UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Ranney Ritchie Souto Ribeiro

Ideais Completos

São Luís - MA

2023

Ranney Ritchie Souto Ribeiro

Ideais Completos

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Maranhão.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Henrique A. A. Lima

São Luís - MA

2023

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Ribeiro, Ranney Ritchie Souto.
Ideais Completos / Ranney Ritchie Souto Ribeiro. - 2023.
62 f.

Orientador(a): Pedro Henrique Apoliano Albuquerque Lima.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís - MA, 2023.

1. Ideal basicamente completo. 2. Ideal completo. 3. Ideal com propriedade de Rees. 4. Ideal contraído. 5. Ideal m-completo. I. Lima, Pedro Henrique Apoliano Albuquerque. II. Título.

Ranney Ritchie Souto Ribeiro

Ideais Completos

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Maranhão.

Dissertação de Mestrado. São Luís - MA, 12 de Maio de 2023:

Prof. Dr. Pedro Henrique A. A. Lima
Orientador
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. José Antônio Pires Ferreira Marão
Examinador Interno
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Pérez
Examinador Externo
Universidade de São Paulo - ICMC

São Luís - MA
2023

À pequenininha Alice.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem Ele nada disso seria possível. É Ele quem me dá forças, sabedoria, saúde, paciência e tudo mais que é importante e necessário para prosseguir nesta caminhada.

Meus agradecimentos vão também à minha família, em especial minha mãe Vanderlúcia Gonzaga, meu pai Flávio Ribeiro, minha irmã Jennifer Rayane, meu primo Carlos Henrique e minha tia Kássia Cilene. Também devo lembrar do nascimento de uma garotinha especial que veio a me ensinar a ser um ser humano melhor: a pequenininha Maria Alice.

Agradeço aos professores que tive durante esses dois anos de curso, ao secretário e ao coordenador deste programa de pós graduação também. Um agradecimento especial ao professor, e também meu orientador, Dr. Pedro Lima, que sempre se dispôs a me ajudar e tirando o máximo de esforço da minha parte.

Meus agradecimentos vão também aos meus grandes amigos, especialmente aqueles que me acompanham desde o meio da graduação em Matemática até agora sendo mestres (e quem sabe mais um passo adiante), juntos somos mais fortes e evoluímos neste período. São eles: Gabriel Gomes, Adriano Ribeiro e Denílson Nobre. E um agradecimento também especial aos meus alunos do PIC (medalhistas da OBMEP): Thifane, Mayra, Hadassa, Thiago, Jhonathas, Matheus e Pedro.

Não poderia deixar de citar quem esteve sempre ao meu lado desde o início e sempre acreditou em mim: Professor Anselmo Jr. e o Professor João de Deus. Além de muitos amigos que me ajudaram com palavras de apoio e encorajamento, fora que também me auxiliaram na escrita desta dissertação: Layla Gabrielle, João Carlos, Guilherme, Tarcísio, João Navis, Erica Reis, Marisa Lemos, Gabrielle Souto, Vinícius, Raylanny, Felipe, Adrielle Gomes, Gabriel Silva, Caio Anderson, Talisson, Emanuelle, Jeiferson, Viviane Louzeiro, Cassiane Reis, Aline Dourado e Erika Thaís.

Agradeço também à UFMA e à Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão - FAPEMA - pelo apoio financeiro.

"A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura."

(Bertrand Russell)

Resumo

A teoria de ideais integralmente fechados em anéis locais regulares bidimensionais $(R, \mathfrak{m})$ foi introduzida pelo matemático Oscar Ascher Zariski. A motivação de Zariski foi dar um significado algébrico para a ideia de sistemas lineares completos de curvas. Ele estudou a classe dos ideais contraídos. Sabe-se que os ideais $\mathfrak{m}$-primários contraídos I de R são caracterizados pela seguinte propriedade: $(I : \mathfrak{m}) = (I : x)$ para algum $x \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$. Chamamos os ideais com essa propriedade de ideais completos e comparamos essa classe com as classes dos ideais $\mathfrak{m}$-completos, basicamente completos e contraídos em anéis locais regulares de dimensão superior a dois. Os ideais $\mathfrak{m}$-completos são facilmente vistos como completos. Neste trabalho, encontramos uma condição suficiente para que um ideal completo seja $\mathfrak{m}$-completo. Mostramos também que ideais completos, $\mathfrak{m}$-completos, contraídos, integralmente fechados e normais são todos equivalentes no caso em que o ideal é de parâmetro. Encontramos uma condição suficiente para que um ideal de parâmetro basicamente completo seja completo.

Palavras-chave: ideal basicamente completo, ideal contraído, ideal completo, ideal $\mathfrak{m}$-completo, propriedade de Rees, ideal integralmente fechado.

Abstract

The theory of integrally closed ideals in two-dimensional regular local rings $(R, \mathfrak{m})$ was introduced by the mathematician Oscar Ascher Zariski. Zariski's motivation was to give algebraic meaning to the idea of complete linear systems of curves. He studied the class of the contracted ideals. It is known that contracted $\mathfrak{m}$-primary ideals I of R are characterized by the following property: $(I : \mathfrak{m}) = (I : x)$ for some $x \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$. We call the ideals with this property full ideals and compare this class of ideals with the classes of $\mathfrak{m}$-full ideals, basically full ideals and contracted ideals in regular local rings of dimension greater than 2. The $\mathfrak{m}$-full ideals are easily seen as full. In this dissertation, we find a sufficient condition for a full ideal to be $\mathfrak{m}$-full. We also show that full, $\mathfrak{m}$-full, contracted, integrally closed and normal ideals are all equivalents in case of an ideal of parameter. We find a sufficient condition for a basically full parameter ideal to be full.

Keywords: Basically full ideal, contracted ideal, full ideal, $\mathfrak{m}$-full ideal, Rees property, integrally closed ideal.

Sumário

1 Introdução

A teoria de ideais integralmente fechados em anéis locais regulares bidimensionais foi introduzida por Zariski em seu clássico artigo [17], e pode ser encontrada em [16, Appendix 5]. A motivação de Zariski foi dar um significado algébrico para a ideia de sistemas lineares completos de curvas. Ele estudou a classe dos ideais contraídos. Tais ideais, em anéis locais regulares bidimensionais, desempenham um grande papel na prova do Teorema de Zariski, que afirma que o produto de ideais integralmente fechados é integralmente fechado. O objetivo deste trabalho é estender alguns resultados sobre ideais completos, $\mathfrak{m}$-completos, contraídos e basicamente completos para anéis locais regulares de dimensão superior a 2. Até este momento, a classe destes ideais só foi amplamente estudada na literatura no caso de anéis locais regulares bidimensionais.

Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local com o ideal maximal $\mathfrak{m}$ e suponha que o corpo residual $k = R/\mathfrak{m}$ seja infinito. (O caso em que k não é necessariamente infinito pode ser encontrado em [15].) A seguir definiremos as classes de ideais mencionados no parágrafo anterior. Um ideal I de R é dito $\mathfrak{m}$-completo se $(\mathfrak{m}I : x) = I$ para algum $x \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$. Quando for necessário fazer referência ao elemento x tal que $(\mathfrak{m}I : x) = I$, diremos que I é $\mathfrak{m}$-completo em relação a x. Denotamos por $\mu(I)$ o número minimal de geradores de I. Diz-se que I satisfaz a propriedade de Rees se $\mu(J) \leq \mu(I)$ para todo ideal $J \supseteq I$ com $\lambda_R(J/I)$ finito. Um ideal próprio I é dito basicamente completo se nenhum conjunto de geradores de I puder ser estendido a um conjunto minimal de geradores de um ideal que contenha I propriamente. Assuma agora que R é regular. Diremos que um ideal $\mathfrak{m}$-primário I é contraído de $R[\mathfrak{m}/x]$ se $IR[\mathfrak{m}/x] \cap R = I$ para algum elemento regular $x \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$. Definimos a ordem de I como sendo o inteiro não-negativo r tal que $I \subseteq \mathfrak{m}^r$, mas $I \not\subseteq \mathfrak{m}^{r+1}$. Denotaremos tal ordem por $o(I)$. Por fim, diremos que I é um ideal completo em relação a $x \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$ se $(I : \mathfrak{m}) = (I : x)$. Um ideal I é dito completo se for completo em relação a algum $x \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$.

Resumimos abaixo as seguintes implicações no caso de ideais $\mathfrak{m}$-primários em anéis locais regulares bidimensionais.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{normal} \Leftrightarrow \text{integralmente fechado}} \arrow[d, "(i)"] \\
\boxed{\text{contraído} \Leftrightarrow \text{propriedade de Rees} \Leftrightarrow \mathfrak{m}\text{-completo} \Leftrightarrow \text{completo}} \arrow[d, "(ii)"] \\
\boxed{\text{basicamente completo}}
\end{tikzcd}$$

Em tais anéis, qualquer produto de ideais integralmente fechados é ainda integralmente fechado. Em [15, Theorem 4], mostra-se ainda que I é $\mathfrak{m}$-completo se, e somente se, satisfaz a propriedade de Rees, e se, e somente se, $\mu(I) = o(I) + 1$. Como lembramos na Proposição 3.24, a igualdade $\mu(I) = o(I) + 1$ equivale a dizer que o ideal I é completo. Finalmente, está provado em [12, Proposition 2.1] que um ideal é contraído se, e somente se, for completo. A recíproca de (ii) não é sempre verdadeira (vide [10, Example 9.1]). O mesmo ocorre à recíproca de (i); por exemplo, considere $R = k[[X, Y]]$ onde k é um corpo, $I = (Y^2, YX^3, X^4)$ e $\mathfrak{m} = (X, Y)$. É mostrado em [16, Example, p.388] que I é contraído, mas não é integralmente fechado já que $YX^2 \in \overline{I} \setminus I$. O ideal I também é completo pois $\mu(I) = o(I) + 1$ (vide Teorema 3.22).

Agora, resumimos no diagrama abaixo algumas implicações entre as classes de ideais $\mathfrak{m}$-primários para o caso mais geral em que R é um domínio local mas não é necessariamente regular.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \boxed{\text{ideais normais}} \arrow[d, "\text{(i)}"] & & \\
 & & \boxed{\text{ideais integralmente fechados}} \arrow[dll, "\text{(vii)}"'] \arrow[drr, "\text{(ii)}"] & & \\
\boxed{\text{ideais contraídos}} \arrow[drr, "\text{(viii)}"] \arrow[ddrr, "\text{(iv)}"'] & & \boxed{\text{ideais com propriedade de Rees}} \arrow[d, "\text{(vi)}"] & & \boxed{\text{ideais } \mathfrak{m}\text{-completos}} \arrow[ll, "\text{(v)}"] \arrow[ddll, "\text{(iii)}"] \\
 & & \boxed{\text{ideais basicamente completos}} & & \\
 & & \boxed{\text{ideais completos}} & &
\end{tikzcd}
$$

A implicação (i) segue por definição, (ii) pelo Teorema [8, Theorem 2.4]. As implicações (iii) e (iv) seguem pela Proposição 3.9(a)(e) deste trabalho. Já (v) segue por [15, Theorem 3] e (vi) ocorre por definição (lembre que $\lambda_R(I/J)$ é finito para todo ideal $J \supseteq I$ já que I é $\mathfrak{m}$-primário). O item (vii) pelo Lema [3, Lemma 3.3] e (viii) segue do Teorema 3.12 deste trabalho. No Exemplo 3.6, mostramos que um ideal completo não é necessariamente basicamente completo em anéis regulares tridimensionais e, portanto, as implicações (iii) e (iv) acima não são reversíveis em tais anéis. Ideais basicamente completos também não são necessariamente completos, mesmo em anéis locais regulares bidimensionais conforme mencionamos mais acima.

Organizamos este trabalho da seguinte maneira. Iniciamos com o Capítulo 2 apresentando alguns resultados básicos de álgebra comutativa que resultarão num melhor entendimento da parte principal desta dissertação, a saber, Capítulo 3, o qual foi motivado pelo artigo [11]. Na Seção 3.1, fornecemos alguns resultados gerais sobre os ideais completos, $\mathfrak{m}$-completos, basicamente completos e contraídos. Na Seção 3.2 relacionamos os invariantes $o(I)$ e $\mu(I)$. Já na Seção 3.3 procuramos obter relações entre as ordens $o(I)$ e $o(I : \mathfrak{m})$ para dimensões de R superiores a 2. Na Seção 3.4, um critério é dado para que um ideal completo em relação a x implique que o seu produto por $\mathfrak{m}$ também seja completo em relação a x. No resultado principal da Seção 3.5, usamos um resultado de Goto (vide [8, Theorem 3.1]) para mostrar que um ideal de parâmetro completo em um anel local regular é normal. Quando $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local regular bidimensional e I é um ideal de parâmetro, é conhecido que I é completo se, e somente se, $o(I) = 1$ (vide Proposição 3.24). Concluímos o Capítulo 3 com a Seção 3.6 provendo alguns resultados em dimensão superior a 2 para ideais de parâmetro que são basicamente completos ou têm ordem 1. Além dos capítulos já citados também fornecemos dois apêndices, onde o leitor menos habituado com a teoria básica de álgebra comutativa pode encontrar apoio.

Ao final, fizemos uma lista em Índice Remissivo com as principais palavras-chave utilizadas no trabalho para facilitar a busca de algum conceito específico. Vale ressaltar que o *Manual de Redação Matemática* [5] foi de bastante ajuda.

2 Preliminares

Neste capítulo traremos algumas definições e também alguns teoremas prévios importantes para o desenvolvimento e compreensão da parte principal deste trabalho. Como referências básicas de álgebra comutativa, recomendamos ao leitor interessado as referências [1] e [13]. Também fizemos dois apêndices (Apêndices A e B) com alguns fundamentos e ferramentas essenciais. Enfatizamos que ao longo de todo o conteúdo, consideraremos anéis comutativos e com unidade.

2.1 Sequências Exatas

Definição 2.1. *Seja a sequência de R-módulos e R-homomorfismos abaixo:*

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

*Chamaremos essa sequência de **exata em** M_i se $\operatorname{Im}(f_i) = \operatorname{Ker}(f_{i+1})$. A sequência, como um todo, é dita **exata** se for exata em cada M_i. Em particular, temos:*

(a) $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ *é exata* $\Leftrightarrow f$ *é injetiva;*

(b) $M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ *é exata* $\Leftrightarrow g$ *é sobrejetiva;*

(c) $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ *é exata* $\Leftrightarrow f$ *é injetiva,* g *é sobrejetiva e* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$.

Uma sequência do tipo (c) *é chamada de **sequência exata curta** .*

Exemplo 2.2. *Sejam $I \subseteq J \subseteq L$ ideais de R. Então a sequência natural*

$$0 \to \frac{J}{I} \to \frac{L}{I} \to \frac{L}{J} \to 0$$

é exata.

Exemplo 2.3. *Sejam R um anel, I um ideal de R e $x \in R$. Denotaremos $I + (x)$ simplesmente por (I, x). Provaremos que a seguinte sequência natural é exata:*

$$0 \longrightarrow (I : x)/I \longrightarrow R/I \xrightarrow{\cdot x} R/I \longrightarrow R/(I, x) \longrightarrow 0. \tag{2.1}$$

Vejamos por partes. Denotemos a aplicação $(I : x)/I \longrightarrow R/I$ por g, a aplicação $R/I \xrightarrow{\cdot x} R/I$ por f e $R/I \longrightarrow R/(I, x)$ por π.

- *Afirmamos que* $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f$.

  ($\subseteq$) *Seja* $g(\bar{y}) \in \operatorname{Im} g$, *onde* $y \in (I : x)$. *Então* $yx \in I$. *Além disso,* $g(\bar{y}) = \bar{y}$. *Daí,* $f(\bar{y}) = \overline{yx} = \bar{0}$. *Portanto,* $\bar{y} \in \operatorname{Ker} f$.

  ($\supseteq$) *Seja* $\bar{z} \in \operatorname{Ker} f$. *Então,* $f(\bar{z}) = \bar{0} \Rightarrow \overline{zx} = \bar{0} \Rightarrow zx \in I \Rightarrow z \in (I : x)$. *Notemos que* $g(\bar{z}) = \bar{z}$. *Portanto,* $\bar{z} \in \operatorname{Im} g$.

- *Afirmamos que* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} \pi$.

  ($\subseteq$) *Seja* $f(\bar{y}) \in \operatorname{Im} f$. *Mas* $f(\bar{y}) = \overline{yx}$. *Notemos que* $\pi(\overline{yx}) = \overline{yx} = \bar{0}$ *pois* $yx \in (x) \subset (I, x)$. *Portanto,* $f(\bar{y}) \in \operatorname{Ker} \pi$.

  ($\supseteq$) *Lembremos que* $(I, x) = I + (x)$. *Seja* $\bar{z} \in \operatorname{Ker} \pi$. *Então* $\pi(\bar{z}) = \bar{z} = \bar{0}$. *Portanto,* $z \in I + (x)$. *Logo,* $z = b + \alpha x$, *com* $b \in I$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Notemos que* $f(\bar{\alpha}) = \overline{\alpha x} = \bar{z}$ *pois* $\bar{z} = \overline{b + \alpha x} = \bar{b} + \overline{\alpha x} = \bar{0} + \overline{\alpha x} = \overline{\alpha x}$. *Logo,* $\bar{z} \in \operatorname{Im} f$.

Proposição 2.4. [1, Propositon 2.11] *Seja* $0 \to M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_n \to 0$ *uma sequência exata de* R*-módulos. Então, temos:*

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda(M_i) = 0.$$

Exemplo 2.5. *Aplicando a Proposição 2.4 a Equação (2.1), obtemos*

$$\lambda((I : x)/I) - \lambda(R/I) + \lambda(R/I) - \lambda((R/(I, x)) = 0.$$

Logo, $\lambda(R/(I, x)) = \lambda((I : x)/I)$.

2.2 Sequências regulares e resoluções livres

Definição 2.6. *Sejam* R *um anel e* M *um* R*-módulo. Uma sequência* $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de elementos de* R *é chamada* ***sequência regular em relação a*** M*, ou simplesmente* M***-sequência****, se as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(a) *O elemento* x_i *não é um divisor de zeros para* $M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$ *para* $i = 1, \ldots, n$;

(b) $M \neq (x_1, \ldots, x_n)M$.

Um elemento $x \in R$ *é dito* ***regular*** *se este formar uma* R*-sequência.*

Exemplo 2.7.

- *Seja um domínio integral* R*; qualquer* $f \in R$ *não nulo nos dá uma sequência regular;*

- *Seja* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel local regular com ideal maximal* $\mathfrak{m}$. *Então qualquer conjunto minimal* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *de geradores de* $\mathfrak{m}$ *formam uma sequência regular;*

- *A permutação de uma sequência regular não precisa ser uma sequência regular. Sejam k um corpo e $x_1 = x(y-1)$, $x_2 = y$, $x_3 = z(y-1) \in k[X,Y,Z]$. Então (x_1, x_2, x_3) é uma sequência regular em $k[X,Y,Z]$ mas (x_1, x_3, x_2) não o é. Entretanto, para anéis locais, a permutação de uma sequência regular permanece uma sequência regular.*

Definição 2.8. *Sejam R um anel, $I \subset R$ um ideal e M um R-módulo. Se $M \neq IM$, chamaremos de **profundidade de I em relação a** M, e denotaremos por* $\operatorname{depth}(I, M)$, *o comprimento máximo n de uma sequência regular $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$. Caso $M = IM$, convencionaremos* $\operatorname{depth}(I, M) = \infty$. *Se $(R, \mathfrak{m})$ for um anel local, por simplicidade, denotamos* $\operatorname{depth}(M) := \operatorname{depth}(\mathfrak{m}, M)$.

Exemplo 2.9. *Sejam k um corpo e $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ ou $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ (o anel dos polinômios ou das séries de potências formais). Então,*

$$\operatorname{depth}((X_1, \ldots, X_n), R) \geq n,$$

pois $x_1, \ldots, x_n$ é uma sequência regular.

Proposição 2.10. *Sejam R um anel, M um R-módulo e $\bar{x}$ uma M-sequência. Então uma sequência exata*

$$N_2 \xrightarrow{\phi_2} N_1 \xrightarrow{\phi_1} N_0 \xrightarrow{\phi_0} M \longrightarrow 0$$

de R-módulos induz uma sequência exata

$$N_2/xN_2 \xrightarrow{\overline{\phi}_2} N_1/xN_1 \xrightarrow{\overline{\phi}_1} N_0/xN_0 \xrightarrow{\overline{\phi}_0} M/xM \longrightarrow 0. \tag{2.2}$$

Demonstração. Por indução, basta considerarmos o caso em que $\underline{x} = x$ consiste de um único elemento x regular de M. Obtemos uma sequência da forma (2.2) ao tensorizarmos a sequência original por $R/(x)$ (vide [1, Chapter 2, Exercise 2]). Neste caso, ϕ_i é definida por $\overline{w} \mapsto \overline{\phi_i(w)}$. Por [1, Proposition 2.18], segue que $N_1/xN_1 \xrightarrow{\overline{\phi}_1} N_0/xN_0 \xrightarrow{\overline{\phi}_0} M/xM \longrightarrow 0$ é exata. Assim, só precisamos verificar a exatidão em N_1/xN_1. Se $\overline{\phi}_1(\overline{y}) = 0$, então $\phi_1(y) = xz$ para algum $z \in N_0$ e $x\phi_0(z) = \phi_0(xz) = 0$. Como x é regular, segue que $\phi_0(z) = 0$, de modo que $z \in \operatorname{Ker} \phi_0 = \operatorname{Im} \phi_1$, logo existe $y' \in N_1$ com $z = \phi_1(y')$. Segue-se que $\phi_1(y - xy') = xz - xz = 0$. Então $y - xy' \in \operatorname{Im} \phi_2$, de maneira que $y - xy' = \phi_2(a)$ para algum $a \in N_2$. Portanto, $\overline{y} = \overline{y} - \overline{xy'} = \overline{y - xy'} = \overline{\phi_2(a)} = \overline{\phi}_2(\overline{a}) \in \overline{\phi}_2(N_2/xN_2)$, conforme desejado. $\square$

Proposição 2.11. [2, Proposition 1.2.12] *Seja R um anel local Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Então* $\operatorname{depth}(M) \leq \dim M$.

Definição 2.12. *Seja R um anel local Noetheriano. Dizemos que M é um R-**módulo de Cohen-Macaulay** se $M \neq 0$ e* $\operatorname{depth} M = \dim M$, *ou se $M = 0$. Se R é um R-módulo de Cohen-Macaulay, dizemos que R é um **anel de Cohen-Macaulay**.*

Exemplo 2.13.
- *Seja k um corpo. Como* $\dim k[[X_1, \dots, X_n]] = n$*, segue do Exemplo 2.9 e Proposição 2.11 que* $k[[X_1, \dots, X_n]]$ *é Cohen-Macaulay.*
- *Todo anel Artiniano tem dimensão zero (ver* [1, Theorem 8.5]*), logo é Cohen-Macaulay.*

Definição 2.14. *Sejam R um anel e M um R-módulo. Uma* ***resolução livre de*** *M é uma sequência exata*

$$\cdots \longrightarrow F_{k+1} \xrightarrow{\phi_{k+1}} F_k \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \xrightarrow{\phi_0} M \longrightarrow 0$$

com R-módulos livres F_i para $i \geq 0$. Diremos que uma resolução livre tem ***comprimento finito*** *n se $F_k = 0$ para todo $k > n$ e n é mínimo com respeito a esta propriedade.*

Se $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local, então uma resolução livre como acima será chamada ***minimal*** *se $\phi_k(F_k) \subset \mathfrak{m}F_{k-1}$ para $k \geq 1$ e $b_k(M) := \operatorname{rank}(F_k)$, $k > 0$, será chamado de $k -$* ***th número Betti de*** *M.*

O teorema a seguir garante a existência de uma resolução minimal livre e nos mostra que os números de Betti estão bem definidos.

Teorema 2.15. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Então M tem uma resolução minimal livre onde cada F_i é finitamente gerado. O* rank *de F_k em uma resolução minimal não depende da resolução. Se M tem uma resolução minimal de comprimento finito n,*

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

e se

$$0 \longrightarrow G_m \longrightarrow G_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

é qualquer resolução livre, então $m \geq n$.

Demonstração. Seja $m_1, \dots, m_{s_0}$ um conjunto minimal de geradores de M e consideremos a aplicação sobrejetiva $\phi_0 : F_0 := R^{s_0} \to M$ definida por $\phi_0(r_1, \dots, r_{s_0}) = \sum_{i=1}^{s_0} r_i m_i$. Pelo Lema de Nakayama (vide [1, Proposition 2.6]), $m_1, \dots, m_{s_0}$ induz uma base do espaço vetorial $M/\mathfrak{m}M$. Dessa forma, sendo K_1 o núcleo de ϕ_0, temos $K_1 \subset \mathfrak{m}F_0$. Como K_1 é um submódulo de um módulo finitamente gerado sobre um anel Noetheriano, segue que K_1 também é finitamente gerado. Seguindo o raciocínio ja feito, podemos encontrar uma aplicação sobrejetiva $F_1 := R^{s_1} \to K_1$, onde s_1 é o número mínimo de geradores de K. Seja $\phi_1 : F_1 \to F_0$ definido pela composição $F_1 \to K_1 \hookrightarrow F_0$. Pelo fato de $K_1 \subset \mathfrak{m}F_0$, obtemos $\phi_1(F_1) \subset \mathfrak{m}F_0$. Construímos até o momento a sequência exata $F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \xrightarrow{\phi_0} M \to 0$. Continuando dessa maneira, obtemos uma resolução minimal livre para M. Para mostrarmos a invariância dos números de Betti, consideraremos as duas seguintes resoluções minimais de M:

$$\cdots \xrightarrow{\phi_{n+1}} F_n \cdots \xrightarrow{\phi_1} F_0 \xrightarrow{\phi_0} M \to 0$$

$$\cdots \xrightarrow{\psi_{n+1}} G_n \cdots \xrightarrow{\psi_1} G_0 \xrightarrow{\psi_0} M \to 0.$$

Temos $F_0/\mathfrak{m}F_0 \overset{\overline{\phi_0}}{\simeq} M/\mathfrak{m}M \overset{\overline{\psi_0}}{\simeq} G_0/\mathfrak{m}G_0$, onde $\overline{\phi_0}$ e $\overline{\psi_0}$ são induzidas por ϕ_0 e ψ_0 respectivamente; portanto, $\operatorname{rank}(F_0) = \operatorname{rank}(G_0)$. Sejam $\{f_1, \ldots, f_{s_0}\}$ e $\{g_1, \ldots, g_{s_0}\}$, respectivamente, as bases de F_0 e G_0. Como $\{\psi_0(g_1), \ldots, \psi_0(g_{s_0})\}$ gera M, temos $\phi_0(f_i) = \sum_{j=1}^{s_0} h_{ij} \cdot \psi_0(g_j)$ para algum $h_{ij} \in R$. A matriz (h_{ij}) define uma aplicação $f_0 : F_0 \to G_0$. A aplicação induzida $\overline{f_0} : F_0/\mathfrak{m}F_0 \to G_0/\mathfrak{m}G_0$ é um isomorfismo. Em particular, temos $\det(\overline{h_{ij}}) \neq 0$, onde $\overline{h_{ij}} \in R/\mathfrak{m}$. Isso implica que $\det(h_{ij}) \notin \mathfrak{m}$, ou seja, $\det(h_{ij})$ é uma unidade em R, e assim, f_0 é um isomorfismo. Em particular, f_0 induz um isomorfismo $\operatorname{Ker}(\phi_0) \to \operatorname{Ker}(\psi_0)$. Ou ainda, temos um isomorfismo $\frac{\operatorname{Ker}(\phi_0)}{\mathfrak{m}\operatorname{Ker}(\phi_0)} \simeq \frac{\operatorname{Ker}(\psi_0)}{\mathfrak{m}\operatorname{Ker}(\psi_0)}$ induzido por f_0. Através das sobrejeções $F_1 \to \operatorname{Ker}(\phi_0)$ e $G_1 \to \operatorname{Ker}(\psi_0)$, obtemos $\frac{F_1}{\mathfrak{m}F_1} \simeq \frac{\operatorname{Ker}(\phi_0)}{\mathfrak{m}\operatorname{Ker}(\phi_0)} \simeq \frac{\operatorname{Ker}(\psi_0)}{\mathfrak{m}\operatorname{Ker}(\psi_0)} \simeq \frac{G_1}{\mathfrak{m}G_1}$; portanto, $\operatorname{rank}(F_1) = \operatorname{rank}(G_1)$. Continuando como anteriormente, acabaremos por encontrar a invariância dos números de Betti.

Demonstraremos agora a última afirmação. Sejam

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

uma resolução minimal livre com $F_n \neq (0)$ e

$$0 \longrightarrow G_m \longrightarrow G_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

uma resolução livre qualquer. Seguindo os mesmos passos do parágrafo passado, é possível encontrar aplicações injetivas $f_i : F_i \to G_i$ para todo $0 \leq i \leq n$, donde resulta que $G_n \neq (0)$, ou seja, $m \geq n$. □

Agora apresentaremos uma caracterização dos números de Betti a partir do funtor Tor, o qual é definido através de tensorização de módulos. Para um melhor entendimento deste último, referenciamos [1, Chapter 2].

Definição 2.16. *Um **complexo** de R-módulos é uma sequência de R-módulos e de R-homomorfismos*

$$\cdots \longrightarrow F_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+1}} F_i \xrightarrow{\phi_i} F_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

tais que $\operatorname{Im}\phi_{i+1} \subseteq \operatorname{Ker}\phi_i$ para todo i. Observe que se a igualdade ocorrer para todo i, então a sequência acima tratar-se-á de uma sequência exata.

Seja $\cdots \longrightarrow F_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+1}} F_i \xrightarrow{\phi_i} \ldots \xrightarrow{\phi_1} F_0 \xrightarrow{\phi_0} N \to 0$ uma resolução livre de R-módulos N, isto é, uma sequência exata onde cada F_i são R-módulos livres. Então, para algum R-módulo M, a sequência induzida de R-módulos e homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow M \otimes_A F_{i+1} \xrightarrow{1_M \otimes \phi_{i+1}} M \otimes_A F_i \xrightarrow{1_M \otimes \phi_i} \cdots \longrightarrow M \otimes_A F_0 \longrightarrow 0$$

define um complexo $M \otimes_A F$.

Definição 2.17. *Introduzimos agora os R-módulos* $\mathrm{Tor}_i^R(M, N)$*, que serão chamados de* **Tor-*módulos***:

(a) $\mathrm{Tor}_0^R(M, N) := M \otimes_R N$;

(b) $\mathrm{Tor}_i^R(M, N) := \mathrm{Ker}(1_M \otimes \phi_i)/\,\mathrm{Im}(1_M \otimes \phi_{i+1})$ para todo $i \geq 1$.

Esta definição independe da escolha da resolução livre de N e $\mathrm{Tor}_i^R(M, N) \cong \mathrm{Tor}_i^R(N, M)$ para todo i (vide [9, Exercises 7.1.1. and 7.1.2]).

Pelo Exercício [9, Exercise 7.1.9], sabe-se que $\dim_k \mathrm{Tor}_i^R(M, k) = \mathrm{rank}(F_i)$ para todo i.

Definição 2.18. *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel local Noetheriano e* M *um R-módulo finitamente gerado. O R-módulo* M *tem* ***dimensão projetiva*** *finita se existe uma resolução livre,*

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

com R-módulos livres F_i *finitamente gerados. O inteiro* n *é chamado de* ***comprimento da resolução****. O comprimento mínimo de uma resolução livre é chamado de* ***dimensão projetiva de*** M *e é denotado por* $\mathrm{pd}_R(M)$*.*

Notemos que no Teorema 2.15 foi provado que todas as resoluções livres minimais têm o mesmo comprimento. Logo, os módulos livres têm dimensão projetiva zero.

Teorema 2.19. [Teorema de Auslander-Buchsbaum] *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel local Noetheriano e* $M \neq 0$ *um R-módulo finitamente gerado com* $\mathrm{pd}_R(M)$ *finita. Então*

$$\mathrm{depth}(M) + \mathrm{pd}_R(M) = \mathrm{depth}(R).$$

Demonstração. Vide [2, Theorem 1.3.3]. □

Exemplo 2.20.

- *Seja* F *um módulo livre projetivo. Então* $\mathrm{pd}(F) = 0$*. Pelo Teorema 2.19,* $\mathrm{depth}\, F = \mathrm{depth}\, R$.

- *Consideremos* $(R, \mathfrak{m}, k)$ *um anel local. Seja* x *um elemento regular do anel* R*. A sequência exata curta*

$$0 \to R \xrightarrow{x} R \to \frac{R}{(x)} \to 0$$

  nos mostra que $\mathrm{pd}(R/(x)) = 1$*. Portanto,* $\mathrm{depth}\, R/(x) = \mathrm{depth}\, R - 1$*.*

- *Consideremos o anel das séries de potências formais* $R = k[[X_1, \ldots, X_n]]$*. Então* $R/(X_1, \ldots, X_i) \simeq k[[X_1, \ldots, X_n]]$ *tem profundidade igual a* $n-i$*; portanto, escolhendo* $M = R/(X_1, \ldots, X_i)$ *no Teorema 2.19, obtemos* $\mathrm{pd}(R/(X_1, \ldots, X_i) = i$*. Este é um caminho para construir anéis com dimensão projetiva* n*, para algum* $n \in \mathbb{N}$*.*

Definição 2.21. [9, Exercise 7.1.3] *Sejam*

$$\cdots \longrightarrow F_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+1}} F_i \xrightarrow{\phi_i} \cdots \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\phi_0} N \longrightarrow 0$$

uma resolução livre de R-módulos de N e M um R-módulo. Consideremos o complexo $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(N, M) \xrightarrow{\overline{\phi}_0} \mathrm{Hom}_R\,(F_0, M) \xrightarrow{\overline{\phi}_1} \ldots \xrightarrow{\overline{\phi}_i} \mathrm{Hom}_R\,(F_i, M) \xrightarrow{\overline{\phi}_{i+1}} \ldots$. *Da mesma forma como definimos os* Tor*-módulos, definiremos os* **Ext-*Módulos*** *por*

(a) $\mathrm{Ext}^0_R(N, M) = \mathrm{Hom}_R(N, M)$;

(b) $\mathrm{Ext}^i_R(N, M) = \mathrm{Ker}\,\overline{\phi}_{i+1} / \mathrm{Im}\,\overline{\phi}_i$ *para* $i \geq 1$.

A definição de $\mathrm{Ext}^i_R(N, M)$ *é independente da escolha da resolução livre de* N.

3 Fundamentação Teórica

3.1 Ideais completos, $\mathfrak{m}$-completos, basicamente completos e contraídos

Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local com corpo residual $k = R/\mathfrak{m}$ infinito. O *soco* de um R-módulo Noetheriano M é definido por $(0 :_M \mathfrak{m})$. Mostraremos agora que $\mathrm{Hom}\,(k, R/I) \simeq (\bar{0} :_{\frac{R}{I}} \mathfrak{m})$. De fato, definiremos ϕ da seguinte forma:

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{Hom}\,(k, R/I) & \xrightarrow{\phi} & (\bar{0} : \mathfrak{m}) = \{\bar{x} \in R/I;\, \bar{x}\mathfrak{m} = \bar{0}\} \\ f : k \to R/I & \longmapsto & f(\bar{1}). \end{array}$$

- ϕ está bem definida. De fato, notemos que $f(\bar{1}) \in (\bar{0} : \mathfrak{m})$ pois se $y \in \mathfrak{m}$, então $f(\bar{1}) \cdot y = f(\bar{y}) = f(\bar{0}) = \bar{0}$.

- ϕ é um homomorfismo.

$$\phi(f + g) := (f + g)(\bar{1}) = f(\bar{1}) + g(\bar{1}) =: \phi(f) + \phi(g);$$

$$\phi(rf) := (rf(\bar{1})) = rf(\bar{1}) =: r\phi(f),\, r \in R.$$

- Temos $\ker \phi = \{\theta\}$, onde $\theta : k \to R/I$ é o homomorfismo nulo. De fato, seja $f \in \mathrm{Ker}\,\phi$; então $\phi(f) = \bar{0} \Rightarrow f(\bar{1}) = \bar{0}$. Afirmamos que $f = \theta$. De fato, se $\bar{r} \in R/\mathfrak{m}$ então $f(\bar{r}) = rf(\bar{1}) = r \cdot \bar{0} = \bar{0}$. Portanto, ϕ é injetiva.

- Agora mostraremos que ϕ é sobrejetora. Seja $\bar{x} \in (\bar{0} :_{R/I} \mathfrak{m})$; então $\bar{x}\mathfrak{m} = \bar{0}$. Definiremos f da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rcl} f : R/\mathfrak{m} & \to & R/I \\ \bar{r} & \mapsto & \overline{rx}. \end{array}$$

  Notemos que f está bem definida, pois $\bar{r} = \bar{s} \Rightarrow r - s \in \mathfrak{m} \Rightarrow (r - s)\bar{x} = 0$. Portanto, $r\bar{x} - \bar{x}s = 0 \Rightarrow \overline{rx} = \overline{sx}$. Notemos também que $\bar{x} = \overline{1x} =: f(\bar{1}) = \phi f$. Temos também $(\bar{0} : \mathfrak{m}) = ((I : \mathfrak{m})/I)$. Verificaremos ambas inclusões.

- $(\subseteq)$ $\bar{x} \in (\bar{0} : \mathfrak{m}) \Rightarrow \bar{x}\mathfrak{m} = \bar{0}$. Afirmamos que $x\mathfrak{m} \subseteq I$. De fato, $y \in \mathfrak{m} \Rightarrow \bar{x}y = \bar{0} \Rightarrow \overline{xy} = \bar{0} \Rightarrow xy - 0 \in I \Rightarrow xy \in I$.

- $(\supseteq)$ Seja $\bar{x} \in (I : \mathfrak{m})/I$ onde $x \in (I : \mathfrak{m})$. Logo, $x\mathfrak{m} \subseteq I$. Afirmamos que $\bar{x}\mathfrak{m} = \bar{0}$. De fato, $y \in \mathfrak{m} \Rightarrow \bar{x}y = \overline{xy} = \bar{0}$ pois $xy \in I$. Logo, $\lambda(\bar{0} : \mathfrak{m}) = \lambda((I : \mathfrak{m})/I)$. Observe que $\mathfrak{m} \subset \mathrm{ann}\,(\bar{0} : \mathfrak{m})$, e, portanto, $\mathrm{Hom}\,(k, R/I)$, é um $R/\mathfrak{m}$-espaço vetorial.

Definição 3.1. *O **tipo** de um ideal $\mathfrak{m}$-primário I é definido por $\tau(I) = \dim_k \mathrm{Hom}(k, R/I)$. Isto também é chamado de **soco** de R/I. Observe que $\tau(I) = \lambda(\bar{0} :_{\frac{R}{I}} \mathfrak{m}) = \lambda\left(\frac{(I:\mathfrak{m})}{I}\right)$.*

Definição 3.2. *Seja P um conjunto parcialmente ordenado (ver* Apêndice B.1*). Um par de elementos a e b de P é dito* ***comparável*** *se $a \leq b$ ou $b \leq a$. Caso contrário, a e b são ditos* ***incomparáveis****.*

Uma ***cadeia*** *em P é um subconjunto $C \subseteq P$ no qual cada par de elementos é comparável. Neste caso, C é dito totalmente ordenado. (É o caso dos números reais com relação $\leq$.) Diferentemente, uma* ***anticadeia*** *em P é um subconjunto $A \subseteq P$ no qual cada par de elementos é incomparável. Uma anticadeia A é dita* ***maximal*** *se A não está contida em qualquer anticadeia própria. A seguir, forneceremos um exemplo de anticadeia.*

Seja $R = k[[X_1, X_2, \ldots, X_d]]$ o anel das séries de potências formais nas variáveis $X_1, X_2, \ldots, X_d$. Dizemos que um ideal de R é **monomial** se o mesmo pode ser gerado por monômios de R. Cada monômio $X_1^{a_1} X_2^{a_2} \cdots X_d^{a_d}$ de R pode ser identificado com o elemento $(a_1, a_2, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, onde $\mathbb{Z}_+$ é o conjunto dos números inteiros não negativos. O conjunto $\mathbb{Z}_+^d$ pode ser parcialmente ordenado ao definirmos que $(a_1, a_2, \ldots, a_d) \leq (b_1, b_2, \ldots, b_d)$ se $a_i \leq b_i$ para cada i. Assim, o conjunto dos monômios de R também pode ser parcialmente ordenado via a identificação acima. Um exemplo de anticadeia em R seria o subconjunto $\{X_1^{r_1}, X_2^{r_2}, \ldots, X_d^{r_d}\}$ onde cada $r_i \geq 1$ está fixado.

Definição 3.3. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel tal que $R/\mathfrak{m}$ é infinito. Dizemos que um ideal I de R é* ***basicamente completo*** *se nenhum conjunto de geradores de I puder ser estendido a um conjunto minimal de geradores de um ideal que contenha I propriamente.*

Exemplo 3.4. [3, Example 9.1] *Sejam R um anel local regular de dimensão 2 com maximal $\mathfrak{m} = (x, y)$, $n > 2$ um inteiro positivo e $I = (x^n, x^{n-1}y^{n-1}, y^n)R$. Então os expoentes $(n, 0), (n-1, n-1), (0, n)$ formam uma anticadeia maximal em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, e, assim, I é basicamente completo por* [3, Proposition 8.5].

Definição 3.5. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local. Um ideal I é dito* ***completo em relação a*** *$x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ se $(I : \mathfrak{m}) = (I : x)$. Dizemos que I é* ***completo*** *se I é completo em relação a algum $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$.*

Exemplo 3.6. [11, Example 1.3] *Sejam $R = k[X, Y, Z]_{(X,Y,Z)}$ e $I = (X^2, Y^3, Z^2, XY + XZ, Y^2Z)$. Sendo $\mathfrak{m} = (X, Y, Z)$, teremos*

$$(I : \mathfrak{m}) = (X^2, Y^2, Z^2, XY + YZ, Y^2Z) = (I : Y),$$

de modo que I é completo.

Definição 3.7. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local tal que $R/\mathfrak{m}$ é infinito.*

- *Um ideal $I \subset R$ é chamado* ***$\mathfrak{m}$-completo*** *se $(\mathfrak{m}I :_R x) = I$ para algum $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$. Quando for necessário fazer referência ao elemento x tal que $(I\mathfrak{m} :_R x) = I$, diremos que I é* ***$\mathfrak{m}$-completo em relação a*** *x.*

- *Diremos que um ideal $\mathfrak{m}$-primário I de R é* ***contraído de*** $R[\frac{\mathfrak{m}}{x}]$ *se* $IR[\frac{\mathfrak{m}}{x}] \cap R = I$ *para algum elemento regular* $x \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$.

Observação 3.8. [14, Exercise 10.12 and Proposition 14.2.2] *Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local regular bidimensional tal que $k = R/\mathfrak{m}$ seja infinito. Então um ideal $\mathfrak{m}$-primário I é completo se, e somente se, I é $\mathfrak{m}$-completo, e se, somente se, I é contraído.*

Na proposição a seguir, coletamos alguns fatos básicos a respeito de um ideal ser completo ou $\mathfrak{m}$-completo.

Proposição 3.9. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, $I \subseteq R$ um ideal e $x \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$.*

(a) *Se I é $\mathfrak{m}$-completo em relação a x, então I é completo em relação a x;*

(b) *Se I é $\mathfrak{m}$-completo ou completo em relação a x, então $(I : J)$ também o é para qualquer ideal $J \subseteq R$;*

Suponhamos que I seja $\mathfrak{m}$-primário. Então:

(c) *I é completo em relação a x se, e somente se, $\tau(I) = \lambda(R/(I, x))$;*

(d) *I é $\mathfrak{m}$-completo em relação a x se, e somente se, $\mathfrak{m}I$ é completo em relação a x e I é basicamente completo;*

(e) *Se x é regular e I é contraído de $R[\mathfrak{m}/x]$ (ou seja, $I = IR[\mathfrak{m}/x] \cap R$), então I é completo em relação a x.*

Demonstração. (a) Isto decorre de $(I : x) \subseteq (\mathfrak{m}I : \mathfrak{m}x) = ((\mathfrak{m}I : x) : \mathfrak{m}) = (I : \mathfrak{m}) \subseteq (I : x)$.

(b) Se $(\mathfrak{m}I : x) = I$ para algum $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$, então $(\mathfrak{m}(I : J) : x) = (I : J)$ decorre de $(I : J) = ((\mathfrak{m}I : x) : J) = ((\mathfrak{m}I : J) : x) \supseteq (\mathfrak{m}(I : J) : x) \supseteq (I : J)$. Se $(I : \mathfrak{m}) = (I : x)$, então $((I : J) : x) = ((I : x) : J) = ((I : \mathfrak{m}) : J) = ((I : J) : \mathfrak{m})$.

(c) Como $(I : \mathfrak{m}) = (I : x)$ se, e somente se, $(I : \mathfrak{m})/I = (I : x)/I$. E isto ocorre se, e somente se, $\tau(I) = \lambda((I : \mathfrak{m})/I) = \lambda((I : x)/I)$. O resultado segue pela igualdade $\lambda((R/(I, x)) = \lambda((I : x)/I)$ (vide Exemplo 2.5).

(d) Isto segue de $I \subseteq (\mathfrak{m}I : \mathfrak{m}) \subseteq (\mathfrak{m}I : x)$ e do fato que um ideal J $\mathfrak{m}$-primário é basicamente completo se, e somente se, $(\mathfrak{m}J : \mathfrak{m}) = J$ (vide [10, Theorem 2.12]).

(e) Suponhamos que $IR[\mathfrak{m}/x] \cap R = I$. Seja $\{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ um conjunto de geradores para o ideal maximal $\mathfrak{m}$ com $x = x_1$. É suficiente mostrar que $(I : x) \subseteq (I : \mathfrak{m}) = \bigcap_{i=1}^{s} (I : x_i)$. Seja $r \in (I : x)$, ou seja, $rx \in I$. Então, para todo $i \geq 2$ temos $rx_i = rx(x_i/x) \in IR[\mathfrak{m}/x] \cap R = I$. Por isso, $(I : x) \subseteq \bigcap_{i=2}^{s} (I : x_i) \cap (I : x) = (I : \mathfrak{m})$. $\square$

Suponhamos que Δ é um conjunto fechado para a multiplicação de ideais não nulos finitamente gerados de um anel R. O **fechamento-delta** I_Δ de um ideal I é definido por $I_\Delta = \bigcup_{K\in\Delta}(IK :_R K) = \sum_{K\in\Delta}(IK :_R K)$. Os resultados a seguir nos permitem comparar as propriedades de ideais contraídos, completos e basicamente completos. Sua demonstração utiliza o fechamento-delta no caso especial de $\Delta = \{\mathfrak{m}^i;\, i > 0\}$.

Definição 3.10. *Um conjunto de geradores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de um ideal I de um anel R é dito **regular** quando cada x_i for regular. Se R for um domínio, tal conjunto sempre existe.*

Notação 3.11. $reg(I) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Teorema 3.12. *Se $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local tal que $\mathfrak{m}$ admite um conjunto regular de geradores, então todo ideal $\mathfrak{m}$-primário contraído I de R é basicamente completo.*

Demonstração. Seja $\Delta = \{\mathfrak{m}^i;\, i > 0\}$. Suponhamos que $reg(\mathfrak{m}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Mostraremos primeiramente que $I_\Delta \subseteq \bigcap_{z\in reg(\mathfrak{m})} IR[\frac{\mathfrak{m}}{z}] \cap R \subseteq \bigcap_{i=1}^n IR[\frac{\mathfrak{m}}{x_i}] \cap R \subseteq I_\Delta$. Para a primeira inclusão, sejam $y \in I_\Delta$ e $z \in reg(\mathfrak{m})$. Então, $y\mathfrak{m}^k \subseteq I\mathfrak{m}^k$ para algum $k \geq 1$. Portanto, $yz^k \in y\mathfrak{m}^k \subseteq I\mathfrak{m}^k$, o que implica que $y \in I(\frac{\mathfrak{m}^k}{z^k}) \subseteq IR[\frac{\mathfrak{m}}{z}]$. Logo, $I_\Delta \subseteq \bigcap_{z\in reg(m)} IR[\frac{\mathfrak{m}}{z}] \cap R$. Note que $\bigcap_{z\in reg(\mathfrak{m})} IR[\frac{\mathfrak{m}}{z}] \cap R \subseteq \bigcap_{i=1}^n IR[\frac{\mathfrak{m}}{x_i}] \cap R$ pois cada $x_i \in reg(\mathfrak{m})$.

Seja $y \in \bigcap_{i=1}^n IR[\frac{\mathfrak{m}}{x_i}] \cap R$. Então, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, existe k_j tal que $yx_j^{k_j} \in I\mathfrak{m}^{k_j}$. Portanto, definindo $k = \max\{k_j; j = 1, 2, \ldots, n\}$, temos $yx_j^k \in I\mathfrak{m}^k$ para cada j. Afirmamos que $y \in (I\mathfrak{m}^{nk} : \mathfrak{m}^{nk})$. De fato, cada $z \in \mathfrak{m}^{nk}$ é uma R-combinação linear de monômios $x_1^{t_1}\cdots x_n^{t_n}$, onde $t_1 + \cdots + t_n = nk$. Para cada um desses monômios, algum $t_i \geq k$; caso contrário $t_1 + \cdots + t_n < k + \cdots + k = nk$. Se digamos $t_1 \geq k$; então $yx_1^{t_1}\cdots x_n^{t_n} = (yx_1^k)x_1^{t_1-k}\cdots x_n^{t_n} \in (I\mathfrak{m}^k)(\mathfrak{m}^{nk-k}) = I\mathfrak{m}^{nk}$. Portanto, $y \in (I\mathfrak{m}^{nk} : \mathfrak{m}^{nk}) \subseteq I_\Delta$.

Suponhamos agora que I é contraído. Seja $y \in reg\,(\mathfrak{m}), y \in \mathfrak{m}\backslash\mathfrak{m}^2$ tal que $I = IR[\frac{\mathfrak{m}}{y}] \cap R$. Podemos ver y como um gerador de $\mathfrak{m}$. Então, pelo que fizemos acima, temos $I \subseteq I_\Delta = \bigcap_{z\in reg(\mathfrak{m})} IR[\frac{\mathfrak{m}}{z}] \cap R \subseteq IR[\frac{\mathfrak{m}}{y}] \cap R = I$. Assim, $I = I_\Delta$. Já que $I \subseteq (I\mathfrak{m} :_R \mathfrak{m}) \subseteq I_\Delta$, também temos $I = (I\mathfrak{m} :_R \mathfrak{m})$. Mas um ideal $\mathfrak{m}$-primário I é basicamente completo se, e somente se, $I = (I\mathfrak{m} :_R \mathfrak{m})$. □

Corolário 3.13. *Se $(R, \mathfrak{m})$ é um domínio local, então todo ideal $\mathfrak{m}$-primário contraído I de R é basicamente completo.*

Os seguintes exemplos mostram que, de modo geral, ideal completo não implica em ideal basicamente completo, $\mathfrak{m}$-completo ou contraído.

Exemplo 3.14. [Continuação do Exemplo 3.6] *Temos*

$$(\mathfrak{m}I : \mathfrak{m}) = (X^2,\, Y^3,\, Z^2,\, XY,\, XZ,\, Y^2Z) \neq I;$$

logo, I não é basicamente completo. Em particular, pela Proposição 3.9(d)*, o ideal I não é $\mathfrak{m}$-completo e pelo Teorema 3.12, I também não é contraído.*

3.2 Relação entre $o(I)$, $\tau(I)$ e $\mu(I)$

Definição 3.15. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local R e I um ideal de R. Definiremos a **$\mathfrak{m}$-ádica ordem de** I da seguinte maneira:*

$$o(I) = \min\{r \in \mathbb{N}_0; I \subseteq \mathfrak{m}^r\},$$

isto é, $I \subseteq \mathfrak{m}^{o(I)}$ mas $I \not\subseteq \mathfrak{m}^{o(I)+1}$.

Como $I \neq (0)$ (vide [1, Corollary 10.19]), temos $\bigcap_{n\geq 1} \mathfrak{m}^n = (0)$, portanto, existe $\theta \in \mathbb{Z}$ não-negativo tal que $I \subseteq \mathfrak{m}^\theta$, mas $I \not\subseteq \mathfrak{m}^{\theta+1}$. Neste caso, $o(I) = \theta$.

Exemplo 3.16. *Sejam $R = k[[X, Y]]$ e $I = (X^2, XY^3, Y^4)$. Note que $o(X^2, XY^3, Y^4) = 2$.*

Definição 3.17. *Diremos que um ideal I tem a **propriedade de Rees** se $\mu(J) \leq \mu(I)$ para qualquer ideal J contendo I com $\lambda(\frac{J}{I}) < +\infty$.*

Exemplo 3.18. [Continuação do Exemplo 3.16] *Como $\mu(I) = o(I) + 1$, segue que I satisfaz a propriedade de Rees de acordo com* [15, Theorem 4].

Observação 3.19. *Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local regular bidimensional com $\mathfrak{m} = (x, y)$. Usaremos os seguintes resultados abaixo:*

(a) O anel R é um domínio de fatoração único (vide [13, Theorem 20.3]);

(b) Cada R-módulo M finitamente gerado tem dimensão projetiva finita no máximo dois (vide [13, Theorem 19.2]). Em particular, se I for um ideal $\mathfrak{m}$-primário, então $\operatorname{depth}(R/I) = 0$, e o Teorema 2.19 nos leva a $\operatorname{pd}_R(R/I) = 2$. Uma resolução livre minimal de R/I será então da forma

$$0 \longrightarrow R^p \longrightarrow R^n \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0,$$

onde $n = \mu(I)$ e $p = \mu(\operatorname{Ker} T) = \lambda\left(\frac{\operatorname{Ker} T}{\mathfrak{m}\operatorname{Ker} T}\right)$; mostraremos agora que $p = n - 1$. De fato, escolhamos geradores minimais $x_1, \ldots, x_n$ de I e denotemos por T a aplicação $R^n \to R$ acima definida por $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$. Formemos agora a sequência exata

$$0 \to \operatorname{Ker} T \to R^n \to \operatorname{Im} T \to 0. \tag{3.1}$$

Como x, y é uma sequência regular, tensorizando (3.1) por $k = R/(x, y)$ e usando o Exercício (vide [1, Exercise 2.2]), pela Proposição 2.10, obteremos a sequência exata:

$$0 \to \frac{\operatorname{Ker} T}{\mathfrak{m}\operatorname{Ker} T} \to \frac{R^n}{\mathfrak{m}R^n} \to \frac{\operatorname{Im} T}{\mathfrak{m}\operatorname{Im} T} \to 0.$$

Daí, $\operatorname{Ker}T/\mathfrak{m}\operatorname{Ker}T$ será isomorfo a

$$\{(b_1, \ldots, b_n) \in k^n : \ b_1\overline{x_1} + \cdots + b_n\overline{x_n} = 0, \ \text{com } \overline{x_i} \in k, \ i = 1, \ldots, n\},$$

o qual é um subespaço de k^n de dimensão $n - 1$;

(c) O **anel graduado associado** $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(R) = \frac{R}{\mathfrak{m}} \oplus \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \oplus \cdots$ **com respeito ao ideal** $\mathfrak{m}$ é isomorfo ao anel dos polinômios $k[X,Y]$ (vide [1, Theorem 11.22]);

(d) Se $o(f) = n$, então denotaremos $f^* = f + \mathfrak{m}^{n+1} \in \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \in \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$. Chamaremos f^* de a **forma líder de** f;

(e) O máximo divisor comum (M.D.C) dos elementos em

$$\frac{I + \mathfrak{m}^{o(I)+1}}{\mathfrak{m}^{o(I)+1}} \subseteq \frac{\mathfrak{m}^{o(I)}}{\mathfrak{m}^{o(I)+1}} \subseteq \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(R) \cong k[X,Y],$$

é chamado de **conteúdo de** I e denotaremos por $c(I)$. Notemos que $c(I)$ é um polinômio homogêneo em duas variáveis com grau no máximo $o(I)$ e é determinado de forma única a menos de múltiplo por unidade. Por exemplo, $c(x,y) = 1$ pois $o(x,y) = 1$. Além disso, $c(x^2, xy^3, y^4) = X^2$. Para ver isso, observe que $o(x^2, xy^3, y^4) = 2$ e que $xy^3, y^4 \in \mathfrak{m}^3$; por isso, dentre os geradores, x^2, xy^3 e y^4, basta considerar apenas a imagem de x^2 em $k[X,Y]$ (que é X^2). Também, $c(xy^2, x^2y, y^4, x^4) = XY$. De fato, $o(xy^2, x^2y, y^4, x^4) = 3$ e $y^4, x^4 \in \mathfrak{m}^4$; por isso, dentre os geradores, xy^2, x^2y, y^4 e x^4, basta considerar apenas a imagem de xy^2, x^2y em $k[X,Y]$, que é XY^2 e X^2Y, e cujo M.D.C é XY;

(f) Sejam $x \in \mathfrak{m}\backslash\mathfrak{m}^2$ e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Então $R' = R/(x)$ é um anel regular local unidimensional. De fato, um anel regular é normal (vide [13, Theorem 19.4]). Assim, um anel local regular de dimensão 1 é um domínio de valorização discreta de acordo com (vide [13, Theorem 11.2]). Como I é $\mathfrak{m}$-primário, segue que I não está contido em (x) (do contrário, teria altura ≤ 1). Assim, I' é um ideal não nulo em R'. Concluímos da Proposição A.65 que $\lambda\left(\frac{R}{I+(x)}\right) = o_{R'}(I')$, onde $I' = IR'$. Consideremos as seguintes sequências exatas

$$0 \to \frac{(I:\mathfrak{m})}{I} \to \frac{(I:x)}{I} \to \frac{(I:x)}{(I:\mathfrak{m})} \to 0,$$

$$0 \to \frac{(I:x)}{I} \to \frac{R}{I} \xrightarrow{x} \frac{R}{I} \to \frac{R}{I+(x)} \to 0.$$

Aplicando a Proposição 2.4 às sequências exatas acima, obtemos

$$o(I) \leq o_{R'}(I') = \lambda\left(\frac{R}{I+(x)}\right) = \lambda\left(\frac{(I:x)}{I}\right) = \lambda\left(\frac{(I:\mathfrak{m})}{I}\right) + \lambda\left(\frac{(I:x)}{(I:\mathfrak{m})}\right). \quad (3.2)$$

O seguinte resultado pode ser encontrado em (vide [2, Theorem 1.4.17]).

Teorema 3.20. [Teorema de Hilbert-Burch] *Seja R um anel Noetheriano. Sejam A uma matriz $n \times (n-1)$ com entradas em R e d_i o determinante da matriz obtida de A deletando-se a i-ésima linha. Suponhamos que um ideal I de R tenha uma resolução livre da forma*

$$0 \to R^{n-1} \xrightarrow{A} R^n \to I \to 0.$$

Então $I = r(d_1, \ldots, d_n)$ para algum elemento regular $r \in R$.

Lema 3.21. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local regular bidimensional e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Então:*

(a) $\lambda\left(\frac{(I:\mathfrak{m})}{I}\right) = \mu(I) - 1$;

(b) $\mu(I) \leq o(I) + 1$;

(c) *Para qualquer $x \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$,*

$$\mu(I) - 1 \leq o(I) \leq o_{R'}(I') = \lambda\left(\frac{R}{I + (x)}\right) = \mu(I) - 1 + \lambda\left(\frac{(I : x)}{(I : \mathfrak{m})}\right).$$

Demonstração. Calculamos primeiro $\mathrm{Tor}_2^R(k, R/I)$ usando a resolução do corpo k e depois usando a resolução de R/I. Seja $\mathfrak{m} = (x, y)$. Então

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}} R^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}} R \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva de k. Ao tensorizar esta resolução por R/I e usando [1, Exercise 2.2], obtemos

$$0 \longrightarrow R/I \xrightarrow{\begin{bmatrix} \overline{y} \\ -\overline{x} \end{bmatrix}} (R/I)^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} \overline{x} & \overline{y} \end{bmatrix}} R/I \longrightarrow R/\mathfrak{m} = k \longrightarrow 0.$$

O núcleo da aplicação $\overline{z} \mapsto (\overline{zy}, -\overline{zx})$ é $(I : \mathfrak{m})/I \simeq \mathrm{Tor}_2^R(k, R/I)$. Por outro lado, a Observação 3.19 nos mostra que a dimensão do k-espaço vetorial $\mathrm{Tor}_2^R(k, R/I)$, que é o segundo número de Betti de R/I, é exatamente $\mu(I) - 1$. Isso prova (a).

Da Observação 3.19 sabemos que uma resolução livre minimal de R/I tem a seguinte forma:

$$0 \to R^{n-1} \xrightarrow{A} R^n \to R \to R/I \to 0,$$

onde $n = \mu(I)$ e a aplicação $R^{n-1} \to R^n$ é definida via multiplicação por uma matriz A de ordem $n \times (n-1)$. Como a resolução acima é minimal, as entradas de A pertencem a $\mathfrak{m}$, e também, I possui uma resolução livre da forma

$$0 \to R^{n-1} \xrightarrow{A} R^n \to I \to 0.$$

Pelo Teorema 3.20, segue que $I \subseteq \mathfrak{m}^{n-1}$, isto é, $o(I) \geq n - 1$. Isso prova (b).

Pela Equação (3.2) e os itens anteriores, para qualquer $x \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$, conseguimos $\mu(I) - 1 \leq o(I) \leq o_{R'}(I') = \lambda\left(\frac{R}{I+(x)}\right) = \lambda\left(\frac{(I:\mathfrak{m})}{I}\right) + \lambda\left(\frac{(I:x)}{(I:\mathfrak{m})}\right) = \mu(I) - 1 + \lambda\left(\frac{(I:x)}{(I:\mathfrak{m})}\right)$, o que prova (c). $\square$

Teorema 3.22. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local regular bidimensional e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário.*

(a) *Se $x \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$, então $(I : x) = (I : \mathfrak{m})$ se, e somente se, $\mu(I) - 1 = \lambda(\frac{R}{I+(x)}) = o(I)$. Se $x \in \mathfrak{m}^2$, então $(I : x) = (I : \mathfrak{m})$ se, e somente se, $I = \mathfrak{m}$;*

(b) *Se $x \in R$ tal que $(I : \mathfrak{m}) = (I : x)$, então $\mu(I) = o(I) + 1$;*

(c) *Se $\mu(I) = o(I) + 1$ e k é um corpo residual infinito de R, então existe um elemento $x \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$ tal que $(I : \mathfrak{m}) = (I : x)$.*

Demonstração. Pelo item (c) do Lema 3.21, se $x \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$, então $(I : x) = (I : \mathfrak{m})$ se, e somente se, $\mu(I) - 1 = \lambda\left(\frac{R}{I+(x)}\right) = o(I)$.

Suponhamos que $x \in \mathfrak{m}^2$ e também que $(I : \mathfrak{m}) = (I : x)$. Já que I é $\mathfrak{m}$-primário, então existe $e \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^e \subseteq I$. Portanto, $(I : \mathfrak{m}^2) \subseteq (I : x) = (I : \mathfrak{m}) \subseteq (I : \mathfrak{m}^2)$, provando que $(I : \mathfrak{m}) = (I : \mathfrak{m}^2)$. Daí, $(I : \mathfrak{m}) : \mathfrak{m}^{n-1} = (I : \mathfrak{m}^2) : \mathfrak{m}^{n-1}$, de modo que $(I : \mathfrak{m}^n) = (I : \mathfrak{m}^{n+1})$ para todo n. Logo, $R = (I : \mathfrak{m}^e) = (I : \mathfrak{m})$, donde $I = \mathfrak{m}$. Recipromente, se $I = \mathfrak{m}$, então $(I : x) = R = (I : \mathfrak{m})$, o que finaliza a prova de (a).

Suponhamos agora que $x \in R$ seja tal que $(I : \mathfrak{m}) = (I : x)$. Se $x \in R/\mathfrak{m}$, então x é uma unidade, e assim, $(I : \mathfrak{m}) = (I : x) = I$, de maneira que $(I : \mathfrak{m}^n) = I$ para todo n, o que contradiz a suposição de que I é $\mathfrak{m}$-primário, já que neste caso $(I : \mathfrak{m}^n) = R$ para algum n. Portanto, necessariamente $x \in \mathfrak{m}$, e então as duas partes do item (a) provam que $\mu(I) = o(I) + 1$. Isso prova (b).

Para finalizarmos a prova deste teorema, suponhamos que o corpo de resíduos seja infinito. As formas lineares de grau 1 são: $k[X,Y]_1 = \{ax + by : \ a, b \in R/\mathfrak{m}\}$. Como $c(I) \in k[X,Y] \simeq \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} R$ possui uma quantidade finita de fatores e $k[X,Y]_1$ possui uma quantidade infinita de elementos (pois k é infinito), existirão infinitas formas lineares em $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$ que não dividem $c(I)$. Escolhamos qualquer $x \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$ cuja forma líder seja uma destas formas lineares. Devido a definição de $c(I)$ isto significa que existe $f \in I$ tal que $f \notin \mathfrak{m}^{o(I)+1}$ e de tal modo que a forma líder x^* não divide f^*. Como $f \in I \subseteq \mathfrak{m}$, segue que $o(I) = o(f) = o_{R'}(f + I) = o_{R'}(I')$, onde $R' = R/(x)$ e $I' = IR'$. O Lema 3.21(c) e a hipótese $\mu(I) = o(I) + 1$ derivam $\lambda\left(\frac{(I:x)}{(I:\mathfrak{m})}\right) = 0$, ou seja, $(I : x) = (I : \mathfrak{m})$, provando (c). □

Exemplo 3.23. [14, Example 14.1.9] *Sejam k um corpo infinito, $R = k[[X,Y]]$ e $\mathfrak{m} = (X,Y)$.*

(a) $I = (X^2Y, X^5, Y^5)$ não é completo (e, portanto, não é integralmente fechado), pois $\mu(I) = 3 \neq 4 = o(I) + 1$;

(b) Ideais integralmente fechados são completos, mas o contrário não é recíproco. Por exemplo, sejam $I_1 = (X^2, XY^4, Y^5)$ e $I_2 = (X^2, XY^3, Y^5)$. Então $\mu(I_j) = o(I_j) + 1$, para $j = 1, 2$, de modo que pelo Teorema 3.22(c) ambos os I_j são completos.

Entretanto, os fechos integrais de I_1 e I_2 são os mesmos, e pelo menos um dos dois ideais não é integralmente fechado, do contrário: $I_1 = \overline{I_1} = \overline{I_2} = I_2$.

3.3 Ideais Completos

O seguinte resultado mostra a relevância de $\tau(I)$, $\mu(I)$ e $o(I)$ na obtenção de condições necessárias e suficientes para I ser completo em domínios locais regulares bidimensionais.

Proposição 3.24. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local regular bidimensional e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Então:*

(a) $\tau(I) = \mu(I) - 1$;

(b) *Se I é completo, então $\mu(I) - 1 = o(I)$;*

(c) *Se R tem um corpo residual infinito e $\mu(I) - 1 = o(I)$, então I é completo.*

Demonstração. Segue do Lema 3.21 e Teorema 3.22. □

Em seguida, consideramos a relação entre $o(I)$ e $o(I : \mathfrak{m})$ para um ideal I em um anel local regular $(R, \mathfrak{m})$. Se I e J são ideais de um anel R, escrevemos $J \mid I$ se $I = JL$ para algum ideal L de R. Portanto, $J \mid I$ se, e somente se, $I = J(I : J)$. De fato, se $I = JL$ para algum ideal L, então $L \subseteq (I : J)$. Logo, $I = JL \subseteq J(I : J) \subseteq I$ e, portanto, $I = J(I : J)$.

Proposição 3.25. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local regular e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Então*

$$o(I) - 1 \leq o(I : \mathfrak{m}) \leq o(I) \text{ com } o(I) - 1 = o(I : \mathfrak{m}) \text{ se } \mathfrak{m} \mid I.$$

Demonstração. Seja $o(I) = r$. Temos $I \subseteq \mathfrak{m}^r$ e $I \nsubseteq \mathfrak{m}^{r+1}$. Por [8, Proposition 1.1], segue que $\mathfrak{m}$ é um ideal normal, e por [8, Proposition 2.4], cada potência $\mathfrak{m}^n$ é um ideal $\mathfrak{m}$-completo (e, consequentemente, basicamente completo pela Proposição 3.9), de modo que $(\mathfrak{m}^n : \mathfrak{m}) = \mathfrak{m}^{n-1}$ para todo n. Já que $\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m}) \subseteq I \subseteq \mathfrak{m}^r$, segue que $(I : \mathfrak{m}) \subseteq (\mathfrak{m}^r : \mathfrak{m}) = \mathfrak{m}^{r-1}$. Portanto, $o(I : \mathfrak{m}) \geq r - 1$. Se $(I : \mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}^{r+1}$, então $\mathfrak{m}I \subseteq \mathfrak{m}(I : \mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}^{r+2}$ e, portanto, $I \subseteq (\mathfrak{m}^{r+2} : \mathfrak{m}) = \mathfrak{m}^{r+1}$, o que seria uma contradição. Logo, $r - 1 \leq o(I : \mathfrak{m}) \leq r$. Agora vamos assumir que $\mathfrak{m} \mid I$. Então $I = \mathfrak{m}(I : \mathfrak{m})$. Se $o(I : \mathfrak{m}) = r$ então $I = \mathfrak{m}(I : \mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}^{r+1}$, o que também seria uma contradição. Logo, $o(I : \mathfrak{m}) = r - 1$. □

O resultado acima deixa a questão do que pode ser dito se $\mathfrak{m} \nmid I$. Para isso, podemos nos guiar pelo caso bidimensional, porém devemos ter em mente que as igualdades

$\mu(I) - 1 = \tau(I) = o(I)$ não são mais válidas se $\dim(R) > 2$. No entanto, temos a seguinte relação entre $\mu(I)$ e $o(I)$ (vide [15, Theorem 4]):

Lema 3.26. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local regular de dimensão $d \geq 2$ e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário $\mathfrak{m}$-completo com $r = o(I)$. Então $\mu(I) \geq \begin{pmatrix} r+d-1 \\ d-1 \end{pmatrix} = \mu(\mathfrak{m}^r)$, com igualdade se, e somente se, $\mathfrak{m}^{r+1} = \mathfrak{m}I + x\mathfrak{m}^r$ para algum $x \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$.*

Demonstração. Como todo ideal $\mathfrak{m}$-completo tem a propriedade de Rees e $I \subseteq \mathfrak{m}^r$, segue-se que $\mu(I) \geq \mu(\mathfrak{m}^r) = \begin{pmatrix} r+d-1 \\ d-1 \end{pmatrix}$.

Agora, suponhamos que $(\mathfrak{m}I : x) = I$ para algum $x \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$. Como $I \subseteq \mathfrak{m}^r$, temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{(\mathfrak{m}I : x)}{\mathfrak{m}I} \longrightarrow \frac{\mathfrak{m}^r}{\mathfrak{m}I} \xrightarrow{\cdot x} \frac{\mathfrak{m}^r}{\mathfrak{m}I} \longrightarrow \frac{\mathfrak{m}^r}{\mathfrak{m}I + x\mathfrak{m}^r} \longrightarrow 0$$

e, portanto, pela Proposição 2.4, $\lambda\left(\frac{(\mathfrak{m}I:x)}{\mathfrak{m}I}\right) = \lambda\left(\frac{\mathfrak{m}^r}{\mathfrak{m}I + x\mathfrak{m}^r}\right)$. Por outro lado, consideremos a sequência exata natural

$$0 \to \frac{\mathfrak{m}^{r+1}}{\mathfrak{m}I + x\mathfrak{m}^r} \to \frac{\mathfrak{m}^r}{\mathfrak{m}I + x\mathfrak{m}^r} \to \frac{\mathfrak{m}^r}{\mathfrak{m}^{r+1}} \to 0.$$

Segue que

$$\lambda\left(\frac{\mathfrak{m}^r}{\mathfrak{m}I + x\mathfrak{m}^r}\right) = \lambda\left(\frac{\mathfrak{m}^r}{\mathfrak{m}^{r+1}}\right) + \lambda\left(\frac{\mathfrak{m}^{r+1}}{\mathfrak{m}I + x\mathfrak{m}^r}\right) = \mu(\mathfrak{m}^r) + \lambda\left(\frac{\mathfrak{m}^{r+1}}{\mathfrak{m}I + x\mathfrak{m}^r}\right).$$

Portanto,

$$\mu(I) = \lambda\left(\frac{I}{\mathfrak{m}I}\right) = \lambda\left(\frac{(\mathfrak{m}I : x)}{\mathfrak{m}I}\right) = \lambda\left(\frac{\mathfrak{m}^r}{\mathfrak{m}I + x\mathfrak{m}^r}\right) = \mu(\mathfrak{m}^r) + \lambda\left(\frac{\mathfrak{m}^{r+1}}{\mathfrak{m}I + x\mathfrak{m}^r}\right),$$

donde se deriva o lema. □

Proposição 3.27. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local regular bidimensional e I um ideal completo $\mathfrak{m}$-primário com $o(I) = r$ e $\mathfrak{m} \nmid I$. Então*

$$o(I : \mathfrak{m}) = \begin{cases} r-1 & , \textit{se} \quad \mathfrak{m} \mid I \\ r & , \textit{se} \quad \mathfrak{m} \nmid I. \end{cases}$$

Demonstração. Como I é completo, pela Proposição 3.24, $\mu(I) - 1 = \tau(I) = o(I)$. Pela Proposição 3.9, $(I : \mathfrak{m})$ também é completo, e pela mesma razão, $\mu(I : \mathfrak{m}) - 1 = \tau(I : \mathfrak{m}) = o(I : \mathfrak{m})$. Portanto, de $\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m}) \subseteq I \subseteq (I : \mathfrak{m})$, temos $1 \leq \lambda(\frac{I}{\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m})}) = \lambda(\frac{(I:\mathfrak{m})}{\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m})}) - \lambda(\frac{I:\mathfrak{m}}{I}) = \lambda(\frac{(I:\mathfrak{m})}{\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m})}) - \tau(I) = \mu(I : \mathfrak{m}) - \tau(I) = o(I : \mathfrak{m}) + 1 - o(I)$. Então, $o(I : \mathfrak{m}) \geq o(I)$. Concluímos pela Proposição 3.25 que

$$o(I : \mathfrak{m}) = \begin{cases} r-1 & , \text{se} \quad \mathfrak{m} \mid I \\ r & , \text{se} \quad \mathfrak{m} \nmid I \end{cases}$$

□

Corolário 3.28. *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel local regular bidimensional e* I *um ideal completo* $\mathfrak{m}$*-primário com* $o(I) = r$*. Então*

$$\mu(I : \mathfrak{m}) = o(I : \mathfrak{m}) + 1 = \begin{cases} r = \mu(\mathfrak{m}^{r-1}), & se \quad \mathfrak{m} \mid I \\ r + 1 = \mu(\mathfrak{m}^{r-1}) + 1, & se \quad \mathfrak{m} \nmid I. \end{cases}$$

Demonstração. Basta usar que $(I : \mathfrak{m})$ também é completo (vide Proposição 3.24). □

No caso em que $\dim R > 2$, o corolário acima não é verdadeiro, mas podemos obter uma cota inferior para $\mu(I : \mathfrak{m})$ para anéis locais regulares gerais (vide Teorema 3.30). Para isso, usaremos o seguinte lema.

Lema 3.29. *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel local,* I *um ideal* $\mathfrak{m}$*-primário e* $x \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$*.*

(a) *Se* $o(I : x) \geq r - 1$ *e* $o(I) \geq r$*, então a multiplicação por* x*,* $\mathfrak{m}^{r-1} \xrightarrow{\cdot x} \mathfrak{m}^r$*, induz uma aplicação injetora de* R*-módulos* $\mathfrak{m}^{r-1}/(I : x) \to \mathfrak{m}^r/I$*.*

(b) *Se* I *é completo em relação a* x *e* $o(I : x) \geq r$*, então a multiplicação por* x*,* $\mathfrak{m}^{r-1} \xrightarrow{\cdot x} \mathfrak{m}^r$*, induz uma aplicação injetora de* R*-módulos* $\mathfrak{m}^r/(I : x) \to \mathfrak{m}^{r+1}/\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m})$*.*

Demonstração. (a) Por hipótese, $(I : x) \subseteq \mathfrak{m}^{r-1}$ e $I \subseteq \mathfrak{m}^r$. O núcleo da composição $\mathfrak{m}^{r-1} \xrightarrow{\cdot x} \mathfrak{m}^r \to \mathfrak{m}^r/I$ é $(I : x)$. De fato, se $y \in \mathfrak{m}^{r-1}$ é tal que $yx \in I$, então $y \in (I : x)$. Pelo Teorema dos Isomorfismos, obtemos a aplicação desejada.

(b) Basta mostrarmos que o núcleo Ker da composição $\mathfrak{m}^r \xrightarrow{\cdot x} \mathfrak{m}^{r+1} \to \mathfrak{m}^{r+1}/\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m})$ é $(I : x)$. De fato, $\text{Ker} = (\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m}) : x) \subseteq (I : x) = (I : \mathfrak{m}) \subseteq (\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m}) : x) = \text{Ker}$.

□

Teorema 3.30. *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel regular e* $I \subset R$ *um ideal completo* $\mathfrak{m}$*-primário com* $o(I) = r$*. Então,* $\mu(I : \mathfrak{m}) \geq \mu(\mathfrak{m}^{r-1}) + \lambda(I/\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m}))$*. Portanto,*

$$\mu(I : \mathfrak{m}) \geq \begin{cases} \mu(\mathfrak{m}^{r-1}) & , se \quad \mathfrak{m} \mid I \\ \mu(\mathfrak{m}^{r-1}) + 1 & , se \quad \mathfrak{m} \nmid I \end{cases}$$

Se R *tem dimensão 2, então a igualdade é verdadeira.*

Demonstração. Pela Proposição 3.25, obtemos $o(I : \mathfrak{m}) \geq r - 1$. Uma vez que $\mathfrak{m}^{r-1} \supseteq (I : \mathfrak{m}) \supseteq \mathfrak{m}(I : \mathfrak{m})$, utilizando o Exemplo 2.2, obtemos

$$\mu(I : \mathfrak{m}) = \lambda\left(\frac{(I : \mathfrak{m})}{\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m})}\right) = \lambda(\mathfrak{m}^{r-1}/\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m})) - \lambda(\mathfrak{m}^{r-1}/(I : \mathfrak{m})). \tag{3.3}$$

Já que $\mathfrak{m}^{r-1} \supseteq \mathfrak{m}^r \supseteq \mathfrak{m}(I : \mathfrak{m})$, também obtemos

$$\lambda(\mathfrak{m}^{r-1}/\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m})) = \lambda(\mathfrak{m}^{r-1}/\mathfrak{m}^r) + \lambda(\mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m}) = \lambda(\mathfrak{m}^{r-1}/\mathfrak{m}^r) + \lambda(\mathfrak{m}^r/I) + \lambda(I/\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m})). \tag{3.4}$$

Substituindo a Equação (3.4) na Equação (3.3), obtemos

$$\mu(I:\mathfrak{m}) = [\mu(\mathfrak{m}^{r-1}) + \lambda(I/\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m}))] + [\lambda(\mathfrak{m}^r/I) - \lambda(\mathfrak{m}^{r-1}/(I:\mathfrak{m}))].$$

Agora, basta mostrarmos que $\lambda(\mathfrak{m}^r/I) \geq \lambda(\mathfrak{m}^{r-1}/(I:\mathfrak{m}))$. Tomando $x \in \mathfrak{m}\backslash\mathfrak{m}^2$ tal que $(I:\mathfrak{m}) = (I:x)$, isto segue pelo Lema 3.29(a). □

Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local regular bidimensional e I é um ideal completo $\mathfrak{m}$-primário. Escrevendo $\mathfrak{m} = (x,y)$, note que $\mu(\mathfrak{m}^n) = n+1$ para todo n. Então se $o(I) = r$, pela Proposição 3.24, $\tau(I) = o(I) = \mu(\mathfrak{m}^{r-1})$. Se $\dim R > 2$, temos a seguinte desigualdade.

Corolário 3.31. *Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel local regular e I um ideal completo $\mathfrak{m}$-primário com $o(I) = r$. Então, $\tau(I) \geq \mu(\mathfrak{m}^{r-1})$.*

Demonstração. Utilizando o Teorema 3.30 e as inclusões $\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m}) \subseteq I \subseteq (I:\mathfrak{m})$, temos

$$\mu(I:\mathfrak{m}) \geq \mu(\mathfrak{m}^{r-1}) + \lambda(I/\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m})) = \mu(\mathfrak{m}^{r-1}) + \lambda\left(\frac{(I:\mathfrak{m})}{\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m})}\right) - \lambda((I:\mathfrak{m})/I).$$

Como $\lambda((I:\mathfrak{m})/I) = \tau(I)$ e $\mu(I:\mathfrak{m}) = \lambda\left(\frac{(I:\mathfrak{m})}{\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m})}\right)$, cancelando-se $\mu(I:\mathfrak{m})$ acima, pode-se concluir que $\tau(I) \geq \mu(\mathfrak{m}^{r-1})$, o que completa a afirmação. □

Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel local regular d-dimensional e I um ideal completo $\mathfrak{m}$-primário com $o(I) = r$. Se $d = 2$ e $\mathfrak{m} \nmid I$, então $o(I:\mathfrak{m}) = r$ e $\mu(I:\mathfrak{m}) = \mu(\mathfrak{m}^r)$ pelo Corolário 3.28. Se $d \geq 3$, não sabemos se $\mathfrak{m} \nmid I$ implica em $o(I:\mathfrak{m}) = r$. Mas, se assumirmos $o(I:\mathfrak{m}) = r$, podemos obter uma conclusão similar a do Lema 3.26 sem supor que R é regular, veja a seguir.

Proposição 3.32. *Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel local e I um ideal completo $\mathfrak{m}$-primário com $o(I) = r$. Se $o(I:\mathfrak{m}) = r$, então $\mu(I:\mathfrak{m}) \geq \mu(\mathfrak{m}^r)$.*

Demonstração. Visto que $\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m}) \subseteq (I:\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}^r$ e $\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}^{r+1} \subseteq \mathfrak{m}^r$, pelo Exemplo 2.2, conseguimos

$$\lambda\left(\frac{(I:\mathfrak{m})}{\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m})}\right) + \lambda\left(\frac{\mathfrak{m}^r}{(I:\mathfrak{m})}\right) = \lambda\left(\frac{\mathfrak{m}^r}{\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m})}\right) = \lambda\left(\frac{\mathfrak{m}^{r+1}}{\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m})}\right) + \lambda\left(\frac{\mathfrak{m}^r}{\mathfrak{m}^{r+1}}\right).$$

Daí, $\mu(I:\mathfrak{m}) + \lambda(\mathfrak{m}^r/(I:\mathfrak{m})) = \lambda(\mathfrak{m}^{r+1}/\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m})) + \mu(\mathfrak{m}^r)$. Por isso, $\mu(I:\mathfrak{m}) - \mu(\mathfrak{m}^r) = \lambda(\mathfrak{m}^{r+1}/\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m})) - \lambda(\mathfrak{m}^r/(I:\mathfrak{m}))$, e basta mostrarmos que $\lambda(\mathfrak{m}^{r+1}/\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m})) \geq \lambda(\mathfrak{m}^r/(I:\mathfrak{m}))$. Por hipótese, I é completo em relação a algum $x \in \mathfrak{m}\backslash\mathfrak{m}^2$. O resultado segue do Lema 3.29(b). □

3.4 Produto do ideal maximal por um ideal completo

O teorema do produto de Zariski [16, Appendix 5, Theorem 2] garante que o produto de dois ideais contraídos (resp. integralmente fechados) é novamente contraído (resp. integralmente fechado). Para demonstrá-lo, primeiramente foi provado que o produto do ideal maximal e um ideal contraído (resp. integralmente fechado) é ainda um ideal contraído (resp. integralmente fechado). (Vide [16, Corollary 1, p.376 e Corollary 1, p.380].) Sabemos que em um anel local regular bidimensional, um ideal I é contraído se, e somente se, I for um ideal completo. Isto levanta a seguinte questão:

Dado um anel local regular $(R, \mathfrak{m})$ e I um ideal completo em relação a x, o produto $\mathfrak{m}I$ também é completo em relação a x?

A resposta é apresentada na Proposição 3.34.

Lema 3.33. *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel local,* I *um ideal* $\mathfrak{m}$*-primário e* $x \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$*. Então:*

(a) $\lambda(R/(I : x)) = \lambda((I, x)/I)$;

(b) $\mu(I) = \lambda((I, x)/\mathfrak{m}I) - \lambda(R/(I : x))$;

(c) $\mu((I, x)/(x)) = \lambda((I, x)/\mathfrak{m}I) - \lambda(R/(\mathfrak{m}I : x))$;

(d) $(I : x) = (\mathfrak{m}I : x)$ *se, e somente se,* $\mu(I) = \mu((I, x)/(x))$.

Demonstração. (a) Utilizando as sequências exatas

$$0 \to \frac{I : x}{I} \to \frac{R}{I} \to \frac{R}{(I : x)} \to 0 \quad \text{e} \quad 0 \to \frac{(I, x)}{I} \to \frac{R}{I} \to \frac{R}{(I, x)} \to 0,$$

e também o Exemplo 2.5, obtemos:

$$\lambda(R/(I : x)) = \lambda(R/I) - \lambda((I : x)/I) = \lambda(R/I) - \lambda(R/(I, x)) = \lambda((I, x)/I).$$

(b) Usando a sequência exata

$$0 \to \frac{I}{\mathfrak{m}I} \to \frac{(I, x)}{\mathfrak{m}I} \to \frac{(I, x)}{I} \to 0,$$

e item (a), conclui-se que $\mu(I) = \lambda(I/\mathfrak{m}I) = \lambda((I, x)/\mathfrak{m}I) - \lambda((I, x)/I) = \lambda((I, x)/\mathfrak{m}I) - \lambda(R/(I : x))$.

(c) Aplicando o item (a) ao ideal $\mathfrak{m}I$, obtemos $\lambda(R/(\mathfrak{m}I : x)) = \lambda((\mathfrak{m}I, x)/\mathfrak{m}I)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\lambda((I, x)/\mathfrak{m}I) - \lambda(R/(\mathfrak{m}I : x)) &= \lambda((I, x)/\mathfrak{m}I) - \lambda((\mathfrak{m}I, x)/\mathfrak{m}I) \\
&= \lambda((I, x)/(\mathfrak{m}I, x)) \\
&= \lambda\left(\frac{\frac{(I,x)}{(x)}}{\frac{(\mathfrak{m}I,x)}{(x)}}\right) \\
&= \lambda\left(\frac{\frac{(I,x)}{(x)}}{\mathfrak{m}\frac{(I,x)}{(x)}}\right) \\
&= \mu((I, x)/(x)).
\end{aligned}$$

(d) Segue dos itens (b) e (c). □

O tipo de sequência exata curta usada no item (a) do lema acima (que são do tipo daquelas encontradas no Exemplo 2.2) será ainda utilizada várias vezes, mas por simplicidade não tornaremos a fazer menção, presumindo que o leitor já esteja habituado ao uso da mesma.

Proposição 3.34. *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel local e* I *um ideal* $\mathfrak{m}$*-primário. Assumimos que* I *é completo em relação a* $x \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$*. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\mathfrak{m}I$ *é completo em relação a* x*;*

(b) $\mu((I, x)/(x)) = \tau(\mathfrak{m}I) - \tau(I)$.

Demonstração. Observe que $\mathfrak{m}I$ é completo em relação a x se, e somente se, $\lambda((\mathfrak{m}I : x)/\mathfrak{m}I) = \lambda((\mathfrak{m}I : \mathfrak{m})/\mathfrak{m}I) = \tau(\mathfrak{m}I)$. Fazendo a diferença no Lema 3.33 dos itens (b) e (c), obtemos $\mu(I) - \mu((I, x)/(x)) = \lambda(R/(\mathfrak{m}I : x)) - \lambda(R/(I : x)) = \lambda((I : x)/(\mathfrak{m}I : x))$. Notemos então que

$$\begin{aligned}
\lambda((\mathfrak{m}I : x)/\mathfrak{m}I) &= \lambda((I : x)/\mathfrak{m}I) - \lambda((I : x)/(\mathfrak{m}I : x)) \\
&= \lambda((I : \mathfrak{m})/\mathfrak{m}I) - \lambda((I : x)/(\mathfrak{m}I : x)) \\
&= \tau(I) + \mu(I) - [\mu(I) - \mu((I, x)/(x))] \\
&= \tau(I) + \mu((I, x)/(x)),
\end{aligned}$$

e disso, conclui-se o resultado. □

3.5 Ideais completos de parâmetro

Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local de dimensão $d \geq 1$. Dizemos que $x_1, \ldots, x_d \in R$ é um **sistema de parâmetros** se $I = (x_1, \ldots, x_d)$ é um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Neste caso, I é dito um **ideal de parâmetro** do anel R.

Teorema 3.35. [13, Theorem 18.1] *Seja* $(R, \mathfrak{m}, k)$ *um anel local Noetheriano de dimensão* n*. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\operatorname{Ext}^i_R(k, R) = 0$ *para* $i \neq n$ *e* $\simeq k$ *para* $i = n$*;*

(b) $\operatorname{Ext}^i_R(k, R) = 0$ *para algum* $i > n$*;*

(c) $\operatorname{Ext}^i_R(k, R) = 0$ *para* $i < n$ *e* $\simeq k$ *para* $i = n$*;*

(d) *O anel* R *é de Cohen-Macaulay e* $\operatorname{Ext}^n_R(k, R) \simeq k$*;*

(e) *O anel* R *é de Cohen-Macaulay e todo ideal* I *de parâmetro de* R *é irredutível;*

(f) *O anel R é de Cohen-Macaulay e existe um ideal de parâmetro irredutível.*

Um ideal I é dito ***irredutível*** *se $I = J \cap J'$ implica $I = J$ ou $I = J'$.*

Definição 3.36. *Um anel local Noetheriano satisfazendo qualquer uma das condições equivalentes do teorema acima é chamado de* ***Gorenstein****.*

Mostraremos a seguir que qualquer ideal de parâmetro completo em um anel local regular é normal.

Teorema 3.37. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local regular de dimensão $d \geq 1$ e I um ideal de parâmetro de R. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) *I é contraído;*

(b) *I é completo;*

(c) *I é $\mathfrak{m}$-completo;*

(d) *I é integralmente fechado;*

(e) *I é normal;*

(f) *$\lambda((I + \mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2) \geq d - 1$.*

Demonstração. (e) $\Leftrightarrow$ (f) Segue de [8, Theorem 3.1].

(f) $\Rightarrow$ (b) Basta usar a equivalência anterior e [8, Theorem 2.4].

(b) $\Rightarrow$ (f) Seja $x \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$ tal que $(I : \mathfrak{m}) = (I : x)$. Então pelo Lema 3.33(a) temos

$$\lambda(R/(I, x)) = \lambda((I : x)/I) = \lambda((I : \mathfrak{m})/I). \tag{3.5}$$

Por [2, Proposition 3.1.20], R é um anel de Cohen-Macaulay e de Gorenstein. Então por [2, Theorem 2.1.2], I é gerado por uma R-sequência, de modo que por [2, Proposition 3.1.19], R/I também será um anel de Gorenstein. Mas pelo Exemplo A.60 e [1, Theorem 8.5], $\dim R/I = 0$. Concluímos de [4, Proposition 21.5] (ou do Teorema 3.35) que $\lambda((I : \mathfrak{m})/I) = 1$. Ou seja, $\lambda(R/(I, x)) = 1$. Logo, $\mathfrak{m} = (I, x)$, e temos

$$\begin{aligned} d = \mu(\mathfrak{m}) &= \lambda(\mathfrak{m}/(I + \mathfrak{m}^2)) + \lambda((I + \mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2) \\ &= \lambda((I, x)/(I, x^2)) + \lambda((I + \mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Visto que $I \subseteq (I, x^2)$, temos $\lambda((I, x)/(I, x^2)) \leq \lambda((I, x)/I) = 1$ (ver a Equação (3.5)), e por conseguinte, $\lambda((I + \mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2) \geq d - 1$.

(d) $\Rightarrow$ (a) Veja o Lema [3, Lemma 3.3].

(a) $\Rightarrow$ (b) Veja a Proposição 3.9(e). $\square$

A seguir, reforçamos a equivalência entre (b) e (c) no Teorema 3.37.

Corolário 3.38. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local regular de dimensão $d \geq 1$ e I um ideal de parâmetro do anel R. Então I é completo com relação a x se, e somente se, I é $\mathfrak{m}$-completo com relação a x.*

Demonstração. Pelos itens (a) e (d) da Proposição 3.9, basta mostrarmos que, se I é um ideal completo em relação a x, então $\mathfrak{m}I$ é completo em relação a x e I é basicamente completo. Fazemos isso a seguir. Pelo Teorema 3.37, o ideal I é $\mathfrak{m}$-completo, de modo que pela Proposição 3.9, I é basicamente completo. Neste caso, $I = (\mathfrak{m}I : \mathfrak{m})$. Seguindo os passos da prova do Teorema 3.37, se I é um ideal de parâmetro completo em relação a x, então $\mathfrak{m} = (I, x)$. Dessa forma,

$$I = (\mathfrak{m}I : \mathfrak{m}) \subseteq (\mathfrak{m}I : x) \subseteq (I : x) = (I : \mathfrak{m}).$$

Disso, teremos $I = (\mathfrak{m}I : \mathfrak{m}) = (\mathfrak{m}I : x)$ ou $(\mathfrak{m}I : x) = (I : x)$ visto que $\tau(I) = \lambda((I : \mathfrak{m})/I) = 1$. Mas se $(\mathfrak{m}I : x) = (I : x)$, obteremos pelo Lema 3.33(d) que $d = \mu(I) = \mu((I, x)/(x)) = \mu(\mathfrak{m}/(x))$. Como $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$, segue que x pode ser um dos geradores minimais de $\mathfrak{m}$, de maneira que $\mu(\mathfrak{m}/(x)) = d - 1$, o que é uma contradição. Conclui-se que $I = (\mathfrak{m}I : \mathfrak{m}) = (\mathfrak{m}I : x)$, isto é, $\mathfrak{m}I$ é completo em relação a x. □

Corolário 3.39. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local regular e I um ideal de parâmetro completo de R. Então $(I : \mathfrak{m})$ é um ideal de parâmetro normal.*

Demonstração. Mostraremos que $(I : \mathfrak{m})$ é um ideal de parâmetro completo; o resultado seguirá então do Teorema 3.37. Deste teorema, I é $\mathfrak{m}$-completo, e desse modo, terá a propriedade de Rees de acordo com [15, Theorem 3]. Portanto, $\mu(I : \mathfrak{m}) \leq \mu(I) = d$. Além disso, como $(I : \mathfrak{m})$ é $\mathfrak{m}$-primário, segue do Teorema A.66 que $\mu(I : \mathfrak{m}) \geq d$, de modo que $\mu(I : \mathfrak{m}) = d$. Dessa forma, $(I : \mathfrak{m})$ é um ideal de parâmetro. Segue-se da Proposição 3.9(b) que $(I : \mathfrak{m})$ é completo. Logo, $(I : \mathfrak{m})$ é um ideal de parâmetro completo. Isso completa a prova. □

Corolário 3.40. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local regular de dimensão $d \geq 2$ e I um ideal de parâmetro tal que $I \neq \mathfrak{m}$. Então, temos as seguintes equivalências:*

(a) *I é completo;*

(b) $\lambda((I + \mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2) = d - 1$;

(c) $I \cap \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}(I : \mathfrak{m})$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Por hipótese, $(I : \mathfrak{m}) = (I : x)$. Na Proposição 3.37, mostramos que $\mathfrak{m} = (I, x)$, e também que $\lambda((I, x)/(I, x^2)) \leq 1$. Afirmamos que, se $I \neq \mathfrak{m}$, então

$\lambda((I,x)/(I,x^2)) = 1$. De fato, suponhamos que $(I,x) = (I,x^2)$. Podemos então escrever $x = a + rx^2$, onde $a \in I$, de maneira que $x(1-rx) = a \in I$. Como $1 - rx$ é uma unidade (vide [1, Proposition 1.9]), obtemos $x \in I$. Consequentemente, $\mathfrak{m} = (I,x) = I$, o que é uma contradição. O resultado segue da Equação 3.6.

(b) $\Rightarrow$ (a) Isto segue do Teorema 3.37.

(a) $\Rightarrow$ (c) Utilizando que $\mu(I:\mathfrak{m}) = d$ (ver prova do Corolário 3.39), $\lambda((I:\mathfrak{m})/I) = 1$ (ver prova do Teorema 3.37) e $I/(I \cap \mathfrak{m}^2) \simeq (I+\mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2$ (vide [1, Proposition 2.1(ii)]), obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda((I\cap\mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m})) &= \lambda((I:\mathfrak{m})/\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m})) - \lambda((I:\mathfrak{m})/(I\cap\mathfrak{m}^2))\\
&= \mu(I:\mathfrak{m}) - [\lambda((I:\mathfrak{m})/I) + \lambda(I/(I\cap\mathfrak{m}^2))]\\
&= \mu(I:\mathfrak{m}) - \lambda((I:\mathfrak{m})/I) - \lambda(I/(I\cap\mathfrak{m}^2))\\
&= d - 1 - \lambda((I+\mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2)\\
&= d - 1 - (d-1)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

(c) $\Rightarrow$ (a) Por hipótese, $\lambda((I+\mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2) = \lambda(I/(I\cap\mathfrak{m}^2)) = \lambda(I/\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m})) = \lambda((I:\mathfrak{m})/\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m})) - \lambda((I:\mathfrak{m})/I) = \mu(I:\mathfrak{m}) - \lambda((I:\mathfrak{m})/I) = \mu(I:\mathfrak{m}) - 1 \geq d-1$, onde a última desigualdade segue do Teorema A.66 já que $(I:\mathfrak{m})$ é $\mathfrak{m}$-primário. Assim, novamente pelo Teorema 3.37(f), I é completo. □

A seguir, vemos um exemplo de um ideal de parâmetro completo no caso $d = 3$.

Exemplo 3.41. [11, Example 4.5] *Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local regular com ideal maximal $\mathfrak{m} = (x,y,z)$. Seja $I = (x,y,z^n)$ um ideal de parâmetro com $n \geq 2$.*

(a) *I é completo desde que $(I:\mathfrak{m}) = (I:z)$;*

(b) *$(I:\mathfrak{m}) = (x,y,z^{n-1})$, $\mu(I:\mathfrak{m}) = 3$, e $\lambda((I:\mathfrak{m})/I) = 1$;*

(c) *$I \cap \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}(I:\mathfrak{m}) = ((x,y)^2, z(x,y), z^n)$;*

(d) *$\lambda((I+\mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2) = \lambda(I/(I\cap\mathfrak{m}^2)) = \lambda(I/\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m})) = 2 = d-1$;*

(e) *$\lambda(\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m})/\mathfrak{m}I) = 1$.*

3.6 Ideais basicamente completos de parâmetro

Devido ao Teorema 3.37, o segundo diagrama na Introdução deste trabalho pode ser reduzido ao diagrama a seguir quando estivermos trabalhando com ideais de parâmetros em um anel local regular.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{normal} \Leftrightarrow \text{integralmente fechado} \Leftrightarrow \mathfrak{m}\text{-completo} \Leftrightarrow \text{completo} \Leftrightarrow \text{contraído}} \arrow[d, "(i)"] \\
\boxed{\text{propriedade de Rees}} \arrow[d, "(ii)"] \\
\boxed{\text{basicamente completo}}
\end{tikzcd}
$$

Definição 3.42. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local. Se $I \subsetneq J$ são ideais de R, dizemos que J é uma **cobertura** de I se $J/I \simeq R/\mathfrak{m}$.*

Lema 3.43. *Sejam R um anel e $\mathfrak{m}$ um ideal maximal de R. Suponhamos que M é um R-módulo com $\mathfrak{m}M = 0$. Então $\lambda_R(M) = \dim_{R/\mathfrak{m}} M$. O comprimento é finito se, e somente se, M é um R-módulo finitamente gerado.*

Demonstração. Temos $\lambda_R(M) = \lambda_{R/\mathfrak{m}}(M) = \dim_{R/\mathfrak{m}} M$ (ver Lemas A.61 e A.58). Assim, o comprimento é finito se, e somente se, M tiver uma base finita como um $R/\mathfrak{m}$-espaço vetorial se, e somente se, M tiver um conjunto de geradores como um R-módulo (vide [1, Proposition 2.8]). □

Lema 3.44. *Sejam R um anel e M um R-módulo. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) *M é simples;*

(b) $\lambda_R(M) = 1$;

(c) *$M \simeq R/\mathfrak{m}$ para algum ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R.*

Demonstração. (a) $\Leftrightarrow$ (b) Segue direto da definição de comprimento.

(c) $\Rightarrow$ (b) Seja $\mathfrak{m}$ um ideal maximal de R. Pelo Lema 3.43, temos $\lambda_R(M) = \lambda_R(R/\mathfrak{m}) = 1$.

(a) $\Rightarrow$ (c) Suponhamos que M seja simples. Vamos escolher $x \in M$ com $x \neq 0$. Como M é simples, temos $M = Rx$. Seja $I = \operatorname{ann}(x) \subset R$. A aplicação $R/I \to M$, definida por $f + I \mapsto fx$, é um isomorfismo, por isso R/I é um R-módulo simples. Como $R/I \neq 0$, temos $I \neq R$. Seja então $\mathfrak{m}$ um ideal maximal contendo I. Se $I \neq \mathfrak{m}$, então $\mathfrak{m}/I \subset R/I$ é um submódulo não trivial que contradiz a simplicidade de R/I. Portanto, $I = \mathfrak{m}$, como desejado. □

Proposição 3.45. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local regular de dimensão $d \geq 1$ e I um ideal de parâmetro basicamente completo tal que $I \neq \mathfrak{m}$. Então:*

(a) *$(I : \mathfrak{m})$ é um ideal de parâmetro basicamente completo;*

(b) $\lambda(I/\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m})) = d - 1$;

(c) $\lambda((I + \mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2) \leq d - 1$. *A igualdade ocorre se, e somente se,* $I \cap \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}(I : \mathfrak{m})$;

(d) $\mathfrak{m} \nmid I$ *se* $d \geq 2$.

Demonstração. (a) Na prova do Teorema 3.37 vimos que $\tau(I) = \lambda((I : \mathfrak{m})/I) = 1$. Pelo lema anterior, $(I : \mathfrak{m})$ será uma cobertura de I. Uma vez que I é basicamente completo, conseguimos $\mu(I : \mathfrak{m}) \leq \mu(I) = d$ devido a [10, Theorem 2.12]. Por isso, $\mu(I : \mathfrak{m}) = d$ pois $(I : \mathfrak{m})$ é $\mathfrak{m}$-primário (vide Teorema A.66). Além disso, note que $(\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m}) : \mathfrak{m}) \subseteq (I : \mathfrak{m})$, ou melhor, $(\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m}) : \mathfrak{m}) = (I : \mathfrak{m})$. Então $(I : \mathfrak{m})$ é basicamente completo de acordo com [10, Theorem 2.17].

(b) Já que $\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m}) \subseteq I \subseteq (I : \mathfrak{m})$, por (a), obtemos $\lambda(I/\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m})) = \lambda((I : \mathfrak{m})/\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m})) - \lambda((I : \mathfrak{m})/I) = \mu(I : \mathfrak{m}) - \lambda((I : \mathfrak{m})/I) = d - 1$.

(c) Visto que $\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m}) \subseteq I \cap \mathfrak{m}^2 \subseteq I$, por (b), obtemos:

$$\begin{aligned}
\lambda((I + \mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2) &= \lambda(I/(I \cap \mathfrak{m}^2)) \\
&= \lambda(I/\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m})) - \lambda((I \cap \mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m}) \\
&= d - 1 - \lambda((I \cap \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m})).
\end{aligned}$$

Disso, deduz-se a afirmação.

(d) Suponhamos por absurdo que $\mathfrak{m} \mid I$. Então $I = \mathfrak{m}(I : \mathfrak{m})$, de modo que $\lambda(I/\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m})) = 0$, o que contradiz o item (b) já que $d \geq 2$ (por hipótese). Portanto, $\mathfrak{m} \nmid I$. □

Proposição 3.46. *Sejam $R = k[[X_1, X_2, \ldots, X_d]]$ e $I = (X_1^{r_1}, X_2^{r_2}, \ldots, X_d^{r_d})$, onde $r_1, \ldots, r_d \geq 1$. Então I é um ideal basicamente completo se, e somente se, $r_i > 1$ para no máximo um índice i se, e somente se, I é completo.*

Demonstração. Denotemos $\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_d)$. Suponhamos que I é um ideal basicamente completo. Digamos que $r_1, r_2 > 1$; então a anticadeia $\{X_1^{r_1}, X_1^{r_1-1}X_2, X_2^{r_2}, \ldots, X_d^{r_d}\}$ contém propriamente $\{X_1^{r_1}, X_2^{r_2}, \ldots, X_d^{r_d}\}$, gerando uma contradição de acordo com [10, Proposition 8.5]. Reciprocamente, assumimos que $r_i > 1$ para no máximo um índice i; digamos que $r_1 > 1$ e $r_i = 1$ para $i \geq 2$. Note que $(I : X_1) = \mathfrak{m}$ e $\mathfrak{m}^2 \subseteq I$. Assim, $(I : X_1) \subseteq (I : \mathfrak{m})$, isto é, I é um ideal completo com relação a X_1, de modo que pelo Teorema 3.37, I é $\mathfrak{m}$-completo e, portanto, pela Proposição 3.9(d), o ideal I é basicamente completo. □

Exemplo 3.47. [15, Example 5.3] *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel local regular bidimensional com o ideal maximal* $\mathfrak{m} = (x, y, z)$ *e* $I = (x, y^2, z^3)$*. Utilizando a Proposição 3.46, pode-se deduzir que* I *não é basicamente completo. Um outro modo de confirmarmos isto seria pelo fato de que* $yz^2 \in (\mathfrak{m}I : \mathfrak{m}) \setminus I$*.*

Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local regular bidimensional com corpo residual infinito e I um ideal de parâmetro (ou seja, $\mu(I) = 2$). Então, pela Proposição 3.24, o ideal I é completo se, e somente se, $o(I) = 1$. A próxima proposição nos fornece alguns resultados no caso em que $\dim R \geq 2$.

Proposição 3.48. *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel local regular de dimensão* $d \geq 2$ *e* I *um ideal de parâmetro.*

(a) *Se* I *é completo, então* $o(I) = 1$*;*

(b) *Se* I *tem a propriedade de Rees, então* $o(I) = 1$*.*

Demonstração. (a) Pelo Teorema 3.37, $\lambda(I/(I \cap \mathfrak{m}^2)) \geq d - 1 \geq 1$. Assim, $I \neq I \cap \mathfrak{m}^2$, ou seja, $I \nsubseteq \mathfrak{m}^2$, logo $o(I) = 1$.

(b) Suponhamos que $o(I) \neq 1$; então $I \subseteq \mathfrak{m}^2$. Por hipótese, I tem a propriedade de Rees, de maneira que $d = \mu(I) \geq \mu(\mathfrak{m}^2) = \begin{pmatrix} d+1 \\ 2 \end{pmatrix} = (d+1)d$, de modo que $d \leq 1$, o que contradiz nossa hipótese. $\square$

Em geral, a recíproca da Proposição 3.48(a) não é verdadeira, conforme observamos no próximo exemplo.

Exemplo 3.49. [11, Example 5.5] *Sejam* $R = k[X, Y, Z]_{(X,Y,Z)}$ *e* $I = (X, Y^2, Z^2)$*. Então* $o(I) = 1$*, mas* $(\mathfrak{m}I : \mathfrak{m}) = (I, YZ) \neq I$*. Logo, o ideal* I *não é basicamente completo, e portanto,* I *não é completo (veja o diagrama no início desta seção).*

A Apêndice

A.1 Fundamentos de álgebra comutativa

A.1.1 Anéis e Ideais

Nesta primeira seção, começaremos definindo os conceitos de anéis e ideais, bem como suas principais propriedades para o bom entendimento do trabalho.

Definição A.1. *Seja $R \neq \emptyset$ um conjunto onde estejam definidas duas operações, as quais chamaremos de* ***soma*** *e* ***produto*** *em R, e as denotaremos por $+$ e $\cdot$, respectivamente:*

$$\begin{array}{rcl} + : R \times R & \longrightarrow & R \\ (a, b) & \longmapsto & a + b \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \cdot : R \times R & \longrightarrow & R \\ (a, b) & \longmapsto & a \cdot b \end{array}$$

Chamaremos $(R, +, \cdot)$ de um ***anel comutativo*** *se as seguintes oito propriedades são verificadas quaisquer que sejam $a, b, c \in R$:*

(1) *Associatividade da soma:*

$$(a + b) + c = a + (b + c);$$

(2) *Existência de elemento neutro para soma:*

$$\exists\, 0 \in R \text{ tal que } a + 0 = 0 + a = a;$$

(3) *Existência de elemento inverso aditivo:*

$$\forall\, x \in R\,,\ \text{existe um único } y \in R\,,\ \text{denotado por } y = -x,\ \text{tal que } x + y = y + x = 0;$$

(4) *Comutatividade da soma:*

$$a + b = b + a;$$

(5) *Associatividade do produto:*

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$$

(6) *Distributividade:*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c;$$

(7) *Existência de elemento neutro para o produto:*

$$\exists\, 1 \in R\,,\, 1 \neq 0\,,\, tal\, que\, a \cdot 1 = 1;$$

(8) *Comutatividade do produto:*

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Definição A.2. *Seja R um anel comutativo tal que:*

$$x, y \in R,\; x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \;\; ou \;\; y = 0.$$

*Diz-se que R é um **domínio (de integridade)** .*

Definição A.3. *Dizemos que um anel R é um **corpo** se:*

$$\forall\, x \in R,\; x \neq 0,\; \exists\, y \in R \;\; tal \;\; que \;\; x \cdot y = y \cdot x = 1.$$

Observação A.4. *Todo corpo é um domínio. De fato, se $x \neq 0$ e $x \cdot y = 0$ então $x^{-1} \cdot x \cdot y = x^{-1} \cdot 0$, de modo que $y = 0$.*

Exemplo A.5. *Sejam $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$ os conjuntos dos números inteiros e reais, respectivamente.*

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *é um domínio;*
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *é um corpo;*
- *Seja $\mathbb{Z}[\imath] = \{a + b\imath \;;\; a, b \in \mathbb{Z}\}$. Então $(\mathbb{Z}[\imath], +, \cdot)$ é um domínio chamado **anel dos inteiros de Gauss**.*

A partir deste momento, na maioria das situações, em vez de escrevermos $x \cdot y$, para indicarmos a operação de multiplicação, escreveremos apenas xy.

Definição A.6. *Sejam R um anel e $S \subseteq R$ não vazio. Dizemos que S é um **subanel de** R se:*

(a) $1_R \in S$;

(b) $x + y \in S$, *sempre que* $x, y \in S$;

(c) $xy \in S$, *sempre que* $x, y \in S$.

Exemplo A.7. *Trazemos abaixo alguns exemplos de subanéis.*

- $\mathbb{Z}$ *é um subanel de* $\mathbb{Q}$;

- *$\mathbb{Q}$ é um subanel de $\mathbb{R}$;*
- *Todo anel R é um subanel do anel de polinômios $R[X]$ com coeficientes em R.*

Iniciaremos agora o estudo sobre outro tipo de subestrutura de um anel: os ideais.

Definição A.8. *Um **ideal** I de um anel R é um subconjunto de R tal que:*

- *$x + y \in I$, sempre que $x, y \in I$;*
- *$x \cdot r \in I$, sempre que $x \in I$ e $r \in R$.*

*O ideal I é dito **próprio** se $I \neq R$ ou, equivalentemente, se $1 \notin I$.*

Exemplo A.9. *A seguir daremos alguns exemplos de ideais importantes para este trabalho.*

- *Sendo R um anel, $\{0\}$ e R são ideais de R chamados **ideais triviais de** R.*
- *Para cada $n \in \mathbb{Z}$, o conjunto $I = n\mathbb{Z} = \{nz;\ z \in \mathbb{Z}\}$ é um ideal de $\mathbb{Z}$. Na verdade, todo ideal de $\mathbb{Z}$ é da forma $n\mathbb{Z}$ para algum $n \in \mathbb{Z}$* (vide [6, Exemplo I.1.9]).
- *A interseção de qualquer família $(I_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de ideais também é um ideal.*

Definição A.10. *Sejam R um anel e $S \subseteq R$ um subconjunto qualquer. Definimos o **ideal de** R **gerado por** S como sendo a interseção de todos os ideais de R que contém S. Denotaremos este ideal por (S). Notemos que, se I é um ideal de R que contém S, então $(S) \subseteq I$. Caso exista $S \subseteq R$ tal que $I = (S)$, dizemos que S é um **conjunto gerador de** I (ou S **gera** I, como ideal). Além disso, se $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ dizemos que I é um **ideal finitamente gerado** e o denotaremos por $I = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$.*

Sejam $(R, +, \cdot)$ um anel e I um ideal de R. Sobre R, definimos a relação de congruência $(\text{mod } I)$:

$$x \equiv y \ (\text{mod } I) \Leftrightarrow x - y \in I, \text{ sempre que } x, y \in R.$$

A relação definida acima é uma relação de equivalência. Se $x \in R$, por definição, a sua classe de equivalência módulo I consiste no subconjunto $\{y \in R;\ y \equiv x\,(\text{mod}\, I)\}$, ou seja, no subconjunto $\{y \in R;\ y - x \in I\} = \{x + c;\ c \in I\}$; denotaremos esta classe por $\bar{x}$ ou $x + I$. Estas classes de equivalência também são chamadas **classes laterais**.

Definição A.11. *Sejam R um anel e I um ideal de R. Se $\bar{x} = x + I$ e $R/I = \{\bar{x};\ x \in R\}$, definimos duas operações, chamadas **soma** e **produto**, em R/I:*

$$\begin{array}{rcl} + : R/I \times R/I & \longrightarrow & R/I \\ (\bar{x}, \bar{y}) & \longmapsto & \overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \cdot : R/I \times R/I & \longrightarrow & R/I \\ (\bar{x}, \bar{y}) & \longmapsto & \overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y}. \end{array}$$

• $(R/I, +, \cdot)$ *é um anel chamado* ***anel quociente*** *de R por I.*

Exemplo A.12. *$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, onde $n \in \mathbb{Z}$, é um anel quociente.*

Definição A.13. *Um ideal $\mathfrak{p}$ de um anel R é chamado de* ***ideal primo*** *se $\mathfrak{p} \neq R$, e se sempre que $x \cdot y \in \mathfrak{p}$ tivermos $x \in \mathfrak{p}$ ou $y \in \mathfrak{p}$.*

Definição A.14. *Um ideal $\mathfrak{m}$ de um anel R é chamado de* ***ideal maximal*** *se $\mathfrak{m} \neq R$ e se sempre que existir um outro ideal I tal que $\mathfrak{m} \subseteq I \subseteq R$, tivermos $I = R$ ou $I = \mathfrak{m}$. Diremos que R é um* ***anel local*** *, e denotaremos por $(R, \mathfrak{m})$, se R possui um único ideal maximal $\mathfrak{m}$.*

Notemos que todo ideal maximal é um ideal primo. De fato, $\mathfrak{m}$ é um ideal maximal se, e somente se, o anel quociente $R/\mathfrak{m}$ for um corpo. Por outro lado, $R/\mathfrak{m}$ é um domínio se, e somente se, $\mathfrak{m}$ for um ideal primo (vide [7, Exercício 3.3.8]).

Exemplo A.15. *Consideremos o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$. O ideal $p\mathbb{Z}$ é primo no caso de p ser um número primo.*

Sejam R e R' dois anéis. Para facilitar a compreensão da seguinte definição, denotaremos as operações desses anéis pelos mesmos símbolos $+$ e $\cdot$; denotaremos também por 0 o elemento neutro de R, e $0'$ o elemento neutro de R', e 1 a unidade de R e $1'$ a unidade de R'.

Definição A.16. *Uma função $f : R \to R'$ diz-se um* ***homomorfismo*** *de R em R' se satisfaz as seguintes condições:*

(a) $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall\, x, y \in R$;

(b) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \forall\, x, y \in R$;

(c) $f(1) = 1'$.

Se $f : R \to R'$ é um homomorfismo bijetivo dizemos que f é um **isomorfismo** de anéis. Neste caso, chamaremos os anéis R e R' de **isomorfos** (e escreveremos $R \simeq R'$), se existir um isormorfismo de R sobre R'.

Mostraremos a seguir algumas propriedades elementares de homomorfismos.

Proposição A.17. *Sejam R e R' anéis e $f : R \to R'$ um homomorfismo. Temos:*

(a) $f(0) = 0'$;

(b) $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in R$.

Demonstração. (a) $f(a-a) = f(a) - f(a) \Rightarrow f(0) = 0'$

(b) Seja $x \in R$. De $x + (-x) = 0$, segue pelo item (a) que $f(x) + f(-x) = 0'$, ou seja , $f(-x) = -f(x)$.

□

Exemplo A.18. *Abaixo trazemos alguns exemplos clássicos de homomorfismo de anéis.*

- *A função $f : R \to R'$ tal que $f(x) = 0', \forall x \in R$, ou seja, a função identicamente nula, é um homomorfismo de R em R'.*
- *Sejam J um ideal de R e $\bar{R} = R/J$. A projeção canônica $\pi : R \to \bar{R}$ definida por $\pi(x) = \bar{x}, \forall\, x \in R$, é tal que:*

$$\pi(x+y) = \overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y} = \pi(x) + \pi(y), e$$
$$\pi(x \cdot y) = \overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y} = \pi(x) \cdot \pi(y), \forall\, x, y \in R,$$

  ou seja, π é um homomorfismo de R sobre $\overline{R} = R/J$.
- *Para $R = \mathbb{R}[X]$, anel de polinômios com coeficientes reais, e I o ideal principal gerado por $X^2 + 1$, R/I é um anel isomorfo a $\mathbb{C}$, o corpo dos números complexos* (vide [6, Exercício I.5.11]).

O seguinte teorema é denominado de **Teorema de Homomorfismo de Anéis**.

Teorema A.19. *Sejam R e R' anéis e $f : R \to R'$ um homomorfismo. Temos:*

(a) *O* ***núcleo de*** *f, definido por* $\mathrm{Ker} f := \{x \in R; f(x) = 0'\}$, *é um ideal de R , e f é injetiva se, e somente se,* $\mathrm{Ker} f = \{0\}$;

(b) *A* ***imagem de*** *f, definida por* $\mathrm{Im}\, f := \{f(x);\, x \in R\}$, *é um subanel de R';*

(c) $R\,/\,\mathrm{Ker} f \simeq \mathrm{Im}\, f$.

Demonstração. (a) Sejam $x, y \in \mathrm{Ker} f$. Então $f(x) = 0'$ e $f(y) = 0'$. Entretanto, f é um homomorfismo de anéis. Logo $f(x) + f(y) = f(x+y)$. Daí, $f(x+y) = 0'$. Portanto, $x + y \in \mathrm{Ker} f$. Seja $r \in R$. Como f é um homomorfismo, temos :

$$f(r \cdot x) = f(r) \cdot f(x).$$

Como $f(x) = 0'$, temos $f(rx) = 0'$. Portanto, $rx \in \mathrm{Ker} f$. Logo, Ker f é um ideal de R.

(b) Sejam $f(x), f(y) \in \operatorname{Im} f$. Temos $f(x+y) \in \operatorname{Im} f$ e $f(x \cdot y) \in \operatorname{Im} f$.

Como f é um homomorfismo, temos:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ e } f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

Portanto, $f(x) + f(y) \in \operatorname{Im} f$ e $f(x) \cdot f(y) \in \operatorname{Im} f$. Como f é um homomorfismo de anéis, temos $f(1) = 1$. Portanto, $1 \in \operatorname{Im} f$. Logo, Im f é um subanel de R'.

(c) Vamos definir ϕ da seguinte forma :

$$\begin{array}{rcl} \phi : \frac{R}{\operatorname{Ker} f} & \rightarrow & \operatorname{Im} f \\ \bar{r} & \mapsto & f(r) \end{array}$$

Notemos que ϕ está bem definida. De fato, se $\bar{r} = \bar{s}$, então

$$r + \operatorname{Ker} f = s + \operatorname{Ker} f \Rightarrow r - s \in \operatorname{Ker} f\,.$$

Daí, $f(r-s) = 0$. Como f é um homomorfismo, temos: $f(r-s) = f(r) - f(s)$.

Portanto, $f(r) - f(s) = 0$. Logo, $f(r) = f(s)$.

Mostraremos que ϕ é um homomorfismo.

- $\phi(\bar{x} + \bar{y}) = \phi((x + \operatorname{Ker} f) + (y + \operatorname{Ker} f)) = \phi((x+y) + \operatorname{Ker} f) := f(x+y)$
- $\phi(r\bar{x}) = \phi(r(x + \operatorname{Ker} f)) = \phi(rx + \operatorname{Ker} f) := f(rx)$

  Como f é um homomorfismo, temos:

- $\phi(\bar{x} + \bar{y}) = f(x) + f(y) =: \phi(x + \operatorname{Ker} f) + \phi(y + \operatorname{Ker} f) = \phi(\bar{x}) + \phi(\bar{y})$, e
- $\phi(r\bar{x}) = rf(x) =: r\phi(x + \operatorname{Ker} f) = r\phi(\bar{x})$.

Portanto, ϕ é um homomorfismo. Agora, mostraremos que $\operatorname{Ker} \phi = \{\bar{0}\}$ e, portanto, ϕ será injetiva. De fato, seja $\bar{r} \in \operatorname{Ker} \phi$. Então $\phi(\bar{r}) = 0$. Mas, por definição, temos $\phi(\bar{r}) = \phi(r + \operatorname{Ker} f) = f(r)$. Daí, $f(r) = 0 \Rightarrow r \in \operatorname{Ker} f$. Portanto, $\bar{r} = \bar{0}$. Também ϕ é sobrejetiva, pois dado $f(x) \in \operatorname{Im} f$, notemos que $\phi(x + \operatorname{Ker} f) = f(x)$.

Acabamos de mostrar que ϕ é bijetiva, o que completa a prova. □

Definição A.20. *Um elemento $x \in R$ é chamado* ***nilpotente*** *se $x^n = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo A.21. *Em $\mathbb{Z}_8$, temos $\bar{2}^3 = \bar{0}$.*

Definição A.22. *Seja I um ideal de um anel R. Definiremos o **radical de** I, denotado por $r(I)$, como sendo:*

$$r(I) = \{x \in R;\, x^m \in I \text{ para algum } m \in \mathbb{N}\}.$$

Exemplo A.23. *Seja R um anel principal , o ideal I tem a forma rR e seu radical é o ideal gerado pelo produto dos divisores irredutíveis de r (cada um irredutível - exceto um invertível - ocorrendo apenas uma vez neste produto). Em particular, em $\mathbb{Z}$, o radical de um ideal $n\mathbb{Z}$ é o ideal gerado pelo radical do inteiro n.*

Definição A.24. *Sejam R um anel e $Q \subset R$ um ideal próprio. Chamaremos Q de **ideal primário** quando:*

$$xy \in Q \Rightarrow x \in r(Q) \text{ ou } y \in Q.$$

Exemplo A.25.

- Os ideais primários em $\mathbb{Z}$ são (0) e (p^n), onde p é primo. Pois estes são os únicos ideais em $\mathbb{Z}$ com radical primo e verifica-se imediatamente que são primários (vide [1, Example 4.1]).

Proposição A.26. *Seja Q um ideal primário. Então $r(Q)$ é um ideal primo.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} xy \in r(Q) &\Rightarrow (xy)^m \in Q \text{ para algum } m > 0 \\ &\Rightarrow x^m y^m \in Q \text{ para algum } m > 0. \end{aligned}$$

Como Q é um ideal primário, temos:

$$\begin{aligned} x^m y^m \in Q &\Rightarrow x^m \in r(Q) \text{ ou } y^m \in Q \text{ para algum } m > 0, \\ &\Rightarrow (x^m)^n \in Q \text{ ou } y^m \in Q \text{ para algum } m, n > 0 \\ &\Rightarrow x^{mn} \in Q \text{ ou } y^m \in Q \text{ para algum } m, n > 0 \\ &\Rightarrow x \in r(Q) \text{ ou } y \in r(Q). \end{aligned}$$

Portanto, $r(Q)$ é um ideal primo. □

Definição A.27. *Se Q é um ideal primário, denotando $\mathfrak{p} := r(Q)$, dizemos que Q é um ideal $\mathfrak{p}$-**primário**.*

Exemplo A.28. *Sejam $R = k[X, Y]$ e $\mathfrak{q} = (x, y^2)$.*

Então $\frac{R}{\mathfrak{q}} \simeq \frac{k[Y]}{(y^2)}$, em que os divisores de zero são todos os múltiplos de y, logo são nilpotentes. Portanto, $\mathfrak{q}$ é primário e seu radical $\mathfrak{p}$ é (x, y) (vide [1, Example 4.2]).

Definição A.29. *Definimos uma **cadeia de ideais primos de um anel** R como sendo uma sequência de inclusões estritamente crescente e finita de ideais primos da forma abaixo:*

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n.$$

O **comprimento** dessa cadeia é n, que é a quantidade de inclusões $\subset$. Definiremos a **dimensão (de Krull)** de um anel $R \neq 0$, denotado por $\dim R$, como sendo o supremo dos comprimentos de todas as cadeias de ideais primos de R. Agora, seja M um R-módulo. Definimos $\dim M := \dim R/\mathrm{ann}(M)$.

Notação A.30. *Se* $\dim M = n$, *chamaremos* M *de* R*-módulo* n*-**dimensional**.*

Exemplo A.31. *Seja* k *um corpo.*

- $\dim k = 0$ *pois os únicos ideais de* k *são* (0) *e o próprio* k (vide [7, Exemplo 2.1]), *e portanto, o único ideal primo de um corpo* k *é* (0).
- $\dim k[X_1, \ldots, X_n] = n$ *se* k *é um corpo* (vide [1, Exercise 11.7]).

Definição A.32. *Seja* R *um anel. Denotaremos por* $\bar{I}$ *o **fecho integral** de um ideal* I *em* R *definido da seguinte forma:*

$$\bar{I} := \{x \in R;\ x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in I^i,\ \forall\, i \in \mathbb{Z}^+\}.$$

No caso de $r^n + a_1r^{n-1} + a_2r^{n-2} + \cdots + a_{n-1}r + a_n = 0$, dizemos que r satisfaz uma **equação de dependência integral de grau** n **sobre** I. Notemos que $I \subseteq \bar{I}$ pois se $a \in I$, então a é raíz do polinômio mônico $x - a$.

Quando $I = \bar{I}$, diremos que I é **integralmente fechado** . Quando todas as potências de I forem integralmente fechadas, ou seja, quando

$$I^i = \overline{I^i}\,,\ \forall\, i\, \in \mathbb{N}\,,$$

diremos que I é um **ideal normal**.

Exemplo A.33. *A seguir daremos alguns exemplos de ideais integralmente fechados.*

- *Ideais radicais são integralmente fechados. Em particular, os ideais primos também o são.*
- *Se* $I \subseteq J$ *são ideais, então* $\bar{I} \subseteq \bar{J}$ *pois toda equação de dependência integral de* r *sobre* I *também é uma equação de dependência integral de* r *sobre* J.
- *Temos* $I \subseteq \bar{I}$, *pois para cada* $r \in I$, *com* $n = 1$ *e* $a_1 = -r$ *obtemos uma dependência integral da equação de* r *sobre* I.
- *Temos* $\bar{I} \subseteq r(I)$. *De fato, dado* $r \in \bar{I}$, *a partir da equação de dependência integral de* r *sobre* I *de grau* n *como acima, teremos* $r^n \in (a_1, \ldots, a_n) \subseteq I$.

Observação A.34. *Todo ideal normal é, em particular, integralmente fechado.*

A.1.2 Módulos

Definição A.35. *Seja R um anel comutativo com unidade. Um grupo abeliano aditivo $(M, +)$ dotado de uma multiplicação escalar*

$$\begin{array}{ccc} R \times M & \longrightarrow & M \\ (r, m) & \longmapsto & r \cdot m \end{array}$$

*é dito um R-**módulo** se satisfaz os seguintes axiomas:*

(a) $1 \cdot m = m$;

(b) $(r_1 r_2) \cdot m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m)$;

(c) $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$;

(d) $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$, $\forall\, r, r_1, r_2 \in R$ *e* $\forall\, m, m_1, m_2 \in M$.

Se $r \in R$ e $m \in M$, escreveremos também rm para denotar o elemento $r \cdot m$ do módulo M.

Exemplo A.36.

- Todo ideal I de R é um R-módulo. Em particular, R é um R-módulo.
- Se $R = k$ é um corpo, então um R-módulo é, precisamente, um k-espaço vetorial.

Definição A.37. *Sejam R um anel e M um R-módulo. Um subgrupo N de M é um R-**submódulo** se a multiplicação escalar do módulo M preserva N, isto é, se*

$$rn \in N, \text{ sempre que } r \in R \text{ e } n \in N.$$

Sejam M um R-módulo, $t \in \mathbb{N}$ e $m_1, m_2, \ldots, m_t \in M$. Vamos considerar o seguinte subconjunto N de M:

$$N = Rm_1 + Rm_2 + \cdots + Rm_t = \{r_1 m_1 + r_2 m_2 + \cdots + r_t m_t;\ r_i \in R\}.$$

Notemos que N é um submódulo de M, chamado de **submódulo gerado por** m_1, $m_2, \ldots, m_t$. O módulo M é dito **finitamente gerado** quando existe um número finito de elementos $m_1, m_2, \ldots, m_t \in M$ tais que:

$$M = Rm_1 + Rm_2 + \cdots + Rm_t$$

Neste caso, dizemos que m_1, m_2, $\ldots$, m_t é um **conjunto de geradores** para o módulo M.

Exemplo A.38. *Sejam M um R-módulo e I um ideal do anel R. Então*

$$IM := \{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j m_j \, ; \, n \in \mathbb{N} \, , \, \alpha_j \in I \, , \, m_j \in M, \forall \, j \,\}$$

é um R-submódulo de M.

Lema A.39. [Lema de Nakayama] *Sejam R um anel local Noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado e I um ideal próprio de R. Então $IM = M$ implica $M = 0$.*

Demonstração. Vide [1, Proposition 2.6]. □

Definição A.40. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e M um R-módulo. Definimos:*

$$\mu(M) := \textit{número minimal de geradores de } M.$$

Definição A.41. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano d-dimensional e $k = R/\mathfrak{m}$ um corpo resisual infinito. Chamaremos R de **regular** se $\mu(\mathfrak{m}) = d$.*

Exemplo A.42.

- *Todo corpo é um anel local regular;*
- *Seja k um corpo. Então $k[X_1, \ldots, X_d]$ é um anel regular, enquanto $k[[X_1, \ldots, X_d]]$ é um anel local regular.*

Definição A.43. *Sejam M e N dois R-módulos. O grupo abeliano M/N herda uma estrutura de R-módulo de M, definida por $r(m + N) = rm + N$. O R-módulo M/N é chamado de **módulo quociente de** M por N.*

Exemplo A.44. *Sejam R um anel, M um R-módulo e I um ideal de R. Como IM é um R-submódulo de M, podemos considerar o R-módulo quociente M/IM.*

Definição A.45. *Sejam N e P dois R-módulos. Definiremos $(N : P)$ como sendo o conjunto de todos os $r \in R$ tais que $rP \subseteq N$, portanto, (N, P) é um R-submódulo.*

As seguintes propriedades são válidas: $((M : N) : Q) = ((M : Q) : N)$ para quaisquer R-módulos M, N e Q. Em particular, $(0 : M)$ é o conjunto de todos os $r \in R$ tais que $rM = 0$, e o chamaremos de **aniquilador de** M e o denotaremos por $\mathrm{ann}(M)$.

Definição A.46. *Consideremos os R-módulos M e N. Uma aplicação $f : M \to N$ é um **homomorfismo** de R-módulos se as seguintes condições são satisfeitas:*

(a) *f é um homomorfismo de grupos aditivos, ou seja,*

$$f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2) \, , \, \forall \; m_1, m_2 \in M \, ;$$

(b) $f(r \cdot m) = r \cdot f(m), \forall\, r \in R\,, \forall\, m \in M.$

*Um homomorfismo $f : M \to N$ de R-módulos é um **isomorfismo** de R-módulos se for bijetivo. Denota-se $M \simeq N$.*

O conjunto de todos os homomorfismos de R-módulos de M em N pode ser visto como um R-módulo se definimos a soma e o produto pelas regras:

$$(f+g)(m) = f(m) + g(m)$$

$$(rf)(m) = rf(m)\,, \forall\, r \in R, \forall\, m \in M.$$

Denotamos este R-módulo por $\mathrm{Hom}_R(M, N)$.

A.1.3 Condições de cadeia

Proposição A.47. *Seja M um R-módulo. Os seguintes itens são equivalentes:*

(a) *Toda cadeia ascendente de submódulos de M, isto é, $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$, é **estacionária**, ou seja, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $M_n = M_{n+1} = \cdots$;*

(b) *Todo conjunto não vazio de submódulos de M possui um elemento maximal com respeito a inclusão.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Seja $\sum$ um conjunto não vazio de submódulos de M. Vamos supor por absurdo que $\sum$ não tenha elemento maximal. Como $\sum \neq \emptyset$, tomaremos $M_1 \in \sum$. Em particular, M_1 não é um elemento maximal. Portanto, existe $M_2 \in \sum$ tal que $M_1 \subset M_2$. Entretanto, M_2 também não é um elemento maximal. Logo, existe $M_3 \in \sum$ tal que $M_1 \subset M_2 \subset M_3$. Utilizando indução, podemos construir uma cadeia ascendente tal que $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \cdots$ não estacionária, o que contradiz a nossa hipótese.

(b) $\Rightarrow$ (a) Seja $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ uma cadeia ascendente de submódulos de M. Precisamos mostrar que tal cadeia é estacionária, ou seja, que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_n = M_{n+1} = \cdots$. Vamos definir $\sum := \{M_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Por hipótese, $\sum$ possui um elemento maximal; digamos que tal elemento seja M_n. Afirmamos que $M_n = M_{n+1} = \cdots$; já temos a primeira inclusão $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$. Nos restar mostrar que $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$, e isto segue de que M_n é um elemento maximal. Portanto, $M_n = M_{n+1} = \cdots$. □

Observação A.48. *A proposição acima pode ser enunciada similarmente com a inclusão contrária $\supseteq$ e com a palavra "minimal" no lugar de "maximal".*

Definição A.49. *Um R-módulo M que satisfaça a condição de cadeia ascendente (a.c.c.), é dito ser **Noetheriano** . No entanto, se considerarmos a inclusão contrária $\supseteq$, o módulo que satisfaça a condição de cadeia descendente (d.c.c), ou equivalentemente, possui um elemento minimal com respeito a $\supseteq$, é chamado de **Artiniano**.*

Exemplo A.50.

- Um corpo k é um k-módulo Noetheriano e Artiniano pois os únicos submódulos de k são $\{0\}$ e o próprio k.
- $\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo Noetheriano mas não é Artiniano pois $2\mathbb{Z} \supset 4\mathbb{Z} \supset 6\mathbb{Z} \supset \cdots$.
- O anel $k[X]$, onde k é um corpo, satisfaz a.c.c. mas não satisfaz d.c.c. em ideais (vide [1, Example 6.5]).

Proposição A.51. *Um R-módulo M é Noetheriano se, e somente se, todo submódulo de M é finitamente gerado.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $N \subseteq M$ um submódulo. Mostraremos que N é finitamente gerado. Definimos $\sum := \{$submódulos de N finitamente gerado$\}$. Vejamos que $\sum \neq \emptyset$ pois $(0) \in \sum$. Por hipótese e pela Proposição A.47, $\sum$ tem um elemento maximal, digamos N_0. Então, $N_0 \subseteq N$. Temos dois casos:

(a) $N_0 = N$;

(b) $N_0 \neq N$. Neste caso, existe $x \in N$ tal que $x \notin N_0$. Notemos que $N_0 \subset N_0 + Ax \subseteq N$, o que é uma contradição pois N_0 é um elemento maximal de $\sum$. Portanto, $N_0 = N$. Logo, N é finitamente gerado.

($\Leftarrow$) Sejam $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ submódulos de M. Definimos $N := \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$. Logo, N é um submódulo de M. Por hipótese, N é finitamente gerado, digamos que $N = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$. Em particular, $x_1, x_2, \ldots, x_r \in N = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$. Seja n o maior índice tal que $x_1, x_2, \ldots, x_r \in M_n$. Afirmamos que $M_n = N$. Pela definição de N, já temos que $M_n \subseteq N$. Como $N = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ e $x_1, x_2, \ldots, x_r \in M_n$, segue que $N \subseteq M_n$. Portanto, $M_n = N$. Afirmamos também que $M_n = M_{n+1} = \cdots$. Já sabemos que $M_n \subseteq M_{n+1} \subseteq \cdots \subseteq N$ e temos também $N = M_n$. Logo, $N = M_n = M_{n+1} = \cdots$, e M é um R-módulo Noetheriano. $\square$

Definição A.52. *Uma **cadeia (de submódulos) em** um módulo M é uma sequência de submódulos $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n = 0$. O **comprimento da cadeia** é n (que corresponde ao número de inclusões $\supset$). Uma **série de composição de** M é uma **cadeia maximal**, isto é, nenhum outro submódulo pode ser inserido. Isto equivale a dizer que cada quociente $\frac{M_{i-1}}{M}$ é **simples**, ou seja, possui como submódulos apenas os triviais: (0) e ele próprio.*

Exemplo A.53. *Seja k um corpo. A sequência*

$$(0) \subset (x^2) \subset (x) \subset k[X, Y]$$

é uma cadeia mas não é maximal pois

$$(0) \subset (x^3) \subset (x^2) \subset (x) \subset k[X, Y].$$

Entretanto,

$$(0) = \frac{(x^2)}{(x^2)} \subset \frac{(x)}{(x^2)} \subset \frac{k[X]}{(x^2)}$$

é uma série de composição de $\frac{k[X]}{(x^2)}$ pois

$$\frac{\frac{k[X]}{(x^2)}}{\frac{(x)}{(x^2)}} \simeq \frac{k[X]}{(x)} \simeq k$$

e k é simples (pois todo corpo só possui os ideais triviais), e

$$\frac{\frac{(x)}{(x^2)}}{(0)} \simeq \frac{(x)}{(x^2)}$$

também é simples.

Antes de enunciarmos a próxima proposição, definiremos o comprimento λ de um submódulo M, que é uma ferramenta importante e bastante utilizada neste trabalho e também enunciaremos um lema que irá auxilar esta proposição.

Definição A.54. *Definiremos $\lambda(M)$ como sendo o menor comprimento dentre todos os comprimentos de séries de composição do módulo M. Caso M não tenha uma série de composição, denotaremos $\lambda(M) = +\infty$.*

Proposição A.55. *Toda série de composição possui o mesmo comprimento, a saber, $\lambda(M)$.*

Demonstração. (i) Mostraremos primeiramente que se $N \subset M$ então $\lambda_R(N) < \lambda_R(M)$.

Denotaremos $n := \lambda_R(M)$. Seja $(0) = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n = M$ uma cadeia de comprimento n. Em particular, cada $\frac{M_{i+1}}{M_i}$ é simples. Consideremos os submódulos de N da seguinte forma: $N_i = N \cap M_i$, isto é, $(0) = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_n = N$. Definiremos ϕ_i da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rcl} \phi_i : \frac{N_{i+1}}{N_i} & \longrightarrow & \frac{M_{i+1}}{M_i} \\ x + N_i & \longmapsto & x + M_i. \end{array}$$

Notemos que ϕ_i está bem definida pois $x + N_i = y + N_i \Rightarrow x - y \in N_i \subset M_i \Rightarrow x + M_i = y + M_i$. Mostraremos que ϕ_i é injetiva. Seja $x + N_i \in \operatorname{Ker} \phi_i$; então $x + M_i = \bar{0}$. Logo, $x \in M_i$. Como $x \in N_{i+1} = N \cap M_{i+1}$, temos $x \in N \cap M_i = N_i$, portanto, $x + N_i = \bar{0}$.

Como $\phi_i(\frac{N_{i+1}}{N_i})$ é um submódulo de $\frac{M_{i+1}}{M_i}$ e $\frac{M_{i+1}}{M_i}$ é simples, temos

$$\phi_i\left(\frac{N_{i+1}}{N_i}\right) = 0 \text{ ou } \phi_i\left(\frac{N_{i+1}}{N_i}\right) = \frac{M_{i+1}}{M_i}.$$

Se a primeira igualdade ocorresse, obteríamos $\frac{N_{i+1}}{N_i} = 0$ já que ϕ_i é injetiva; daí, $N_{i+1} = N$. Removendo os possíveis termos repetidos, teríamos uma série de composição de N. Logo, teríamos uma cadeia maximal em N de comprimento $\leq n$, ou seja, $\lambda_R(N) \leq \lambda_R(M)$. Suponhamos por absurdo que $\lambda_R(N) = \lambda_R(M) = n$. Neste caso, não haverá termos repetidos, ou seja, $\phi_i(\frac{N_{i+1}}{N_i}) = \frac{M_{i+1}}{M_i}$ para todo $i = 0, 1, 2 \ldots, n-1$. Afirmamos que $M_i = N_i, \forall\, i$. Para o caso de $i = 0$, temos $\phi_0(N_1) = M_1$. Então:

$$\begin{aligned} \phi_0 : N_1 &\longrightarrow M_1 \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

Portanto, $M_1 = N_1$. Para $i = 1$, temos $\phi_1(\frac{N_2}{N_1}) = \frac{M_2}{M_1}$. Afirmamos que $N_2 = M_2$.
($\subseteq$) De fato, $N_2 = N \cap M_2 \subseteq M_2$.
($\supseteq$) Se $x \in M_2$, então $x + M_1 \in \frac{M_2}{M_1} = \phi_1(\frac{N_2}{N_1})$. Logo, $x + M_1 = \phi_2(y + N_1)$, para algum $y \in N_2$. Portanto, $x + M_1 = y + M_1$, e segue-se que $x - y \in M_1 = N_1 \subseteq N_2$. Então, $x \in N_2$.

De maneira análoga, mostra-se que $M_3 = N_3$. E assim por diante, até mostrarmos que $M = M_n = N_n = N$, o que é um absurdo. Logo, $\lambda_R(N) < \lambda_R(M)$.

(ii) Afirmamos também que toda cadeia em M tem comprimento $\leq \lambda_R(M)$. Seja $(0) = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M$ uma cadeia de comprimento k. Mostraremos que $k \leq \lambda_R(M)$. Pelo item i), temos $\lambda_R(M_0) < \lambda_R(M_1) < \cdots < \lambda_R(M_k) = \lambda_R(M)$, onde constam k desigualdades. Portanto, $k \leq \lambda_R(M)$.

(iii) Seja $(0) = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M$ uma série de composição de M com comprimento k. Pela definição de $\lambda_R(M)$, temos $\lambda_R(M) \leq k$. Por outro lado, pelo item ii), temos $k \leq \lambda_R(M)$. Portanto, $k = \lambda_R(M)$, isto é, toda série de composição tem o mesmo comprimento. $\square$

Exemplo A.56. *Pelo Exemplo A.53:*

- $\lambda\left(\frac{k[X]}{(x^2)}\right) = 2$
- $\lambda(k[X]) = +\infty$.

Proposição A.57. *Um R-módulo M tem uma série de composição se, e somente se, M satisfaz ambas as condições de cadeia.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos, por absurdo, que M não satisfaça, por exemplo, a condição de cadeia descendente, então isso significa que existe uma cadeia não estacionária $\cdots \subset M_{k-2} \subset M_{k-1} \subset M_k = M$. Daí, $\lambda(M) = +\infty$. Absurdo!
($\Leftarrow$) Construiremos uma série de composição de M. Primeiramente, definiremos $\sum :=$ {submódulos de M}. Notemos que $\sum \neq \emptyset$ pois $M \in \sum$. Por hipótese, M é Noetheriano, e assim, $\sum$ tem um elemento maximal; digamos que tal elemento seja N. Agora definiremos $\sum_2 :=$ {submódulos de N}. Da mesma forma, $\sum_2$ tem um elemento maximal, o chamaremos

de P. Daí, $\cdots \subset P \subset N \subset M$. Isso é uma cadeia descendente. Mas, por hipótese, M satisfaz d.c.c. Logo, a cadeia $M \supset N \supset P \supset \cdots$ em algum momento deve chegar em (0), e daí, isso será uma série de composição de M. □

Lema A.58. *Seja V um k-espaço vetorial. São equivalentes:*

(a) $\dim_k V < +\infty$*;*

(b) $\lambda_k(V) < +\infty$*;*

(c) *a.c.c.;*

(d) *d.c.c.*

Além disso, se essas equações são satisfeitas, teremos $\dim_k V = \lambda_k(V)$*.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Se tivermos $\lambda_k(V) = +\infty$, então existirá uma cadeia de k-módulos

$$\cdots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 = V$$

de comprimento infinito. Consideremos agora o k-espaço $\bigoplus_{i=1}^{+\infty} V_i \subset V$. Então $+\infty = \dim_K \bigoplus_{i=1}^{+\infty} V_i \leq \dim_K V$. Portanto, $\dim_K V = +\infty$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Segue da Proposição A.57.

(b) $\Rightarrow$ (d) Também segue da Proposição A.57.

(c) $\Rightarrow$ (a) Se $\dim_k V = +\infty$, então existe uma base $\{e_1, e_2, \dots\}$ infinita de V. Vamos definir $V_n = (e_1, e_2, \dots, e_n) = e_1K + e_2K + \cdots + e_nK$. Então $V_1 \subset V_2 \subset \cdots$, isto, é uma cadeia ascendente não estacionária, ou seja, V não satisfaria a.c.c.

(d) $\Rightarrow$ (a) Se $\dim_k V = +\infty$, então existe uma base $\{e_1, e_2, \dots\}$ infinita de V. Definimos $V_n = (e_n, e_{n+1}, \dots)$; então

$$\cdots \subset V_3 = (e_3, e_4, \dots) \subset V_2 = (e_2, e_3, e_4, \dots) \subset V_1 = (e_2, e_3, e_4, \dots).$$

Isto é uma cadeia descendente não estacionária, portanto, V não satisfaria d.c.c. □

Proposição A.59. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano. Então exatamente uma das duas afirmações a seguir é verdadeira:*

(a) $\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$*, para todo n;*

(b) $\mathfrak{m}^n = 0$ *para algum n, nesse caso R é um anel local Artiniano.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$ para algum n. Pelo Lema de Nakayama, temos $\mathfrak{m}^n = 0$. Seja $\mathfrak{p}$ algum ideal primo do anel R. Então $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{p}$, consequentemente (tomando radicais), $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$. Logo, $\mathfrak{m}$ é o único ideal primo de R. Portanto, o anel R é Artiniano. $\square$

Exemplo A.60. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano. Se I é $\mathfrak{m}$-primário, então $(\frac{\mathfrak{m}}{I})^n = 0$ para algum n, logo R/I é Artiniano pela proposição passada. Em particular, $\lambda(R/I) < \infty$ pela Proposição A.57.*

Lema A.61. *Sejam $S \to R$ um homomorfismo de anéis e M um R-módulo. Sempre temos $\lambda_S(M) \geq \lambda_R(M)$. Se $S \to R$ é sobrejetivo, então a igualdade é válida.*

Demonstração. Todo R-submódulo N de M é naturalmente um S-submódulo de M (basta definir a operação produto fazendo-se uso da aplicação $S \to R$). Assim, uma cadeia em M de R-submódulos dá origem a uma cadeia em M de S-submódulos; isto prova a desigualdade.

Seja N um S-submódulo de M. Observe que N não é necessariamente um R-submódulo de M. De fato, M é um R-módulo (com a operação produto herdada pela aplicação $S \to R$). No entanto, se $r \in R$ e $n \in N$, só temos garantia de que $rn \in M$ (não necessariamente $rn \in N$). Mas se supusermos $S \xrightarrow{f} R$ sobrejetivo, existe $s \in S$ tal que $f(s) = r$; daí definimos $rn = sn$. Neste caso, qualquer S-submódulo de M será também um R-submódulo de M, e então, é possível concluir que $\lambda_S(M) = \lambda_R(M)$. $\square$

Relembrando um pouco sobre uma propriedade importante envolvendo ideais e módulos: Se $I \subseteq \operatorname{ann}(M)$, onde M é um R-módulo, então M também será um R/I-módulo. De fato, definiremos a aplicação π da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} \pi : R/I \times M & \longrightarrow & M \\ (\bar{x}, m) & \longmapsto & xm. \end{array}$$

Notemos que π está bem definida, pois se $\bar{x} = \bar{y}$, então $x - y \in I \subseteq \operatorname{ann}(M)$. Logo, $(x-y)M = (0)$, ou seja, $(x-y)m = 0$, $\forall\, m \in M$, isto é, $xm = ym$, $\forall\, m \in M$.

Pelo fato de $\mathfrak{m} \subseteq \operatorname{ann}(\frac{I}{\mathfrak{m}I})$, segue pelo que foi escrito acima que $\frac{I}{\mathfrak{m}I}$ é um $R/\mathfrak{m}$-módulo. Ou seja, $\frac{I}{\mathfrak{m}I}$ é um $R/\mathfrak{m}$-espaço vetorial. E além disso, $\dim_{R/\mathfrak{m}} \frac{I}{\mathfrak{m}I} = \lambda_{R/\mathfrak{m}}(\frac{I}{\mathfrak{m}I}) = \lambda_R(\frac{I}{\mathfrak{m}I})$. Esta última igualdade segue do Lema A.61.

Proposição A.62. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e M um R-módulo não nulo. Então*

$$\mu(M) = \lambda_{R/\mathfrak{m}}(M/\mathfrak{m}M).$$

Demonstração. Pelo Lema A.58, temos $\lambda_{R/\mathfrak{m}}(\frac{M}{\mathfrak{m}M}) = \dim_{R/\mathfrak{m}} \frac{I}{\mathfrak{m}M}$. Assim, precisamos mostrar que $\mu(M) = \dim_{R/\mathfrak{m}} \frac{M}{\mathfrak{m}M}$. Suponhamos que $M = (a_1, \ldots, a_{\mu(M)})$. Temos $M/\mathfrak{m}M =$

$(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{\mu(M)}})$. Isso implica $\dim_{\frac{R}{\mathfrak{m}}} \frac{M}{\mathfrak{m}M} \leq \mu(M)$. Agora resta provarmos que $\dim_{\frac{R}{\mathfrak{m}}} \frac{M}{\mathfrak{m}M} \geq \mu(M)$. De fato, sejam $m_1, \ldots, m_r \in M$ cujas imagens em $\frac{M}{\mathfrak{m}M}$ formam uma base de $\frac{M}{\mathfrak{m}M}$, ou seja, $\frac{M}{\mathfrak{m}M} = (\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_r})$. Segue que $M = (m_1, \ldots, m_r)$, portanto, M tem r geradores (vide [1, Proposition 2.8]). Pela definição de $\mu(M)$, segue que $\mu(M) \leq r = \dim_{R/\mathfrak{m}} \frac{M}{\mathfrak{m}M}$. □

A.1.4 Localização

Seja R um anel qualquer. Um subconjunto **multiplicativamente fechado** de R é um subconjunto S de R tal que $1 \in S$ e S é fechado para multiplicação, ou seja, $xy \in S$ sempre que $x, y \in S$. Definimos uma relação $\equiv$ em $R \times S$ da seguinte forma:

$$(a, s) \equiv (b, t) \Leftrightarrow (rt - bs)u = 0 \text{ para algum } u \in S$$

Note que esta relação é reflexiva e simétrica. Para mostrarmos que a mesma também é transitiva, suponhamos $(a, s) \equiv (b, t)$ e $(b, t) \equiv (c, u)$. Então existem $v, w \in S$ tal que $(at - bs)v = 0$ e $(bu - ct)w = 0$, de modo que $atv = bsv$ e $buw = ctw$. Daí, $atv \cdot uw = bsv \cdot uw$ e $buw \cdot sv = ctw \cdot sv$. Logo, $(au - cs)tvw = 0$. Como S é fechado para multiplicação, temos $tvw \in S$, portanto, $(r, s) \equiv (c, u)$. Assim, $\equiv$ trata-se de uma relação de equivalência. Denotamos por r/s a classe de equivalência do elemento $(r, s) \in R \times S$, e denotemos por $S^{-1}R$ o conjunto de todas estas classes de equivalência. Damos uma estrutura de anel a $S^{-1}R$ definindo adição e multiplicação dessas "frações" r/s, da mesma forma que fazemos aos números racionais:

$$(a/s) + (b/t) = (at + bs)/st,$$
$$(a/s)(b/t) = ab/st.$$

Deixamos ao cargo do leitor verificar que essas definições são independentes das escolhas dos representantes (a, s) e (b, t), e que $S^{-1}R$ satisfaz os axiomas de um anel comutativo com identidade. Também temos um homomorfismo de anéis $f : R \to S^{-1}R$ definido por $f(x) = x/1$, o qual é injetivo se, por exemplo, R é um domínio integral.

Exemplo A.63. *Se R é um domínio integral e $S = R - 0$, então $S^{-1}R$ é o corpo de frações de R. Em particular, se $R = \mathbb{Z}$ então $S^{-1}R = \mathbb{Q}$.*

Definição A.64. *O anel $S^{-1}R$ é chamado de* ***anel de frações de*** *R em relação a S.*

Notação: Se R é um anel e $\mathfrak{p}$ é um ideal primo de R, um exemplo de conjunto multiplicativamente fechado é o conjunto $S = R - \mathfrak{p}$. Neste caso, denota-se $S^{-1}R = R_{\mathfrak{p}} = \{\frac{a}{s} \ : \ a \in R \text{ e } s \notin \mathfrak{p}\}$. Este último é um anel local com ideal maximal $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} = \{\frac{a}{s} \ : \ a \in \mathfrak{p} \text{ e } s \notin \mathfrak{p}\}$. (Para mais detalhes, ver [1, Chapter 3].)

A.1.5 Domínios de valorização discreta

Proposição A.65. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um domínio de valorização discreta de dimensão 1 e I um ideal não nulo de R. Então $o(I) = \lambda(R/I)$.*

Demonstração. Pela Proposição (vide [1, Proposition 9.2]), temos $I = \mathfrak{m}^k$, para algum k, de modo que $o(I) = o(\mathfrak{m}^k) = k$. Seja $n = \lambda(R/I)$. Temos uma cadeia maximal

$$(0) = \mathfrak{m}^k(R/I) \subset \mathfrak{m}^{k-1}(R/I) \subset \cdots \subset \mathfrak{m}(R/I) \subset R/I,$$

já que $\frac{\mathfrak{m}^i(R/I)}{\mathfrak{m}^{i+1}(R/I)} \simeq \frac{\mathfrak{m}^i}{\mathfrak{m}^{i+1}}$ e $\lambda(\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}) = \dim_{R/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1} = 1$ pois $\mathfrak{m}$ é principal. Como a cadeia acima é maximal e de comprimento k, segue que $n = k$. $\square$

A.1.6 Teoria da dimensão

Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano. Definimos

$$\delta(R) = \min\{\mu(I) \ : \ I \text{ é um ideal } \mathfrak{m}\text{-primário de } R\}.$$

As Proposições [1, Propositions 11.7, 11.10 e 11.13] nos dão que $\delta(R) \geq \dim R \geq \delta(R)$, o que nos dá o seguinte resultado.

Teorema A.66. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano. Então $\delta(R) = \dim R$.*

B Apêndice

B.1 Conjunto parcialmente ordenado

Uma **ordem parcial** (**não estrita**) é uma relação binária $\leq$ sobre um conjunto P que satisfaz as seguintes condições para todo $a, b, c \in P$:

(a) (Reflexividade) $a \leq a$;

(b) (Antissimétrica) Se $a \leq b$ e $b \leq a$ então $a = b$;

(c) (Transitividade) Se $a \leq b$ e $b \leq c$ então $a = c$.

Um **conjunto parcialmente ordenado** é aquele em que há uma ordem parcial definida.

Exemplo B.1. *Abaixo, segue alguns exemplos de conjuntos parcialmente ordenados.*

- *O conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais.*
- *Dado um conjunto* X*, o conjunto de suas partes,* $\mathcal{P}(X)$*, pode ser ordenado parcialmente pela inclusão* $\subseteq$*.*
- *O conjunto* $\mathbb{N}$ *dos números naturais equipado com a relação de divisibilidade.*

Bibliografia

[1] ATIYAH. Michael F.; MACDONALD, Ian G.*; Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley, 1969.

[2] BRUNS. Winfried, HERZOG, Jurgen; *Cohen-Macaulay rings.* Cambridge studies in advanced mathematics, 1998.

[3] D'CRUZ. C.; *Quadratic transform of complete ideals in regular local rings.* Commun. Algebra 28(2): 693-698, 2000.

[4] EISENBUD. David*; Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry.* Springer-Verlag: Graduate Texts in Mathematics, 1995.

[5] FILHO. Daniel C. de Morais*; Manual de Redação Matemática.* Rio de Janeiro: SBM, 2018.

[6] GARCIA. Arnaldo; LEQUAIN, Yves.; *Elementos de álgebra.* Projeto Euclides - 6. Ed. - Rio de Janeiro : IMPA, 2018.

[7] GONÇALVES. Adilson; *Introdução à álgebra.* Projeto Euclides - 6. Ed. - Rio de Janeiro : IMPA, 2017.

[8] GOTO. S.; *Integral closedness of complete- intersection ideals.* J. Algebra 108:151-160, 1987.

[9] GREUEL. Gert-Martin, PFISTER, Gerhard*; A Singular Introduction to Commutative Algebra.* Springer, 2008.

[10] HEINZER. W.J., RATLIFF, L. J. Jr., RUSH, D. E.*; Basically full ideals in local rings.* J. Algebra 250:371-396, 2002.

[11] HONG. Jooyoun, LEE, Heisook, NOH, Sunsook, RUSH, David E.; *Full ideals.* 37 (2009), 2627-2639, 2000.

[12] HUNEKE. C*; Complete ideals in two-dimensional regular local rings. Commutative Algebra.* Math. Sci. Res. Inst. Publ., **Vol.15**, New Springer, pp.325;338, 1989.

[13] MATSUMURA. Hideyuki; *Commutative Ring Theory.* Cambridge studies in advanced mathematics, 2008.

[14] SWANSON. Irena, HUNEKE, Craig*; Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules.* Cambridge University Press: London Mathematical Society Lecture Note Series 336, 2000.

[15] WATANABE. J.; $\mathfrak{m}$*-full ideals.* Nagoya Math. J. 106:101-111, 1987.

[16] ZARISKI. O., SAMUEL, P.; *Commutative Algebra.* **Vol. 2**, Princenton: Van Nostrand, 1960.

[17] ZARISKI. O.; *Polynomial ideals defined by infinitely near base points.* Amer. J. Math. 60 (1938), 151–204, 1938.

Índice Remissivo