UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA (PPGFIL/UFMA)

NATALIA PEREIRA PINHEIRO

RACIOCÍNIOS SOB INCERTEZA: COMBINANDO LÓGICA EPISTÊMICA E PROBABILIDADE

SÃO LUÍS
2023

NATALIA PEREIRA PINHEIRO

RACIOCÍNIOS SOB INCERTEZA: COMBINANDO LÓGICA EPISTÊMICA E PROBABILIDADE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Kléos Freire Pereira

SÃO LUÍS
2023

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Pereira Pinheiro, Natalia.
RACIOCÍNIOS SOB INCERTEZA : combinando lógica epistêmica e probabilidade / Natalia Pereira Pinheiro. - 2023.
80 f.

Orientador(a): Marcio Kléos Freire Pereira.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Filosofia, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2023.

1. Incerteza epistêmica. 2. Lógica epistêmica. 3. Probabilidade epistêmica. I. Kléos Freire Pereira, Marcio. II. Título.

NATALIA PEREIRA PINHEIRO

RACIOCÍNIOS SOB INCERTEZA: combinando lógica epistêmica e probabilidade

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal do Maranhão como requisito à obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Kléos Freire Pereira

Aprovada em: 30 de maio de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcio Kléos Freire Pereira
(PPGFIL/UFMA – orientador)

Prof. Dr. José Leonardo Annunziato Ruivo
(PPGFIL/UFMA - examinador interno)

Prof. Dr. André Luiz de Almeida Lisbôa Neiva
(UFAL - examinador externo)

Ao meu avô Manoel.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao rio Grajaú por me acolher neste longuíssimo retorno a mim. À Talia, às ervas e todos os bichos das profudezas, eu não saberia morrer tantas vezes sem a amorosa companhia de vocês. Toda gratidão à minha família por não me deixar esquecer qual terra nutre o meu coração. Com vocês eu sou, antes de tudo, uma forte!

Ao meu orientador Prof. Dr. Marcio Kléos Freire Pereira, agradeço a paciência e as orientações. Aos professores Leonardo Ruivo e André Neiva, suas contribuições foram fundamentais para o desenvolvimento do nosso trabalho. Agradeço a FAPEMA por financiar nossas pesquisas e ao programa de Pós-graduação em Filosofia da UFMA — PPGFIL.

Jéssica Rodrigres e Jessica Caren, eu espero vocês do outro lado. Foi maravilhoso ver nossos caminhos se cruzando e se tonando um.

Meu fado é o de não saber quase tudo. Sobre o nada eu tenho profundidades. Não tenho conexões com a realidade. Poderoso para mim não é aquele que descobre ouro. Para mim poderoso é aquele que descobre as insignificâncias (do mundo e as nossas). Por essa pequena sentença me elogiaram de imbecil. Fiquei emocionado. Sou fraco para elogios.

(Manoel de Barros)

RESUMO

Na lógica epistêmica usual é possível representar o conhecimento dos agentes, no entanto não é possível representar os casos em que os agentes não podem afirmar algo com certeza, mas têm boas razões para aceitar certas proposições em detrimento de outras. Para aumentar o alcance da linguagem nessa direção é preciso enriquecer a lógica epistêmica com probabilidade. Com a probabilidade, nas lógicas epistêmicas será possível atribuir um valor numérico (ou outro elemento qualitativo) a conjuntos de mundos, o que criará, por sua vez, uma espécie de hierarquia entre as proposições. A partir desse ordenamento, mesmo em condições incertas, é possível fazer escolhas mais racionais e representá-las. Essa conjugação entre dois tipos de lógica garante à linguagem uma capacidade ampliada para lidar com a incerteza de maneira dedutiva (formalismo mais rico e expressivo). O propósito dessa pesquisa é analisar e mostrar como recursos da lógica epistêmica e probabilidade podem ser associados para representar raciocínios sob incerteza. Para tanto, uma investigação acerca da lógica epistêmica (sintaxe, semântica e limites no alcance da representação) é feita. Além disso, relacionaremos as concepções de probabilidade e incerteza epistêmica. Por fim, discutimos como a combinação entre lógica epistêmica e probabilidade é feita por Joseph Halpern em sua obra *Reasoning about uncertainty* (2003). Como de praxe, a metodologia aqui utilizada consiste em pesquisa bibliográfica na literatura pertinente.

Palavras-chave: lógica epistêmica, incerteza epistêmica, raciocínios sob incerteza, probabilidade.

ABSTRACT

In the usual epistemic logic it is possible to represent the agents' knowledge. However, it is not possible to represent the cases in which the agents cannot assert something with certainty, but have good reasons to accept certain propositions to the detriment of others. To increase the range of language in this sense, it is necessary to enrich the epistemic logic with probability. With probability, in epistemic logics it will be possible to assign a numerical value (or another qualitative element) to sets of worlds, creating, in turn, a kind of authority among the propositions. From this ordering, even in uncertain conditions, making more rational choices and representing them is possible. This conjugation between two types of logic guarantees language an expanded capacity to deal with reflection in a deductive way (richer and more expressive formalism). This research aims to analyze and show how features of epistemic logic and probability can be associated with representing reasonings under uncertainty. For that, an investigation is made into the epistemic logic (syntax, semantics and limits in the reach of the representation). In addition, it explores the relationship between the concepts of probability and epistemic uncertainty. Finally, we discuss how the combination between epistemic logic and probability has been made by Joseph Halpern in his *Reasoning about uncertainty* (2003). The methodology used here is the usual bibliographical research in the relevant literature.

Keywords: epistemic logic, epistemic uncertainty, reasoning under uncertainty, probability.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PR	Atribuição de probabilidade
$\top$	Qualquer tautologia
F	*Algebra sobre W*
E	Espaço de probabilidade
μ	Medida de probabilidade
$\mathcal{F}$	*Frame* de probabilidade
UNIF	*Uniforme*
PDE	*Probabilidade determinada por estado*
CONS	*Consistência*
M_n^{prob}	Modelo de probabilidade
M_n^{men}	Modelo de probabilidade mensurável
$\mathcal{L}_n^Q$	Linguagem de incerteza quantitativa
AX_n^{prob}	Axiomaxização para probabilidade
$\mathcal{L}_n^{kQ}$	Linguagem de incerteza epistêmica quantitativa

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Uma parcela majoritária de nossas inferências depende de informações imprecisas ou incertas. Por outro lado, somos agentes com capacidades epistêmicas limitadas, que raciocinam de maneira inconclusiva em muitas situações. A partir disso, aqui interessam os raciocínios sob incerteza.

A lógica epistêmica é usada para representar raciocínios envolvendo atribuições de conhecimento (ou crença). No entanto, quando usadas para representar raciocínios sob incerteza, essa lógica apresenta uma importante limitação: num cenário hipotético em que uma agente tem acesso a diferentes mundos (ou diferentes descrições do mundo), e tem razões para acreditar mais na ocorrência de uma dada descrição de mundo em detrimento de outras, embora não seja capaz de distinguir qual delas é o mundo que acontece, com a lógica epistêmica usual não é possível representar as disposições da agente para escolher certas proposições em detrimento de outras.

Nos raciocínios sob incerteza, tão importantes quanto os conhecimentos são as evidências que justificam as crenças e as escolhas de uma agente sobre o que é mais provável. A partir disso, se for possível combinar probabilidade e lógica epistêmica de maneira adequada (a probabilidade capturando o peso que as evidências têm, e a lógica epistêmica modelando as relações de conhecimento), poderemos representar tanto as incertezas das agentes quanto a disposição das suas escolhas. Essa tarefa nos permitirá, por um lado, lançar um pouco de luz sobre o fenômeno dos raciocínios sob incerteza (uma contribuição para a epistemologia formal, portanto), e por outro lado, considerando que várias ciências como economia, computação e estatística, dependem do trato formal da incerteza, compreender e mostrar como lógica epistêmica e probabilidades podem ser combinadas para representar raciocínios.

O objetivo geral dessa pesquisa é investigar como recursos da lógica epistêmica podem ser combinados com probabilidade para representar raciocínios (decisões racionais) em situações de incerteza epistêmica. Para tanto, vamos analisar alguns enigmas paradigmáticos envolvendo inferências e decisões em situações de incerteza epistêmica, investigar criticamente como os recursos da lógica epistêmica *standard* são usados para representar situações de incerteza, e os limites desta representação; e mostrar como lógicas epistêmicas e probabilidade podem ser combinadas para tratar dificuldades envolvendo raciocínios sob incerteza.

Na introdução do livro *Reasoning about uncertainty*, Halpern (2003) apresenta alguns enigmas famosos envolvendo decisões sob condição de incerteza. Um deles, talvez o mais famoso, com muitas versões e estudos publicados (inclusive numerosos vídeos na plataforma *YouTube*), é conhecido como o *Problema de Monty Hall*[1].

O cenário é mais ou menos o seguinte: imagine que Helena está participando de um jogo no qual precisa escolher entre três portas fechadas (A, B e C), apenas uma das quais contém um prêmio. A princípio, qualquer que seja a porta, as chances de Helena escolher a porta premiada são de 1/3. Imagine que ela escolhe a porta A. O apresentador do jogo abre a porta C e mostra que esta não é a porta com o prêmio. Qual a probabilidade de Helena ter escolhido a porta premiada? Considere que o apresentador proponha a Helena que ela troque a porta A pela B, ela deve trocar? Como ela poderia raciocinar nessa situação, sem apelar para palpites ou fraudes?

A nossa primeira intuição é a de que a probabilidade é de ½ para ambas as portas, e que não faz diferença Helena trocar de porta. No entanto, matematicamente, após eliminar a porta C, não só a probabilidade de escolher a porta premiada não se iguala a ½ para ambas as portas A e B, como ela é 2/3 se Helena mudar a porta escolhida antes (qualquer que tenha sido ela).

Há algumas coisas intrigantes aqui implicadas. Claramente, as intuições não alcançam a sutileza de certos raciocínios. Considerando os três eventos possíveis, a chance de Helena ter escolhido a princípio a porta premiada era de 1/3; porém, eliminada uma das outras duas possibilidades, a possibilidade restante e não escolhida por Helena é de 2/3 de acerto (e não de ½). Em outras palavras, ela *deveria* sim trocar de porta. Isso significa dizer que o prêmio certamente está na nova porta escolhida? Claro que não, porque estamos lidando com probabilidades. Mas, a afirmação de que ela deveria trocar de porta quer dizer que, tomando essa decisão ao longo de muitas situações similares, ela terá escolhido a porta premiada em aproximadamente 2/3 das vezes (o que é uma frequência de acertos bem superior a ½).

Outro enigma famoso, similar ao anterior, e que também ilustra esse impacto do condicionamento nas informações disponíveis, é o enigma do segundo ás (HALPERN, 2003, 1). Consideremos um deck de baralho com apenas quatro cartas (ás de copas, ás de espadas, dois de copas, dois de espadas). Um par aleatório dentre estas é dado a Helena. Dentre as seis combinações possíveis, as chances de Helena ter um

---

[1] O problema matemático em questão recebe esse nome devido a um programa televisivo da década de 1970,intitulado *Let's make a deal* e cujo apresentador se chamava Monty Hall.

par de ases é de 1/6, e de ter pelo menos um ás no par que recebeu é de 5/6. Imagine que ela revela ter ao menos um ás, qual a probabilidade de ela ter o par de ases? Descartando a única possibilidade em que o ás não ocorre, as chances são de 1/5.

Contudo, se em vez de apenas revelar que possui um ás, Helena afirma ter o ás de copas, a probabilidade de ela ter um par de ases é de 1/3. Mas, intuitivamente, que diferença existe, para o efeito de calcular as chances de ela estar com os dois ases, entre ela dizer que tem um ás e dizer que tem um ás específico (qualquer que seja)? Aqui a probabilidade também é condicional, e a cada nova informação, o universo de possibilidades se modifica e isso tem um impacto decisivo em como as agentes tomam (ou deveriam tomar) decisões racionais em cenários com informação insuficiente (desde negociações comerciais até situações de vida ou morte).

Esse tipo de desafio epistemológico tende a se complicar quando não temos acesso a dados quantitativos (estatísticos ou matemáticos) para nos basearmos. Por exemplo, se Helena procura um médico com um quadro peculiar de sintomas, no qual alguns dos sintomas são típicos de uma enfermidade, mas outros sintomas típicos daquela enfermidade não se manifestam na paciente. Dependendo da urgência do caso, o médico precisa tomar decisões cruciais para sua paciente, envolvendo desde as baterias de exames a serem feitos até os primeiros socorros antes mesmo de os resultados dos exames serem obtidos com segurança.

O médico tem algumas informações, mas não sabemos como modelar o efeito dessas crenças sobre a decisão racional do médico. Aqui, e em contextos mais gerais, o que uma agente sabe depende em certa medida de quais os mundos possíveis foram escolhidos e os níveis de detalhes em que o mundo foi modelado. Isto se torna ainda mais problemático quando há mais de uma agente, e é necessário considerar o que de fato acontece e o que cada agente considera possível na descrição sobre o que acontece.

Há várias formas de representar a incerteza (por exemplo, probabilidades, funções de crença *Dempster-Shafer*, medidas de possibilidade e funções de ranqueamento)[2] e uma maneira *standard* de representar raciocínios sobre atribuição de conhecimento a agentes, a saber, a lógica epistêmica.

A lógica epistêmica *standard* é uma lógica modal. Na lógica modal, a verdade de fórmulas como $\Box p$ (necessariamente p) e $\Diamond p$ (possivelmente p) é definida em função

[2] No original: *Probability measures, Dempster-Shafer Belief Function, Possibility Measures e Ranking Funstions.* (HALPERN, 2003, 11)

de modelos que envolvem um conjunto de mundos possíveis e relações de acessibilidade entre esses mundos. Considerando que w é um mundo qualquer, □p é verdadeira em w sse p é verdadeira em todos os mundos acessíveis a w, e ◊p é verdadeira em w sse p é verdadeira em algum mundo acessível a w. Quando aquelas fórmulas são interpretadas epistemicamente, dizemos que um conjunto de informações ou descrição possível dos fatos p é sabido por uma agente quando p é o caso em todas as descrições possíveis do mundo acessadas pela agente, e é consistente com o que uma agente sabe quando p pertence ao menos um estado acessível à agente – dito de outro modo, quando p é o caso em algum dos mundos que a agente considera possíveis.

As lógicas epistêmicas surgem em 1962, com o livro *Knowledge and Belief: an lntroduction to the Logic of the Two Notions*, de Jaakko Hintikka. Nelas, o operador modal forte de necessidade □ é interpretado como "sabe-se que" usando a notação K em vez do □, e, quando lidando com mais de um agente, indexando o K por um agente, como em $K_H p$ para representar que H sabe que p. As informações que estão disponíveis (consideradas possíveis ou prováveis) são proposições, modelados como um conjunto de mundos possíveis (acessível para cada agente considerada).

Como trata de estados epistêmicos, a linguagem dessa lógica epistêmica possui uma semântica dada em termos de mundos possíveis por meio dos modelos de Kripke e é constituída pelo seguinte conjunto de símbolos: a. um conjunto enumerável de proposições atômicas; b. os operadores clássicos usuais: ¬ (negação), ∨ (disjunção), ∧ (conjunção), → (implicação) e ↔ (bi-implicação); c. operadores epistêmicos para cada agente i: Ki (i sabe que); d. sinais de pontuação: (,) (parênteses). Além disso, nelas não é admitido como verdadeiro que uma agente possa saber uma proposição falsa.

O que uma agente sabe (ou considera, pelo menos, como admissível) depende em certa medida de como os mundos possíveis são escolhidos, e da forma como são representados. Pode haver muita subjetividade envolvida na decisão sobre quais mundos incluir e quais excluir em uma representação, assim como sobre o nível de detalhes em que um mundo será modelado. Nos casos que envolvem várias agentes, as descrições de mundo devem envolver não só o que acontece, mas o que cada agente considera possível.

É preciso considerar alternativas epistêmicas quando não se tem informações completas sobre as situações que são relevantes para uma agente. Contudo, esse tipo de modelagem semântica precisa de refinamentos para dar conta de condicionamentos na informação. Por exemplo, em um jogo de dados, se Helena sabe que o dado está viciado, a tendência a cair mais vezes um determinado lado (digamos, o lado com seis pontinhos) precisa estar representada de alguma forma. Nem todas as alternativas epistêmicas acessíveis à agente teriam o mesmo peso na hora de derivar conclusões ou fazer escolhas racionais. Tal representação refinada pode ser feita combinando-se essa representação de mundos possíveis com probabilidade.

Embora não haja muitas controvérsias acerca da teoria formal usual da probabilidade (axiomatização de Kolmogorov), há muitas disputas em torno da sua interpretação. De modo geral, diz (HÁJEK, 2019, 11), existem cinco interpretações de probabilidade: clássica, lógica/evidencial, subjetiva, frequentista e propensão.

Na interpretação clássica de probabilidade desenvolvida por Laplace, Pascal, Bernoulli, com ou sem evidências, a distribuição de probabilidade é simetricamente balanceada, ou seja, a probabilidade é distribuída igualmente entre todos os resultados possíveis. Aqui, uma probabilidade é uma fração entre um evento possível e o número total de possibilidades (uma fração do número de resultados favoráveis a um evento e o número total de eventos possíveis).

Na interpretação lógica, as possibilidades podem receber pesos desiguais e podem ser computadas qualquer que seja a evidência (simetricamente balanceada ou não). Já na interpretação evidencial, podemos atribuir probabilidades e raciocinar de maneira razoável a partir das evidências. (HÁJEK, 2019, 19 e 27).

De acordo com a interpretação subjetiva, probabilidades são graus de crença de agentes adequados. Assim, agentes podem crer com mais ou menos força em algo, desde certeza da falsidade até certeza absoluta da verdade. As crenças são graduais.

De acordo com a interpretação frequentista, podemos identificar a probabilidade de algo com o número de vezes em que este algo é o caso em uma sequência de eventos, dividido pelo número total de eventos. Tendo em vista o frequentismo finito, a probabilidade de A em uma classe de referência finita B é a frequência relativa de ocorrências reais de A dentro de B. Com a propensão, por sua vez, a probabilidade é pensada como uma propensão física, ou disposição, ou tendência de um certo tipo para produzir uma frequência relativa de longo prazo (HÁJEK, 2019, 43).

Esta dissertação versa sobre a viabilidade da combinação dos recursos usuais da lógica epistêmica com probabilidade para lidar com raciocínios em situação de incerteza, sem deixar de lado a análise das limitações no uso desses recursos. Como de praxe em pesquisas de caráter lógico e matemático, a metodologia empregada neste trabalho foi a dedutiva (demonstrativa), além da pesquisa bibliográfica sobre a literatura relevante. Nesse sentido, nossa principal referência será a obra *Reasoning about uncertainty* (HALPERN, 2003), e, em especial, seus capítulos 2 (*Representing Uncertainty*), 6 (*Multi-Agent Systems*) e 7 (*Logics for Reasoning about Uncertainty*). Em função da problemática esboçada acima, a investigação foi desenvolvida numa perspectiva lógica e filosófica.

Em um primeiro momento, apresentaremos as regras básicas de funcionamento e principais propriedades dos modelos relacionais (semânticas de Kripke) que fornecem o tratamento *standard* para sistemas de lógica modal epistêmica. Em um segundo momento, analisaremos a noção de probabilidade assim como as concepções de incerteza. Por último, nos dedicaremos a aprofundar o estudo das lógicas epistêmicas, articulando-as com probabilidade, com o objetivo de investigar sua aplicabilidade na representação dos raciocínios em situação de incerteza epistêmica, tomando como referencial básico os capítulos mencionados acima.

2 LÓGICA EPISTÊMICA

As lógicas epistêmicas são usadas para representar raciocínios envolvendo atribuições de conhecimento e crença. Oficialmente inauguradas em 1962 por Jaakko Hintikka no *Knowledge and Belief: an introduction to the Logic of the Two Notions* (HINTIKKA, 2005), nessas lógicas, intuitivamente, o operador forte da lógica modal alética é interpretado como atitudes proposicionais do tipo "sabe-se que" ou "acreditar-se que" (esta última também referida como modalidade doxástica).

A sintaxe da lógica epistêmica, tal como foi pensada por Hintikka (2005), é uma extensão da sintaxe da lógica clássica, e sua semântica é a semântica da lógica modal alética criada por Kripke, reinterpretada em termos epistêmicos. Assim sendo, para uma maior compreensão, este capítulo de introdução às lógicas epistêmicas dar- se-á em três seções: a primeira seção trata de uma recapitulação da sintaxe do cálculo proposicional clássico (CPC), a segunda seção trata da lógica epistêmica, ea terceira seção mostra como raciocínios sob incerteza podem ser representados nessa lógica e os limites dessa representação.

2.1 Cálculo proposicional clássico

A lógica clássica é constituída pelo *cálculo de predicados de primeira ordem*, e por uma lógica mais simples, sem quantificações, a saber, o *cálculo proposicional clássico*. A linguagem dessa última lógica é constituída por um conjunto enumerável de símbolos primitivos ou fórmulas atômicas, representadas por variáveis sentenciais do tipo $p, q, r, ...p_1, q_1, r_1...,$ alguns operadores lógicos ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$), parênteses e as seguintes regras de formação para fórmulas:

- α e β são fórmulas atômicas formadas apenas por letras sentenciais;
- se α e β são fórmulas, então $\neg\, \alpha, (\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ e $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ também são fórmulas;

Assim sendo, na semântica da lógica clássica, o valor de verdade de uma fórmula é definido a partir de seus componentes atômicos. A partir disso, para demonstrar a validade das fórmulas podemos recorrer às tabelas-de-verdade.

No método de tabela-de-verdade, o valor de verdade de uma fórmula é definido a partir do valor das fórmulas que a compõem. Considerando que uma atribuição de verdade consiste em uma função que determina quais proposições primitivas são verdadeiras e quais são falsas, ou seja, para cada fórmula atômica p da linguagem e para cada atribuição v, temos que $v(p)$=V ou $v(p)$=F, para determinar o valor-de-verdade de uma fórmula é preciso definir o valor-de-verdade das fórmulas que a compõem. Daí, com as regras para as tabelas, conseguimos calcular o valor das fórmulas contendo aquelas fórmulas atômicas cujos valores já estão todos fornecidos.

Em suma, com as atribuições de verdade e as regras semânticas convencionais é possível determinar se uma fórmula qualquer α é satisfeita sob uma atribuição de verdade v específica, escrito dessa forma em notação simbólica $v \vDash \alpha$.[3] A razão disso é que os operadores do *cálculo proposicional clássico* são funções de verdade (ou operadores *verifuncionais*). Ou seja, para cada atribuição de verdade v,

a. $v \vDash \neg\varphi$ sse $v \nvDash \varphi$

b. $v \vDash \varphi \wedge \psi$ sse $v \vDash \varphi$ e $v \vDash \psi$

c. $v \vDash \varphi \vee \psi$ sse $v \vDash \varphi$ ou $v \vDash \psi$

d. $v \vDash \varphi \rightarrow \psi$ sse $v \nvDash \varphi$ ou $v \vDash \psi$

e. $v \vDash \varphi \leftrightarrow \psi$ sse ($v \vDash \varphi$ e $v \vDash \psi$) ou ($v \nvDash \varphi$ e $v \nvDash \psi$)

A presença de operadores *verifuncionais* e a obediência aos chamados *princípios lógicos fundamentais* (Princípios de Identidade, de Não Contradição, do Terceiro Excluído e Princípio da Bivalência), entre outras qualidades, caracterizam a lógica clássica. Contudo como ela surgiu para auxiliar na fundamentação da matemática,[4] há vários casos que não podem ser adequadamente formalizados nessa lógica sem contrariar nossas intuições.

Sistemas lógicos que contenham apenas operadores *verifuncionais* não se aplicam a contextos oblíquos que sejam sensíveis a noções de tempo, necessidade, crença, entre outras. Nesses contextos é preciso levar em consideração outros

[3] Na lógica proposicional clássica, quando uma fórmula é verdadeira sob alguma atribuição de verdade, ela édita satisfazível, ou seja, tem modelo. Se a fórmula é verdadeira sob toda atribuição de verdade, é uma tautologia (ou válida). Por outro lado, se é falsa sob toda atribuição de verdade, é uma contradição.

[4] A lógica clássica pensada por Gottlob Frege (1848-1925) tinha o objetivo de sistematizar o raciocínio matemático, a fim de eliminar os erros cometidos em demonstrações matemáticas. Frege criou o cálculo de predicados, definiu uma linguagem simbólica para a lógica clássica e um sistema dedutivo baseado em axiomas e regras de inferência.

constituintes semânticos além dos valores de verdade das subfórmulas. A partir disso lógicas complementares (*ampliativas ou extraclássicas*) foram criadas a partir dalógica clássica a fim de ampliar a sua capacidade de simbolizar e tratar inferências não extensionais.[5]

As lógicas extraclássicas substituem a lógica clássica excluindo ou modificando alguns dos seus princípios fundamentais. As lógicas polivalentes, por exemplo, excluem tanto o princípio de bivalência quanto o do terceiro excluído, e as lógicas paraconsistentes enfraquecem o princípio de não-contradição.

As lógicas ampliativas, por sua vez, inovam no acréscimo de novos operadores à linguagem da lógica clássica, operadores estes que não são funções de verdade (os chamados operadores intensionais), sem alterar seus princípios lógicos fundamentais. As lógicas modais são exemplos de lógicas complementares.[6]

2.2 Lógica modal

No *De Interpretatione*, Aristóteles já nos apresenta modos da verdade para além do verdadeiro ou falso. Porém, por falta de uma simbolização adequada e imprecisão nos conceitos de possível e contingente, a sua teoria não vigorou.[7] Lógicos medievais como Guilherme de Ockham, que defendia que o contingente não se segue do necessário nem o necessário do contingente, comprometidos com questõesmetafísicas e resgatando Aristóteles, por sua vez, também trataram das querelas acercada necessidade e da possibilidade.

No contexto da filosofia moderna, entre outros, Leibniz[8] e David Hume[9] desenvolveram importantes teorias sobre os conceitos de necessidade e possibilidade. Teorias essas que foram muito úteis para o desenvolvimento formal da lógica modal

[5] Uma sentença é dita extensional quando o seu valor de verdade é determinado a partir dos valores de verdade das partes que a constituem. O contrário disso ocorre com as sentenças intensionais. Nessas, o valor de verdade de uma sentença não pode ser definido apenas a partir das extensões (referências) das partes que a compõem. Nesses casos é preciso considerar as intensões. (SILVA, 2015).

[6] A lógica modal acrescenta a lógica clássica novos operadores intensionais. Nesse caso, para calcular o valor de verdade de uma proposição modal é preciso considerar modelos semânticos que envolvem a noção de mundos possíveis e a relação de acessibilidade entre eles (MORTARI, 2001).

[7] Aristóteles trata das modalidades na sua teoria do silogismo modal, onde pelo menos uma das premissas que compõem o silogismo é ou apodítica (proposições que contêm o termo necessário) ou problemática (proposições que contêm o termo possível).

[8] Leibniz, no *Essais de Théodicée sur la bonté de Dieu, la liberté e de l'homme et lórigine du mal* (1710), introduz no pensamento moderno a ideia de mundos possíveis ao defender que, entre vários mundos possíveisna mente de Deus, o mundo atual é o melhor dos mundos. Nessa concepção, cada indivíduo pertence necessariamente a apenas um mundo.

[9] Nas seções VII e VIII da *Investigação Sobre o Entendimento Humano* (2004), Hume pensa o conceito de necessidade na sua relação com o problema da causalidade.

no século XX. Contudo, o estudo das propriedades formais das modalidades começou de fato com o trabalho de C. I. Lewis em 1918.

A partir dos paradoxos que aponta na noção de implicação material apresentada por Russell no *Principia Mathematica*, é C. I. Lewis que funda a lógica modal contemporânea em alguns importantes textos, a saber, o artigo *Implication and the Algebra of Logic* de 1912, ao criar a implicação estrita e, de maneira mais elaborada, na obra *Symbolic Logic* de 1932, onde apresentou a descrição de cinco sistemas (S1-S5).[10] Esses sistemas ficaram conhecidos como Sistemas de Lewis. Mas foi Gödel em 1933, que apresentou a lógica modal tal qual conhecemos hoje, como uma extensão da lógica clássica.

Com a introdução de operadores, regras de formação e axiomas, a princípio, o desenvolvimento da lógica modal se deu em um caráter eminentemente sintático. Mas em 1959, Saul Kripke (1959, 1962, 1963) inaugura a semântica de mundos possíveis usada na lógica modal. Kripke retoma as noções de necessidade e possibilidade pensadas por Leibniz e as define em função da noção de mundos possíveis e das relações de acessibilidade entre estes mundos.[11]

Aqui, intuitivamente, uma proposição necessária é uma proposição verdadeira em todos os mundos possíveis acessíveis a um mundo dado, enquanto uma proposição possível é uma proposição verdadeira em ao menos um mundo possível acessível a um mundo dado. Para formalizar isso foi preciso acrescentar ao cálculo proposicional clássico, além de novos axiomas e regras especiais, o operador unário de necessidade $\Box$, isto é, "é necessário que..." e o operador unário de possibilidade $\Diamond$, isto é, "é possível que...". O operador de possibilidade $\Diamond$ pode ser definido a partir do operadorforte, com o auxílio do operador de negação ($\Diamond P =_{def.} \neg\Box\neg P$). O inverso também pode ser feito (definir o operador forte a partir do fraco usando a negação).[12]

---

[10] A implicação material é a proposição que possui a seguinte estrutura: se (o enunciado que se segue é o antecedente) então (o enunciado que se segue é o consequente). Algumas fórmulas consideradas válidas na lógica proposicional possuem uma interpretação que não correspondem à noção intuitiva de implicação. Haack (2002, 236) apresenta algumas dessas fórmulas que ficaram conhecidos como paradoxos da implicação material. Tendo em vista essa dificuldade, Lewis desenvolve uma implicação estrita que pudesse substituir formalmente a implicação material e que correspondesse a interpretação intuitiva de implicação.

[11] As relações de acessibilidade determinam as atribuições de valores em cada sistema modal. No sistema K, a relação de acessibilidade é arbitrária; no sistema D, é serial; no sistema T, é reflexiva; no sistema B, é reflexivae simétrica;no sistema S4, é reflexiva e transitiva; no sistema S5, é reflexiva, transitiva e simétrica.

[12] Os operadores $\Box$ e $\Diamond$ não são operadores verifuncionais; isto é, não tomam simplesmente valores de verdade como argumentos e os associam regularmente a outro valor.

A partir da década de 1980, essa lógica teve grandes avanços nos aspectos semânticos, sintáticos, algébricos e de complexidade computacional. Nesse contexto, floresceram diferentes lógicas modais, entre essas, as lógicas temporais (para modelar tempo linear e ramificado), lógicas epistêmicas (para modelar conhecimento e crenças em sistemas com múltiplos agentes) e lógicas intuicionistas modais com interpretações em semântica operacional de programas. Aqui nos interessam as lógicas epistêmicas.

2.2.1 Lógica epistêmica

George Henrik von Wright (em 1957), sistematizador da lógica deôntica, foi um dos primeiros a tratar o conhecimento como operador modal. Mas a adequada sistematização disso foi feita por Hintikka, ao usar a letra K para representar o operador modal de conhecimento proposicional. A lógica epistêmica pensada porHintikka é uma versão epistêmica do sistema *S4* (às vezes também denominado **KT4**) da lógica modal alética, ou seja, seus esquemas de axiomas foram elaborados nos moldes dos axiomas de *S4*, interpretados sob a perspectiva do operador epistêmico.

Tal lógica possui como axiomas todas as fórmulas válidas da lógica clássica, que nos permite ter infinitas instâncias de teoremas do cálculo proposicional clássico como axiomas da lógica epistêmica, a regra de inferência *modus ponens*, a regra de necessitação epistêmica (se $\vdash\varphi$, então $\vdash K_a\varphi$), o axioma **K**, o axioma **T** (veridicalidade) e o axioma **4** (introspecção positiva). Com frequência, a literatura sobre lógica epistêmica considera também o polêmico axioma **5** (introspecção negativa) nessa axiomatização – nesse caso, temos o sistema *S5*.

2.2.2 Sintaxe da lógica epistêmica

A linguagem da lógica epistêmica usual (no nível sentencial) consiste na linguagem proposicional apresentada acima, acrescentando-se apenas os operadores epistêmicos K_i, um para cada agente i (K_1 ... K_n). As fórmulas serão as mesmas da linguagem sentencial definida antes, acrescidas das instâncias do esquema $K_i\alpha$ (para uma fórmula qualquer α e um agente qualquer i). Fora essas cláusulas, nada mais é fórmula. A partir disso, seguem alguns exemplos de fórmulas epistêmicas bem formadas e suas leituras intuitivas:

$$K_a\varphi$$

Leia-se: a agente *a* sabe que φ.

$$K_1K_2\neg K_3\neg\varphi$$

Leia-se: a agente 1 sabe que a agente 2 sabe que a agente 3 não sabe que não φ.

$$K_1K_2\varphi \rightarrow (K_3\varphi \vee \neg K_2K_1K_2\varphi)$$

Leia-se: se a agente 1 sabe que a agente 2 sabe que φ, então ou a agente 3 sabe queφ ou a agente 2 não sabe que a agente 1 sabe que a agente 2 sabe que φ.

2.2.3 Semântica para a lógica epistêmica

Baseado na ideia de mundos possíveis de semântica de Leibiniz, Saul Kripke propôs uma semântica que considere as relações de acessibilidades entre os mundos possíveis capaz de capturar o significado intuitivo das diversas modalidades. Embora esse não seja o único trabalho relevante desenvolvido com tal objetivo, essa semântica é a mais usada.

Como supracitado, Kripke introduziu tanto a ideia de mundos possíveis quanto a ideia de uma relação de acessibilidade entre esses mundos. Nas relações de acessibilidade ou possibilidade relativa, um estado epistêmico w‘ pode ser acessível a partir de um estado epistêmico w, formalmente, wRw‘. Dependendo das diferentes propriedades lógicas atribuídas a essa relação R, temos diferentes sistemas de lógica modal.

Considerando um conjunto de mundos possíveis $W = (w_1 \ldots w_n)$, uma fórmula atômica *a* é verdadeira em um mundo possível w_1, onde $w_1 \in W$, se recebe neste mundo a atribuição 1, e falsa em um mundo possível w_2, onde $w_2 \in W$, se recebe neste mundo a atribuição 0. As proposições podem ser verdadeiras ou falsas em cada mundo. A partir disso, uma proposição é necessariamente verdadeira em um mundo se for verdadeira em todos os mundos acessíveis a esse mundo. Por outro lado, uma proposição é possivelmente verdadeira em um mundo se é o caso em pelo menos um mundo acessível ao mundo dado.

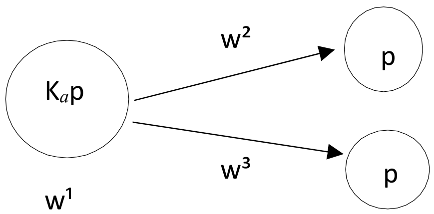
Nas lógicas epistêmicas, o operador modal forte □ é interpretado como “sabe-se que”, e representado pela letra K (de *knowledge*). Aqui, K_ap sse p é o caso em todas as alternativas epistêmicas acessíveis a agente *a*, ou seja, quando p é o caso em todas as descrições possíveis do mundo às quais a agente tem acesso. Por outro lado, $\neg K_a p$ sse p não for o caso em pelo menos um estado epistêmico acessível à agente. Além de nova interpretação para os operadores modais, há também a Regra de Necessitação (RN):

$$\vdash A \,/\, \vdash \Box A$$

Se A é válida, então necessariamente A também é válida.

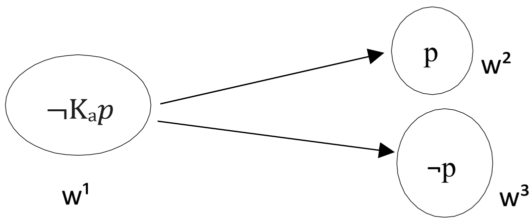
Cientes de que o que uma agente sabe depende dos mundos aos quais ela tem acesso, $K_a p$ pode ser intuitivamente representado assim:

Figura 1- Representação intuitiva de Kap[13]



Leia-se:a agente *a* sabe que p, uma vez que p é verdadeiro em todos os mundos aosquais ela tem acesso a partir de w^1.

Figura 2 - Representação intuitiva de ¬Kap



Leia-se: a agente *a* não sabe que p, uma vez que ¬p é o caso em pelo menos umestado epistêmico acessível à agente.

Em cada modelo M fornecido para a linguagem epistêmica, há um conjunto W

[13] As setas indicam quais mundos são acessados e o tipo de acesso, neste e nos outros casos onde as setas foremusadas.

de n mundos possíveis ou estados epistêmicos (w_1, w_2...w_n) constituído por proposições que sãoverdadeiras ou falsas em cada estado. Uma fórmula $K_a p$ (*a* sabe que p) é verdadeira em w (ou seja, M, w $\vDash K_a p$), pois p é verdadeira em todos os mundos acessíveis a agente *a* em w. Por outro lado, $\neg K_a \neg p$ (*a* não sabe que não p) não é verdadeira nesse mundo w (ou seja, M, w $\nvDash \neg K_a \neg p$), pois está significando que p é falsa em algum mundo acessível à agente[14] *a* em w.

Na semântica relacional de Kripke, as fórmulas são interpretadas dentro de um modelo. Tal modelo é uma tripla ordenada definida como $M = \langle W, R, v \rangle$, baseado em uma estrutura $\langle W, R \rangle$. Na lógica epistêmica (usual), o modelo é uma n + 2 upla M = $\langle W, R_1 \ldots R_n, v \rangle$ tal que:

i. W é um conjunto não vazio de mundos possíveis (ou alternativas epistêmicas);
ii. Cada R_i é um conjunto de pares ordenados de mundos em W indexados por agente i (intuitivamente, uma relação de acessibilidade entre mundos, na perspectiva dessa agente), onde, para quaisquer w' e w'' $\in$ W, w'R_iw'' significa dizer que w' acessa w'' na perspectiva da agente i. Um conjunto R_i pode ser vazio, uma vez que é possível que os mundos sejam cegos (ou seja, não acessem nenhum outro mundo, nem a si mesmos). Além disso, os conjuntos podem apresentar determinadas restrições no comportamento das respectivas relações como, por exemplo, euclidianidade, simetria, transitividade, reflexividade, serialidade;
iii. *v* é uma função interpretação que define os valores de verdade das fórmulas atômicas em cada mundo.

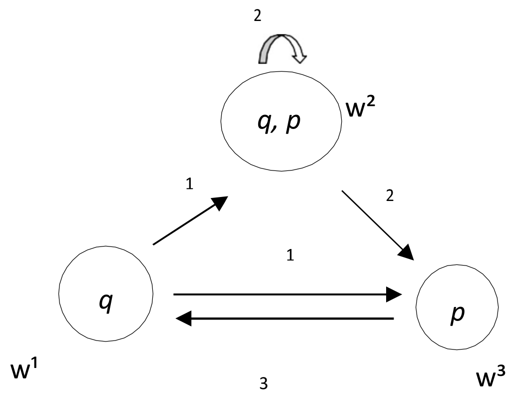
Supondo, por exemplo, a existência de três mundos: w_1, w_2, w_3, e três agentes (1, 2 e 3), cujas relações de acessibilidade serão representadas, respectivamente, por R_1, R_2 e R_3, e considerando, por simplicidade, apenas duas fórmulas atômicas de nossa linguagem p e q, um modelo específico M^1 pode ser descrito da seguinte maneira:

M_1= (W, R_1 ... R_3, *v*)
W= $\{w_1, w_2, w_3\}$
R_1= $\{(w_1, w_2), (w_1, w_3)\}$
R_2= $\{(w_2, w_2), (w_2, w_3)\}$$R_3$= $\{(w_3, w_1)\}$

[14] Mundo acessível à agente significa o mesmo que estado epistêmico acessível à agente.

$v = \{((p, w_1), 0), ((p, w_2), 1), ((p, w_3), 1), ((q, w_1), 1), ((q, w_2), 1), ((q, w_3), 0)\}$

Figura 3- Representação intuitiva do modelo M¹



Sobre as restrições que envolvem as relações de acessibilidade de um modelo epistêmico pode se dizer que:

- Um modelo é reflexivo sse, para toda R_i e para todo w ∈ W, (w, w) ∈ R_i (ou seja, cada mundo, cada agente i sempre acessa o próprio mundo);
- Quando, em um modelo, para todas as R_i e todo w existe pelo menos um w‘ ∈ W, tal que (w, w‘) ∈ R_i, dizemos que esse modelo é serial;
- Um modelo é simétrico sse, para toda R_i e todo w e todo w‘ ∈ W, temos que (w, w‘) ∈ R_i → (w‘, w) ∈ R_i;
- Quando, em um modelo, para toda R_i e quaisquer w, w‘ e w‘‘ ∈ W, temos que (w, w‘) ∈ R_i ∧ (w‘, w‘‘) ∈ R_i → (w, w‘‘) ∈ R_i, dizemos que o modelo é transitivo;
- Um modelo é euclidiano sse para toda R_i e para quaisquer w, w‘ e w‘‘ ∈ W, (w, w‘) ∈ R_i ∧ (w, w‘‘) ∈ R_i → (w‘, w‘‘) ∈ R_i.

Quanto à função interpretação *v*, ela pode ser generalizada para determinarmos o valor de qualquer fórmula num dado modelo. Seja um conjunto A com n agentes epistêmicos, um modelo epistêmico M= (W, R_1... R_n, *v*), e w um elemento de W. Para quaisquer fórmulas φ e ψ de nossa linguagem epistêmica:

a. $(\mathrm{M}, \mathrm{w}) \vDash p$ sse $v(\mathrm{M}, \mathrm{w}) = 1$;

b. $(M, w) \vDash \neg\varphi$ sse $(M, w) \nvDash \varphi$;

c. $(M, w) \vDash \varphi \wedge \psi$ sse $(M, w) \vDash \varphi$ e $(M, w) \vDash \psi$;

d. $(M, w) \vDash \varphi \vee \psi$ sse $(M, w) \vDash \varphi$ ou $(M, w) \vDash \psi$;

e. $(M, w) \vDash \varphi \rightarrow \psi$ sse $(M, w) \nvDash \varphi$ ou $(M, w) \vDash \psi$;

f. $(M, w) \vDash \varphi \leftrightarrow \psi$ sse $((M, w) \vDash \varphi$ e $(M, w) \vDash \psi)$ ou $((M, w) \nvDash \varphi$ *e* $(M, w) \nvDash \psi)$;

g. $(M, w) \vDash K_i\varphi$ sse para todo w‘ tal que $(w, w') \in R_i$, $(M, w') \vDash \varphi$.

Na cláusula (a) temos que uma sentença atômica *p* é verdadeira em um mundo possível w se, e somente se, w pertencer ao conjunto W do modelo. A cláusula (b) enuncia que $\neg\varphi$ é verdadeira em w se e somente se φ for falsa em w. A cláusula (c) afirma que uma conjunção $\varphi \wedge \psi$ é verdadeira em w se for o caso que ambos os seus conjuntivos sejam verdadeiros em w.

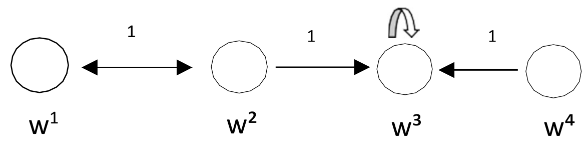
Na cláusula (d) uma disjunção $\varphi \vee \psi$ é verdadeira em w apenas quando ao menos um de seus disjuntivos for verdadeiro. Na cláusula (e) um condicional $\varphi \leftrightarrow \psi$ será verdadeiro em w somente quando não for o caso de que seu antecedente seja verdadeiro em we o consequente seja falso. Em (f) um bicondicional $\varphi \leftrightarrow \psi$ será verdadeiro em w somente quando os seus membros são ambos verdadeiros em w ou ambos falsos em w. A cláusula (g) enuncia que o conhecimento proposicional $K_i\varphi$ será verdadeira em w se e somente se φ for verdadeira para todos os mundos possíveis w‘ no modelo acessíveis ao agente em w.

Uma fórmula φ é válida em um modelo epistêmico (em notação simbólica: $M\vDash\varphi$), sse $M,w\vDash\varphi$ para todo $w \in W$. Similarmente, uma fórmula φ é válida em uma classe de modelos quando é válida para todos os modelos dessa classe.

Dado um conjunto não vazio de agentes epistêmicos, em cada modelo, a parte que corresponde apenas a seu conjunto de mundos W e suas relações de acessibilidade R é chamada de *frame* ou estrutura epistêmica, e a partir dele é possível determinar classes de modelos e classes de *frames*. Embora a função de verdade *v* possa variar de um modelo para outro, os *frames* são como que estruturas fixas ao longo dessas classes de modelos. Em notação simbólica,

$$F= \langle W, R_1, ..., R_n \rangle$$

Figura 4 - Exemplo intuitivo e geral de *frame*



$$W = \{w^1, w^2, w^3, w^4\}$$

$$R_1 = \{(w^1, w^2), (w^2, w^1), (w^2, w^3), (w^3, w^3), (w^4, w^3)\}$$

A escolha de restrições específicas sobre todas as relações de acessibilidade de um *frame* pode ser suficiente para garantir a validade de determinadas fórmulas. Por exemplo, num *frame* onde todas as relações de acessibilidade são reflexivas, o esquema $K_i\alpha \rightarrow \alpha$, para qualquer agente i onde qualquer $w \in W$, é válido independente de qual interpretação é usada – ou seja, as instâncias daquele esquema são válidas em todos os *frames* reflexivos.

Os *frames* podem ser, entre outras categorias, reflexivos, simétricos, transitivos, seriais ou euclidianos, e podem ser agrupados em classes. A classe dos *frames* reflexivos (*F*r) é composta pelo conjunto de todos os *frames* cujas relações de acessibilidade são sempre reflexivas, ou seja, cada mundo que compõe o universo W acessa a si mesmo (na perspectiva de cada agente epistêmico). Aqui, dependendo de cada modelo, os mundos podem acessar outros mundos além de si, contudo, a reflexividade é condição necessária. Ou seja,

Para cada R_i e $\forall w \in W$ (wR_iw) ou, dito de outro modo, $(w, w) \in R_i$

A classe de *frames* simétricos (*F*s) é composta pelos *frames* cujas relações de acessibilidade são simétricas, ou seja, cada mundo é acessado reciprocamente pelo mundo que acessa (na perspectiva de cada agente epistêmico). Ou seja,

Para cada R_i e $\forall w, w' \in W$ ($w\ R_i\ w' \rightarrow w'\ R_i\ w$)

A classe dos *frames* transitivos (*F*t) é composta pelos *frames* cujas relações de acessibilidade são transitivas. Nessa classe, um mundo acessa os mundos que o mundo que ele acessa, acessa (na perspectiva de cada agente epistêmico). Ou seja,

$$\text{Para cada } R_i \text{ e } \forall w, w', w'' \in W \; (w \, R_i \, w' \wedge w' \, R_i \, w'' \rightarrow w \, R_i \, w'')$$

A classe dos *frames* seriais (*F*serial) é composta pelos *frames* cujas relações de acessibilidade são seriais. Nessa classe, um mundo sempre acessa pelo menos um mundo (na perspectiva de cada agente epistêmico). Ou seja,

$$\text{Para cada } R_i \text{ e } \forall w \, \exists w' \; (w \, R_i \, w')$$

A classe dos *frames* euclideanos (*F*e) é composta pelos *frames* cujas relações de acessibilidade são euclideanas. Nessa classe, os mundos que um dado mundo acessa se acessam entre si (na perspectiva de cada agente epistêmico). Ou seja,

$$\text{Para cada } R_i \text{ e } \forall w, w', w'' \in W \; (w \, R_i \, w' \wedge w \, R_i \, w'' \rightarrow w' \, R_i \, w'')$$

2.3 Axiomatizações do conhecimento[15]

Na lógica epistêmica, tendo em vista os sistemas de lógica modal mais conhecidos (K, D, T, B, S4 e S5), os principais axiomas são o **K**, **D**, **T**, **4** e **5**. Esses axiomas correspondem às diferentes propriedades lógicas atribuídas às relações R_i. No caso das R_i serem arbitrárias (ou seja, sem nenhuma restrição específica), temos o princípio **K**; se as R_i forem seriais, temos **D**; se as R_i forem reflexivas, temos **T**; se as R_i forem transitivas, temos **4** e; se forem euclideanas, temos **5**. Tendo em vista um modelo $M = (W, R_1 ... R_n, v)$, para todo agente i valerá as seguintes propriedades:

(a) $(K_i\phi \wedge K_i (\phi \rightarrow \psi)) \rightarrow K_i\psi$ (axioma **K**, em uma formulação equivalente);
(b) Se $\vDash \phi$ então $\vDash K_i\phi$ (RN);
(c) Se cada R_i é transitiva, então $\vDash K_i\phi \rightarrow K_i K_i\phi$ (axioma **4**, da Introspecção positiva);
(d) Se cada R_i é euclidiana, então $\vDash \neg K_i\phi \rightarrow K_i \neg K_i\phi$ (axioma **5,** da Introspecção negativa);

---

15 Pelo método axiomático é possível definir um conjunto de fórmulas ou teoremas sem que se precise fazer referênciaa seus significados. Em função disso, antes da descoberta de uma maneira apropriada de se definir o conceito de verdade para proposições modais, os sistemas modais foram apresentados inicialmente pelo método axiomático. Há vários sistemas de lógica modal, e eles se subdividem em dois grandes grupos: os *sistemas não- normais* (sistemas mais fracos que não admitem o axioma **K** ou a regra de necessitação), cuja semântica de vizinhança é usada ao invés da semântica de Kripke, e os *sistemas modais normais* (que são sempre extensõesdo sistema K).

(e) Se cada R_i é reflexiva, então $\vDash K_i \phi \rightarrow \phi$ (axioma **T**).

(f) Se $\vDash \phi$ então $\vDash K_i\phi$ (RN);

(g) Se cada R_i é transitiva, então $\vDash K_i\phi \rightarrow K_i K_i\phi$ (axioma **4**, da Introspecção positiva);

(h) Se cada R_i é euclidiana, então $\vDash \neg K_i\phi \rightarrow K_i \neg K_i\phi$ (axioma **5,** da Introspecção negativa);

(i) Se cada R_i é reflexiva, então $\vDash K_i \phi \rightarrow \phi$ (axioma **T**).

Axioma **K:** $K_i (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K_i\varphi \rightarrow K_i\psi)$

Conhecido na lógica modal como princípios da Distribuição sobre Implicação e aqui, como Distribuição Epistêmica, o axioma **K**, que corresponde aos modelos cuja relação de acessibilidade é arbitrária, junto com os teoremas da lógica clássica, por meios das regras MP e RN, deriva infinitos teoremas modais. Em função disso, os diferentes sistemas modais normais são ditos extensões próprias do sistema K. Nele, se uma agente sabe que φ implica ψ, então, a agente saber que φ implica em ela saber que ψ.

Tendo em vista a definição de validade, segue a prova da validade de **K**: Supondo quew é um estado epistêmico arbitrário em um modelo qualquer M tal que i. $(M,w) \vDash K_i(\varphi \rightarrow \psi)$. Além disso, supondo que ii. $(M,w) \nvDash K_i\varphi \rightarrow K_i\psi$. De ii, temos que iii. $(M,w) \vDash K_i\varphi$ e iv. $(M,w) \nvDash K_i\psi$. De i, sabemos que v. para todo w‘ em M tal que $(w,w') \in R_i$, $(M,w') \vDash \varphi \rightarrow \psi$. De iii, por sua vez, temos que vi. para todo w‘ em M tal que $(w,w') \in R_i$, $(M,w') \vDash \varphi$. De iv, temos que vii. para algum w_j tal que $(w,w_j) \in R_i$, $(M,w_j) \nvDash \psi$. De v e vi, por *modus ponens*, sabemos que para todo w‘ acessível a w $(M,w') \vDash\psi$. Isso contradiz o passo vii.

Axioma **T**: $K_i\varphi \rightarrow \varphi$

No princípio **T** (conhecido também como propriedade de veridicalidade), válido em *frames* reflexivos, se uma agente sabe que p, então p é o caso. Contudo, uma vez que não é suficiente que seja o caso para que uma agente saiba que p, a recíproca não é teorema, ou seja, não vale em geral $\varphi \rightarrow K_i\varphi$. A seguir o axioma **T**:

Segue a prova de que **T** é válido em todo *frame* reflexivo: Seja F= ⟨W,

$R_1...R_n\rangle$ reflexivo e seja $w \in W$. Para a prova em questão, supomos i. $(M, w)\vDash K_i\varphi$ e que ii. $(M,w)\nvDash \varphi$ nesse *frame*. De i, sabemos que para todo w' em M tal que $(w,w') \in R_i$, $(M,w')\vDash\varphi$. Por se tratar de um *frame* reflexivo, $(w, w) \in R_i$. No entanto, i contradiz ii. Disso decorre que o axioma **T** é válido em *frames* reflexivos.

Axioma **4**: $K_i\varphi \rightarrow K_iK_i\varphi$

De acordo com o axioma **4**, intuitivamente, se uma agente sabe φ, então essa agente sabe que sabe que φ. Trata-se da reiteração do operador de necessidade. O inverso desse princípio também é um teorema, e podemos obtê-lo aplicando RM no axioma **T**.

Segue a prova de que **4** é válido em todo *frame* transitivo: Seja $F= \langle W, R_1...R_n\rangle$ transitivo e seja $w \in W$. Para a prova em questão, supomos que i. $(M,w)\vDash K_i\varphi$ e ii. $(M,w)\nvDash K_iK_i\varphi$ nesse *frame*. Para que $(M,w)\nvDash K_iK_i\varphi$, deve existir algum estado epistêmico $w_j \in W$, tal que $(w,w_j) \in R_i$ e iii. $(M,w_j)\nvDash K_i\varphi$. Por sua vez, para que $(M,w_j)\nvDash K_i\varphi$ é preciso que, para algum $(w_j,w_k) \in R_i$, iv. $(M,w_k)\nvDash \varphi$. De i, sabemos que v. $(M,w')\vDash\varphi$ em todos os estados w' que w acessa. Por se tratar de um *frame* transitivo, ou seja, $w', w'' \in W$ $(w\, R_i\, w' \wedge w'\, R_i\, w'' \rightarrow w\, R_i\, w'')$, temos uma contradição entre iv e v. A saber, φ em w_k também deveria ser verdadeiro, no entanto é falso. Daí decorre que é impossível que o princípio **4** seja inválido em uma estrutura transitiva.

Axioma **5**: $\neg K_i\varphi \rightarrow K_i\neg K_i\varphi$

De acordo com o princípio **5,** também conhecido como **E** (HUGHES; CRESSWELL, 1996, 62), o princípio da introspecção negativa, se uma agente não sabe φ, ela sabe que não sabe que φ. Nesse axioma supõe-se que os agentes podem acessar em si todos os fatos, como em um banco de dados, e saber quais coisas não sabem. A recíproca desse princípio também é teorema e corresponde a uma instância do axioma **T**, a saber, $K_i\neg K_i\varphi \rightarrow \neg K_i\, \varphi$.

Segue a prova de que **5** é válido em todo *frame* euclidiano: Seja $F= \langle W, R_1... R_n\rangle$ euclidiano e seja $w \in W$. Para a prova em questão, supomos que i. $(M,w) \vDash\neg K_i\varphi$ e ii. $(M,w)\nvDash K_i\neg K_i\varphi$ nesse *frame*. Para que $(M,w)\nvDash K_i\neg K_i\varphi$, deve existir algum estado epistêmico $w_j \in W$, tal que $(w,w_j) \in R_i$ e iii. $(M,w_j) \vDash K_i\varphi$. Por sua vez, para iii, é preciso que para todo w'tal que $(w_j, w') \in R_i$, iv. $(M,w')\vDash\varphi$.

De i, decorre que v. $(M,w_k) \not\models \varphi$ em pelo menos um estado epistêmico w_k que w acessa. Mas, como se trata de um *frame* euclidiano, $(w_j,w_k) \in R_i$ e, portanto, iv e v envolvem contradição, pois, φ deve ser verdadeira em todos os estados epistêmicosw' acessados por w_j, no entanto é falsa em w_k. Daí decorre que é impossível que o princípio **5** seja inválido em um *frame* euclidiano.

2.4 Representação de raciocínios sob incerteza

Considerando que K_t representa o conhecimento da agente Turiaçu, as proposições "hoje choveu forte", "as àguas estão escuras" e "Turiaçu toma banho de mar", respectivamente, por p, q e r; e w_1 o mundo real ou ponto de onde estamos avaliando as afirmações. Na primeira situação, ilustraremos um caso de certeza epistêmica, para acentuar o contraste comos dois exemplos seguintes.

Caso 1: Turiaçu sabe que quando chove, as águas ficam escuras. Turiaçu sabe que hoje choveu forte; portanto, Turiaçu sabe que as águas estão escuras. Esse raciocínio é válido em todos os frames. Prova: suponha que, para um modelo arbitrário M, que (i) $(M, w) \models K_t(p \rightarrow q) \wedge K_t p$, mas (ii) $(M, w) \not\models K_t q$. Isso quer dizer que (iii) para todo w′ tal que $(w,w') \in R_t$, $(M,w') \models p \rightarrow q$ e $(M, w') \models p$. De (iii), por *Modus Ponens*, temos que (iv) para todo w′ tal que $(w, w') \in R_t$, $(M, w') \models q$. Mas, de (ii), temos que, para algum w′ tal que $(w,w') \in R_t$, $(M, w') \not\models q$, o que contradiz (iv).

Caso 2: Turiaçu considera possível[16] que as águas estão escuras se e somente se hoje tiver chovido forte, mas também considera possível que uma coisa não tenha a vercom a outra. Ela sabe que as águas estão escuras. Portanto, ela considera possível que hoje tenha chovido forte. Esse raciocínio parte de uma premissa incerta (uma conjectura epistêmica) e chega em uma conclusão também conjectural. Além disso, se trata de um raciocínio válido em todos os *frames*.

Prova: suponha que, para um modelo arbitrário M, que (i) $(M, w) \models \hat{K}_t (p \leftrightarrow q)$, (ii)$(M,w) \models \hat{K}_t \neg (p \leftrightarrow q)$ e (iii) $(M,w) \models K_t p$. De (iii), sabemos que (iv) para todo w′ tal que $(w,w') \in R_t$, $(M,w') \models p$. De (i) tiramos que (v) para algum w′ tal que

[16] A linguagem usual das lógicas epistêmicas costuma representar que uma agente i considera uma informaçãop como possível (ou admissível) da seguinte maneira: Kip (ou, abreviadamente: $\hat{K}_i p$). A rigor, contudo, essa construção apenas exprime que a agente i não sabe que p não ocorre (seja por p não ocorrer, e ela não saber que p não ocorre, seja por p ocorrer e ela saber disso). Contudo, uma leitura intuitiva mais rigorosa para $\hat{K}_i p$ seria: "p é compatível com tudo que i sabe".

$(w,w') \in R_t$, $(M,w') \vDash p \leftrightarrow q$, em cujo w', por conta de (iv), segue-se que também (vi) $(M,w') \vDash q$. Por definição, como $(w,w') \in R_t$, concluímos que (vii) $(M,w) \vDash \hat{K}_t$ p . (A informação (ii) não fez diferença e foi usada apenas para realçar a incerteza da agente).

Caso 3: Turiaçu considera que é muito provável (além de possível) que se hoje tiver chovido forte, as águas estarão escuras. Se as águas estiverem escuras, ela não tomará banho de mar. Ela sabe que hoje choveu forte, mas não sabe se as águas estão de fato escuras. Nesse cenário, Turiaçu não tomará banho de mar. Uma tentativa rudimentar de simbolizar as informações acima ficaria:

$(M, w) \vDash \hat{K}_t (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg r) \wedge K_t p \wedge \neg K_t q$

Logo, $(M, w) \vDash \neg r$

Esta é uma decisão prática bastante racional, mas que não é adequadamente representada com os modelos epistêmicos usuais, porque, de acordo com as condições semânticas para uma possibilidade epistêmica de que aconteça (que seja tão somente uma possibilidade e não uma necessidade em todos os casos), tanto faz haver apenas uma possibilidade ou milhares delas. O valor epistêmico será o mesmo. E isso não ampara escolhas que intuitivamente são mais racionais a partir de situações mais prováveis do que outras.

Se comparadas à lógica clássica, o alcance das lógicas epistêmicas na representação de raciocínios sob incerteza é maior. Nessas lógicas, o operador forte capta adequadamente a certeza, mas não foi feita com a finalidade de representar probabilidades nem certos tipos de incertezas. Nos casos em que uma agente tem razões (evidências) para escolher certas opções epistêmicas em detrimento de outras, não é possível representar as disposições da agente. Nesses casos, precisamos enriquecer nossos sistemas epistêmicos com mais recursos, como operadores de probabilidade (para modelar incertezas acerca das evidências, o uso de probabilidade condicional é mais apropriado).

3 SOBRE INCERTEZA

Num contexto de tomada de decisão, as crenças podem estar ancoradas em evidências. Estas evidências, por sua vez, estão ligadas aos graus de incerteza das agentes. Quanto maior o número de evidências e mais contundentes e completas elas forem, menor será o grau de incerteza. Em função disto, e tendo em vista que o objetivo dessa dissertação é mostrar como as incertezas das agentes podem ser captadas e representadas por meio da combinação de lógica epistêmica e probabilidade, uma breve introdução à epistemologia bayesiana é necessária.

3.1 Crenças, probabilidades e bayesianismos

As crenças são um dos tópicos fundamentais dentro das investigações em epistemologia e filosofia da ciência. Na epistemologia bayesiana apresentada por Neiva (2022, 47), as crenças subjazem em três teses principais: “i. Crenças (ou opiniões) são caracterizadas como um fenômeno que admite graus; ii. Graus de crença de agentes racionais obedecem ao cálculo de probabilidades; iii. Agentes racionais atualizam os seus graus de crença de acordo com o princípio da condicionalização”.

Destas três, as teses i e ii parecem fundamentais aqui na medida em que, deacordo com a tese i, uma agente pode acreditar de forma qualitativamente completa (com certeza) que os povos indígenas são legítimos donos do Brasil, por exemplo, mas pode acreditar de forma parcial (sem tanta certeza) que choverá hoje na cidade de São Luís; e, de acordo com a tese ii, com as devidas ponderações, os graus de crenças são concebidos como uma relação entre uma agente, um número e uma proposição. Este número representa a força com a qual a agente acredita na proposição.

Embora o uso da teoria formal da probabilidade (axiomatização de Kolmogorov) seja *standard*, há muitas interpretações acerca do que são probabilidades e do que elas representam. De modo geral, essas interpretações podem ser divididas em duas: um conceito epistemológico que se destina a medir relações objetivas de suporte evidencial, eque envolve crenças graduadas, e um conceito físico. (HÁJEK, 2019)

Antes de nos aprofundarmos nas interpretações de probabilidade cabe apresentar resumidamente sua axiomatização. Na abordagem axiomática apresentada por Kolmogorov (1956[1933]), considerando uma linguagem proposicional constituída por uma coleção contável de proposições atômicas L, e uma atribuição de probabilidade categórica Pr(•) que associa a cada elemento em L um número real (Pr : L

$\longrightarrow \mathbb{R}$), Pr(•)obedece aos seguintes axiomas:

i. Para qualquer $R \in L$, $Pr(R) \geq 0$. A probabilidade deve ser um número igual ou maiorque zero, ou seja, não pode ser um número negativo, e quando este número é igual a zero dizemos que o evento é impossível (Axioma da não-negatividade);

ii. $Pr(\top) = 1$ para qualquer tautologia $\top \in L$ (Axioma da normalização);

iii. Se dois eventos A_1 e A_2 são mutuamente exclusivos (disjuntos), então a probabilidade da união de A_1 com A_2 é igual à probabilidade de A_1 somada à probabilidade de A_2. Dito de outro modo, se $\vDash \neg(A \wedge B)$, então $Pr(A \vee B) = Pr(A) + Pr(B)$ (Axioma da aditividade).

A atribuição de probabilidade envolve a ideia de validade (semântica) da lógica proposicional, e isto é um sinal de que a teoria da probabilidade pressupõe a lógica clássica. Ou seja, embora a lógica esteja preocupada com aspectos estruturais formais das inferências absolutamente certas e as probabilidades representem incerteza, lógica e probabilidade estão conectadas. E como mesmo argumentos válidos podem envolver premissas incertas, a probabilidade aparece como uma ferramenta matemática importante para lidar também com argumentos de natureza dedutiva. Nesses casos, o que interessa não é a preservação da verdade, mas sim a preservação da probabilidade.[17]

As probabilidades físicas independem do nosso conhecimento e representam às chances de um dado evento do mundo natural ocorrer. Probabilidades epistêmicas, por sua vez, tendo em vista Neiva (2022), determinam o quanto uma hipótese é suportada ou apoiada por um conjunto de evidências. Sem aprofundar a discussão acerca do que de fato são evidências, parece razoável defini-las como sendo aquilo que justifica ou torna plausíveis hipóteses ou crenças.[18]

Considerando apenas probabilidades epistêmicas, há diferentes formas de compreendê-las. Há quem defenda que a concepção de probabilidade epistêmica é uma noção básica e irredutível a qualquer outro tipo de probabilidade. Para bayesianos subjetivos, probabilidades epistêmicas são graus racionais de crença. Aqui, ainda que agentes possuam o mesmo conjunto de evidências, podem distribuir diferentes

[17] Para mais sobre o assunto ler Demey, Kooi & Sack (2019).

[18] Há casos envolvendo evidências e distribuição de probabilidades em que uma hipótese é provável e isso não se deveà evidência considerada. Para mais sobre evidência, ler Kelly (2021).

probabilidades e isso ser considerado racional.

De acordo com Neiva (2022, 632), os bayesianos subjetivos em geral defendem duas teses principais, a saber, agentes racionais possuem graus de crença que satisfazem a teoria da probabilidade, e esses graus de crença devem ser revisados de acordo com o princípio da condicionalização diante de novas informações. Embora alguns bayesianos subjetivos adotem outros princípios, tendo em vista apenas estes supracitados, este tipo mais radical de bayesianismo contraria a Tese da Unicidade[19] (tese essa que garante a objetividade tão cara às ciências e a própria interpretação comum de probabilidade).

> As probabilidades epistêmicas formam a base das abordagens probabilísticasà confirmação. Observe que se é permissível que agentes tenham probabilidades epistêmicas distintas, será igualmente permissível que eles discordem se uma hipótese é confirmada por um conjunto de evidências que eles compartilham. (NEIVA, 2022, 635)

Na emergência de um hospital, por exemplo, dois médicos podem fazer distribuições de probabilidades epistêmicas conflitantes (inconsistentes entre si) e chegar a diferentes diagnósticos mesmo diante do mesmo conjunto de evidências. Já para bayesianos objetivos, os agentes epistêmicos devem atribuir à mesma probabilidade diante de uma mesma situação evidencial.

Para garantir uma distribuição correta, objetiva, universal de probabilidade epistêmica, Carnap (1962 [1950]) e Keynes (1921) defenderam uma interpretação lógica de probabilidade.[20] Nesta interpretação, as probabilidades podem receber pesos desiguais e serem computadas. Tal interpretação lógica tenta fixar o grau de suporte ou confirmação que uma evidência confere a uma dada hipótese. Contudo, não há uma demarcação muito nítida entre bayesianismo subjetivo e bayesianismo objetivo. (HÁJEK,2019, 42).

Nos problemas apresentados por Halpern na introdução do *Reasoning about uncertainty* (*Problem de Monty Hall,* enigma do segundo às e problema do diagnóstico médico), as crenças das agentes parecem estar numa relação inversamente proporcional com suas incertezas, e estas incertezas, por sua vez, conectadas às evidências que as

---

[19] "Para qualquer proposição P e qualquer conjunto de evidências E, há uma *única* atitude racionalmente permissível que agentes em posse da evidência E podem adotar em relação a P." (NEIVA, 2022)

[20] Os primeiros defensores da probabilidade lógica foram Johnson (1921), Keynes (1921), Jeffreys (1939/1998) e Carnap (1962 [1950]).

agentes podem ou não acessar. Nos problemas apresentados por ele, quanto maior é a crença de uma agente sobre algo, menor é sua incerteza dela sobre este algo.

3.2 Taxonomias para a incerteza

Bradley e Drechsler (2014, 1230), tendo em vista a Teoria Moderna da Decisão, apresentam os quatro tipos de incertezas classificadas por Savage (1954),[21] a saber, *incerteza de opção*, *incerteza ética*, *incerteza de estado* e *incerteza de espaço de estados*.

A *incerteza de opção* surge quando a agente não sabe quais as consequências de um ato. A *incerteza ética*, por sua vez, ocorre quando a agente não consegue atribuir utilidades exatas às consequências de uma ação (não sabe qual útil são estas ações).A *incerteza de estado* é a incerteza sobre estados atuais do mundo, e que versa sobre como o mundo é. A *incerteza de espaço de estados* acontece quando a agente não consegue construir um espaço de estados exaustivo, ou seja, a agente não está segura acerca de quais são os estados possíveispara cada situação. (BRADLEY, DRECHSLER, 2014)

Imagine, por exemplo, que uma agente faça sobre uma terra que não conhece uma horta de frutas orgânicas; por mais que haja expectativas, ela não sabe o que decorrerá da semeadura (ou seja, se as sementes germinarão e produzirão frutos ou não). A incerteza dela é de opção. Suponha agora que ela faz uma investigação cuidadosa do solo e tenha como plantar as diversas sementes com confiança na futura colheita, mas não saiba dizer se seria melhor (preferível) plantar um determinado tipo de frutas ou outro; neste caso, a incerteza da agente é ética, pois ela não consegue precisar o valor de cada ação.

Imagine agora que a agente planeje bem a semeadura e tenha consciência dos benefícios que a colheita trará, mas que no meio da madrugada caia uma tempestade e a agente não seja capaz de dizer ao amanhecer se a plantação sobreviveu ao temporal. Neste caso, a gente tem uma incerteza de estado.

Suponha aqui que a agente, após plantar as sementes, descobriu que usou um saco de sementes desconhecidas em meio às conhecidas. Suponha que as

---

[21] A partir dos pressupostos de racionalidade para tomada de decisão feitos por Savage, afirmam Bradley e Drechsler (2014, 1230), o *mainstream* supõe que todos estes tipos poderiam ser adequadamente reduzidos à incerteza que podemos chamar de incerteza de estado.

sementes todas germinaram e já frutificaram, mas, por algum motivo, a agente ainda não visitou a horta e desconhece exatamente todas as espécies de frutas que a horta produziu – mesmo que saiba de algumas (das sementes conhecidas) –, ou seja, ela não está segura acerca de quais são todos os estados possíveis para aquela situação (sob um ponto de vista modal, empírico e factual). Dizemos, neste caso, que ela tem uma incerteza de espaço de estados.

A versão de Leonard Savage da teoria bayesiana da decisão é, de acordo com Bradley e Drechsler, a mais conhecida e usada em ciências econômicas e ciências sociais. Nesta Savage (1954) afirma que na análise de problemas que envolvem incerteza acerca do que fazer devemos considerar as ações disponíveis para as agentes (A^1), os estados possíveis do mundo (S^1) e as consequências das ações nos estados possíveis do mundo (C^1). Veja a matriz a seguir:

Tabela 1 - Problema de decisão do Savage[22]

Estados possíveis do mundo			
Ações	S^1	...	S^n
A^1	C_1^1	...	C_n^1
...	...	...	...
A^m	C_1^m	...	C_n^m

Fonte: elaboração própria, adaptada de BRADLEY e DRECHSLER, 2014, p.1127)

Cada A^1 representa uma ação disponível para a agente, as S^1 representam estados possíveis do mundo e cada C_1^1 é uma consequência de desempenhar a ação A^1 quando o estado no mundo é S^1.

Ao tentar decidir o que fazer, uma agente pode estar incerta acerca de quais estados e consequências deve considerar, as ações disponíveis e exequíveis, qual estado do mundo é o atual, quais as consequências em cada estado do mundo de desempenhar uma ação, que utilidade atribuir a cada consequência e qual regra de decisão usar.

O tratamento dado por Savage aos problemas de decisão parece permitir que estas incertezas que envolvem a incerteza acerca do que fazer sejam reduzidas a

[22] BRADLEY e DRECHSLER, 2014, 1227.

uma única incerteza acerca de qual é o estado atual do mundo (incerteza de estado) (BRADLEY e DRECHSLER, 2014, 1228). Aqui é possível representar incertezas com uma única função de probabilidade sobre um conjunto de proposições.

Bradley e Drechsler afirmam que, além desta redução só ser possível com uma deformação severa nos graus de incertezas, isto não garante uma representação rigorosa destes graus.

> O que há de errado com a visualização padrão? Um problema, agora comumente reconhecido, é que ele não permite diferenças nos graus de incerteza que enfrentamos, em particular, não faz justiça à diferença entre a situação de alguém que não sabe se algum evento ocorrerá ou não, mas conhece a probabilidade de sua ocorrência (ou seja, que enfrenta um risco conhecido) e a de alguém que não tem base adequada para julgar quão provável é sua ocorrência (ou seja, quem não sabe quais são os riscos). (BRADLEY E DRECHSLER, 2014, 1226, Tradução nossa)

A partir disto eles propõem uma taxonomia para a incerteza considerando três dimensões fundamentais, a saber, quanto à natureza, ao objeto e ao grau da incerteza. Quanto à natureza (acerca do julgamento que está sendo feito), as incertezas podem ser modais, empíricas ou normativas (BRADLEY, DRECHSLER, 2014, 1230).

A *incerteza modal* é a incerteza sobre o que é possível ou sobre o que poderia ser o caso (concebível, logicamente possível, exequível) e surge em conexão com os nossos juízos de possibilidade. Ao decidir se tomará banho de rio hoje, na cidade de Grajaú, uma agente pode não saber todos os estados possíveis (as águas do rio podem estar muito turvas, as arraias venenosas podem ser numerosas às margens do rio, o rio pode estar muito cheio por contas das chuvas em outra região da cidade, etc.), ou não saber sobre as consequências possíveis de ir ou não tomar banho de rio; ou seja, esta agente não consegue construir um espaço de estados e consequências.

A *incerteza empírica* é a incerteza sobre qual é o caso (ou foi ou será o caso), ou seja, uma incerteza de estado. Neste caso, mesmo que uma agente possa construir um espaço de estados e consequências, tenha consciência de todos os estados e consequências possíveis, ela ainda pode estar incerta sobre qual é o estado atual do mundo.

Uma agente pode não ter incerteza modal, mas ter incerteza empírica. Também pode acontecer da agente ter pleno conhecimento do estado atual do mundo, mas desconhecer os outros estados possíveis, as ações e as consequências possíveis. Assim como é possível que a agente tenha ambas as incertezas (modal e empírica).

A *incerteza normativa*, que surge em conexão com nossos julgamentos valorativos, é a incerteza sobre o que é desejável que fosse o caso. Tal incerteza pode estar presente mesmo que não haja incerteza modal e empírica. Mesmo consciente dos estados e das consequências das ações, a agente pode estar insegura acerca do quão desejável estas coisas são (utilidade). Nos casos das incertezas modal e empírica, elas são independentes entre si.

Tabela 2: Combinações das incertezas (quanto à natureza da incerteza)[23]

(In)certeza modal	(In)certeza empírica	(In)certeza normativa
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Fonte: elaboração própria.

Na Tabela 2, vemos, para efeito ilustrativo, todas as combinações de certezas e incertezas, considerando apenas a natureza da incerteza. Por simplicidade, desconsideramos gradações na incerteza, combinando apenas os extremos (0 e 1). Retomando o cenário da horta, poderíamos exemplificar as oito combinações acima da seguinte maneira:

000 - A agente está completamente incerta acerca de quais são todas as espécies vegetais que poderiam eventualmente brotar na horta após o plantio (independentemente de brotarem ou não), nem quais são exatamente as que

[23] O valor "0" representa incerteza (completa), e o valor "1", a presença de certeza.

efetivamente irão brotar, nem quas espécies seriam preferíveis.

001 - Incerteza como a anterior, porém, com a certeza de quais espécies possíveisseriam preferíveis.

010 - Incerteza acerca de todas as espécies que poderiam eventualmente brotar, mascerteza de quais irão brotar de fato, sem ter certeza de quais seriam preferíveis.

011 - Como a anterior, exceto pela presença de certeza de quais espécies seriam preferíveis.

100 - Certeza de todas as possíveis espécies que poderiam brotar após o plantio, porémsem certeza de quais realmente brotarão, nem de quais seriam preferíveis.

101 - Como a anterior, exceto pela certeza de quais espécies seriam preferíveis.

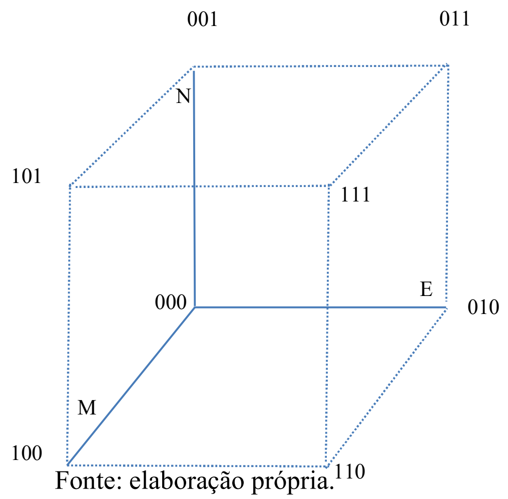
110 - Certeza de todas as possíveis espécies que poderiam brotar após o plantio, e de quais efetivamente irão brotar, mas incerteza sobre quais espécies possíveis seriam preferíveis.

111 - Certeza de todas as possíveis espécies que poderiam brotar, de quais efetivamenteirão brotar, e de quais espécies possíveis seriam preferíveis.

As possibilidades combinadas acima também podem ser visualmente dispostas em um diagrama tridimensional, para melhor compreensão (ver Figura 05).

Figura 5- Representação tridimensional das incertezas combinadas quanto à natureza (coordenadas: M – modalidade, E – empírica, N – normativa)

.



Fonte: elaboração própria.

Sob o parâmetro do objeto (acerca do conteúdo sobre o qual é feito o juízo, a saber, as características da realidade), a incerteza pode ser *factual* (sobre como as coisas são, atuais) ou *contrafactual* (sobre como as coisas poderiam ser ou ter sido, mas não são ou não foram de fato, ou seja, não atuais). Esta incerteza contrafactual condiciona as nossas decisões acerca do que fazemos a partir das possibilidades disponíveis.

> O papel da incerteza factual na tomada de decisões é óbvio. Mas, a incerteza contrafactual é igualmente importante, porque condiciona as deliberações da agente quanto ao que fazer. Alguém que se encontre em uma bifurcação na estrada em uma parte desconhecida do interior poderia se perguntar sobre o que aconteceria se seguisse pela esquerda na bifurcação e o que aconteceriase seguisse pela direita em vez disso. Acreditar que seguir pela esquerda levaria a um beco sem saída lhe daria uma razão para seguir pela direita, e daí realizar uma ação que tornaria essa crença (acerca do que ocorreria se seguisse pela esquerda) uma crença que diz respeito a uma possibilidade contrafactual. (BRADLEY, DRECHSLER, 2014, 1230, tradução nossa).

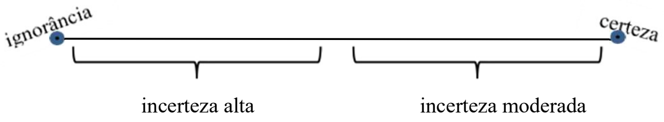
Claramente, o caráter factual e o contrafactual de uma incerteza são excludentes entre si – ou seja, a incerteza ou é factual, ou é contrafactual, mas nunca ambas ao mesmo tempo –, diferentemente das três dimensões da natureza da incerteza, que são ortogonais, porém sempre aplicáveis simultaneamente.

Quanto à severidade (ou seja, o grau de dificuldade que uma agente tem ao fazer um julgamento acerca do que pode acontecer) temos *ignorância*, *incerteza alta*, *incerteza moderada* e *certeza*. Tais características dependem da quantidade de informações relevantes para um julgamento disponível para a agente, e do quão coerentes estas informações são. Estas incertezas são ortogonais às incertezas do âmbito da natureza e do objeto, e, portanto, também admitem combinações.

A *ignorância* ocorre quando a agente não possui informação relevante para fazer o juízo; *incerteza alta* acontece quando a agente tem informações probabilísticas, mas estas não são suficientes para fazer um julgamento preciso. Com estas informações só é possível fazer um julgamento parcial ou impreciso. Quando a incerteza é moderada, a agente tem informações suficientes para fazer um julgamento preciso. Ela possui *certeza*, por sua vez, quando o valor do juízo é dado ou conhecido. (BRADLEY, DRECHSLER, 2014,1231)

Na Figura 6, representamos nosso entendimento dessa gradação de severidade de maneira linear, enfatizando o escopo das incertezas em contraste com os extremos da ignorância e da certeza.

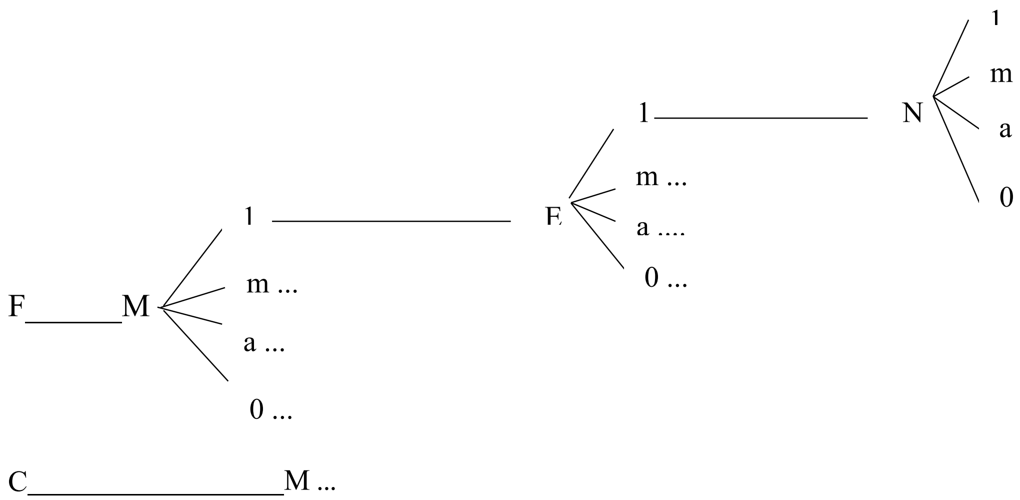
Figura 6- Representação linear do grau de incerteza



Fonte: elaboração própria

Considerando, entretanto, que os parâmetros da natureza, do objeto e da severidade da incerteza são independentes, podemos, para efeito ilustrativo, combiná-los também entre si (ver Figura 7 para uma indicação parcial das possibilidades combinatórias).

Figura 7- Combinações de incertezas quanto à natureza, ao objeto e à severidade.



Fonte: elaboração própria.

Na Figura 7, considerando M = incerteza modal, E = incerteza empírica, N = incerteza normativa, sejam também F e C abreviações de “incerteza factual” e “incerteza contrafactual”, respectivamente. Além disto, assumindo algum abuso de notação, convencionemos que a severidade da incerteza seja representada da seguinte forma: ‘0’ para ‘ignorância’, ‘a’ (para o intervalo i tal que $0 < i < 0,5$) para ‘incerteza alta’, ‘m’ (para o intervalo m tal que $0,5 \leq m < 1$) para ‘incerteza moderada’, e ‘1’ para ‘certeza’.

Enquanto em Savage temos quatro tipos de incerteza (incerteza de opção, incerteza ética, incerteza de estado e incerteza de espaço de estado), em Bradley e

Drechsler a incerteza é considerada sob o ponto de vista da natureza (incerteza modal, incerteza empírica e incerteza normativa), objeto (incerteza factual e incerteza contrafactual) e graus (ignorância, incerteza alta, incerteza moderada e certeza).

Sob o âmbito da natureza, a taxonomia do Savage e a de Bradley e Drechsler parecem coincidir. A incerteza normativa de Bradley e Drechsler é, considerando a definição, similar à incerteza ética do Savage, a incerteza modal similar à incerteza de espaço de estado, e a incerteza de estado e a incerteza de opção um tipo de incerteza empírica.

> A incerteza de espaço de estados é uma forma de incerteza modal; a incerteza ética uma forma de incerteza normativa. A incerteza de opção, por outro lado, é uma forma de incerteza empírica, mas é de um tipo contrafactual, uma vez que pertence à questão de o que seria o caso se uma ação particular fosse realizada, em vez daquilo que é o caso. (BRADLEY, DRECHSLER, 2014, 1232, tradução nossa)

Contudo, a taxonomia do Bradley e Drechsler é muito mais refinada por considerar o objeto e principalmente os graus de incerteza.

3.3 Incertezas e probabilidades

Diante de problemas de decisão, é *standard* considerar apenas a *incerteza de estados moderada,* isto é, a incerteza empírico-factual sobre estados do mundo, e representá-la com uma única função de probabilidade sobre um conjunto de eventos ou proposições. No entanto, incertezas deste tipo não são as únicas relevantes em tomada de decisão. Como já vimos, as agentes podem ter incertezas que variam em três dimensões distintas.[24] E ainda que seja possível reduzir os vários tipos de incerteza a incerteza de estado (empírica), essa redução acontece com uma deformação significativa nos graus de incerteza (BRADLEY, DRECHSLER, 2014,1227).

Considerando apenas incerteza empírica, quando esta incerteza é leve, é adequado usar uma única função de probabilidade sobre estados do mundo. No entanto, quando esta incerteza é severa (situação em que a agente carece das informações

[24] Para ilustrar a relevância que outras formas de incerteza possuem na tomada de decisão, Keynes (1937) dá exemplo dos prospectos de uma guerra. Considerando uma guerra europeia, em particular, não há dados nem ocorrências que sejam suficientes para formar uma probabilidade quantitativa, ou qualquer outra base calculável. Logo, decisões acerca disso não podem ser tomadas a partir de uma concepção de incerteza empírico-factual.

necessárias para atribuir uma função de probabilidade precisa para cada estado do mundo) temos poucas probabilidades disponíveis e é necessário usar múltiplas funções de probabilidade. (BRADLEY, DRECHSLER, 2014, 1231)

De acordo com Hansson (2022, 4), diz-se que uma decisão é tomada *sob risco* se as probabilidades relevantes estiverem disponíveis para a agente. Nestes casos, a agente está certa acerca da probabilidade dos estados, mas medianamente incerta acerca dequal estado é o verdadeiro.

Uma decisão é tomada *sob incerteza* se essas probabilidades estiverem indisponíveis ou parcialmente disponíveis. Aqui a agente não tem certezas probabilísticas, mas seus julgamentos sobre probabilidade podem refletir sua incerteza mediana acerca dos estados do mundo. Sob um ponto de vista epistemológico, como não é possível ter estimativas absolutamente certas de probabilidade, mesmo sob risco a decisão envolve incerteza.

Quando se trata de casos de ambiguidade e ignorância, ao contrário do que supôs Savage (1954) com o postulado das preferências completas (onde as agentes são capazes de julgar de quaisquer dois prospectos, aquele que é melhor, preferível ou igualmente bom), uma agente não pode adequadamente formar uma distribuição de probabilidade aditiva e única sobre um espaço de estados. Há indícios de que nestes casos as agentes não são maximizadoras da utilidade esperada subjetiva, assim sendo, não podem quantificar suas incertezas com uma função de probabilidade única.[25]

Nos casos de crenças imprecisas, sendo rigoroso, o mais adequado seria usar conjuntos de funções de probabilidade. A intuição por trás dessa ideia é que cada elemento do conjunto, cada distribuição de probabilidade, é um candidato a ser a distribuição verdadeira. Uma vez que a representação das incertezas (crenças imprecisas) deve ser fundamentada na evidência, não é adequado atribuir probabilidades objetivas na forma de uma função única quando não há evidências (informações detidas pelas agentes) que as sustentem (BRADLEY e DRECHSLER, 2014, 1237). O grau de incerteza é, neste contexto, refletido no tamanho do conjunto de probabilidades

[25] Isto contraria Savage (1954), para quem as considerações de preferência racional implicam que toda incerteza empírica é moderada, no sentido de que uma agente racional agirá como se maximizasse a utilidade esperada relativaa uma função de probabilidade única sobre os estados do mundo (mesmo nos casos de ambiguidade e ignorância, em que as probabilidades objetivas relevantes são desconhecidas ou inexistentes), ou seja, ela reduzirá estas situações excepcionais a situações de incerteza moderada ao atribuir uma probabilidade subjetiva a cada estado do mundo de acordo com o que ela acredita ser o estado atual do mundo. (BRADLEY e DRECHSLER, 2014, 1234 e 1236).

permissíveis. Quanto maior for esse conjunto maior será a severidade da incerteza.

Os conjuntos de funções de probabilidade são mais fiéis às nuanças que envolvem as incertezas (quanto à natureza, objeto e grau), por representá-las sem que seja preciso converter tudo em uma única concepção de incerteza, a saber, a de estado moderada e usar uma única função de probabilidade. Na aplicação feita pelo *mainstream*, não é possível distinguir as severidades das incertezas com as quais lidamos.

Considerando dois casos particulares, por exemplo, nesta visão, uma situação em que uma agente não sabe se um evento ocorrerá de fato, mas sabe a probabilidade de sua ocorrência (a agente está incerta, mas conhece os riscos), não seria distinguível de outra situação em que a agente não tem nenhuma base adequada e segura a partir do qual poderia julgar o quão provável a ocorrência de um evento poderia ser (a agente está incerta e não conhece os riscos).

Uma vez que as funções de probabilidade levam os eventos a medidas de probabilidade, ao dizerem que é possível representar os graus de incerteza a partir do tamanho dos conjuntos de funções de probabilidade, Bradley e Drechsler (2014) e Halpern (2003) parecem coincidir na ideia de que é possível capturar a incerteza por meio da linguagem de conjuntos.

Na introdução de *Reasoning about uncertainty* (HALPERN, 2003), o autor apresenta alguns enigmas e problemas envolvendo decisões sob condição de incerteza: o problema de Monty Hall, o enigma do segundo ás e o problema do diagnóstico médico. No problema de Monty Hall, uma agente precisa escolher uma porta premiada em três. A princípio, a probabilidade de cada porta ser a premiada é de 1/3. Mas se a agente fizer uma primeira escolha e, com o descarte de uma das três portas, ela trocar a porta escolhida por outra, a probabilidade de ela escolher a porta premiada passa a ser de 2/3.

Neste primeiro caso, tendo em vista as definições de incerteza supracitadas, considerando que agentes ordinárias não teriam conhecimento dessa tendência matemática para o aumento da probabilidade, a decisão da agente é tomada *sob incerteza*. Tal incerteza é moderada e versa sobre o estado atual do mundo, ou seja, é empírico-factual.

No enigma do segundo ás, um par aleatório de um deck de baralho contendo quatro cartas (ás de copas, ás de espadas, dois de copas, dois de espadas) é dado a uma agente. Dentre as seis combinações possíveis, a probabilidade de ela ter um par de ases é de 1/6, e de ter pelo menos um ás é de 5/6. Se uma carta do par for um ás, a probabilidade de a agente ter um par de ases é de 1/5. Mas se esta carta for um ás de copas, a probabilidade de ela ter um par de ases é de 1/3. Qualquer decisão tomada pela agente aqui será *sob risco*, pois todas as probabilidades estão disponíveis. Aqui a incerteza é moderada e sobre estados atuais do mundo.

No problema do diagnóstico médico, uma agente precisa dar um diagnóstico tendo em vista sintomas conhecidos e sintomas não catalogados. Neste contexto, a probabilidade de certos sintomas serem efeitos de determinadas doenças é dado, mas sobre os sintomas desconhecidos, pouco ou nada se sabe. Neste caso a incerteza é de estado e severa.

Em suma, parece que o formalismo do Halpern vai capturar estes tipos de incertezas, as incertezas empíricas (moderada e severa). E que assim como Bradley e Drechsler (2014), nos casos de incerteza empírica alta, Halpern acredita que o uso de conjuntos de funções de probabilidade é mais adequado na representação.

4 PROBABILIDADE EPISTÊMICA

4.1 Introdução às noções *standard* de probabilidade

De Aristóteles (ao dizer que o provável é o que acontece habitualmente) ao romano Domício Ulpiano (ao compilar uma tabela para esperança de vida) temos teorias primitivas da probabilidade. Mas a concepção matemática é construída a partir da experiência dos jogos de azar. Por volta do século XVI, Cardan, um hábil jogador, definiu probabilidade como sendo uma "proporção de casos igualmente possíveis" e a partir disso desenvolveu vários cálculos simples de probabilidade. A esta definição deu-se o nome de concepção clássica.

Nessa definição, desenvolvida de maneira sistemática por Pascal[26], Bernoulli e Laplace, considerando um conjunto de todos os n resultados elementares possíveis, todos esses resultados possíveis são equiprováveis. Nesse caso, intuitivamente, na ausência de qualquer outra informação, não há razões para considerar um evento mais provável do que outro. Aqui, se m dos resultados possíveis são favoráveis a um evento A, a probabilidade de A acontecer é m/n (uma razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis).[27]

Nesta concepção clássica é preciso conhecer todos os possíveis resultados de um experimento, algo inviável quando se está considerando acontecimentos únicos, como as chances de um acidente nuclear acontecer. Considerando, em particular, os problemas que envolvem o princípio da indiferença, filósofos e probabilistas buscaram outras maneiras de representar probabilidade. Nas duas abordagens mais comuns ou os números representam frequência (probabilidade objetiva), ou os números refletem avaliações subjetivas de probabilidade (probabilidade epistêmica).

Na concepção em que a probabilidade é interpretada como sendo a frequência de dado evento ocorrer, supõe-se que a probabilidade é física (chance), ou seja,

---

[26] Um nobre francês com interesse em jogos de dados e matemática, chamado Antoine Gombaud, propôs a Pascal a seguinte questão: em oito lances de um dado, um jogador deve tentar lançar um, mas depois de três tentativas infrutíferas, o jogo é interrompido. Como ele deve ser indenizado? Pascal tentou resolver o problemacom a ajuda de Fermat, e essa tentativa foi o ponto de partida para a moderna teoria de probabilidade (BOYER, 1974, 265).

[27] O problema com o princípio da indiferença é que nem sempre é óbvio como reduzir um evento a resultados elementares que parecem igualmente possíveis. Diferentes escolhas de resultados elementares, em geral, levarão a respostas diferentes (Halpern, 2003,14). Além dessa, a concepção clássica de probabilidade tem duas dificuldades: i. Envolve uma definição circular (caso 'igualmente possível' signifique 'igualmente provável'); ii. A possibilidade não parece ser um fenômeno gradual.

descreve eventos ou fatos do mundo.[28] Na concepção em que a probabilidade é uma frequência finita, ela é a proporção na qual um evento ocorre em uma série de experimentos de longo prazo. A probabilidade de uma moeda dar cara é ½, porexemplo, porque se a moeda for lançada com frequência suficiente, cerca de metade das vezes dará cara.

Nos casos em que a probabilidade é subjetiva, ela não representa frequências, mas os julgamentos (graduais) que os indivíduos fazem a partir das informações que possuem (evidências) ou não sobre algo. Tal probabilidade representa os graus de crença da agente.

Já a probabilidade epistêmica (uma espécie sofisticada de probabilidade subjetiva) é proposta para casos que envolvem incerteza nas afirmações. A probabilidade epistêmica, de acordo com Keynes (1921), é uma opinião racional sobreuma proposição baseada no conhecimento de outra proposição. Sendo mais preciso, probabilidade epistêmica são graus racionais de crença.

Ao construir uma teoria da confirmação em bases estritamente lógicas, Carnap (1962) defendeu que a probabilidade lógica é uma medida de "vínculo parcial" entre uma evidência e uma hipótese. Aqui, os valores de probabilidade dependem unicamente da linguagem sobre a qual a distribuição de probabilidade é definida. A probabilidade é determinada *a priori*.

Conjuntos de mundos possíveis são vastamente usados tanto em lógica epistêmica quanto em teoria da probabilidade para representar incerteza. Em lógica epistêmica, esses conjuntos são estados ou resultados elementares que uma agente considera possíveis. Em teoria da probabilidade, esses conjuntos representam desfechos possíveis a partir de uma dada situação.

Para ilustrar, considere que um dado com seis lados, ao ser jogado, tem seis

[28] As interpretações de probabilidade são comumente divididas em i. epistêmicas e ii. objetivas. As interpretações epistêmicas de probabilidade (abordagem lógica) relacionam a probabilidade ao conhecimento, em particular, aos graus de crença racional dos agentes. Assim, a teoria da probabilidade é vista como uma extensão da lógica dedutiva ao caso indutivo. As abordagens de Ludwig von Mises e John Maynard Keynes vão nesse caminho. No *Tratado* sobre probabilidade, por exemplo, Keynes apresenta uma teoria geral de argumentos que partem de premissas e levam a conclusões que são plausíveis, mas das quais não se tem certeza. Nessa interpretação, a probabilidade tem um grau de associação parcial. Já as interpretações objetivas de probabilidade consideram a probabilidade como sendo uma característica do mundo objetivo. Aqui, embora lidando com fenômenos observáveis diversos, teoria da probabilidade é uma ciência tal qual a matemática e a mecânica. Assim sendo, não é a falta de conhecimento (incerteza) que fornece a base da teoria da probabilidade, mas o contato com um grande número de eventos. A teoria de Richard von Mises (irmão do Ludwig von Mises, e empirista) pertence a essa interpretação. (LUDWIG VAN DEN HAUWE, 2018, 38)

resultados possíveis, que podem ser representados pelo conjunto W = {1, 2, 3, 4, 5, 6} de mundos (possibilidades ou desfechos). Usualmente, 1/6 é a probabilidade atribuída a cada mundo em W descrevendo as chances desse mundo ocorrer. E as possibilidades admitidas por uma agente dependerão de sua acessibilidade epistêmica. Contudo, o que são precisamente probabilidades epistêmicas?

Há uma definição formal clássica para a probabilidade (teoria da probabilidade de Kolmogorov). Mas muitas interpretações acerca do que é probabilidade. Grosso modo, diz Hajek (2019,11), existem três conceitos principais de probabilidade: um conceito epistemológico, que se destina a medir relações objetivas de suporte evidencial; o conceito do grau de confiança de um agente, uma crença graduada; e um conceito físico que se aplica a vários sistemas do mundo, independentemente do que se pensa. Aqui nos interessam as probabilidades epistêmicas.

As probabilidades epistêmicas determinam o quanto uma hipótese é confirmada por um conjunto de evidências (todos os dados relevantes que o agente tem a sua disposição). A partir disto, há três concepções para o que sejam probabilidades epistêmicas: a interpretação subjetiva de probabilidade, onde probabilidades epistêmicas são graus de crença de agentes racionais; a visão onde probabilidades epistêmicas são determinadas por probabilidades lógicas; e a tese segundo qual probabilidade epistêmica é uma noção básica e redutível.

Na intepretação subjetiva, diferentes agentes racionais podem atribuir probabilidades epistêmicas conflitantes entre si, mesmo compartilhando o mesmo conjuntode informações. Para bayesianos subjetivos, diz Neiva (2022, 633), "é possível que agentes tenham diferentes probabilidades epistêmicas, sem que isso represente uma infração de algum princípio normativo que rege a racionalidade da crença". Na interpretação objetiva, por outro lado, diante de qualquer situação evidencial, há uma única resposta objetivamente correta (NEIVA, 2022, 636). Contudo, como produzir e justificar uma distribuição correta de probabilidade (universal)?

Para Carnap (1962 [1950]) e Keynes (1921), existem fatos puramente lógicos que garantem objetividade na atribuição de probabilidade. Em Carnap, em particular, probabilidades epistêmicas (e relações de confirmação) dependem do que constitui o espaço lógico de possibilidades; e vão depender, essencialmente, da linguagem sobre aqual a distribuição de probabilidade é definida.

Com uma proposta alternativa, Timothy Williamson propõe uma probabilidade epistêmica que tanto não depende de probabilidades lógicas, quanto não é redutível a grausracionais de crença. Neste tipo independente de probabilidade, que ele chamou de probabilidade evidencial, as atribuições de probabilidade são objetivas.

Para Williamson, tal concepção não precisa ser definida em termos de algo mais básico ou fundamental. A natureza das probabilidades evidenciais se elucida a partir do uso, nos diferentes papéis teóricos que tal noção pode desempenhar. Tendo em vista os enigmas propostos por Halpern e o objetivo principal desta dissertação, adotamos esta concepção de probabilidade, a saber, probabilidades evidenciais.

Com uma proposta alternativa, Timothy Williamson propõe uma probabilidade epistêmica que tanto não depende de probabilidades lógicas, quanto não é redutível a graus racionais de crença. Neste tipo independente de probabilidade, que ele chamou de probabilidade evidencial, a relação justificatória entre um conjunto de evidências E e uma proposição H é objetiva, e há uma resposta correta e definitiva acerca do quanto um conjunto de evidências probabiliza uma hipótese.

Para Williamson, tal concepção não precisa ser definida em termos de algo mais básico ou fundamental. A natureza das probabilidades evidenciais se elucida a partir do uso, nos diferentes papéis teóricos que tal noção pode desempenhar. Tendo em vista os enigmas propostos por Halpern e o objetivo principal desta dissertação, adotamos esta concepção de probabilidade, a saber, probabilidades evidenciais.

4.2 Espaços e medidas de probabilidade

Representamos, de maneira padrão, todos os resultados possíveis de uma dada situação como um conjunto W de mundos possíveis. Começando com dois exemplosbem simples:

Cenário 1: Jogar uma moeda para o alto e apanhá-la na mão para decidir entre caraou coroa.

Cenário 2: Jogar um dado convencional (de seis faces) em uma superfície plana.

No cenário 1, se nomearmos como “cara”o estado do mundo em que a moeda cai com aquela face para cima, e “coroa” a outra situação, temos que W^1 = {cara, coroa}, e no cenário 2, fazendo um movimento similar (ou seja, “1” denota a situação em que o dado cai com o número 1 para cima etc.), temos que W^2 = {1, 2, 3, 4, 5, 6} (cada númerocorrespondendo à caída de um dos lados do dado).

Também é padrão definir proposições como conjuntos de mundos (intuitivamente, todos os mundos em que aquela proposição é o caso – ou seja, é verdadeira). Por exemplo, nosegundo cenário acima, a proposição de que o dado cai comum número par para cima corresponderia ao subconjunto $U' \subseteq W^2$ tal que $U' = \{2, 4, 6\}$, e no primeiro cenário, a situação de que a moeda não cai nem com cara, nem com coroa, corresponderia a $U'' \subseteq W^1$ tal que $U'' = \varnothing$ (o conjunto vazio). Já a proposição de que *o dado cairá com algum daqueles seis números* corresponde ao próprio W^2 e de que *a moeda vai dar algum daqueles dois resultados*, ao próprio W^1.

Dado um conjunto W com (todos os) mundos possíveis relevantes para a descrição de um determinado cenário, a incerteza de uma agente pode ser representada como um $W' \subseteq W$. Claramente, quanto maior esse W', maior a incerteza dessa agente, dado que admite como possíveis mais situações do mundo, até alcançar total incertezado que está acontecendo (ou vai acontecer) quando $W' = W$. Aqui, uma agente considera uma proposição ou evento U (por exemplo, de que o dado vai cair com o número 1 para cima) possível se $U \cap W' \neq \emptyset$. Intuitivamente, isso quer dizer que aquela proposição é admissível para a agente, porque pelo menos um elemento de U está nas possibilidades de como o mundo se comporta (ou vai se comportar).

Por outro lado, dizemos que uma agente *sabe que* U se em todos os mundos que ela considera possível, U é o caso. Dito de outro modo, a agente sabe que U se $W' \subseteq U$(a agente não considera nenhuma possibilidade que esteja no complemento de U). Por exemplo, no segundo cenário, suponha que a agente viu que a face do dado que caiu para cima foi 2; então, a representação de sua incerteza é $W' = \{2\}$, e a proposição de que o resultado do lançamento do dado é um número par seria o conjunto $U' = \{2, 4, 6\}$. Como $W' \subseteq U'$, dizemos que a agente sabe que o resultado do lançamento é um número par. Além disso, sua incerteza quanto ao resultado do lançamento é mínima (ou seja, ela admite apenas uma possibilidade entre as seis).

A probabilidade é, junto com a linguagem de mundos possíveis, a mais desenvolvida e usada para mensurar um tipo de incerteza, a saber, incerteza de estado. Para construir essa representação, precisaremos de algumas definições preliminares, começando pela noção de *álgebra sobre W* e de *espaço de probabilidade*.

Seja um conjunto finito[29] e não vazio W de resultados possíveis para uma

[29] Seguindo Halpern, para simplificar a exposição, usaremos conjuntos finitos nos exemplos e isso estará pressuposto, a não ser que indicado explicitamente de outra forma. A maioria das propriedades consideradas valerão para conjuntos infinitos, acrescentando-se restrições apropriadas – por exemplo, se

situação (mundos possíveis). Definimos o seguinte:

Definição 4.2.1.[30] Uma *álgebra sobre W* é um conjunto $F \subseteq 2^W$ tal que

(i) $W \in F$,

(ii) se $U \in F$ e $V \in F$, então, $U \cup V \in F$ e $\overline{U} \in F$ (ou seja, F é fechado por união e complementação).

É fácil ver que, em consequência da definição, a álgebra F também é fechada por interseção:

Prova: sejam A e B elementos de F, portanto, por definição, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in F$. Daí, $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = \{ x : x \notin \bar{A} \cap \bar{B}\} = \{ x : x \notin \{\{x : x \notin \bar{A} \} \cap \{ x : x \notin \bar{B} \}\} = \{ x : x \notin \{x : x \notin \bar{A}$ ou $x : x \notin \bar{B} \}\} = \{ x : x \in A$ e $x \in B\} = A \cap B$.

Como exemplo bastante simples de uma álgebra sobre W, considere o cenário 1. Uma álgebra F sobre W^1 poderia ser $F^1 = \{\emptyset, \{cara\}, \{coroa\}, \{cara, coroa\}\}$, que coincide com o próprio conjunto de todos os subconjuntos de W^1. Outro exemplo sobre o mesmo W^1 poderia ser $F^2 = \{\emptyset, \{cara, coroa\}\}$.

Definição 4.2.2.[31] Seja um conjunto finito não vazio W de mundos, e seja uma álgebra F sobre W. Dizemos que V é um *subconjunto básico* de F se:

(i) $V \neq \emptyset$

(ii) se $V' \subset V$ e $V' \in F$, então $V' = \emptyset$.

Uma *base para F* é uma coleção de conjuntos F′ tais que todo elemento de F seja uma união de elementos de F′. Ou seja, um subconjunto básico de F é um elemento minimal não vazio de F, em outras palavras, que não tenha subconjunto próprio não vazio que seja também elemento de F.

Nos dois exemplos acima de álgebra sobre W^1, os subconjuntos básicos tanto de F^1 como de F^2 são {cara} e {coroa}, e a base para as duas álgebras é a mesma, a saber: {{cara}, {coroa}}. Claramente, como estamos considerando cada W finito, segue-se

W for infinito, precisaremos que F seja uma álgebra fechada por união *contável*, ou seja, se os conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots \in F$, então $\cup A_i \in F$.

[30] (HALPERN, 2013, 15).

[31] (Ibidem)

que todo elemento de F é a união de conjuntos básicos de F.

Agora, podemos definir o que vem a ser um espaço de probabilidade. Na definição abaixo, a notação [0, 1] refere-se ao intervalo fechado entre 0 e 1, ou seja $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 1\}$.

Definição 4.2.3.[32] Um *espaço de probabilidade* é uma upla (W, F, μ), onde:

(i.) W é um conjunto finito não vazio de mundos (ou resultados possíveis para um cenário);

(ii.) F é uma álgebra sobre W;

(iii.) μ é uma função de F em [0, 1] tal que $\mu(W) = 1$, e tal que, para U e V $\in$ F e $U \cap V = \varnothing$, segue-se que $\mu(U \cup V) = \mu(U) + \mu(V)$.

Os elementos de F serão chamados de *conjuntos mensuráveis*. Denominamos μ como *medida de probabilidade* sobre F, ou no caso de $F = 2^W$, como *medida de probabilidade* sobre W.

A medida de probabilidade atribui a cada elemento de F uma probabilidade entre 0 (o evento não acontece) e 1 (acontece com certeza)[33]. É fácil ver que uma consequência direta da Definição 2.2.3 é que $\mu(\varnothing) = 0$.

Prova: como $W = W \cup \varnothing$, e como $\mu(W \cup \varnothing) = \mu(W) + \mu(\varnothing)$ (aplicando a definição de μ, pois são conjuntos disjuntos), segue-se que $\mu(W) + \mu(\varnothing) = \mu(W)$; daí, $1 + \mu(\varnothing) = 1$, e então, $\mu(\varnothing) = 1 - 1 = 0$.

É importante lembrar que o domínio de μ são elementos de F (isto é, subconjuntos de W) e não elementos de W; contudo, seguindo Halpern (2003, 16), quando, para algum $w \in W$, tivermos a medida de probabilidade de seu unitário $\mu(\{w\})$, abusaremos da notação e escreveremos apenas $\mu(w)$. Também no caso de $F = 2^W$, por economia, indicaremos o espaço de probabilidade apenas como (W, μ). Neste caso, também é interessante observar o resultado trivial de que o somatório das medidas de probabilidade de todos os subconjuntos unitários de W é 1 (HALPERN, 2003, 16).

Retomando os cenários usados anteriormente, podemos indicar como exemplo

[32] (Ibidem)

[33] Contudo, se W for infinito, não é possível que uma medida de probabilidade seja definida em todos os subconjuntos. E mesmo nos casos em que o W é finito, uma agente pode não estar preparada para atribuir uma probabilidade numérica a todos os subconjuntos. Em função disso, é útil assumir que o conjunto de subconjuntos de W para o qual a probabilidade é atribuída satisfaz algumas propriedades de fechamento.

de espaço de probabilidade o seguinte:

$E^1 = (W^1, F^1, \mu^1)$, onde:

$W^1 = \{cara, coroa\}$,

$F^1 = \{\varnothing, \{cara\}, \{coroa\}, \{cara, coroa\}\}$,

$\mu^1(\varnothing) = 0$, $\mu^1(\{cara\}) = 1/2$,

$\mu^1(\{coroa\}) = 1/2$, $\mu^1(\{cara, coroa\}) = 1$.

4.3 *Frames* de probabilidade

Ao usar mundos possíveis para representar a incerteza, na lógica epistêmica, lidamos com *frames* epistêmicos. Aqui, como essa incerteza é representada a partir de (entre outras coisas) uma atribuição de probabilidade aos conjuntos de mundos, de modo análogo, lidamos com *frames* de probabilidade. Como veremos logo abaixo, um *frame* de probabilidade $\mathcal{F}$ é constituído por um conjunto de mundos e por n atribuições de probabilidade, a saber, $\mathcal{F} = (W, PR_i \ldots PR_n)$.

Usaremos a seguir as noções de espaço de probabilidade (e medida de probabilidade) para definir as noções de atribuição de probabilidade e *frames* de probabilidade. Suponha nas definições abaixo, como usual, W sendo um conjunto finito e não vazio de mundos.

Definição 4.3.1.[34] Uma *atribuição de probabilidade* PR é uma função que associa a cada $w \in W$ um espaço de probabilidade; ou seja, $PR(w) = (W_W, F_W, \mu_W)$.

Quando estivermos considerando várias PR, para não causar confusão, indexaremos seus componentes de acordo, da seguinte maneira: $PR_i(w) = (W_{w,i}, F_{w,i}, \mu_{w,i})$. É possível considerar uma PR_i onde $W_{w,i} = W$; porém, é mais conveniente definir $\mu_{w,i}$ apenas para um subconjunto de W, como veremos depois.

Definição 4.3.2.[35] Um *frame de probabilidade* $\mathcal{F}$ é uma upla $(W, PR_1 \ldots PR_n)$, onde cada PR_i é uma atribuição de probabilidade para cada $w \in W$.

Quando existir apenas uma única atribuição de probabilidade – ou seja, quando

---

[34] (HALPERN, 2003, 193).

[35] (HALPERN, 2003, 195).

$\mathcal{F}$ = (W, PR_1), tal que, para todo w $\in$ W, $PR_1(w)$ = (W, F, μ), o *frame* $\mathcal{F}$ pode ser identificado com um espaço de probabilidade *standard* (chamaremos de *frame de probabilidade simples*) (HALPERN, 2003, 193). Abaixo, apresentamos um exemplo desse tipo.

Exemplo 4.3.3. Um *frame* de probabilidade simples (com F = 2^W omitidas nos espaços de probabilidades, por simplicidade, bem como omitidas, em cada μ, os casos fixos $\mu(\emptyset)$ e $\mu(W)$):

$\mathcal{F}^1$ = (W^1, PR_1), onde:

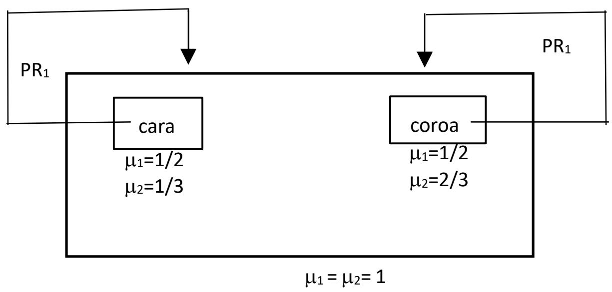
W^1 = {cara, coroa},

PR_1(cara) = ({cara, coroa}, μ_1),

μ_1(cara) = 1/2 e μ_1(coroa) = 1/2; PR_1(coroa) = ({cara, coroa}, μ_2),

$\mu 2$(cara) = 1/3 e $\mu 2$(coroa) = 2/3.

Figura 8- Diagrama de *frame* de probabilidade simples (exemplo 3.3.3)



Fonte: elaboração própria.

Analisando o primeiro exemplo, com uma única atribuição de probabilidade, considerando a perspectiva *cara*, ambas as possibilidades (*cara* e *coroa*) têm a mesma medida de probabilidade (1/2); da perspectiva *coroa*, a possibilidade *cara* tem duas vezes mais chances do que a possibilidade *coroa*. Nesse *frame* de probabilidade, o W é um conjunto constituído por dois elementos (*cara* e *coroa*). A atribuição de probabilidade (PR_1), tomando o mundo *cara* como argumento, associa a esse mundo um espaço de probabilidade onde a medida de probabilidade de {*cara*, *coroa*} é μ_1. O

μ_1 (*cara*) é ½ e o μ_1 (*coroa*) é ½. A atribuição de probabilidade (PR_1), tomando o mundo *coroa* como argumento, associa a esse mundo um espaço de probabilidade onde a medida de probabilidade é μ_2. O μ_2 (*cara*) é 1/3 e o μ_2 (*coroa*) é 2/3.

Exemplo 4.3.4. Exemplo de *frame* de probabilidade não simples (também com as mesmas omissões do exemplo anterior, por simplicidade):

$\mathcal{F}^2 = (W^1, PR_1, PR_2)$, onde:

$W^1 = \{cara, coroa\}$,

$PR_1(cara) = (\{cara, coroa\}, \mu_1)$,

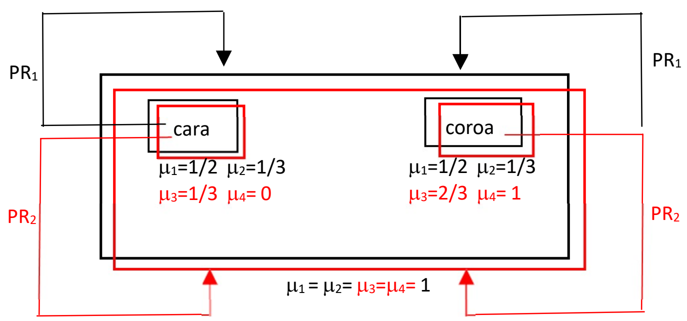
$\mu_1(cara) = 1/2$ e $\mu_1(coroa) = 1/2$; $PR_1(coroa) = (\{cara, coroa\}, \mu_2)$,

$\mu_2(cara) = 1/3$ e $\mu_2(coroa) = 2/3.PR_2(cara) = (\{cara, coroa\}, \mu_3)$,

$\mu_3(cara) = 1/3$ e $\mu_3(coroa) = 2/3$; $PR_2(coroa)$ $(\{cara, coroa\}, \mu_4)$,

$\mu_4(cara) = 0$ e $\mu_4(coroa) = 1$.

Figura 9- Diagrama de *frame* de probabilidade complexo (exemplo 3.3.4)



= Fonte: elaboração própria.

Analisando o segundo exemplo, nesse *frame* de probabilidade, o W também é umconjunto constituído por dois elementos (*cara* e *coroa*). Contudo, há duas atribuições de probabilidade (PR_1 e PR_2). PR_1 quando toma o mundo *cara* como argumento, associa a esse mundo um espaço de probabilidade onde a medida de probabilidade é μ_1. O μ_1 (*cara*) é ½ e o μ_1 (*coroa*) é ½. PR_1 tomando o mundo *coroa* como argumento, associa a esse mundo um espaço de probabilidade onde a medida de probabilidade é μ_2.

O μ_2 (*cara*) é 1/3 e o μ_2 (*coroa*) é 2/3.

No segundo caso, PR_2, quando toma o mundo cara como argumento, associa a esse mundo um espaço de probabilidade onde a medida de probabilidade é μ_3. O μ_3 (*cara*) é 1/3 e o μ_3 (*coroa*) é 2/3. PR_2 tomando o mundo *coroa* como argumento, associa a esse mundo um espaço de probabilidade onde a medida de probabilidade é μ_4. O μ_4 (*cara*) é 0 e o μ_4 (*coroa*) é 1.

Assim como nos *frames* epistêmicos podem ser colocadas restrições sobre as relações de acessibilidade, nos *frames* de probabilidade é razoável considerar atribuições de probabilidade (PR_i) com determinadas restrições naturais, tais como a uniformidade:

Definição 4.3.5.[36] Um *frame* de probabilidade é *uniforme* (UNIF) quando todas suas PR_i são, para qualquer que seja $w \in W$, iguais, ou seja, para todo i, v e w. se $PR_i(w) = (W_{w,i}, F_{w,i}, \mu_{w,i})$ e $v \in W_{w,i}$, então $PR_i(v) = PR_i(w)$.

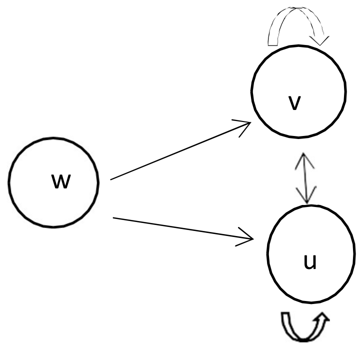
A uniformidade pode ser mais facilmente compreendida por analogia com propriedades de relações de acessibilidade em *frames* epistêmicos. Em *frames* epistêmicos, claramente, a uniformidade corresponde simplesmente à *combinação de transitividade e euclideanidade*, as quais, combinadas, garantem que os mundos acessados se acessem entre si (inclusive a si mesmos). Defina-se R_i (w) como o conjunto dos w‘ tais que (w, w‘) $\in R_i$. Combinando-se transitividade e euclideanidade,temos que, se um mundo $v \in R_i$ (w), segue- se que $R_i (v) = R_i (w)$. Se, em vez de falarmos de relações R_i, considerarmos as atribuições de probabilidade PR_i, temos a propriedade da uniformidade.

Exemplo 4.3.6. Como exemplo trivial de *frame* de probabilidade uniforme, Basta considerar o fornecido no Exemplo 2.3.3 e fazer $\mu_1 = \mu_2$; desta maneira, PR_1(cara) = PR_1(coroa).

---

[36] (HALPERN, 2003, 194).

Figura 10- Exemplo de *frame* epistêmico uniforme



Fonte: elaboração própria.

Se $v \in R(w)$ então $R(w) = R(v)$, e se $u \in R(w)$, então $R(w) = R(u)$. Na Figura 2.5., claramente, como $R(w) = \{v, u\}$, $R(v) = \{v, u\}$, $R(u) = \{v, u\}$, temos que $R(v) = R(w) = R(u)$.

Propriedades mais interessantes surgem quando combinamos relações de acessibilidade (epistêmicas) com atribuições de probabilidade, e definimos restrições envolvendo ao mesmo tempo essas duas noções. Primeiro, definiremos *frames* com essa combinação.

Definição 4.3.7[37] Sejam os conjuntos não vazios W de mundos e A de agentes epistêmicos. Um *frame epistêmico de probabilidade* é uma upla $(W, R_1...R_n, PR_1...PR_n)$, onde cada R_i é uma relação de acessibilidade, e cada PR_i é uma atribuição de probabilidade para cada $w \in W$.

A seguir, apresentamos duas restrições interessantes para *frames* epistêmicos de probabilidade, que Halpern afirma corresponderem a suposições bastante comuns na literatura sobre economia.

Definição 4.3.8[38] Um *frame* epistêmico de probabilidade possui *probabilidade determinada por estado* (PDE) sse, para todos i, v e w, se $v \in R_i(w)$, então $PR_i(v) = PR_i(w)$.

[37] (Ibidem)
[38] (Ibidem)

Definição 4.3.9.[39] Um *frame* epistêmico de probabilidade possui *consistência* (CONS) sse, para todos i e w, se $PR_i(w) = (W_{w,i}, F_{w,i}, \mu_{w,i})$, então, $W_{w,i} \subseteq R_i(w)$.

Intuitivamente, a Definição 4.3.8 diz que para todos os mundos acessados por uma agente é atribuída uma mesma probabilidade. Assim sendo, os estados epistêmicos disponíveis à agente determinam as suas atribuições de probabilidade. A Definição 4.3.9 diz, por sua vez, que essa agente só atribui probabilidade aos mundos que considera possíveis.

Halpern (2003, 194) destaca que a junção de PDE e CONS acarreta UNIF.

Prova: suponha que para algum i, v e w, (i) $v \in R(w)$ e por isso, $PR_i(w)=PR_i(v)$, (ii) para $PR_i(w) = (W_{w,i}, F_{w,i}, \mu_{w,i})$, $W_{w,i} \subseteq R_i(w)$, e (iii) (i) e (ii) juntas não implicam em (iv). $PR_i(w)=PR_i$. Para isso, (v) $v \in W_{w,i}$, mas $PR_i(w) \neq PR_i(v)$. Mas (v) contraria (ii) e (i). Logo, (i) e (ii) implicam (iv).

Além disso, todas essas restrições são axiomatizáveis, como veremos no próximo capítulo.

[39] (Ibidem)

5 COMBINANDO LÓGICAS EPISTÊMICAS E PROBABILIDADE

5.1 Uma linguagem para a incerteza quantitativa

Nesta seção, detalharemos os aspectos sintáticos da linguagem simbólica para a lógica da probabilidade, e apresentaremos a axiomatização de Halpern para essalógica, considerando raciocínios sobre proposições que atribuem probabilidades específicas a eventos (ou seja, cada evento tem uma determinada probabilidade de ser o caso).[40]

5.1.1 Semântica

O raciocínio sobre probabilidade pode ser formalizado de maneira similar a como raciocínios sobre conhecimento são formalizados. Para se obter um modelo semântico de probabilidade, por exemplo, de maneira análoga a como se obtém um modelo epistêmico, acrescenta-se uma interpretação π a um *frame* de probabilidade (conjuntos de mundos e n atribuições de probabilidade).[41]

$$(W, Pr_1...Pr_{n,} \pi).$$

Denotaremos a classe de todos os modelos de probabilidade, mensuráveis e não mensuráveis, com M^{prob}_n. Desta classe mais geral, a subclasse de todos os modelos mensuráveis será denotada M_n^{men}. Modelos mensuráveis são os casos especiais de modelos em que todos os conjuntos de mundos são mensuráveis, ou seja, a álgebra sobre W coincide com o próprio W para todo w e agente i. Isto é o suficiente para a semântica.[42]

Quanto à sintaxe, Halpern (2003, 244) considera uma linguagem com termos[43] de *likelihood*[44] na forma $\ell_i(\varphi)$, onde φ é uma proposição, i uma agente e ℓ_i (na linguagem objeto) a *likelihood* que a agente i atribui a φ. $\ell_i(\varphi)$ denota, portanto, um número real e termos de *likelihood* poderão ser combinados em um somatório para formar combinações lineares de *likelihood*, como em $2\ell i(\varphi) + 3\ell i(\psi)$.

[40] Esse tópico é desenvolvido na seção 7.3 de Halpern (2003, 254 a 260).
[41] Ver seção 4.3 desta dissertação.
[42] Por conta do tempo disponível, nesta dissertação nos ocupamos apenas com a classe de modelos mensuráveis.
[43] Termos são usados para construir sentenças, ou seja, fórmulas. Assim sendo, o termo $\ell i(\varphi)$ não possui condições deverdade como a proposição $\ell i(\varphi) = 1$.
[44] Como ambas as expressões em inglês "*probability*" e "*likelihood*" se traduzem usualmente no português como "probabilidade", para evitar confusão entre a noção semântica e essa recém-introduzida noção sintática (usada naformação de termos e fórmulas), optei por manter a expressão no idioma original.

5.1.2 Sintaxe

Halpern (2003, 255) propõe uma linguagem $\mathcal{L}_n^Q(\Phi)$ de incerteza quantitativa para n agentes[45]. Essa notação para linguagem formal representa o fechamento do conjunto Φ pelas operações da linguagem – em nosso caso, negação e conjunção –. Como usual, Φ contém as fórmulas primitivas (atômicas) da linguagem proposicional usual[46], porém, enriquecido agora com fórmulas de *likelihood* para n agentes (ver logo abaixo). A linguagem $\mathcal{L}_n^Q(\Phi)$ é rica o suficiente para expressar muitas interessantes noções. Por simplicidade, omitiremos o conjunto Φ na notação para mencionar $\mathcal{L}_n^Q(\Phi)$. As novas fórmulas introduzidas, de *likelihood* lineares, obedecem a esta forma:

$$a_1 \ell_{i_1} (\varphi_1) + \ldots + a_n \ell_{i_k} (\varphi_k) \geq b$$

onde $a_1,\ldots, a_k$, b são números reais; $i_1,\ldots, i_k$ são agentes (que podem ser distintos ou não) e $\varphi_1,\ldots, \varphi_k$ são fórmulas (não necessariamente distintas). Nestas fórmulas é possível uma combinação linear que soma termos de *likelihood* da forma $\ell_i(\varphi)$ e afirma uma métrica para essa combinação.

Por exemplo, na fórmula de *likelihood*

$$2\ell_1 (p_1 \wedge p_2) + 7\ell_1(p_1 \vee \neg p_3) \geq 3$$

lemos que o resultado de somar o dobro da *likelihood* que a agente 1 atribui àproposição $p_1 \wedge p_2$ mais sete vezes a *likelihood* que a mesma agente 1 atribui à proposição $p_1 \vee \neg p_3$ é maior ou igual a três.

Uma vez que φ é qualquer fórmula da linguagem, é óbvio que podemos aninhar fórmulas de *likelihood* dentro de um termo de *likelihood*. Então, podemos tornar a fórmula $2\ell_1 (p_1 \wedge p_2) + 7\ell_1(p_1 \vee \neg p_3) \geq 3$ para formar um termo de *likelihood* na forma $\ell_i(\varphi)$. Por exemplo,

$$\ell_1(2\ell_1(p_1 \wedge p_2) + 7\ell_1(p_1 \vee \neg p_3) \geq 3)$$

---

[45] Halpern considera também uma linguagem mais geral que permite apenas a comparação relativa de *likelihood* sem anecessidade de especificar uma métrica para esses termos, e que faz sentido para todos os métodos de representação(2003, p. 263, seção 7.5). Devido à limitação de tempo, não abordaremos esta linguagem mais geral nesta dissertação.

[46] Ver seção 2.1 nesta dissertação.

E este termo de *likelihood*, por sua vez, pode integrar a seguinte fórmula de *likelihood*

$$\ell_1(2\ell_1 (p_1 \wedge p_2) + 7\ell_1(p_1 \vee \neg p_3) \geq 3) = 0,5$$

Halpern também dá exemplos de como algumas abreviações usuais para os sinais de desigualdade evidenciam a expressividade de $\int_n^Q$.

- $\ell_i (\varphi) - \ell_i (\psi) > b =_{def.} \ell_i (\varphi) + (-1)\, \ell_i (\psi) > b$,
- $\ell_i (\varphi) > \ell_i (\psi) =_{def.} \ell_i (\varphi) - \ell_i (\psi) > 0$,
- $\ell_i (\varphi) < \ell_i (\psi) =_{def.} \ell_i (\psi) - \ell_i (\varphi) > 0$,
- $\ell_i (\varphi) \leq b =_{def.} \neg (\ell_i (\varphi) > b)$,
- $\ell_i (\varphi) \geq b =_{def.} \ell_i (\varphi) \leq (-1)\, b$,
- $\ell_i (\varphi) = b =_{def.} (\ell_i (\varphi) \geq b) \wedge (\ell_i (\varphi) \leq b)$.

A expressividade de $\int_n^Q$ vai muito além de abarcar outras relações de desigualdade. Probabilidades condicionais simples[47] do tipo $\ell_i (\varphi \mid \psi) \geq 2/3$ também podem ser expressadas por $\int_n^Q$. Considerando que

$$\ell_i (\varphi \mid \psi) = \ell_i (\varphi \mid \psi) / \ell_i (\psi),$$

depois de eliminar o denominador, temos $3\ell_i (\varphi \wedge \psi) \geq 2\ell_i (\psi)$.

O valor esperado de uma variável aleatória também pode ser expresso em $\int_n^Q$, uma vez que os mundos em que a variável aleatória assume um determinado valor podem ser caracterizado por fórmulas. Suponha, por exemplo, que você ganhe 2 reais se uma moeda dá cara e perde 3 reais se der coroa. Então, seus ganhos esperados são representados formalmente pela expresão $2\ell_i(\text{cara}) - 3\ell_i(\text{coroa})$. Por exemplo, a fórmula $2\ell_i(\text{cara}) - 3\ell_i(\text{coroa}) \geq 1$ diz que os ganhos esperados são de pelo menos 1 real.

Embora $\int_n^Q$ seja uma linguagem muito expressiva, ela não consegue expressar algumas noções importantes. Um exemplo é a independência. Informalmente, (depois de expandir e eliminar os denominadores) o fato de φ ser independente de ψ segundo o agente i corresponde a fórmula $\ell_i (\varphi \wedge \psi) = \ell_i (\varphi) \times \ell_i (\psi)$. Na linguagem apresentada por

[47] Ver seção 3.1 desta dissertação.

Halpern (2003, 255), não é permitido multiplicação de termos de Likelihood linear. Assim, esta fórmula não está na linguagem. Para simplificar a axiomatização e as condições para determinar a validade das fórmulas, a escolha do Halpern é por uma linguagem um pouco menos expressiva.

Fórmulas em $\mathcal{L}_n^Q$ são simplesmente verdadeiras ou falsas em um mundo dentro de um modelo de probabilidade; dessa maneira, elas não obtêm valores de verdade probabilísticos (como *provavelmente verdadeiro*, *provavelmente falso*, etc). Halpern considera, portanto, uma lógica bivalente para raciocinar sobre probabilidade.

Para esta linguagem, dado um modelo de probabilidade mensurável $\boldsymbol{M}$, o termo de *likelihood* $\ell_i(\varphi)$ é interpretado como a *probabilidade* (segundo a agente i) do conjunto mensurável $[[\varphi]]_{\boldsymbol{M}}$.[48] Tal modelo tem a forma $\boldsymbol{M} = (W, PR_1 ... PR_n, \pi)$. A definição no caso de proposições primitivas, conjunções e negações são idênticas ao da lógica proposicional. Falta definir as condições de verdade para fórmulas de *likelihood* em um modelo de probabilidade.

$(\boldsymbol{M}, w) \vDash a_1\ell_{i1}(\varphi_1) + ... + a_n\ell_{ik}(\varphi_k) \geq b$ sse $a_1\mu_{w.i1}([[\varphi]]_{\boldsymbol{M}} \cap W_{w.i}) + ... + a_k\mu_{w.ik}([[\varphi_k]]_{\boldsymbol{M}} \cap W_{w.ik})) \geq b$, onde $PR_{ij}(w) = (W_{w.ij}, \mu_{w.ij})$.

A leitura intuitiva dessa cláusula semântica parece mais complexa do que de fato é. O problema é que precisamos de uma cláusula suficientemente geral para fórmulas de *likelihood* de qualquer comprimento.

Para facilitar a apreensão intuitiva, consideremos uma fórmula de *likelihood* bastante simples, a saber, $\ell_a(p_1) \geq 0,5$. Sua condição de verdade em um mundo w de um modelo M qualquer seria, portanto, determinada assim:

$(M, w) \vDash \ell_a(p_1) \geq 0,5$ sse $\mu_{w.a}([[p_1]]_{\boldsymbol{M}} \cap W_{w.a}) \geq 0,5$, onde $PR_a(w) = (W_{w.a}, \mu_{w.a})$.

Considere a atribuição de probabilidade PR_a da agente a (que determina um espaço de probabilidade para cada mundo do *frame*) contendo um conjunto $W_{w.a}$ de mundos e uma medida de probabilidade $\mu_{w.a}$ (ver Def. 3.3.1)[49]. Para determinar se

[48] Ou seja, do *conjunto-verdade* $[[\varphi]]_M$, definido como todos os $w \in W$ em M tais que φ é o caso (é verdadeiro).

[49] A rigor, o espaço de probabilidade é construído com uma álgebra F sobre $W_{w.a}$. Porém, considere a

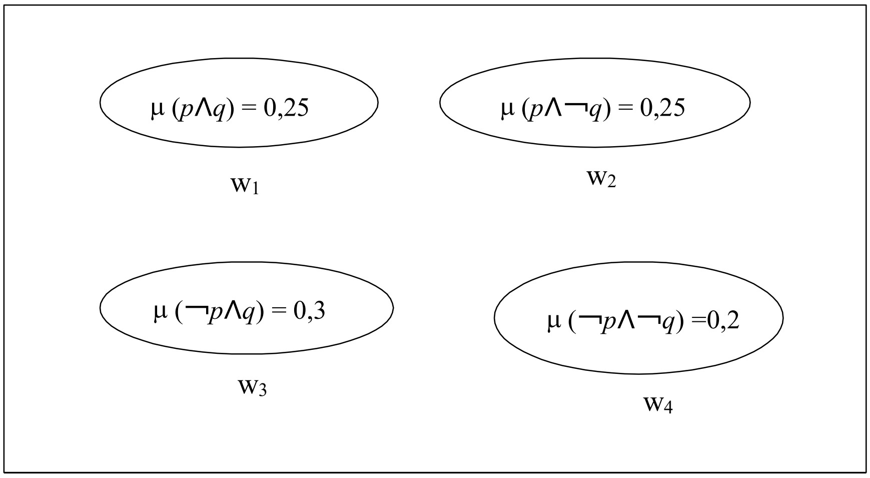
$\ell_a(p_1) \geq 0{,}5$ é verdadeira em w, precisamos verificar se a medida de probabilidade para o conjunto dos mundos em que p_1 é verdadeira, mas que *também estão contidos* no espaço de probabilidade que PR_a atribui a w, é maior ou igual a 0,5.

Essa consideração de mundos (a interseção entre o conjunto de mundos em que p_1 é verdadeira no modelo M e o conjunto de todos os mundos do espaço de probabilidade PR_a (w)) é essencial, porque, como se trata de uma fórmula de *likelihood* envolvendo a agente a, apenas podemos considerar os mundos em que p_1 é verdadeira dentre os mundos que estão no espaço de probabilidade "acessível" para a agente a (para usar um jargão da lógica epistêmica) e não todos os mundos em que p_1 é verdadeira no modelo inteiro.

Exemplo 5.1.2.1 (HALPERN, 2003, 257): Suponha que $M_1 = (W, 2^W, \mu, \pi)$ é um modelo de probabilidade simples (ou seja, contém apenas um PR), onde:

- $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$;
- $\mu(w_1) = \mu(w_2) = 0{,}25$, $\mu(w_3) = 0{,}3$, $\mu(w_4) = 0{,}2$;
- π tal que $(M_1,w_1) \models p \land q$, $(M_1,w_2) \models p \land \neg q$, $(M_1,w_3) \models \neg p \land q$, $(M_1,w_4) \models \neg p \land \neg q$.

Figura 11- um modelo de probabilidade quantitativa simples (exemplo 5.1.2.1)



Fonte: adaptado de Halpern (2003, p 257).

---

convenção paraquando o domínio de F coincidir com $2^{Ww.a}$ (ver p. 52).

Tendo em vista isto, uma fórmula $p \wedge q \wedge (\ell_1(\neg p \wedge q) > \ell_1(p \wedge q))$, por exemplo, é satisfeita no mundo w_1 do modelo M_1, ou seja,

$$(M_1, w_1) \vDash p \wedge q \wedge (\ell_1(\neg p \wedge q) > \ell_1(p \wedge q))$$

Aqui, mesmo $p \wedge q$ sendo verdadeiro em w_1, a agente considera mais provável $(\neg p \wedge q)$ do que $(p \wedge q)$.

Tendo em vista o modelo inteiro, temos também que vale em todos os mundos a seguinte fórmula de *likelihood*:

$$M_1 \vDash \ell_1(q/\neg p) = 0{,}6$$

Ou seja, aplicando a convenção anterior para probabilidade condicional[50], se desabrevia como:

$$M_1 \vDash \ell_1(\neg p \wedge q) - 6\ell_1(\neg p) = 0$$

5.2 Axiomatização para raciocínios sobre probabilidade quantitativa

A axiomatização para incerteza quantitativa proposta por Halpern (2003, 258), denominada AX_n^{prob}, divide-se em três partes que versam, respectivamente, sobre raciocínio proposicional, raciocínios sobre probabilidade e raciocínios sobre inequações lineares. Tal axiomática consiste nos seguintes axiomas e regras de inferência, válidos para um conjunto com n agentes (ou seja, i = 1,..., n).

Raciocínio proposicional:

(Prop) Todas as instâncias de substituição de tautologias da lógica proposicional.(MP) De ϕ e $\phi \Rightarrow \psi$, inferimos ψ (*Modus Ponens*).

Uma observação merece ser considerada. Uma vez que a linguagem é diferente da proposicional, (Prop) representará um grupo distinto de axiomas além daquele da lógica

---

[50] Ver p. 61.

proposicional clássica. Por exemplo, $\neg(\ell_1(p) > 0 \wedge \neg(\ell_1(p) > 0))$ é uma instância de (Prop) em AX_n^{prob} obtida pela substituição de fórmulas na linguagem $\mathcal{L}_n^Q$ por uma tautologia proposicional $\neg (\phi \wedge \neg \phi)$; ou seja, não acontece da agente 1 atribuir uma probabilidade maior que zero a p e não atribuir uma probabilidade maior que zero a p.

Raciocínios sobre probabilidade quantitativa:

(Q1) $\ell_i (\varphi) \geq 0$

(Q2) $\ell_i (\top) = 1$[51]

(Q3) $\ell_i (\varphi \wedge \psi) + \ell_i (\varphi \wedge \neg \psi) = \ell_i (\varphi)$

(QGen) para $\varphi \Leftrightarrow \psi$, então $\ell_i (\varphi) = \ell_i (\psi)$

Os esquemas (Q1), (Q2) e (Q3) correspondem, respectivamente, às propriedades da probabilidade, que também aparecem nos axiomas de probabilidade de Kolmogorov[52]. (Q1) diz que as atribuições de probabilidade não podem ser negativas. Em (Q2), a probabilidade atribuída às tautologias tem que ser 1. A propriedade (Q3) é uma formulação alternativa para a aditividade finita. Na regra de Generalização, se φ e ψ são logicamente equivalentes, então possuem a mesma atribuição de probabilidade.

Para o próximo (e último) esquema de axioma de AX_n^{prob} fazer sentido, precisamos introduzir algumas definições (HALPERN, 2003, 259). Suponha um conjunto X infinito (enumerável) de variáveis $x_1, x_2, x_3,...$

Definição 5.2.1 (termo de inequação linear): Um termo de inequação (linear) sobre X tem a forma $a_i x_i +...+ a_k x_k$, onde $a_i,..., a_k$ são números reais, $x_i,..., x_k$ são variáveis em X, e $k \geq 1$.

Definição 5.2.2 (fórmula de inequação linear básica): Uma fórmula de inequação (linear) básica é uma fórmula $t \geq b$, onde *t* é um termo de inequação linear e b é um número real.

Definição 5.2.3 (fórmula de inequação linear): Uma fórmula de inequação (linear) é

[51] A constante proposicional $\top$, como de praxe, sempre recebe o valor 1 (verdadeiro). Caso ela não esteja incluída como símbolo primitivo, pode ser introduzida por definição a partir de alguma tautologia.
[52] Ver p. 31.

uma combinação booleana de fórmulas de inequação básicas.

Definição 5.2.4 (atribuição para variáveis em X): Uma atribuição A para as variáveis em X é uma função que atribui um número real para cada variável.

Seguem alguns exemplos simples para ilustrar as definições:

- Exemplo de termo de inequação linear: $0{,}25.x_3 + 0{,}5.x_2$
- Exemplo de fórmula de inequação linear (básica): $0{,}25.x_3 + 0{,}5.x_2 \geq 0{,}25$
- Exemplo de fórmula de inequação linear (booleana): $\neg\ (0{,}25.x_3 + 0{,}5.x_2 \geq 0{,}25)$
- Exemplo de uma atribuição A‘ para X: $A(x_1) = 0{,}1$; $A(x_2) = 0{,}5$; $A(x_3) = 0{,}5$; ...

Considerando a atribuição A‘ acima, é fácil ver que temos como consequência:

- $0{,}25.x_3 + 0{,}5.x_2 \geq 0{,}25$ é uma fórmula verdadeira
- $\neg\ (0{,}25.x_3 + 0{,}5.x_2 \geq 0{,}25)$ é uma fórmula falsa.

Considerando que fórmulas de inequação linear são combinações booleanas de fórmulas de inequação, podemos considerar também as combinações que são fórmulas *válidas*.

- Exemplo de fórmula de inequação válida:

$(\alpha_1 x_1 \geq b) \wedge (\alpha_1' x_1 \geq b') \Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_1')\, x_1 \geq (b + b')$.

Com isso, finalmente, podemos enunciar o último esquema de axioma para AX_n^{prob}:

Raciocínios sobre inequações lineares:

(Ineq) Todas as instâncias de substituição de fórmulas de inequações lineares válidas.

Para obter uma instância de (Ineq), basta substituir cada variável x_j que ocorre em uma fórmula de inequação linear válida por um termo de *likelihood* $\ell_{ij}(\varphi_j)$. Aproveitando o último exemplo de fórmula de inequação válida, e substituindo a variável x_1 pelo termo de *likelihood* $\ell_1(p_1)$, temos que a fórmula abaixo é uma instância de (Ineq) – em particular, uma instância da fórmula de inequação válida fornecida acima:

- $(0{,}25.\ell_1(p_1) \geq 0{,}5) \wedge (0{,}5.\ell_1(p_1) \geq 0{,}75) \Rightarrow (0{,}25 + 0{,}5)\ \ell_1(p_1) \geq (0{,}5 + 0{,}75)$.

Figura 12- O sistema axiomático AX_n^{prob}

AXIOMAS PROPOSICIONAIS	
(Prop)	*Todas as instâncias de tautologias clássicas.*
(MP)	*De ϕ e $\phi \Rightarrow \psi$, inferimos ψ*
AXIOMAS PARA A PROBABILIDADE QUANTITATIVA	
(Q1)	$\ell_i(\varphi) \geq 0 \ell_i(\top) = 1$
(Q2)	$\ell_i(\varphi \wedge \psi) + \ell_i(\varphi \wedge \neg \psi) = \ell_i(\varphi)$
(Q3)	de $\varphi \Leftrightarrow \psi$, então $\ell_i(\varphi) = \ell_i(\psi)$
(QGen)	
AXIOMA PARA INEQUAÇÕES LINEARES	
(Ineq)	*Todas as instâncias de de fórmulas de inequações lineares válidas.*

Fonte: elaboração própria (a partir dos axiomas fornecidas por Halpern).

5.3 Raciocínios sobre conhecimento e probabilidade

O sistema multimodal proposto por Halpern (2003, 268) combina dois tipos de modalidade, a saber, conhecimento e probabilidade. Usaremos uma linguagem, chamada de $ʆ_n^{KQ}$ (ou seja: *linguagem epistêmica de incerteza quantitativa para n agentes*), na qual encontramos combinadas a linguagem de incerteza quantitativa ($ʆ_n^{Q}$) e a linguagem epistêmica usual ($ʆ_n^{K}$), ambas considerando, é claro, o mesmo conjunto deagentes.

Como $\mathcal{L}_n^{KQ}$ apenas combina as respectivas regras de formação, em vez de repetir todas as regras sintáticas, iremos logo para alguns exemplos de fórmulas.

$$K_1 (\ell_2 (\varphi) = 1/3)$$

Leia-se: a agente 1 sabe que a agente 2 atribui probabilidade de 1/3 para φ.

$$K_1 (\ell_1 (\varphi) = 1/2 \vee \ell_1 (\varphi) = 2/3) \wedge \neg K_1 (\ell_1 (\varphi) = ½) \wedge \neg K_1 (\ell_1 (\varphi) = 2/3)$$

Leia-se: a agente 1 sabe que ou atribui ½ ou atribui 2/3 a φ, mas a mesma agente não sabe qual probabilidade atribui. Ou seja, na medida em que a agente não sabe que atribui ½ a φ e também não sabe que atribui 2/3 a φ, ela tem incerteza sobre sua própria atribuição de probabilidade.

A semântica da linguagem de incerteza epistêmica quantitativa ($\mathcal{L}_n^{KQ}$) pode ser fornecida usando modelos de probabilidade epistêmica formados ao se adicionar uma interpretação a um frame de probabilidade epistêmica (ver **Def. 3.3.7**)[53]. A classe de todos os modelos de probabilidade epistêmica para n agentes é $M_n^{K,prob}$, e $M_n^{K,men}$ consiste em todos os modelos de probabilidade epistêmica para n agentes, onde todos os conjuntos são mensuráveis.

O sistema $AX_n^{K,prop}$ consiste dos axiomas e regras de inferências (com n agentes) do sistema $S5_n$ para conhecimento[54], junto com os axiomas e regras de inferência de AX_n^{prob} para incerteza quantitativa[55]. Por comodidade, reunimos todos na Figura 13.

Figura 13- O sistema axiomático $AX_n^{K,prob}$

AXIOMAS PROPOSICIONAIS	
(Prop)	*Todas as instâncias de tautologias clássicas.*
(MP)	*De ϕ e $\phi \Rightarrow \psi$, inferimos ψ*

[53] Na p. 57.
[54] Ver seção 2.3, p. 26.
[55] Ver Figura 12 na página anterior.

AXIOMAS EPISTÊMICOS ($S5_n$)	
(K)	$K_i \phi \wedge K_i (\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow K_i \psi$
(T)	$K_i \phi \Rightarrow \phi$
(5)	$\neg K_i \phi \Rightarrow K_i \neg K_i \phi$
(RN)	*De* ϕ*, inferimos* $K_i \phi$
AXIOMAS PARA A PROBABILIDADE QUANTITATIVA	
(Q1)	$\ell_i (\varphi) \geq 0$
(Q2)	$\ell_i (T) = 1$
(Q3)	$\ell_i (\varphi \wedge \psi) + \ell_i (\varphi \wedge \neg \psi) = \ell_i (\varphi)$
(QGen)	de $\varphi \Leftrightarrow \psi$, então $\ell_i (\varphi) = \ell_i (\psi)$
AXIOMA PARA INEQUAÇÕES LINEARES	
(Ineq)	*Todas as instâncias de de fórmulas de inequações lineares válidas.*

Fonte: elaboração própria (a partir dos axiomas fornecidas por Halpern).

Halpern (2003, 259) enuncia o importante teorema abaixo, mas não fornece arespectiva demonstração, por fugir ao escopo do livro.

Teorema 5.3.1. $AX_n^{K,prop}$ é uma axiomatização correta e completa com respeito a $M_n^{K,men}$ para a linguagem $\int_n^{KQ}$.

Antes de fornecer mais sistemas axiomáticos combinando operadores epistêmicos e de probabilidade, precisamos introduzir mais uma definição.

Definição 5.3.1 (fórmula de *likelihood-i*): Uma fórmula de *likelihood-i* é qualquer fórmula de *likelihood* com a forma $\alpha_1\ell_i (\varphi_1) + ... + \alpha_n\ell_i (\varphi_k) \geq b$ – ou seja, cujos termos de *likelihood* mais externos apenas consistam no mesmo termo ℓ_i.

- Exemplos de fórmula de fórmula de *likelihood-i*

$$\ell_2 (p_1) + 0{,}5\ell_2 (p_2) \geq 0{,}75\ell_2 (\ell_3 (p_2) \geq 0{,}75) \geq 0{,}5$$

A seguir, como fizemos na seção 2.3 com os axiomas epistêmicos, incluímos abaixo os esquemas de axiomas que captam adequadamente propriedades que incidem sobre probabilidade e conhecimento, como é o caso de CONS e SDP, e sobre probabilidade, como é o caso da UNIF:[56]

(KP1) $K_i\varphi \Rightarrow(\ell_i(\varphi) = 1)$.

(KP2) $\varphi \Rightarrow K_i\varphi$ se φ for uma fórmula de *likelihood-i*.

(KP3) $\varphi \Rightarrow (\ell_i (\varphi) = 1)$ se φ é uma fórmula de *likelihood-i* ou a negação de uma fórmula de *likelihood-i*.

De acordo com (KP1), se a agente i sabe φ, então ela atribui probabilidade 1 a φ (ou seja, ela tem certeza de que φ é o caso). Tal esquema de axioma captura a propriedade de CONS e essencialmente diz, segundo Halpern (2003, 259), que o conjunto de mundos que a agente i considera possível tem probabilidade 1. Segundo (KP2), φ ser o caso implica que a agente i saber que φ, se φ for uma fórmula de *likelihood-i*.

Uma vez que de acordo com PDE as agentes conhecem seu próprio espaço de probabilidade, isto implica que em um dado mundo a agente conhece todas as fórmulas de *likelihood-i* verdadeiras deste mundo. Assim, tal propriedade é capturada por (KP2). Em (KP3), que captura UNIF, se φ é o caso, então a agente i atribuiprobabilidade 1 a φ, se φ for uma fórmula de *likelihood-i* ou a negação for uma fórmula de *likelihood-i*. (KP1) e (KP2) implicam em (KP3), assim como CONS e SDP juntasimplicam em UNIF. Halpern enuncia outro importante teorema, omitindo a demonstração no livro.

Teorema 5.3.2 Sendo $\mathcal{A}$ um subconjunto de {CONS, PDE, UNIF} e $\mathcal{A}$ um subconjunto de {(KP1), (KP2), (KP3)}, $AX_n^{K,prop} \cup \mathcal{A}$ é uma axiomatização correta e completa para a linguagem $\mathcal{L}_n^{KQ}$, considerando $M_n^{K,men}$ satisfazendo $\mathcal{A}$. (HALPERN, 2003, 259)

[56] Ver seção 4.3 sobre propriedades dos *frames* de probabilidade epistêmica.

Em outras palavras, temos aqui uma correspondência entre distintos sistemas axiomáticos e as respectivas classes de modelos epistêmicos de probabilidade quantitativa.

Figura 14- Correspondência entre sistemas e classes de modelos

SISTEMA DE AXIOMAS	***CLASSE DE MODELOS***
$AX_n^{K,prop}$	M_n^{men}
$AX_n^{K,prop} \cup \{(KP1)\}$	M_n^{men} que satisfazem CONS
$AX_n^{K,prop} \cup \{(KP2)\}$	M_n^{men} que satisfazem PDE
$AX_n^{K,prop} \cup \{(KP3)\}$	M_n^{men} que satisfazem UNIF
$AX_n^{K,prop} \cup \{(KP1), (KP2)\}$	M_n^{men} que satisfazem CONS, PDE e UNIF

Fonte: elaboração própria (a partir dos axiomas fornecidos por Halpern).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo em vista o livro do Halpern *Reasoning about uncertainty,* nesta dissertação mostramos como recursos da lógica epistêmica podem ser combinados com recursos da lógica da probabilidade para representar raciocínios que envolvem incerteza epistêmica. Embora existam várias formas de representar a incerteza (funções de crença *Dempster-Shafer*, medidas de possibilidade e funções de ranqueamento), lógica epistêmica e probabilidade são maneiras *standard* derepresentar tais raciocínios.

A lógica epistêmica (usual) possui como axiomas todas as fórmulas válidas da lógica clássica, a regra de inferência *modus ponens*, a regra de necessitação epistêmicae os axiomas **K** – nos casos em que R_i é arbitrária, **T** (veridicalidade) - nos casos em que R_i é reflexivo, **4** (introspecção positiva) – nos casos em que R_i é transitiva, e **5** (introspecção negativa) - nos casos em que R_i é euclidiana. Todos estes axiomas estão em *S5*.

Aqui, R_i é um conjunto de pares ordenados de mundos em W indexados por agente i (intuitivamente, uma relação de acessibilidade entre mundos, na perspectiva dessa agente), onde, para quaisquer w‘ e w” ∈ W, w‘R_iw” significa dizer que w‘ acessa w” na perspectiva da agente i. Estas relações de acessibilidade epistêmicas têm algumas restrições, e três restrições fundamentais para a constituição de uma linguagem de incerteza quantitativa: considerando M^1, este modelo é reflexivo sse, para toda R_i e para todo w ∈ W, (w, w) ∈ R_i (ouseja, cada mundo, cada agente i sempre acessa o próprio mundo); um modelo é serial quando para todas as R_i e todo w existe pelo menos um w‘ ∈ W, tal que (w, w‘) ∈ R_i; Um modelo é simétrico sse, para toda R_i e todo w e todo w‘ ∈ W, temos que (w, w‘) ∈ R_i → (w‘, w) ∈ R_i; Quando, em um modelo, para todaR_i e quaisquer w, w‘ e w” ∈ W, temos que (w, w‘) ∈ R_i ∧ (w‘, w”) ∈ R_i → (w, w”) ∈ R_i, dizemos que o modelo é transitivo; Um modelo é euclidiano sse para toda R_i e para quaisquer w, w‘ e w‘‘ ∈ W, (w, w‘) ∈ R_i ∧ (w,w”) ∈ R_i → (w‘, w”) ∈ R_i.

Por outro lado, a linguagem de probabilidade é uma das mais desenvolvidas e usadas para representar incerteza de estado. Para tanto, usa-se uma *álgebra sobre W* (conjuntos mensuráveis)*,* um *espaço de probabilidade* e uma atribuição de probabilidade.

Aqui, similar aos *frames* epistêmicos, *frames* de probabilidade são constituídos por um conjunto de mundos e por n atribuições de probabilidade, asaber, $\mathcal{F}$ = (W, PR_i,

..., PR_n). Uma *atribuição de probabilidade* PR, que possui restrições como UNIF, CONS e PDE, e que associa a cada $w \in W$ um espaço de probabilidade; ou seja, PR(w) = (W_W, F_W, μ_W).

Um *frame* de probabilidade é *uniforme* (UNIF) quando todas suas PR_i são, para qualquer que seja $w \in W$, iguais, ou seja, para todo i, v e w. se $PR_i(w) = (W_{w,i}, F_{w,i}, \mu_{w,i})$ e $v \in W_{w,i}$, então $PR_i(v) = PR_i(w)$. Quando propriedades epistêmicas são combinadas com probabilida temos um *frame* epistêmico de probabilidade, e sobre este *frame* incide *probabilidade determinada por estado* (PDE) sse, para todos i, v e w, se $v \in R_i(w)$, então $PR_i(v) = PR_i(w)$, e *consistência* (CONS) sse , para todos i e w, se $PR_i(w) = (W_{w,i}, F_{w,i}, \mu_{w,i})$, então, $W_{w,i} \subseteq R_i(w)$.

Embora não exista desacordos incontornáveis acerca da aplicação matemática da probabilidade, há muitas disputas em torno da interpretação acerca da sua natureza. Contudo, a interpretação de probabilidade considerada na linguagem apresentada por Halpern é a probabilidade epistêmica. Probabilidades epistêmicas, grosso modo, determinam o quanto uma hipótese é suportada ou apoiada por um conjunto de evidências. Dito de outro modo, considerando que H simboliza uma determinada hipótese e E representa um conjunto de evidências, Pr(H|E) expressa o grau de probabilidade epistêmica de H condicional dado que E é verdadeira.

Mas mesmo considerando apenas probabilidades epistêmicas, há três concepções influentes e distintas para o que sejam probabilidades epistêmicas: a interpretação subjetiva de probabilidade (bayesianismo subjetivo), onde probabilidades epistêmicas são graus de crença de agentes racionais; a visão onde probabilidades epistêmicas são determinadas por probabilidades lógicas (bayesianismo objetivo); e a tese segundo qual probabilidade epistêmica é uma noçãobásica.

Timothy Williamson (2000) propõe uma noção de probabilidade epistêmica construída a partir de uma relação justificatória objetiva entre evidências e hipóteses, que ele chamou de "probabilidade evidencial". Tal noção não depende de probabilidades lógicas nem é redutível a graus racionais de crença. Ela não precisa ser definida em termos de algo mais básico ou fundamental, ao mesmo tempo em que garante certa objetividade (uma resposta correta e definitiva acerca do quanto um conjunto de evidências probabiliza uma hipótese).

Considerando que Halpern não esclarece qual interpretação de probabilidade epistêmica subjaz a sua sistematização, mas tendo em vista que na introdução do

Reasoning about uncertainty, ao ilustrar problemas paradigmáticos envolvendo incertezas[57], ele descreve incertezas de estado, acreditamos que a concepção de probabilidade evidencial proposta por Williamson é adequada aos propósitos de Halpern.

Uma vez que as crenças podem estar ancoradas em evidências, e estas, por sua vez, estão ligadas aos graus de incerteza das agentes. Quanto maior o número de evidências e mais contundentes e completas elas forem, menor será o grau de incerteza.

A linguagem epistêmica de incerteza quantitativa proposta por Halpern é muito expressiva. Ela nos permite captar não só as atribuições de probabilidade, mas também os raciocínios envolvendo os conhecimentos das agentes acerca destas atribuições. Assim, ela cria uma hierarquia entre proposições – o que nos permite representar as preferências das agentes, ao mesmo tempo em que permite representar os raciocínios sobre estas preferências.

Mas considerando apenas a linguagem de incerteza quantitativa, já é possível dar conta de muitas sutilezas na determinação das incertezas apresentadas por Bradley e Drechsler. Nesta linguagem, a atribuição de probabilidade é uma função que conecta cada mundo de um conjunto de mundos a um espaço de probabilidade – que é constituido por um conjunto de mundo, uma álgebra e uma medidade de probabilidade que liga cada unitário da álgebra a um intervalo fechado entre 0 e 1. Este número diz quanta probabilidade uma proposição tem em cada mundo do espaçode probabilidade.

E esta probabilidade, por sua vez, aponta para a relação justificatória entre descrições acerca do que é o caso e as evidências disso. A *incerteza de estado,* chamada também de *incerteza empírica*, surge em conexão com esse tipo de julgamentos descritivos. Neste caso, mesmo que uma agente possa construir um espaço de estados e consequências, ou seja, acesse todos os estados e consequências possíveis, ela ainda pode estar incerta sobre qual é o estado atual do mundo.

Por reprensentar probabilidades não mensuráveis, considerando apenas a linguagem de probabilidade do Halpern, sem a lógica epistêmica, tal linguagemparece interessante.

[57] Estes problemas estão descritos na introdução e analisados na seção 3.3. desta dissertação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, C. *História da Matemática*. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher,1974.

BRADLEY, Richard and DRECHSLER, Mareile. *Types of Uncertainty.* Source: Erkenntnis (1975-), December 2014, Vol. 79, No. 6, The First Six Articles Belong to the Special Issue: RADICAL UNCERTAINTY (December 2014), pp. 1225-1248 Published by: Springer Stable URL: https://www.jstor.org/stable/24013291.DEMEY, Lorenz, Barteld Kooi, and Joshua Sack. *Logic and Probability. The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/sum2019/entries/logic-probability/>.

CARNAP, R. *Logical Foundations of Probability.* 2nd ed. Chicago: The University of Chicago Press, 1962.

HAACK, S. *Filosofia das lógicas*. São Paulo: Editora UNESP, 2002.

HÁJEK, Alan. *Interpretations of Probability*. *The Stanford Encyclopedia ofPhilosophy* (Fall 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2019/entries/probability-interpret/>.

HALPERN, Joseph. *Reasoning about uncertainty*. Massachussetts Institute of Technology,2003.

HANSSON, Sven Ove, "Risk", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter2022 Edition), Edward N. Zalta & Uri Nodelman (eds.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2022/entries/risk/>.KELLY, Thomas. *Evidência.* Tradução: L. H. Marques Segundo. *Textos* selecionados de epistemologia. [recurso eletrônico] Organizador: Luiz Helvécio Marques Segundo – Pelotas: NEPFIL Online, 2021. 487p. - (Série Investigação Filosófica).

HAUWE, Ludwig van den. *John Maynard Keynes e Ludwig von Mises sobre Probabilidade*.MISES: Interdisciplinary Journal of Philosophy Law and Economics,vol. 6, núm. 2, 12, 2018.

HINTIKKA, Jaakko. *Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions.*
Ithaca, New York: Cornell University Press, 1962.

KEYNES, J. M. (1921). *A Treatise on Probability*. Reimpresso em MOGGRIDGE, D. org. TheCollected Writings of John Maynard Keynes (CW) VIII, London: Macmillan,1973.

KOLMOGOROV, Andrey Nikolaevich. *Foundations of the Theory of Probability*, ChelseaPublishing Company, 1956.

KRIPKE, S., 1963. *Semantical Considerations on Modal Logic*. Acta Philosophica Fennica,Volume 13, pp. 83-94.

MORTARI, Cezar. *Lógicas Epistêmicas.* Nos limites da epistemologia analítica / Luiz Henrique Dutra. Org. – Florianópolis: NEL/UFSC. 1999. 17 – 68 p.

NEIVA, André. *Probabilidade Epistêmica*. Compendio de Epistemologia [recurso eletronico] / Rogel Esteves de Oliveira; Katia Martins Etcheverry; Tiegue Vieira Rodrigues; Carlos Augusto Sartori (Orgs.) -- Porto Alegre, RS: Editora Fi, 2022.

SAVAGE, L. J. (1954). *The foundations of statistics*. New York: wileg.

SILVA, Rogério J. de R. *Aspectos introdutórios das lógicas de conhecimento e crença*. Monografia (Especialização em Filosofia) - Universidade Federal do Maranhão. —São Luís,2015. Axiomatizações para lógicas epistêmicas.