta)d\mu(\zeta)$ , onde  $d\mu(\zeta)$  é uma medida positiva no círculo unitário.

### 3.4 A medida no círculo unitário e o respectivo funcional de momento

Dadas as sequências de polinômios  $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$  e  $\{Q_n(z)\}_{n=0}^\infty$ , obtidas da sequência real  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ , da sequência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  e das respectivas fórmulas de recorrência de três termos (3.1) e (3.13), considere  $\{A_n(z)\}_{n=0}^\infty$  e  $\{B_n(z)\}$  sequências de polinômios tais que

$$A_n(z) := R_n(z) - Q_n(z) \quad \text{e} \quad B_n(z) := (z - 1)R_n(z), \quad n \geq 0. \quad (3.40)$$

Neste caso, tem-se

$$\frac{A_{n+1}(z)}{B_{n+1}(z)} - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = -\frac{1}{z-1} \left[ \frac{Q_{n+1}(z)}{R_{n+1}(z)} - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} \right], \quad n \geq 0. \quad (3.41)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{A_{n+1}(z)}{B_{n+1}(z)} - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} &= \frac{R_{n+1}(z) - Q_{n+1}(z)}{(z-1)R_{n+1}(z)} - \left[ \frac{R_n(z) - Q_n(z)}{(z-1)R_n(z)} \right] \\ &= -\frac{1}{z-1} \left[ \frac{Q_{n+1}(z)}{R_{n+1}(z)} - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} \right]. \end{aligned}$$

Daí, de (3.24), segue que

$$\frac{A_{n+1}(z)}{B_{n+1}(z)} - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \begin{cases} \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + O_5(z^{n+1}) \\ -\frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+2}} + O_6((1/z)^{n+3}) \end{cases}, \quad n \geq 0, \quad (3.42)$$

onde, para  $n \geq 0$ ,  $\gamma_n = (2^{2n+1}d_1d_2 \cdots d_{n+1})/r_{n+1,n+1}$ ,

$$O_5(z^{n+1}) =: h_{n+1}z^{n+1} + h_{n+2}z^{n+2} + \cdots, \quad h_{n+k} \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N},$$



e

$$O_6((1/z)^{n+3}) =: \tilde{h}_{n+3}(1/z)^{n+3} + \tilde{h}_{n+4}(1/z)^{n+4} + \dots, \quad \tilde{h}_{n+2+k} \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

De fato, considerando-se expansões em séries em torno da origem e do infinito do tipo

$$\frac{1}{1-\tilde{z}} = 1 + \tilde{z} + \tilde{z}^2 + \dots, \quad e \quad \frac{(1/\tilde{w})}{1-(1/\tilde{w})} = (1/\tilde{w}) + (1/\tilde{w})^2 + (1/\tilde{w})^3 + \dots$$

(em que  $|\tilde{z}| < 1$  e  $|1/\tilde{w}| < 1$ ), utilizando (3.24) e a igualdade em (3.41), tem-se, para  $n \geq 0$ , que

$$\begin{aligned} \frac{A_{n+1}(z)}{B_{n+1}(z)} - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} &= -\frac{1}{z-1} \left[ \frac{Q_{n+1}(z)}{R_{n+1}(z)} - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} \right] \\ &= \frac{1}{1-z} \begin{cases} \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + O_1(z^{n+1}), \\ \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+1}} + O_2((1/z)^{n+2}), \end{cases} \\ &= \begin{cases} (1+z+z^2+\dots) \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + (1+z+z^2+\dots) O_1(z^{n+1}), \\ [- (1/z) - (1/z)^2 - (1/z)^3 - \dots] \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+1}} \\ \quad + [- (1/z) - (1/z)^2 - (1/z)^3 - \dots] O_2((1/z)^{n+2}), \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + h_{n+1} z^{n+1} + h_{n+2} z^{n+2} + \dots, \\ -\frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+2}} + \tilde{h}_{n+3}(1/z)^{n+3} + \tilde{h}_{n+4}(1/z)^{n+4} + \dots, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + O_5(z^{n+1}) \\ -\frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+2}} + O_6((1/z)^{n+3}) \end{cases}, \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} + l_{n+1}, \quad h_{n+2} = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} + l_{n+1} + l_{n+2}, \quad \dots, \\ \tilde{h}_{n+3} &= -\frac{\gamma_n}{r_{n,n}} - \tilde{l}_{n+2}, \quad \tilde{h}_{n+4} = -\frac{\gamma_n}{r_{n,n}} - \tilde{l}_{n+2} - \tilde{l}_{n+3}, \quad \dots, \end{aligned}$$

e, de modo geral,  $h_{n+k}, \tilde{h}_{n+2+k} \in \mathbb{C}$  para  $k \in \mathbb{N}$ , com  $l_{n+k}$  e  $\tilde{l}_{n+1+k}$  dados como na prova de (3.24).

Com os resultados da seção anterior e do início desta seção é possível, agora, estabelecer um dos principais resultados apresentados no trabalho de Castillo et al. [8], o qual configura-se, também, como o primeiro passo em direção ao alcance do principal objetivo da presente dissertação, ou seja, obter uma única medida de probabilidade não trivial no círculo unitário associada ao par de seqüências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$  (que está conectada à relação de recorrência de três termos (3.1) satisfeita pelos polinômios

$R_n(z)$ ) de tal modo que  $\{R_n(z) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(z)\}$  representa a sequência de polinômios ortogonais com relação a essa medida, sendo  $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$  a sequência de parâmetros minimal da sequência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

**Teorema 3.8** *Associado ao par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{d_n\}_{n=1}^{\infty}\}$  existe uma única medida de probabilidade não trivial  $\mu$  no círculo unitário. Se  $M_0 > 0$ , onde  $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$  é a sequência de parâmetros maximal de  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ , então  $\mu$  tem um ponto puro com massa  $M_0$  em  $z = 1$ . Além disso, se  $\mathcal{N}$  é o funcional de momento associado à  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  e  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  como no Lema 3.6, então*

$$\mathcal{N}[\zeta^{-n}] = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n}(1 - \zeta)d\mu(\zeta), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

**Demonstração:** De (3.42) tem-se que existem expansões em séries  $F_0(z)$  e  $F_{\infty}(z)$  tais que

$$F_0(z) - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + O_5(z^{n+1}), \quad n \geq 0 \quad (3.43)$$

e

$$F_{\infty}(z) - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = -\frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+2}} + O_6((1/z)^{n+3}), \quad n \geq 0 \quad (3.44)$$

Logo, definindo

$$F_0(z) := -\mu_1 - \mu_2 z - \mu_3 z^2 - \mu_4 z^3 - \dots, \quad (3.45)$$

e

$$F_{\infty}(z) := \frac{\mu_0}{z} + \frac{\mu_{-1}}{z^2} + \frac{\mu_{-2}}{z^3} + \frac{\mu_{-3}}{z^4} + \dots, \quad (3.46)$$

tem-se então, de (3.25), (3.26), (3.40), (3.43) e (3.44), que os números  $\mu_k$  satisfazem

$$\mu_n = 1 + \sum_{j=1}^n v_j, \quad \mu_{-n} = 1 - \sum_{j=1}^n v_{-j+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.47)$$

com  $\mu_0 = 1$ . De fato de (3.40), segue que

$$\frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \frac{R_n(z) - Q_n(z)}{(z-1)R_n(z)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1} \frac{Q_n(z)}{R_n(z)}. \quad (3.48)$$

Consequentemente, utilizando (3.25) e (3.43), obtém-se

$$F_0(z) - \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n - O_5(z^{n+1}) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1} \left[ E_0(z) - \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n - O_1(z^{n+1}) \right],$$

ou, equivalentemente,

$$(z-1)F_0(z) - 1 + E_0(z) = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^{n+1} + (z-1)O_5(z^{n+1}) + O_1(z^{n+1}).$$

Daí, considerando  $E_0(z)$  e  $F_0(z)$  definidos, respectivamente, como em (3.27) e (3.45), é possível observar que

$$(\mu_1 - 1 - v_1) + (\mu_2 - \mu_1 - v_2)z + (\mu_3 - \mu_2 - v_3)z^2 + \cdots + (\mu_{n+1} - \mu_n - v_{n+1})z^n = O(z^{n+1}),$$

de onde segue (por comparação de coeficientes em ambos os lados da igualdade) que

$$\mu_j - \mu_{j-1} - v_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n+1, \quad n \geq 0.$$

com  $\mu_0 := 1$ . Disto, tem-se

$$\mu_{n+1} - \mu_0 = \sum_{j=1}^{n+1} (\mu_j - \mu_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n+1} v_j, \quad n \geq 0,$$

ou ainda,

$$\mu_n = 1 + \sum_{j=1}^n v_j, \quad n \geq 1.$$

De forma semelhante, utilizando (3.48), (3.26) e (3.44), chega-se a igualdade

$$\begin{aligned} F_\infty(z) + \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+2}} - O_6((1/z)^{n+3}) \\ = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1} \left[ E_\infty(z) - \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+1}} - O_2((1/z)^{n+2}) \right], \end{aligned}$$

a qual implica em

$$(z-1)F_\infty(z) - 1 + E_\infty(z) = \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+2}} + (z-1)O_6((1/z)^{n+3}) + O_2((1/z)^{n+2}).$$

Consequentemente, tomando  $E_\infty(z)$  e  $F_\infty(z)$  definidos, respectivamente, por (3.28) e (3.46), obtém-se

$$(\mu_0 - 1) + \frac{\mu_{-1} - \mu_0 - v_0}{z} + \frac{\mu_{-2} - \mu_{-1} - v_{-1}}{z^2} + \cdots + \frac{\mu_{-(n+1)} - \mu_{-n} - v_{-n}}{z^{n+1}} = \tilde{O}((1/z)^{n+2}),$$

Observe que comparando-se os respectivos coeficientes em ambos os membros da última igualdade, pode-se concluir que

$$\mu_{-j} - \mu_{-j+1} + v_{-j+1} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n+1, \quad n \geq 0.$$

com  $\mu_0 := 1$ . Daí, tem-se

$$\mu_{-(n+1)} - \mu_0 = \sum_{j=1}^{n+1} (\mu_{-j} - \mu_{-j+1}) = - \sum_{j=1}^{n+1} v_{-j+1}, \quad n \geq 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\mu_{-n} = 1 - \sum_{j=1}^n v_{-j+1}, \quad n \geq 1.$$

Agora, uma vez que  $v_j = -\bar{v}_{-j+1}$  para  $j \geq 1$  (veja (3.29)), é possível concluir a partir de (3.47) que

$$\mu_k = 1 + \sum_{j=1}^k v_j = 1 - \sum_{j=1}^k (\bar{v}_{-j+1}) = 1 - \overline{\sum_{j=1}^k (v_{-j+1})} = \bar{\mu}_{-k}, \quad k \geq 1.$$

Portanto,

$$\mu_{-k} = \bar{\mu}_k, \quad k \geq 1.$$

Observe que definindo o funcional de momento  $\mathcal{M}$  por

$$\mathcal{M}[\zeta^{-k}] = \mu_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.49)$$

então,

$$\mathcal{M}[\zeta^{-k}] = 1 - \mathcal{N} \left[ \frac{1 - \zeta^{-k}}{1 - \zeta} \right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.50)$$

Com efeito, de (3.38), tem-se

$$\sum_{j=1}^k v_j = \sum_{j=1}^k \mathcal{N} [\zeta^{-j}] = \mathcal{N} \left[ \sum_{j=1}^k \zeta^{-j} \right]. \quad (3.51)$$

Mas, considerando

$$J_k(\zeta) = \sum_{j=1}^k \zeta^{-j} = \zeta^{-1} + \zeta^{-2} + \dots + \zeta^{-k}, \quad (3.52)$$

obtém-se

$$\begin{aligned} J_k(\zeta) - \zeta^{-1} J_k(\zeta) &= (\zeta^{-1} + \zeta^{-2} + \dots + \zeta^{-(k-1)} + \zeta^{-k}) \\ &\quad - (\zeta^{-2} + \zeta^{-3} + \dots + \zeta^{-k} + \zeta^{-k-1}) \\ &= \zeta^{-1} - \zeta^{-k-1}, \end{aligned}$$

de onde se tem

$$J_k(\zeta) = \frac{\zeta^{-1} - \zeta^{-k-1}}{1 - \zeta^{-1}} = \frac{1 - \zeta^{-k}}{\zeta - 1} = - \left( \frac{1 - \zeta^{-k}}{1 - \zeta} \right). \quad (3.53)$$

Logo, levando-se em consideração a primeira igualdade em (3.47) e utilizando (3.51), (3.52) e (3.53), conclui-se que

$$\mathcal{M}[\zeta^{-k}] = \mu_k = 1 + \sum_{j=1}^k v_j = 1 + \mathcal{N} \left[ \sum_{j=1}^k \zeta^{-j} \right] = 1 - \mathcal{N} \left[ \frac{1 - \zeta^{-k}}{1 - \zeta} \right],$$

o que representa a igualdade (3.50).

Observe, também, que a partir das relações dadas em (3.47) tem-se

$$v_{-k} = \mu_{-k} - \mu_{-k-1}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

já que para  $k = 1, 2, \dots$ , vale

$$\mu_{-k} - \mu_{-k-1} = \mu_{-k} - \mu_{-(k+1)} = \left[ 1 - \sum_{j=1}^k v_{-j+1} \right] - \left[ 1 - \sum_{j=1}^{k+1} v_{-j+1} \right] = v_{-k},$$

para  $k = 0$  e  $k = -1$ , observa-se, respectivamente, que

$$\mu_0 - \mu_{-1} = 1 - \mu_{-1} = 1 - \left[ 1 - \sum_{j=1}^1 v_{-j+1} \right] = 1 - (1 - v_0) = v_0,$$

$$\mu_1 - \mu_0 = \mu_1 - 1 = \left[ 1 + \sum_{j=1}^1 v_j \right] - 1 = (1 + v_1) - 1 = v_1,$$

e, para  $k = -1, -2, \dots$ , fazendo-se  $w = -k = 2, 3, \dots$ , obtém-se

$$\mu_{-k} - \mu_{-k-1} = \mu_w - \mu_{w-1} = \left[ 1 + \sum_{j=1}^w v_j \right] - \left[ 1 + \sum_{j=1}^{w-1} v_j \right] = v_w = v_{-k}.$$

Consequentemente, os funcionais de momento  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$  (dados, respectivamente, por (3.38) e (3.49)) satisfazem

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[\zeta^k(1 - \zeta)] &= \mathcal{M}[\zeta^k - \zeta^{k+1}] = \mathcal{M}[\zeta^k] - \mathcal{M}[\zeta^{k+1}] = \mu_{-k} - \mu_{-(k+1)} \\ &= \mu_{-k} - \mu_{-k-1} = v_{-k} = \mathcal{N}[\zeta^k], \end{aligned}$$

isto é,

$$\mathcal{N}[\zeta^k] = \mathcal{M}[\zeta^k(1 - \zeta)], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.54)$$

Agora, considerando a decomposição parcial de  $A_n(z)/B_n(z)$ , tem-se

$$\frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \frac{R_n(z) - Q_n(z)}{(z-1)R_n(z)} = \frac{\lambda_{n,0}}{z-1} + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{n,j}}{z - z_{n,j}}, \quad (3.55)$$

onde  $z_{n,j}$ , para  $j = 1, 2, \dots, n$ , são os zeros de  $R_n(z)$ ,

$$\lambda_{n,0} = 1 - \frac{Q_n(1)}{R_n(1)} \quad \text{e} \quad \lambda_{n,j} = \frac{Q_n(z_{n,j})}{(1 - z_{n,j})R'_n(z_{n,j})}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.56)$$

De fato, a igualdade em (3.55) é válida se, e somente se,

$$1 - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \lambda_{n,0} + (z-1) \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{n,j}}{z - z_{n,j}}, \quad z \neq 1.$$

Logo, tomando o limite quando  $z$  tende para 1 em ambos os membros da igualdade acima chega-se a primeira relação em (3.56). De modo análogo, a relação (3.55) é verdadeira se, e somente se,

$$\frac{R_n(z) - Q_n(z)}{z-1} = R_n(z) \frac{\lambda_{n,0}}{z-1} + R_n(z) \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{n,j}}{z - z_{n,j}}, \quad z \neq z_{n,j}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

ou ainda,

$$\frac{R_n(z) - Q_n(z)}{z - 1} = R_n(z) \frac{\lambda_{n,0}}{z - 1} + [R_n(z) - R_n(z_{n,j})] \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{n,j}}{z - z_{n,j}}, \quad z \neq z_{n,j},$$

com  $j = 1, 2, \dots, n$ . Daí, como  $R_n(z_{n,j}) = 0$  para todo  $j = 1, 2, \dots, n$  (já que  $z_{n,j}$  com  $j = 1, 2, \dots, n$ , são os zeros de  $R_n(z)$ ), tomando o limite quando  $z$  tende para  $z_{n,j}$  em ambos os membros da última igualdade, obtém-se

$$\frac{Q_n(z_{n,j})}{(1 - z_{n,j})} = R'_n(z_{n,j}) \lambda_{n,j}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

o que equivale a segunda relação em (3.56).

Observe que da primeira igualdade em (3.56) e do Lema 3.5, segue imediatamente que

$$1 - d_1 = \lambda_{1,0} > \lambda_{2,0} > \dots > \lambda_{n,0} > \lambda_{n+1,0} > \dots$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,0} = M_0. \quad (3.57)$$

Além disso, da segunda igualdade em (3.56), considerando  $V_n(z)$  e  $U_n(z)$ , respectivamente, como em (3.7) e (3.22) (veja também (3.23)) e levando em consideração que  $R_n(z_{n,j}) = 0$  e  $R_{n-1}(z_{n,j}) \neq 0$  para todo  $j = 1, 2, \dots, n$  (veja Lema 3.1), é possível observar que, para  $j = 1, 2, \dots, n$ , vale

$$\lambda_{n,j} = \frac{Q_n(z_{n,j})}{(1 - z_{n,j})R'_n(z_{n,j})} = \frac{Q_n(z_{n,j})R_{n-1}(z_{n,j})}{(1 - z_{n,j})R'_n(z_{n,j})R_{n-1}(z_{n,j})} = \frac{U_n(z_{n,j})}{(1 - z_{n,j})V_n(z_{n,j})}.$$

Consequentemente, usando a relação (3.8) (obtida no Lema 3.3) e a relação (3.23), tem-se

$$\begin{aligned} \lambda_{n,j} &= \frac{U_n(z_{n,j})}{(1 - z_{n,j})V_n(z_{n,j})} \\ &= \frac{2^{2n-1}d_1d_2 \cdots d_n z_{n,j}^{n-1} z_{n,j}^{-(n-2)} 2^{-(2n-3)}}{(1 - z_{n,j})(z_{n,j} - 1)W_n(x_{n,j})} \\ &= \frac{4d_1d_2 \cdots d_n}{W_n(x_{n,j})} \frac{z_{n,j}}{(1 - z_{n,j})(z_{n,j} - 1)} > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Aqui, a positividade de  $\lambda_{n,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , segue do fato dos Wronskianos  $W_n(x)$ , definidos em (3.5), satisfazerem  $W_n(x_{n,j}) > 0$  nos zeros,  $x_{n,j}$ ,  $n \geq 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , de  $G_n(x)$  em  $[-1, 1]$  (veja (3.6)), do fato da sequência  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  ser tal que  $d_n > 0$ , para  $n \geq 1$  (já

que  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva) e do fato que, sendo  $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$ , então

$$\begin{aligned} \frac{z_{n,j}}{(1-z_{n,j})(z_{n,j}-1)} &= \frac{e^{i\theta_{n,j}}}{(1-e^{i\theta_{n,j}})(e^{i\theta_{n,j}}-1)} \frac{e^{i\theta_{n,j}}}{e^{i\theta_{n,j}}} = \frac{1}{-e^{i\theta_{n,j}}+2-e^{-i\theta_{n,j}}} \\ &= \frac{1}{-\cos(\theta_{n,j})-i\operatorname{sen}(\theta_{n,j})+2-\cos(-\theta_{n,j})-i\operatorname{sen}(-\theta_{n,j})} \\ &= \frac{1}{-\cos(\theta_{n,j})-i\operatorname{sen}(\theta_{n,j})+2-\cos(\theta_{n,j})+i\operatorname{sen}(\theta_{n,j})} \\ &= \frac{1}{2-2\cos(\theta_{n,j})} = \frac{1}{4\left[\frac{1}{2}-\frac{\cos(\theta_{n,j})}{2}\right]} = \frac{1}{4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_{n,j}}{2}\right)} > 0, \end{aligned}$$

para todo  $j = 1, 2, \dots, n$ , ( $n \geq 1$ ).

Além da positividade dos elementos  $\lambda_{n,j}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ , por considerar o limite de  $zA_n(z)/B_n(z)$ , quando  $z \rightarrow \infty$ , tem-se ainda

$$\sum_{j=0}^n \lambda_{n,j} = 1. \quad (3.58)$$

De fato, observe que, de (3.55), por um lado, vale

$$\frac{zA_n(z)}{B_n(z)} = \frac{z[R_n(z) - Q_n(z)]}{(z-1)R_n(z)} = \frac{R_n(z) - Q_n(z)}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)R_n(z)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)} - \frac{Q_n(z)}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)R_n(z)},$$

de onde segue que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{zA_n(z)}{B_n(z)} = 1 - \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = 1, \quad (3.59)$$

já que, de (3.26) e (3.28), tem-se  $\lim_{z \rightarrow \infty} [Q_n(z)/R_n(z)] = 0$ . Por outro lado, usando novamente (3.55), obtém-se

$$\frac{zA_n(z)}{B_n(z)} = \frac{\lambda_{n,0}}{(z-1)}z + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{n,j}}{z - z_{n,j}}z = \frac{\lambda_{n,0}}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)} + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\lambda_{n,j}}{1 - \frac{z_{n,j}}{z}} \right).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{zA_n(z)}{B_n(z)} &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{\lambda_{n,0}}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)} + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{n,j}}{1 - \frac{z_{n,j}}{z}} \right] \\ &= \lambda_{n,0} + \sum_{j=1}^n \lambda_{n,j} = \sum_{j=0}^n \lambda_{n,j}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

e o resultado em (3.58) segue, portanto, de (3.59), (3.60) e da unicidade do limite.

Agora, definindo-se funções escada  $\psi_n(e^{i\theta})$ ,  $n \geq 1$ , no intervalo  $[0, 2\pi]$ , por

$$\psi_n(e^{i\theta}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \theta = 0, \\ \lambda_{n,0}, & \text{se } 0 < \theta \leq \theta_{n,1}, \\ \sum_{j=0}^k \lambda_{n,j}, & \text{se } \theta_{n,k} < \theta \leq \theta_{n,k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ 1, & \text{se } \theta_{n,n} < \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

então, uma vez que  $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  ( $n \geq 1$ ), tem-se, da definição da integral de Riemann-Stieltjes e de (3.55), que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z - \zeta} d\psi_n(\zeta) = \frac{1}{z - e^{i\cdot 0}} \lambda_{n,0} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - e^{i\theta_{n,j}}} \lambda_{n,j} = \frac{\lambda_{n,0}}{z - 1} + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{n,j}}{z - z_{n,j}} = \frac{A_n(z)}{B_n(z)},$$

ou seja,

$$\frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z - \zeta} d\psi_n(\zeta), \quad n \geq 1. \quad (3.61)$$

Daí, aplicando o teorema de seleção de Helly (teorema 2.44), tem-se que existe uma subsequência  $\{n_j\}$  tal que  $\psi_{n_j}(e^{i\theta})$  converge para uma função limitada e não-decrescente em  $[0, 2\pi]$ . Denotando essa função por  $\mu(e^{i\theta})$ , como

$$\int_{\mathcal{C}} d\psi_n(\zeta) = \sum_{j=0}^n \lambda_{n,j} = 1 \quad (3.62)$$

(que segue da definição da integral de Riemann-Stieltjes e de (3.58)) e, como, considerando expansões em séries em torno da origem e do infinito, (3.43), (3.44) e (3.61), vale

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{z} + \frac{\mu_{-1}}{z^2} + \frac{\mu_{-2}}{z^3} + \dots + \frac{\mu_{-n}}{z^{n+1}} &= \frac{A_n(z)}{B_n(z)} \\ &= \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z - \zeta} d\psi_n(\zeta) = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} \left[ \frac{1}{1 - (\zeta/z)} \right] d\psi_n(\zeta) \\ &= \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} \left[ 1 + \frac{\zeta}{z} + \frac{\zeta^2}{z^2} + \dots \right] d\psi_n(\zeta) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{z^{j+1}} \int_{\mathcal{C}} \zeta^j d\psi_n(\zeta) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -\mu_1 - \mu_2 z - \mu_3 z^2 - \dots - \mu_n z^{n-1} &= \frac{A_n(z)}{B_n(z)} \\ &= \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z - \zeta} d\psi_n(\zeta) = - \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\zeta} \left[ \frac{1}{1 - (z/\zeta)} \right] d\psi_n(\zeta) \\ &= - \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\zeta} \left[ 1 + \frac{z}{\zeta} + \frac{z^2}{\zeta^2} + \dots \right] d\psi_n(\zeta) \\ &= - \sum_{j=0}^{\infty} z^j \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-(j+1)} d\psi_n(\zeta), \end{aligned}$$



de onde segue que

$$\int_{\mathcal{C}} \zeta^k d\psi_n(\zeta) = \mu_{-k}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \quad (3.63)$$

então, tomando o limite da subsequência  $\psi_{n_j}(e^{i\theta})$ , a qual converge para  $\mu(e^{i\theta})$ , tem-se, por (3.62) e (3.63), que

$$\int_{\mathcal{C}} d\mu(\zeta) = 1 = \mathcal{M}[1] \quad \text{e} \quad \int_{\mathcal{C}} \zeta^k d\mu(\zeta) = \mu_{-k} = \mathcal{M}[\zeta^k], \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.64)$$

onde  $\mathcal{M}$  é o funcional de momento definido em (3.49).

Finalmente, a partir de conhecidos resultados na literatura sobre problemas de momento no círculo unitário, pode-se concluir que  $\mu$  é a única medida de probabilidade que satisfaz as relações (3.64). Além disso, da construção estabelecida acima e da definição da integral de Riemann-Stieltjes, tem-se também que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\psi_n(\zeta) &= \sum_{j=1}^n f(z_{n,j}) \lambda_{n,j} + f(1) \lambda_{n,0} \\ &= \int_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\tilde{\psi}_n(\zeta) + f(1) \lambda_{n,0}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

onde  $\tilde{\psi}_n(e^{i\theta})$ ,  $n \geq 1$ , são funções escada no intervalo  $[0, 2\pi]$ , do tipo

$$\tilde{\psi}_n(e^{i\theta}) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < \theta \leq \theta_{n,1}, \\ \sum_{j=0}^k \lambda_{n,j}, & \text{se } \theta_{n,k} < \theta \leq \theta_{n,k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ 1, & \text{se } \theta_{n,n} < \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

que também (pelo teorema de seleção de Helly) possui uma subsequência  $\{\tilde{n}_j\}$  tal que  $\tilde{\psi}_{\tilde{n}_j}(e^{i\theta})$  converge para uma função limitada e não-decrescente em  $[0, 2\pi]$ , a qual será denotada por  $\tilde{\mu}(e^{i\theta})$ . Logo, tomando o limite na igualdade (3.65) quando  $n \rightarrow \infty$ , e levando em consideração que por (3.57),  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,0} = M_0$ , obtém-se

$$\int_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\mu(\zeta) = \int_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\tilde{\mu}(\zeta) + f(1)M_0,$$

de onde segue que a medida  $\mu$  tem um ponto puro de massa  $M_0$  em  $z = 1$ .

Observe também que a igualdade em (3.54), junto com as relações em (3.64), garantem que, para  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , vale

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[\zeta^{-n}] &= \mathcal{M}[\zeta^{-n}(1 - \zeta)] = \mathcal{M}[\zeta^{-n}] - \mathcal{M}[\zeta^{-n+1}] \\ &= \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} d\mu(\zeta) - \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n+1} d\mu(\zeta) = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n}(1 - \zeta) d\mu(\zeta), \end{aligned}$$

e isto conclui a prova do teorema. ■

### 3.5 Outras propriedades de $R_n(z)$ e os OPUC associados

Nessa seção apresenta-se algumas propriedades adicionais satisfeitas pelos polinômios  $R_n(z)$  que ajudarão a determinar a sequência de polinômios ortogonais associada à medida de probabilidade  $\mu$  obtida na seção anterior. Inicialmente, observe que do Teorema 3.8, tem-se

$$v_k = \mathcal{N}[\zeta^{-k}] = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-k}(1 - \zeta)d\mu(\zeta), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Daí, considerando  $R_n(\zeta) = \sum_{j=0}^n r_{n,j}\zeta^j$ , o Lema 3.6 garante que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n+k} R_n(\zeta)(1 - \zeta)d\mu(\zeta) &= \sum_{j=0}^n r_{n,j} \left[ \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n+k+j}(1 - \zeta)d\mu(\zeta) \right] \\ &= \sum_{j=0}^n r_{n,j} \mathcal{N}[\zeta^{-n+k+j}] = \mathcal{N} \left[ \sum_{j=0}^n r_{n,j} \zeta^{-n+k+j} \right] \\ &= \mathcal{N}[\zeta^{-n+k} R_n(\zeta)] \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.66}$$

para  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ , com  $n \geq 1$ .

O seguinte lema relaciona os valores das integrais  $\int_{\mathcal{C}} R_n(\zeta)d\mu(\zeta)$  com a sequência de parâmetros minimal da sequência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

**Lema 3.9** *Seja  $\hat{\gamma}_n = \int_{\mathcal{C}} R_n(\zeta)d\mu(\zeta)$ , com  $n \geq 0$ . Então*

$$\hat{\gamma}_0 = 1 \quad e \quad \hat{\gamma}_n = 2(1 - m_n)\hat{\gamma}_{n-1}, \quad n \geq 1, \tag{3.67}$$

onde  $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$  é a sequência de parâmetros minimal da sequência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

**Demonstração:** Primeiro observe que, sendo  $R_0(\zeta) = 1$ , usando a definição de  $\hat{\gamma}_n$  e o fato de  $\mu$  ser uma medida de probabilidade (veja primeira igualdade em (3.64)), tem-se

$$\hat{\gamma}_0 = \int_{\mathcal{C}} R_0(\zeta)d\mu(\zeta) = \int_{\mathcal{C}} d\mu(\zeta) = 1,$$

o que garante a primeira parte de (3.67). Por outro lado, sendo  $R_1(z) = (1+ic_1)z+(1-ic_1)$ , usando a definição de  $\hat{\gamma}_n$  e a relação da medida  $\mu$  com sua respectiva sequência de momentos  $\{\mu_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  (dada em (3.64)), obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_1 &= \int_{\mathcal{C}} R_1(\zeta)d\mu(\zeta) = \int_{\mathcal{C}} [(1+ic_1)\zeta + (1-ic_1)]d\mu(\zeta) \\ &= (1+ic_1) \int_{\mathcal{C}} \zeta d\mu(\zeta) + (1-ic_1) \int_{\mathcal{C}} d\mu(\zeta) \\ &= (1+ic_1)\mu_{-1} + (1-ic_1). \end{aligned} \tag{3.68}$$

Mas, da segunda igualdade em (3.47) e das relações entre as sequências  $\{\gamma_n\}_{n=0}^\infty$ ,  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  (dadas no enunciado do Lema 3.6), sabe-se, respectivamente, que

$$\mu_{-1} = 1 - \sum_{j=1}^1 v_{-j+1} = 1 - v_0 \quad \text{e} \quad v_0 = 2d_1/(1 + ic_1).$$

Logo, uma vez que  $m_1 = d_1$  (pois  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$  é a sequência de parâmetros minimal para  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ ), a igualdade (3.68) pode ser reescrita como

$$\hat{\gamma}_1 = (1 + ic_1) \left( 1 - \frac{2d_1}{1 + ic_1} \right) + (1 - ic_1) = 2(1 - d_1) = 2(1 - m_1), \quad (3.69)$$

e isto mostra a segunda parte de (3.67) para  $n = 1$ .

Para provar os demais casos de (3.67), observe inicialmente que, a partir de (3.66) com  $k = n - 1$ , tem-se

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-1} R_n(\zeta) (1 - \zeta) d\mu(\zeta) &= \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-1} R_n(\zeta) d\mu(\zeta) - \int_{\mathcal{C}} R_n(\zeta) d\mu(\zeta) \\ &= \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-1} R_n(\zeta) d\mu(\zeta) - \hat{\gamma}_n, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\hat{\gamma}_n = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-1} R_n(\zeta) d\mu(\zeta).$$

Daí, fazendo  $k = n - 2$  em (3.66) e usando a igualdade anterior, obtém-se

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-2} R_n(\zeta) (1 - \zeta) d\mu(\zeta) &= \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-2} R_n(\zeta) d\mu(\zeta) - \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-1} R_n(\zeta) d\mu(\zeta) \\ &= \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-2} R_n(\zeta) d\mu(\zeta) - \hat{\gamma}_n, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\hat{\gamma}_n = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-2} R_n(\zeta) d\mu(\zeta).$$

Logo, continuando o processo acima para  $k = n - 3, n - 4, \dots, 0$ , pode-se concluir que

$$\hat{\gamma}_n = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-j} R_n(\zeta) d\mu(\zeta), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad n \geq 1. \quad (3.70)$$

Conseqüentemente, utilizando a fórmula de recorrência de três termos (3.1), é possível observar que, para  $n \geq 1$ , tem-se

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{n+1} = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-1} R_{n+1}(\zeta) d\mu(\zeta) &= \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-1} [(1 + ic_{n+1})\zeta + (1 - ic_{n+1})] R_n(\zeta) d\mu(\zeta) \\ &\quad - 4d_{n+1} \int_{\mathcal{C}} R_{n-1}(\zeta) d\mu(\zeta), \\ &= (1 + ic_{n+1}) \int_{\mathcal{C}} R_n(\zeta) d\mu(\zeta) + (1 - ic_{n+1}) \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-1} R_n d\mu(\zeta) \\ &\quad - 4d_{n+1} \int_{\mathcal{C}} R_{n-1}(\zeta) d\mu(\zeta) \\ &= (1 + ic_{n+1})\hat{\gamma}_n + (1 - ic_{n+1})\hat{\gamma}_n - 4d_{n+1}\hat{\gamma}_{n-1}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\hat{\gamma}_{n+1} = 2\hat{\gamma}_n - 4d_{n+1}\hat{\gamma}_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (3.71)$$

Agora, observe a igualdade (3.71) é equivalente a

$$\begin{aligned} d_{1,n} &= d_{n+1} = \frac{2\hat{\gamma}_n - \hat{\gamma}_{n+1}}{4\hat{\gamma}_{n-1}} = \frac{\hat{\gamma}_n}{2\hat{\gamma}_{n-1}} \frac{\left(2 - \frac{\hat{\gamma}_{n+1}}{\hat{\gamma}_n}\right)}{2} \\ &= \frac{\hat{\gamma}_n}{2\hat{\gamma}_{n-1}} \left(1 - \frac{\hat{\gamma}_{n+1}}{2\hat{\gamma}_n}\right) = (1 - g_n)g_{n+1}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (3.72)$$

onde

$$g_n := 1 - \frac{\hat{\gamma}_n}{2\hat{\gamma}_{n-1}}, \quad n \geq 1. \quad (3.73)$$

Logo, usando (3.69), obtém-se

$$1 - g_1 = \frac{\hat{\gamma}_1}{2\hat{\gamma}_0} = \frac{2(1 - m_1)}{2.1} = 1 - m_1,$$

e, portanto,  $g_1 = m_1$ . Mas, do fato da sequência de parâmetros minimal de uma sequência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  ser ainda uma sequência de parâmetros da sequência encadeada positiva  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty$  (veja Teorema 2.35), obtém-se, de (3.72), a seguinte igualdade

$$(1 - m_1)m_2 = d_{1,1} = (1 - g_1)g_2,$$

de onde segue que  $g_2 = m_2$ . Seguindo sucessivamente esse processo é possível concluir que  $g_n = m_n$  para todo  $n \geq 1$ , o que garante por (3.73) que

$$1 - \frac{\hat{\gamma}_n}{2\hat{\gamma}_{n-1}} = m_n, \quad n \geq 1,$$

ou, equivalentemente,

$$\hat{\gamma}_n = 2(1 - m_n)\hat{\gamma}_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

o que conclui a prova do lema. ■

Agora, como consequência imediata do Lema 3.9 (veja também (3.70)), tem-se

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{C}} \overline{\zeta^k} [R_n(\zeta) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(\zeta)] d\mu(\zeta) \\ &= \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-k} R_n(\zeta) d\mu(\zeta) - 2(1 - m_n) \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-k} R_{n-1}(\zeta) d\mu(\zeta) \\ &= \hat{\gamma}_n - 2(1 - m_n)\hat{\gamma}_{n-1} \\ &= \hat{\gamma}_n - \hat{\gamma}_n \\ &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Daí, usando o fato de  $R_n(z) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(z)$  ser um polinômio de grau exatamente  $n$  com o coeficiente do termo de maior grau,  $r_{n,n}$ , sendo  $r_{n,n} = \prod_{k=1}^n (1 + ic_k)$  (veja (3.21)), é possível estabelecer o seguinte teorema (o qual fornece a respectiva sequência de polinômios ortogonais em relação à medida  $\mu$  obtida na seção anterior):

**Teorema 3.10** *Se a sequência de polinômios  $\{S_n\}$  é tal que*

$$S_0(z) = 1 \quad e \quad S_n(z) \prod_{k=1}^n (1 + ic_k) = R_n(z) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(z), \quad \text{com } n \geq 1,$$

então  $\{S_n(z)\}_{n=0}^\infty$  é a sequência de OPUC mônicos com relação a medida  $\mu(z)$ .

**Demonstração:** De fato, uma vez que  $S_0(z) = 1 \neq 0$  e

$$S_n(z) = \frac{R_n(z) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(z)}{\prod_{k=1}^n (1 + ic_k)} \neq 0, \quad n \geq 1,$$

tem-se

$$\int_{\mathcal{C}} S_n(z) \overline{S_n(z)} d\mu(z) = \int_{\mathcal{C}} |S_n(z)|^2 d\mu(z) = \|S_n\|^2 \neq 0, \quad n \geq 0.$$

Além disso, como  $S_m(z)$  é um polinômio mônico de grau exatamente  $m$ , fazendo  $S_m(z) := \sum_{j=0}^m b_{m,j} z^j$ ,  $b_{m,j} \in \mathbb{C}$  ( $b_{m,m} = 1$ ),  $m \geq 0$ , pode-se observar, por (3.74), que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} S_n(z) \overline{S_m(z)} d\mu(z) &= \int_{\mathcal{C}} \overline{S_m(z)} S_n(z) d\mu(z) = \int_{\mathcal{C}} \overline{\sum_{j=0}^m b_{m,j} z^j} S_n(z) d\mu(z) \\ &= \sum_{j=0}^m \bar{b}_{m,j} \int_{\mathcal{C}} \bar{z}^j S_n(z) d\mu(z) \\ &= \frac{1}{\prod_{k=1}^n (1 + ic_k)} \sum_{j=0}^m \bar{b}_{m,j} \int_{\mathcal{C}} \bar{z}^j [R_n(z) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(z)] d\mu(z) \\ &= 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

de onde segue pela Definição 2.17 que  $\{S_n(z)\}_{n=0}^\infty$  é a sequência de polinômios ortogonais mônicos, no círculo unitário, com relação a medida  $\mu(z)$ . ■

**Observação 3.11** *Do teorema acima, e levando-se em consideração que se  $R_n(z) = \sum_{j=0}^n r_{n,j} z^j$ , então, para  $n \geq 1$ ,  $r_{n,n} = \bar{r}_{n,0} = \prod_{k=1}^n (1 + ic_k)$  (veja (3.21)), pode-se afirmar que os coeficientes de Verblunsky associados à medida  $\mu$ , isto é,  $\alpha_{n-1} = -\overline{S_n(0)}$ , com  $n \geq 1$ , são dados por*

$$\alpha_{n-1} = \frac{1 - 2m_n - ic_n}{1 + ic_n} \prod_{k=1}^n \frac{1 + ic_k}{1 - ic_k}, \quad n \geq 1.$$

De fato, para  $n \geq 1$ , tem-se

$$\begin{aligned}
\alpha_{n-1} &= -\overline{S_n(0)} = -\frac{\overline{[R_n(0) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(0)]}}{\prod_{k=1}^n (1 - ic_k)} = -\frac{\overline{[r_{n,0} - 2(1 - m_n)r_{n-1,0}]}}{\prod_{k=1}^n (1 - ic_k)} \\
&= \frac{-\bar{r}_{n,0} + 2(1 - m_n)\bar{r}_{n-1,0}}{\prod_{k=1}^n (1 - ic_k)} = \frac{-\prod_{k=1}^n (1 + ic_k) + 2(1 - m_n) \prod_{k=1}^{n-1} (1 + ic_k)}{\prod_{k=1}^n (1 - ic_k)} \\
&= \frac{-\prod_{k=1}^n (1 + ic_k) + 2(1 - m_n) \frac{\prod_{k=1}^n (1 + ic_k)}{(1 + ic_n)}}{\prod_{k=1}^n (1 - ic_k)} = \frac{-1 + \frac{2(1 - m_n)}{(1 + ic_n)}}{\frac{\prod_{k=1}^n (1 - ic_k)}{\prod_{k=1}^n (1 + ic_k)}} \\
&= \frac{1 - 2m_n - ic_n}{1 + ic_n} \prod_{k=1}^n \frac{1 + ic_k}{1 - ic_k}.
\end{aligned}$$

### 3.6 Um exemplo

Essa seção é dedicada à apresentação de um exemplo que ilustra os principais resultados obtidos neste capítulo (onde foi estabelecido o objetivo principal desse trabalho).

Sejam  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  seqüências reais tais que

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{\eta}{\lambda + n}, \quad n \geq 1 \\
d_1 &= d_1(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1} \right) (1 - t), \quad d_{n+1} = \frac{1}{4} \frac{n(2\lambda + n + 1)}{(\lambda + n)(\lambda + n + 1)}, \quad n \geq 1,
\end{aligned} \tag{3.75}$$

onde  $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > -1/2$  e  $0 \leq t < 1$ .

Observe que, como verificado em [11],  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma seqüência encadeada positiva com sua seqüência de parâmetros maximal  $\{M_n^{(t)}\}_{n=0}^\infty$  dada por

$$M_0^{(t)} = t, \quad M_n^{(t)} = \frac{1}{2} \left( \frac{2\lambda + n}{\lambda + n} \right), \quad n \geq 1. \tag{3.76}$$

Foi mostrado primeiro em [30] (veja ainda [11]) que os polinômios  $R_n$  obtidos das seqüências  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  (dadas por (3.75)) e da fórmula de recorrência (3.1), são

$$R_n(z) = \frac{(2\lambda + 2)_n}{(\lambda + 1)_n} {}_2F_1(-n, b + 1; b + \bar{b} + 2; 1 - z), \quad n \geq 1, \tag{3.77}$$

onde  $b = \lambda + i\eta$  e  ${}_2F_1(\tilde{a}, \tilde{b}; \tilde{c}; \tilde{z})$  é a função hipergeométrica definida na Seção 2.5. Isto segue da relação contígua de Gauss (veja [4], Eq.(2.5.16))

$$(c - a) {}_2F_1(a - 1, b; c; z) = (c - 2a - (b - a)z) {}_2F_1(a, b; c; z) + a(1 - z) {}_2F_1(a + 1, b; c; z),$$

substituindo-se  $a$  por  $-n$ ,  $b$  por  $b + 1$ ,  $c$  por  $b + \bar{b} + 2$  e  $z$  por  $1 - z$ .

Agora, considere as funções racionais  $Q_n/R_n$ , com  $n \geq 1$ , dada pela expressão em fração contínua

$$\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \cfrac{2d_1}{(1+ic_1)z + (1-ic_1)} - \cfrac{4d_2z}{(1+ic_2)z + (1-ic_2)} - \dots - \cfrac{4d_nz}{(1+ic_n)z + (1-ic_n)}. \quad (3.78)$$

Pelo Lema 3.5, a sequência crescente  $\{Q_n(1)/R_n(1)\}_{n=1}^{\infty}$  satisfaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(1)}{R_n(1)} = 1 - M_0^{(t)} = 1 - t.$$

Para obter as expansões em série de potência associadas às funções racionais  $Q_n(z)/R_n(z)$ , escreve-se a expressão em fração contínua (3.78) na forma equivalente

$$\frac{(1-ic_1)Q_n(z)}{2d_1R_n(z)} = \cfrac{1}{1+b_1z} - \cfrac{a_2z}{1+b_2z} - \dots - \cfrac{a_nz}{1+b_nz}, \quad (3.79)$$

onde, para  $n \geq 1$ ,

$$b_n = \frac{1+ic_n}{1-ic_n} = \frac{b+n}{\bar{b}+n} \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \frac{4d_{n+1}}{(1-ic_n)(1-ic_{n+1})} = \frac{n(b+\bar{b}+n+1)}{(\bar{b}+n)(\bar{b}+n+1)}. \quad (3.80)$$

De fato, de (3.78) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} &= \cfrac{2d_1}{(1-ic_1) \left[ 1 + z \frac{(1+ic_1)}{(1-ic_1)} \right]} - \cfrac{4d_2z}{(1-ic_2) \left[ 1 + z \frac{(1+ic_2)}{(1-ic_2)} \right]} - \dots \\ &\quad \dots - \cfrac{4d_{n-1}z}{(1-ic_{n-1}) \left[ 1 + z \frac{(1+ic_{n-1})}{(1-ic_{n-1})} \right]} - \cfrac{4d_nz}{(1-ic_n) \left[ 1 + z \frac{(1+ic_n)}{(1-ic_n)} \right]} \\ &= \cfrac{2d_1}{(1-ic_1) \left[ 1 + z \frac{(1+ic_1)}{(1-ic_1)} \right]} - \cfrac{4d_2z}{(1-ic_2) \left[ 1 + z \frac{(1+ic_2)}{(1-ic_2)} \right]} - \dots \\ &\quad \dots - \cfrac{4d_{n-1}z}{(1-ic_{n-1}) \left[ 1 + z \frac{(1+ic_{n-1})}{(1-ic_{n-1})} \right]} - \cfrac{4d_nz}{(1-ic_n) \left[ 1 + z \frac{(1+ic_n)}{(1-ic_n)} \right]} \\ &= \cfrac{2d_1}{(1-ic_1) \left[ 1 + z \frac{(1+ic_1)}{(1-ic_1)} \right]} - \cfrac{4d_2z}{(1-ic_2) \left[ 1 + z \frac{(1+ic_2)}{(1-ic_2)} \right]} - \dots \\ &\quad \dots - \cfrac{4d_{n-1}z}{(1-ic_{n-1}) \left[ 1 + z \frac{(1+ic_{n-1})}{(1-ic_{n-1})} \right]} - \cfrac{4d_nz}{(1-ic_n) \left[ 1 + z \frac{(1+ic_n)}{(1-ic_n)} \right]} \\ &= \cfrac{2d_1}{(1-ic_1) \left[ 1 + z \frac{(1+ic_1)}{(1-ic_1)} \right]} - \cfrac{4d_2z}{(1-ic_2) \left[ 1 + z \frac{(1+ic_2)}{(1-ic_2)} \right]} - \dots \\ &\quad \dots - \cfrac{4d_{n-1}z}{(1-ic_{n-1}) \left[ 1 + z \frac{(1+ic_{n-1})}{(1-ic_{n-1})} \right]} - \cfrac{4d_nz}{(1-ic_n)(1-ic_{n-1}) \left[ 1 + z \frac{(1+ic_n)}{(1-ic_n)} \right]} \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}
\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} &= \left[ \frac{2d_1}{(1-ic_1) \left[ 1 + z \frac{(1+ic_1)}{(1-ic_1)} - \frac{4d_2z}{(1-ic_2)(1-ic_1) \left[ 1 + z \frac{(1+ic_2)}{(1-ic_2)} \right]} \right]} \right] \dots \\
&\dots - \left[ \frac{4d_{n-1}z}{(1-ic_{n-1}) \left[ 1 + z \frac{(1+ic_{n-1})}{(1-ic_{n-1})} - \frac{4d_nz}{(1-ic_n)(1-ic_{n-1}) \left[ 1 + z \frac{(1+ic_n)}{(1-ic_n)} \right]} \right]} \right] \\
&= \left[ \frac{2d_1}{(1-ic_1) \left[ 1 + b_1z - \frac{a_2z}{1+b_2z} \right]} \right] \dots - \left[ \frac{4d_{n-1}z}{(1-ic_{n-1}) \left[ 1 + b_{n-1}z - \frac{a_nz}{1+b_nz} \right]} \right] \\
&= \frac{2d_1}{(1-ic_1)} \left[ \frac{1}{1+b_1z} - \frac{a_2z}{1+b_2z} - \dots - \frac{a_{n-1}z}{1+b_{n-1}z} - \frac{a_nz}{1+b_nz} \right].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{(1-ic_1)Q_n(z)}{2d_1R_n(z)} = \frac{1}{1+b_1z} - \frac{a_2z}{1+b_2z} - \dots - \frac{a_{n-1}z}{1+b_{n-1}z} - \frac{a_nz}{1+b_nz}.$$

Assim, é possível obter as expansões em séries de potências, em torno da origem, das funções racionais no primeiro membro de (3.79) a partir de

$$\Omega_0(b; z) = \frac{1}{1+b_1z} - \frac{a_2z}{1+b_2z} - \dots - \frac{a_{n-1}z}{1+b_{n-1}z} - \frac{a_nz}{1+b_nz - a_{n+1}z\Omega_n(b; z)}. \quad (3.81)$$

onde

$$\Omega_n(b; z) = \frac{{}_2F_1(n+1, -b; \bar{b} + n + 2; z)}{{}_2F_1(n, -b; \bar{b} + n + 1; z)}, \quad n \geq 0. \quad (3.82)$$

A relação acima segue da relação contígua de Gauss (veja [4], Eq.(2.5.3))

$$\begin{aligned}
{}_2F_1(a, b; c; z) &= \left( 1 + \frac{a-b+1}{c}z \right) {}_2F_1(a+1, b; c+1; z) \\
&\quad - \frac{(a+1)(c-b+1)}{c(c+1)}z {}_2F_1(a+2, b; c+2; z),
\end{aligned}$$

com a substituição de  $a$ ,  $b$  e  $c$  por  $n$ ,  $-b$  e  $\bar{b} + n + 1$ , respectivamente.

De fato, fazendo essas substituições na equação acima obtém-se

$$\begin{aligned}
{}_2F_1(n, -b; \bar{b} + n + 1; z) &= \left( 1 + \frac{n+b+1}{\bar{b} + n + 1}z \right) {}_2F_1(n+1, -b; \bar{b} + n + 2; z) \\
&\quad - \frac{(n+1)(\bar{b} + n + b + 2)}{(\bar{b} + n + 1)(\bar{b} + n + 2)}z {}_2F_1(n+2, -b; \bar{b} + n + 3; z),
\end{aligned}$$



implicando, por (3.80), que

$$\begin{aligned} {}_2F_1(n, -b; \bar{b} + n + 1; z) &= (1 + b_{n+1}z) {}_2F_1(n + 1, -b; \bar{b} + n + 2; z) \\ &\quad - a_{n+2}z {}_2F_1(n + 2, -b; \bar{b} + n + 3; z). \end{aligned}$$

Agora dividindo ambos os membros desta última equação por  ${}_2F_1(n + 1, -b; \bar{b} + n + 2; z)$ , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega_n(b; z)} &= \frac{{}_2F_1(n, -b; \bar{b} + n + 1; z)}{{}_2F_1(n + 1, -b; \bar{b} + n + 2; z)} \\ &= (1 + b_{n+1}z) - a_{n+2}z \frac{{}_2F_1(n + 2, -b; \bar{b} + n + 3; z)}{{}_2F_1(n + 1, -b; \bar{b} + n + 2; z)} \\ &= (1 + b_{n+1}z) - a_{n+2}z \Omega_{n+1}(b; z), \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\Omega_n(b; z) = \frac{1}{(1 + b_{n+1}z) - a_{n+2}z \Omega_{n+1}(b; z)}, \quad n \geq 0.$$

Desse modo, a série  $\Omega_n(b; z)$  fica definida de forma recursiva e, conseqüentemente, a partir de  $\Omega_0(b; z)$  (dado em (3.81)) pode-se obter as expansões em séries de potências, em torno da origem, das funções racionais  $[(1 - ic_1)Q_n(z)]/[2d_1R_n(z)]$ . Ora, sendo (veja (3.82))

$$\Omega_0(b; z) = \frac{{}_2F_1(1, -b; \bar{b} + 2; z)}{{}_2F_1(0, -b; \bar{b} + 1; z)} = {}_2F_1(1, -b; \bar{b} + 2; z),$$

já que

$${}_2F_1(0, -b; \bar{b} + 1; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0)_n (-b)_n z^n}{(\bar{b} + 1)_n n!} = 1 + 0 = 1,$$

de (3.79) e (3.81), obtém-se

$$\frac{(1 - ic_1)Q_n(z)}{2d_1R_n(z)} \sim \Omega_0(b; z) = {}_2F_1(1, -b; \bar{b} + 2; z),$$

de onde segue que

$$\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} \sim \frac{2d_1}{1 - ic_1} {}_2F_1(1, -b; \bar{b} + 2; z) = -v_1 - v_2z - v_3z^2 - \dots$$

Conseqüentemente, tem-se

$$v_n = \frac{b + \bar{b} + 1}{b + 1} \frac{(-b - 1)_n}{(\bar{b} + 1)_n} (1 - t), \quad n \geq 1, \quad (3.83)$$

já que, por (3.75), sendo  $b = \lambda + i\eta$ , chega-se a igualdade

$$\frac{2d_1}{1 - ic_1} = \frac{b + \bar{b} + 1}{\bar{b} + 1} (1 - t),$$

e das definições apresentadas na Seção 2.5 para símbolo de Pochhammer e função hipergeométrica, vale

$$\begin{aligned} {}_2F_1(1, -b; \bar{b} + 2; z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n (-b)_n}{(\bar{b} + 2)_n n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! (-b)_n}{(\bar{b} + 2)_n n!} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-b)_n}{(\bar{b} + 2)_n} z^n \\ &= -\frac{\bar{b} + 1}{b + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-b - 1)_{n+1}}{(\bar{b} + 1)_{n+1}} z^n, \end{aligned}$$

e isto garante que

$$\begin{aligned} -\sum_{n=0}^{\infty} v_{n+1} z^n &= -v_1 - v_2 z - v_3 z^2 - \dots \\ &= \frac{2d_1}{1 - ic_1} {}_2F_1(1, -b; \bar{b} + 2; z) \\ &= \left[ \frac{b + \bar{b} + 1}{\bar{b} + 1} (1 - t) \right] \left[ \frac{-\bar{b} + 1}{b + 1} \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-b - 1)_{n+1}}{(\bar{b} + 1)_{n+1}} z^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{b + \bar{b} + 1}{b + 1} \frac{(-b - 1)_{n+1}}{(\bar{b} + 1)_{n+1}} \right] (1 - t) z^n, \end{aligned}$$

de onde segue a igualdade em (3.83) por comparação dos respectivos coeficientes de  $z^n$  para  $n \geq 0$ .

Observe que pelas propriedades da função gama fornecidas na Seção 2.5, tem-se

$$\begin{aligned} \Gamma(a + n) &= (a + n - 1)\Gamma(a + n - 1) \\ &= (a + n - 1)(a + n - 2)\Gamma(a + n - 2) \\ &\quad \vdots \\ &= (a + n - 1)(a + n - 2) \dots a\Gamma(a) \\ &= (a)_n \Gamma(a). \end{aligned}$$

Logo, do resultado estabelecido em (3.29) (veja Seção 3.3), isto é, de  $v_n = -\bar{v}_{-n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , com a convenção  $(a)_n := \Gamma(a + n)/\Gamma(a)$  para todo os valores inteiros de  $n$ , a expressão para  $v_n$ , dada em (3.83), é válida, também, para  $n \leq 0$ .

O próximo passo desse exemplo é mostrar que

$$v_n = \mathcal{N}[\zeta^{-n}] = \int_c \zeta^{-n} d\psi(t, b; \zeta), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.84)$$

onde

$$d\psi(t, b; z) = \frac{-i|\Gamma(b + 1)|^2(1 - t)}{2\pi\Gamma(b + \bar{b} + 1)} (-z)^{-\bar{b}-1} (1 - z)^{b+\bar{b}+1} dz.$$

Aqui, os cortes de ramo em  $(-z)^{-\bar{b}} = (e^{-i\pi}z)^{-\bar{b}}$  e em  $(1-z)^{b+\bar{b}} = (e^{-i\pi}(z-1))^{b+\bar{b}}$  são ao longo do eixo real positivo.

Antes de verificar (3.84), observe que (3.84) pode ainda ser escrita na forma equivalente

$$v_n = \frac{2^{b+\bar{b}+1}|\Gamma(b+1)|^2(1-t)}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} e^{-i\theta/2} e^{(\pi-\theta)\mathcal{I}m(b)} [\text{sen}^2(\theta/2)]^{\mathcal{R}e(b)+1/2} d\theta. \quad (3.85)$$

Com efeito, de (3.84), tem-se

$$\begin{aligned} v_n &= \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2(1-t)}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} (-\zeta)^{-\bar{b}-1} (1-\zeta)^{b+\bar{b}+1} d\zeta \\ &= \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2(1-t)}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} (-\zeta)^{-\bar{b}-1} (1-\zeta)^{b+\bar{b}+1} d\zeta \\ &= \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2(1-t)}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} (e^{-i\pi}e^{i\theta})^{-\bar{b}-1} [e^{-i\pi}(e^{i\theta}-1)]^{b+\bar{b}+1} d\theta. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Mas,

$$\begin{aligned} &(e^{-i\pi}e^{i\theta})^{-\bar{b}-1} [e^{-i\pi}(e^{i\theta}-1)]^{b+\bar{b}+1} \\ &= [e^{(\theta-\pi)i}]^{-\bar{b}-1} [e^{-i\pi}(e^{i\theta}-1)]^{b+\bar{b}+1} \\ &= [e^{(\theta-\pi)i}]^{-\mathcal{R}e(b)+i\mathcal{I}m(b)-1} [e^{-i\pi}(e^{i\theta}-1)]^{2\mathcal{R}e(b)+1} \\ &= [e^{(\pi-\theta)}]^{\mathcal{I}m(b)} [e^{i(\pi-\theta)}]^{\mathcal{R}e(b)+1} [e^{-i\pi}(e^{i\theta}-1)]^{2\mathcal{R}e(b)+1}, \end{aligned} \quad (3.87)$$

onde

$$\begin{aligned} &[e^{i(\pi-\theta)}]^{\mathcal{R}e(b)+1} [e^{-i\pi}(e^{i\theta}-1)]^{2\mathcal{R}e(b)+1} \\ &= [\cos(\pi-\theta) + i\text{sen}(\pi-\theta)]^{\mathcal{R}e(b)+1} [(\cos\pi - i\text{sen}\pi)(e^{i\theta}-1)]^{2\mathcal{R}e(b)+1} \\ &= [-(\cos\theta - i\text{sen}\theta)]^{\mathcal{R}e(b)+1} [-(e^{i\theta}-1)]^{2\mathcal{R}e(b)+1} \\ &= (-1)^{3\mathcal{R}e(b)+2} (e^{-i\theta})^{\mathcal{R}e(b)+1} [e^{i\theta}(1-e^{-i\theta})]^{2\mathcal{R}e(b)+1} \\ &= (-1)^{\mathcal{R}e(b)} (e^{i\theta})^{\mathcal{R}e(b)} (1-e^{-i\theta})^{2\mathcal{R}e(b)+1} \\ &= (-1)^{\mathcal{R}e(b)} [e^{i(\theta/2)}]^{2\mathcal{R}e(b)} (1-e^{-i\theta})^{2\mathcal{R}e(b)+1} \\ &= (-1)^{\mathcal{R}e(b)} [e^{i(\theta/2)}]^{-1} [e^{i(\theta/2)}(1-e^{-i\theta})]^{2\mathcal{R}e(b)+1} \\ &= (-1)^{\mathcal{R}e(b)} e^{-i(\theta/2)} [e^{i(\theta/2)} - e^{-i(\theta/2)}]^{2\mathcal{R}e(b)+1} \\ &= (-1)^{\mathcal{R}e(b)} e^{-i(\theta/2)} [2i\text{sen}(\theta/2)]^{2\mathcal{R}e(b)+1} \\ &= (-1)^{\mathcal{R}e(b)} (-1)^{\mathcal{R}e(b)} i^{2\mathcal{R}e(b)+1} e^{-i(\theta/2)} [\text{sen}^2(\theta/2)]^{\mathcal{R}e(b)+1/2} \\ &= i^{2b+\bar{b}+1} e^{-i(\theta/2)} [\text{sen}^2(\theta/2)]^{\mathcal{R}e(b)+1/2}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Assim, substituindo-se (3.88) em (3.87) e, depois, esse novo resultado, em (3.86), obtém-se a igualdade desejada (3.85).

Agora, para mostrar (3.84), inicia-se verificando a igualdade para  $v_{-n}$  tomando valores de  $n$  tais que  $\mathcal{R}e(n - \bar{b}) > 0$ . Ora, uma vez que  $v_n = -\bar{v}_{-n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , isto é, e  $v_{-n} = -\bar{v}_{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , segue de (3.83) que

$$\begin{aligned}
\frac{v_{-n}}{(1-t)} &= -\frac{\bar{v}_{n+1}}{(1-t)} = -\overline{\left[ \frac{b + \bar{b} + 1}{b + 1} \frac{(-b - 1)_{n+1}}{(\bar{b} + 1)_{n+1}} \right]} \\
&= -\overline{\left[ \frac{b + \bar{b} + 1}{b + 1} \frac{\Gamma(-b - 1 + n + 1)}{\Gamma(-b - 1)} \frac{\Gamma(\bar{b} + 1)}{\Gamma(\bar{b} + 1 + n + 1)} \right]} = -\overline{\left[ \frac{b + \bar{b} + 1}{b + 1} \frac{\Gamma(-b + n)\Gamma(\bar{b} + 1)}{\Gamma(\bar{b} + n + 2)\Gamma(-b - 1)} \right]} \\
&= -\overline{\left[ \frac{b + \bar{b} + 1}{-(-b - 1)} \frac{\Gamma(-b + n)\Gamma(\bar{b} + 1)}{\Gamma(-b - 1)\Gamma(\bar{b} + n + 2)} \right]} = -\overline{\left[ (b + \bar{b} + 1) \frac{\Gamma(-b + n)\Gamma(\bar{b} + 1)}{-\Gamma(-b)\Gamma(\bar{b} + n + 2)} \right]} \\
&= -\overline{\left[ (b + \bar{b} + 1) \frac{\Gamma(-b + n)\Gamma(\bar{b} + 1)b}{-b\Gamma(-b)\Gamma(\bar{b} + n + 2)} \right]} = -\overline{\left[ (b + \bar{b} + 1) \frac{\Gamma(-b + n)\Gamma(\bar{b} + 1)b}{\Gamma(1 - b)\Gamma(\bar{b} + n + 2)} \right]} \\
&= -\overline{\left[ (b + \bar{b} + 1) \frac{\Gamma(-b + n)\Gamma(\bar{b} + 1)b\Gamma(b)}{\Gamma(b)\Gamma(1 - b)\Gamma(\bar{b} + n + 2)} \right]} = -\overline{\left[ (b + \bar{b} + 1) \frac{\Gamma(-b + n)\Gamma(\bar{b} + 1)\Gamma(b + 1)}{\Gamma(b)\Gamma(1 - b)\Gamma(\bar{b} + n + 2)} \right]} \\
&= -(\bar{b} + b + 1) \frac{\Gamma(-\bar{b} + n)\Gamma(b + 1)\overline{\Gamma(\bar{b} + 1)}}{\Gamma(\bar{b})\Gamma(1 - \bar{b})\Gamma(b + n + 2)} = -(\bar{b} + b + 1) \frac{\Gamma(-\bar{b} + n)|\Gamma(b + 1)|^2}{\Gamma(\bar{b})\Gamma(1 - \bar{b})\Gamma(b + n + 2)}.
\end{aligned}$$

Mas, utilizando a fórmula de reflexão de Euler, (2.33), tem-se que

$$\begin{aligned}
&-(\bar{b} + b + 1) \frac{\Gamma(-\bar{b} + n)|\Gamma(b + 1)|^2}{\Gamma(\bar{b})\Gamma(1 - \bar{b})\Gamma(b + n + 2)}(1 - t) \\
&= -(\bar{b} + b + 1) \frac{\Gamma(-\bar{b} + n)|\Gamma(b + 1)|^2}{\frac{\pi}{\text{sen}(\pi\bar{b})}\Gamma(b + n + 2)}(1 - t) \\
&= -\frac{2 \text{sen}(\pi\bar{b})(\bar{b} + b + 1)\Gamma(-\bar{b} + n)|\Gamma(b + 1)|^2}{2\pi\Gamma(b + n + 2)}(1 - t) \\
&= -\frac{2 \text{sen}(\pi\bar{b})(\bar{b} + b + 1)\Gamma(\bar{b} + b + 1)\Gamma(-\bar{b} + n)|\Gamma(b + 1)|^2}{2\pi\Gamma(\bar{b} + b + 1)\Gamma(b + n + 2)}(1 - t) \\
&= -\frac{2 \text{sen}(\pi\bar{b})\Gamma(\bar{b} + b + 2)\Gamma(-\bar{b} + n)|\Gamma(b + 1)|^2}{2\pi\Gamma(\bar{b} + b + 1)\Gamma(b + n + 2)}(1 - t) \\
&= -\frac{2 \text{sen}(\pi\bar{b})|\Gamma(b + 1)|^2(1 - t)}{2\pi\Gamma(\bar{b} + b + 1)} \frac{\Gamma(-\bar{b} + n)\Gamma(\bar{b} + b + 2)}{\Gamma(b + n + 2)}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, utilizando a equação (2.34) que relaciona as funções beta e gama, e a definição da função beta, dada na Seção 2.5 (observando também que  $\mathcal{R}e(\bar{b} + b + 2) = 2\lambda + 2 > 0$ ,

já que  $\lambda > -1/2$ ), vale

$$\begin{aligned} & \frac{2 \operatorname{sen}(\pi \bar{b}) |\Gamma(b+1)|^2 (1-t) \Gamma(-\bar{b}+n) \Gamma(\bar{b}+b+2)}{2\pi \Gamma(\bar{b}+b+1) \Gamma(b+n+2)} \\ &= -\frac{2 \operatorname{sen}(\pi \bar{b}) |\Gamma(b+1)|^2 (1-t)}{2\pi \Gamma(\bar{b}+b+1)} B(-\bar{b}+n, \bar{b}+b+2) \\ &= -\frac{2 \operatorname{sen}(\pi \bar{b}) |\Gamma(b+1)|^2 (1-t)}{2\pi \Gamma(\bar{b}+b+1)} \int_0^1 x^{n-\bar{b}-1} (1-x)^{b+\bar{b}+1} dx. \end{aligned}$$

Daí, conclui-se que

$$v_{-n} = -\frac{2 \operatorname{sen}(\pi \bar{b}) |\Gamma(b+1)|^2 (1-t)}{2\pi \Gamma(\bar{b}+b+1)} \int_0^1 x^{n-\bar{b}-1} (1-x)^{b+\bar{b}+1} dx. \quad (3.89)$$

Resta mostrar, agora, que (3.89), trocando  $n$  por  $-n$ , é equivalente a (3.84).

Com efeito, de (3.84), tem-se

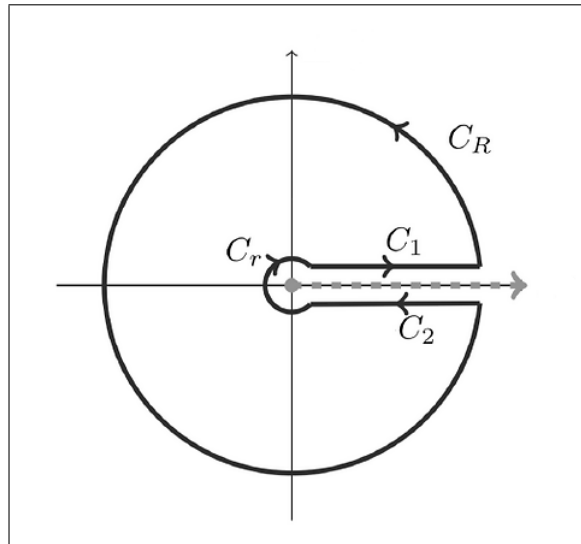
$$v_n = \frac{-i |\Gamma(b+1)|^2 (1-t)}{2\pi \Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_{\mathcal{C}} z^{-n} (-z)^{-\bar{b}-1} (1-z)^{b+\bar{b}+1} dz,$$

onde,

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n} (-z)^{-\bar{b}-1} (1-z)^{b+\bar{b}+1} dz = \int_{C_R+C_2+C_r+C_1} z^{-n} (-z)^{-\bar{b}-1} (1-z)^{b+\bar{b}+1} dz,$$

sendo  $C_r$  o círculo interno de raio  $r$  com  $r \rightarrow 0$  (veja Figura 3.1).

Figura 3.1: Contorno  $\mathcal{C}$ .



Fonte: Autoria própria (2024).

Mas, sendo

$$\begin{aligned}
\int_{C_R+C_2+C_r+C_1} z^{-n}(-z)^{-\bar{b}-1}(1-z)^{b+\bar{b}+1}dz &= \int_{C_2+C_1} z^{-n}(e^{-i\pi}z)^{-\bar{b}-1}(1-z)^{b+\bar{b}+1}dz \\
&= \int_{C_2+C_1} z^{-n}e^{i\pi\bar{b}}e^{i\pi}z^{-\bar{b}-1}(1-z)^{b+\bar{b}+1}dz = -e^{i\pi\bar{b}} \int_{C_2+C_1} z^{-n-\bar{b}-1}(1-z)^{b+\bar{b}+1}dz \\
&= -e^{i\pi\bar{b}} \left[ \int_{C_1} z^{-n-\bar{b}-1}(1-z)^{b+\bar{b}+1}dz + \int_{C_2} z^{-n-\bar{b}-1}(1-z)^{b+\bar{b}+1}dz \right],
\end{aligned}$$

e considerando os cortes de ramo, onde

$$\int_{C_1} z^{-n-\bar{b}-1}(1-z)^{b+\bar{b}+1}dz = \int_0^1 x^{-n-\bar{b}-1}(1-x)^{b+\bar{b}+1}dx$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} z^{-n-\bar{b}-1}(1-z)^{b+\bar{b}+1}dz &= \int_{C_2} e^{(-n-\bar{b}-1)\log z}(1-z)^{b+\bar{b}+1}dz \\
&= \int_{C_2} e^{(-n-\bar{b}-1)(\log|z|+i\arg(z))}(1-z)^{b+\bar{b}+1}dz = \int_{C_2} e^{(-n-\bar{b}-1)(\log|z|+2\pi i)}(1-z)^{b+\bar{b}+1}dz \\
&= \int_{C_2} e^{(-n-\bar{b}-1)\log|z|}e^{(-n-\bar{b}-1)2\pi i}(1-z)^{b+\bar{b}+1}dz \\
&= \int_{C_2} z^{-n-\bar{b}-1}e^{-2\pi\bar{b}i}(1-z)^{b+\bar{b}+1}dz = e^{-2\pi\bar{b}i} \int_1^0 x^{-n-\bar{b}-1}(1-x)^{b+\bar{b}+1}dx \\
&= -e^{-2\pi\bar{b}i} \int_0^1 x^{-n-\bar{b}-1}(1-x)^{b+\bar{b}+1}dx,
\end{aligned}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2(1-t)}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_{\mathcal{C}} z^{-n}(-z)^{-\bar{b}-1}(1-z)^{b+\bar{b}+1}dz \\
&= \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2(1-t)}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_{C_R+C_2+C_r+C_1} z^{-n}(-z)^{-\bar{b}-1}(1-z)^{b+\bar{b}+1}dz \\
&= \left(-e^{i\pi\bar{b}}\right) \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2(1-t)}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_{C_2+C_1} z^{-n}(e^{-i\pi}z)^{-\bar{b}-1}(1-z)^{b+\bar{b}+1}dz \\
&= \left(-e^{i\pi\bar{b}}\right) \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2(1-t)}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \left[ \int_{C_1} z^{-n-\bar{b}-1}(1-z)^{b+\bar{b}+1}dz + \int_{C_2} z^{-n-\bar{b}-1}(1-z)^{b+\bar{b}+1}dz \right] \\
&= \left(-e^{i\pi\bar{b}}\right) \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2(1-t)}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \left(1 - e^{-2\pi\bar{b}i}\right) \int_0^1 x^{-n-\bar{b}-1}(1-x)^{b+\bar{b}+1}dx \\
&= \left(e^{-i\pi\bar{b}} - e^{i\pi\bar{b}}\right) \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2(1-t)}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_0^1 x^{-n-\bar{b}-1}(1-x)^{b+\bar{b}+1}dx \\
&= -2i \operatorname{sen}(\pi\bar{b}) \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2(1-t)}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_0^1 x^{-n-\bar{b}-1}(1-x)^{b+\bar{b}+1}dx \\
&= -\frac{2 \operatorname{sen}(\pi\bar{b})|\Gamma(b+1)|^2(1-t)}{2\pi\Gamma(\bar{b}+b+1)} \int_0^1 x^{-n-\bar{b}-1}(1-x)^{b+\bar{b}+1}dx,
\end{aligned}$$

que é exatamente (3.89), porém com  $n$  em vez de  $-n$ .

Para obter o resultado esperado em (3.84) para os outros valores de  $n$  restantes é suficiente observar que

$$v_n = \frac{\bar{b} + 1 + n}{-b - 1 + n} v_{n+1} \quad \text{e} \quad v_n = -\bar{v}_{-n+1}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.90)$$

ou seja,

$$\int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} d\psi(t, b; \zeta) = \frac{\bar{b} + 1 + n}{-b - 1 + n} \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-(n+1)} d\psi(t, b; \zeta), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

(que segue como consequência do método de integração por partes) e

$$\overline{\int_{\mathcal{C}} \zeta^{n-1} d\psi(t, b; \zeta)} = - \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} d\psi(t, b; \zeta) \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

(que segue por uma simples conjugação direta).

A ideia usada para calcular a integral (3.84) pode ser encontrada, por exemplo, em [17] e [30]. Em [17], os autores consideram um conjunto geral de parâmetros para os expoentes de  $z$  e  $1 - z$ , porém restringindo os valores dos parâmetros para serem reais.

Agora, utilizando a representação (3.83), para os coeficientes  $v_n$ , tem-se de (3.47) que  $\mathcal{M}[1] = \mathcal{M}[\zeta^0] = \mu_0 = 1$  e

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}[\zeta^n]} &= \bar{\mu}_{-n} = \mathcal{M}[\zeta^{-n}] = \mu_n = 1 + \sum_{j=1}^n v_j = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{b + \bar{b} + 1}{b + 1} \frac{(-b - 1)_j}{(\bar{b} + 1)_j} (1 - t) \\ &= 1 + \frac{b + \bar{b} + 1}{b + 1} (1 - t) \sum_{j=1}^n \frac{(-b - 1)_j}{(\bar{b} + 1)_j}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{-n} &= \mu_n = 1 - (1 - t) + (1 - t) + \frac{b + \bar{b} + 1}{b + 1} (1 - t) \sum_{j=1}^n \frac{(-b - 1)_j}{(\bar{b} + 1)_j} \\ &= 1 - (1 - t) + (1 - t) \left[ 1 + \frac{b + \bar{b} + 1}{b + 1} \sum_{j=1}^n \frac{(-b - 1)_j}{(\bar{b} + 1)_j} \right] \\ &= t + (1 - t) \frac{(-b)_n}{(\bar{b} + 1)_n}, \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

que é consequência da fórmula de somatório

$$1 + \frac{b + \bar{b} + 1}{b + 1} \sum_{j=1}^n \frac{(-b - 1)_j}{(\bar{b} + 1)_j} = \frac{(-b)_n}{(\bar{b} + 1)_n}, \quad n \geq 1, \quad (3.91)$$

a qual é válida por indução matemática, já que para  $n = 1$ , tem-se

$$\begin{aligned} 1 + \frac{b + \bar{b} + 1}{b + 1} \frac{(-b - 1)_1}{(\bar{b} + 1)_1} &= 1 + \frac{b + \bar{b} + 1}{b + 1} \frac{(-b - 1)}{\bar{b} + 1} = 1 - \frac{(b + \bar{b} + 1)}{\bar{b} + 1} \\ &= -\frac{b}{\bar{b} + 1} = \frac{(b)_1}{(\bar{b} + 1)_1}, \end{aligned}$$

ou seja, a fórmula (3.91) vale para  $n = 1$ . Além disso, supondo a validade de (3.91) para  $n = k$ , tem-se

$$\begin{aligned}
1 + \frac{b + \bar{b} + 1}{b + 1} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(-b-1)_j}{(\bar{b}+1)_j} &= \frac{b + \bar{b} + 1}{b + 1} \frac{(-b-1)_{k+1}}{(\bar{b}+1)_{k+1}} + 1 + \frac{b + \bar{b} + 1}{b + 1} \sum_{j=1}^k \frac{(-b-1)_j}{(\bar{b}+1)_j} \\
&= \frac{b + \bar{b} + 1}{b + 1} \frac{(-b-1)_{k+1}}{(\bar{b}+1)_{k+1}} + \frac{(-b)_k}{(\bar{b}+1)_k} \\
&= \frac{(b + \bar{b} + 1)(-b-1)_{k+1} + (b+1)(-b)_k(\bar{b} + k + 1)}{(b+1)(\bar{b}+1)_{k+1}} \\
&= \frac{(b + \bar{b} + 1)(-b-1)(-b)_k + (b+1)(-b)_k(\bar{b} + k + 1)}{(b+1)(\bar{b}+1)_{k+1}} \\
&= \frac{-(b + \bar{b} + 1)(-b)_k + (-b)_k(\bar{b} + k + 1)}{(\bar{b}+1)_{k+1}} \\
&= \frac{(-b)_k(-b+k)}{(\bar{b}+1)_{k+1}} = \frac{(-b)_{k+1}}{(\bar{b}+1)_{k+1}},
\end{aligned}$$

isto é, a fórmula (3.91) também é válida para  $n = k + 1$ , de onde segue, pelo *Princípio da Indução Finita*, que a fórmula (3.91) é válida para todo  $n \geq 1$ .

Observe, por outro lado, que da representação (3.84) para os coeficientes  $v_n$ , tem-se, por (3.50), que

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}[\zeta^{-n}] &= 1 - \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)}(1-t) \int_{\mathcal{C}} \left( \frac{1-\zeta^{-n}}{1-\zeta} \right) (-\zeta)^{-\bar{b}-1} (1-\zeta)^{b+\bar{b}+1} d\zeta \\
&= 1 - (1-t) \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_{\mathcal{C}} (1-\zeta^{-n})(-\zeta)^{\bar{b}-1} (1-\zeta)^{b+\bar{b}} d\zeta, \quad (3.92)
\end{aligned}$$

para  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Mas, usando integração por partes, é possível verificar que

$$(1-t) \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_{\mathcal{C}} (-\zeta)^{-\bar{b}-1} (1-\zeta)^{b+\bar{b}} d\zeta = -\frac{\bar{b}+1}{b+\bar{b}+1} v_1 = 1-t.$$

De fato, seja  $\mathcal{C} = \{\zeta = e^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ , usando integração por partes, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} (-\zeta)^{-\bar{b}-1} (1-\zeta)^{b+\bar{b}} d\zeta &= - \left[ \frac{(-e^{i\theta})^{-\bar{b}-1} (1-e^{i\theta})^{b+\bar{b}+1}}{b+\bar{b}+1} \right]_0^{2\pi} \\
&\quad - \int_{\mathcal{C}} (-\bar{b}-1)(-\zeta)^{-\bar{b}-2} \frac{(1-\zeta)^{b+\bar{b}+1}}{b+\bar{b}+1} d\zeta \\
&= - \left[ \frac{(-e^{i\theta})^{-\bar{b}-1} (1-e^{i\theta})^{b+\bar{b}+1}}{b+\bar{b}+1} \right]_0^{2\pi} \\
&\quad + \frac{(\bar{b}+1)}{b+\bar{b}+1} \int_{\mathcal{C}} (-\zeta)^{-1} (-\zeta)^{-\bar{b}-1} (1-\zeta)^{b+\bar{b}+1} d\zeta. \quad (3.93)
\end{aligned}$$



E, como

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} (-e^{i\theta})^{-\bar{b}-1} \frac{(1 - e^{i\theta})^{b+\bar{b}+1}}{b + \bar{b} + 1} = (-1)^{-\bar{b}-1} \frac{(1 - e^0)^{b+\bar{b}+1}}{b + \bar{b} + 1} = 0$$

e

$$\lim_{\theta \rightarrow 2\pi} (-e^{i\theta})^{-\bar{b}-1} \frac{(1 - e^{i\theta})^{b+\bar{b}+1}}{b + \bar{b} + 1} = (-e^{i2\pi})^{-\bar{b}-1} \frac{(1 - e^{i2\pi})^{b+\bar{b}+1}}{b + \bar{b} + 1} = 0,$$

já que

$$e^{2i\pi} = \cos(2\pi) + i \operatorname{sen}(2\pi) = 1,$$

então, de (3.93), vem

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} (-\zeta)^{-\bar{b}-1} (1 - \zeta)^{b+\bar{b}} d\zeta &= \frac{(\bar{b} + 1)}{b + \bar{b} + 1} \int_{\mathcal{C}} (-\zeta)^{-1} (-\zeta)^{-\bar{b}-1} (1 - \zeta)^{b+\bar{b}+1} d\zeta \\ &= -\frac{(\bar{b} + 1)}{b + \bar{b} + 1} \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-1} (-\zeta)^{-\bar{b}-1} (1 - \zeta)^{b+\bar{b}+1} d\zeta. \end{aligned}$$

Daí, de (3.83) (que como viu-se é válida também para  $n \geq 0$ ), de (3.84) e do fato que  $v_1 = -\bar{v}_0$ , obtém-se

$$\begin{aligned} (1 - t) \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_{\mathcal{C}} (-\zeta)^{-\bar{b}-1} (1 - \zeta)^{b+\bar{b}} d\zeta \\ &= -\frac{(\bar{b} + 1)}{b + \bar{b} + 1} \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2(1-t)}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-1} (-\zeta)^{-\bar{b}-1} (1 - \zeta)^{b+\bar{b}+1} d\zeta \\ &= -\frac{(\bar{b} + 1)}{b + \bar{b} + 1} v_1 = -\frac{(\bar{b} + 1)}{b + \bar{b} + 1} (-\bar{v}_0) \\ &= -\frac{(\bar{b} + 1)}{b + \bar{b} + 1} \left[ -\frac{\bar{b} + b + 1}{\bar{b} + 1} (1 - t) \right] \\ &= 1 - t. \end{aligned}$$

Agora, substituindo o valor acima em (3.92), é possível escrever-se (veja também (3.64))

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} d\mu(t, b; \zeta) &= \mathcal{M}[\zeta^{-n}] \\ &= t(1^{-n}) + (1 - t) \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} (-\zeta)^{-\bar{b}-1} (1 - \zeta)^{b+\bar{b}} d\zeta, \quad (3.94) \end{aligned}$$

para  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . De fato,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} d\mu(t, b; \zeta) &= \mathcal{M}[\zeta^{-n}] \\ &= 1 - (1 - t) \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_{\mathcal{C}} (1 - \zeta^{-n}) (-\zeta)^{\bar{b}-1} (1 - \zeta)^{b+\bar{b}} d\zeta \\ &= 1 - (1 - t) \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \left[ -\int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} (-\zeta)^{\bar{b}-1} (1 - \zeta)^{b+\bar{b}} d\zeta + \int_{\mathcal{C}} (-\zeta)^{\bar{b}-1} (1 - \zeta)^{b+\bar{b}} d\zeta \right], \end{aligned}$$

ou, ainda,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} d\mu(t, b; \zeta) &= \mathcal{M}[\zeta^{-n}] \\
&= 1 + (1-t) \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} (-\zeta)^{\bar{b}-1} (1-\zeta)^{b+\bar{b}} d\zeta \\
&\quad - (1-t) \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_{\mathcal{C}} (-\zeta)^{\bar{b}-1} (1-\zeta)^{b+\bar{b}} d\zeta \\
&= 1 + (1-t) \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} (-\zeta)^{\bar{b}-1} (1-\zeta)^{b+\bar{b}} d\zeta - (1-t) \\
&= t + (1-t) \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} (-\zeta)^{\bar{b}-1} (1-\zeta)^{b+\bar{b}} d\zeta \\
&= t(1^{-n}) + (1-t) \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} (-\zeta)^{\bar{b}-1} (1-\zeta)^{b+\bar{b}} d\zeta.
\end{aligned}$$

Observe que a igualdade (3.94) pode ainda ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\mu_n &= \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} d\mu(t, b; \zeta) = \mathcal{M}[\zeta^{-n}] \\
&= te^{in \cdot 0} + (1-t) \frac{i2^{b+\bar{b}}|\Gamma(b+1)|^2}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} e^{-i\theta} [e^{(\pi-\theta)}]^{\mathcal{I}m(b)} [\text{sen}^2(\theta/2)]^{\mathcal{R}e(b)} d\theta,
\end{aligned}$$

para  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Com efeito, de (3.94), tem-se

$$\begin{aligned}
\mu_n &= t(1^{-n}) + (1-t) \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} (-\zeta)^{\bar{b}-1} (1-\zeta)^{b+\bar{b}} d\zeta \\
&= te^{in \cdot 0} + \frac{-i|\Gamma(b+1)|^2(1-t)}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} (e^{-i\pi} e^{i\theta})^{-\bar{b}-1} [e^{-i\pi} (e^{i\theta} - 1)]^{b+\bar{b}} d\theta. \quad (3.95)
\end{aligned}$$

Ora, como

$$\begin{aligned}
(e^{-i\pi} e^{i\theta})^{-\bar{b}-1} [e^{-i\pi} (e^{i\theta} - 1)]^{b+\bar{b}} &= [e^{(\theta-\pi)i}]^{-\bar{b}-1} [e^{-i\pi} (e^{i\theta} - 1)]^{b+\bar{b}} \\
&= [e^{(\theta-\pi)i}]^{-\mathcal{R}e(b)+i\mathcal{I}m(b)-1} [e^{-i\pi} (e^{i\theta} - 1)]^{2\mathcal{R}e(b)} \\
&= [e^{(\pi-\theta)}]^{\mathcal{I}m(b)} [e^{i(\pi-\theta)}]^{\mathcal{R}e(b)+1} [e^{-i\pi} (e^{i\theta} - 1)]^{2\mathcal{R}e(b)}, \quad (3.96)
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
&[e^{i(\pi-\theta)}]^{\mathcal{R}e(b)+1} [e^{-i\pi} (e^{i\theta} - 1)]^{2\mathcal{R}e(b)} \\
&= [-(\cos \theta - i \text{sen } \theta)]^{\mathcal{R}e(b)+1} [-(e^{i\theta} - 1)]^{2\mathcal{R}e(b)} \\
&= (-1)^{3\mathcal{R}e(b)+1} (e^{-i\theta})^{\mathcal{R}e(b)+1} [e^{i\theta} (1 - e^{-i\theta})]^{2\mathcal{R}e(b)} \\
&= -(-1)^{\mathcal{R}e(b)} (e^{i\theta})^{\mathcal{R}e(b)-1} (1 - e^{-i\theta})^{2\mathcal{R}e(b)},
\end{aligned}$$

ou, equivalentemente, com

$$\begin{aligned}
& [e^{i(\pi-\theta)}]^{\mathcal{R}e(b)+1} [e^{-i\pi}(e^{i\theta} - 1)]^{2\mathcal{R}e(b)} \\
&= -(-1)^{\mathcal{R}e(b)} [e^{i(\theta/2)}]^{2\mathcal{R}e(b)-2} (1 - e^{-i\theta})^{2\mathcal{R}e(b)} \\
&= -(-1)^{\mathcal{R}e(b)} [e^{i(\theta/2)}]^{-2} [e^{i(\theta/2)}(1 - e^{-i\theta})]^{2\mathcal{R}e(b)} \\
&= -(-1)^{\mathcal{R}e(b)} e^{-i\theta} [e^{i(\theta/2)} - e^{-i(\theta/2)}]^{2\mathcal{R}e(b)} \\
&= -(-1)^{\mathcal{R}e(b)} e^{-i\theta} [2i \operatorname{sen}(\theta/2)]^{2\mathcal{R}e(b)} \\
&= -(-1)^{\mathcal{R}e(b)} (-1)^{\mathcal{R}e(b)} 2^{2\mathcal{R}e(b)} e^{-i\theta} [\operatorname{sen}^2(\theta/2)]^{\mathcal{R}e(b)} \\
&= -2^{b+\bar{b}} e^{-i\theta} [\operatorname{sen}^2(\theta/2)]^{\mathcal{R}e(b)} \tag{3.97}
\end{aligned}$$

Assim, substituindo-se (3.97) em (3.96) e, depois, esse novo resultado, em (3.95), obtém-se a igualdade desejada (3.94).

Finalmente, como  $b = \lambda + i\eta$ , considerando a sequência  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  definida em (3.75), é possível observar que

$$\prod_{k=1}^n (1 + ic_k) = \prod_{k=1}^n \frac{b+k}{\lambda+k} = \frac{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n)} = \frac{(b+1)_n}{(\lambda+1)_n}$$

e

$$\prod_{k=1}^n \frac{1+ic_k}{1-ic_k} = \prod_{k=1}^n \frac{b+k}{\bar{b}+k} = \frac{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}{(\bar{b}+1)(\bar{b}+2)\cdots(\bar{b}+n)} = \frac{(b+1)_n}{(\bar{b}+1)_n}.$$

Consequentemente, pelo Teorema 3.10, os OPUC mônicos,  $S_n^{(t)}(z)$  (veja fórmula (3.77) para  $R_n(z)$ ), e os coeficientes de Verblunsky,  $\alpha_{n-1}^{(t)}$  (veja Observação (3.11)), associados à medida positiva  $\mu(t, b; z)$ , dada por (3.94), são tais que  $S_0^{(t)}(z) = 1$  e, para  $n \geq 1$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
S_n^{(t)}(z) &= \frac{(\lambda+1)_n}{(b+1)_n} \left[ \frac{(2\lambda+2)_n}{(\lambda+1)_n} {}_2F_1(-n, b+1; b+\bar{b}+2; 1-z) \right. \\
&\quad \left. - 2(1 - m_n^{(t)}) \frac{(2\lambda+2)_{n-1}}{(\lambda+1)_{n-1}} {}_2F_1(-(n-1), b+1; b+\bar{b}+2; 1-z) \right] \\
&= \frac{(2\lambda+2)_n}{(b+1)_n} \left[ {}_2F_1(-n, b+1; b+\bar{b}+2; 1-z) \right. \\
&\quad \left. - 2(1 - m_n^{(t)}) \frac{\lambda+n}{2\lambda+n-1} {}_2F_1(-(n-1), b+1; b+\bar{b}+2; 1-z) \right]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\alpha_{n-1}^{(t)} &= -\overline{S_n^{(t)}(0)} = \frac{1 - 2m_n^{(t)} - ic_n}{1 + ic_n} \prod_{k=1}^n \frac{1 + ic_k}{1 - ic_k} = \frac{1 - 2m_n^{(t)} - i \left( \frac{\eta}{\lambda+n} \right) (b+1)_n}{1 + i \left( \frac{\eta}{\lambda+n} \right) (\bar{b}+1)_n} \\
&= \frac{(1 - 2m_n^{(t)})(\lambda+n) - i\eta (b+1)_n}{\lambda+n+i\eta} \frac{1}{(\bar{b}+1)_n} = \frac{-\lambda - i\eta + 2\lambda + n - 2m_n^{(t)}(\lambda+n)}{\lambda+i\eta+n} \frac{(b+1)_n}{(\bar{b}+1)_n},
\end{aligned}$$

e, como  $b = \lambda + i\eta$ , obtém-se

$$\begin{aligned}
\alpha_{n-1}^{(t)} &= \frac{-b - n + 2\lambda + 2n - 2m_n^{(t)}(\lambda + n)}{b + n} \frac{(b + 1)_n}{(\bar{b} + 1)_n} \\
&= \frac{-(b + n) + (2 - 2m_n^{(t)})(\lambda + n)}{b + n} \frac{(b + 1)_n}{(\bar{b} + 1)_n} \\
&= \left[ -1 + (2 - 2m_n^{(t)}) \frac{(\lambda + n)}{b + n} \right] \frac{(b + 1)_n}{(\bar{b} + 1)_n} \\
&= -\frac{(b + 1)_n}{(\bar{b} + 1)_n} \left[ 1 - 2(1 - m_n^{(t)}) \frac{\lambda + n}{b + n} \right],
\end{aligned}$$

para  $n \geq 1$ , onde  $\{m_n^{(t)}\}_{n=0}^\infty$ , tal que

$$m_0 = 0 \quad \text{e} \quad m_n^{(t)} = \frac{d_n}{1 - m_{n-1}^{(t)}}, \quad \text{com } n \geq 1,$$

é a sequência de parâmetros minimal da sequência encadeada positiva dada em (3.75).

Uma última consideração interessante em relação a este exemplo diz respeito a duas situações particulares nas quais é possível obter os coeficientes de Verblunsky de forma explícita.

Na primeira delas, quando  $t = 0$ , as sequências de parâmetros minimal e maximal  $\{m_n^{(t)}\}_{n=0}^\infty$  e  $\{M_n^{(t)}\}_{n=0}^\infty$ , respectivamente, de  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ , coincidem, pois

$$M_0^{(0)} = t = 0 = m_0.$$

Daí de (3.76), tem-se

$$\begin{aligned}
\alpha_{n-1}^{(0)} &= -\frac{(b + 1)_n}{(\bar{b} + 1)_n} \left\{ 1 - 2 \left[ 1 - M_n^{(t)} \right] \frac{\lambda + n}{b + n} \right\} \\
&= -\frac{(b + 1)_n}{(\bar{b} + 1)_n} \left\{ 1 - 2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\lambda + n}{\lambda + n} \right) \right] \frac{\lambda + n}{b + n} \right\} \\
&= -\frac{(b + 1)_n}{(\bar{b} + 1)_n} \left\{ 1 - 2 \left[ \frac{2(\lambda + n) - (2\lambda + n)}{2(\lambda + n)} \right] \frac{\lambda + n}{b + n} \right\} \\
&= -\frac{(b + 1)_n}{(\bar{b} + 1)_n} \left[ 1 - \frac{n}{b + n} \right] = -\frac{(b + 1)_n}{(\bar{b} + 1)_n} \frac{b}{b + n} \\
&= -\frac{(b)_{n+1}}{(\bar{b} + 1)_n (b + n)} = -\frac{(b)_n (b + n)}{(\bar{b} + 1)_n (b + n)} \\
&= -\frac{(b)_n}{(\bar{b} + 1)_n},
\end{aligned}$$

com  $n \geq 1$ . Neste caso, os OPUC mônicos são (veja [30]):

$$S_n^{(0)}(z) = \frac{(2\lambda + 1)_n}{(b + 1)_n} {}_2F_1(-n, b + 1; b + \bar{b} + 1; 1 - z), \quad n \geq 1.$$

A outra situação é quando  $\lambda = 0$  (isto é,  $b = i\eta$ ). Para este caso os coeficientes de Verblunsky  $\alpha_{n-1}^{(t)}$  são dados por (veja [11]):

$$\alpha_{n-1}^{(t)} = -\frac{(i\eta + 1)_{n-1}}{(-i\eta + 1)_n} \left[ i\eta - \frac{nt}{1 + (n-1)t} \right], \quad n \geq 1.$$

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

As pesquisas sobre os polinômios ortogonais no círculo unitário vem se fortalecendo ao longo dos últimos anos, devido a sua vasta aplicação em diversos contextos da Matemática e de outras ciências. Por esse motivo, vários pesquisadores vem se dedicando a analisar e explorar as possibilidades desta interessante teoria.

Como consequência, é natural o surgimento de métodos alternativos para obter os OPUC, a partir de sequências reais. O método apresentado nesta dissertação é uma técnica diferente da apresentada em [13], por exemplo.

Além disso, o objetivo desta dissertação é servir como um texto introdutório, com demonstrações detalhadas, para aqueles que pretendem conhecer o essencial sobre esta recente teoria, a respeito da obtenção dos polinômios ortogonais no círculo unitário associados a um par de sequências específicas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AGARWAL, R.P.; MILOVANOVIĆ, G.V. Extremal problems, inequalities, and classical orthogonal polynomials. **Appl. Math. Comput.**, v. 128, p. 151–166, 2002.
- [2] ANDRADE, E.X.L.; BRACCIALI, C.F. **Frações contínuas: propriedades e aplicações**. Notas em Matemática Aplicada. São Carlos: SBMAC, p. 28, 2005.
- [3] ANDRADE, E.X.L.; BRACCIALI, C.F.; RAFAELI, F.R. **Introdução aos Polinômios Ortogonais**. São Carlos: SBMAC, 2012.
- [4] ANDREWS, G.E; ASKEY, R.; ROY, R. **Special Functions**. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2000.
- [5] ANSHELEVICH, M. Linearization coefficients for orthogonal polynomials using stochastic processes. **Ann. Probab.**, v. 33, n. 1, p. 114–136, 2005.
- [6] BRACCIALI, C. F.; LI, X.; RANGA, A. S. Real orthogonal polynomials in frequency analysis. **Math. Comp.**, v. 74, p. 341–362, 2005.
- [7] BREUER, J.; RYCKMAN, E.; SIMON, B. Equality of the spectral and dynamical definitions of reflection. **Comm. Math. Phys.**, v. 295, p. 531–550, 2010.
- [8] CASTILLO, K.; COSTA, M.S.; SRI RANGA, A.; VERONESE, D.O. A Favard type theorem for orthogonal polynomials on the unit circle from a three term recurrence formula. **J. Approx. Theory**, v. 184, p. 146–162, 2014.
- [9] CHIHARA, T.S. **An Introduction to Orthogonal Polynomials**. New York: Gordon and Breach, 1978.
- [10] CONWAY, J.B. **Functions of One Complex Variable**. New York: Springer, 2 ed., 1978.
- [11] COSTA, M.S.; FELIX, H.M.; SRI RANGA, A. Orthogonal polynomials on the unit circle and chain sequences. **J. Approx. Theory**, v. 173, p. 14–32, 2013.

- [12] CUYT, A. et al. **Handbook of Continued Fractions for Special Functions**. Springer, 2008.
- [13] DELSARTE, P.; GENIN, Y. The tridiagonal approach to Szegő's orthogonal polynomials, Toeplitz linear system and related interpolation problems. **SIAM J. Math. Anal.** 19, p. 718–735, 1988.
- [14] DIMITROV, D.K.; SRI RANGA, A. Zeros of a family of hypergeometric para-orthogonal polynomials on the unit circle. **Math. Nachr.** 286, p. 1778–1791, 2013.
- [15] ERDŐLYI, T.; NEVAI, P.; ZHANG, J.; GERONIMO, J. A simple proof of “Favard’s theorem” on the unit circle. **Att. Semin. Mat. Fis. Univ. Modena**, v. 39, p. 551–556, 1991.
- [16] GAUTSCHI, W. Orthogonal polynomials - constructive theory and applications. **J. Comput. Appl. Math.**, v. 12 e 13, p. 61–76, 1985.
- [17] HENDRIKSEN, E.; VAN ROSSUM, H. Orthogonal Laurent polynomials. **Indag. Math. Ser. A.** 48, p. 17–36, 1986.
- [18] ISMAIL, M. E. H.; MASSON, D. R. Generalized orthogonality and continued fractions. **J. Approx. Theory** 83, p. 1–40, 1995.
- [19] ISMAIL, M. E. H. **Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable**. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. vol. 98. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
- [20] JONES, W.B.; NJASTAD, O.; THRON, W.J. Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle. **Bull. Lond. Math. Soc.** 21, p. 113–152, 1989.
- [21] JONES, W.B.; THRON, W.J. **Continued Fractions Analytic Theory and Applications**. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 11, Addison-Wesley Reading MA, 1980.
- [22] KHEIFETS, A.; GOLINSKII, L.; PEHERSTORFER, F.; YUDITSKII, P. Scattering theory for CMV matrices: uniqueness, Helson-Szegő and strong Szegő theorems. **Integr. Equ. Oper. Theory**, v. 69, p. 479–508, 2011.
- [23] LIMA, E.L. **Álgebra Linear**, 8 ed.. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.



- [24] LORENTZEN, L.; WADELAND, H. **Continued Fractions with Applications**. Studies in Computational Mathematics, vol. 3. Amsterdam: North-Holland, 1992.
- [25] PEHERSTORFER, F. Positive trigonometric quadrature formulas and quadrature on the unit circle. **Math. Comp.**, v. 80, p. 1685-1701, 2011.
- [26] SIMANEK, B. Weak convergence of CD kernels: a new approach on the circle and real line. **J. Approx. Theory**, v. 164, p. 204-209, 2012.
- [27] SIMON, B. **Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 1. Classical Theory**. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 54. Providence: American Mathematical Society, 2005.
- [28] SIMON, B. **Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 2. Spectral Theory**. In: American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 54. Providence: American Mathematical Society, 2005.
- [29] SRI RANGA, A.; BRACCIALI, C.F.; ANDRADE, E.X.L. **Polinômios que satisfazem uma Relação de Recorrência de Três Termos**. Notas em Matemática Aplicada. São Carlos: SBMAC, p. 15-80, 2014.
- [30] SRI RANGA, A. Szego polynomials from hypergeometric functions. **Proc. Amer. Math. Soc.** 138, p. 4259–4270, 2010.
- [31] SZEGŐ, G. **Orthogonal Polynomials**. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 23, 4. ed. Providence: American Mathematical Society, 1975.
- [32] TSUJIMOTO, S.; ZHEDANOV, A. Elliptic hypergeometric Laurent biorthogonal polynomials with a dense point spectrum on the unit circle. **SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.**, v. 5, p. 30, 2009.
- [33] WALL, H.S. **Analytic Theory of Continued Fractions**. New York: D. Van Nostrand Company Inc., 1948.
- [34] WALL, H.S.; WETZEL, M. Quadratic forms and convergence regions for continued fractions. **Duke Math. J.** 11, p. 89–102, 1944.