UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FREDERICO CARVALHO DA SILVA

O CONCEITO DE FUNÇÃO EM LIVROS DIDÁTICOS DO NOVO ENSINO MÉDIO

São Luís - MA

2022

FREDERICO CARVALHO DA SILVA

O CONCEITO DE FUNÇÃO EM LIVROS DIDÁTICOS DO NOVO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal do Maranhão, na área de Educação Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Valdiane Sales Araújo

São Luís - MA

2022

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

DA SILVA, FREDERICO CARVALHO.
O CONCEITO DE FUNÇÃO EM LIVROS DIDÁTICOS DO NOVO ENSINO MÉDIO : O CONCEITO DE FUNÇÃO EM LIVROS DIDÁTICOS DO NOVO ENSINO MÉDIO / FREDERICO CARVALHO DA SILVA. - 2022.
60 p.

Orientador(a): Valdiane Sales Araújo.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, SÃO LUIS, 2022.

1. BNCC. 2. FUNÇÃO. 3. PNLD. 4. TAS. I. Araújo, Valdiane Sales. II. Título.

FREDERICO CARVALHO DA SILVA

O CONCEITO DE FUNÇÃO EM LIVROS DIDÁTICOS DO NOVO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal do Maranhão, na área de Educação Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

.

Aprovada em / / 2022

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Valdiane Sales Araújo (Orientadora)
Universidade Federal do Maranhão

Profª. Drª. Silvete Coradi Guerini
Universidade Federal do Maranhão

Profª. Drª. Valeska Martins de Souza
Universidade Federal do Maranhão

Dedico este trabalho à minha família. ....

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, por minha existência, sabedoria, discernimento e força para chegar até aqui. Obrigado, Senhor!

Aos meus pais, Fernando e Rita, pela formação, cuidados e seus exemplos de vida, para que, guiados por estes, lutasse por meus ideais. Divido com vocês esta conquista, porque ela também vos pertence.

Aos meus irmãos, Fernando Neto e Fernanda, pela amizade e companheirismo.

À minha esposa Luciana Licá, pelo carinho, paciência e incentivo moral, demonstrados por suas ações e palavras amáveis nos momentos mais difíceis dessa trajetória. Agradeço por tê-la na minha vida.

Ao meu filho Frederico Luan, fonte da minha inspiração.

Às minhas sobrinhas Ana Rita e Cristiane Fernanda, por cada sorriso dado.

Ao meu cunhado Cristiano, pelos momentos compartilhados.

À minha professora orientadora, Dra. Valdiane Sales Araújo, pela confiança, pelas dicas, orientação, apoio e especialmente pelas palavras de incentivo no decorrer do mesmo.

A toda minha família, especialmente, minha avó, Sinhá, por sua força, incentivo, dedicação e apoio nas decisões que tomei para chegar até aqui.

Enfim a todos que de forma direta ou indiretamente contribuíram para este trabalho.

Palavras não conseguem externar a gratidão que tenho por todos vocês!

Educar verdadeiramente não é ensinar fatos novos ou enumerar fórmulas prontas, mas sim preparar a mente para pensar.”

Albert Einstein

RESUMO

O presente estudo apresenta, como foco principal, uma discussão sobre o conceito de função trazido por livros didáticos do novo Ensino Médio aprovados pelas escolas públicas do país no programa do PNLD de 2021. Tendo em vista a grande importância do entendimento desse assunto para a vida acadêmica e para a sociedade, realizou-se uma pesquisa em três livros didáticos de matemática do "Novo Ensino Médio", a fim de analisar como o assunto é introduzido aos estudantes. A análise foi feita com base nas necessidades referidas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e fazendo ligação com a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS). Durante a realização do trabalho, foi possível perceber a relevância de se analisar um livro didático haja visto que é uma das principais ferramentas utilizadas em sala de aula, que visa a facilitar o processo de ensino e o processo de aprendizagem. Ao não estar de acordo com os objetivos traçados pelo professor, distanciando-se da proposta de ensino e limitando as possibilidades de explorar os conceitos, o livro didático pode não cumprir o seu papel de dar suporte ao professor e ao aluno no processo de ensino e aprendizagem. Para o estudo utilizou-se a abordagem qualitativa, para analisar as definições, representações, exemplificações e abordagens do tema, sendo apresentadas considerações e conclusões a respeito do referido assunto.

.

Palavras-Chaves: Função; BNCC, TAS, PNLD.

ABSTRACT

The present study presents, as main focus, a discussion on the concept of function brought by the textbooks of the “New High School” approved by public schools in the country in the PNLD of 2021 program. academically and for society, a research was carried out in three mathematics textbooks of the New High School, in order to analyze how the subject is introduced to high school students. The analysis was based on the needs mentioned in the National Curricular Common Base (BNCC) and making a connection with the Theory of Meaningful Learning (TAS). During the work, it was possible to perceive the relevance of analyzing a textbook, since it is one of the main tools used in the classroom, which aims to facilitate the teaching process and the learning process. By not being in agreement with the objectives outlined by the teacher, distancing itself from the teaching proposal and limiting the possibilities of exploring the concepts, the textbook may not fulfill its role of supporting the teacher and the student in the teaching process and learning. For the study, a qualitative approach was used to analyze the definitions, representations, exemplifications and approaches to the theme, presenting considerations and conclusions regarding the referred subject.

.

Keywords: Function; BNCC, TAS, PNLD

LISTA DE SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular
UFMA – Universidade Federal do Maranhão
PNLD Programa Nacional do Livro Didático
TAS Teoria da Aprendizagem Significativa
PCN Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental
CNE – Conselho Nacional da Educação
ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio
LDBEN – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
TAS – Teoria da Aprendizagem Significativa

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O livro didático ainda é o recurso mais utilizado pelos professores de matemática. O acesso ao livro didático é um direito do aluno no Brasil. Só em 2021 foram distribuídos mais de 136 milhões de livros didáticos que beneficiaram mais de 45 milhões de alunos em todo o país, segundo dados do Fundeb. Isso se deve, principalmente, devido às políticas de distribuição gratuita para escolas públicas conquistadas pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD).

Ao analisar algumas coleções de matemática do ensino médio, Lima (2016), ressalta que o livro didático é um instrumento essencial que o professor utiliza para desenvolver seu trabalho, pois ali são encontradas as definições, demonstrações, exemplos, atividades diversas e as orientações metodológicas para melhor desenvolvimento do trabalho e que grande parte dos professores o tem como única fonte de pesquisa. Os livros didáticos são ferramentas muito utilizadas no cotidiano dos professores de escolas públicas, fazendo deste a sua principal ferramenta de trabalho.

Cabe ressaltar que o livro não é o único recurso pedagógico. Para Rosa, et. al. (2012), faz-se necessário inserir outros recursos levando-se em consideração o contexto escolar. Também se torna importante, verificar e avaliar as atividades propostas, bem como suas abordagens metodológicas adequando-as de acordo com as necessidades e particularidades da turma, possibilitando, em harmonia com os objetivos planejados, que a aprendizagem ocorra de maneira eficaz.

Ao analisá-lo, faz-se necessário que o professor atue diretamente em sua concepção e atuação na sala de aula, através de concepções e intervenções pertinentes. Assim, de acordo com Bastos (2004), verifica-se que o livro didático é de extrema importância para o desenvolvimento do trabalho docente, por isso, o MEC elabora um guia de orientação, cujo objetivo é orientar o professor em relação à escolha daquele que melhor se adequa a sua realidade. O livro é uma forte influência no processo de ensino e aprendizagem, ressaltando-se a necessidade de uma atenção constante por parte docente, levando em análise os pontos positivos e negativos e sempre que necessário fazer as adequações ao cotidiano do aluno.

Esta dissertação pretende, através de uma análise do material didático, trazer resultados que tratam a presente temática: “O conceito de função em livros didáticos do novo ensino médio". A pesquisa foi realizada com o objetivo de compreender como o livro didático do Novo Ensino Médio introduz o conceito de função para os estudantes do ensino médio. Sabendo que este é um conceito muito utilizado pela matemática e pelas outras ciências e que, a maioria dos alunos sentem dificuldade de entender e utilizar este conteúdo matemático.

Assim, faz-se necessário averiguar como são organizados os livros didáticos da disciplina de Matemática, aprovados no PNLD mais recentemente, em relação aos parâmetros definidos na BNCC.

Este conteúdo específico foi escolhido dada a sua importância na formação do indivíduo bem como sua importância para o estudo das ciências e da própria matemática. Além disso, evidencia-se a necessidade de novas estratégias para a abordagem metodológica do livro didático, para sanar as dificuldades enfrentadas no ensino e na aprendizagem deste e de outros conceitos matemáticos. Dessa forma, entendemos que a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, pode contribuir com o ensino de matemática, instigando a preparação de atividades que se adaptem à realidade de nossos alunos, apoiadas nas tendências para o ensino de matemática.

A definição de função envolve entendimentos diversos e várias representações, fazendo-se necessário, compreender o sentido que esta pode assumir em diferentes contextos, quais significados o aluno pode desenvolver no seu cotidiano e na sua vida escolar.

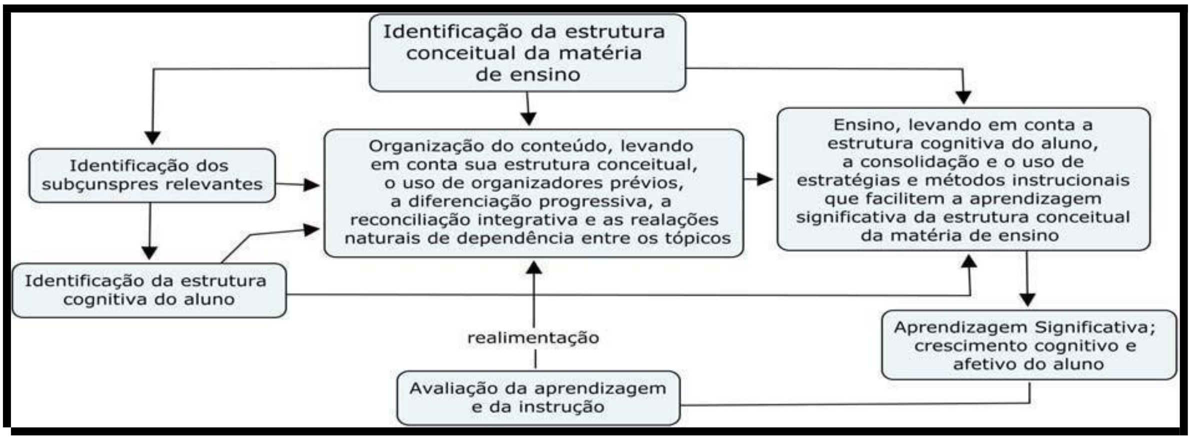
Esta dissertação está dividida em capítulos, sendo que no capítulo dois trazemos aspectos da Teoria da Aprendizagem Significativa. No terceiro capítulo trazemos o ensino de funções e as habilidades e competências de que trata a BNCC para o ensino médio. No quarto capítulo fazemos a análise do conteúdo dos três livros escolhidos e encerramos, no quinto capítulo, com a conclusão do estudo.

2. TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

A Teoria da Aprendizagem Significativa foi proposta por David Paul Ausubel em 1963. Aprendizagem significativa, de acordo com o formulador da teoria, apresenta uma estratégia promissora em situação formal de ensino, a qual consiste na interação de novos conhecimentos com conhecimentos prévios relevantes, que ele chamou de subsunçores.

Assim, a partir de sucessivas interações, um determinado subsunçor, progressivamente, adquire novos significados, torna-se mais rico, mais refinado, mais diferenciado e é capaz de servir de âncora para novas aprendizagens significativas (Ausubel, 1963). A Figura 1 é uma adaptação daquela apresentada por Moreira (2006) como sugestão para a organização do ensino visando uma aprendizagem significativa.

Figura 1 - Um modelo para organizar a instrução consistente com a Teoria de Ausubel



Fonte: MOREIRA, (2011)

Segundo Moreira e Masini (2006), a teoria da aprendizagem significativa é centrada na ancoragem de novas informações aos conhecimentos prévios existentes na estrutura cognitiva de cada indivíduo. Estes conhecimentos auxiliam a compreensão de novos conceitos pelo indivíduo dando significado a eles e podem ser desde um conceito, uma proposição, até uma ideia.

Dessa forma, um ponto destacado nessa teoria é a importância de se fazer relação entre o material a ser aprendido e aquele já existente, aqueles conhecimentos que o aluno já adquiriu. Entre as condições para a ocorrência da aprendizagem significativa, Moreira (2006) destaca:

> […] uma das condições para a ocorrência da aprendizagem significativa é que o material a ser aprendido seja relacionável (ou incorporável) à estrutura cognitiva do aprendiz, de maneira não arbitrária e não literal. Um material com essa característica é dito potencialmente significativo[..] Quanto à natureza do material, ele deve ser “logicamente significativo”, ou “ter significado lógico” […] de forma que possa ser relacionado, de forma substantiva e não arbitrária, a ideias, correspondentemente relevantes que se situem no domínio da capacidade humana de aprender. No que se refere à natureza da estrutura cognitiva do aprendiz, nela devem estar disponíveis os conceitos subsunçores específicos com os quais o novo material é relacionável. (MOREIRA, 2006,p 19)

Outra condição apontada por Moreira (2006) para a ocorrência da aprendizagem significativa é que o aprendiz manifeste uma disposição para relacionar, de maneira substantiva e não arbitrária, o novo material, potencialmente significativo, à sua estrutura cognitiva.

> Essa condição implica que independentemente de quão potencialmente significativo possa ser o material a ser aprendido, se a intenção do aprendiz for simplesmente a de memorizá-lo arbitrária a literalmente, tanto o processo de aprendizagem como seu produto serão mecânicos(automáticos)(MOREIRA, 2006,p 22).

O principal objetivo do ensino é a aprendizagem, em vista disso, a aprendizagem pode ser considerada significativa quando novos conhecimentos (conceitos, ideias, proposições, modelos, fórmulas) passam a significar algo para o aprendiz, quando ele é capaz de explicar com suas próprias palavras e quando é capaz de resolver problemas novos.

Assim, para Moreira (2012) e Lima (2016) o conhecimento individual é um conjunto de representações mentais construídas a partir da observação e interpretação que o indivíduo estabelece com os objetos do mundo que percebe. Dessa forma, pode-se conceber que o processo de ensino e aprendizagem sofre a influência de diferentes interpretações e representações sobre um mesmo conhecimento: a do professor, a do aluno e a do material de ensino.

Do ponto de vista da teoria de Ausubel, para acontecer a aprendizagem significativa algumas tarefas fundamentais devem partir do professor, as quais incluem:

> […] identificar a estrutura conceitual e proposicional da matéria de ensino; identificar quais subsunçores relevantes à aprendizagem do conteúdo o aluno deveria ter em sua estrutura cognitiva; diagnosticar aquilo que o aluno já sabe e; ensinar, a partir de recursos e princípios, que facilitem a aquisição da estrutura conceitual da matéria de ensino de maneira significativa (MOREIRA, 2009).

Santos (2008), sugere sete passos para que ocorra a construção do saber através de uma aprendizagem significativa, a saber:

1. O sentir – toda aprendizagem parte de um significado contextual e emocional;
2. O perceber – o educando contextualiza e percebe características específicas do que está sendo estudado;
3. O compreender – é quando se dá a construção do conceito, possibilitando a utilização do conhecimento em diversos conceitos;
4. O definir – significa esclarecer um conceito. O aluno deve definir com suas palavras, de forma que o conceito lhe seja claro;
5. O argumentar – após definir, o aluno precisa relacionar logicamente vários conceitos e isso ocorre através do texto falado, escrito, verbal e não verbal.
6. O discutir – nesse passo, o aluno deve formular uma cadeia de raciocínio através da argumentação;
7. O transformar – o sétimo e último passo da (re) construção do conhecimento é a transformação. O fim último da aprendizagem significativa é a intervenção da realidade. Sem esse propósito, qualquer aprendizagem é inócua (SANTOS, 2008, p. 73-74).

De acordo com o autor, a aprendizagem se tornará significativa ao trilhar todos os sete passos destacados, contribuindo de forma ativa e dinâmica na realidade do sujeito. Pode-se compreender que a aprendizagem passa a ser significativa à medida que novos conceitos são incorporados às estruturas de conhecimento de um aluno e adquirindo novos significados quando relacionado a seu conhecimento prévio.

A aprendizagem significativa traz grande importância na forma de aprender conhecimentos permanentes para os aprendizes e a sociedade. Tendo em vista que essa aprendizagem só poderá ocorrer se tivermos como base uma disposição ou motivação do aluno para aprender, além da existência de um material potencialmente significativo para o aluno.

Porém, mesmo o aprendiz tendo uma estrutura cognitiva compatível com as informações propostas e sendo submetido a utilização de materiais potencialmente significativos à aprendizagem, isso só acontecerá quando o aluno quiser, assim como é defendido por Corti e Vóvio (2007).

De acordo com Moreira e Masini (2006), à medida que ocorre a aprendizagem significativa, conceitos são desenvolvidos, elaborados e diferenciados em decorrência de sucessivas interações, o que leva à diferenciação progressiva e à reconciliação integrativa. Nessa perspectiva, Moreira e Masini (2006) explicam, ainda, que na diferenciação progressiva o conteúdo deve ser programado de forma que os conceitos gerais e inclusivos da disciplina sejam apresentados primeiro e, progressivamente, distinguidos por meio de conceitos específicos.

3. O ENSINO DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO

O conceito de função é considerado como um instrumento matemático próprio para o estudo de questões internas à Matemática e também a outras áreas do conhecimento. De fato, como destacam os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental - PCNs (BRASIL, 1998).

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 1998, p. 44)

Por volta de 1698, surgiu a primeira definição explícita de função como expressão analítica, construída a partir da variável independente, estabelecida por Jean Bernoulli. Boyer (1974) afirma que no século XVIII, o conceito de função, determinado por Leonhard Euler, foi caracterizado ao tratar o cálculo como uma teoria das funções, ao diferenciar quantidades variáveis de quantidades constantes. Tempos depois, Euler apresentou um novo conceito de funções estabelecendo que:

> Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que, se as outras mudam estas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar estas quantidades de funções destas últimas. Esta denominação é bastante extensa e contém nela mesmas todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x, de qualquer maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas de funções de x. (EULER apud ROQUE e PITOMBEIRA, 2012, p. 232- 233)

Com o passar do tempo, segundo Kleiner (1989), um grupo de matemáticos franceses, no século XX, iniciaram vários estudos sobre a matemática moderna, e consequentemente a nova definição para conjuntos, para isso adotaram o pseudônimo de Nicolas Bourbaki, entre esses matemáticos destacaram-se André Weil e Jean Dieudonné, que em 1939 definiram o seguinte conceito de função:

> Sejam A e B dois conjuntos, distintos ou não. A relação entre uma variável x de A é uma variável y de B, é chamada de uma relação funcional em y se, para todo $x \in A$, existe um único $y \in B$ que está associado, na relação dada, com x. Damos o nome de função para a operação que, de alguma forma, associa a cada elemento $x \in A$o elemento $y \in B$ que é associado a x pela relação estabelecida; diz-se que y é o valor da função relativo ao elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional dada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função. (KLEINER, 1989, p. 232)

Zuffi (2001) atesta que esse evento culminou para a concretização do conceito de função, e que tal conceito, dentro do contexto histórico, sempre esteve associado à necessidade de descrever e compreender os fenômenos naturais; dependência entre variáveis de uma maneira qualitativa; surgimento das representações gráficas e descrições verbais.

3.1. O conceito de função e suas representações

O conceito de função exerce um papel importante não só porque relaciona outros conteúdos da própria Matemática, mas também permite descrever e estudar fenômenos tanto do cotidiano como de outras áreas do conhecimento como, por exemplo, na Física, Química, Biologia, economia, engenharias e computação, etc.

Na maioria dos livros didáticos, o conceito de função é apresentado de maneira simples, como uma relação entre dois conjuntos dados, através de uma sentença matemática fechada com duas variáveis, sendo que uma é livre e outra dependente.

Para a variável livre fornecem-se os elementos de um conjunto chamado de Domínio, o qual, na função, deve ter todos os seus elementos relacionados de maneira exclusiva com o segundo conjunto, onde estão os elementos da variável dependente, chamado Contradomínio. Os elementos do Contradomínio que estão relacionados com o domínio formam um subconjunto do Contradomínio chamado de conjunto Imagem.

A importância do estudo e do conceito de funções, é tratado por autores como Ponte (1992).

> O conceito de função é considerado um dos mais importantes da matemática e seus aspectos mais simples estão presentes nas noções mais básicas desta ciência, como por exemplo, na contagem. Mas, a noção de função, claramente individualizada como objeto de estudo corrente, é mais recente. (PONTE, 1992, p.3).

Para ajudar a construir o conceito de função é interessante pensarmos nas relações espontâneas que os alunos trazem consigo, observando a natureza e o cotidiano. O ser humano estabelece uma relação de dependência com a natureza; uma pessoa com um determinado nome ou característica; uma criança com um brinquedo ou animal.

Isso é pontuado nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (1999) que trazem de uma forma bem mais resumida:

> Identificação da natureza da variação de duas grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais (afim ou quadrática), expressando a relação existente por meio de uma sentença algébrica e representando a no plano cartesiano. (BRASIL 1999, p 45)

Rêgo (2000), em um estudo sobre a construção do conceito de função, afirma que:

> A Matemática Moderna, adotada no Brasil no início da década de 1970, ainda está presente em muitos dos livros textos dirigidos para o Ensino Fundamental e Médio utilizados em nossas escolas. Ao prestigiar fundamentalmente a linguagem, baseada na Teoria dos Conjuntos, contribuiu para tornar esta disciplina um jogo de símbolos sem significado. Como resultado de uma aprendizagem mecânica, centrada na memorização de definições, regras e algoritmos, verifica-se que mesmo entre a maioria dos alunos que são bem-sucedidos em seus estudos, entendendo como tal os que logram resultados positivos em avaliações formais, a construção dos conceitos fica em segundo plano e a capacidade de transferir conhecimentos, tomar decisões e realizar aplicações é limitada.
>
> As dificuldades provocadas por tais fatos são ampliadas pelo sistema de crenças vigente que apregoa, dentre outras coisas, serem capazes de aprender Matemática apenas pessoas especialmente inteligentes. Avanços nos estudos relativos ao modo como ocorrem os processos de aprendizagem, entretanto, trouxeram à tona a necessidade do trabalho em sala de aula com problemas relacionados ao dia a dia do aluno. Materiais e situações familiares irão não apenas motivá-lo, mas também dar sentido aos conteúdos matemáticos desenvolvidos. (RÊGO, 2000 p.11 - 12)

Nas últimas décadas, as propostas curriculares do Ensino Fundamental vêm desenvolvendo estudos com o intuito de planejar estratégias, que possibilitem sugestões para o tratamento do conteúdo de função. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (BRASIL, 2000) sugerem que o conceito de função possa ser vinculado à álgebra, dando ênfase às propriedades, interpretação de gráficos e aplicações, tirando o foco que favorece uma linguagem abundantemente formal e algébrica, com magnitude científica e cultural e com uma conexão lógica das concepções dos estudos.

Apesar da importância do conceito de função para a matemática e também para áreas afins, o que se tem percebido é que os alunos egressos do Ensino Médio têm muita dificuldade em entender, definir e trabalhar com funções. Isso é bastante explícito quando esses alunos adentram a universidade. Nas primeiras disciplinas dos cursos de Ciências Exatas, por exemplo, poucos alunos sabem definir corretamente uma função.

Com base nisso, trazemos aqui um panorama que nos mostra como é ensinado o conceito de função para alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Para isso, utilizamos o livro didático como guia, já que este constitui a principal fonte de pesquisa de professores e alunos de matemática.

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCN+ destacam que “o ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas.” (BRASIL, 2002, p. 121).

O conceito de função por ser amplo, engloba inúmeras representações capazes de produzir no aluno distintas maneiras de compreendê-lo em diversos contextos, quais significados podem ser produzidos no ambiente escolar. Assim, existem diferentes pontos de vista nos quais o conceito de função pode ser explorado: em todos os níveis do desenvolvimento humano, desde sua origem na antiguidade e evolução, unidas a problemas de simetria, extrapolando o domínio matemático.

3.2. A Base Nacional Comum Curricular.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) define um conjunto de aprendizagens essenciais que os estudantes brasileiros devem desenvolver durante a Educação Básica, independentemente da região onde moram. O principal objetivo é garantir que todos os estudantes brasileiros tenham a mesma oportunidade de aprender o que é considerado essencial. O documento é exclusivo à educação escolar e está orientado por princípios que visam uma formação humana integral e uma sociedade mais justa, democrática e inclusiva.

Além da equiparação das oportunidades de aprendizagem, buscando reduzir as desigualdades históricas estabelecidas, o desenvolvimento de uma base comum curricular visa outros fatores como assegurar as aprendizagens essenciais definidas para cada etapa da Educação Básica, orientar a elaboração de um currículo específico de cada escola ou rede escolar, pública ou privada, e instruir as matrizes de referência das avaliações e dos exames externos.

Uma das características desse documento é que ele não define o modo como ensinar nem impede que sejam contempladas no dia a dia escolar as especificidades regionais. Assim, a BNCC (BRASIL, 2018a) estabelece um conjunto de conhecimentos básicos que devem ser assegurados, sem interferir na diversidade cultural e regional e na autonomia dos educadores.

Essas aprendizagens essenciais devem coexistir para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais no decorrer da Educação Básica.

Em articulação com as competências gerais e com as áreas do conhecimento em que o Ensino Médio está organizado, a BNCC define competências específicas para cada uma dessas áreas (Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas) e habilidades que lhes correspondem.

O texto está estruturado da seguinte forma:

- Textos introdutórios (geral, por etapa e por área);

> - Competências gerais que os alunos devem desenvolver ao longo de todas as etapas da Educação Básica;
> - Competências específicas de cada área do conhecimento e dos componentes curriculares;
> - Direitos de Aprendizagem ou Habilidades relativas a diversos objetos de conhecimento (conteúdos, conceitos e processos) que os alunos devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica — da Educação Infantil ao Ensino Médio. (BRASIL,2017)

As competências trazidas pela BNCC são definidas como a mobilização de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver situações apresentadas pela vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

A BNCC cita quatro competências gerais da Educação Básica, a saber:

> 1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
>
> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
>
> 3. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
>
> 4. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta (BRASIL, 2018a, p. 9-10.)

3.3. Competências Específicas e Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio que envolvem o estudo de funções.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos

> das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral". (BRASIL, 2018a, p. 532.)

Essa competência propõe aos estudantes que utilizem seus conhecimentos matemáticos como ferramenta para interpretar e compreender situações cotidianas, a fim de analisarem criticamente e refletirem sobre informações relacionadas a elas.

As habilidades associadas a esta competência são:

> **(EM13MAT101)** Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais".
>
> (**EM13MAT103)** Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos".

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente". (BRASIL, 2018a, p. 535.)

Essa competência está relacionada à ação de resolver situações-problema, contemplando tanto contextos próprios da Matemática quanto de outras áreas do conhecimento e do cotidiano do estudante. Além da resolução, é proposto ao estudante que elabore problemas, a fim de mobilizar e refletir sobre os conceitos estudados.

Habilidade associada a esta competência:

> **(EM13MAT302)** Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1o ou 2o graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais".

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4

> Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas". (BRASIL, 2018a, p. 538.)

Essa competência trata da utilização e da compreensão de diferentes tipos de registros na resolução de situações-problema, buscando expressar ideias matemáticas relacionadas e possibilitando a ampliação da capacidade do estudante de pensar matematicamente.

Habilidade associada a esta competência:

> **(EM13MAT401)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1o grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica".

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas". (BRASIL, 2018a, p. 540.)

O desenvolvimento dessa competência possibilita aos estudantes perceberem a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo da Matemática e se apropriarem dessa ideia para raciocinar logicamente e validar proposições. Ao investigar, formular hipóteses e realizar tentativas de validá-las ou refutá-las, os estudantes buscam utilizar os conceitos matemáticos estudados em suas argumentações e, dessa maneira, estabelecer relações entre eles.

Habilidades associadas a esta competência:

> **(EM13MAT501)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1o grau".
> **(EM13MAT510)** Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada".

4. ANÁLISE DO MATERIAL DIDÁTICO

As Competências Específicas e Habilidades descritas no capítulo anterior, dentro da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio que envolvem o estudo de funções, serão analisadas em três livros didáticos que foram aprovados no PNLD de 2021. As unidades analisadas, serão os referentes à parte introdutória das funções.

Em nossas análises consideramos o livro A intitulado, MULTIVERSOS MATEMÁTICA: Conjuntos e Função Afim, do autor Joamir de Souza (2020) da Editora FTD; o Livro B, PRISMA MATEMÁTICA: Conjuntos e Funções, do autor José Roberto Bonjorno et al (2020) da Editora FTD e o Livro C, QUADRANTE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS: Funções, dos autores Eduardo Chavante e Diego Prestes da Editora SM educação.

O Sistema do Material Didático - SIMAD informa sobre a distribuição destes livros em toda a rede de ensino do Brasil, desta maneira podemos escolher os livros com maior utilização ou adoção em escolas da rede pública estadual.

4.1. Livro A.

A coleção é composta por três livros, cada qual destinada aos 1º, 2º e 3º anos respectivos do Ensino Médio. Cada livro está dividido em quatro unidades e cada uma delas é organizada em capítulos.

O primeiro volume, destinado ao primeiro ano do ensino médio, se divide em quatro unidades:

- Números e Funções
- Função afim e função quadrática
- Função exponencial e função logarítmica
- Sequências e Trigonometria

O livro introduz o estudo sobre funções na Unidade 2 com o título “Relação entre grandezas e noção de função”, na página 52. As páginas seguintes são dedicadas ao estudo de grandezas diversas e sistemas de medidas. Na página 64 o livro introduz o conceito de função.

Para introduzir o estudo das funções, o livro apresenta um exemplo que relaciona a alta demanda de consumo de plástico no mundo e que, no processo de reciclagem um dos insumos mais utilizados é a água, a qual pode ser economizada na fabricação.

Apresenta ainda, uma tabela com valores distribuídos em duas colunas, a primeira coluna contendo a massa de plástico reciclado e a segunda contendo a quantidade de água economizada e afirma que a relação entre a massa de plástico reciclado e a quantidade de água economizada é uma **função**.

Em seguida, representa a situação utilizando uma fórmula matemática, a qual chama de função, designando a quantidade de água economizada por y e a quantidade de plástico reciclado, por x.

O segundo exemplo apresentado pelo livro, chama a atenção para aplicativos de smartphones, trabalhos de entrega em domicílio e relaciona o pagamento da taxa de entrega com a distância percorrida pelo entregador. Novamente apresenta uma fórmula matemática que modela a situação.

No terceiro exemplo, o livro apresenta uma aplicação envolvendo área de retângulo para ilustrar o conceito de função, o exemplo relaciona o valor a ser pago por determinado serviço com a área da região que será utilizada e utiliza uma fórmula matemática para modelar a situação.

A apresentação do conceito formal de função é feita na página 70. Para introduzir este conceito, o autor se utiliza da representação de conjuntos numéricos discretos através de diagramas e chaves como pode ser observado na Figura 6. Apresenta dois conjuntos A e B e três relações denominadas R1, R2, R3. As relações R2 e R3 não definem funções, novamente o autor utiliza diagramas para ilustrar o fato.

A definição formal de função é apresentada logo a seguir como relação unívoca que associa os elementos dos dois conjuntos A e B.

Nesta definição, não fica claro a importância dos conjuntos A e B para a definição de função. Além disso, os conjuntos, domínio e contradomínio, só são apresentados depois da definição, deixando transparecer que a definição depende do domínio e contradomínio.

Uma vez definida uma figura f de a em B, denominamos de:

- *domínio da função, indicado por D9F), o conjunto A;*
- *contradomínio da função, indicado por CD(f), o conjunto B;*
- *Imagem de x, o elemento y ∈B associado a x∈A pela função f;*
- *conjunto imagem da função, indicado por Im(f), o conjunto formado por todas as imagens dos elementos de A;*
- *lei de formação, a expressão que estabelece a correspondência entre os valores de x∈A e y∈B.*

É importante observar que todos os conjuntos A e B, apresentados inicialmente, são conjuntos discretos e não fica claro como a definição de função pode ser estendida para outros tipos de conjuntos, como por exemplo, intervalos, ou mesmo o conjunto dos números reais.

Nessa abordagem, a noção de função é construída ao aluno através de exemplos com a intenção de formalizar o conceito. Estes exemplos introdutórios seriam mais bem aproveitados se fossem apresentadas situações ditas “cotidianas” ao invés de situações às quais o aluno não tem o conhecimento, como reciclagem de plástico.

O exemplo que abre a seção requer dos estudantes conhecimentos adicionais para entender a situação ali apresentada, em geral, conhecimentos que eles ainda não possuem. O estudante do início do ensino médio não tem familiaridade com a demanda de consumo de plástico, e outros insumos no processo de reciclagem.

O segundo exemplo apresenta o uso de aplicativos de mobilidade para mensurar trajetos e percursos, embora os jovens tenham familiaridade com estes aparelhos, boa parte dos estudantes não usam os smartfones para esse propósito.

Por fim, o exemplo 3 traz uma situação que se passa na escola, mas não é vivida pelo estudante já que este não contrata nem paga uma empresa por serviços prestados. Todos esses exemplos podem ser melhor entendidos, dentro do contexto de função, depois que o aluno já possui certa familiaridade com este conceito.

Neste livro observa-se uma preocupação com a diversificação da linguagem, são utilizados vários tipos de representação: tabelas, fórmulas matemáticas, diagramas, além da linguagem escrita e ilustrações. Essa diversidade de símbolos é importante e pode facilitar o entendimento do objeto em estudo, no entanto não basta utilizar diferentes formas de representar o objeto, é necessário que a relação entre eles seja bem compreendida, o aluno deve saber transitar entre essas diversas representações sem dificuldade e compreender o objeto em estudo sendo representado sob as diversas formas.

4.2. Livro B

A coleção Prisma Matemática da Editora FTD é composta por seis volumes. O volume 1 apresenta o estudo de “Conjuntos e Funções”, destinado aos estudantes do primeiro ano do Ensino Médio.

O livro introduz o estudo de funções no Capítulo 2, logo após o estudo de Conjuntos numéricos, com o título “Função afim”, que se encontra na página 58. Não há um capítulo destinado ao estudo introdutório do conceito de funções.

No início do capítulo, o autor faz uma provocação ao aluno a respeito do conteúdo que será estudado, perguntando se ele sabe calcular o valor de uma corrida de táxi. Logo em seguida, explica sobre a composição da tarifa (bandeirada, quilômetro rodado e o tempo do veículo parado no trânsito) é incumbência das prefeituras acerca da determinação tarifária. Aborda sobre a utilização do taxímetro, aparelho responsável pelo cálculo do valor da utilização do táxi.

Na página 60, o autor apresenta um infográfico, a ideia de função chamando a atenção para situações nas quais o autor julga ser uma ação do dia a dia dos alunos do ensino médio, como mostra a Figura 9. O autor utiliza o restaurante “por quilo” para representar uma relação de dependência, afirmando que “quanto maior a quantidade, em quilograma, de comida consumida, maior será o valor a ser pago por ela.”

Depois são apresentados três exemplos de situações que podem ser modeladas através de funções.

Em seguida, representa uma situação problema 1, sendo os serviços de envio de carta não comercial e cartão-postal, praticadas pelos Correios formalizando com uma tabela, a qual trata de uma relação entre peso (g) e preço básico (R$), com a finalidade de definir sobre tipos variáveis.

Na situação problema 2, o exemplo apresentado no livro chama atenção para centro de meteorologia, o qual relaciona o horário com a temperatura registrada, apresentando novamente uma tabela com os valores encontrados pelo centro associados aos horários em que cada temperatura foi averiguada.

Também são utilizados diagramas de flechas para ilustrar a situação, esta é outra linguagem bastante conhecida pelos estudantes que facilita o entendimento do conteúdo em diversos casos.

Na situação problema 3, o livro apresenta uma aplicação envolvendo a geometria. Utiliza o cálculo da área de um quadrado para ilustrar o conceito de função, o exemplo relaciona o valor da área com uma fórmula matemática, modelando a situação. Aproveitando também para introduzir o conceito de lei de formação: *"A fórmula da área de um quadrado pode ser interpretada como a* ***lei de formação*** *ou a* ***lei de correspondência*** *da função que relaciona a área A de um quadrado e a medida do lado l correspondente".*

O conceito formal de função é introduzido na sequência, página 64 de forma simples e direta: *"Dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma função de A em B é uma relação que associa cada elemento x de A há um único elemento y de B."*

Na sequência, na página 65, o autor traz exemplos de relações que representam funções e relações que não representam funções, utilizando diagramas de flechas, para ilustrar situações que mostram a relação de dependência entre dois conjuntos.

A denominação de domínio, contradomínio e conjunto imagem é feita depois da definição de função, feito também por meio de diagramas e chaves, utilizando apenas conjuntos discretos e sem deixar claro a importância desses conjuntos para a definição de função.

O autor do livro B com a finalidade de nortear o referido assunto traz situações referentes a viagens de táxi, mesmo sendo uma situação simples como pegar um táxi, o autor conseguiu torná-la uma situação complexa para introduzir o conceito de função, pois o aluno necessita de conhecimentos adicionais para entender a situação ali apresentada, envolvendo várias prerrogativas para calcular o valor da corrida, abordando relações entre os valores cobrados pelos estados, valores de bandeirada, taxímetro, valores por tempo passivos no trânsito.

Entendemos que um exemplo com esse grau de complexidade seria melhor aproveitado se fosse apresentado aos alunos depois que estes já tivessem familiaridade com o conceito de função, para exemplificar uma situação cotidiana que poderia ser modelada utilizando uma função afim.

Na situação 2 o autor traz um exemplo que aborda um centro de meteorologia o qual traz uma situação ainda mais complexa para o aluno visto que este não é um conteúdo com o qual o aluno tenha familiaridade. Além de colocar valores no diagrama (conjunto B (contradomínio)), os quais não estavam na tabela (19 °C, 22 °C, 23 °C, 24 °C, 26 °C, 27 °C, 29 °C e 30 °C), podendo ocasionar dificuldade ao entendimento do aluno.

Na situação 3, Figura 12, o autor traz um exemplo simples envolvendo cálculo de área de quadriláteros. Geralmente essa situação é abordada nos livros didáticos do ensino médio sem o devido cuidado, pois não é tão simples expressar cálculo de áreas em termos de função. O aspecto positivo desse exemplo é que ele faz conexão entre geometria e álgebra, no entanto a representação de área através de função geralmente é tratada de forma descuidada pelos livros do ensino médio. Além disso, o exemplo apresenta a regra de uma função polinomial do segundo grau dentro do conteúdo inicialmente intitulado “Função afim”.

4.3. Livro C

A coleção é composta por seis livros, sendo destinada ao 1º, 2º e 3º anos respectivos do Ensino Médio. Cada livro desses é dividido em seis capítulos:

- Funções
- Trigonometria e Sequências
- Estatística, Probabilidade e Matemática Financeira
- Geometria Plana e Espacial
- Sistemas Lineares e Geometria Analítica
- Grandezas, Medidas e Programação.

O livro C, introduz o estudo de funções no Capítulo 2 com o título “Funções”, que se encontra na página 30.

Logo no início, o autor apresenta uma situação que trata da produção de tecidos na Índia e fala sobre sua tradição na produção e venda de tecido, os quais são altamente comercializados pelo mundo, sendo uma das mais importantes atividades econômicas do país. Para introduzir a noção de função, faz referência à venda do tecido em metro.

Em seguida, o texto traz três indagações referentes ao texto, tentando induzir o aluno a fazer uma relação entre preço e quantidade, também solicita que o aluno crie outras situações em que exista uma relação entre grandezas.

O livro inicia o estudo sobre a noção de função, afirmando: “*Você **provavelmente** aprendeu que grandeza é um atributo físico de um fenômeno” e faz várias relações entre as grandezas como as variações da medida de uma grandeza dependem da variação da medida de outra(s). Como exemplo, cita comprar alimentos, a grandeza “quantia a pagar” depende da grandeza “massa do alimento”, assim como a grandeza “velocidade” depende das grandezas “tempo” e “espaço”.*

O autor aborda ainda um pouco da história da função, fazendo referência ao surgimento do termo, devido ao matemático Leibniz. Em seguida introduz um exemplo de situação de venda de camisas para demonstrar o conceito de função, coloca uma tabela referente à quantidade de camisas e preço, e traz para esse contexto os conceitos de variáveis dependentes e variáveis independentes, e representa a situação utilizando uma fórmula matemática, com o intuito de generalizar todas as possibilidades desse evento.

Na continuidade do exemplo anterior, o autor chama atenção para ser representado pela fórmula ou **lei de formação**, novamente apresenta fórmula matemática que modela a situação que representa a venda “y = 22.x”, onde representa a letra y como sendo o valor a ser pago (variável dependente) e a letra x pela quantidade de camisetas (variável independente) e o coeficiente 22 como sendo o valor por camiseta.

Para exemplificar a noção de função o autor apresenta dois exemplos utilizando conjuntos discretos sem especificar ao leitor, o livro apresenta aplicações de funções que são expressas pela lei de formação $y = x + 2$ e $y = x^2$, e faz as relações necessárias para ser considerado função.

Em seguida, são apresentados mais dois exemplos os quais representam relações que não são funções. Depois, é apresentada a definição formal de função, da seguinte forma: *“Dados os conjuntos A e B não vazios, uma função f de A em B é uma regra (ou lei) que determina como associar a cada elemento x de A um único elemento y = f (x) de B”.* Depois disso, o autor traz a definição de domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função.

Neste livro não se observa a preocupação com diversificação da linguagem, o mesmo apresenta apenas uma ilustração no início do capítulo. Essa diversidade de símbolos é importante e pode facilitar o entendimento do objeto em estudo, no entanto não basta utilizar diferentes formas de representar o objeto, é necessário que a relação entre eles seja bem compreendida. Em alguns momentos o autor não usa da linguagem adequada para introduzir o objeto desejado e desta maneira pode prejudicar o entendimento do aluno.

Em todo estudo matemático os exemplos são muito importantes para ilustrar e dar sentido ao objeto em estudo. É muito importante introduzir qualquer conteúdo com exemplos que sejam familiares ao estudante, algo que ele domine e se sinta confortável em pensar e falar sobre.

Os três livros A, B e C analisados apresentam exemplificações: o livro A cita exemplos que envolvem reciclagem de plástico, uso de smartphone, distância percorrida, e um canteiro na escola. O livro B, exemplifica com distância percorrida por táxi, quantidade de comida consumida e medições meteorológicas. Já o livro C apresenta a produção de tecidos, e vendas de camisetas.

Nos três livros podemos perceber um esforço dos autores em utilizar exemplos para contextualizar o conteúdo dentro do mundo que nos rodeia, mas não há a preocupação em se reportar ao cotidiano dos alunos do ensino médio considerando suas experiências e sua faixa etária. Podemos dizer que as situações apresentadas não são familiares a esses estudantes e que em lugar de motivar o aluno podem até desmotivá-los, já que a quantidade de informações ali apresentada é bem maior e exige maior esforço, por parte do aluno, para a compreensão do objeto matemático em estudo, o conceito de função.

A compreensão da noção de função pode ser prejudicada passando ao estudante a ideia de que é um conceito difícil, que está associado apenas a situações complexas e não a situações corriqueiras do seu dia a dia.

Os exemplos trazidos pelos 3 livros analisados poderiam ser apresentados no final da seção, quando o aluno já estaria familiarizado com o conceito de função e suas propriedades fundamentais.

Segundo a teoria da Aprendizagem Significativa, o aprendizado deve partir de algo que já é conhecido pelo aluno, algo que faz parte de sua estrutura cognitiva.

Nos exemplos apresentados pelos livros para ilustrar a ideia de função essa premissa não é seguida, já que as situações ali apresentadas não são vivenciadas pelos estudantes do início do ensino médio. Portanto, essas situações, não facilitariam, de acordo com a TAS, o entendimento nem colaborariam para a aquisição de um novo conceito a partir daqueles já existentes.

A representação de função através de diagramas e flechas é bastante comum nos livros didáticos de matemática. Essa linguagem facilita o entendimento do aluno no que diz respeito às condições necessárias para definir uma função: *"cada elemento de A tem apenas um correspondente no conjunto B"*. No entanto, a maioria dos conjuntos numéricos e grandezas não podem ser representadas através de diagramas, essa é uma dificuldade que necessita ser superada pelo aluno para que haja a compreensão do conceito de função.

A utilização de uma linguagem já conhecida pelos estudantes como diagramas e flechas para representação de conjuntos numéricos pode, no primeiro momento, facilitar a compreensão de certos aspectos do conteúdo em estudo, mas, essa linguagem deve ser ampliada, levando em consideração que uma função pode ser, e será, definida em outros tipos de conjuntos que não podem ser representados através de diagramas, como por exemplo os intervalos.

Além disso, a ausência de referência explícita com o conteúdo previamente estudado, conjuntos numéricos, pode passar a ideia, para o estudante, de que "grandezas" e "conjuntos numéricos" não têm relação dentro deste contexto e que, portanto, a ideia de função definida entre grandezas e função definida entre conjuntos são objetos distintos.

Observa-se, na sala de aula, que o aluno compreende com certa facilidade a noção de função, quando são utilizados diagramas de flechas, mas tem dificuldade de compreender o mesmo conceito quando os conjuntos envolvidos são intervalos ou grandezas que não podem ser representadas através de diagramas.

Analisando os livros didáticos do ensino médio observamos que estes não costumam trazer muitos exemplos de funções definidas em intervalos. Já a utilização do conjunto dos números reais é bastante frequente, mesmo assim, nota-se uma grande dificuldade, por parte dos estudantes, em compreender e resolver exercícios utilizando funções reais.

Outro aspecto importante a ser comentado é a pouca importância que os livros atribuem aos conjuntos domínio e contradomínio na definição de função. A forma como a maioria dos autores define função não deixa claro que estes objetos fazem parte da definição. Isso gera muita dificuldade na compreensão do comportamento das funções e aspectos relacionados à análise dos gráficos, entre outros.

Analisando os textos apresentados sob a ótica da Teoria da Aprendizagem Significativa somos levados a considerar os diagramas apresentados como subsunçores, ou seja, conhecimentos já adquiridos pelos estudantes onde estes apresentam certa capacidade de manipulação. Daí porque a tentativa de explicar o conceito de função através de diagramas é mais bem-sucedida do que a tentativa de apresentar o mesmo conceito utilizando outras representações.

Na maioria dos livros didáticos o assunto função é apresentado logo depois de conjuntos numéricos, mais precisamente, depois do estudo do conjunto dos números reais, no entanto os autores pouco utilizam a linguagem de conjunto mais formal no decorrer do estudo de funções. Os livros costumam omitir os conjuntos domínio e contradomínio na maior parte do texto e exercícios, o que leva o aluno a conceber função apenas como uma fórmula matemática. Além disso, nem um dos livros analisados considera o fato de que nem toda função pode ser representada por uma fórmula matemática, ou seja, não é a fórmula matemática que define a função.

Ainda de acordo com TAS, a melhor forma de introduzir um conceito novo é através de perguntas. Na abordagem trazida pelos livros analisados, são deixados alguns questionamentos de forma tímida, sem muita importância, e que não estimulam o estudante a pensar diretamente no conceito em estudo.

No livro B, no início do capítulo, o autor até faz um questionamento:

“Você sabe como é calculado o valor de uma corrida de táxi?”

Induzindo ao raciocínio sobre a situação em questão, mas no decorrer dos exemplos apresentados pelo livro para ilustrar a ideia de função essa premissa não é seguida, já que as situações ali apresentadas não são vivenciadas pelos estudantes.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.

Dada a fundamental importância para o ensino e aprendizado, é preciso que os professores estejam atentos ao material didático que adotam, quanto à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos.

Os livros analisados obedecem a um padrão, apresentam situações contextualizadas fazendo alusão à matemática que existe por trás de cada situação, e que envolve também as outras áreas do conhecimento, introduzindo o conhecimento matemático a ser estudado, seguindo aquilo que sugere a BNCC.

A forma escolhida para a introdução do conteúdo é bastante similar em cada livro. Todos os livros analisados seguem a mesma metodologia: apresentam situações ditas “cotidianas” e em seguida apresentam as ideias e conceitos referentes ao conteúdo a ser estudado.

Aqui, fazemos observações principalmente acerca dos exemplos introdutórios escolhidos e a forma como aqueles exemplos são utilizados a fim de chamar a atenção do aluno e motivar o interesse pelo conteúdo.

Os exemplos trazidos pelos livros didáticos analisados apresentam um grau de complexidade que, em vez de motivar o estudo das funções, podem produzir um efeito contrário e desestimular o estudante a entender o conteúdo. Estes exemplos e aplicações poderiam ser mais bem aproveitados se fossem apresentados em um segundo momento quando o estudante já estivesse familiarizado com o conceito de função.

Analisando os livros apresentados pelo PNLD 2021, sob a ótica da Teoria da Aprendizagem Significativa somos levados, antes, a considerar os avanços na compreensão dos mecanismos envolvidos no processo de aprendizagem e a reflexão sobre os desafios impostos pelo mundo contemporâneo. Esses avanços indicam a necessidade de exemplificar conceitos cada vez mais complexos, no que se refere à construção do conhecimento necessários à formação humana. Neste contexto, a seleção dos conteúdos a serem ensinados ao aluno passa por várias orientações pedagógicas e sendo o conhecimento do aluno deixado de lado.

Para existir uma aprendizagem significativa é necessário, entre outros, que o conhecimento proposto tenha significado para o aprendiz em relação a sua estrutura de conhecimento já adquirida. Para esta condição ser atendida é fundamental que o material didático adotado esteja de acordo com os conhecimentos já adquiridos e que o aprendiz possua uma estrutura cognitiva capaz de relacionar estes conhecimentos já existentes com as informações que o material didático traz.

Os conhecimentos adquiridos formam os subsunçores, ou ponto de ancoragem, de acordo com a TAS. No caso do ensino de matemática e particularmente do conteúdo de função, é esperado que o aluno possua um bom entendimento sobre conjuntos numéricos e relações entre grandezas. Sem essas noções básicas bem consolidadas o estudante poderá ter dificuldade na compreensão do novo conceito.

É necessário saber aquilo que o aluno já conhece, de acordo com David Ausubel, “Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos” para que exista uma continuidade no processo de aprendizagem.

De acordo com a teoria de Ausubel, os autores dos livros didáticos necessitam levar em consideração os conhecimentos já existentes na abordagem de novos conteúdos. Usar os conhecimentos já adquiridos pelo estudante para abordar um novo é fundamental para que ocorra a aprendizagem de fato.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva**. Tradução ao português de Lígia Teopisto. Lisboa: Plátano, 2006.

AUSUBEL, D. P. **The psychology of meaningful verbal learning**. New York: Grune & Stratton, p. 255,1963.

BASTOS, M. S. **O livro didático nas aulas de matemática**: um estudo a partir das concepções dos professores. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8., 2004, Pernambuco. Disponível em: http:// http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/07/CC01814219765.pdf. Acesso em: 5 ago. 2022.

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JR J. R.; SOUSA P. R. C. **Prisma matemática**: conjuntos e funções: 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio: Parte I: Bases Legais. Brasília: MEC/SEMTEC, 2000.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) - Ensino Médio, Brasília: editora, 1999.

BRASIL, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) - Ensino Médio, Brasília: 2002.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 1ª ed. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante matemática e suas tecnologias:** funções. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2020.

CORTI, A. P.; VÓVIO, C. L. **Jovens na alfabetização**: para além de decifrar palavras, decifrar mundos. Brasília: Ministério da Educação Ação Educativa, 2007.

LIMA, L. A. **Aprendizagem significativa do conceito de função na formação inicial do professor de matemática**.2008 Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação. UECE-CE,2008.

KLEINER, I. **Evolution of the Function Concept**: A Brief Survey. The College Mathematics Journal, v.2, cap 4. p. 282-300,1989.

MASINI, E.F.S. (2011). **Aprendizagem significativa**: condições para ocorrência e lacunas que levam a comprometimentos. Aprendizagem Significativa em Revista, 1 (1), 16-24. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID2/v1_n1_a2011.pdf>. Acesso em: 14 fev. 2022.

MOREIRA, M.A. **Aprendizagem significativa**: a teoria e texto complementares. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

MOREIRA, M. A. Teorias de Aprendizagem. *In*: **A teoria da aprendizagem significativa de Ausubel**: 2. Ed. Ampl.- [Reimpr.]. São Paulo: E.P.U. Cap. 11 p.159-173, 2011.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. **Aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2006.

MOREIRA, M. A; MASINI, E. F. S. **Aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel, São Paulo, Centauro, 2009.

PITOMBEIRA, J.B; ROQUE, T. **Tópicos de História da Matemática**: Coleção PROFMAT, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

PONTE, J. P. **The history of the concept of function and some educational implications**. The Mathematics Educator, v. 3, n. 2, p. 3, 1992.

RÊGO, R. G. **Um estudo sobre a construção do conceito de função**. 2000. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2000.

ROGERS, C. R. **Tornar-se pessoa**. 5. ed. São Paulo: Martins F, 2001.

ROSA, C.; RIBAS, L.; BARAZZUTTI, M. Análise de livros didáticos. *In*: EIEMAT-Escola de Inverno de Educação Matemática, 3., Santa Maria. 2012. Disponível em: http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/RE/RE_2_Rosa_Carine_Pedroso.pdf. Acesso em: 20 ago. 2022.

SANTOS, J. C. F. **Aprendizagem Significativa**: modalidades de aprendizagem e o papel do professor. Porto Alegre: Mediação, 2008.

SOUZA, J. R. **Multiversos Matemática**: Conjuntos e função afim: 1. ed. São Paulo FTD, 2020.

TAVARES, Romero. Aprendizagem significativa. **Revista Conceitos**. João Pessoa, v.12, n.55, p. 10-50, Julho, 2006.

ZUFFI, E.M. *et al*. **Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função**. Educação Matemática em Revista, São Paulo, n. 9/10, p. 10-16, abr. 2001.

APÊNDICE

Livro A

O trabalho com este tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica 5 e da habilidade EM13MAT510 da área de Matemática e suas Tecnologias; e da competência específica 1 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Noção de função

Em situações em que se relacionam duas ou mais grandezas variáveis temos a ideia de **função**. Observe os exemplos.

» Vestuário feito com fibra de poliéster a partir da reciclagem de garrafa PET (polietileno tereftalato). Também podem ser produzidos com plástico reciclado ou reutilizado: calçados resistentes, revestimentos para paredes, carrinhos de supermercado etc.

Exemplo 1:

Considerando a alta demanda de consumo de plástico no mundo e que, potencialmente, é necessário produzir uma grande quantidade de produtos que utilizam esse material, temos no processo de reciclagem uma alternativa para diminuir a quantidade de insumos utilizados na produção de novos materiais e produtos plásticos. A água, por exemplo, é um dos insumos que pode ter o consumo reduzido. Estima-se que a cada 1 t de plástico reciclado sejam economizados 450 L de água, que seriam utilizados no processo de produção convencional dessa mesma quantidade de plástico.

Fonte dos dados: ABIPLAST. **Perfil 2017**. Disponível em: http://file.abiplast.org.br/file/download/2018/Perfil-2017.pdf. Acesso em: 20 maio 2019.

Com base nas informações apresentadas, podemos relacionar as grandezas massa de plástico reciclado e a quantidade de água economizada.

Massa de plástico reciclado (t)	Quantidade de água economizada (L)
1	450
2	900
3	1350
4	1800
5	2250

Note que, para cada quantidade de massa de plástico reciclado, está associada uma única quantidade de água economizada. Nesse caso, podemos dizer que a relação entre a massa de plástico reciclado e a quantidade correspondente de água economizada é uma **função**.

Denominando x a massa de plástico reciclado e y a quantidade de água economizada correspondente, podemos escrever:

Quantidade de água economizada por tonelada de plástico reciclado (L/t).

$$y = 450x$$

Quantidade de água economizada (L) em função da massa de plástico reciclado (t).

Massa de plástico reciclado (t).

Nesse caso, a quantidade y de água economizada está em função da massa x de plástico reciclado, ou seja, a quantidade de água economizada depende da massa de plástico reciclado. Assim, dizemos que y é a **variável dependente** e x é a **variável independente** da função $y = 450x$.

Podemos calcular, por exemplo, quantos litros de água são economizados com a reciclagem de 8 t de plástico:

$$y = 450 \cdot 8 = 3600$$

Logo, são economizados 3 600 L de água com a reciclagem de 8 t de plástico.

Também podemos calcular, por exemplo, quantas toneladas de plástico reciclado correspondem a uma economia de 6 750 L de água no processo de produção:

$$6\,750 = 450x$$
$$\frac{6\,750}{450} = \frac{450x}{450}$$
$$15 = x$$

Assim, ao reciclar 15 t de plástico serão economizados 6 750 L de água na cadeia produtiva do plástico.

Exemplo 2:

Existem aplicativos de *smartphone* que permitem ao usuário comprar produtos em lojas e recebê-los em casa, mediante o pagamento de uma taxa de entrega. Em certo aplicativo, o cálculo da taxa de entrega considera um valor inicial fixo de R$ 5,50 mais R$ 0,25 a cada quilômetro percorrido entre a loja e o local da entrega. Essa relação entre a taxa de entrega e a distância percorrida pode ser expressa pela seguinte função:

Valor inicial fixo (R$).

Distância percorrida (km).

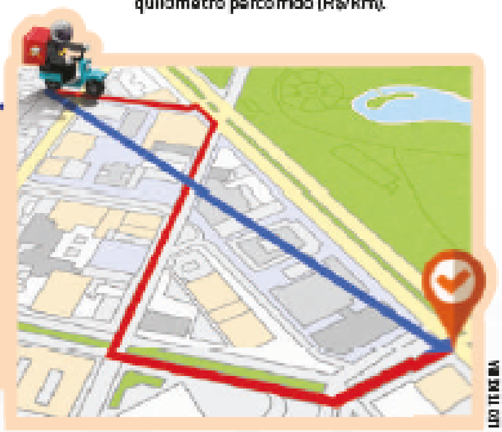
$$t = 5{,}50 + 0{,}25d$$

Taxa de entrega (R$) em função da distância percorrida (km).

Valor adicional pago por quilômetro percorrido (R$/km).

Dica

É importante destacar que a "distância percorrida" é uma grandeza escalar, ou seja, pode ser expressa pela medida do trajeto realizado. Já o "deslocamento" é uma grandeza vetorial, ou seja, corresponde à medida, em linha reta, entre a posição inicial e a posição final do trajeto. Em relação à situação apresentada, na figura está indicado, em vermelho, um exemplo de trajeto realizado em uma entrega, correspondente à distância percorrida (em km). Já em azul, está indicado o vetor correspondente ao deslocamento realizado.



LEO TEIXEIRA

Nessa função, a taxa de entrega *t* é a variável dependente e a distância percorrida *d*, a variável independente.

Para pensar

Com base nessa função, determine:

- o valor da taxa de entrega de uma compra cuja distância percorrida é de 6 km; R$ 7,00
- a maior distância percorrida possível para que o valor da taxa de entrega seja de até R$ 12,00. 26 km

ALEXANDER DOBROVOLSKY/SHUTTERSTOCK.COM

Podemos calcular, por exemplo, quantos litros de água são economizados com a reciclagem de 8 t de plástico:

$$y = 450 \cdot 8 = 3600$$

Logo, são economizados 3 600 L de água com a reciclagem de 8 t de plástico.

Também podemos calcular, por exemplo, quantas toneladas de plástico reciclado correspondem a uma economia de 6 750 L de água no processo de produção:

$$6\,750 = 450x$$
$$\frac{6\,750}{450} = \frac{450x}{450}$$
$$15 = x$$

Assim, ao reciclar 15 t de plástico serão economizados 6 750 L de água na cadeia produtiva do plástico.

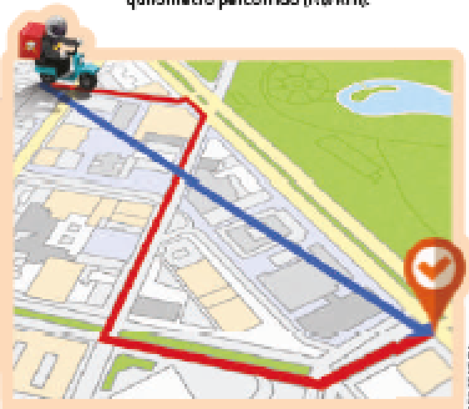
Exemplo 2:

Existem aplicativos de *smartphone* que permitem ao usuário comprar produtos em lojas e recebê-los em casa, mediante o pagamento de uma taxa de entrega. Em certo aplicativo, o cálculo da taxa de entrega considera um valor inicial fixo de R$ 5,50 mais R$ 0,25 a cada quilômetro percorrido entre a loja e o local da entrega. Essa relação entre a taxa de entrega e a distância percorrida pode ser expressa pela seguinte função:

$$\underbrace{t}_{\text{Taxa de entrega (R\$) em função da distância percorrida (km).}} = \overbrace{5{,}50}^{\text{Valor inicial fixo (R\$).}} + \underbrace{0{,}25}_{\text{Valor adicional pago por quilômetro percorrido (R\$/km).}}\overbrace{d}^{\text{Distância percorrida (km).}}$$

Dica

É importante destacar que a "distância percorrida" é uma grandeza escalar, ou seja, pode ser expressa pela medida do trajeto realizado. Já o "deslocamento" é uma grandeza vetorial, ou seja, corresponde à medida, em linha reta, entre a posição inicial e a posição final do trajeto. Em relação à situação apresentada, na figura está indicado, em vermelho, um exemplo de trajeto realizado em uma entrega, correspondente à distância percorrida (em km). Já em azul, está indicado o vetor correspondente ao deslocamento realizado.



LEO TEIXEIRA

Nessa função, a taxa de entrega t é a variável dependente e a distância percorrida d, a variável independente.

Para pensar

Com base nessa função, determine:

- o valor da taxa de entrega de uma compra cuja distância percorrida é de 6 km; R$ 7,00
- a maior distância percorrida possível para que o valor da taxa de entrega seja de até R$ 12,00. 26 km

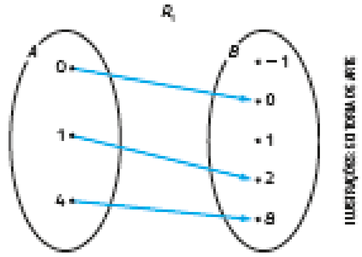
O trabalho com este tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento das competências específicas 4 e 5 e das habilidades EM13MAT404 e EM13MAT510 da área de Matemática e suas Tecnologias.

Conceito de função

Estudamos que uma relação entre duas ou mais grandezas pode corresponder a uma função. Agora, ampliaremos e formalizaremos esse conceito, determinando função como a relação que associa elementos de dois conjuntos.

Considere, por exemplo, os conjuntos $A = \{0, 1, 4\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 8\}$ e as relações (R_1, R_2 e R_3) de A em B:

- R_1: dados $x \in A$ e $y \in B$, temos $y = 2x$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

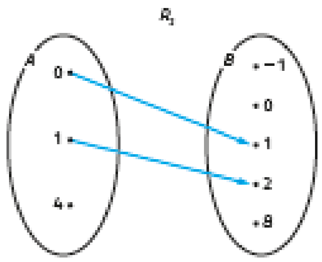
Dica

Associando os elementos de A em B, por meio de R_1, temos:

x	y = 2x
0	$y = 2 \cdot 0 = 0$
1	$y = 2 \cdot 1 = 2$
4	$y = 2 \cdot 4 = 8$

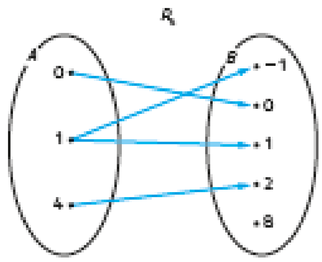
Note que cada elemento de A tem apenas um correspondente em B. Nesse caso, dizemos que R_1 é uma função de A em B, expressa por $y = 2x$.

- R_2: dados $x \in A$ e $y \in B$, temos $y = x + 1$.



Note que o elemento 4, em A, não está associado a elemento nenhum de B. Nesse caso, dizemos que R_2 não é uma função de A em B.

- R_3: dados $x \in A$ e $y \in B$, temos $y^2 = x$.



Note que o elemento 1, em A, está associado a dois elementos de B: −1 e 1. Nesse caso, dizemos que R_3 não é uma função de A em B.

Para pensar

Que alteração pode ser feita no conjunto A ou no conjunto B para que a relação:

- R_2 seja uma função de A em B?
- R_3 seja uma função de A em B?

Resposta esperada: Excluir o elemento 4 do conjunto A ou incluir o elemento 5 no conjunto B.

Resposta esperada: Excluir o elemento −1 ou o elemento 1 do conjunto B ou excluir o elemento 1 do conjunto A.

Para pensar

Podemos dizer que as expressões $y^2 = x$ e $y = \sqrt{x}$ são equivalentes considerando a relação R_3? Justifique.

Resposta esperada: Não, pois $y^2 = x$ é equivalente a $|y| = \sqrt{x}$. De acordo com os conjuntos A e B da relação R_3, por exemplo, a expressão $y^2 = x$ associa o elemento 1 de A aos elementos −1 e 1 de B; já a expressão $y = \sqrt{x}$ associaria ao elemento 1 de A apenas o elemento 1 de B.

Dados dois conjuntos não vazios A e B, denominamos **função de A em B** a relação unívoca que associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$. Podemos indicar uma função de A em B da seguinte maneira:

$$f: A \rightarrow B \text{ ou } A \xrightarrow{f} B$$ Lê-se: função f de A em B.

Uma vez definida uma função f de A em B, denominamos de:

- **domínio da função**, indicado por $D(f)$, o conjunto A;
- **contradomínio da função**, indicado por $CD(f)$, o conjunto B;
- **imagem de x**, o elemento $y \in B$ associado a $x \in A$ pela função f;
- **conjunto imagem da função**, indicado por $Im(f)$, o conjunto formado por todas as imagens dos elementos de A;
- **lei de formação**, a expressão que estabelece a correspondência entre os valores de $x \in A$ e $y \in B$.

Matemática na História

Diversos matemáticos, no decorrer da história, contribuíram para o desenvolvimento do estudo das funções. Um deles foi o suíço Leonhard Euler (1707-1783) que, entre outras contribuições, propôs uma notação própria para funções, em que a variável dependente y é substituída por $f(x)$ na lei de formação. Em relação à função cuja lei de formação é dada por $y = 2x$, temos:

$$f(x) = 2x$$

Lê-se: f de x é igual a $2x$.

Fonte dos dados: EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004. p. 519.

FICTOR A. FRESSBIAHMAN/FOTOARENA

» Euler foi um dos matemáticos mais produtivos de sua época. No decorrer de seus estudos, publicou, entre livros e artigos, mais de 530 trabalhos.

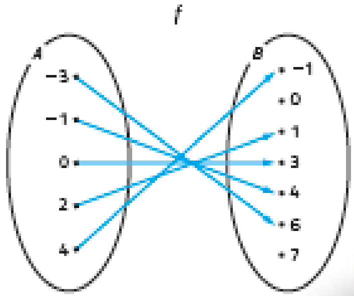
Atividades resolvidas

R5. Considerando os conjuntos $A = \{-3, -1, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 3, 4, 6, 7\}$ e a função $f: A \rightarrow B$, representada pelo diagrama, resolva os itens.

a) Determine o domínio e o contradomínio da função f.

b) Qual é a imagem de -3? E a imagem de 4?

c) Qual o conjunto imagem de f?



EDITORIA DE ARTE

Resolução

a) $D(f) = A = \{-3, -1, 0, 2, 4\}$ e $CD(f) = B = \{-1, 0, 1, 3, 4, 6, 7\}$.

b) A imagem de -3 é 6, pois $f(-3) = 6$. A imagem de 4 é -1, pois $f(4) = -1$.

c) $Im(f) = \{-1, 1, 3, 4, 6\}$.

Para pensar

Respostas possíveis: $y = 3 - x$; $f(x) = 3 - x$. Resposta pessoal.

Escreva uma possível lei de formação para a função f. Com suas palavras, explique a um colega como você encontrou essa lei de formação.

LAURTHLAB/SHUTTERSTOCK.COM

Livro B

Agora, reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada item.

1. Vocês já utilizaram o serviço de táxi? Se sim, lembram-se de ter reparado no funcionamento do taxímetro? Respostas pessoais.

2. Pesquisem o valor das tarifas de táxi no município onde vocês moram e façam uma estimativa do valor de uma corrida de 8 km.
A resposta depende do local onde os estudantes moram.

3. Vocês sabem o que é uma função? E função afim? Respostas pessoais.
É possível que os estudantes associem funções com relações de dependência ou utilizem exemplos para definir o que entendem por função.

■ Pessoa utilizando serviço de táxi no aeroporto Santos Dumont, no Rio de Janeiro (RJ). Fotografia de 2020.

Introdução

Na abertura deste Capítulo, você pôde observar que o valor pago por uma corrida de táxi está relacionado, entre outros fatores, à distância percorrida pelo táxi.

Neste Capítulo, você vai estudar outras situações nas quais é possível verificar relações entre grandezas e entre conjuntos, em especial, aquelas que podem ser associadas ao conceito de função e de função afim.

SAIBA QUE...

Chamamos de **grandeza** o que pode ser expresso por uma medida, por exemplo: comprimento, área, volume, temperatura.

A ideia de função

Muitas vezes nos deparamos com situações no dia a dia em que diferentes grandezas estão associadas por uma relação de dependência.

Na situação apresentada na abertura, por exemplo, quanto maior a distância percorrida pelo táxi, maior será o valor a ser pago pela corrida. Nesse caso, dizemos que, entre outros fatores, o valor pago por uma corrida de táxi **depende** da distância percorrida.

Também podemos verificar essa relação de dependência em um restaurante "por quilo": quanto maior a quantidade, em quilograma, de comida consumida, maior será o valor a ser pago por ela.

PENSE E RESPONDA

Você identifica essa relação de dependência entre grandezas em outras situações do dia a dia? Quais?

Respostas pessoais.

- Geralmente, em restaurantes "por quilo", há uma grande variedade de saladas e legumes, alimentos importantes para uma refeição saudável e balanceada.

Além das situações anteriores, podemos também pensar na relação de dependência entre o valor total de uma fatura de energia elétrica e a quantidade de energia consumida. Nesse caso, o valor da fatura depende da energia consumida: quanto menor o consumo, menor será o valor a ser cobrado na fatura.

Devemos ficar atentos ao desperdício de energia elétrica, que, entre outros fatores, tem impacto no orçamento doméstico. Na foto, leitura de relógio de luz sendo feita por colaborador da companhia elétrica em Macaé (RJ). Fotografia de 2018.

Em geral, os valores que as grandezas podem assumir nessas relações são representados genericamente por **variáveis**, que podem ser classificadas como **variável dependente** e **variável independente**. Nas situações anteriores, temos:

Variável independente	Variável dependente
Distância percorrida pelo táxi	Valor pago pela corrida
Quantidade de comida consumida	Valor pago pela refeição
Quantidade de energia elétrica consumida	Valor da fatura de energia elétrica

As situações apresentadas têm duas características em comum:

- **Todos os valores** que podem ser assumidos pela variável independente são associados a valores da variável dependente.
- Cada valor atribuído à variável independente está associado a **um único valor** da variável dependente.

Uma relação que possui essas duas características é chamada de **função**. Assim, podemos dizer que:

- o valor pago por uma corrida de táxi é função da distância percorrida pelo táxi naquela corrida;
- o valor a ser pago em um restaurante "por quilo" é função da quantidade, em quilograma, de comida consumida;
- o valor de uma fatura de energia elétrica é função da quantidade de energia elétrica consumida.

PENSE E RESPONDA

Você já observou uma fatura de energia elétrica e identificou informações sobre o consumo, o valor a ser pago, os tributos, entre outras? Em sua opinião, qual é a importância de ler e analisar esse tipo de documento?

Respostas pessoais.

Acompanhe outras situações que podem ser representadas por funções.

Situação 1

Observe, na tabela a seguir, as tarifas vigentes em 31 de janeiro de 2020 para os serviços de envio de carta não comercial e cartão-postal, praticadas pelos Correios.

Observamos que aqui a palavra "peso" está sendo usada em seu sentido coloquial, com a ideia de massa, e não com o sentido de força-peso da Física.

Carta não comercial e cartão-postal (vigência 31/1/2020)

Peso (g)	Preço básico (R$)
Até 20	2,05
Mais de 20 até 50	2,85
Mais de 50 até 100	3,95
Mais de 100 até 150	4,80
Mais de 150 até 200	5,65
Mais de 200 até 250	6,55
Mais de 250 até 300	7,50
Mais de 300 até 350	8,35
Mais de 350 até 400	9,25
Mais de 400 até 450	10,10
Mais de 450 até 500	11,00

Fonte dos dados: CORREIOS. **Preços de carta**: carta e cartão postal à vista e a faturar. Disponível em: https://www.correios.com.br/enviar-e-receber/correspondencia/carta/precos-e-prazos/carta. Acesso em: 22 abr. 2020.

PENSE E RESPONDA

- Qual é o valor a ser pago por uma carta que pesa 160 g? R$ 5,65
- Qual é o "peso" máximo de uma carta para que sua tarifa não ultrapasse R$ 8,00? 300 g
- É possível que duas cartas não comerciais com preços básicos distintos tenham o mesmo "peso"? não

Para determinar, com o uso da tabela, a relação entre "peso" e preço, escolhemos uma faixa de valores na coluna **Peso (g)** e lemos, na linha horizontal da tabela, o valor correspondente na coluna **Preço básico (R$)**. Por exemplo, se temos uma carta não comercial de 25 g, consideramos na coluna **Peso (g)** a célula "Mais de 20 até 50" e verificamos na coluna **Preço básico (R$)** o valor correspondente, ou seja, R$ 2,85.

Nessa situação, o preço básico da carta não comercial depende do "peso" da carta e, com base nessa tabela, podemos obter outras informações a respeito da relação entre "peso" da carta não comercial e preço básico para envio.

Observe que cada "peso" de carta não comercial a ser enviada corresponde a um único preço básico. Assim, dizemos que o preço básico para enviar uma carta não comercial é uma **função** do "peso" da carta. O "peso" da carta é a **variável independente**, e o preço básico é a **variável dependente**.

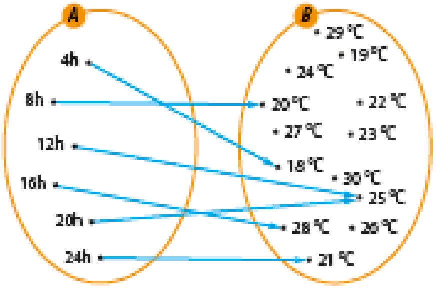
Situação 2

Durante um dia, um centro de meteorologia realizou medições de temperatura, de quatro em quatro horas, no centro de sua cidade. A menor temperatura registrada foi 18 °C, e a maior, 28 °C. Observe a seguir as temperaturas obtidas, de acordo com o horário da medição.

Horário	4 h	8 h	12 h	16 h	20 h	24 h
Temperatura	18 °C	20 °C	25 °C	28 °C	25 °C	21 °C

Estação meteorológica flutuante às margens do Rio Solimões, localizada na cidade de Tefé (AM). Fotografia de 2016.

Podemos também representar essas informações por meio de um esquema, conhecido como **diagrama de flechas**. Consideramos como elementos de um conjunto *A* os horários nos quais foram realizadas as medições, e como elementos de um conjunto *B* alguns dos possíveis valores de temperatura verificados nesse dia, como indicado na imagem a seguir.



PENSE E RESPONDA

Nessa situação, qual é a variável independente? E a variável dependente?

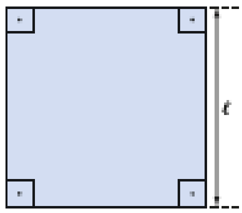
O horário em que foi realizada a medição é a variável independente. A temperatura é a variável dependente.

Como cada um dos elementos do conjunto *A* está relacionado a um único elemento do conjunto *B*, podemos dizer que essa relação é uma **função**.

No diagrama podemos observar que em dois horários distintos a temperatura obtida pela medição foi 25 °C. Além disso, em nenhum dos horários em que foi realizada uma medição a temperatura registrada foi 19 °C, 22 °C, 23 °C, 24 °C, 26 °C, 27 °C, 29 °C ou 30 °C.

Situação 3

Para determinar a área *A* de um quadrado, multiplicamos a medida de seu lado ℓ por ela mesma, ou seja, elevamos ℓ ao quadrado. Podemos representar esse cálculo por meio da fórmula $A = \ell^2$.



Considerando *A* e ℓ números reais positivos, essa fórmula estabelece uma correspondência entre esses valores, de modo que a área de um quadrado é uma função da medida de seu lado. Por exemplo, se ℓ for igual a 5 cm, a área *A* será 25 cm².

PENSE E RESPONDA

É possível ter dois quadrados de áreas distintas cujos lados tenham a mesma medida? não

SAIBA QUE...

Uma lei de correspondência pode não ter uma expressão matemática que a represente. Por exemplo, a lei que relaciona a temperatura e o horário de medição, vista anteriormente na situação 2.

SAIBA QUE...

- As letras x e y são muito utilizadas para representar as variáveis de uma função, mas podemos utilizar outras letras.
- A letra f, em geral, nomeia as funções, mas podemos ter também funções g, h etc. Assim, por exemplo, escrevemos $g: A \rightarrow B$ para designar a função g de A em B.

Observe algumas medidas do lado de um quadrado e da área correspondente.

ℓ (u.c.) [unidade de comprimento]	1	2	3	10	50	100
A (u.a.) [unidade de área]	1	4	9	100	2 500	10 000

Como a área do quadrado depende da medida de seu lado, a variável independente é a medida do lado, e a variável dependente é a área.

A fórmula da área de um quadrado pode ser interpretada como a **lei de formação** ou a **lei de correspondência** da função que relaciona a área A de um quadrado e a medida do lado ℓ correspondente.

Uma possível maneira de compreender a lei de formação de uma função é pensar em uma máquina que transforma a matéria-prima (variável independente) em produto final (variável dependente). Observe a seguir um esquema que mostra como uma máquina "transforma" a medida do lado (ℓ) de um quadrado em sua respectiva área (A).

Definição de função

Agora que você já acompanhou algumas situações que envolvem função, vamos conhecer a definição matemática desse tipo de relação e aprofundar o estudo desse conteúdo.

> Dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma **função** de A em B é uma relação que associa **cada** elemento x de A a um **único** elemento y de B.

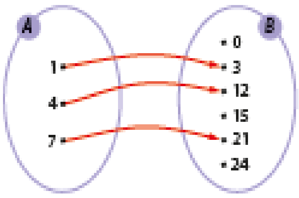
Para indicar uma função de A em B, podemos usar a seguinte notação:

$$f: A \rightarrow B \text{ (lê-se: } f \text{ de } A \text{ em } B\text{)}$$

A função f transforma x de A em y de B, o que pode ser escrito como $y = f(x)$ (lê-se: y é igual a f de x).

Vamos agora utilizar diagramas para analisar algumas relações entre conjuntos de números e, com base nessa análise, concluir se são ou não uma função. Acompanhe os exemplos a seguir.

a) Dados os conjuntos $A = \{1, 4, 7\}$ e $B = \{0, 3, 12, 15, 21, 24\}$, seja a relação de A em B expressa por $y = 3x$, com $x \in A$ e $y \in B$.

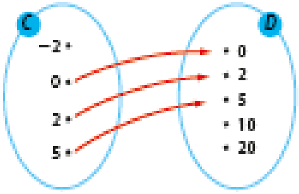


Observe que:

- todos os elementos de A estão associados a elementos de B;
- cada elemento de A está associado a um único elemento de B.

Nesse caso, a relação de A em B expressa por $y = 3x$ é uma **função de A em B** e corresponde à função "multiplicar por 3".

b) Dados os conjuntos $C = \{-2, 0, 2, 5\}$ e $D = \{0, 2, 5, 10, 20\}$, seja a relação de C em D expressa por $y = x$, com $x \in C$ e $y \in D$.

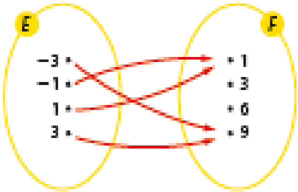


Observe que:

- existe um elemento de C (o número -2) que não está associado a nenhum elemento de D.

Portanto, a relação de C em D expressa por $y = x$ **não é uma função de C em D.**

c) Dados os conjuntos $E = \{-3, -1, 1, 3\}$ e $F = \{1, 3, 6, 9\}$, seja a relação de E em F expressa por $y = x^2$, com $x \in E$ e $y \in F$.

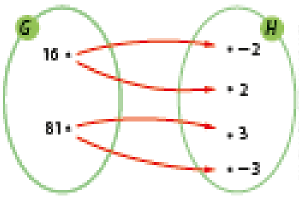


Observe que:

- todos os elementos de E estão associados a elementos de F;
- cada elemento de E está associado a um único elemento de F.

A relação de E em F expressa por $y = x^2$ representa uma **função de E em F** e corresponde à função "elevar ao quadrado".

d) Dados os conjuntos $G = \{16, 81\}$ e $H = \{-3, -2, 2, 3\}$, seja a relação de G em H expressa por $y = \pm\sqrt[4]{x}$, com $x \in G$ e $y \in H$.



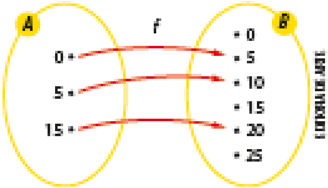
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Observe que:

- todos os elementos de G estão associados a elementos de H;
- os elementos de G (tanto o número 16 quanto o 81) estão associados a mais de um elemento de H.

Nesse caso, a relação de G em H **não representa uma função de G em H**, pois existe pelo menos um elemento de G que está associado a mais de um elemento de H.

Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função



Observe o diagrama que representa a função $f: A \rightarrow B$, definida por $y = x + 5$.

O conjunto A chama-se **domínio** da função. Esse conjunto é constituído de todos os elementos x (variável independente) de A e é indicado por **D(*f*)**.

O conjunto B é chamado de **contradomínio** da função. Esse conjunto é constituído de todos os elementos y (variável dependente) de B e é indicado por **CD(*f*)**.

Assim, de acordo com o diagrama, temos:

- $D(f) = A = \{0, 5, 15\}$
- $CD(f) = B = \{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$

Cada elemento x do domínio tem um correspondente y no contradomínio. A esse valor de y, associado a x pela função f, damos o nome de **imagem** de x pela função f e indicamos por $\boldsymbol{y = f(x)}$.

Essa notação é muito comum e simplifica a linguagem, pois, em vez de dizermos "Qual é o valor de y quando x é igual a 15?", podemos dizer simplesmente "Qual é o valor de $f(15)$?".

Nesse caso, para obtermos o valor de y quando x é igual a 15, considerando a lei da função f, dada por $y = x + 5$, determinamos $f(15)$:

$$f(15) = 15 + 5 \Rightarrow f(15) = 20 \text{ ou } y = 20$$

O conjunto de todos os valores de y pertencentes a $CD(f)$, que são imagens de x pela função, é chamado de **conjunto imagem** da função. O conjunto imagem, indicado por **Im(*f*)**, é um subconjunto do contradomínio.

No exemplo anterior, temos: $Im(f) = \{5, 10, 20\}$

Uma função é precisamente definida quando explicitamos o domínio, o contradomínio e a relação que associa cada elemento do domínio a um único elemento do contradomínio.

Estudo do domínio de uma função real

Uma função em que o domínio e o contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{R}$ é chamada de **função real de variável real**.

Observe alguns exemplos:

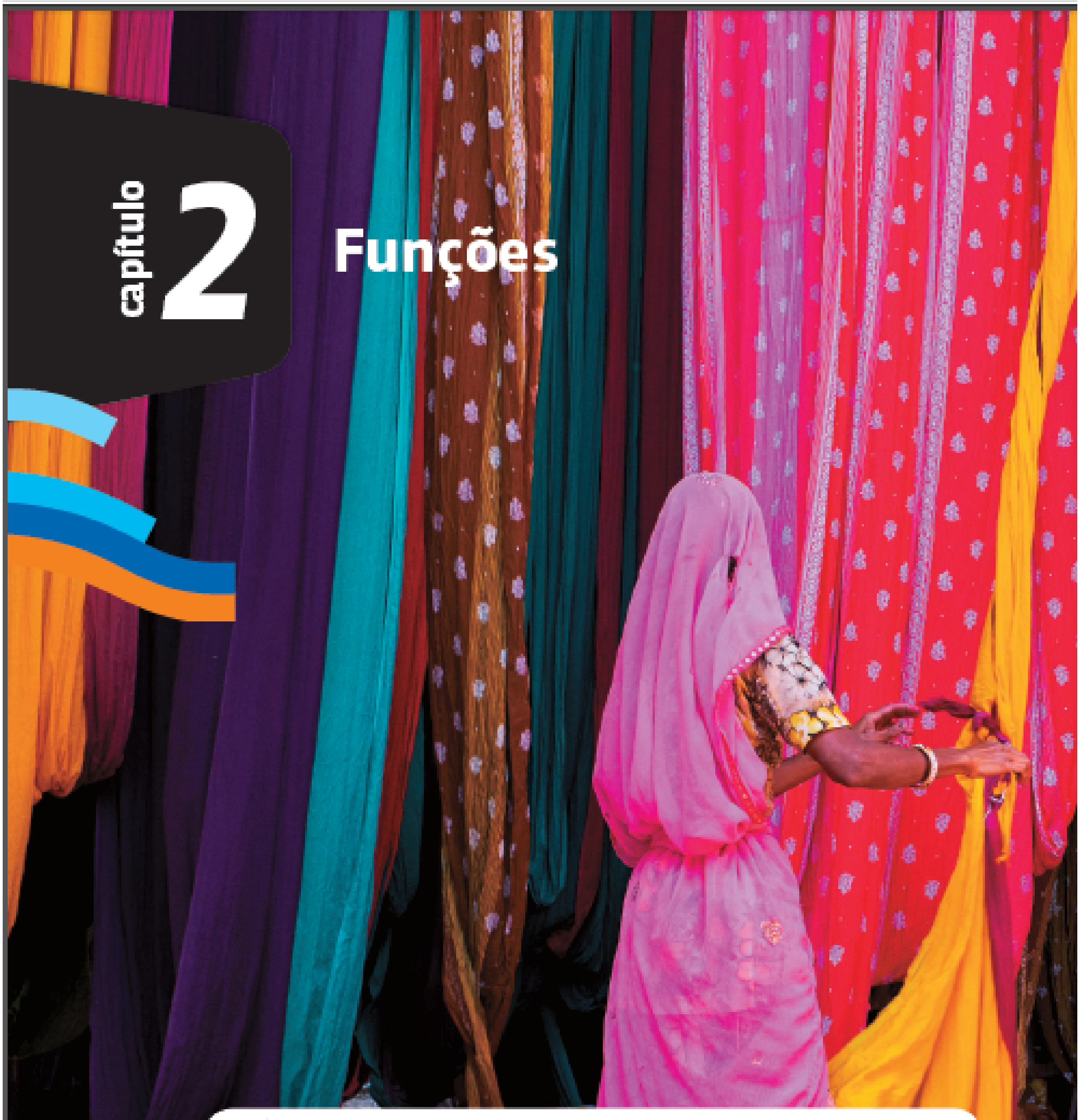
a) A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x^2 - 1$, tem como domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$.

b) A função $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = -\dfrac{x}{2} + 5$, possui domínio $D(g) = \mathbb{Z}$ e $CD(g) = \mathbb{R}$.

c) A função $h: [-2, 5[\rightarrow \mathbb{R}_+$, dada por $h(x) = 2^{x+3}$, possui domínio $D(h) = [-2, 5[$ e $CD(h) = \mathbb{R}_+$.

Livro C

capítulo 2 Funções



A Índia é conhecida mundialmente pela produção de tecidos, algo que faz parte da história do país desde a Antiguidade. De cores intensas e padrões com desenhos que remetem a diversos temas, como religião e natureza, os tecidos são comercializados pelo mundo, sendo uma das mais importantes atividades econômicas indianas.

Comumente, os tecidos são vendidos por metro (comprimento) e seu preço pode variar de acordo com alguns fatores, como os materiais utilizados para confeccioná-los, para dar cor e brilho, e a mão de obra necessária para produzi-los. Assim, o valor total da compra de um tecido dependerá de quantos metros pretende-se comprar e do valor cobrado por metro.

Respostas nas Orientações para o professor.

A) De acordo com o texto, quais fatores influenciam nos preços dos tecidos indianos?

B) Descreva uma relação entre a quantidade de tecido a ser comprada e o valor a pagar.

C) Cite outras situações em que há relação entre grandezas, como a do item anterior.

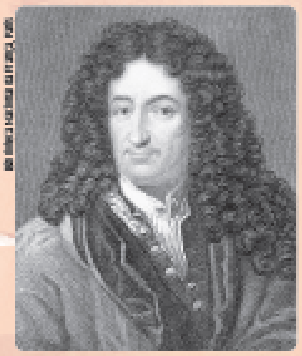
Tecidos sendo secos ao ar livre, no Rajastão, Índia, em 2019.

Noções de função

Destaque BNCC
- EM13MAT101
- EM13MAT302
- EM13MAT404

Você provavelmente aprendeu que grandeza é um atributo físico de um fenômeno, corpo ou substância que pode ser qualitativamente distinguido e quantitativamente determinado. Comprimento, área, volume, temperatura, velocidade e massa são exemplos de grandezas.

Em muitos casos, a variação da medida de uma grandeza depende da variação da medida de outra(s). Por exemplo, ao comprar certos alimentos, a grandeza "quantia a pagar" depende da grandeza "massa do alimento", assim como a grandeza "velocidade" depende das grandezas "tempo" e "espaço".

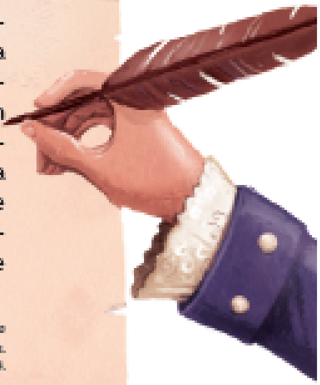


Gravura do alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), matemático, filósofo, diplomata e bibliotecário.

Autor desconhecido, 1836. Coleção particular.

Para estudar algumas dessas relações entre grandezas, podemos usar o conceito de **função** que, no decorrer da história desenvolveu-se com a contribuição de vários estudiosos. Entre eles destaca-se Gottfried Wilhelm Leibniz, que, em 1694, parece ter introduzido a palavra "função" em sua forma latina equivalente. A ideia de função pode ser utilizada como exemplo da tendência dos matemáticos de generalizar e ampliar conceitos.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.



Podemos citar como exemplo de situação que envolve a ideia de função uma promoção de venda de camisetas, em que cada uma custa R$ 22,00.

Quantidade de camisetas	Valor a ser pago (R$)
1	22
2	44
3	66
4	88
⋮	⋮
x	$22 \cdot x$

Com essa informação, podemos construir um quadro relacionando a quantidade de camisetas e o valor a ser pago na compra delas.

O valor a ser pago depende da quantidade de camisetas compradas. Nesse caso, dizemos que a grandeza "valor a ser pago" é a **variável dependente**, geralmente indicada por y, e a grandeza "quantidade de camisetas" é a **variável independente**, comumente indicada por x. Essa relação nos dá a ideia de função, pois para cada valor atribuído à variável independente (x) existe um único valor correspondente para a variável dependente (y), ou seja, para cada quantidade de camisetas existe um único valor a ser pago.

Essas duas grandezas também podem ser relacionadas pela fórmula ou **lei de formação** abaixo.

$$\overbrace{y}^{\text{valor a ser pago}} = \underbrace{22}_{\text{valor por camiseta}} \cdot \overbrace{x}^{\text{quantidade de camisetas}}$$

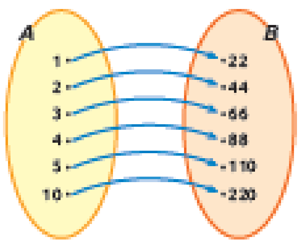
Desse modo, podemos determinar o valor a ser pago na compra de 7 camisetas, por exemplo.

$$y = 22 \cdot x = 22 \cdot 7 = 154$$

Portanto, o valor a ser pago na compra de 7 camisetas é R$ 154,00.

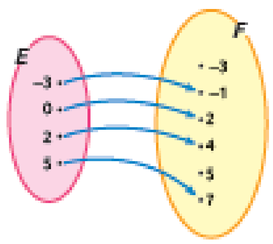
Para representar uma função, podemos utilizar a ideia de conjuntos. No caso da situação acima, o conjunto A representa os valores correspondentes à quantidade de camisetas, variável independente (x), e o conjunto B representa os valores a serem pagos, variável dependente (y). Utilizando um diagrama de flechas, temos:

Essa função associa cada $x \in A$ a um único $y \in B$ por meio da lei de formação $y = 22 \cdot x$.

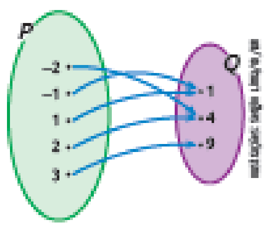


Observe que, no diagrama, estão representadas apenas algumas correspondências entre os valores x e y. Porém, podemos atribuir outros valores a x, nesse caso inteiros positivos, e obter um valor correspondente y.

Observe outros exemplos de funções.

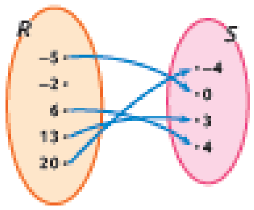


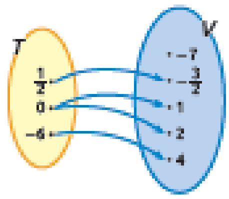
- Todos os elementos de E possuem correspondente em F.
- Cada elemento de E está associado a um único elemento de F.
- Nesse caso, temos uma função de E em F, que pode ser expressa pela lei de formação $y = x + 2$, com $x \in E$ e $y \in F$.



- Todos os elementos de P possuem correspondente em Q.
- Cada elemento de P está associado a um único elemento de Q.
- Nesse caso, temos uma função de P em Q, que pode ser expressa pela lei de formação $y = x^2$, com $x \in P$ e $y \in Q$.

Agora, veja exemplos de relações entre conjuntos que não correspondem a funções.





- Nem todos os elementos de *R* possuem correspondente em *S*. O elemento −2 de *R* não tem correspondente em *S*. Por isso, o diagrama de flechas não representa uma função de *R* em *S*.

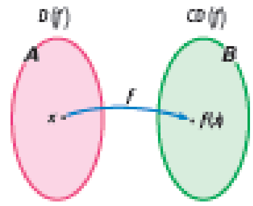
- Nem todos os elementos de *T* estão associados a um único elemento de *V*. O elemento 0 de *T* tem mais de um correspondente em *V*. Por isso, o diagrama de flechas não representa uma função de *T* em *V*.

Dados os conjuntos *A* e *B* não vazios, uma função *f* de *A* em *B* $(f: A \to B)$ é uma regra (ou lei) que determina como associar a cada elemento *x* de *A* um único elemento $y = f(x)$ de *B*.

$y = f(x)$, lê-se: "*y* é igual a *f* de *x*".

Domínio, contradomínio e conjunto imagem

Ao escrevermos uma função $f: A \to B$, denominamos o conjunto *A* como **domínio** e o conjunto *B* como **contradomínio** da função *f* e os indicamos por $D(f)$ e $CD(f)$, respectivamente. Cada elemento $f(x)$ de *B* chama-se a **imagem** de *x* pela função *f* ou o valor assumido pela função *f* para $x \in A$.

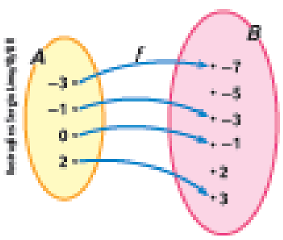


Ao conjunto formado por todos os elementos $f(x)$ de *B* que são imagens de algum $x \in A$ pela função *f*, denominamos **conjunto imagem** de *f* e indicamos por $Im(f)$. Logo $Im(f) \subset CD(f)$.

Exemplo

Considere a função $f: A \to B$, com $A = \{-3, -1, 0, 2\}$ e $B = \{-7, -5, -3, -1, 2, 3\}$, que associa cada elemento *x* de *A* a seu dobro subtraído de uma unidade em *B*; ou seja, a função *f* é definida pela lei de formação $f(x) = 2x - 1$. Vamos determinar a imagem *y* de cada elemento *x* de *A*. Desse modo, a imagem de:

- $x = -3$ é $f(-3) = 2 \cdot (-3) - 1 = -7$
- $x = -1$ é $f(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -3$
- $x = 0$ é $f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$
- $x = 2$ é $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$



Nessa função *f*, temos:

$D(f) = A = \{-3, -1, 0, 2\}$

$CD(f) = B = \{-7, -5, -3, -1, 2, 3\}$

$Im(f) = \{-7, -3, -1, 3\}$