PPGMAT - UFMA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

Programa de Pós-Graduação em Matemática

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Adriano Santos Ribeiro

Estados de equilíbrio para transformações expansoras

São Luís - MA

2023

Adriano Santos Ribeiro

Estados de equilíbrio para transformações expansoras

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Dr. Ermerson Rocha Araujo**.

São Luís - MA

2023

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Ribeiro, Adriano Santos.
Estados de equilíbrio para transformações expansoras / Adriano Santos Ribeiro. - 2023.
64 f.

Orientador(a): Ermerson Rocha Araujo.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luis, 2023.

1. Estados de equilíbrio. 2. Operador de transferência. 3. Transformações expansoras. I. Araujo, Ermerson Rocha. II. Título.

Adriano Santos Ribeiro

Estados de equilíbrio para transformações expansoras

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Dr. Ermerson Rocha Araujo**.

Dissertação aprovada em 28/03/2023, pela **BANCA EXAMINADORA**:

(ORIENTADOR) Prof. Dr. Ermerson Rocha Araujo (UFMA)

Prof. Dr. José Santana Campos Costa (UFMA)

Prof. Dr. Alex Mauricio Zamudio Espinosa (UFF)

A Deus.

À minha querida mãe Floriza Ribeiro (in memoriam) por todo amor e cuidado.

AGRADECIMENTOS

A Deus por minha vida, por ter me dado a coragem e oportunidade de vivenciar e finalizar mais essa etapa, mesmo diante de problemas externos aos estudos.

Aos meus pais, Luis Carlos e Floriza Ribeiro, pelo incentivo e investimento em minha educação. E apesar de minha mãe não se fazer mais presente, imagino que estaria orgulhosa, uma vez que acreditou na trajetória muito mais que eu. Lembrar disso me fez juntar as forças necessárias pra finalizar esse ciclo. Aos demais familiares, também fica o meu agradecimento, em especial à minha irmã Beatriz e meus avós paternos Godofredo e Maria Ribeiro. Sou grato à minha namorada Raissa CasLob por estar presente antes mesmo do inicio dessa fase e me ajudar durante esse momento.

Ao professor Ermerson Araujo por sua orientação, conversas, prontidão e paciência durante todo o processo desde o curso de Medida e Integração. Minha gratidão.

A todos os professores do PPGMAT que, direta ou indiretamente, contribuíram durante os meses que estive no mestrado. Em especial a professora Vanessa Ramos e os professores Ivaldo Paz, Giovane Ferreira e Marão. Minha gratidão também aos que tive contato apenas durante a gradução, como o professor João de Deus Silva, meu orientador naquela oportunidade, e Anselmo Barganha.

Aos professores José Santana e Alex Zamudio pelas sugestões que ajudaram a melhorar o texto e por aceitarem o convite para participar da banca de defesa dessa dissertação.

Aos meus líderes ministeriais Adalberto e Vânia Coelho, pela motivação e orações.

Aos meus colegas que me acompanham desde a graduação, Gabriel, Ranney e o mestre Denilson, aos que encontrei nessa fase de mestrado, Elyton Ferreira, Gabriel Araújo (contador de história) e Gustavo Marques.

Por fim, à CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho estudamos o problema da existência e unicidade de estados de equilíbrio. Mais especificamente, mostramos que toda transformação expansora topologicamente exata admite um único estado de equilíbrio referente a um potencial Hölder contínuo.

Palavras-chave: Estados de equilíbrio; Operador de transferência e Transformações expansoras.

ABSTRACT

In this work we study the problem of the existence and uniqueness of equilibrium states. More specifically, we show that every topologically exact expanding map admits a unique equilibrium state with respect to a Hölder continuous potential.

Keywords: Equilibrium states; Transfer operator and Expanding maps.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Teoria Ergódica é a parte da pesquisa em matemática que visa analisar o comportamento dos sistemas dinâmicos em relação a medidas que permanecem invariantes conforme a ação da dinâmica. No decorrer dos estudos de sistemas dinâmicos foram introduzidos vários conceitos da Física, dentre eles tem-se a teoria dos estados de equilíbrios, que é um estudo desenvolvido, principalmente, por Sinai, Rulle e Bowen nas décadas de 70 e 80 por meio de aplicações de ferramentas e resultados da Mecânica Estatística.

Quando consideramos uma transformação contínua $f\colon M \to M$ sobre um espaço métrico compacto, o conjunto $\mathcal{M}_1(f)$ representa o espaço das probabilidades invariantes por f, Walters (1975) apresentou o seguinte resultado (Teorema 1.3.2),

$$P(\phi, f) = \sup \left\{ h_\nu(f) + \int \phi d\nu \colon \nu \in \mathcal{M}_1(f) \right\},$$

onde $h_\nu(f)$ representa a entropia de f em relação a medida ν e $P(\phi, f)$ é chamada pressão do potencial $\phi\colon M \to \mathbb{R}$ relativamente a f. A partir disso, o questionamento é se, para toda função f e potencial ϕ, sempre existe alguma medida de probabilidade que atinge o supremo na expressão acima. Caso essa medida exista, ela será denominada estado de equilíbrio. Gurevič (1969) e Walters (2000) mostraram exemplos no qual o supremo não é atingido (veja também Exemplo 1.3.9). Por outro lado, Bowen (2008) demonstrou que se $f\colon M \to M$ difeomorfismo Axioma A e Ω_s um conjunto básico, então para todo potencial $\varphi\colon \Omega_s \to \mathbb{R}$ Hölder contínuo existe um único estado de equilíbrio μ_φ com respeito a $f \restriction_{\Omega_s}$. Além disso, μ_φ é ergódica.

Os aspectos que temos interesse é a respeito dos estudos de David Ruelle sobre resultados de estados de equilíbrio para o caso das classe de transformações expansoras topologicamente exatas em espaços métricos compactos. Ele assumiu o potencial como Hölder e fez uso das percepções sobre o operador de Ruelle-Perron-Frobenius para garantir a unicidade de estados de equilíbrio para transformações expansoras e potenciais Hölder contínuos. Esse resultado ficou conhecido como *Teorema de Ruelle* e sua apresentação é o objetivo principal desse trabalho. No que segue daremos uma breve exposição do que será tratado em cada capítulo do trabalho.

No Capítulo 1 comentaremos alguns resultados de Teoria Ergódica que serão utilizados ao longo do trabalho. Este capítulo começa apresentando a ergodicidade de um sistema e o Teorema Ergódico de Birkhoff. Trataremos também o conceito de entropia, tanto de uma partição quanto em um sistema dinâmico, que é um dos assuntos mais importantes da Teoria Ergódica. Abordaremos ainda sobre Princípio Variacional, que faz a junção entre as duas noções de entropia: métrica e topológica. Finalizaremos com a definição de jacobianos, exibindo a fórmula de Rokhlin e apresentando a classe de transformações expansoras.

O Capítulo 2 apresenta o caso em que há existência e unicidade de estados de equilíbrio para a classe das transformações expansoras topologicamente exatas e todo potencial Hölder por meio do *Teorema de Ruelle*. Demonstraremos esse teorema começando por mostrar que existe uma probabilidade ν que satisfaz $\mathcal{L}^*\nu = \lambda\nu$. Mostraremos também que existe um jacobiano de f com respeito a ν e que essa automedida é um estado de Gibbs para f. Prosseguindo, mostraremos que $\mathcal{L}$ admite uma autofunção h associada ao autovalor λ. Com a automedida ν de $\mathcal{L}^*$ e a auto função h, veremos que $\mu = h\lambda$ é um estado de equilíbrio para φ. Além disso, nos certificaremos de que $\mu = h\lambda$ é o único estado de equilíbrio para o potencial φ a partir do fato de que todos os estados de equilíbrios para esta dinâmica são equivalentes e que se existem duas medidas equivalentes, onde uma é ergódica e a outra é invariante, então elas são iguais. Por fim, comprovaremos que (f, μ) é um sistema exato.

No Capítulo 3 apresentaremos uma aplicação do Teorema de Ruelle para medidas absolutamente contínuas. Dada uma transformação expansora $f\colon M \to M$ em uma variedade compacta conexa com o jacobiano $\det Df(x)$ Hölder para todo $x \in M$, então f admite uma probabilidade invariante μ que é ergódica, absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue m e, pelo Teorema de Ruelle, é o único estado de equilíbrio para o potencial $\phi = -\log|\det Df|$.

Capítulo 1
PRELIMINARES EM TEORIA ERGÓDICA

Neste capítulo discutiremos os principais conceitos e resultados que serão usados na demonstração do teorema principal dessa dissertação. Para mais detalhes veja (OLIVEIRA; VIANA, 2019).

1.1 Ergodicidade

A ergodicidade corresponde à ideia de que, dado um sistema, a dinâmica desse sistema é indivisível no sentido de que qualquer conjunto invariante vai ter medida nula ou total. Começaremos por definir a noção de medida invariante. Veremos também o que representam as medidas ergódicas, assim como o Teorema da Decomposição ergódica e o Teorema Ergódico de Birkhoff, um recurso importante em Teoria Ergódica.

Considerando $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $f\colon M \to M$ uma transformação mensurável.

Dizemos que μ é uma *medida invariante* por f se

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$$

para todo conjunto mensurável $E \subset M$. Nesse caso, afirmamos que f preserva μ. Prosseguindo, seja $\phi\colon M \to \mathbb{R}$ uma função mensurável, dizemos que ϕ é *invariante* por f se

$$(\phi \circ f)(x) = \phi(x) \text{ para } \mu\text{-quase todo ponto } x \in M.$$

Como consequência, temos que $\phi \circ f^n(x) = \phi(x)$ para todo $n \geq 1$ e quase todo ponto $x \in M$. Também diremos que um conjunto mensurável $E \subset M$ é *invariante* se $f^{-1}(E) = E$ a menos de medida nula, ou seja

$$\mu(E \Delta f^{-1}(E)) = 0.$$

Uma medida de probabilidade μ invariante por $f\colon M \to M$ é *ergódica* para f se o tempo médio de visita de qualquer conjunto mensurável coincide, em μ-quase todo ponto, com a medida desse conjunto.

Dados um conjunto mensurável com medida positiva, $E \subset M$, e qualquer ponto $x \in M$, chamamos de *tempo médio de visita* de x a E o valor de

$$\tau(E, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#\{0 \leq j \leq n \colon f^j(x) \in E\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{X}_E(f^j(x)) \tag{1.1}$$

sempre que o limite existir.

O teorema ergódico de Birkhoff afirma que, de fato, o limite (1.1) está bem definido em μ-quase todo ponto.

Teorema 1.1.1 (Ergódico de Birkhoff)**.** *Seja $f \colon M \to M$ uma transformação mensurável e seja μ uma probabilidade invariante por f. Dada qualquer função integrável $\varphi \colon M \to \mathbb{R}$, o limite*

$$\widetilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) \tag{1.2}$$

existe em μ-quase todo ponto $x \in M$. Ainda, a função $\widetilde{\varphi}$ é integrável e

$$\int \widetilde{\varphi}\, d\mu = \int \varphi\, d\mu.$$

O limite $\widetilde{\varphi}$ é denominado *média temporal*, ou *média orbital*, de φ.

Exemplo 1.1.2. Dado $(M, \mathcal{B})$ um espaço mensurável e $f \colon M \to M$ uma transformação mensurável. Seja p um ponto periódico de período k para f então, com $\delta_{\cdot}$ sendo a medida delta Dirac em um ponto, temos que a medida $\mu_p = \frac{1}{k}(\delta_p + \delta_{f(p)} + \cdots + \delta_{f^{k-1}(p)})$ é invariante e ergódica. Primeiramente vamos mostrar que μ_p é invariante por f. Para isso, afirmamos que para toda função mensurável $\varphi \colon M \to \mathbb{R}$ e todo $x \in M$ vale $\int \varphi\, d\delta_x = \varphi(x)$. Seja $\varphi = \sum_{i=0}^{n} b_i \mathcal{X}_{B_i}$ uma função simples. Então,

$$\int \varphi\, d\delta_x = \sum_{i=0}^{n} b_i \int \mathcal{X}_{B_i}\, d\delta_x = \sum_{i=0}^{n} b_i \delta_x(B_i) = \sum_{i=0}^{n} b_i \mathcal{X}_{B_i}(x) = \varphi(x)$$

sendo $\delta_x(B_i) = 1$ se $x \in B_i$ e zero caso contrário, que é o mesmo que a função característica A_i no ponto x. Suponha agora que φ é não-negativa e mensurável. Então existe uma sequência não-decrescente de funções simples $(\psi_i)_{i=1}^{\infty}$ de modo que $\psi_i \to \varphi$ pontualmente. Pelo o Teorema da Convergência Monótona vem

$$\int \varphi \, d\delta_x = \int \lim_{i\to\infty} \psi_i \, d\delta_x = \lim_{i\to\infty} \int \psi_i \, d\delta_x = \lim_{i\to\infty} \psi_i(x) = \varphi(x). \tag{1.3}$$

A afirmação segue agora de (1.3) e do fato que toda função mensurável é a soma de duas funções mensuráveis não-negativas. Seja $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada. Pela afimação acima temos

$$\begin{aligned}
\int \varphi \circ f \, d\mu_p &= \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \int \varphi \circ f \, d\delta_{f^j(p)} \\
&= \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \varphi \circ f(f^j(p)) \\
&= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \varphi(f^j(p)) \\
&= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \int \varphi \, d\delta_{f^j(p)} \\
&= \int \varphi \, d\mu_p.
\end{aligned}$$

Isso mostra que μ_p é invariante por f. Seja agora $E \subset M$ mensurável invariante. Sendo $f^{-j}(E) = E$ para todo $j \geq 1$, então $f^i(p) \in E$ para todo $i = 0, \ldots, k-1$ ou então $f^i(p) \notin E$ para todo $i = 0, \ldots, k-1$. Portanto, $\mu_p(E) \in \{0, 1\}$ e, assim, μ é ergódica.

Representaremos por $\mathcal{M}_1(f)$ o espaço das probabilidades invariantes por f. Sejam μ_1 e μ_2 probabilidades de $\mathcal{M}_1(f)$, então $(1-t)\mu_1 + t\mu_2 \in \mathcal{M}_1(f), \forall t \in (0,1)$. Isto significa que $\mathcal{M}_1(f)$ é *convexo*.

Definição 1.1.3. Seja A um subconjunto convexo de $\mathcal{M}_1(f)$. Um ponto $x \in A$ é um *extremal* se para quaisquer $x_1, x_2 \in A$ tal que $x = (1-t)x_1 + tx_2$ e $t \in [0,1]$ então $t \in \{0,1\}$, ou seja, x não pode ser escrito como combinação convexa de outros elementos de A.

Dado $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade, $\mathcal{P}$ uma partição de M em conjuntos mensuráveis (veja Definição 1.2.1) e $\pi\colon M \to \mathcal{P}$ a *projeção natural* que associa a cada $x \in M$ o elemento $\mathcal{P}(x)$ da partição que o contém. Um subconjunto $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{P}$ é dito mensurável se $\pi^{-1}(\mathcal{Q})$ é um subconjunto mensurável em M. A família $\widehat{\mathcal{B}}$ de subconjuntos mensuráveis é uma σ-álgebra de $\mathcal{P}$.

Definição 1.1.4. Para cada $\mathcal{Q} \in \widehat{\mathcal{B}}$ definimos a *medida quociente* $\widehat{\mu}$ por

$$\widehat{\mu}(\mathcal{Q}) = \mu(\pi^{-1}(\mathcal{Q})).$$

O teorema que vamos apresentar a seguir afirma que toda medida invariante é uma combinação convexa de medidas ergódicas:

Teorema 1.1.5 (Decomposição Ergódica)**.** *Seja $f\colon M \to M$ mensurável no espaço métrico completo separável M e μ uma probabilidade invariante. Então existe um conjunto mensurável $M_0 \subset M$ com $\mu(M_0) = 1$, uma partição $\mathcal{P}$ de M_0, não necessariamente enumerável, em subconjuntos mensuráveis e uma família de probabilidades $\{\mu_P \colon P \in \mathcal{P}\}$ em M, satisfazendo:*

a) $\mu_P(P) = 1$ *para todo $\widehat{\mu}$-quase todo $P \in \mathcal{P}$;*

b) $P \mapsto \mu_p(E)$ *é mensurável, para todo conjunto mensurável $E \subset M$;*

c) μ_P *é invariante e ergódica para $\widehat{\mu}$-quase todo $P \in \mathcal{P}$;*

d) $\mu(E) = \int \mu_P(E)\, d\widehat{\mu}(P)$, *para todo conjunto mensurável $E \subset M$.*

1.2 Entropia relativa a uma medida

A palavra *entropia* foi inventada em 1865 pelo físico e matemático alemão Rudolf Clausius, um dos pioneiros da Termodinâmica. Em meados do século XX, Andrey Kolmogorov e Yakov Sinai introduziram a noção de entropia de um sistema dinâmico com o objetivo de distinguir sistemas que não são ergodicamente equivalentes, especialmente no caso de sistemas que são espectralmente equivalentes e que, portanto, não podem ser distinguidos por meio de invariantes espectrais.

Isto posto, definiremos nessa seção as representações de entropia de uma partição e de um sistema dinâmico. Vamos exibir também, sem demonstrações, o teorema de Kolmogorov-Sinai e, por fim, apresentaremos um conceito importante para a demonstração do teorema principal desse trabalho, que é a noção de jacobiano e suas relações com a entropia.

1.2.1 *Entropia de uma partição*

Seja $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade, onde $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra de M e μ uma medida de probabilidade.

Definição 1.2.1. Uma *partição* de M é uma família enumerável (finita ou infinita) $\mathcal{P}$ de subconjuntos mensuráveis de M disjuntos dois-a-dois e cuja união tem medida total.

A *soma* $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ de duas partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ é a partição cujo elementos são as interseções $P \cap Q$ com $P \in \mathcal{P}$ e $Q \in \mathcal{Q}$. No geral, dada qualquer família enumerável de partições $\mathcal{P}_n$, definimos sua soma como

$$\bigvee_n \mathcal{P}_n = \left\{ \bigcap_n P_n \colon P_n \in \mathcal{P}_n \text{ para cada } n \right\}.$$

Dada a partição $\mathcal{P}$ de M e $x \in M$, denotamos por $\mathcal{P}(x)$ o elemento da partição que contém o ponto x.

Então chamamos de *entropia da partição* $\mathcal{P}$ ao número

$$H_\mu(\mathcal{P}) = \sum_{P \in \mathcal{P}} -\mu(P) \log \mu(P).$$

Exemplo 1.2.2. Seja o intervalo $M = [0,1]$ munido da medida de Lebesgue. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere a partição $\mathcal{P}^n$ formada pelos subintervalos $((i-1)/10^n, i/10^n]$, onde $1 \leq i \leq 10^n$. Então,

$$H_\mu(\mathcal{P}^n) = \sum_{i=1}^{10^n} -10^{-n} \log 10^{-n} = \sum_{i=1}^{10^n} \frac{1}{10^n} \log 10^n = n \log 10.$$

Definição 1.2.3. Dadas duas partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, dizemos que $\mathcal{P}$ é menos fina que $\mathcal{Q}$, e escrevemos $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$, se todo elemento de $\mathcal{Q}$ está contido em algum elemento de $\mathcal{P}$, a menos de medida nula. A soma $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ é, precisamente, a menos fina de todas as partições $\mathcal{R}$ tais que $\mathcal{P} \prec \mathcal{R}$ e $\mathcal{Q} \prec \mathcal{R}$.

1.2.2 *Entropia de um sistema dinâmico*

Definição 1.2.4. Seja $f\colon M \to M$ uma transformação mensurável, não necessariamente invertível, preservando uma medida de probabilidade μ. Dada uma partição $\mathcal{P}$ e $n \geq 1$, definimos a partição $\mathcal{P}^n$ como

$$\mathcal{P}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P}).$$

Assim, para cada $x \in M$ temos que

$$\mathcal{P}^n(x) = \mathcal{P}(x) \cap f^{-1}(\mathcal{P}(f(x))) \cap \cdots \cap f^{-n+1}(\mathcal{P}(f^{n-1}(x))).$$

Note que a sequência $\mathcal{P}^n$ é não-decrescente, ou seja, $\mathcal{P}^n \prec \mathcal{P}^{n+1}$ para todo n. Portanto, a sequência das entropias $H_\mu(\mathcal{P}^n)$ também é não-decrescente. Outro fato importante é que esta sequência é subaditiva, ou seja, $H_\mu(\mathcal{P}^{m+n}) \leq H_\mu(\mathcal{P}^m) + H_\mu(\mathcal{P}^n)$ para todo $m, n \geq 1$. Isso nos permite fazer a seguinte definição:

Definição 1.2.5. Chamamos de *entropia de f com respeito à medida μ e à partição $\mathcal{P}$* o limite

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) = \lim_{n \to \infty} \frac{H_\mu(\mathcal{P}^n)}{n} = \inf_n \frac{H_\mu(\mathcal{P}^n)}{n}.$$

Esta entropia é tanto maior quanto mais fina for a partição. De fato, se $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$ então $\mathcal{P}^n \prec \mathcal{Q}^n$ para todo n. Finalmente podemos definir a entropia de uma dinâmica:

Definição 1.2.6. A *entropia do sistema dinâmico* (f, μ) é definida por

$$h_\mu(f) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f, \mathcal{P}), \tag{1.4}$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições com entropia finita.

É interessante ver que a definição não é afetada se considerarmos o supremo apenas sobre as partições finitas.

Exemplo 1.2.7. Suponhamos que a medida invariante μ está suportada numa órbita periódica. Mais especificamente, existe $x \in M$ e $k \geq 1$ tal que $f^k(x) = x$ de modo que a medida μ é dada por

$$\mu = \frac{1}{k}\left(\delta_x + \delta_{f(x)} + \cdots + \delta_{f^{k-1}(x)}\right),$$

onde $\delta_\cdot$ é a medida delta Dirac em um ponto. Neste caso, a medida só toma um número finito de valores. Consequentemente, a entropia $H_\mu(\mathcal{P})$ também só toma um número finito de valores quando consideramos todas as partições enumeráveis $\mathcal{P}$. Em particular, $\lim_{n\to\infty} \frac{H_\mu(\mathcal{P})}{n} = 0$ para toda partição $\mathcal{P}$, e consequentemente $h_\mu(f) = 0$.

Proposição 1.2.8. *Seja $\mathcal{P}$ uma partição com entropia finita tal que a união dos seus iterados $\mathcal{P}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P})$ para cada $n \geq 1$ gera a σ-álgebra dos conjuntos mensuráveis. Então $h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P})$.*

Uma partição $\mathcal{P}$ cumprindo as condições da proposição acima é chamada *geradora*.

Exemplo 1.2.9. Considere a transformação expansão decimal $f\colon [0,1] \to [0,1]$ dada por $f(x) = 10x - [10x]$. Sabemos que f preserva a medida de Lebesgue μ. Seja $\mathcal{P}$ a partição $[0,1]$ em intervalos da forma $\left(\frac{i-1}{10}, \frac{i}{10}\right]$ com $i = 1, \ldots, 10$. Então $\mathcal{P}^n$ é a partição nos intervalos da forma $\left(\frac{i-1}{10^n}, \frac{i}{10^n}\right]$ com $i = 1, \ldots, 10^n$. Conforme o Exemplo (1.2.2), segue que

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n) = \log 10.$$

Observe que $\mathcal{P}$ é geradora, assim $h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P}) = \log 10$.

Em geral, existe dificuldade em calcular a entropia pela Definição 1.2.6. Contudo, há métodos que tornam mais simples o processo de encontrar a entropia de um sistema, identificando partições $\mathcal{P}$ que satisfaçam o supremo. Um resultado fundamental nessa direção é:

Teorema 1.2.10 (Kolmogorov-Sinai)**.** *Seja $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2 \prec \cdots \prec \mathcal{P}_n \prec \cdots$ uma sequência não-decrescente de partições com entropia finita tais que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$ gera a σ-álgebra dos conjuntos mensuráveis a menos de medida nula. Então,*

$$h_\mu(f) = \lim_{n\to\infty} h_\mu(f, \mathcal{P}_n).$$

Demonstração. Ver (OLIVEIRA; VIANA, 2019). □

Agora, seja $\mathcal{M}_1(f)$ o conjunto das medidas de probabilidades invariantes por f. Temos que a *função entropia* relaciona a cada medida invariante $\mu \in \mathcal{M}_1(f)$ a entropia $h_\mu(f)$. Em geral, essa função não é contínua, todavia, em certas hipóteses bastante amplas ela é *semicontínua superiormente*: dado qualquer $\varepsilon > 0$, tem-se que $h_\nu(f) \leq h_\mu(f) + \varepsilon$ para todo ν suficientemente próximo de μ. Isso é válido, especialmente, para a classe de transformações expansivas.

Definição 1.2.11. Seja $f\colon M \to M$ uma transformação contínua num espaço métrico. Dizemos que f é *expansiva* se existe $\varepsilon_0 > 0$ (constante de expansividade) de modo que dados $x, y \in M$ com $x \neq y$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon_0$.

De maneira grosseira, uma transformação f é expansiva se quaisquer duas órbitas distintas podem ser distinguidas, de forma macroscópica, em algum momento da iteração.

Proposição 1.2.12. *Seja $f\colon M \to M$ uma transformação expansiva num espaço métrico compacto e seja ε_0 uma constante de expansividade. Então tem-se* $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} \mathcal{P}^n = 0$ *para toda partição finita $\mathcal{P}$ com* $\operatorname{diam} \mathcal{P} < \varepsilon_0$.

Demonstração. Note que a sequência $\operatorname{diam} \mathcal{P}^n$ é não crescente e suponha que seu ínfimo δ seja positivo. Então, para todo $n \geq 1$ existem pontos x_n e y_n pertencentes ao mesmo elemento de $\mathcal{P}^n$ tais que $d(x_n, y_n) > \frac{\delta}{2}$. Por outro lado,

$$d(f^j(x_n), f^j(y_n)) \leq \operatorname{diam} \mathcal{P} < \varepsilon_0 \text{ para todo } 0 \leq j \leq n.$$

Por compacidade, existe $(n_j)_j \to \infty$ tal que $(x_{n_j})_j$ e $(y_{n_j})_j$ convergem para pontos x e y, respectivamente. Portanto, $x \neq y$ e $d(f^j(x), f^j(y)) \leq \operatorname{diam} \mathcal{P} < \varepsilon_0$ para todo $j \geq 0$, mas isso contradiz a expansividade de f. □

1.3 O Princípio Variacional

No decorrer da seção anterior, discutimos a noção de entropia de um sistema dinâmico que depende de uma medida. Adler, Konheim e McAndrew (1965), inspirados pela entropia de Kolmogorov-Sinai, propuseram um conceito topológico de entropia quando o espaço é compacto e a transformação é contínua.

1.3.1 Entropia Topológica

Seja M um espaço topológico compacto. Denotamos por α uma cobertura de M constituída de conjuntos abertos. Por compacidade, toda cobertura aberta admite uma subcobertura com um número finito de elementos.

Definição 1.3.1. Se $N(\alpha)$ caracteriza o número de elementos da subcobertura de α de menor cardinalidade, então chamamos de *entropia da cobertura de α* ao número

$$H(\alpha) = \log N(\alpha).$$

Seja β outra cobertura aberta de M. Assim como para partições, representamos por $\alpha \vee \beta$ a cobertura de M formada pelas interseções de elementos de α e β. Dizemos que α é *menos fina* que β, $\alpha \prec \beta$, se todo elemento de β está contido em algum elemento de α.

Seja $f\colon M \to M$ uma transformação contínua. Qualquer pré-imagem $f^{-j}(\alpha) = \{f^{-j}(U) : U \in \alpha\}$ é cobertura de M para todo $j \geq 1$. Assim, para cada $n \geq 1$ definimos

$$\alpha^n = \bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\alpha).$$

É fácil ver que a sequência $H(\alpha^n)$ é subaditiva. Daí, definimos a entropia topológica de f com relação a α como

$$h(f,\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\alpha^n) = \inf_n \frac{1}{n} H(\alpha^n).$$

Finalmente, definimos a *entropia topológica* de f como sendo,

$$h_{top}(f) = \sup\{h(f,\alpha)\colon \alpha \text{ é a cobertura aberta de } M\}.$$

1.3.2 *Pressão topológica*

Abordaremos agora uma generalização da entropia topológica conhecida como *pressão topológica*.

Como antes, seja $f\colon M \to M$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto. Chamaremos de *potencial* uma função contínua $\phi\colon M \to \mathbb{R}$. Para $n \geq 1$, definimos $\phi_n\colon M \to \mathbb{R}$ por $\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ f^i$.

Dada qualquer cobertura aberta α de M, definimos

$$P_n(f,\phi,\alpha) = \inf\left\{ \sum_{U\in\gamma} \sup_{x\in U} e^{\phi_n(x)} : \gamma \text{ é subcobertura finita de } \alpha^n \right\}. \tag{1.5}$$

Seja $U \subset M$, denotamos $\phi_n(U) = \sup\{\phi_n(x)\colon x \in U\}$. Veja que,

$$\sum_{U\in\gamma} e^{\phi_{n+m}(U)} \le \sum_{U\in\gamma} e^{\phi_n(U)+\phi_m(f^n(U))} \le \sum_{U\in\gamma} e^{\phi_n(U)} \sum_{V\in f^n(\gamma)} e^{\phi_m(V)}.$$

Pela subaditividade da sequência $\log P_n(f,\phi,\alpha)$ existe o limite

$$P(f,\phi,\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_n(f,\phi,\alpha). \tag{1.6}$$

O diâmetro de uma cobertura α é dada por,

$$\operatorname{diam}(\alpha) = \sup_{U\in\alpha} \sup_{x,y\in U} d(x,y).$$

Finalmente, chamamos *pressão* do potencial ϕ relativamente a f ao limite $P(f,\phi)$ definido como

$$P(f,\phi) = \lim_{\operatorname{diam}(\alpha)\to 0} P(f,\phi,\alpha). \tag{1.7}$$

(WALTERS, 1975) mostrou que o limite existe. No Lema 10.3.1 de (OLIVEIRA; VIANA, 2019) também é possivel ver a garantia que (1.7) existe.

1.3.3 *Princípio variacional e estados de equilíbrio*

O teorema abaixo foi provado originalmente por (RUELLE, 1973). Aqui apresentamos a versão de (WALTERS, 1975).

Teorema 1.3.2 (Princípio Variacional)**.** *Seja $f\colon M \to M$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto e seja $\mathcal{M}_1(f)$ o conjunto das medidas de probabilidade invariantes por f. Para todo pontencial ϕ vale*

$$P(\phi,f) = \sup\left\{h_\nu(f) + \int \phi d\nu\colon \nu \in \mathcal{M}_1(f)\right\}.$$

Demonstração. Veja o Teorema 10.4.1 de (OLIVEIRA; VIANA, 2019). □

Observe que f tem entropia topológica nula se, e somente se, $h_\nu(f) = 0$ para toda probabilidade invariante ν. A hípótese de compacidade é fundamental, já que existem transformações com entropia topológica positiva e sem medidas invariantes.

Exemplo 1.3.3. Seja $f\colon S^1 \to S^1$ um homeomorfismo qualquer e seja α uma cobertura do círculo formada por um número finito de intervalos abertos. Seja $\partial\alpha$ o conjunto formado pelos pontos extremos desses intervalos. Para cada $n \geq 1$, a cobertura α^n é formada por intervalos, cujos pontos extremos estão em

$$\partial\alpha^n = \partial\alpha \cup f^{-1}(\partial\alpha) \cup \cdots \cup f^{-n+1}(\partial\alpha).$$

Note que $\#\alpha^n \leq \#\partial\alpha^n \leq n\#\partial\alpha$. Portanto,

$$h(f,\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\alpha^n) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \#\alpha^n \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log n = 0.$$

Sabemos que $h_{top}(f) = \lim_{k\to\infty} h(f,\alpha_k)$ para qualquer sequência de coberturas abertas α_k com diam $\alpha_k \to 0$ (veja proposição 10.1.9 de (OLIVEIRA; VIANA, 2019)). Então, considerando coberturas abertas por intervalos de comprimento menor que $1/k$, concluímos que $h_{top}(f) = 0$ para todo homeomorfismo do círculo.

Definição 1.3.4. Seja $f : M \to M$ uma transformação contínua no espaço métrico compacto M e $\phi\colon M \to \mathbb{R}$ um potencial. Uma medida de probabilidade invariante μ é um *estado de equilíbrio* para o potencial ϕ se ela realiza o supremo no princípio variacional, ou seja,

$$h_\mu(f) + \int \phi d\mu = P(f,\phi) = \sup\left\{h_\nu(f) + \int \phi d\nu \colon \nu \in \mathcal{M}_1(f)\right\}.$$

No caso particular em que $\phi \equiv 0$, a probabilidade μ também recebe o nome de *medida de máxima entropia*.

Teorema 1.3.5 (Jacobs)**.** *Suponha que M é um espaço métrico separável. Dada qualquer probabilidade invariante μ, seja portanto $\{\mu_P \colon P \in \mathcal{P}\}$ a sua decomposição ergódica. Então $h_\mu(f) = \int h_{\mu_P}(f) d\hat{\mu}(P)$ (quando um dos lados da igualdade é infinito o outro também é).*

Proposição 1.3.6. *Para todo potencial $\phi\colon M \to \mathbb{R}$ vale*

$$P(f,\phi) = \sup\left\{h_\mu(f) + \int \phi d\mu \colon \mu \textit{ invariante ergódica para } f\right\}.$$

Demonstração. Seja o funcional $\psi\colon \mathcal{M}_1(f) \to \mathbb{R}$ definido por $\psi(\mu) = h_\mu(f) + \int \phi \, d\mu$. Para cada probabilidade invariante μ, seja $\{\mu_P \colon P \in \mathcal{P}\}$ a respectiva decomposição ergórdica. Do Teorema 1.3.5, segue que,

$$\psi(\mu) = \int \psi(\mu_P) d\widehat{\mu}(P). \tag{1.8}$$

Esta relação implica que o supremo de ψ sobre todas as probabilidades invariantes é menor ou igual que o supremo de ψ sobre as probabilidades invariantes e ergódicas. Como a desigualdade oposta é trivial, segue que os dois supremos são iguais. Pelo Teorema 1.3.2, o supremo de ψ sobre todas as probabilidades invariantes é igual a $P(f, \psi)$. A conclusão da proposição segue imediatamente destas observações. $\square$

Veremos os seguintes resultados para mostrar que o conjunto dos estados de equilíbrio é convexo e que seus elementos extremais são ergódicos. Usaremos $\varepsilon(f, \phi)$ para o conjunto dos estados de equilíbrio.

Proposição 1.3.7. *Suponha que $h_{top}(f) < \infty$. Então o conjunto dos estados de equilíbrio para qualquer potencial ϕ é um subconjunto convexo de $M_1(f)$: mais precisamente, dado $t \in (0, 1)$ e dadas $\mu_1, \mu_2 \in M_1(f)$,*

$$(1 - t)\mu_1 + t\mu_2 \in \varepsilon(f, \phi) \Leftrightarrow \{\mu_1, \mu_2\} \subset \varepsilon(f, \phi).$$

Além disso, uma probabilidade invariante μ está em $\varepsilon(f, \phi)$ se, e somente se, quase toda componente ergódica de μ está em $\varepsilon(f, \phi)$.

Demonstração. A hipótese de que a entropia topológica é finita garante que $P(f, \phi) < \infty$ para todo potencial ϕ. Consideremos o funcional ψ: $\mathcal{M}_1(f) \to \mathbb{R}$ definido por $\psi(\mu) = h_\mu(f) + \int \phi \, d\mu$. Este funcional é linear e convexo já que $h_{(1-t)\mu_1 + t\mu_2}(f) = (1 - t)h_{\mu_1}(f)t + h_{\mu_2}(f)$. Assim,

$$\psi((1 - t)\mu_1 + t\mu_2) = (1 - t)\psi(\mu_1) + t\psi(\mu_2)$$

para todo $t \in (0, 1)$ e quaisquer $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1(f)$. Então $\psi((1 - t)\mu_1 + t\mu_2)$ é igual ao supremo de ψ se, e somente se, $\psi(\mu_1)$ e $\psi(\mu_2)$ são iguais a esse supremo. Fica assim, provado a primeira parte da proposição.

Para a segunda parte, segue da relação (1.8) que $\psi(\mu) = \sup \psi$ se, e somente se, $\psi(\mu_P) = \sup \psi$ para $\widehat{\mu}$-quase todo ponto P. $\square$

Corolário 1.3.8. *Se $\varepsilon(f,\phi)$ é não vazio então ele contém probabilidades invariantes ergódicas. Além disso, os elementos extremais do convexo $\varepsilon(f,\phi)$ são precisamente as medidas ergódicas contidas nele.*

Demonstração. Para primeira parte basta considerar as componentes ergódicas de qualquer elemento de $\varepsilon(f,\phi)$. Na segunda parte, sabemos que $\mathcal{M}_1(f)$ é convexo e que as medidas ergódicas são os elementos extremais deste convexo. Caso $\mu \in \varepsilon(f,\phi)$ seja ergódica, então μ é um elemento extremal de $\mathcal{M}_1(f)$. Com maior razão, μ é um elemento extremal de $\varepsilon(f,\phi)$. De igual modo, caso $\mu \in \varepsilon(f,\phi)$ não seja ergódica, então é possível escrever

$$\mu = (1-t)\mu_1 + t\mu_2 \text{ com } 0 < t < 1 \text{ e } \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1(f).$$

Segue da Proposição 1.3.7 que $\mu_1, \mu_2 \in \varepsilon(f,\phi)$, e consequentemente μ não é elemento extremal de $\varepsilon(f,\phi)$. $\square$

O próximo exemplo mostra que o conjunto dos estados de equilíbrio de uma tranformação pode ser vazio.

Exemplo 1.3.9. Para cada $n \geq 1$ tome uma função $2n$-modal $f_n \colon I_n \to I_n$ definida como segue: seja $I_n = [2^{-n}, 2^{-n+1}]$ um intervalo compacto. Sejam $c_n^{1_1} < c_n^{2_1} < c_n^{1_2} < c_n^{2_2} < \cdots < c_n^{1_n} < c_n^{2_n}$ os pontos de virada de f_n de modo que o comprimento de cada componente conexa de $I_n \setminus \{c_n^{1_j}, c_n^{2_j} : j = 1, \ldots, n\}$ é igual a $1/[2^n(2n+1)]$. Consideramos f_n linear por partes cumprindo $f_n(c_n^{1_j}) = 2^{-n+1}$ e $f_n(c_n^{2_j}) = 2^{-n}$ para cada $j = 1, \ldots, n$, $f_n(2^{-n}) = 2^{-n}$ e $f_n(2^{-n+1}) = 2^{-n+1}$ (veja a Figura 1.1 para o caso $n = 2$). Segue do Teorema 1 de (MISIUREWICZ; SZLENK, 1980) que $h_{top}(f_n) = \log(2n+1)$. Considere agora $f \colon [0,1] \to [0,1]$ definida por $f(0) = 0$ e $f(x) = f_n(x)$ se $x \in I_n$. Note que f é contínua e semiconjugada a f_n para todo $n \geq 1$ (a função $h_n : [0,1] \to I_n$ dada por $h_n \restriction_{I_n} = \text{id}$, $h_n(x) = 2^{-n+1}$ se $x \geq 2^{-n+1}$ e $h_n(x) = 2^{-n}$ se $x \leq 2^{-n}$ é contínua, sobrejetiva e cumpre $h_n \circ f = f_n \circ h_n$). Assim, $h_{top}(f) \geq \log(2n+1)$ para todo $n \geq 1$ e, consequentemente, $h_{top}(f) = +\infty$.

Mostraremos agora que f não possui medida de máxima entropia. Pela Proposição 1.3.6, é suficiente considerar medidas ergódicas. Note que 0 e I_n, $n \geq 1$ são conjuntos f-invariantes. Daí, qualquer probabilidade ergódica f-invariante μ deve satisfazer ou $\mu(\{0\}) = 1$ ou $\mu(I_n) = 1$ para algum $n \geq 1$ (lembre que uma probabilidade ergódica dá

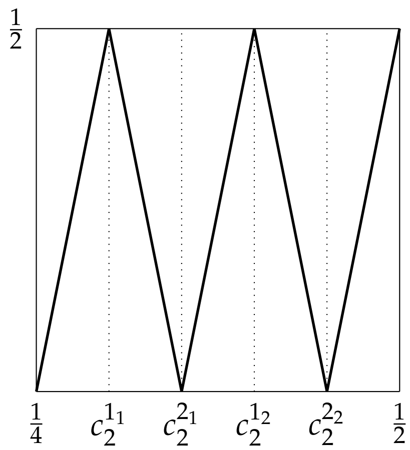

Figura 1.1: A função f_2.

medida 0 ou 1 para conjuntos invariantes). No primeiro caso, $h_\mu(f) = 0$. No segundo temos $h_\mu(f) \leq h_{top}(f_n) < +\infty$. Em qualquer caso, $h_\mu(f) < h_{top}(f)$ para toda medida ergódica μ invariante por f.

Vamos finalizar esse exemplo construindo uma sequência de medidas ergódicas μ_n invariantes por f tal que $\lim_{n\to+\infty} h_{\mu_n}(f) = h_{top}(f)$. Dado $I \subset \mathbb{R}$, denotamos por leb_I a medida de Lebesgue restrita a I. Para cada $n \geq 1$, considere μ_n definida por

$$\mu_n(J) = \frac{\mathrm{leb}_{[0,1]}(J \cap I_n)}{\mathrm{leb}_{[0,1]}(I_n)}.$$

Argumentando de maneira análoga ao Exemplo 1.3.1 e à Proposição 4.2.4 de Oliveira e Viana (2019) segue que μ_n é invariante e ergódica para f. Além disso, é fácil ver que (f, μ_n) é ergodicamente equivalente a $(f_n, \mathrm{leb}_{I_n})$. Portanto, $h_{\mu_n}(f) = h_{top}(f_n) = \log(2n+1)$, já que leb_{I_n} é uma medida de máxima entropia para f_n.

Todavia, temos uma classe de transformações para as quais a existência de estados de equilíbrio está garantida para todo potencial: as transformações expansivas.

Lema 1.3.10. *Se a função entropia de f é semicontínua superiormente, então $\varepsilon(f, \phi)$ é compacto (na topologia fraca*) e não vazio para qualquer potencial ϕ.*

Demonstração. Seja $(\mu_n)_n$ uma sequência em $\mathcal{M}_1(f)$ tal que

$$h_{\mu_n}(f) + \int \phi d\mu_n \text{ converge para } P(f, \phi).$$

Segue da compacidade de $\mathcal{M}_1(f)$ que a sequência admite algum ponto de acumulação μ. Da semicontinuidade da entropia e da continuidade da integral temos que

$$h_\mu(f) + \int \phi d\mu \geq \liminf_{n\to\infty} \left[h_{\mu_n}(f) + \int \phi d\mu_n \right] = P(f,\phi).$$

Logo, μ é um estado de equilíbrio. Da mesma forma, tomando qualquer sequência $(\nu_n)_n$ em $\varepsilon(f,\phi)$ vemos que qualquer ponto de acumulação ν é um estado de equilíbrio. Isto mostra que $\varepsilon(f,\phi)$ é fechado e, consequentemente compacto. $\square$

Da Proposição 1.2.12 segue que a função entropia de toda transformação expansiva sobre um espaço métrico compacto é semicontínua superiormente. Agora, juntamente com o Lema 1.3.10 temos:

Corolário 1.3.11. *Seja $f\colon M \to M$ uma transformação expansiva num espaço métrico compacto. Então todo potencial ϕ admite algum estado de equilíbrio.*

1.4 Jacobianos e a fórmula de Rokhlin

Nesta seção estudaremos a noção de jacobiano de uma medida relativamente a uma transformação localmente injetiva. Veremos que isto nada mais é do que uma extensão da noção usual de jacobiano de um difeomorfismo com respeito à medida de volume no $\mathbb{R}^n$. Assim, definiremos o jacobiano de uma medida e também provaremos sua existência.

Lembre que vale

$$m(f(A)) = \int_A |\det Df(x)| dm(x), \tag{1.9}$$

onde $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo local de classe C^1, m é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e $A \subset U$ está contido em uma bola restrita à qual f é injetivo. A função $J_m(f)\colon U \to \mathbb{R}$ definida por $J_m(f)(x) = |\det Df(x)|$ é usualmente chamada de determinante jacobiano de f no ponto x. Vamos estender essa noção de jacobiano para transformações e medidas mais gerais.

Definição 1.4.1. Seja $f\colon M \to M$ uma transformação mensurável. Diremos que f é *localmente invertível* se existe alguma cobertura enumerável $\{U_k\colon k \geq 1\}$ de M por conjuntos mensuráveis de modo que a restrição de f a cada U_k é uma bijeção sobre a sua imagem, a qual é um conjunto mensurável, e a inversa dessa bijeção também é mensurável.

Os subconjuntos mensuráveis destes conjuntos U_k serão chamados *domínios de invertibilidade*. Se A é domínio de invertibilidade, então $f(A)$ é um conjunto mensurável. Da mesma forma, note que se f é localmente invertível então a pré-imagem $f^{-1}(y)$ de qualquer $y \in M$ é enumerável: ela contém no máximo um ponto em cada U_k.

Definição 1.4.2. Seja η uma probabilidade em M, não necessariamente invariante por f. Uma função mensurável $\xi \colon M \to [0, \infty)$ é dita um *jacobiano* de f relativamente a η se a restrição de ξ a qualquer domínio de invertibilidade A é integrável com relação a η e satisfaz

$$\eta(f(A)) = \int_A \xi d\eta. \tag{1.10}$$

Lema 1.4.3. *Dada uma cobertura enumerável $\{U_k \colon k \geq 1\}$ de M por domínios de invertibilidade de f. Existe uma cobertura $\{P_k \colon k \geq 1\}$ de M constituída de conjuntos mensuráveis e disjuntos tais que $P_k \subset U_k$ para todo k.*

Demonstração. Seja, $P_1 = U_1$ e para cada $k > 1$, $P_k = U_k \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_{k-1})$. Então $\mathcal{P} = \{P_k \colon k \geq 1\}$ é uma partição de M formada por domínios de invertibilidade. □

Proposição 1.4.4. *A definição de jacobiano não depende da escolha de $\{U_k \colon k \geq 1\}$.*

Demonstração. Seja $\{V_m \colon m \geq 1\}$ outra cobertura de M formada de subconjuntos mensuráveis onde f é invertível. Todo subconjunto B de algum V_m pode ser escrito como união disjunta de conjuntos mensuráveis $P_k \subset U_k$ para todo $k \geq 1$ (Lema 1.4.3). Como cada P_k é um domínio de invertibilidade, segue que $\eta(f(P_k)) = \int_{P_k} \xi d\eta$ para todo $k \geq 1$. Portanto,

$$\eta(f(B)) = \sum_k \eta(f(P_k)) = \sum_k \int_{P_k} \xi d\eta = \int_B \xi d\eta.$$

□

Definição 1.4.5. Dizemos que uma medida η é *não singular* com relação à transformação f se a imagem de qualquer domínio de invertibilidade com medida nula também tem medida nula: se $\eta(A) = 0$ então $\eta(f(A)) = 0$.

Lema 1.4.6. *Seja μ uma probabilidade invariante por uma transformação localmente invertível $f\colon M \to M$. A probabilidade μ é não singular com relação à restrição de f a algum subconjunto invariante com medida total.*

Exemplo 1.4.7. Se $f\colon U \to U$ é um difeomorfismo local em um aberto de $\mathbb{R}^d$ e η é a medida de Lebesgue, então η é não singular. Um resultado que garante a afirmação desse exemplo pode ser visto na Proposição 6.5 em Lee (2012).

Segue da expressão (1.10) que se f admite jacobiano com relação a η então essa medida é não singular.

Teorema 1.4.8 (Radón-Nykodim). *Se μ e ν são medidas finitas tais que $\nu \ll \mu$ então existe uma função mensurável $\rho\colon X \to [0, +\infty]$ tal que $\nu = \rho\mu$, ou seja, tal que*

$$\int \phi d\nu = \int \phi\rho d\mu$$

para toda função mensurável limitada $\phi\colon X \to \mathbb{R}$. Em particular, $\nu(E) = \int_E \rho \, d\mu$ para todo conjunto mensurável $E \subset X$. Além disso, ρ é essencialmente única: duas quaisquer funções que satisfazem são iguais em μ-quase todo ponto. Chamamos ρ de densidade, ou derivada de Radón-Nikodym, de ν relativamente a μ e escrevemos

$$\rho = \frac{d\nu}{d\mu}$$

.

A próxima proposição mostra que vale a recíproca.

Proposição 1.4.9. *Seja $f\colon M \to M$ uma transformação localmente invertível e seja η uma medida boreliana em M, não singular com relação a f. Então, existe algum jacobiano de f com relação a η e ele é essencialmente único: dois jacobianos quaisquer coincidem em η-quase todo ponto.*

Demonstração. EXISTÊNCIA: Dado o Lema 1.4.3. Para cada $P_k \in \mathcal{P}$, represente por η_k a medida definida em P_k por $\eta_k(A) = \eta(f(A))$ para todo conjunto mensurável $A \subset P_k$. A hipótese de que η é não singular implica que cada η_k é absolutamente contínua com relação a η restrita a P_k. Seja $\xi_k = d\eta_k / d(\eta \restriction P_k)$ a derivada de Radón-Nykodim

(Teorema 1.4.8). Pelo Teorema de Radón-Nykodim ξ_k é uma função definida em P_k, integrável com relação a η e satisfazendo

$$\eta(f(A)) = \eta_k(A) = \int_A \xi_k d\eta \tag{1.11}$$

para todo mensurável $A \subset P_k$. Considere a função $\xi \colon M \to [0, \infty)$ cuja restrição a cada $P_k \in \mathcal{P}$ é dada por ξ_k. Todo subconjunto de U_k pode ser escrito como a união disjunta de subconjuntos de $P_1, \ldots, P_k$. Usando a expressão (1.11) a cada um desses subconjuntos e somando as respectivas igualdades obtemos que

$$\eta(f(A)) = \int_A \xi d\eta$$

para todo conjunto mensurável $A \subset U_k$ e $k \geq 1$. Isto prova que ξ é um jacobiano de f relativamente a η.

UNICIDADE: Suponha que ξ e ζ são jacobianos de f relativamente a η e que existe $B \subset M$ com $\eta(B) > 0$ tal que $\xi(x) \neq \zeta(x)$ para todo $x \in B$. A menos de substituir B por um subconjunto adequado, e permutar os papéis de ξ e ζ se necessário, podemos supor que $\xi(x) < \zeta(x)$ para todo $x \in B$. Do mesmo modo, podemos supor que B está contido em algum U_k. Daí,

$$\eta(f(B)) = \int_B \xi d\eta < \int_B \zeta d\eta = \eta(f(B)).$$

Ora, isso é um absurdo e o jacobiano é essencialmente único. $\square$

Usaremos a notação $J_\eta f$ para representar o (essencialmente único) jacobiano de f com relação a η, quando exista. Por definição, $J_\eta f$ é integrável em cada domínio de invertibilidade.

Proposição 1.4.10. *Seja $f \colon M \to M$ uma transformação localmente invertível e η uma probabilidade em M de modo que $J_\eta f$ existe. Se para qualquer $y \in M$ o número de pré-imagens de f é limitado, então o jacobiano é integrável.*

Demonstração. Seja $l \geq 1$ tal que $\# f^{-1}(y) \leq l$ para todo $y \in M$. Note que, $\eta(f(P_k)) = \int \mathcal{X}_{f(P_k)}\, d\eta = \int \mathcal{X}_{P_k} \circ (f \restriction_{P_k})^{-1}\, d\eta$. Além disso, pelo Teorema da Convergência Monótona, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int \mathcal{X}_{P_k} \circ (f \restriction_{P_k})^{-1} \, d\eta = \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{X}_{P_k} \circ (f \restriction_{P_k})^{-1} \right) \, d\eta \leq \int l d\eta = l\eta(M) = l,$$

já que todo $y \in M$ só pode estar contido em no máximo l conjuntos $f(P_k)$. Portanto,

$$\int J_\eta f \, d\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{P_k} J_\eta f d\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \eta(f(P_k)) \leq l.$$

□

O teorema abaixo relaciona a entropia de uma medida com o jacobiano e será fundamental na prova do resultado principal dessa dissertação.

Teorema 1.4.11 (Formula de Rokhlin). *Seja $f\colon M \to M$ uma aplicação mensurável localmente invertível e seja μ uma probabilidade invariante por f. Se existe uma partição finita e enumerável $\mathcal{P}$ tal que $\bigcup_n \mathcal{P}^n$ gera a σ-álgebra de M e todo $P \in \mathcal{P}$ é domínio de invertibilidade de f. Então*

$$h_\mu(f) = \int \log J_\mu f d\mu.$$

Demonstração. A demonstração completa desse teorema pode ser vista em Oliveira e Viana (2019). □

Agora, apresentaremos alguns resultados importantes para a demonstração do teorema principal desse trabalho no que diz respeito aos jacobianos.

Lema 1.4.12 (Fórmula de mudança de variáveis). *Seja $f\colon M \to M$ uma transformação localmente invertível e η uma probabilidade boreliana em M não singular com relação a f. Valem as seguintes fórmulas de mudança de variáveis:*

(a) $\int_{f(A)} \varphi d\eta = \int_A (\varphi \circ f) J_\eta f d\eta$ *para todo domínio de invertibilidade $A \subset M$ e toda função mensurável $\varphi\colon f(A) \to \mathbb{R}$ tal que as integrais estão definidas (podendo ser $\pm\infty$)*

(b) $\int_A \psi d\eta = \int_{f(A)} \left(\frac{\psi}{J_\eta f} \right) \circ (f \restriction_A)^{-1} d\eta$ *para qualquer função mensurável $\psi\colon A \to \mathbb{R}$ tal que as integrais estão definidas (podendo ser $\pm\infty$).*

Demonstração. (a) Pela Proposição 1.4.9 existe um jacobiano de f com relação a η satisfazendo

$$\eta(f(A)) = \int_A J_\eta f d\eta. \tag{1.12}$$

Seja $\varphi = \mathcal{X}_B$ para algum $B \subset f(A)$ mensurável. Por (1.12) segue que

$$\begin{aligned}
\int_{f(A)} \mathcal{X}_B d\eta &= \eta(B \cap f(A)) \\
&= \eta(f(A \cap (f\restriction_A)^{-1}(B))) \\
&= \int_{A\cap(f\restriction_A)^{-1}(B)} J_\eta f\, d\eta \\
&= \int_A \mathcal{X}_{(f\restriction_A)^{-1}(B)} J_\eta f\, d\eta \\
&= \int_A (\mathcal{X}_B \circ f) J_\eta f\, d\eta.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Isso mostra que (a) vale para funções características. Pela linearidade da integral o mesmo vale para funções simples também. A menos de considerar a parte positiva e a negativa, podemos supor que $\varphi\colon f(A) \to \mathbb{R}$ é não negativa. Existe uma sequência de funções simples $\varphi_n\colon f(A) \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1}$, para todo n e $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ para todo x. É fácil ver que a sequência $(\varphi_n \circ f) J_\eta f$ também é monótona e converge para $(\varphi \circ f) J_\eta f$. Pelo Teorema da Convergência Monótona temos

$$\int_{f(A)} \varphi\, d\eta = \lim_{n\to\infty} \int_{f(A)} \varphi_n\, d\eta = \lim_{n\to\infty} \int_A (\varphi_n \circ f) J_\eta f\, d\eta = \int_A (\varphi \circ f) J_\eta f\, d\eta.$$

(b) Seja $\psi\colon A \to \mathbb{R}$ uma função mensurável qualquer e $\varphi = (\psi / J_\eta f) \circ (f\restriction_A)^{-1}$. Pelo item anterior temos que

$$\int_{f(A)} \left(\frac{\psi}{J_\eta f}\right) \circ (f\restriction_A)^{-1}\, d\eta = \int_A \left(\left(\left(\frac{\psi}{J_\eta f}\right) \circ (f\restriction_A)^{-1}\right) \circ f\right) J_\eta f\, d\eta = \int_A \psi\, d\eta.$$

Isso finaliza a prova do lema. □

Lema 1.4.13. *Seja $f\colon M \to M$ uma transformação localmente invertível e seja η uma probabilidade boreliana em M não singular com relação a f. Então, para toda função mensurável limitada*

$\psi\colon M \to \mathbb{R}$ vale

$$\int \psi d\eta = \int \sum_{z\in f^{-1}(x)} \frac{\psi}{J_\eta f}(z) d\eta(x).$$

Demonstração. Pelo Lema 1.4.3, seja $\mathcal{P}$ uma partição enumerável em domínios de invertibilidade. Pelo item (b) do Lema 1.4.12 e usando o fato que a pré-imagem $f^{-1}(x)$ para todo $x \in M$ é enumerável, obtemos

$$\begin{aligned}
\int \psi \, d\eta = \sum_{P\in\mathcal{P}} \int_P \psi \, d\eta &= \sum_{P\in\mathcal{P}} \int_{f(P)} \left(\frac{\psi}{J_\eta f}\right) \circ (f \restriction_P)^{-1} \, d\eta \\
&= \sum_{P\in\mathcal{P}} \int_{f(P)} \left[\sum_{z\in f^{-1}(x)} \frac{\psi}{J_\eta f}(z)\right] d\eta(x) \\
&= \int_{f(M)} \sum_{z\in f^{-1}(x)} \frac{\psi}{J_\eta f}(z) \, d\eta(x) \\
&= \int \sum_{z\in f^{-1}(x)} \frac{\psi}{J_\eta f}(z) d\eta(x).
\end{aligned}$$

□

Lema 1.4.14. *Seja $f\colon M \to M$ uma transformação localmente invertível e seja η uma probabilidade boreliana em M não singular com relação a f. Então η é invariante por f se, e somente se,*

$$\sum_{z\in f^{-1}(x)} \frac{1}{J_\eta f(z)} = 1$$

para η-quase todo $x \in M$.

Demonstração. Substituindo ψ por $(\psi \circ f)$ no Lema 1.4.13 vem

$$\int (\psi \circ f) d\eta = \int \left[\sum_{z\in f^{-1}(x)} \frac{(\psi \circ f)}{J_\eta f}(z)\right] d\eta(x).$$

De $z \in f^{-1}(x)$, vem $(\psi \circ f)(z) = \psi(x)$. Daí,

$$\int (\psi \circ f) d\eta = \int \psi(x) \left[\sum_{z\in f^{-1}(x)} \frac{1}{J_\eta f}(z)\right] d\eta(x). \tag{1.14}$$

Se η é invariante por f, o lado esquerdo da equação (1.14) é igual a $\int \psi \, d\eta$. Portanto,

$\sum_{z\in f^{-1}(x)} \frac{1}{J_\eta f(z)} = 1$ para η-quase todo $x \in M$. Por outro lado, se $\sum_{z\in f^{-1}(x)} \frac{1}{J_\eta f(z)} = 1$ para η-quase todo $x \in M$, então o lado direito de (1.14) é igual a $\int \psi \, d\eta$ que indica η invariante por f. $\square$

Lema 1.4.15. *Seja $f\colon M \to M$ uma transformação localmente invertível e seja η uma probabilidade boreliana em M não singular com respeito a f. Então para todo $k \geq 1$, existe jacobiano de f^k com relação a η e é dado por,*

$$J_\eta f^k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} J_\eta f(f^j(x)) \tag{1.15}$$

para η-quase todo $x \in M$.

Demonstração. Se f é localmente invertível, então f^k também é: da hipótese que f é localmente invertível segue que existe alguma cobertura enumerável $\{U_\ell\colon \ell \geq 1\}$ de M por conjuntos mensuráveis tais que a restrição de f a cada U_ℓ é uma bijeção sobre a sua imagem, a qual é um conjunto mensurável, e a inversa dessa bijeção também é mensurével. Daí note que $\mathcal{W} = \{f^{-k}(U_\ell)\colon \ell \geq 1\}$ é cobertura enumerável de M por conjuntos mensuráveis e que a restrição de f^k a cada elemento de $\mathcal{W}$ é uma bijeção sobre a sua imagem. A Proposição 1.4.9 implica que existe algum jacobiano de f^k com relação a η essencialmente único. Seja A um domínio de invertibilidade de f^k. Usando a fórmula de mudança de variáveis temos que

$$\begin{aligned} \int_A J_\eta f^k d\eta = \eta(f^k(A)) &= \eta(f^{k-1}(f(A))) \\ &= \int_{f(A)} J_\eta f^{k-1} d\eta \\ &= \int_A (J_\eta f^{k-1} \circ f) J_\eta f d\eta. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Portanto, $J_\eta f^k = (J_\eta f^{k-1} \circ f) J_\eta f$ para todo k e para η-quase todo $x \in M$. A equação (1.15) segue agora por indução em k: o caso $k = 1$ é imediato. Suponha que (1.15) vale para um $k \geq 1$ qualquer. Pela expressão encontrada em (1.16) e usando a hipótese de indução temos

$$\begin{aligned} J_\eta f^{k+1}(x) &= (J_\eta f^k \circ f)(x) J_\eta f(x) \\ &= \left[\prod_{j=0}^{k-1} J_\eta f(f^{j+1}(x))\right] J_\eta f(x) \\ &= \prod_{j=0}^{k} J_\eta f(f^j(x)), \end{aligned}$$

o que conclui a prova do lema. □

1.5 Transformações Expansoras

Nesta seção será apresentada uma classe de transformações, denominadas expansoras, uma vez que, localmente, têm a característica de expandirem a distância entre pontos. Vamos primeiro estudar o caso de transformações diferenciáveis e expansoras em variedades.

Definição 1.5.1. Seja M uma variedade compacta e seja $f\colon M \to M$ uma transformação de classe C^1. Dizemos que f é *expansora* se existe $\sigma > 1$ e alguma métrica Riemanniana em M tal que,

$$\|Df(x)v\| \geq \sigma \|v\| \text{ para todo } x \in M \text{ e todo } v \in T_xM. \tag{1.17}$$

Segue da definição que $Df(x)$ é um isomorfismo para todo $x \in M$ e, assim, pelo Teorema da Função Inversa temos que f é um difeomorfismo local.

Exemplo 1.5.2. Seja $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definida por $f([x]) = [2x]$. É fácil ver que f é expansora com $\sigma = 2$.

Definição 1.5.3. Dada uma probabilidade invariante μ, chamamos *bacia* de μ o conjunto $B(\mu)$ dos pontos $x \in M$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi \, d\mu$$

para toda função contínua limitada $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$.

Proposição 1.5.4. *Suponha que M é um espaço métrico compacto. A bacia é um conjunto invariante. Além disso, se μ é ergódica então $B(\mu)$ tem μ-medida total.*

Demonstração. Primeiramente, sendo μ ergódica, então para todo $\varphi \in L^1(\mu)$, pelo Teorema de Birkhoff 1.1.1, a média temporal é uma função invariante, o que prova a primeira afirmação da proposição. Agora, para toda função integrável $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ é verdade que $\widetilde{\varphi} = \int \varphi \, d\mu$ em μ-quase todo ponto. No caso em que μ é ergódica, tal propriedade é justamente a definição de bacia. Portanto, a bacia $B(\mu)$ tem medida total. □

Agora apresentaremos, sem demonstração, o principal resultado dessa seção.

Teorema 1.5.5. *Seja $f\colon M \to M$ uma transformação diferenciável expansora numa variedade compacta conexa M. Suponha que o jacobiano $x \mapsto \det Df(x)$ é Hölder. Então f admite uma única probabilidade invariante μ absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue m. Além disso, μ é ergódica, o seu suporte coincide com M e a sua bacia tem medida de Lebesgue total na variedade.*

A demonstração do Teorema 1.5.5 pode ser encontrada em Oliveira e Viana (2019). A seguir, são exibidos alguns resultados que são utilizados na demonstração do Teorema 1.5.5 e que também são relevantes para o prosseguimento do trabalho.

Lema 1.5.6. *Seja $f\colon M \to M$ um difeomorfismo local de classe $C^r, r \geq 1$ numa variedade Riemanniana compacta e seja $\sigma > 0$ tal que $\|Df(x)v\| \geq \sigma\|v\|$ para todo $x \in M$ e todo $v \in T_xM$. Então existe um $\rho > 0$ tal que, para qualquer pré-imagem x de um ponto $y \in M$, existe uma aplicação $h\colon B(y,\rho) \to M$ de classe C^r tal que $f \circ h = id$ e $h(y) = x$ e*

$$d(h(y_1), h(y_2)) \leq \sigma^{-1} d(y_1, y_2) \text{ para todo } y_1, y_2 \in B(y,\rho). \tag{1.18}$$

Todas as aplicações h que satisfazem as hipóteses do lema acima são chamadas de *ramos inversos* de f.

Se f é uma aplicação expansora conforme a Definição 1.5.1, então cada ramo inverso é uma contração já que $\sigma > 1$. Podemos definir ramos inversos h^n de qualquer iterado f^n da seguinte maneira: dado $y \in M$ e $x \in f^{-n}(y)$, sejam $h_1, \ldots, h_n$ ramos inversos de f de modo que

$$h_j(f^{n-j+1}(x)) = f^{n-j}(x), \text{ para todo } 1 \leq j \leq n.$$

Como cada h_j é uma contração, a sua imagem está contida numa bola de raio menor que ρ e centro $f^{n-j}(x)$. Assim, $h^n := h_n \circ \cdots \circ h_1$ está bem definida no fecho da bola de raio ρ e centro y. Por construção, temos que $f^n \circ h^n = id$ e $h^n(y) = x$. Logo,

$$d(h^n(y_1), h^n(y_2)) \leq \sigma^{-n} d(y_1, y_2) \text{ para todo } y_1, y_2 \in B(y, \rho). \tag{1.19}$$

Lema 1.5.7. *Seja $f\colon M \to M$ uma transformação expansora C^1 numa variedade compacta, então f é expansiva.*

Demonstração. Seja $\rho > 0$ como no Lema 1.5.6 e suponha que x e y são tais que $d(f^j(x), f^j(y)) \leq \rho$ para todo $j \geq 0$. Tome $n > 0$ qualquer. O Lema 1.5.6 implica que para cada $1 \leq j \leq n$ existe um difeomorfismo $h_j : B(f^{n-j+1}(x), \rho) \to V(f^{n-j}(x))$ tal que

- $f \circ h_j = id$,
- $h_j(f^{n-j+1}(x)) = f^{n-j}(x)$,
- $d(h_j(a), h_j(b)) \leq \sigma^{-1} d(a, b)$ para todo $a, b \in B(f^{n-j+1}(x), \rho)$.

Como antes, considere $h^n = h_n \circ \cdots \circ h_1$ e note que $h^n(f^n(x)) = x$. Vamos mostrar que também vale $h^n(f^n(y)) = y$. Como $f^{n-j+1}(y) \in B(f^{n-j+1}(x), \rho)$, então existe único $w \in V(f^{n-j}(x)) \subset B(f^{n-j}(x), \rho)$ tal que $f(w) = f^{n-j+1}(y)$ e $h_j(f^{n-j+1}(y)) = w$. Como $f^{n-j}(y) \in B(f^{n-j}(x), \rho)$ e $h_{j+1} : B(f^{n-j}(x), \rho) \to V(f^{n-j-1}(x))$ é um difeomorfismo, então $f^{n-j}(y) = w$, isto é, $h_j(f^{n-j+1}(y)) = f^{n-j}(y)$ para todo $1 \leq j \leq n$, e assim $h^n(f^n(y)) = y$. Portanto,

$$d(x, y) = d(h^n(f^n(x)), h^n(f^n(y))) \leq \sigma^{-n} d(f^n(x), f^n(y)) \leq \sigma^{-n}\rho.$$

Como a conta acima vale para todo $n > 0$ o lema está provado. $\square$

Uma consequência imediata é que toda transformação expansora possui estados de equilíbrio.

O próximo lema apresenta um bom controle da distorção de iterados de f e seus ramos inversos. Antes, faremos algumas observações na forma de fatos.

FATO 1: Para todo $a > 0$ a função $\log : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ é lipschitziana.

Com efeito, sejam $x, y \in [a, +\infty)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $y < x$. Assim,

$$\begin{aligned} |\log(x) - \log(y)| &= \left|\log\left(\frac{x}{y}\right)\right| = \left|\log\left(1 + \frac{x-y}{y}\right)\right| \\ &\leq \frac{|x-y|}{y} \leq \frac{1}{a}|x-y|. \end{aligned}$$

FATO 2: Seja $f\colon M \to M$ uma transformação diferenciável numa variedade compacta M. Suponha que o jacobiano $J\colon x \mapsto \det Df(x)$ é Hölder. Então existem $C_0 > 0$ e $\nu > 0$ tais que $|\log|\det Df(x)| - \log|\det Df(y)|| \leq C_0 d(x,y)^\nu$ para quaisquer $x, y \in M$.

Por hipótese, existem $C > 0$ e $0 < \nu \leq 1$ tais que $|J(x) - J(y)| \leq Cd(x,y)^\nu$ para todo $x, y \in M$. Como M é compacta e f é um difeomorfismo local ($Df(x)$ é isomorfismo para todo $x \in M$), existe $a > 0$ tal que $a \leq |\det Df(x)|$ para todo $x \in M$. Pelo Fato 1 temos que

$$\begin{aligned} |\log|\det Df(x)| - \log|\det Df(y)|| &\leq \frac{1}{a}||\det Df(x)| - |\det Df(x)|| \\ &\leq \frac{1}{a}|\det Df(x) - \det Df(x)| \\ &\leq \frac{1}{a}Cd(x,y)^\nu. \end{aligned}$$

Agora basta tomar $C_0 = C/a$.

Proposição 1.5.8 (Lema da distorção)**.** *Existe $C_1 > 0$ tal que, qualquer $n \geq 1$, qualquer $y \in M$ e qualquer ramo inverso $h^n\colon B(y,\rho) \to M$ de f^n, tem-se*

$$\log\frac{|\det Dh^n(y_1)|}{|\det Dh^n(y_2)|} \leq C_1 d(y_1,y_2)^\nu \leq C_1(2\rho)^\nu \tag{1.20}$$

para todo $y_1, y_2 \in B(y,\rho)$.

Demonstração. Dado $h^n = h_n \circ \cdots \circ h_1$ uma composição de ramos inversos de f. Seja também $h^i = h_i \circ \cdots \circ h_1$ para $1 \leq i \leq n$, bem como $h^0 = id$. Além disso, temos que

$Dh^n(x) = \prod\limits_{i=0}^{n} Dh_i(h^{i-1}(x))$. Daí,

$$\begin{aligned}
\log \frac{|\det Dh^n(y_1)|}{|\det Dh^n(y_2)|} &= \log \prod_{i=1}^{n} \frac{|\det Dh_i(h^{i-1}(y_1))|}{|\det Dh_i(h^{i-1}(y_2))|} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \log|\det Dh_i(h^{i-1}(y_1))| - \log|\det Dh_i(h^{i-1}(y_2)|.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Como $Df(h_i(x))Dh_i(x) = \text{id}$ segue que $\log|\det Dh_i| = -\log|\det Df| \circ h_i$. Se valendo agora do Lema 1.5.6 temos

$$\begin{aligned}
\log \frac{|\det Dh^n(y_1)|}{|\det Dh^n(y_2)|} &= \sum_{i=1}^{n} \log|\det Df| \circ h^i(y_2) - \log|\det Df| \circ h^i(y_1) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} C_0 d(h^i(y_1), h^i(y_2))^\nu \leq \sum_{i=1}^{n} C_0 \sigma^{-i\nu} d(y_1, y_2)^\nu.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

A proposição segue agora tomando $C_1 = C_0 \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma^{-i\nu}$. □

Vamos finalizar essa seção discutindo uma noção mais geral de transformação expansora.

Definição 1.5.9. Seja $f\colon M \to M$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto M. Dizemos que f é *expansora* se existem constantes $\sigma > 1$ e $\rho > 0$ tais que para todo $p \in M$, a imagem da bola $B(p,\rho)$ contêm uma vizinhança do fecho de $B(f(p),\rho)$ e para todo $x, y \in B(p,\rho)$ vale

$$d(f(x), f(y)) \geq \sigma d(x,y). \tag{1.23}$$

Observamos que toda aplicação que é expansora segundo a Definição 1.5.1 é expansora de acordo com a Definição 1.5.9.

Lema 1.5.10. *Suponha que $f\colon M \to M$ é uma transformação expansora e que $\Lambda \subset M$ é um compacto tal que $f^{-1}(\Lambda) = \Lambda$. Então a restrição $f\colon \Lambda \to \Lambda$ também é uma transformação expansora.*

Demonstração. A expressão (1.23) continua sendo válida na restrição. Falta analisar se $f(\Lambda \cap B(p,\rho))$ contém uma vizinhança de $\Lambda \cap \overline{B}(f(p,\rho))$ em Λ. Por hipótese, $f(B(p,\rho))$ contém uma vizinhança V de $\overline{B}(f(p,\rho)$. Então $\Lambda \cap V$ é uma vizinhança de $\Lambda \cap \overline{B}(f(p,\rho))$. Além disso, dado qualquer $y \in \Lambda \cap V$ existe $x \in B(p,\rho)$ tal que $f(x) = y$. Com $f^{-1}(\Lambda) = \Lambda$, este ponto está necessáriamente em Λ. Isto prova que $\Lambda \cap V$ está contida em $f(\Lambda \cap B(p,\rho))$. Assim, a restrição de f a Λ é uma transformação expansora como afirmado. $\square$

Exemplo 1.5.11. Seja $J \subset [0,1]$ uma união finita de dois ou mais intervalos compactos disjuntos. Considere uma aplicação $f\colon J \to [0,1]$ tal que a restrição de f a cada componente conexa de J é um difeomorfismo sobre $[0,1]$. Suponha $\sigma > 1$ para todo $x \in J$ tal que

$$|f'(x)| \geq \sigma \text{ para todo } x \in J. \tag{1.24}$$

Represente $\Omega = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} f^{-n}(J)$. Isto é, Ω o conjunto de pontos x cujos iterados $f^n(x)$ estão definidos para todo $n \geq 0$ Segue imediatamente da definição que Ω é compacto e que $f^{-1}(\Omega) = \Omega$. A restrição $f\colon \Omega \to \Omega$ é uma transformação expansora. De fato, fixe $\rho > 0$ menor que a distância mínima entre duas quaisquer componentes conexas de J. Então qualquer bola de raio ρ em Ω está contida numa única componente conexa de J. Por (1.24), ela é dilatada a taxa maior ou igual que σ.

Definição 1.5.12. Seja $f\colon M \to M$ uma transformação expansora. A equação (1.23) mostra que a restrição de f a cada bola $B(p,\rho)$ de raio ρ é injetiva e sua imagem contém o fecho de $B(f(p),\rho)$. Deste modo, a restrição de f a $B(p,\rho) \cap f^{-1}(B(f(p),\rho))$ é um homeomorfismo sobre $B(f(p),\rho)$. Intitulamos como *ramo inverso* de f em p a inversa

$$h_p\colon B(f(p),\rho) \to B(p,\rho)$$

desse homeomorfismo. Claro que $h_p(f(p)) = p$ e $f \circ h_p = \text{id}$. A expressão (1.23) implica que para todo $z, w \in B(f(p),\rho)$ h_p é contração, pois

$$d(h_p(z), h_p(w)) \leq \sigma^{-1} d(f(h_p(z), f(h_p(w)) = \sigma^{-1} d(z,w). \tag{1.25}$$

No geral, dado $n \geq 1$, chamamos de *ramo inverso de f^n* em p à composição

$$h_p^n = h_p \circ \cdots \circ h_{f^{n-1}(p)}\colon B(f^n(p),\rho) \to B(p,\rho)$$

dos ramos inversos de f nos iterados de p. Temos que $h_n^p(f^n(p)) = p$ e $f^n \circ h_p^n = \text{id}$.

Ainda, $f^j \circ h_p^n = f^j \circ h_p^j \circ h_{f^j(p)}^{n-j} = \mathrm{id} \circ h_{f^j(p)}^{n-j} = h_{f^j(p)}^{n-j}$ para cada $0 \leq j \leq n$. Logo, usando da expressão (1.23), para todo $z, w \in B(f^n(p), \rho)$ e $0 \leq j \leq n$ temos

$$\begin{aligned} d(f^j \circ h_p^n(z), f^j \circ h_p^n(w)) &\leq \sigma^{-(n-j)} d(f^{n-j}(f^j(h_p^n(z))), f^{n-j}(f^j(h_p^n(w)))) \\ &= \sigma^{-(n-j)} d(f^n(h_p^n(z)), f^n(h_p^n(w))) \\ &= \sigma^{j-n} d(z, w). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Lema 1.5.13. *Se $f : M \to M$ é expansora, então, para todo $y \in M$,*

$$f^{-1}(B(y, \rho)) = \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} h_x(B(y, \rho)).$$

Demonstração. Seja $h_x(B(y, \rho))$ contido na pré-imagem de $B(y, \rho)$ para todo $x \in f^{-1}(y)$ em virtude de que $f \circ h_x = id$. Consequentemente, $\bigcup_{x \in f^{-1}(y)} h_x(B(y, \rho)) \subset f^{-1}(B(y, \rho))$. Por outro lado, dado o ponto z tal que $f(z) \in B(y, \rho)$. Pela Definição 1.5.9, a bola $B(f(z), \rho)$ está contida em $f(B(z, \rho))$ e, assim, contém y. Sendo $h_z \colon B(f(z), \rho) \to M$ o ramo inverso de f que envia o $f(z)$ em z e $h_z(y) = x$, o ponto z e o ramo inverso $h_x(f(z)$ estão na bola $B(x, \rho)$. Em vista da injetividade de f em cada bola de raio ρ e $f(h_x(f(z))) = f(z)$, resulta que $z = h_x(f(z))$. Logo $f^{-1}(B(y, \rho)) \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} h_x(B(y, \rho))$. $\square$

Lema 1.5.14. *Se $f \colon M \to M$ é expansora, $f^n(B(p, n+1, \varepsilon)) = B(f^n(p), \varepsilon)$ para todo $p \in M$, $n \geq 0$ e $\varepsilon \in (0, \rho]$.*

Demonstração. Da Definição 2.0.2 temos que $f^n(B(p, n+1, \varepsilon)) \subset B(f^n(p), \varepsilon)$. Para a outra inclusão, seja o ramo inverso $h_p^n \colon B(f^n(p), \rho) \to B(p, \rho)$. Dado qualquer $y \in B(f^n(p), \varepsilon)$, considere $x = h_p^n(y)$. Nesse caso, $f^n(x) = f^n(h_p^n(y)) = \mathrm{id}(y) = y$ e, usando a relação (1.26),

$$d(f^j(x), f^j(p)) = d(f^j(h_p^n(y)), f^j(h_p^n(p)) \leq \sigma^{j-n} d(f^n(x), f^n(p)) \leq d(y, f^n(p)) < \varepsilon$$

para todo $0 \leq j \leq n$. Sendo assim, $x \in B(p, n+1, \varepsilon)$. Deste modo, vamos ter que $B(f^n(p), \varepsilon) \subset f^n(B(p, n+1, \varepsilon))$. $\square$

Corolário 1.5.15. *Toda transformação expansora é expansiva.*

Demonstração. Sejam z e w tais que $d(f^n(z), f^n(w)) < \rho$ para todo $n \geq 0$, ou seja, $f^n(z) \in B(f^n(w), \rho)$ para todo $n \geq 0$ e , assim, o ramo inverso que manda $f^n(w)$ em w, envia $f^n(z)$ em z. Portanto, $z = h_w^n(f^n(z))$ para todo $n \geq 0$. Conforme a propriedade (1.23),

$$d(z, w) = d(h_w^n(f^n(z)), h_w^n(f^n(w))) \leq \sigma^{-n} d(f^n(z), f^n(w)) < \rho\sigma^{-n}.$$

Fazendo $n \to \infty$, concluímos que $z = w$. Assim, ρ é uma constante de expansividade para f. $\square$

Capítulo 2

EXPANSIVIDADE E ESTADOS DE EQUILÍBRIO

O objetivo deste capítulo é provar o resultado principal deste trabalho: *O Teorema de Ruelle*. Mais especificamente, veremos que para uma classe de transformações expansoras temos existência e unicidade de estados de equilíbrio.

Definição 2.0.1. Uma transformação $f\colon M \to M$ num espaço métrico compacto é dita *topologicamente exata* se para todo aberto $U \subset M$ existe $N \geq 1$ tal que $f^N(U) = M$.

Definição 2.0.2. Suponha $f\colon M \to M$ uma aplicação contínua num espaço métrico compacto. Dado $x \in M, n \geq 1$ e $\varepsilon > 0$, chamamos *bola dinâmica* de comprimento n e raio ε em torno de x ao conjunto:

$$B(x, n, \varepsilon) = \{y \in M\colon d(f^j(x), f^j(y)) < \varepsilon\}$$

para todo $j = 0, \ldots, n-1$.

Definição 2.0.3. Uma medida ν é um *estado de Gibbs* se existem constantes $K \geq 1$ e $P \in \mathbb{R}$ tais que

$$K^{-1} \leq \frac{\nu(B(x, n, \varepsilon))}{\exp(\varphi_n(x) - nP)} \leq K$$

para todo $x \in M$ e todo $n \geq 1$, onde φ_n são as somas orbitais de φ e $B(x, n, \varepsilon)$ é a bola dinâmica de comprimento n e raio ε em torno de x.

Definição 2.0.4. Dado um espaço topológico M e uma probabilidade boreliana μ de M. O *suporte* de uma medida μ é o conjunto dos pontos $x \in M$ tais que $\mu(V) > 0$ para toda vizinhança V de x. Denotamos por supp μ.

Podemos agora enunciar o teorema principal do trabalho.

Teorema Principal 1 (Ruelle)**.** Seja $f\colon M \to M$ uma transformação expansora topologicamente exata num espaço métrico compacto e seja $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ uma função Hölder contínua. Então existe um único estado de equilíbrio μ para φ. Além disso, a medida μ é exata, está suportada em todo o espaço M e é um estado de Gibbs.

Seja $f\colon M \to M$ uma transformação expansora topologicamente exata e seja φ um potencial Hölder. No que segue, $\rho > 0$ e $\sigma > 1$ são as mesmas constantes da definição de transformação expansora. E vamos denotar por φ_n as somas orbitais de φ:

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) \text{ para } x \in M.$$

Definição 2.0.5. O *operador de transferência*, ou *operador de Ruelle-Perron-Frobenius* é o operador linear $\mathcal{L}\colon C^0(M) \to C^0(M)$ definido no espaço $C^0(M)$ da funções contínuas complexas por

$$\mathcal{L}g(y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} e^{\varphi(x)} g(x). \tag{2.1}$$

Veja que $\mathcal{L}$ está bem definido já que $\mathcal{L}g \in C^0(M)$ é contínua sempre que $g \in C^0(M)$. Conforme o Lema 1.5.13, para cada $y \in M$, existem ramos inversos $h_i\colon B(x,\rho) \to M$, $i = 1,\dots,k$ de f tais que $\bigcup_{i=1}^k h_i(B(y,\rho))$ coincide com a pré-imagem da bola $B(y,\rho)$. Logo, restrito à bola $B(y,\rho)$, temos a função contínua

$$\mathcal{L}g = \sum_{i=1}^{k} (e^{\varphi} g) \circ h_i. \tag{2.2}$$

Segue da definição que $\mathcal{L}$ é um operador positivo, ou seja, se $g(x) \geq 0$ para todo $x \in M$ então $\mathcal{L}g(y) \geq 0$ para todo $y \in M$. Afirmamos que $\mathcal{L}$ é um operador contínuo. De fato, para todo $g \in C^0(M)$ temos

$$\|\mathcal{L}g\| = \sup_{y\in M} |\mathcal{L}g(y)| \leq \operatorname{grau}(f) e^{\sup \varphi} \sup_{y \in M} |g(y)| = \operatorname{grau}(f) e^{\sup\varphi} \|g\|, \tag{2.3}$$

onde $\operatorname{grau}(f) = \max\{\# f^{-1}(y)\colon y \in M\}$. Portanto, $\|\mathcal{L}\| \leq \operatorname{grau}(f) e^{\sup \varphi}$.

Pelo Teorema de Riesz-Markov (Teorema 0.3.11 de Oliveira e Viana (2019)), o dual do espaço de Banach $C^0(M)$ se identifica com o espaço vetorial $\mathcal{M}(M)$ das medidas borelianas complexas. Então, podemos considerar o seu operador dual.

Definição 2.0.6. O *dual do operador de transferência* é o operador linear $\mathcal{L}^*\colon \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(M)$ definido pela identidade

$$\int g d(\mathcal{L}^* \eta) = \int (\mathcal{L}g) d\eta \tag{2.4}$$

para todo $g \in C^0(M)$ e $\eta \in \mathcal{M}(M)$.

Note que este operador linear é positivo: se η é uma medida positiva então $\mathcal{L}^*\eta$ também é uma medida positiva.

Vamos encerrar essa seção com alguns fatos elementares que serão usados mais à frente no texto.

Seja E um espaço de Banach e $T\colon E \to E$ um operador linear contínuo. Por definição, o raio espectral de T é definido por

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Afirmamos que $r(T) = r(T^*)$, onde $T^*\colon E^* \to E^*$ representa o operador linear *contínuo* dual a T. Como $(T^*)^n = (T^n)^*$ para todo $n \geq 1$, segue que para provar a afirmação é suficiente argumentar que $\|T\| = \|T^*\|$. Pelo Teorema de Hahn-Banach (veja também o Corolário 1.4 de Brezis (2011)) segue que

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|_E = \sup_{\|x\|=1} \sup_{\substack{f\in E^* \\ \|f\|=1}} |f(T(x))| = \sup_{\substack{f\in E^* \\ \|f\|=1}} \sup_{\|x\|=1} |f(T(x))| \\
&= \sup_{\substack{f\in E^* \\ \|f\|=1}} \sup_{\|x\|=1} |(T^*f)(x)| = \sup_{\substack{f\in E^* \\ \|f\|=1}} \|(T^*f)\|_{E^*} = \|T^*\|.
\end{aligned}$$

Definição 2.0.7. Seja E um espaço de Banach. Um subconjunto fechado e convexo C é dito *cone* de E se,

$$\lambda C \subset C \text{ para todo } \lambda \geq 0 \text{ e } C \cap (-C) = \{0\}. \tag{2.5}$$

Dizemos que o cone C é normal quando

$$\inf\{\|x+y\| : x, y \in C \text{ tais que } \|x\| = \|y\| = 1\} > 0. \tag{2.6}$$

Do Teorema de Banach-Mazur (veja Teorema 6.5.5 de Botelho, Pellegrino e Teixeira (2012)) todo espaço de Banach separável é isométrico a algum subespaço fechado de $C[0,1]$. A seguir temos uma consequência desse teorema:

Lema 2.0.8. *Seja C um cone normal num espaço de Banach E e seja $T\colon E \to E$ um operador linear positivo sobre C, ou seja, $T(C) \subset C$. Então, o raio espectral $r(T^*) = r(T)$ é autovalor do operador dual $T^*\colon E^* \to E^*$ e admite algum autovetor $\nu^* \in C^*$.*

Dividiremos a demonstração do Teorema Principal 1 em alguns passos.

2.1 Medida de referência

O primeiro passo é mostrar que existe uma medida ν em M tal que $\mathcal{L}^*\nu = \lambda\nu$. Essa medida admite um jacobiano positivo e Hölder, e seu suporte é todo o espaço M.

Proposição 2.1.1. *Considere o raio espectral $\lambda = r(\mathcal{L}^*) = r(\mathcal{L})$. Então existe alguma probabilidade ν em M tal que $\mathcal{L}^*\nu = \lambda\nu$.*

Demonstração. O conjunto $C^0_+(M) \subset C^0(M)$ das funções contínuas positivas é um cone normal e é preservado pelo operador de transferência $\mathcal{L}$. Aplicando o Lema (2.0.8) com $E = C^0(M), C = C^0_+(M)$ e $T = \mathcal{L}$ temos que $\mathcal{L}^*$ admite algum autovetor $\nu \in C^0_+(M)^* = \{\nu \in C^0(M)^* \colon \nu(\psi) \geq 0, \forall\psi \in C^0_+(M)\}$ no cone das medidas borelianas positivas finitas correspondente ao autovalor λ. Normalizando ν, podemos supor que se trata de uma probabilidade. $\square$

Definição 2.1.2. Denominaremos como *medida de referência* uma probabilidade ν satisfazendo $\mathcal{L}^*\nu = \lambda\nu$ para algum $\lambda > 0$.

Lema 2.1.3. *A transformação $f\colon M \to M$ admite jacobiano relativamente a ν, dado por $J_\nu f = \lambda e^{-\varphi}$.*

Demonstração. Dado A um domínínio de invertibilidade qualquer de f. Seja $(g_n)_n$ uma sequência de funções contínuas convergindo em ν-quase todo ponto para a função característica de A tal que $\sup |g_n| \leq 1$ para todo n. Observe que

$$\mathcal{L}(e^{-\varphi}g_n)(y) = \sum_{x\in f^{-1}(y)} e^{\varphi(x)}e^{-\varphi(x)}g_n(x) = \sum_{x\in f^{-1}(y)} g_n(x).$$

O lado direito da expressão acima é limitado pelo grau de f, e temos também que

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(e^{-\varphi}g_n)(y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{x\in f^{-1}(y)} g_n(x) = \sum_{x\in f^{-1}(y)} \mathcal{X}_A(x) = \mathcal{X}_{f(A)}(y).$$

em ν-quase todo ponto. Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int \mathcal{L}(e^{-\varphi}g_n)d\nu = \int \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(e^{-\varphi}g_n)d\nu = \int \mathcal{X}_{f(A)}d\nu = \nu(f(A)).$$

Por outro lado,

$$\lim_{n\to\infty}\int \mathcal{L}(e^{-\varphi}g_n)d\nu = \lim_{n\to\infty}\int (e^{-\varphi}g_n)d(\mathcal{L}^*\nu) = \lim_{n\to\infty}\int (e^{-\varphi}g_n)d(\lambda\nu)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int (\lambda e^{-\varphi}g_n)d\nu.$$

Fazendo uso novamente do Teorema da Convergência Dominada vem

$$\lim_{n\to\infty}\int (\lambda e^{-\varphi}g_n)d\nu = \int \lim_{n\to\infty}(\lambda e^{-\varphi}g_n)d\nu = \int (\lambda e^{-\varphi}\mathcal{X}_A)d\nu = \int_A (\lambda e^{-\varphi})d\nu.$$

Portanto,

$$\nu(f(A)) = \int_A (\lambda e^{-\varphi})d\nu.$$

Isso prova a afirmação de que $J_\nu f = \lambda e^{-\varphi}$. □

Lema 2.1.4. *Seja $f\colon M \to M$ uma transformação expansora topologicamente exata e seja η qualquer probabilidade boreliana tal que existe jacobiano de f relativamente a η. Então η está suportada em todo o M.*

Demonstração. Suponha que exista um aberto $U \subset M$ tal que $\eta(U) = 0$. Como f é uma aplicação aberta, já que por ser expansora f é um homeomorfismo local, então $f(U)$ também é um aberto. Sendo f homeomorfismo local e M compacto, podemos cobrir U com uma união finita de domínios de invertibilidade A. Segue daí que,

$$\eta(f(A)) = \int_A J_\eta f d\eta = 0.$$

Portanto, $\eta(f(U)) = 0$. Por indução, concluímos que $\eta(f^n(U)) = 0$ para todo $n \geq 0$. Como f é topologicamente exata, existe $k \geq 1$ tal que $f^k(U) = M$. Como $\eta(M) = 1$, isso gera uma contradição. □

2.2 Distorção do jacobiano e estado de Gibbs

Nessa etapa, vamos apresentar alguns resultados de controle da distorção limitada. Para isso, utilizaremos a hipótese de que o potencial é Hölder.

Fixe constantes $K_0 > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $|\varphi(z) - \varphi(w)| \leq K_0 d(z,w)^\alpha$ para todo $z, w \in M$.

Lema 2.2.1. *Existe $K_1 > 0$ tal que para todo $n \geq 1$, todo $x \in M$ e todo $y \in B(x, n+1, \rho)$,*

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \leq K_1 d(f^n(x), f^n(y))^\alpha.$$

Demonstração. Por hipótese, $d(f^j(x), f^j(y)) < \rho$ para todo $0 \leq j \leq n$. Então, para cada $j = 1, \ldots, n$, o ramo contrativo $h_j \colon B(f^n(x), \rho) \to M$ de f^j envia $f^n(x)$ em $f^{n-j}(x)$ também satisfaz $h_j(f^n(y)) = f^{n-j}(y)$. Disto segue que,

$$d(f^{n-j}(x), f^{n-j}(y)) = d(h_j(f^n(x)), h_j(f^n(y))) \leq \sigma^{-j} d(f^n(x), f^n(y)),$$

para todo $j = 1, \ldots, n$. Então,

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} |\varphi(f^j(x)) - \varphi(f^j(y))| = \sum_{j=1}^{n} |\varphi(f^{n-j}(x)) - \varphi(f^{n-j}(y))| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} K_0 d(f^{n-j}(x), f^{n-j}(y))^\alpha \leq \sum_{j=1}^{n} K_0 \sigma^{-j\alpha} d(f^n(x), f^n(y))^\alpha. \end{aligned}$$

Assim, tomando $K_1 \geq K_0 \sum\limits_{j=0}^{\infty} \sigma^{-j\alpha}$, o lema segue. □

O lema acima permite obter uma variação do lema da distorção, em que o jacobiano usual com respeito a Lebesgue é substituído pelo jacobiano relativamente à medida de referência ν:

Corolário 2.2.2. *Existe um $K_2 > 0$ tal que para todo $n \geq 1$, todo $x \in M$ e para todo $y \in B(x, n+1, \rho)$*

$$K_2^{-1} \leq \frac{J_\nu f^n(x)}{J_\nu f^n(y)} \leq K_2.$$

Demonstração. Pelo Lema 2.1.3 e Lema 1.4.15, segue que,

$$J_\nu f^n(z) = \prod_{j=0}^{n-1} J_\nu f(f^j(z)) = \prod_{j=0}^{n-1} \left[\lambda e^{-\varphi(f^j(z))}\right] = \lambda^n e^{-\sum\limits_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(z))} = \lambda^n e^{-\varphi_n(z)}, \tag{2.7}$$

para todo $z \in M$ e todo $n \geq 1$. Então, pelo Lema 2.2.1 temos

$$\left|\log\frac{J_\nu f^n(x)}{J_\nu f^n(y)}\right| = |n\log\lambda - \varphi_n(x) - n\log\lambda + \varphi_n(y)| = |\varphi_n(x) - \varphi_n(y)|$$
$$\leq K_1 d(f^n(x), f^n(y))^\alpha \leq K_1\rho^\alpha.$$

já que, por hipótese, $d(f^n(x), f^n(y)) < \rho$. Assim, podemos escolher $K_2 = \exp(K_1\rho^\alpha)$. □

Agora podemos mostrar que toda medida de referência ν é um estado de Gibbs:

Proposição 2.2.3. *Seja μ uma medida de Borel em um espaço métrico compacto. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $L > 0$ tal que $\mu(B(y,\varepsilon)) > L$ para todo $y \in \operatorname{supp}\mu$.*

Demonstração. É fácil ver que $\operatorname{supp}\mu$ é um conjunto fechado, logo compacto. Seja $\varepsilon > 0$. Por definição, para cada $y \in \operatorname{supp}\mu$ vale $\mu(B(y,\frac{\varepsilon}{3})) = L_y > 0$. Da compacidade, existem $y_1, \ldots, y_\ell$ de modo que $\operatorname{supp}\mu \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} B(y_j, \frac{\varepsilon}{3})$. Tome $L = \frac{1}{2}\min\{L_{y_1}, \ldots, L_{y_\ell}\}$. Como para cada $y \in \operatorname{supp}\mu$ existe y_j tal que $B(y,\varepsilon) \supset B(y_j, \frac{\varepsilon}{3})$, segue que $\mu(B(y,\varepsilon)) > L$. □

Lema 2.2.4. *Para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $K_3 = K_3(\varepsilon) > 0$ tal que, sendo $P = \log\lambda$,*

$$K_3^{-1} \leq \frac{\nu(B(x,n,\varepsilon))}{\exp(\varphi_n(x) - nP)} \leq K_3$$

para todo $x \in M$ e todo $n \geq 1$.

Demonstração. Considere $\varepsilon < \rho$. Então $f \restriction_{B(y,\varepsilon)}$ é injetiva para todo $y \in M$ e, assim, $f^n \restriction_{B(x,n,\varepsilon)}$ também é injetiva para todo $x \in M$ e todo $n \geq 1$. Daí,

$$\nu(f^n(B(x,n,\varepsilon))) = \int_{B(x,n,\varepsilon)} J_\nu f^n(y)\,d\nu(y).$$

Pelo Corolário 2.2.2,

$$K_2^{-1} J_\nu f^n(y) \leq J_\nu f^n(x) \leq K_2 J_\nu f^n(y),$$

temos

$$K_2^{-1}\nu(f^n(B(x,n,\varepsilon))) \leq J_\nu f^n(x)\nu(B(x,n,\varepsilon)) \leq K_2\nu(f^n(B(x,n,\varepsilon))). \tag{2.8}$$

Como vimos em (2.7), $J_\nu f^n(x) = \lambda^n e^{-\varphi_n(x)} = \exp(nP - \varphi_n(x))$, já pelo Lema 1.5.14,

$f^n(B(x,n,\varepsilon)) = f(B(f^{n-1}(x),\varepsilon))$. Portanto,

$$\nu(f^n(B(x,n,\varepsilon))) = \int_{B(f^{n-1}(x),\varepsilon)} J_\nu f \, d\nu \tag{2.9}$$

para todo $x \in M$ e todo n. O lado esquerdo da expressão (2.9) é majorado por 1. Também temos que $J_\nu f = \lambda e^{-\varphi}$ é limitado por zero e, de acordo com a Proposição 2.2.3 e o Lema 2.1.4, $\{\nu(B(y,\varepsilon)) \colon y \in M\}$ também é limitado por zero. Assim, (2.9) é minorado por algum $a > 0$. Logo, usando essas informações em (2.8),

$$K_2^{-1} a \leq \frac{\nu(B(x,n,\varepsilon))}{\exp(\varphi_n(x) - nP)} \leq K_2.$$

Agora é suficiente tomarmos $K_3 = \max\{\frac{K_2}{a}, K_2\}$. □

2.3 *Existência de autofunção*

Agora, vamos mostrar que o operador $\mathcal{L}$ admite alguma autofunção positiva h associada ao autovalor $\lambda > 0$. Ela será construída como um ponto de acumulação Cesàro da sequência de funções $\lambda^{-1}\mathcal{L}^n 1$. Para mostrar a existência desse ponto de acumulação, começamos por provar que esta sequência é uniformemente limitada e equicontínua.

Lema 2.3.1. *Existe $K_4 > 0$ tal que*

$$-K_4 d(y_1,y_2)^\alpha \leq \log \frac{\mathcal{L}^n 1(y_1)}{\mathcal{L}^n 1(y_2)} \leq K_4 d(y_1,y_2)^\alpha$$

para todo $n \geq 1$ e quaisquer $y_1, y_2 \in M$ com $d(y_1,y_2) < \rho$.

Demonstração. Para toda função contínua g, a equação (2.2) diz que

$$\mathcal{L}^n g = \textstyle\sum_i (e^{\varphi_n} g) \circ h_i^n \quad \text{restrito a cada bola } B(y,\rho),$$

onde a soma é sobre o ramos inversos $h_i^n \colon B(y,\rho) \to M$ do iterado f^n. Em particular,

$$\frac{\mathcal{L}^n 1(y_1)}{\mathcal{L}^n 1(y_2)} = \frac{\sum_i e^{\varphi_n(h_i^n(y_1))}}{\sum_i e^{\varphi_n(h_i^n(y_2))}}.$$

O Lema 2.2.1 implica para cada um desses ramos inversos h_i^n que

$$|\varphi_n(h_i^n(y_1)) - \varphi_n(h_i^n(y_2))| \leq K_1 d(y_1,y_2)^\alpha.$$

Assim,

$$e^{-K_1 d(y_1,y_2)^\alpha} \leq \frac{\mathcal{L}^n 1(y_1)}{\mathcal{L}^n 1(y_2)} \leq e^{K_1 d(y_1,y_2)^\alpha}.$$

Logo, basta escolher $K_4 \geq K_1$. $\square$

Como consequência, temos que a sequência $\lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1$ é limitada de zero e de infinito.

Corolário 2.3.2. *Existe $K_5 > 0$ tal que $K_5^{-1} \leq \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(x) \leq K_5$ para todo $n \geq 1$ e qualquer $x \in M$.*

Demonstração. Observe que, para todo $n \geq 1$,

$$\int \mathcal{L}^n 1 d\nu = \int 1 d(\mathcal{L}^{*n}\nu) = \int 1 d(\lambda^n \nu) = \int \lambda^n d\nu = \lambda^n.$$

Daí,

$$\min_{y\in M} \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(y) \leq 1 \leq \max_{y \in M} \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(y) \text{ para todo } n \geq 1. \tag{2.10}$$

Como f é topologicamente exata, existe $N \geq 1$ tal que $f^N(B(x,\rho)) = M$ para todo $x \in M$. Agora, dados $x, y \in M$ quaisquer, podemos encontrar $x' \in B(x,\rho)$ tal que $f^N(x') = y$. Seja $c = \sup|\varphi|$. Note que $-c = \inf(-|\varphi|)$ e daí

$$\varphi_N(x') = \sum_{j=0}^{N-1} \varphi(f^j(x')) \geq \sum_{j=0}^{N-1} -|\varphi|(f^j(x')) \geq \sum_{j=0}^{N-1} \inf(-|\varphi|) \geq N \inf(-|\varphi|) = -cN.$$

Por um lado

$$\mathcal{L}^{n+N} 1(y) = \sum_{z \in f^{-N}(y)} e^{\varphi_N(z)} \mathcal{L}^n 1(z) \geq e^{\varphi_N(x')}\mathcal{L}^n 1(x') \geq e^{-cN}\mathcal{L}^n 1(x').$$

Por outro lado, o Lema 2.3.1 implica $\mathcal{L}^n 1(x') \geq \mathcal{L}^n 1(x) \exp(-K_4\rho^\alpha)$. Tomando $K \geq \exp(K_4\rho^\alpha)e^{cN}\lambda^N$. Portanto,

$$\mathcal{L}^{n+N} 1(y) \geq \exp(-K_4\rho^\alpha)e^{-cN}\mathcal{L}^n 1(x) \geq K^{-1}\lambda^N \mathcal{L}^n 1(x)$$

para todo $x, y \in M$. Logo, para todo $n \geq 1$,

$$\min \lambda^{-(n+N)}\mathcal{L}^{n+N} 1 \geq K^{-1} \max \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1. \tag{2.11}$$

Combinando (2.10) e (2.11) obtemos,

$$\max \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1 \leq K \min \lambda^{-(n+N)}\mathcal{L}^{n+N} 1 \leq K \text{ para todo } n \geq 1 \tag{2.12}$$

e

$$\min \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1 \geq K^{-1} \max \lambda^{-n+N}\mathcal{L}^{n-N} 1 \geq K^{-1} \text{ para todo } n > N. \tag{2.13}$$

Para concluir a prova, temos que analisar o caso em que $n = 1, \ldots, N$. Para isso, observe que cada $\mathcal{L}^n 1$ é uma função contínua e positiva. Como M é compacto, o mínimo de $\mathcal{L}^n 1$ é positivo para todo n. Portanto, existe $K_5 \geq K$ tal que $\min \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1 \geq K_5^{-1}$ para todo $n = 1, \ldots, N$. Logo, para todo $n \geq 1$,

$$K_5^{-1} \leq K^{-1} \leq \min \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1 \leq \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(x) \leq \max \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1 \leq K \leq K_5.$$

□

Segue imediatamente do Corolário 2.3.2 que o autovalor λ está unicamente determinado. De acordo com o Lema 2.1.1, isso quer dizer λ é necessariamente igual ao raio espectral de $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^*$.

Lema 2.3.3. *Existe $K_6 > 0$ tal que*

$$|\lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(x) - \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(y)| \leq K_6 d(x,y)^\alpha$$

para quaisquer $n \geq 1$ e $x, y \in M$. Em particular, a sequência $\lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1$ é equicontínua.

Demonstração. Suponha inicialmente que $d(x,y) < \rho$. Pelo Lema 2.3.1,

$$\mathcal{L}^n 1(x) \leq \mathcal{L}^n 1(y) \exp(K_4 d(x,y)^\alpha)$$

e, portanto,

$$\lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(x) - \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(y) \leq [\exp(K_4 d(x,y)^\alpha) - 1]\lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(y).$$

Tome $K > 0$ tal que $|\exp(K_4 t) - 1| \leq K|t|$ sempre que $|t| \leq \rho^\alpha$ então, usando o Corolário 2.3.2,

$$\lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(x) - \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(y) \leq K d(x,y)^\alpha \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(y) \leq K K_5 d(x,y)^\alpha.$$

Invertendo os papéis de x e y concluímos que

$$|\lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(x) - \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(y)| \leq KK_5 d(x,y)^\alpha.$$

sempre que $d(x,y) \leq \rho$. Quando $d(x,y) \geq \rho$, então $\frac{d(x,y)^\alpha}{\rho^\alpha} \geq 1$. Daí, usando a desigualdade triangular e do Corolário 2.3.2 temos que

$$|\lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(x) - \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(y)| \leq 2K_5 \leq 2K_5\rho^{-\alpha} d(x,y)^\alpha.$$

Logo, basta tomar $K_6 \geq \max\{KK_5, 2K_5\rho^{-\alpha}\}$. Como K não depende de n, então a sequência $\lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1$ é equicontínua. □

Do Corolário 2.3.2 e do Lema 2.3.3 segue que a média

$$h_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{-i}\mathcal{L}^i 1$$

define uma sequência limitada e equicontínua. Então, a partir do teorema de Ascoli-Arzelá, existe alguma subsequência $(h_{n_i})_i$ convergindo uniformemente para uma função contínua h.

Lema 2.3.4. *A função h satisfaz $\mathcal{L}h = \lambda h$. Além disso,*

- $\int h d\nu = 1$,
- $K_5^{-1} \leq h(x) \leq K_5$ *e*
- $|h(x) - h(y)| \leq K_6 d(x,y)^\alpha$ *para todo $x, y \in M$.*

Demonstração. Considere qualquer subsequência $(h_{n_i})_i$ convergindo para h. Como o operador $\mathcal{L}$ é contínuo,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}h &= \mathcal{L}\left[\lim_{i\to\infty}\frac{1}{n_i}\sum_{k=0}^{n_i-1}\lambda^{-k}\mathcal{L}^k 1\right] = \lim_{i\to\infty}\frac{1}{n_i}\sum_{k=0}^{n_i-1}\lambda^{-k}\mathcal{L}^{k+1}1 = \lim_{i\to\infty}\frac{\lambda}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\lambda^{-k}\mathcal{L}^k 1 \\ &= \lim_{i\to\infty}\frac{\lambda}{n_i}\sum_{k=0}^{n_i-1}\lambda^{-k}\mathcal{L}^k 1 + \frac{\lambda}{n_i}(\lambda^{-n_i}\mathcal{L}^{n_i}1 - 1).\end{aligned}$$

O primeiro termo do lado direito converge para λh e o segundo converge para zero, uma vez que a sequência $\lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1$ é limitada. Portanto, $\mathcal{L}h = \lambda h$ e a prova da primeira parte está completa. Agora, pela definição de ν, temos

$$\int \lambda^{-i}\mathcal{L}^i 1 d\nu = \int \lambda^{-i} d(\mathcal{L}^{*i}\nu) = \int 1 d\nu = 1$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\int h_n d\nu = \int \left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{-i}\mathcal{L}^i 1\right] d\nu = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int \lambda^{-i}\mathcal{L}^i 1 d\nu = 1$$

para todo n. Usando o teorema da convergência dominada, $\int h d\nu = 1$. As demais propriedades seguem do Corolário 2.3.2 e do Lema 2.3.3. $\square$

2.4 Construção do estado de equilíbrio

Seja a medida $\mu = h\nu$, ou seja
$$\mu(A) = \int_A h d\nu$$
para cada mensurável $A \subset M$. Veremos que μ é estado de quilíbrio para o potencial φ e verifica todas as demais condições do Teorema Principal 1.

Do Lema 2.3.4 vem que $\mu(M) = \int h d\nu = 1$, ou seja, μ é uma medida de probabilidade. Além disso, μ e ν são equivalentes, pois

$$K_5^{-1}\nu(A) \leq \mu(A) \leq K_5 \nu(A) \tag{2.14}$$

para todo mensurável $A \subset M$. Logo, pelo Lema 2.1.4 temos que μ está suportada em todo M. Tomando $L = K_3 K_5$, o Lema 2.2.4 implica

$$L^{-1} \leq \frac{\mu(B(x,n,\varepsilon))}{\exp(\varphi_n(x) - nP)} \leq L \tag{2.15}$$

para todo $x \in M$ e todo $n \geq 1$. Lembre que $P = \log \lambda$.

Lema 2.4.1. *A probabilidade μ é invariante por f. Além disso, f admite jacobiano relativamente a μ, dado por $J_\mu f = \lambda e^{-\varphi}\dfrac{h \circ f}{h}$.*

Demonstração. Primeiramente mostraremos que $\mathcal{L}((g_1 \circ f) g_2) = g_1 \mathcal{L} g_2$, quaisquer que sejam as funções contínuas $g_1, g_2 \colon M \to \mathbb{R}$. De fato, para todo $y \in M$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}((g_1 \circ f)g_2)(y) &= \sum_{x \in f^{-1}(y)} e^{\varphi(x)} g_1(f(x)) g_2(x) = g_1(y) \sum_{x \in f^{-1}(y)} e^{\varphi(x)} g_2(x) \\ &= g_1(y)\mathcal{L}g_2(y) = g_1\mathcal{L}g_2(y).\end{aligned} \tag{2.16}$$

Assim, para toda função contínua $g \colon M \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int (g \circ f) d\mu = \int (g \circ f) d(h\nu) &= \lambda^{-1} \int (g \circ f) h d(\lambda \nu) = \lambda^{-1} \int (g \circ f) h d(\mathcal{L}^* \nu) \\ &= \lambda^{-1} \int \mathcal{L}((g \circ f) h) d\nu = \lambda^{-1} \int g(\mathcal{L}h) d\nu = \lambda^{-1} \int g(\lambda h) d\nu \\ &= \int g d(h\nu) = \int g d\mu.\end{aligned}$$

Isso mostra que μ é invariante por f. Seja A um domínio de invertibilidade de f. Então, pela fórmula de mudança de variáveis, temos que

$$\mu(f(A)) = \int_{f(A)} 1 d\mu = \int_{f(A)} h d\nu = \int_A J_\nu f (h \circ f) d\nu = \int_A J_\nu f \frac{(h \circ f)}{h} d(h\nu) = \int_A J_\nu f \frac{(h \circ f)}{h} d\mu.$$

O Lema 2.1.3 agora implica que

$$J_\mu f = J_\nu f \frac{(h \circ f)}{h} = \lambda e^{-\varphi} \frac{(h \circ f)}{h}$$

como queríamos demonstrar. □

Corolário 2.4.2. *A medida invariante $\mu = h\nu$ cumpre a equação $h_\mu(f) + \int \varphi d\mu = P$.*

Demonstração. Combinando a Fórmula de Rokhlin com a expressão de $J_\mu f$ dada pelo Lema 2.4.1 temos

$$\begin{aligned}h_\mu(f) &= \int \log J_\mu f d\mu \\ &= \int \log \left[\lambda e^{-\varphi} \frac{(h \circ f)}{h} \right] d\mu \\ &= \log \lambda - \int \varphi d\mu + \int \log(h \circ f) - \log\ h\, d\mu.\end{aligned}$$

Como μ é invariante e h é limitada Corolário 2.3.2, a última parcela é igual a 0. Assim, lembrando que $P = \log \lambda$, temos $h_\mu(f) = P - \int \varphi d\mu$ conforme enunciado. □

O próximo passo é verificar que $P = \log \lambda$ é igual à pressão $P(f, \varphi)$ pra mostrar que

$\mu = h\nu$ é um estado de equilíbrio.

2.5 Estados de equilíbrio como autofunções

Vamos começar com um resultado elementar cuja prova pode ser encontrada em Oliveira e Viana (2019).

Lema 2.5.1. *Sejam $p_i, b_i, i = 1, \ldots, k$ númers reais positivos tais que $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. Então*

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \log b_i \leq \log\left(\sum_{i=1}^{k} p_i b_i\right),$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, os números b_j forem todos iguais a $\sum_{i=1}^{k} p_i b_i$.

Seja agora η uma probabilidade invariante por f satisfazendo

$$h_\eta(f) + \int \varphi d\eta \geq P \tag{2.17}$$

(como a medida μ construída na seção anterior). Mostraremos que,

$$h_\eta(f) + \int \varphi d\eta = P.$$

Considere as funções $g_\eta = \dfrac{1}{J_\eta f}$ e $g = \lambda^{-1} e^{\varphi} \dfrac{h}{h \circ f}$. Note que,

$$\begin{aligned}\sum_{x \in f^{-1}(y)} g(x) &= \sum_{x \in f^{-1}(y)} \lambda^{-1} e^{\varphi(x)} \frac{h(x)}{h(f(x))} = \frac{1}{\lambda h(y)} \sum_{x \in f^{-1}(y)} e^{\varphi(x)} h(x) \\ &= \frac{\mathcal{L}h(y)}{\lambda h(y)} = \frac{\lambda h(y)}{\lambda h(y)} = 1\end{aligned} \tag{2.18}$$

para todo $y \in M$. Como η é invariante por f, o Lema 1.4.14 implica

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} g_\eta(x) = 1, \tag{2.19}$$

para η-quase todo $y \in M$. Pela Fórmula de Rokhlin (1.4.11) e (2.17) vem

$$0 \leq h_\eta(f) + \int \varphi d\eta - P = \int \log J_\eta f\, d\eta + \int \varphi d\eta - \log \lambda$$
$$= \int (-\log\, g_\eta + \varphi - \log \lambda) d\eta. \tag{2.20}$$

Da definição de g e a hipótese de que η é invariante por f, o lado direito da integral anterior é igual a

$$\begin{aligned}\int (-\log\, g_\eta + \varphi - \log \lambda) d\eta &= \int (-\log\, g_\eta + \varphi - \log \lambda) d\eta - \int \log\, (h \circ f) d\eta + \int \log\, h\, d\eta \\ &= \int \Big(-\log\, g_\eta + \log\, e^{\varphi} + \log \lambda^{-1} - \log\, (h \circ f) + \log\, h\Big)\, d\eta \\ &= \int \left(-\log\, g_\eta + \log\, \left(\lambda^{-1} e^{\varphi} \frac{h}{h \circ f}\right)\right) d\eta \\ &= \int \big(-\log\, g_\eta + \log\, g\big)\, d\eta = \int \log \frac{g}{g_\eta} d\eta.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Lembrando que $g_\eta = \dfrac{1}{J_\eta f}$, o Lema 1.4.13 garante que,

$$\int \log \frac{g}{g_\eta} d\eta = \int \left(\sum_{x \in f^{-1}(y)} g_\eta(x) \log\, \frac{g}{g_\eta}(x) \right) d\eta(y). \tag{2.22}$$

Para cada $y \in M$, tome $p_i = g_\eta(x_i)$ e $b_i = g(x_i)/g_\eta(x_i)$, onde os x_i são pré-imagens de y. A igualdade (2.19) significa que $\sum_i p_i = 1$ para η-quase todo $y \in M$. Aplicando agora o Lema 2.5.1 e usando a expressão (2.18) temos,

$$\begin{aligned}\sum_{x \in f^{-1}(y)} g_\eta(x) \log\, \frac{g}{g_\eta}(x) &\leq \log \sum_{x \in f^{-1}(y)} g_\eta(x) \frac{g}{g_\eta}(x) \\ &= \log \sum_{x \in f^{-1}(y)} g(x) = \log 1 = 0\end{aligned} \tag{2.23}$$

para η-quase todo $y \in M$.

Combinando as relações de (2.20) a (2.23) obtemos:

$$\begin{aligned}0 \leq h_\eta(f) + \int \varphi d\eta - P &= \int \log\, \frac{g}{g_\eta} d\eta \\ &= \int \left(\sum_{x \in f^{-1}(y)} g_\eta(x) \log \frac{g}{g_\eta}(x) \right) d\eta(x) = 0.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Portanto, pela sentença (2.24), temos que $h_\eta(f) + \int \varphi d\eta = P$ para toda probabilidade invariante η tal que satisfaz $h_\eta(f) + \int \varphi d\eta \geq P$.

É claro que $\sup\{h_\eta(f) + \int \varphi d\eta : \eta \text{ invariante por } f\} \geq P$. Assim, segue do Princípio Variacional que $P = P(f, \varphi)$. Lembre que a Proposição 2.1.1 diz que $P = \log r(\mathcal{L})$. Isto finaliza prova que a medida $\mu = h\nu$ é um estado de equilíbrio para φ.

Para mostrarmos que $\mu = h\nu$ é o *único* estado de equilíbrio para o potencial φ, vamos ter como um dos pontos de partida o seguinte corolário:

Corolário 2.5.2. *Se η é um estado de equilíbrio para φ, então* $\operatorname{supp}\eta = M$ *e*

$$J_\eta f = \lambda e^{-\varphi} \frac{(h \circ f)}{h} \text{ e } \mathcal{L}^* \left(\frac{\eta}{h}\right) = \lambda \left(\frac{\eta}{h}\right).$$

Demonstração. A primeira afirmação do enunciado é consequência imediata da segunda e do Lema 2.1.4. A igualdade (2.24) implica que vale a igualdade em (2.23) para η-quase todo $y \in M$. De acordo com o Lema 2.5.1, isso ocorre se, e somente se, os números $b_i = \log(g(x_i)/g_\eta(x_i))$ são todos iguais. Ou seja, para η-quase todo $y \in M$ existe um número $c(y)$ tal que

$$\frac{g(x)}{g_\eta(x)} = c(y)$$

para todo $x \in f^{-1}(y)$. Além disso, das igualdades (2.20) e (2.21),

$$c(y) = c(y) \sum_{x \in f^{-1}(y)} g_\eta(x) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} c(y) g_\eta(x) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} g(x) = 1$$

para η-quase todo y. Segue que $g_\eta = g$ em η-quase todo ponto, ou seja, a função $1/g = \lambda e^{-\varepsilon}(h \circ f)/h$ é um jacobiano de f relativamente a η. Isto prova a segunda afirmação. Para provar a terceira afirmação, seja $\xi \colon M \to \mathbb{R}$ uma função contínua qualquer. Usando a definição de operador de transferência,

$$\begin{aligned} \int \xi d\, \mathcal{L}^* \left(\frac{\eta}{h}\right) &= \int \frac{1}{h}(\mathcal{L}\xi)\, d\eta = \int \frac{1}{h(y)} \left(\sum_{x \in f^{-1}(y)} e^{\varphi(x)} \xi(x) \right) d\eta(y) \\ &= \int \left(\sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{e^{\varphi(x)}}{h(y)} \xi(x) \right) d\eta(y). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Pela definição da função g e para todo $x \in f^{-1}(y)$,

$$g(x) = \lambda^{-1} e^{\varphi(x)} \frac{h(x)}{h(f(x))} \Rightarrow g(x) = \lambda^{-1} e^{\varphi(x)} \frac{h(x)}{h(y)} \Rightarrow \lambda \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{e^{\varphi(x)}}{h(y)}.$$

Substituindo a igualdade acima em (2.25), obtemos

$$\int \xi d\, \mathcal{L}^*\left(\frac{\eta}{h}\right) = \int \left(\sum_{x\in f^{-1}(y)} \lambda \frac{g(x)}{h(x)}\xi(x) \right) d\eta(y). \tag{2.26}$$

Lembrando que $g = g_\eta = 1/J_\eta f$, podemos usar o Lema 1.4.13 para concluir que

$$\begin{aligned}\int \xi d\mathcal{L}^*(\frac{\eta}{h}) &= \int \left(\sum_{x\in f^{-1}(y)} \lambda \frac{g(x)}{h(x)}\xi(x) \right) d\eta(y) = \int \left(\sum_{x\in f^{-1}(y)} \lambda \frac{\xi(x)}{h(x)} \left(\frac{1}{J_\eta f(x)}\right) \right) d\eta(y) \\ &= \int \lambda \frac{\xi(y)}{h(y)}\, d\eta(y) = \int \xi\, d\left(\frac{\lambda\eta}{h}\right).\end{aligned}$$

Como a função contínua ξ é arbitrária, isto mostra que $\mathcal{L}^*\left(\frac{\eta}{h}\right) = \lambda\left(\frac{\eta}{h}\right)$, tal como afirmamos. □

2.6 Unicidade do estado de equilíbrio

Primeiramente, provaremos o seguinte controle da distorção:

Corolário 2.6.1. *Existe uma constante $K_7 > 0$ tal que para todo estado de equilíbrio η, todo $n \geq 1$, todo $x \in M$ e todo $y \in B(x, n+1, \rho)$,*

$$K_7^{-1} \leq \frac{J_\eta f^n(x)}{J_\eta f^n(y)} \leq K_7.$$

Demonstração. Pelo Corolário 2.5.2 e o Lema 1.4.15 temos

$$\begin{aligned} J_\eta f^n(x) &= \prod_{i=0}^{n-1} J_\eta f(f^i(x)) = \prod_{i=0}^{n-1} \left[\lambda e^{-\varphi(f^i(x))} \frac{(h\circ f)}{h}(f^i(x)) \right] \\ &= \lambda^n e^{-\varphi(x)} \frac{h(f(x))}{h(x)} e^{-\varphi(f(x))} \frac{h(f^2(x))}{h(f(x))} \cdots e^{-\varphi(f^{n-1}(x))} \frac{h(f^n(x))}{h(f^{n-1}(x))} \\ &= \lambda^n e^{-\sum\limits_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x))} \frac{h(f^n(x))}{h(x)} = \lambda^n e^{-\varphi_n(x)} \frac{h(f^n(x))}{h(x)} \\ &= \left(J_\nu f^n \frac{(h\circ f^n)}{h} \right)(x) \end{aligned}$$

para cada $n \geq 1$. Sendo a ultima igualdade resultante da expressão (2.7) do Corolário

2.2.2. Então, usando o Corolário 2.2.2 e o Lema 2.3.4,

$$K_2^{-1}K_5^{-4} \leq \frac{J_\eta f^n(x)}{J_\eta f^n(y)} = \frac{J_\nu f^n(x)\frac{h(f^n(x))}{h(x)}}{J_\nu f^n(y)\frac{h(f^n(y))}{h(y)}} = \frac{J_\nu f^n(x)h(f^n(x))h(y)}{J_\nu f^n(y)h(f^n(y))h(x)} \leq K_2K_5^4.$$

Portanto, basta tomar $K_7 = K_2K_5^4$. □

Agora mostraremos que os estados de equilíbrio de φ são todos equivalentes entre si. Antes, apresentremos um fato que será usado no final da prova do próximo lema.

FATO 3: Seja $(M, \mathcal{M})$ um espaço mensurável. Considere μ e ν duas medidas de probabilidade em M. Suponha que exista uma constante $C > 0$ de modo que $\mu(B) \leq C\nu(B)$ para todo $B \in \mathcal{M}$. Então, a derivada de Radon-Nikodym de μ com relação à ν é limitada por alguma constante em ν-quase todo ponto.

Com efeito, a hipótese implica que $\mu \ll \nu$. Assim, o Teorema de Radon-Nikodym garante a existência da derivada de Radon-Nikodym de μ com relação à ν denotada por $f = d\mu/d\nu$. Suponha, por absurdo, que para todo $k \geq 1$ existam $B_k \in \mathcal{M}$ e uma sequência de números reais l_k satisfazendo $\lim_{k\to\infty} l_k = \infty$, $\nu(B_k) > 0$ e $f\restriction_{B_k} \geq l_k$. Usando mais uma vez o Teorema de Radon-Nikodym temos $C\nu(B_k) \geq \mu(B_k) = \int_{B_k} f d\nu \geq l_k\nu(B_k)$. Assim, $C \geq l_k$ para todo $k \geq 1$ o que é uma contradição com a finitude de C. Portanto, existe $L > 0$ tal que $f \leq L$ em ν-quase todo ponto.

Lema 2.6.2. *Todos os estados de equilíbrio de φ são equivalentes. Em particular, as derivadas de Radon-Nikodym são afastadas de zero e infinito.*

Demonstração. Sejam η_1 e η_2 dois estados de equilíbrio. Considere uma partição finita $\mathcal{P}$ de M tal que todo $P \in \mathcal{P}$ tem interior não vazio e diâmetro menor que ρ. O Corolário 2.5.2 garante que $\operatorname{supp}\eta_1 = \operatorname{supp}\eta_2 = M$ e, assim, o conjunto $\{\eta_i(P) \colon i = 1, 2 \text{ e } P \in \mathcal{P}\}$ é afastado de zero (pela Proposição 2.2.3). Então, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\frac{1}{C_1} \leq \frac{\eta_1(P)}{\eta_2(P)} \leq C_1 \tag{2.27}$$

para todo $P \in \mathcal{P}$. A menos de substituirmos C_1 por uma constante $C_2 \geq C_1$, mostraremos que esta relação ainda vale para todo subconjunto mensurável de M.

Para cada $n \geq 1$, seja $\mathcal{Q}_n$ a partição formada pelas imagens $h^n(P)$ dos ramos inversos

h^n de f^n. Pela definição de jacobiano,

$$\eta_i(P) = \eta_i(f^n(h^n(P))) = \int\limits_{h^n(P)} J_{\eta_i} f^n \, d\eta_i, \; i = 1,2.$$

Integrando a desigualdade do Corolário 2.6.1, temos

$$K_7^{-1} \int\limits_{h^n(P)} J_{\eta_i} f^n(x) \, d\eta_i(y) \leq \int\limits_{h^n(P)} J_{\eta_i} f^n(y) \, d\eta_i(y) \leq K_7 \int\limits_{h^n(P)} J_{\eta_i} f^n(x) \, d\eta_i(y).$$

Assim, obtemos

$$K_7^{-1} J_{\eta_i} f^n(x) \leq \frac{\eta_i(P)}{\eta_i(h^n(P))} \leq K_7 J_{\eta_i} f^n(x)$$

para todo $x \in h^n(P)$. Pelo Corolário 2.5.2, segue que $J_{\eta_1} f = J_{\eta_2} f$. Daí,

$$K_7^{-2} = K_7^{-2} \frac{J_{\eta_1} f^n(x)}{J_{\eta_2} f^n(x)} \leq \frac{\eta_2(P)\eta_1(h^n(P))}{\eta_1(P)\eta_2(h^n(P))} \leq K_7^2 \frac{J_{\eta_1} f^n(x)}{J_{\eta_2} f^n(x)} = K_7^2. \tag{2.28}$$

Portanto, tomando $C_2 = C_1 K_7^2$ e combinando as equações (2.27) e (2.28),

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_1 K_7^2} \leq \frac{\eta_1(P)\eta_2(P)\eta_1(h^n(P))}{\eta_2(P)\eta_1(P)\eta_2(h^n(P))} = \frac{\eta_1(h^n(P))}{\eta_2(h^n(P))} \leq C_1 K_7 = C_2 \tag{2.29}$$

para todo $P \in \mathcal{P}$, todo ramo inverso h^n de f^n e todo $n \geq 1$. Logo, a sentença (2.27) vale para todo $\mathcal{Q}_n$, com C_2 no lugar de C_1.

Note que diam $\mathcal{Q}_n < \sigma^{-n}\rho$ para todo $n \geq 1$, já que, $d(z,w) \leq \sigma^{-n} d(f^n(z), f^n(w)) < \sigma^{-n}\rho$ para todo $z, w \in \mathcal{Q}_n$. Seja B um conjunto mensurável qualquer e dado qualquer $\delta > 0$. Como toda probabilidade boreliana num espaço métrico é regular, podemos tomar um compacto $F \subset B$ e um aberto $A \supset B$ de modo que $\eta_i(A \setminus F) < \delta$ para $i = 1,2$. Considere Q_n o subconjunto da partição $\mathcal{Q}_n$ que intersecta F. Note que $F \subset Q_n$. Tomando n suficientemente grande temos que $Q_n \subset A$ e

$$\eta_1(B) \leq \eta_1(A) < \eta_1(Q_n) + \delta \;\; e \;\; \eta_2(B) \geq \eta_2(F) > \eta_2(Q_n) - \delta. \tag{2.30}$$

Da relação (2.29) resulta que $\eta_1(Q_n) \leq C_2 \eta_2(Q_n)$, já que Q_n é uma união disjunta de elementos de $\mathcal{Q}_n$. Combinando esse resultado com as duas desigualdades em (2.30), vamos ter

$$\eta_1(B) \leq \eta_1(Q_n) + \delta \leq C_2\eta_2(Q_n) + \delta \leq C_2(\eta_2(B) + \delta) + \delta.$$

Como δ é arbitrário, concluímos que $\eta_1(B) \leq C_2\eta_2(B)$ para todo conjunto mensurável $B \in M$. Invertendo os papéis de η_1 e η_2, obtemos que $\eta_2(B) \leq C_2\eta_1(B)$ para todo $B \in M$. Isso mostra que quaisquer dois estados de equilíbrio de φ são equivalentes.

As desigualdades $C_2^{-1}\eta_2(B) \leq \eta_1(B) \leq C_2\eta_2(B)$ juntamente com o Fato 3 garantem a existência de $L_1 > 0$ e $L_2 > 0$ tais que

$$\frac{d\eta_1}{d\eta_2} \leq L_1 \text{ e } \frac{d\eta_2}{d\eta_1} \leq L_2.$$

Como $\left(\frac{d\eta_1}{d\eta_2}\right)\left(\frac{d\eta_2}{d\eta_1}\right) = 1$, segue que ambas as derivadas de Radon-Nikodym estão afastadas de zero e infinito. $\square$

Sabemos que medidas ergórdicas e equivalentes são iguais. Combinando este fato ao Lema 2.6.2, temos que todos os estados de equilíbrio ergódicos são iguais. Por outro lado, como vimos no Lema 1.3.7 e Corolário 1.3.8, as componentes ergódicas de um estado de equilíbrio são estados de equilíbrio ergódicos. Segue que existe um único estado de equilíbrio (igual a μ), tal como afirmamos.

Como consequência, a medida de referêcia ν também é única: se existissem duas medidas de referência distintas ν_1 e ν_2 então $\mu_1 = h\nu_1$ e $\mu_2 = h\nu_2$ seriam estados de equilíbrio distintos. Da mesma forma, a autofunção positiva h é única a menos de produto por constante positiva.

2.7 Exatidão do sistema

Veremos que (f, μ) é um sistema exato. Isso significa que se $B \subset M$ é tal que existem conjuntos mensuráveis B_n satisfazendo $B = f^{-n}(B_n)$ para todo $n \geq 1$, então B tem medida nula ou tem medida total.

Seja $B \subset M$ nas condições acima e suponha que $\mu(B) > 0$. Mostraremos que $\mu(B) = 1$. Considere $\mathcal{P}$ uma partição finita de M tal que todo $P \in \mathcal{P}$ tem interior não vazio e diâmetro menor que ρ. Para cada $n \geq 1$, seja $\mathcal{Q}_n$ a partição de M cujos elementos são as imagens $h^n(P)$ dos conjuntos $P \in \mathcal{P}$ pelos ramos inversos h^n do iterado f^n.

Lema 2.7.1. *Para todo $\varepsilon > 0$ e todo $n \geq 1$ suficientemente grande existe algum $h^n(P) \in \mathcal{Q}_n$ tal que*

$$\mu(B \cap h^n(P)) > (1-\varepsilon)\mu(h^n(P)). \tag{2.31}$$

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$. Como a probabilidade μ é regular, dado qualquer $\delta > 0$ existe algum compacto $F \subset B$ e algum aberto $A \supset B$ satisfazendo $\mu(A \setminus F) < \delta$. Como partimos da ideia que $\mu(B) > 0$, isso implica que $\mu(F) > (1-\varepsilon)\mu(A)$, desde que δ seja suficientemente pequeno. Fixando $\delta > 0$ nessas condições. Temos que diam $\mathcal{Q}_n < \sigma^{-n}\rho$, como vimos no decorrer da demonstração do Lema 2.6.2. Então, para todo n suficientemente grande, qualquer elemento $h^n(P)$ de $\mathcal{Q}_n$ que intersecta F está contido em A. Considerando, então, a relação (2.31) falsa para todo $h^n(P)$. Diante disso, somando todos os $h^n(P)$ que intersectam F,

$$\begin{aligned}\mu(F) &\leq \sum_{h^n(P)} \mu(F \cap h^n(P)) \leq \sum_{h^n(P)} \mu(B \cap h^n(P)) \\ &\leq (1-\varepsilon)\left(\sum_{h^n(P)} \mu(h^n(P))\right) \leq (1-\varepsilon)\mu(A).\end{aligned}$$

Esta contradição mostra que (2.31) é válida para algum $h^n(P) \in \mathcal{Q}_n$. $\square$

Considere agora qualquer $h^n(P) \in \mathcal{Q}_n$ satisfazendo (2.31). Como $B = f^{-n}(B_n)$ e $f^n \circ h^n = \text{id}$, temos que $f^n(h^n(P) \setminus B) = P \setminus B_n$. Então, usando Corolário 2.6.1 em $\eta = \mu$,

$$\mu(P \setminus B_n) = \int\limits_{h^n(P)\setminus B} J_\mu f^n d\mu \leq K_7 \mu(h^n(P) \setminus B) J_\mu f^n(x) \tag{2.32}$$

e

$$\mu(P) = \int\limits_{h^n(P)} J_\mu f^n d\mu \geq K_7^{-1} \mu(h^n(P)) J_\mu f^n(x) \tag{2.33}$$

para qualquer $x \in h^n(P)$. Note que reescrevendo (2.31), temos

$$\varepsilon\mu(h^n(P)) > \mu(h^n(P)) - \mu(B \cap h^n(P)) = \mu(h^n(P) \setminus B).$$

Fazendo a razão entre as relações (2.32) e (2.33), obtemos

$$\frac{\mu(P \setminus B_n)}{\mu(P)} \leq K_7^2 \frac{\mu(h^n(P) \setminus B)}{\mu(h^n(P))} \leq K_7^2 \frac{\varepsilon\mu(h^n(P))}{\mu(h^n(P))} = K_7^2 \varepsilon.$$

Mostramos então que, dado qualquer $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ suficientemente grande existe algum $P \in \mathcal{P}$ tal que $\mu(P \setminus B_n) \leq K_7^2 \varepsilon \mu(P)$.

Como $\mathcal{P}$ é uma partição finita, segue que existe algum $P \in \mathcal{P}$ e alguma sequência $(n_j)_j \to \infty$ tal que

$$\mu(P \setminus B_{n_j}) \to 0 \;\text{ quando }\; j \to \infty. \tag{2.34}$$

Fixemos esse P daqui em diante. Como P tem interior não vazio e f é topologicamente exata, por hipótese, existe $N \geq 1$ tal que $f^N(P) = M$. Seja $P = P_1 \cup \cdots \cup P_s$ uma partição finita P em domínios de invertibilidade de f^N. Os Corolários 2.3.2 e 2.5.2 garantem que $J_\mu f^N = \lambda^N e^{-\varphi_N}(h \circ f^N)/h$ é uma função limitada de zero e infinito. Note também que $f^N(P_i \setminus B_{n_j}) = f^N(P_i) \setminus B_{n_j+N}$, uma vez que $f^{-n}(B_n) = B$ para todo $n \geq 1$. Agora, combinando essas últimas observações com (2.34), temos que, dado qualquer $i = 1, \ldots, s$ temos

$$\mu(f^N(P_i) \setminus B_{n_j+N}) = \mu(f^N(P_i \setminus B_{n_j+N})) = \int\limits_{P_i \setminus B_{n_j}} J_\mu f^N d\mu$$

converge para zero quando $j \to \infty$. Note que $\{f^N(P_i)\colon i = 1, \ldots, s\}$ é uma cobertura finita de M por conjuntos mensuráveis. Este último resultado implica que $\mu(M \setminus B_{n_j+N})$ converge para zero, ou seja, que $\mu(B) = \mu(B_{n_j+N})$ converge para 1 quando $j \to \infty$. Logo, $\mu(B) = 1$.

Com isso, finalizamos a demonstração do Teorema de Ruelle.

Capítulo 3
APLICAÇÃO DO TEOREMA DE RUELLE

Neste capítulo vamos aplicar o *Teorema de Ruelle* quando tomamos como potencial a função $\varphi = -\log|\det Df|$, onde $f\colon M \to M$ é um difeomorfismo local numa variedade compacta. Vamos admitir que f é tal que o potencial φ é Hölder. O objetivo desse capítulo é comparar o Teorema Principal desse trabalho com o Teorema 1.5.5.

A proposição a seguir vai apresentar a ideia de que única probabilidade invariante resultante no Teorema 1.5.5 é na realidade o único estado de equilíbrio dado pelo *Teorema de Ruelle*.

Proposição 3.0.1. *A probabilidade absolutamente contínua invariante de f coincide com o estado de equilíbrio μ do potencial $\varphi = -\log|\det Df|$. Consequentemente, ela é equivalente à medida de Lebesgue m, com densidade $d\mu/dm$ Hölder, afastada de zero e infinito e é exata.*

Antes de proceder com a prova da proposição, consideremos um exemplo que nos ajudará na argumentação.

Exemplo 3.0.2. Seja $f\colon M \to M$ um difeomorfismo local numa variedade Riemanniana compacta M. Considere o operador de transferência $\mathcal{L}$ associado ao potencial $\varphi = -\log|\det Df|$. A medida de Lebesgue m de M é uma automedida do operador dual correspondente ao autovalor $\lambda = 1$, ou seja, $\mathcal{L}^*m = m$. Para verificar esse fato, basta mostrar que $\mathcal{L}^*m(E) = m(E)$ para todo conjunto mensurável E contido na imagem de uma bola $B(y,\rho)$ por algum ramo inverso $h_j\colon B(y,\rho) \to M$ (pois, pela compacidade de M, todo conjunto mensurável pode ser escrito como união finita disjunta de subconjuntos E deste tipo). Usando a expressão (2.2),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^*m(E) &= \int \mathcal{X}_E d(\mathcal{L}^*m) = \int (\mathcal{L}\mathcal{X}_E)dm \\ &= \int \sum_{j=1}^{k} \left(e^{-\log|\det Df|}\mathcal{X}_E\right) \circ h_j \, dm = \int \sum_{j=1}^{k} \frac{\mathcal{X}_E}{|\det Df|} \circ h_j \, dm.\end{aligned}$$

Pela escolha de E e pela fórmula de mudança de variáveis (Lema 1.4.12 item (b)), temos

$$\mathcal{L}^*m(E) = \int \sum_{j=1}^{k} \frac{\mathcal{X}_E}{|\det Df|} \circ h_j \, dm = \int \mathcal{X}_E \, dm = m(E).$$

Isso termina a prova que $\mathcal{L}^*m = m$.

Demonstração. Usando os argumentos acima com $\lambda = 1$ e $\nu = m$ podemos construir $h\colon M \to \mathbb{R}$ uma função Hölder, afastada de zero e infinito, e cumprindo $\mathcal{L}h = h$. A medida $\mu = hm$ é o único estado de equilíbrio para o potencial φ. Conforme o Teorema 1.5.5, μ é a única probabilidade f-invariante absolutamente contínua a m. Como h é positiva, então μ e m são equivalentes. A exatidão foi dada na última seção da demonstração do Teorema de Ruelle. $\square$

REFERÊNCIAS

ADLER, R. L.; KONHEIM, A. G.; MCANDREW, M. H. Topological entropy. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 114, n. 2, p. 309–319, 1965.

BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de análise funcional**. [S.l.]: SBM, 2012.

BOWEN, R. **Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms**. Berlin: Springer-Verlag, 2008. v. 470. 75 p. (Lecture Notes in Mathematics, v. 470).

BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. 1. ed. New York: Springer, 2011. 599 p.

GUREVIČ, B. M. Topological entropy of a countable Markov chain. **Dokl. Akad. Nauk SSSR**, v. 187, p. 715–718, 1969. ISSN 0002-3264.

LEE, J. M. **Introduction to Smooth Manifolds**. 2. ed. New York: Springer, 2012. 708 p. (Graduate Texts in Mathematics, 218).

MISIUREWICZ, M.; SZLENK, W. Entropy of piecewise monotone mappings. **Studia Mathematica**, v. 67, n. 1, p. 45–63, 1980.

OLIVEIRA, K.; VIANA, M. **Fundamentos da Teoria Ergódica**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2019. 520 p. (Coleção Fronteiras da Matemática).

RUELLE, D. Statistical mechanics on a compact set with $\mathbb{Z}^p$ action satisfying expansiveness and specification. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 185, p. 237–251, 1973.

WALTERS, P. A variational principle for the pressure of continuous transformations. **American Journal of Mathematics**, v. 97, n. 4, p. 937–971, 1975.

WALTERS, P. **An introduction to ergodic theory**. New York: Springer-Verlag, 2000. v. 79. 257 p. (Graduate Texts in Mathematics, v. 79).