

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**FILIPE DOS SANTOS RIBEIRO**

**Estudo de plasmas magnetizados na eletrodinâmica de  
Maxwell-Carroll-Field-Jackiw**

SÃO LUIS  
2021

FILIPE DOS SANTOS RIBEIRO

## Estudo de plasmas magnetizados na eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como pré-requisito para obtenção do título de Mestre.

**Área de concentração:** Física de Partículas Elementares e Campos.

**Linha de Pesquisa:** Teoria de Campos com violação da simetria de Lorentz em Física de Plasmas.

**Orientador:** Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Junior

SÃO LUIS  
2 0 2 1

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

dos Santos Ribeiro, Filipe.

Estudo de plasmas magnetizados na eletrodinâmica de  
Maxwell-Carroll-Field-Jackiw / Filipe dos Santos Ribeiro.  
- 2021.  
88 f.

Orientador(a): Manoel Messias Ferreira Jr.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em  
Física/ccet, Universidade Federal do Maranhão, UFMA - via  
meet, 2021.

1. Física de Plasmas. 2. Modelo de Appleton. 3.  
Relações de Dispersão. 4. Violação da simetria de  
Lorentz. I. Messias Ferreira Jr, Manoel. II. Título.

# Estudo de plasmas magnetizados na eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como pré-requisito para obtenção do título de Mestre.

**Área de concentração:** Física de Partículas Elementares e Campos.

**Linha de Pesquisa:** Teoria de Campos com violação da simetria de Lorentz em Física de Plasmas.

Aprovada em 17 de julho de 2021.

## Banca Examinadora

---

**Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Jr.** (Orientador)  
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

---

**Prof. Dr. Frederico Elias Passos dos Santos**  
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

---

**Prof. Dr. Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho**  
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

---

**Prof. Dr. Roldão da Rocha Jr**  
Universidade Federal do ABC – UFABC

SÃO LUIS  
2 0 2 1

*À minha família*

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Maria Damiana dos Santos Ribeiro e Benedito Correia Ribeiro, por todo apoio e carinho a mim oferecido durante toda minha vida. Aos meus irmãos, Marcio Samuel e Daniel Ribeiro, por seus exemplos como irmãos mais velhos. A todos os professores do Grupo de Física teórica de Partículas e Campos da UFMA. Ao professor Antônio Pinto Neto, por suas lições e orientações no PET-Física. Aos professores Jerias e Eduardo por sempre estarem dispostos a me ajudar em questões relacionadas à Coordenação e ao Prof. Carlos Alberto pelas horas de conversa e por compartilhar conosco valiosas lições de vida. Ao meu orientador Manoel Messias Ferreira Júnior, por sua orientação e pela confiança depositada em mim num momento crucial da minha vida acadêmica. Aos meus amigos da graduação e pós-graduação: Alexandre (Jihad), Allana Beatrice (Bia), Alex Costa, Lucas, Márcio, Ismael, Luana, Ionara, Gabriel Teobaldo, Marcos César, Alexssandro Lucena, André Cavalcante, Victor Mouchrek e Victor Bruno. Agradeço muito ao Francisco (Chico), que me ofertou grande ajuda na reta final do meu mestrado. Ao CNPq pelo auxílio financeiro. As minhas amigas Taíres de Cássia, Sarah Regina e Taynná Soares, por todos os momentos de diversão e reflexão desde os tempos de Liceu Maranhense. Ao Pedro Diego, um grande companheiro de Física que tem me oferecido ajuda de bom grado, um agradecimento especial. Finalmente, agradeço a uma companheira de longa data, Raissa de Paula Pereira, por estar comigo nos últimos anos, compartilhando afeto e carinho, além de acompanhar cada etapa da minha jornada na Física.

*"Venha até a esquina, você não conhece o futuro que tenho nas  
mãos."*

Milton Nascimento

# Sumário

<b>RESUMO</b>	<b>10</b>
Abstract . . . . .	11
<b>1 Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2 Plasma não magnetizado e Modelo de Appleton</b>	<b>15</b>
2.1 Plasmas não magnetizados . . . . .	15
2.1.1 Modo longitudinal . . . . .	17
2.1.2 Modo transversal . . . . .	18
2.1.3 Índice de refração, propagação e absorção . . . . .	18
2.2 Modelo de Appleton para plasmas magnetizados . . . . .	19
2.2.1 Modo longitudinal . . . . .	22
2.2.2 Modo transversal . . . . .	23
2.2.3 Índices de refração $n_{\pm}$ , propagação e absorção . . . . .	24
2.3 Birrefringência . . . . .	26
2.3.1 Efeito Faraday . . . . .	28
2.3.2 Ângulo de rotação do plano de polarização . . . . .	28
2.3.3 Birrefringência em plasma magnetizado . . . . .	30
<b>3 A eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw</b>	<b>31</b>
3.1 A teoria de MCFJ e o Modelo Padrão Estendido . . . . .	31
3.2 Setor de gauge CPT-ímpar do MPE . . . . .	32
3.3 Simetrias discretas: Operador CPT . . . . .	33
3.4 Equações de onda . . . . .	36
3.5 Equação de onda e relações de dispersão . . . . .	39
3.5.1 Relações de dispersão . . . . .	41
3.6 Birrefringência na eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw . . . . .	42

<b>4</b>	<b>Modelo de Appleton no contexto de MCFJ</b>	<b>46</b>
4.1	Modelo de Appleton modificado pelo termo de CFJ . . . . .	46
4.2	Modos de propagação para vetor de violação tipo-tempo . . . . .	49
4.2.1	Modo longitudinal . . . . .	49
4.2.2	Modo transversal . . . . .	49
4.2.2.1	Índice de refração $n_+^t$ . . . . .	51
4.2.2.2	Índice de refração $n_E$ . . . . .	53
4.2.2.3	Índice de refração $n_-^t$ . . . . .	55
4.2.3	Rotação de Faraday para o caso vetor de fundo tipo-tempo . . . . .	56
4.3	Modos de propagação para vetor de violação tipo-espaço . . . . .	57
4.3.1	Modo longitudinal ( $\mathbf{k} \parallel \tilde{\mathbf{E}}$ ) . . . . .	59
4.3.2	Modo transversal ( $\mathbf{k} \perp \tilde{\mathbf{E}}$ ) . . . . .	60
4.3.2.1	Índice de refração $n_+^s$ ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{K}_{AF}$ ) . . . . .	61
4.3.2.2	Índice de refração $n_-^s$ ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{K}_{AF}$ ) . . . . .	62
4.3.2.3	Índices de refração $n_\pm^s$ ( $\mathbf{k} \perp \mathbf{K}_{AF}$ ) . . . . .	64
4.3.3	Modos de polarização geral . . . . .	64
4.3.4	Rotação de Faraday para o caso vetor de fundo tipo-espaço . . . . .	66
	<b>Apêndices</b>	<b>69</b>
<b>A</b>	<b>Análise da positividade para os índices de refração no caso timelike</b>	<b>70</b>
<b>B</b>	<b>Transformações discretas</b>	<b>73</b>
B.1	Comportamento de algumas grandezas sob operação de paridade . . . . .	73
B.2	Comportamento de algumas grandezas sob reversão temporal . . . . .	75
B.3	Comportamento de algumas grandezas sob conjugação de carga . . . . .	76
<b>C</b>	<b>Equação de movimento MCFJ</b>	<b>78</b>
C.1	Forma indicial . . . . .	78
C.2	Forma vetorial . . . . .	79
<b>D</b>	<b>Forma da matriz de dispersão MCFJ</b>	<b>81</b>
<b>E</b>	<b>Eletrodinâmica em Meios Contínuos</b>	<b>83</b>
	Referências . . . . .	85

# RESUMO

O presente trabalho aborda, de maneira simplificada, o modelo de Appleton para plasmas magnetizados, no contexto da teoria usual de Maxwell e da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ), dotada de um 4-vetor fixo de violação da simetria de Lorentz. Iniciamos revisando os aspectos essenciais da propagação de ondas eletromagnéticas (EM) em plasmas, analisando as relações de dispersão, índice de refração, modos de propagação e o efeito de birrefringência. Na sequência, revisitamos alguns aspectos básicos da eletrodinâmica de Carroll, Field e Jackiw, como a derivação das equações de Maxwell modificadas e das relações de dispersão estendidas, o que conduz à birrefringência no vácuo. Por fim, estudamos o modelo de Appleton no contexto da eletrodinâmica de MCFJ, a fim de verificar os efeitos do termo CPT-ímpar sobre os modos propagantes. Usando o mesmo procedimento, encontramos as relações de dispersão, índice de refração, modos de propagação e o efeito de birrefringência. Destacamos como o termo de CFJ altera os índices de propagação e age os sobre os modos de propagação.

**Palavras-chave:** Modelo de Appleton. Física de Plasmas. Relações de Dispersão. Violação da Simetria de Lorentz.

# Abstract

The present work addresses, in a simplified way, Appleton's model for magnetized plasmas in the context of the usual Maxwell theory and Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ) electrodynamics, endowed with a fixed 4-vector of Lorentz symmetry violation. We begin by reviewing the essential aspects of electromagnetic (EM) wave propagation in plasmas, analyzing the scattering relations, refractive index, propagation modes, and the birefringence effect. In the sequel, we revisit some basic aspects of Carroll, Field, and Jackiw's electrodynamics, such as the derivation of the modified Maxwell equations and extended scattering relations, which leads to birefringence in vacuum. Finally, we study Appleton's model in the context of MCFJ electrodynamics in order to verify the effects of the CPT-odd term on the propagating modes. Using the same procedure, we find the relations of scattering, refractive index, propagating modes, and the birefringence effect. We highlight how the CFJ term alters the propagation indices and acts on the propagating modes.

**Key-words:** Appleton's model. Plasma Physics. Scattering relations. Lorentz symmetry violation.

# Capítulo 1

## Introdução

O plasma é geralmente considerado o quarto estado da matéria, composto por partículas eletricamente carregadas e livres, com dinâmica regida por forças eletromagnéticas [1]. Apesar de serem muito semelhantes à fase gasosa por não apresentarem forma definida, os plasmas diferem deste estado em diversos fatores, como na condutividade e nas interações, caracterizando-se como um estado distinto da matéria. O nome plasma foi concebido em 1927 por Irving Langmuir (1881-1957), enquanto este estudava equipamentos eletrônicos baseados em gases ionizados. Percebeu que a maneira como o fluido eletrificado carregava elétrons de alta velocidade, íons e impurezas, poderia ser comparada aos modos com que o plasma sanguíneo carregava glóbulos brancos e vermelhos e germens [2], [3].

A física de plasmas possui larga aplicação em diversas áreas da física e da química, sendo uma ferramenta de grande importância para compreensão de vários fenômenos, como por exemplo, a aurora boreal. A concentração de partículas emitidas pelo sol no chamado cinturão de Van Allen<sup>1</sup> é outro exemplo de aplicação da física de plasmas. Gases ionizados e "ventos"(correntes de plasmas), emanados por estrelas, comportam-se como plasmas. Na astrofísica, a física de plasmas tem grande aplicação, pois em regiões do espaço onde há campos magnéticos, partículas emanadas por estrelas juntamente com radiação estelar, são aprisionadas nas linhas de campo, formando nuvens de gás ionizado (plasma). Por isso, o estado de plasma é o mais presente entre toda matéria encontrada no Universo [2], [4]. O estudo das nebulosas, compreendido na física de nuvens astrofísicas, assim como a física solar, são exemplos de sistemas onde a compreensão dos plasmas torna-se indispensável.

Há também os plasmas artificiais, que possuem várias aplicações tecnológicas por conta de sua boa condutividade elétrica, decorrente de um número suficiente de portadores de cargas em sua constituição. Plasmas Tecnológicos constituem uma área de pesquisa em grande crescimento, com formação de novos grupos de pesquisa nos últimos anos [5].

Em 1939, Hans Albrecht Bethe (1906-2005) [6], [7], mostrou como a fusão nuclear podia produzir a energia responsável pelo brilho (energia emanada) das estrelas, o que despertou o

---

<sup>1</sup>Região da atmosfera permeada por partículas energéticas carregadas, que são aprisionadas pela magnetosfera terrestre. Acredita-se que parte destas partículas provém vento solar e uma outra parte dos raios cósmicos.

interesse de vários cientistas, que em seguida buscaram tornar possível um processo controlado de fusão nuclear, viabilizando uma nova fonte de energia a ser utilizada. Para isso foi criado o Tokamak, um reator nuclear que aprisiona o plasma resultante da fusão, composto por isótopos pesados de hidrogênio, para possibilitar o seu estudo em altas temperaturas. Tal fato concede à física de plasmas um papel importante na busca de fontes alternativas de energia.

O estudo da propagação de ondas eletromagnéticas na frequência de rádio levou à descoberta da ionosfera, camada natural de plasma localizada acima da atmosfera, que reflete as ondas de rádio, podendo também absorvê-las. Tal investigação revelou as características dos diversos modos propagantes em plasmas, podendo ser longitudinais ou transversais às linhas de campo magnético.

Um dos temas recorrentes dentro do estudo de propagação de ondas em plasmas é o modelo de Appleton, uma formulação teórica criada por Edward Victor Appleton (1892-1965) para descrever a reflexão de ondas de rádio pela atmosfera [8, 9]. Anteriormente ao tratamento teórico, Appleton também fez investigações experimentais sobre este fenômeno [10, 11, 12], onde estudava a intensidade dos sinais das ondas de rádio recebidas em Cambridge vindas da estação da B.B.C em Londres. Imerso neste contexto, juntamente com Miles Barnett (1901-1979), desenvolveram técnicas para estudar os sinais refletidos e estipular a altura de reflexão (altura da camada refletora).

A existência de uma camada refletora (camada ionizada) na atmosfera foi postulada em 1902 por Arthur Edwin Kennely (1861-1939) e Oliver Heaviside (1850-1925) [13], quando estes tentavam explicar a comunicação via ondas de rádio a longa distâncias. No entanto, a comprovação experimental de tal camada só veio a ser realizada posteriormente por Appleton, em 1935, pela qual foi laureado com o Prêmio Nobel de Física em 1947. Em suas primeiras observações Appleton e Barnett constataram que a intensidade dos sinais de rádio recebidos em Cambridge começavam a variar no início do período noturno, alterando-se ao longo de toda noite, ao passo que ao longo do dia mantinha-se sem variações. Propondo-se a verificar se tais ondas eram de fato refletidas, montaram um aparato experimental que variava continuamente o comprimento de onda das ondas transmitidas e estudaram a propagação a curtas e longas distâncias. Além disso, verificaram que a camada ionizada teria alturas diferentes ao longo do dia ou noite, o que foi mais tarde explicado pela atuação do vento solar ao atingir a atmosfera terrestre<sup>2</sup> [14].

A proposta geral deste trabalho é analisar a propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas magnetizados, abordados pelo modelo de Appleton. Neste contexto, é essencial o conhecimento do formalismo de Fourier, que facilita a determinação dos modos propagantes e das relações de dispersão. São tomadas também as equações de Maxwell em meios materiais, que juntamente com a força de Lorentz são pontos de partida para a obtenção dos índices de refração. No entanto, é também interessante fazer uso de outros tipo de eletrodinâmicas neste contexto, como feito por Fernando Haas e Helayël Neto [16], que realizaram o

---

<sup>2</sup>A história sobre E. V. Appleton e a descoberta da Ionosfera é rica em detalhes, que são comentados no trabalho de J. A. Ratcliff [15].

estudo de propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas através de uma eletrodinâmica logarítmica.

Existem outras extensões de eletrodinâmicas, como as que violam a simetria de Lorentz. A simetria de Lorentz é um dos pilares da Física e do Modelo Padrão (MP). Foi introduzida por Einstein em 1905, através do Princípio da Relatividade, um dos postulados da Teoria da Relatividade Restrita (TRR): *As Leis da Física são as mesmas em todos sistemas inerciais. Não existe nenhum sistema inercial preferencial.*

A possibilidade de quebra espontânea da simetria de Lorentz surgiu em estudos de Gravitacão Quântica, no contexto das teorias de cordas [27, 28, 29, 30]. Baseado nesta ideia geral, Alan Kostelecky e D. Colladay desenvolveram o Modelo Padrão Estendido (MPE) [31], [32], uma extensão do Modelo Padrão que reúne todas as possibilidades de quebra de simetria em todos os setores do MP, descritas através de acoplamentos com tensores de fundo fixos.

A eletrodinâmica Carrol-Field-Jackiw (CFJ) [21], desenvolvida em 1990, foi o primeiro tratamento que levou em consideração a quebra de simetria de Lorentz na eletrodinâmica clássica. Esta teoria consiste na Lagrangeana de Maxwell suplementada por um termo CPT-ímpar,  $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu A^\nu F^{\alpha\beta}$ , com estrutura 4-dimensional análoga ao termo de Chern-Simons [22, 23, 24], onde  $(K_{AF})^\mu$  é um 4-vetor fixo (responsável pela violação da simetria de Lorentz).

Recentemente, Qiu, Cao e Huang [25] adotaram esta eletrodinâmica como teoria efetiva para explicar fenômenos anômalos na matéria condensada, associando os termos adicionais advindos da teoria de CFJ a efeitos como o *chiral magnetic effect* - CME [26], que surge devido assimetria entre o número de densidade de férmios de quiralidade esquerda e direita (*left-handed* e *right-handed*) na presença de um campo magnético. Este trabalho conferiu aos parâmetros de violação uma realidade física na descrição de fenômenos de transporte da Física da matéria condensada.

Em nosso estudo propomos o estudo do modelo de Appleton no cenário de violação da simetria de Lorentz, adotando a eletrodinâmica modificada de Carrol-Field-Jackiw (CFJ), que será melhor apresentada no Capítulo 3. A seguir, o Capítulo 4 abordará o estudo de plasmas magnetizados adotando a eletrodinâmica de Maxwell-Carrol-Field-Jackiw, onde analisaremos as relações de dispersão modificadas e as influências do parâmetro de violação sobre o índice de refração. Basicamente um estudo das influências da quebra de simetria nos modos de propagação. Ao final, fazem-se considerações sobre os resultados obtidos.

## Capítulo 2

# Plasma não magnetizado e Modelo de Appleton

O estudo de propagação de ondas eletromagnéticas (EM) em plasmas surgiu de diferentes contextos. Um deles foi o estudo de reflexão de ondas de rádio na ionosfera. Isto era algo de extremo interesse na primeira metade do século XX, quando alguns cientistas tentaram compreender detalhes sobre a real natureza da atmosfera terrestre. Arthur Edwin Kennelly (1861-1939) postulou em 1902 [13] que a atmosfera terrestre devia conter uma camada condutora, que refletia ondas de rádio como um espelho. Posteriormente, estudos realizados por Edward V. Appleton (1892-1965) [10], [11], [12], entre 1924 e 1927, provaram a existência de uma camada condutora na atmosfera, que foi chamada de Ionosfera. O estudo teórico de tais reflexões foi desenvolvido por Appleton [8], [9], consistindo em uma modelagem para Ionosfera como uma camada composta por elétrons e íons, que moviam-se sob influência de um campo magnético externo.

### 2.1 Plasmas não magnetizados

Inicialmente, vamos considerar o caso mais simples, que consiste em estudar plasmas na presença de campo elétrico. Neste cenário, é adotado um campo elétrico oscilante  $\mathbf{E} \sim \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$ , proveniente de uma onda eletromagnética, a fim de estudar os modos de propagação permitidos para o sistema. Neste trabalho sempre desprezaremos o movimento de íons, que são naturalmente mais pesados que elétrons, o que permite trabalharmos com apenas um tipo de partícula. Considerando que as partículas estejam dissociadas umas das outras, e de forma que não interagem entre si, partimos da segunda lei de Newton e escrevemos a equação de movimento para uma partícula de massa  $m$  e carga  $q$  do sistema:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q \mathbf{E} \rightarrow \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{m} \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (2.1.1)$$

As partículas do meio oscilam na mesma frequência do campo elétrico, de modo que  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\omega) e^{i\omega t}$ , o que nos leva a

$$-\omega^2 \mathbf{r}_0(\omega) = \frac{q}{m} \mathbf{E}_0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}_0(\omega) = -\frac{q}{m\omega^2} \mathbf{E}_0. \quad (2.1.2)$$

Multiplicando a expressão acima por  $n_0 q / \varepsilon_0$ , onde  $n_0$  é a densidade de partículas e  $\varepsilon_0$  a permissividade elétrica do vácuo, temos

$$\frac{n_0}{\varepsilon_0} q \mathbf{r}_0(\omega) = -\frac{n_0 q^2}{\varepsilon_0 m \omega^2} \mathbf{E}_0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{P}(\omega) = -\varepsilon_0 \frac{n_0 q^2}{\varepsilon_0 m \omega^2} \mathbf{E}(\omega), \quad (2.1.3)$$

sendo  $\mathbf{P}(\omega) = n_0 \mathbf{p}(\omega)$  a polarização do meio e  $\mathbf{p}(\omega) = q \mathbf{r}(\omega)$  o momento de dipolo elétrico de uma partícula. A polarização do meio é relacionada ao campo elétrico por meio da relação  $\mathbf{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}(\omega)$ , de modo que a susceptibilidade elétrica  $\chi(\omega)$  possa ser expressa como

$$\chi(\omega) = -\frac{n_0 q^2}{\varepsilon_0 m \omega^2}. \quad (2.1.4)$$

Podemos também escrever a permissividade do sistema,  $\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_0 (1 + \chi)$ :

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right), \quad (2.1.5)$$

onde

$$\omega_p^2 = n_0 q^2 / \varepsilon_0 m, \quad (2.1.6)$$

é a frequência de plasma. Esta é uma frequência característica do meio em questão, que mede a oscilação natural da densidade de partículas no plasma.

Para estudar a propagação de ondas eletromagnéticas em meios dispersivos, devemos lançar mão das equações de Maxwell em sua forma macroscópica [18], [20]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho \quad (2.1.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (2.1.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad (2.1.10)$$

juntamente com as relações constitutivas  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ . Neste capítulo trabalharemos no Sistema Internacional de Unidades (SI). Associando uma dependência do tipo Fourier para os campos  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ , e corrente  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ ,

escrevemos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{D}}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad (2.1.11)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{B}}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{H}}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad (2.1.12)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{J}}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}. \quad (2.1.13)$$

Com isso, as derivadas obedecem à seguinte prescrição operatorial:

$$\nabla \rightarrow i\mathbf{k} \text{ e } \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega, \quad (2.1.14)$$

de maneira que reescrevemos as Eqs. (2.1.8) e (2.1.10) como

$$i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}} + i\omega\tilde{\varepsilon}(\omega)\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}, \quad (2.1.15)$$

$$i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} - i\omega\tilde{\mu}(\omega)\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{0}, \quad (2.1.16)$$

onde consideramos  $\mathbf{J} = 0$ . Usando as relações constitutivas no espaço de Fourier,  $\mathbf{D}(\omega) = \tilde{\varepsilon}(\omega)\mathbf{E}(\omega)$  e  $\mathbf{B}(\omega) = \mu(\omega)\mathbf{H}(\omega)$ , e tomando o produto vetorial do vetor de onda  $\mathbf{k}$  com a Eq. (2.1.16), temos

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} = \omega\tilde{\mu}(\omega)\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}}, \quad (2.1.17)$$

e substituindo-a em (2.1.15), obtemos:

$$\frac{1}{\omega\tilde{\mu}(\omega)}\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} + \omega\tilde{\varepsilon}(\omega)\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}. \quad (2.1.18)$$

Podemos também expressar a equação acima como

$$\mathbf{k} \left( \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}} \right) - \mathbf{k}^2 \tilde{\mathbf{E}} = -\omega^2\tilde{\mu}(\omega)\tilde{\varepsilon}(\omega)\tilde{\mathbf{E}}. \quad (2.1.19)$$

Retornando à permissividade  $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ , dada pela Eq. (2.1.5), a Eq. (2.1.19) nos permite estudar os modos de propagação permitidos pelo sistema.

## 2.1.1 Modo longitudinal

O modo longitudinal corresponde a uma configuração de polarização do campo  $\mathbf{E}$  paralela ao vetor de onda  $\mathbf{k}$ , ou seja,  $\mathbf{k} \parallel \tilde{\mathbf{E}}$ . Trata-se de uma configuração excepcional, que não ocorre para ondas E.M no vácuo, como bem conhecido. Deste modo, a onda deve "propagar-se" na mesma direção do campo elétrico. Com isso, vamos adotar  $\mathbf{k} = |\mathbf{k}|\hat{z}$  e  $\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{E}_z\hat{z}$ , de forma que a Eq. (2.1.19), considerando  $\tilde{\mu}(\omega) = \mu_0$ , fornece:

$$\mathbf{k} \left( |\mathbf{k}|\tilde{E}_z \right) - \mathbf{k}^2\tilde{E}_z = -\omega^2\mu_0\tilde{\varepsilon}(\omega)\tilde{E}_z, \quad (2.1.20)$$

$$0 = -\omega^2\mu_0\tilde{\varepsilon}(\omega)\tilde{E}_z. \quad (2.1.21)$$

Para que  $\tilde{E}_z \neq 0$ , devemos impor  $\tilde{\varepsilon}(\omega) = 0$ , resultando, pela Eq. (2.1.5), em

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0 \rightarrow \omega^2 = \omega_p^2. \quad (2.1.22)$$

Isto mostra que, em um plasma não magnetizado é permitida a onda longitudinal com frequência igual à  $\omega_p$  (frequência de plasmas) [2],[18]. Observe que este modo possui velocidade de grupo ( $v_g = d\omega/dk$ ) nula, uma vez que a relação (2.1.22) não depende de  $k$ . Significa que este modo não se propaga. Este é conhecido como modo de oscilações de plasmas.

## 2.1.2 Modo transversal

Investigaremos agora o modo transversal, caracterizado por apresentar campo  $\mathbf{E}$  ortogonal à direção de propagação, ou seja,  $\mathbf{k} \perp \tilde{\mathbf{E}}$ . Assim, teremos  $\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0$  e a Eq. (2.1.19) fornece:

$$[\mathbf{k}^2 - \omega^2 \mu_0 \tilde{\varepsilon}(\omega)] \tilde{\mathbf{E}} = 0. \quad (2.1.23)$$

Para uma solução não trivial considera-se  $\tilde{\mathbf{E}} \neq 0$ , o que nos leva à solução

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \tilde{\varepsilon}(\omega), \quad (2.1.24)$$

que, usando a Eq. (2.1.5), resulta em

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad \text{ou} \quad n^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2}, \quad (2.1.25)$$

onde usamos  $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$  e a definição para o índice de refração,  $n = ck/\omega$ . Esta é a relação de dispersão para o modo de propagação transversal.

## 2.1.3 Índice de refração, propagação e absorção

Em meios dispersivos, podem ocorrer propagação ou absorção. A propagação ocorre quando o índice de refração (ou vetor de onda) é real, ou seja, para intervalos de frequência em que  $n(\omega) \in \mathbb{R}$ , condição que garante um vetor de onda real, o que indica uma onda propagante (proporcional ao termo  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ ). O fenômeno de absorção ocorre quando o índice de refração torna-se imaginário,  $n(\omega) \in \mathbb{C}$ , seja o meio dispersivo ou não dispersivo. Para  $n$  complexo corresponde um vetor de onda complexo,  $k \in \mathbb{C}$ , que gera uma onda evanescente (proporcional ao termo  $e^{-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ ), representando a impossibilidade de propagação no meio.

Note que, na Eq. (2.1.25), a frequência de plasmas ( $\omega_p$ ) define um limite que demarca a separação entre uma região em que  $n \in \mathbb{R}$  e outra em que  $n \in \mathbb{C}$ , o que define intervalos de propagação ou absorção da onda eletromagnética, vide Figura 2.1:

- (i) Para  $\omega < \omega_p$  não ocorre propagação de ondas EM no plasma, pois temos  $n^2 < 0$ , levando a  $n \in \mathbb{C}$ .

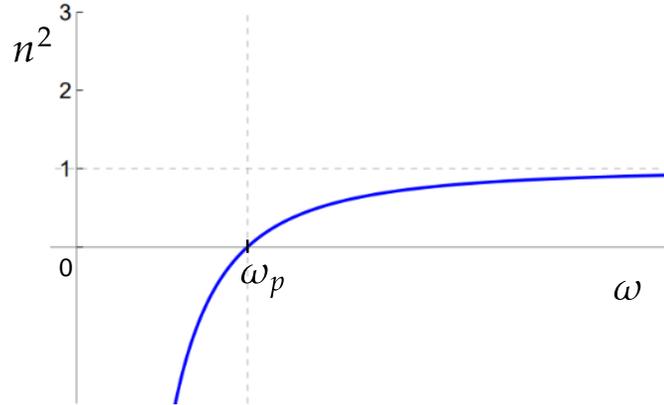


Figura 2.1: Gráfico para  $n^2$ .

(ii) Se  $\omega > \omega_p$ , temos  $n \in \mathbb{R}$ , ocorrendo propagação de ondas EM no plasma.

Vale observar que, para o regime de frequências em que  $\omega \gg \omega_p$ , a Eq. (2.1.25) recai em  $n^2 = 1$  ou  $\omega^2 = c^2 k^2$ , a relação de dispersão para o vácuo. Portanto, neste regime de frequências, a onda se propaga como estivesse no vácuo, sem sofrer efeitos do meio, como a dispersão. Como exemplo, podemos mencionar a luz visível na ionosfera, onde a densidade de partículas é aproximadamente  $n_0 \approx 10^{12} m^{-3}$ , o que leva a uma frequência de plasma  $\omega_p \approx 10^6 Hz$ , uma ordem de magnitude muito abaixo do espectro visível ( $10^{15} Hz$ ).

Outro detalhe interessante, que está relacionado ao item (i), é que tal regime de frequências é extremamente útil para comunicações via rádio. Uma onda de rádio pode ter de  $10 Hz$  a  $10^9 Hz$ , sendo geralmente utilizadas para meios de comunicação ondas na faixa de  $10^6 Hz$ . Tais ondas, emitidas de um ponto aqui da Terra, são refletidas de volta à superfície ao atingir a ionosfera, possibilitando que a onda emitida atinja receptores localizados em outras partes do globo [19].

## 2.2 Modelo de Appleton para plasmas magnetizados

Aqui apresentaremos o chamado modelo de Appleton para plasmas magnetizados. Vamos realizar um estudo simplificado, considerando ondas transversais em um plasma rarefeito, composto por partículas de carga  $q$ , cuja amplitude de movimento seja pequena de modo a dispensarmos efeitos de colisões [17], [18]. Adotaremos um campo magnético externo uniforme e intenso, disposto ao longo de um eixo -  $z$ :  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$ . Neste cenário, cada partícula está submetida à seguinte força:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{m} \left( \mathbf{E} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}_0 \right), \quad (2.2.1)$$

onde  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico pertencente à onda eletromagnética. Também foi desprezada a influência do campo magnético da onda EM frente ao campo uniforme  $\mathbf{B}_0$ . Propondo

transformadas de Fourier para a posição  $\mathbf{r}$  e para o campo  $\mathbf{E}$ ,

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{r}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad \text{e} \quad \mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2.2.2)$$

teremos para os termos de derivada temporal a prescrição

$$\frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} \rightarrow -\omega^2 \mathbf{r}(\omega), \quad \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \rightarrow -i\omega \mathbf{r}(\omega), \quad (2.2.3)$$

que nos leva a

$$-\omega^2 \mathbf{r}(\omega) = \frac{q}{m} \mathbf{E}(\omega) - \frac{i\omega}{m} q \mathbf{r}(\omega) \times \mathbf{B}_0. \quad (2.2.4)$$

Multiplicando a equação acima pelo densidade de partículas  $n_0$ , e também por  $q$ , obtém-se:

$$-\omega^2 n_0 q \mathbf{r}(\omega) = \frac{n_0 q^2}{m} \mathbf{E}(\omega) - \frac{i\omega}{m} n_0 q^2 \mathbf{r}(\omega) \times \mathbf{B}_0, \quad (2.2.5)$$

$$-\omega^2 \mathbf{P}(\omega) = \varepsilon_0 \omega_p^2 \mathbf{E}(\omega) - i \frac{q\omega}{m} \mathbf{P}(\omega) \times \mathbf{B}_0, \quad (2.2.6)$$

sendo  $\omega_p^2 = n_0 q^2 / \varepsilon_0 m$  a frequência de plasmas,  $\mathbf{P}(\omega) = n_0 \mathbf{p}(\omega)$  a polarização do meio, onde  $\mathbf{p} = q \mathbf{r}$  é momento de dipolo elétrico de apenas uma única partícula de carga  $q$  [17]. A Eq. (2.2.6) pode ser escrita na forma indicial,

$$-\omega^2 P^k = \varepsilon_0 \omega_p^2 E^k - i \frac{q\omega}{m} \epsilon_{kmn} P^m B_0^n, \quad (2.2.7)$$

onde foi ocultada a dependência de  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{E}$  em termos de  $\omega$ . Sabendo que o campo magnético está alinhado à direção  $z$ , este só contribui com índice 3 no último termo de (2.2.7), de forma que podemos escrever um sistema de três equações, para as três componentes de  $\mathbf{P}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , ou seja:

$$-\omega^2 P^{(1)} = \varepsilon_0 \omega_p^2 E^{(1)} - i \frac{q\omega}{m} \epsilon_{123} P^{(2)} B_0^{(3)}, \quad (2.2.8)$$

$$-\omega^2 P^{(2)} = \varepsilon_0 \omega_p^2 E^{(2)} - i \frac{q\omega}{m} \epsilon_{213} P^{(1)} B_0^{(3)}, \quad (2.2.9)$$

$$-\omega^2 P^{(3)} = \varepsilon_0 \omega_p^2 E^{(3)} - i \frac{q\omega}{m} \epsilon_{3m3} P^{(m)} B_0^{(3)}, \quad (2.2.10)$$

que recaem em

$$-\omega^2 P_x = \varepsilon_0 \omega_p^2 E_x - i\omega \omega_c P_y, \quad (2.2.11)$$

$$-\omega^2 P_y = \varepsilon_0 \omega_p^2 E_y + i\omega \omega_c P_x, \quad (2.2.12)$$

$$-\omega^2 P_z = \varepsilon_0 \omega_p^2 E_z, \quad (2.2.13)$$

onde usamos as propriedades do símbolo de Levi-Civita e definimos a frequência de cícloton:

$$\omega_c = qB_0/m. \quad (2.2.14)$$

Esta é frequência angular correspondente à orbita das partículas em torno das linhas do campo magnético  $\mathbf{B}_0$ . Para buscar uma expressão para a susceptibilidade elétrica do sistema, devemos escrever cada componente da polarização em função das componentes do campo elétrico, uma vez que a relação isotrópica  $\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E}$  pode ser generalizada na forma tensorial  $P^i = \varepsilon_0\chi_{ij}E^j$ , onde  $\chi_{ij}$  representa o tensor de susceptibilidade [17],[20]. Tomando as Eqs. (2.2.11) e (2.2.12), podemos isolar a componente  $P_x$  em termos das componentes do campo elétrico:

$$P_x = -\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} E_x - i\varepsilon_0 \frac{\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} E_y. \quad (2.2.15)$$

Substituindo este resultado na Eq. (2.2.12), obtemos uma relação similar para a componente  $P_y$ :

$$P_y = \varepsilon_0 \frac{i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} E_x - \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} E_y. \quad (2.2.16)$$

De posse das expressões (2.2.13), (2.2.15) e (2.2.16), podemos montar uma equação matricial para a polarização,  $P^i = \varepsilon_0\chi_{ij}E^j$ , sendo esta:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} -\frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & -i\frac{\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & 0 \\ \frac{i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & -\frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}. \quad (2.2.17)$$

A matriz  $3 \times 3$  na Eq. (2.2.17) é a susceptibilidade elétrica,  $\chi_{ij}$ , que pode ser usada para obter a permissividade elétrica  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  do sistema. Para isso, utilizamos a relação para o deslocamento elétrico:

$$D^i = \varepsilon_0 E^i + \varepsilon_0 \chi_{ij} E^j = \varepsilon_0 (\delta_{ij} + \chi_{ij}) E^j, \quad (2.2.18)$$

$$D^i = \tilde{\varepsilon}_{ij} E^j, \quad (2.2.19)$$

onde a permissividade é dada por

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_0 (\delta_{ij} + \chi_{ij}). \quad (2.2.20)$$

A partir de (2.2.17), podemos escrever a forma explícita de  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ :

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & -i\frac{\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & 0 \\ \frac{i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{bmatrix}. \quad (2.2.21)$$

Este é o chamado tensor de permissividade [2], [17], que contém as principais propriedades de um plasma magnetizado, revelando como o meio reage à presença dos campos elétrico e magnético. Podemos observar que a presença do campo magnético  $\mathbf{B}_0$  estabelece anisotropia no sistema, o que se manifesta através da diferença do setor  $2 \times 2$  (da matriz (2.2.21)), que isola as componentes  $x$  e  $y$  (ortogonais ao campo magnético) em relação ao elemento  $\tilde{\epsilon}_{33}$ . Note que fazendo  $\mathbf{B}_0 = 0$ , teríamos  $\omega_c = 0$ , e a Eq. (2.2.21) apresentaria componentes não nulas apenas na diagonal principal,

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{bmatrix}, \quad (2.2.22)$$

uma forma de tensor de permissividade típica de meios isotrópicos. O tensor de permissividade (2.2.21) constitui uma ferramenta fundamental no estudo de propagação de ondas eletromagnéticas em qualquer meio material (eletrodinâmica de meios contínuos), assim como em plasmas diversos. A permissividade (2.2.21) é própria para plasmas na presença de campo magnético (plasmas magnetizados), sendo o ponto de partida para discussão das propriedades destes sistemas.

No caso em que vale a relação (2.2.19), as equações de Maxwell fornecem uma equação de onda para o campo elétrico na forma tensorial. neste caso, a Eq. (2.1.19) é substituída por :

$$k^i \left( k^j \tilde{E}^j \right) - \mathbf{k}^2 \tilde{E}^i = -\omega^2 \tilde{\mu}(\omega) \tilde{\epsilon}_{ij} \tilde{E}^j, \quad (2.2.23)$$

que utilizaremos para estudar os modos propagantes para plasmas magnetizados.

## 2.2.1 Modo longitudinal

O modo longitudinal corresponde a uma configuração de campo  $\mathbf{E}$  paralela ao vetor de onda  $\mathbf{k}$ , ou seja,  $\mathbf{k} \parallel \tilde{\mathbf{E}}$ . Deste modo, a onda deve propagar-se na mesma direção do campo elétrico. Com isso, vamos adotar  $\mathbf{k} = |\mathbf{k}| \hat{z}$  e  $\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{E}_z \hat{z}$ , de forma que a Eq. (2.2.23), considerando  $\tilde{\mu}(\omega) = \mu_0$ , fornece:

$$|\mathbf{k}| \left( |\mathbf{k}| \cdot \tilde{E}_z \right) - \mathbf{k}^2 \tilde{E}_z = - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \frac{\tilde{\epsilon}_{33}}{\epsilon_0} \tilde{E}_z, \quad (2.2.24)$$

$$0 = - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \frac{\tilde{\epsilon}_{33}}{\epsilon_0} \tilde{E}_z. \quad (2.2.25)$$

Para que  $\tilde{E}_z \neq 0$ , devemos impor  $\tilde{\epsilon}_{33} = 0$ , resultando, pela Eq. (2.2.21), em

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0 \rightarrow \omega^2 = \omega_p^2. \quad (2.2.26)$$

Isto mostra que o modo longitudinal em um plasma magnetizado vibra na mesma frequên-

cia de um plasma não magnetizado [2], [18].

## 2.2.2 Modo transversal

Investigaremos agora o modo transversal, caracterizado por apresentar campo  $\mathbf{E}$  ortogonal à direção de propagação, ou seja,  $\mathbf{k} \perp \tilde{\mathbf{E}}$ . Para melhor desenvolvimentos dos cálculos, fixaremos a direção de propagação da onda ao longo do eixo -  $z$ , fazendo  $\mathbf{k} = |\mathbf{k}| \hat{z}$ , de modo que o campo elétrico seja escolhido como  $\tilde{\mathbf{E}} = (\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, 0)$ , possuindo apenas componentes transversas ao vetor  $\mathbf{k}$ . Usando  $k^j E^j = 0$  na Eq. (2.2.23), temos:

$$-\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \mathbf{k}^2 \tilde{E}^i = -\frac{\tilde{\epsilon}_{ij}}{\epsilon_0} \tilde{E}^j, \quad (2.2.27)$$

ou seja:

$$\left[\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \mathbf{k}^2 \delta_{ij} - \frac{\tilde{\epsilon}_{ij}}{\epsilon_0}\right] \tilde{E}^j = 0. \quad (2.2.28)$$

A Eq. (2.2.28) pode ser lida numa forma matricial, obtida usando o tensor (2.2.21):

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \mathbf{k}^2 - 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & \frac{i\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \\ -\frac{i\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \mathbf{k}^2 - 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{bmatrix} = 0, \quad (2.2.29)$$

ou simplesmente,

$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0. \quad (2.2.30)$$

A matriz  $\tilde{\mathbf{A}}$  é a chamada *matriz de dispersão* [4], que contém as informações necessárias para encontrar as relações de dispersão para os modos transversais da teoria. A Eq. (2.2.29) possui solução não trivial quando o determinante da matriz de dispersão se anula:  $\det \tilde{\mathbf{A}} = 0$ . Usando-se a definição para o índice de refração  $n = ck/\omega$  [17], obtemos:

$$\left\{n^2 - 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)}\right\}^2 - \left\{\frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)}\right\}^2 = 0, \quad (2.2.31)$$

$$n^2 = 1 - \left[\frac{(\omega \mp \omega_c) \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)}\right], \quad (2.2.32)$$

que fornece expressões para o índice de refração:

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)} \quad \text{ou} \quad n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}, \quad (2.2.33)$$

congregáveis em apenas uma expressão:

$$n_{\pm}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)}. \quad (2.2.34)$$

Veremos a seguir que cada expressão para o índice de refração ( $n_+$  ou  $n_-$ ) está associada a um modo de propagação transversal de polarização distinta.

### 2.2.3 Índices de refração $n_{\pm}$ , propagação e absorção

A Eq. (2.2.34) na verdade fornece quatro soluções para o índice de refração  $n$ . No entanto, neste trabalho, levaremos em consideração apenas índices de refração positivos ou que apresentem intervalos de positividade. Por comodidade, trabalharemos com as expressões quadráticas apresentadas em (2.2.34) e quando nos referirmos a  $n_+$  e  $n_-$ , estaremos indicando apenas suas soluções positivas, o que significa ter

$$n_{\pm} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)}}, \quad (2.2.35)$$

como uma função real.

Como já comentado, em meios dispersivos podem ocorrer os efeitos de propagação e absorção, observados quando  $n \in \mathbb{R}$  ou  $n \in \mathbb{C}$ , respectivamente. Logo, ocorre propagação para um plasma magnetizado nos intervalos de frequência em que  $n_{\pm}^2 > 0$ , ao passo que ocorre absorção para intervalos onde  $n_{\pm}^2 < 0$ .

O comportamento dos índices quadráticos  $n_+^2$  e  $n_-^2$ , dados na Eq. (2.2.34), está ilustrado nos gráficos da Figura 2.2, onde também é mostrado o comportamento da frequência  $\omega$  em função do vetor de onda  $k$ . Os índices  $n_+^2$  e  $n_-^2$  possuem raízes diferentes, ou seja, tocam no eixo -  $\omega$  em posições distintas. As raízes positivas relativas a  $n_+$  e  $n_-$  estão apresentadas abaixo:

$$\omega_+ = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} - \omega_c \right), \quad (2.2.36)$$

$$\omega_- = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} + \omega_c \right), \quad (2.2.37)$$

sendo chamadas de frequências de corte (*cutoff frequencies*), pois estabelecem frequências limítrofes para os efeitos de absorção e propagação. Analisando a expressão (2.2.34), o comportamento do plasma pode ser descrito de acordo com os intervalos seguintes:

- (i)  $0 < \omega < \omega_+$ : ocorre absorção para o modo associado ao índice de refração  $n_+$ , uma vez que  $n_+^2 < 0$  e  $n_+ \in \mathbb{C}$  neste intervalo. O modo relacionado a  $n_-$  se propaga neste intervalo.
- (ii)  $0 < \omega < \omega_c$ : propaga a onda associada ao índice de refração  $n_-$ , já que temos  $n_-^2 > 0$ .
- (iii)  $\omega_c < \omega < \omega_-$ : temos absorção para o modo correspondente a  $n_-$ , pois temos  $n_-^2 < 0$ .
- (iv)  $\omega > \omega_-$ : propagam as ondas associadas aos índices  $n_+$  e  $n_-$ , tendendo a 1 ( $n_{\pm}^2 \rightarrow 1$ ) no limite em que  $\omega \rightarrow \infty$ .

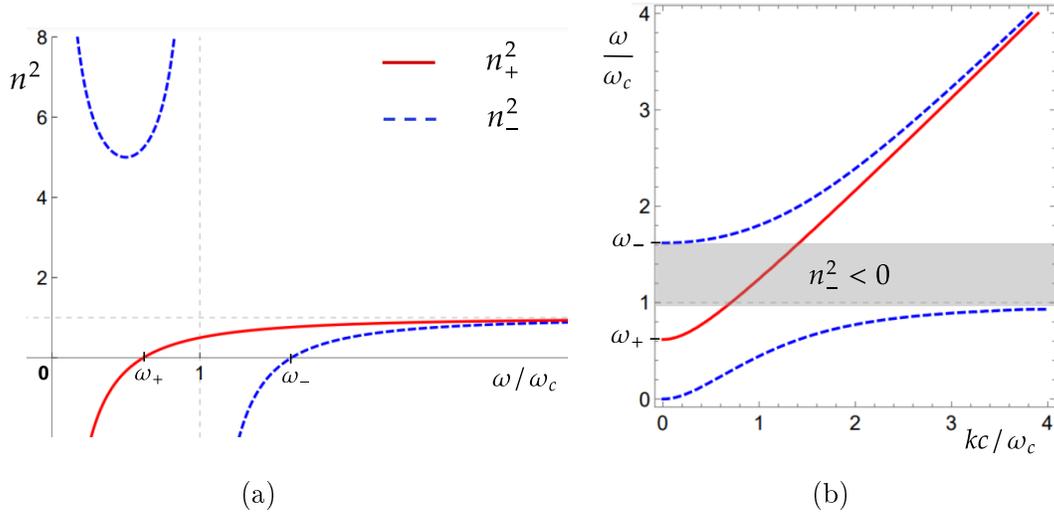


Figura 2.2: Gráficos dos índices de refração  $n_+^2$  e  $n_-^2$  para  $\omega = \omega_p$ .

Na Figura 2.2b as curvas tracejadas (azul) estão associadas ao índice de refração  $n_-$ , enquanto a linha sólida (vermelha) está associada ao índice de refração  $n_+$ . Considerando  $\omega_c = \omega_p$ , a ressonância de cíclotron ( $\omega = \omega_c$ ) também ocorre para a frequência de plasmas  $\omega_p$ .

Para analisar a natureza da polarização dos modos de propagação permitidos nesta teoria, retornamos à equação matricial (2.2.29), onde  $n = ck/\omega$  assume dois valores possíveis, dados pela Eq. (2.2.34). Esta equação é compatível com autovalores nulos. Logo, os autoestados de nosso interesse são aqueles associados a autovalores nulos. Iniciamos substituindo a expressão para  $n_+$  em (2.2.29),

$$\begin{bmatrix} n_+^2 - 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & \frac{i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \\ -\frac{i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & n_+^2 - 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{bmatrix} = 0, \quad (2.2.38)$$

que fornece os autovalores com seus respectivos autovetores:

$$\lambda_{(1+)} = -\frac{2\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \rightarrow \tilde{E}_{(1+)} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2.39)$$

$$\lambda_{(2+)} = 0 \rightarrow \tilde{E}_{(2+)} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2.40)$$

Deste modo, vemos que  $\tilde{E}_{(2+)}$  é o autovetor associado ao autovalor nulo,  $\lambda_{(2+)}$ , sendo este o campo elétrico que se propaga com velocidade de fase  $u_{ph} = c/n_+$ . O campo elétrico  $\tilde{\mathbf{E}}_{(2+)}$  pode ser escrito como

$$\tilde{E}_{(2+)} = -i \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad (2.2.41)$$

e representa uma onda circularmente polarizada à direita.

Substituindo a expressão para  $n_-$  na Eq. (2.2.29), temos a equação matricial

$$\begin{bmatrix} n_-^2 - 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & \frac{i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \\ -\frac{i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & n_-^2 - 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{bmatrix} = 0, \quad (2.2.42)$$

cujos autovalores e autovetores são:

$$\lambda_{(1)} = \frac{2\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \rightarrow \tilde{E}_{(1-)} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2.43)$$

$$\lambda_{(2-)} = 0 \rightarrow \tilde{E}_{(2-)} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2.44)$$

Sabemos que autovetor  $\tilde{E}_{(2-)}$ , associado ao autovalor nulo, é quem representa o campo elétrico da onda propagante, no caso, uma onda circularmente polarizada à esquerda. Desta forma, temos dois modos propagantes correspondendo a ondas circularmente polarizadas à direita ( $E_y = -iE_x$ ) e à esquerda ( $E_y = iE_x$ ), RCP e LCP, respectivamente [4], [17]. Abaixo é apresentada a polarização relacionada a cada modo transversal encontrado:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{LCP} = \frac{-i}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \text{ associado à } n_+, \quad (2.2.45)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{RCP} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \text{ associado à } n_-. \quad (2.2.46)$$

Algo importante é que neste contexto é possível ocorrer a propagação simultânea dos dois modos (associados aos índices de refração  $n_+$  e  $n_-$ ). Para isso, é necessário que  $n_-^2 > 0$  e  $n_+^2 > 0$  para um mesmo intervalo de frequência, fato que ocorre quando  $\omega > \omega_-$  e para o intervalo  $\omega_+ < \omega < \omega_c$ . Note que a frequência de corte  $\omega_+$  pode ser maior que a frequência de ciclotron  $\omega_c$ , como mostrado na Figura 2.2b. Quando isto ocorre, só ocorre propagação de ambos os modos no intervalo  $\omega > \omega_-$ .

A sobreposição destes dois modos gera uma onda linearmente polarizada. O fato de termos  $n_- \neq n_+$  gera uma diferença de velocidade de fase que implica na rotação do vetor campo elétrico da onda propagante (rotação da direção polarização), o fenômeno conhecido por birrefringência.

## 2.3 Birrefringência

A birrefringência ocorre quando um material manifesta diferentes índices de refração relacionados à direção de propagação da luz refratada. Este fenômeno pode se apresentar de duas formas: como a dupla refração ou como birrefringência circular. A dupla refração é separação da luz refratada em dois raios em direções diferentes, um que obedece a lei de snell e outro que surge devido a um segundo valor para o índice de refração. Por sua vez, a birrefringên-

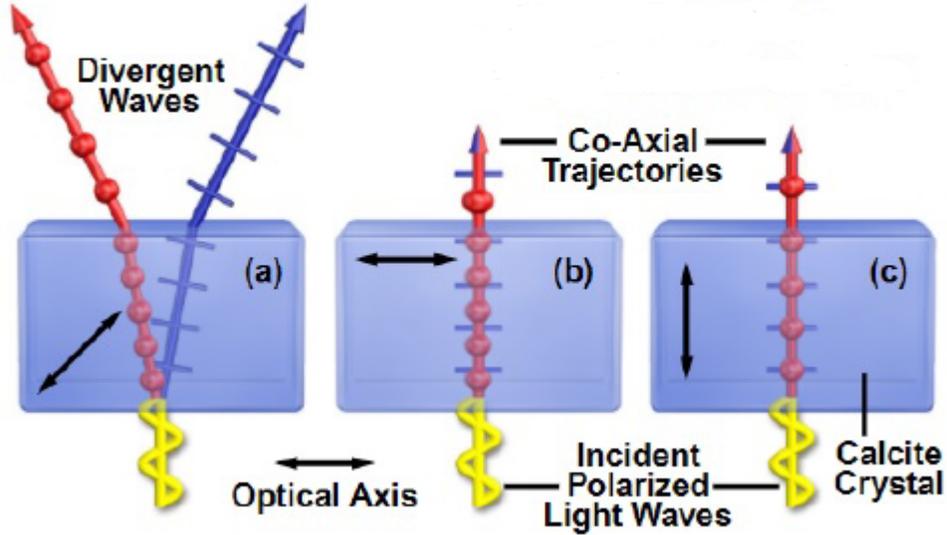


Figura 2.3: Birrefringência em cristais ópticos.

cia circular ocorre quando dois modos físicos se propagam na mesma direção, associados a índices de refração diferentes, e sofrem defasagem devido à diferença de velocidade de fase. Neste caso, o campo elétrico, que define a polarização, sofre rotação. Em cristais ópticos a birrefringência se manifesta de acordo com o ângulo de incidência em relação ao eixo óptico, como mostrado na Figura (2.3): No caso (a) a luz incide obliquamente em relação ao eixo óptico, ocorrendo dupla refração, com raios refratados em direções diferentes. No caso (b) a luz que incide ortogonalmente ao eixo óptico, ocorrendo birrefringência circular, e os raios refratados na mesma direção estão defasados. Para incidência paralela ao eixo óptico, como no caso (c), não ocorre birrefringência e a luz é refratada como em um cristal isotrópico. Para um tratamento melhor sobre birrefringência vide a referência [45].

Tal fenômeno pode manifestar-se dentro do contexto de plasmas, tal como examinado na última seção, já que os índices de refração obtidos neste capítulo estão relacionados a velocidades de fase distintas para ondas que se propagam na mesma direção -  $z$ :

$$u_{ph\pm} = \frac{c}{n_{\pm}}, \quad (2.3.1)$$

Neste caso a birrefringência ocasiona a rotação do plano de polarização: quando uma onda linearmente polarizada se propaga dentro de um material birrefringente, emerge do meio também como uma onda linearmente polarizada, porém com campo elétrico rotacionado (no plano de polarização). Isso ocorre pelo fato da onda inicial ser decomposta em duas ondas circularmente polarizadas que viajam com velocidade de fase diferentes. Tal diferença de fase é responsável por rotacionar o plano de polarização, como mostraremos a seguir.

### 2.3.1 Efeito Faraday

Há várias formas de gerar o fenômeno da birrefringência. No caso do efeito Faraday, ocorre graças à presença de campo magnético  $\mathbf{B}_0$  externo, que gera velocidades de fase distintas para os modos propagantes. Observe que, se fizermos  $\mathbf{B}_0 = 0$ , teremos  $\omega_c = 0$  na Eq. (2.2.34), e por consequência:

$$n_+ = n_-, \quad (2.3.2)$$

levando à igualdade entre as velocidades de fase dadas na Eq. (2.3.1). Portanto, neste caso, só ocorre birrefringência ou rotação do plano de polarização, quando o meio é submetido a um campo magnético externo.

A rotação do plano de polarização devido a um campo magnético foi primeiramente observada por Michael Faraday, um dos mais importantes cientistas do século XIX. Faraday utilizou um eletroímã para estudar a influência do campo  $\mathbf{B}$  sobre a luz que transpassava um vidro grosso, observando que tal arranjo rotacionava o plano de polarização da luz. Esta foi a primeira vez em que se observou uma ligação entre a luz e o magnetismo. Tal fenômeno ficou conhecido como rotação de Faraday ou efeito Faraday.

### 2.3.2 Ângulo de rotação do plano de polarização

Há como demonstrar que a diferença entre os índices de refração da Eq. (2.2.34), rotaciona o plano de polarização da onda resultante que emerge do meio. Para ilustrar a dedução desta rotação, vamos considerar uma onda linearmente polarizada, que se propaga uma distância  $L$  no plasma. Inicialmente, sua orientação de polarização pode ser decomposta em duas ondas circularmente polarizadas (à direita e à esquerda), não defasadas, como mostrado a seguir:

$$\mathbf{E}_{Inicial} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}}_{RCP} + \underbrace{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}}_{LCP}. \quad (2.3.3)$$

Após a propagação ao longo de uma distância  $L$ , onde as ondas RCP e LCP passam a ter vetores de onda distintos ( $k_+$  e  $k_-$ ), o campo elétrico resultante é expresso como

$$\tilde{\mathbf{E}}_{Final} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{ik_+L} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{ik_-L}, \quad (2.3.4)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{Final} = \frac{1}{2} e^{i(k_++k_-)L/2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{i(k_+-k_-)L/2} + \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{-i(k_+-k_-)L/2} \right\}, \quad (2.3.5)$$

podendo ser reescrito forma

$$\tilde{\mathbf{E}}_{Final} = \frac{1}{2} e^{i\psi} \left\{ \begin{bmatrix} e^{i\theta} \\ -ie^{i\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-i\theta} \\ ie^{-i\theta} \end{bmatrix} \right\}, \quad (2.3.6)$$

onde foram usadas as seguintes definições:

$$\psi = \frac{L}{2}(k_+ + k_-) \text{ e } \theta = \frac{L}{2}(k_+ - k_-). \quad (2.3.7)$$

Simplificando o resultado (2.3.6), obtemos:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{Final} = e^{i\psi} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (2.3.8)$$

O campo elétrico é rotacionado no plano de polarização (plano da frente de onda) pelo ângulo  $\theta$ . A fim de mostrar tal rotação, escrevemos as ondas inicial e final na forma vetorial:

$$\mathbf{E}_{Inicial} = \epsilon_1 \text{ e } \tilde{\mathbf{E}}_{Final} = e^{i\psi} [\cos \theta \hat{\epsilon}_1 + \sin \theta \hat{\epsilon}_2], \quad (2.3.9)$$

sendo  $\hat{\epsilon}_1$  e  $\hat{\epsilon}_2$  os versores que definem o plano de polarização. Quando  $\theta = 0$ , o que só ocorre para  $k_+ = k_-$ , ambas as ondas apresentadas na Eq. (2.3.9) terão a mesma direção para o campo elétrico,

$$\mathbf{E}_{Inicial} = \epsilon_1 \text{ e } \tilde{\mathbf{E}}_{Final} = e^{i\psi} \epsilon_1, \quad (2.3.10)$$

mostrando que a direção de polarização linear não é alterada quando as relações de dispersão (vetores de onda) são iguais para as componentes RCP e LCP. Para  $\theta = \pi/2$ , por exemplo, o campo elétrico final terá direção  $\epsilon_2$ ,

$$\mathbf{E}_{Inicial} = \epsilon_1 \text{ e } \tilde{\mathbf{E}}_{Final} = e^{i\psi} \epsilon_2, \quad (2.3.11)$$

indicando que a polarização da onda final é rotacionada por um ângulo  $\theta$  (de  $\pi/2$ ). Observe que isto só ocorre devido a diferença entre vetores de onda  $k_+ \neq k_-$ , ou seja, quando as relações de dispersão para os modos RCP e LCP são diferentes, fato que garante um ângulo de rotação não nulo segundo a Eq. (2.3.7).

O ângulo de rotação pode ser expresso em função dos índices de refração. Substituindo  $k = n\omega/c$  na Eq. (2.3.7), obtemos:

$$\theta = \frac{\omega L}{2c}(n_+ - n_-) = \frac{\pi L}{\lambda}(n_+ - n_-), \quad (2.3.12)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda da onda incidente no vácuo. O “poder de rotação”  $\delta = \theta/L$  (diferença de fase por unidade de comprimento), é dado como

$$\delta = \frac{\pi}{\lambda}(n_+ - n_-). \quad (2.3.13)$$

### 2.3.3 Birrefringência em plasma magnetizado

O plasma magnetizado, estudado na seção 2.2, admite dois índices de refração,  $n_+$  e  $n_-$ , associados com dois modos eletromagnéticos propagantes de onda circularmente polarizada, LCP e RCP, respectivamente. As velocidades de fase dos dois modos são:

$$u_{ph\pm} = \frac{c}{1 - \omega_p^2/\omega(\omega \pm \omega_c)}. \quad (2.3.14)$$

Podemos calcular também o poder de rotação decorrente para plasma magnetizado, cujos índices de refração estão dados na Eq. (2.2.34), fornecendo:

$$\delta = \frac{\pi}{\lambda} \left( \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega(\omega + \omega_c)} - \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega(\omega - \omega_c)} \right). \quad (2.3.15)$$

No limite de altas frequências  $\omega \gg (\omega_p, \omega_c)$  [2], onde se garante que ambos os modos associados aos índices (2.2.34) se propagam simultaneamente, temos:

$$n_{\pm} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega \pm \omega_c)}, \quad (2.3.16)$$

o que implica no seguinte fator:

$$\delta \approx \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega - \omega_c)} - \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega + \omega_c)} \right), \quad (2.3.17)$$

$$\delta \approx \frac{\omega_p^2 \omega_c}{2c\omega^2}. \quad (2.3.18)$$

Dessa forma, vimos que a diferença entre os índices de refração provoca a rotação do plano de polarização. A peculiaridade do efeito Faraday é que tal diferença é provocada pela presença de um campo magnético externo alinhado à direção de propagação da onda, como ocorre num plasma magnetizado, onde a presença do campo  $\mathbf{B}_0$  estabelece a diferença entre os índices de refração  $n_+$  e  $n_-$ .

# Capítulo 3

## A eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw

Em 1990, Carroll, Field e Jackiw (CFJ) [21] propuseram uma modificação para eletrodinâmica de Maxwell através da adição de um termo do tipo Chern-Simons (CS) à Lagrangeana de Maxwell (eletrodinâmica de Maxwell) em 4 dimensões (1 + 3):  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_{CS}$ . Nesta proposta, era preservada a simetria de calibre, mas a simetria de Lorentz era violada. Importante aqui distinguir o termo tipo Chern-Simons, quadridimensional, do termo original de CS [22], [23], [24], tipicamente definido em (1+2) dimensões,  $\epsilon_{\mu\nu\alpha} A^\mu \partial^\nu A^\alpha$ , conhecido por gerar um termo de massa (topológica) para fóton planar. O termo CFJ,  $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} V^\mu A^\nu \partial^\alpha A^\beta$ , é dito ser do tipo Chern-Simons por ser constituído de uma estrutura similar ao termo CS, envolvendo o símbolo de Levi-Civita 4-dimensional  $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ , o 4-potencial  $A^\mu$  e um campo de fundo fixo,  $V^\mu$ . Este 4-vetor funciona como um campo de fundo que não se transforma como 4-vetor usual, sendo responsável pela quebra da simetria de Lorentz. Esta foi a primeira investigação da eletrodinâmica clássica de Maxwell sob efeito da quebra da simetria de Lorentz.

Veremos neste capítulo que a modificação mencionada acima altera as equações de Maxwell (nas leis de Gauss e Ampère), gerando novas relações de dispersão, que descreve a propagação das ondas eletromagnéticas neste vácuo alterado pelo campo de fundo. Novas propriedades são então percebidas, como a birrefringência do vácuo.

### 3.1 A teoria de MCFJ e o Modelo Padrão Estendido

O modelo de Carroll-Field-Jackiw representa a parte CPT-ímpar do setor de fótons do chamado Modelo Padrão Estendido [31], [32], uma grande extensão do Modelo Padrão construída por Colladay e Kostelecky nos anos 90, que acopla tensores fixos (termos de violação da simetria de Lorentz) a todos os campos físicos do Modelo Padrão. Tais tensores emergem como valores esperados no vácuo após uma quebra espontânea da simetria de Lorentz ocorrer numa teoria primordial definida em escalas de altíssimas energias, próximo da energia de Planck [27], [28], [29], [30].

Além do setor CPT-ímpar, existe o setor CPT-par, representado originalmente por um tensor de rank-4, com as simetrias do tensor de Riemann. A lagrangiana deste setor, em unidades naturais, escreve-se na forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(k_{AF})_{\kappa\lambda\mu\nu}F^{\kappa\lambda}F^{\mu\nu}, \quad (3.1.1)$$

onde  $F^{\mu\nu}$  é o tensor eletromagnético e  $(k_{AF})_{\kappa\lambda\mu\nu}$  é o tensor de *rank*-4 responsável pela quebra de simetria de Lorentz. Os detalhes desta eletrodinâmica foram apresentados por Kostelecky e Mewes [33], [34], [35].

## 3.2 Setor de gauge CPT-ímpar do MPE

Apresentamos abaixo a Lagrangeana da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(K_{AF})^\mu A^\nu F^{\alpha\beta}, \quad (3.2.1)$$

onde  $F_{\mu\nu}$  é o tensor eletromagnético,  $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  é o simbolo de Levi-Civita 4-dimensional e  $(K_{AF})^\mu = ((K_{AF})_0, (K_{AF})^i)$  é o campo de fundo responsável pela quebra da simetria de Lorentz [21]. O tensor eletromagnético é antissimétrico por definição, dado em termos de derivadas do 4-potencial:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (3.2.2)$$

onde  $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ . A Lagrangeana (3.2.1) é também chamada de CPT-ímpar, pois, como veremos posteriormente, este modelo é ímpar sob a ação conjunta das operações C,P e T.

É possível expressar a Lagrangeana (3.2.1) explicitamente em termos dos campos elétrico e magnético ( $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ ). Para isso, abrimos a soma implícita sobre os índices gregos em termos das componentes espaciais e temporal,

$$4\mathcal{L} = - (2F_{0i}F^{0i} + F_{ij}F^{ij}) - \left[ \epsilon_{0ilm}(K_{AF})^0 A^i F^{lm} + \epsilon_{i0lm}(K_{AF})^i A^0 F^{lm} + 2\epsilon_{il0m}(K_{AF})^i A^l F^{0m} \right], \quad (3.2.3)$$

onde usamos a antissimetria do tensor eletromagnético:  $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ . Sabemos que as componentes do tensor eletromagnético podem ser expressas em termos dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ :

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -\partial_0 A^i - \partial_i A_0 = E^i, \quad (3.2.4)$$

$$F_{ij} = F^{ij} = \epsilon_{ijk} B_k. \quad (3.2.5)$$

Logo, teremos

$$4\mathcal{L} = - (-2E^i E^i + 2\delta_{pq} B^p B^q) - \left[ 2\delta_{ik}(K_{AF})^0 A^i B_k - 2\delta_{ik}(K_{AF})^i A^0 B_k - 2\epsilon_{ilm}(K_{AF})^i A^l E^m \right], \quad (3.2.6)$$

onde usamos a relação:

$$\epsilon_{ilm}\epsilon_{lmk} = \epsilon_{lmi}\epsilon_{lmk} = (\delta_{mm}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{im}) = (3\delta_{ik} - \delta_{ik}) = 2\delta_{ik}. \quad (3.2.7)$$

Com isso, reescrevemos a Lagrangeana como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{1}{2} \left[ (K_{AF})^0 A^k B^k - A^0 (K_{AF})^k B^k + \epsilon_{ilm} (K_{AF})^i A^l E^m \right], \quad (3.2.8)$$

que também pode ser lida na forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{1}{2} \left[ (K_{AF})^0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - A^0 (\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E}) \right]. \quad (3.2.9)$$

Esta é a Lagrangeana que representa a eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw. A seguir estudaremos o comportamento desta eletrodinâmica sob as operações discretas C, P e T.

### 3.3 Simetrias discretas: Operador CPT

Operações que não são reprodutíveis por uma sucessão de transformações infinitesimais são chamadas de operações discretas. Tais transformações não podem ser descritas por elementos dos grupos de Lie, associados às transformações contínuas. Aqui trabalharemos três operações de grande importância na Física: Conjugação de carga, Paridade e Inversão temporal.

A operação de paridade ( $\mathcal{P}$ ), em termos das coordenadas do espaço-tempo, é dada por  $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ , podendo ser compreendida como uma inversão espacial, capaz de tornar um sistema de eixos dextrógiro (onde vale a regra de mão direita) em um sistema levógiro (onde vale a regra de mão esquerda). A invariância de um sistema físico sob reversão espacial, significa que as leis físicas são igualmente expressas em sistema de coordenadas dextrógiro e levógiro.

Inversão temporal ( $\mathcal{T}$ ) é a transformação que leva  $t$  em  $-t$ , não atuando sobre as coordenadas espaciais ( $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}$ ). Quando sistema físico temporalmente invertido apresenta-se como uma opção realizável, dizemos que  $\mathcal{T}$  é uma operação de simetria.

Diferentemente das demais operações, a conjugação de carga ( $\mathcal{C}$ ) não atua sobre coordenadas do espaço-tempo, mas atua sobre a carga das partículas, fazendo  $q \rightarrow -q$ ,  $\rho \rightarrow -\rho$ , alterando propriedades intrínsecas da partícula descrita através de números quânticos. Esta transformação é de grande relevância no cenário quântico-relativístico, onde é utilizada para transformar um estado quântico de uma partícula em um estado quântico de anti-partícula, como tratado na teoria de Dirac. Uma exposição detalhada sobre tais operações pode ser encontrada nas referências [37], [38], [39], [40].

Podemos analisar a Lagrangeana de MCFJ sob as operações de paridade, inversão temporal e conjugação de carga separadamente, como mostrado no Apêndice B. **Sob Paridade,**

temos as transformações:

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\mathcal{P}} -\mathbf{E}, \quad A_0 \xrightarrow{\mathcal{P}} +A_0, \quad (3.3.1)$$

$$\mathbf{B} \xrightarrow{\mathcal{P}} +\mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \xrightarrow{\mathcal{P}} -\mathbf{A}, \quad (3.3.2)$$

$$A_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} A^\mu, \quad J_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} J^\mu, \quad \partial_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} \partial^\mu, \quad (3.3.3)$$

onde as correspondências 3.3.3 são compatíveis com a métrica  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$ . Assim, a Lagrangeana (3.2.9) se transforma da seguinte forma sob paridade:

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)}_{+(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)} + \frac{1}{2} \left[ \underbrace{(K_{AF})^0(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}_{-(K_{AF})^0(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})} - \underbrace{A^0(\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B})}_{A^0(\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B})} + \underbrace{\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E})}_{\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E})} \right]. \quad (3.3.4)$$

Logo, percebe-se que apenas o termo  $(K_{AF})^0(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$  tem paridade ímpar, trocando de sinal após a operação. Concluimos então que  $(K_{AF})^0$  é coeficiente paridade-ímpar, enquanto  $\mathbf{K}_{AF}$  é paridade-par. **Sob reversão temporal**, temos:

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathbf{E}, \quad A_0 \xrightarrow{\mathcal{T}} A_0, \quad (3.3.5)$$

$$\mathbf{B} \xrightarrow{\mathcal{T}} -\mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \xrightarrow{\mathcal{T}} -\mathbf{A}, \quad (3.3.6)$$

$$A_\mu \xrightarrow{\mathcal{T}} A^\mu, \quad J_\mu \xrightarrow{\mathcal{T}} J^\mu, \quad (3.3.7)$$

de maneira que a Lagrangeana transforma-se como

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)}_{+(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)} + \frac{1}{2} \left[ \underbrace{(K_{AF})^0(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}_{(K_{AF})^0(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})} - \underbrace{A^0(\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B})}_{-A^0(\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B})} + \underbrace{\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E})}_{-\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E})} \right]. \quad (3.3.8)$$

Agora, vemos que apenas o termo  $(K_{AF})^0(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$  não troca de sinal, sendo T-par, enquanto os demais são T-ímpares. Dizemos, portanto, que o coeficiente  $(K_{AF})^0$  é T-par e  $\mathbf{K}_{AF}$  é T-ímpar. **Sob a operação de conjugação de carga**, vale:

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\mathcal{C}} -\mathbf{E}, \quad A_0 \xrightarrow{\mathcal{C}} -A_0, \quad (3.3.9)$$

$$\mathbf{B} \xrightarrow{\mathcal{C}} -\mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \xrightarrow{\mathcal{C}} -\mathbf{A}, \quad (3.3.10)$$

$$A_\mu \xrightarrow{\mathcal{C}} -A^\mu, \quad J_\mu \xrightarrow{\mathcal{C}} -J^\mu, \quad (3.3.11)$$

de modo que Lagrangeana de MCFJ fica

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)}_{+(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)} + \frac{1}{2} \left[ \underbrace{(K_{AF})^0(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}_{(K_{AF})^0(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})} - \underbrace{A^0(\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B})}_{A^0(\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B})} + \underbrace{\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E})}_{\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E})} \right], \quad (3.3.12)$$

revelando-se C-par, pois não inverte sinal algum em nenhum dos termos.

A operação  $PT$  conjunta resulta, em cada um dos termos de CFJ, nas seguintes transformações:

$$(K_{AF})^0(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \xrightarrow{PT} -(K_{AF})^0(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad (3.3.13)$$

$$A^0(\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B}) \xrightarrow{PT} -A^0(\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B}), \quad (3.3.14)$$

$$\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E}) \xrightarrow{PT} -\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E}). \quad (3.3.15)$$

Desta forma, vemos que os 3 termos da Lagrangeana (3.2.9) são PT-ímpares, além de C-pares. Desta forma, já podemos prever o efeito da operação CPT, que consiste na aplicação conjunta dos operadores  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{T}$ . Como todos os termos da Lagrangeana são C-pares e PT-ímpares, serão CPT-ímpares, por consequência, ou seja:

$$(K_{AF})^0(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \xrightarrow{CPT} -(K_{AF})^0(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad (3.3.16)$$

$$A^0(\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B}) \xrightarrow{CPT} -A^0(\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B}), \quad (3.3.17)$$

$$\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E}) \xrightarrow{CPT} -\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E}). \quad (3.3.18)$$

Tal resultado pode também ser obtido se examinarmos o comportamento das grandezas eletromagnéticas sob ação direta do operador CPT:

$$A_0 \xrightarrow{CPT} -A_0, \quad \mathbf{A} \xrightarrow{CPT} -\mathbf{A}, \quad (3.3.19)$$

$$A_\mu \xrightarrow{CPT} -A_\mu, \quad \partial_\mu \xrightarrow{CPT} -\partial_\mu, \quad (3.3.20)$$

$$F_{\mu\nu} \xrightarrow{CPT} F_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu}^* \xrightarrow{CPT} F_{\mu\nu}^*, \quad (3.3.21)$$

$$\mathbf{E} \xrightarrow{CPT} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \xrightarrow{CPT} \mathbf{B}. \quad (3.3.22)$$

Assim, a Lagrangeana (3.2.9) sob operação  $CPT$  se transforma como

$$\mathcal{L} \xrightarrow{CPT} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)}_{+(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)} + \frac{1}{2} \left[ \underbrace{(K_{AF})^0(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}_{-(K_{AF})^0(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})} - \underbrace{A^0(\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B})}_{-A^0(\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B})} + \underbrace{\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E})}_{-\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E})} \right], \quad (3.3.23)$$

onde supomos que o campo de fundo  $((K_{AF})_0, (K_{AF})^i)$  não é afetado pelo operador  $CPT$ . Vemos que os termos advindos da teoria de Carroll-Field-Jackiw invertem de sinal, sob operação CPT, sendo assim classificados como CPT-ímpares, denotando a violação da simetria CPT. Aqui observamos que o termo inserido por CFJ implica não apenas na quebra da simetria de Lorentz, mas também na violação da simetria CPT (ambas preservadas no contexto da eletrodinâmica de Maxwell usual).

Finalizamos apresentando uma tabela com a classificação dos coeficientes  $(K_{AF})^0$  e  $K_{AF}$

sob ação das operações discretas discutidas neste capítulo:

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{T}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{PT}$	$\mathcal{CPT}$
$(K_{AF})^0$	-	+	+	-	-
$K_{AF}$	+	-	+	-	-

### 3.4 Equações de onda

As equações de movimento da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw são fornecidas pela equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\lambda} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = 0. \quad (3.4.1)$$

Reescrevendo a Eq.(3.2.1) com termo de fonte,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu A^\nu F^{\alpha\beta} - J_\alpha A^\alpha, \quad (3.4.2)$$

calculamos o primeiro termo da Eq.(3.4.1):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\lambda} = -J^\lambda + \frac{1}{4} \epsilon^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu F^{\alpha\beta}. \quad (3.4.3)$$

O segundo termo de (3.4.1) será:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = -F^{\sigma\lambda} - \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu}{}^{\sigma\lambda} (K_{AF})^\mu A^\nu. \quad (3.4.4)$$

Substituindo (3.4.3) e (3.4.4) na Eq.(3.4.1), teremos a equação de movimento:

$$\partial_\sigma F^\sigma{}_\lambda + \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu \partial^\alpha A^\beta = J_\lambda. \quad (3.4.5)$$

Podemos também escrevê-la nas formas equivalentes apresentadas abaixo:

$$\partial_\sigma F^\sigma{}_\lambda + \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu \partial^\alpha A^\beta = J_\lambda \quad \text{ou} \quad \partial^\sigma F_{\sigma\lambda} + \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu F^{\alpha\beta} = J_\lambda, \quad (3.4.6)$$

$$\partial_\sigma F^{\sigma\lambda} + \epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})_\mu \partial_\alpha A_\beta = J^\lambda \quad \text{ou} \quad \partial_\sigma F^{\sigma\lambda} + \frac{1}{2} \epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})_\mu F_{\alpha\beta} = J^\lambda. \quad (3.4.7)$$

As demais equações de movimento são obtidas a partir da identidade de Bianchi,

$$\partial_\nu F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\nu} + \partial_\beta F_{\nu\alpha} = 0, \quad (3.4.8)$$

que fornece a lei de Gauss para o campo magnético,  $\partial_i B_i = 0$ , assim como a lei de Faraday,

$$\partial_t B_a + \epsilon_{abc} \partial_b E_c = 0. \quad (3.4.9)$$

A Eq. (3.4.7) fornece explicitamente a lei de Gauss quando tomamos  $\lambda = 0$ :

$$\partial_i F^{i0} + \frac{1}{2} \epsilon^{0ijk} (K_{AF})_i F_{jk} = J^0 \quad \rightarrow \quad \partial_i E^i - (K_{AF})_m B_m = J^0,$$

cuja forma vetorial é

$$\partial_i E^i - \mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B} = \rho \quad \text{ou} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} - \mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B} = \rho, \quad (3.4.10)$$

onde  $\rho$  é densidade de carga. A lei de Ampère é obtida fazendo  $\lambda = i$  na Eq. (3.4.6):

$$\partial^\sigma F_{\sigma i} + \frac{1}{2} \epsilon_{i\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu F^{\alpha\beta} = J_i \quad (3.4.11)$$

$$\partial^0 F_{0i} + \partial^j F_{ji} + \frac{1}{2} \epsilon_{i0lm} (K_{AF})^0 F^{lm} + \frac{1}{2} \epsilon_{i0lm} (K_{AF})^l F^{0m} + \frac{1}{2} \epsilon_{ilm0} (K_{AF})^l F^{m0} = J_i \quad (3.4.12)$$

obtemos, usando a densidade de corrente  $\mathbf{j}$ ,

$$-\partial_t \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{B} - (K_{AF})_0 \mathbf{B} + \mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E} = \mathbf{j}. \quad (3.4.13)$$

As expressões (3.4.10) e (3.4.13) representam equações de Maxwell, lei de Gauss e Ampère, modificadas pelo termo de Carroll-Field-Jackiw. Alguns dos cálculos acima estão detalhados nos Apêndice C. Podemos assim escrever as equações para eletrodinâmica de MCFJ:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} - \mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B} = \rho, \quad (3.4.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} - (K_{AF})_0 \mathbf{B} + \mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E} = \mathbf{j}, \quad (3.4.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.4.16)$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (3.4.17)$$

Neste cenário, observa-se que, na ausência de fontes ( $\rho = 0$  e  $\mathbf{j} = 0$ ), os campos elétrico e magnético atuam como fontes: Na Eq. (3.4.14), o termo  $K_{AF} \cdot \mathbf{B}$  produz campo elétrico, desempenhando um papel análogo a densidade de carga. Da mesma forma, os termos contendo  $(K_{AF})_0$  e  $K_{AF}$  desempenham um papel similar à densidade de corrente na Eq. (3.4.15).

Existem fenômenos que envolvem correntes e densidade de carga não convencionais, definidas em propriedades particulares de sistema quânticos. Neste sentido, fenômenos de transporte baseados ou induzidos por anomalias quânticas constituem uma janela de novidades e oportunidades, que vêm atraindo atenção na Física. Neste contexto, podemos mencionar os semi-metais de Weyl e Dirac [41], [42] e o efeito quiral magnético (*chiral magnetic effect* - CME) [26], um fenômeno quântico macroscópico mensurável, no qual uma corrente elétrica é produzida na presença de um campo magnético, devido a assimetria entre o número de densidade de férmions de quiralidade esquerda e direita (*left-handed* e *right-handed*), o que

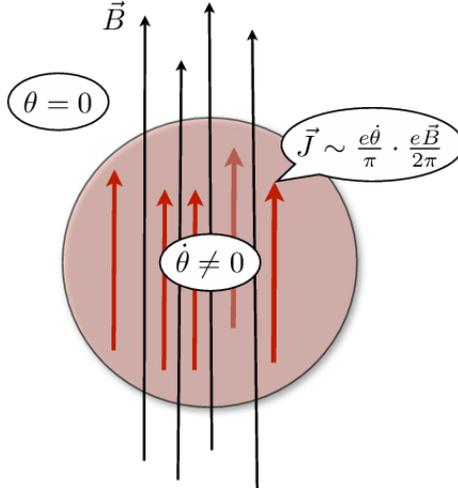


Figura 3.1: Ilustração simplificada para efeito magnético quiral (CME). Aqui  $\theta = \Delta\mu$ , a diferença de potencial químico.

é representado pelo desequilíbrio entre o potencial químico *left* e *right*, vide Figura (3.1). Tal corrente é dada por:

$$\mathbf{J}_{CME} = \frac{e^2}{4\pi^2} \Delta\mu \mathbf{B}. \quad (3.4.18)$$

onde  $e$  é a carga elétrica,  $\Delta\mu = \mu_R - \mu_L$  é a diferença de potencial químico entre os férmions de quiralidade esquerda e direita, e  $\mathbf{B}$  é o campo magnético. Outro efeito anômalo é produzido pela separação entre os pontos de fluxo de energia no espaço dos momentos ( $\Delta\mathbf{p}$ ) para os férmions de quiralidade esquerda e direita, chamado de *anomalous Hall effect* (AHE) (efeito Hall anômalo) [43], que gera densidade de corrente dada pela relação:

$$\mathbf{J}_{Hall} = \frac{e^2}{4\pi^2} \Delta\mathbf{p} \times \mathbf{E}, \quad (3.4.19)$$

sendo  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico aplicado. Tal separação também gera uma densidade de carga extra quando há campo magnético [44], que é expressa por:

$$J_{Anom}^0 = \frac{e^2}{4\pi^2} \Delta\mathbf{p} \cdot \mathbf{B}. \quad (3.4.20)$$

Estes são efeitos anômalos induzidos em matéria quiral que não estão compreendidos dentro da teoria de Maxwell, sugerindo o uso de uma eletrodinâmica modificada.

Tais anomalias violam as simetrias de paridade e inversão temporal, assim como o termo de CFJ, tal como percebido por Qiu, Cao e Huang [25], ao traçar a correspondência entre tais efeitos e os termos da teoria de CFJ. De fato, os autores associaram tais efeitos ao campo de fundo  $(K_{AF})^\mu = ((K_{AF})_0, \mathbf{K}_{AF})$ , considerando  $(K_{AF})_0 = e^2 \Delta\mu / (4\pi^2)$  e  $\mathbf{K}_{AF} = e^2 \Delta\mathbf{p} / (4\pi^2)$  nas Eqs. (3.4.14) - (3.4.17). Assim, abriram uma janela de oportunidades para usar a eletrodinâmica de MCFJ na descrição de fenômenos de transporte da Física da matéria

condensada.

### 3.5 Equação de onda e relações de dispersão

Podemos manipular as equações de MCFJ e obter as equações de onda para os campos. Tomando o rotacional da Eq. (3.4.15),

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t (\nabla \times \mathbf{E}) - (K_{AF})_0 (\nabla \times \mathbf{B}) + \nabla \times (\mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E}) = \nabla \times \mathbf{j}, \quad (3.5.1)$$

que junto a Eq. (3.4.17), fornece

$$-\nabla^2 \mathbf{B} + \partial_t^2 \mathbf{B} - (K_{AF})_0 (\nabla \times \mathbf{B}) + \nabla \times (\mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E}) = \nabla \times \mathbf{j}, \quad (3.5.2)$$

$$\square \mathbf{B} + (\mathbf{K}_{AF})_0 (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E}) - \nabla \times \mathbf{j}. \quad (3.5.3)$$

Tomando agora o rotacional da Eq. (3.4.17), temos

$$\partial_t (\nabla \times \mathbf{B}) + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (3.5.4)$$

O primeiro termo,  $\partial_t (\nabla \times \mathbf{B})$ , pode ser reescrito usando-se a Eq. (3.4.15),

$$\partial_t (\nabla \times \mathbf{B}) = \partial_t^2 \mathbf{E} + (K_{AF})_0 \partial_t \mathbf{B} - \partial_t (\mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E}) + \partial_t \mathbf{j}, \quad (3.5.5)$$

o que nos leva a

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} + \partial_t^2 \mathbf{E} + (K_{AF})_0 \partial_t \mathbf{B} - \partial_t (\mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E}) + \partial_t \mathbf{j} = 0, \quad (3.5.6)$$

$$\square \mathbf{E} + \partial_t (\mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E}) = -\partial_t (\mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E}) + (K_{AF})_0 \partial_t \mathbf{B} + \nabla \rho + \partial_t \mathbf{j}. \quad (3.5.7)$$

Também é possível escrever a equação de onda para o 4-vetor potencial  $A^\lambda$ , partindo da equação da Eq. (3.4.6) e usando a definição do tensor eletromagnético:

$$\partial^\sigma (\partial_\sigma A_\lambda - \partial_\lambda A_\sigma) + \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu F^{\alpha\beta} = J_\lambda, \quad (3.5.8)$$

$$\square A_\lambda + \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu F^{\alpha\beta} = J_\lambda, \quad (3.5.9)$$

onde usamos a condição de calibre de Lorentz,  $\partial^\sigma A_\sigma = 0$ .

Escolhendo  $\lambda = 0$ , encontramos a equação para o potencial escalar:

$$\square A_0 + \frac{1}{2} \epsilon_{0ijk} (K_{AF})^i F^{jk} = \rho \quad \rightarrow \quad \square A_0 + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (K_{AF})^i \epsilon_{jkp} B_p = \rho, \quad (3.5.10)$$

$$\square A_0 + (K_{AF})^i B_i = \rho \quad \rightarrow \quad \square A_0 - \mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B} = \rho, \quad (3.5.11)$$

Tomando  $\lambda = i$  na Eq. (3.5.9), lidamos com a equação de onda para as componentes do potencial vetor:

$$\square A_i + \frac{1}{2}\epsilon_{i0jk} (K_{AF})^0 F^{jk} + \frac{1}{2}2\epsilon_{ij0k} (K_{AF})^j F^{0k} = J_i \quad \rightarrow \quad \square A^i - (K_{AF})^0 B^i + (\mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E})^i = J^i, \quad (3.5.12)$$

que fornece:

$$\square \mathbf{A} - (K_{AF})^0 \mathbf{B} + (\mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E}) = \mathbf{J}, \quad (3.5.13)$$

a equação de onda para o potencial  $\mathbf{A}$ .

A equação de onda (3.5.9) é um dos pontos de partida para obtermos a relação de dispersão da teoria. Podemos reescrevê-la como

$$\square A_\lambda + \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu \partial^\alpha A^\beta = J_\lambda, \quad (3.5.14)$$

$$[\square g_{\lambda\beta} + \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu \partial^\alpha] A^\beta = J_\lambda, \quad (3.5.15)$$

ou simplesmente

$$M_{\lambda\beta} A^\beta = 0, \quad (3.5.16)$$

onde fizemos  $J_\lambda = 0$  e definimos

$$M_{\lambda\beta} = \square g_{\lambda\beta} + \epsilon_{\lambda\beta\mu\alpha} (K_{AF})^\mu \partial^\alpha. \quad (3.5.17)$$

Trabalhando no espaço de Fourier, consideramos que o campo  $A^\beta$  tenha a seguinte dependência:

$$A^\beta = \tilde{A}^\beta \exp(-ip \cdot x) \quad \rightarrow \quad A^\beta = \tilde{A}^\beta e^{-(ip_0 t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}, \quad (3.5.18)$$

valendo também a correspondência:

$$\partial_\mu \rightarrow -ip_\mu, \quad (3.5.19)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \rightarrow -ip_\mu (-ip^\mu) = -p_\mu p^\mu = -p^2. \quad (3.5.20)$$

Assim, o operador  $M_{\lambda\beta}$  pode ser escrito como

$$M_{\lambda\beta}(p) = -p^2 g_{\lambda\beta} - i\epsilon_{\lambda\beta\mu\alpha} (K_{AF})^\mu p^\alpha, \quad (3.5.21)$$

que admite uma forma de matriz  $4 \times 4$ , mostrada no Apêndice D. O determinante desta

matriz, dado a seguir,

$$\begin{aligned} \det \mathbb{M} = & p^4[-p^4 + (\mathbf{K}_{\mathbf{AF}})^2 p_0^2 - 2(K_{AF})_0 p_0 ((\mathbf{K}_{\mathbf{AF}}) \cdot \mathbf{p}) + (K_{AF})_0^2 \mathbf{p}^2 \\ & + 2(K_{AF})_1 p_3 (K_{AF})_3 p_1 + 2(K_{AF})_2 p_3 (K_{AF})_3 p_2 + 2(K_{AF})_1 p_1 (K_{AF})_2 p_2 \\ & - (K_{AF})_3^2 p_1^2 - (K_{AF})_2^2 p_3^2 - (K_{AF})_2^2 p_1^2 - (K_{AF})_3^2 p_2^2 - (K_{AF})_1^2 p_2^2 - (K_{AF})_1^2 p_3^2], \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

pode ser simplificado, após algumas manipulações algébricas, recaindo em

$$\det \mathbb{M} = p^4[-p^4 - p^2 K_{AF}^2 + (K_{AF} \cdot p)^2]. \quad (3.5.23)$$

A relação de dispersão é obtida pela condição  $\det \mathbb{M} = 0$ , o que nos leva a duas relações:

$$p^4 + p^2 K_{AF}^2 - (K_{AF} \cdot p)^2 = 0, \quad (3.5.24)$$

onde adotamos

$$K_{AF}^2 = ((K_{AF})_0^2 - \mathbf{K}_{\mathbf{AF}}^2), \quad p^2 = (p_0^2 - \mathbf{p}^2) \quad \text{e} \quad K_{AF} \cdot p = (K_{AF})_0 p_0 - (\mathbf{K}_{\mathbf{AF}} \cdot \mathbf{p}), \quad (3.5.25)$$

e descartamos  $p^4 = 0$ , que corresponde a modos de propagação não físicos. Esta é relação de dispersão para a eletrodinâmica de MCFJ, que será estudada em maiores detalhes a fim de descrever a propagação de sinais eletromagnéticos nesta teoria.

### 3.5.1 Relações de dispersão

Nesta seção realizaremos a análise da relação de dispersão geral da teoria de Carroll-Field-Jackiw, obtida na seção anterior:

$$p^4 + (K_{AF})^2 p^2 - (K_{AF} \cdot p)^2 = 0, \quad (3.5.26)$$

onde  $p^\mu = (p_0, \mathbf{p})$  é o 4-vetor de onda. Resolvendo a Eq. (3.5.26) para  $p^2$ , obtém-se:

$$p^2 = \frac{-K_{AF}^2 \pm \sqrt{K_{AF}^4 + 4(K_{AF} \cdot p)^2}}{2},$$

que pode ser reduzida, desprezando o termo de ordem 4 no *background*, à expressão:

$$p^2 = \frac{-K_{AF}^2}{2} \pm (K_{AF} \cdot p). \quad (3.5.27)$$

Lembrando que  $p^2 = (p_0^2 - \mathbf{p}^2)$  e  $K_{AF} \cdot p = (K_{AF})_0 p_0 - (\mathbf{K}_{\mathbf{AF}} \cdot \mathbf{p})$ , temos:

$$(p_0^2 - \mathbf{p}^2) = \frac{-K_{AF}^2}{2} \pm ((K_{AF})_0 p_0 - \mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{p}), \quad (3.5.28)$$

$$p_0^2 \mp (K_{AF})_0 p_0 - \mathbf{p}^2 + \frac{K_{AF}^2}{2} \pm \mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{p} = 0. \quad (3.5.29)$$

$$p_0^2 \mp (K_{AF})_0 p_0 - \mathbf{p}^2 \pm \mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{p} \simeq 0, \quad (3.5.30)$$

onde levamos em consideração apenas termos em primeira ordem no *background* violador.

A solução da Eq. (3.5.30) fornece:

$$p_0 \simeq \pm \frac{(K_{AF})_0}{2} \pm |\mathbf{p}| \sqrt{1 \mp \frac{\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|^2}}. \quad (3.5.31)$$

Supondo que a onda se propaga formando um ângulo  $\theta$  com o campo de fundo ( $K_{AF}$ ), temos:  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{K}_{AF} = |\mathbf{p}| |\mathbf{K}_{AF}| \cos \theta$ . A relação (3.5.31) assume a forma:

$$p_0 \simeq \pm |\mathbf{p}| + \frac{1}{2} (\pm (K_{AF})_0 \mp |\mathbf{K}_{AF}| \cos \theta), \quad (3.5.32)$$

que pode ser lida como

$$p_0 \simeq \pm |\mathbf{p}| \pm \frac{1}{2} ((K_{AF})_0 - |\mathbf{K}_{AF}| \cos \theta). \quad (3.5.33)$$

A equação acima apresenta dois modos propagantes, codificados na dualidade de sinais  $\pm$ , que por convenção, designa uma onda propagante para a direita (+) e outra para a esquerda (-).

Esta é a relação de dispersão da eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw, que pode ser escrita nas formas equivalentes

$$\omega \simeq \left[ |\mathbf{p}| \pm \frac{1}{2} ((K_{AF})_0 - |\mathbf{K}_{AF}| \cos \theta) \right] \rightarrow |\mathbf{p}| \simeq \omega \mp \frac{1}{2} ((K_{AF})_0 - |\mathbf{K}_{AF}| \cos \theta), \quad (3.5.34)$$

onde adotamos  $p^\mu = (\omega, \mathbf{p})$ , uma outra notação para o 4-momento (em unidades naturais).

## 3.6 Birrefringência na eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw

O fenômeno de birrefringência é formalmente descrito como dupla propagação da luz um meio anisotrópico, onde a luz é decomposta em duas componentes (modos) que se propagam com polarização e velocidade diferentes [45]. Como consequência da diferença de velocidade, ocorre o efeito de rotação do plano de polarização. São conhecidos vários fatores

distintos que geram birrefringência, sendo uma delas o campo magnético, via efeito Faraday, já comentado no capítulo 2. Tal fenômeno também pode se manifestar em materiais naturalmente birrefringentes (dielétricos anisotrópicos), o que é chamado de birrefringência intrínseca.

Uma possível birrefringência intrínseca ao vácuo surge em teorias de Gravitação Quântica, sendo também comuns em teorias de violação de simetria de Lorentz [46]. Veremos a seguir que a teoria de Carroll-Field-Jackiw é uma teoria birrefringente, onde o acoplamento do campo  $A^\mu$  com o *background* violador determina a rotação do plano de polarização. Além disso, dados da rotação de polarização da luz advinda de galáxias muito distantes serão utilizados para obtermos limites para a magnitude dos parâmetros de violação.

Para verificarmos a birrefringência de uma teoria, é preciso analisar os modos de propagação, que podem ser associados às suas respectivas velocidades de fase. Como já mencionado, a birrefringência se manifesta quando os modos viajam com velocidades de fase distintas. Logo, precisamos constatar tal diferença de fase. Partiremos das velocidades relacionadas a cada modo:

$$u_{ph+} = \frac{\omega}{|\mathbf{p}_+|}, \quad u_{ph-} = \frac{\omega}{|\mathbf{p}_-|}. \quad (3.6.1)$$

O tempo de trânsito de cada modo ao longo de uma distância  $L$  pode ser escrito como

$$t_+ = \frac{L}{u_{ph+}} = \frac{|\mathbf{p}_+|}{\omega} L, \quad t_- = \frac{L}{u_{ph-}} = \frac{|\mathbf{p}_-|}{\omega} L, \quad (3.6.2)$$

que nos leva à diferença de tempo de trânsito,

$$\Delta t = (t_+ - t_-) = \frac{L}{\omega} (|\mathbf{p}_+| - |\mathbf{p}_-|). \quad (3.6.3)$$

A diferença de caminho óptico é escrita como  $\Delta x = c\Delta t$ . Assim,

$$\Delta x = \frac{cL}{\omega} (|\mathbf{p}_+| - |\mathbf{p}_-|). \quad (3.6.4)$$

Se não houver diferença de fase, decorre  $\Delta x = 0$ . Se a diferença de fase for igual a um comprimento de onda, ou seja,  $\Delta x = \lambda$ , a diferença de fase será  $\delta = 2\pi$ . Assim, podemos inferir a seguinte expressão para a diferença de fase:

$$\delta = \frac{2\pi Lc}{\lambda\omega} (|\mathbf{p}_+| - |\mathbf{p}_-|) \rightarrow \delta = L (|\mathbf{p}_+| - |\mathbf{p}_-|), \quad (3.6.5)$$

bem como a diferença de fase por unidade de comprimento,

$$\frac{\delta}{L} = (|\mathbf{p}_+| - |\mathbf{p}_-|), \quad (3.6.6)$$

onde usamos a frequência  $\nu = \omega/2\pi$  e  $c = 1$ .

Vemos que a diferença de fase está diretamente ligada à diferença entre os momentos

ou vetores de onda. Se tais momentos fossem iguais,  $|\mathbf{p}_+| = |\mathbf{p}_-|$ , não haveria defasagem entre eles, o que caracterizaria uma teoria não birrefringente. Porém, este não é o caso da eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw, pois os modos dados pela Eq. (3.5.34) reproduzidos a seguir,

$$|\mathbf{p}_+| \simeq \omega + \frac{1}{2}((K_{AF})_0 - |\mathbf{K}_{\mathbf{AF}}| \cos \theta), \quad |\mathbf{p}_-| \simeq \omega - \frac{1}{2}((K_{AF})_0 - |\mathbf{K}_{\mathbf{AF}}| \cos \theta), \quad (3.6.7)$$

apresentam defasagem dada por:

$$|\mathbf{p}_+| - |\mathbf{p}_-| = (K_{AF})_0 - |\mathbf{K}_{\mathbf{AF}}| \cos \theta,$$

que substituída na Eq. (3.6.6), fornece a diferença de fase por unidade de comprimento para a teoria de CFJ:

$$\frac{\delta}{L} = ((K_{AF})_0 - |\mathbf{K}_{\mathbf{AF}}| \cos \theta), \quad (3.6.8)$$

Sabendo que o ângulo de rotação do plano de polarização é dado pela metade da diferença de fase,  $\alpha = \delta/2$ , vide Eq. (2.3.7):

$$\alpha = \frac{\delta}{2} \rightarrow \alpha = \frac{L}{2} (|\mathbf{p}_+| - |\mathbf{p}_-|) \rightarrow \alpha = \frac{L}{2} ((K_{AF})_0 - |\mathbf{K}_{\mathbf{AF}}| \cos \theta). \quad (3.6.9)$$

A rotação do plano de polarização é, em outras palavras, a rotação do campo elétrico da onda, composta pela superposição dos dois modos da teoria, após percorrer uma distância  $L$ . Verificamos, portanto, a birrefringência na teoria de CFJ.

Mesmo assumido que o *background*  $K_{AF}$  possui diminuta magnitude, uma rotação do plano de polarização seria mensurável para grandes distâncias  $L$ , a exemplo do que ocorre com a luz que chega na Terra advinda de galáxias distâtes. E de fato, Carroll, Field e Jackiw utilizaram dados sobre luz advinda de galáxias muito distantes ( $L = 10^{10}$  anos-luz  $\rightarrow L = 9.46 \times 10^{25}m$ ) e concluíram que a variação média de fase é menor que  $6^\circ$  ( $\delta \leq 0.104$  rad) [21].

Este dado observacional foi então usado para impor severa restrição sobre a magnitude do tensor de fundo:

$$\frac{L}{2} |(K_{AF})_0 - |\mathbf{K}_{\mathbf{AF}}| \cos \theta| < 0.104 \quad (3.6.10)$$

$$|(K_{AF})_0 - |\mathbf{K}_{\mathbf{AF}}| \cos \theta| < \frac{2 \times 0.104}{9.46 \times 10^{25}m} = 2.2 \times 10^{-27}m^{-1}, \quad (3.6.11)$$

Sabendo que, em unidades naturais vale a conversão,

$$1m^{-1} = 1.977 \times 10^{-7}eV, \quad (3.6.12)$$

obtemos

$$|(K_{AF})_0 - |\mathbf{K}_{\mathbf{AF}}| \cos \theta| < 4.4 \times 10^{-33}eV. \quad (3.6.13)$$

Esta é uma condição restritiva para a magnitude do parâmetro de violação, que chamamos comumente de *upper bound* (limite superior) para o *background*. O efeito de birrefringência e a análise dos modos de propagação em plasmas também serão realizados no capítulo seguinte, onde será verificada a influência do termo violador sobre as relações de dispersão em plasmas magnetizados.

# Capítulo 4

## Modelo de Appleton no contexto de MCFJ

Neste capítulo propomos um estudo de plasmas magnetizados no contexto de uma eletrodinâmica modificada, mais precisamente, a eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ) [21], cujos elementos principais foram estudados no capítulo 3. Analisaremos como o *background* altera as relações de dispersão e, conseqüentemente, os modos de propagação do plasma. Ademais, serão discutidas as principais diferenças destes modos em relação ao caso usual, apresentado no capítulo 2. Para realizar esta proposta, lançaremos mão do modelo de MCFJ para meios contínuos, assim como o resultado para a permissividade elétrica obtido previamente via força de Lorentz, dado na Eq. (2.2.21).

### 4.1 Modelo de Appleton modificado pelo termo de CFJ

A eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ) para meios contínuos pode ser obtida através de uma adaptação do modelo apresentado no capítulo 3, que consiste em escrever o termo cinético na forma

$$\mathcal{L}_{kinetic} = -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (4.1.1)$$

onde  $G^{\mu\nu}$  é o tensor *field-strength* em meios materiais [47], definido por

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad (4.1.2)$$

onde  $\chi^{\mu\nu\alpha\beta}$  é chamado de tensor constitutivo, por definir a estrutura das relações constitutivas do meio. Algumas propriedades do tensor constitutivo são brevemente comentadas no Apêndice E. Adotando a configuração,

$$\chi^{0imn} = 0, \quad \chi^{0i0j} = \varepsilon^{ij}, \quad \frac{1}{2}\chi^{ijmn}\epsilon_{ijl}\epsilon_{mnk} = \mu_{lk}^{-1}, \quad (4.1.3)$$

podemos reproduzir as relações constitutivas para um meio material. Por exemplo, para o setor elétrico:

$$G^{0i} = \chi^{0i0j} F_{0j} \rightarrow G^{0i} = -\epsilon^{ij} E^j \rightarrow G^{0i} = -D^i, \quad (4.1.4)$$

obtemos a componente  $i$  do vetor deslocamento elétrico. Da mesma forma para o setor magnético, que fornece:

$$G^{ji} = -\epsilon_{jik} H^k, \quad (4.1.5)$$

onde são consideradas também as relações para as componentes do tensor eletromagnético,  $F_{0i} = E^i$  e  $F_{ij} = -\epsilon_{ijk} B^k$ . A Lagrangeana de MCFJ em meios materiais, em unidades naturais, é dada na forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (K_{AF})_\mu A_\nu F_{\alpha\beta} - A_\mu J^\mu, \quad (4.1.6)$$

que nos leva à seguinte equação de movimento, dada na forma tensorial:

$$\partial_\rho G^{\rho\kappa} + \frac{1}{2} \epsilon^{\kappa\beta\mu\nu} (K_{AF})_\beta F_{\mu\nu} = J^\kappa \quad (4.1.7)$$

onde adotamos  $(K_{AF})^\mu = ((K_{AF})^0, \mathbf{K}_{AF})$  para representar o campo de fundo da teoria de CFJ. A equação acima, juntamente com a identidade de Bianchi, fornece as equações de MCFJ num meio contínuo:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = J^0 - \mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (4.1.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{J} + (K_{AF})_0 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{b} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (4.1.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (4.1.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0. \quad (4.1.11)$$

Observe que estas equações são distintas das equações de MCFJ escritas no vácuo [21]. Faremos uso destas equações para estudar a propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas, realizando um processo similar ao do capítulo 2.

Associamos uma dependência do tipo Fourier para os campos  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  e corrente  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ ,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{B}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (4.1.12)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{D}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{H}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}; \quad (4.1.13)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{J}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (4.1.14)$$

de modo que podemos escrever as equações de movimento no espaço de Fourier:

$$i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) = J^0 - \mathbf{K}_{\mathbf{AF}} \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t), \quad (4.1.15)$$

$$i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) + i\omega \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{J}} + (K_{AF})_0 \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{K}_{\mathbf{AF}} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t), \quad (4.1.16)$$

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (4.1.17)$$

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) - \omega \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (4.1.18)$$

Assim, as Eqs. (4.1.9) e (4.1.11) tornam-se

$$i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) + i\omega \tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{J}} + (K_{AF})_0 \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{K}_{\mathbf{AF}} \times \tilde{\mathbf{E}}, \quad (4.1.19)$$

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} - \omega \tilde{\mu}(\omega) \tilde{\mathbf{H}} = 0. \quad (4.1.20)$$

Tomando o produto vetorial de  $\mathbf{k}$  com a Eq. (4.1.20),

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} = \omega \tilde{\mu}(\omega) \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}}, \quad (4.1.21)$$

e substituindo-a em (4.1.19) considerando (4.1.18), obtemos:

$$\frac{1}{\omega \tilde{\mu}(\omega)} \mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} + \omega \tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mathbf{E}} = -i\tilde{\mathbf{J}} - \frac{i(K_{AF})_0}{\omega} \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} - i\mathbf{K}_{\mathbf{AF}} \times \tilde{\mathbf{E}}, \quad (4.1.22)$$

ou também na forma indicial,

$$\begin{aligned} k^i \left( k^j \tilde{E}^j \right) - \mathbf{k}^2 \tilde{E}^i + \omega^2 \tilde{\mu}(\omega) \tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega) \tilde{E}^j &= -i\omega \tilde{\mu}(\omega) \tilde{J}^i - i(K_{AF})_0 \tilde{\mu}(\omega) \epsilon_{imn} k^m \tilde{E}^n \\ &\quad - i\omega \tilde{\mu}(\omega) \epsilon_{imn} (K_{AF})^m \tilde{E}^n, \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

onde utilizamos as relações constitutivas  $\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}$  e  $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mu}(\omega) \tilde{\mathbf{H}}$ . Como visto no Capítulo 2, a matriz da permissividade,

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & -\frac{i\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & 0 \\ \frac{i\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{bmatrix}, \quad (4.1.24)$$

contém as informações obtidas pelo método de Appleton para plasmas magnetizados regidas pelas relações constitutivas.

Nosso estudo prosseguirá através da relação (4.1.23), onde temos a presença das componentes temporal e espacial de  $(K_{AF})^\mu$ . Trataremos primeiro o caso de vetor de violação tipo-tempo, onde é levado em consideração apenas a contribuição da componente temporal do campo de fundo, ou seja,  $(K_{AF})^\mu = ((K_{AF})_0, \mathbf{0})$  (componente espacial nula). Posteriormente, trataremos o caso de vetor de violação tipo-espaco, no qual levaremos em conta apenas a contribuição da componente espacial, ou seja,  $(K_{AF})^\mu = (0, \mathbf{b})$ .

## 4.2 Modos de propagação para vetor de violação tipo-tempo

Nesta seção estudaremos os modos de propagação para o caso de vetor de violação tipo-tempo. Para isso, fazemos  $\mathbf{K}_{\mathbf{AF}} = 0$  na Eq. (4.1.22), mantendo a componente temporal do vetor de fundo. Além disso, mantendo o mesmo padrão adotado na Capítulo 2, adotamos  $\tilde{\mathbf{J}} = 0$ , levando (4.1.23) à forma

$$k^i \left( k^j \tilde{E}^j \right) - \mathbf{k}^2 \tilde{E}^i + \omega^2 \tilde{\mu}(\omega) \tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega) \tilde{E}^j = -i (K_{AF})_0 \tilde{\mu}(\omega) \epsilon_{imn} k^m \tilde{E}^n, \quad (4.2.1)$$

podendo ser reescrita como

$$\left( k^i k^j - \mathbf{k}^2 \delta_{ij} + \omega^2 \tilde{\mu}(\omega) \tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega) + i (K_{AF})_0 \tilde{\mu}(\omega) \epsilon_{imn} k^m \right) \tilde{E}^j = 0. \quad (4.2.2)$$

A Eq. (4.2.2), juntamente com a permissividade (4.1.24), permite estudar os modos longitudinal e transversal permitidos no plasma, que serão investigados a seguir.

### 4.2.1 Modo longitudinal

Adotando a direção de propagação da onda paralela ao campo elétrico, ou seja,  $\mathbf{k} \parallel \tilde{\mathbf{E}}$ , o modo longitudinal fornece, da Eq. (4.2.2),

$$\frac{\tilde{\varepsilon}_{33}}{\varepsilon_0} \tilde{E}_z = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_p^2 = \omega^2. \quad (4.2.3)$$

onde foi adotado  $\mathbf{k} = |\mathbf{k}| \hat{z}$  e  $\tilde{\mu}(\omega) = \mu_0$ . Este modo não apresenta alterações em relação ao caso usual, uma vez que, ao considerarmos  $\mathbf{k} \parallel \tilde{\mathbf{E}}$ , o termo  $i (K_{AF})_0 \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}$  é anulado<sup>1</sup> na Eq. (4.2.2). Portanto, o modo longitudinal não sofre modificações devido à componente temporal do *background*.

### 4.2.2 Modo transversal

Investigaremos agora o modo transversal, no qual a direção de propagação da onda é ortogonal ao campo elétrico ( $\mathbf{k} \perp \tilde{\mathbf{E}}$ ). Para melhor desenvolvimento dos cálculos, adotaremos  $\mathbf{k} = |\mathbf{k}| \hat{z}$  e  $\tilde{\mathbf{E}} = \left( \tilde{E}_x, \tilde{E}_y \right)$ , como feito na seção (2.2.2). Podemos também fazer uso da notação indicial na Eq. (4.2.2), sendo reescrita da seguinte maneira:

$$\left[ \left( \frac{\mathbf{k}^2}{\omega^2} \right) \delta_{ik} - \frac{\tilde{\varepsilon}_{ik}}{\varepsilon_0} - \frac{i (K_{AF})_0}{\omega} \epsilon_{ijk} \left( \frac{k^j}{\omega} \right) \right] \tilde{E}^k = 0, \quad (4.2.4)$$

onde usamos  $k^j E^j = 0$  (ortogonalidade).

---

<sup>1</sup>O produto vetorial entre vetores colineares é nulo.

A Eq. (4.2.4) nos fornece uma equação matricial para o modo transversal, sendo esta apresentada abaixo:

$$\begin{bmatrix} n^2 - 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & \frac{i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} + \frac{i(K_{AF})_0 n}{\omega} \\ -\frac{i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} - \frac{i(K_{AF})_0 n}{\omega^2} & n^2 - 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{bmatrix} = 0, \quad (4.2.5)$$

ou simplesmente,

$$\tilde{\Lambda}_{ik} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^k = 0, \quad (4.2.6)$$

onde usamos a expressão para o índice de refração em unidades naturais,  $n^2 = \mathbf{k}^2/\omega^2$  e  $n = |\mathbf{k}|/\omega$ .

A matriz  $\tilde{\Lambda}_{ij}$  é a chamada *matriz de dispersão* (modificada) e, a partir dela, encontraremos as relações de dispersão para o modo transversal. Em comparação ao caso usual, onde obtemos a Eq. (2.2.29), vemos que a componente temporal do vetor de fundo contribui nas componentes fora da diagonal principal da matriz de dispersão, adicionando o termo  $i(K_{AF})_0 n/\omega$ . Uma solução não trivial para a Eq. (4.2.5) é obtida exigindo que o determinante de  $\tilde{\Lambda}_{ij}$  nulo,  $\det \tilde{\Lambda}_{ij} = 0$ , que gera a seguinte relação:

$$\left\{ n^2 - 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} \right\}^2 - \left\{ \frac{\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \right\}^2 - \left( \frac{(K_{AF})_0^2 n^2}{\omega^2} \right) - \frac{2\omega_c\omega_p^2}{\omega^2(\omega^2 - \omega_c^2)} (K_{AF})_0 n = 0, \quad (4.2.7)$$

Para a Eq. (4.2.7), temos as seguintes raízes:

$$n_1 = -\frac{(K_{AF})_0}{2\omega} - \frac{\sqrt{(\omega - \omega_c) ((K_{AF})_0^2 + 4\omega^2) - 4\omega\omega_p^2}}{2\omega\sqrt{(\omega - \omega_c)}}, \quad (4.2.8)$$

$$n_2 = -\frac{(K_{AF})_0}{2\omega} + \frac{\sqrt{(\omega - \omega_c) ((K_{AF})_0^2 + 4\omega^2) - 4\omega\omega_p^2}}{2\omega\sqrt{(\omega - \omega_c)}}, \quad (4.2.9)$$

$$n_3 = \frac{(K_{AF})_0}{2\omega} - \frac{\sqrt{(\omega + \omega_c) ((K_{AF})_0^2 + 4\omega^2) - 4\omega\omega_p^2}}{2\omega\sqrt{(\omega + \omega_c)}}, \quad (4.2.10)$$

$$n_4 = \frac{(K_{AF})_0}{2\omega} + \frac{\sqrt{(\omega + \omega_c) ((K_{AF})_0^2 + 4\omega^2) - 4\omega\omega_p^2}}{2\omega\sqrt{(\omega + \omega_c)}}. \quad (4.2.11)$$

Neste trabalho abordaremos apenas os índices de refração positivos, ou que apresentem intervalos de positividade. Uma análise feita para os índices de refração mostrados acima (Apêndice A), mostra que  $n_2$ ,  $n_3$  e  $n_4$  apresentam positividade, onde consideramos que  $(K_{AF})_0 > 0$ . Com isso,  $n_1$  é manifestamente negativo para todo  $\omega > 0$ . Restam assim

três índices de refração, que renomeamos conforme a seguir:

$$n_-^t \equiv n_2 = -\frac{(K_{AF})_0}{2\omega} + \sqrt{1 + \frac{(K_{AF})_0^2}{4\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}}, \quad (4.2.12)$$

$$n_+^t \equiv n_4 = \frac{(K_{AF})_0}{2\omega} + \sqrt{1 + \frac{(K_{AF})_0^2}{4\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)}}, \quad (4.2.13)$$

$$n_E \equiv n_3 = \frac{(K_{AF})_0}{2\omega} - \sqrt{1 + \frac{(K_{AF})_0^2}{4\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)}}, \quad (4.2.14)$$

onde o super-índice (t) especifica o caso de *backgorund* tipo-espaço (*timelike*). Observe que  $n_+^t$ , em (4.2.13), não possui raiz real, diferentemente dos outros dois,  $n_E$  e  $n_-^t$ , que possuem as seguintes raízes positivas:

$$\omega_+ = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} - \omega_c \right), \quad (4.2.15)$$

$$\omega_- = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} + \omega_c \right), \quad (4.2.16)$$

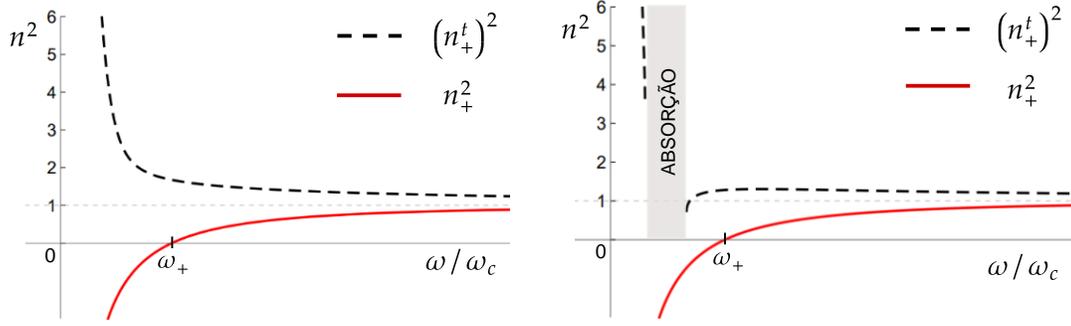
respectivamente. Estes são os valores de frequência para os quais os seus respectivos índices de refração são nulos:  $n_E(\omega_+) = 0$  e  $n_-(\omega_-) = 0$ . As expressões obtidas para  $n_-$ ,  $n_+^t$  e  $n_E$  apresentam termos adicionais em relação ao caso usual, que pode ser recuperado tomando  $(K_{AF})_0 = 0$ . A seguir, analisaremos cada um destes modos transversais, enfatizando suas principais características e alterações, em relação ao caso sem LV, abordado na Capítulo 2.

#### 4.2.2.1 Índice de refração $n_+^t$

O índice de refração  $(n_+^t)^2$  tem sua forma gráfica apresentada na Figura 4.1. Reescrevendo a Eq. (4.2.13), podemos fazer algumas observações:

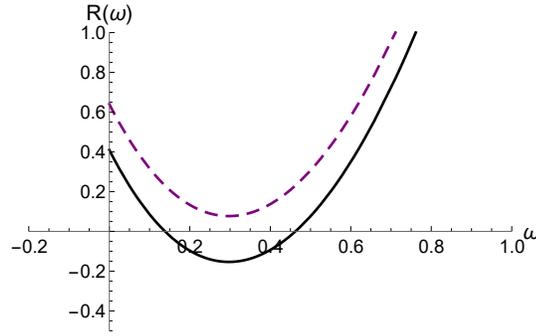
$$(n_+^t)^2 = 1 + \frac{(K_{AF})_0}{2\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)} + (K_{AF})_0 \sqrt{\frac{1}{2\omega^2} + \frac{(K_{AF})_0^2}{4\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^3(\omega + \omega_c)}}. \quad (4.2.17)$$

- (i) Para  $\omega \rightarrow 0$ , temos  $(n_+^t)^2 \rightarrow +\infty$ , ou seja, a presença do termo  $(K_{AF})_0$  leva o índice de refração à divergir na origem, diferentemente do caso sem LV, quando no mesmo limite  $(n_+)^2 \rightarrow -\infty$ .
- (ii) Para valores de frequência maiores que zero, torna-se necessária a análise do radicando presente na Eq. (4.2.17), uma vez que este pode apresentar-se como positivo ou negativo, determinando a existência, ou não, de um intervalo de absorção. Vale neste momento destacar que, para valores de frequência maiores que  $\omega_+$ , o termo  $1 - \omega_p^2/\omega(\omega + \omega_c)$  é maior que zero ( $\omega_+$  é a raiz de tal termo), de modo que o ra-



(a) Dados:  $\omega_c = \omega_p$  e  $(K_{AF})_0 = 0.8$ .

(b) Dados:  $\omega_c = \omega_p$  e  $(K_{AF})_0 = 0.7$ .



(c) Gráfico do radicando  $R(\omega)$  para dois casos: (a) referente à Figura 4.1a, onde o radicando não apresenta raiz real (linha tracejada). (b) referente à Figura 4.1b, quando radicando apresenta duas raízes reais (linha sólida).

Figura 4.1: Comparação entre os índices de refração  $n_+^t$  e  $n_+$  (sem LV).

dicando em (4.2.17) seja positivo. Logo, a possibilidade do radicando ser negativo ocorre para  $\omega < \omega_+$ .

Deste modo, para o intervalo  $0 < \omega < \omega_+$ , o termo  $1 - \omega_p^2/\omega(\omega + \omega_c)$  é menor que zero, e a positividade do radicando depende do valor deste em relação ao termo  $(K_{AF})_0^2/4\omega^2$ . Com valores de  $(K_{AF})_0$  tais que,

$$(K_{AF})_0^2 > \left| 4\omega^2 - \frac{4\omega\omega_p^2}{(\omega + \omega_c)} \right|_{\omega < \omega_+}, \quad (4.2.18)$$

o radicando da Eq. (4.2.17) é sempre positivo,

$$R(\omega) = \frac{(K_{AF})_0^2}{4\omega^2} + 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)}, \quad (4.2.19)$$

e o índice de refração  $n_+^t$  resulta sempre real, ou seja, real para qualquer  $\omega > 0$ . A

curva do gráfico  $(n_+^t)^2 \times \omega$  é mostrada na Figura 4.1a. Isto corresponde a um modo "inteiramente" propagante, ou seja,  $(n_+^t)^2 > 0$  e  $n_+^t \in \mathbb{R}$ , para todo eixo da frequência.

(iii) O oposto da condição (4.2.18) é apresentada a seguir,

$$(K_{AF})_0^2 < \left| 4\omega^2 - \frac{4\omega\omega_p^2}{(\omega + \omega_c)} \right|_{\omega < \omega_+}, \quad (4.2.20)$$

onde agora  $(n_+^t)^2$  apresenta uma região que possui parte imaginária (zona de absorção para  $(n_+^t)^2$  localizada dentro do intervalo  $0 < \omega < \omega_+$ , como mostrado na Figura 4.1b, na região em que a linha tracejada (preta) exibe um "gap". Outra forma de observar isto é através do gráfico da função do radicando da Eq. (4.2.17), que é uma função de 3º grau. Como tal, pode apresentar duas raízes reais positivas ou nenhuma raiz real positiva. Quando não existe raiz real positiva, o radicando é sempre positivo e temos o caso apresentado para a Figura 4.1a. Quando há duas raízes reais positivas, a função do radicando é negativa no intervalo entre elas (vide gráfico da Figura 4.1c), implicando em índice de refração complexo, como no caso mostrado na Figura 4.1b.

Com o mesmo procedimento realizado no capítulo 2, obtemos a partir da relação de dispersão (4.2.5) os autovalores e autovalores associados ao índice de refração  $n = n_+^t$ :

$$\lambda_{(1+)}^{TL} \neq 0 \rightarrow \tilde{E}_{(1+)} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.2.21)$$

$$\lambda_{(2+)}^{TL} = 0 \rightarrow \tilde{E}_{(2+)} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.2.22)$$

Pela razão já discutida, vemos que  $\tilde{E}_{(2+)}$  é o autovetor associado ao autovalor nulo  $\lambda_{(2+)}^{TL}$ , indicando que este é o modo propagante da teoria quando  $n = n_+^t$ , apresentando polarização LCP.

#### 4.2.2.2 Índice de refração $n_E$

Este é um índice de refração extra oriundo do modelo específico que investigamos, e que só apresenta intervalo de positividade graças à presença do termo  $(K_{AF})_0/2\omega$  junto à raiz. Sem este, tal índice seria inteiramente negativo. Por este motivo, é interessante analisar apenas o gráfico de  $(n_E)$  ao invés de  $(n_E)^2$ , e nos restringir ao intervalo de positividade  $0 < \omega < \omega_+$ , como mostrado na Figura 4.2.

$$n_E = \frac{(K_{AF})_0}{2\omega} - \frac{1}{2\omega} \sqrt{\left( (K_{AF})_0^2 + 4\omega^2 \right) - \frac{4\omega\omega_p^2}{(\omega + \omega_c)}}. \quad (4.2.23)$$

---

<sup>2</sup>Observe que a expressão para  $n_+^t$  também apresenta o mesmo radicando  $R(\omega)$  e, conseqüentemente, o mesmo comportamento  $(n_+^t)^2$  em relação região imaginária.

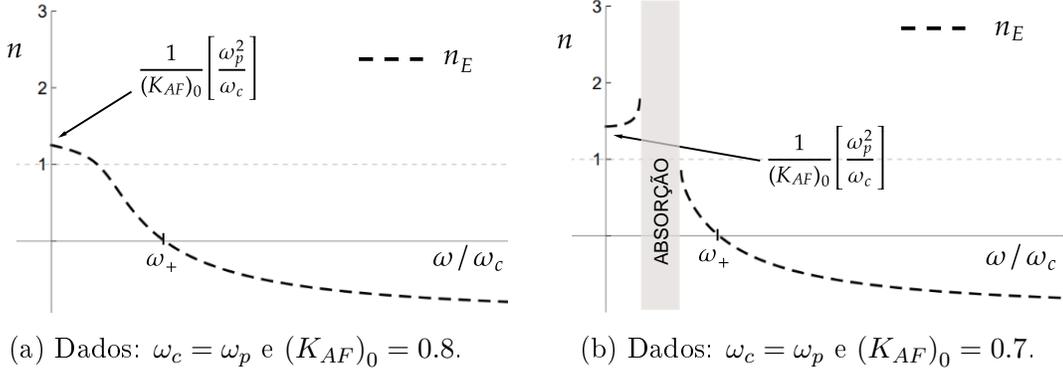


Figura 4.2: Gráficos para o índice de refração  $n_E$ .

- (i) Tomando a série de Laurent de  $n_E$  em torno da origem e levando em conta o termo de potência zero, obtém-se:

$$n_E(0) = \frac{1}{(K_{AF})_0} \left[ \frac{\omega_p^2}{\omega_c} \right], \quad (4.2.24)$$

mostrando que o índice de refração  $n_E$  é finito na origem e inversamente proporcional à magnitude do *background*  $(K_{AF})_0$ .

- (ii) Seguimos o mesmo procedimento aplicado para o índice de refração anterior (vide item ii do índice  $n_+^t$ ). Para valores de  $(K_{AF})_0$  que satisfaçam a condição

$$(K_{AF})_0^2 > \left| 4\omega^2 - \frac{4\omega\omega_p^2}{(\omega + \omega_c)} \right|_{\omega < \omega_+}, \quad (4.2.25)$$

o radicando é positivo, de forma que  $n_E$  é sempre positivo, sendo representado por uma curva completamente positiva dentro do intervalo  $0 < \omega < \omega_+$ . como mostrado na Figura 4.2a. Neste caso,  $n_E$  corresponde a um modo propagante em tal regime de frequências.

- (iii) Para a condição oposta, ou seja, quando

$$(K_{AF})_0^2 < \left| 4\omega^2 - \frac{4\omega\omega_p^2}{(\omega + \omega_c)} \right|_{\omega < \omega_+}, \quad (4.2.26)$$

$n_E$  apresenta uma zona de absorção dentro do intervalo  $0 < \omega < \omega_+$ , como mostrado na Figura 4.2b.

A matriz de dispersão (4.2.5), para este modo, fornece o seguinte autovetor (com autovalor nulo):

$$\lambda_{(2+)}^{TL} = 0 \quad \rightarrow \quad \tilde{E}_{(2+)} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

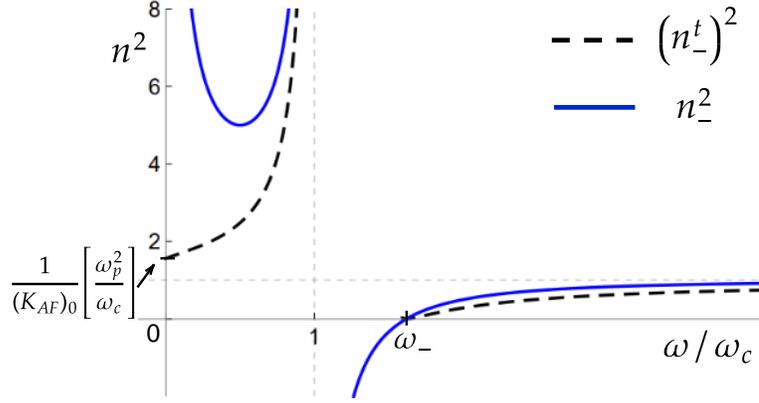


Figura 4.3: Comparação entre os casos  $n_-^t$  e  $n_-$  (sem LV). Dados:  $\omega_c = \omega_p$  e  $(K_{AF})_0 = 0.8$ .

O autovetor associado ao autovalor nulo determina polarização LCP para o índice de refração  $n_E$ . Observe que os índices  $n_+^t$  e  $n_E$  estão associados aos mesmos autovetores e, por consequência, à mesma polarização.

#### 4.2.2.3 Índice de refração $n_-^t$

O índice de refração  $n_-^t$  também apresenta modificações em comparação ao caso usual. Escrevendo o quadrado do índice de refração (4.2.12):

$$(n_+^t)^2 = 1 + \frac{(K_{AF})_0}{2\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)} + (K_{AF})_0 \sqrt{\frac{1}{2\omega^2} + \frac{(K_{AF})_0^2}{4\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^3(\omega - \omega_c)}}, \quad (4.2.27)$$

Podemos observar algumas das suas características:

- (i) No caso sem LV,  $n_-^2$  diverge na origem, ou seja,  $n_-^2 \rightarrow \infty$ . Na presença do *background*  $(K_{AF})_0$ , o índice de refração  $(n_-^t)^2$  passa a ter um valor finito e positivo neste limite (ver Figura 4.3):

$$(n_-^t)^2(0) = \frac{1}{(K_{AF})_0^2} \left( \frac{\omega_p^2}{\omega_c} \right)^2. \quad (4.2.28)$$

- (ii) Para  $0 < \omega < 1$ ,  $(n_-^t)^2$  será sempre positivo, já que a função dentro do radicando será inteiramente positiva. Isto também ocorre no caso sem LV.
- (iii) Em  $\omega \rightarrow 1$ ,  $(n_-^t)^2 \rightarrow \infty$ , apresentando ressonância na frequência de cíclotron (aqui  $\omega_c = 1$ ).
- (iv) Entre  $\omega_c < \omega < \omega_-$ , temos uma zona de absorção em  $n_-^t$  (onde  $(n_-^t)^2 < 0$ ).
- (v) Para  $\omega > \omega_-$  (este é a raiz de  $n_-^t$ ),  $(n_-^t)^2$  é sempre positivo. Temos, portanto, um modo propagante  $\omega > \omega_-$ , tendendo a 1,  $(n_-^t)^2 \rightarrow 1$  no limite de altas frequências.

Neste caso, a matriz de dispersão fornece o seguinte autovetor (com autovalor nulo):

$$\lambda_{(2-)}^{TL} = 0 \rightarrow \tilde{E}_{(2-)} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Isto indica uma polarização RCP para o índice de refração  $n_-^t$ , conforme já discutido anteriormente.

### 4.2.3 Rotação de Faraday para o caso vetor de fundo tipo-tempo

Como discutido no Capítulo 2, o efeito Faraday se manifesta quando dois modos se propagam (numa mesma faixa de frequência) com velocidades de fase diferentes. Para o caso de vetor de fundo tipo-tempo, o modelo de Appleton fornece velocidades de fase distintas para cada modo, dadas por:

$$u_{ph+}^t = \frac{1}{n_+} = \left( \frac{(K_{AF})_0}{2\omega} + \frac{1}{2\omega} \sqrt{((K_{AF})_0^2 + 4\omega^2) - \frac{4\omega\omega_p^2}{(\omega + \omega_c)}} \right)^{-1}, \quad (4.2.29)$$

$$u_{ph-}^t = \frac{1}{n_-} = \left( -\frac{(K_{AF})_0}{2\omega} + \frac{1}{2\omega} \sqrt{((K_{AF})_0^2 + 4\omega^2) - \frac{4\omega\omega_p^2}{(\omega - \omega_c)}} \right)^{-1}, \quad (4.2.30)$$

$$u_{phE} = \frac{1}{n_E} = \left( \frac{(K_{AF})_0}{2\omega} - \frac{1}{2\omega} \sqrt{((K_{AF})_0^2 + 4\omega^2) - \frac{4\omega\omega_p^2}{(\omega + \omega_c)}} \right)^{-1}, \quad (4.2.31)$$

relacionadas à  $n_+^t$ ,  $n_-^t$  e  $n_E$ , respectivamente. Tais modos propagam simultaneamente para  $0 < \omega < \omega_+$ , com dois deles ( $n_+^t$  e  $n_-^t$ ) podendo propagar para  $\omega > \omega_-$ . Tomaremos este último caso para calcular o poder de rotação  $\delta$ , que será

$$\delta = \frac{\pi}{\lambda} (n_+^t - n_-^t), \quad (4.2.32)$$

$$\delta = \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{(K_{AF})_0}{\omega} + \sqrt{\frac{(K_{AF})_0^2}{4\omega^2} + 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)}} - \frac{1}{2\omega} \sqrt{\frac{(K_{AF})_0^2}{4\omega^2} + 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}} \right), \quad (4.2.33)$$

Adotando o limite em que  $\omega \gg (\omega_p, \omega_c)$ , podemos escrever

$$n_+^t \approx 1 + \frac{(K_{AF})_0}{2\omega} + \frac{(K_{AF})_0^2}{8\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2(\omega + \omega_c)} \quad \text{e} \quad n_-^t \approx 1 - \frac{(K_{AF})_0}{2\omega} + \frac{(K_{AF})_0^2}{8\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega - \omega_c)}. \quad (4.2.34)$$

Assim, temos

$$\delta \approx \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{b_0}{\omega} + \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega - \omega_c)} - \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega + \omega_c)} \right), \quad (4.2.35)$$

$$\delta \approx \frac{b_0}{2} + \frac{\omega_p^2 \omega_c}{2\omega^2}. \quad (4.2.36)$$

Portanto, observa-se que a componente temporal do *background* contribui para o poder de rotação do plano de polarização. Fazendo  $(K_{AF})_0 = 0$ , reproduzimos o resultado usual dado em (2.3.18). A contribuição do termo  $(K_{AF})_0/2$  independe da frequência, sendo completamente diferente do termo advindo da teoria usual. Algo que podemos notar é o fato de que, no caso de um plasma não magnetizado ( $\mathbf{B}_0 = 0$ ), condição que pode ser implementada na Eq. (4.2.36) fazendo  $\omega_c = 0$ , temos poder de rotação não nulo:

$$\delta_{(\mathbf{B}_0=0)} \approx \frac{(K_{AF})_0}{2}.$$

Isso se deve ao fato da nossa abordagem estar calcada em cima da teoria de MCFJ, uma eletrodinâmica birrefringente, como já sabemos.

### 4.3 Modos de propagação para vetor de violação tipo-espaço

Nesta seção analisaremos os modos de propagação do plasma magnetizado, no contexto das equações de Maxwell modificadas (MCFJ), levando em consideração apenas a parte espacial do vetor de violação  $(K_{AF})^\mu$ . Para isso, retomamos à Eq. (4.1.22), obtida no início deste capítulo, fazendo  $(K_{AF})_0 = 0$  e  $\mathbf{J} = 0$ . Temos

$$\frac{1}{\omega \tilde{\mu}(\omega)} \mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} + \omega \tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mathbf{E}} = -i \mathbf{K}_{AF} \times \tilde{\mathbf{E}}, \quad (4.3.1)$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbf{k} \left( \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}} \right) - \mathbf{k}^2 \tilde{\mathbf{E}} = -\omega^2 \tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega) \tilde{\mathbf{E}} - i\omega \tilde{\mu}(\omega) \mathbf{K}_{AF} \times \tilde{\mathbf{E}}, \quad (4.3.2)$$

e também na forma indicial, para sua componente  $i$ , com  $\tilde{\mu}(\omega) = \mu_0$ :

$$k^i \left( \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}} \right) - \mathbf{k}^2 \tilde{E}^i = -\omega^2 \mu_0 \tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega) \tilde{E}^j - i\omega \mu_0 \epsilon_{imn} (K_{AF})^m \tilde{E}^n. \quad (4.3.3)$$

Vale lembrar que a forma do tensor de permissividade  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  é dada na Eq.(2.2.21), fornecida

pelo modelo de Appleton. Desenvolvendo a Eq. (4.3.3), escrevemos:

$$\left[ k^i k^j - \mathbf{k}^2 \delta_{ij} + \omega^2 \mu_0 \tilde{\epsilon}_{ij} + i\omega \mu_0 \epsilon_{imj} (K_{AF})^m \right] \tilde{E}^j = 0.$$

Multiplicando por  $(1/\omega^2)$  a equação anterior, torna-se:

$$\left[ n^i n^j - \mathbf{n}^2 \delta_{ij} + \frac{\tilde{\epsilon}_{ij}}{\epsilon_0} + i\epsilon_{imj} \frac{(K_{AF})^m}{\omega} \right] \tilde{E}^j = 0, \quad (4.3.4)$$

$$\tilde{\Lambda}_{ij}^{SL} \tilde{E}^j = 0. \quad (4.3.5)$$

onde usamos  $n = k/\omega$  (unidades naturais). Como já sabemos, a expressão (4.3.5) é uma equação matricial, reescrita a seguir:

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} = 0, \quad (4.3.6)$$

com cada um de seus termos dados explicitamente como:

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &= n^1 n^1 - \mathbf{n}^2 + \frac{\tilde{\epsilon}_{11}}{\epsilon_0}, & \Lambda_{23} &= n^2 n^3 + \frac{\tilde{\epsilon}_{23}}{\epsilon_0} - i \frac{(K_{AF})_x}{\omega}, \\ \Lambda_{12} &= n^1 n^2 + \frac{\tilde{\epsilon}_{12}}{\epsilon_0} - i \frac{(K_{AF})_z}{\omega}, & \Lambda_{31} &= n^3 n^1 + \frac{\tilde{\epsilon}_{31}}{\epsilon_0} - i \frac{(K_{AF})_y}{\omega}, \\ \Lambda_{13} &= n^1 n^3 + \frac{\tilde{\epsilon}_{13}}{\epsilon_0} + i \frac{(K_{AF})_y}{\omega}, & \Lambda_{32} &= n^3 n^2 + \frac{\tilde{\epsilon}_{32}}{\epsilon_0} + i \frac{(K_{AF})_x}{\omega}, \\ \Lambda_{21} &= n^2 n^1 + \frac{\tilde{\epsilon}_{21}}{\epsilon_0} + i \frac{(K_{AF})_z}{\omega}, & \Lambda_{33} &= n^3 n^3 - \mathbf{n}^2 + \frac{\tilde{\epsilon}_{33}}{\epsilon_0}, \\ \Lambda_{22} &= n^2 n^2 - \mathbf{n}^2 + \frac{\tilde{\epsilon}_{22}}{\epsilon_0}. & & - - \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Usando a Eq. (2.2.21),  $\tilde{\epsilon}_{13} = \tilde{\epsilon}_{23} = \tilde{\epsilon}_{31} = \tilde{\epsilon}_{32} = 0$ , a Eq. (4.3.4) na forma matricial é apresentada a seguir:

$$\begin{bmatrix} n_x^2 - \mathbf{n}^2 + 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & n_x n_y - \frac{i\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} - i \frac{(K_{AF})_z}{\omega} & n_x n_z + i \frac{(K_{AF})_y}{\omega} \\ n_y n_x + \frac{i\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} + i \frac{(K_{AF})_z}{\omega} & n_y^2 - \mathbf{n}^2 + 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & n_y n_z - i \frac{(K_{AF})_x}{\omega} \\ n_z n_x - i \frac{(K_{AF})_y}{\omega} & n_z n_y + i \frac{(K_{AF})_x}{\omega} & n_z^2 - \mathbf{n}^2 + 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} = 0. \quad (4.3.8)$$

$$\tilde{\Lambda}^{SL} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0, \quad (4.3.9)$$

onde  $\tilde{\Lambda}^{SL}$  é a matriz de dispersão modificada pelo vetor  $\mathbf{K}_{AF}$  de violação da simetria de Lorentz. Antes de analisar os modos longitudinais e transversais, é interessante adotar algumas simplificações. Como já feito anteriormente, fixaremos o vetor de onda na direção  $z$ , ou seja,  $\mathbf{k} = (0, 0, k)$ , o que facilita a estratégia de estudar cada um dos modos em duas situações: vetor de fundo longitudinal à direção de propagação,  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{K}_{AF}$  e vetor de fundo ortogonal à direção de propagação  $\mathbf{k} \perp \mathbf{K}_{AF}$ . Assim, torna-se conveniente, por simplificação e sem perda de generalidade, escolher apenas uma das direções transversais de  $\mathbf{K}_{AF}$  em relação

a  $\mathbf{k}$ , fazendo  $\mathbf{K}_{AF} = ((K_{AF})_x, 0, (K_{AF})_z)$ . Com tais simplificações, a Eq. (4.3.8) assume a forma:

$$\begin{bmatrix} -n^2 + 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & -\frac{i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} - i\frac{(K_{AF})_z}{\omega} & 0 \\ \frac{i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} + i\frac{(K_{AF})_z}{\omega} & -n^2 + 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & -i\frac{(K_{AF})_x}{\omega} \\ 0 & i\frac{(K_{AF})_x}{\omega} & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} = 0, \quad (4.3.10)$$

onde  $n = n_z$ .

Esta é a equação matricial que nos fornecerá os modos propagantes modificados pelo vetor de violação da simetria de Lorentz. Analisaremos as principais alterações em contraste com o caso usual, que sempre poderá ser recuperado fazendo  $\mathbf{K}_{AF} = 0$ .

### 4.3.1 Modo longitudinal ( $\mathbf{k} \parallel \tilde{\mathbf{E}}$ )

Neste modo, como  $\mathbf{k}$  está disposto na direção  $z$ , devemos estabelecer que o campo elétrico também esteja, ou seja,  $\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{E}_z \hat{z}$ . A Eq. (4.3.10) se torna:

$$\begin{bmatrix} -n^2 + 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & -\frac{i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} - i\frac{(K_{AF})_z}{\omega} & 0 \\ \frac{i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} + i\frac{(K_{AF})_z}{\omega} & -n^2 + 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & -i\frac{(K_{AF})_x}{\omega} \\ 0 & i\frac{(K_{AF})_x}{\omega} & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} = 0, \quad (4.3.11)$$

que fornece as seguintes expressões:

$$\left( -i\frac{(K_{AF})_x}{\omega} \right) \tilde{E}_z = 0, \quad (4.3.12)$$

$$\left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \tilde{E}_z = 0. \quad (4.3.13)$$

Para o caso em que  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{K}_{AF}$ , o que significa ter  $(K_{AF})_x = 0$ , resta-nos apenas a Eq. (4.3.13), que fornece o resultado convencional para o modo longitudinal, discutido no capítulo 2, ou seja:

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0 \rightarrow \omega = \omega_p. \quad (4.3.14)$$

Já para o caso em que  $\mathbf{k} \perp \mathbf{K}_{AF}$ , passa a valer também a Eq. (4.3.12). Porém, podemos observar que esta nos leva a exigir  $\tilde{E}_z = 0$ , resultando na não existência de um modo longitudinal para o caso em que  $\mathbf{k} \perp \mathbf{K}_{AF}$ . Em resumo:

- (i) Para  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{K}_{AF}$ , existe o modo longitudinal, mas este não é alterado pela presença do vetor de fundo;
- (ii) Para  $\mathbf{k} \perp \mathbf{K}_{AF}$ , não existe modo longitudinal.

### 4.3.2 Modo transversal ( $\mathbf{k} \perp \tilde{\mathbf{E}}$ )

Para o caso de propagação transversal, sendo  $\mathbf{k} = |\mathbf{k}| z$  devemos fixar  $\tilde{\mathbf{E}} = (\tilde{E}_x, \tilde{E}_y)$ , e a Eq. (4.3.10) torna-se:

$$\begin{bmatrix} S - n^2 & iD & 0 \\ -iD & S - n^2 & -i\frac{(K_{AF})_x}{\omega} \\ 0 & i\frac{(K_{AF})_x}{\omega} & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad (4.3.15)$$

onde

$$S = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)}, \quad P = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (4.3.16)$$

$$D = -\frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} - \frac{(K_{AF})_z}{\omega}. \quad (4.3.17)$$

A eq. (4.3.15) fornece as seguintes equações para as componentes do campo elétrico:

$$(S - n^2) \tilde{E}_x + iD \tilde{E}_y = 0, \quad (4.3.18)$$

$$-iD \tilde{E}_x + (S - n^2) \tilde{E}_y = 0, \quad (4.3.19)$$

$$i\frac{(K_{AF})_x}{\omega} \tilde{E}_y = 0. \quad (4.3.20)$$

Juntando as Eqs. (4.3.18) e (4.3.19), encontramos uma expressão envolvendo  $n^2$ ,  $S$  e  $D$ :

$$(S - n^2) \frac{(S - n^2)}{(iD)} \tilde{E}_y + iD \tilde{E}_y = 0, \quad (4.3.21)$$

$$n^2 = S \mp D. \quad (4.3.22)$$

Vale observar que  $S$  e  $D$  possuem dependência com a componente- $z$  do vetor de fundo. Se considerarmos primeiro a situação em que  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{K}_{AF}$ , o *background* só terá componente- $z$ , com  $(K_{AF})_x = 0$ . Nesta situação, a Eq. (4.3.20) torna-se trivial, e só restam as Eqs. (4.3.18) e (4.3.19). A Eq. (4.3.22) permanece inalterada, e fornece dois índices de refração distintos:

$$n_1^2 = S - D, \quad n_2^2 = S + D,$$

escritos explicitamente a seguir:

$$n_1^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)} + \frac{(K_{AF})_z}{\omega}, \quad (4.3.23)$$

$$n_2^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)} - \frac{(K_{AF})_z}{\omega}. \quad (4.3.24)$$

Podemos unificar os dois índices (4.3.23) e (4.3.24) em uma única expressão:

$$(n_{\pm}^s)^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)} \pm \frac{(K_{AF})_z}{\omega}. \quad (4.3.25)$$

O super-índice (s) é para distinguir os índices de refração do caso *background* tipo-espaço (*spacelike*) dos demais obtidos neste trabalho. Vemos que a presença de  $\mathbf{K}_{AF}$  contribui com um termo adicional para os índices (quadráticos) de refração, dados na Eq. (2.2.34). Faremos a seguir uma análise das modificações causadas pelo vetor de fundo.

#### 4.3.2.1 Índice de refração $n_+^s$ ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{K}_{AF}$ )

Para este caso, devemos fixar  $(K_{AF})_x = 0$ , e assegurar que  $(K_{AF})_z \neq 0$ . Assim, as relações de dispersão serão dadas por (4.3.25), que fornece para  $(n_+^s)^2$ :

$$(n_+^s)^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)} + \frac{(K_{AF})_z}{\omega}, \quad (4.3.26)$$

com as seguintes raízes:

$$\begin{aligned} \omega_{+(1)} &= \frac{1}{2} \left( -\omega_c - (K_{AF})_z - \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2 - 2(K_{AF})_z \omega_c + (K_{AF})_z^2} \right), \\ \omega_{+(2)} &= \frac{1}{2} \left( -\omega_c - (K_{AF})_z + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2 - 2(K_{AF})_z \omega_c + (K_{AF})_z^2} \right). \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

É de nosso interesse apenas frequências positivas, fato que nos restringe à primeira raiz,

$$\omega_+^s \equiv \omega_{+(2)} = \frac{1}{2} \left( -\omega_c - (K_{AF})_z + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2 - 2(K_{AF})_z \omega_c + (K_{AF})_z^2} \right), \quad (4.3.28)$$

que pode ser ou não positiva:

$$\begin{aligned} \text{Para } (K_{AF})_z > \omega_p^2/\omega_c &\rightarrow \omega_+^s > 0; \\ \text{Para } (K_{AF})_z < \omega_p^2/\omega_c &\rightarrow \omega_+^s < 0; \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

Isto significa que a curva da função  $(n_+^s)^2$  toca apenas uma vez o eixo positivo das frequências, no ponto  $\omega = \omega_+^s$ , caso  $\omega_+^s > 0$ , que funciona como frequência de corte do modo associado.

Temos as seguintes observações para este índice de refração:

- (i) Para a condição  $(K_{AF})_z > \omega_p^2/\omega_c$ , a raiz  $\omega_+^s$ , torna-se menor que zero. A Eq. (4.3.26) não possuirá raiz positiva, e fornece um índice quadrático sempre positivo,  $(n_+^s)^2 > 0$ , para  $\omega > 0$ . Ademais, temos  $(n_+^s)^2 \rightarrow +\infty$  na origem. O modo associado a este se propaga para qualquer  $\omega > 0$  (vide Figura 4.4a).

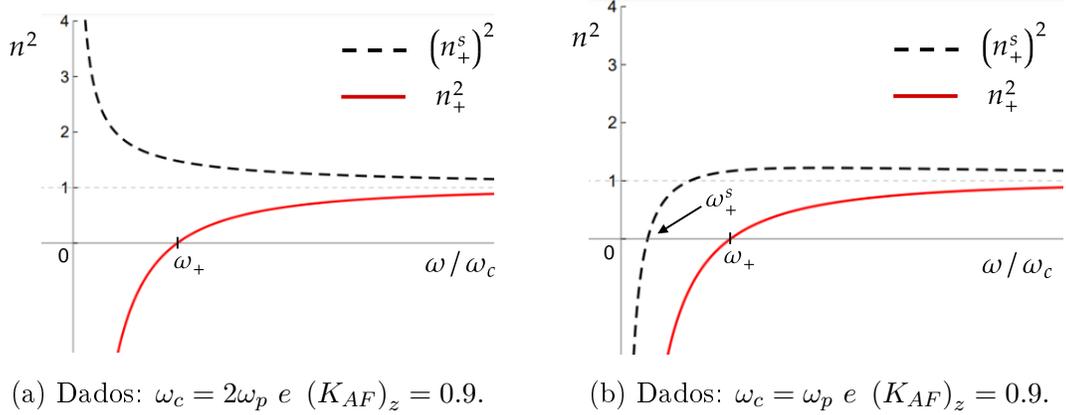


Figura 4.4: Gráfico de  $(n_+^{SL})^2$  e  $n_+^2$  (caso usual).

- (ii) A outra possibilidade, quando  $(K_{AF})_z < \omega_p^2/\omega_c$ ,  $\omega_+^s > 0$ , e  $(n_+^s)^2 \rightarrow -\infty$  na origem, como na Figura 4.4b. Neste caso, o modo associado ao índice de refração  $(n_+^s)^2$  é propagante apenas para  $\omega > \omega_+^s$ .
- (iii) Em relação ao caso usual, a frequência de corte modificada resulta menor, ou seja,  $\omega_+^s < \omega_+$ , fato que estabelece um decréscimo no intervalo de absorção, antes dado por  $0 < \omega < \omega_+$  (mostrado na Figura 2.2), agora dado por  $0 < \omega < \omega_+^s$ .
- (iv) No limite de altas frequências,  $\omega \rightarrow +\infty$ , temos  $(n_+^s)^2 \rightarrow 1$ , comportamento que permanece inalterado em relação ao caso inicial (sem LV).

Podemos verificar a polarização do modo associado ao índice  $(n_+^s)^2$ , substituindo a expressão para  $(n_+^s)^2$ , dada na Eq. (4.3.25), na expressão (4.3.15), fazendo  $(K_{AF})_x = 0$ . Assim, a Eq. (4.3.15) pode ser expressa como:

$$\begin{bmatrix} -(n_+^s)^2 + 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & -\frac{i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} - i\frac{(K_{AF})_z}{\omega} \\ \frac{i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} + i\frac{(K_{AF})_z}{\omega} & -(n_+^s)^2 + 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{bmatrix} = 0. \quad (4.3.30)$$

Buscando agora o autovetor (com autovalor nulo) da matriz apresentada, temos:

$$\tilde{E}_{(+2)} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.3.31)$$

que revela polarização LCP para tal modo.

#### 4.3.2.2 Índice de refração $n_-^s$ ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{K}_{AF}$ )

Para o índice de refração  $n_-^s$ , a Eq. (4.3.25) fornece a relação

$$(n_-^s)^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)} - \frac{(K_{AF})_z}{\omega}, \quad (4.3.32)$$

que nos leva às raízes

$$\begin{aligned}\omega_{-(1)} &= \frac{1}{2} \left( \omega_c + 2(K_{AF})_z - \sqrt{(\omega_c + 2(K_{AF})_z)^2 - 8(K_{AF})_z \omega_c - 4\omega_p^2} \right), \\ \omega_{-(2)} &= \frac{1}{2} \left( \omega_c + 2(K_{AF})_z + \sqrt{(\omega_c + 2(K_{AF})_z)^2 - 8(K_{AF})_z \omega_c - 4\omega_p^2} \right).\end{aligned}\quad (4.3.33)$$

Vamos renomeá-las como  $\omega_-^s \equiv \omega_{-2}$  e  $\omega_*^s \equiv \omega_{-1}$ . Das raízes acima, vemos que  $\omega_-^s > 0$ . Quanto a  $\omega_*^s$  pode, ou não, apresentar positividade:

$$\begin{aligned}\text{Para } (K_{AF})_z > \omega_p^2/2\omega_c &\rightarrow \omega_*^s > 0; \\ \text{Para } (K_{AF})_z < \omega_p^2/2\omega_c &\rightarrow \omega_*^s < 0;\end{aligned}\quad (4.3.34)$$

. No caso em que  $\omega_*^s > 0$ , a curva de  $(n_-^s)^2$  toca duas vezes no eixo positivo das frequências, fato que não ocorre no caso usual, vide Figura 4.5a. Nesta condição, tal índice apresenta as seguintes características:

- (i) Para  $\omega \rightarrow 0$ , temos  $(n_-^s)^2 \rightarrow -\infty$ . Consequentemente, para  $0 < \omega < \omega_*^s$ , temos  $(n_-^s)^2 < 0$  e  $n_-^s \in \mathbb{C}$ , manifestando-se uma zona de absorção.
- (ii) No intervalo,  $\omega_*^s < \omega < \omega_c$ ,  $(n_-^s)^2 > 0$  e  $n_-^s \in \mathbb{R}$ , uma zona de propagação para este modo.
- (iii) Quando  $\omega \rightarrow \omega_c$ , (pela esquerda), temos uma singularidade, onde  $(n_-^s)^2 \rightarrow -\infty$ , e  $n_-^s \in \mathbb{C}$  no intervalo  $\omega_c < \omega < \omega_-^s$ , ocorrendo absorção nesta região. Aqui percebe-se que esta zona de absorção sofre um acréscimo em relação ao caso usual, visto que  $\omega_-^s > \omega_-$  (frequência de corte do caso usual).
- (iv) Para  $\omega > \omega_-^s$ , decorre  $(n_-^s)^2 > 0$  e  $n_-^s \in \mathbb{R}$ , e temos um modo propagante nesta região. No limite de altas frequências,  $\omega \rightarrow \infty$ , ocorre  $(n_-^s)^2 \rightarrow 1$ , resultado também obtido no caso usual.

A situação em que  $\omega_*^s < 0$ , mostrada na Figura 4.5b, a função  $(n_-^s)^2$  apresenta apenas uma raiz positiva, dada por  $\omega_-^s$ . Nesta situação, o primeiro ramo da curva  $(n_-^s)^2$  não toca o eixo das frequências. No limite em que  $\omega \rightarrow 0$ , obtemos  $(n_-^s)^2 \rightarrow +\infty$ , e o intervalo de propagação do caso usual ( $0 < \omega < \omega_c$ ) volta a apresentar-se. As demais alterações motradas nos itens (iii) e (iv) também serão válidas nesta situação.

O campo elétrico advindo da matriz de dispersão é:

$$\lambda_{2-}^{SL} = 0 \rightarrow \tilde{E}_{(2-)} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix},$$

representando polarização RCP para o índice de refração  $n_-^s$ .

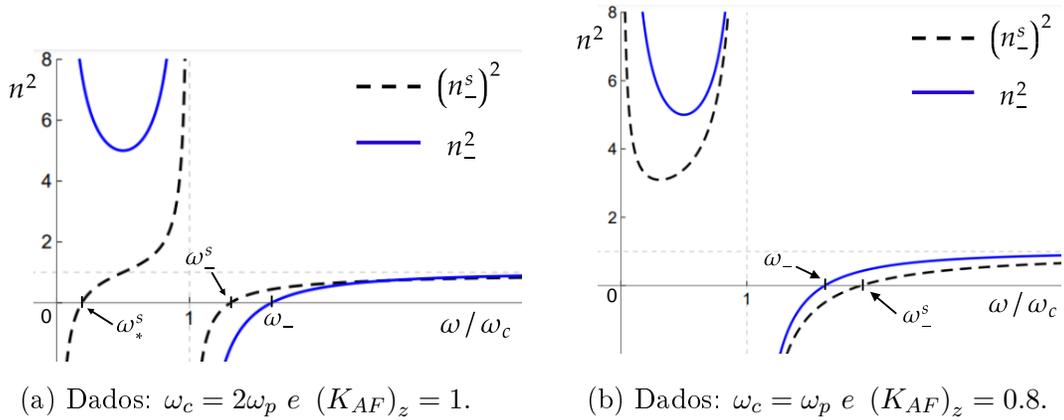


Figura 4.5: Gráfico de  $(n_-^s)^2$  e  $n_-^2$  (sem LV).

### 4.3.2.3 Índices de refração $n_{\pm}^s$ ( $\mathbf{k} \perp \mathbf{K}_{AF}$ )

Para a situação em que  $\mathbf{k} \perp \mathbf{K}_{AF}$ , fazemos  $(K_{AF})_z = 0$ . Reescrevendo as relações (4.3.18), (4.3.19) e (4.3.20), temos:

$$(S - n^2) \tilde{E}_x + iD\tilde{E}_y = 0, \quad (4.3.35)$$

$$-iD\tilde{E}_x + (S - n^2) \tilde{E}_y = 0, \quad (4.3.36)$$

$$i\frac{(K_{AF})_x}{\omega} \tilde{E}_y = 0. \quad (4.3.37)$$

Evidentemente, evitamos anular a componente  $x$  do *background*, o que nos leva à opção  $E_y = 0$ . Assim, resta-nos as equações

$$(S - n^2) \tilde{E}_x = 0, \quad (4.3.38)$$

$$-iD\tilde{E}_x = 0. \quad (4.3.39)$$

As equações acima nos levam a impor  $\tilde{E}_x = 0$ , já que  $D \neq 0$ . Este fato restringe a existência de modos transversais para o caso em  $\mathbf{k} \perp \mathbf{K}_{AF}$ . Portanto, a propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas no contexto de MCFJ, ocorre quando o vetor de onda é paralelo ao vetor de fundo ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{K}_{AF}$ ).

### 4.3.3 Modos de polarização geral

Nesta seção trataremos o caso em que o campo elétrico  $\tilde{\mathbf{E}}$  da onda não em uma direção qualquer, ou seja,  $\tilde{\mathbf{E}} = (\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, \tilde{E}_z)$ . Tomando a Eq. (4.3.10), adotando as definições (4.3.16)

e (4.3.17), temos

$$\begin{bmatrix} S - n^2 & iD & 0 \\ -iD & S - n^2 & -i\frac{(K_{AF})_x}{\omega} \\ 0 & i\frac{(K_{AF})_x}{\omega} & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} = 0. \quad (4.3.40)$$

A equação acima fornece o seguinte sistema de equações:

$$(S - n^2) \tilde{E}_x + iD \tilde{E}_y = 0, \quad (4.3.41)$$

$$-iD \tilde{E}_x + (S - n^2) \tilde{E}_y - i\frac{(K_{AF})_x}{\omega} \tilde{E}_z = 0, \quad (4.3.42)$$

$$i\frac{(K_{AF})_x}{\omega} \tilde{E}_y + P \tilde{E}_z = 0. \quad (4.3.43)$$

Podemos impor sem perda de generalidade que  $E_y = 1$ , o que nos permite escrever:

$$\tilde{E}_x = -iD / (S - n^2), \quad (4.3.44)$$

$$-iD \tilde{E}_x + (S - n^2) \tilde{E}_y - i\frac{(K_{AF})_x}{\omega} \tilde{E}_z = 0, \quad (4.3.45)$$

$$i\tilde{E}_z = -i(K_{AF})_x / \omega P. \quad (4.3.46)$$

Esse sistema nos leva à expressão para o índice de refração:

$$n = \sqrt{S - \frac{(K_{AF})_x^2}{2\omega^2 P} \mp \sqrt{\frac{(K_{AF})_x^4}{4\omega^4 P^2} + D^2}}. \quad (4.3.47)$$

O modo de propagação associado ao índice de refração acima é dado por:

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\Delta \\ 1 \\ -i\frac{(K_{AF})_x}{\omega P} \end{bmatrix}, \quad (4.3.48)$$

onde definimos

$$\Delta = \frac{D}{\frac{(K_{AF})_x^2}{2\omega^2 P} \pm \sqrt{\frac{(K_{AF})_x^4}{4\omega^4 P^2} + D^2}}. \quad (4.3.49)$$

A Eq. (4.3.48) representa o modo de propagação geral em plasmas magnetizados para o caso de vetor de violação tipo-espaço.

Perceba que se fizermos  $(K_{AF})_x = 0$ , o índice de refração (4.3.47) recai na expressão (4.3.25), fornecendo os mesmos índices de refração para o caso  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{K}_{AF}$ . Nesta situação a

polarização associada é dada por

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.3.50)$$

revelando campo elétrico LCP ou RCP, dependendo da escolha dos sinais na Eq. (4.3.47).

Para o caso em que  $(K_{AF})_z = 0$ , temos,

$$D = -\frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega (\omega^2 - \omega_c^2)}, \quad (4.3.51)$$

e a Eq. (4.3.47) fornece seguinte índice de refração:

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} - \frac{(K_{AF})_x^2}{2(\omega^2 - \omega_p^2)}} \mp \sqrt{\frac{(K_{AF})_x^4}{4\omega^8 (\omega^2 - \omega_p^2)^2} + \frac{\omega_c^2 \omega_p^4}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_c^2)^2}}, \quad (4.3.52)$$

associado ao modo de propagação

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\Delta_x \\ 1 \\ -i\frac{(K_{AF})_x}{\omega P} \end{bmatrix}, \quad (4.3.53)$$

onde

$$\Delta = \frac{\omega_c^2 \omega_p^4 / \omega^2 (\omega^2 - \omega_c^2)^2}{\left( \frac{(K_{AF})_x^2}{2\omega^2 (\omega^2 - \omega_p^2)} \pm \sqrt{\frac{(K_{AF})_x^4}{4\omega^8 (\omega^2 - \omega_p^2)^2} + \frac{\omega_c^2 \omega_p^4}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_c^2)^2}} \right)}. \quad (4.3.54)$$

A expressão (4.3.53) representa a polarização para o modo de propagação geral quando  $(K_{AF})_z = 0$ . Vemos que neste caso a análise da polarização é dificultada, uma vez que o vetor de polarização apresenta uma forma extensa.

#### 4.3.4 Rotação de Faraday para o caso vetor de fundo tipo-espaço

Para o caso  $(K_{AF})_\mu = (0, \mathbf{K}_{AF})$ , o modelo de Appleton fornece velocidades distintas para os dois modos:

$$u_{ph+}^s = \frac{1}{n_+^s} = \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega (\omega + \omega_c) + (K_{AF})_z/\omega}}, \quad (4.3.55)$$

$$u_{ph-}^s = \frac{1}{n_-^s} = \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega (\omega - \omega_c) - (K_{AF})_z/\omega}}, \quad (4.3.56)$$

relacionadas à  $n_+^s$  e  $n_-^s$ , respectivamente. Com tais modos propagando-se com velocidades diferentes, ocorre o efeito Faraday, que agora recebe contribuição da componente espacial do

*background*. Partindo da definição (2.3.13) para o poder de rotação, escrevemos:

$$\delta = \frac{\pi}{\lambda} (n_+^s - n_-^s). \quad (4.3.57)$$

Tomaremos novamente a condição  $\omega \gg (\omega_p, \omega_c)$ , que leva os índices de refração (4.3.25) à

$$n_{\pm}^{SL} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega \pm \omega_c)} \pm \frac{(K_{AF})_z}{2\omega}. \quad (4.3.58)$$

Logo, o poder de rotação será escrito como:

$$\delta \approx \frac{\pi}{\lambda} \left( -\frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega + \omega_c)} + \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega - \omega_c)} + \frac{(K_{AF})_z}{\omega} \right), \quad (4.3.59)$$

$$\delta \approx \frac{(K_{AF})_z}{2} + \frac{\omega_p^2 \omega_c}{2\omega^2}. \quad (4.3.60)$$

Dessa forma, vemos que o poder de rotação para este caso recebe contribuição do *background*, em um termo frequência-independente. Assim como no caso do *background* tipo-tempo, a contribuição do vetor de fundo foi em primeira ordem no parâmetro de violação, sem a necessidade de exclusão de termos de ordem superior.

# Considerações Finais

Foi apresentado neste trabalho o modelo de Appleton para plasmas magnetizados, desenvolvido para abordar a propagação de ondas eletromagnéticas na Ionosfera, onde a presença de um campo magnético externo é considerado na força de Lorentz. Fazendo uso das equações de Maxwell para meios materiais, estudamos os modos de propagação longitudinal e transversal. Verificamos que o modo longitudinal não se propaga, correspondendo a um modo de vibração quando  $\omega = \omega_p$ . O modo transversal fornece os índices de refração  $n_+$  e  $n_-$ , sendo estes circularmente polarizado à esquerda (LCP) e circularmente polarizado à direita (RCP), respectivamente. Foram listadas as principais características destes modos, como os intervalos de propagação e absorção da onda eletromagnética. Também foi discutido o fenômeno de birrefringência (rotação do plano de polarização), que ocorre graças à defasagem entres as ondas RCP e LCP, quando estas se propagam no mesmo intervalo de frequência, como no caso em que  $\omega > \omega_-$ . Diante disto, foi calculado o "poder de rotação"  $\delta$  (diferença de fase por unidade de comprimento), obtida através da diferença entre os índices de refração  $n_+$  e  $n_-$ .

Além disso, foram abordados alguns aspectos da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw, como a obtenção das equações de movimento e o comportamento dos coeficientes de Carrol-Field-Jackiw sob ação das operações de paridade, inversão temporal e conjugação de carga. Constatamos que a eletrodinâmica de Maxwell-Carrol-Field-Jackiw viola não apenas a simetria de Lorentz, mas também a simetria CPT, ambas preservadas na eletrodinâmica de Maxwell usual. Analisando as relações de dispersão modificadas desta teoria, manifesta-se o efeito de birrefringência no vácuo, a partir do qual, usando dados coletados através da luz vinda de galáxias distantes, foi possível estimar um valor muito restritivo ao parâmetro de violação,  $|V_0 - |\mathbf{V}| \cos \theta| < 4.4 \times 10^{-33} eV$ .

Dentro da proposta deste trabalho, consideramos o modelo de Appleton no contexto da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw. Os termos de que provocam a quebra de simetria de Lorentz modificam a matriz de dispersão, que foi estudada em dois casos: vetor de violação tipo-tempo, com  $(K_{AF})^\mu = ((K_{AF})_0, 0)$ , e vetor de violação tipo-espaço, com  $(K_{AF})^\mu = (0, \mathbf{K}_{AF})$ . No caso de vetor de violação tipo-tempo, o modo longitudinal mantém-se como no caso sem violação de Lorentz. Por sua vez, o modo transversal fornece 3 índices de refração com intervalos de positividade. O primeiro deles,  $n_+^t$ , pode apresentar positividade para todo valor de frequência, desde que  $\omega > \omega_+$ . No entanto, isto também ocorre quando  $\omega < \omega_+$ , mas com uma restrição para valores de  $(K_{AF})_0$ , como mostrado na Eq. (4.2.18). O

índice de refração  $n_E$  apresenta um pequeno intervalo de positividade,  $0 < \omega < \omega_+$ , podendo apresentar absorção e propagação, o que depende de valores para *background*. Quanto ao índice de refração  $n_-^t$ , a modificação mais evidente ocorre para o limite em que  $\omega \rightarrow 0$ , quando este assume um valor finito inversamente proporcional a  $(K_{AF})_0$ ,  $n_-^t(0) = \omega_p^2 / (K_{AF})_0 \omega_c$ . Dentro desse contexto, obtemos também o poder de rotação para plasma magnetizado, que recebe contribuição do termo  $(K_{AF})_0 / 2$ , independente da frequência, considerando a condição  $\omega \gg (\omega_p^2, \omega_c)$ .

O caso de vetor de violação tipo-espaço foi dividido em duas situações: para  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{K}_{AF}$  e  $\mathbf{k} \perp \mathbf{K}_{AF}$ . Revelou-se mais interessante o caso  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{K}_{AF}$ , pois foi o único a de fato promover alterações consistentes nos índices de refração. Essa possibilidade não oferece modificações ao modo longitudinal. Porém, o modo transversal fornece dois índices de refração modificados,  $n_+^s$  e  $n_-^s$ . O primeiro destes pode apresentar-se como positivo para todo  $\omega$ , quando  $(K_{AF})_z$  e  $\omega_c$  (frequência de ciclotron) forem suficientemente grandes. Quando isto não acontece, este modo propaga para  $\omega > \omega_+^s$  (frequência de corte deste modo). Por outro lado, o índice de refração  $n_-^s$  pode apresentar uma ou duas raízes reais. Quando apresenta uma raiz, este modo tem forma semelhante ao caso sem violação de Lorentz, alterando apenas o valor da frequência de corte. Porém, quando ocorre também a segunda raiz, a zona de propagação entre a origem e a frequência de ciclotron é diminuída, passando a ser limitada entre a frequência de corte  $\omega_*^s$  e  $\omega_c$ , ou seja, o modo associado ao índice  $n_-^s$  se propaga para  $\omega_*^s < \omega < \omega_c$ . Por fim, calculamos também o poder de rotação para o caso vetor de fundo tipo-espaço, que recebe contribuição do termo  $(K_{AF})_z / 2$ , que não depende da frequência.

É interessante notar que, conforme as Eqs. (4.2.36) e (4.3.60), um plasma livre de campo magnético externo também apresenta rotação de Faraday quando adotadas as equações de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw, resultado que não ocorre dentro do contexto usual da eletrodinâmica de Maxwell.

Este trabalho é possivelmente o primeiro a propôr o estudo de propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas dentro de um contexto de violação da simetria de Lorentz. Isto nos permitiu reavaliar alguns resultados obtidos para plasmas magnetizados, como a rotação de Faraday que recebe contribuições do parâmetro de violação. Os resultados presentes neste trabalho podem ser ainda estendidos para plasmas frios, onde os campos elétrico e magnético devem influenciar o movimento de íons e elétrons, proporcionando o surgimento de frequências características que dependem da massa destas partículas. Plasmas aquecidos também podem ser abordados dentro deste contexto, onde a velocidade térmica das partículas são levadas em consideração, fato que enriquece ainda mais o tratamento de propagação de ondas em plasmas. Além disso, este estudo pode ser realizado para situações onde a propagação da onda eletromagnética ocorre na direção transversal ao campo magnético, caso que não foi abordado neste trabalho.

# Apêndice A

## Análise da positividade para os índices de refração no caso timelike

Aqui temos uma análise a respeito da positividade dos índices de refração do caso vetor de violação tipo-tempo, uma vez que devemos trabalhar, neste modelo de dispersão, apenas com índices positivos. Observando as expressões para os índices de refração,

$$n_1 = -\frac{c(K_{AF})_0}{2\omega} - \frac{\sqrt{(\omega - \omega_c) ((K_{AF})_0^2 c^2 + 4\omega^2) - 4\omega\omega_p^2}}{2\omega\sqrt{(\omega - \omega_c)}}, \quad (\text{A.0.1})$$

$$n_2 = -\frac{c(K_{AF})_0}{2\omega} + \frac{\sqrt{(\omega - \omega_c) ((K_{AF})_0^2 c^2 + 4\omega^2) - 4\omega\omega_p^2}}{2\omega\sqrt{(\omega - \omega_c)}}, \quad (\text{A.0.2})$$

$$n_3 = \frac{c(K_{AF})_0}{2\omega} - \frac{\sqrt{(\omega + \omega_c) ((K_{AF})_0^2 c^2 + 4\omega^2) - 4\omega\omega_p^2}}{2\omega\sqrt{(\omega + \omega_c)}}, \quad (\text{A.0.3})$$

$$n_4 = \frac{c(K_{AF})_0}{2\omega} + \frac{\sqrt{(\omega + \omega_c) ((K_{AF})_0^2 c^2 + 4\omega^2) - 4\omega\omega_p^2}}{2\omega\sqrt{(\omega + \omega_c)}}, \quad (\text{A.0.4})$$

vemos que, de fato,  $n_1 < 0$ , ao passo que  $n_4 > 0$ .

Para analisar  $n_2$ , partiremos da inequação em que  $n_2 > 0$ . Assim,

$$-\frac{c(K_{AF})_0}{2\omega} + \frac{\sqrt{(\omega - \omega_c) ((K_{AF})_0^2 c^2 + 4\omega^2) - 4\omega\omega_p^2}}{2\omega\sqrt{(\omega - \omega_c)}} > 0, \quad (\text{A.0.5})$$

$$-c(K_{AF})_0\sqrt{(\omega - \omega_c)} + \sqrt{(\omega - \omega_c) ((K_{AF})_0^2 c^2 + 4\omega^2) - 4\omega\omega_p^2} > 0, \quad (\text{A.0.6})$$

$$\sqrt{(\omega - \omega_c) ((K_{AF})_0^2 c^2 + 4\omega^2) - 4\omega\omega_p^2} > c(K_{AF})_0\sqrt{(\omega - \omega_c)}, \quad (\text{A.0.7})$$

$$(K_{AF})_0^2 c^2 (\omega - \omega_c) + 4\omega^2 (\omega - \omega_c) - 4\omega\omega_p^2 > c^2 (K_{AF})_0^2 (\omega - \omega_c), \quad (\text{A.0.8})$$

$$4\omega^2 (\omega - \omega_c) - 4\omega\omega_p^2 > 0, \quad (\text{A.0.9})$$

$$4\omega [\omega (\omega - \omega_c) - \omega_p^2] > 0 \rightarrow \omega (\omega - \omega_c) - \omega_p^2 > 0. \quad (\text{A.0.10})$$

Assim, para os valores de  $\omega$  nos quais a inequação (A.0.10) é satisfeita, teremos  $n_2$  positivo. Como tal inequação é de segundo grau, possui duas raízes:

$$\omega_{2+} = \frac{1}{2} \left( \omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \right) \text{ e } \omega_{2-} = \frac{1}{2} \left( \omega_c - \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \right). \quad (\text{A.0.11})$$

Sendo  $\sqrt{\omega_c^2 + \omega_p^2} > \omega_c$ , vemos que  $\omega_{2+} > 0$  e  $\omega_{2-} < 0$ , indicando que  $\omega_{2+}$  está localizado região positiva do eixo -  $\omega$ , enquanto  $\omega_{2-}$  está na região negativa, como mostrado na Figura (A.1). Evidentemente, estamos interessados apenas na região onde  $\omega > 0$  (frequências positivas). Assim, verificamos que o índice de refração  $n_2$  é positivo para valores de frequência tais que  $\omega > \omega_{2+}$ , com  $\omega_{2+}$  dado pela Eq. (A.0.11).

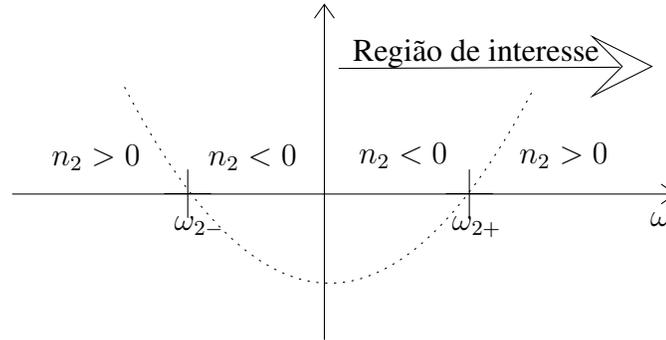


Figura A.1: Valores de  $\omega$  para positividade e negatividade de  $n_2$ .

Para o índice de refração  $n_3$ , partiremos de  $n_3 > 0$ . Teremos:

$$\frac{c(K_{AF})_0}{2\omega} - \frac{\sqrt{(\omega + \omega_c) ((K_{AF})_0^2 c^2 + 4\omega^2) - 4\omega\omega_p^2}}{2\omega\sqrt{(\omega + \omega_c)}} > 0, \quad (\text{A.0.12})$$

$$\frac{c(K_{AF})_0}{2\omega} > \frac{\sqrt{(\omega + \omega_c) ((K_{AF})_0^2 c^2 + 4\omega^2) - 4\omega\omega_p^2}}{2\omega\sqrt{(\omega + \omega_c)}}, \quad (\text{A.0.13})$$

$$c(K_{AF})_0 \sqrt{(\omega + \omega_c)} > \sqrt{(\omega + \omega_c) ((K_{AF})_0^2 c^2 + 4\omega^2) - 4\omega\omega_p^2}, \quad (\text{A.0.14})$$

$$(K_{AF})_0^2 c^2 (\omega + \omega_c) > (K_{AF})_0^2 c^2 (\omega + \omega_c) + 4\omega^2 (\omega + \omega_c) - 4\omega\omega_p^2, \quad (\text{A.0.15})$$

$$4\omega^2 (\omega + \omega_c) - 4\omega\omega_p^2 < 0, \quad (\text{A.0.16})$$

$$4\omega [\omega (\omega + \omega_c) - \omega_p^2] < 0 \rightarrow \omega (\omega + \omega_c) - \omega_p^2 < 0. \quad (\text{A.0.17})$$

Vemos agora que, para valores de frequências que satisfaçam a inequação (A.0.17),  $n_3$  será positivo. Esta inequação possui duas raízes:

$$\omega_{3+} = \frac{1}{2} \left( -\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \right) \text{ e } \omega_{3-} = -\frac{1}{2} \left( \omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \right). \quad (\text{A.0.18})$$

Pela análise do radicando da Eqs. (A.0.18), nota-se que  $\omega_{3+} > 0$  e  $\omega_{3-} < 0$ , indicando que estão localizados na região positiva e negativa do eixo -  $\omega$ , respectivamente. Neste caso, vemos que o intervalo de interesse, onde  $n_3$  é positivo, está compreendido em  $0 < \omega < \omega_{3+}$ , como mostrado na Figura (A.2).

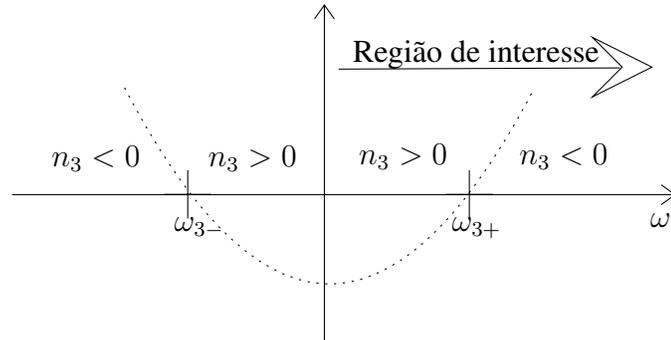


Figura A.2: Valores de  $\omega$  para positividade e negatividade de  $n_3$ .

# Apêndice B

## Transformações discretas

### B.1 Comportamento de algumas grandezas sob operação de paridade

A operação de paridade consiste na transformação  $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\mathcal{P}} -\mathbf{E}, \quad A_0 \xrightarrow{\mathcal{P}} +A_0, \quad (\text{B.1.1})$$

$$\mathbf{B} \xrightarrow{\mathcal{P}} +\mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \xrightarrow{\mathcal{P}} -\mathbf{A}, \quad (\text{B.1.2})$$

$$A_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} A^\mu, \quad J_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} J^\mu, \quad \partial_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} \partial^\mu, \quad (\text{B.1.3})$$

**Campo elétrico sob paridade:**

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}; \quad (\text{B.1.4})$$

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(-\mathbf{r} + \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (\text{B.1.5})$$

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\mathcal{P}} -\mathbf{E}; \quad (\text{B.1.6})$$

**Densidade de corrente sob paridade:**

$$\mathbf{J} = ne\mathbf{v}; \quad (\text{B.1.7})$$

$$\mathbf{J} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{J}' = -ne\mathbf{v}, \quad (\text{B.1.8})$$

$$\mathbf{J} \xrightarrow{\mathcal{P}} -\mathbf{J}. \quad (\text{B.1.9})$$

Além disso, para a **densidade de carga**:

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E};$$

$$\rho \xrightarrow{\mathcal{P}} \rho' = \varepsilon_0 (-\nabla) \cdot (-\mathbf{E}), \quad (\text{B.1.10})$$

$$\rho \xrightarrow{\mathcal{P}} \rho. \quad (\text{B.1.11})$$

Com os dois resultados acima, podemos escrever para a **4-corrente**, adotando:

$$J_\mu = (J_0, J_i), \quad J_0 = \rho, \quad J_i = (\mathbf{J})_i. \quad (\text{B.1.12})$$

Assim, obtemos:

$$J_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} J'_\mu = (J_0, -J_i) = (J_0, J^i), \quad (\text{B.1.13})$$

$$J_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} J^\mu \quad (\text{B.1.14})$$

**Potencial**  $A_0$  sob paridade (quantidade escalar):

$$A_0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A_0. \quad (\text{B.1.15})$$

**Potencial vetor**  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}'; \quad (\text{B.1.16})$$

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{A}' = - \int_{\Omega} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}', \quad (\text{B.1.17})$$

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\mathcal{P}} -\mathbf{A}. \quad (\text{B.1.18})$$

Com os resultados para  $A_0$  e  $\mathbf{A}$ , podemos escrever para o **4-potencial**:

$$A_\mu = (A_0, A_i); \quad (\text{B.1.19})$$

$$A_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} A'_\mu = (A_0, -A_i) = (A_0, A^i), \quad (\text{B.1.20})$$

$$A_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} A^\mu. \quad (\text{B.1.21})$$

**Campo magnético** sob paridade:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}; \quad (\text{B.1.22})$$

$$\mathbf{B} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{B}' = (-\nabla) \times (-\mathbf{A}), \quad (\text{B.1.23})$$

$$\mathbf{B} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{B} \quad (\text{B.1.24})$$

Nesta seção usamos o fato das derivadas espaciais dependerem apenas da posição, o que permite escrever

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (\text{B.1.25})$$

$$\partial_i \xrightarrow{\mathcal{P}} \partial'_i = -\frac{\partial}{\partial x^i} = -\partial_i, \quad (\text{B.1.26})$$

$$\partial_i \xrightarrow{\mathcal{P}} \partial^i. \quad (\text{B.1.27})$$

Como a derivada temporal não sofre ação da paridade, escrevemos:

$$\partial_\mu = (\partial_0, \partial_i) \quad (\text{B.1.28})$$

$$\partial_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} \partial^\mu. \quad (\text{B.1.29})$$

## B.2 Comportamento de algumas grandezas sob reversão temporal

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathbf{E}, \quad A_0 \xrightarrow{\mathcal{T}} A_0, \quad (\text{B.2.1})$$

$$\mathbf{B} \xrightarrow{\mathcal{T}} -\mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \xrightarrow{\mathcal{T}} -\mathbf{A}, \quad (\text{B.2.2})$$

$$A_\mu \xrightarrow{\mathcal{T}} A^\mu, \quad J_\mu \xrightarrow{\mathcal{T}} J^\mu, \quad (\text{B.2.3})$$

Para demonstrar esses resultados, consideramos, algumas grandezas clássicas, como velocidade ( $\mathbf{v}$ ) e momento linear ( $\mathbf{p}$ ), que são ímpares sob a inversão temporal:

$$\mathbf{v} \xrightarrow{\mathcal{T}} -\mathbf{v}, \quad \mathbf{p} \xrightarrow{\mathcal{T}} -\mathbf{p}. \quad (\text{B.2.4})$$

Por outro lado, a força ( $\mathbf{F}$ ) e a aceleração ( $\mathbf{a}$ ) são pares:

$$\mathbf{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathbf{F}, \quad \mathbf{a} \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathbf{a}. \quad (\text{B.2.5})$$

Deste modo, a segunda lei de Newton  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$  é invariante sob inversão temporal. Escrevendo a força de Lorentz,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (\text{B.2.6})$$

podemos então perceber, considerando as equações anteriores, como o **campo elétrico** e **campo magnético** se transformam:

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \xrightarrow{\mathcal{T}} -\mathbf{B}. \quad (\text{B.2.7})$$

Como a velocidade é ímpar sob inversão temporal, a **densidade de corrente** também será:

$$\mathbf{J} \xrightarrow{\mathcal{T}} -\mathbf{J}. \quad (\text{B.2.8})$$

Como a densidade de carga  $\rho$ , a componente (0) da **4-corrente**, é par sob tal transformação, podemos escrever:

$$J_\mu \xrightarrow{\mathcal{T}} J'_\mu = (J_0, -J_i) = (J_0, J^i), \quad (\text{B.2.9})$$

$$J_\mu \xrightarrow{\mathcal{T}} J^\mu. \quad (\text{B.2.10})$$

Como o **potencial vetor** é determinado pela corrente  $\mathbf{J}$ , também será revertido:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\mathcal{T}} -\mathbf{A}. \quad (\text{B.2.11})$$

O **potencial escalar**  $A_0$  depende da densidade de carga  $\rho$ , sendo também par sob inversão temporal:

$$A_0 \xrightarrow{\mathcal{T}} -A_0.$$

Esses resultados nos permite escrever a transformação para o **4-potencial**:

$$A_\mu \xrightarrow{\mathcal{T}} A^\mu. \quad (\text{B.2.12})$$

### B.3 Comportamento de algumas grandezas sob conjugação de carga

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\mathcal{C}} -\mathbf{E}, \quad A_0 \xrightarrow{\mathcal{C}} -A_0, \quad (\text{B.3.1})$$

$$\mathbf{B} \xrightarrow{\mathcal{C}} -\mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \xrightarrow{\mathcal{C}} -\mathbf{A}, \quad (\text{B.3.2})$$

$$A_\mu \xrightarrow{\mathcal{C}} -A^\mu, \quad J_\mu \xrightarrow{\mathcal{C}} -J_\mu, \quad (\text{B.3.3})$$

Os resultados acima são obtidos facilmente, uma vez que a transformação  $q \rightarrow -q$  garante que a **densidade de carga** ( $\rho$ ) e a **densidade de corrente** ( $\mathbf{J}$ ) sejam ímpares sob conjugação de carga. O **campo elétrico** e o **potencial escalar**  $A_0$  dependem da carga e da densidade de carga, respectivamente. Portanto são também ímpares:

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\mathcal{C}} -\mathbf{E}, \quad A_0 \xrightarrow{\mathcal{C}} -A_0. \quad (\text{B.3.4})$$

O **potencial vetor**  $\mathbf{A}$  depende da densidade de corrente, sendo também ímpar sob conju-

gação de carga. Consequentemente, o **campo magnético B** também será:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{c} -\mathbf{A}, \mathbf{B} \xrightarrow{c} -\mathbf{B}. \quad (\text{B.3.5})$$

Com os resultados acima, a 4-corrente também será ímpar sob tal transformação:

$$J_\mu \xrightarrow{c} -J_\mu. \quad (\text{B.3.6})$$

# Apêndice C

## Equação de movimento MCFJ

### C.1 Forma indicial

Partiremos da equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\lambda} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = 0. \quad (\text{C.1.1})$$

Reescrevendo a Lagrangeana (3.2.1) com termo de fonte,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu A^\nu F^{\alpha\beta} - J_\alpha A^\alpha, \quad (\text{C.1.2})$$

calculamos o primeiro termo da equação acima:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\lambda} = \frac{\partial (-J_\alpha A^\alpha)}{\partial A_\lambda} - \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\partial ((K_{AF})^\mu A^\nu F^{\alpha\beta})}{\partial A_\lambda}, \quad (\text{C.1.3})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\lambda} = -J_\alpha g^{\alpha\lambda} - \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu F^{\alpha\beta} g^{\nu\lambda}, \quad (\text{C.1.4})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\lambda} = -J^\lambda + \frac{1}{4} \epsilon^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu F^{\alpha\beta}. \quad (\text{C.1.5})$$

O segundo termo de (3.4.1) será:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} - \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu A^\nu \frac{\partial (F^{\alpha\beta})}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)}, \quad (\text{C.1.6})$$

onde as derivadas fornecem

$$\frac{\partial (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = 2 \frac{\partial (F_{\alpha\beta})}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} F^{\alpha\beta} = 2 (\delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\lambda - \delta_\beta^\sigma \delta_\alpha^\lambda) F^{\alpha\beta} = 2 (F^{\sigma\lambda} - F^{\lambda\sigma}) = 4F^{\sigma\lambda}, \quad (\text{C.1.7})$$

$$\frac{\partial (F^{\alpha\beta})}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = \frac{\partial (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = (g^{\alpha\sigma} g^{\beta\lambda} - g^{\beta\sigma} g^{\alpha\lambda}). \quad (\text{C.1.8})$$

Com isso, temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = -F^{\sigma\lambda} - \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu A^\nu (g^{\alpha\sigma} g^{\beta\lambda} - g^{\beta\sigma} g^{\alpha\lambda}), \quad (\text{C.1.9})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = -F^{\sigma\lambda} - \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu A^\nu g^{\alpha\sigma} g^{\beta\lambda} + \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu A^\nu g^{\beta\sigma} g^{\alpha\lambda}, \quad (\text{C.1.10})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = -F^{\sigma\lambda} - \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu}{}^{\sigma\lambda} (K_{AF})^\mu A^\nu + \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu}{}^{\lambda\sigma} (K_{AF})^\mu A^\nu, \quad (\text{C.1.11})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = -F^{\sigma\lambda} - \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu}{}^{\sigma\lambda} (K_{AF})^\mu A^\nu. \quad (\text{C.1.12})$$

Substituindo (C.1.5) e (C.1.12) na Lagrangeana, teremos

$$-J^\lambda + \frac{1}{4} \epsilon^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu F^{\alpha\beta} + \partial_\sigma F^{\sigma\lambda} + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu}{}^{\sigma\lambda} (K_{AF})^\mu \partial_\sigma A^\nu = 0, \quad (\text{C.1.13})$$

$$-J^\lambda + \frac{1}{4} \epsilon^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu F^{\alpha\beta} + \partial_\sigma F^{\sigma\lambda} + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma}{}^\lambda (K_{AF})^\mu \partial^\sigma A^\nu = 0, \quad (\text{C.1.14})$$

$$\partial_\sigma F^\sigma{}_\lambda + \underbrace{\frac{1}{4} \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu F^{\alpha\beta}}_{\frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu \partial^\alpha A^\beta} + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\lambda} (K_{AF})^\mu \partial^\sigma A^\nu = J_\lambda, \quad (\text{C.1.15})$$

$$\partial_\sigma F^\sigma{}_\lambda + \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu \partial^\alpha A^\beta + \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\mu\sigma\nu} (K_{AF})^\mu \partial^\sigma A^\nu = J_\lambda, \quad (\text{C.1.16})$$

que resulta na equação de movimento

$$\partial_\sigma F^\sigma{}_\lambda + \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu \partial^\alpha A^\beta = J_\lambda. \quad (\text{C.1.17})$$

## C.2 Forma vetorial

A Eq. (3.4.7), abaixo reescrita,

$$\partial_\sigma F^{\sigma\lambda} + \frac{1}{2} \epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})_\mu F_{\alpha\beta} = J^\lambda,$$

fornece explicitamente a lei de Gauss quando tomamos  $\lambda = 0$ :

$$\begin{aligned} \partial_i F^{i0} + \frac{1}{2} \epsilon^{0ijk} (K_{AF})_i F_{jk} = J^0 & \rightarrow \partial_i F^{i0} - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (K_{AF})_i F_{jk} = J^0, \\ \partial_i E^i - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (K_{AF})_i \epsilon_{jkm} B_m = J^0 & \rightarrow \partial_i E^i - \frac{1}{2} \epsilon_{jki} \epsilon_{jkm} (K_{AF})_i (K_{AF})_m = J^0, \\ \partial_i E^i - \frac{1}{2} 2\delta_{mi} (K_{AF})_i B_m = J^0 & \rightarrow \partial_i E^i - (K_{AF})_m B_m = J^0, \end{aligned}$$

que na forma vetorial é

$$\partial_i E^i - \mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B} = \rho \quad \text{ou} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} - \mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B} = \rho, \quad (\text{C.2.1})$$

onde  $\rho$  é densidade de carga. A lei de Ampère é obtida fazendo  $\lambda = i$  na Eq. (3.4.7):

$$\partial_\sigma F^{\sigma i} + \frac{1}{2} \epsilon^{i\mu\alpha\beta} (K_{AF})_\mu F_{\alpha\beta} = J^i \quad (\text{C.2.2})$$

$$\partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} + \frac{1}{2} \epsilon^{i0lm} (K_{AF})_0 F_{lm} + \frac{1}{2} \epsilon^{ik0m} (K_{AF})_k F_{0m} + \frac{1}{2} \epsilon^{ikm0} (K_{AF})_k F_{m0} = J^i \quad (\text{C.2.3})$$

$$\partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} + \frac{1}{2} \epsilon^{i0lm} (K_{AF})_0 F_{lm} + \frac{1}{2} 2\epsilon^{ik0m} (K_{AF})_k F_{0m} = J^i, \quad (\text{C.2.4})$$

$$-\partial_t E^i + \epsilon_{jik} \partial_j B_k - \frac{1}{2} \epsilon^{ilm} (K_{AF})_0 \epsilon_{lmp} B_p + \epsilon^{ikm} (K_{AF})_k E^m = J^i, \quad (\text{C.2.5})$$

onde usamos  $\epsilon^{0ilm} = \epsilon^{ilm}$ , que permite passar do símbolo de Levi-Civita 4-dimensional para o 3-dimensional. Assim,

$$-\partial_t E^i - \epsilon_{ijk} \partial_j B_k + \frac{1}{2} \epsilon_{ilm} \epsilon_{lmp} (K_{AF})_0 B_p + \epsilon^{ikm} (K_{AF})_k E^m = J^i, \quad (\text{C.2.6})$$

$$-\partial_t E^i - \epsilon_{ijk} \partial_j B_k + \frac{1}{2} 2\delta_{ip} (K_{AF})_0 B_p - \epsilon^{ikm} (K_{AF})^k E^m = J^i, \quad (\text{C.2.7})$$

$$-\partial_t E^i - \epsilon_{ijk} \partial_j B_k + (K_{AF})_0 B_i + \epsilon_{ikm} (K_{AF})^k E^m = J^i, \quad (\text{C.2.8})$$

$$-\partial_t E^i + \epsilon_{ijk} \partial_j B^k - (K_{AF})_0 B^i + (\mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E})^i = J^i, \quad (\text{C.2.9})$$

obtemos, usando a densidade de corrente  $\mathbf{j}$ ,

$$-\partial_t E^i + (\nabla \times \mathbf{B})^i - (K_{AF})_0 B^i + (\mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E})^i = J^i, \quad (\text{C.2.10})$$

$$-\partial_t \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{B} - (K_{AF})_0 \mathbf{B} + \mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E} = \mathbf{j}. \quad (\text{C.2.11})$$

# Apêndice D

## Forma da matriz de dispersão MCFJ

Como a matriz é muito extensa, foi necessário colocá-la aqui separadamente, na página seguinte.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}
-i(K_{AF})_2 p_3 - i(K_{AF})_3 p_2 & -i(K_{AF})_2 p_3 + i(K_{AF})_3 p_2 & i(K_{AF})_1 p_3 - i(K_{AF})_3 p_1 & -i(K_{AF})_1 p_2 + i(K_{AF})_2 p_1 \\
-i(K_{AF})_1 p_3 + i(K_{AF})_3 p_1 & -i(K_{AF})_0 p_3 + i(K_{AF})_3 p_0 & i(K_{AF})_0 p_3 - i(K_{AF})_3 p_0 & -i(K_{AF})_0 p_2 + i(K_{AF})_2 p_0 \\
i(K_{AF})_1 p_2 - i(K_{AF})_2 p_1 & i(K_{AF})_0 p_2 - i(K_{AF})_2 p_0 & -i(K_{AF})_0 p_1 + i(K_{AF})_1 p_0 & i(K_{AF})_0 p_1 - i(K_{AF})_1 p_0 \\
-p^2 & p^2 & p^2 & p^2
\end{bmatrix}. \tag{D.0.1}$$

# Apêndice E

## Eletrodinâmica em Meios Contínuos

A eletrodinâmica de Maxwell em meios contínuos é representada pela seguinte Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu, \quad (\text{E.0.1})$$

onde  $G^{\mu\nu}$  é o chamado *field-strength* em meios materiais, definido por

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad (\text{E.0.2})$$

onde  $\chi^{\mu\nu\alpha\beta}$  é chamado de tensor constitutivo, por definir a estrutura das relações constitutivas do meio. O tensor constitutivo parametriza a resposta do meio quando submetido a campos eletromagnéticos. Tal tensor satisfaz as seguintes propriedades de simetria:

$$\chi^{\mu\nu\alpha\beta} = -\chi^{\nu\mu\alpha\beta}, \quad \chi^{\mu\nu\alpha\beta} = -\chi^{\mu\nu\beta\alpha}, \quad \chi^{\mu\nu\alpha\beta} = \chi^{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (\text{E.0.3})$$

As equações de movimento, podem ser obtidas através da equação e Euler-Lagrange, que fornecem

$$\partial G^{\mu\nu} = J^\mu. \quad (\text{E.0.4})$$

A equação acima gera as leis de Ampère e Gauss. As demais equações são obtidas através da identidade de Bianchi:

$$\partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}) = 0. \quad (\text{E.0.5})$$

Com isso, é possível escrever as equações de movimento na forma vetorial:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{E.0.6})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (\text{E.0.7})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{E.0.8})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (\text{E.0.9})$$

---

onde valem  $\mathbf{D} = \tilde{\epsilon}\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ , as relações constitutivas para o deslocamento elétrico e campo magnético, respectivamente.

# Referências Bibliográficas

- [1] D. A. GURNETT and A. BHATTACHARJEE, F.R.S, *Introduction To Plasma Physics*, Cambridge, 2005.
- [2] PIEL, A. *Plasmas Physics - An Introduction to Laboratory, Space, and Fusion Plasmas*. Springer, 2010.
- [3] GALVAO, R. M. O. *Introdução À Física De Plasmas E Suas Aplicações Tecnológicas*. VI Escola do CBPF.
- [4] BOYD, T. J. M. BOYD. *The Physics of Plasmas*. Cambridge University press, 2003.
- [5] PLASMA.ORG *Perspective on Plasmas - The Fourth State of Matter*. Disponível em: <<http://www.plasmas.org/applications>>. Acesso em: 22 de jun. de 2021.
- [6] BETHE, H. *Energy Production in Stars*. Phys. Rev. 55, 103 (1939).
- [7] BETHE, H. *Energy Production in Stars*. Phys. Rev. 55, 434 (1939).
- [8] APPLETON, A. E. *The Ionosphere As A Doubly Refracting Medium*. Proc. Phys. Soc. 44 368, (1932).
- [9] APPLETON, A. E. *Wireless Studies Of The Ionosphere*. Inst. elect. Engrs, 71, 642-650, (1932).
- [10] APPLETON, A. E.; BARNETT, M.A.F. *Local reflection of wireless waves from the upper atmosphere*. Nature, 333, VOL. 115 (1925).

- [11] APPLETON, A. E.; BARNETT, M.A.F. *On some direct evidence for downward atmospheric reflection of electric rays*. Roy. Soc. London Proc. Ser. A 109, 621-641 (1925).
- [12] APPLETON, A. E.; BARNETT, M.A.F. *On Wireless Interference Phenomena between Ground Waves and Waves Deviated by the Upper Atmosphere*. Proc. R. Soc. Lond. A 1926 113, 450-458, (1926).
- [13] KENNELLY, A. E. *On the elevation of the electrically-conducting strata of the Earth's atmosphere*. Electr. World Eng. 39, 473-473 (1902).
- [14] RATCLIFF, J. A. *Edward Victor Appleton. 1892-1965*. Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society. 12, 1-21 (1966).
- [15] RATCLIFF, J. A. *The formation of the ionosphere. Ideas of the early years (1925-1955)*. Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics, Vol. 36. p 2167-2181, (1974).
- [16] HAAS, F.; HELAYËL-NETO, J.A.; GAETE, P.; OSPEDAL, L. P. R. *Modified plasma waves described by a logarithmic electrodynamics*. Phys. Plasmas 26, 042108 (2019);
- [17] ZANGWILL, Andrew. *Modern Electromagnetism*. School of Physics: Georgia Institute of Technology, 2009.
- [18] JACKSON, J. Dave. *Classical Electrodynamics -3 ED*. Willey, 1998.
- [19] A. I. ERIKSSON, *Waves in Space Plasmas: An introduction for the course Space Physics II at Uppsala University*, Uppsala University, 2004.
- [20] SCHWINGER, Julian. *Classical Electrodynamics*. Westview press, 1998.
- [21] CARROLL, S. M.; FIELD, G. S.; JACKIW, R. *Limites on a Lorentz-and parity-violating modification of electrodynamics*. Phys. Rev. D, 41, 4 (1990).
- [22] R. JACKIW, S. TEMPLETON. *Topologically Massive Gauge Theories*. Annals of Physics 140, 372-411 (1982).

- [23] R. JACKIW, G. V. DUNE, C. A. TRUGENBERGER. *"Topological"(Chern-Simons) quantum mechanics*. Phys. Rev. D, 41, 4 (1990).
- [24] G. V. DUNE. *Self-Dual Chern-Simons Theories*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1995).
- [25] QIU, Z.; CAO, G.; HUANG, X. *Electrodynamics of chiral matter*. Phys. Rev. D 95, 036002 (2017).
- [26] KHARZEEV, L. D. *The Chiral Magnetic Effect and anomaly-induced transport*. Prog. Part. Nucl. Phys. 75, 133 (2014).
- [27] KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. *Phenomenological Gravitational Constraints on Strings and Higher-Dimensional Theories*. Phys. Rev. Lett. 63, 224 (1989).
- [28] KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. *Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory*. Phys. Rev. D, 39, 683 (1989).
- [29] KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. *Photon and Graviton Masses in String Theories*. Phys. Rev. Lett. 66, 1811 (1991).
- [30] KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. *Gravitational phenomenology in higher-dimensional theories and strings*. Phys. Rev. D. 40, 1886 (1989).
- [31] KOSTELECKÝ, V. A.; COLLADAY, D. *CPT violation and the standard model*. Phys. Rev. D, 41, 661 (1990).
- [32] KOSTELECKÝ, V. A.; COLLADAY, D. *Lorentz-violating extension of the standard model*. Phys. Rev. D 58, 116002 (1998).
- [33] KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. *Cosmological Constraints on Lorentz Violation in Electrodynamics*. Phys. Rev. Lett. 87, 251304 (2001).
- [34] KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. *Signals for Lorentz violation in electrodynamics*. Phys. Rev. D 66, 056005 (2002).
- [35] KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. *Sensitive Polarimetric Search for Relativity Violations in Gamma-Ray Bursts*. Phys. Rev. Lett. 97, 140401 (2006).

- 
- [36] CASANA, R.; FERREIRA JR. M. M., SANTOS. C. E. H. *Classical solutions for the Carroll-Field-Jackiw-Proca electrodynamics*. Phys. Rev. D, 78, 025030 (2008).
- [37] FRANZ, G. *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*. John Wiley and Sons, INC, paperback edition, New York (1993).
- [38] SAKURAI, J. J. *Invariance Principles And Elementary Particles*. PRINCETON UNIVERSITY PRESS, 1964.
- [39] KAKU, M. *Quantum Field Theory: A modern introduction*. Oxford University Press (1993).
- [40] FERREIRA JR, M.M. *Notas de Aula - Simetrias Discretas na Teoria de Dirac*, UFMA, 2019.
- [41] JIA, S.; XU, S.-Y.; HASAN, M. Z. *Weyl semimetals, Fermi arcs and chiral anomalies*. Prog. Part. Nucl. Phys. 75, 133 (2014).
- [42] L. D. MIRANSKY, V. A.; SHOVKOVY, I. A. *Weyl semimetals, Fermi arcs and chiral anomalies*. Phys. Rep. 576, 1 (2015).
- [43] HALDANE, F. D. M. *Berry Curvature on the Fermi Surface: Anomalous Hall Effect as a Topological Fermi-Liquid Property*. Phys Rev. Lett. 93, 206602 (2004).
- [44] WILCZEK, F. *Two applications of axion electrodynamics*. Phys. Rev. Lett. 58, 1799 (1987).
- [45] FOWLES, G. R. *Introduction to modern optics*. Dover Publications, INC, New York, 1989.
- [46] SHAO, L.; MAO, B.; *Lorentz-violation-induced vacuum birefringence and its astrophysical consequences*. Phys. Rev. D 83, 127702 (2011).
- [47] POST, E. J. *Formal Structure of Electromagnetics: General Covariance and Electromagnetics*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam. Dover Publications, 1997.