Universidade Federal do Maranhão
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Um estudo sobre existência de soluções para um problema elíptico indefinido envolvendo o operador p−Laplaciano

por

Elyton Ferreira Costa

São Luís

2023

Universidade Federal do Maranhão
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Um estudo sobre existência de soluções para um problema elíptico indefinido envolvendo o operador p−Laplaciano

por

Elyton Ferreira Costa

Dissertação apresentada ao Colegiado de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

30 de março de 2023

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Gustavo Silvestre do Amaral Costa
Orientador (DEMAT-UFMA)

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo
Examinador Externo (Unb-Brasília)

Profa. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto
Examinadora Interna (UEMA)

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Costa, Elyton Ferreira.
Um estudo sobre existência de soluções para um problema elíptico indefinido envolvendo o operador p - Laplaciano / Elyton Ferreira Costa. - 2023.
78 f.

Orientador(a): Gustavo Silvestre do Amaral Costa.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2023.

1. Função Peso. 2. Método de Minimização. 3. Métodos Variacionais. 4. Não Linearidade Indefinida. 5. Solução Nodal. I. Costa, Gustavo Silvestre do Amaral. II. Título.

Dedicatória

Ao Deus de Israel. Aos meus pais,
Erasmo e Laura. À minha amada esposa, Maria Costa.
E ao nosso amado filho, Abner Estêvam Ferreira Costa.

"A maravilhosa disposição e harmonia do Universo só pode ter tido origem segundo o plano de um Ser que tudo sabe e tudo pode. Isto fica sendo a minha última e mais elevada descoberta".

(Isaac Newton)

Agradecimentos

Ao Autor e Consumador de nossa fé: Jesus Cristo, meu Senhor e Salvador. Porquanto, graças a Ele, que é antes de todas as coisas e todas as coisas subsistem por Ele, o que há quase quatorze anos havíamos postergado, agora está se concretizando de forma sublime em minha vida.

Aos meus pais, Erasmo e Laura, por toda educação, incentivo e amor incondicional dispensado a este filho que foi abençoado por tê-los como pais.

À minha amada, conselheira, amiga, companheira e admirável esposa, Maria Costa, que esteve ao meu lado com toda paciência, cuidado, atenção e amor. Além disso, sempre me incentivando e orando por mais uma conquista que alcançamos juntos pela graça de nosso bondoso e poderoso Deus de Israel!

Ao meu amado filho, Abner Estêvam Ferreira Costa, que tornou nossos dias mais repletos de amor, carinho e alegria desde o dia 12 de agosto de 2020. E tudo isso foi renovado intensamente no dia 27 de outubro de 2022 quando deixou (após cinquenta e dois dias) aquele local em que muitos testemunharam que servimos a um Deus que ainda realiza milagres.

À minha sogra, Cleonice Oliveira da Costa, por ter nos ajudado da melhor forma possível com o nosso filho, contribuindo, em muito, para obtermos êxito nas últimas disciplinas do curso.

Ao meu orientador, Gustavo Silvestre do Amaral Costa, pela orientação, amizade, paciência, competência, confiança, prontidão, incentivo, comprometimento e, principalmente, pelo seu altruísmo. Assim como pelo seu insigne conhecimento matemático que possui e que de forma privilegiada passei a vivenciar nos encontros - aulas que tivemos durante a elaboração deste trabalho.

Aos professores do PPGMAT-UFMA, especialmente, José Antônio Pires Ferreira Marão, Vanessa Ribeiro Ramos, Ivaldo Paz Nunes, Giovane Ferreira Silva e Ermerson Rocha Araujo. Pois a dedicação e maestria com que ministraram suas disciplinas contribuiu, significativamente, para minha formação acadêmica.

Ao professor Marcos Antônio Ferreira de Araújo que desde a graduação sempre nos incentivou a prosseguir nos estudos e pela amizade que foi enaltecida num momento difícil que enfrentamos na reta final do programa.

Ao professor Romildo Nascimento de Lima (PPGMat/UFCG) pela grande amizade e assistência que nos deu durante os dias árduos que enfrentamos na fase final do curso.

Aos Professores Giovany de Jesus Malcher Figueiredo e Sandra Imaculada Moreira Neto que prontamente aceitaram o convite para participarem da minha banca, pelo tempo que dedicaram a este trabalho, pelas indicações de correção e pelas valiosas sugestões para a versão final.

Aos colegas do PPGMAT-UFMA, em especial, Adriano Ribeiro, Gabriel Araújo, Gabriel Pinho, Gustavo Colins e Ranney Ritchie pelas conversas, parceria e apoio durante o curso.

A todos os funcionários, técnicos, trabalhadores do RU, pessoal da limpeza e segurança da UFMA.

A todos que contribuíram de forma direta ou indiretamente na realização desta conquista.

Resumo

Neste trabalho discutiremos a existência de soluções de energia mínima para um problema elíptico semilinear com não linearidade indefinida envolvendo o operador $p-$ *Laplaciano*. Mais precisamente, estudaremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2}u + W(x)|u|^{\gamma-2}u, & \text{em } \Omega \\ \quad u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave, $W \in L^{\infty}(\Omega)$ é uma função que troca de sinal, $N \geq 1$ e $1 < p < \gamma < p^*$ (onde $p^* = \frac{pN}{N-p}$, se $p < N$ e $p^* = +\infty$, se $p \geq N$).

Palavras-chave: Métodos Variacionais, Método de Minimização, Solução Nodal, Função Peso, p-Laplaciano, Não Linearidade Indefinida.

Abstract

In this work we are going to discuss the existence of minimum energy solutions for a semilinear elliptic problem with indefinite nonlinearity involving the $p-Laplacian$ operator. More precisely, we are going to study the following problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2}u + W(x)|u|^{\gamma-2}u, & \text{on } \Omega \\ \quad u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ with the smooth boundary, $W \in L^\infty(\Omega)$ is a function which changes sign, $N \geq 1$ and $1 < p < \gamma < p^*$ (where $p^* = \frac{pN}{N-p}$, if $p < N$ and $p^* = +\infty$, if $p \geq N$).

Keywords: Variational Methods, Minimization Method, Nodal Solution, Weight Function, p-Laplacian, Indefinite Nonlinearity.

SUMÁRIO

Notações

$\mathbb{R}^N$	$\{(x_1, \ldots, x_N) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}\}$
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$	Domínio (aberto e conexo) limitado de $\mathbb{R}^N$,
U	Subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$,
$\bar{U}$	Fecho de U,
∂U	Fronteira de U,
$V \subset\subset U$	V compactamente contido em U, ou seja, $V \subset \overline{V} \subset, U$ com $\overline{V}$compacto,
$\|U\|$	Medida de U,
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	Gradiente da função u,
$\Delta_p u = div(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u)$	p- Laplaciano da função u,
$\rightarrow$	Convergência fraca,
$\hookrightarrow$	Imersão Contínua,
$o_n(1)$	Sequência real que converge para 0, quando $n \to +\infty$,
q.t.p	quase todo ponto,
$W_0^{-1,p'}(\Omega)$	Espaço dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$,
$H_0^1(\Omega)$	Espaço de Hilbert com traço nulo,

$C(\overline{\Omega})$	Espaço das funções $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continuamente estendidas até $\overline{\Omega}$,
$C_0^\infty(\Omega)$,	Espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto,
$u^+ := \max\{0, u\}, u^- := \min\{u, 0\}$	Parte positiva e negativa da função u.

Introdução

Neste trabalho estudaremos a existência de soluções para uma classe de problemas elípticos semilineares com não linearidade indefinida. Em particular, vamos considerar o seguinte problema elíptico envolvendo o $p-$ *Laplaciano*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2}u + W(x)|u|^{\gamma-2}u, & \text{em } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\lambda$}$$

onde $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador $p-$ *Laplaciano*, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com bordo suave $\partial\Omega$, $N \geq 1$, $W \in L^\infty(\Omega)$ e $1 < p < \gamma < p^*$, em que

$$p^* = \begin{cases} \frac{pN}{N-p}, & se \;\; p < N, \\ +\infty, & se \;\; p \geq N, \end{cases}$$

Vale ressaltar que o fato da não linearidade do problema ser indefinida, significa dizer que a função peso (que no nosso caso será uma $W(x) \in L^\infty(\Omega)$) do problema pode mudar de sinal no domínio Ω no qual está definida.

Problemas elípticos com a não lineariedade indefinida aparecem naturalmente no estudo de Dinâmica Populacional. Podemos citar, por exemplo, o trabalho [21], onde os pesquisadores Gurney & Nisbet propuseram três modelos de dispersão de espécies. Dentre os quais, o Modelo de Movimento Aleatório (que para simplificar chamaremos de Modelo RM, sigla em inglês, para Random Motion) nos motiva a estudar tais tipos de problemas, porquanto a mudança de sinal da Função Peso $[\,W(x)\,]$ pode descrever um ambiente altamente hostil $[\,W(x) < 0\,]$ que contém uma única região de habitat viável $[\,W(x) > 0\,]$. Sendo assim, é mister verificar se de fato o Modelo RM sugere um problema com não linearidade indefinida envolvendo o operador Laplaciano Δu, que é um caso particular do $p-$ *Laplaciano* $\Delta_p u = \operatorname{div}(\,|\nabla u|^{p-2}\nabla u\,)$, quando $p = 2$.

Primeiramente, considere uma população que está crescendo com uma taxa de crescimento local $W(x)$ (que independe da densidade populacional) e dispersando-se com uma densidade atual $j(x,t)$, onde x e t representa a posição e o tempo, respectivamente. Assim, a densidade populacional $u(x,t)$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = W(x)u - \nabla .\, j(x,t). \tag{0.0.1}$$

Supondo que a espécie se movimenta inteiramente ao acaso e com a dispersão natural do problema, tem-se que o comportamento de transporte da população como um todo será a difusão linear, ou seja,

$$j = -D\nabla u, \tag{0.0.2}$$

em que $D > 0$ é a constante de difusão. E também consideremos a equação (0.0.1) em uma região infinita com a condição de contorno

$$u(x,t) \to 0,$$

quando $|x| \to +\infty$.

Além disso, o operador $\nabla \,.\, j = \langle \nabla, j\rangle : W_0^{1,p} \to \mathbb{R}$ é definido da seguinte maneira

$$\langle \nabla, j\rangle := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial j}{\partial x_i}. \tag{0.0.3}$$

Assim, substituindo (0.0.2) em (0.0.1) e fazendo uso da definição (0.0.3), vem que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= W(x)u + D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) \\ &= W(x)u + D\Delta u. \end{aligned} \tag{0.0.4}$$

Como estamos interessados no sistema quando o estado estacionário (ou seja, quando as taxas de variações permanecem constantes com o transcorrer do tempo), segue que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

E, consequentemente, obtemos

$$-D\Delta u = W(x)u.$$

No que se refere à existência, inexistência e multiplicidade de soluções positivas para o problema do tipo Dirichlet, há inúmeros e vultosos trabalhos sob vários pressupostos. Por exemplo, sobre o parâmetro λ de um problema mais geral, a saber,

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u + W(x)|u|^{\gamma-2}u, & \text{em } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{DP}_\lambda$}$$

em 1997, Drábek & Pohozaev [15] provaram a multiplicidade de *soluções positivas* u_λ, quando $\lambda \in V_\epsilon(\lambda_1)$ (V_ϵ representa uma vizinhança de λ_1), onde λ_1 denota o primeiro autovalor do operador $\Delta_p u$. Outro resultado a ser destacado, no que concerne à existência, foi o obtido por Iĺyasov & Runst [23], em 2011, ao estudarem o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda|u|^{p-2}u + W(x)|u|^{\gamma-2}u, & \text{em } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$\mathcal{IR}_\lambda$}$$

Como resultado principal de [23], ao introduzirem o valor crítico λ^*, eles conseguiram estabelecer condições necessárias e suficientes para que o problema $(\mathcal{IR}_\lambda)$ possua *soluções positivas* u_λ, quais sejam: para qualquer $\lambda < \lambda^*$, o problema admite pelo menos uma solução; e nenhuma para $\lambda > \lambda^*$.

Em 2002, Y. Iĺyasov [22] conseguiu estender o resultado de [15] ao introduzir o valor λ_1^*, onde

$$\lambda_1^* = \inf_{u \in W_0^{1,p}} \left\{ \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^p dx} : \int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx \geq 0 \right\}.$$

Perceba que se considerarmos o conjunto $\Omega^+ = \{x \in \Omega : W(x) > 0\}$ e $|\Omega^+|$ como a medida de Lebesgue, temos que

(a) Se $|\Omega^+| > 0$, então $\lambda_1^* < +\infty$;

(b) Se $\displaystyle\int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx < 0$, então $\lambda_1^* > \lambda_1$;

(c) Se $\displaystyle\int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx > 0$, então $\lambda_1^* = \lambda_1$.

De fato, aplicando a argumentação contrapositiva na primeira afirmação, temos que existe $\overline{\lambda}$ tal que $\overline{\lambda} < \lambda_1^*$. Segue que dado $u \in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}$ temos

$$\int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx < 0.$$

Logo, temos que $W(x) \leq 0$ q.t.p. em Ω. Donde concluímos que $|\Omega^+| = 0$. O que demonstra o item (a). Para verificar os itens (b) e (c), basta utilizar a caracterização variacional do primeiro autovalor do $p-$ *Laplaciano*, ou seja,

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^p dx} ; u \in W_0^{1,p}\backslash\{0\} \right\},$$

lembrando que

$$\lambda_1 \int_\Omega |\varphi_1|^p dx = \int_\Omega |\nabla \varphi_1|^p dx,$$

onde φ_1 é a primeira autofunção associado ao primeiro autovalor λ_1 do operador $p-$ *Laplaciano*.

Além dos trabalhos citados anteriormente, há uma vasta quantidade de outros trabalhos que tratam sobre a existência de soluções para problemas elípticos indefinidos, por exemplo: [1–3, 9, 13, 14, 25–27]

Diante do exposto e com base nos argumentos contidos no artigo de V. Bobkov [10], o objetivo principal desse trabalho é estudar especificamente a existência de solução não-trivial de energia mínima como também a existência de solução nodal não-trivial de energia mínima para o problema (P_λ) quando $\lambda < \lambda_1$ e quando $\lambda < \lambda^*$, onde

$$\lambda^* := \inf \left\{ \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^p dx} : u \in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\} \quad \text{e} \quad \int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx > 0 \right\}.$$

Para tanto, utilizaremos a técnica de Minimização Construtiva da Variedade de Nehari com Abordagem de Fibragem, veja [8] e [12], além de outras ferramentas e resultados bem conhecidos da literatura. Essa técnica permitirá encontrar as soluções fracas de energia mínima para o problema (P_λ).

Portanto, assumindo que $W \in L^\infty(\Omega)$ e $|\Omega^+| > 0$, temos os seguintes resultados

Teorema 0.0.1. *Se $\lambda < \lambda_1$ então o problema (P_λ) tem uma solução de energia mínima não-trivial e não troca de sinal.*

Teorema 0.0.2. *Se $\lambda < \lambda_1$ então o problema (P_λ) tem uma solução nodal de energia mínima não-trivial.*

Teorema 0.0.3. *Se $\lambda < \lambda^*$ então o problema (P_λ) tem uma solução de energia mínima não-trivial.*

Teorema 0.0.4. *Se $\lambda < \lambda^*$ então o problema (P_λ) tem uma solução nodal de energia mínima não-trivial.*

Estruturalmente, este trabalho está dividido em cinco capítulos e dois apêndices distribuídos da seguinte forma: no Capítulo 1, apresentamos a estrutura variacional e resultados fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Nos Capítulos 2, 3, 4 e 5 demonstramos os Teoremas 0.0.1, 0.0.2, 0.0.3 e 0.0.4, respectivamente. Finalmente, no Apêndice I estudamos a regularidade do funcional energia associado ao problema (P_λ) e no Apêndice II enunciamos os resultados utilizados no decorrer deste trabalho.

Capítulo 1

Estrutura Variacional e Estimativas

Neste capítulo inicial vamos introduzir a estrutura variacional e mostrar uma série de resultados necessários para demonstrar a existência de solução não-trivial para o seguinte problema com a não-lineariedade indefinida

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2}u + W(x)|u|^{\gamma-2}u, & \text{em } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

onde $p > 1$, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador $p - Laplaciano$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com bordo suave $\partial\Omega$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $p < \gamma < p^*$, em que $p^* = \frac{pN}{N-p}$ é o expoente crítico relacionado ao espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$. Lembrando que $W \in L^\infty(\Omega)$ é uma função que pode trocar de sinal e que $|\Omega^+| > 0$, onde $\Omega^+ = \{x \in \Omega : W(x) > 0\}$.

Primeiramente, vamos definir o tipo de solução que iremos nos dedicar à provar sua existência. Devido a presença do operador $p - Laplaciano$ e a condição de fronteira ($u = 0$ sobre $\partial\Omega$) temos que, caso exista, uma solução $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ de (P_λ) é natural de se pensar que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Na literatura este tipo de solução, caso exista, recebe a definição de solução clássica.

Mas nosso objetivo não será encontrar esse tipo de solução para (P_λ), pois como percebemos, exige-se muito da função u para que seja uma solução clássica. Então uma pergunta natural que surge é: "Poderíamos exigir um pouco menos da função u de modo que venha satisfazer o problema (P_λ) ?"

Com o propósito de responder à esta pergunta, vamos considerar que exista uma solução clássica $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ de (P_λ). Então, usando o Teorema de Divergência (veja Teorema 5.0.11), obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi \, dx = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi \, dx + \int_\Omega W(x)|u|^{\gamma-2}u\varphi \, dx, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.0.1}$$

Analisando a igualdade acima, para que u venha satisfazê-la, bastaríamos exigir que u pertencesse à $C^1(\Omega)$. E desde que $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$, a igualdade (1.0.1) pode ser estendida (para mais detalhes veja Apêndice I) de forma que obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2}uv \, dx + \int_\Omega W(x)|u|^{\gamma-2}uv \, dx, \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (1.0.2)$$

Desse modo, percebe-se então que nesta igualdade, bastaríamos exigir que u pertencesse à $W_0^{1,p}(\Omega)$, pois este espaço torna bem definidas as integrais na expressão (1.0.2).

Aqui trabalharemos com o espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, que é um espaço de Banach, definido da seguinte maneira

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, u \in L^p(\Omega), u = 0, \text{em } \partial\Omega, \ e \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \ \forall i = 1, ..., n \right\}$$

e munido com a seguinte norma

$$\|u\| = \left[\int_\Omega |\nabla u|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Assim, diante das análises feitas nas igualdades (1.0.1) e (1.0.2), somos conduzidos a definir o conceito de solução fraca.

Definição 1.0.1. *Dizemos que uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é solução fraca de (P_λ) se, e somente se, satisfaz a igualdade (1.0.2).*

Com intuito de encontrar soluções fracas para o problema (P_λ), via métodos variacionais, vamos definir o funcional energia associado $J_\lambda : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u|^p dx - \frac{1}{\gamma}\int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Mostramos, no Apêndice I, que o funcional $J_\lambda \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, isto é, o funcional J_λ tem derivada contínua (derivada no sentido de Fréchet). Além disso, temos que

$$J_\lambda'(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \, dx - \lambda \int_\Omega |u|^{p-2}uv \, dx - \int_\Omega W(x)|u|^{\gamma-2}uv \, dx, \qquad (1.0.3)$$

para todo $u, \ v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Comparando (1.0.2) e (1.0.3), concluímos que procurar soluções fracas de (P_λ) é equivalente à procurar pontos críticos do funcional energia J_λ. Lembrando que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é ponto crítico de J_λ se, e somente se, $J_\lambda'(u)v = 0$ para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Portanto, com o objetivo de encontrar pontos críticos do funcional J_λ, vamos definir o conjunto $\mathcal{N}_\lambda$ que é conhecido na literatura como variedade de Nehari (mas que nem sempre é uma variedade), da seguinte forma

$$\mathcal{N}_\lambda = \left\{ \ u \in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\} : \ J_\lambda'(u)u = 0 \right\}.$$

Observe que se u é uma solução não-trivial de (P_λ) então $u \in \mathcal{N}_\lambda$. Como nosso objetivo também será procurar soluções nodais (soluções que mudam de sinal), vamos definir o conjunto Nehari Nodal por

$$\mathcal{N}_\lambda^{\pm} = \left\{ \; u \in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\} : \; u^{\pm} \neq 0 \text{ e } u^{\pm} \in \mathcal{N}_\lambda \right\},$$

onde $u(x)^+ := \max\{u(x), 0\}$ e $u(x)^- := \min\{u(x), 0\}$ e, consequentemente, $u = u^+ + u^-$ e $|u| = u^+ - u^-$. Além disso, vamos definir dois subconjuntos de $\mathcal{N}_\lambda$ e $\mathcal{N}_\lambda^{\pm}$, respectivamente, da seguinte forma

$$\mathcal{M}_\lambda = \left\{ \; u \in \mathcal{N}_\lambda : \; \int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx > 0 \right\}$$

e

$$\mathcal{M}_\lambda^{\pm} = \left\{ \; u \in \mathcal{N}_\lambda^{\pm} : \; \int_\Omega W(x)|u^{\pm}|^\gamma dx > 0 \right\},$$

pois estes dois conjuntos nos permitirá estender a faixa de valores de λ para que o problema (P_λ) tenha solução.

Como primeiro resultado vamos mostrar que o funcional energia J_λ é coercivo restrito à variedade de Nehari e algumas de suas importantes propriedades.

Proposição 1.0.1. *Se $\lambda < \lambda_1$ então existem constantes positivas C_1, C_2 e C_3, tais que as seguintes propriedades são verdadeiras:*

(i) $J_\lambda(u) \geq C_1 \left(\dfrac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1} \right) \|u\|^p$, *para toda $u \in \mathcal{N}_\lambda$; (Coercividade)*

(ii) $\|u\| \geq C_2 \left(\dfrac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{\gamma - p}}$, *para toda $u \in \mathcal{N}_\lambda$;*

(iii) $\displaystyle\int_\Omega W(x)|u|^\gamma \, dx \geq C_3 \left(\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - p}}$, *para toda $u \in \mathcal{N}_\lambda$.*

Demonstração. Para mostrar que J_λ é coercivo restrito à variedade de Nehari, vamos usar que se $u \in \mathcal{N}_\lambda$ então $J'_\lambda(u)u = 0$. Logo, em $\mathcal{N}_\lambda$, temos que

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= J_\lambda(u) - \frac{1}{\gamma} J'_\lambda(u)u \\
&= \frac{1}{p}\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \lambda \int_\Omega |u|^p dx \right) - \frac{1}{\gamma}\int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx \\
&\quad -\frac{1}{\gamma}\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \lambda \int_\Omega |u|^p dx \right) + \frac{1}{\gamma}\int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx \\
&= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma} \right)\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \lambda \int_\Omega |u|^p dx \right).
\end{aligned}$$

Utilizando a Desigualdade de Poincaré (veja Teorema 5.0.12), obtemos

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\gamma}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right) \\ &= \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_1}\right)\int_\Omega |\nabla u|^p dx. \end{aligned}$$

Desde que $1 < p < \gamma$, podemos definir $C_1 := \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{\gamma}$ e concluir que

$$J_\lambda(u) \geq C_1\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_1}\right)\|u\|^p \geq 0, \quad \forall\, u \in \mathcal{N}_\lambda.$$

Agora vamos demonstrar o segundo item. Note que se $u \in \mathcal{N}_\lambda$, então

$$\|u\|^p = \lambda\int_\Omega |u|^p dx + \int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx.$$

Consequentemente, usando a Desigualdade de Poincaré (veja Teorema 5.0.12) e que $W \in L^\infty(\Omega)$, temos que

$$\|u\|^p \leq \frac{\lambda}{\lambda_1}\|u\|^p + \|W\|_\infty \int_\Omega |u|^\gamma dx.$$

Assim, pela imersão contínua de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^\gamma(\Omega)$, existe uma constante $S_\gamma > 0$ tal que

$$\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_1}\right)\|u\|^p \leq \|W\|_\infty\int_\Omega |u|^\gamma dx \leq \|W\|_\infty S_\gamma \|u\|^\gamma.$$

Finalmente, como $0 \notin \mathcal{N}_\lambda$, concluímos que

$$\|u\| \geq C_2\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-p}} > 0 \quad \text{para toda } u \in \mathcal{N}_\lambda.$$

onde $C_2 := \left(\dfrac{1}{\|W\|_\infty S_\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-p}} > 0.$

Por fim, vamos demonstrar o último item. Seguindo os mesmos argumentos dos dois itens anteriores, obtemos que

$$\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|u\|^p \leq \int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx.$$

Assim, utilizando o segundo item conseguimos encontrar uma constante positiva C_3, de modo que

$$C_3\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-p}} \leq \left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|u\|^p \leq \int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx$$

para todo $u \in \mathcal{N}_\lambda$. □

Como consequência direta temos que

Corolário 1.0.2. *Se* $\lambda < \lambda_1$ *então existem constantes positivas* C_1, C_2 *e* C_3, *tais que as seguintes propriedades são verdadeiras:*

(i) $J_\lambda(u^\pm) \geq C_1 \left(\dfrac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1}\right) \|u\|^p$, *para toda* $u \in \mathcal{N}_\lambda^\pm$; *(Coercividade)*

(ii) $\|u^\pm\| \geq C_2 \left(\dfrac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{\gamma - p}}$, *para toda* $u \in \mathcal{N}_\lambda^\pm$;

(iii) $\displaystyle\int_\Omega W(x)|u^\pm|^\gamma \, dx \geq C_3 \left(\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - p}}$, *para toda* $u \in \mathcal{N}_\lambda^\pm$.

Corolário 1.0.3. *Se* $\lambda < \lambda_1$ *então* $\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{M}_\lambda$ *e* $\mathcal{N}_\lambda^\pm = \mathcal{M}_\lambda^\pm$.

Demonstração. Para mostrar $\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{M}_\lambda$ é necessário e suficiente que $\mathcal{N}_\lambda \subset \mathcal{M}_\lambda$ e $\mathcal{M}_\lambda \subset \mathcal{N}_\lambda$. Para tornar a demonstração agradável, vamos relembrar as definições de $\mathcal{N}_\lambda$ e $\mathcal{M}_\lambda$,

$$\mathcal{N}_\lambda = \Big\{ \ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \backslash \{0\} : \ J'_\lambda(u)u = 0 \Big\}$$

e

$$\mathcal{M}_\lambda = \left\{ \ u \in \mathcal{N}_\lambda : \ \int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx > 0 \right\}.$$

Logo, temos que $\mathcal{M}_\lambda \subset \mathcal{N}_\lambda$. Por outro lado, se $\lambda < \lambda_1$, segue, utilizando o terceiro item da Proposição 1.0.1, que

$$\int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx > 0, \quad u \in \mathcal{N}_\lambda, \tag{1.0.4}$$

então temos que $\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{M}_\lambda$.

Agora, vamos mostrar que $\mathcal{N}_\lambda^\pm \subset \mathcal{M}_\lambda^\pm$ e $\mathcal{M}_\lambda^\pm \subset \mathcal{N}_\lambda^\pm$, isto é, $\mathcal{N}_\lambda^\pm = \mathcal{M}_\lambda^\pm$. Antes devemos lembrar que

$$\mathcal{N}_\lambda^\pm = \Big\{ \ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \backslash \{0\} : \ u^\pm \neq 0 \text{ and } u^\pm \in \mathcal{N}_\lambda \Big\}$$

e

$$\mathcal{M}_\lambda^\pm = \left\{ \ u \in \mathcal{N}_\lambda^\pm : \ \int_\Omega W(x)|u^\pm|^\gamma dx > 0 \right\},$$

onde $u = u^+ + u^-$, tal que $u^+(x) := max\{u(x), 0\}$ e $u^-(x) := min\{u(x), 0\}$. Consequentemente, temos que $supp(u^+) \cap supp(u^-) = \emptyset$. Note que se $u \in \mathcal{N}_\lambda^\pm$, então

$$J'_\lambda(u^+)u^+ = \int_\Omega |\nabla u^+|^p dx - \lambda \int_\Omega |u^+|^p dx - \int_\Omega W(x)|u^+|^\gamma dx = 0$$

e

$$J'_\lambda(u^-)u^- = \int_\Omega |\nabla u^-|^p dx - \lambda \int_\Omega |u^-|^p dx - \int_\Omega W(x)|u^-|^\gamma dx = 0.$$

Então, uma vez que $supp(u^+) \cap supp(u^-) = \emptyset$, temos que

$$
\begin{aligned}
0 &= J'_\lambda(u^+)u^+ + J'_\lambda(u^-)u^- \\
&= \int_\Omega |\nabla(u^+ + u^-)|^p dx - \lambda \int_\Omega |u^+ + u^-|^p dx - \int_\Omega W(x)|u^+ + u^-|^\gamma dx \\
&= J'_\lambda(u)u.
\end{aligned}
$$

Portanto, temos que $\mathcal{N}^\pm_\lambda \subset \mathcal{N}_\lambda$. Com esta inclusão, segue que as propriedades fornecidas pela Proposição 1.0.1 são válidas para os elementos de $\mathcal{N}^\pm_\lambda$. Então para mostrar que $\mathcal{N}^\pm_\lambda \subset \mathcal{M}^\pm_\lambda$ e $\mathcal{M}^\pm_\lambda \subset \mathcal{N}^\pm_\lambda$, basta seguirmos os mesmos passos que utilizamos para mostrar que $\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{M}_\lambda$ e o corolário está demonstrado. $\square$

Observe que se $\lambda < \lambda_1$ então, usando os resultados acima, temos que toda solução u não-trivial (v nodal de (P_λ)) satisfaz

$$
\int_\Omega W(x)|u|^\gamma \, dx > 0 \qquad \left(\int_\Omega W(x)|v^\pm|^\gamma \, dx > 0 \right).
$$

Assim, uma vez que $\mathcal{M}_\lambda \subset \mathcal{N}_\lambda$ ($\mathcal{M}^\pm_\lambda \subset \mathcal{N}^\pm_\lambda$) para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, podemos pensar em procurar soluções nos conjuntos $\mathcal{M}_\lambda$ e $\mathcal{M}^\pm_\lambda$ para $\lambda \geq \lambda_1$ com as mesmas propriedades das soluções em $\mathcal{N}_\lambda$ e $\mathcal{N}^\pm_\lambda$ quando $\lambda < \lambda_1$. Com esta finalidade, vamos definir

$$
\lambda^* := \inf \left\{ \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^p dx} : u \in W^{1,p}_0(\Omega)\backslash\{0\} \quad \text{e} \quad \int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx > 0 \right\}.
$$

Note que λ^* pode ser $+\infty$. Mas pedindo que $\Omega^+ := \{x \in \Omega : \ W(x) > 0\}$ tenha medida de Lesbesgue positiva, temos que $\lambda^* \in \mathbb{R}$. E mais ainda, como podemos verificar abaixo.

Proposição 1.0.4. *Se* $|\Omega^+| > 0$*, então* $\lambda^* \in \mathbb{R}$ *e* $\lambda^* \geq \lambda_1$*.*

Demonstração. Se $|\Omega^+| > 0$, então podemos considerar uma função não-trivial $\varphi \in C^\infty_0(\Omega^+)$. Segue que

$$
\int_{\Omega^+} W(x)|\varphi|^\gamma dx = \int_\Omega W(x)|\varphi|^\gamma dx > 0.
$$

Portanto, o conjunto

$$
\left\{ \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^p dx} : u \in W^{1,p}_0(\Omega)\backslash\{0\} \quad \text{e} \quad \int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx > 0 \right\}
$$

é não vazio. Daí, pela definição de ínfimo (veja Definição 5.0.5, Apêndice II), exite uma

$u \in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}$ tal que

$$\lambda^* \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^p dx}.$$

Logo, temos que $\lambda^* < +\infty$. Além disso, mais uma vez pela definição de ínfimo, temos que $\lambda^* \geq 0$, pois

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^p dx} > 0, \quad \forall\ u \in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}.$$

Portanto, $\lambda^* \geq 0$ é finito. Por outro lado, usado a caracterização variacional do primeiro autovalor do operador p-Laplaciano, temos que

$$\lambda_1 := \inf\left\{\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^p dx} : u \in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}\right\}.$$

Assim, por inclusão de conjuntos e da definição de ínfimo, temos que $\lambda_1 \geq \lambda$. □

A seguir vamos apresentar uma versão da Proposição 1.0.1 para o funcional J_λ restrito ao conjunto $\mathcal{M}_\lambda$.

Proposição 1.0.5. *Existem constantes positivas D_1, D_2 e D_3, de modo que as propriedades abaixo são satisfeitas*

(i) $J_\lambda(u) \geq D_1 \left(\dfrac{\lambda^* - \lambda}{\lambda^*}\right) \|u\|^p$, *para qualquer $u \in \mathcal{M}_\lambda$;*

(ii) $\|u\| \geq D_2 \left(\dfrac{\lambda^* - \lambda}{\lambda^*}\right)^{\frac{1}{\gamma-p}}$, *para qualquer $u \in \mathcal{M}_\lambda$;*

(iii) $\displaystyle\int_\Omega W(x)|u|^\gamma\, dx \geq D_3 \left(\frac{\lambda^* - \lambda}{\lambda^*}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-p}}$, *para qualquer $u \in \mathcal{M}_\lambda$.*

Demonstração. Para mostrar o item (i), ou seja, que J_λ é coercivo restrito à $\mathcal{M}_\lambda$, note que pela definição de $\mathcal{M}_\lambda$, temos que $\mathcal{M}_\lambda \subset \mathcal{N}_\lambda$, então $J'_\lambda(u)u = 0$ para toda $u \in \mathcal{M}_\lambda$. Logo, pela Proposição 1.0.1, temos que

$$J_\lambda(u) = J_\lambda(u) - \frac{1}{\gamma}J'_\lambda(u)u = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \lambda \int_\Omega |u|^p dx\right).$$

Por outro lado, a definição de λ^* implica que

$$\lambda^* \int_\Omega |u|^p dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^p dx, \quad \forall\ u \in \mathcal{M}_\lambda. \tag{1.0.5}$$

Portanto, temos que

$$J_\lambda(u) \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{\lambda^* - \lambda}{\lambda^*}\right)\int_\Omega |\nabla u|^p dx. \tag{1.0.6}$$

Definindo $D_1 := \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right)$, então a coercividade de J_λ sobre $\mathcal{M}_\lambda$ está demonstrada. Para demonstrar o segundo item, perceba que se $u \in \mathcal{M}_\lambda$, então

$$\|u\|^p \;=\; \lambda\int_\Omega |u|^p dx + \int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx.$$

Consequentemente, usando (1.0.5) e que $W \in L^\infty(\Omega)$, obtemos

$$\|u\|^p \;\leq\; \frac{\lambda}{\lambda^*}\|u\|^p + \|W\|_\infty \int_\Omega |u|^\gamma dx.$$

Assim, pela imersão contínua de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^\gamma(\Omega)$, existe uma constante $S_\gamma > 0$ tal que

$$\left(\frac{\lambda^* - \lambda}{\lambda^*}\right)\|u\|^p \leq \|W\|_\infty \int_\Omega |u|^\gamma dx \leq \|W\|_\infty S_\gamma \|u\|^\gamma.$$

Finalmente, como $0 \notin \mathcal{N}_\lambda$, concluímos que

$$\|u\| \geq D_2\left(\frac{\lambda^* - \lambda}{\lambda^*}\right)^{\frac{1}{\gamma - p}} > 0, \text{ para toda } u \in \mathcal{M}_\lambda,$$

onde $D_2 := \left(\frac{1}{\|W\|_\infty S_\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma - p}} > 0.$

Por fim, vamos demonstrar o último item. Utilizando os mesmos argumentos usados para demonstrar o item *(iii)* da Proposição 1.0.1, obtemos uma constante positiva D_3, de modo que

$$0 < D_3\left(\frac{\lambda^* - \lambda}{\lambda^*}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - p}} \leq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\|u\|^p \leq \int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx, \quad \forall\, u \in \mathcal{M}_\lambda.$$

□

Corolário 1.0.6. *Existem constantes positivas D_1, D_2 e D_3, de modo que as propriedades abaixo são satisfeitas*

(i) $J_\lambda(u^\pm) \geq D_1\left(\frac{\lambda^* - \lambda}{\lambda^*}\right)\|u^\pm\|^p$, *para qualquer* $u \in \mathcal{M}_\lambda^\pm$*;*

(ii) $\|u^\pm\| \geq D_2\left(\frac{\lambda^* - \lambda}{\lambda^*}\right)^{\frac{1}{\gamma - p}}$, *para qualquer* $u \in \mathcal{M}_\lambda^\pm$*;*

(iii) $\int_\Omega W(x)|u^\pm|^r\, dx \geq D_3\left(\frac{\lambda^* - \lambda}{\lambda^*}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - p}}$, *para qualquer* $u \in \mathcal{M}_\lambda^\pm$.

É natural que nem todo elemento de $W_0^{1,p}(\Omega)$ esteja em N_λ, ainda mais porque temos a presença de uma função peso W que troca de sinal em Ω. O próximo resultado nos diz que, sob certas propriedades, conseguimos um múltiplo escalar de $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de tal forma que este múltiplo venha pertencer à $\mathcal{N}_\lambda$, mesmo que u não esteja na variedade de Nehari. Tal condição é conhecida na literatura por projeção de $W_0^{1,p}(\Omega)$ sobre $\mathcal{N}_\lambda$. Além disso, considerando uma propriedade adicional tal projeção é única.

Proposição 1.0.7. *Seja $\lambda < \lambda^*$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \backslash \{0\}$ tal que $\int_\Omega W(x)|u|^\gamma \, dx > 0$, então há um único $t_u > 0$ de modo que $J'_\lambda(t_u u)t_u u = 0$ com a seguinte propriedade*

$$J_\lambda(t_u u) := \max_{t \geq 0} J_\lambda(tu) > 0.$$

Mais ainda, se $J'_\lambda(u)u \leq 0$ então $t_u \in (0, 1]$.

Demonstração. Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \backslash \{0\}$ tal que $\int_\Omega W(x)|u|^\gamma \, dx > 0$. Então, defina a função $\mathcal{L} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{L}(t) = J(tu) = \frac{t^p}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{t^p}{p} \lambda \int_\Omega |u|^p dx - \frac{t^\gamma}{\gamma} \int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx.$$

Com objetivo de estudar os pontos extremais de $\mathcal{L}$ vamos obter $\mathcal{L}'(t)$ e $\mathcal{L}''(t)$. Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &= t^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^p dx - t^{p-1} \lambda \int_\Omega |u|^p dx - t^{\gamma-1} \int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx \\ &= t^{p-1} \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \lambda \int_\Omega |u|^p dx \right) - t^{\gamma-1} \int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}''(t) &= (p-1)t^{p-2} \left[\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \lambda \int_\Omega |u|^p dx \right] - (\gamma - 1)t^{\gamma-2} \int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx. \\ &= \frac{(p-1)t^p \left[\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \lambda \int_\Omega |u|^p dx \right] - (\gamma - 1)t^\gamma \int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx}{t^2}. \end{aligned}$$

Observe que $\mathcal{L}'(t) = J'(tu)tu$. Portando, $\bar{t}$ é ponto crítico de $\mathcal{L}$ se, se somente se, $\bar{t}u \in \mathcal{N}_\lambda$. E bem mais ainda, $\bar{t}$ é ponto crítico de $\mathcal{L}$ se, se somente se, $\bar{t}u \in \mathcal{M}_\lambda$ pois pedimos como hipótese que $\int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx > 0$.

Utilizando cálculos diretos temos a existência e a unicidade de um único ponto crítico para $\mathcal{L}$, dado por

$$t_u^{\gamma-p} = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \lambda \int_\Omega |u|^p dx}{\int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx},$$

usando que $\lambda < \lambda^*$ e que $t_u u \in \mathcal{M}_\lambda$, temos que

$$t_u = \left(\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \lambda \int_\Omega |u|^p dx}{\displaystyle\int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx} \right)^{\frac{1}{\gamma - p}} > 0.$$

Agora, vamos caracterizar $t_u > 0$ analisando $\mathcal{L}''(t_u)$. Usando que $p < \gamma$ e $\lambda < \lambda^*$, obtemos que

$$\mathcal{L}''(t_u) = -\frac{(\gamma - p)\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \lambda \int_\Omega |u|^p dx\right)}{t_u^2} < 0.$$

E, portanto, $J_\lambda(t_u u) := \max_{t \geq 0} J_\lambda(tu)$.

Para finalizar, vamos mostrar que se $J'_\lambda(u)u \leq 0$, então $t_u \in (0, 1]$. Vamos supor, por contradição, que $t_u > 1$. Mas antes observe que $J'_\lambda(t_u u)t_u u = 0$ o que implica em

$$t_u^p \int_\Omega |\nabla u|^p dx \quad = \quad \lambda t_u^p \int_\Omega |u|^p dx + t_u^\gamma \int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx.$$

Dividindo essa última igualdade por $t_u^p > 0$ e usando que $t_u^{\gamma - p} > 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^p dx \quad &= \quad \lambda \int_\Omega |u|^p dx + t_u^{\gamma - p} \int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx \\ &> \quad \lambda \int_\Omega |u|^p dx + \int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$J'_\lambda(u)u = \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \lambda \int_\Omega |u|^p dx - \int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx > 0.$$

O que, por hipótese, é uma contradição. Portanto, temos que $t_u \in (0, 1]$. $\square$

Observe que basta garantirmos a existência de $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\displaystyle\int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx > 0$ para que $\mathcal{N}_\lambda \neq \emptyset$. Com este intento, vamos mostrar o corolário abaixo.

Corolário 1.0.8. *Sendo $p < \gamma < p^*$, $\lambda < \lambda^*$, $W(x) \in L^\infty(\Omega)$ e $|\Omega^+| \neq 0$, temos que $\mathcal{N}_\lambda \neq \emptyset$.*

Demonstração. Observe que $|\Omega^+| \neq 0$, onde $\Omega^+ = \{x \in \Omega : \ W(x) > 0\}$, nos permite considerar uma $u \in C_0^\infty(\Omega^+)$ tal que $supp = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}} \subset\subset \Omega^+$ de modo que

$$\int_{\Omega^+} W(x)|u|^\gamma dx \ = \int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx.$$

Logo, utilizando a Proposição 1.0.7, temos o resultado desejado. $\square$

Agora vamos mostrar que os conjuntos $\mathcal{N}_\lambda^\pm$, $\mathcal{M}_\lambda$ e $\mathcal{M}_\lambda^\pm$ são não-vazios.

Proposição 1.0.9. *Sendo $p < \gamma < p^*$, $\lambda < \lambda^*$, $W(x) \in L^\infty(\Omega)$ e $|\Omega^+| \neq 0$, temos que $\mathcal{M}_\lambda^\pm \neq \emptyset$. Implicando que $\mathcal{N}_\lambda^\pm \neq \emptyset$ e $\mathcal{M}_\lambda \neq \emptyset$.*

Demonstração. Por hipótese, a medida de Lebesgue de $\Omega^+ = \{x \in \Omega : W(x) > 0\}$ é não-nula, isto é, $|\Omega^+| \neq 0$. Assim, podemos considerar x_1 e x_2 em Ω^+, r_1 e r_2 números reais positivas, tais que

i) $B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2) = \emptyset$;

ii) $|B_{r_1}(x_1) \cap \Omega_+| > 0$ e $|B_{r_2}(x_2) \cap \Omega_+| > 0$.

Agora, vamos considerar duas funções não negativas $w_1 \in C_0^\infty(B_{r_1}(x_1))$ e $w_2 \in C_0^\infty(B_{r_2}(x_2))$ tais que *supp* $(u) = \overline{\{x_i \in \Omega : u(x_i) \neq 0\}} \subset\subset \Omega^+$, com $i = 1, 2$, de modo que

$$\int_{B_{r_1}(x_1)} W(x)|w_1|^\gamma dx > 0 \quad \text{e} \quad \int_{B_{r_2}(x_2)} W(x)|w_2|^\gamma dx > 0. \tag{1.0.7}$$

Além disso, em todo Ω, vamos considerar as suas extensões por zero. Logo, temos que

$$\int_{B_{r_1}(x_1)} W(x)|w_1|^\gamma dx = \int_\Omega W(x)|w_1|^\gamma dx \quad \text{e} \quad \int_{B_{r_2}(x_2)} W(x)|w_2|^\gamma dx = \int_\Omega W(x)|w_2|^\gamma dx.$$

Portanto, usando o Proposição 1.0.7, temos a existência de números reais positivos t_1 e t_2, de modo que t_1w_1 e t_2w_2 são elementos de $\mathcal{N}_\lambda$. Em outras palavras,

$$0 = J'_\lambda(t_1w_1)t_1w_1 = \int_\Omega |t_1\nabla w_1|^p dx - \lambda \int_\Omega |t_1w_1|^p dx - \int_\Omega W(x)|t_1w_1|^\gamma dx$$

e

$$0 = J'_\lambda(t_2w_2)t_2w_2 = \int_\Omega |t_2\nabla w_2|^p dx - \lambda \int_\Omega |t_2w_2|^p dx - \int_\Omega W(x)|t_2w_2|^\gamma dx.$$

Por outro lado, pelo item i) e desde que $supp(w_i) \subset B_{r_i}(x_i)$, para $i = 1,\ 2$, temos que $supp(w_1) \cap supp(w_2) = \emptyset$. Consequentemente, resulta que

$$\begin{aligned}
J'_\lambda(t_1w_1 - t_2w_2)(t_1w_1 - t_2w_2) &= \int_\Omega |t_1w_1 - t_2w_2|^p dx - \lambda \int_\Omega |t_1w_1 - t_2w_2|^p dx \\
&\quad - \int_\Omega W(x)|t_1w_1|^\gamma dx \\
&= \int_\Omega |t_1w_1|^p dx + \int_\Omega |t_2w_2|^p dx - \lambda \int_\Omega |t_1w_1|^p dx \\
&\quad -\lambda \int_\Omega |t_2w_2|^p dx - \int_\Omega W(x)|t_1w_1|^\gamma dx \\
&\quad - \int_\Omega W(x)|t_2w_2|^\gamma dx \\
&= J'_\lambda(t_1w_1)t_1w_1 + J'_\lambda(t_2w_2)t_2w_2 = 0.
\end{aligned}$$

Com isso, mostramos que a função $w = t_1w_1 - t_2w_2 \in \mathcal{N}_\lambda$.

Agora, vamos mostrar que $w \in \mathcal{M}_\lambda^\pm$. Primeiro, observe que $w^+ = t_1w_1 \neq 0$ e $w^- = -t_2w_2 \neq 0$ em Ω. Logo, temos que $w \in \mathcal{N}_\lambda^\pm$. Além disso, por (1.0.7), temos que

$$\int_\Omega W(x)|w|^\gamma dx = \int_\Omega W(x)|t_1w_1|^\gamma dx + \int_\Omega W(x)|t_2w_2|^\gamma dx > 0.$$

Então, segue que $w \in \mathcal{N}_\lambda^{\pm}$ e $\displaystyle\int_\Omega W(x)|w|^\gamma dx > 0$ e assim concluímos que $w \in \mathcal{M}_\lambda^{\pm}$. $\square$

Finalizaremos este capítulo analisando os seguintes níveis de energia:

$$c_\lambda = \inf_{\mathcal{N}_\lambda} J_\lambda, \quad d_\lambda = \inf_{\mathcal{N}_\lambda^{\pm}} J_\lambda, \quad \overline{c}_\lambda = \inf_{\mathcal{M}_\lambda} J_\lambda \quad \text{e} \quad \overline{d}_\lambda = \inf_{\mathcal{M}_\lambda^{\pm}} J_\lambda. \tag{1.0.8}$$

Proposição 1.0.10. *As seguintes afirmações são verdadeiras*

i) Se $\lambda < \lambda_1$, então c_λ e d_λ estão bem definidos e são positivos. Além disso,

$$c_\lambda = \overline{c}_\lambda \quad e \quad d_\lambda = \overline{d}_\lambda.$$

ii) Se $\lambda < \lambda^*$, então $\overline{c}_\lambda$ e $\overline{d}_\lambda$ estão bem definidos e são positivos.

Demonstração. Primeiro, deixamos claro que mostrar que os níveis de energia estão bem definidos é mostrar que eles são números reais.

Vamos analisar, inicialmente, o nível $c_\lambda = \inf_{\mathcal{N}_\lambda} J_\lambda$. Como, pelo Corolário 1.0.8, $\mathcal{N}_\lambda \neq \emptyset$ temos, pela definição de ínfimo (veja Definição 5.0.5, Apêndice II), que $J_\lambda(u) \geq c_\lambda$ para $u \in \mathcal{N}_\lambda$. Logo, temos que $c_\lambda < +\infty$. Além disso, usando o itens (i) e (ii) da Proposição 1.0.1, segue que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq C_1\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_1}\right)\|u\|^p \\ &\geq C_1\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_1}\right)C_2\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-p}} \\ &\geq C_1C_2\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_1}\right)^{\frac{1+\gamma-p}{\gamma-p}} > 0, \text{ para toda } u \in \mathcal{N}_\lambda. \end{aligned}$$

Logo, pela definição de ínfimo (veja Definição 5.0.5, Apêndice II), segue que

$$c_\lambda = \inf_{\mathcal{N}_\lambda} J_\lambda \geq C_1C_2\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_1}\right)^{\frac{1+\gamma-p}{\gamma-p}} > 0.$$

Portanto, concluímos que $c_\lambda \in (0, +\infty)$. Observe que

$$d_\lambda = \inf_{\mathcal{N}_\lambda^{\pm}} J_\lambda \geq c_\lambda = \inf_{\mathcal{N}_\lambda} J_\lambda \geq C_1C_2\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_1}\right)^{\frac{1+\gamma-p}{\gamma-p}} > 0,$$

já que $\mathcal{N}_\lambda^{\pm} \subset \mathcal{N}_\lambda$. Ademais, pelo Corolário 1.0.3, temos que $c_\lambda = \overline{c}_\lambda$ e $d_\lambda = \overline{d}_\lambda$.

Agora seguindo o mesmo raciocínio usado no item (i), mas usando a Proposição 1.0.5 em vez da Proposição 1.0.1, temos que

$$J_\lambda(u) \geq D_1D_2\left(\frac{\lambda^*-\lambda}{\lambda^*}\right)^{\frac{1+\gamma-p}{\gamma-p}} > 0, \quad \forall\, u \in \mathcal{M}_\lambda.$$

Assim, mais uma vez pela definição de ínfimo, segue que

$$\overline{c}_\lambda = \inf_{\mathcal{M}_\lambda} J_\lambda \geq D_1 D_2 \left(\frac{\lambda^* - \lambda}{\lambda^*} \right)^{\frac{1+\gamma-p}{\gamma-p}} > 0.$$

Por outro lado, novamente, pela definição de ínfimo, temos que $J_\lambda(u) \geq \overline{c}_\lambda$ para todo $u \in \mathcal{M}_\lambda$. E, portanto, concluímos que $\overline{c}_\lambda \in (0, +\infty)$.

Por fim, utilizando o mesmo raciocínio acima e que $\mathcal{M}_\lambda^\pm \subset \mathcal{M}_\lambda$, concluímos que $\overline{d} \in (0, +\infty)$. $\square$

Capítulo 2

Existência de solução em $\mathcal{N}_\lambda$ para $\lambda < \lambda_1$

Neste capítulo iremos mostrar a existência de solução de energia mínima (ground-state) para o problema (P_λ), quando $\lambda < \lambda_1$. Iniciaremos mostrando que c_λ é atingido em $\mathcal{N}_\lambda$, isto é, existe $w_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda$ tal que

$$c_\lambda := \inf_{\mathcal{N}_\lambda} J_\lambda = J_\lambda(w_\lambda).$$

Proposição 2.0.1. *Se $\lambda < \lambda_1$, então existe $w_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda$ de modo que*

$$c_\lambda := \inf_{\mathcal{N}_\lambda} J_\lambda = J_\lambda(w_\lambda).$$

Demonstração. Pela Proposição 1.0.10 temos que $c_\lambda \in \mathbb{R}$. Então, pela definição de ínfimo, temos que existe uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda$ tal que

$$\lim_{n \to +\infty} J_\lambda(u_n) = c_\lambda.$$

Essa sequência é chamada de sequência minimizante.

Afirmamos que a sequência minimizante (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, suponhamos, por absurdo, que (u_n) seja ilimitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Então, existe uma subsequência (u_{n_k}), tal que

$$\lim_{k \to +\infty} \|(u_{n_k})\| = +\infty.$$

Consequentemente, pela coercividade de J_λ sobre $\mathcal{N}_\lambda$ (veja Proposição 1.0.1), obtemos que

$$c_\lambda = \lim_{k \to +\infty} J_\lambda((u_{n_k})) \geq \lim_{k \to +\infty} C_1 \left(\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1} \right) \|(u_{n_k})\|^p = +\infty,$$

o que contradiz o fato de que $c_\lambda \in \mathbb{R}$.

Uma vez que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ temos, pela reflexividade do espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, que a menos de uma subsequência, existe $u_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega)$, de modo que

$$u_n \rightharpoonup u_\lambda, \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.0.1}$$

E, pela Imersão Compacta de Sobolev, temos que

$$u_n \to u_\lambda, \text{ em } L^q(\Omega), 1 \leq q < p^*. \tag{2.0.2}$$

E, pelo Teorema de Vainberg (veja Teorema 5.0.8), temos mais ainda

$$u_n \to u_\lambda, \quad q.t.p \text{ em } \Omega, \tag{2.0.3}$$

e

$$\exists h_q \in L^q(\Omega); |u_n| \leq h_q, \ \forall \ n \in \mathbb{N}, \ q.t.p \ \text{ em } \Omega. \tag{2.0.4}$$

Agora vamos mostrar que $u_\lambda \neq 0$. Novamente argumentando por contradição, vamos supor que $u_\lambda = 0$. Dado que $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda$ temos que $J'_\lambda(u_n)u_n = 0$, para todo n, o que é equivalente à seguinte igualdade

$$\|u_n\|^p \ = \ \lambda \int_\Omega |u_n|^p dx + \int_\Omega W(x)|u_n|^\gamma dx, \quad \forall \ n.$$

Segue da Desigualdade de Poincaré (Teorema 5.0.12) que

$$0 < \left(\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1}\right) \|u_n\|^p \leq \int_\Omega W(x)|u_n|^\gamma dx, \quad \forall \ n.$$

Por outro lado, desde que $1 < \gamma < p^*$, e considerando (2.0.3), (2.0.4) e que $W \in L^\infty(\Omega)$, podemos utilizar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Teorema 5.0.7) e, então, a seguinte convergência ocorre

$$0 = \int_\Omega W(x)|u_\lambda|^\gamma dx = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega W(x)|u_n|^\gamma dx.$$

Assim teríamos

$$0 < \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega W(x)|u_n|^\gamma dx = 0,$$

o que é um absurdo.

Afirmamos que $\int_\Omega W(x)|u_\lambda|^\gamma dx > 0$. De fato, desde que $1 < \gamma < p^*$, temos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Teorema 5.0.7), Proposição 1.0.1 e por $W \in L^\infty(\Omega)$ que

$$0 < C_3 \left(\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - p}} < \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega W(x)|u_n|^\gamma dx = \int_\Omega W(x)|u_\lambda|^\gamma dx.$$

Uma vez demonstrado que $u_\lambda \neq 0$ então, pela Proposição 1.0.7, existe um único $t_{u_\lambda} > 0$ tal que $J'_\lambda(t_{u_\lambda} u_\lambda) t_{u_\lambda} u_\lambda = 0$, isto é, $t_{u_\lambda} u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda$. Definindo $w_\lambda := t_{u_\lambda} u_\lambda$, vamos mostrar que

$$c_\lambda := \inf_{\mathcal{N}_\lambda} J_\lambda = J_\lambda(w_\lambda).$$

Com este objetivo, primeiramente vamos mostrar que $t_{u_\lambda} \leq 1$. Note que, usando que

$J'_\lambda(u_n)u_n = 0$ para todo k e por (2.0.1), temos que

$$\begin{aligned}\|u_n\|^p &= \lambda \int_\Omega |u_n|^p dx + \int_\Omega W(x)|u_n|^\gamma dx + o_n(1) \\ &= \lambda \int_\Omega |u_\lambda|^p dx + \int_\Omega W(x)|u_\lambda|^\gamma dx.\end{aligned}$$

Então, pelo fato da norma ser fracamente semicontínua inferiormente e que $u_n \rightharpoonup u_\lambda$, em $W_0^{1,p}(\Omega)$, segue que

$$\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^p dx = \|u_\lambda\|^p \leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|^p = \lambda \int_\Omega |u_\lambda|^p dx + \int_\Omega W(x)|u_\lambda|^\gamma dx,$$

ou seja, $J'_\lambda(u_\lambda)u_\lambda \leq 0$. Portanto, pela Proposição 1.0.7, temos que $t_{u_\lambda} \leq 1$. Daí, segue que

$$\begin{aligned}c_\lambda &\leq J_\lambda(t_\lambda u_\lambda) \\ &= J_\lambda(t_\lambda u_\lambda) - \frac{1}{\gamma} J'_\lambda(t_\lambda u_\lambda) t_\lambda u_\lambda \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right) t_{u_\lambda}^p \left(\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^p - \lambda \int_\Omega |u_\lambda|^p dx\right) \\ &\leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right) \left(\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^p - \lambda \int_\Omega |u_\lambda|^p dx\right).\end{aligned} \tag{2.0.5}$$

Por outro lado, usando que $\lambda < \lambda_1$ e a Desigualdade de Poincaré (veja Teorema 5.0.12), obtemos que

$$0 \leq \left(\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1}\right) \int_\Omega |\nabla u_n|^p \leq \int_\Omega W(x)|u_n|^\gamma dx = \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^p - \lambda \int_\Omega |u_n|^p dx\right), \quad \forall\ n.$$

Consequentemente, pela desigualdade (2.0.5) e pelo Lema de Fatou (veja Lema 5.0.6), temos que

$$\begin{aligned}c_\lambda &\leq J_\lambda(t_\lambda u_\lambda) \\ &\leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right) \left(\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^p - \lambda \int_\Omega |u_\lambda|^p dx\right) \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right) \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^p - \lambda \int_\Omega |u_n|^p dx\right) \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} \left[J_\lambda(u_n) - \frac{1}{\gamma} J'_\lambda(u_n)u_n\right] \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} J_\lambda(u_n) = c_\lambda.\end{aligned}$$

O que implica em $c_\lambda = J_\lambda(w_\lambda)$, onde $w_\lambda = t_\lambda u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda$. $\square$

2.0.1 Demonstração do Teorema 0.0.1

Agora vamos mostrar que o minimizante w_λ encontrado no resultado anterior (Proposição 2.0.1) é ponto crítico de J_λ, isto é, $J'_\lambda(w_\lambda)v = 0$ para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Seguindo o argumento da demonstração de [4, Lema 2.5.8], com algumas modificações, vamos considerar a função $w_\lambda + sv \neq 0$, para $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, onde $\epsilon > 0$ é arbitrário.

Analisemos a seguinte função $\psi : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$
\begin{aligned}
\psi(s,t) &= J'_\lambda(t(w_\lambda + sv))(t(w_\lambda + sv)) \\
&= t^p \left[\int_\Omega |\nabla(w_\lambda + sv)|^p - \lambda \int_\Omega |w_\lambda + sv|^p dx\right] - t^\gamma \int_\Omega W(x)|w_\lambda + sv|^\gamma dx.
\end{aligned}
$$

Observe que $w_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda$ implica que

$$\psi(0,1) = \int_\Omega |\nabla w_\lambda|^p - \lambda \int_\Omega |w_\lambda|^p dx - \int_\Omega W(x)|w_\lambda|^\gamma dx = 0.$$

Por outro lado, usando que $w_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda$ e $p < \gamma$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial t}(0,1) &= p\left[\int_\Omega |\nabla w_\lambda|^p - \lambda \int_\Omega |w_\lambda|^p dx\right] - \gamma \int_\Omega W(x)|w_\lambda|^\gamma dx \\
&= (p-\gamma)\int_\Omega W(x)|w_\lambda|^\gamma dx < 0.
\end{aligned}
$$

Então, aplicando o Teorema da Função Implícita (veja Teorema 5.0.5) em $\psi(s,t)$, existe um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e uma função $t := t(s)$ de classe C^1, tal que para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ temos que

$$
\begin{aligned}
0 = \psi(s, t(s)) &= J'_\lambda(t(w_\lambda + sv))(t(w_\lambda + sv)) \\
&= t^p \left[\int_\Omega |\nabla(w_\lambda + sv)|^p - \lambda \int_\Omega |w_\lambda + sv|^p dx\right] - t^\gamma \int_\Omega W(x)|w_\lambda + sv|^\gamma dx.
\end{aligned}
$$

Logo, $t(s)(w_\lambda + sv) \in \mathcal{N}_\lambda$ para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Por outro lado, usando que $t(0) = 1$ então, por continuidade, temos que $t(s) > 0$ em $(-\epsilon, \epsilon)$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Consequentemente, desde que $\lambda < \lambda_1$ e pela Desigualdade de Poincaré (veja Teorema 5.0.12), resulta que

$$
\begin{aligned}
0 &< t^{p-\gamma}(\lambda_1 - \lambda)\int_\Omega |w_\lambda + sv|^p dx \\
&< t^{p-\gamma}\left[\int_\Omega |\nabla(w_\lambda + sv)|^p - \lambda \int_\Omega |w_\lambda + sv|^p dx\right] \\
&= \int_\Omega W(x)|w_\lambda + sv|^\gamma dx.
\end{aligned}
$$

Então, pela Proposição 1.0.7, temos uma única projeção $t_v(s) > 0$ para $w_\lambda + sv$. Logo, temos que $t_v \equiv t > 0$ em $(-\epsilon, \epsilon)$. Consequentemente, a função $t_v : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e $t_v(0) = 1$, já que $w_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda$.

Com estas propriedades da função t_s iremos definir a função $\kappa : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\kappa(s) = J_\lambda(t_v(s)(w_\lambda + sv)).$$

Afirmamos que κ assume ínfimo em 0. De fato,

$$\kappa(0) = J_\lambda(t_v(0)w_\lambda) = J_\lambda(w_\lambda) = c_\lambda \leq J_\lambda(t_v(s)(w_\lambda + sv)) = \kappa(s), \qquad \forall\, s \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Portanto, derivando κ em 0, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \kappa'(0) &= \frac{d}{ds}\left[J_\lambda(t_v(s)(w_\lambda + sv))\right]_{|s=0} \\ &= J'_\lambda(t_v(0)w_\lambda) \cdot (t'_v(0)w_\lambda + t_v(0)v) \\ &= J'_\lambda(w_\lambda) \cdot (t'_v(0)w_\lambda + v) \\ &= t'_v(0)J'_\lambda(w_\lambda)w_\lambda + J'_\lambda(w_\lambda)v \\ &= J'_\lambda(w_\lambda)v. \end{aligned}$$

E, pela arbitrariedade de $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, concluímos que w_λ é solução para o problema (P_λ).

Por fim, demonstraremos agora que a solução w_λ para (P_λ) não troca de sinal. De fato, suponha por absurdo, que w_λ troca de sinal, ou seja, $w_\lambda^\pm \neq 0$. Como w_λ é solução para (P_λ) e que $w_\lambda^\pm \in W_0^{1,p}(\Omega)$, temos que

$$J'_\lambda(w_\lambda)w_\lambda^\pm = 0.$$

E desde que $supp(w_\lambda^+) \cap supp(w_\lambda^-) = \emptyset$, segue que

$$J'_\lambda(w_\lambda^\pm)w_\lambda^\pm = 0,$$

ou seja, temos que $w_\lambda^\pm \in \mathcal{N}_\lambda$. Logo,

$$J_\lambda(w_\lambda^\pm) \geq c_\lambda.$$

Consequentemente, temos que

$$\begin{aligned} 2c_\lambda &\leq J_\lambda(w_\lambda^+) + J_\lambda(w_\lambda^-) \\ &= J_\lambda(w_\lambda) = c_\lambda, \end{aligned}$$

o que é uma contradição.

$\square$

Capítulo 3

Existência de solução em $\mathcal{N}_\lambda^\pm$ para $\lambda < \lambda_1$

Neste capítulo iremos mostrar a existência de solução nodal com energia mínima (ground-state) para o problema (P_λ), quando $\lambda < \lambda_1$. Iniciaremos, mostrando que d_λ é atingido em $\mathcal{N}_\lambda^\pm$, isto é, existe $w_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^\pm$ tal que

$$d_\lambda := \inf_{\mathcal{N}_\lambda^\pm} J_\lambda = J_\lambda(w_\lambda).$$

Mas antes cabe ressaltar que a demonstração do resultado a seguir é análoga à desenvolvida na Proposição 2.0.1, salvo pelo fato de que agora devemos considerar a parte positiva e a parte negativa da função ou da sequência de funções a serem consideradas na demonstração.

Proposição 3.0.1. *Se $\lambda < \lambda_1$, então existe $w_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^\pm$ de modo que*

$$d_\lambda := \inf_{\mathcal{N}_\lambda^\pm} J_\lambda = J_\lambda(w_\lambda).$$

Demonstração. Pela Proposição 1.0.10 temos que $d_\lambda \in \mathbb{R}$. Então, pela definição de ínfimo, temos que existe uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda^\pm$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} J_\lambda(u_n) = d_\lambda,$$

e como vimos na demonstração da Proposição 2.0.1, é uma sequência minimizante.

Afirmamos que tal sequência (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, suponhamos, por absurdo, que (u_n) seja ilimitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Então, existe uma subsequência (u_{n_k}), tal que

$$\lim_{k\to+\infty} \|u_{n_k}\| = +\infty.$$

Consequentemente, pela coercividade de J_λ sobre $\mathcal{N}_\lambda^\pm$ (veja Corolário 1.0.2), obtemos que

$$d_\lambda = \lim_{k\to+\infty} J_\lambda(u_{n_k}) \geq \lim_{k\to+\infty} C_1 \left(\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1}\right) \|u_{n_k}\|^p = +\infty,$$

o que contradiz o fato de que $d_\lambda \in \mathbb{R}$. Logo, como vimos na demonstração da Proposição 2.0.1, existe $u_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de tal modo que, a menos de uma subsequência, valem os seguintes resultados

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_\lambda, & \text{em } W_0^{1,p}(\Omega), \\ u_n \to u_\lambda, & q.t.p \text{ em } \Omega, \\ u_n \to u_\lambda, & \text{em } L^q(\Omega), 1 \leq q < p^*, \\ \exists h_q \in L^q(\Omega); & |u_n| \leq h_q, \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \ q.t.p \ \text{ em } \Omega. \end{cases}$$

Além disso, usando que as aplicações $u \to u^+$ e $u \to u^-$ de $L^r(\mathbb{R}^N)$ em $L^r(\mathbb{R}^N)$ são contínuas (veja [12, Lema 2.3]) temos, a menos de uma subsequência, que

$$\begin{cases} u_n^\pm \rightharpoonup u_\lambda^\pm, & \text{em } W_0^{1,p}(\Omega), \\ u_n^\pm \to u_\lambda^\pm, & q.t.p \text{ em } \Omega, \\ u_n^\pm \to u_\lambda^\pm, & \text{em } L^q(\Omega), 1 \leq q < p^*, \\ \exists h_q^\pm \in L^q(\Omega); & |u_n^\pm| \leq h_q, \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \ q.t.p \ \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{3.0.1}$$

Vamos mostrar agora que $u_\lambda^\pm \neq 0$. Novamente argumentando por contradição, vamos supor que $u_\lambda^\pm = 0$. Dado que $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda^\pm$ temos que $J'_\lambda(u_n^\pm)u_n^\pm = 0$, para todo n, o que equivale a dizer que

$$\|u_n^\pm\|^p \ = \ \lambda \int_\Omega |u_n^\pm|^p dx + \int_\Omega W(x)|u_n^\pm|^\gamma dx, \quad \forall\, n.$$

E da Desigualdade de Poincaré (veja Teorema 5.0.12), resulta que

$$0 < \left(\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1}\right) \|u_n^\pm\|^p \leq \int_\Omega W(x)|u_n^\pm|^\gamma dx, \quad \forall\, n.$$

Por outro lado, desde que $1 < \gamma < p^*$, temos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Teorema 5.0.7), (3.0.1) e por $W \in L^\infty(\Omega)$, que a seguinte convergência ocorre

$$0 = \int_\Omega W(x)|u_\lambda^\pm|^\gamma dx = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega W(x)|u_n^\pm|^\gamma dx.$$

Assim teríamos

$$0 < \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega W(x)|u_n^\pm|^\gamma dx = 0,$$

o que é uma contradição.

Asseveramos que $\displaystyle\int_\Omega W(x)|u_\lambda^\pm|^\gamma dx > 0$. De fato, desde que $1 < \gamma < p^*$, temos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Teorema 5.0.7), (2.0.1), Corolário 1.0.2 e por $W \in L^\infty(\Omega)$, que

$$0 < C_3 \left(\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - p}} < \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega W(x)|u_n^\pm|^\gamma dx = \int_\Omega W(x)|u_\lambda^\pm|^\gamma dx.$$

Uma vez demonstrado que $u_\lambda^\pm \neq 0$, então, pela Proposição 1.0.7, existe um único $t_{u_\lambda}^\pm > 0$ tal que $J_\lambda'(t_{u_\lambda}^\pm u_\lambda^\pm)t_{u_\lambda}^\pm u_\lambda^\pm = 0$, isto é, $t_{u_\lambda}^\pm u_\lambda^\pm \in \mathcal{N}_\lambda$. Definindo $w_\lambda := t_{u_\lambda}^+ u_\lambda^+ + t_{u_\lambda}^- u_\lambda^-$, note que

$$w_\lambda^+ = t_{u_\lambda}^+ u_\lambda^+, \qquad w_\lambda^- = t_{u_\lambda}^- u_\lambda^-$$

e

$$J_\lambda'(w_\lambda^\pm)w_\lambda^\pm = J_\lambda'(t_{u_\lambda}^\pm u_\lambda^\pm)t_{u_\lambda}^\pm u_\lambda^\pm = 0,$$

ou seja, temos que $w_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^\pm$. Portanto, vamos mostrar que

$$d_\lambda := \inf_{\mathcal{N}_\lambda^\pm} J_\lambda = J_\lambda(w_\lambda).$$

Primeiramente, mostraremos que $t_{u_\lambda}^\pm \leq 1$. Note que usando que $J_\lambda'(u_n^\pm)u_n^\pm = 0$, para todo n, e por (3.0.1), temos que

$$\begin{aligned}
\|u_n^\pm\|^p &= \lambda \int_\Omega |u_n^\pm|^p dx + \int_\Omega W(x)|u_n^\pm|^\gamma dx + o_n(1) \\
&= \lambda \int_\Omega |u_\lambda^\pm|^p dx + \int_\Omega W(x)|u_\lambda^\pm|^\gamma dx.
\end{aligned}$$

Então, pelo fato da norma ser fracamente semicontínua inferiormente e $u_n^\pm \rightharpoonup u_\lambda^\pm$, segue que

$$\int_\Omega |\nabla u_\lambda^\pm|^p dx = \|u_\lambda^\pm\|^p \leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n^\pm\|^p = \lambda \int_\Omega |u_\lambda^\pm|^p dx + \int_\Omega W(x)|u_\lambda^\pm|^\gamma dx,$$

ou seja, temos que $J_\lambda'(u_\lambda^\pm)u_\lambda^\pm \leq 0$. Portanto, pela Proposição 1.0.7, segue que $t_{u_\lambda}^\pm \leq 1$. Diante dessa informação e usando que $supp(u^+) \cap supp(u^-) = \emptyset$, ocorre que

$$\begin{aligned}
d_\lambda &\leq J_\lambda(w_\lambda) \\
&= J_\lambda(t_{u_\lambda}^+ u_\lambda^+ + t_{u_\lambda}^- u_\lambda^-) - \frac{1}{\gamma} J_\lambda'(t_{u_\lambda}^+ u_\lambda^+ + t_{u_\lambda}^- u_\lambda^-)(t_{u_\lambda}^+ u_\lambda^+ + t_{u_\lambda}^- u_\lambda^-) \\
&= \left[J_\lambda(t_{u_\lambda}^+ u_\lambda^+) - \frac{1}{\gamma} J_\lambda'(t_{u_\lambda}^+ u_\lambda^+)(t_{u_\lambda}^+ u_\lambda^+)\right] + \left[J_\lambda(t_{u_\lambda}^- u_\lambda^-) - \frac{1}{\gamma} J_\lambda'(t_{u_\lambda}^- u_\lambda^-)(t_{u_\lambda}^- u_\lambda^-)\right] \\
&= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right)(t_{u_\lambda}^+)^p \left(\int_\Omega |\nabla u_\lambda^+|^p - \lambda \int_\Omega |u_\lambda^+|^p dx\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right)(t_{u_\lambda}^-)^p \left(\int_\Omega |\nabla u_\lambda^-|^p - \lambda \int_\Omega |u_\lambda^-|^p dx\right) \\
&= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u_\lambda^+|^p - \lambda \int_\Omega |u_\lambda^+|^p dx\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u_\lambda^-|^p - \lambda \int_\Omega |u_\lambda^-|^p dx\right).
\end{aligned} \tag{3.0.2}$$

Por outro lado, usando que $\lambda < \lambda_1$ e a Desigualdade de Poincaré (veja Teorema 5.0.12), obtemos que

$$0 \leq \left(\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1}\right) \int_\Omega |\nabla u_n^\pm|^p \leq \left(\int_\Omega |\nabla u_n^\pm|^p - \lambda \int_\Omega |u_n^\pm|^p dx\right), \quad \forall\, n.$$

Consequentemente, pela desigualdade (3.0.2) e pelo Lema de Fatou (veja Lema 5.0.6), segue que

$$\begin{aligned}
d_\lambda &\leq J_\lambda(w_\lambda) \\
&\leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u_\lambda^+|^p - \lambda \int_\Omega |u_\lambda^+|^p dx\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u_\lambda^-|^p - \lambda \int_\Omega |u_\lambda^-|^p dx\right) \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u_n^+|^p - \lambda \int_\Omega |u_n^+|^p dx\right)\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u_n^-|^p - \lambda \int_\Omega |u_n^-|^p dx\right)\right] \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} \left[J_\lambda(u_n) - \frac{1}{\gamma} J'_\lambda(u_n) u_n\right] \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} J_\lambda(u_n) = d_\lambda.
\end{aligned}$$

O que implica em $d_\lambda = J_\lambda(w_\lambda)$, onde $w_\lambda := t_{u_\lambda}^+ u_\lambda^+ + t_{u_\lambda}^- u_\lambda^-$. □

Nosso objetivo agora neste capítulo será mostrar que a função w_λ encontrada no resultado anterior, que atinge o menor nível de energia em $\mathcal{N}_\lambda^\pm$, é ponto crítico de J_λ. Antes disso, iremos mostrar dois resultados técnicos que são feitos para um operador mais geral que o $p-$*Laplaciano* nos trabalhos [5] e [19].

Lema 3.0.2. *Seja $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $v^\pm \neq 0$ e $\int_\Omega W(x)|v^\pm|^\gamma dx > 0$. Então, existem $t_v^+, t_v^+ > 0$ tais que*

$$J'_\lambda(t_v^+ v^+ + t_v^- v^-)v^+ = J'_\lambda(t_v^+ v^+ + t_v^- v^-)v^- = 0,$$

ou seja, $t_v^+ v^+ + t_v^- v^- \in \mathcal{N}_\lambda$.

Demonstração. Temos, pela Proposição 1.0.7, que existem $t_v^+, t_v^+ > 0$ tais que

$$J'_\lambda(t_v^+ v^+) t_v^+ v^+ = J'_\lambda(t_v^- v^-)(t_v^- v^-) = 0.$$

Desde que $supp(u^+) \cap supp(u^-) = \emptyset$, então

$$
\begin{aligned}
J'_\lambda(t_v^+v^+ + t_v^-v^-)v^+ &= \int_\Omega |\nabla(t_v^+v^+ + t_v^-v^-)|^{p-2}\ \nabla(t_v^+v^+ + t_v^-v^-)\cdot\nabla v^+dx \\
&\quad -\lambda\int_\Omega |t_v^+v^+ + t_v^-v^-|^{p-2}(t_v^+v^+ + t_v^-v^-)v^+dx \\
&\quad -\int_\Omega W(x)|t_v^+v^+ + t_v^-v^-|^{\gamma-2}(t_v^+v^+ + t_v^-v^-)v^+dx \\
&= t_v^+\int_\Omega |\nabla(t_v^+v^+ + t_v^-v^-)|^{p-2}\ |\nabla v^+|^2dx \\
&\quad -t_v^+\lambda\int_\Omega |t_v^+v^+ + t_v^-v^-|^{p-2}|v^+|^2dx \\
&\quad -t_v^+\int_\Omega W(x)|t_v^+v^+ + t_v^-v^-|^{\gamma-2}|v^+|^2dx \\
&= t_v^+\left[\int_\Omega |\nabla(t_v^+v^+)|^{p-2}\ |\nabla v^+|^2dx + \int_\Omega |\nabla(t_v^-v^-)|^{p-2}\ |\nabla v^+|^2dx\right] \\
&\quad -t_v^+\lambda\left[\int_\Omega |t_v^+v^+|^{p-2}|v^+|^2dx + \int_\Omega |t_v^-v^-|^{p-2}|v^+|^2dx\right] \\
&\quad -t_v^+\left[\int_\Omega W(x)|t_v^+v^+|^{\gamma-2}|v^+|^2dx + \int_\Omega W(x)|t_v^-v^-|^{\gamma-2}|v^+|^2dx\right] \\
&= t_v^+\left[(t_v^+)^{p-2}\int_\Omega |\nabla v^+|^pdx - \lambda(t_v^+)^{p-2}\int_\Omega |v^+|^pdx\right] \\
&\quad -t_v^+\left[(t_v^+)^{\gamma-2}\int_\Omega W(x)|v^+|^{\gamma-2}dx\right] \\
&= \frac{1}{t_v^+}J'_\lambda(t_v^+v^+)t_v^+v^+ = 0.
\end{aligned}
$$

De maneira análoga podemos mostrar que

$$
J'_\lambda(t_v^+v^+ + t_v^-v^-)v^- = \frac{1}{t_v^-}J'_\lambda(t_v^-v^-)t_v^-v^- = 0.
$$

Concluindo o desejado. $\square$

No próximo resultado, vamos analisar duas funções definidas da seguinte forma: a função $h^v : [0,+\infty)\times[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$
h^v(t,s) = J_\lambda(tv^+ + sv^-), \quad \text{onde } (t,s)\in[0,+\infty)\times[0,+\infty)
$$

e a função $\phi^v : [0,+\infty)\times[0,+\infty)\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$
\begin{aligned}
\phi^v(t,s) &= (\phi_1^v(t,s), \phi_2^v(t,s)) \\
&= \left(\frac{\partial h^v}{\partial t}(t,s), \frac{\partial h^v}{\partial s}(t,s)\right) \\
&= \left(J'_\lambda\left(tv^+ + sv^-\right)v^+, J'_\lambda\left(tv^+ + sv^-\right)v^-\right).
\end{aligned}
$$

Lema 3.0.3. *Seja* $\lambda < \lambda_1$ *e* $v \in \mathcal{N}_\lambda^{\pm}$. *Então,*

$$h^v(t,s) < h^v(1,1) = J_\lambda(v), \quad \forall\ t,\ s \geq 0$$

tal que $(t,s) \neq (1,1)$. *Além disso,*

$$det(\phi^v)'(1,1) > 0,$$

onde $(\phi^v)'$ *é a matriz Hessiana de* h^v *ou a matriz Jacobiana de* ϕ^v, *dada por*

$$(\phi^v)'(t,s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1^v}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial \phi_1^v}{\partial s}(t,s) \\ \\ \frac{\partial \phi_2^v}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial \phi_2^v}{\partial s}(t,s) \end{pmatrix},$$

para todo $(t,s) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty)$.

Demonstração. Considerando $v \in \mathcal{N}_\lambda^{\pm}$ e usando que $supp(v^+) \cap supp(v^-) = \emptyset$, obtemos

$$0 = J'_\lambda(v)v^{\pm} = J'_\lambda(v^+ + v^-)v^{\pm}.$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned} \phi^v(1,1) &= \left(\frac{\partial h^v}{\partial t}(1,1), \frac{\partial h^v}{\partial s}(1,1)\right) \\ &= (J'_\lambda(v^+ + v^-)v^+, J'_\lambda(v^+ + v^-)v^-) \\ &= (0,0). \end{aligned}$$

Assim, $(1,1)$ é ponto crítico de h^v. Agora, pela definição de h^v e considerando que $supp(v^+) \cap supp(v^-) = \emptyset$, segue que

$$\begin{aligned} h^v(t,s) &= J_\lambda(tv^+ + sv^-) \\ &= \frac{1}{p}\left(\int_\Omega |\nabla tv^+ + sv^-|^p dx - \lambda \int_\Omega |tv^+ + sv^-|^p dx\right) \\ &\quad -\frac{1}{\gamma}\int_\Omega W(x)|tv^+ + sv^-|^\gamma dx \\ &= \frac{t^p}{p}\int_\Omega |\nabla v^+|^p dx - \lambda\frac{t^p}{p}\int_\Omega |v^+|^p dx - \frac{t^p}{\gamma}\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx \\ &\quad +\frac{s^p}{p}\int_\Omega |\nabla v^-|^p dx - \lambda\frac{s^p}{p}\int_\Omega |v^-|^p dx - \frac{s^p}{\gamma}\int_\Omega W(x)|v^-|^\gamma dx. \end{aligned}$$

Escrevendo

$$J_\lambda^+(tv^+) = \frac{t^p}{p}\int_\Omega |\nabla v^+|^p dx - \lambda\frac{t^p}{p}\int_\Omega |v^+|^p dx - \frac{t^p}{\gamma}\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx \tag{3.0.3}$$

e

$$J_\lambda^-(sv^-) = \frac{s^p}{p}\int_\Omega |\nabla v^-|^p dx - \lambda\frac{s^p}{p}\int_\Omega |v^-|^p dx - \frac{s^\gamma}{\gamma}\int_\Omega W(x)|v^-|^\gamma dx. \tag{3.0.4}$$

Concluímos que

$$h^v(t,s) = J_\lambda^+(tv^+) + J_\lambda^-(sv^-). \tag{3.0.5}$$

Afirmamos que h^v possui um ponto de máximo global em $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$. De fato, dividindo (3.0.3) por t^γ, obtemos que

$$\frac{J_\lambda^+(tv^+)}{t^\gamma} = \frac{t^{p-\gamma}}{p}\left(\int_\Omega |\nabla v^+|^p dx - \lambda\int_\Omega |v^+|^p dx\right) - \frac{1}{\gamma}\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx.$$

Desde que $1<p<\gamma$, $\lambda<\lambda_1$ e usando a veracidade do Corolário 1.0.2, temos

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{J_\lambda^+(tv^+)}{t^\gamma} = -\frac{1}{\gamma}\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx < 0.$$

Por outro lado, dividindo (3.0.3) por t^p e usando a Desigualdade de Poincaré (Teorema 5.0.12), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{J_\lambda^+(tv^+)}{t^p} &= \frac{1}{p}\left(\int_\Omega |\nabla v^+|^p dx - \lambda\int_\Omega |v^+|^p dx\right) - \frac{t^{\gamma-p}}{\gamma}\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx\\ &\geq \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_1}\right)\int_\Omega |\nabla v^+|^p dx - \frac{t^{\gamma-p}}{\gamma}\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx\end{aligned}$$

E mais uma vez desde que $1<p<\gamma$, $\lambda<\lambda_1$ e usando a veracidade do Corolário 1.0.2, temos que

$$\liminf_{t\to 0^+}\frac{J_\lambda^+(tv^+)}{t^p} = \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_1}\right)\int_\Omega |\nabla v^+|^p dx > 0.$$

Utilizando o mesmo argumento para (3.0.4), resulta que

$$\limsup_{s\to+\infty}\frac{J_\lambda^-(sv^-)}{s^\gamma} < 0 \quad \text{e} \quad \liminf_{s\to 0^+}\frac{J_\lambda^-(sv^-)}{s^p} > 0. \tag{3.0.6}$$

Portanto, utilizando (3.0.6) em (3.0.5), temos que

$$\liminf_{|(t,s)|\to 0^+} h^v(t,s) > 0 \quad \text{e} \quad \limsup_{|(t,s)|\to+\infty} h^v(t,s) \leq 0.$$

Assim, por continuidade, h^v tem um ponto de máximo global para algum ponto $(\bar{t},\bar{s})\in[0,+\infty)\times[0,+\infty)$.

Agora mostraremos que $\bar{t}$, $\bar{s}>0$. De fato, supondo por contradição, que $\bar{t}=0$. Então, desde que $v\in\mathcal{N}_\lambda^\pm$, utilizando a veracidade da Proposição 1.0.7 e do Corolário 1.0.2, segue que

$$\begin{aligned}
h^v(0,\overline{s}) &= J_\lambda(\overline{s}v^-)\\
&= \frac{1}{p}\left(\int_\Omega |\nabla(\overline{s}v^-)|^p dx - \lambda\int_\Omega |(\overline{s}v^-)|^p dx\right) - \frac{1}{\gamma}\int_\Omega W(x)|\overline{s}v^-|^\gamma dx\\
&\leq \sup_{s\geq 0} J_\lambda(sv^-)\\
&= \frac{1}{p}\left(\int_\Omega |\nabla v^-|^p dx - \lambda\int_\Omega |v^-|^p dx\right) - \frac{1}{\gamma}\int_\Omega W(x)|v^-|^\gamma dx\\
&= J_\lambda(v^-)\\
&= h^v(0,1).
\end{aligned}$$

Logo,

$$h^v(0,\overline{s}) \leq h^v(0,1). \tag{3.0.7}$$

Agora, desde que $v^- \in \mathcal{N}_\lambda$ e pelo Corolário 1.0.2, segue que $J_\lambda(v^+)$, $J_\lambda(v^-) > 0$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
J_\lambda(v^-) &< J_\lambda(v^+) + J_\lambda(v^-)\\
&= \frac{1}{p}\left(\int_\Omega |\nabla v^+ + v^-|^p dx - \lambda\int_\Omega |v^+ + v^-|^p dx\right) - \frac{1}{\gamma}\int_\Omega W(x)|v^+ + v^-|^\gamma dx\\
&= J_\lambda(v)\\
&= h^v(1,1)
\end{aligned}$$

De (3.0.7) e por este último resultado, concluímos que

$$h^v(1,1) > J_\lambda(v^-) = h^v(0,1) \geq h^v(0,\overline{s})$$

o que é um contradição, pois $(0,\overline{s})$ é máximo global e , consequentemente, $\overline{t} > 0$. De modo análogo, prova-se que $\overline{s} > 0$.

Para finalizar, vamos mostrar que $(1,1)$ é máximo global e $det(\phi^v)'(1,1) > 0$. Uma vez que $(\overline{t},\overline{s})$ e $(1,1)$ são pontos críticos de h^v, temos que

$$J'_\lambda(\overline{t}v^+)v^+ = J'_\lambda(\overline{Ts}v^-)v^- = 0.$$

Usando a Proposição (1.0.7), segue que

$$0 < \overline{t} \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 < \overline{s} \leq 1.$$

Mostremos agora que h^v não assume ponto de máximo global em $[0,1]\times[0,1]\backslash\{(1,1)\}$. Com efeito, pela caracterização e unicidade da projeção fornecida pela Proposição 1.0.7, vem que

$$
\begin{aligned}
h^v(\bar{t},\bar{s}) &= J_\lambda(\bar{t}v^+ + \bar{s}v^-) \\
&= J_\lambda(\bar{t}v^+) + J_\lambda(\bar{s}v^-) \\
&< \sup_{t\geq 0} J_\lambda(tv^+) + \sup_{s\geq 0} J_\lambda(sv^-) \\
&= J_\lambda(v^+) + J_\lambda(v^-) \\
&= J_\lambda(v) \\
&= h^v(1,1).
\end{aligned}
$$

Isto mostra que $(1,1)$ é máximo global de $h^v(t,s)$.

Prossigamos agora para mostrar que $det(\phi^v)'(1,1) > 0$. Considere, primeiramente, as seguintes funções

$$
\begin{aligned}
g_1(t) &= \phi^v(t,s) \\
&= J'_\lambda(tv^+ + sv^-)v^+ \\
&= J'_\lambda(tv^+)v^+ \\
&= t^{p-1}\left(\int_\Omega |\nabla v^+|^p dx - \lambda \int_\Omega |v^+|^p dx\right) - t^{\gamma-1}\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx.
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
g_2(s) &= \phi^v(t,s) \\
&= J'_\lambda(tv^+ sv^-)v^- \\
&= J'_\lambda(sv^-)v^- \\
&= s^{p-1}\left(\int_\Omega |\nabla v^-|^p dx - \lambda \int_\Omega |v^-|^p dx\right) - s^{\gamma-1}\int_\Omega W(x)|v^-|^\gamma dx.
\end{aligned}
$$

Note que $\dfrac{\partial \phi^v}{\partial t}(t,s) = \dfrac{\partial \phi^v}{\partial s}(t,s) = 0$. Logo,

$$
\phi'_v(t,s) = \begin{pmatrix} g'_1(t) & 0 \\ 0 & g'_2(s) \end{pmatrix}.
$$

Então, pelas definições de g_1 e g_2, temos que

$$
\begin{aligned}
g'_1(t) &= \frac{\partial \phi^v}{\partial t}(t,s) \\
&= (p-1)t^{p-2}\left(\int_\Omega |\nabla v^+|^p dx - \lambda \int_\Omega |v^+|^p dx\right) - (\gamma-1)t^{\gamma-1}\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx.
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned} g_2'(s) &= \frac{\partial \phi^v}{\partial s}(t,s) \\ &= (p-1)s^{p-2}\left(\int_\Omega |\nabla v^-|^p dx - \lambda \int_\Omega |v^-|^p dx\right) - (\gamma-1)s^{\gamma-1}\int_\Omega W(x)|v^-|^\gamma dx. \end{aligned}$$

Consequentemente, advém que

$$g_1'(1) = (p-1)\left(\int_\Omega |\nabla v^+|^p dx - \lambda \int_\Omega |v^+|^p dx\right) - (\gamma-1)\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx.$$

Agora, desde que $(1,1)$ é ponto crítico de h^v, segue que $J_\lambda'(v^+)v^+ = 0$. Logo, temos que

$$\int_\Omega |\nabla v^+|^p dx - \lambda \int_\Omega |v^+|^p dx = \int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx$$

Portanto, usando que $p < \gamma < p^*$ e o Corolário 1.0.2, obtemos que

$$g_1'(1) = p\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx - \gamma \int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx = -(\gamma - p)\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx < 0.$$

De modo análogo, podemos mostrar que $g_2'(1) < 0$. E assim, finalmente, concluímos a demonstração do Lema provando que

$$det(\phi^v)'(1,1) = g_1'(1).g_2'(1) > 0.$$

□

3.0.1 Demonstração do Teorema 0.0.2

Utilizando os argumentos encontrados em [5], [10, Lema 3.2], [19], [20, Lema 3.5] vamos mostrar que a função w_λ encontrada na Proposição 3.0.1 que atinge a energia mínima d_λ em $\mathcal{N}_\lambda^\pm$ é ponto crítico de J_λ. Com efeito, suponha, por contradição, que w_λ não seja ponto crítico de J_λ. Logo, existe $\varphi_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}$ e $\alpha > 0$ tal que

$$J_\lambda'(w_\lambda)\varphi_0 = \alpha > 0.$$

Logo, pela continuidade de J_λ', existe $\rho > 0$ tal que

$$J_\lambda'(v)\varphi_0 = \frac{\alpha}{2} > 0, \quad \forall\ v \in B_\rho(w_\lambda).$$

Vamos definir $D := \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ e considerando a função $h^{w_\lambda} : [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$h^{w_\lambda}(t,s) = J_\lambda(tw_\lambda^+ + sw_\lambda^-), \quad \text{onde } (t,s) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty),$$

já estudada no Lema 3.0.3, temos diretamente deste Lema 3.0.3 que

$$\delta_\lambda = \max_{(t,s)\in\partial D} h^{w_\lambda}(t,s) < h^{w_\lambda}(1,1) = J_\lambda(w_\lambda) = d_\lambda. \tag{3.0.8}$$

Tomando $\rho_0 := \min\left\{\dfrac{d_\lambda - \delta_\lambda}{2}, \dfrac{\delta}{24}\right\}$ e $S := B_{\frac{\delta}{3}}(w_\lambda)$ então, pelo [28, Lema 2.3], temos uma deformação η que assegura que

(a) $\eta(1,v) = v$ para todo $v \notin J_\lambda^{-1}\left([d_\lambda - 2\rho_0, d_\lambda + 2\rho_0]\right)$,

(b) $\eta\left(1, J_\lambda^{d_\lambda+\rho_0} \cap S\right) \subset J_\lambda^{d_\lambda-\rho_0}$, onde $J_\lambda^{d_\lambda+\rho_0} := \left\{v \in W_0^{1,p}(\Omega) :\ J_\lambda(v) \le d_\lambda + \rho_0\right\}$ e $J_\lambda^{d_\lambda-\rho_0} := \left\{v \in W_0^{1,p}(\Omega) :\ J_\lambda(v) \le d_\lambda - \rho_0\right\}$

(c) $J_\lambda(\eta(1,v)) \le J_\lambda(v)$ para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Agora, mostraremos que

$$\max_{(t,s)\in\bar{D}} J_\lambda\left(\eta\left(1, tw_\lambda^+ + sw_\lambda^-\right)\right) < d_\lambda. \tag{3.0.9}$$

Pelo item (c) e o Lema 3.0.3 temos, para $(t,s) \neq (1,1)$, que

$$J_\lambda\left(\eta\left(1, tw_\lambda^+ + sw_\lambda^-\right)\right) \le J_\lambda\left(tw_\lambda^+ + sw_\lambda^-\right) = h^{w_\lambda}(t,s) < h^{w_\lambda}(1,1) = J_\lambda(w_\lambda) = d_\lambda.$$

Logo,

$$J_\lambda\left(\eta\left(1, tw_\lambda^+ + sw_\lambda^-\right)\right) < d_\lambda, \quad (t,s) \in D\backslash\{(1,1)\}. \tag{3.0.10}$$

Agora, vamos analisar quando $(t,s) = (1,1)$. Primeiro, note que $J_\lambda(w_\lambda) = d_\lambda < d_\lambda + \rho_0$, o que implica em

$$w_\lambda \in J_\lambda^{d_\lambda+\rho_0} \cap S.$$

Então, pelo item (b), temos que $\eta(1, w_\lambda) \in J_\lambda^{d_\lambda-\rho_0}$. Logo,

$$J_\lambda(\eta(1, w_\lambda)) < d_\lambda - \rho_0 < d_\lambda. \tag{3.0.11}$$

Portanto, (3.0.10) e (3.0.11) garante que (3.0.9) ocorre.

Para finalizar, vamos mostrar que existe $(t_0, s_0) \in D$ de modo que $\eta(1, t_0 w_\lambda^+ + s_0 w_\lambda^-) \in \mathcal{N}_\lambda^\pm$. Pois isto implicaria que

$$\begin{aligned} d_\lambda &\le J_\lambda(\eta(1, t_0 w_\lambda^+ + s_0 w_\lambda^-)) \\ &\le \max_{(t,s)\in\bar{D}} J_\lambda\left(\eta\left(1, tw_\lambda^+ + sw_\lambda^-\right)\right) < d_\lambda, \end{aligned}$$

o que é uma contradição e portanto $J_\lambda'(w_\lambda) = 0$.

Assim, defina as seguintes funções $\kappa(t,s) := \eta(1, tw_\lambda^+ + sw_\lambda^-)$ e $\Psi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\Psi_1(t,s) = \left(\frac{1}{t}J_\lambda'\left(\kappa(t,s)\right)\kappa(t,s)^+, \frac{1}{s}J_\lambda'\left(\kappa(t,s)\right)\kappa(t,s)^-\right).$$

Observe que por (3.0.9) e pelo item (a), temos que

$$\kappa(s,t) = \eta(1, tw_\lambda^+ + sw_\lambda^-) = tw_\lambda^+ + sw_\lambda^-, \text{ em } \overline{D}. \tag{3.0.12}$$

Logo, em $\overline{D}$, temos que

$$\begin{aligned}
\Psi_1(t,s) &= \left(\frac{1}{t}J_\lambda'\left(\kappa(t,s)\right)\kappa(t,s)^+, \frac{1}{s}J_\lambda'\left(\kappa(t,s)\right)\kappa(t,s)^-\right) \\
&= \left(J_\lambda'\left(tw_\lambda^+ + sw_\lambda^-\right)w_\lambda^+, J_\lambda'\left(tw_\lambda^+ + sw_\lambda^-\right)w_\lambda^-\right) \\
&= \phi^{w_\lambda}(t,s),
\end{aligned}$$

onde ϕ^{w_λ} foi analisada no Lema 3.0.3. Assim, pelo grau topológico de Brower e pelo Lema 3.0.3, obtemos que

$$\deg\left(\Psi_1, D, (0,0)\right) = \deg\left(\phi^{w_\lambda}, D, (0,0)\right) = \operatorname{sgn}\left(\det\left(\phi^{w_\lambda}\right)'(1,1)\right) = 1.$$

Logo, a função Ψ_1 possui um zero em D, ou seja, existe $(t_0, s_0) \in D$ tal que $\Psi_1(t_0,s_0) = (0,0)$. Consequentemente, pela definição de Ψ_1 e por (3.0.12), temos que

$$0 = J_\lambda'\left(\kappa(t_0,s_0)\right)\kappa(t_0,s_0)^\pm = J_\lambda'\left(t_0w_\lambda^+ + s_0w_\lambda^-\right)\left(t_0w_\lambda^+ + s_0w_\lambda^-\right)^\pm. \tag{3.0.13}$$

E aplicando o Lema 3.0.2 em (3.0.13), concluímos que $t_0w_\lambda^+ + s_0w_\lambda^- \in \mathcal{N}_\lambda^\pm$.

□

Capítulo 4

Existência de solução em $\mathcal{M}_\lambda$ para $\lambda < \lambda^*$

Nesta seção iremos mostrar a existência de solução de energia mínima (ground-state) para o problema (P_λ), quando $\lambda < \lambda^*$. Iniciaremos, mostrando que $\overline{c}_\lambda$ é atingido em $\mathcal{M}_\lambda$, isto é, existe $w_\lambda \in \mathcal{M}_\lambda$ tal que

$$\overline{c}_\lambda := \inf_{\mathcal{M}_\lambda} J_\lambda = J_\lambda(w_\lambda).$$

Antes disso, cabe ressaltar que a demonstração do resultado a seguir é similar à realizada na Proposição 2.0.1, pois como vimos no Capítulo 1, além de $\mathcal{M}_\lambda$ ser um subconjunto de $\mathcal{N}_\lambda$, as estimativas apresentadas na Proposição 1.0.5 são uma versão da Proposição 1.0.1.

Proposição 4.0.1. *Se $\lambda < \lambda^*$, então existe $w_\lambda \in \mathcal{M}_\lambda$ de modo que*

$$\overline{c}_\lambda := \inf_{\mathcal{M}_\lambda} J_\lambda = J_\lambda(w_\lambda).$$

Demonstração. Pela Proposição 1.0.10 temos que $\overline{c}_\lambda \in \mathbb{R}$. Então, pela definição de ínfimo, temos que existe uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{M}_\lambda$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} J_\lambda(u_n) = \overline{c}_\lambda.$$

A sequência minimizante (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, suponhamos, por absurdo, que (u_n) seja ilimitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Então, existe uma subsequência minimizante (u_{n_k}), tal que

$$\lim_{k\to+\infty} \|u_{n_k}\| = +\infty.$$

Consequentemente, pela coercividade de J_λ sobre $\mathcal{M}_\lambda$ (veja Proposição 1.0.5), obtemos que

$$\overline{c}_\lambda = \lim_{k\to+\infty} J_\lambda(u_{n_k}) \geq \lim_{k\to+\infty} D_1\left(\frac{\lambda^*-\lambda}{\lambda^*}\right)\|u_{n_k}\|^p = +\infty,$$

o que é contradiz o fato de que $\overline{c}_\lambda \in \mathbb{R}$. Logo, como vimos na demonstração da Proposição 2.0.1, existe $u_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de tal modo que, a menos de uma subsequência, valem os seguintes resultados

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_\lambda, & \text{em } W_0^{1,p}(\Omega), \\ u_n \to u_\lambda, & q.t.p \text{ em } \Omega, \\ u_n \to u_\lambda, & \text{em } L^q(\Omega), 1 \leq q < p^*, \\ \exists h_q \in L^q(\Omega); & |u_n| \leq h_q, \forall n \in \mathbb{N},\ q.t.p \ \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{4.0.1}$$

Vamos mostrar agora que $u_\lambda \neq 0$. Novamente argumentando por contradição, vamos supor que $u_\lambda = 0$. Dado que $(u_n) \subset \mathcal{M}_\lambda$ temos que $J'_\lambda(u_n)u_n = 0$, para todo n, o que equivale a dizer que

$$\|u_n\|^p = \lambda \int_\Omega |u_n|^p dx + \int_\Omega W(x)|u_n|^\gamma dx, \quad \forall\ n.$$

Da definição de λ^* segue que

$$0 < \left(\frac{\lambda^* - \lambda}{\lambda^*}\right) \|u_n\|^p \leq \int_\Omega W(x)|u_n|^\gamma dx, \quad \forall\ n.$$

Por outro lado, desde que $1 < \gamma < p^*$, temos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Teorema 5.0.7), (4.0.1) e por $W \in L^\infty(\Omega)$, que a seguinte convergência o que

$$0 = \int_\Omega W(x)|u_\lambda|^\gamma dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega W(x)|u_n|^\gamma dx.$$

Assim teríamos

$$0 < \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega W(x)|u_n|^\gamma dx = 0,$$

o que é uma demonstração.

Além disso, asseveramos que $\int_\Omega W(x)|u_\lambda|^\gamma dx > 0$. De fato, desde que $1 < \gamma < p^*$, temos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Teorema 5.0.7), (4.0.1), Proposição 1.0.5 e por $W \in L^\infty(\Omega)$, que

$$0 < D_3 \left(\frac{\lambda^* - \lambda}{\lambda^*}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-p}} < \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega W(x)|u_n|^\gamma dx = \int_\Omega W(x)|u_\lambda|^\gamma dx.$$

Uma vez demonstrado que $u_\lambda \neq 0$ então, pela Proposição 1.0.7, existe um único $t_{u_\lambda} > 0$ tal que $J'_\lambda(t_{u_\lambda} u_\lambda) t_{u_\lambda} u_\lambda = 0$, isto é, $t_{u_\lambda} u_\lambda \in \mathcal{M}_\lambda$. Definindo $w_\lambda := t_{u_\lambda} u_\lambda$, vamos mostrar que

$$\bar{c}_\lambda := \inf_{\mathcal{M}_\lambda} J_\lambda = J_\lambda(w_\lambda).$$

Assim, primeiramente, vamos mostrar que $t_{u_\lambda} \leq 1$. Note que usando que $J'_\lambda(u_n)u_n = 0$, para todo n, e por (4.0.1), temos que

$$\begin{aligned}\|u_n\|^p &= \lambda\int_\Omega |u_n|^p dx + \int_\Omega W(x)|u_n|^\gamma dx + o_n(1)\\ &= \lambda\int_\Omega |u_\lambda|^p dx + \int_\Omega W(x)|u_\lambda|^\gamma dx.\end{aligned}$$

Então, pelo fato da norma ser fracamente semicontínua inferiormente e $u_n \rightharpoonup u_\lambda$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^p dx = \|u_\lambda\|^p \leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|^p = \lambda\int_\Omega |u_\lambda|^p dx + \int_\Omega W(x)|u_\lambda|^\gamma dx,$$

ou seja, $J'_\lambda(u_\lambda)u_\lambda \leq 0$. Portanto, pela Proposição 1.0.7, temos que $t_{u_\lambda} \leq 1$. Diante dessa informação, segue que

$$\begin{aligned}\bar{c}_\lambda &\leq J_\lambda(t_\lambda u_\lambda)\\ &= J_\lambda(t_\lambda u_\lambda) - \frac{1}{\gamma}J'_\lambda(t_\lambda u_\lambda)t_\lambda u_\lambda\\ &= \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\gamma}\right)t^p_{u_\lambda}\left(\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^p - \lambda\int_\Omega |u_\lambda|^p dx\right)\\ &\leq \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\gamma}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^p - \lambda\int_\Omega |u_\lambda|^p dx\right).\end{aligned} \tag{4.0.2}$$

Por outro lado, usando que $\lambda < \lambda^*$ e $(u_n) \subset \mathcal{M}_\lambda$, obtemos que

$$0 \leq \left(\frac{\lambda^*-\lambda}{\lambda^*}\right)\int_\Omega |\nabla u_n|^p \leq \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^p - \lambda\int_\Omega |u_n|^p dx\right), \qquad \forall\ n.$$

Consequentemente, pela desigualdade (4.0.2) e pelo Lema de Fatou (veja Lema 5.0.6), temos que

$$\begin{aligned}\bar{c}_\lambda &\leq J_\lambda(t_\lambda u_\lambda)\\ &\leq \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\gamma}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^p - \lambda\int_\Omega |u_\lambda|^p dx\right)\\ &\leq \liminf_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\gamma}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^p - \lambda\int_\Omega |u_n|^p dx\right)\\ &\leq \liminf_{n\to+\infty}\left[J_\lambda(u_n) - \frac{1}{\gamma}J'_\lambda(u_n)u_n\right]\\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} J_\lambda(u_n) = \bar{c}_\lambda.\end{aligned}$$

O que implica em $\bar{c}_\lambda = J_\lambda(w_\lambda)$, onde $w_\lambda = t_\lambda u_\lambda \in \mathcal{M}_\lambda$. $\square$

4.0.1 Demonstração do Teorema 0.0.3

Agora vamos mostrar que o minimizante w_λ encontrado no resultado anterior (Proposição 4.0.1) é ponto crítico de J_λ, isto é, $J'_\lambda(w_\lambda)v = 0$ para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tais argumentos podem ser encontrados em [5], [10, Lema 3.2]. [19]. Suponha, por contradição, que $J'_\lambda(w_\lambda) \neq 0$. Logo, existe $\varphi_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}$ e $\alpha > 0$ tal que

$$J'_\lambda(w_\lambda)\varphi_0 = \alpha > 0.$$

Logo, pela continuidade de J'_λ, existe $\rho > 0$ tal que

$$J'_\lambda(v)\varphi_0 = \frac{\alpha}{2} > 0, \qquad \forall\, v \in B_\rho(w_\lambda).$$

Vamos definir $D := \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ e considerando a função $\mathcal{L} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{L}(t) = J_\lambda(tw_\lambda), \quad \text{onde } t \in [0, +\infty),$$

já estudada na Proposição 1.0.7, temos diretamente da Proposição 1.0.7 que

$$\delta_\lambda = \max_{t \in \partial D} \mathcal{L}(t) < \mathcal{L}(1) = J_\lambda(w_\lambda) = \bar{c}_\lambda. \tag{4.0.3}$$

Tomando $\rho_0 := \min\left\{\frac{\bar{c}_\lambda - \delta_\lambda}{2}, \frac{\delta}{24}\right\}$ e $S := B_{\frac{\delta}{3}}(w_\lambda)$ então, pelo [28, Lema 2.3], temos uma deformação η que assegura que

(a) $\eta(1, v) = v$ para todo $v \notin J_\lambda^{-1}\left([\bar{c}_\lambda - 2\rho_0,\ \bar{c}_\lambda + 2\rho_0]\right)$,

(b) $\eta\left(1, J_\lambda^{\bar{c}_\lambda + \rho_0} \cap S\right) \subset J_\lambda^{\bar{c}_\lambda - \rho_0}$, onde $J_\lambda^{\bar{c}_\lambda + \rho_0} := \left\{v \in W_0^{1,p}(\Omega) :\ J_\lambda(v) \leq \bar{c}_\lambda + \rho_0\right\}$ e $J_\lambda^{\bar{c}_\lambda - \rho_0} := \left\{v \in W_0^{1,p}(\Omega) :\ J_\lambda(v) \leq \bar{c}_\lambda - \rho_0\right\}$

(c) $J_\lambda(\eta(1, v)) \leq J_\lambda(v)$ para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Agora, mostraremos que

$$\max_{t \in \bar{D}} J_\lambda\left(\eta\left(1, tw_\lambda\right)\right) < \bar{c}_\lambda. \tag{4.0.4}$$

Pelo item (c) e pela Proposição 1.0.7 temos, para $t \neq 1$, que

$$J_\lambda\left(\eta\left(1, tw_\lambda\right)\right) \leq J_\lambda\left(tw_\lambda\right) = \mathcal{L}(t) < \mathcal{L}(1) = J_\lambda(w_\lambda) = \bar{c}_\lambda.$$

Logo,

$$J_\lambda\left(\eta\left(1, tw_\lambda\right)\right) < \bar{c}_\lambda, \quad t \in D\backslash\{1\}. \tag{4.0.5}$$

Agora, vamos analisar quando $t = 1$. Primeiro, note que $J_\lambda(w_\lambda) = \bar{c}_\lambda < \bar{c}_\lambda + \rho_0$, o que implica em

$$w_\lambda \in J_\lambda^{\bar{c}_\lambda + \rho_0} \cap S.$$

Então, pelo item (b), temos que $\eta(1, w_\lambda) \in J_\lambda^{\bar{c}_\lambda - \rho_0}$. Logo,

$$J_\lambda(\eta(1, w_\lambda)) < \bar{c}_\lambda - \rho_0 < \bar{c}_\lambda. \tag{4.0.6}$$

Portanto, (4.0.5) e (4.0.6) garante que (4.0.4) ocorre.

Para finalizar, vamos mostrar que existe $t_0 \in D$ de modo que $\eta(1, t_0 w_\lambda) \in \mathcal{M}_\lambda$. Pois isto implicaria que

$$\bar{c}_\lambda \leq J_\lambda(\eta(1, t_0 w_\lambda)) \leq \max_{t \in \bar{D}} J_\lambda\left(\eta\left(1, t_0 w_\lambda\right)\right) < \bar{c}_\lambda,$$

o que é uma contradição e portanto $J'_\lambda(w_\lambda) = 0$.

Assim, vamos definir $\Psi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Psi_1(t) = \frac{1}{t} J'_\lambda\left(\eta(1, t w_\lambda)\right) \eta(1, t w_\lambda).$$

Observe que por (4.0.4) e pelo item (a), temos que $\eta(1, t w_\lambda) = t w_\lambda$ em $\overline{D}$. Logo, em $\overline{D}$, resulta que

$$\begin{aligned} \Psi_1(t) &= \frac{1}{t} J'_\lambda\left(\eta(1, t w_\lambda)\right) \eta(1, t w_\lambda) \\ &= \frac{1}{t} J'_\lambda\left(t w_\lambda\right)\left(t w_\lambda\right) \\ &= \mathcal{L}'(t). \end{aligned}$$

onde $\mathcal{L}'(t)$ foi analisada na Proposição 1.0.7. Assim, pelo grau topológico de Brower e pela Proposição 1.0.7, obtemos que

$$\deg\left(\Psi_1, D, 0\right) = \deg\left(\mathcal{L}', D, 0\right) = \operatorname{sgn}\left(\det\left(\mathcal{L}'(t)\right)'(1)\right) = 1.$$

Logo, a função Ψ_1 possui um zero em D, ou seja, existe $t_0 \in D$ tal que $\Psi_1(t_0) = 0$. Consequentemente, pela definição de Ψ_1, temos que

$$0 = J'_\lambda\left(\eta(t_0 w_\lambda)\right) \eta(t_0 w_\lambda) = J'_\lambda\left(t_0 w_\lambda\right)\left(t_0 w_\lambda\right).$$

Concluímos assim que $t_0 w_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda$. Além disso, pela Proposição 1.0.5, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega W(x) |t_0 w_\lambda|^\gamma \, dx &= t_0^\gamma \int_\Omega W(x) |w_\lambda^+|^\gamma \, dx \\ &\geq t_0^\gamma D_3 \left(\frac{\lambda^* - \lambda}{\lambda^*}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - p}} > 0. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $t_0 w_\lambda \in \mathcal{M}_\lambda$.

$\square$

Capítulo 5

Existência de solução em $\mathcal{M}_\lambda^\pm$ para $\lambda < \lambda^*$

Neste capítulo iremos mostrar a existência de solução nodal com energia mínima (ground-state) para o problema (P_λ), quando $\lambda < \lambda^*$. Iniciaremos, mostrando que d_λ é atingido em $\mathcal{M}_\lambda^\pm$, isto é, existe $w_\lambda \in \mathcal{M}_\lambda^\pm$ tal que

$$\overline{d}_\lambda := \inf_{\mathcal{M}_\lambda^\pm} J_\lambda = J_\lambda(w_\lambda).$$

Aqui também cabe ressaltar que a demonstração do resultado a seguir é análoga à realizada na Proposição 2.0.1, pois como vimos no Capítulo 1, além de $\mathcal{M}_\lambda^\pm$ ser um subconjunto de $\mathcal{N}_\lambda^\pm$, as estimativas envolvendo as funções $u \in \mathcal{M}_\lambda^\pm$ apresentadas no Corolário 1.0.6 são uma versão do Corolário 1.0.2.

Proposição 5.0.1. *Se $\lambda < \lambda^*$, então existe $w_\lambda \in \mathcal{M}_\lambda^\pm$ de modo que*

$$\overline{d}_\lambda := \inf_{\mathcal{M}_\lambda^\pm} J_\lambda = J_\lambda(w_\lambda).$$

Demonstração. Pela Proposição 1.0.10 temos que $\overline{d}_\lambda \in \mathbb{R}$. Então, pela definição de ínfimo, temos que existe uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{M}_\lambda^\pm$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} J_\lambda(u_n) = \overline{d}_\lambda.$$

Afirmamos que tal sequência é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, suponhamos, por absurdo, que (u_n) seja ilimitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Então, existe uma subsequência (u_{n_k}), tal que

$$\lim_{k\to+\infty} \|u_{n_k}\| = +\infty.$$

Consequentemente, pela coercividade de J_λ sobre $\mathcal{M}_\lambda^\pm$ (veja Corolário 1.0.6), obtemos que

$$\overline{d}_\lambda = \lim_{k\to+\infty} J_\lambda(u_{n_k}) \geq \lim_{k\to+\infty} D_1\left(\frac{\lambda^* - \lambda}{\lambda^*}\right)\|u_{n_k}\|^p = +\infty,$$

o que é contradiz o fato de que $d_\lambda \in \mathbb{R}$. Logo, como vimos na demonstração da Proposição 3.0.1, existe $u_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de tal modo que, a menos de uma subsequência, valem os resultados a seguir:

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_\lambda, & \text{em } W_0^{1,p}(\Omega), \\ u_n \to u_\lambda, & q.t.p \text{ em } \Omega, \\ u_n \to u_\lambda, & \text{em } L^q(\Omega), 1 \leq q < p^*, \\ \exists h_q \in L^q(\Omega); & |u_n| \leq h_q, \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \ q.t.p \ \text{ em } \Omega. \end{cases}$$

Além disso, usando que as aplicações $u \to u^+$ e $u \to u^-$ de $L^r(\mathbb{R}^N)$ em $L^r(\mathbb{R}^N)$ são contínuas (veja [12, Lema 2.3]) temos também, a menos de uma subsequência, que

$$\begin{cases} u_n^\pm \rightharpoonup u_\lambda^\pm, & \text{em } W_0^{1,p}(\Omega), \\ u_n^\pm \to u_\lambda^\pm, & q.t.p \text{ em } \Omega, \\ u_n^\pm \to u_\lambda^\pm, & \text{em } L^q(\Omega), 1 \leq q < p^*, \\ \exists h_q^\pm \in L^q(\Omega); & |u_n^\pm| \leq h_q, \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \ q.t.p \ \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{5.0.1}$$

Vamos mostrar agora que $u_\lambda^\pm \neq 0$. Novamente argumentando por contradição, vamos supor que $u_\lambda^\pm = 0$. Dado que $(u_n) \subset \mathcal{M}_\lambda^\pm$ temos que $J_\lambda'(u_n^\pm)u_n^\pm = 0$, para todo n, o que equivale a dizer que

$$\|u_n^\pm\|^p \ = \ \lambda \int_\Omega |u_n^\pm|^p dx + \int_\Omega W(x)|u_n^\pm|^\gamma dx, \quad \forall\, n.$$

Donde pela definição de λ^*, segue que

$$0 < \left(\frac{\lambda^* - \lambda}{\lambda^*}\right) \|u_n^\pm\|^p \leq \int_\Omega W(x)|u_n^\pm|^\gamma dx, \quad \forall\, n.$$

Por outro lado, desde que $1 < \gamma < p^*$, temos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Teorema 5.0.7), (5.0.1) e por $W \in L^\infty(\Omega)$ que a seguinte convergência ocorre

$$0 = \int_\Omega W(x)|u_\lambda^\pm|^\gamma dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega W(x)|u_n^\pm|^\gamma dx.$$

Assim teríamos

$$0 < \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega W(x)|u_n|^\gamma dx = 0,$$

o que é um absurdo.

Além disso, afirmamos que $\displaystyle\int_\Omega W(x)|u_\lambda^\pm|^\gamma dx > 0$. De fato, desde que $1 < \gamma < p^*$, temos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Teorema 5.0.7), (5.0.1), Corolário 1.0.6 e por $W \in L^\infty(\Omega)$, que

$$0 < D_3 \left(\frac{\lambda^* - \lambda}{\lambda^*}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - p}} < \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega W(x)|u_n^\pm|^\gamma dx = \int_\Omega W(x)|u_\lambda^\pm|^\gamma dx.$$

Então, uma vez demonstrado que $u_\lambda^\pm \neq 0$, temos, pela Proposição 1.0.7, que existe um único $t_{u_\lambda}^\pm > 0$ tal que $J_\lambda'(t_{u_\lambda}^\pm u_\lambda^\pm)t_{u_\lambda}^\pm u_\lambda^\pm = 0$, isto é, $t_{u_\lambda}^\pm u_\lambda^\pm \in \mathcal{N}_\lambda$. Definindo $w_\lambda := t_{u_\lambda}^+ u_\lambda^+ + t_{u_\lambda}^- u_\lambda^-$, note que

$$w_\lambda^+ = t_{u_\lambda}^+ u_\lambda^+, \qquad w_\lambda^- = t_{u_\lambda}^- u_\lambda^-$$

e

$$J_\lambda'(w_\lambda^\pm)w_\lambda^\pm = J_\lambda'(t_{u_\lambda}^\pm u_\lambda^\pm)t_{u_\lambda}^\pm u_\lambda^\pm = 0,$$

ou seja, $w_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^\pm$. Portanto, vamos mostrar que

$$\overline{d}_\lambda := \inf_{\mathcal{M}_\lambda^\pm} J_\lambda = J_\lambda(w_\lambda).$$

Vamos mostrar, primeiramente, que $t_{u_\lambda}^\pm \geq 1$. Note que usando que $J_\lambda'(u_n^\pm)u_n^\pm = 0$, para todo n, e por (5.0.1), temos que

$$\begin{aligned}\|u_n^\pm\|^p &= \lambda \int_\Omega |u_n^\pm|^p dx + \int_\Omega W(x)|u_n^\pm|^\gamma dx + o_n(1)\\ &= \lambda \int_\Omega |u_\lambda^\pm|^p dx + \int_\Omega W(x)|u_\lambda^\pm|^\gamma dx.\end{aligned}$$

Então, pelo fato da norma ser fracamente semicontínua inferiormente e $u_n^\pm \rightharpoonup u_\lambda^\pm$, obtemos que

$$\int_\Omega |\nabla u_\lambda^\pm|^p dx = \|u_\lambda^\pm\|^p \leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n^\pm\|^p = \lambda \int_\Omega |u_\lambda^\pm|^p dx + \int_\Omega W(x)|u_\lambda^\pm|^\gamma dx,$$

ou seja, $J_\lambda'(u_\lambda^\pm)u_\lambda^\pm \leq 0$. Portanto, pela Proposição 1.0.7, temos que $t_{u_\lambda}^\pm \leq 1$. Diante dessa informação e usando que $supp(u^+) \cap supp(u^-) = \emptyset$, segue que

$$\begin{aligned}\overline{d}_\lambda &\leq J_\lambda(w_\lambda)\\ &= J_\lambda(t_{u_\lambda}^+ u_\lambda^+ + t_{u_\lambda}^- u_\lambda^-) - \frac{1}{\gamma} J_\lambda'(t_{u_\lambda}^+ u_\lambda^+ + t_{u_\lambda}^- u_\lambda^-)(t_{u_\lambda}^+ u_\lambda^+ + t_{u_\lambda}^- u_\lambda^-)\\ &= \left[J_\lambda(t_{u_\lambda}^+ u_\lambda^+) - \frac{1}{\gamma} J_\lambda'(t_{u_\lambda}^+ u_\lambda^+)(t_{u_\lambda}^+ u_\lambda^+)\right] + \left[J_\lambda(t_{u_\lambda}^- u_\lambda^-) - \frac{1}{\gamma} J_\lambda'(t_{u_\lambda}^- u_\lambda^-)(t_{u_\lambda}^- u_\lambda^-)\right]\\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right)(t_{u_\lambda}^+)^p \left(\int_\Omega |\nabla u_\lambda^+|^p - \lambda \int_\Omega |u_\lambda^+|^p dx\right)\\ &\quad + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right)(t_{u_\lambda}^-)^p \left(\int_\Omega |\nabla u_\lambda^-|^p - \lambda \int_\Omega |u_\lambda^-|^p dx\right)\\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u_\lambda^+|^p - \lambda \int_\Omega |u_\lambda^+|^p dx\right)\\ &\quad + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u_\lambda^-|^p - \lambda \int_\Omega |u_\lambda^-|^p dx\right).\end{aligned} \tag{5.0.2}$$

Por outro lado, usando que $\lambda < \lambda^*$, obtemos que

$$0 \leq \left(\frac{\lambda^* - \lambda}{\lambda^*}\right) \int_\Omega |\nabla u_n^\pm|^p \leq \left(\int_\Omega |\nabla u_n^\pm|^p - \lambda \int_\Omega |u_n^\pm|^p dx\right), \qquad \forall\ n.$$

Consequentemente, pela desigualdade (5.0.2) e pelo Lema de Fatou (veja Lema 5.0.6), temos que

$$\begin{aligned}
\overline{d}_\lambda &\leq J_\lambda(w_\lambda) \\
&\leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u_\lambda^+|^p - \lambda \int_\Omega |u_\lambda^+|^p dx\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u_\lambda^-|^p - \lambda \int_\Omega |u_\lambda^-|^p dx\right) \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u_n^+|^p - \lambda \int_\Omega |u_n^+|^p dx\right)\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u_n^-|^p - \lambda \int_\Omega |u_n^-|^p dx\right)\right] \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} \left[J_\lambda(u_n^\pm) - \frac{1}{\gamma} J_\lambda'(u_n^\pm)u_n^\pm\right] \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} J_\lambda(u_n^\pm) = \overline{d}_\lambda.
\end{aligned}$$

O que implica em $\overline{d}_\lambda = J_\lambda(w_\lambda)$, onde $w_\lambda := t_{u_\lambda}^+ u_\lambda^+ + t_{u_\lambda}^- u_\lambda^-$. □

No próximo resultado, vamos analisar duas funções, a saber: a função $h^v : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$h^v(t,s) = J_\lambda(tv^+ + sv^-), \quad \text{onde } (t,s) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty)$$

e a função $\phi^v : [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{aligned}
\phi^v(t,s) &= (\phi_1^v(t,s), \phi_2^v(t,s)) \\
&= \left(\frac{\partial h^v}{\partial t}(t,s), \frac{\partial h^v}{\partial s}(t,s)\right) \\
&= \left(J_\lambda'\left(tv^+ + sv^-\right)v^+, J_\lambda'\left(tv^+ + sv^-\right)v^-\right).
\end{aligned}$$

Lema 5.0.2. *Seja $\lambda < \lambda^*$ e $v \in \mathcal{M}_\lambda^\pm$. Então,*

$$h^v(t,T) < h^v(1,1) = J_\lambda(v), \quad \forall\ t,\ s \geq 0$$

tal que $(t,s) \neq (1,1)$. Além disso,

$$det(\phi^v)'(1,1) > 0,$$

onde $(\phi^v)'$ *é a matriz Hessiana de* h^v *ou a matriz Jacobiana de* ϕ^v*, dada por*

$$(\phi^v)'(t,s) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi_1^v}{\partial t}(t,s) & \dfrac{\partial \phi_1^v}{\partial s}(t,s) \\ \\ \dfrac{\partial \phi_2^v}{\partial t}(t,s) & \dfrac{\partial \phi_2^v}{\partial s}(t,s) \end{pmatrix},$$

para todo $(t,s) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty)$.

Demonstração. Considerando $v \in \mathcal{M}_\lambda^\pm$ e usando que $supp(v^+) \cap supp(v^-) = \emptyset$, obtemos

$$0 = J'_\lambda(v)v^\pm = J'_\lambda(v^+ + v^-)v^\pm.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \phi^v(1,1) &= \left(\frac{\partial h^v}{\partial t}(1,1), \frac{\partial h^v}{\partial s}(1,1)\right) \\ &= (J'_\lambda(v^+ + v^-)v^+, J'_\lambda(v^+ + v^-)v^-) \\ &= (0,0). \end{aligned}$$

Assim, $(1,1)$ é ponto crítico de h^v.
Agora, pela definição de h^v e por $supp(v^+) \cap supp(v^-) = \emptyset$, tem-se

$$\begin{aligned} h^v(t,s) &= J_\lambda(tv^+ + sv^-) \\ &= \frac{1}{p}\left(\int_\Omega |\nabla tv^+ + sv^-|^p dx - \lambda \int_\Omega |tv^+ + sv^-|^p dx\right) \\ &\quad -\frac{1}{\gamma}\int_\Omega W(x)|tv^+ + sv^-|^\gamma dx \\ &= \frac{t^p}{p}\int_\Omega |\nabla v^+|^p dx - \lambda\frac{t^p}{p}\int_\Omega |v^+|^p dx - \frac{t^p}{\gamma}\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx \\ &\quad +\frac{s^p}{p}\int_\Omega |\nabla v^-|^p dx - \lambda\frac{s^p}{p}\int_\Omega |v^-|^p dx - \frac{s^p}{\gamma}\int_\Omega W(x)|v^-|^\gamma dx. \end{aligned}$$

Escrevendo

$$J_\lambda^+(tv^+) = \frac{t^p}{p}\int_\Omega |\nabla v^+|^p dx - \lambda\frac{t^p}{p}\int_\Omega |v^+|^p dx - \frac{t^p}{\gamma}\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx \tag{5.0.3}$$

e

$$J_\lambda^-(sv^-) = \frac{s^p}{p}\int_\Omega |\nabla v^-|^p dx - \lambda\frac{s^p}{p}\int_\Omega |v^-|^p dx - \frac{s^p}{\gamma}\int_\Omega W(x)|v^-|^\gamma dx. \tag{5.0.4}$$

Concluímos que

$$h^v(t,s) = J_\lambda^+(tv^+) + J_\lambda^-(sv^-). \tag{5.0.5}$$

Afirmamos que h^v possui um ponto de máximo global em $(0,+\infty) \times (0,+\infty)$. De fato, dividindo (5.0.3) por t^γ, obtemos

$$\frac{J_\lambda^+(tv^+)}{t^\gamma} = \frac{t^{p-\gamma}}{p}\left(\int_\Omega |\nabla v^+|^p dx - \lambda\int_\Omega |v^+|^p dx\right) - \frac{1}{\gamma}\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx.$$

Desde que $1 < p < \gamma$, $\lambda < \lambda^*$ e usando a veracidade do Corolário 1.0.6, temos

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{J_\lambda^+(tv^+)}{t^\gamma} = -\frac{1}{\gamma}\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx < 0.$$

Por outro lado, dividindo (5.0.3) por t^p e usando que $v \in \mathcal{M}_\lambda^\pm$ e a definição de λ^*, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{J_\lambda^+(tv^+)}{t^p} &= \frac{1}{p}\left(\int_\Omega |\nabla v^+|^p dx - \lambda\int_\Omega |v^+|^p dx\right) - \frac{t^{\gamma-p}}{\gamma}\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx \\ &\geq \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda^*-\lambda}{\lambda^*}\right)\int_\Omega |\nabla v^+|^p dx - \frac{t^{\gamma-p}}{\gamma}\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx.\end{aligned}$$

Desde que $1 < p < \gamma$, $\lambda < \lambda^*$ e usando a veracidade do Corolário 1.0.6, resulta que

$$\liminf_{t\to 0^+} \frac{J_\lambda^+(tv^+)}{t^p} = \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda^*-\lambda}{\lambda^*}\right)\int_\Omega |\nabla v^+|^p dx > 0.$$

Utilizando o mesmo argumento para (5.0.4), temos que

$$\limsup_{s\to+\infty} \frac{J_\lambda^-(sv^-)}{s^\gamma} < 0 \quad \text{e} \quad \liminf_{s\to 0^+} \frac{J_\lambda^-(sv^-)}{s^p} > 0. \tag{5.0.6}$$

Portanto, utilizando (5.0.6) em (5.0.5), obtemos que

$$\liminf_{|(t,s)|\to 0^+} h^v(t,s) > 0 \quad \text{e} \quad \limsup_{|(t,s)|\to+\infty} h^v(t,s) \leq 0.$$

Assim, por continuidade, h^v tem um ponto de máximo global para algum ponto $(\bar{t},\bar{s}) \in [0,+\infty)\times[0,+\infty)$. Agora mostraremos que $\bar{t}$, $\bar{s} > 0$. De fato, supondo, por contradição, que $\bar{t} = 0$. Então, desde que $v \in \mathcal{N}_\lambda^\pm$ e usando a veracidade da Proposição 1.0.7 e do Corolário 1.0.6, temos que

$$\begin{aligned}h^v(0,\bar{s}) &= J_\lambda(\bar{s}v^-) \\ &= \frac{1}{p}\left(\int_\Omega |\nabla(\bar{s}v^-)|^p dx - \lambda\int_\Omega |(\bar{s}v^-)|^p dx\right) - \frac{1}{\gamma}\int_\Omega W(x)|\bar{s}v^-|^\gamma dx \\ &\leq \sup_{s\geq 0} J_\lambda(sv^-) \\ &= \frac{1}{p}\left(\int_\Omega |\nabla v^-|^p dx - \lambda\int_\Omega |v^-|^p dx\right) - \frac{1}{\gamma}\int_\Omega W(x)|v^-|^\gamma dx \\ &= J_\lambda(v^-) \\ &= h^v(0,1).\end{aligned}$$

Logo,

$$h^v(0,\overline{s}) \le h^v(0,1). \tag{5.0.7}$$

Agora, desde que $v^- \in \mathcal{M}_\lambda$ e pela Corolário 1.0.6, segue que $J_\lambda(v^+),\ J_\lambda(v^-) > 0$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
J_\lambda(v^-) &< J_\lambda(v^+) + J_\lambda(v^-) \\
&= \frac{1}{p}\left(\int_\Omega |\nabla v^+ + v^-|^p dx - \lambda\int_\Omega |v^+ + v^-|^p dx\right) - \frac{1}{\gamma}\int_\Omega W(x)|v^+ + v^-|^\gamma dx \\
&= J_\lambda(v) \\
&= h^v(1,1).
\end{aligned}$$

De (5.0.7) e por este último resultado, concluímos que

$$h^v(1,1) > J_\lambda(v^-) = h^v(0,1) \ge h^v(0,\overline{s})$$

o que é um contradição, pois $(0,\overline{s})$ é máximo global e, consequentemente, $\overline{t} > 0$. De modo análogo, prova-se que $\overline{s} > 0$.

Para finalizar vamos mostrar que $(1,1)$ é máximo global e $det(\phi^v)'(1,1) > 0$. Uma vez que $(\overline{t},\overline{s})$ e $(1,1)$ são pontos críticos de h^v, temos que

$$J'_\lambda(\overline{t}v^+)v^+ = J'_\lambda(\overline{Ts}v^-)v^- = 0.$$

Usando a Proposição 1.0.7, segue que

$$0 < \overline{t} \le 1 \quad \text{e} \quad 0 < \overline{s} \le 1.$$

Mostremos agora que h^v não assume ponto de máximo global em $[0,1]\times[0,1]\backslash\{(1,1)\}$. Com efeito, pela caracterização e unicidade da projeção fornecida pela Proposição 1.0.7, temos que

$$\begin{aligned}
h^v(\overline{t},\overline{s}) &= J_\lambda(\overline{t}v^+ + \overline{s}v^-) \\
&= J_\lambda(\overline{t}v^+) + J_\lambda(\overline{s}v^-) \\
&< \sup_{t\ge 0} J_\lambda(tv^+) + \sup_{s\ge 0} J_\lambda(sv^-) \\
&= J_\lambda(v^+) + J_\lambda(v^-) \\
&= J_\lambda(v) \\
&= h^v(1,1).
\end{aligned}$$

Isto mostra que $(1,1)$ é máximo global de $h^v(t,s)$.

Prossigamos agora para mostrar que $det(\phi^v)'(1,1) > 0$. Considere, primeiramente, que

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \phi^v(t,s) \\ &= J'_\lambda(tv^+ + sv^-)v^+ \\ &= J'_\lambda(tv^+)v^+ \\ &= t^{p-1}\left(\int_\Omega |\nabla v^+|^p dx - \lambda \int_\Omega |v^+|^p dx\right) - t^{\gamma-1}\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g_2(s) &= \phi^v(t,s) \\ &= J'_\lambda(tv^+ sv^-)v^- \\ &= J'_\lambda(sv^-)v^- \\ &= s^{p-1}\left(\int_\Omega |\nabla v^-|^p dx - \lambda \int_\Omega |v^-|^p dx\right) - s^{\gamma-1}\int_\Omega W(x)|v^-|^\gamma dx. \end{aligned}$$

Note que $\dfrac{\partial \phi^v}{\partial t}(t,s) = \dfrac{\partial \phi^v}{\partial s}(t,s) = 0$. Logo, vem que

$$\phi'_v(t,s) = \begin{pmatrix} g'_1(t) & 0 \\ 0 & g'_2(s) \end{pmatrix}.$$

Então, pelas definições de g_1 e g_2, temos que

$$\begin{aligned} g'_1(t) &= \frac{\partial \phi^v}{\partial t}(t,s) \\ &= (p-1)t^{p-2}\left(\int_\Omega |\nabla v^+|^p dx - \lambda \int_\Omega |v^+|^p dx\right) - (\gamma-1)t^{\gamma-1}\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g'_2(s) &= \frac{\partial \phi^v}{\partial s}(t,s) \\ &= (p-1)s^{p-2}\left(\int_\Omega |\nabla v^-|^p dx - \lambda \int_\Omega |v^-|^p dx\right) - (\gamma-1)s^{\gamma-1}\int_\Omega W(x)|v^-|^\gamma dx. \end{aligned}$$

Consequentemente, vem que

$$g'_1(1) = (p-1)\left(\int_\Omega |\nabla v^+|^p dx - \lambda \int_\Omega |v^+|^p dx\right) - (\gamma-1)\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx.$$

Agora, desde que $(1,1)$ é ponto crítico de h^v, segue que $J'_\lambda(v^+)v^+ = 0$. Logo,

$$\int_\Omega |\nabla v^+|^p dx - \lambda \int_\Omega |v^+|^p dx = \int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx.$$

Portanto, usando que $p < \gamma < p^*$ e o Corolário 1.0.6, temos que

$$g_1'(1) \;=\; p\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx - \gamma\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx = -(\gamma - p)\int_\Omega W(x)|v^+|^\gamma dx < 0.$$

De modo análogo, podemos mostrar que $g_2'(1) < 0$. E assim finalmente concluímos a demonstração do lema provando que

$$det(\phi^v)'(1,1) = g_1'(1).g_2'(1) > 0.$$

□

5.0.1 Demonstração do Teorema 0.0.4

Utilizando os argumentos encontrados em [5], [10, Lema 3.2], [19], [20, Lema 3.5] vamos mostrar que a função w_λ, encontrada na Proposição 5.0.1, que atinge a energia mínima d_λ em $\mathcal{M}_\lambda^\pm$ é ponto crítico de J_λ. Com efeito, suponha, por contradição, que w_λ não seja ponto crítico de J_λ. Logo, existe $\varphi_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}$ e $\alpha > 0$ tal que

$$J_\lambda'(w_\lambda)\varphi_0 = \alpha > 0.$$

Pela continuidade de J_λ', existe $\rho > 0$ tal que

$$J_\lambda'(v)\varphi_0 = \frac{\alpha}{2} > 0, \qquad \forall\, v \in B_\rho(w_\lambda).$$

Vamos definir $D := \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ e considerando a função $h^{w_\lambda} : [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$h^{w_\lambda}(t,s) = J_\lambda(tw_\lambda^+ + sw_\lambda^-), \quad \text{onde } (t,s) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty),$$

já estudada no Lema 5.0.2, temos diretamente do Lema 5.0.2 que

$$\delta_\lambda = \max_{(t,s)\in\partial D} h^{w_\lambda}(t,s) < h^{w_\lambda}(1,1) = J_\lambda(w_\lambda) = \overline{d}_\lambda. \tag{5.0.8}$$

Tomando $\rho_0 := \min\left\{\frac{\overline{d}_\lambda - \delta_\lambda}{2}, \frac{\delta}{24}\right\}$ e $S := B_{\frac{\delta}{3}}(w_\lambda)$ então, pelo [28, Lema 2.3], temos uma deformação η que assegura que

(a) $\eta(1,v) = v$ para todo $v \notin J_\lambda^{-1}\left(\left[\overline{d}_\lambda - 2\rho_0,\, \overline{d}_\lambda + 2\rho_0\right]\right)$,

(b) $\eta\left(1, J_\lambda^{\overline{d}_\lambda+\rho_0} \cap S\right) \subset J_\lambda^{\overline{d}_\lambda-\rho_0}$, onde $J_\lambda^{\overline{d}_\lambda+\rho_0} := \left\{v \in W_0^{1,p}(\Omega) :\ J_\lambda(v) \le \overline{d}_\lambda + \rho_0\right\}$ e $J_\lambda^{\overline{d}_\lambda-\rho_0} := \left\{v \in W_0^{1,p}(\Omega) :\ J_\lambda(v) \le \overline{d}_\lambda - \rho_0\right\}$

(c) $J_\lambda(\eta(1,v)) \le J_\lambda(v)$ para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Agora, mostraremos que

$$\max_{(t,s)\in\bar{D}} J_\lambda\left(\eta\left(1, tw_\lambda^+ + sw_\lambda^-\right)\right) < \overline{d}_\lambda. \tag{5.0.9}$$

Pelo item (c) e o Lema 5.0.2 temos, para $(t,s)\neq(1,1)$, que

$$J_\lambda\left(\eta\left(1, tw_\lambda^+ + sw_\lambda^-\right)\right) \leq J_\lambda\left(tw_\lambda^+ + sw_\lambda^-\right) = h^{w_\lambda}(t,s) < h^{w_\lambda}(1,1) = J_\lambda(w_\lambda) = \overline{d}_\lambda.$$

Logo,

$$J_\lambda\left(\eta\left(1, tw_\lambda^+ + sw_\lambda^-\right)\right) < \overline{d}_\lambda, \quad (t,s)\in D\backslash\{(1,1)\}. \tag{5.0.10}$$

Agora, vamos analisar quando $(t,s)=(1,1)$. Primeiro, note que $J_\lambda(w_\lambda)=\overline{d}_\lambda<\overline{d}_\lambda+\rho_0$ o que implica em

$$w_\lambda \in J_\lambda^{\overline{d}_\lambda+\rho_0}\cap S.$$

Então, pelo item (b), temos que $\eta(1,w_\lambda)\in J_\lambda^{\overline{d}_\lambda-\rho_0}$. Logo,

$$J_\lambda(\eta(1,w_\lambda)) < \overline{d}_\lambda - \rho_0 < \overline{d}_\lambda. \tag{5.0.11}$$

Portanto, (5.0.10) e (5.0.11) garante que (5.0.9) ocorre.

Para finalizar, vamos mostrar que existe $(t_0,s_0)\in D$ de modo que $\eta(1,t_0w_\lambda^+ + s_0w_\lambda^-)\in\mathcal{M}_\lambda^\pm$. Pois isto implicaria que

$$\begin{aligned}\overline{d}_\lambda &\leq J_\lambda(\eta(1,t_0w_\lambda^+ + s_0w_\lambda^-))\\ &\leq \max\nolimits_{(t,s)\in\bar{D}} J_\lambda\left(\eta\left(1, tw_\lambda^+ + sw_\lambda^-\right)\right) < \overline{d}_\lambda,\end{aligned}$$

o que é uma contradição e portanto $J'_\lambda(w_\lambda)=0$. Assim, vamos definir as seguintes funções $\kappa(t,s):=\eta(1,tw_\lambda^+ + sw_\lambda^-)$ e $\Psi_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dadas por

$$\Psi_1(t,s)=\left(\frac{1}{t}J'_\lambda\left(\kappa(t,s)\right)\kappa(t,s)^+, \frac{1}{s}J'_\lambda\left(\kappa(t,s)\right)\kappa(t,s)^-\right).$$

Observe que por (5.0.9) e pelo item (a), temos que

$$\kappa(s,t)=\eta(1,tw_\lambda^+ + sw_\lambda^-) = tw_\lambda^+ + sw_\lambda^- \text{ em } \overline{D}. \tag{5.0.12}$$

Logo, em $\overline{D}$, temos que

$$\begin{aligned}\Psi_1(t,s) &= \left(\frac{1}{t}J'_\lambda\left(\kappa(t,s)\right)\kappa(t,s)^+, \frac{1}{s}J'_\lambda\left(\kappa(t,s)\right)\kappa(t,s)^-\right)\\ &= \left(J'_\lambda\left(tw_\lambda^+ + sw_\lambda^-\right)w_\lambda^+, J'_\lambda\left(tw_\lambda^+ + sw_\lambda^-\right)w_\lambda^-\right)\\ &= \phi^{w_\lambda}(t,s),\end{aligned}$$

onde ϕ^{w_λ} foi analisada no Lema 5.0.2. Assim, pelo grau topológico de Brower e pelo Lema

5.0.2, obtemos que

$$\deg\left(\Psi_1, D, (0,0)\right) = \deg\left(\phi^{w_\lambda}, D, (0,0)\right) = \operatorname{sgn}\left(\det\left(\phi^{w_\lambda}\right)'(1,1)\right) = 1.$$

Logo, a função Ψ_1 possui um zero em D, ou seja, existe $(t_0, s_0) \in D$ tal que $\Psi_1(t_0, s_0) = (0,0)$. Consequentemente, pela definição de Ψ_1 e por (5.0.12), resulta que

$$0 = J'_\lambda\left(\kappa(t_0, s_0)\right)\kappa(t_0, s_0)^{\pm} = J'_\lambda\left(t_0 w_\lambda^+ + s_0 w_\lambda^-\right)\left(t_0 w_\lambda^+ + s_0 w_\lambda^-\right)^{\pm}. \tag{5.0.13}$$

E aplicando o Lema 3.0.2 em (5.0.13), concluímos que $t_0 w_\lambda^+ + s_0 w_\lambda^- \in \mathcal{N}_\lambda^{\pm}$. Além disso, pelo Corolário 1.0.6, temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega W(x)|t_0 w_\lambda^+ + s_0 w_\lambda^-|^\gamma\, dx &= t_0^\gamma \int_\Omega W(x)|w_\lambda^+|^\gamma\, dx + s_0^\gamma \int_\Omega W(x)|w_\lambda^-|^\gamma\, dx \\ &\geq (t_0^\gamma + s_0^\gamma) D_3 \left(\frac{\lambda^* - \lambda}{\lambda^*}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - p}} > 0.\end{aligned}$$

Portanto, temos que $t_0 w_\lambda^+ + s_0 w_\lambda^- \in \mathcal{M}_\lambda^{\pm}$.

Apêndice I - Estudo do Funcional Energia J_λ

Neste capítulo vamos mostrar que o funcional energia $J_\lambda : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ associado ao problema é de classe C^1.

Definição 5.0.1. *Dado um espaço de Banach X e um funcional $I : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que I possui uma Derivada de Gâteaux em $u \in X$ quando existir um funcional linear $T_0 \in X'$ (em que X' denota o espaço dual de X) tal que*

$$\lim_{t\to 0} \frac{I(u+tv) - I(u) - T_0 v}{t} = 0, \text{ para todo } v \in X.$$

A Derivada de Gâteaux no ponto u, quando existir, é única. A qual denotaremos simplesmente por $DI(u)$.

Definição 5.0.2. *Dado um espaço de Banach X e um funcional $I : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que I possui uma Derivada de Fréchet em $u \in X$ quando existir um funcional linear $T_0 \in X'$ tal que*

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{I(u+tv) - I(u) - T_0 v}{\|v\|} = 0, \text{ para todo } v \in X.$$

A Derivada de Fréchet no ponto u, quando existir, é única. A qual denotaremos simplesmente por $I'(u)$.

Definição 5.0.3. *Uma solução clássica de (P_λ) é uma função $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que*

$$-\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2}u + W(x)|u|^{\gamma-2}u, \tag{5.0.14}$$

para todo $x \in \Omega$, e

$$u(x) = 0, \tag{5.0.15}$$

para todo $x \in \partial\Omega$.

Agora, se u é uma solução no sentido da Definição 5.0.3, então multiplicando ambos os membros da equação (5.0.14) por $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, obtemos

$$(-\Delta_p u)\varphi = \lambda |u|^{p-2}u\varphi + W(x)|u|^{\gamma-2}u\varphi. \tag{5.0.16}$$

E integrando sobre Ω ambos os membros dessa última igualdade, vem que

$$\int_\Omega (-\Delta_p u)\varphi \, dx = \int_\Omega \lambda |u|^{p-2} u\varphi \, dx + \int_\Omega W(x)|u|^{\gamma-2}u\varphi \, dx. \tag{5.0.17}$$

Relembrando o Teorema da Divergência e utilizando o Teorema 5.0.11, temos que

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega (-\Delta_p u)\varphi \, dx &= \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi \, dx - \int\limits_{\partial\Omega} \tfrac{\partial u}{\partial \eta}\varphi \, dS \\ &= \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi \, dx.\end{aligned}$$

Consequentemente, substituindo essa última expressão em (5.0.17), temos

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega \lambda |u|^{p-2} u\varphi \, dx + \int_\Omega W(x)|u|^{\gamma-2}u\varphi \, dx, \tag{5.0.18}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Seja $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e utilizando o fato que $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = W_0^{1,p}$, segue que existe $(\varphi_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|\varphi_n - v\|_{W_0^{1,p}} \to 0$$

e

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi_n \, dx = \int_\Omega \lambda |u|^{p-2} u\varphi_n \, dx + \int_\Omega W(x)|u|^{\gamma-2}u\varphi_n \, dx. \tag{5.0.19}$$

Fazendo $n \to +\infty$, obtemos

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega \lambda |u|^{p-2} uv \, dx + \int_\Omega W(x)|u|^{\gamma-2}uv \, dx. \tag{5.0.20}$$

E, assim, ao analisar essa última identidade (5.0.20), somos conduzidos à definição de solução fraca de P_λ.

Definição 5.0.4. *Uma solução fraca de P_λ é uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que*

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega \lambda |u|^{p-2} uv \, dx + \int_\Omega W(x)|u|^{\gamma-2}uv \, dx,$$

para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Observação 1. *A função $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é chamada de Função Teste.*

Proposição 5.0.3. *O funcional $J_\lambda(u) : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{1}{p}\lambda \int_\Omega |u|^p dx - \frac{1}{\gamma}\int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx$$

é de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega),\mathbb{R})$, com

$$J_\lambda'(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\,\nabla v\,dx - \lambda\int_\Omega |u|^{p-2}\,u\,v\,dx - \int_\Omega W(x)|u|^{\gamma-2}\,u\,v\,dx,$$

para todo $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Assumindo

$$J_1(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx, \quad J_2(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx \quad e \quad J_3(u) = \frac{1}{\gamma}\int_\Omega W(x)|u|^\gamma dx,$$

segue que

$$J_\lambda(u) = J_1(u) - \lambda J_2(u) - J_3(u). \tag{5.0.21}$$

Sendo assim, devemos mostrar que $J_1, J_2, J_3 \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega),\mathbb{R})$ para obtermos o resultado desejado. Em outras palavras, devemos mostrar que a derivada de Gâteaux de J_1, J_2, J_3 existem e são contínuas.

Existência da derivada de Gâteaux para $[J_1]$: Sejam $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e considere $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < 1$ e a função $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(s) = \frac{|\nabla(u+stv)|^p}{p}.$$

Dado isso, tem-se

(*a*) $\varphi'(s) = |\nabla(u+stv)|^{p-2}\nabla(u+stv)\,t\,\nabla v$;

(*b*) $\varphi(1) = \dfrac{|\nabla(u+stv)|^p}{p}$;

(*b*) $\varphi(0) = \dfrac{|\nabla u|^p}{p}$.

Desde que φ é diferenciável em $(0,1)$ e contínua em $[0,1]$, então podemos utilizar o Teorema do Valor Médio (veja Teorema 5.0.4). Logo, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta).$$

Em outros termos,

$$\frac{1}{p}\left(|\nabla(u+stv)|^p - |\nabla u|^p\right) = |\nabla(u+stv)|^{p-2}\nabla(u+stv)\,t\nabla v$$

o que implica em

$$\frac{\frac{1}{p}\left(|\nabla(u+stv)|^p - |\nabla u|^p\right)}{t} = |\nabla(u+stv)|^{p-2}\nabla|(u+stv)|\nabla v. \tag{5.0.22}$$

Logo,
$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{p}\left(|\nabla(u+stv)|^p-|\nabla u|^p\right)}{t}=|\nabla(u)|^{p-2}\nabla|u|\nabla v, \tag{5.0.23}$$
em quase todo ponto em Ω. Agora observe que

$$\begin{aligned} |\nabla(u+stv)|^{p-2}\,\nabla|(u+stv)|\,\nabla v &\leq |\nabla(u+stv)|^{p-1}\,|\nabla v| \\ &\leq (|\nabla u|+|\nabla v|)^{p-1}\,|\nabla v|. \end{aligned} \tag{5.0.24}$$

Como $|\nabla u|, |\nabla v| \in L^p(\Omega)$ e este trata-se de um espaço vetorial, então

$$|\nabla u| + |\nabla v| \in L^p(\Omega). \tag{5.0.25}$$

Consequentemente,
$$(|\nabla u|+|\nabla v|)^{p-1}\in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega).$$

E desde que $\frac{p}{p-1}$ e p são expoentes conjugados, usando a Desigualdade de Hölder, concluímos que
$$(|\nabla u|+|\nabla v|)^{p-1}\,\nabla v\in L^1(\Omega). \tag{5.0.26}$$

Assim, por (5.0.23) e (5.0.24), podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema 5.0.7), o que advém em

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega\frac{\frac{1}{p}\left(|\nabla(u+stv)|^p-|\nabla u|^p\right)}{t}\,dx=\int_\Omega|\nabla(u)|^{p-2}\nabla u\nabla v\,dx.$$

E, portanto, existe a derivada de Gâteaux de J_1 em u, com

$$DJ_1(u)=\int_\Omega|\nabla(u)|^{p-2}\nabla u\nabla v\,dx,\quad \text{para toda } v\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Continuidade da derivada de Gâteaux para $[J_1]$: Seja $(u_n)\in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n\to u$ em $W_0^{1,p}$. Segue que
$$|\nabla u_n|\to|\nabla u| \quad em \quad L^p(\Omega).$$

Logo, pelo Teorema de Vainberg (veja Tereorma 5.0.8), existe uma subsequência (u_{n_k}) e uma função $f\in L^p(\Omega)$ tal que

$$|\nabla u_{n_k}(x)|\to|\nabla u(x)| \quad \text{q.t.p., em} \quad \Omega, \tag{5.0.27}$$

e
$$|\nabla u_{n_k}(x)|\leq f, \quad \text{q.t.p., em} \quad \Omega. \tag{5.0.28}$$

Agora, para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $\|v\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
|DJ_1(u_{n_k}) - DJ_1(u)| &= \left| \int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} \nabla v \, dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \, dx \right| \\
&= \left| \int_\Omega (|\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} \, dx - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \nabla v \, dx \right| \\
&\leq \int_\Omega ||\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} \, dx - |\nabla u|^{p-2} \nabla u| |\nabla v| \, dx.
\end{aligned}$$

Desde que $|\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} \, dx - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ e que $\frac{p}{p-1}$ e p são expoentes conjugados, então, pela Desigualdade de Hölder, tem-se

$$|DJ_1(u_{n_k}) - DJ_1(u)| \leq \||\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} - |\nabla u|^{p-2} \nabla u\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \|\nabla v\|_{L^p}.$$

E da imersão contínua de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, vem que

$$\begin{aligned}
|DJ_1(u_{n_k}) - DJ_1(u)| &\leq \||\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} - |\nabla u|^{p-2} \nabla u\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \|\nabla v\|_{L^p} \\
&\leq C_p \||\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} - |\nabla u|^{p-2} \nabla u\|_{L^{\frac{p}{p-1}}}.
\end{aligned} \tag{5.0.29}$$

Por outro lado, de (5.0.27), temos

$$|\nabla u_{n_k}(x)| \leq k.$$

Segue que,

$$\begin{aligned}
\left||\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} - |\nabla u|^{p-2} \nabla u\right|^{\frac{p}{p-1}} &\leq \left||\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} + |\nabla u|^{p-2} \nabla u\right|^{\frac{p}{p-1}} \\
&\leq \left[k(|\nabla u_{n_k}|^{p-2} + |\nabla u|^{p-2})\right]^{\frac{p}{p-1}} \\
&\leq k^{\frac{p}{p-1}} \left(|\nabla u_{n_k}|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} \\
&\leq k^{\frac{p}{p-1}} (f^p + |\nabla u|^p)^{\frac{p}{p-1}} \\
&\leq k^{\frac{p}{p-1}} (f^p + |\nabla u|^p).
\end{aligned}$$

Como $f, |\nabla u| \in L^p$ segue que $f^p, |\nabla u|^p \in L^1(\Omega)$ e desde que $L^1(\Omega)$ é um espaço vetorial, temos que $f^p + |\nabla u|^p \in L^1(\Omega)$. E, assim, pelo Teorema da Convergência Dominada (veja Teorema 5.0.7), obtemos

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega \left||\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} - |\nabla u|^{p-2} \nabla u\right|^{\frac{p}{p-1}} \, dx = 0,$$

ou seja,

$$\||\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k} - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty. \tag{5.0.30}$$

Retornando à expressão (5.0.29) e aplicando a norma em $W_0^{-1,p'}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} \| DJ_1(u_{n_k}) - DJ_1(u)\|_{W_0^{-1,p'}(\Omega)} &:= \sup_{\|v\|\leq 1} |DJ_1(u_{n_k}) - DJ_1(u)| \\ &\leq C_p\||\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k} - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\|_{L^{\frac{p}{p-1}}}. \end{aligned}$$

E de (5.0.30), concluímos que

$$\| DJ_1(u_{n_k}) - DJ_1(u)\|_{W_0^{-1,p'}(\Omega)} \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty.$$

Em outras palavras, a derivada de Gâteaux de J_1 é contínua. Por conseguinte, $J_1 \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$DJ_1(u) = J_1'(u) = \int_\Omega |\nabla(u)|^{p-2}\nabla u \nabla v\, dx. \tag{5.0.31}$$

para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Procedendo de forma análoga, demonstraremos agora que também $J_2 \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$.

Existência da derivada de Gâteaux para $[J_2]$: Sejam $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e considere $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < 1$ e a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(s) = \frac{|(u + stv)|^p}{p}.$$

Dado isso, tem-se

(a) $f'(s) = |(u + stv)|^{p-2}\,|(u + stv)|\, tv;$

(b) $f(1) = \dfrac{|(u + stv)|^p}{p};$

(b) $f(0) = \dfrac{|u|^p}{p}.$

Desde que f é diferenciável em $(0,1)$ e contínua em $[0,1]$, então, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$f(1) - f(0) = f'(\theta).$$

Em outros termos,

$$\frac{1}{p}\left(|(u + stv)|^p - |u|^p\right) = |(u + stv)|^{p-2}(u + stv)tv$$

o que implica em

$$\frac{\frac{1}{p}\left(|(u+stv)|^p-|u|^p\right)}{t}=|(u+stv)|^{p-2}|u+stv|v. \tag{5.0.32}$$

Logo,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{p}\left(|(u+stv)|^p-|u|^p\right)}{t}=|(u)|^{p-2}u\,v, \tag{5.0.33}$$

em quase todo ponto em Ω.
Agora observe que pela identidade (5.0.32), temos

$$\begin{aligned}|(u+stv)|^{p-2}\,(u+stv)\,v &\leq |(u+stv)|^{p-1}\,|v| \\ &\leq |u+v|^{p-1}\,|v|.\end{aligned} \tag{5.0.34}$$

Como $u, v \in L^p(\Omega)$ e este trata-se de um espaço vetorial, então

$$u+v \in L^p(\Omega). \tag{5.0.35}$$

Consequentemente, temos que

$$|u+v|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega).$$

E desde que $\frac{p}{p-1}$ e p são expoentes conjugados, usando a Desigualdade de Hölder, concluímos que

$$|u+v|^{p-1}\,v \in L^1(\Omega). \tag{5.0.36}$$

Assim, por (5.0.33) e (5.0.34), podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema 5.0.7), o que advém em

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{\frac{1}{p}\left(|(u+stv)|^p-|u|^p\right)}{t}\,dx=\int_\Omega |u|^{p-2}u\,v\,dx.$$

E, portanto, existe a derivada de Gâteaux de J_2 em u, com

$$DJ_2(u)=\int_\Omega |u|^{p-2}\,u\,v\,dx,$$

para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Continuidade da derivada de Gâteaux para $[J_2]$: Seja $(u_n) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}$, temos que

$$|u_n| \to |u| \quad em \quad L^p(\Omega)$$

.

Logo, pelo Teorema de Vainberg (veja Tereorma 5.0.8), existe uma subsequência (u_{n_k}) e uma função $g \in L^p(\Omega)$ tal que

$$|u_{n_k}(x)| \to |u(x)| \quad \text{q.t.p., em} \quad \Omega, \tag{5.0.37}$$

e

$$|u_{n_k}(x)| \leq g, \quad \text{q.t.p., em} \quad \Omega. \tag{5.0.38}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\left||u_{n_k}|^{p-2}u_{n_k} - |u|^{p-2}u\right|^{\frac{p}{p-1}} &\leq \left||u_{n_k}|^{p-2}u_{n_k} + |u|^{p-2}u\right|^{\frac{p}{p-1}} \\
&\leq \left[j(|u_{n_k}|^{p-2} + |u|^{p-2})\right]^{\frac{p}{p-1}} \\
&\leq j^{\frac{p}{p-1}}\left(|u_{n_k}|^{p-1} + |u|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} \\
&\leq j^{\frac{p}{p-1}}\left(g^p + |u|^p\right)^{\frac{p}{p-1}} \\
&\leq j^{\frac{p}{p-1}}\left(g^p + |u|^p\right).
\end{aligned}$$

Como $g, |u| \in L^p(\Omega)$ segue que $g^p, |u|^p \in L^1(\Omega)$ e desde que $L^1(\Omega)$ é um espaço vetorial, então $g^p + |u|^p \in L^1(\Omega)$. E, assim, pelo Teorema da Convergência Dominada (ver Teorema 5.0.7), obtemos

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega \left||\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k} - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|^{\frac{p}{p-1}} \, dx = 0,$$

ou seja,

$$\left\||u_{n_k}|^{p-2}u_{n_k} - |u|^{p-2}u\right\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty. \tag{5.0.39}$$

Por outro lado, para toda $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $\|w\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
|DJ_2(u_{n_k}) - DJ_2(u)| &= \left|\int_\Omega |u_{n_k}|^{p-2}u_{n_k} w \, dx - \int_\Omega |u|^{p-2}u \, w \, dx\right| \\
&= \left|\int_\Omega (|u_{n_k}|^{p-2}u_{n_k} \, dx - |u|^{p-2}u) w \, dx\right| \\
&\leq \int_\Omega ||u_{n_k}|^{p-2}u_{n_k} \, dx - |u|^{p-2}u||w| \, dx.
\end{aligned}$$

Desde que $|u_{n_k}|^{p-2}u_{n_k} - |u|^{p-2}u \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ e que $\frac{p}{p-1}$ e p são expoentes conjugados, então, pela Desigualdade de Hölder, tem-se

$$|DJ_2(u_{n_k}) - DJ_2(u)| \leq \||u_{n_k}|^{p-2}u_{n_k} - |u|^{p-2}u\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \|w\|_{L^p}.$$

E da imersão contínua de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, vem que

$$\begin{aligned} |DJ_2(u_{n_k}) - DJ_2(u)| &\leq \||u_{n_k}|^{p-2}u_{n_k} - |u|^{p-2}u\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \|w\|_{L^p} \\ &\leq S_p\||u_{n_k}|^{p-2}u_{n_k} - |u|^{p-2}u\|_{L^{\frac{p}{p-1}}}. \end{aligned} \tag{5.0.40}$$

Agora, aplicando a norma em $W_0^{-1,p'}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} \| DJ_2(u_{n_k}) - DJ_2(u)\|_{W_0^{-1,p'}(\Omega)} &:= \sup_{\|v\|\leq 1} |DJ_2(u_{n_k}) - DJ_2(u)| \\ &\leq S_p\||u_{n_k}|^{p-2}u_{n_k} - |u|^{p-2}u\|_{L^{\frac{p}{p-1}}}. \end{aligned}$$

E de (5.0.39), concluímos que

$$\| DJ_2(u_{n_k}) - DJ_2(u)\|_{W_0^{-1,p'}(\Omega)} \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty.$$

Donde concluímos que a derivada de Gâteaux de J_2 é contínua. Portanto, $J_2 \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$DJ_2(u) = J_2'(u) = \int_\Omega |u|^{p-2}\, u\, v\, dx, \tag{5.0.41}$$

para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Finalmente, utilizando argumentos semelhantes aos utilizados para demonstrar que $J_1, J_2 \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, verificaremos que $J_3 \in C^1(\, W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R}\,)$.

Existência da derivada de Gâteaux para $[J_3]$: Sejam $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e considere $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < 1$ e a função $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(s) = \frac{|(u + stv)|^\gamma}{\gamma}.$$

Dado isso, tem-se

(a) $\phi'(s) = |(u + stv)|^{\gamma-2}|(u + stv)|t\, v;$

(b) $\phi(1) = \dfrac{|(u + stv)|^\gamma}{\gamma};$

(b) $\phi(0) = \dfrac{|u|^\gamma}{\gamma}.$

Desde que ϕ é diferenciável em $(0, 1)$ e contínua em $[0, 1]$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio. Daí, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\theta).$$

Em outros termos,

$$\frac{1}{\gamma}\left(|(u+stv)|^{\gamma}-|u|^{\gamma}\right)=|(u+stv)|^{\gamma-2}|(u+stv)|tv.$$

o que implica em

$$\frac{|(u+stv)|^{\gamma}-|u|^{\gamma}}{t\,\gamma}=|(u+stv)|^{\gamma-2}|(u+stv)|v. \tag{5.0.42}$$

Ademais, para cada sequência $|t_n|\to 0$ quando $n\to 0$, temos que

$$\frac{|(u+st_nv)|^{\gamma}-|u|^{\gamma}}{t_n\,\gamma}\to |u|^{\gamma-2}|u|\,v,\ \text{q.t.p. em}\quad \Omega. \tag{5.0.43}$$

Perceba que pela identidade (5.0.42), temos

$$\begin{aligned}|(u+stv)|^{\gamma-2}\,|(u+stv)|\,v &\leq |(u+stv)|^{\gamma-1}\,|v|\\ &\leq (|u|+|v|)^{\gamma-1}\,|v|.\end{aligned} \tag{5.0.44}$$

Sendo $L^{\gamma}(\Omega)$ um espaço vetorial e $|u|,|v|\in L^{\gamma}(\Omega)$, então

$$|u|+|v|\in L^{\gamma}(\Omega). \tag{5.0.45}$$

Consequentemente,

$$(|u|+|v|)^{\gamma-1}\in L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(\Omega).$$

Desde que $\frac{\gamma}{\gamma-1}$ e γ são expoentes conjugados, usando a Desigualdade de Hölder, concluímos que

$$(|u|+|v|)^{\gamma-1}\,v\in L^{1}(\Omega). \tag{5.0.46}$$

Assim, por (5.0.43) e (5.0.44), podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema 5.0.7), então

$$\begin{aligned}\lim_{t_n\to 0}\frac{J_3(u+t_nv)-J_3(u)}{t_n}dx &= \lim_{t_n\to 0}\frac{\displaystyle\int_{\Omega}W(x)|(u+t_nv)|^{\gamma}dx-\int_{\Omega}W(x)|(u)|^{\gamma}dx}{t_n\gamma}\\ &= \lim_{t_n\to 0}\int_{\Omega}W(x)\left(\frac{|(u+t_nv)|^{\gamma}-|(u)|^{\gamma}}{t_n\gamma}\right)dx\\ &= \int_{\Omega}W(x)\left(\lim_{t_n\to 0}\frac{|(u+t_nv)|^{\gamma}-|(u)|^{\gamma}}{t_n\gamma}\right)dx\\ &= \int_{\Omega}W(x)|u|^{\gamma-2}|u|\,vdx.\end{aligned}$$

E, portanto, existe a derivada de Gâteaux de J_1 em u, com

$$DJ_3(u)=\int_{\Omega}W(x)|u|^{\gamma-2}|u|\,vdx,$$

para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Continuidade da derivada de Gâteaux para $[J_3]$: Seja $(u_n) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}$. Desde que $\gamma \in [1, q^*)$, pelo Teorema 5.0.14, temos que

$$|u_n(x)| \to |u(x)| \quad em \quad L^{\gamma}(\Omega).$$

Assim, pelo Teorema de Vainberg (veja Tereorma 5.0.8), existe uma subsequência (u_{n_k}) e uma função $h \in L^{\gamma}(\Omega)$ tal que

$$|u_{n_k}(x)| \to |u(x)| \quad \text{q.t.p., em} \quad \Omega, \tag{5.0.47}$$

e

$$|u_{n_k}(x)| \leq h. \tag{5.0.48}$$

Agora, para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. com $\|v\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} |DJ_3(u_{n_k}) - DJ_3(u)| &= \left| \int_{\Omega} W(x)|u_{n_k}|^{\gamma-2}|u_{n_k}|v\,dx - \int_{\Omega} W(x)|u|^{\gamma-2}|u|v\,dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} W(x)(|u_{n_k}|^{\gamma-2}|u_{n_k}| - |u|^{\gamma-2}|u|v\,)dx \right| \\ &\leq \|W\|_{\infty} \int_{\Omega} ||u_{n_k}|^{\gamma-2}|u_{n_k}|\,dx - |u|^{\gamma-2}u||v|\,dx. \end{aligned}$$

Desde que $|u_{n_k}|^{\gamma-2}|u_{n_k}| - |u|^{\gamma-2}|u| \in L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)$ e que $\frac{\gamma}{\gamma-1}$ e γ são expoentes conjugados, então, pela Desigualdade de Hölder, tem-se

$$|DJ_3(u_{n_k}) - DJ_3(u)| \leq \|W\|_{\infty}||u_{n_k}|^{\gamma-2}|u_{n_k}| - |u|^{\gamma-2}u\|_{L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}\|v\|_{L^{\gamma}}.$$

E da imersão contínua de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^{\gamma}(\Omega)$, segue que

$$\begin{aligned} |DJ_3(u_{n_k}) - DJ_3(u)| &\leq \|W\|_{\infty}||u_{n_k}|^{\gamma-2}|u_{n_k}| - |u|^{\gamma-2}|u||_{L^{\frac{\gamma}{p\gamma-1}}}\|v\|_{L^{\gamma}} \\ &\leq C_{\gamma}\|W\|_{\infty}\||u_{n_k}|^{\gamma-2}|u_{n_k}| - |u|^{\gamma-2}u\|_{L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}. \end{aligned} \tag{5.0.49}$$

Por outro lado, de (5.0.47), temos

$$|u_{n_k}(x)| \leq r.$$

Segue que,

$$\begin{aligned}
\left||u_{n_k}|^{\gamma-2}|u_{n_k}|-|u|^{\gamma-2}|u|\right|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} &\leq \left||u_{n_k}|^{\gamma-2}|u_{n_k}|+|u|^{\gamma-2}|u|\right|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
&\leq \left[r(|u_{n_k}|^{\gamma-2}+|u|^{\gamma-2})\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
&\leq r^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(|u_{n_k}|^{\gamma-1}+|u|^{\gamma-1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
&\leq r^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(h^{\gamma}+|u|^{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
&\leq r^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(h^{\gamma}+|u|^{\gamma}\right).
\end{aligned}$$

Como $h, |u| \in L^p(\Omega)$ segue que $h^p, |u|^p \in L^1(\Omega)$ e desde que $L^1(\Omega)$ é um espaço vetorial, temos que $h^p + |u|^p \in L^1(\Omega)$. E, assim, pelo Teorema da Convergência Dominada (ver Teorema 5.0.7), obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \left||u_{n_k}|^{\gamma-2}|u_{n_k}|-|u|^{\gamma-2}|u|\right|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\, dx = 0,$$

ou seja,

$$\||u_{n_k}|^{\gamma-2}|u_{n_k}|-|u|^{\gamma-2}u\|_{L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \to 0 \quad \text{quando} \quad k\to+\infty. \tag{5.0.50}$$

Retornando à expressão (5.0.49) e aplicando a norma em $W_0^{-1,p'}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
\| DJ_3(u_{n_k})-DJ_3(u)\|_{W_0^{-1,p'}(\Omega)} &:= \sup_{\|v\|\leq 1}|DJ_3(u_{n_k})-DJ_3(u)| \\
&\leq C_\gamma\|W\|_\infty\||u_{n_k}|^{\gamma-2}|u_{n_k}|-|u|^{\gamma-2}|u|\|_{L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}.
\end{aligned}$$

E de (5.0.50), concluímos que

$$\| DJ_3(u_{n_k})-DJ_3(u)\|_{W_0^{-1,p'}(\Omega)} \to 0 \quad \text{quando} \quad k\to+\infty.$$

Em outras palavras, a derivada de Gateaux de J_3 é contínua. Assim, $J_3 \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega),\mathbb{R})$ e

$$DJ_3(u) = J_3'(u) = \int_\Omega W(x)|u|^{\gamma-2}|u|\, v dx, \tag{5.0.51}$$

para toda $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Portanto, concluímos que

$$J_\lambda(u) : W_0^{1,p}(\Omega)\to\mathbb{R}$$

é de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega),\mathbb{R})$. Além disso, por (5.0.21), (5.0.31), (5.0.41) e (5.0.51), obtemos que

$$J_\lambda'(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\,\nabla v\, dx - \lambda\int_\Omega |u|^{p-2}\, u\, v\, dx - \int_\Omega W(x)|u|^{\gamma-2}\, u\, v\, dx,$$

para todo $u, v\in W_0^{1,p}(\Omega)$. □

Apêndice II - Resultados Clássicos

Definição 5.0.5. [7] *Seja S um subconjunto de R. Se S é cotado inferiormente, uma cota inferior de S se diz ínfimo (ou maior cota inferior) de S se é maior do que qualquer outra cota inferior de S. Em outras palavras, um número $u \in R$ se diz ínfimo de um subconjunto S de R se satisfaz as duas condições:*

(i) $u \leq s$ *para todo* $s \in S$*;*

(ii) *se* v *é um número tal que* $v \leq s$ *para todo* $s \in S$*, então* $v \leq u$*.*

Teorema 5.0.4 (*Teorema do Valor Médio*)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Suponha que f seja derivável no intervalo aberto (a, b). Então, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração. Veja [16]. □

Teorema 5.0.5 (*Teorema da Função Implícita*)**.** *Da da função $f : U \to \mathbb{R}$, de classe C^k $(k \geq 1)$ no aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, seja (x_0, y_0) tal que $f(x_0, y_0) = c$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Existem uma bola $B = B(x_0; \delta)$ e um intervalo $J = (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ com as seguintes propriedades:*

1) $B \times \bar{J} \subset U$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ *para todo* $(x, y) \in B \times \bar{J}$*;*

2) *Para todo* $x \in B$ *existe um único* $y = \xi(x) \in J$ *tal que* $f(x, y) = f(x, \xi(x)) = c$*.*

A função $\xi : B \to J$, assim definida, é de classe C^k e suas derivadas parciais em cada ponto $x \in B$ são dadas por

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x, \xi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))}.$$

Demonstração. Veja [24]. □

Lema 5.0.6 (*Lema de Fatou*)**.** *Se (f_n) é uma sequência de funções mensuráveis, não negativas e definidas em Ω, então*

$$\int_{\Omega} (\liminf f_n)\, dx \leq \liminf \int_{\Omega} f_n\, dx.$$

Demonstração. Veja [6]. $\square$

Teorema 5.0.7 (*Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue*)**.** *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis com convergência q.t.p para uma função real mensurável f. Se existe uma função integrável g, tal que $|f_n| \leq g$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então f é integrável e*

$$\lim \int_{\Omega} f_n \, dx = \int_{\Omega} f \, dx.$$

Demonstração. Veja [6]. $\square$

Teorema 5.0.8 (*de Vainberg*)**.** *Seja (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que*

$$f_n \to f \quad em \quad L^p(\Omega).$$

Então, existe $(f_{n_k}) \subset (f_n)$ e uma função $g \in L^p(\Omega)$ tal que

$$|f_{n_k}| \leq g(x) \quad quase\ toda\ parte\ em \quad \Omega$$

e

$$f_{n_k}(x) \to f(x) \quad quase\ toda\ parte\ em \quad \Omega.$$

Demonstração. Veja [11]. $\square$

Teorema 5.0.9. *Seja (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ que converge q.t.p para uma função mensurável f. Se existe $g \in L^p(\Omega)$, tal que*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \; x \in \Omega, \; n \in \mathbb{N}.$$

Então $f \in L^p(\Omega)$ e (f_n) converge para f, em $L^p(\Omega)$.

Demonstração. Veja [6]. $\square$

Teorema 5.0.10 (*Desigualdade de Hölder*)**.** *Seja $1 < p, q < +\infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então se $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, temos*

$$\int_{\Omega} |uv| \, dx \leq ||u||_{L^p(\Omega)} ||v||_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Veja [18]. $\square$

Teorema 5.0.11. *Seja $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Então*

(*i*) $\displaystyle\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} dS,$

(*ii*) $\displaystyle\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = -\int_{\Omega} u \Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} u \, dS,$

(iii) $\displaystyle\int_{\Omega} u\Delta v - v\Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta} \, dS.$

Demonstração. Veja [18]. $\square$

Teorema 5.0.12 (*Desigualdade de Poincaré*). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado. Então existe uma constante $C > 0$, dependendo somente de Ω, tal que*

$$\int_{\Omega} u^2 \, dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx, \; \forall \; u \in H_0^1(\Omega)$$

Demonstração. Veja [4] e [11]. $\square$

Teorema 5.0.13 (*Imersões de Sobolev*). *Sejam Ω um domínio satisfazendo a propriedade do cone, $m > 0$ e $1 \leq p < \infty$. Então, para qualquer $j > 0$ as imersões abaixo são contínuas:*

(I) se $mp < n$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, onde $p \leq q \leq \dfrac{np}{n-mp}$,

(II) se $mp = n$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, onde $p \leq q < \infty$,

(III) se $mp > n$, $W^{j+m,p} \hookrightarrow C_b^j(\Omega)$,

(IV) se $p(m-1) < n < mp$ e Ω tem a propriedade de Lipschitz local:
$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j+\lambda}(\bar{\Omega})$, onde $0 < \lambda \leq m - \dfrac{n}{p}$

Demonstração. Veja [17]. $\square$

Teorema 5.0.14 (*Imersão Compacta de Rellich-Kondrachov*). *Sejam Ω um domínio satisfazendo a propriedade do cone, $m > 0$ e $1 \leq p < \infty$. Então, para qualquer $j > 0$ as imersões abaixo são compactas:*

(I) se $mp < n$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, onde $1 \leq q \leq \dfrac{np}{n-mp}$,

(II) se $mp = n$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, onde $1 \leq q < \infty$,

(III) se $mp > n$, $W^{j+m,p} \hookrightarrow C_b^j(\Omega)$ e $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$,
onde $1 \leq q < \infty$,

(IV) se $mp > n$ e Ω tem a propriedade de Lipschitz local:
$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\bar{\Omega})$,

(V) se $p(m-1) < n < mp$ e Ω tem a propriedade de Lipschitz local:
$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j+\lambda}(\bar{\Omega})$, onde $0 < \lambda \leq m - \dfrac{n}{p}$

Demonstração. Veja [17]. $\square$

Bibliografia

[1] S. Alama, *Semilinear elliptic equations with sublinear indefinite nonlinearities*, *Adv. Differential Equations*, **4** (1999), 813-842. 15

[2] S. Alama and M. Del Pino, *Solutions of elliptic equations with indefinite nonlinearities via Morse theory and linkings*, *Ann. Ins. H. Poincaré Anal. Non. Linaire.*, **13** (1996), 35-115. 15

[3] S. Alama and G. Tarantello, *On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities*, *Calc. Var. Part. Differ. Equa.*, **1** (1993), 439-475. 15

[4] M. Badiale and E. Serra, Semilinear Elliptic Equations for Beginners - Existence Results via the Variational Approach, *Springer-Verlag*, (2011). 33, 77

[5] S. Barile and G. M. Figueiredo, Existence of least energy positive, negative and nodal solutions for a class of $p\&q$-problems with potentials vanishing at infinity, *J. Math. Anal. Appl.*, **427 (2)** (2015), 1205-1233. 38, 44, 50, 60

[6] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library, (1995). 76

[7] R. G. Bartle, *Elementos de Análise Real*, Editora Campus, (1983). 75

[8] T. Bartsch, T. Weth and M. Willem, Partial symmetry of least energy nodal solutions to some variational problems, *J. Anal. Math.*, **96** (2005), 1-18. 16

[9] H. Berestycki, I. Capuzzo-Dolcetta and L. Nirenberg, Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, **2** (1995), 553-572. 15

[10] V. Bobkov, Least energy nodal solutions for elliptic equations with indefinite nonlinearity, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, (2014), no. 56, 1-15. 15, 44, 50, 60

[11] H. Brézis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer New York, 1, 614 p., (2010), 2191-6675. 76, 77

[12] A. Castro, J. Cossio and J. M. Neuberger, A sign-changing solution for a superlinear Dirichlet problem, *Rocky Mountain J. Math.*, **27** (1997), 1041-1053. 16, 36, 53

[13] J. Chabrowski, Elliptic variational problems with indefinite nonlinearities, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **9** (1997), 221-231. 15

[14] G. S. Costa, G. M. Figueiredo and J. C. O. Júnior, Existence of positive solution for a class of elliptic problems with indefinite nonlinearities with critical and supercritical growth, *Adv. Differential Equations*, Accepted. 15

[15] P. Drábek and S. I. Pohozaev, Positive solutions for the p-Laplacian: application of the fibrering method, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **127** (1997), 703-726. 14, 15

[16] D. G. de Figueiredo, Análise I, LTC, 2, 266p., (1996). 75

[17] D. G. de Figueiredo, Equações Elípticas não Lineares, IMPA, (1977). 77

[18] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 662 p. (1998) 76, 77

[19] G. M. Figueiredo and F. B. M. Nunes, Existence of a least energy nodal solution for a class of quasilinear elliptic equations with exponential growth. *Funkcialaj Ekvacioj-Serio Internacia*, v. 64, p. 293-322, 2021. 38, 44, 50, 60

[20] G. M. Figueiredo, M. T. O. Pimenta, Nodal solutions of an NLS equation concentrating on lower dimensional spheres, *Boundary Value Problems*, 2015. 44, 60

[21] W.S.C. Gurney, R.M. Nisbet, The regulation of inhomogeneous populations, *J. Theoret. Bio.*, **52** (1975), 441. 13

[22] Y. Iĺyasov, Non-local investigation of bifurcations of solutions of non-linear elliptic equations, *Izvestiya: Mathematics*, **66** (2002), 1103-1130. 15

[23] Y. Iĺyasov and T. Runst, Positive solutions of indefinite equations with p-Laplacian and supercritical nonlinearity, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **56** (2011), 945-954. 14, 15

[24] E. L. Lima, Análise real, v.2, IMPA, 202p., (2004). 75

[25] S. Liu, *The Dirichlet problem with sublinear indefinite nonlinearities*, *Nonlinear Anal.*, **73** (2010), 2831-2841. 15

[26] E. S. Medeiros, U. B. Severo and E. A. B. Silva, An elliptic equation with indefinite nonlinearites and exponential critical growth in $\mathbb{R}^2$, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa CI. Sci.*, **(5)** (2019), 1-35. 15

[27] E. S. Medeiros, U. B. Severo and E. A. B. Silva, On a class of elliptic problems with indefinite nonlinearites, *Calc. Var.*, **50** (2014), 751–777. 15

[28] M. Willem, Minimax Theorems, Birkhäuser, Boston, 1996.

45, 50, 60