

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Estrutura BPS em teorias de calibre abelianas com derivadas de
ordem superior**

Edmanferson da Silva Holanda

ORIENTADOR: RODOLFO ALVÁN CASANA SIFUENTES

SÃO LUÍS, SETEMBRO DE 2023

Estrutura BPS em teorias de calibre abelianas com derivadas de ordem superior

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

Área de concentração: Física de Partículas Elementares e Campos.

Linha de Pesquisa: Defeitos topológicos em Teorias de Campos.

Orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes
Doutor em Física - UFMA.

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Holanda, Edmanferson da Silva.

Estrutura BPS em teorias de calibre abelianas com derivadas de ordem superior / Edmanferson da Silva
Holanda. - 2023.

76 f.

Orientador(a): Rodolfo Alván Casana Sifuentes.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Física/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2023.

1. Defeitos Topológicos. 2. Teorias de altas derivadas. 3. Vórtices. I. Alván Casana Sifuentes, Rodolfo. II. Título.

Edmanferson da Silva Holanda

Estrutura BPS em teorias de calibre abelianas com derivadas de ordem superior

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes (*Orientador* – UFMA)

Prof. Dr. Edilberto Oliveira Silva (UFMA)

Prof. Dr. Carlos Eduardo da Hora Santos (UFMA)

Prof. Dr. Frederico Elias Passos dos Santos (UFMA)

"Por mais longa que seja a caminhada, o mais importante é dar o primeiro passo" - Vinícius de Moraes.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por tudo.

Agradeço a minha família, minha mãe Evania, meu pai Edmilson e minhas irmãs Eryka Fernanda e Elilia pelo amor e apoio incondicional.

À minha querida Cliciane pelo amor, carinho, companhia e paciência. Obrigado por fazer parte de minha vida.

À meus(minhas) amigos(as) de graduação, Ricardo, Ronne, Jaine, Nayro, Erivan, João Ricardo, Mauricio, Matheus Gomes e à todos amigos da turma 2015.2 me desculpe por não citar nomes, mas a amizade que conquistei de vocês ao longo desses anos levo para a vida.

Ao pessoal da limpeza e segurança pelas histórias de vida contadas enquanto esperava as longas chuvas para retorno de minha casa.

À meus professores da coordenação de Ciências Naturais-Física da UFMA Campus III, Ariel Nonato, Freud Sebastian, Diego Barbosa, Antonio Jeferson e Guillermo Lazar.

À coordenação da Pós-Graduação em Física na pessoa do professor Manoel Messias.

Aos amigos do Grupo de Física das Partículas Elementares e Campos, e em especial a Gabriel, Janielton, Werbeson, Neyver (peruano), Cesar (peruano).

À Capes pelo apoio financeiro e a pós-graduação em Física da UFMA pela qualidade do ensino oferecido, especialmente ao GFTPC - Grupo de Física Teórica de Partículas e Campos.

Encerrando, agradeço ao professor Guillermo pelo grande profissional que é e pessoa, pela sinceridade e amizade. Agradeço a você pelo incentivo ao longo da graduação e conselhos, por ter me apresentado algo a mais em minha formação, o GFTPC. E ao professor Casana, o que posso falar? Professor Casana é um grande exemplo de pessoa e profissional. Sem suas sugestões e ideias não seria possível a conclusão deste trabalho. É um privilégio ter trabalhado com vocês dois ao longo de minha formação na UFMA.

Aos leitores e sonhadores reescrevo o terceiro parágrafo da página 19 do livro *Nunca desista de seus sonhos* de Augusto Cury : *Epicuro acreditava que os grandes navegadores deviam sua reputação aos temporais e às tempestades. Se você tiver medo das tempestades, nunca navegará pelos mares desconhecidos. Jamais conquistará outros continentes.*

Resumo

A dissertação discute a existência de defeitos topológicos tipo vórtices BPS (do tipo Abrikosov-Nielsen-Olesen) em modelos de calibre abelianos possuindo altas derivadas no setor de calibre. Primeiramente, foi abordado o estudo de soluções tipo vórtice na eletrodinâmica de Podolsky-Higgs (PH), a extensão da eletrodinâmica de Maxwell com altas derivadas proposta por Boris Podolsky adicionada do termo de quebra espontânea da simetria. Na ausência do termo de Podolsky, o modelo se reduz ao de Maxwell-Higgs (MH). A eletrodinâmica de PH só apresenta vórtices BPS se a massa de Podolsky (m) for maior ou igual a duas vezes a massa dos vórtices BPS originados no modelo MH.

O segundo modelo descreve uma versão de altas derivadas do modelo de Chern-Simons (CS) que denominaremos de eletrodinâmica de Deser-Jackiw-Chern-Simons-Higgs (DJCSH), o termo de alta derivada, chamado de ação de Deser-Jackiw (DJ). O modelo comporta vórtices BPS carregados a partir de um valor mínimo da massa de DJ (Δ), sendo esse valor mínimo uma função dos outros parâmetros do modelo. Uma consequência importante advinda dos termos de derivadas superiores, em ambos os modelos, é que os respectivos potenciais BPS tornam-se não-locais.

Palavras-chaves: Defeitos topológicos, teorias de altas derivadas, vórtices BPS.

Abstract

The dissertation discusses the existence of BPS-like vortices (of the Abrikosov-Nielsen-Olesen type) in Abelian gauge models having high derivatives, where the gauge sector is the one that gains higher derivative terms. First, the study of vortex-like solutions in Podolsky-Higgs (PH) electrodynamics, the extension of Maxwell's electrodynamics to high derivatives proposed by Boris Podolsky with the addition of the term of spontaneous symmetry breaking, was addressed. In the absence of the Podolsky term, the model reduces to that of Maxwell-Higgs (MH). The PH electrodynamics only presents BPS vortices if the Podolsky mass (m) is greater than or equal to twice the mass of the BPS vortices originated in the MH model.

The second model describes a high-derived version of the Chern-Simons (CS) model which we will call Deser-Jackiw-Chern-Simons-Higgs (DJCSH) electrodynamics, the high-derivative term, called the Deser-Jackiw (DJ) action. The model includes BPS vortices loaded from a minimum value of the DJ mass (Δ), this minimum value being a function of the other parameters of the model. An important consequence arising from the higher derivative terms, in both models, is that the respective BPS potentials become non-local.

Keywords: Topological defects, high derivative theories, BPS vortices.

Sumário

Introdução	1
I Defeitos topológicos	4
1 Conceitos preliminares	5
1.1 Defeitos em $(1 + 1) - D$	5
1.2 Método de Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfield (BPS)	7
1.3 Kinks	8
II Estrutura BPS em teorias de calibre com altas derivadas: a eletrodinâmica de Podolsky-Higgs	11
2 Eletrodinâmica de Maxwell-Higgs	14
2.1 Estrutura BPS do modelo de Maxwell-Higgs	16
2.2 Soluções tipo vórtice do modelo MH	18
2.2.1 Comportamento das soluções nas fronteiras	19
2.2.1.1 Comportamento em $r \rightarrow 0$	19
2.2.1.2 Comportamento em $r \rightarrow \infty$	19
2.2.2 Análise numérica	20
3 Eletrodinâmica de Podolsky-Higgs	22
3.1 Estrutura BPS da eletrodinâmica de Podolsky-Higgs	23
3.2 Soluções tipo vórtice do modelo PH	26
3.2.1 Comportamento das soluções nas fronteiras	27
3.2.1.1 Comportamento em $r \rightarrow 0$	27
3.2.1.2 Comportamento em $r \rightarrow \infty$	28
3.3 Soluções numéricas	29
3.3.1 Soluções para $n = 1, 4, 5, 7, 8, 12, 13$ e $m = 2m_{MH}$	29
3.3.2 Soluções para $n = 1$ e $m = 2\gamma m_{MH}$, onde $\gamma = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \infty(MH)$	32

3.3.3 O potencial BPS não-local V com $n = 1$ e m variável	35
--	----

III Estrutura BPS em teorias de calibre com altas derivadas: a eletrodinâmica de Deser-Jackiw-Chern-Simons-Higgs 37

4 Eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs	40
4.1 Estrutura BPS da eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs	41
4.2 Soluções tipo vórtice do modelo CSH	43
4.2.1 Comportamento das soluções nas fronteiras	43
4.2.1.1 Comportamento em $r \rightarrow 0$	43
4.2.1.2 Comportamento em $r \rightarrow \infty$	44
4.2.2 Análise numérica	44
5 Eletrodinâmica de Deser-Jackiw-Chern-Simons-Higgs	47
5.1 Estrutura BPS da eletrodinâmica de Deser-Jackiw-Chern-Simons-Higgs	48
5.2 Soluções tipo vórtice no modelo DJCSH	51
5.2.1 Comportamento das soluções nas fronteiras	53
5.2.1.1 Comportamento em $r \rightarrow 0$	53
5.2.1.2 Comportamento em $r \rightarrow \infty$	53
5.3 Soluções numéricas	54
5.3.1 Soluções para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$ e $\Delta = 10/9$	55
5.3.2 Soluções para $n = 1$ e $\Delta = 1, \frac{10}{9}, \frac{40}{9}, \frac{80}{9}, 8, 20, \infty$	59
5.3.3 O potencial BPS não-local V com $n = 1$ e Δ variável	62
6 Conclusões e perspectivas	64
Referências Bibliográficas	67
A Eletrodinâmica de Podolsky-Higgs	75
A.1 Soluções numéricas para $m < 2m_{MH}$	75
B Modelo de Deser-Jackiw-Chern-Simons-Higgs	78
B.1 Obtenção da equação do campo de Higgs	78

Introdução

A descrição de sólitons iniciou-se com os estudos de John Scott Russell em 1834 ao concluir que ondas ao longo de uma margem permaneciam com mesma velocidade e estrutura por um intervalo de tempo grande [1]. Este movimento peculiar das ondas foi descrita matematicamente por Korteweg e de Vries na chamada equação KdV [2]. Similar comportamento também foi observado, posteriormente por Fermi, Pasta e Ulam, na propagação de fônons numa rede não-linear com o surgimento de um modo normal de vibração não esperado [3]. Em seguida, fazendo uma análise numérica, Zabusky e Kruskal observaram que a crista da onda surge devido a não-linearidade, que junto ao termo de dispersão fazem a onda prosseguir com a mesma estrutura [4]. A preservação da estrutura da onda e diminuição da energia após a colisão levou estes a designarem essas ondas de sólitons que sob uma perspectiva matemática são soluções de equações diferenciais não-lineares.

Em teorias de campos, os sólitons advêm como soluções clássicas estáveis das equações de Euler-Lagrange (em geral, equações diferenciais altamente não lineares) satisfazendo condições de fronteira não triviais. Além disso, essas soluções estão relacionadas a transições de fase devido à quebra espontânea de uma simetria contínua em um sistema físico. Em algumas circunstâncias especiais também é possível obter essas soluções a partir de um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, encontradas minimizando a energia total [5, 6] como também fazendo algumas restrições nas componentes do tensor energia-momento [7]. Em tais circunstâncias, as soluções das equações de primeira ordem também são soluções das equações de Euler-Lagrange. O primeiro procedimento permite reduzir a ordem das equações de Euler-Lagrange é chamada de o método de Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfield, comumente chamado de método BPS. Esse método baseia-se na minimização da energia total fornecendo o valor mínimo da energia (limite de Bogomol'nyi) e as equações de primeira ordem (ou BPS, ou autoduais), cujas soluções possuem esse valor mínimo da energia [5, 6].

No âmbito cosmológico esses defeitos estão ligados as transições de fase no início do universo no final do período inflacionário [8–10], um período que começou 10^{-36} segundos após o Big Bang [11, 12]. Durante tal processo na evolução do universo, os monopolos magnéticos mostraram-se como possíveis relíquias das transições de fase conforme previsto pelas teorias Teorias de Grande Unificação (GUT, do inglês Grand Unified Theory) [9–11]. No entanto, somente em 1974, Hooft e Polyakov demonstraram que os monopolos magnéticos são uma previsão das GUTs [13, 14]. Para a matéria condensada, os defeitos

topológicos desempenham um papel importante em uma variedade de fenômenos, incluindo transições de fase ferromagnéticas [15], supercondutividade dos tipos I e II [16], descrição da superfluidez [17], deformações em filmes finos sob radiação uniforme de laser [18] e transições de fase em materiais XY estudadas por meio de simulações de Monte Carlo [19]. Desta forma, esses defeitos topológicos surgem como estruturas fundamentais descrevendo propriedades físicas não perturbativas nesses sistemas.

Especificamente, no caso da supercondutividade (que possui duas fases), o estudo de defeitos topológicos tipo vórtices foi iniciado por Abrikosov, quem interligou as transições de fase de Ginzburg-Landau aos conceitos de Lars Onsager e Richard Feynman a respeito de vórtices quantizados surgidos na superfluidez [20]. A primeira fase supercondutora, chamada Tipo I, está associada ao efeito Meissner [21], onde não ocorre penetração do campo magnético no material. Enquanto na outra, chamada de Tipo II, o campo magnético penetra o material. Nesta descrição, Abrikosov notou que a simetria de tais vórtices magnéticos era cilíndrica, evidenciando que estes mesmos apresentam-se somente como estruturas bidimensionais. Em geral, os vórtices que surgem na matéria condensada se tornam evidentes como excitações estáveis.

Na teoria de campos, os pioneiros no estudo de vórtices foram Nielsen e Olesen [22] que os observaram, precisamente, na eletrodinâmica de Maxwell-Higgs. Motivados por essa descoberta, Schaposnik e Vega [7] investigaram as soluções exatas do modelo de Maxwell-Higgs considerando algumas restrições nas constantes de acoplamento, sendo estas para o caso em que as massas dos bósons escalares e vetoriais são as mesmas. As abordagens para encontrar vórtices na eletrodinâmica de Maxwell-Higgs foram, conseqüentemente, estendidas para a eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons [23], mas desta vez se obtiveram vórtices carregados [24–26]. A partir desses trabalhos, diversos outros foram dedicados a investigar a existência de vórtices em diferentes eletrodinâmicas [27–38]. Dentro deste contexto de vórtices a eletrodinâmica de Podolsky por ser massiva, pode descrever bem os problemas como o efeito Josephson da supercondutividade [39] e efeito Meissner [40]. No entanto, a questão se as teorias de calibre contendo derivadas de ordem superior comportam soluções tipo vórtice permanece em aberto (até onde sabemos). Embora, teorias de altas derivadas levem a problemas como estados fantasmas, violação de unitariedade e causalidade, sabe-se que estas teorias ao menos como teorias efetivas, são boas candidatas para a descrição de alguns sistemas físicos, por exemplo, descrevem bem o regime infravermelho (IR) dos glúons na QCD [41] e problemas na região ultravioleta (UV).

Neste contexto, o trabalho pioneiro [42] de Boris Podolsky concluiu que para altas frequências os termos de quarta ordem na derivada presentes na densidade lagrangiana dominavam em relação aos de segunda ordem. Ainda nesta eletrodinâmica mostrou-se como uma generalização à de Maxwell que se apresenta como invariante sob os grupos de Lorentz e $U(1)$ local, o que a torna invariante de calibre, ou seja, com a carga elétrica conservada [43]. Posteriormente, algumas generalizações à eletrodinâmica de Podolsky foram propostas como por exemplo: [44] com o intuito de suavizar singularidades na regiões UV e IR, no contexto da violação da simetria de Lorentz (LV) [45] foi fixado o campo de fundo para que se tenha uma energia bem definida, causalidade assegurada, como também unitariedade. Também, através do mecanismo de Higgs e a blindagem de Debye para a teoria da eletrodinâmica de Bopp-Podolsky, foi descoberto que, em ambos os fenômenos, não apenas o setor sem massa da teoria de Podolsky adquire massa, mas também o

setor massivo tem sua massa alterada. Além de investigar o comportamento dos potenciais, observaram a presença de uma temperatura peculiar, T_P , que está associada ao comprimento de Podolsky. Essa descoberta revela a influência significativa da teoria de Podolsky nos fenômenos estudados, uma vez que tanto o setor sem massa quanto o setor massivo sofrem alterações em suas massas, e a temperatura T_P desempenha um papel importante em seu comportamento [46]. Recentemente foi demonstrado que, no modelo abeliano de Higgs, em que o campo escalar é acoplado de forma não minimamente ao campo de Maxwell, a teoria emergente que surge na fase de simetria oculta é a teoria de Bopp-Podolsky. Essa descoberta revela como diferentes regimes de acoplamento entre o campo escalar e o campo de Maxwell levam a diferentes teorias eletromagnéticas, com a teoria de Bopp-Podolsky surgindo na fase de simetria oculta [47].

O termo de Chern-Simons (CS) de altas derivadas, foi introduzido por S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton na descrição de uma gravitação em (1+2)-dimensões [48]. Esse trabalho foi o ponto de partida para o estudo de teorias tipo CS com derivadas superiores, por exemplo, os estudos abordando a supergravidade [49], a regularização e entaves com estados fantasmas [50]. Além da obtenção de novos efeitos clássicos surgidos na eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons planar com a presença de um termo de alta ordem nas derivadas [51].

Nesse contexto, a dissertação estudará a existência de soluções tipo vórtice em teorias de calibre com derivadas de ordem superior, especificamente, procuramos vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen (ANO) nas eletrodinâmicas escalares de Podolsky e de Deser-Jackiw. Para atingirmos esse objetivo, a dissertação é apresentada da seguinte maneira: Na primeira parte, apresentamos uma breve introdução aos defeitos topológicos e ao formalismo BPS tomando como exemplo os kinks que aparecem em modelos escalares em (1 + 1)-dimensões. Motivados pelo trabalho de Boris Podolsky começamos a segunda parte apresentando a estrutura BPS da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs e os vórtices portadores somente de fluxo magnético, os quais são soluções das equações BPS. Em seguida, estudamos a eletrodinâmica de Podolsky-Higgs (PH) descrito pela seguinte densidade lagrangiana,

$$\mathcal{L}_{PH} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2m^2}\partial_\mu F^{\mu\nu}\partial^\beta F_{\beta\nu} + |D_\mu\phi|^2 - V(|\phi|), \quad (0.1)$$

que representa uma extensão de altas derivadas do modelo de Maxwell-Higgs. Na terceira parte, apresentamos a estrutura BPS da eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs e os vórtices carregados e portadores de fluxo magnético, os quais representam as soluções das respectivas equações autoduais. Logo, analisamos o modelo que chamaremos de eletrodinâmica de Deser-Jackiw-Chern-Simons-Higgs (DJCSH) representada pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_{DJCSH} = \frac{\kappa}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu F_{\nu\rho} + \frac{1}{4M}\epsilon^{\mu\alpha\beta}A_\mu\Box F_{\alpha\beta} + |D_\mu\phi|^2 - V(|\phi|). \quad (0.2)$$

Finalmente, discutiremos os resultados desta dissertação nas conclusões e daremos nossas perspectivas.

Parte I

Defeitos topológicos

CONCEITOS PRELIMINARES

Na teoria de campos, os defeitos topológicos são soluções das equações de Euler-Lagrange que são altamente não lineares, e, em geral, podem surgir nos modelos que sofrem a quebra espontânea de alguma simetria interna [53, 54]. A quebra de simetria surge quando a simetria que governa o modelo não é compartilhada pelo estado de vácuo, também chamado de estado de mínima energia [55]. Assim sendo, dependendo do tipo de simetria de um sistema e da forma como é quebrada, o modelo apresenta diferentes tipos de defeitos topológicos, entre eles podemos mencionar, por exemplo, kinks, vórtices, skyrmions, monopolos [54, 56, 57].

As teorias de campo em uma dimensão espacial fornecem um ponto de partida natural para o estudo de sólitons. Por causa das simplificações que resultam de trabalhar em uma dimensão, muitos cálculos podem ser realizados explicitamente. Desse modo, começamos a estudar sólitons de teorias de campo escalar em $(1 + 1)$ -dimensões, as chamadas soluções tipo kink nas teorias ϕ^4 e no modelo seno-Gordon. Sua extensão para $(3 + 1)$ -dimensões levará a paredes de domínio.

1.1 Defeitos em $(1 + 1) - D$

Este defeito topológico é o mais simples surgindo em $(1 + 1)$ -dimensões a partir de um modelo composto de somente um campo escalar real $\phi(x)$ [5], cuja densidade de lagrangiana é expressa por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi). \quad (1.1)$$

Ao aplicarmos o princípio da ação mínima à densidade lagrangiana (1.1) em questão, obtém-se a seguinte equação de Euler-Lagrange para o campo escalar:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (1.2)$$

que provê a seguinte equação de movimento para o modelo

$$\square \phi + \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} = 0, \quad (1.3)$$

sendo $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ chamado de operador *d'Alebertiano*

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \quad (1.4)$$

e ∇^2 operador laplaciano.

Pelo Teorema de Noether, fazendo uma transformação infinitesimal nas coordenadas $x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$ do espaço-tempo, tem-se uma quantidade conservada, pois o campo é invariante sob uma translação devido homogeneidade do espaço-tempo. Esta quantidade é designada de tensor energia-momento

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (1.5)$$

e satisfaz a seguinte identidade

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (1.6)$$

uma lei de conservação para a densidade de energia e de momento. Ademais, o tensor energia-momento apresenta-se simétrico na permutação dos índices, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. Desta forma, teremos o tensor energia-momento em (1.5) para a densidade Lagrangiana em (1.1) da seguinte maneira

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (1.7)$$

que através do mesmo, podemos chegar a carga conservada associada devido a transformação de simetria no tempo, a energia total, escrita na forma

$$E = \int T^{00} dx = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} \partial^0 \phi - \mathcal{L} \right] dx, \quad (1.8)$$

onde a componente T^{00} corresponde à densidade hamiltoniana, que no caso estático é a densidade de energia, escrita como

$$T^{00} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + U(\phi). \quad (1.9)$$

Para o caso estático, $\phi \equiv \phi(x)$, a energia total (1.9) resulta

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + U(\phi) \right] dx. \quad (1.10)$$

Pois estamos interessados em soluções de energia finita, o que significa que em $x \rightarrow \pm\infty$, tanto o campo ϕ quanto o potencial U devem satisfazer, respectivamente, as condições de contorno.

$$\lim_{x \rightarrow \infty \pm} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) \rightarrow 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = \phi_\pm, \quad \lim_{x \rightarrow \infty \pm} U(\phi) \rightarrow 0, \quad (1.11)$$

com ϕ_+ e ϕ_- sendo os pontos nos quais o potencial é nulo, ou seja, os pontos onde pode ocorrer a quebra espontânea da simetria. Quando ocorre de uma solução ter configurações de mínimos diferentes para $x \rightarrow$

$-\infty$ e $x \rightarrow +\infty$ como é descrito no caso anterior, tem-se uma solução topológica. No entanto, no caso em que compartilham a mesma configuração assintótica de mínimo, a solução é dita não topológica. Em relação aos modelos com diferentes mínimos, os potenciais que atendem às condições topológicas são da forma:

$$U(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2 \quad (1.12)$$

com a condição de

$$W_\phi = \frac{dW}{d\phi} = \mathcal{U}(\phi), \quad (1.13)$$

no qual, $\mathcal{U}(\phi)$ é uma função contínua em todo o intervalo. Inserindo este potencial na expressão da energia em (1.10), terá a forma

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} [\mathcal{U}(\phi)]^2 \right] dx. \quad (1.14)$$

Os setores topológicos ϕ_\pm para o campo escalar são representados pela carga topológica Q que não está associada a corrente de Noether mas pela densidade de corrente topológica

$$j^\mu = \frac{1}{2m} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \quad (1.15)$$

com $\epsilon^{\mu\nu}$ sendo o tensor Levi-Civita e de caráter antisimétrico. Por conseguinte, tratando de corrente conservada, têm-se

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{2m} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi \equiv 0, \quad (1.16)$$

em que a carga topológica associada aos sólitons no estudo de defeitos topológicos em uma dimensão é expressa por

$$Q_T = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\phi}{dx} dx = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2m}, \quad (1.17)$$

isso evidencia que a carga depende apenas dos valores assintóticos da função ϕ e assume valores em $\{-1, 1\}$. Devido ao caráter topológico do defeito, a carga Q_T deve ser necessariamente diferente de zero, o que significa que a função ϕ tem valores distintos, ou seja, $\phi_+ \neq \phi_-$. Como já abordado, soluções que apresentam mais de um mínimo distinto, são chamadas de *defeitos topológicos*, e estes defeitos se classificam quanto a simetria no vácuo. Se a simetria é discreta, com quantidades finita de mínimos do potencial, temos os *kinks*, já a simetria contínua abeliana que envolve campos complexos temos os vórtices e cordas cósmicas, enquanto a simetria de gauge não abeliana trata os monopolos de 't Hooft-Polyakov, por exemplo.

1.2 Método de Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfield (BPS)

Este é um método que investiga a presença de defeitos topológicos via a minimização da energia, tendo como fim, encontrar soluções chamadas de BPS (Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfield) [5, 6] descritas

por equações diferenciais de ordem derivativo menor que as equações de Euler-Lagrange. Estas soluções são os estados de vácuo (ou de energia mínima) em que se encontram os setores topológicos do modelo. Em teoria de campos habitualmente se resolve as equações de Euler-Lagrange, que são de segunda ordem. No entanto, em 1975, M.K. Prasad e C.M. Sommerfield e em 1976, E.B. Bogomol'nyi, mostraram que em certas teorias de campos não-lineares a energia é limitada inferiormente por uma carga topológica que é atingida quando os campos satisfazem as equações estáticas de primeira ordem. Este método consiste em expressar o integrando da energia total como uma soma de termos quadráticos e derivadas totais, onde uma das derivadas totais será proporcional ou igual à densidade de carga topológica do modelo em estudo. No presente caso, a energia total (1.14) se expressa como

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \sqrt{2U(\phi)} \right)^2 \pm \frac{d\phi}{dx} \frac{dW}{d\phi} \right] dx, \quad (1.18)$$

e sendo que a energia é dita finita, o primeiro integrando é zero para satisfazer (1.11) e ainda deste primeiro integrando de (1.18) obtém-se a equações diferencial de primeira ordem para o campo ϕ

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2U(\phi)} \quad (1.19)$$

com as soluções com energia mínima satisfazendo (1.19) que é uma equação diferencial de primeira ordem. Nesse sistema a energia associada a esse defeito topológico é mínima e dada pela integral do segundo termo em (1.18), pois o termo quadrático é nulo no limite BPS. Portanto, a energia BPS fica expressa como

$$E_{BPS} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{dx} \frac{dW}{d\phi} dx = \pm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{dx} \sqrt{2U(\phi)} dx \Rightarrow E_{BPS} = \pm [W(\phi_+) - W(\phi_-)]$$

$$E_{BPS} = |W|, \quad (1.20)$$

conhecida na literatura como limite de Bogomol'nyi. Mesmo não conhecendo *a priori* as soluções $\phi(x)$, a energia é encontrada somente em termos do superpotencial W_ϕ com respectivos valores assintóticos de $\phi(x)$ sendo os mínimos absolutos de $U(\phi)$, com configuração de campo obedecendo

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi. \quad (1.21)$$

Através de (1.21), as respectivas soluções para $\phi(x)$ em que a energia mínima é dada pelo limite Bogomol'nyi, que são denominadas *estados BPS* e tendo potencial para os defeitos topológicos sendo sempre $U(\phi) \geq 0$, $\forall \phi \in \mathbb{R}$.

1.3 Kinks

O defeito topológico conhecido como *kink* é o mais simples, mas apresenta propriedades que são comuns a outros defeitos. Esses defeitos topológicos surgem em teorias clássicas de campo em (1 + 1) dimensões (uma dimensão espacial mais uma temporal) para o campo escalar real $\phi = \phi(x^\mu)$ [5]. O modelo

que descreve os *kinks* é definido pela densidade lagrangiana em (1.1), com um potencial de interação do tipo ϕ^4

$$U(\phi) = \lambda (m^2 - \phi^2)^2, \quad (1.22)$$

no qual os dois mínimos do potencial são $\phi = \pm m$, ou seja, $\phi_+ = +m$ e $\phi_- = -m$, com gráfico dado na Figura 1.1.

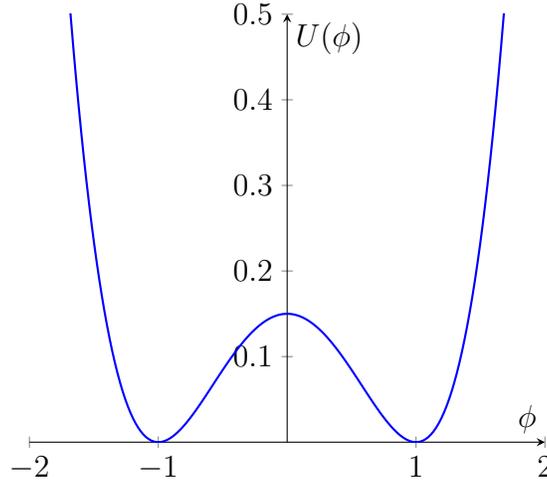


Figura 1.1: Gráfico do potencial em (1.22) para $m = 1$ e $\lambda = 0.15$.

A equação de Euler-Lagrange (1.3) fica expressa por

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - 4\lambda (m^2 - \phi^2) \phi = 0, \quad (1.23)$$

que em sua forma estacionária resulta na seguinte equação

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 4\lambda (m^2 - \phi^2) \phi, \quad (1.24)$$

a equação diferencial do campo escalar em (1.19) que representa a BPS para o defeito do tipo kink é descrita como

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2\lambda} (m^2 - \phi^2) = \pm \mathcal{U} \quad (1.25)$$

que é a expressão para \mathcal{U} . O superpotencial é encontrado integrando (1.25), tendo como resultado

$$W = \sqrt{2\lambda} \left(m^2 \phi - \frac{\phi^3}{3} \right). \quad (1.26)$$

Encontrada W , a equação diferencial (1.25) apresenta solução explícita para o campo $\phi(x)$ na forma

$$\phi(x) = \pm m \tanh[\sqrt{2\lambda}(x - a)], \quad (1.27)$$

com a sendo a posição em que ϕ intercepta o eixo horizontal. Neste modelo ϕ^4 , a densidade de energia do sistema para o potencial (1.22) é da forma do integrando em (1.14) e sendo expressa por

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\phi'^2 + \lambda(m^2 - \phi^2) = 2\lambda m^4 \operatorname{sech}^4[\sqrt{2\lambda}m(x - a)]. \quad (1.28)$$

Para o limite BPS, energia para o defeito do tipo kink pode ser expressa como sendo proporcional a carga topológica do modelo

$$E_{BPS} = \left| \int_{-m}^{+m} \sqrt{2\lambda} (m^2 - \phi^2) d\phi \right| = \frac{4}{3}m^3\sqrt{2\lambda}|Q_T| \quad (1.29)$$

ou mesmo, assumindo a forma

$$E_{BPS} = \frac{4}{3}m^3\sqrt{2\lambda}. \quad (1.30)$$

A Figura 1.2 mostra o comportamento da solução (1.27) para kink dado por ϕ_+ e com anti-kink ϕ_- . Como já dito tem-se campos que tendem para os valores de vácuo $-m$ a $+m$ e com densidade de energia (1.28) localizada.

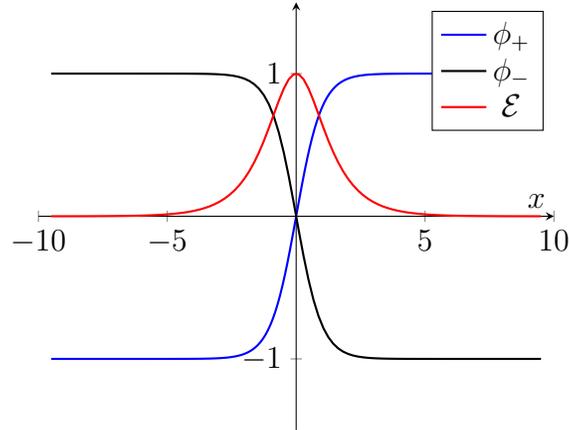


Figura 1.2: Gráfico para *kink* ϕ_+ , *anti-kink* ϕ_- e densidade de energia \mathcal{E} .

Como já frisado na Seção 1.1 acerca da carga topológica que diferencia os tipos de sólitons em teoria de campos, quando a carga $Q_T = 1$, o sóliton é do tipo kink com configurações assintóticas para o campo escalar ϕ sendo $\phi_- = -m$ e $\phi_+ = +m$, enquanto que para $Q_T = -1$, temos um sóliton denominado anti-kink com $\phi_- = +m$ e $\phi_+ = -m$. Isto evidencia uma propriedade fundamental em defeitos topológicos, sendo a energia proporcional a carga topológica.

Parte II

Estrutura BPS em teorias de calibre com altas derivadas: a eletrodinâmica de Podolsky-Higgs

Em meados da década de 50, Ostrogradski abordou o formalismo de Lagrange e Hamilton para qualquer ordem de derivada superior, demonstrando ainda que o formalismo de Euler-Lagrange poderia ser substituído por um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem [58]. Além disso, ele também generalizou os momentos canônicos conjugados [58]. Seguindo esses resultados de Ostrogradski, Podolsky estendeu a Eletrodinâmica de Maxwell, verificando que a única maneira de preservar a linearidade de sua teoria era adicionar um termo de altas derivadas nos campos [59]. Esse termo é precisamente $\frac{1}{2m^2}\partial_\mu F^{\mu\nu}\partial^\beta F_{\beta\nu}$, que possui uma derivada de segunda ordem no campo de gauge abeliano e, no limite da massa $m \rightarrow \infty$, recupera a Eletrodinâmica de Maxwell.

A Eletrodinâmica de Podolsky, além de preservar a linearidade, também contornava o problema das divergências presentes na região do ultravioleta [60]. Este último problema está associado com a resolução da divergência da energia potencial eletrostática gerada por uma carga pontual na origem, que agora resulta finita, ao contrário da Eletrodinâmica de Maxwell. Assim como a Eletrodinâmica de Maxwell, a de Podolsky preserva as duas simetrias fundamentais da natureza: a de gauge e a de Lorentz [59]. Além disso, ela prevê um modo massivo invariante de gauge [61], algo que não ocorre na teoria de Proca, cujo termo de massa é incompatível com a simetria de gauge.

Embora a teoria de Podolsky ter resolvido alguns problemas que a Eletrodinâmica de Maxwell não solucionou, ela apresentava dificuldades intrínsecas, incluindo o problema de estados com norma negativa, designados como estados fantasmas. Isso evidencia que a teoria é não-local, geralmente descrita como uma teoria que possui termos com derivadas de ordem superior a dois. Essa não-localidade é inconveniente, uma vez que, em teoria de campos, induz à quebra da unitariedade, uma propriedade importante de uma teoria considerada fundamental. Diante dessas dificuldades e do sucesso da renormalização da Eletrodinâmica Quântica (QED) convencional, a Eletrodinâmica de Podolsky foi deixada de lado. Somente em 1969, Lee e Wick voltaram a estudar a Eletrodinâmica de altas derivadas, em um modelo equivalente ao de Podolsky, para explicar algumas massas no espectro hadrônico [62]. No entanto, ela foi novamente desconsiderada devido ao fato de que o espectro hadrônico pode ser explicado pela Cromodinâmica Quântica (QCD).

Apesar desses "mas", a Eletrodinâmica de Podolsky atraiu físicos interessados em abordar o eletromagnetismo com termos de derivadas superiores. Isso inclui o trabalho de Musicki (1978), que estudou o formalismo canônico e o teorema de Liouville generalizado [63]. Em 1987, Galvão e Pimentel estudaram a estrutura canônica da Eletrodinâmica de Podolsky e mostraram que a condição de Lorentz não era uma condição de gauge adequada [64]¹. Concluíram que o campo eletromagnético de Podolsky possui cinco graus de liberdade, dois pertencentes a um modo não-massivo e três a um modo massivo, além de 8 graus não aparentes. Observaram que a condição de Lorentz não era adequada para o modo massivo, uma vez que violava a invariância da teoria perante as transformações de Lorentz, ou seja, não era preservada na evolução temporal. Além disso, Frenkel em 1996 [65], usando a Eletrodinâmica de Podolsky, encontrou uma solução para o problema 4/3 da Eletrodinâmica de Maxwell. Em 2007, Cuzinato *et al.* [43], usando o formalismo de

¹Embora em (1+3)-D se tenha a condição generalizada de Coulomb [64], no caso estacionário a condição $\partial_j A_j = 0$ é suficiente. Um similar fato ocorre em (1+2)-D, portanto para tratarmos da estrutura BPS do modelo PH também usaremos o calibre de Coulomb.

Utiyama, mostraram que a teoria de Podolsky, sendo invariante sob os grupos de Lorentz e $U(1)$ local, é a única generalização de segunda ordem para a Eletrodinâmica de Maxwell. Além disso, Grinstein, O'Connell e Wise (2008) propuseram a ideia de introduzir termos de altas derivadas, criando o modelo padrão de Lee-Wick [66]. Em 2010, Bonin *et al.* estudaram a Eletrodinâmica de Podolsky à temperatura finita [67].

Como descrito acima, a Eletrodinâmica de Podolsky permitiu avanços significativos no arcabouço da Física Teórica no contexto de teorias de campos com termos de derivadas superiores. No entanto, ainda não foram realizados estudos sobre a estrutura BPS nesta extensão de altas derivadas do modelo de Maxwell-Higgs. Portanto, analisaremos tais estruturas na Eletrodinâmica de Podolsky-Higgs e verificaremos as condições para a existência de vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen no modelo.

Nesta segunda parte da dissertação, desenvolveremos o formalismo BPS para o modelo de Maxwell-Higgs e suas soluções tipo vórtice. Em seguida, aplicaremos o formalismo BPS à Eletrodinâmica de Podolsky-Higgs. No entanto, em contraposição aos modelos em que reduzimos as equações de movimento de segunda para primeira ordem nas derivadas, neste caso, elas são reduzidas de quarta para terceira ordem.

ELETRODINÂMICA DE MAXWELL-HIGGS

Em um trabalho seminal publicado em 1973, Nielsen e Olesen estudaram um campo de gauge abeliano acoplado em campo escalar (o modelo de Maxwell-Higgs) visando construir uma teoria de campos para cordas duais. Identificaram que as cordas de Nambu podem ser reconhecidos como linhas de vórtices [22]. Atualmente tem-se uma vasta gama de estudos e aplicações do modelo de Maxwell-Higgs (MH), entre outros podemos mencionar, soluções BPS topológicas na presença de termos cinéticos não usuais ou generalizados [68, 71–79], soluções BPS analíticas de vórtices no contexto de modelos generalizados [69, 70].

As soluções tipo vórtice foram observadas por Abrikosov [20] quando estudava a teoria da supercondutividade de Landau-Ginzburg. Aqui é importante ressaltar que a energia estática do modelo Maxwell-Higgs equivale à energia livre não-relativística dos supercondutores tipo II no modelo de Abrikosov, sendo verificado que as soluções tipo vórtices são as mesmas. Portanto, devido às contribuições de Abrikosov, Nielsen e Olesen, chamamos essas soluções de vórtices do tipo ANO.

A densidade lagrangiana do modelo MH em $(1 + 2)$ -dimensões¹ é escrita da seguinte maneira

$$\mathcal{L}_{MH} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 - V(|\phi|), \quad (2.1)$$

onde o primeiro é o tensor eletromagnético

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}, \quad (2.2)$$

com A_{μ} representando o campo de gauge abeliano. O segundo termo representa a derivada covariante mínima $D_{\mu}\phi$, do campo escalar complexo ϕ , sendo definida como

$$D_{\mu}\phi = \partial_{\mu}\phi - ieA_{\mu}\phi, \quad (2.3)$$

no qual e é a constante de acoplamento eletromagnética. Finalmente, o terceiro termo $V(|\phi|)$ fornece o potencial de auto-interação do campo ϕ , que será determinado pelo formalismo BPS.

Além do mais, a Lagrangiana é invariante perante a transformação de gauge local expressa por

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x)e^{i\alpha(x)}, \quad A_{\mu}(x) \rightarrow A_{\mu}(x) + \frac{1}{e}\partial_{\mu}\alpha(x). \quad (2.4)$$

¹A métrica é dada por $\text{diag}(g_{\mu\nu}) = (+ - -)$, com os índices gregos variando em $\mu, \nu = 0, 1, 2$ e especificando as coordenadas espaço-temporais, enquanto que os índices latinos $i, j = 1, 2$ indicam somente as espaciais.

A equação de Euler-Lagrange para o campo de calibre A_μ

$$\partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0, \quad (2.5)$$

resultando na seguinte equação de movimento para o campo de calibre

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = eJ^\mu \quad (2.6)$$

com J^μ representando a densidade de corrente conservada

$$J^\mu = i [\phi (D_\mu \phi)^* - \phi^* (D_\mu \phi)] = i [\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi] - 2eA_\mu |\phi|^2, \quad (2.7)$$

relativa à invariância definida em (2.4).

O setor do campo de Higgs apresenta a seguinte equação de Euler-Lagrange

$$\partial_\beta \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \phi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = 0, \quad (2.8)$$

onde por meio dela, obtém-se a equação de movimento

$$D_\mu D^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0, \quad (2.9)$$

ou expressa de forma explícita

$$\square \phi - 2ieA_0 \partial_0 \phi - ie\phi \partial_0 A_0 - e^2 A_0^2 \phi + 2ieA_i \partial_i \phi + ie\phi \partial_i A_i + e^2 A_i^2 \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0, \quad (2.10)$$

com \square representando o operador *d'Alembertiano* expresso em (1.4).

A partir da equação (2.6), no regime estacionário, obtemos a lei de Gauss

$$\nabla^2 A_0 = 2e^2 A_0 |\phi|^2, \quad (2.11)$$

(definimos $\nabla^2 = \partial_k \partial_k$) que é satisfeita identicamente pela condição de calibre $A_0 = 0$. Essa condição permite estabelecer que as soluções não possuem carga elétrica.

A respectiva lei de Ampère assume a seguinte forma

$$\varepsilon_{kj} \partial_j B = eJ_k = ie\phi \partial_k \phi^* - ie\phi^* \partial_k \phi - 2e^2 A_k |\phi|^2, \quad (2.12)$$

em que $B = \varepsilon_{ij} \partial_i A_j$ representa o campo magnético. Desse modo as soluções serão portadoras somente de fluxo magnético. Alternativamente, reescrevemos a lei de Ampère como

$$\partial_j B = -e\varepsilon_{jk} J_k. \quad (2.13)$$

A equação estacionária (2.10) para o campo de Higgs na equação (2.10) é dada como sendo

$$\nabla^2 \phi - 2ieA_j \partial_j \phi + e^2 A_j^2 \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0, \quad (2.14)$$

onde, além da condição $A_0 = 0$ usamos $\partial_j A_j = 0$ (calibre de Coulomb) como uma segunda condição. Estas duas condições permitem eliminar os 2 graus de liberdade redundantes do campo A_μ .

2.1 Estrutura BPS do modelo de Maxwell–Higgs

A densidade de energia \mathcal{E} do sistema é a densidade hamiltoniana que é encontrada via a seguinte transformação de Legendre da densidade lagrangiana (2.1)

$$\mathcal{H} = \pi^\rho \dot{A}_\rho + \pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* - \mathcal{L}, \quad (2.15)$$

onde expressamos os momentos canônicos na forma

$$\pi^\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\rho}, \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}, \quad \pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*}, \quad (2.16)$$

e considerando que na configuração estática $\dot{A}_\rho = \dot{\phi} = \dot{\phi}^* = 0$, teremos, portanto, a hamiltoniana do sistema dada por $\mathcal{H} = -\mathcal{L}$. Com isso a densidade de energia $\mathcal{E} = \mathcal{H}$, no gauge $A_0 = 0$, se expressa como

$$\mathcal{E} = \frac{B^2}{2} + |D_k \phi|^2 + V(|\phi|), \quad (2.17)$$

que resulta ser definida positiva. Assim, a integração da densidade energia fornece, claro, a energia total que assume a forma

$$E = \int \left[\frac{B^2}{2} + |D_k \phi|^2 + V(|\phi|) \right] d^2 \mathbf{x}, \quad (2.18)$$

A condição de ter uma energia total finita impõe que a densidade de energia $\mathcal{E} \rightarrow 0$ quando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, ou seja, cada termo em (2.17) deve satisfazer

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} B(\mathbf{x}) = 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} D_k \phi(\mathbf{x}) = 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} V(|\phi(\mathbf{x})|) = 0. \quad (2.19)$$

Antes de iniciar com a implementação do formalismo BPS, reescrevemos o termo $|D_k \phi|^2$ na forma

$$|D_k \phi|^2 = |D_\pm \phi|^2 \pm eB |\phi|^2 \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ik} \partial_i J_k, \quad (2.20)$$

onde definimos a quantidade $D_\pm \phi$ como

$$D_\pm \phi = D_1 \phi \pm i D_2 \phi. \quad (2.21)$$

Substituímos (2.20) na energia total (2.18) que fica expressa da seguinte maneira

$$E = \int \left[\frac{B^2}{2} + |D_\pm \phi|^2 \pm eB |\phi|^2 \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ik} \partial_i J_k + V(|\phi|) \right] d^2 \mathbf{x}, \quad (2.22)$$

que para completar o mecanismo BPS, falta colocar o quadrado do campo magnético mais o potencial numa forma quadrática. Feito isto, e organizando os dois termos envolvendo B , a energia será

$$E = \int \left[\frac{1}{2} \left(B \pm \sqrt{2V} \right)^2 + |D_\pm \phi|^2 \pm B \left(\sqrt{2V} + e |\phi|^2 \right) \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ik} \partial_i J_k \right] d^2 \mathbf{x}. \quad (2.23)$$

Os dois primeiros termos do integrando são expressões quadráticas, em acordo com a técnica BPS, e observamos que o último termo é uma derivada total cuja integral dadas as condições (2.19) será nula,

$$\int \epsilon_{ik} \partial_i J_k d^2 \mathbf{x} = 0. \quad (2.24)$$

Assim, se no terceiro termo do integrando em (2.23) o fator $(\sqrt{2V} + e|\phi|^2)$ for uma constante, ou seja

$$\sqrt{2V} + e|\phi|^2 = ev^2 = cte, \quad (2.25)$$

a sua integral resulta proporcional ao fluxo magnético

$$\Phi = \int B d^2 \mathbf{x}. \quad (2.26)$$

Isso, somente é possível se o campo de Higgs tiver o seguinte comportamento,

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\phi(\mathbf{x})| = v = cte, \quad (2.27)$$

pois, sabemos que nesse limite o potencial é nulo, $V(|\phi|) = 0$. Consequentemente, a partir da equação (2.25), o potencial $V(|\phi|)$ é fixado,

$$V(|\phi|) = \frac{e^2}{2} (v^2 - |\phi|^2)^2. \quad (2.28)$$

Assim, quando $|\phi(\mathbf{x})| = v \neq 0$, se produz a quebra espontânea da simetria, a qual gera configurações topológicas.

Então, substituindo os resultados (2.24) e (2.28) em (2.23), a energia do sistema fica dada por

$$E = E_{BPS} + \int \left\{ \frac{1}{2} [B \mp e(v^2 - |\phi|^2)]^2 + |D_{\pm} \phi|^2 \right\} d^2 \mathbf{x}, \quad (2.29)$$

onde E_{BPS} resulta proporcional ao fluxo magnético, ou seja,

$$E_{BPS} = \pm ev^2 \int B d^2 \mathbf{x} = \pm ev^2 \Phi > 0, \quad (2.30)$$

que, como veremos a seguir, define a mínima energia do sistema, também chamada de energia BPS ou limite de Bogomol'nyi. Portanto, a energia do sistema (2.29) satisfaz a desigualdade

$$E \geq E_{BPS}. \quad (2.31)$$

Como queremos encontrar configurações de campos cuja energia (2.29) seja mínima, ou mesmo, seja saturada, $E = E_{BPS}$, os termos quadráticos devem ser nulos. Isso acontece se os campos satisfazem o seguinte conjunto de equações

$$D_{\pm} \phi = 0, \quad (2.32)$$

$$B = \pm e (v^2 - |\phi|^2). \quad (2.33)$$

Este conjunto é chamado de equações BPS (ou auto-duais), e neste caso, são equações diferenciais de primeira ordem, uma ordem a menos que as respectivas equações de Euler-Lagrange.

A partir das equações BPS é possível reproduzir ou reobter as equações de Euler-Lagrange, ou seja, retornar tanto para a lei de Ampère (2.12) como para equação do campo de Higgs (2.14) com potencial $V(|\phi|)$ dado pela equação (2.28).

2.2 Soluções tipo vórtice do modelo MH

Como já mencionado acima, a condição de calibre $A_0 = 0$ promove que configurações sejam descarregadas eletricamente e, que somente portem fluxo magnético. Para tanto, aqui mostraremos soluções do sistema BPS do tipo vórtice com simetria rotacional descritos pelo ansatz em coordenadas polares (r, θ) ,

$$\phi(\mathbf{x}) = vg(r)e^{in\theta}, \quad (2.34)$$

$$A_k(\mathbf{x}) = \epsilon_{kj} \frac{x_j}{er^2} [a(r) - n]. \quad (2.35)$$

O ansatz é o mapeamento do plano \mathbb{R}^2 em um círculo de mínimos v no plano complexo ϕ .

A unicidade de ϕ requer

$$\phi(r, \theta) = \phi(r, \theta + 2n\pi), \quad \text{equivalentemente} \quad vg(r)e^{in\theta} = vg(r)e^{in\theta + i2n\pi}, \quad (2.36)$$

que resulta na equação

$$e^{i2n\pi} = 1, \quad (2.37)$$

onde somente teremos soluções não triviais, $n \neq 0$, se $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, sendo o inteiro n chamado de *winding number*, que identificará o caráter topológico da configuração.

As funções $g(r)$ e $a(r)$, também chamados de perfis, são regulares ao longo de todo o eixo radial e devem satisfazer estritamente condições de fronteira adequadas para que tanto a densidade de energia como a energia total da configuração sejam finitas, por conseguinte, essas condições são

$$\lim_{r \rightarrow 0} a(r) = n, \quad \lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0 \quad (2.38)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 1. \quad (2.39)$$

sendo compatíveis com as estabelecidas na equação (2.19).

Inserindo o ansatz, (2.34) e (2.35), no sistema BPS, (2.32) e (2.33), obtém-se as seguintes equações diferenciais acopladas em termos das funções $g(r)$ e $a(r)$

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (2.40)$$

$$B = -\frac{a'}{er} = \pm ev^2 (1 - g^2), \quad (2.41)$$

onde o campo magnético é dado por

$$B(r) = -\frac{a'}{er}. \quad (2.42)$$

Similarmente, a densidade de energia BPS obtida a partir da equação (2.17), se expressa como sendo

$$\mathcal{E}_{BPS} = B^2 + \frac{2v^2 a^2 g^2}{r^2}. \quad (2.43)$$

A energia BPS em (2.30) calculada usando as condições de fronteira satisfeitas pela função $a(r)$ resulta

$$E_{BPS} = \pm 2\pi ev^2 \int B r dr = \pm 2\pi n v^2 > 0, \quad (2.44)$$

assim, com o sinal (+) representando soluções para $n > 0$ e o sinal (-) para $n < 0$.

2.2.1 Comportamento das soluções nas fronteiras

A análise dos comportamentos dos campos $g(r)$ e $a(r)$ quando $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$ se dá resolvendo o sistema BPS, (2.40) e (2.41), entorno dos valores assumidos nas fronteiras.

2.2.1.1 Comportamento em $r \rightarrow 0$

Entorno da origem expressamos as funções $g(r)$ e $a(r)$, para $n > 0$, na forma

$$g(r) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k r^k, \quad a(r) = n - \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k, \quad (2.45)$$

e substituindo no sistema BPS, (2.40) e (2.41), obtemos as seguintes expressões,

$$g(r) \simeq G_n r^n - \frac{e^2 v^2 G_n}{4} r^{n+2} + \dots, \quad (2.46)$$

$$a(r) \simeq n - \frac{e^2 v^2}{2} r^2 + \frac{e^2 v^2 G_n^2}{2(n+1)} r^{2n+2} + \dots, \quad (2.47)$$

que a partir dessas soluções podemos expressar o campo magnético e densidade de energia BPS

$$B(r) \simeq ev^2 - ev^2 G_n^2 r^{2n} \dots, \quad (2.48)$$

$$\mathcal{E}_{BPS} \simeq e^2 v^4 + 2n^2 v^2 G_n^2 r^{2(n-1)} - 2e^2 v^4 G_n^2 (n+1) r^{2n} \dots \quad (2.49)$$

A constante G_n depende do winding number e das outras constantes de acoplamento do modelo.

2.2.1.2 Comportamento em $r \rightarrow \infty$

Com esse intuito, quando $r \rightarrow \infty$, consideramos os perfis $g(r)$ e $a(r)$ dados por

$$g(r) = 1 - \delta g(r), \quad a(r) = \delta a(r), \quad (2.50)$$

colocando-as nas expressões (2.40) e (2.41), encontramos as seguintes equações diferenciais

$$\frac{(\delta a)'}{r} = -2(\delta g), \quad (\delta g)' = -\frac{(\delta a)}{r}. \quad (2.51)$$

E, após algumas manipulações são expressas como equações diferenciais de segunda ordem desacopladas

$$(\delta g)'' + \frac{(\delta g)'}{r} - 2e^2 v^2 (\delta g) = 0, \quad (2.52)$$

$$(\delta a)'' - \frac{(\delta a)'}{r} - 2e^2 v^2 (\delta a) = 0, \quad (2.53)$$

cujas soluções em $r \rightarrow \infty$ são

$$\delta g(r) \sim \frac{1}{\sqrt{r}} \exp(-m_{MH} r), \quad \delta a(r) \sim \sqrt{r} \exp(-m_{MH} r). \quad (2.54)$$

O parâmetro m_{MH} é a massa dos campos de Higgs e de calibre no limite BPS cujo valor é

$$m_{MH} = m_\phi = m_A = \sqrt{2}ev, \quad (2.55)$$

ou seja, no limite BPS, a massa do campo de gauge é igual a massa do campo de Higgs. Então, o comportamento dos perfis quando $r \rightarrow \infty$ é

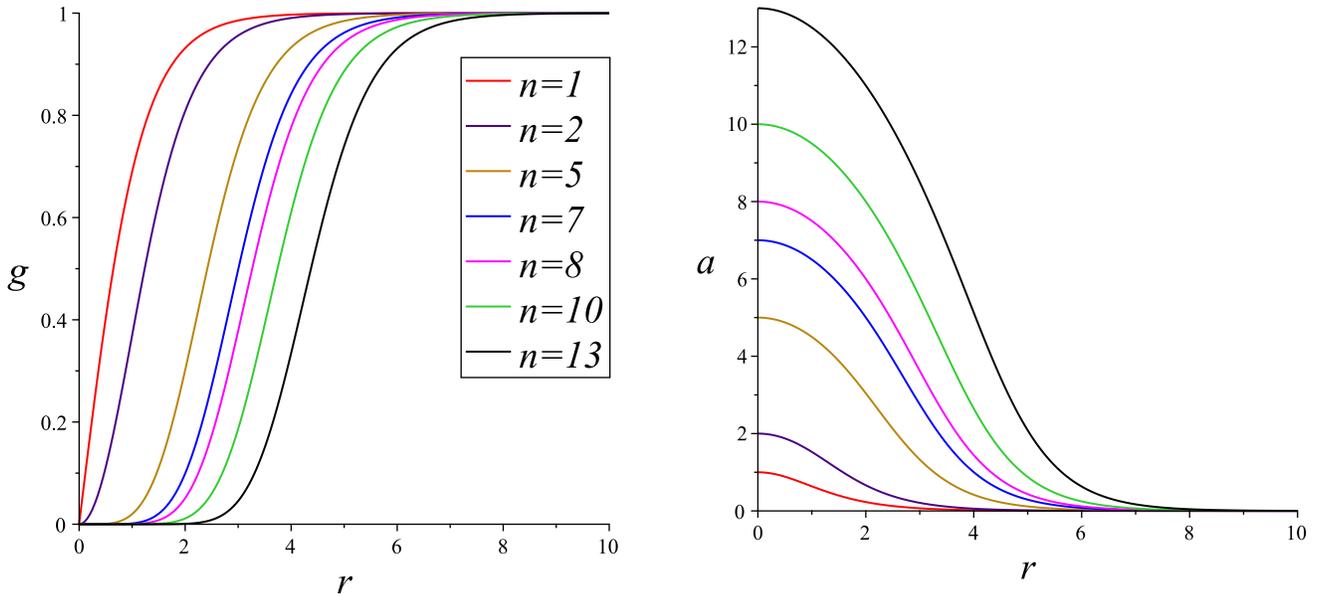
$$g(r) \sim 1 - \frac{1}{\sqrt{r}} \exp(-m_{MH}r), \quad (2.56)$$

$$a(r) \sim \sqrt{r} \exp(-m_{MH}r), \quad (2.57)$$

esses comportamentos dos perfis dadas pelas equações acima foram encontrados por Abrikosov no seu estudo da supercondutividade [20] e por Nielsen-Olesen no modelo MH [22].

2.2.2 Análise numérica

Para resolver numericamente as equações BPS, (2.40) e (2.41), fixaremos $e = v = 1$. As soluções do sistema BPS para valores diferentes de n , são mostradas nas figuras 2.1a e 2.1b, os correspondentes campos magnéticos na figura 2.2 e as densidades de energia BPS (2.43) são apresentadas na figura 2.3.



(a) Perfil do campo de Higgs $g(r)$.

(b) Perfil do campo de calibre $a(r)$.

Figura 2.1: Soluções numéricas para os perfis do campo de Higgs $g(r)$ em Figura 2.1a e campo de gauge $a(r)$ na Figura 2.1b para diferentes valores do winding number n .

Os perfis do campo de Higgs mostram que os mesmos saturam para o vácuo mais rápido para n pequenos, no caso, para $n = 1$. À medida que n aumenta, o valor assintótico do campo de Higgs é alcançado de maneira mais lenta, como ilustrado na Figura 2.1a. As configurações para o perfil $a(r)$ são máximas na origem para todos os valores de n , e nulos para $r \rightarrow \infty$ como visualizado na Figura 2.1b.

Para o campo magnético $B(r)$ na [Figura 2.2](#), os perfis atingem o valor máximo na origem, sendo exatamente o mesmo para todos os valores de n . Conforme n aumenta, o campo magnético gera um platô em torno da origem a partir do valor máximo, ou seja, abrangendo uma área maior à medida que n cresce. Ao observarmos o comportamento do campo magnético para $n = 1$, notamos que ele se assemelha a um *lump*, com um valor máximo no centro do vórtice e uma rápida diminuição em direção a zero.

Os perfis da densidade de energia são mostrados na [Figura 2.3](#), sendo que para $n = 1$, temos a densidade de energia com um comportamento distinto dos demais valores de n , sendo máxima na origem e decrescendo conforme se afasta da origem. Ao analisar para $n > 1$, a densidade tende a um valor finito de 1 na origem e apresenta valores máximos para um dado r que varia à medida que n aumenta, além de se tornar menos localizada para esses valores crescentes, comportando-se em anéis concêntricos.

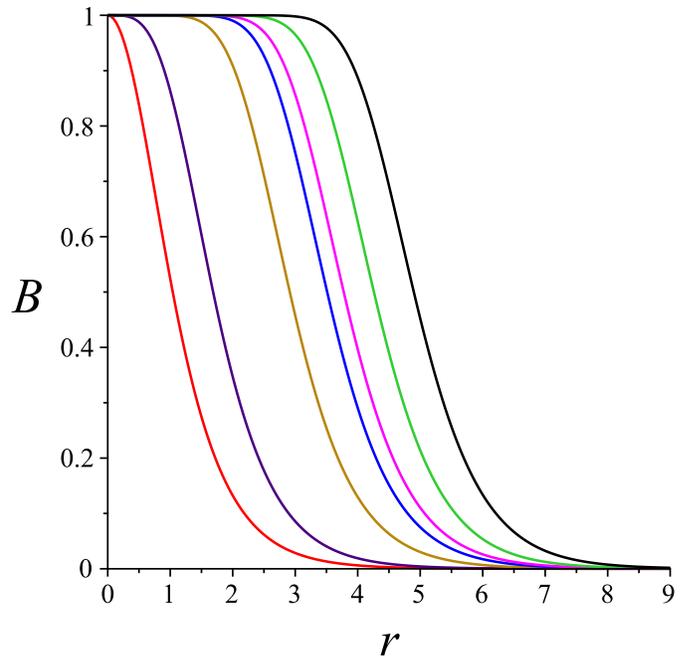


Figura 2.2: Soluções para o campo magnético $B(r)$.

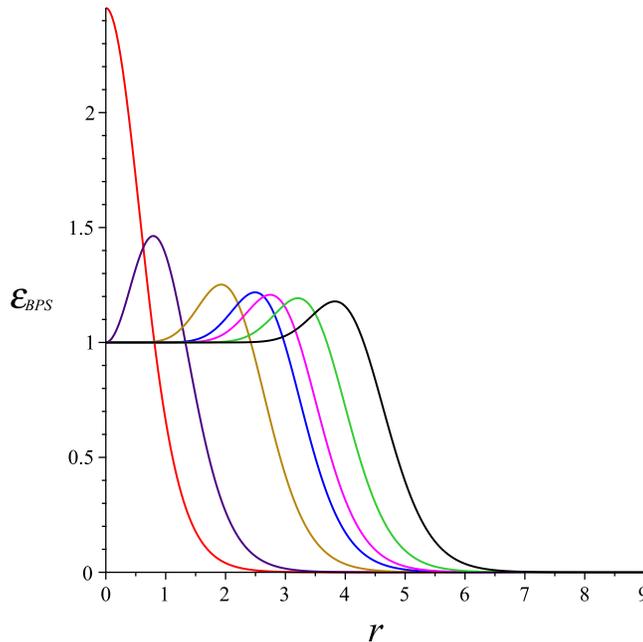


Figura 2.3: Soluções numéricas para a densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ para diferentes valores de n .

ELETRODINÂMICA DE PODOLSKY-HIGGS

Neste capítulo estudamos a estrutura BPS da eletrodinâmica de Podolsky-Higgs (PH), uma extensão da eletrodinâmica de MH com derivadas de ordem superior no setor de calibre, descrita pela seguinte densidade lagrangiana,

$$\mathcal{L}_{PH} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2m^2}\partial_\mu F^{\mu\nu}\partial^\beta F_{\beta\nu} + |D_\mu\phi|^2 - V(|\phi|), \quad (3.1)$$

o segundo termo dessa densidade representa a contribuição do termo de derivada superior introduzido por Podolsky. Nessa equação, o parâmetro m é referido como a massa de Podolsky, tendo dimensão de massa propriamente dita. Lembramos que $D_\mu\phi$ é a derivada covariante já definida anteriormente em (2.3). No limite $m \rightarrow \infty$, retornamos a densidade lagrangiana de Maxwell-Higgs definida em (2.1), ou seja,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{PH} = \mathcal{L}_{MH}. \quad (3.2)$$

A extremização da densidade lagrangiana resulta na seguinte equação de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu A_\beta)} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\beta)} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\beta} = 0. \quad (3.3)$$

Desta forma, usando a densidade lagrangiana (3.1) na equação (3.3), obtemos a equação de movimento para o campo de calibre A_μ ,

$$\left(1 + \frac{\square}{m^2}\right) \partial_\nu F^{\nu\mu} = eJ^\mu, \quad (3.4)$$

onde J^μ a densidade de corrente conservada já definida em (2.7). Do mesmo modo, a equação de movimento do campo de Higgs resulta

$$D_\mu D^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0. \quad (3.5)$$

No regime estacionário, da equação (3.4) obtemos a lei de Gauss

$$\left(1 - \frac{\nabla^2}{m^2}\right) \nabla^2 A_0 = 2e^2 A_0 |\phi|^2, \quad (3.6)$$

que é satisfeita identicamente pela condição de calibre $A_0 = 0$, tal como acontece na eletrodinâmica MH, evidenciando que as soluções apresentam carga elétrica total nula, ou seja, as configurações somente transportam fluxo magnético.

Similarmente, da equação (3.4) no regime estacionário, a lei de Ampère fica

$$\epsilon_{kj} \left(1 - \frac{\nabla^2}{m^2} \right) \partial_j B = e J_k, \quad (3.7)$$

ou, alternativamente,

$$\left(1 - \frac{\nabla^2}{m^2} \right) \partial_j B = -e \epsilon_{jk} J_k. \quad (3.8)$$

Em princípio, no regime estacionário, a equação de movimento do campo de Higgs possui a mesma estrutura apresentada na equação (2.14), ou seja,

$$\nabla^2 \phi - 2ieA_j \partial_j \phi + e^2 A_j^2 \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0, \quad (3.9)$$

onde usamos as condições de calibre $A_0 = 0$ e $\partial_j A_j = 0$.

3.1 Estrutura BPS da eletrodinâmica de Podolsky-Higgs

No regime estacionário, a densidade de energia $\mathcal{E} = -\mathcal{L}$, e com a imposição da condição de calibre $A_0 = 0$, toma a forma

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} B^2 + \frac{(\nabla B)^2}{2m^2} + |D_k \phi|^2 + V(|\phi|) \quad (3.10)$$

que é definida positiva. A finitude da energia total sugere que os termos acima satisfaçam condições similares as estabelecidas à eletrodinâmica de Maxwell-Higgs em (2.19), ou seja,

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} B(\mathbf{x}) = 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \partial_k B(\mathbf{x}) = 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} D_k \phi(\mathbf{x}) = 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} V(|\phi(\mathbf{x})|) = 0. \quad (3.11)$$

Após uma integração por partes do termo $(\nabla B)^2$ obtemos

$$\int \frac{(\nabla B)^2}{2m^2} d^2 \mathbf{x} = - \int \frac{B(\nabla^2 B)}{2m^2} d^2 \mathbf{x}, \quad (3.12)$$

dadas as condições para o campo magnético na equação (3.11). Assim, a energia total do sistema fica expressa como

$$E = \int \left[\frac{1}{2m^2} B (m^2 - \nabla^2) B + |D_k \phi|^2 + V(|\phi|) \right] d^2 \mathbf{x}, \quad (3.13)$$

onde consideramos o operador $m^2 - \nabla^2$ definido positivo. Com o intuito de minimiza-la, ou seja, convém escrever o primeiro termo da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2m^2} B (m^2 - \nabla^2) B d^2 \mathbf{x} &= \int \left[\frac{1}{2m^2} (B \mp U) (m^2 - \nabla^2) (B \mp U) \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{1}{m^2} B (m^2 - \nabla^2) U - \frac{1}{2m^2} U (m^2 - \nabla^2) U \right] d^2 \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde $U \equiv U(|\phi|)$ é uma função a ser fixada. Similarmente usaremos a relação (2.20)

$$|D_k \phi|^2 = |D_\pm \phi|^2 \pm eB |\phi|^2 \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ik} \partial_i J_k, \quad (3.15)$$

em que $D_\pm \phi$ é a definida em (2.21) e J_k é a componente espacial da densidade de corrente definida anteriormente em (2.7).

Desta forma, colocando (3.14) e (3.15) em (3.13), teremos a energia total expressa por

$$\begin{aligned} E = \int \left\{ \frac{1}{2m^2} (B \mp U) (m^2 - \nabla^2) (B \mp U) \pm B \left[\frac{1}{m^2} (m^2 - \nabla^2) U + e |\phi|^2 \right] \right. \\ \left. + |D_\pm \phi|^2 + V(|\phi|) - \frac{1}{2m^2} U (m^2 - \nabla^2) U \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ik} \partial_i J_k \right\} d^2 \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Primeiro, observamos que a contribuição da energia total dada pela integral da derivada total em (3.16) é nula, ou seja,

$$\int \epsilon_{ik} \partial_i J_k d^2 \mathbf{x} = 0. \quad (3.17)$$

Continuando com a implementação da técnica BPS, escrevemos a energia total (3.16) como

$$\begin{aligned} E = \int \left\{ \frac{1}{2m^2} (B \mp U) (m^2 - \nabla^2) (B \mp U) + |D_\pm \phi|^2 \right. \\ \left. \pm B \left[\frac{1}{m^2} (m^2 - \nabla^2) U + e |\phi|^2 \right] + V(|\phi|) - \frac{1}{2m^2} U (m^2 - \nabla^2) U \right\} d^2 \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Os dois termos na primeira fila são definidos positivos. Se observarmos o primeiro termo na segunda fila, esse se tornará proporcional ao campo magnético (e a sua integral proporcional ao fluxo magnético) se o fator,

$$\frac{1}{m^2} (m^2 - \nabla^2) U + e |\phi|^2,$$

for uma constante, ou seja,

$$\frac{1}{m^2} (m^2 - \nabla^2) U + e |\phi|^2 = ev^2, \quad (3.19)$$

com isso, no limite $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ a função U é nula, e deste modo, temos que o valor esperado no vácuo do campo de Higgs é

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\phi(\mathbf{x})| = v. \quad (3.20)$$

Logo, a partir da equação (3.19) fixamos a função $U(|\phi|)$,

$$U(|\phi|) = e \left(1 - \frac{\nabla^2}{m^2} \right)^{-1} (v^2 - |\phi|^2). \quad (3.21)$$

Uma vez fixada a função $U(|\phi|)$ podemos fixar o potencial $V(|\phi|)$ ao considerarmos que a soma dos dois últimos termos na segunda fila da equação (3.18) seja nula, quer dizer,

$$V(|\phi|) - \frac{1}{2} U \left(1 - \frac{\nabla^2}{m^2} \right) U = 0, \quad (3.22)$$

assim, a auto-interação do campo de Higgs no modelo de PH é expresso como

$$V(|\phi|) = \frac{1}{2}e^2 (v^2 - |\phi|^2) \left(1 - \frac{\nabla^2}{m^2}\right)^{-1} (v^2 - |\phi|^2). \quad (3.23)$$

Esta interação é não-local, sendo $\left(1 - \frac{\nabla^2}{m^2}\right)^{-1}$ o termo que acarreta a não-localidade, uma consequência direta do termo de Podolsky na lagrangiana (3.1). Além do mais, esta teoria é de altas derivadas e teorias deste tipo são não-locais. A não-localidade fica claramente expressa se usamos a função de Green do operador $1 - \frac{\nabla^2}{m^2}$, ou seja,

$$\left(1 - \frac{\nabla^2}{m^2}\right) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.24)$$

desse modo, o potencial BPS, não-local, é expresso como

$$V(|\phi(\mathbf{x})|) = \frac{1}{2}e^2 (v^2 - |\phi(\mathbf{x})|^2) \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (v^2 - |\phi(\mathbf{y})|^2) d^2\mathbf{y}. \quad (3.25)$$

Então, usando os resultados mostrados pelas equações (3.19) e (3.22), vemos que a energia total fica expressa como

$$E = E_{BPS} + \int dx^2 \left\{ \frac{1}{2m^2} (B \mp U) (m^2 - \nabla^2) (B \mp U) + |D_{\pm}\phi|^2 \right\} \geq E_{BPS}, \quad (3.26)$$

como já mencionado anteriormente, o integrando é definido positivo e a quantidade E_{BPS} é dada por

$$E_{BPS} = \pm ev^2 \int dx^2 B = \pm ev^2 \Phi > 0, \quad (3.27)$$

é proporcional ao fluxo magnético, e como veremos em breve será a energia mínima do sistema ou energia BPS designada de limite de Bogomol'nyi.

A partir da equação (3.26) observamos que a igualdade pode ser atingida se os termos que compõem o integrando se anulam independentemente, ou seja, se os campos satisfazem as equações

$$D_{\pm}\phi = 0, \quad (3.28)$$

$$B = \pm e \left(1 - \frac{\nabla^2}{m^2}\right)^{-1} (v^2 - |\phi|^2). \quad (3.29)$$

Estas são as equações BPS genuínas. E através da mesmas podemos recuperar as equações de Euler-Lagrange, ou seja, tanto a lei de Ampère quanto a do campo de Higgs com potencial dado pela equação (3.25). Também, observamos que a primeira equação é de primeira ordem tal como no caso de Maxwell-Higgs, porém, a segunda uma equação integro-diferencial, com o lado direito da igualdade de (3.29) sendo uma equação integral, enquanto o esquerdo uma equação diferencial, ou seja

$$B(\mathbf{x}) = \pm e \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (v^2 - |\phi(\mathbf{y})|^2) d^2\mathbf{y}. \quad (3.30)$$

Por outro lado a equação (3.29) pode ser transformada em uma equação puramente diferencial se aplicamos o operador $1 - \frac{\nabla^2}{m^2}$, ou seja,

$$\left(1 - \frac{\nabla^2}{m^2}\right) B = \pm e (v^2 - |\phi|^2), \quad (3.31)$$

desse modo, observamos que a equação de Ampère (3.8) reduz em uma ordem derivativa e, que no limite BPS a densidade de corrente J_k se expressa como

$$J_k = \mp \epsilon_{kj} \partial_j |\phi|^2. \quad (3.32)$$

Usando as equações BPS, a densidade de energia BPS é obtida a partir da densidade (3.10),

$$\mathcal{E}_{BPS} = B \left(1 - \frac{\nabla^2}{m^2}\right) B + |D_k \phi|^2, \quad (3.33)$$

e como esperado, ela é positiva definida.

3.2 Soluções tipo vórtice do modelo PH

Estamos interessado em soluções tipo vórtice do sistema BPS definido pelas equações (3.28) e (3.31), como esse intuito usaremos o ansatz introduzido nas equações (2.34) e (2.35),

$$\phi(\mathbf{x}) = v g(r) e^{in\theta}, \quad A_k(\mathbf{x}) = \epsilon_{kj} \frac{x_j}{er^2} [a(r) - n]. \quad (3.34)$$

Assim, as equações BPS do modelo de PH se expressam como

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (3.35)$$

$$\left(1 - \frac{\tilde{\nabla}^2}{m^2}\right) B = \pm ev^2 (1 - g^2). \quad (3.36)$$

onde o operador $\tilde{\nabla}^2$ é

$$\tilde{\nabla}^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}. \quad (3.37)$$

Também, por conveniência, a equação (3.31) foi expressa como uma equação diferencial de terceira ordem para a função $a(r)$; lembrando que B representa o campo magnético expresso como

$$B = -\frac{a'}{er}, \quad (3.38)$$

Também, no ansatz, a densidade de energia (3.10) no limite BPS é expressa como

$$\mathcal{E}_{BPS} = B \left(1 - \frac{\tilde{\nabla}^2}{m^2}\right) B + 2v^2 \left(\frac{ag}{r}\right)^2. \quad (3.39)$$

Como já estabelecido no capítulo anterior, as funções $a(r)$ e $g(r)$ são regulares e satisfazem as seguintes condições de contorno

$$\lim_{r \rightarrow 0} a(r) = n, \quad \lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0, \quad (3.40)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 1. \quad (3.41)$$

Vale ressaltar que as condições de fronteira acima são suficientes para determinar as condições adicionais para resolver o sistema de equações diferenciais formado por (3.35) e (3.36).

3.2.1 Comportamento das soluções nas fronteiras

Agora, iremos analisar o comportamento das equações (3.35) e (3.36) para as regiões em $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$ assim como já foi abordado no modelo anterior.

3.2.1.1 Comportamento em $r \rightarrow 0$

Para calcular o comportamento na origem dos perfis $a(r)$ e $g(r)$, expressamos como séries de potências, desta forma,

$$g(r) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k r^k, \quad a(r) = n - \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k, \quad (3.42)$$

que substituídas nas equações (3.35) e (3.36) produzem as seguintes expressões para os perfis,

$$g(r) = H_n r^n - \frac{e^2 v^2 A_2}{4} H_n r^{n+2} + \left(\frac{e^4 v^4 A_2^2}{32} + \frac{e^2 v^2 m^2 (1 - A_2)}{64} \right) H_n r^{n+4} + \dots, \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} a(r) = & n - \frac{e^2 v^2 A_2}{2} r^2 + \frac{e^2 v^2 m^2 (1 - A_2)}{16} r^4 + \frac{e^2 v^2 m^4 (1 - A_2)}{384} r^6 \\ & - \frac{e^2 v^2 m^2}{8(n+2)(n+1)^2} H_n^2 r^{2n+4} + \dots, \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde as constantes A_2 e H_n dependem de n e das outras constantes de acoplamento do modelo (e, v, m), e são determinadas numericamente.

Encontradas as soluções para o campo de gauge $a(r)$ e campo de Higgs $g(r)$ em (3.44) e (3.43), também, podemos calcular os comportamentos tanto do campo magnético como da densidade de energia BPS usando as equações (3.39) e (3.38), respectivamente. Desse modo, chegamos as seguintes expressões para os comportamentos em $r = 0$,

$$B(r) = e v^2 A_2 - \frac{e v^2 m^2 (1 - A_2)}{4} r^2 - \frac{e v^2 m^4 (1 - A_2)}{64} r^4 + \frac{e v^2 m^2}{4(n+1)} H_n^2 r^{2n+2} + \dots, \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{BPS}(r) = & e^2 v^4 A_2 - \frac{e^2 v^4 m^2 (1 - A_2)}{4} r^2 - \frac{e^2 v^4 m^4 (1 - A_2)}{64} r^4 + 2n^2 v^2 H_n^2 r^{2n-2} \\ & - (n+1)^2 e^2 v^4 A_2 H_n^2 r^{2n} + \dots \end{aligned} \quad (3.46)$$

3.2.1.2 Comportamento em $r \rightarrow \infty$

Feita a análise para a origem, faremos agora para $r \rightarrow \infty$. Neste limite e considerando a busca por soluções do tipo vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen obtemos

$$g(r) \simeq 1 - \frac{C_\infty}{\sqrt{r}} \exp(-M_{PH} r), \quad (3.47)$$

$$a(r) \simeq M_{PH} C_\infty \sqrt{r} \exp(-M_{PH} r), \quad (3.48)$$

onde o parâmetro M_{PH} é a massa dos campos de Higgs e de calibre no limite BPS

$$M_{PH} = \frac{m}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{2m_{MH}}{m}} - \sqrt{1 - \frac{2m_{MH}}{m}} \right), \quad (3.49)$$

com m_{MH} a massa dos vórtices BPS do modelo de Maxwell-Higgs,

$$m_{MH} = \sqrt{2} ev. \quad (3.50)$$

Analisando o comportamento da massa M_{PH} no limite $m \rightarrow \infty$

$$M_{PH} = m_{MH} \left(1 + \frac{m_{MH}^2}{2m^2} + \frac{7m_{MH}^4}{8m^4} + \dots \right), \quad (3.51)$$

vemos, que nesse limite, a massa chega a ser aquela dos vórtices BPS de Maxwell-Higgs (comportamento em azul dado na [Figura 3.1](#)).

Outro ponto a ser observado é que a existência de vórtices tipo ANO [ver figura [Figura 3.1](#)] acontece se o parâmetro M_{PH} é real e positivo (comportamento em vermelho na [Figura 3.1](#)), isso requer que o parâmetro de Podolsky satisfaça a condição

$$m \geq 2m_{MH}. \quad (3.52)$$

E quando a igualdade é satisfeita, a massa M_{PH} atinge o valor máximo

$$M_{PH} = \sqrt{2} m_{MH}. \quad (3.53)$$

Para valores $m < 2m_{MH}$, a massa M_{PH} adquire uma parte imaginária de tal modo que as soluções se tornam oscilantes [vide a [Seção A.1](#)], consequentemente, elas não representam configurações do tipo ANO.

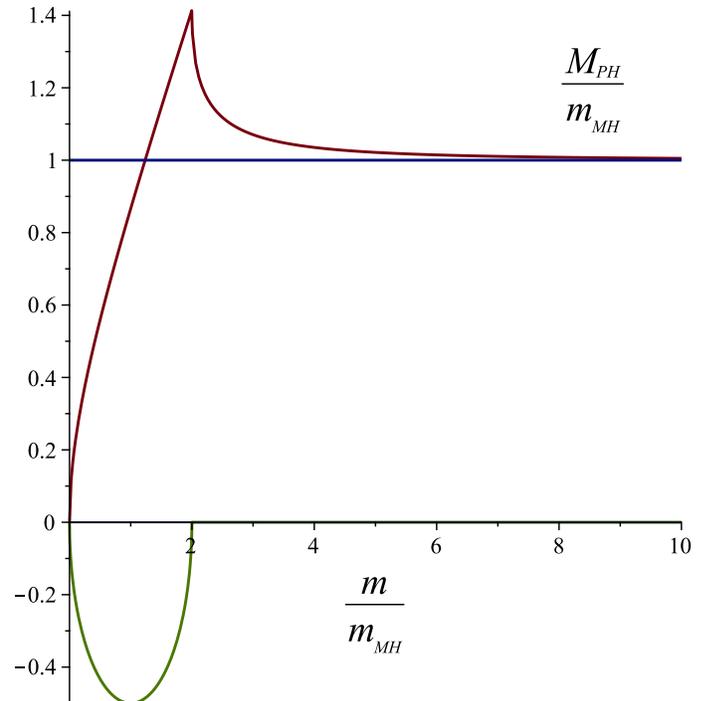


Figura 3.1: Massas dos bósons em função da massa de PH. A linha verde representa a parte imaginária, com a vermelha sendo a real de M_{PH} , enquanto a azul, a massa de m_{MH} .

3.3 Soluções numéricas

Para resolver numericamente o sistema BPS, dado pelas equações diferenciais (3.35) e (3.36), fixamos $e = v = 1$.

3.3.1 Soluções para $n = 1, 4, 5, 7, 8, 12, 13$ e $m = 2m_{MH}$

A primeira análise numérica fixamos $m = 2m_{MH}$ e obtemos as soluções para diferentes valores do *winding number*. Desse modo com a cor vermelho para $n = 1$, violeta ($n = 4$), amarelo ($n = 5$), azul ($n = 7$), rosa ($n = 8$), verde ($n = 12$) e preto ($n = 13$) com linhas sólidas representando o modelo PH e as pontilhadas MH.

Portanto, por meio da análise numérica do modelo de PH, conseguimos observar comportamentos do campo de Higgs que saturam mais rapidamente em 1 para valores menores de n . Para valores elevados de n , este campo tende a permanecer nulo mesmo distante da origem, e a partir de um determinado valor de r , o campo começa a crescer até atingir a saturação em 1. Assim como no caso de MH, no presente modelo, o estado de vácuo é atingido de maneira mais abrupta quando $n = 1$, como pode ser visto na Figura 3.2. Além disso, ao analisar o campo de PH na Figura 3.3a, observamos que ele atinge o estado de vácuo mais rapidamente do que o campo de Maxwell-Higgs para diferentes valores de n , devido à influência da massa m de Podolsky. Isso evidencia a contribuição dos termos de derivadas superiores na teoria. No entanto, na origem, o comportamento do campo de PH é mais lento do que o de MH, como ilustrado na Figura 3.3b.

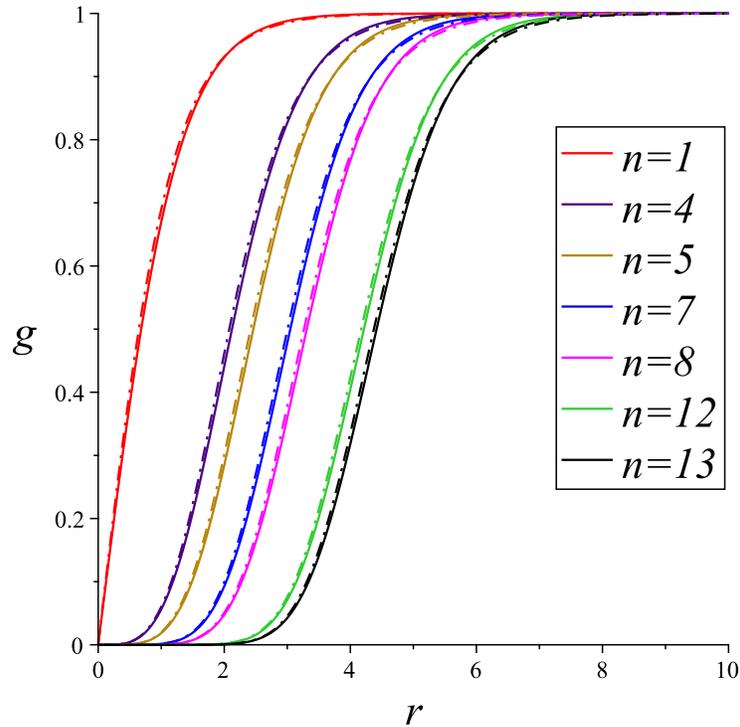
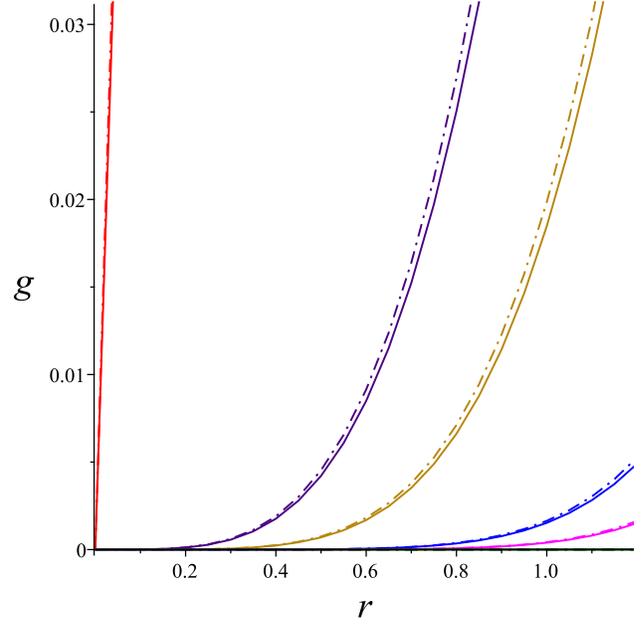
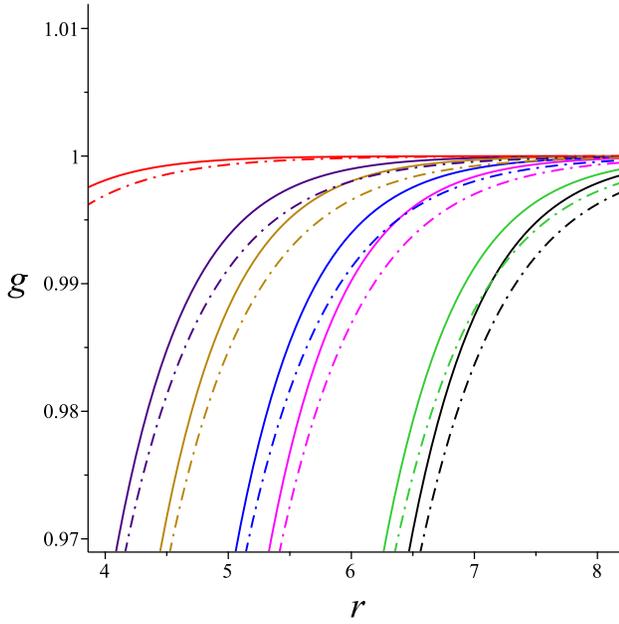
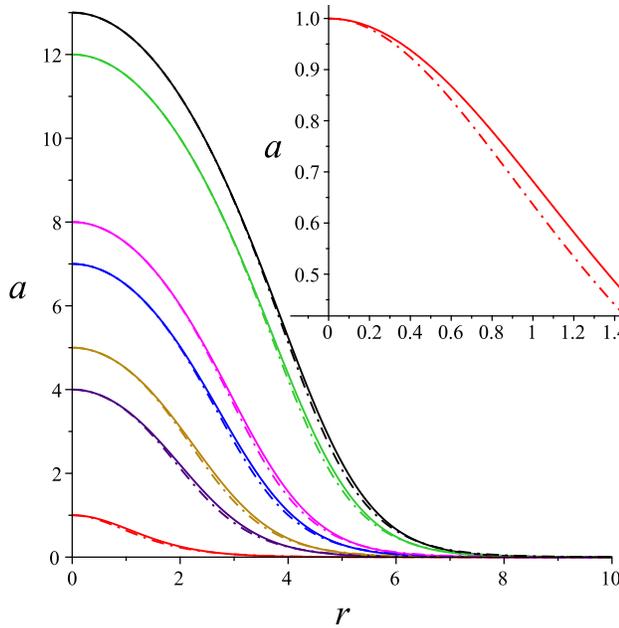


Figura 3.2: Comparação entre os campos de PH (linhas sólidas) e MH (linhas ponto-tracejadas) para diferentes valores de vorticidade n .

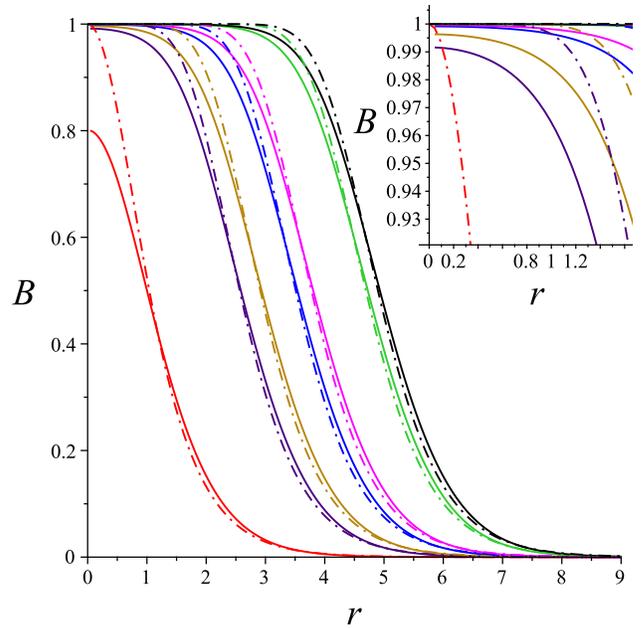


(a) Ampliação do campo de Higgs $g(r)$ para r grande. (b) Ampliação do campo de Higgs $g(r)$ para a origem.

Figura 3.3: Comportamento das soluções numéricas para o campo de Higgs g para $n = 1, 4, 5, 7, 8, 12, 13$ e $m = 2\sqrt{2}$ na origem e em r grande. Nesta análise, considera-se as linhas sólidas as soluções para PH e linhas pontilhadas MH.



(a) Campo de gauge a .



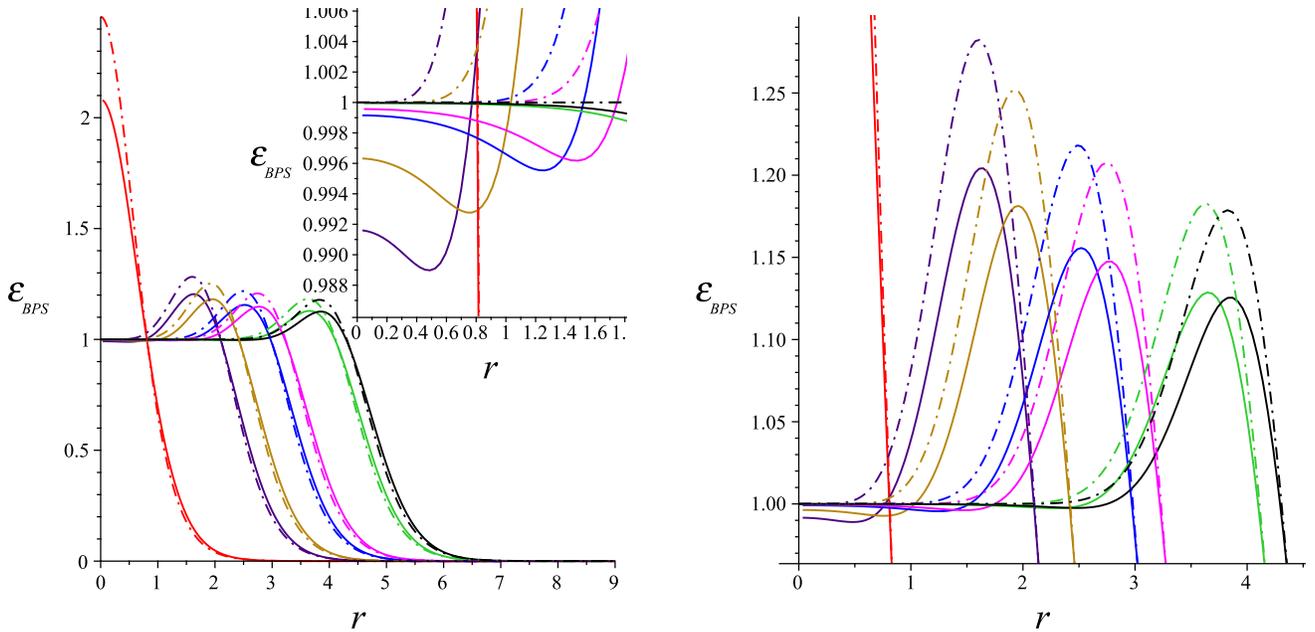
(b) Campo magnético B .

Figura 3.4: Soluções numéricas para o campo de gauge a e campo magnético B , com $n = 1, 4, 5, 7, 8, 12, 13$ e $m = 2\sqrt{2}$. Nesta análise, as linhas sólidas são soluções para PH, as linhas ponto-tracejadas representam soluções para o modelo MH.

Para o campo de gauge $a(r)$, por meio da análise numérica apresentada na [Figura 3.4a](#), observamos máximos em diferentes valores de n , e esse campo tende a zero à medida que r se aproxima do infinito. Esses comportamentos nos perfis numéricos estão em conformidade com as condições de contorno. Além disso, próximo à origem, o perfil numérico de PH leva mais tempo para coincidir com o comportamento de MH, especialmente quando $n = 1$. À medida que o valor de n aumenta, os campos de gauge nos modelos de PH e MH se sobrepõem em uma faixa maior de valores de r .

A análise do campo magnético B na [Figura 3.4b](#) revela comportamentos nos perfis numéricos que diferem do modelo de MH. Os valores máximos variam na origem à medida que o número de *winding* n aumenta, chegando ao valor unitário quando $n = 13$. Além disso, observamos que, na origem, os comportamentos do campo magnético crescem e alcançam o valor unitário, abrangendo uma área maior à medida que n aumenta. No entanto, para $n = 1$, o campo magnético se comporta como um *lump*.

Comparando-o ao *lump* de MH, observamos que o campo magnético correspondente ao modelo de PH abrange uma área menor, como evidenciado na [Figura 3.4b](#). Isso indica que o fluxo magnético é menor para o modelo de PH, confirmando que a influência do termo de altas derivadas na lagrangiana é mais significativa em configurações de campo magnético associadas a valores menores da vorticidade n .



(a) Densidade de energia BPS \mathcal{E}_{BPS} .

(b) Densidade de energia BPS \mathcal{E}_{BPS} .

Figura 3.5: Soluções numéricas para a densidade de energia BPS \mathcal{E}_{BPS} para $n = 1, 4, 5, 7, 8, 12, 13$ e $m = 2\sqrt{2}$. Nesta análise, considera-se as linhas sólidas as soluções para PH e linhas pontilhadas MH.

As configurações numéricas da densidade de energia BPS \mathcal{E}_{BPS} encontradas na [Figura 3.5](#), mostram que para $n = 1$ o comportamento da mesma é diferente dos demais valores de n , correspondendo portanto a um *lump* que decai a zero assim como em MH, no entanto, relativamente menor como visto na [Figura 3.5b](#), sendo esta diminuição devida a influência do termo de Podolsky. Analisando para os valores $n = 4, 5, 7$ da vorticidade, a densidade de energia não apresenta-se como unitária na origem, tendo respectivamente

somente a partir de $n = 7$ valores na origem da densidade de energia BPS que são iguais ao valor unitário. Ademais, assim como em MH, a densidade de energia mostra-se como anéis a partir de $n > 1$, onde estes anéis apresentam raios que aumentam proporcionalmente ao valor de n . No entanto, esses anéis mostra-se com máximos que são menores em comparação aos máximos no modelo de MH.

Ao analisar os perfis numéricos de $r\mathcal{E}_{BPS}$ do sistema no limite BPS, exploramos diferentes valores da vorticidade n no presente modelo. Nesse contexto, consideramos o parâmetro de Podolsky m , cujo valor é dado por $m = 2\sqrt{2}ev$. Através dessa restrição para valor da massa de Podolsky, concluímos que este valor de m resulta com o integrando da energia BPS localizado, finito e definido positivo como mostrado na [Figura 3.6](#), enquanto para valores de m menores que valor limite da massa de Podolsky, $r\mathcal{E}_{BPS}$ embora seja localizado, finito e com valores máximos que crescem a medida que n aumenta, apresenta-se em partes definida

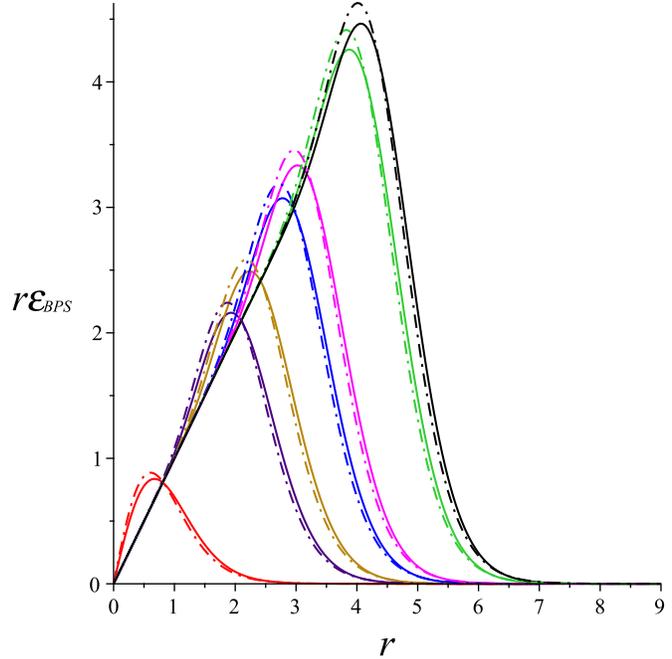


Figura 3.6: Soluções numéricas para $r\mathcal{E}_{BPS}$ (linhas sólidas PH com $m = 2\sqrt{2}ev$ e pontos-tracejadas MH) e $n = 1, 4, 5, 7, 8, 12, 13$.

negativo (vide a [Figura A.4](#) do [Apêndice A](#)). Esse problema resulta em uma energia negativa devido à presença do termo de Podolsky na densidade lagrangiana, quando os valores de m são menores do que o limite estabelecido. Esse termo contém derivadas no tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$, o que é característico de teorias não-locais. No entanto, essa questão é contornada pela restrição imposta ao valor de m . Quando as soluções são comparadas as de MH, estas apresentam as mesmas configurações.

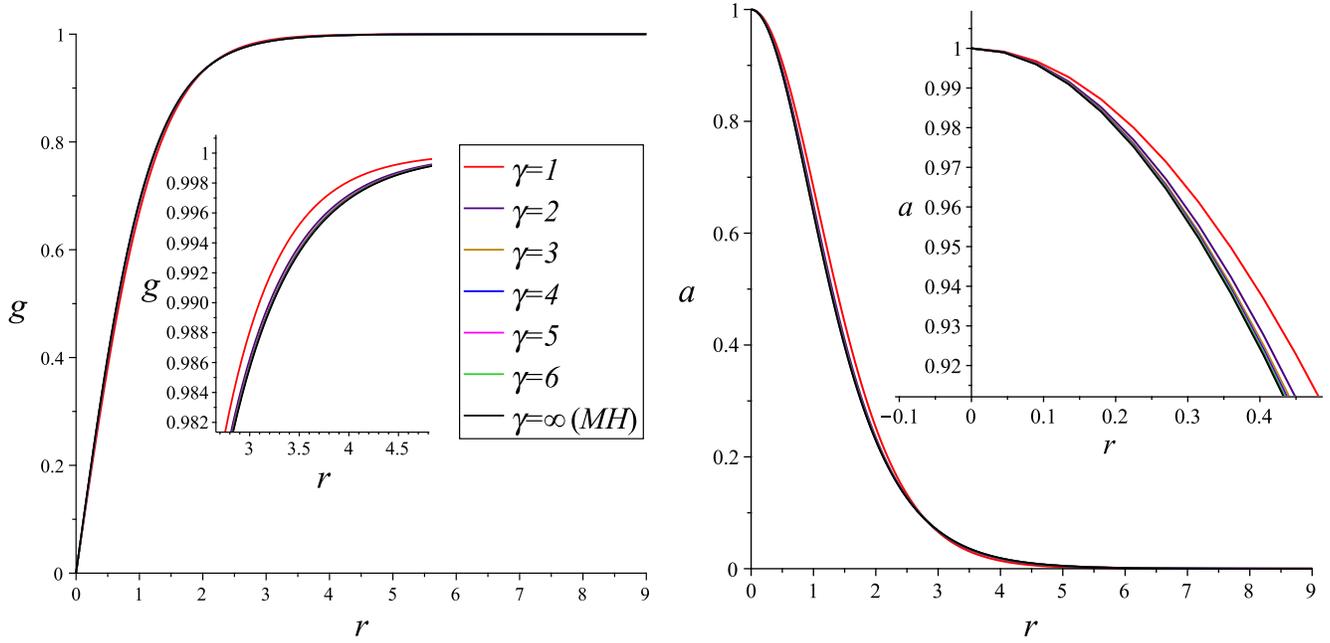
Dessa forma, a influência do termo de Podolsky na energia total está relacionada às restrições aplicadas ao parâmetro m . Para valores de $m \geq 2\sqrt{2}ev$, a energia total é definida exclusivamente como positiva. Por outro lado, para valores de $m < 2\sqrt{2}ev$, a energia total é parcialmente negativa.

3.3.2 Soluções para $n = 1$ e $m = 2\gamma m_{MH}$, onde $\gamma = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \infty(MH)$

Apresentamos na [Figura 3.7](#) perfis numéricos que descrevem os comportamentos do campo de Higgs, conforme ilustrado na [Figura 3.7a](#), e do campo de gauge, como mostrado na [Figura 3.7b](#). A análise realizada na [Figura 3.7a](#) revela que, para a massa mínima de Podolsky, ou seja, quando $\gamma = 1$, a solução resulta em um campo de Higgs mais amplo, que abrange uma área maior. À medida que o valor de γ aumenta, o campo de Higgs se torna mais estreito até atingir a saturação em MH, quando $\gamma = \infty$ (linha sólida preta), em que a massa m se torna infinita e também recuperamos MH na Lagrangiana (3.1).

Por outro lado, o campo de gauge exibe um decaimento mais lento para massas de Podolsky menores,

como evidenciado pelo aumento da resolução do perfil numérico na [Figura 3.7b](#). Esse campo mostra que, para determinados intervalos de r , as soluções se sobrepõem umas às outras. Além disso, quando $\gamma = \infty$, recuperamos o perfil do campo de gauge do modelo de MH. Quanto ao campo magnético $B(r)$ e à densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(r)$, seus comportamentos estão ilustrados nas [Figura 3.8](#) e [Figura 3.9](#), respectivamente.



(a) Campo de Higgs $g(r)$.

(b) Campo de gauge $a(r)$.

Figura 3.7: Soluções numéricas para o campo de Higgs $g(r)$ e campo de gauge $a(r)$ para $n = 1$ e $m = 2\gamma\sqrt{2}$, em que variou-se $\gamma = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \infty$. A linha sólida preta é o valor para $\gamma = \infty$, a solução do modelo de PH que recupera MH.

A análise numérica evidencia que os perfis para o campo magnético na [Figura 3.8](#) com $n = 1$, demonstra *lumps* que crescem no passo em que aumentamos a massa de Podolsky, esta característica indica que com o aumento da massa do modelo, começamos a observar PH recaindo ao de MH quando alcançamos m infinito, expressado pela linha sólida preta. Além do mais, podemos concluir que há intervalos de r onde as soluções do campo magnético se sobrepõem com a solução de MH.

Para a densidade de energia BPS \mathcal{E}_{BPS} na [Figura 3.9](#) observamos que quanto maior o valor da massa de Podolsky m , maior será o valor de \mathcal{E}_{BPS} na origem e tendo um comportamento de *lumps*

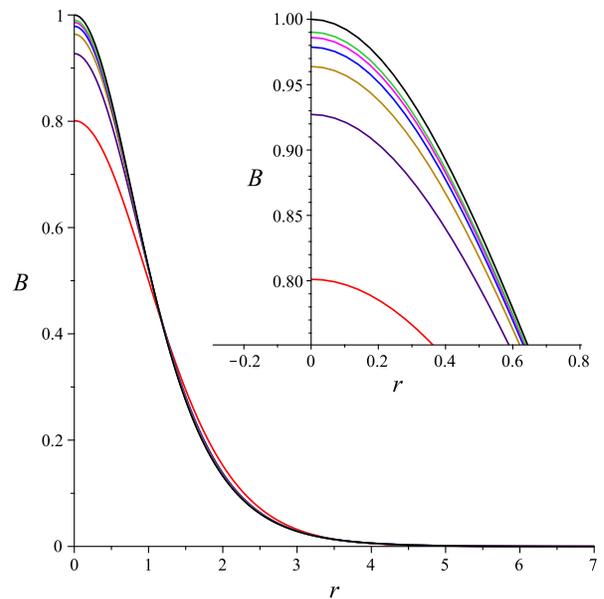


Figura 3.8: Campo magnético $B(r)$ para $\gamma = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \infty$.

estreitos que decaem abruptamente a zero, ademais, analisamos que as soluções numéricas para \mathcal{E}_{BPS} se sobrepõem no decaimento.

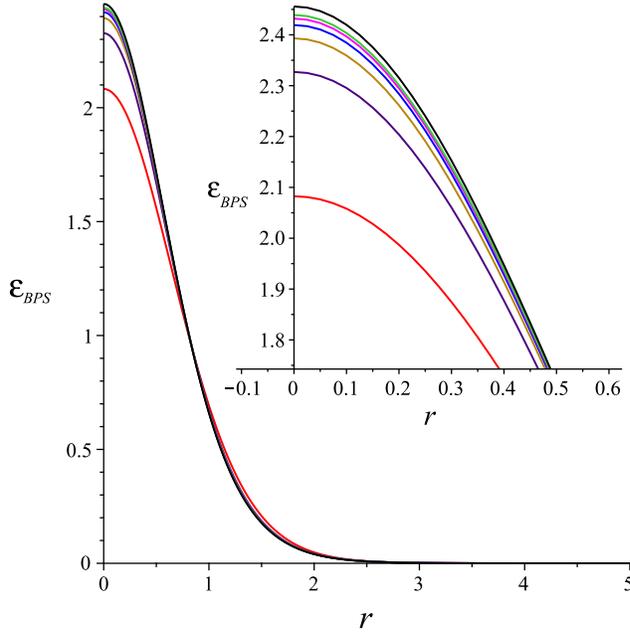


Figura 3.9: Densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ para $\gamma = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \infty$.

menores em comparação com os de m que levam a valores de energias positivas, além de observamos energias para este parâmetro que demonstram comportamento oscilantes, o que não é de interesse para soluções tipo vórtices de ANO.

Verificando para $n = 3$ o perfil numérico para o campo magnético $B(r)$ na Figura 3.11a, vimos que este campo não satura para o valor unitário somente na massa $m = 2\sqrt{2}$, mostrando o mesmo ser sensível na origem para mudanças de m , além disto, a medida que aumentamos gradualmente a massa do modelo o campo magnético começa a abarcar uma área maior, ou seja, um fluxo magnético maior, mostrando portanto influência do parâmetro m no campo magnético. A análise numérica para $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ visualizada na Figura 3.11b evidencia que a mesma só satura para o valor unitário na origem somente para o parâmetro de Podolsky

Deste modelo, voltamos para a densidade de energia BPS de MH em $m = \infty$, no qual representamos pela linha sólida preta na Figura 3.9 e mediante o aumento da resolução no comportamento de \mathcal{E}_{BPS} na origem, observamos que a mesma apresenta diferentes valores em função dos γ . Através da quantidade $r\mathcal{E}_{BPS}$ podemos buscar o comportamento da energia BPS em função do parâmetro de Podolsky encontrada na Figura 3.10. Esta mostra-se localizada e definida positiva para todos os parâmetros $m = 2\gamma\sqrt{2}ev$, no qual são representados por linhas sólidas no gráfico, no entanto, para $m = 2\gamma\sqrt{2}ev$ onde $\gamma < 1$ (vide a Figura A.5a) encontramos para todos os valores de m , densidades de energias em partes definidas negativas e apresentado máximos

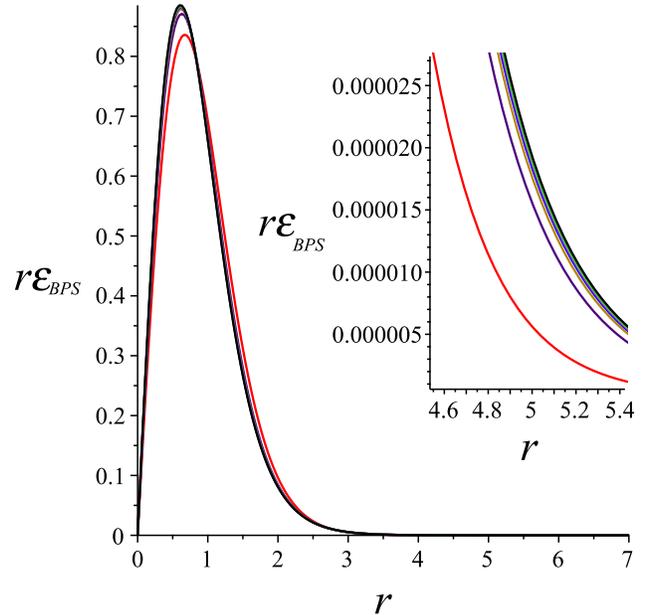


Figura 3.10: Perfis para $r\mathcal{E}_{BPS}(r)$ da energia BPS para $\gamma = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \infty$, $m = 2\gamma\sqrt{2}ev$ (linhas: sólidas) e $n = 1$.

m infinito, que é exatamente o limite em que recuperamos MH, além de apresentar máximos absolutos que variam de acordo com m .

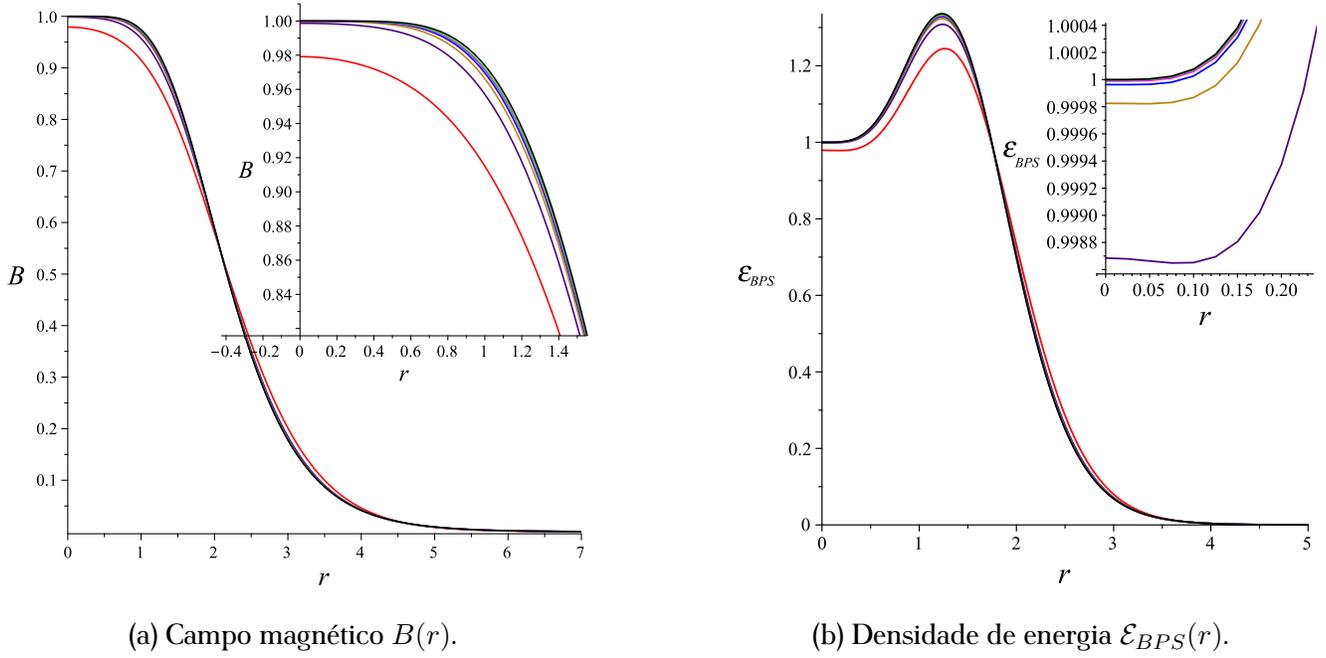


Figura 3.11: Soluções numéricas para o campo magnético $B(r)$ e densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ para $n = 3$ e $m = 2\gamma\sqrt{2}$ em que variou-se $\gamma = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \infty$. Recuperamos MH para $\gamma = \infty$ representado pela linha sólida preta.

3.3.3 O potencial BPS não-local V com $n = 1$ e m variável

Tendo tratado numericamente os comportamentos para o campo de Higgs $g(r)$ e campo magnético $B(r)$, podemos agora analisar o perfil numérico para o potencial BPS não-local V expresso na equação (3.23)

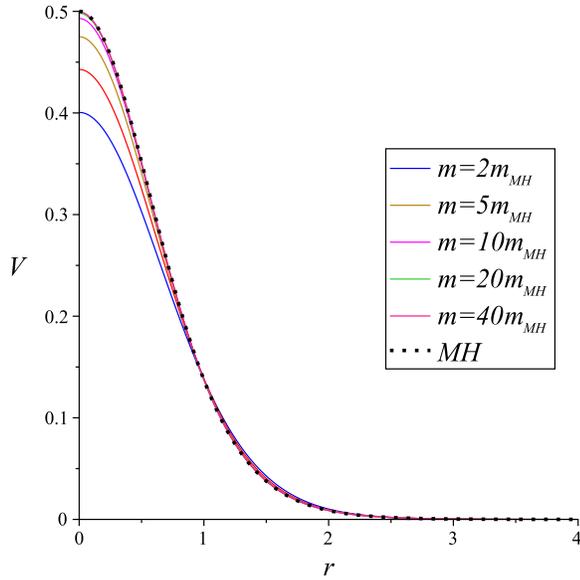
$$V(|\phi|) = \frac{1}{2}e^2(v^2 - |\phi|^2) \left(1 - \frac{\nabla^2}{m^2}\right)^{-1} (v^2 - |\phi|^2), \quad (3.54)$$

o potencial possui um único valor de vácuo $|\phi| = v$ que provoca a quebra espontânea da simetria do modelo PH, levando o sistema físico a gerar soluções topológicas. Expressando o potencial em termos do ansatz (3.34), temos

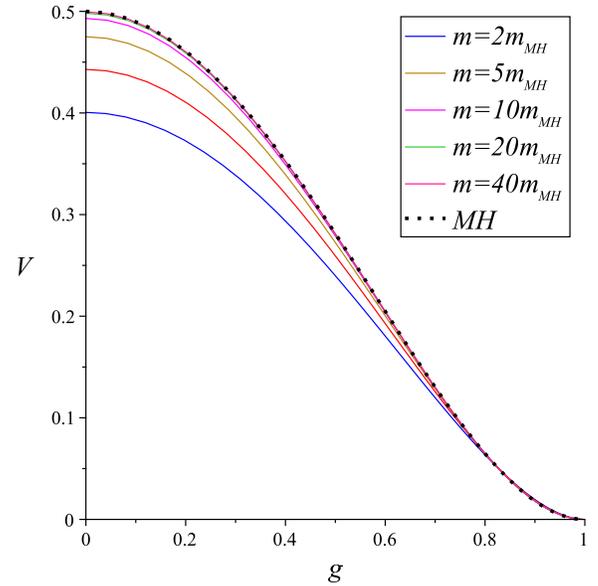
$$V(g(r)) = \frac{1}{2}e^2v^4(1 - g^2(r)) \left(1 - \frac{\tilde{\nabla}^2}{m^2}\right)^{-1} (1 - g^2(r)). \quad (3.55)$$

O perfil numérico de $V \equiv V(r)$ mostrado na Figura 3.12a pelas linhas sólidas para $n = 1$ e alguns valores de m , apresenta um ponto de equilíbrio instável em $r = 0$, conforme r atinge grandes valores o potencial se aproxima ao valor de vácuo $V = 0$, ponto onde a simetria $U(1)$ é quebrada. A figura mostra que na medida que m cresce, o potencial não-local de PH se aproxima ao perfil do potencial local de MH (linha pontilhada preta).

Já o potencial em termos de $g(r)$, ou seja, $V \equiv V(g)$ está representado na [Figura 3.12b](#), mostrando o vácuo simétrico para $g = 0$ em que a simetria $U(1)$ é preservada. Também, observamos o vácuo assimétrico em $g = 1$ onde a simetria $U(1)$ é quebrada, com a interação V assumindo o valor mínimo igual a zero. Portanto, através da análise do potencial V em função do campo de Higgs, observamos que este campo é quem provoca a quebra espontânea de simetria $U(1)$ na eletrodinâmica de Podolsky-Higgs.



(a) Potencial V em função de r .



(b) Potencial V em função de $g(r)$.

Figura 3.12: Soluções numéricas para o potencial BPS não-local V para $n = 1$ e alguns valores de m . A [Figura 3.12a](#) descreve os perfis de V vs. r , enquanto [Figura 3.12b](#) mostra V vs. g . As linhas sólidas correspondem ao modelo PH e o MH representada pela linha pontilhada preta. Observamos que quando m cresce indefinidamente o perfil de PH se aproxima ao perfil do MH.

Parte III

Estrutura BPS em teorias de calibre com altas derivadas: a eletrodinâmica de Deser-Jackiw-Chern-Simons-Higgs

Teorias de campo com altas derivadas do tipo Chern-Simons foram inicialmente exploradas por S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton na teoria da gravidade de Chern-Simons (CS) em três dimensões. Nessa abordagem, eles modificaram a ação de Einstein-Hilbert (EH) para a gravidade ao introduzir o termo de Chern-Simons [80]. A inclusão desse termo de Chern-Simons com altas derivadas na ação de EH resulta em uma massa para o gráviton (spin 2) e, conseqüentemente, em interações de alcance finito. Vale destacar que, apesar da presença de derivadas de terceira ordem, esse modelo não exibe estados fantasmas nem problemas de causalidade.

No contexto das teorias de altas derivadas tipo CS, S. Deser e R. Jackiw também contribuíram com extensões de ordem mais alta nas derivadas [81], mais precisamente, derivadas de ordem três com paridade ímpar. Nessa extensão, embora a paridade seja ímpar, ela depende do campo de fundo, ou seja, da intensidade do campo. Ao contrário da teoria de CS usual, que possui uma origem topológica, essa extensão não a possui devido à dependência da métrica em relação às derivadas covariantes adicionais. Além disso, quando essa ação da extensão de altas derivadas de CS é combinada com a ação de Maxwell, ela resulta em um par de excitações. Um deles é não massivo e está relacionado ao fóton, enquanto o outro é massivo e leva a estados fantasmas, devido aos termos de altas derivadas.

Neste contexto, diversos estudos foram motivados por [80, 81], que investigaram resultados relacionados a simetrias de dualidade em teorias estendidas contendo termos de altas derivadas em Maxwell e CS [82], onde puderam criar uma nova classe de modelos derivados de ordem superior, com invariância de calibre e dualidade em relação à classe com dimensão (2,1)-dimensão. Esses resultados de [82] mostraram-se válidos para dimensões arbitrárias (d,1) do espaço-tempo, à medida que desconsideramos termos de Chern-Simons e Chern-Simons-like.

Na área da Relatividade Geral, encontramos resultados envolvendo a entropia de buracos negros na presença de termos de CS com derivadas de ordem elevada [83]. Utilizando abordagens perturbativas, verificamos que em altas derivadas da ação efetiva em QED (Eletrodinâmica Quântica), em temperaturas finitas e tendendo ao infinito, as contribuições de altas derivadas desaparecem, enquanto para baixas temperaturas as contribuições covariantes têm um papel significativo [84]. Além disso, existem estudos que investigam a violação de Lorentz [85] e quantidades conservadas [86].

Por meio do método de abstração das invariâncias de calibre independentes, aplicado ao modelo Maxwell-Chern-Simons (MCS), onde o termo de MCS é de derivadas superiores [87], podemos explorar interações entre pontos estacionários descritos como fontes em uma extensão de altas derivadas em 3D para CS, com cálculo exato do propagador. No entanto, esse método não é válido para esse modelo, indicando que o modelo de CS em altas derivadas deve ser expresso em termos de dois campos acoplados, como descrito na eletrodinâmica de Lee-Wick [51].

Na QED massiva não comutativa (NC) em (1+2)-dimensões mostrou-se que a ação efetiva de um loop devido a interação com campos fermiônicos recai na ação de NC-CS, como também são encontradas contribuições de altas derivadas para NC CS e correções em um loop do propagador de fótons [88], análise do modelo MCS-Proca com de termo de CS de altas derivadas por meio da quantização da integral de caminho da hamiltoniana através de uma desfixação de calibre [89], quantização canônica na eletrodinâmica (1+2)-

dimensões com um termo de CS de altas derivadas apresentando Hamiltoniano satisfeitos pelos operadores de campo [90]. Recentemente a referência [91] abordou dentre outros resultados, a teoria tipo Chern-Simons em (1+2)-dimensões dotada de altas derivadas e com violação da simetria de Lorentz. Esta sendo precisamente na eletrodinâmica planar de Chern-Simons com termos tipo Chern-Simons de altas derivadas, em que para ângulos $\alpha = 0$ e $\beta = \pi$, teve como resultado modulo da velocidade de grupo maior do que 1, com vetores anti-paralelos e causalidade clássica violada.

A segunda parte do nosso trabalho iremos estudar vórtices na Eletrodinâmica Deser e Jackiw descrita em meados de 1999 [81]. Esta eletrodinâmica é de Chern-Simons em altas derivadas e teve como resultado, um par de excitações, um não massivo e outro advindo do termos de altas derivada que são vindos da ação de

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\kappa\epsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\alpha F_{\beta\gamma} - \frac{1}{4}F_{\beta\gamma}F^{\beta\gamma} - \frac{\vartheta}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\mu A_\alpha\partial^\mu\partial_\beta A_\gamma + \mathcal{O}(m^{-2}) \quad (3.56)$$

em que para o caso planar descrevemos no primeiro termo de (3.56) o tensor de Levi-Civita como $\epsilon^{\alpha\beta\gamma} = \epsilon^{012} = 1$ e com permutações ímpares deste mesmo é -1 , κ sendo o parâmetro de CS usual, o segundo é de Maxwell e posteriormente o de Deser e Jackiw. Entretanto, não se tem visto trabalhos publicados tratando estruturas tipo vórtices em teorias de Chern-Simons com altas derivadas, desta forma, a presente parte deste trabalho tem como objetivo encontrar estrutura do tipo vórtices para esta extensão de Chern-Simons que é especificamente a lagrangiana do tipo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\kappa\epsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\alpha F_{\beta\gamma} + \frac{\vartheta}{4}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\alpha\Box F_{\beta\gamma}. \quad (3.57)$$

Através desta lagrangiana buscaremos soluções tipo vórtices, mas antes disto revisaremos vórtices no modelo usual de Chern-Simons-Higgs (CSH) no capítulo a seguir e logo após partiremos para o nosso modelo expresso na lagrangiana em (3.57).

ELETRODINÂMICA DE CHERN-SIMONS-HIGGS

O chamado termo de Chern-Simons (CS) é um termo topológico definido em $(1 + 2)$ -dimensões, no caso de um campo de calibre abeliano A_μ , como

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu F_{\nu\alpha}, \quad (4.1)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. O termo CS é amplamente estudado e possui aplicações em vários sistemas físicos, por exemplo, ele é o enlace em teorias de campos para descrever sistemas da matéria condensada como gás de elétron bidimensional como também o efeito Hall quântico, entre outros [92, 93]. Recentemente o termo CS mostrou-se também aplicável ao estudo da geometria de certas estruturas moleculares (*motifs*) que compõem as proteínas [94].

O modelo de Chern-Simons-Higgs (CSH) é uma teoria de gauge abeliana em $(1 + 2)$ -dimensões [25] descrita pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \kappa \epsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu F_{\nu\alpha} + |D_\mu \phi|^2 - V(|\phi|), \quad (4.2)$$

onde κ , a constante de acoplamento do termo de Chern-Simons, possui dimensão de massa. Ele preserva a invariância de gauge da ação e a simetria PT, mas viola as simetrias discretas de paridade e reversão temporal. O campo de Higgs ϕ acopla com o campo de calibra via a derivada covariante mínima $D_\mu \phi$,

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ie A_\mu \phi. \quad (4.3)$$

O último termo $V(|\phi|)$ é o potencial de interação do campo de Higgs, cuja forma explicita do potencial será determinada pelo formalismo BPS.

A equação de Euler-Lagrange para o campo de gauge A_μ é

$$\frac{1}{2} \kappa \epsilon^{\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = e J^\mu, \quad (4.4)$$

onde J^μ é a densidade de corrente conservada

$$J^\mu = i [\phi (D_\mu \phi)^* - \phi^* (D_\mu \phi)]. \quad (4.5)$$

A respectiva equação para o campo de Higgs dada por

$$D_\mu D^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0 \quad (4.6)$$

A lei de Gauss obtida diretamente de (4.4)

$$\kappa B = eJ_0, \quad (4.7)$$

($B = \epsilon_{ij}\partial_i A_j$ e $F_{ij} = \epsilon_{ij}B$) mostra uma relação direta entre os setores elétrico e magnético, como mostrado se integrarmos a equação acima,

$$\kappa\Phi = Q, \quad (4.8)$$

mostrando que as configurações são eletricamente carregadas como também são portadoras de fluxo magnético.

No regime estacionário, extraímos de (4.4) a lei de Gauss e a lei de Ampère,

$$\kappa B = -2e^2 A_0 |\phi|^2, \quad (4.9)$$

$$\kappa\epsilon_{ij}\partial_j A_0 = -eJ_i, \quad (4.10)$$

respectivamente. Também, a equação para o campo de Higgs (4.6) na forma estacionária é

$$\partial_j\partial_j\phi_j - 2ieA_j\partial_j\phi - e^2(A_j)^2\phi + e^2(A_0)^2\phi - \frac{\partial V}{\partial\phi^*} = 0, \quad (4.11)$$

onde usamos a condição de calibre $\partial_k A_k = 0$.

Ainda a lei de Gauss (4.9) estabelece a relação

$$A_0 = -\frac{\kappa B}{2e^2 |\phi|^2}, \quad (4.12)$$

a lei de Ampère e a equação do campo de Higgs são reescritas como

$$\partial_i \left(\frac{\kappa^2 B}{2e^2 |\phi|^2} \right) = -e\epsilon_{ik} J_k, \quad (4.13)$$

$$\partial_j\partial_j\phi_j - 2ieA_j\partial_j\phi - e^2(A_j)^2\phi + e^2 \left(\frac{\kappa B}{2e^2 |\phi|^2} \right)^2 \phi - \frac{\partial V}{\partial\phi^*} = 0, \quad (4.14)$$

respectivamente.

4.1 Estrutura BPS da eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs

No regime estacionário, como já dito anteriormente, temos que a densidade de energia é $\mathcal{E} = -\mathcal{L}$,

$$\mathcal{E} = -\kappa A_0 B - |D_0\phi|^2 + |D_k\phi|^2 + V(|\phi|). \quad (4.15)$$

Usando a equação (4.12) reescrevemos $\kappa A_0 B$ e $|D_0\phi|^2 = e^2 A_0^2 |\phi|^2$ em termos do campo magnético, tendo deste modo a densidade de energia escrita da seguinte maneira,

$$\mathcal{E} = \frac{\kappa^2 B^2}{4e^2 |\phi|^2} + |D_k\phi|^2 + V(|\phi|). \quad (4.16)$$

A finitude da energia total implica que no limite $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ sejam satisfeitas as condições

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} B(\mathbf{x}) = 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} D_k \phi(\mathbf{x}) = 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} V(|\phi(\mathbf{x})|) = 0. \quad (4.17)$$

A energia total com a implementação do formalismo BPS, fica escrita como a soma de termos quadráticos, assumindo a forma

$$E = \int \left\{ \left(\frac{\kappa B}{2e|\phi|} \mp \sqrt{V} \right)^2 + |D_{\pm} \phi|^2 \pm B \left(\frac{\kappa \sqrt{V}}{e|\phi|} + e|\phi|^2 \right) \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i J_j \right\} d^2 \mathbf{x}, \quad (4.18)$$

onde a relação (2.20) para $|D_k \phi|^2$ foi usada. Como já discutido nos capítulos anteriores, a contribuição da integral da derivada total a energia total é nula. Além disso, no terceiro termo, a constante que multiplica o campo magnético torna sua integral proporcional ao fluxo magnético, e, assim, o fixamos

$$\frac{\kappa \sqrt{V}}{e|\phi|} + e|\phi|^2 = ev^2, \quad (4.19)$$

tal que no limite de $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, o parâmetro v representa o valor esperado no vácuo do campo de Higgs. A equação acima permite calcular o potencial que gera as configurações BPS do sistema, dessa maneira

$$V(|\phi|) = \frac{e^4}{\kappa^2} |\phi|^2 (v^2 - |\phi|^2)^2. \quad (4.20)$$

O potencial possui dois valores de vácuo: $|\phi| = 0$ e $|\phi| = v$. O primeiro, $|\phi| = 0$, chamado de vácuo simétrico e gera configurações não-topológicas. O segundo $|\phi| = v$ é chamado de o vácuo assimétrico, pois causa uma quebra espontânea de simetria gerando configurações topológicas.

Com as informações obtidas acima, a energia total atinge a forma

$$E = E_{BPS} + \int \left\{ \left[\frac{\kappa B}{2e|\phi|} \mp \frac{e^2 |\phi|}{\kappa} (v^2 - |\phi|^2) \right]^2 + |D_{\pm} \phi|^2 \right\} d^2 \mathbf{x} \geq E_{BPS}, \quad (4.21)$$

como já mencionado anteriormente, o integrando é definido positivo e a quantidade E_{BPS} é dada por

$$E_{BPS} = \pm ev^2 \int dx^2 B = \pm ev^2 \Phi > 0, \quad (4.22)$$

é proporcional ao fluxo magnético.

A energia total (4.21) alcança o limite de Bogomol'nyi, como já abordado, se os termos quadráticos se anulam. Nesse limite, os campos satisfazem um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, chamadas de equações BPS (ou auto-duais),

$$D_{\pm} \phi = 0, \quad (4.23)$$

$$B = \pm \frac{2e^3 |\phi|^2}{\kappa^2} (v^2 - |\phi|^2). \quad (4.24)$$

Devemos lembrar que essas equações reproduzem as equações de Euler-Lagrange expressas em (4.13) e (4.14), respectivamente, com potencial dado na equação (4.20).

4.2 Soluções tipo vórtice do modelo CSH

Como já mencionado nos capítulos anteriores, as soluções tipo vórtice são obtidas mediante a implementação do ansatz, (2.34) e (2.35),

$$\phi(\mathbf{x}) = vg(r)e^{in\theta}, \quad A_k(\mathbf{x}) = \epsilon_{kj} \frac{x_j}{er^2} [a(r) - n]. \quad (4.25)$$

Através deste ansatz, as equações BPS expressas em termos perfis $a(r)$ e $g(r)$ são

$$g' = \pm \frac{ag}{r} \quad (4.26)$$

$$B = -\frac{a'}{er} = \pm \frac{2e^3v^4g^2}{\kappa^2} (1 - g^2), \quad (4.27)$$

com os perfis satisfazendo as condições de contorno (já previamente estabelecidas)

$$\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} a(r) = n, \quad (4.28)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = 0. \quad (4.29)$$

Assim como em (2.30), a energia BPS (4.22) resulta

$$E_{BPS} = \pm 2\pi ev^2 \int B r dr = \pm 2\pi n v^2 > 0, \quad (4.30)$$

assim, com o sinal (+) representando soluções para $n > 0$ e o sinal (-) para $n < 0$.

4.2.1 Comportamento das soluções nas fronteiras

Faremos aqui a mesma análise feita na [Subseção 2.2.1](#),

4.2.1.1 Comportamento em $r \rightarrow 0$

Analisando o comportamento das soluções das equações (4.26) e (4.27) para $n > 0$, quando $r \rightarrow 0$, tem-se que

$$g(r) = Gr^n - \frac{G^3 e^4 v^4}{2(n+1)^2 \kappa^2} r^{3n+2} + \frac{G^4 e^4 v^4}{2(2n+1)^2 \kappa^2} r^{5n+2} + \dots, \quad (4.31)$$

$$a(r) = n - \frac{G^2 e^4 v^4}{(n+1) \kappa^2} r^{2n+2} + \frac{G^4 e^4 v^4}{(2n+1) \kappa^2} r^{4n+2} + \dots \quad (4.32)$$

O comportamento do potencial elétrico $A_0 = \omega(r)$ é obtido da equação (4.12), assim, obtemos

$$\omega(r) = \frac{ev^2}{\kappa} - \frac{G^2 ev^2}{\kappa} r^{2n} + \frac{G^4 e^5 v^6}{(n+1)^2 \kappa^3} r^{4n+2} + \dots \quad (4.33)$$

A qual fornece o valor do potencial escalar na origem,

$$\omega(0) = \frac{ev^2}{\kappa}. \quad (4.34)$$

Com as expressões acima podemos chegar nas expressões para o campo magnético, densidade de energia BPS e campo elétrico escritas da seguinte maneira

$$B(r) = \frac{2G^2e^3v^4}{\kappa^2}r^{2n} - \frac{2G^4e^3v^4}{\kappa^2}r^{4n} + \dots, \quad (4.35)$$

$$\mathcal{E}_{BPS}(r) = 2G^2v^2n^2r^{2n-2} + \frac{2G^2e^4v^6}{\kappa^2}r^{2n} - \frac{4G^4e^4v^6(2n+1)}{(n+1)\kappa^2}r^{4n} + \dots, \quad (4.36)$$

$$\omega'(r) = \frac{2nG^2ev^2}{\kappa}r^{2n-1} - \frac{G^4e^5v^6(4n+2)}{(n+1)^2\kappa^3}r^{4n+1} + \dots, \quad (4.37)$$

4.2.1.2 Comportamento em $r \rightarrow \infty$

Observaremos primeiro o comportamento dos campos $g(r)$ e $a(r)$ para $r \rightarrow \infty$, como o procedimento é o mesmo, as campos para as condições de contorno serão $g = 1 - \delta g$ e $a = \delta a$, e desacoplando-as, ficam na forma de equações diferenciais de segunda ordem

$$(\delta g)'' + \frac{(\delta g)'}{r} - \frac{4e^4v^4}{\kappa^2}(\delta g) = 0, \quad (4.38)$$

$$(\delta a)'' - \frac{(\delta a)'}{r} - \frac{4e^4v^4}{\kappa^2}(\delta a) = 0, \quad (4.39)$$

cujas soluções neste limite são da forma

$$(\delta g) \sim \frac{1}{\sqrt{r}} \exp(-m_{CSH}r) \quad (4.40)$$

$$(\delta a) \sim \sqrt{r} \exp(-m_{CSH}r) \quad (4.41)$$

onde o coeficiente m_{CSH} define a massa dos vórtices BPS no modelo de Chern-Simons-Higgs definida por

$$m_{CSH} = \frac{2e^2v^2}{\kappa}, \quad (4.42)$$

vemos que a massa é inversamente proporcional ao parâmetro de Chern-Simons.

4.2.2 Análise numérica

A análise numérica para os campos $a(r)$ e $g(r)$ será abordada logo a seguir para descrever o comportamento destas duas como também do campo magnético $B(r)$, o potencial escalar $\omega(r)$ e o campo elétrico $\omega'(r)$ que dependem explicitamente de $a(r)$ e $g(r)$. Estes perfis para os campos analisados por métodos numéricos das equações BPS (4.26) e (4.27) com parâmetro $\kappa = 1$, $e = v = 1$ e $n = 1, 2, 5, 7, 8, 10, 13$ são mostrado logo a seguir.

Em comparação com o modelo de MH, o de CSH tem um campo de Higgs que cresce de maneira mais abrupta, chegando ao estado de vácuo mais rápido para $n = 1$ e nulo na origem, e assim como o de MH, o valor assintótico do campo de Higgs vai crescendo mais lentamente para valores de n grandes como mostrado na Figura 4.1. O campo de gauge $a(r)$ apresenta máximos para diferentes valores de n e tendendo respectivamente para estes valores na origem e continuando nelas até um certo valor de r que a partir do qual o campo $a(r)$ começa a decair até ser nulo no infinito como pode se ver na Figura 4.2. Para o campo magnético $B(r)$ mostrado na Figura 4.3, os perfis tem valores máximos deslocado da origem para os diferentes valores de n em contrapartida ao campo magnético de MH.

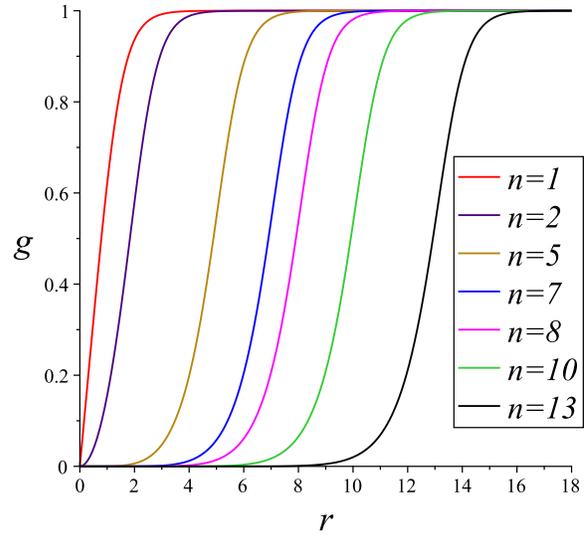


Figura 4.1: campo de Higgs $g(r)$ para diferentes valores de n .

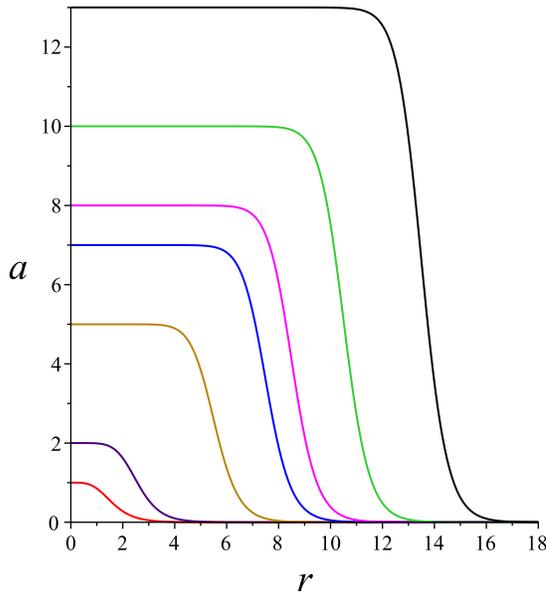


Figura 4.2: Campo de gauge $a(r)$.

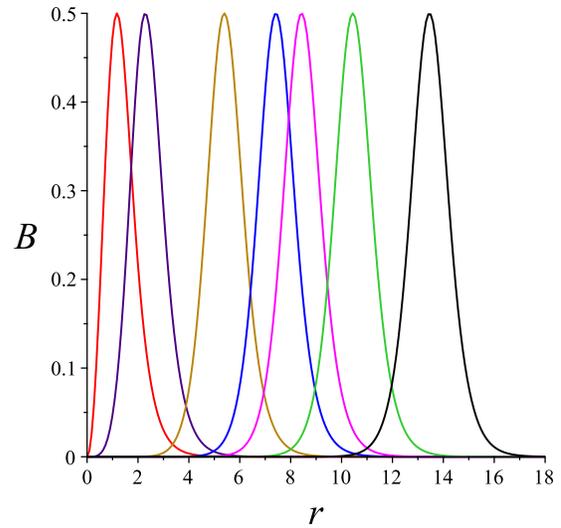
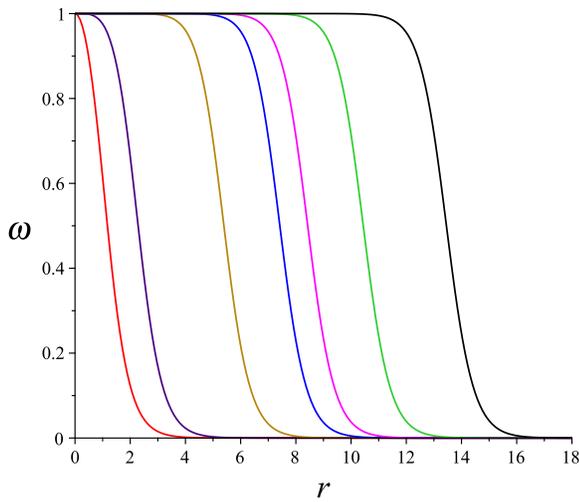
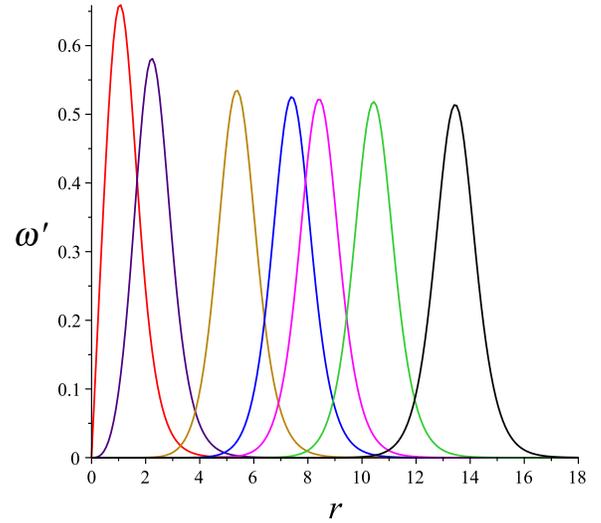


Figura 4.3: Campo magnético $B(r)$.

O potencial escalar $\omega(r)$ e o campo elétrico $\omega'(r)$ são mostrados nas figura 4.4a e 4.4b, respectivamente. O perfil do potencial escalar tem um comportamento semelhante ao campo magnético no modelo MH, com máximos na origem e tendendo a zero para $r \rightarrow \infty$. Já os perfis do campo elétrico formam anéis centrados na origem, e possui valores nulos em $r = 0$ e no infinito.



(a) Potencial escalar $\omega(r)$ para diferentes valores de n .



(b) Campo elétrico $\omega'(r)$ para diferentes valores de n .

Figura 4.4: Soluções numéricas para o potencial escalar ω e campo elétrico ω' . A Figura 4.4a representa o perfil numérico de ω em CSH em função de r . Enquanto Figura 4.4b descreve a solução para o campo elétrico ω' para $n = 1, 2, 5, 7, 8, 10, 13$.

Os perfis da densidade de energia BPS mostrados na Figura 4.5, apresentam máximos deslocados da origem e decrescendo de maneira rápida a partir deste mesmo.

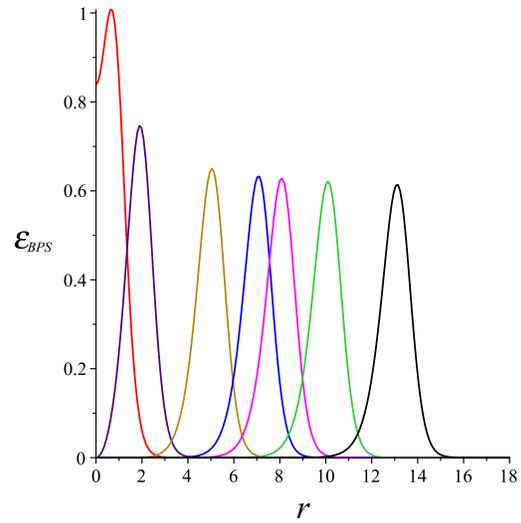


Figura 4.5: Densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ para diferentes valores de n .

ELETRODINÂMICA DE DESER-JACKIW-CHERN-SIMONS-HIGGS

A densidade lagrangiana do modelo de Deser-Jackiw-Chern-Simons-Higgs (DJCSH) em $(1 + 2)$ -dimensões é dada por

$$\mathcal{L}_{DJCSH} = \frac{1}{4M} \epsilon^{\mu\alpha\beta} A_\mu \square F_{\alpha\beta} + \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho} + |D_\mu \phi|^2 - V(|\phi|) \quad (5.1)$$

onde o primeiro termo representa o de Deser-Jackiw, com o parâmetro $M > 0$ a escala de massa de Deser-Jackiw. O segundo é o termo de Chern-Simons já abordado no [Capítulo 4](#). No limite $M \rightarrow \infty$, o modelo de Chern-Simons-Higgs é recuperado, como esperado.

O termo $D_\mu \phi$, é a derivada covariante mínima já definida em (2.3), acopla o campo de gauge ao de Higgs. E por fim, $V(|\phi|)$, o potencial de interação do modelo que será encontrado via o mecanismo BPS, como nos casos anteriores.

Mediante a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A_\kappa)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho A_\kappa)} + \partial_\alpha \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\alpha A_\kappa)} - \partial_\mu \partial_\rho \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\rho \partial_\alpha A_\kappa)} = 0, \quad (5.2)$$

as equações de movimento para o campo de gauge quanto para o campo de Higgs assumem as seguintes expressões

$$\frac{\kappa}{2} \left(1 + \frac{\square}{\kappa M} \right) \epsilon^{\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} = e J^\beta, \quad (5.3)$$

onde J^β é a densidade de corrente definida na equação (2.7), e com respectiva equação do campo de Higgs

$$D_\beta D^\beta \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0. \quad (5.4)$$

A partir da equação (5.3) pode-se encontrar a lei de Gauss e lei de Ampère. Desse modo, no regime estacionário, a lei de Gauss esta assume a seguinte forma

$$\kappa \left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M} \right) B = -2e^2 A_0 |\phi|^2. \quad (5.5)$$

Vemos que a com condição de calibre $A_0 = 0$ não mais satisfaz a lei de Gauss, evidenciando, desta forma, que os vórtices além de carregar fluxo magnético, também possuem uma carga elétrica não nula, tal como acontece no modelo de Chern-Simons (vide [Capítulo 4](#)). A lei de Ampère em regime estacionário é expressa por

$$\kappa \left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M} \right) \epsilon_{ik} \partial_k A_0 = -e J_i \quad (5.6)$$

e a respectiva equação estacionária para o campo de Higgs resulta

$$D_i D_i \phi + e^2 (A_0)^2 \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0. \quad (5.7)$$

O potencial elétrico, a partir de (5.5), resulta expressa como

$$A_0 = - \frac{\kappa \left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M} \right) B}{2e^2 |\phi|^2}, \quad (5.8)$$

e usando ela podemos reescrever a lei de Ampère

$$\frac{\kappa^2}{2e^2} \partial_k \left\{ \left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M} \right) \left[\frac{\left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M} \right) B}{|\phi|^2} \right] \right\} = -e \epsilon_{ki} J_i \quad (5.9)$$

e a respectiva equação estacionária para o campo de Higgs resulta

$$D_i D_i \phi + \frac{\kappa^2}{4e^2} \left[\frac{\left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M} \right) B}{|\phi|^2} \right]^2 \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0. \quad (5.10)$$

Na seguinte seção construiremos a estrutura BPS do modelo DJCSH cujas equações BPS são compatíveis com as equações de Euler-Lagrange (5.8) e (5.9) com potencial a ser determinado pelo próprio formalismo BPS.

5.1 Estrutura BPS da eletrodinâmica de Deser-Jackiw-Chern-Simons-Higgs

Em regime estacionária a densidade lagrangiana em (5.1) fica expressa por

$$\mathcal{L} = \kappa A_0 \left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M} \right) B + e^2 (A_0)^2 |\phi|^2 - |D_k \phi|^2 - V(|\phi|), \quad (5.11)$$

mas pode-se ainda usar a expressão para A_0 dada na equação (5.8), e deste modo, teremos a lagrangiana (5.11) escrita da seguinte maneira

$$\mathcal{L} = - \frac{\kappa^2 \left[\left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M} \right) B \right]^2}{4e^2 |\phi|^2} - |D_k \phi|^2 - V(|\phi|). \quad (5.12)$$

Tendo colocado a lagrangiana (5.1) na forma estática na equação (5.12), podemos agora encontrar a densidade de energia que é escrita em termos da Hamiltoniana canônica desta mesma, portanto teremos a seguinte densidade de energia estacionária

$$\mathcal{E} = \frac{\kappa^2 \left[\left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M} \right) B \right]^2}{4e^2 |\phi|^2} + |D_k \phi|^2 + V(|\phi|). \quad (5.13)$$

Mediante a densidade de energia em (5.13), concluímos que a mesma é estritamente definida positiva. E como esta mesma é finita e localizada, fazendo uma breve análise dos campos em $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, tanto o campo magnético B quanto o seu laplaciano decaem mais rapidamente que $|\phi|$. Neste limite $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ é necessário que sejam satisfeitas as condições

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} B(\mathbf{x}) = 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \nabla^2 B(\mathbf{x}) = 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} D_k \phi(\mathbf{x}) = 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} V(|\phi(\mathbf{x})|) = 0. \quad (5.14)$$

Encontrada a densidade de energia do sistema e as condições para que se tenha uma energia finita, expressaremos agora a energia total,

$$E = \int \left\{ \frac{\kappa^2 \left[\left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M} \right) B \right]^2}{4e^2 |\phi|^2} + |D_k \phi|^2 + V(|\phi|) \right\} d^2 \mathbf{x}. \quad (5.15)$$

Por meio desta energia estacionária, faremos agora a implementação do método BPS, que são as condições em que a energia é minimizada, encontrando desta forma as duas equações auto-duais e o potencial de interação do modelo. Para a aplicação formalismo BPS utilizaremos (2.20) para $|D_k \phi|^2$, e expressaremos o primeiro termo da energia (5.15) numa forma quadrática

$$E = \int \left\{ \frac{|\phi|^2}{4e^2} \left[\frac{\kappa \left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M} \right) B}{|\phi|^2} \mp W \right]^2 + |D_{\pm} \phi|^2 + V(|\phi|) - \frac{|\phi|^2 W^2}{4e^2} \pm \frac{\kappa W \left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M} \right) B}{2e^2} \pm eB |\phi|^2 \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ik} \partial_i J_k \right\} d^2 \mathbf{x}. \quad (5.16)$$

Aqui, $W \equiv W(|\phi|)$ é uma função bem comportada, e determinada pelo formalismo BPS, satisfazendo

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} W(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.17)$$

para que se tenha energia localizada. Logo, através de uma integração por partes, e usando as condições de fronteira (5.14) sobre o campo magnético, podemos expressar o segundo termo da segunda linha da equação (5.16) como

$$\frac{\kappa}{2e^2} \int W \left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M} \right) B d^2 \mathbf{x} = \frac{\kappa}{2e^2} \int B \left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M} \right) W d^2 \mathbf{x}. \quad (5.18)$$

Desta maneira a energia total (5.16) fica expressa da seguinte forma

$$E = \int \left\{ \frac{|\phi|^2}{4e^2} \left[\frac{\kappa \left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M}\right) B}{|\phi|^2} \mp W \right]^2 + |D_{\pm}\phi|^2 \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ik} \partial_i J_k \right. \\ \left. \pm B \left[\frac{\kappa \left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M}\right) W}{2e^2} + e|\phi|^2 \right] + V(|\phi|) - \frac{|\phi|^2 W^2}{4e^2} \right\} d^2 \mathbf{x}. \quad (5.19)$$

Sob as condições de fronteira (5.14), a integração da derivada total acima não contribui à energia total do sistema. Para que o primeiro termo da segunda linha acima seja proporcional ao campo magnético fixamos o termo dentro do colchete igual a ev^2 , ou seja,

$$\frac{\kappa \left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M}\right) W}{2e^2} + e|\phi|^2 = ev^2, \quad (5.20)$$

onde $|\phi|_{\text{vácuo}} = v$. Mediante isto, da mesma maneira que no modelo de Podolsky-Higgs, encontra-se W ,

$$W(|\phi|) = \frac{2e^3}{\kappa} \left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M}\right)^{-1} (v^2 - |\phi|^2). \quad (5.21)$$

Ainda na segunda linha de (5.19), o potencial $V(|\phi|)$ é fixado se os dois últimos termos são iguais, já que a função $W(|\phi|)$ está fixada, portanto,

$$V(|\phi|) = \frac{e^4 |\phi|^2}{\kappa^2} \left[\left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M}\right)^{-1} (v^2 - |\phi|^2) \right]^2. \quad (5.22)$$

Com os resultados obtidos acima, a energia total resulta em

$$E = E_{BPS} + \int \left\{ |D_{\pm}\phi|^2 + \frac{|\phi|^2}{4e^2} \left[\frac{\kappa \left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M}\right) B}{|\phi|^2} \mp W \right]^2 \right\} d^2 \mathbf{x}, \quad (5.23)$$

onde E_{BPS} é dada por

$$E_{BPS} = \pm ev^2 \int B d^2 \mathbf{x} \geq 0, \quad (5.24)$$

sendo, assim, proporcional a fluxo magnético.

Assim, podemos dizer que a energia total do sistema possui um valor mínimo quando $E = E_{BPS}$, que é atingido quando os termos quadráticos na integral se anulam, ou seja, se os campos satisfazem as seguintes equações diferenciais,

$$D_{\pm}\phi = 0, \quad (5.25)$$

$$\left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M}\right) B = \pm \frac{2e^3}{\kappa^2} |\phi|^2 \left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M}\right)^{-1} (v^2 - |\phi|^2), \quad (5.26)$$

sendo as equações BPS ou auto-duais do modelo. E, como nos modelos anteriores, através das mesmas podemos obter a lei de Ampère (5.9) e a equação para o campo de Higgs (5.10) [vide Apêndice B] com potencial dado pela equação (5.22), corroborando deste modo a consistência da estrutura BPS para o modelo DJCSH.

Tal como no caso da estrutura BPS da eletrodinâmica Podolsky-Higgs, a presença do termo de Deser-Jackiw na lagrangiana (5.1) provoca a natureza não-local do potencial (5.22). A não-localidade mostrada pelo potencial e pela equação BPS (5.26) fica explícita via o uso da função de Green do operador $1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M}$, ou seja,

$$\left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M}\right) \tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.27)$$

Desse modo, o potencial auto-dual fica expresso como

$$V(|\phi|) = \frac{e^4 |\phi|^2}{\kappa^2} \left[\int \tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (v^2 - |\phi(\mathbf{y})|^2) d^2 \mathbf{y} \right]^2, \quad (5.28)$$

onde, ainda, observamos claramente dois possíveis valores de vácuo para o campo de Higgs: $|\phi| = 0$ e $|\phi| = v$. O valor de vácuo simétrico $|\phi| = 0$, se for o caso, suportaria configurações não topológicas tal como no modelo de Chern-Simons-Higgs, essa possibilidade não será analisada na presente dissertação. Por outro lado, o vácuo assimétrico $|\phi| = v$, como mostraremos nas próximas seções, suporta configurações topológicas, no caso tipo vórtice.

Ressaltamos ainda que a BPS (5.26) do campo magnético representa uma equação integral, dada por,

$$\begin{aligned} B &= \pm \frac{2e^3}{\kappa^2} \left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M}\right)^{-1} \left[|\phi|^2 \left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M}\right)^{-1} (v^2 - |\phi|^2) \right] \\ &= \pm \frac{2e^3}{\kappa^2} \int d^2 \mathbf{z} \int d^2 \mathbf{y} \tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) |\phi(\mathbf{z})|^2 \tilde{G}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) (v^2 - |\phi(\mathbf{y})|^2). \end{aligned} \quad (5.29)$$

ou como uma equação diferencial de altas derivadas, assim,

$$\left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M}\right) \left[\frac{\left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M}\right) B}{|\phi|^2} \right] = \pm \frac{2e^3}{\kappa^2} (v^2 - |\phi|^2), \quad (5.30)$$

será a equação que utilizaremos junto com a BPS (5.25) para estudar as configurações topológicas do tipo vórtice.

5.2 Soluções tipo vórtice no modelo DJCSH

Assim como a configuração de vórtices no modelo usual de Chern-Simons, usaremos o ansatz

$$\phi(\mathbf{x}) = vg(r)e^{in\theta}, \quad A_k(\mathbf{x}) = \epsilon_{kj} \frac{x_j}{er^2} [a(r) - n] \quad (5.31)$$

em que n é definido como um número inteiro não nulo e tendo as funções $g(r)$, $a(r)$ e $\omega(r)$ regulares na origem e apresentando condições de contorno

$$\lim_{r \rightarrow 0} a(r) = n, \quad \lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0, \quad (5.32)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 1. \quad (5.33)$$

Essas condições são suficientes para ter uma energia finita no modelo DJCSH.

Como já feito anteriormente, o campo magnético resulta

$$B = -\frac{a'}{er}, \quad (5.34)$$

e, assim, as equações BPS (5.25) e (5.30) resultam expressas como

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (5.35)$$

$$\left(1 - \frac{\tilde{\nabla}^2}{\kappa M}\right) \left[\frac{\left(1 - \frac{\tilde{\nabla}^2}{\kappa M}\right) B}{g^2} \right] = \pm \frac{2e^3 v^4}{\kappa^2} (1 - g^2), \quad (5.36)$$

onde o operador $\tilde{\nabla}^2$ é

$$\tilde{\nabla}^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}. \quad (5.37)$$

Como o modelo DJCSH comporta vórtices carregado, a parte elétrica com o auxílio da equação (5.31) fornece o potencial escalar em (5.8) que assume a forma

$$\omega(r) = -\frac{\kappa \left(1 - \frac{\tilde{\nabla}^2}{\kappa M}\right) B}{2e^2 v^2 g^2}, \quad (5.38)$$

e o campo elétrico dado pelo gradiente do potencial escalar em (5.38) é equivalente a

$$\omega(r)' = -\frac{d\omega}{dr}. \quad (5.39)$$

Enquanto a densidade de energia BPS sendo expressa da seguinte maneira

$$\mathcal{E}_{BPS} = \frac{\kappa^2 \left[\left(1 - \frac{\tilde{\nabla}^2}{\kappa M}\right) B \right]^2}{2v^2 e^2 g^2} + 2v^2 \frac{a^2 g^2}{r^2} \quad (5.40)$$

sendo definida positiva. No limite de Bogomol'nyi a energia BPS (5.24) assume a forma

$$E_{BPS} = \pm ev^2 \int dr^2 B = \pm 2\pi n v^2 > 0, \quad (5.41)$$

no qual o sinal (+) é designado para as soluções com $n > 0$ e (-) para $n < 0$. Assim, como nos modelos estudados previamente, tanto a energia BPS como o fluxo magnético são quantizados em termos do *winding number* n .

5.2.1 Comportamento das soluções nas fronteiras

Antes de proceder ao estudo as soluções numéricas, primeiro analisamos o comportamento dos campos nas fronteiras para os campos mediante a solução das equações BPS (5.35) e (5.36).

5.2.1.1 Comportamento em $r \rightarrow 0$

Buscaremos na origem soluções em séries de potências para o campo de Higgs $g(r)$ e gauge $a(r)$ na forma

$$g(r) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k r^k, \quad a(r) = n - \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k \quad (5.42)$$

estas substituídas nas equações BPS, (5.35) e (5.36), chega-se às seguintes expressões para $g(r)$ e $a(r)$

$$g(r) \approx H_n r^n + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{H_n (A_2)^k}{2^k k!} r^{n+2k} - \frac{H_n A_{2n+4}}{2(n+2)} r^{3n+4} - \frac{e^4 v^4 M^2 (H_n)^3}{2^5 (n+2)^2 (n+3)^2} r^{3n+6}, \quad (5.43)$$

$$a(r) \approx n - A_2 r^2 - A_{2n+4} r^{2n+4} - A_2 \sum_{k=1}^n C_k^{(n)} (\kappa M)^k r^{2+2k} - \frac{M^2 e^4 v^4 (H_n)^2}{16 (n+2)^2 (n+3)} r^{2n+6} - \frac{(n+1)^2 A_2 A_{2n+4}}{(n+2)(n+3)} r^{2n+6}, \quad (5.44)$$

respectivamente. Com isso, calculamos o comportamento do campo magnético na origem,

$$B(r) \approx \frac{2}{e} A_2 + \frac{(2n+4) A_{2n+4}}{e} r^{2n+2} + \frac{2}{e} A_2 \sum_{k=1}^n C_k^{(n)} (\kappa M)^k (1+k) r^{2k} + \frac{M^2 e^3 v^4 (H_n)^2}{8 (n+2)^2} r^{2n+4}. \quad (5.45)$$

Similarmente, a densidade de energia BPS comporta-se como

$$\mathcal{E}_{BPS}(r) \approx 2n^2 v^2 H_n^2 r^{2(n-1)} - 2n(n+2) v^2 A_2 H_n^2 r^{2n} + \frac{[(\kappa M)^{n+1} A_2 - \mathcal{C}^{(2n+4)} A_{2n+4}]^2}{\mathcal{C}^{(2n)} e^4 v^2 M^2 H_n^2} r^{2n} \quad (5.46)$$

onde os coeficientes H_n , A_2 e A_{2n+4} são determinados numericamente, e as quantidades $C_k^{(n)}$, $\mathcal{C}^{(2n+4)}$ e $\mathcal{C}^{(2n)}$ são números inteiros.

5.2.1.2 Comportamento em $r \rightarrow \infty$

Estudaremos o comportamento dos campos a e g considerando que

$$g(r) = 1 - \delta g(r), \quad a(r) = \delta a(r). \quad (5.47)$$

Considerando que estamos interessados em soluções tipo vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen, encontramos que

$$\delta a(r) \simeq C_\infty \sqrt{r} \exp(-M_{DJCSH} r), \quad (5.48)$$

$$\delta g(r) \simeq \frac{C_\infty}{\sqrt{r}} \exp(-M_{DJCSH}r), \quad (5.49)$$

onde o parâmetro M_{DJCSH} que representa a massa do modelo de DJCSH dada por

$$M_{DJCSH} = \frac{3}{4}m_{CSH}\Delta^{1/3} \left[(1 - i\sqrt{3})(1 - \sqrt{1 - \Delta})^{1/3} + (1 + i\sqrt{3})(1 + \sqrt{1 - \Delta})^{1/3} \right], \quad (5.50)$$

onde o parâmetro adimensional Δ é dado por

$$\Delta = \frac{M}{M_0}, \quad M_0 = \frac{27e^2v^2}{\kappa^3}. \quad (5.51)$$

Prosseguindo, no limite $M \rightarrow \infty$ (ou equivalentemente $\Delta \rightarrow \infty$) a equação (5.50) fica

$$M_{DJCSH} = m_{CSH} \left(1 + \frac{4}{27\Delta} + \frac{16}{243\Delta^2} + \dots \right), \quad (5.52)$$

desse modo recuperamos exatamente a massa do modelo de CSH. O comportamento da massa expressa na equação (5.50) pode ser visualizado na [Figura 5.1](#) em termos da variável adimensional Δ .

Na figura [Figura 5.1](#) observamos que o comportamento das partes real (linha vermelha) e imaginária (linha verde) de M_{DJCSH} . Observamos que a parte imaginária é não nula no intervalo $0 < \Delta < 1$, gerando soluções com comportamento do tipo amortecido, que não estamos interessados em estudar. Já as soluções de interesse encontram-se no intervalo $\Delta \geq 1$, onde a parte imaginária é nula, assim os vórtices são do tipo ANO. Observamos que o máximo valor para a massa DJCSH é exatamente

$$M_{DJCSH_{max}} = \frac{3m_{CSH}}{2}. \quad (5.53)$$

À medida que Δ cresce, começamos a observar a convergência da massa do modelo de DJCSH para a massa do modelo CSH expressa em (4.42).

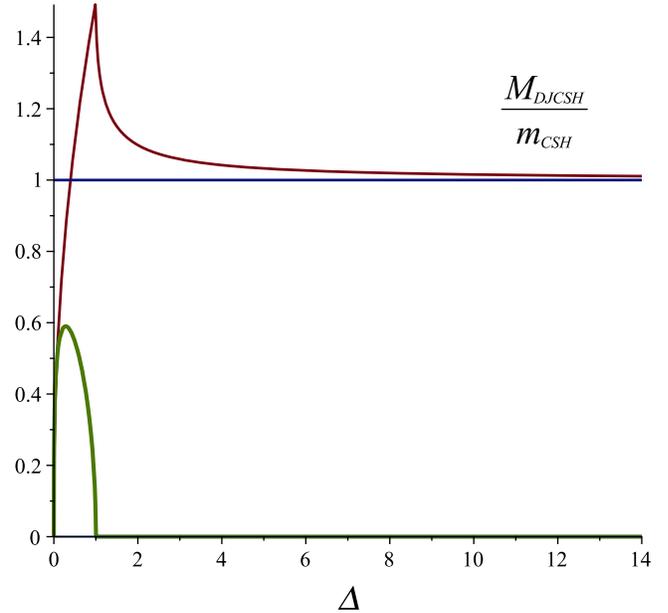


Figura 5.1: Massas dos bósons em função do parâmetro Δ . A linha verde representa a parte imaginária de M_{DJCSH} .

Tendo encontrado os comportamentos nos valores de fronteira, resolveremos agora numericamente as equações BPS (5.35) e (5.36).

5.3 Soluções numéricas

Para resolver numericamente o sistema BPS, dado pelas equações diferenciais (5.35) e (5.36), fixamos $e = 1$, $v = 1$ e $\kappa = 1$.

5.3.1 Soluções para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$ e $\Delta = 10/9$

A seguir mostramos os resultados da análise numérica para dos perfis $g(r)$ e $a(r)$, assim como do campo magnético $B(r)$, densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$, potencial elétrico ω e campo elétrico relatado a ω' . Esses perfis foram obtidos considerando vários valores do *winding number*: a cor vermelha ($n = 1$), violeta ($n = 2$), amarelo ($n = 3$), azul ($n = 4$), rosa ($n = 5$), verde ($n = 6$) e preto ($n = 8$), onde as linhas sólidas representam o modelo DJCSH e as tracejadas a do modelo CSH.

Os perfis do campo de Higgs $g(r)$ são similares ao do modelo CSH, mas convergem de forma mais rápida ao valor de vácuo para todo n .

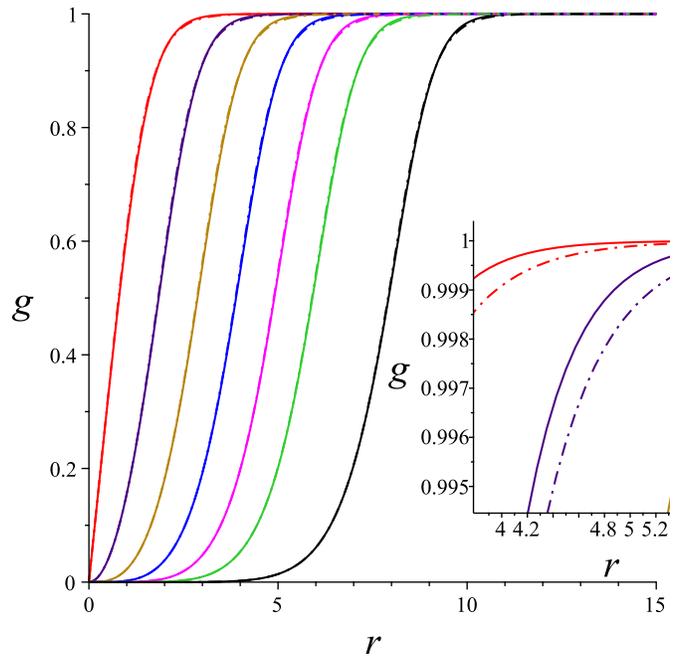


Figura 5.2: Perfis do campo de Higgs $g(r)$ para diferentes valores de n . As linhas sólidas representam as soluções para DJCSH e linhas pontilhadas do CSH.

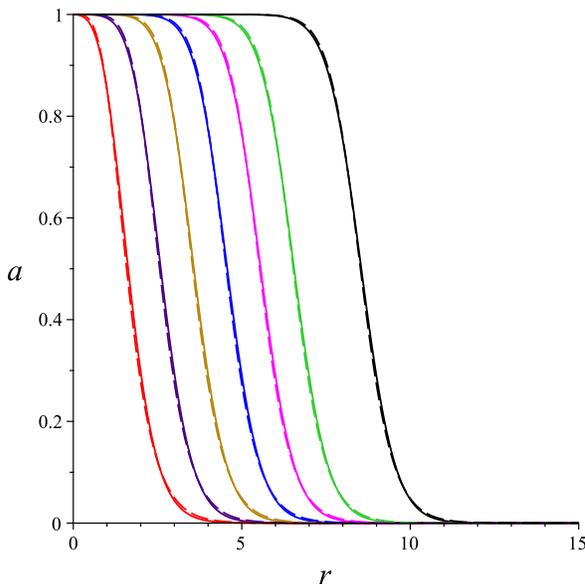
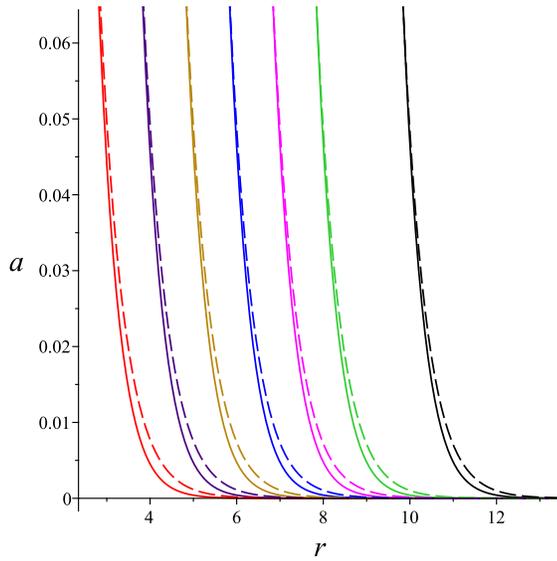


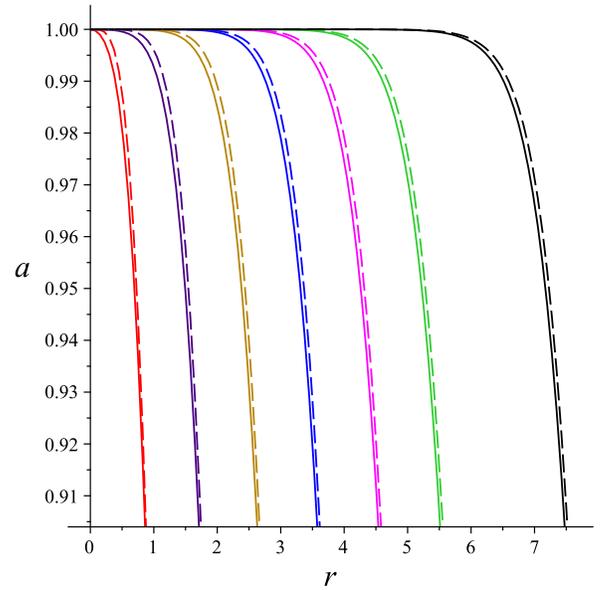
Figura 5.3: Perfis numéricos de $a(r)/n$ para diferentes valores de n .

da origem. Ainda pela inspeção da [Figura 5.5](#), para grandes valores de n as soluções saturam para CSH.

A razão $a(r)/n$ do campo de gauge com a vorticidade evidencia que o mesmo abarca uma área maior a medida que n cresce e contém valor máximo e igual a 1 na origem. Além disto, demonstra decaimento mais rápido do que em CSH como podemos ver na [Figura 5.4](#). Mediante as figuras [Figura 5.4b](#) e [Figura 5.4a](#) podemos observar os perfis de $a(r)$ para $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$. Em ambos os casos o comportamento assintótico para este campo é de decaimento mais acentuado que em CSH como podemos visualizar, o que mostra a contribuição da massa de Deser-Jackiw. Na [Figura 5.5](#), $a(r)$ tem comportamento tipo CSH, no entanto, decai de forma mais rápida para valores distantes



(a) Perfis numéricos de $a(r)/n$ em $r \rightarrow \infty$.



(b) Perfis numéricos de $a(r)/n$ em $r \rightarrow 0$.

Figura 5.4: Soluções numéricas para o campo gauge a na origem e em $r \rightarrow \infty$, com $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$ e $\Delta = 10/9$. Nesta análise, consideramos as linhas sólidas as soluções para DJCSH e linhas tracejadas CSH.

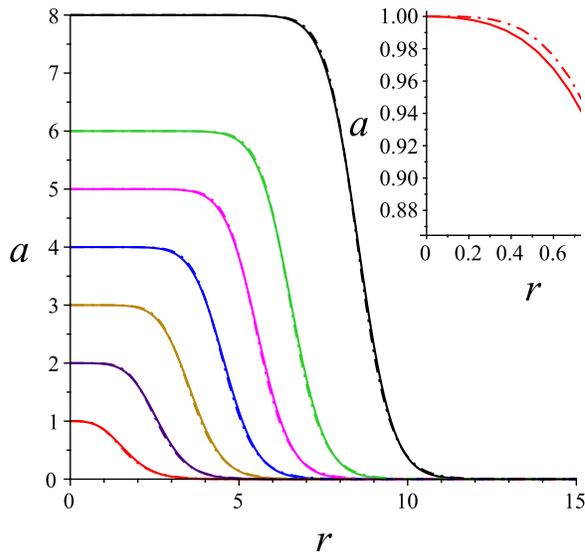
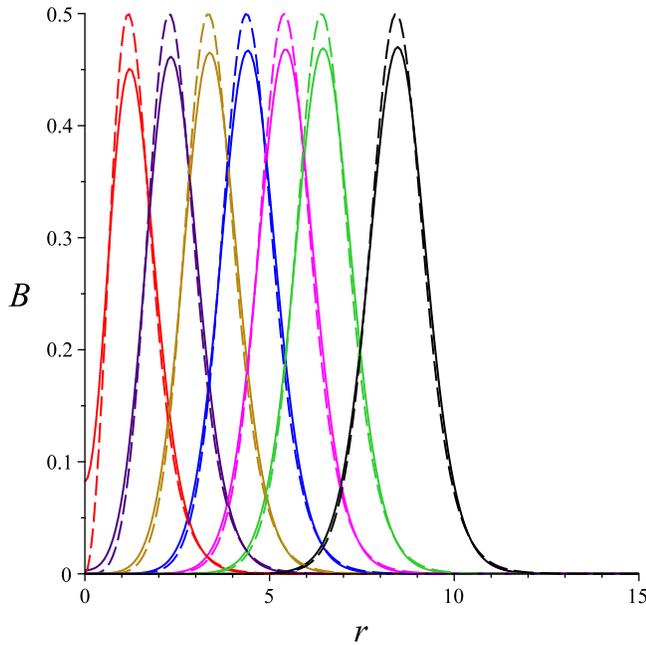
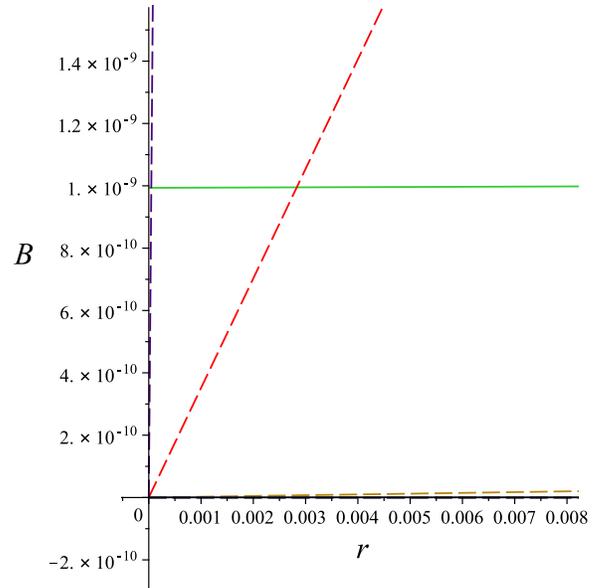


Figura 5.5: Perfis numéricos de $a(r)/n$ próximo de $r \rightarrow 0$.

O perfil numérico para o campo magnético B na Figura 5.6 mostra que assim como em CSH o campo magnético comporta-se como anéis com raios proporcionais ao *winding number* para os valores $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$, no entanto, apresentando máximos menores, como também sendo nulo somente para $n \rightarrow \infty$ como mostrado na Figura 5.6b, mostrando portanto efeito novo para o campo magnético na origem.



(a) Campo magnético B .



(b) Campo magnético B .

Figura 5.6: Soluções numéricas para o campo magnético $B(r)$, com $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$ e $\Delta = 10/9$. Nesta análise, consideramos as linhas sólidas as soluções para DJCSH e linhas tracejadas CSH.

Na [Figura 5.7](#) apresentamos as configurações para as soluções numéricas da densidade de energia BPS \mathcal{E}_{BPS} . Notamos de forma similar como em CSH, a mesma não é nula na origem, mas mostrando comportamento com anéis que apresentam máximos menores. Ademais, esta mesma tem raios que são proporcional ao *winding number* n .

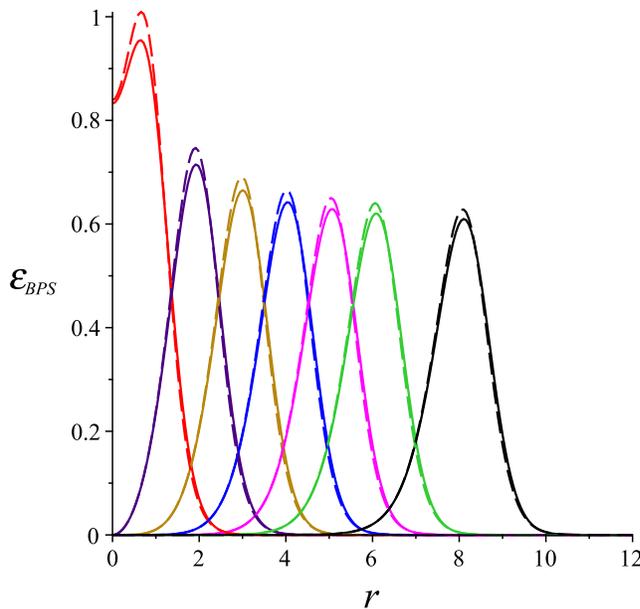


Figura 5.7: Densidade de energia \mathcal{E}_{BPS} .

Desta forma, o perfil numérico para \mathcal{E}_{BPS} na [Figura 5.7](#) mostra que a mesma é como uma correção de CSH para altas derivadas, mas com máximos deslocados da origem menores. E assim como CSH, DJCSH apresenta-se como um modelo contendo vórtices carregados, com a [Figura 5.8a](#) mostrando as configurações numéricas para a parte elétrica deste modelo, ou seja, para o potencial escalar $\omega(r)$. Mediante a [Figura 5.8b](#), o potencial escalar comporta-se do tipo *lump* para $n = 1$, mas com valor não unitário na origem. Conforme que os valores do *winding number* n crescem, os comportamentos do potencial escalar na origem começam a crescer, chegando ao valor

máximo na origem somente para n grandes, valores estes em que $\omega(r)$ tem valor unitário. Desta análise, concluímos ainda que conforme n aumenta de valor, $\omega(r)$ abarca uma área maior. Em contrapartida ao de CSH, o mesmo evidência como um potencial escalar que abarca uma área relativamente menor, como também soluções que não comportam o mesmo máximo na origem.

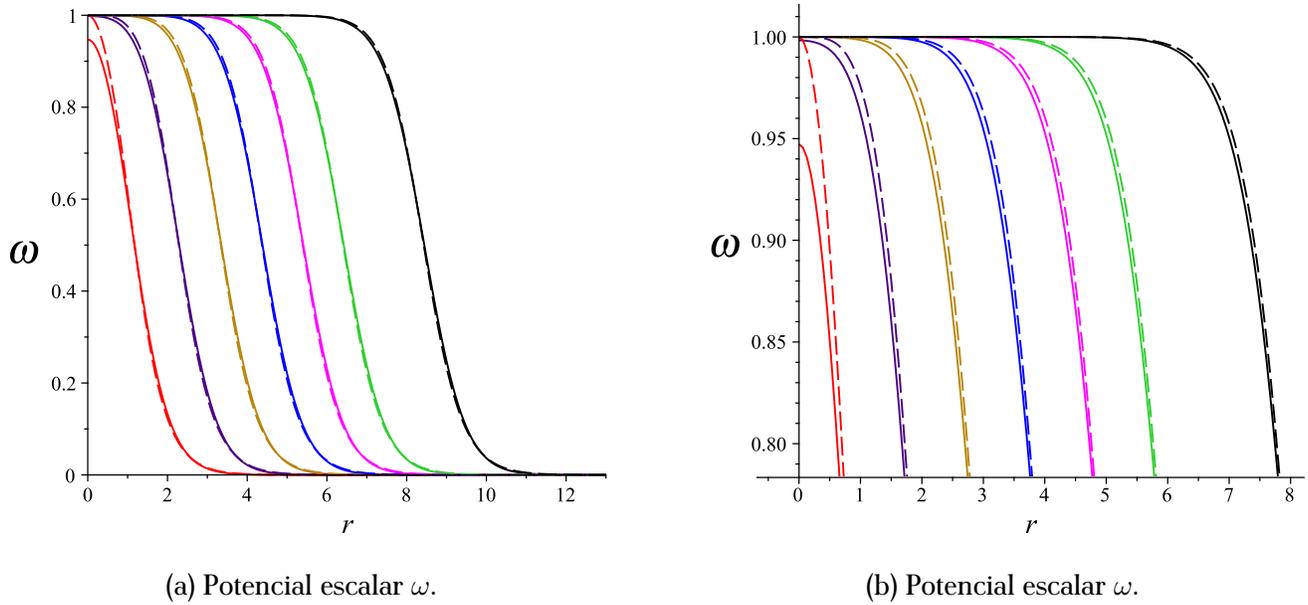


Figura 5.8: Soluções numéricas para o potencial escalar ω , com $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$ e $\Delta = 10/9$. Aqui consideramos as linhas sólidas as soluções para DJCSH e linhas tracejadas CSH.

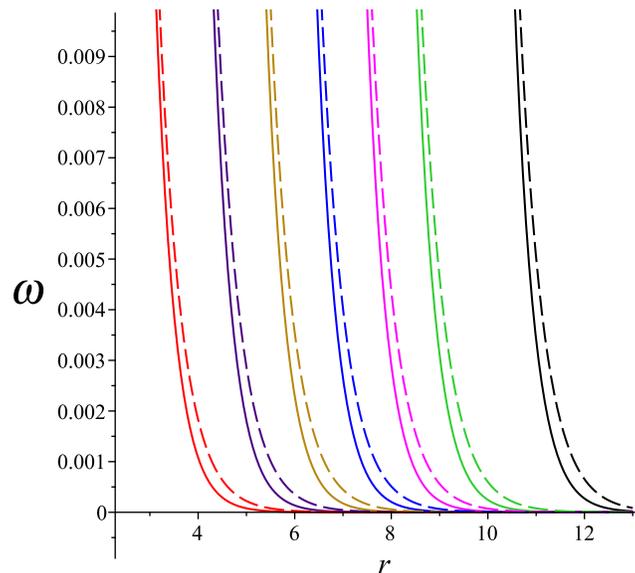


Figura 5.9: Soluções numéricas para o potencial escalar ω com $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$ e $\Delta = 10/9$. Nesta análise, considera-se as linhas sólidas as soluções para DJCSH e linhas pontilhadas CSH.

Visto que através de uma análise mais detalhada na [Figura 5.9](#), o comportamento do potencial escalar ω evidencia decaimentos mais rápidos quando comparados aos perfis de CSH, manifestando claramente as contribuições do termo de Deser-Jackiw no potencial escalar expresso na equação (5.38).

A solução para o campo elétrico $\omega'(r)$ exposto na [Figura 5.10](#) demonstra que este apresenta soluções tipo anéis com máximos menores do que em CSH, mas apresentando o mesmo comportamento na origem como também para $r \rightarrow \infty$, ou seja, nulo, o que corrobora com a terceira condição imposta para o mesmo na equação (5.32). Mais adiante analisaremos os comportamentos dos campos para diferentes valores de Δ .

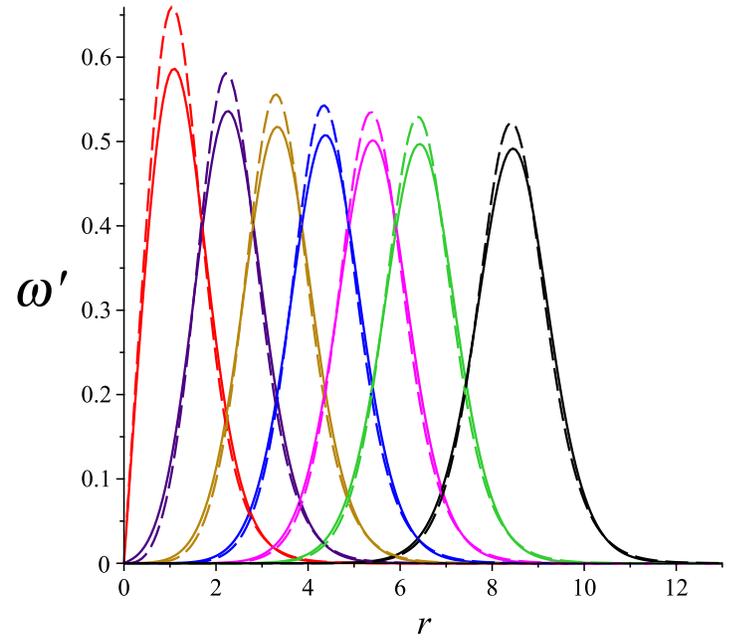


Figura 5.10: Campo elétrico $\omega'(r)$.

5.3.2 Soluções para $n = 1$ e $\Delta = 1, \frac{10}{9}, \frac{40}{9}, \frac{80}{9}, 8, 20, \infty$

Agora trataremos o comportamento dos perfis numéricos para o campo de Higgs e campo de gauge para diferentes valores do parâmetro Δ dados por cores, onde os comportamentos dos respectivos campos são encontrados na [Figura 5.11](#), representando o campo de Higgs e a [Figura 3.7b](#) para o campo de gauge.

Por meio do perfil numérico encontrado na [Figura 5.11](#), constatamos que para Δ pequenos o campo de Higgs satura no valor unitário mais rápido, convergindo a este valor para $r \rightarrow \infty$, enquanto aos outros valores de Δ o mesmo satura lentamente em 1. Por conseguinte, $\Delta = 1$ é respectivamente o valor em que Δ é expresso por (5.51) como também onde encontramos o valor máximo para a massa do modelo dada na equação (5.53). Além disto, assim como em CSH, o campo de Higgs é nulo na origem para todos os valores de Δ . Para $\Delta = \infty$ a solução do campo de Higgs de DJCSH recai para o de CSH.

Mediante o comportamento para o campo de gauge a encontrado na [Figura 5.12](#), observamos que em todos os Δ o campo é unitário na origem, no entanto, com valores pequenos deste parâmetro

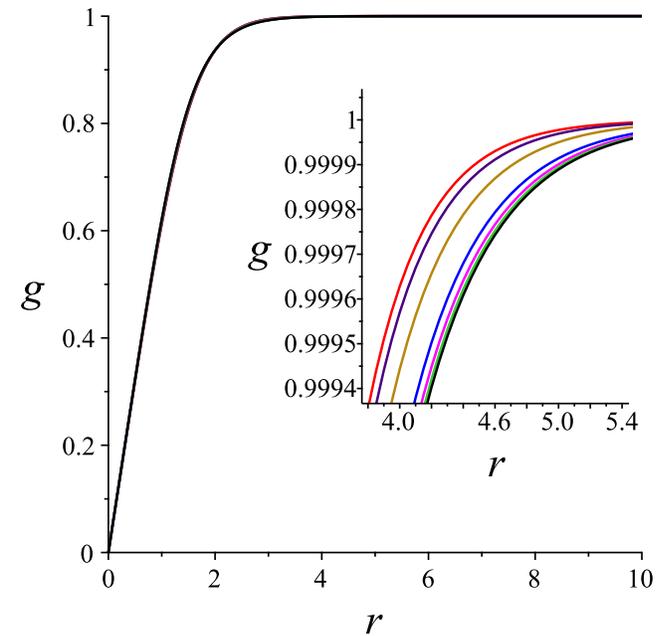


Figura 5.11: Solução numérica do campo de Higgs g para $n = 1$ e $\Delta = 1, \frac{10}{9}, \frac{40}{9}, \frac{80}{9}, 8, 20, \infty$.

as soluções numéricas decaem lentamente, apresentando intervalos de r em que as soluções se interceptam. Por conseguinte, para $\Delta = \infty$ apreciamos o limite em que este campo retorna o de CSH.

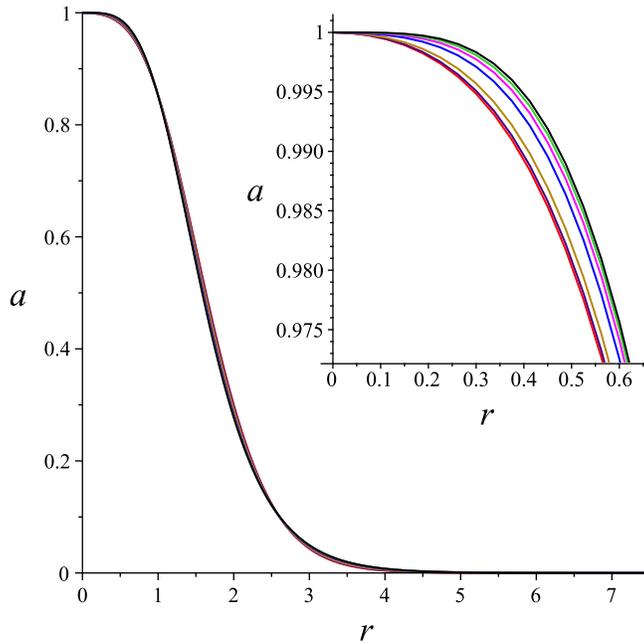


Figura 5.12: Soluções numéricas para o campo de gauge a com $n = 1$ e $\Delta = 1, \frac{10}{9}, \frac{40}{9}, \frac{80}{9}, 8, 20, \infty$. A linha sólida preta é o valor para $\Delta = \infty$, a solução do modelo de DJCSH que recupera CSH.

A Figura 5.13 nos mostra os perfis para o comportamento do campo magnético B e densidade de energia BPS \mathcal{E}_{BPS} . Através de uma verificação numérica para os perfis do campo magnético encontrado na Figura 5.13 com valor do *winding number* $n = 1$, podemos concluir que o mesmo só é nulo na origem justamente para o caso $\Delta \rightarrow \infty$, valor onde retornamos CSH. Os valores $\Delta = 1, \frac{10}{9}, \frac{40}{9}, \frac{80}{9}, 8, 20$ provê soluções de B com valores não nulos na origem, e observamos ainda que o mesmo apresenta-se como anéis com máximos influenciados pelo parâmetro Δ , tendo desta maneira maior máximo exatamente para o valor de $\Delta = \infty$ no qual recuperamos CSH.

Como abordado, a densidade de energia BPS \mathcal{E}_{BPS} apresentada na Figura 5.14 é definida positiva e finita, no entanto, ao passo que aumentamos Δ e, conseqüentemente, os valores da mesma

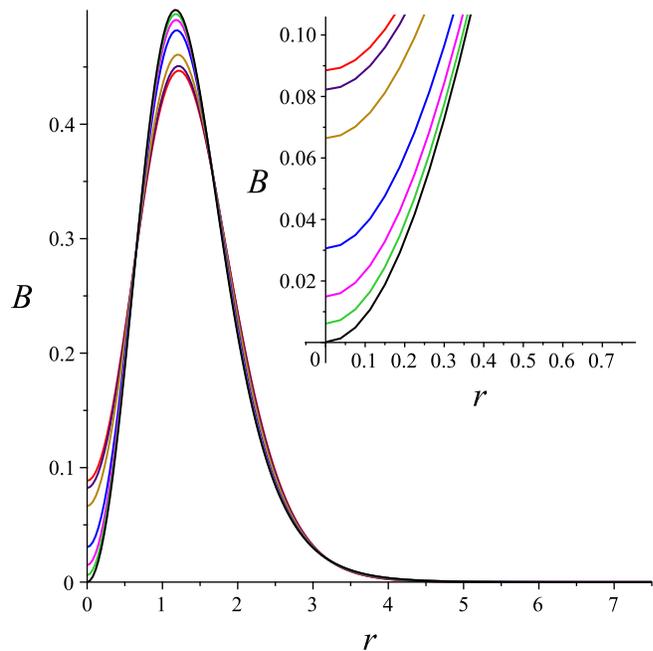


Figura 5.13: Solução numérica do campo magnético B com $n = 1$ e $\Delta = 1, \frac{10}{9}, \frac{40}{9}, \frac{80}{9}, 8, 20, \infty$.

são aumentados sob influência deste parâmetro na origem. Esta densidade de energia BPS apresenta intervalos para t em que as soluções numéricas se interceptam e decaindo a zero para $r \rightarrow \infty$.

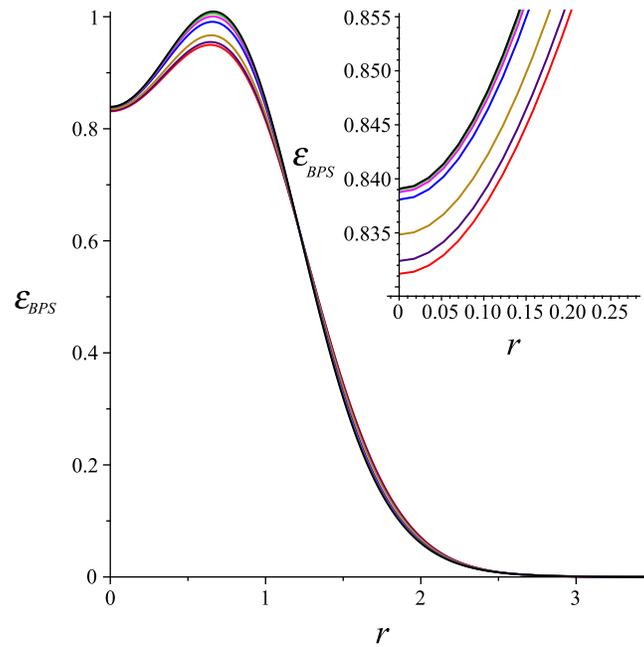


Figura 5.14: Soluções numéricas para a densidade de energia \mathcal{E}_{BPS} com $n = 1$ e $\Delta = 1, \frac{10}{9}, \frac{40}{9}, \frac{100}{9}, 8, 20, \infty$.

O perfil numérico do potencial escalar na Figura 5.15 mostra que o mesmo é 1 na origem somente para $\Delta = \infty$, valor este em que recupera-se o perfil de CSH. Na Figura 5.16 o perfil numérico para o campo elétrico $\omega'(r)$ demonstra máximos que aumentam gradativamente com Δ .

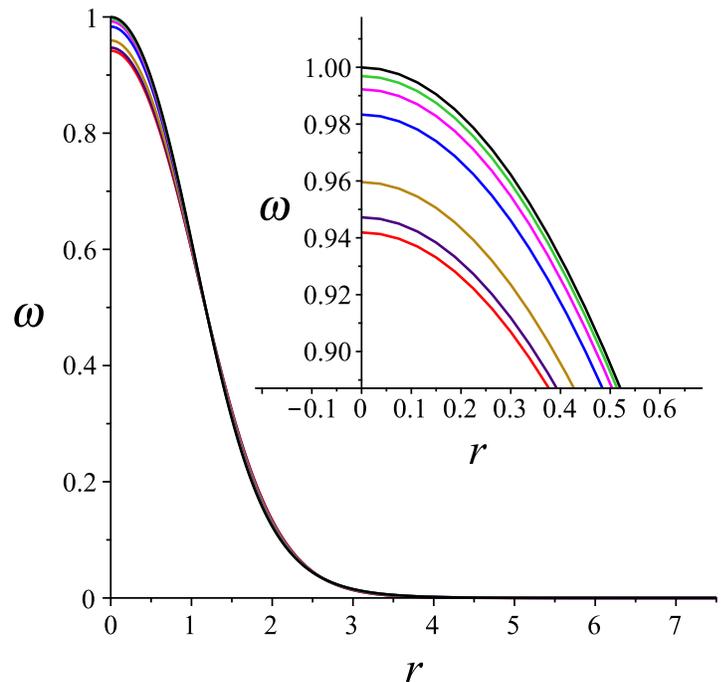


Figura 5.15: Solução numérica do potencial escalar ω com $n = 1$ e $\Delta = 1, \frac{10}{9}, \frac{40}{9}, \frac{80}{9}, 8, 20, \infty$.

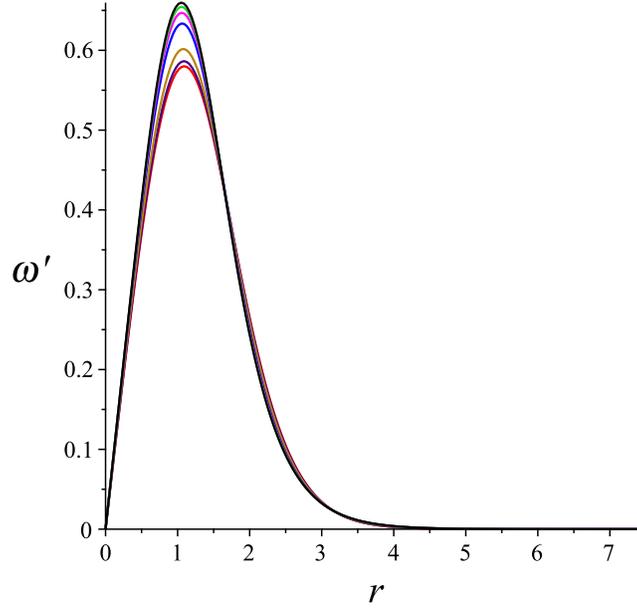


Figura 5.16: Soluções numéricas para o campo elétrico $\omega'(r)$ para $n = 1$ e $\Delta = 1, \frac{10}{9}, \frac{40}{9}, \frac{80}{9}, 8, 20, \infty$. Onde a linha sólida preta é o valor para $\Delta = \infty$, a solução do modelo de DJCSH que recupera CSH.

5.3.3 O potencial BPS não-local V com $n = 1$ e Δ variável

A seguir mostramos os perfis numéricos do potencial BPS não-local V do modelo de DJCSH dado pela equação (5.22)

$$V(|\phi|) = \frac{e^4 |\phi|^2}{\kappa^2} \left[\left(1 - \frac{\nabla^2}{\kappa M} \right)^{-1} (v^2 - |\phi|^2) \right]^2. \quad (5.54)$$

Este potencial possui dois vácuos. O primeiro vácuo (simétrico), $|\phi| = 0$, preserva a simetria $U(1)$ e acarreta soluções não topológicas, o que não está no escopo deste trabalho. Enquanto o segundo vácuo (assimétrico) dado por $|\phi| = v$, ocasiona a quebra espontânea da simetria $U(1)$, e promove a formação estruturas topológicas.

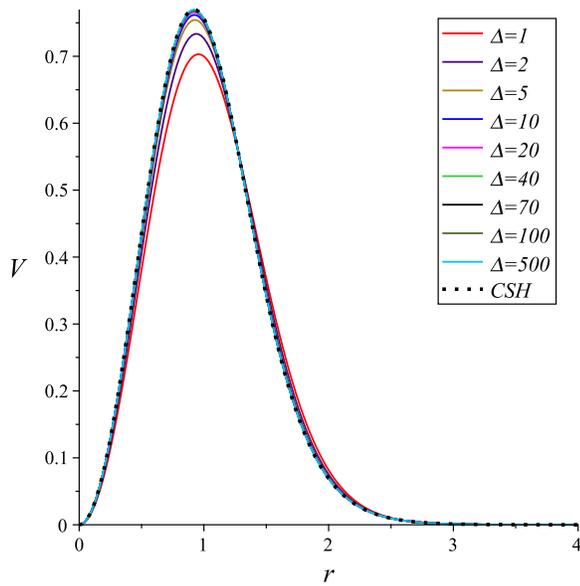
O potencial expresso em termos do ansatz (5.31) é dado como

$$V(g(r)) = \frac{e^4 v^6 g^2(r)}{\kappa^2} \left[\left(1 - \frac{\tilde{\nabla}^2}{\kappa M} \right)^{-1} (1 - g^2(r)) \right]^2. \quad (5.55)$$

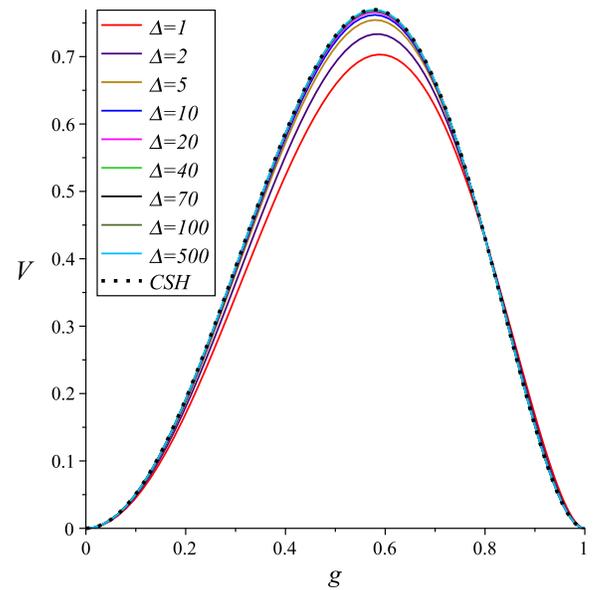
A Figura 5.17a indica que o potencial não-local $V \equiv V(r)$ do modelo de DJCSH (representado pelas linhas sólidas) exhibe os dois vácuos, o primeiro simétrico em $r = 0$ e atinge o segundo vácuo (assimétrico) quando $r \rightarrow \infty$. Também, verificamos que quando $\Delta \rightarrow \infty$, o potencial não-local do DJCSH se aproxima ao perfil do potencial local do CSH (representado pela linha pontilhada preta).

O potencial não-local como uma função de $g(r)$ é mostrado na Figura 5.17b exhibe o vácuo simétrico em $g = 0$ e o assimétrico em $g = 1$, onde a simetria $U(1)$ é quebrada, e a interação V atinge o valor de

vácuo nulo. Portanto, por meio dessa análise do potencial em função do campo de Higgs, fica evidente que esse campo desempenha um papel crucial na quebra espontânea de simetria $U(1)$ no modelo DJCSH.



(a) Potencial V em função de r .



(b) Potencial V em função de $g(r)$.

Figura 5.17: Soluções numéricas para o potencial BPS não-local V para $n = 1$ e alguns valores de Δ . A [Figura 5.17a](#) descreve os perfis de $V(r)$, enquanto a [Figura 5.17b](#) mostra $V(g)$. As linhas sólidas correspondem ao modelo DJCSH e o CSH é representado pela linha pontilhada preta. Observamos que quando Δ cresce indefinidamente o perfil do modelo DJCSH se aproxima ao perfil do CSH.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Na presente dissertação estudamos a estrutura BPS nas eletrodinâmicas Maxwell-Higgs e de Chern-Simons quando inserimos termos de altas derivadas à cinética do campo de calibre. Na primeira parte apresentamos os *kinks* e *anti-kinks*, defeitos topológicos em (1+1)-dimensões, para desenvolvermos o método de Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfield, comumente chamado de BPS. Método de extrema importância, pois através do mesmo é possível encontrar equações diferenciais não lineares (chamadas de BPS ou auto-duais) cujas soluções minimizam a energia (esse valor mínimo é chamado de limite de Bogomol'nyi). As equações auto-duais reproduzem as equações de Euler-Lagrange originais de um dado modelo que possua uma estrutura BPS, sendo assim soluções verdadeiras do sistema.

No [Capítulo 2](#) revisamos a estrutura BPS da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs em (1+2)-dimensões. Dado que respectiva lei de Gauss é devidamente satisfeita pela condição de calibre $A_0 = 0$, as configurações geradas possuem carga total nula e somente são portadoras de fluxo magnético. O formalismo BPS mostra que a energia mínima do sistema é proporcional ao fluxo magnético. Com o intuito de resolver as equações auto-duais, procuramos por soluções topológicas tipo vórtices com simetria radial. Assim, obtemos que tanto a energia BPS como o fluxo magnético são proporcionais ao *winding number* n , sendo assim, ambos quantizados em relação a n . Os vórtices encontrados são os denominados de Abrikosov-Nielsen-Olesen.

Após apresentar o modelo MH, a estrutura BPS da eletrodinâmica de Podolsky-Higgs em (1+2)-dimensões é estudada no [Capítulo 3](#), sendo a primeira contribuição original obtida na presente Dissertação de Mestrado. A partir das equações de Euler-Lagrange para o campo de calibre, observamos, que no regime estacionário, a lei de Gauss também é trivialmente satisfeita pela condição de calibre $A_0 = 0$. Assim, este modelo também comporta soluções portadoras somente de fluxo magnético. Aqui vale ressaltar que na densidade de energia a contribuição do campo magnético $B(m^2 - \nabla^2)B$ é gerida pelo operador diferencial definido positivo, $m^2 - \nabla^2$. A estrutura BPS mostra a existência de um mínimo para a energia que também é proporcional ao fluxo magnético. Outro resultado a ser observado é que o potencial BPS é não local e as equações auto-duais não são mais puramente de primeira ordem, isso sendo uma consequência direta da presença do termo de derivada superior na cinética do campo de calibre, o termo de Podolsky. Em detalhe, a BPS correspondente ao campo de Higgs, similarmente à do MH, permanece de primeira ordem, no entanto, a equação BPS do campo magnético resulta de terceira ordem derivativa para o campo de calibre, cuja equação de Euler-Lagrange, inicialmente era de quarta ordem. Contudo, a BPS do campo magnético se

pode tornar numa equação integro-diferencial de primeira ordem derivativa para o campo de calibre. O estudo de soluções tipo vórtice mostra que os vórtices do tipo Abrikosov-Nielsen-Olesen somente existem se a massa de Podolsky, m , possui um valor mínimo $m \geq 2m_{MH}$, com isso a massa dos vórtices está no intervalo $m_{MH} < M_{PH} \leq \sqrt{2}m_{MH}$. O valor mínimo acontece para $m \rightarrow \infty$ quando a massa dos vórtices se aproxima à dos encontrados no modelo MH, e o valor máximo de M_{PH} ocorre quando $m = 2m_{MH}$.

A análise numérica dos vórtices BPS do modelo PH mostra que para um valor fixo da massa de Podolsky, tanto os perfis do campo de Higgs como do campo de calibre são muito similares aos encontrados no modelo MH. Contudo, o comportamento do campo magnético ao redor da origem é diferente ao do caso MH, ou seja, a magnitude de B em $r = 0$ é menor ao valor encontrado no caso MH para valores menores do *winding number* (como $n = 1, 2, 3, \dots$), embora satura para o valor do caso MH para grandes valores de n . A densidade de energia para $n = 1$ se apresenta centrada na origem tal como à de MH, mas com amplitude menor. A partir de $n \geq 2$ a solução forma anéis com amplitudes em $r = 0$ menores ao do modelo MH para valores pequenos de n . Já quando mantemos fixo o valor do winding number e incrementando os valores da massa de Podolsky, tanto o campo magnético como na densidade de energia BPS aumentam as amplitudes na origem até saturar ou atingir os valores encontrados nos modelo de Maxwell-Higgs.

No [Capítulo 4](#) revisamos a estrutura BPS do modelo de Chern-Simons-Higgs. Primeiramente observamos que a lei de Gauss não admite como solução a condição de calibre $A_0 = 0$, conseqüentemente, as configurações resultantes além de portar fluxo magnético também possuem uma carga elétrica não nula que é proporcional ao fluxo magnético. Prosseguindo, implementamos o método BPS e encontramos as respectivas equações autoduais cujas soluções minimizam a energia do modelo (o limite de Bogomol'nyi) que é proporcional ao fluxo magnético. A procura de soluções tipo vórtices mostra que os obtidos são de Abrikosov-Nielsen-Olesen com destaque para o comportamento dos campos magnético e elétrico cujos perfis formam verdadeiros anéis centrados na origem para todos os valores de n , já a densidade de energia BPS forma anéis para $n \geq 2$. E como nos modelos estudados previamente, a energia BPS e o fluxo magnético dos vórtices são proporcionais ao winding number, e agora a respectiva carga elétrica total.

A nossa segunda contribuição original é desenvolvida no [Capítulo 5](#) onde analisamos a estrutura BPS da versão (1+2)-dimensional do modelo de Deser-Jackiw-Chern-Simons-Higgs. Analisando a lei de Gauss observamos que as soluções do sistema são portadoras tanto de fluxo magnético quanto de carga elétrica, mesmo na presença do termo de derivada superior. O desenvolvimento do formalismo BPS mostra que o mínimo da energia é proporcional ao fluxo magnético, com as equações autoduais sendo de primeira ordem para o campo de Higgs e a do campo magnético resulta numa equação integro-diferencial de terceira ordem derivativa para o campo de calibre. Além disso, o potencial BPS é também não local devido a presença da função de Green do operador diferencial $\kappa M - \nabla^2$. A seguir resolvemos as equações BPS usando o ansatz que descreve vórtices com simetria rotacional, e na procura daqueles do tipo de Abrikosov-Nielsen-Olesen mostramos que esses somente existem se a massa de Deser-Jackiw for maior que um valor mínimo, ou seja, se $M \geq M_0 = \frac{27e^2v^2}{\kappa^3}$, assim, a massa dos vórtices está no intervalo $m_{CSH} < M_{DJCSH} \leq \frac{3}{2}m_{CSH}$. O valor mínimo acontece para $M \rightarrow \infty$ quando a massa dos vórtices se aproxima à dos encontrados no modelo CSH, e o valor máximo de M_{DJCSH} ocorre quando $M = \frac{27e^2v^2}{\kappa^3}$.

Mediante a análise numérica, observamos os perfis dos campos de Higgs e de do campo de calibre $a(r)$ seguem o formato daqueles do caso CSH. Já o campo magnético também forma anéis, mas apresenta um valor não-nulo na origem (diferente ao caso CSH), que se aproxima de zero rapidamente quando Δ permanece fixo e incrementamos n ou vice-versa. O fato do campo magnético ser diferente de zero na origem é uma consequência da presença do termo de alta derivada de Deser-Jackiw. Os perfis da densidade de energia para $n = 1$, o valor difere daquele do CSH mas se aproxima desse quando Δ cresce continuamente. Para $n \geq 2$ a energia forma anéis tal como acontece no caso de CSH. Em geral, os perfis dos campo do modelo DJCSH se aproximam daqueles do CSH quando $\Delta \rightarrow \infty$.

Entre as perspectivas futuras destacamos a possibilidade de estudar a existência estruturas BPS na eletrodinâmica de altas derivadas no contexto da quebra da invariância de Lorentz, em modelos sigma $O(3)$ e $CP(N)$ calibrados, assim como nos modelos de Skyrme calibrados.

Bibliografia

- [1] J.Scott Russel, " Report on Waves", Proe of the British Assiation for the Advancement of Science, London, 311 (1945).
- [2] D. J. Korteweg and G. de Vries, "On the change of form long waves advancing in a retangular canal, and on a new type of long stationary waves ", Phil. Mag. 39 (1895), 422.
- [3] Fermi, E., Pasta, J., Ulam, S., Studies fo Nonlinear Problems . Document LA-1940, 1955.
- [4] Zabusky, N.J., Kruskal, M. D., Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and tje Recurrence of Initial States , Phys. Rev. Lett. 15, 240-243 (1965).
- [5] Bogomol'nyi, E B. The stability of classical solutions.N. p., 1976. Web. [Stability of Classical Solutions](#).
- [6] Prasad, M. K. / Sommerfield, Charles M. Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon .1975-09. Physical Review Letters , Vol. 35, No. 12 American Physical Society (APS) p. 760-762. [10.1103/PhysRevLett.35.760](#).
- [7] Schaponik, F. A.; De Vega, H. J. Classical vortex soutions of the Abelian Higgs model. Phys. Rev. D, American Physical Society, v. 14, p. 1100-1106, Aug 1976 <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.14.1100>.
- [8] Rajaraman, R. , Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory, Holland, North, 1987.
- [9] Brandenberger, Robert H. , Topological defects and cosmology ,Pramana , Vol. 51, No. 1-2 Springer Science and Business Media LLC p. 191-204, 1998-07.[10.1007/BF02827491](#).
- [10] A. Vilenkin, E. P. S. Shellard , Cosmic Strings and Other Topological Defects , 2009-10. Cambridge University Press.[9780521654760](#).
- [11] Preskill, John P, Cosmological Production of Superheavy Magnetic Monopoles, 1979-11 . Physical Review Letters , Vol. 43, No. 19 American Physical Society (APS) p.1365-1368. [10.1103/PhysRevLett.43.1365](#).

-
- [12] BRANDENBERGER, R.O.B.E.R.T. H. TOPOLOGICAL DEFECTS AND STRUCTURE FORMATION, 1994-05. International Journal of Modern Physics A , Vol. 09, No. 13 .
- [13] Hooft, G.'t . Magnetic monopoles in unified gauge theories. 1974-09. Nuclear Physics B , Vol. 79, No. 2 Elsevier BV p. 276-284. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(74\)90486-6](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90486-6).
- [14] A. M. Polyakov., JETP Lett., 20, 194(1974).
- [15] A. Altland and B. D. Simon. Condensed Matter Field Theory.(2010). second edition, Cambridge University Press.
- [16] Abrikosov, A.A. type II Superconductors and the Vortex lattice.Nobel Lecture, 8 December 2003.
- [17] H.K. Onnes, Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden 12, 120 (1911).
- [18] Walgraef, D. / Ghoniem, N. M. / Lauzeral, J. Deformation patterns in thin films under uniform laser irradiation .1997-12. Physical Review B , Vol. 56, No. 23 American Physical Society (APS) p. 15361-15377. [10.1103/PhysRevB.56.15361](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.56.15361).
- [19] Sinha, Suman / Roy, Soumen Kumar . Role of topological defects in the phase transition of a modifiedXYmodel: A Monte Carlo study.2010-04. Physical Review E , Vol. 81, No. 4 American Physical Society (APS) p. 041120. [10.1103/PhysRevE.81.041120](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.81.041120).
- [20] Abrikosov, A. A. The magnetic properties of superconducting alloys. Journal of Physics and Chemistry of Solids, v. 2, n. 3, p. 199 -208, 1957. INSS 0022-3697. Disponível em:<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0022369757900835>.
- [21] W. Meissner. R. Ochsenfeld. Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit. Naturwissenschaften 21, 787–788 (1933). <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01504252>.
- [22] Nielsen, H. B. / Olesen, P. Vortex-line models for dual strings. 1973-09.Nuclear Physics B , Vol. 61 Elsevier BV p. 45-61. DOI: [10.1016/0550-3213\(73\)90350-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(73)90350-7).
- [23] C.K. Lee, K.M. Lee, H. Min, Selfdual Maxwell Chern-Simons solitons , Phy. Lett B 252, 79 (1990). B.H. Lee, C.K. Lee, H. Min, Supersymmetric Chern-Simons vortex systems and fermion zero modes, Phys. Rev. D 45, 4588 (1992).
- [24] De Vega, H. J.; Schaposnik, F. A. Electrically Charged Vortices in Non-Abelian Gauge Theories with Chern-Simons Term. Phys. Rev. Lett., American Physical Society, v. 56, p. 2564-2566, Jun 1986. <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.56.2564>.
- [25] Paul, S K.; Khare, A. Charged vortices in an Abelian Higgs model with Chern-Simons term. Physics Letters B, v. 174, n. 4, p. 420-422, 1986. INSS 0370-2693. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0370269386910282>.

-
- [26] Khare, A. Charged vortices and Q-balls in an Abelian Higgs model exhibiting a first order phase transition. Physics Letters B, v. 255, n. 3, p. 393-397, 1991. INSS 0370-2693. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/037026939190784N>.
- [27] Jackiw, R.; Lie, K. Weinberg, E. J. . Self-dual Chern-Simons solitons. Phys. Rev. D. American Physical Society, v. 42, p. 3488-3499, Nov 1990. <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.42.3488>.
- [28] Jackiw, R.; Weinberg, E. J. . Self-dual Chern-Simons vortices. Phys. Rev. D. American Physical Society, v. 64, p. 2234-2237, May 1990. <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.64.2234>.
- [29] Hong, Jooyoo / Kim, Yoonbai / Pac, Pong Youl. Multivortex solutions of the Abelian Chern-Simons-Higgs theory . Physical Review Letters , Vol. 64, No. 19 American Physical Society (APS) p. 2230-2233, 1990-05 . <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.64.2230>.
- [30] Hyun, Seungjoon / Shin, Junsoo / Yee, Jae Hyung / Lee, Hyuk-jae. Vortex solutions of a Maxwell-Chern-Simons field coupled to four-fermion theory. Physical Review D , Vol. 55, No. 6 American Physical Society (APS) p. 3900-3902, 1997-03 . <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.55.3900>.
- [31] Paul, Samir K. / Khare, Avinash . Chern-Simons term by spontaneous symmetry breaking in an abelian Higgs model. Physics Letters B , Vol. 193, No. 2-3 Elsevier BV p. 253-256, 1987-07. <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.55.3900>.
- [32] Jatkar, Dileep P. / Khare, Avinash. Peculiar charged vortices in Higgs models with pure Chern-Simons term. Physics Letters B , Vol. 236, No. 3 Elsevier BV p. 283-286, 1990-02. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(90\)90983-D](https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)90983-D).
- [33] Torres, Manuel. Bogomol'nyi limit for nontopological solitons in a Chern-Simons model with anomalous magnetic moment. Physical Review D , Vol. 46, No. 6 American Physical Society (APS) p. R2295-R2298, 1992-09. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(90\)90983-D](https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)90983-D).
- [34] Antillón, A *et al.* Self-dual non-Abelian vortices in a Φ^2 Chern-Simons theory. Physical Review B , v. 359, n. 3-4, p. 327-333, 1995. ISSN 0370-2693. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(95\)01077-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(95)01077-4).
- [35] Ghosh, Pijush K. Bogomol'nyi equations of Maxwell-Chern-Simons vortices from a generalized Abelian Higgs model. Physical Review D , Vol. 49, No. 10 American Physical Society (APS) p. 5458-5468, 1994-05. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.5458>.
- [36] Lee, Hyuk-jae / Lee, Joo Youl / Yee, Jae Hyung. Vortex solutions of four-fermion theory coupled to a Yang-Mills-Chern-Simons gauge field . Physical Review D , Vol. 58, No. 8 American Physical Society (APS) p. 087701, 1998-09. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.58.087701>.

-
- [37] Kim, Bom Soo / Lee, Hyuk-jae / Yee, Jae Hyung . Vortex solutions of nonrelativistic Fermion and scalar field theories coupled to Maxwell-Chern-Simons gauge fields . Physical Review D , Vol. 61, No. 2 American Physical Society (APS) p. 025010, 1999-12. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.61.025010>.
- [38] Chandelier, F. / Georgelin, Y. / Lassaut, M. / Masson, T. / Wallet, J. C. Vortex in Maxwell-Chern-Simons models coupled to external backgrounds . Physical Review D , Vol. 70, No. 6 American Physical Society (APS) p. 065016, 2004-09. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.70.065016>.
- [39] Arbab, A. I. Massive electrodynamics for London's superconductivity and Josephson effect. 2018. arXiv. [arXiv:1803.02674v1](https://arxiv.org/abs/1803.02674v1).
- [40] Tajmar, M. Electrodynamics in superconductors explained by Proca equations. 2008-04 Physics Letters A , Vol. 372, No. 18 Elsevier BV p. 3289-3291. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.10.070>.
- [41] Carroll, Sean M. / Harvey, Jeffrey A. / Kostelecký, V. Alan / Lane, Charles D. / Okamoto, Takemi. Noncommutative Field Theory and Lorentz Violation . Physical Review Letters , Vol. 87, No. 14 American Physical Society (APS) p. 141601, 2001-09. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.141601>.
- [42] Podolsky, Boris. A Generalized Electrodynamics Part I-Nom—Quantum.1942-07. Physical Review , Vol. 62, No. 1-2 American Physical Society (APS) p. 68-71. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.62.68>.
- [43] Cuzinatto, R. R. / de Melo, C. A. M. / Pompeia, P. J. Second order gauge theory.2007-05. Annals of Physics , Vol. 322, No. 5 Elsevier BV p. 1211-1232. [10.1016/j.aop.2006.07.006](https://doi.org/10.1016/j.aop.2006.07.006).
- [44] D Bazeia and R Menezes and J R Nascimento and R F Ribeiro and C Wotzasek. Dual equivalence in models with higher-order derivatives. Journal of Physics A: Mathematical and General. sep, 38 , 9943-9959, 5 Aug 2003. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/36/38/311>.
- [45] Casana, Rodolfo; Ferreira, Manoel M; Lisboa-Santos, Letícia, dos Santos; Frederico E. P.; Schreck, Marco. Maxwell electrodynamics modified by CPT-even and Lorentz-violating dimension-6 higher-derivative terms. Physical Review D , Vol. 97, No. 11 American Physical Society (APS), 2018-06. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.115043>.
- [46] Bonin, C. A. / de Gracia, G. B. / Nogueira, A. A. / Pimentel, B. M. . Debye screening in generalized quantum electrodynamics . International Journal of Modern Physics A , Vol. 35, No. 28. World Scientific Pub Co Pte Lt p. 2050179, 2020-10. <https://doi.org/10.1142/S0217751X20501791>.
- [47] Boni, C. A., Pimentel, B. M. Mechanism for the origin of the Podolsky mass. Physical Review D , Vol. 106, No. 1 American Physical Society (APS) p. 016003, 2022-07. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.016003>.
- [48] Deser, S. / Jackiw, R. / Templeton, S. Three-Dimensional Massive Gauge Theories. 1982-04 . Physical Review Letters , Vol. 48, No. 15 American Physical Society (APS) p. 975-978. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.975>.

-
- [49] A. Achúcarro, P. K. Townsend. A Chern-Simons action for three-dimensional anti-de Sitter supergravity theories. 1986. Physics Letters B , Vol. 180, No. 1-2 Elsevier BV p. 89-92 [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(86\)90140-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(86)90140-1).
- [50] A. Foussats, E. Manavella, C. Repetto, O. P. Zandron, and O. S. Zandron. Fermionic matter coupled to higher derivative Chern–Simons theories. II. Journal of Mathematical Physics , Vol. 37, No. 1 AIP Publishing p. 84-99. <https://doi.org/10.1063/1.531377>.
- [51] L.H.C. Borges, F.A. Barone, H.L. Oliveira. Higher order derivatives extension of Maxwell-Chern-Simons electrodynamics in the presence of field sources and material boundaries. 2022. Physical Review D , Vol. 105, No. 2 American Physical Society (APS) p. 025008. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.105.025008>.
- [52] Bjorken, James. Relativistic quantum mechanics . 1964.McGraw-Hill: New York. [978-0070054936].
- [53] Nettel, Stephen. Wave physics : oscillations, solitons, chaos.2009. pg. 217-229 [978-3-540-87907-7].
- [54] Ramond, Pierre. Field theory : a modern primer.1981 . [978-0805378931].
- [55] Greiner, Walter . Field quantization.1996 .Springer: Berlin New York [978-3540780489].
- [56] Kleinert, Hagen . Particles and Quantum Fields .2015-11. WORLD SCIENTIFIC. pg. 713-720.
- [57] Tom Lancaster, Stephen J. Blundell . Quantum Field Theory for the Gifted Amateur .2014-04 . Oxford University Press. pg. 90-92. [978-0199699339].
- [58] M. Ostrogradsky. Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres.1850. 133 pages Published in: Mem.Acad.St.Petersbourg 6 (1850) 4, 385-517. [M. Ostrogradsky](#).
- [59] Podolsky, Boris. / Kikuchi, Chihiro. A Generalized Electrodynamics Part II—Quantum.1944-04. Physical Review , Vol. 65, No. 7-8 American Physical Society (APS) p. 228-235. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.65.228>.
- [60] Musicki, D. On canonical formalism in field theory with derivatives of higher order-canonical transformations .1978-01. Journal of Physics A: Mathematical and General , Vol. 11, No. 1 IOP Publishing p. 39-53. [10.1088/0305-4470/11/1/008](https://doi.org/10.1088/0305-4470/11/1/008).
- [61] ORTEGA, Paulo Henrique. Aspectos Clássicos da Eletrodinâmica de Podolsky2014. 135 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Física Teórica, 2014. <http://hdl.handle.net/11449/108897>.
- [62] T. D. Lee and G. C. Wick. Finite theory of quantum electrodynamics. Phys. Rev. D, 2:1033–1048, Sep 1970. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.2.1033>.

-
- [63] Baker, M. / Ball, J. S. / Zachariasen, F. A non-perturbative calculation of the infrared limit of the axial gauge gluon propagator (I) .1981-08. Nuclear Physics B , Vol. 186, No. 3 Elsevier BV p. 531-559. [10.1016/0550-3213\(81\)90025-0](https://doi.org/10.1016/0550-3213(81)90025-0).
- [64] Galvão, Carlos A. P. / Pimentel, B. M. The canonical structure of Podolsky generalized electrodynamics.1988-05. Canadian Journal of Physics , Vol. 66, No. 5 Canadian Science Publishing. p. 460-466. [10.1139/p88-075](https://doi.org/10.1139/p88-075).
- [65] Frenkel, J. 4/3 problem in classical electrodynamics.1996-11. Physical Review E , Vol. 54, No. 5 American Physical Society (APS). p. 5859-5862. [10.1103/PhysRevE.54.5859](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.54.5859).
- [66] Benjamin Grinstein, Donal O'Connell, and Mark B. Wise. Finite theory of quantum electrodynamics. Phys. Rev. D, 77:025012, Jan 2008. <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.77.025012>.
- [67] Bonin, C. A. / Bufalo, R. / Pimentel, B. M. / Zambrano, G. E. R. Podolsky electromagnetism at finite temperature: Implications on the Stefan-Boltzmann law . 2010-01. Physical Review D , Vol. 81, No. 2 American Physical Society (APS).10.1103/PhysRevD. [10.1103/PhysRevD.81.025003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.025003).
- [68] Bazeia, D. / Losano, L. / Marques, M. A. / Menezes, R. Vortices in a Generalized Maxwell-Higgs Model with Visible and Hidden Sectors . 2019-05. Advances in High Energy Physics , Vol. 2019 Hindawi Limited p. 1-10. [10.1155/2019/3187289](https://doi.org/10.1155/2019/3187289).
- [69] Casana, R. / Ferreira, M. M. / da Hora, E. / dos Santos, C. Analytical BPS Maxwell-Higgs Vortices . 2014. Advances in High Energy Physics , Vol. 2014 Hindawi Limited p. 1-9. [10.1155/2014/210929](https://doi.org/10.1155/2014/210929).
- [70] Bazeia, D. / Losano, L. / Marques, M. A. / Menezes, R. Analytic vortex solutions in generalized models of the Maxwell-Higgs type . 2018-03 Physics Letters B , Vol. 778 Elsevier BV p. 22-29. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1801.01077>.
- [71] Bazeia, D. / da Hora, E. / dos Santos, C. / Menezes, R. BPS solutions to a generalized Maxwell-Higgs model . 2011-12. The European Physical Journal C , Vol. 71, No. 12 Springer Science and Business Media LLC. [10.1140/epjc/s10052-011-1833-9](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-011-1833-9). [10.1140/epjc/s10052-011-1833-9](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-011-1833-9).
- [72] Atmaja, A.N. / Ramadhan, H.S. / da Hora, E. More on Bogomol'nyi equations of three-dimensional generalized Maxwell-Higgs model using on-shell method. J. High Energ. Phys. 2016, 117 (2016). <https://arxiv.org/abs/1505.01241>.
- [73] Casana, R. / Cavalcante, A. / da Hora, E. Self-dual configurations in Abelian Higgs models with k-generalized gauge field dynamics. 2016-12. Journal of High Energy Physics , Vol. 2016, No. 12 Springer Science and Business Media LLC [10.1007/JHEP12\(2016\)051](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2016)051).
- [74] Bazeia, D. / Losano, L. / Marques, M. A. / Menezes, R. / Zafalan, I. First order formalism for generalized vortices. 2018-09. Nuclear Physics B , Vol. 934 Elsevier BV p. 212-239 <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2018.07.006>.

-
- [75] Bazeia, D. / Marques, M. A. / Melnikov, D. Planar ringlike vortices. 2018-10. Physics Letters B , Vol. 785 Elsevier BV p. 454-461. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.09.012>.
- [76] Casana, Rodolfo / Lazar, Guillermo / Sourrouille, Lucas. Self-Dual Effective Compact and True Compacton Configurations in Generalized Abelian Higgs Models .2018. Advances in High Energy Physics , Vol. 2018 Hindawi Limited p. 1-20. <https://doi.org/10.1155/2018/4281939>.
- [77] D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques, R. Menezes., Vortices in a Generalized Maxwell-Higgs Model with Visible and Hidden Sectors.Advances in High Energy Physics, vol. 2019, Article ID 3187289, 10 pages, 2019. <https://doi.org/10.1155/2019/3187289>.
- [78] I. Andrade, D. Bazeia, M. A. Marques, R. Menezes., Long range vortex configurations in generalized models with Maxwell or Chern-Simons dynamics. Physical Review D , Vol. 102, No. 2. American Physical Society (APS), 2020-07. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.025017>.
- [79] Bazeia, D. / Marques, M. A. / Menezes, R. Quasi-compact vortices. 2020-02. EPL (Europhysics Letters) , Vol. 129, No. 3 ,IOP Publishing p. 31001. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/129/31001>.
- [80] S. Deser, R. Jackiw, Physics Letters B, 451 (1999). Topologically Massive Gauge Theories. Dec, 1981. [10.1016/0003-4916\(82\)90164-6](https://doi.org/10.1016/0003-4916(82)90164-6), [10.1006/aphy.2000.6013](https://doi.org/10.1006/aphy.2000.6013).
- [81] S. Deser, R. Jackiw, Physics Letters B, 451 (1999). [10.1016/S0370-2693\(99\)00216-6](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(99)00216-6).
- [82] D. Bazeia, R. Menezes, J.R. Nascimento, R.F. Ribeiro, C. Wotzasek. Dual equivalence in models with higher-order derivatives. 2003. Journal of Physics A: Mathematical and General , Vol. 36, No. 38 IOP Publishing p. 9943-9959. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/36/38/311>.
- [83] Bindusar Sahoo, Ashoke Sen. BTZ black hole with Chern-Simons and higher derivative terms. 2006. Journal of High Energy Physics , Vol. 2006, No. 07 Springer Science and Business Media LLC p. 008-008. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1126-6708/2006/07/008>.
- [84] MA Anacleto,FA Brito,O. Holanda,E. Passos,A. Yu. Petrov. Induction of the higher-derivative Chern Simons extension in QED₃. 2016. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1405.1998>.
- [85] Leite J. , Mariz T. , Serafim W. The induced higher derivative Lorentz-violating Chern–Simons term at finite temperature. 2016. EPL (Europhysics Letters) , Vol. 99, No. 2 IOP Publishing p. 21003. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0954-3899/40/7/075003>.
- [86] V. A. Abakumova, D. S. Kaparulin, S. L. Lyakhovich. Conservation laws and stability of higher derivative extended Chern-Simons. 2019. Journal of Physics: Conference Series , Vol. 1337, No. 1 IOP Publishing p. 012001 <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1337/1/012001>.
- [87] Pradip Mukherjee, Biswajit Paul. Gauge invariances of higher derivative Maxwell-Chern-Simons field theory – a new Hamiltonian approach. 2012. Physical Review D , Vol. 85, No. 4 American Physical Society (APS) p. 045028. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.045028>.

-
- [88] R. Bufalo, M. Ghasemkhani. Higher derivative Chern-Simons extension in the noncommutative QED₃. 2015. Physical Review D , Vol. 91, No. 12 American Physical Society (APS) p. 125013. [10.1103/PhysRevD.91.125013](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.125013).
- [89] S. C. Sararu. A first-class approach of higher derivative Maxwell-Chern-Simons Proca model. 2015. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1410.7533>.
- [90] Ricardo Avila, Jose R. Nascimento, Albert Yu. Petrov, Carlos M. Reyes, Marco Schreck. Causality, unitarity, and indefinite metric in Maxwell-Chern-Simons extensions. 2020. Physical Review D , Vol. 101, No. 5 American Physical Society (APS) p. 055011. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.055011>.
- [91] SANTOS, Leticia Lisboa dos. Eletrodinâmicas do MPE não-mínimo com altas derivadas e violação da simetria de Lorentz. 2021.157 f. Tese(Programa de Pós-Graduação em Física/CCET) - Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2021. <https://tedebc.ufma.br/jspui/handle/tede/tede/3413>.
- [92] WEN, X.-G.; ZEE, A. Topological degeneracy of quantum hall fluids. Physical Review B, APS, v. 58, n. 23, p. 15717, 1998.<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.055011>.
- [93] WEN, X.G. Topological orders and edge excitations in fractional quantum hall states. Advances in Physics, Taylor e Francis, v. 44, n. 5, p. 405–473, 1995. <https://doi.org/10.1080/00018739500101566>.
- [94] Melnikov, Dmitry / Neves, Alyson B. F. Chern-Simons-Higgs model as a theory of protein molecules. 2019-12. Journal of Applied Physics , Vol. 126, No. 24 AIP Publishing p. 244701. [10.1063/1.5137808](https://doi.org/10.1063/1.5137808). p. 3811-3823.

ELETRODINÂMICA DE PODOLSKY-HIGGS

A.1 Soluções numéricas para $m < 2m_{MH}$

Falamos na [Subseção 3.2.1](#) do [Capítulo 3](#) que embora os campos g , a e B satisfaçam as condições impostas para que tenhamos configurações de vórtices BPS, a imposição $m < 2\sqrt{2}ev$ não nos leva as soluções que apresentam comportamento de Abrikosov, Nielsen e Olesen (ANO). Deste modo, nesta seção mostraremos as soluções com essa condição para o respectivo limite da massa de Podolsky, visto que não achamos por bem tratar estas soluções no Capítulo original da nossa contribuição, pois como falado, estas soluções não se comportam da mesma forma como as de ANO.

Portanto, na análise consideramos o seguinte valor para o *winding number* $n = 1$ como também para o termo do parâmetro de Podolsky $m = 2\gamma\sqrt{2}$, com o parâmetro $\gamma = 1/50, 1/25, 1/15, 1/10, 1/5, 1/2, 9/10$ variando, onde teremos as cores representando cada valor de γ , ou seja, a cor vermelho ($\gamma = 1/50$), violeta ($\gamma = 1/25$), amarelo ($\gamma = 1/15$), azul ($\gamma = 1/10$), rosa ($\gamma = 1/5$), verde ($\gamma = 1/2$) e preto ($\gamma = 9/10$).

Os perfis numérico do campo de Higgs na [Figura A.1](#) nos revela que para massas menores que o limite $m = 2\sqrt{2}ev$ do modelo de PH, o dado campo demora mais atingir o vácuo para massas extremamente pequenas, no entanto, quando atinge o mesmo, observamos que a solução ultrapassa-o formando um platô e depois decai exponencialmente para valores menores que o vácuo, e logo após isto retorna para o mesmo, o que não representa soluções do campo de Higgs que descrevem vórtices. Se ampliarmos a resolução do gráfico para $\gamma = 9/10$, visualizaremos também um comportamento como de platô.

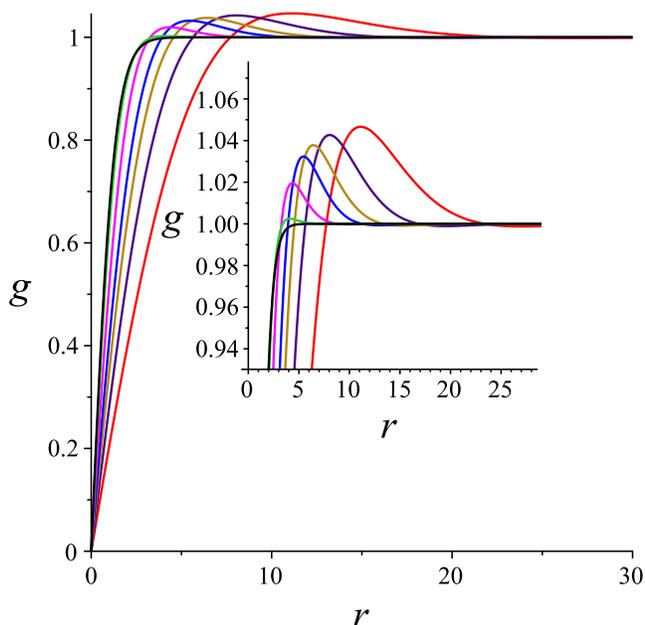


Figura A.1: campo de Higgs $g(r)$ para diferentes valores de γ . 75

Para o campo de gauge a , o comportamento dado na [Figura A.2](#) mostra que o mesmo apresenta um máximo na origem, com valor igual ao unitário, mas ressaltamos que nesta análise $a = a/n$ afim de que tenhamos o valor unitário. A medida que r cresce, o campo de gauge decai exponencialmente chegando a ser nulo, inverte de sinal decaindo em um mínimo e logo após cresce novamente e converge a zero para $r \rightarrow \infty$.

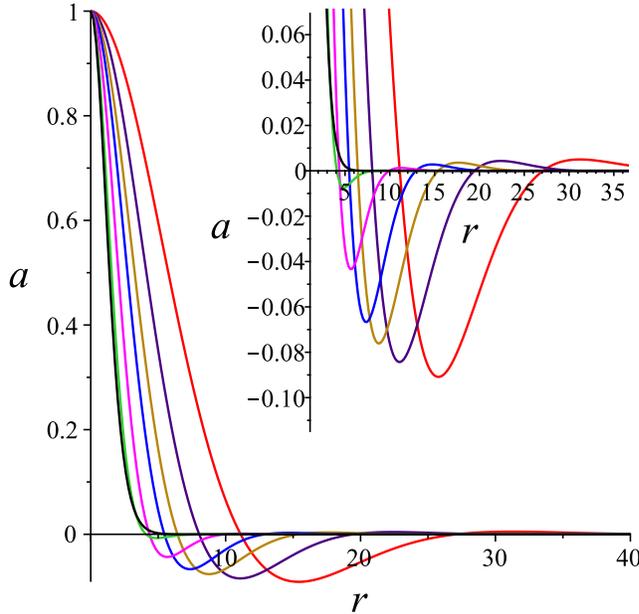


Figura A.2: campo de gauge $a(r)$ para diferentes valores de γ .

$E \equiv r\mathcal{E}_{BPS}$ em partes negativas, como dado na [Figura A.4](#).

A [Figura A.3](#) nos mostra os perfis numérico para a densidade de energia BPS \mathcal{E}_{BPS} para $n = 1$ e diferentes valores de γ .

Através da [Figura A.5b](#), podemos constatar que a medida que γ cresce, a densidade de energia BPS \mathcal{E}_{BPS} apresenta valores máximos na origem que aumentam gradativamente. Mas para um dado valor de t a densidade de energia BPS apresenta-se negativa, o que não configura comportamento de soluções do tipo vórtices mesmo que para $r \rightarrow \infty$, \mathcal{E}_{BPS} seja nula. Da mesma forma observamos o comportamento para a energia total no limite BPS como visualizado na [Figura A.5b](#), mostrando-se negativa para va-

A solução numérica para o campo magnético mostrado na [Figura A.5a](#) evidencia que os perfis do campo magnético na origem apresentam-se como máximos e tendo comportamentos do tipo *lump*, mas à medida que r cresce e atinge um dado valor, ocorre uma inversão de B onde teremos um mínimo. A partir deste mínimo, o campo magnético volta a crescer invertendo de sinal, decaindo á zero para $r \rightarrow \infty$. Através desta análise, concluímos que embora o campo magnético satisfaça as condições, o mesmo não tem os comportamentos das soluções do tipo ANO, ou seja, sem decaimento exponencial oscilatório.

Observamos ainda que variando n e fixando $m = 2ev$, também constatamos

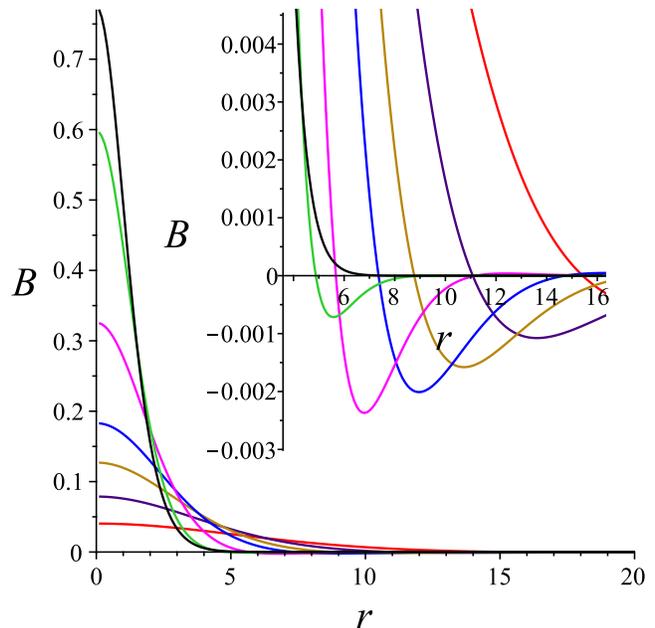


Figura A.3: Campo magnético B para diferentes valores de γ .

lores $m < 2\sqrt{2}$.

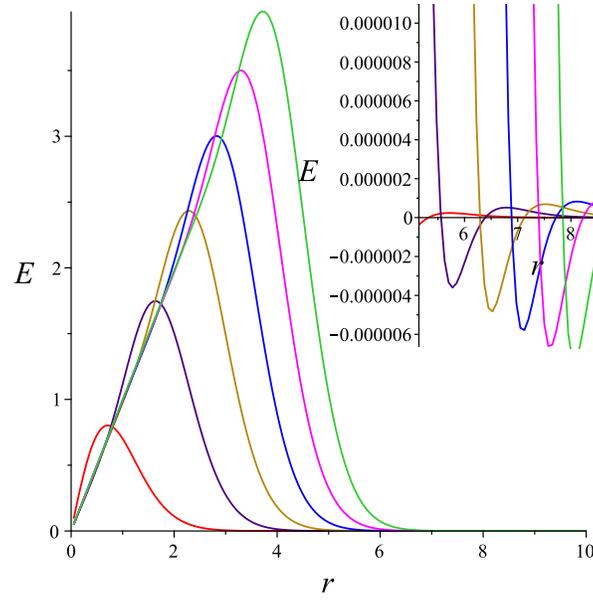
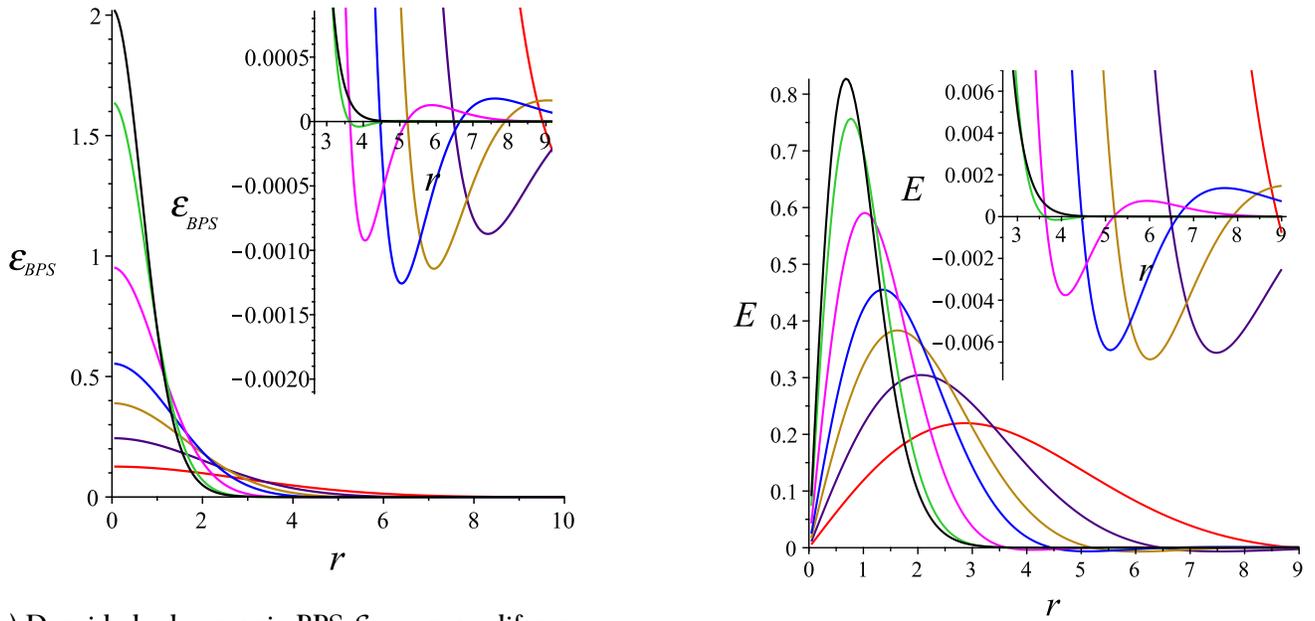


Figura A.4: $E \equiv r\mathcal{E}_{BPS}$ para valores de $n = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$ com $m = 2ev$.



(a) Densidade de energia BPS \mathcal{E}_{BPS} para diferentes valores de γ .

(b) $E \equiv r\mathcal{E}_{BPS}$ para diferentes valores de γ .

Figura A.5: Soluções numéricas para a densidade de energia BPS \mathcal{E}_{BPS} e $E \equiv r\mathcal{E}_{BPS}$ para $\gamma = 1/50, 1/25, 1/15, 1/10, 1/5, 1/2, 9/10$ e $m = 2\gamma\sqrt{2}$.

MODELO DE DESER-JACKIW-CHERN-SIMONS-HIGGS

B.1 Obtenção da equação do campo de Higgs

Para retornar-mos a equação do campo de Higgs

$$D_i D_i \phi + e^2 (A_0)^2 \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0 \quad (\text{B.1})$$

que com auxílio da Lei de Gauss

$$A_0 = \frac{1}{2e^2 \Delta} \frac{(\nabla^2 - \kappa \Delta) B}{|\phi|^2} \quad (\text{B.2})$$

assume a forma

$$D_i D_i \phi + \frac{1}{4e^2 \Delta^2} \frac{[(\nabla^2 - \kappa \Delta) B]^2}{|\phi|^4} \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0, \quad (\text{B.3})$$

operamos D_{\mp} na condição de auto-dualidade, chegando portanto a

$$D_i D_i \phi = \mp i [D_1, D_2] \phi \quad (\text{B.4})$$

com $[D_1, D_2]$ sendo o comutador de D_1 com D_2 e expresso como

$$[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1, \quad (\text{B.5})$$

agora resolvendo essa operação para o comutador, teremos este mesmo da seguinte maneira

$$[D_1, D_2] \phi = -ieB\phi \quad (\text{B.6})$$

que substituída na equação (B.4) resulta

$$D_i D_i \phi = \mp eB\phi. \quad (\text{B.7})$$

Para encontrar a derivada do potencial primeiro iremos integra-lo

$$\int d^2 \mathbf{x} V = e^4 \Delta^2 \int d^2 \mathbf{x} |\phi(\mathbf{x})|^2 \left[\int d^2 \mathbf{y} \bar{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (v^2 - |\phi(\phi(\mathbf{y}))|^2) \right] \left[\int d^2 \mathbf{z} \bar{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (v^2 - |\phi(\mathbf{z})|^2) \right] \quad (\text{B.8})$$

e derivando essa integral

$$\begin{aligned}
\int d^2\mathbf{x} \frac{\partial V}{\partial \phi^*(\mathbf{w})} &= e^4 \Delta^2 \int d^2\mathbf{x} \phi(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{w}) \left[\int d^2\mathbf{y} \bar{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (v^2 - |\phi(\mathbf{y})|^2) \right] \\
&\quad \left[\int d^2\mathbf{z} \bar{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (v^2 - |\phi(\mathbf{z})|^2) \right] - \left[\int d^2\mathbf{z} \bar{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (v^2 - |\phi(\mathbf{z})|^2) \right] \\
&\quad e^4 \Delta^2 \int d^2\mathbf{x} |\phi(\mathbf{x})|^2 \left[\int d^2\mathbf{y} \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{w}) \phi(\mathbf{y}) \right] \\
&\quad - e^4 \Delta^2 \int d^2\mathbf{x} |\phi(\mathbf{x})|^2 \left[\int d^2\mathbf{y} \bar{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (v^2 - |\phi(\mathbf{y})|^2) \right] \\
&\quad \left[\int d^2\mathbf{z} \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \delta(\mathbf{z} - \mathbf{w}) \phi(\mathbf{z}) \right]
\end{aligned} \tag{B.9}$$

em que os dois últimos termos desta equação são iguais, sendo desta forma

$$\begin{aligned}
\int d^2\mathbf{x} \frac{\partial V}{\partial \phi^*(\mathbf{w})} &= \phi(\mathbf{w}) e^4 \Delta^2 \left[\int d^2\mathbf{y} \bar{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (v^2 - |\phi(\mathbf{y})|^2) \right] \left[\int d^2\mathbf{z} \bar{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (v^2 - |\phi(\mathbf{z})|^2) \right] \\
&\quad - 2\phi(\mathbf{w}) e^4 \Delta^2 \int d^2\mathbf{x} \bar{G}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) |\phi(\mathbf{x})|^2 \left[\int d^2\mathbf{z} \bar{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (v^2 - |\phi(\mathbf{z})|^2) \right]
\end{aligned} \tag{B.10}$$

que mediante as propriedades da função de Green pode ser ainda expressa por

$$\begin{aligned}
\int d^2\mathbf{x} \frac{\partial V}{\partial \phi^*(\mathbf{w})} &= \phi(\mathbf{w}) e^4 \Delta^2 \left[(\nabla^2 - \kappa \Delta)^{-1} (v^2 - |\phi(\mathbf{y})|^2) \right]^2 \\
&\quad - 2\phi(\mathbf{w}) e^4 \Delta^2 (\nabla^2 - \kappa \Delta)^{-1} \left[|\phi(\mathbf{x})|^2 (\nabla^2 - \kappa \Delta)^{-1} (v^2 - |\phi(\mathbf{z})|^2) \right],
\end{aligned} \tag{B.11}$$

por conseguinte, através do da equação BPS do campo magnético

$$B = \pm 2\Delta^2 e^3 (\nabla^2 - \kappa \Delta)^{-1} \left[|\phi(\mathbf{x})|^2 (\nabla^2 - \kappa \Delta)^{-1} (v^2 - |\phi(\mathbf{z})|^2) \right] \tag{B.12}$$

a equação (B.11) com a substituição de (B.12) no segundo membro desta mesma à torna

$$\int d^2\mathbf{x} \frac{\partial V}{\partial \phi^*(\mathbf{w})} = \phi(\mathbf{w}) e^4 \Delta^2 \left[(\nabla^2 - \kappa \Delta)^{-1} (v^2 - |\phi(\mathbf{w})|^2) \right]^2 \mp eB\phi(\mathbf{w}) \tag{B.13}$$

e ainda da BPS (B.12) podemos tirar a seguinte relação

$$\pm \frac{(\nabla^2 - \kappa \Delta) B}{2\Delta^2 e^3 |\phi(\mathbf{w})|^2} = (\nabla^2 - \kappa \Delta)^{-1} (v^2 - |\phi(\mathbf{w})|^2) \tag{B.14}$$

que substituindo esta em (B.13) teremos

$$\int d^2\mathbf{x} \frac{\partial V}{\partial \phi^*(\mathbf{w})} = \phi(\mathbf{w}) \frac{[(\nabla^2 - \kappa \Delta) B]^2}{4\Delta^2 e^2 |\phi(\mathbf{w})|^4} \mp eB\phi(\mathbf{w}), \tag{B.15}$$

e colocando este resultado em (B.1), a equação do campo de Higgs no limite bBPS assume

$$D_i D_i \phi = \mp eB\phi \tag{B.16}$$

ou mesmo

$$D_i D_i \phi = -2\phi \Delta^2 e^4 (\nabla^2 - \kappa \Delta)^{-1} \left[|\phi|^2 (\nabla^2 - \kappa \Delta)^{-1} (v^2 - |\phi|^2) \right]. \tag{B.17}$$