



**Universidade Federal do Maranhão**  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Física

Gabriel Braga Marques Teobaldo

**Implicações da quebra de Lorentz na mecânica quântica  
não-relativística**

SÃO LUÍS  
2022

Gabriel Braga Marques Teobaldo

**Implicações da quebra de Lorentz na mecânica quântica não-relativística**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marco Schreck

São Luís  
2022

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Teobaldo, Gabriel.

Implicações da quebra de Lorentz na mecânica quântica não-relativística / Gabriel Teobaldo. - 2022.

80 p.

Orientador(a): Marco Schreck.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Física/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2022.

1. Modelo Padrão Estendido. 2. Propagador. 3. Simetria de Lorentz. I. Schreck, Marco. II. Título.

GABRIEL BRAGA MARQUES TEOBALDO

**Implicações da quebra de Lorentz na mecânica quântica não-relativística**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovado em:

Banca Examinadora:

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Marco Schreck (Orientador)  
Universidade Federal do Maranhão - (UFMA)

---

Prof. Dr. Edilberto Oliveira Silva  
Universidade Federal do Maranhão - (UFMA)

---

Prof. Dr. Fabiano de Carvalho Simas  
Universidade Federal do Maranhão - (UFMA)

---

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante  
Universidade Federal do Ceará - (UFC)

São Luís  
2022

*Dedico este trabalho à minha esposa, Gabrielle de Oliveira Freitas Teobaldo, por me acompanhar e apoiar durante todos estes anos de relacionamento e por ser fonte infindável de inspiração para a conquista de uma realidade melhor para nossa família.*

# AGRADECIMENTOS

À Deus, que tem me dado forças durante esses anos na Universidade, que através da sua infinita Graça, me concedeu a benção de poder ter chegado até aqui. Agradeço por iluminar minha mente e me guiar a cada segundo de minha vida.

Ao meu orientador Dr. Marco Schreck, por sua paciência, respeito e fé no meu potencial, além de estar sempre disponível para me ajudar. Por sua amizade e apoio desde que nos conhecemos, por ter me ajudado bastante na etapa final do curso de mestrado, sem você não concluiria o curso.

Ao Prof. Dr. Antônio Pinto Neto, por ser meu amigo e conselheiro, sempre me ajudando a crescer compartilhando suas experiências de vida.

A Profa. Esp. Ivone Lopes Lima, minha mãe do coração, que esteve sempre ao meu lado me dando forças e contribuindo muito para meu crescimento profissional e pessoal.

Ao Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes, por sempre ser esse exemplo de profissional dedicado e humano ao mesmo tempo, atendendo às necessidades individuais de seus alunos, sempre os tratando com respeito e integridade. Obrigado pelos seus conselhos, dicas e recomendações. Sem você também não estaria aqui, obrigado!

Aos meus pais, Mário José Teobaldo Júnior e Cristina Braga Marques da Silva, que a sua maneira sempre me incentivaram a crescer. Obrigado por nunca desistirem de mim. Não foi fácil, mas cheguei até aqui. Eu tenho certeza que sem todo o esforço e amor que tiveram comigo, nada disso teria sentido.

A Sabrina Vieira Oliveira Teobaldo, que desde que chegou em minha vida, tem me ensinado a buscar sempre o melhor, mesmo quando as forças, às vezes, já estão esgotadas. Seus conselhos, cuidados e suas manifestações de afeto e confiança tiveram total influência na formação do meu caráter e tem contribuído de maneira muito significativa para meu crescimento todos esses anos, como pessoa, filho e cristão. Agradeço pelo exemplo, pelo carinho e por nunca desistir de mim.

Aos meus irmãos, Michel, Thamires, Camili, Manuela, Mário e Victória, por todo o incentivo, manifestado desde de risadas que me proporcionam, até o apoio e compreensão nos momentos difíceis.

Ao meu querido avô Mário José Teobaldo (*in Memoriam*), que hoje se encontra na presença de Deus, que sempre me ajudou a ver o quanto eu poderia ir mais longe na caminhada da vida. Obrigado por me fazer crescer, sorrir pra mim e me chamar de "meu neto querido" sempre que me recebia alegre ao me ver, por nunca ter me poupado de gestos e palavras de confiança, incentivo e amor em todos os momentos juntos.

Aos meus tios, Licínio Sérgio e Cláudia Marques, que ajudaram desde pequeno

na minha criação, auxiliando minha mãe nos momentos de dificuldade (que não foram poucos). Agradeço pelo seu amor e apoio durante toda este caminho. Aos meus primos, Leonardo e Giovana Marques, pelos momentos de felicidade e por mesmo a distância sempre acreditarem em mim.

À Minha querida avó Solange Braga, por ser grande incentivadora de meu crescimento, bem antes de surgir meu interesse pela Física, por seu amor e carinho que são imensos e por ser um grande exemplo de superação para mim.

A minha esposa Gabrielle de Oliveira Freitas Teobaldo, amiga de todas as horas, que me acompanha e incentiva desde sempre. Obrigado pelo seu amor e respeito, mas também, por ser essa base fundamental para realização deste sonho, sem você nada disso faria sentido Obrigado por nunca desistir de nós. E à sua família por todo amor que recebo até hoje, compreensão, carinho, respeito e admiração.

Aos meus avós do coração Saulo e Danielle Azevedo, e sua filha Ana Lídia, que proferiram sempre palavras de incentivo e esperança. Me auxiliando nos momentos difíceis e comemorando comigo minhas vitórias. Vocês fazem o mandamento de amar ao próximo ser muito mais fácil. Obrigado por tudo.

Em especial ao meu querido amigo Alexsandro Lucena Mota, que desde o início da graduação me acompanha e auxilia nos momentos difíceis, não somente nas disciplinas, mas também, compartilhando conselhos e experiências de vida. Agradeço pela atenção especial nessa reta final, ajudando com tudo que precisei, sem sua ajuda não seria possível terminar em tempo hábil.

Em especial aos meus queridos amigos Ronald Araujo e Pedro Henrique, que nesta etapa de dissertação foram fundamentais me ajudando muito. Sem vocês eu não teria conseguido terminar. Obrigado por terem me mostrado que tenho amigos valorosos do meu lado.

Ao meu querido amigo Bruno Santos, que sempre me ajudou a colocar a cabeça no lugar e recomeçar. Obrigado pela sua paciência e ajuda nas etapas importantes da vida.

Aos meus amigos de graduação, Wellington Luiz, Welington Sousa, João Luís (Tenório), Neyver Henry, Marcos Vinícius, Kayman Jhonsef, Daniel França, Arthur Nilson, Ruana Lima, Luana Sabrina, Thaynara Lima, Misael Gomes, Maria do Socorro, Josias Santos, Ismael Felipe, Lucas Corrêa, João Víctor, Eveling Milena, Jairo Vêras, Dinnalara Serpa, Charles Duarte, Jhonnatan Gomes, Beatriz Aranha, Bruno Botelho, Maurício Coutinho, Matheus Guimarães, Lucas Góis, Henrique Dias, Mariana Viegas, Denner Cássio, Marcos César, Aléx Costa, Filipe Ribeiro, Alefe Roger, Rhuan Sousa, Josiel Gusmão, Isabel Maria, Maria Luiza (Malu), Gabriel Sodrê, Gabriel Moraes, etc. Os quais passamos por grandes dificuldades, mas que seguem com insistência e perseverança em busca de mais conhecimentos. Sou muito grato pela amizade de vocês.

Aos meus amigos professores da Escola Crescimento, Marconi Loiola, Ramon Santos, Gregory Pinheiro, Gabriele Carvalho, Pedro Lobo, Nobuyuki Doihara, Rennanderson Pimentel, Marconio Nóbrega, Igo Anderson, Rodrigo, Israel, Felipe Martins, Joarez, Francisco Athayde, Marcelo Pena, Fabiano Soares, Diego Sucesso, Sanle Viegas e Alexssandro Matos. Que tem tido colaboração ímpar na minha profissão compartilhando suas experiências e conhecimentos. Obrigado por me ajudarem a ser um professor melhor!

Ao Departamento de Física da UFMA, por ser o berço de minha formação e ter tido contribuição fundamental na construção deste sonho.

Agradeço a todos, que mesmo de maneira indireta, tenham contribuído de alguma forma para a finalização desta caminhada.

Finalmente, as agências de fomento à pesquisa que me deram o apoio financeiro e financiaram a infraestrutura dos Laboratórios utilizados neste trabalho: FNDE, CNPq, FAPEMA e FINEP.



*“Até aqui nos ajudou o Senhor.”*  
*(1 Samuel 7:12)*

# RESUMO

Este trabalho é dedicado a conceitos fundamentais da mecânica quântica não-relativística. É apresentado um resumo das leis da cinemática quântica e dinâmica quântica. A última envolve a amplitude de propagação chamada de propagador, que descreve o movimento quântico de uma partícula não-relativística entre dois lugares. As propriedades do propagador são também discutidas neste contexto. Na sequência disso, o texto explica as experiências de fenda única e fenda dupla, que são experimentos básicos demonstrando o comportamento essencial de um objeto quântico. As observações feitas a partir destes experimentos, bem como as conclusões deduzidas sobre o comportamento de uma partícula quântica são resumidas. O objetivo principal da dissertação é incorporar uma possível manifestação da quebra da simetria de Lorentz no propagador, ou seja, derivar um propagador modificado. O foco é uma contribuição razoavelmente simples do Modelo Padrão Estendido (MPE). O MPE é um arcabouço teórico, efetivo parametrizando todas as possibilidades de uma quebra da invariância de Lorentz no contexto da teoria de campos. O propagador modificado é utilizado para conseguir o padrão de interferência da experiência de dupla fenda com fendas pontuais. O resultado é que o padrão de interferência fica inalterado para a contribuição particular do MPE estudada. As conclusões deste descobrimento são discutidas e propostas para análises mais sofisticadas são também feitas.

**Palavras-chave:** Propagador; Modelo Padrão Estendido; Simetria de Lorentz.

# ABSTRACT

This work is dedicated to fundamental concepts of nonrelativistic quantum mechanics. A summary of the laws of quantum cinematics and quantum dynamics is presented. The latter involves the propagation amplitude known as the propagator, which describes quantum motion of a nonrelativistic particle between two points. The properties of the propagator are also discussed in this context. Subsequently, the text explains the single- and double-slit experiments, which are basic experiments demonstrating the essential behavior of a quantum object. The observations made in these experiments as well as the conclusions on the behavior of a quantum particle deduced from them are summarized. The main goal of this master thesis is to incorporate a possible manifestation of Lorentz symmetry violation into the propagator, i.e., to derive a modified propagator. The focus is on a relatively simple contribution from the Standard-Model Extension (SME). The SME is an effective, theoretical framework that parameterizes all the possibilities of Lorentz invariance violation in the context of field theory. The modified propagator is employed to obtain the interference pattern for the double-slit experiment with pointlike slits. The result is that the interference pattern remains unchanged for the particular contribution of the SME that is studied. The conclusions of this discovery are discussed and proposals for more sophisticated analyses are made, as well.

**Keywords:** Propagator; Standard-Model Extension; Lorentz symmetry.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Caminhos não-distinguíveis entre dois lugares (a) e experiência de uma fenda (b). Retirado de (SCHRECK, 2019). . . . .	19
Figura 2.1 – Distribuição Gaussiana da Eq. (2.45) para $\sigma = \{1, 1/2, 1/10\}$ . Vemos que a largura do pico decresce ao passo que a altura aumenta. . . . .	31
Figura 2.2 – Gráficos do propagador livre da Eq. (2.34) para $m/(2\hbar) = 1$ onde tratamos $x, t$ como variáveis adimensionais. (a) Parte real para $x$ pequeno. (b) Parte imaginária para $x$ pequeno. (c) Parte real para $x$ grande. (d) Parte imaginária para $x$ grande. (e) Parte real para $t$ pequeno. (f) Parte imaginária para $t$ pequeno. Aproximações de ordens quadráticas são ilustradas em vermelho. . . . .	32
Figura 2.3 – Princípio da experiência da fenda dupla . . . . .	35
Figura 2.4 – Resultados da experiência para partículas clássicas com (a) a primeira fenda aberta (b) a segunda fenda aberta e (c) com às duas fendas abertas. Adaptado de (SCHRECK, 2018). . . . .	36
Figura 2.5 – Experiência da fenda dupla para ondas clássicas com (a) a primeira fenda aberta (b) as duas fendas abertas com $D \gg \lambda$ e (c) as duas fendas abertas com $D \ll \lambda$ . . . . .	38
Figura 2.6 – Contando eventos individuais na experiência da fenda dupla (com uma fonte da densidade baixa) (a) depois de um tempo curto (b) depois de um tempo médio e (c) depois de um tempo longo. . . . .	42
Figura 2.7 – Instalando uma segunda fonte de ondas eletromagnéticas (e.m.) para detectar qual fenda é escolhida pelo objeto quântico. Um segundo detector é necessário para observar as ondas eletromagnéticas espalhadas perto de uma das duas fendas. . . . .	43
Figura 2.8 – Soma de distribuições clássicas (para classe 1: partículas observadas) e de um padrão de interferência (para classe 2: partículas não-observadas). . . . .	45
Figura 3.1 – Espuma de espaço-tempo. . . . .	48
Figura 3.2 – Campo de fundo. . . . .	49
Figura 3.3 – Partícula se propagando num campo de fundo. . . . .	50
Figura A.1 – (a) Raízes do segundo quadrante da $\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$ . (b) Representação gráfica das funções $-\sin x$ e $\cos x$ . . . . .	63
Figura A.2 – (a) Representação gráfica das funções $\sin x$ e $-\cos x$ . (b) Raízes do quarto quadrante da $\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$ . . . . .	64
Figura A.3 – (a) Raízes do primeiro e terceiro quadrante da $\text{Im}[K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$ . (b) Representação gráfica das funções $\sin x$ e $\cos x$ . . . . .	65
Figura A.4 – Experiência da dupla fenda com fendas pontuais. . . . .	73

# LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 – Subdivisões da Mecânica Clássica. . . . .	18
--	----

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CPT Carga, Paridade e Tempo

MPE Modelo Padrão Estendido

# LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	Número de Massa
$v$	Velocidade
$c$	Velocidade da Luz
$h$	Constante de Planck
$\hbar$	Constante Reduzida de Planck
$m$	Massa
$x$	Posição
$x_0$	Posição inicial
$t$	Tempo
$t_0$	Tempo Inicial
$p$	Momento linear
$K$	Propagador
$e$	Carga Elementar
$\alpha$	Constante de Estrutura Fina
$\Psi$	Função de Onda
$\hat{U}$	Operador Evolução Temporal
$\hat{X}$	Operador Posição
$\delta$	Delta de Kronecker
$\hat{H}$	Operador Hamiltoniano
$E_n$	Autovalor de Energia
<b>E</b>	Vetor Campo Elétrico
<b>B</b>	Vetor Campo Magnético
$\epsilon_0$	Constante de Permissividade do Vácuo
$\mu_0$	Constante de Permeabilidade Magnética do Vácuo
$k$	Número de Onda

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTOS DA MECÂNICA QUÂNTICA</b> . . . . .	<b>22</b>
<b>2.1</b>	<b>Cinemática Quântica</b> . . . . .	<b>22</b>
<b>2.2</b>	<b>O Propagador na Mecânica Quântica</b> . . . . .	<b>23</b>
2.2.1	Propagador para partícula livre . . . . .	28
2.2.2	Propriedades do propagador livre . . . . .	29
<b>2.3</b>	<b>Experiência de fenda única e da fenda dupla</b> . . . . .	<b>35</b>
2.3.1	Partículas clássicas . . . . .	35
2.3.2	Ondas clássicas . . . . .	36
2.3.3	Objetos quânticos . . . . .	39
2.3.3.1	Experimento de fenda única . . . . .	39
2.3.3.2	A discreteza de eventos observados . . . . .	40
2.3.3.3	Probabilidade na mecânica quântica . . . . .	40
2.3.4	Experimento da fenda dupla . . . . .	41
2.3.5	Caminhos e amplitudes . . . . .	42
2.3.6	Observação da fenda escolhida pela partícula . . . . .	43
<b>2.4</b>	<b>Propagação da partícula livre pela fenda dupla</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>3</b>	<b>MODIFICAÇÕES NO PROPAGADOR NÃO-RELATIVÍSTICO</b>	<b>48</b>
<b>3.1</b>	<b>Quebra de simetria de Lorentz</b> . . . . .	<b>48</b>
3.1.1	Espuma de espaço-tempo . . . . .	48
3.1.2	Campos de fundo . . . . .	49
<b>3.2</b>	<b>Propagador modificado</b> . . . . .	<b>50</b>
<b>3.3</b>	<b>Padrão de Interferência Modificado</b> . . . . .	<b>52</b>
<b>4</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b> . . . . .	<b>55</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>56</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>60</b>
	<b>APÊNDICE A – O PROPAGADOR NÃO-RELATIVÍSTICO</b>	<b>61</b>
<b>A.1</b>	<b>Propriedades do Propagador Livre</b> . . . . .	<b>61</b>
A.1.1	Raízes da $\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$ e $\text{Im}[K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$ . . . . .	63
A.1.2	Máximos e Mínimos da $\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$ e $\text{Im}[K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$ . . . . .	66
A.1.3	Raízes da $\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x_0, t)]$ e $\text{Im}[K_{\text{Livre}}(x_0, t)]$ . . . . .	69



A.1.4	Máximos e Mínimos da $\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x_0, t)]$ e $\text{Im}[K_{\text{Livre}}(x_0, t)]$ . . . . .	70
<b>A.2</b>	<b>Aplicação da Experiência da Dupla Fenda</b> . . . . .	<b>72</b>
A.2.1	Propagador da Partícula Livre . . . . .	72
A.2.2	Propagador Modificado . . . . .	77

# 1 INTRODUÇÃO

A Mecânica Clássica pode ser dividida em três principais formulações pré-relativísticas: a Mecânica Newtoniana, a Mecânica de Lagrange e a Mecânica Hamiltoniana. Estas são a parte da física responsável pela descrição do movimento, das variações de energia e das forças a atuar sobre um corpo macroscópico<sup>1</sup> (THORNTON; MARION, 2011). Esta é subdividida em duas classificações básicas (vide Tabela 1.1).

Tabela 1.1 – Subdivisões da Mecânica Clássica.

Cinemática Clássica	Dinâmica Clássica
Estuda o movimento dos corpos macroscópicos sem se preocupar com as causas que geram este movimento.	Estuda as causas (forças) que geram o movimento dos corpos macroscópicos.

O movimento quântico é regido por leis, postulados e formulações distintas aos que compõe o estudo do movimento dos corpos clássicos. As leis da cinemática quântica são o conjunto de leis fundamentais básicas do mundo quântico que implicam nos resultados das experiências de fenda única e fenda dupla. Os postulados da mecânica quântica são as regras que compõem o formalismo operatorial. Esses postulados não são elementares como as leis da cinemática quântica, dado que as leis são válidas, independente do formalismo e os postulados restringem-se à formulação operatorial (SCHRECK, 2018).

Saindo da perspectiva clássica, a Mecânica Quântica também possui diferentes formulações para descrição dos objetos quânticos, a saber, a formulação de Schrödinger, a formulação de Dirac e a formulação de Feynman. A primeira é estruturada sob funções de onda que descrevem os estados quânticos de um sistema de uma ou mais partículas, e contém todas as informações sobre o sistema considerado isolado, acessíveis na mecânica quântica. A segunda formulação se dá pela definição de espaços vetoriais complexos envolvendo elementos chamando-os kets, que representam um estado físico da mecânica quântica contendo todas as informações quânticas do sistema considerado. Os kets são representados pelo símbolo “ $|\dots\rangle$ ” e possuem um elemento dual chamado bra e representado pelo símbolo “ $\langle\dots|$ ”. Já a formulação de Feynman é estruturada sobre o propagador que descreve o movimento quântico em todos os caminhos possíveis fornecendo a amplitude de transição da partícula de um ponto do espaço à outro em um dado intervalo de tempo (COHEN-TANNOUJI C. DIU; LALOË, 2020; SAKURAI; NAPOLITANO, 2011).

Para o presente estudo, usamos predominantemente a formulação de Feynman para obtenção dos resultados. Consideramos o propagador de uma partícula quântica livre

<sup>1</sup> Corpos que são grandes quando comparados com as partículas elementares e se movem com velocidades  $v$  muito inferiores à velocidade da luz  $c$  ( $v \ll c$ ).

obtido no contexto da mecânica quântica não-relativística:

$$K(x, t; x_0, t_0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t - t_0)}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{(x - x_0)^2}{t - t_0}\right], \quad (1.1)$$

onde  $m$  é a massa da partícula e  $\hbar = h/(2\pi)$  com a constante de Planck  $h$ . As leis fundamentais da cinemática quântica implicam que a partícula ao sair de uma configuração inicial e chegar em uma configuração final, pode seguir qualquer caminho quando não for observada (vide a Fig. 1.1a), por isso, todas as possibilidades devem ser consideradas. O propagador envolve tanto propriedades ondulatórias (para um período de propagação longo), quanto propriedades aleatórias. E após obtido, é possível calcular a amplitude (função de onda) nas coordenadas finais  $(x, t)$  a partir de condições iniciais  $(x_0, t_0)$  dadas. Por isso, a Eq. (1.1) representa a descrição global da propagação de uma partícula quântica. Além disso, permite a obtenção da equação de Schrödinger dependente do tempo (a descrição local). Através do propagador e das leis da cinemática quântica, é possível calcular o padrão de interferência para uma experiência de fenda única ou da fenda dupla (vide a Fig. 1.1b).

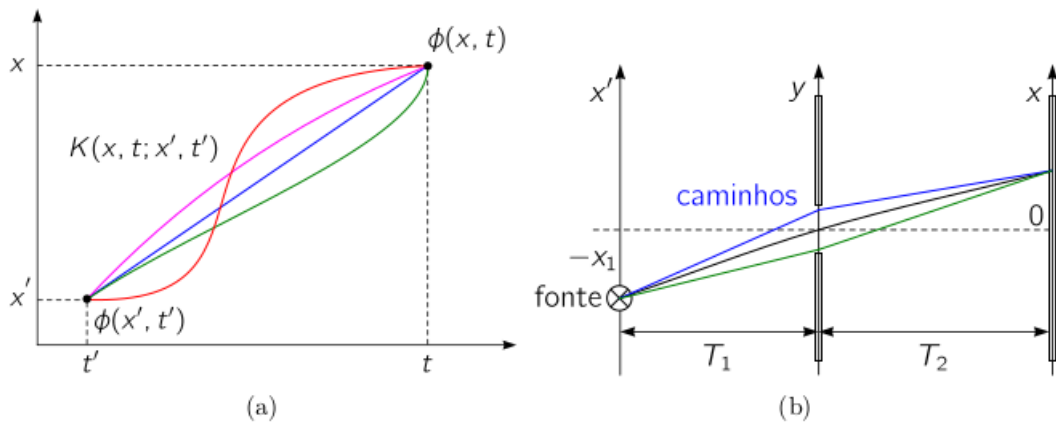


Figura 1.1 – Caminhos não-distinguíveis entre dois lugares (a) e experiência de uma fenda (b). Retirado de (SCHRECK, 2019).

A partir do precioso resultado de altíssima precisão do experimento de Michelson-Morley, A. Einstein, partindo de dois postulados, desenvolveu as ideias essenciais de uma teoria que é atualmente reconhecida na literatura como Teoria da Relatividade Restrita, onde se estabelece uma interpretação física para as transformações de Lorentz (RESNICK, 1971) como aquelas que asseguram a invariância do eletromagnetismo de Maxwell em todos os referenciais inerciais, satisfazendo o princípio da relatividade através da propriedade denominada de covariância. A covariância é uma assinatura das teorias relativísticas. Assim, surge então uma nova simetria na natureza, denominada de **covariância de Lorentz** ou **simetria de Lorentz**, a simetria que assegura que as leis físicas sejam as mesmas, isto é, tenham a mesma forma matemática em todo e qualquer referencial inercial. Efeitos de uma gravitação quântica na escala de Planck poderiam ter impactos às leis da natureza para

energias muito mais baixas do que a escala de Planck (KOSTELECKÝ; SAMUEL, 1989; GAMBINI; PULLIN, 1999). A quebra das simetrias de Lorentz e CPT é considerada um dos sinais mais importantes para efeitos físicos na escala de Planck. Para ter a possibilidade de prever efeitos mensuráveis em experimentos e comparar medições de experimentos diferentes é preciso uma parametrização de desvios possíveis da simetria de Lorentz.

O principal ponto que geram as pesquisas sobre a violação da simetria de Lorentz são as evidências teóricas, que indicam que na escala de Planck, a violação dessa simetria pode exercer um papel importante. Na década passada surgiram evidências que a constante de estrutura fina  $\left(\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right)$ , que é uma medida da intensidade da interação eletromagnética entre fótons, elétrons e pósitrons, esteja variando lentamente (WEBB *et al.*, 2001). Como  $\alpha$  relaciona a carga elétrica  $e$ , a constante de Planck  $\hbar$ , a velocidade da luz no vácuo  $c$  e a permissividade do vácuo  $\epsilon_0$ , a alteração de qualquer dessas constantes provocaria grandes mudanças no nosso entendimento sobre a propriedade da matéria. A questão sobre a dependência da velocidade limite de propagação da luz do estado de movimento de uma partícula contraria uma das teorias mais bem sucedidas da física atual: a relatividade restrita (SONGAILA; COWIE, 1999; DAVIES; DAVIS; LINEWEAVER, 2002; COWIE; SONGAILA, 2004).

Teorias mais fundamentais, que descrevem a natureza das interações das partículas elementares, apontam para a possibilidade da quebra espontânea da simetria de Lorentz. No contexto das supercordas, campos tensoriais podem adquirir valores esperados não-triviais no vácuo e assim, induz a violação de Lorentz (KOSTELECKÝ; SAMUEL, 1989; KOSTELECKÝ; POTTING, 1995). Existem outras propostas de mecanismos para quebra da simetria de Lorentz, como, por exemplo, os que envolvem: teorias de campos não comutativas (MOCIOIU; POSPELOV; ROIBAN, 2000; CARROLL *et al.*, 2001), gravidade quântica (AMELINO-CAMELIA *et al.*, 2005; BONDER; SUDARSKY, 2008), supersimetria (BERGER; KOSTELECKÝ, 2002; BOLOKHOV; NIBBELINK; POSPELOV, 2005) e gravidade massiva (DVALI; PUJOLAS; REDDI, 2007; GORBUNOV; SIBIRYAKOV, 2005; LIBANOV; RUBAKOV, 2005). Colladay e Kostelecký propuseram uma extensão efetiva ao Modelo Padrão, válida para energias muito menores que a escala de Planck, que incorpora a violação da simetria de Lorentz e CPT, mas que mantém a estrutura de Gauge  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  inalterada (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1998; COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1997).

O Modelo Padrão Estendido (MPE) é um marco teórico efetivo baseado na teoria de campos, este fornece uma parametrização de uma quebra de Lorentz no contexto do Modelo Padrão das partículas elementares (MOTA *et al.*, 2014) e da relatividade geral (KOSTELECKÝ, 2004). A quebra da simetria de Lorentz é parametrizada por coeficientes de controle que formam um campo de fundo, que não mudam perante transformações de Lorentz do sistema físico. O campo de fundo é contraído com um operador de campo para

formar um termo da densidade de Lagrange modificada, invariante sob transformações de coordenadas.

Há uma versão mínima do MPE que contém todos os operadores de campos de dimensões de massa 3 ou 4 (MOTA *et al.*, 2014; KOSTELECKÝ, 2004), onde o número dos coeficientes de controle é finito. A versão não-mínima do MPE contém os operadores de campos restantes com dimensões de massa maiores que 4 (KOSTELECKÝ; MEWES, 2009; KOSTELECKÝ; MEWES, 2012; KOSTELECKÝ; MEWES, 2013). O Hamiltoniano não-relativístico do MPE é conhecido sendo obtido a partir da densidade de Lagrange do MPE utilizando um procedimento que é similar a uma transformação de Foldy-Wouthuysen (transformação para obter o Hamiltoniano não-relativístico a partir do Hamiltoniano relativístico) (FOLDY; WOUTHUYSEN, 1950).

A base da análise a ser feita neste trabalho é a Lagrangiana clássica de uma partícula pontual, não-relativística associada ao MPE. Esta Lagrangiana foi obtida sucessivamente em uma série de artigos (KOSTELECKÝ; RUSSELL, 2010; COLLADAY; MCDONALD, 2012; RUSSELL, 2015; SCHRECK, 2016; REIS; SCHRECK, 2018; EDWARDS; KOSTELECKÝ, 2018; SCHRECK, 2019; REIS; SCHRECK, 2021) e poderemos aproveitar estes resultados, onde a ação correspondente desempenha um papel central no propagador.

No Capítulo 2, apresentamos um resumo das leis cinemáticas fundamentais que governam o movimento dos objetos quânticos. Em seguida, apresentamos o formalismo de integral (amplitude de propagação ou propagador), bem como sua expressão para uma partícula livre, e ainda discutiremos as propriedades deste propagador. E por fim, apresentaremos a Experiência de fenda única e de fenda dupla e como podemos utilizar o formalismo integral neste contexto.

No Capítulo 3, consideramos uma partícula sujeita a uma quebra de Lorentz, e com isso obtemos uma estrutura diferente para a Lagrangiana e a ação do sistema, o que ocasionou num propagador não-relativístico modificado. E por fim, calculamos o padrão de interferência modificado no contexto da experiência da fenda dupla. Investigamos quais características deste padrão de interferência são modificadas e quais ficam inalteradas. Dado que é um trabalho introdutório, consideramos os coeficientes de controle mais simples que são os do tipo  $a$ .

No Capítulo 4, realizamos as conclusões do trabalho apresentando um panorama de resultados e ainda perspectivas para trabalhos futuros sugeridos. Deve-se salientar que devido ao trabalho ser teórico e possuir muitos passos matemáticos, a seção de Apêndice A ficou reservada para a descrição mais detalhada dos procedimentos.

## 2 FUNDAMENTOS DA MECÂNICA QUÂNTICA

Neste capítulo, apresentaremos a fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento deste trabalho. Apresentaremos a cinemática quântica, o propagador não-relativístico, os experimentos de fenda única e fenda dupla e ainda como aplicar este formalismo para obter uma propagação quântica no experimento de fenda única e fenda dupla e encontrar um padrão de interferência.

### 2.1 Cinemática Quântica

Nesta seção, resumiremos as leis básicas que descrevem o movimento quântico (cinemática quântica). Mas, antes de propriamente enunciar as leis cinemáticas, devemos considerar que o determinismo clássico está extinto neste contexto, visto que abandonamos o conceito de trajetória clássica e o substituímos pelos caminhos que a partícula pode descrever. As leis cinemáticas estão dispostas a seguir:

1. A descrição completa de um evento é associada a uma amplitude  $\phi$  (número complexo) e, com isso, a uma probabilidade de que esse evento pode ocorrer.
2. A probabilidade  $P$  para a ocorrência de um evento é dada pela norma quadrada da amplitude (de probabilidade)  $\phi$  do evento, ou seja,

$$P = |\phi|^2. \quad (2.1)$$

3. Quando um evento é caracterizado por dois caminhos *distinguíveis* com amplitudes  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , a sua probabilidade é a soma das probabilidades de cada caminho:

$$P = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2. \quad (2.2)$$

E quando o evento é caracterizado por dois caminhos *não-distinguíveis*, a amplitude dele é a soma das amplitudes individuais de cada caminho:

$$\begin{aligned} P &= |\phi|^2 = |\phi_1 + \phi_2|^2, \\ &= |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + \phi_1\phi_2^* + \phi_1^*\phi_2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

4. Quando um evento é dado por uma progressão de dois eventos individuais e independentes, a amplitude total será o produto das amplitudes de cada evento:

$$\phi = \phi_1\phi_2. \quad (2.4)$$

Assim como na mecânica clássica, a cinemática é o conjunto de definições que permitem calcular grandezas como a velocidade, a aceleração, o momento, etc. A partir da trajetória

da partícula, as leis da cinemática quântica permitem efetuar uma descrição similar no contexto quântico para os caminhos possíveis da partícula (SCHRECK, 2019).

## 2.2 O Propagador na Mecânica Quântica

O propagador é uma ferramenta fundamental da Mecânica Quântica, embora sua utilização seja potencialmente complicada na prática, ele descreve o movimento quântico que ocorre de coordenadas iniciais  $(x', t')$  a coordenadas finais  $(x, t)$ . Neste contexto, o conceito da trajetória clássica perde seu significado sendo substituído pelo conceito do caminho (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011). Consideraremos todos os caminhos possíveis, ou seja, também os que não necessariamente seguem o princípio de Hamilton (Princípio de Mínima Ação) (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 1980; LANDAU; LIFSHITZ, 1976).

Na Mecânica Quântica Não-relativística, o propagador nos dá a amplitude de transição da partícula de um ponto do espaço à outro em um dado intervalo de tempo. O propagador de uma partícula é a Função de Green da Equação de Schrödinger, que é independente da função de onda inicial do sistema. Assim, tendo conhecimento do propagador e do estado inicial da partícula, podemos descrever completamente a evolução temporal desta partícula, a menos que o sistema sofra uma perturbação (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011).

Considere  $|\psi(t_0)\rangle$  o vetor de estado de uma partícula medida no instante  $t_0$  (DUQUE, 2013). Podemos obter o estado da partícula no instante  $t$  aplicando o operador da evolução temporal  $\hat{U}(t, t_0)$  sobre o estado  $|\psi(t_0)\rangle$ , isto é,

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle. \quad (2.5)$$

Agora, considere  $\hat{X}$  sendo o operador de posição. Considera-se que  $|\mathbf{x}_0\rangle$  seja um autoestado desse operador com autovalor  $x_0$ . Dessa forma,

$$\hat{X} |\mathbf{x}_0\rangle = x_0 |\mathbf{x}_0\rangle. \quad (2.6)$$

Assim, pode-se então, escrever a função de onda

$$\psi(\mathbf{x}_0, t_0) = \langle \mathbf{x}_0 | \psi(t_0) \rangle, \quad (2.7)$$

onde teremos que  $|\psi(\mathbf{x}_0, t_0)|^2$  está relacionado à densidade de probabilidade de uma partícula a ser localizada no intervalo infinitesimal  $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}]$  e no instante  $t_0$ .

Analogamente, teremos que a função de onda  $\psi(\mathbf{x}, t)$  na posição  $\mathbf{x}$  e no instante  $t$  será,

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle, \quad (2.8)$$

em que  $|\mathbf{x}\rangle$  é autoestado de  $\hat{X}$  com autovalor  $\mathbf{x}$ .

Fazendo o produto escalar da equação (2.5) pelo vetor  $\langle \mathbf{x} |$  e considerando a equação

(2.8), obtém-se,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle &= \langle \mathbf{x} | \hat{U}(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle, \\ \psi(\mathbf{x}, t) &= \langle \mathbf{x} | \hat{U}(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Considerando que os autoestados do operador  $\hat{X}$  formam um conjunto completo, tem-se,

$$\int d^3 \mathbf{x}_0 | \mathbf{x}_0 \rangle \langle \mathbf{x}_0 | = \mathbf{1}.$$

Introduzindo, convenientemente, essa identidade na equação (2.9), segue

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x}, t) &= \langle \mathbf{x} | \hat{U}(t, t_0) \int d^3 \mathbf{x}_0 | \mathbf{x}_0 \rangle \langle \mathbf{x}_0 | \psi(t_0) \rangle, \\ \psi(\mathbf{x}, t) &= \int d^3 \mathbf{x}_0 \langle \mathbf{x} | \hat{U}(t, t_0) | \mathbf{x}_0 \rangle \langle \mathbf{x}_0 | \psi(t_0) \rangle, \\ \psi(\mathbf{x}, t) &= \int d^3 \mathbf{x}_0 K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \psi(\mathbf{x}_0, t_0),\end{aligned}\quad (2.10)$$

onde o Kernel  $K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \langle \mathbf{x} | \hat{U}(t, t_0) | \mathbf{x}_0 \rangle$  é o **propagador quântico** para uma transição a partir da amplitude  $\psi(\mathbf{x}_0, t_0)$  para a amplitude  $\psi(\mathbf{x}, t)$  (BASSALO, 2006).

Assim, com essa definição, pode-se relacionar as funções de onda da partícula para tempos diferentes de forma bastante conveniente,

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x}_2, t_2) &= \langle \mathbf{x}_2 | \psi(t_2) \rangle, \\ \psi(\mathbf{x}_2, t_2) &= \langle \mathbf{x}_2 | \hat{U}(t_2, t_1) | \psi(t_1) \rangle, \\ \psi(\mathbf{x}_2, t_2) &= \int d^3 \mathbf{x}_1 K(\mathbf{x}_2, t_2; \mathbf{x}_1, t_1) \psi(\mathbf{x}_1, t_1).\end{aligned}\quad (2.11)$$

A equação (2.11) sugere uma analogia com o princípio de Huygens da óptica ondulatória, pois no estudo da propagação das ondas, deve-se considerar que cada partícula do meio através do qual a onda evolui não só transmite o seu movimento à partícula seguinte, mas também, ao longo da reta que parte do ponto luminoso, e ainda, a todas as partículas que a rodeiam e que se opõem ao movimento.

Na Mecânica Quântica Não-Relativística um sistema físico só se propaga para o futuro, para satisfazer o **Princípio da Causalidade de Galileu**, deve-se ter

$$K(\mathbf{x}_2, t_2; \mathbf{x}_1, t_1) \neq 0, \quad \text{para } (t_2 > t_1), \quad (2.12)$$

$$K(\mathbf{x}_2, t_2; \mathbf{x}_1, t_1) = 0, \quad \text{para } (t_2 < t_1). \quad (2.13)$$

Por isso, a definição do propagador quântico exige a presença de uma função degrau, ou seja, a **Função de Heaviside**  $\theta(x)$ , a qual a mesma é basicamente uma função descontínua com valor zero quando o seu argumento é negativo e valor unitário quando o argumento é positivo. Temos

$$K(\mathbf{x}_2, t_2; \mathbf{x}_1, t_1) = \theta(t_2 - t_1) \langle \mathbf{x}_2 | \hat{U}(t_2, t_1) | \mathbf{x}_1 \rangle, \quad (2.14)$$



em que

$$\hat{U}(t_2, t_1) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_2 - t_1)\right), \quad (2.15)$$

quando  $\hat{H}$  não depende explicitamente do tempo, e também:

$$\theta(t_2 - t_1) = \begin{cases} 1, & \text{se } (t_2 - t_1) \geq 0, \\ 0, & \text{se } (t_2 - t_1) < 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Dessa forma, o princípio da causalidade fica preservado, pois, a equação (2.16) obriga as fontes secundárias a irradiarem só no sentido do futuro.

O propagador pode também ser escrito em termos das autofunções do operador hamiltoniano. Esse conjunto de autofunções é completo (obedece à relação de completeza). Considera-se que seja ortonormal (obedece à relação de ortonormalidade), dessa forma,

$$\int d^3\mathbf{x} \phi_n^*(\mathbf{x}) \phi_m(\mathbf{x}) = \delta_{nm}. \quad (2.17)$$

É possível obter a relação de completeza multiplicando ambos os lados da equação (2.17) por  $\phi_n(\mathbf{y})$  (somando-se em  $n$ ). Logo, tem-se,

$$\sum_n \int d^3\mathbf{x} \phi_n(\mathbf{y}) \phi_n^*(\mathbf{x}) \phi_m(\mathbf{x}) = \phi_m(\mathbf{y}). \quad (2.18)$$

Para que essa condição seja satisfeita, deve-se ter

$$\sum_n \phi_n(\mathbf{y}) \phi_n^*(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.19)$$

que é a relação de completeza do conjunto de autofunções.

Para expressar o propagador em termos desse conjunto completo de funções, inicia-se por escrever a função de onda  $\psi(\mathbf{x}, t)$  através dessa base completa, técnica desenvolvida por Feynman em 1948, que consiste em obter a solução procurada  $\psi(\mathbf{x}, t)$ , em termos das funções próprias de  $\hat{H}$ , da seguinte maneira,

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_n c_n \phi_n(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right). \quad (2.20)$$

Pode-se notar a consistência desse resultado verificando que  $\psi(\mathbf{x}, t)$  satisfaz a equação de Schrödinger. Observamos que essa expressão só ficará completamente determinada se conhecermos  $c_n$ .

Em um certo instante  $t_0$ , tem que a função de onda  $\psi(\mathbf{x}, t_0)$  é uma função apenas de  $\mathbf{x}$ . Assim, escrevendo também, em termos do conjunto satisfeito pela relação de completeza supracitada (2.19), obtém-se

$$\psi(\mathbf{x}, t_0) = \sum_n a_n \phi_n(\mathbf{x}). \quad (2.21)$$

Fazendo-se  $t = t_0$  na equação (2.20), segue,

$$\psi(\mathbf{x}, t_0) = \sum_n c_n(t_0) \phi_n(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t_0\right). \quad (2.22)$$

Substituindo a equação (2.21) na equação (2.22) encontramos

$$\begin{aligned} \sum_n a_n \phi_n(\mathbf{x}) &= \sum_n c_n(t_0) \phi_n(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t_0\right), \\ a_n &= c_n(t_0) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t_0\right), \\ c_n(t_0) &= a_n \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_n t_0\right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Substituindo esse resultado na equação (2.20), tem-se,

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_n a_n \phi_n(\mathbf{x}) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_n (t - t_0)\right]. \quad (2.24)$$

Multiplicando (2.21) por  $\phi_m^*(\mathbf{x}_0)$ , integrando em todo o espaço ( $\mathbf{x}_0$ ), e substituindo (2.17) teremos

$$\begin{aligned} \int \phi_m^*(\mathbf{x}_0) \psi(\mathbf{x}_0, t_0) d^3 \mathbf{x}_0 &= \int \sum_n a_n \phi_m^*(\mathbf{x}_0) \phi_n(\mathbf{x}_0) d^3 \mathbf{x}_0, \\ \int \phi_m^*(\mathbf{x}_0) \psi(\mathbf{x}_0, t_0) d^3 \mathbf{x}_0 &= \sum_n a_n \left[ \int \phi_m^*(\mathbf{x}_0) \phi_n(\mathbf{x}_0) d^3 \mathbf{x}_0 \right], \\ \int \phi_m^*(\mathbf{x}_0) \psi(\mathbf{x}_0, t_0) d^3 \mathbf{x}_0 &= \sum_n a_n \delta_{mn}. \end{aligned}$$

Agora, expandindo a somatória para  $m = n$ , obtém-se

$$\begin{aligned} a_m &= \int \phi_m^*(\mathbf{x}_0) \psi(\mathbf{x}_0, t_0) d^3 \mathbf{x}_0, \\ a_n &= \int \phi_n^*(\mathbf{x}_0) \psi(\mathbf{x}_0, t_0) d^3 \mathbf{x}_0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Substituindo a equação (2.25) na equação (2.24), segue,

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int d^3 \mathbf{x}_0 \sum_n \phi_n(\mathbf{x}) \phi_n^*(\mathbf{x}_0) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_n (t - t_0)\right] \psi(\mathbf{x}_0, t_0). \quad (2.26)$$

Finalmente, comparando (2.26) com a equação (2.11),

$$\int d^3 \mathbf{x}_0 K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \psi(\mathbf{x}_0, t_0) = \int d^3 \mathbf{x}_0 \sum_n \phi_n(\mathbf{x}) \phi_n^*(\mathbf{x}_0) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_n (t - t_0)\right] \psi(\mathbf{x}_0, t_0),$$

obtém-se a expressão do propagador em termos das autofunções  $\phi_n(\mathbf{x})$ ,

$$K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \sum_n \phi_n(\mathbf{x}) \phi_n^*(\mathbf{x}_0) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_n (t - t_0)\right]. \quad (2.27)$$

A equação (2.27) recebe o nome de **núcleo**, **kernel**, **função de Green** ou **propagador de Feynman**. Essa equação nos mostra que, para se obter a solução da equação de Schrödinger, é necessário conhecer o **Propagador de Feynman**. Desse modo, conhecida a função de onda no instante  $t_0$  e em todo o espaço tridimensional, representado pelo vetor

$\mathbf{x}_0$ , a equação (2.27) nos permite determinar essa mesma função no instante  $t$ , e também, em todo o espaço ( $\mathbf{x}$ ) (BASSALO, 2006).

Finalmente, para a Mecânica Quântica Não-Relativística, temos:

$$K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \sum_n \phi_n(\mathbf{x}) \phi_n^*(\mathbf{x}_0) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} E_n (t - t_0) \right] \theta(t - t_0), \quad (2.28)$$

onde  $\theta(t - t_0)$  permite que a equação só atue nas condições de concordância com o princípio de causalidade de Galileu.

Em 1933, Paul Dirac mostrou que existe um análogo quântico do *Princípio da Mínima Ação* para uma variável dinâmica que evolui entre um determinado intervalo de tempo (DIRAC, 1933). Diante dessas informações, Feynman começa a analisar a utilização da função lagrangiana nas soluções de problemas em sistemas quânticos (FEYNMAN; BROWN, 2005).

Existe uma regra da Mecânica Quântica que diz a quantidade que cada trajetória contribui para a amplitude total de probabilidade para ir do ponto  $a$  ao ponto  $b$ . Neste caso, não é apenas a trajetória particular do valor extremo da ação que contribui, mas é a totalidade das trajetórias possíveis entre os dois pontos que contribuirá, em proporções iguais, porém com diferentes fases, para a amplitude total. A fase da contribuição de uma determinada trajetória é a ação  $S$  própria a essa trajetória, em unidades do quantum de ação  $\hbar$ . (FEYNMAN; HIBBS; STYER, 2010).

Matematicamente falando, a probabilidade  $P(b, a)$  para uma partícula se movimentar de  $x_a$  com tempo  $t_a$  para um ponto  $x_b$  com tempo  $t_b$  é o quadrado absoluto de  $P(b, a) = |K(b, a)|^2$  de uma amplitude  $K(b, a)$  correspondente ao trajeto de  $a$  para  $b$ .

Com isso em mente, a grandiosa ideia de Feynman foi montar uma expressão para o propagador quântico explorando o princípio de Huygens da ótica ondulatória. Dessa forma, imaginou que o propagador  $K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$  fosse dado por uma soma de amplitudes de probabilidades, de que cada uma delas estava associada a um possível caminho no espaço de configuração ligando os pontos  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  e  $(\mathbf{x}, t)$ , ou seja

$$K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \sum_{\text{todos os caminhos}} \Phi [x(t)], \quad (2.29)$$

onde  $\Phi [x(t)]$  é a amplitude associada ao caminho  $x(t)$ . A contribuição de cada caminho tem uma fase proporcional à ação  $S$  (esta ação é a do sistema clássico correspondente),

$$\Phi [x(t)] = \text{const} \exp \left( \frac{i}{\hbar} S \right). \quad (2.30)$$

Antes de avançar para uma formulação matemática mais completa, compararemos essa regra quântica com a regra clássica. À primeira vista, a equação (2.30) diz que todos os caminhos contribuem igualmente, embora suas fases variem, mas não fica claro de que maneira, no limite clássico, um determinado caminho é selecionado. A aproximação

clássica, contudo, corresponde ao caso onde as dimensões, massas, tempos, etc., são tão grandes que a ação  $S$  se torna imensa, em comparação com  $\hbar$  ( $= 1,055 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$ ), e a fase  $\frac{S}{\hbar}$  da contribuição é um ângulo muito grande. Movendo a trajetória uma pequena distância  $\delta x$ , na escala clássica, ocorre uma alteração pequena na ação  $S$  nessa escala, mas não quando é medida em mínimas unidades de  $\hbar$ . Essas pequenas mudanças nos caminhos provocam enormes mudanças na fase, e o cosseno ou o seno oscilam, de forma tremendamente rápida, entre valores positivos e negativos. Assim, a contribuição total é nula, pois quando uma trajetória contribui positivamente, outra, infinitesimalmente próxima (do ponto de vista clássico) contribuirá negativamente, anulando-a (FEYNMAN; HIBBS; STYER, 2010).

Assim, nenhum caminho é considerado quando sua vizinha tem uma ação diferente que cancele a sua contribuição. Para o caminho especial  $\bar{x}$ , porém, para o qual a ação  $S$  se encontra num extremo, uma pequena variação não produz, ao menos em primeira ordem, variação alguma na ação  $S$ . Todas as contribuições dos caminhos nesta região estão aproximadamente em fase (na fase  $S_{Cl}$ ), e não se cancelam. Portanto, podemos ter contribuições importantes somente para caminhos nas vizinhanças de  $\bar{x}$ , e no limite clássico precisaremos considerar apenas este caminho em particular. Desse modo, o método da fase estacionária nos diz que a maior contribuição para o propagador é justamente quando a ação é mínima  $\delta S = 0$ , o que ocorre para a trajetória clássica (FEYNMAN; BROWN, 2005).

Para que a expressão do propagador tenha um limite clássico correto, Feynman o escreveu como (FEYNMAN, 1948):

$$K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \int D[x(t)] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x(t)]\right), \quad (2.31)$$

em que  $D[x(t)]$  tem um caráter puramente formal, integrando sobre todos os caminhos  $x(t)$  (integração funcional) e  $S$  é a ação calculada ao longo de cada caminho  $x(t)$ . Observe que na ideia de Feynman, o **princípio da incerteza de Heisenberg** fica embutido, pelo menos qualitativamente, no fato de haver vários caminhos possíveis para a evolução do sistema.

### 2.2.1 Propagador para partícula livre

Nesta seção, obteremos a forma explícita do propagador para uma partícula livre e compreenderemos o movimento quântico através deste formalismo. Cabe ressaltar que este é um dos poucos casos para os quais o propagador pode ser derivado de forma explícita.

Os autovalores do operador hamiltoniano para a partícula livre são quantidades contínuas. Assim, o somatório que aparece na Eq. (2.27) deve ser substituído por uma integral. Temos que o operador hamiltoniano para uma partícula (livre e não relativística)

de massa  $m$  é (NETO, 2017)

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}, \quad (2.32)$$

e possui os seguintes autoestados que são também autoestados de momento  $p$ :

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} px\right), \quad (2.33)$$

em que estamos considerando, inicialmente, o caso unidimensional. Usando a Eq. (2.27), com o somatório substituído por uma integral, o cálculo do propagador segue diretamente

$$\begin{aligned} K(x, t; x_0, t_0) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp\left[\frac{i}{\hbar} p(x - x_0)\right] \exp\left[-\frac{i}{2m\hbar} p^2(t - t_0)\right], \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{i(t - t_0)}{2m\hbar} \left[p^2 - \frac{2m(x - x_0)p}{(t - t_0)}\right]\right\}, \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{(x - x_0)^2}{t - t_0}\right] \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp\left\{-\frac{i(t - t_0)}{2m\hbar} \left[p - \frac{2m(x - x_0)p}{(t - t_0)}\right]^2\right\}, \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2\pi m\hbar}{i(t - t_0)}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{(x - x_0)^2}{t - t_0}\right]. \end{aligned}$$

Assim temos,

$$K(x, t; x_0, t_0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t - t_0)}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{(x - x_0)^2}{t - t_0}\right], \quad (2.34)$$

em que, na penúltima linha, foi usada a já conhecida integral gaussiana

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-\alpha x^2) = \sqrt{\pi/\alpha}, \quad (2.35)$$

e sua natural invariância por translação,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[-\alpha(x + a)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-\alpha x^2). \quad (2.36)$$

Generalizando para o caso tridimensional,

$$K_{\text{Livre}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \left[\frac{m}{2\pi i\hbar(t - t_0)}\right]^{3/2} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{t - t_0}\right]. \quad (2.37)$$

Portanto, temos o propagador para a partícula livre em uma dimensão (2.34) e em três dimensões (2.37).

## 2.2.2 Propriedades do propagador livre

O propagador é uma ferramenta fundamental do formalismo integral da mecânica quântica, entretanto, é potencialmente complicado obter sua forma geral para os sistemas físicos. Para uma compreensão mais concreta, investigaremos seu resultado explícito para uma partícula livre (Eq. (2.34)), pois este é um dos poucos casos que podem ser tratados

analiticamente. Veremos também que o movimento quântico de uma partícula livre já é muito mais complicado que o movimento clássico onde tal partícula simplesmente se propaga de maneira retilínea e com velocidade constante.

Considerando um movimento quântico que ocorre a partir das coordenadas iniciais  $(x', t')$  até as coordenadas finais  $(x, t)$ , escrevemos o propagador livre

$$K_{\text{Livre}}(x, t; x', t') = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t')}} \exp \left[ \frac{im}{2\hbar} \frac{(x - x')^2}{(t - t')} \right]. \quad (2.38)$$

Para fins de simplificação de análise, omitiremos alguns passos descritos mais detalhadamente no Apêndice A.1. Com isso, podemos escrever as partes  $\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x, t; x', t')]$  e  $\text{Im}[K_{\text{Livre}}(x, t; x', t')]$  como:

$$\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x, t; x', t')] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar (t - t')}} \left[ \sin \left( \frac{m(x - x')^2}{2\hbar(t - t')} \right) + \cos \left( \frac{m(x - x')^2}{2\hbar(t - t')} \right) \right], \quad (2.39)$$

$$\text{Im}[K_{\text{Livre}}(x, t; x', t')] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar (t - t')}} \left[ \sin \left( \frac{m(x - x')^2}{2\hbar(t - t')} \right) - \cos \left( \frac{m(x - x')^2}{2\hbar(t - t')} \right) \right]. \quad (2.40)$$

Escolhendo  $x' = t' = 0$  para simplificarmos a análise e considerando valores de  $x$  pequenos, a amplitude depende do quadrado da distância da origem. Além disso, soluções para o movimento de partículas expressas na forma (2.38) têm algumas similaridades com as soluções que ocorrem em processos aleatórios, como a **difusão** (SCHRECK, 2018). Neste contexto, são válidas as equações de Fick e a equação de continuidade. Em três dimensões espaciais, essas equações são escritas na forma

$$\mathbf{j} = -D \nabla n, \quad (2.41)$$

$$0 = \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}, \quad (2.42)$$

onde  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$  é a densidade do fluxo de partículas,  $n = n(\mathbf{x}, t)$  é a densidade de partículas e  $D$  é a constante de difusão. A relação (2.41) expressa uma distribuição não-homogênea de partículas, que produz sempre um fluxo de partículas da região de maior densidade para a região de uma densidade menor. O gradiente aponta na direção da inclinação máxima, mas a direção do fluxo aponta da região da maior densidade para a região de menor densidade. Já a Eq. (2.42) representa a conservação do número de partículas. Calculando o divergente da primeira equação e inserindo o resultado na segunda, encontramos a equação da difusão

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n = D \Delta n. \quad (2.43)$$

Considerando o problema unidimensional onde temos um pico de partículas na coordenada espacial  $x' = 0$  representando a condição inicial no instante  $t' = 0$ , ou seja, para  $n(x, t) =$

$\delta(x)$ , a equação da difusão tem como solução

$$n(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right). \quad (2.44)$$

Note que a Eq. (2.44) corresponde a uma distribuição de delta de Dirac se  $\sigma = \sqrt{2Dt} \mapsto 0$ . Isso faz sentido, dado que a densidade de partículas deve corresponder a distribuição de Dirac para o limite  $t \rightarrow 0$ . Já para  $t > 0$ , a Eq. (2.44) comporta-se como uma Gaussiana, com que vale o seguinte processo limite:

$$\delta(\xi) \equiv \lim_{\sigma \rightarrow 0} f_\sigma(\xi), \quad f_\sigma(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2.45)$$

Para ilustrar este comportamento usaremos a Fig. 2.1, onde  $\{f_\sigma(\xi)\}$  com  $\sigma, \xi \in \mathbb{R}$  é um conjunto ilimitado de funções Gaussianas em termos da variável  $\xi$ .

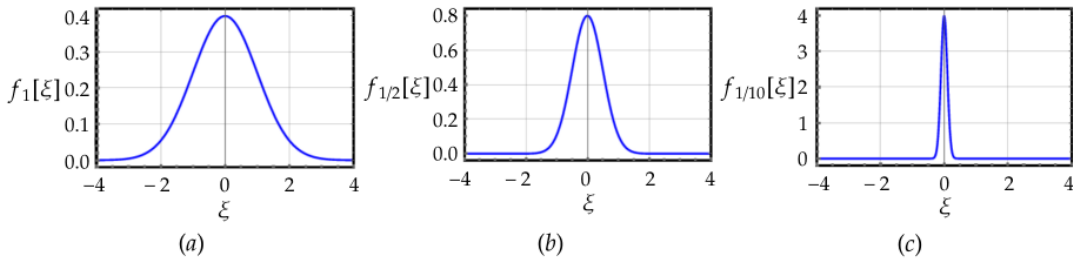


Figura 2.1 – Distribuição Gaussiana da Eq. (2.45) para  $\sigma = \{1, 1/2, 1/10\}$ . Vemos que a largura do pico decresce ao passo que a altura aumenta.

A medida que  $t$  aumenta, a altura na coordenada  $x = 0$  diminui, ao passo que a largura do grafo da função aumenta. Isso mostra que as partículas movem-se da origem para fora, caracterizando um comportamento conhecido como processo de difusão.

Cabe destacar que o resultado da Eq. (2.44) tem uma forma similar ao propagador  $K_{\text{Livre}}(x, t; 0, 0)$ . Ao comparar as soluções, o movimento quântico corresponde a uma difusão com uma “constante de difusão” imaginária  $D = \hbar/(2im)$ . Para um gás ideal a constante de difusão é proporcional ao produto do comprimento médio de propagação livre  $l$  e a velocidade média  $v$  das moléculas. Portanto, uma constante de difusão grande significa que as partículas podem alcançar uma distância grande do ponto inicial antes de uma colisão.  $D$  depende da constante de Planck  $\hbar$  e da massa  $m$ . A constante de difusão na mecânica quântica aumenta quando  $m$  diminui, porque objetos quânticos leves podem alcançar distâncias da fonte maiores que objetos quânticos pesados. Além disso, no limite clássico  $\hbar \rightarrow 0$ , a constante de difusão tende a zero, visto que a difusão é causada somente pelas leis quânticas e não tem uma origem clássica. Então, o movimento quântico tem tanto aspectos análogos ao movimento de ondas clássicas quanto um comportamento aleatório análogo ao da difusão (conectado à propriedade de probabilidade). Estes aspectos são

encontrados no propagador livre, que realizam o movimento quântico ser mais diversificado e complicado que o movimento clássico.

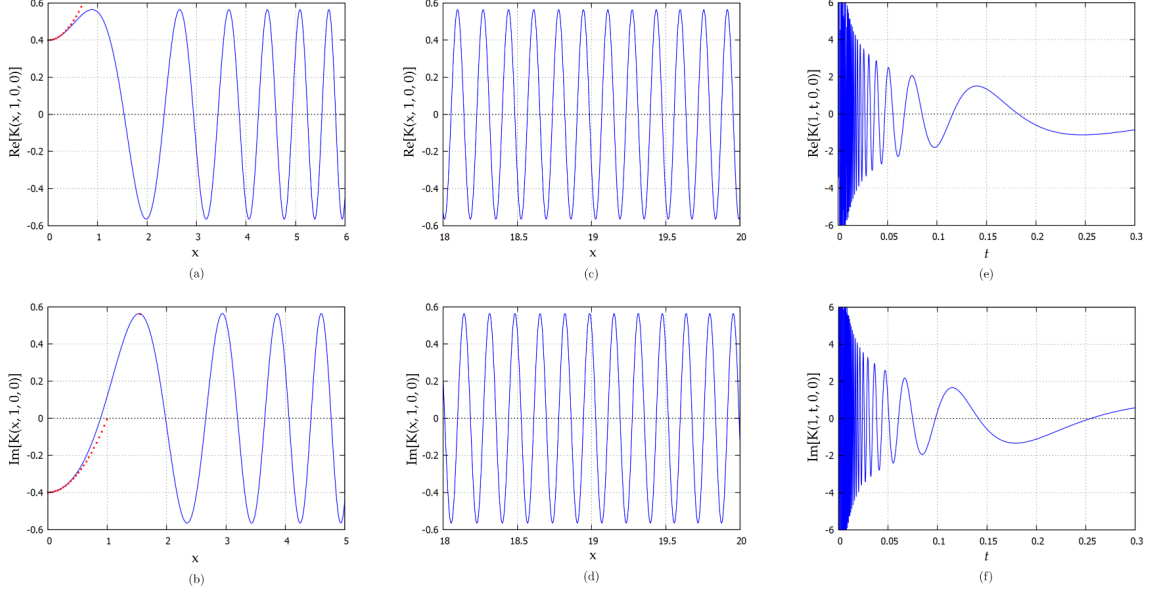


Figura 2.2 – Gráficos do propagador livre da Eq. (2.34) para  $m/(2\hbar) = 1$  onde tratamos  $x, t$  como variáveis adimensionais. (a) Parte real para  $x$  pequeno. (b) Parte imaginária para  $x$  pequeno. (c) Parte real para  $x$  grande. (d) Parte imaginária para  $x$  grande. (e) Parte real para  $t$  pequeno. (f) Parte imaginária para  $t$  pequeno. Aproximações de ordens quadráticas são ilustradas em vermelho.

Na Fig. 2.2-(a) e (b) percebemos um comportamento simétrico em relação ao eixo  $x$  que tende para um perfil periódico a partir de um certo valor. Na Fig. 2.2-(c) e (d) notamos também um perfil periódico e simétrico em relação ao eixo  $x$ . Já na Fig. 2.2-(e) e (f) os gráficos descrevem como o propagador muda no tempo para uma posição fixa  $x = 1$ . Neste caso, percebemos um comportamento parecido com um hiperbólico, mas que tem um perfil de  $1/\sqrt{t}$ . A exponencial é reprimida para tempos suficientemente grandes e o propagador tende a zero, análogo a uma oscilação rápida com amortecimento.

As raízes, máximos e mínimos da  $\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x, t; x', t')]$  e  $\text{Im}[K_{\text{Livre}}(x, t; x', t')]$  estão discutidas em mais detalhes no Apêndice A.1. Para acharmos as raízes  $x_i$  da parte real e  $\tilde{x}_i$  da parte imaginária de acima, escrevemos

$$\text{Re}[K(x_i, t_0)] = 0 \implies \sin\left(\frac{mx_i^2}{2\hbar t_0}\right) = -\cos\left(\frac{mx_i^2}{2\hbar t_0}\right), \quad (2.46)$$

$$\text{Im}[K(\tilde{x}_i, t_0)] = 0 \implies \sin\left(\frac{m\tilde{x}_i^2}{2\hbar t_0}\right) = \cos\left(\frac{m\tilde{x}_i^2}{2\hbar t_0}\right). \quad (2.47)$$

Então, as raízes são dadas por

$$\frac{mx_i^2}{2\hbar t_0} = \left(\frac{3}{4} + i\right)\pi \implies x_i = \pm\sqrt{\frac{2\hbar t_0}{m}\left(\frac{3}{4} + i\right)\pi}, \quad (2.48)$$



$$\frac{m\tilde{x}_i^2}{2\hbar t_0} = \left(\frac{1}{4} + i\right)\pi \implies \tilde{x}_i = \pm\sqrt{\frac{2\hbar t_0}{m}\left(\frac{1}{4} + i\right)}\pi. \quad (2.49)$$

Os mínimos  $\hat{x}_i$  e os máximos  $\check{x}_i$  são determinados a partir das primeiras derivadas:

$$\frac{d \operatorname{Re} [K(\hat{x}_i, t_0)]}{d\hat{x}_i} = 0 \implies \sin\left(\frac{m\hat{x}_i^2}{2\hbar t_0}\right) = \cos\left(\frac{m\hat{x}_i^2}{2\hbar t_0}\right), \quad (2.50)$$

$$\frac{d \operatorname{Im} [K(\check{x}_i, t_0)]}{d\check{x}_i} = 0 \implies \sin\left(\frac{m\check{x}_i^2}{2\hbar t_0}\right) = -\cos\left(\frac{m\check{x}_i^2}{2\hbar t_0}\right). \quad (2.51)$$

com que

$$\frac{m\hat{x}_i^2}{2\hbar t_0} = \left(\frac{3}{4} + i\right)\pi \implies \hat{x}_i = \pm\sqrt{\frac{2\hbar t_0}{m}\left(\frac{3}{4} + i\right)}\pi, \quad (2.52)$$

$$\frac{m\check{x}_i^2}{2\hbar t_0} = \left(\frac{1}{4} + i\right)\pi \implies \check{x}_i = \pm\sqrt{\frac{2\hbar t_0}{m}\left(\frac{1}{4} + i\right)}\pi. \quad (2.53)$$

As raízes  $t_i$  da parte real  $\tilde{t}_i$  da parte imaginária são obtidas a partir

$$\operatorname{Re} [K(x_0, t_i)] = 0 \implies \sin\left(\frac{mx_0^2}{2\hbar t_i}\right) = -\cos\left(\frac{mx_0^2}{2\hbar t_i}\right), \quad (2.54)$$

$$\operatorname{Im} [K(x_0, \tilde{t}_i)] = 0 \implies \sin\left(\frac{m\tilde{x}_0^2}{2\hbar \tilde{t}_i}\right) = \cos\left(\frac{mx_0^2}{2\hbar \tilde{t}_i}\right). \quad (2.55)$$

com que

$$t_i = \frac{mx_0^2}{2\hbar(3/4 + i)\pi}, \quad (2.56)$$

$$\tilde{t}_i = \frac{mx_0^2}{2\hbar(1/4 + i)\pi}. \quad (2.57)$$

Os mínimos da parte real seguem da primeira derivada:

$$\frac{d \operatorname{Re} [K(x_0, \hat{t}_i)]}{d\hat{t}_i} = 0, \quad \zeta = \frac{mx_0^2}{2\hbar \hat{t}_i}, \quad (2.58)$$

que leva à seguinte equação:

$$0 = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t^3}} \left[ \sin\left(\frac{\zeta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\zeta}{2}\right) \right] + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t}} \left[ \cos\left(\frac{\zeta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\zeta}{2}\right) \right] \left(-\frac{\zeta}{2t}\right), \quad (2.59)$$

$$0 = -\sin\left(\frac{\zeta}{2}\right)(\zeta - 1) - \cos\left(\frac{\zeta}{2}\right)(\zeta + 1), \quad (2.60)$$

$$0 = \tan\left(\frac{\zeta}{2}\right) = \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}. \quad (2.61)$$

A equação anterior tem um número ilimitado de soluções, mas não é possível resolver analiticamente. Considerando as primeiras três soluções numéricas  $\zeta_{1,2,3}$  podemos escrever os primeiros três mínimos da forma

$$\hat{t}_{1,2,3} = \frac{mx_0^2}{2\hbar\zeta_{1,2,3}}. \quad (2.62)$$

Os mínimos a parte imaginária são obtidos a partir de

$$\frac{d \operatorname{Im} [K(x_0, \check{t}_i)]}{d\check{t}_i} = 0, \quad \xi = \frac{mx_0^2}{2\hbar\check{t}_i}, \quad (2.63)$$

resultando na seguinte equação:

$$0 = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t^3}} \left[ \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t}} \left[ \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \left(-\frac{\xi}{2t}\right), \quad (2.64)$$

$$0 = -\sin\left(\frac{\xi}{2}\right) (1 + \xi) + \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) (1 - \xi), \quad (2.65)$$

$$0 = \tan\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}. \quad (2.66)$$

A equação anterior também tem um número ilimitado de soluções, não sendo possível resolvê-la analiticamente. Considerando as primeiras três soluções numéricas  $\xi_{1,2,3}$  podemos escrever os primeiros três mínimos da forma

$$\hat{t}_{1,2,3} = \frac{mx_0^2}{2\hbar\xi_{1,2,3}}. \quad (2.67)$$

## 2.3 Experiência de fenda única e da fenda dupla

As experiências de fenda única e da fenda dupla desempenham um papel imprescindível no desenvolvimento das leis cinemáticas da mecânica quântica (Seção 2.1). Estas experiências têm um arranjo composto por:

1. Uma fonte de partículas,
2. Um anteparo opaco com duas fendas (em que cada uma destas pode ser bloqueada) de comprimento  $d$  separadas pela distância  $D$ ,
3. Com detectores atrás do anteparo detectando as partículas em posições específicas.

A Fig. 2.3 ilustra a estrutura básica de execução deste experimento.

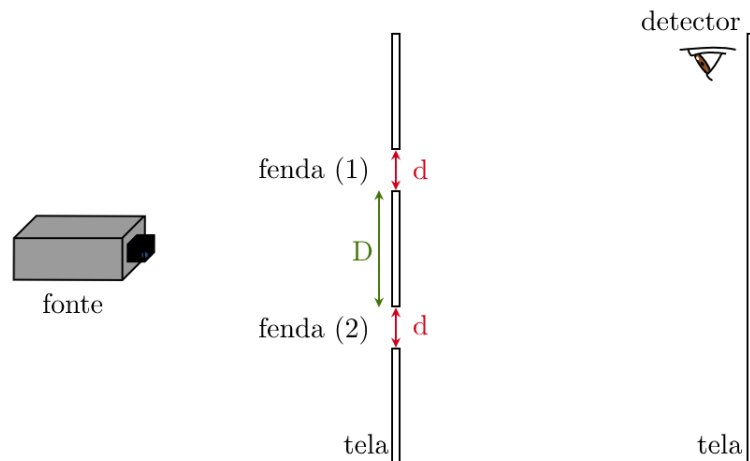


Figura 2.3 – Princípio da experiência da fenda dupla. Adaptado de (SCHRECK, 2018).

### 2.3.1 Partículas clássicas

Em primeira instância, consideraremos o arranjo de experimento proposto na Fig. 2.3 e a realização deste com partículas clássicas. Quando a fenda (1) está aberta, o uso dos detectores permite observar uma distribuição de partículas. O centro desta distribuição é localizado exatamente atrás da fenda (1) e tem um comprimento da ordem de  $d$  (vide Fig. 2.4-(a)). O mesmo efeito pode ser observado se ao invés de abrirmos a fenda (1), abrirmos a fenda (2) (vide Fig. 2.4-(b)). Já quando ambas as fendas são abertas, a distribuição de partículas resultante é a soma das distribuições individuais de cada fenda e os centros das distribuições individuais estão separados por uma distância  $D$  (vide Fig. 2.4-(c)).

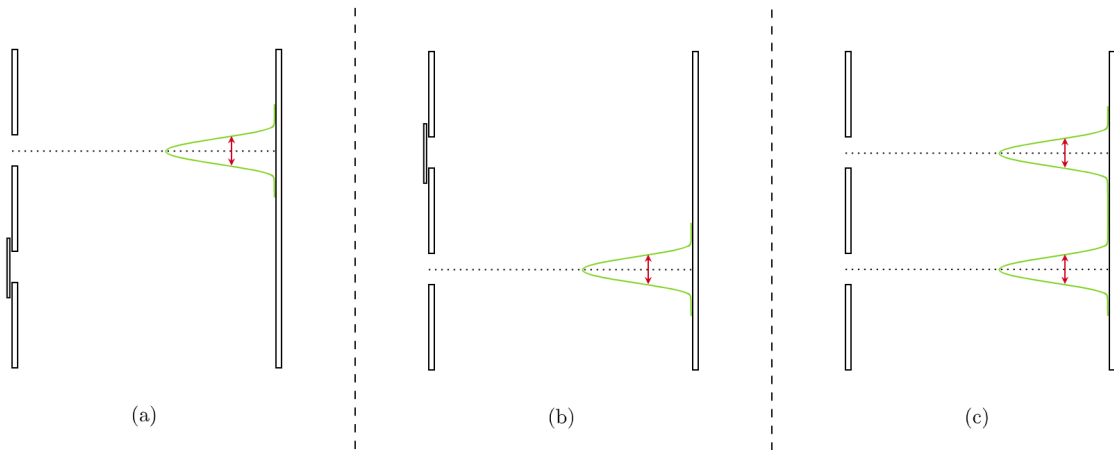


Figura 2.4 – Resultados da experiência para partículas clássicas com (a) a primeira fenda aberta (b) a segunda fenda aberta e (c) com às duas fendas abertas. Adaptado de (SCHRECK, 2018).

Se o experimento é realizado com partículas de energias distintas, os mesmos resultados são obtidos. Podem existir pequenas diferenças nas extensões das distribuições, mas este ponto não é essencial neste contexto. Os resultados anteriores, de um ponto de vista da mecânica clássica, fazem sentido. Isso porque cada partícula clássica segue uma trajetória retilínea, havendo correspondência direta entre a posição final de cada partícula e suas condições iniciais. Podemos interpretar as distribuições de intensidade (de partículas) no anteparo como distribuições que fornecem a probabilidade relativa de uma partícula chegar num ponto especial no anteparo. A única origem de casualidade na teoria clássica simplesmente são as condições iniciais de cada partícula que não podem ser conhecidas. Além disso, os eventos que correspondem à detecção de uma partícula devem ser interpretados considerando a detecção ou não detecção dela, ou seja, uma meia partícula nunca é detectada, dado que as partículas são objetos não-divisíveis.

### 2.3.2 Ondas clássicas

Agora repetindo o experimento com ondas clássicas ao invés de partículas, o comportamento é mais complicado e depende do comprimento de onda  $\lambda$ . Se  $\lambda \ll d$  e  $\lambda \ll D$  a energia medida pelo detector (depositada no detector de uma maneira contínua em comparação aos eventos discretos observados) é distribuída do mesmo jeito como para partículas clássicas. A única diferença é que os eventos detectados para as ondas não são discretos. A amplitude da onda pode ter um valor arbitrário. O detector é sensível à energia incidente pela onda e a energia é proporcional ao quadrado da amplitude.

Consideremos um exemplo particular de ondas clássicas: luz monocromática. Uma onda eletromagnética plana na eletrodinâmica clássica que se move ao longo do eixo  $z$ , é descrita por um vetor campo elétrico. O último é ortogonal à direção de propagação da

onda

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} E_x(\mathbf{r}, t) \\ E_y(\mathbf{r}, t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.68)$$

com

$$E_x(\mathbf{r}, t) = E_x^0 \cos(kz - \omega t + \alpha_x), \quad (2.69)$$

$$E_y(\mathbf{r}, t) = E_y^0 \cos(kz - \omega t + \alpha_y), \quad (2.70)$$

em que  $k = 2\pi/\lambda$  e  $\omega = 2\pi/T$  são os números de onda e a frequência angular da luz, respectivamente. As variáveis  $\alpha_x$  e  $\alpha_y$  determinam a fase da cada componente da onda para  $z = t = 0$ . As equações de Maxwell dizem que o campo magnético é ortogonal tanto ao campo elétrico como à direção de propagação

$$c\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.71)$$

e a energia total da onda por unidade de volume

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)^2}{\mu_0} \right), \\ \epsilon &= \frac{\epsilon_0}{2} \left( \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)^2}{\epsilon_0 \mu_0} \right), \\ \epsilon &= \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)^2, \end{aligned} \quad (2.72)$$

é proporcional ao quadrado da amplitude da onda. Usaremos o campo elétrico na notação complexa por conveniência. Então, definindo o vetor complexo

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\mathbf{r}, t) &= \begin{pmatrix} \tilde{E}_x(\mathbf{r}, t) \\ \tilde{E}_y(\mathbf{r}, t) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{E}(\mathbf{r}, t) &= \begin{pmatrix} \tilde{E}_x^0 \exp(i\alpha_x) \\ \tilde{E}_y^0 \exp(i\alpha_y) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

as componentes reais do campo elétrico são:

$$E_x(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \tilde{E}_x \exp[i(kz - \omega t)] \right\}, \quad (2.74)$$

$$E_y(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \tilde{E}_y \exp[i(kz - \omega t)] \right\}. \quad (2.75)$$

Estes vetores complexos (que às vezes são chamados de fasores) simplesmente são convenientes na física clássica para obter as fases relativas de duas ou mais ondas no mesmo ponto. Além disso, permitem o cálculo da intensidade total da onda efetuando uma superposição

das ondas. A situação difere na mecânica quântica. Descobriremos que estas grandezas complexas são proporcionais às grandezas fundamentais utilizadas para formular a teoria.

Se  $d$  ou  $D$  são reduzidos, o padrão de interferência muda qualitativamente. Considerando o caso em que  $D \gg \lambda$  e  $d \mapsto \lambda$ , nestas condições as intensidades individuais atrás das fendas (1) ou (2) terão seu comprimento expandido no anteparo e se tornarão maiores que  $d$ . Além disso, a intensidade da luz oscila e forma faixas circulares no anteparo, com um centro luminoso (ponto de incidência) e uma intensidade decrescendo fora do centro, como observado na Fig. 2.5-(a), em razão do fenômeno de difração. Uma explicação mais intuitiva para este efeito é que, na compreensão da propagação de ondas desenvolvida por Huygens, a frente de onda é composta de uma superposição de ondas esféricas emitidas a partir de uma distribuição de fontes. Neste caso, uma frente de onda plana que se move num meio uniforme mantém a sua forma durante a propagação. Encontrando uma fenda grande em comparação a  $\lambda$ , a propagação da onda não é afetada (a menos por alguns efeitos de borda). No outro lado, se encontra uma fenda cujo tamanho é comparável a  $\lambda$ , a onda propaga como uma onda esférica e a intensidade expande. A intensidade oscila fora do centro luminoso devido à interferência destrutiva de partes diferentes da frente de onda. Abrindo-se as duas fendas, o padrão de interferência é a soma dos padrões de interferência individuais (vide Fig. 2.5-(b)).

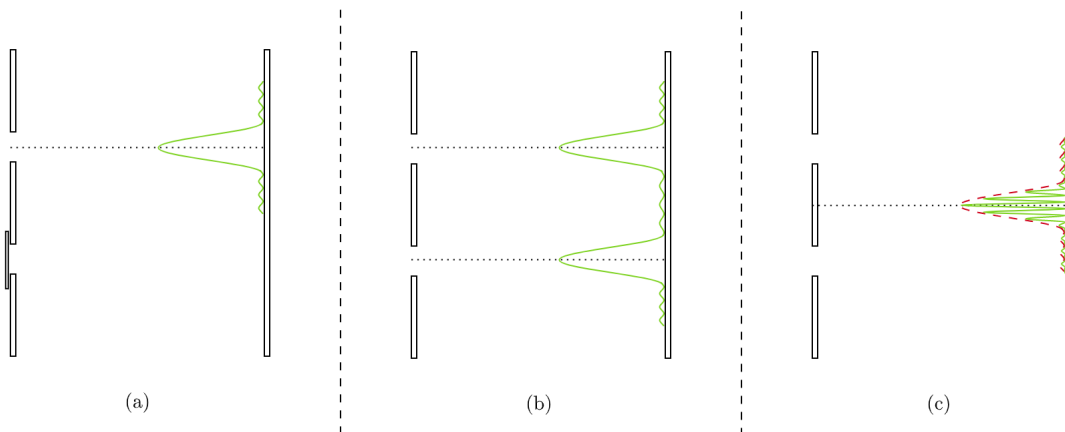


Figura 2.5 – Experiência da fenda dupla para ondas clássicas com (a) a primeira fenda aberta (b) as duas fendas abertas com  $D \gg \lambda$  e (c) as duas fendas abertas com  $D \sim \lambda$ . Retirado de (SCHRECK, 2018).

Já no caso em que  $D \mapsto \lambda$  e  $d \mapsto \lambda$ , os padrões de interferência para cada uma das fendas não mudam. Isso se dá porque somente o comprimento  $d$  desempenha um papel para uma única fenda. Porém, o padrão de interferência inteiro (para ambas as fendas abertas) não é a soma das intensidades de cada fenda. Na verdade, a intensidade oscila como uma função da distância  $Y$  do eixo óptico ao longo do anteparo final de uma maneira que pode ser calculada de forma geométrica, usando o comprimento de onda. Este fenômeno é chamado de interferência e a origem dele é que as ondas propagando-se a partir das duas

fendas se sobrepõem. Uma interferência deste tipo é possível quando a fase relativa das ondas encontrando as fendas é constante. Pode se observar que a interferência entre as frentes de onda origina-se das bordas da região que separa as duas fendas. Compreendemos estes fenômenos em termos da superposição de ondas cuja superposição fornece os padrões de interferência complicados.

### 2.3.3 Objetos quânticos

Nesta seção, será efetuado o mesmo experimento anterior, porém agora usando objetos quânticos, que obedecem às leis da cinemática quântica (vide Seção 2.1). Neste caso, os resultados têm um pouco de similaridade com aspectos tanto de partículas quanto de ondas clássicas. É claro que as leis clássicas devem ser um limite das previsões da teoria quântica para condições particulares. Esta relação superficial com alguns resultados da física clássica é a origem da terminologia dualidade onda-partícula. Nos próximos tópicos, serão descritos os efeitos utilizando somente conceitos quânticos.

#### 2.3.3.1 Experimento de fenda única

Nesta parte, avaliamos a física do experimento de uma fenda. Neste caso, existem diferenças interessantes das ondas e partículas clássicas. Considere o problema da distribuição de intensidade atrás da fenda.

No limite clássico, os resultados dos experimentos usando objetos quânticos com uma fenda aberta são os mesmos que para partículas clássicas num limite especial ligado ao comprimento da fenda  $d$ . Obtemos também uma distribuição no anteparo final análogo ao medido para partículas clássicas, quando o momento  $p$  das partículas é aumentado para que  $p > h/d$  com uma constante  $h$  (vide as Fig. 2.4-(a), Fig. 2.4-(b)), onde ela relaciona o momento ao inverso da distância com unidade de energia $\times$ tempo. Deve-se salientar que não existe uma grandeza análoga a esta na física clássica. Entretanto, uma grandeza com espaço significativo na mecânica quântica avançada é a **ação**. A constante  $h$  é conhecida como **constante de Planck**. Existe também uma **constante reduzida de Planck** que é predominantemente utilizada na física teórica:  $\hbar = h/(2\pi)$ . Em termos de  $\hbar$  o limite de resultados clássicos na experiência de uma fenda com objetos quânticos é expressido pela condição  $p > h/d$ .

Já no limite quântico, se a largura da fenda for diminuída, o comportamento dos objetos quânticos no anteparo muda. Ao invés de uma distribuição clássica de partículas, é observado um padrão de interferência no regime  $p < h/d$ . No desenvolvimento da mecânica quântica, o conde francês De Broglie descobriu que se obtém o argumento correto para a distribuição de interferência no anteparo, imaginando que a partícula é uma “onda” que possui um comprimento de onda  $\lambda = h/p$ , que é o **comprimento de onda de De Broglie** na mecânica quântica.

### 2.3.3.2 A discreteza de eventos observados

Os objetos quânticos são similares a partículas clássicas, pois o detector os vê como objetos individuais e discretos. Se decrescemos a intensidade da fonte de objetos quânticos, o detector irá identificar eventos de maneira individual, e cada evento fornece a mesma quantidade de energia ao detector. Esta é a razão pela qual abandonamos o termo “objetos quânticos” e vamos simplesmente chamar de “partículas”, como na mecânica clássica. Em se tratando de eventos individuais no detector, objetos quânticos aparecem como partículas e não como ondas. E se decrescemos a intensidade da fonte de ondas, a energia incidente no detector é reduzida continuamente. Isso não acontece para objetos quânticos.

A palavra “partícula” na mecânica quântica deve incluir as propriedades de *não-divisibilidade* e *discreteza*, sendo normalmente associadas a uma partícula clássica, sem as implicações correspondentes da física clássica, tal como a existência de um caminho definitivo no espaço de uma partícula se movendo. Mas, o conceito de uma trajetória clássica da partícula é perdido, porque a distribuição de intensidade no anteparo para uma fenda única se expande quando o comprimento da fenda diminui.

### 2.3.3.3 Probabilidade na mecânica quântica

Há um aspecto a mais nos resultados do experimento de uma fenda para objetos quânticos quando a fenda é diminuída, implicando diretamente nas noções de probabilidade e determinismo. Uma distribuição de probabilidade na mecânica clássica é interpretada como uma incoerência nas condições de movimento de partículas perfeitamente deterministas. Esta está relacionada as condições iniciais ou as forças externas entre fonte e detector. Sabendo estes efeitos para cada partícula, poderíamos calcular todas as trajetórias para as partículas usando as leis Newtonianas. Neste caso, não haveria um problema de probabilidades, pois a abordagem seria totalmente determinística. Estreitando a fenda, as condições iniciais tornam-se idênticas às condições clássicas. Estas condições deveriam fornecer resultados idênticos num movimento determinístico. Porém, os resultados observados são opostos aos esperados. Podemos imaginar as partículas chegando uma depois da outra. A primeira partícula chega numa posição no anteparo que parece ser casual. Pois, outra partícula aparece numa posição diferente, sem uma correlação entre estes eventos. Condições idênticas não fornecem resultados idênticos na mecânica quântica. A probabilidade na mecânica quântica é uma *propriedade intrínseca* da teoria e não somente uma consequência da nossa desinformação.

Considerando partículas clássicas de um dado tamanho, imagine que inicialmente façamos que todas as partículas sejam direcionadas para uma fenda. Assim temos, uma distribuição de partículas ao chegarem no anteparo. Diminuindo o tamanho da fenda, a extensão desta distribuição é a mesma que o comprimento dela, até que o comprimento da fenda corresponda ao tamanho da partícula. Portanto, as partículas não podem mais



passar pela fenda neste ponto. O que acontece com os objetos quânticos é muito diferente. Quando a fenda é grande, as partículas quânticas produzem um centro com o mesmo tamanho da fenda. Contudo, decrescendo o tamanho da fenda, a extensão da distribuição de probabilidade aumenta continuamente e a intensidade diminui. Além disso, anéis formam-se com oscilações na distribuição de intensidade fora do centro. É claro que este comportamento é similar ao padrão de interferência na difração de ondas descrito antes. Porém, note que é oposto à expectativa se a probabilidade representasse a incoerência das condições iniciais. Portanto, a probabilidade na mecânica quântica deve ser interpretada como um conceito fundamental que não depende da nossa compreensão da natureza de probabilidade na mecânica clássica.

Os resultados do experimento de uma fenda possui duas consequências importantes:

1. A teoria quântica somente poderá prever probabilidades, sendo assim, a probabilidade é evidentemente o conceito principal da mecânica quântica. No formalismo da teoria pode-se definir a ideia de probabilidade indiretamente em termos dos axiomas da teoria de probabilidades.
2. Para obter os resultados de situações relevantes, devemos tratar o formalismo da casualidade normal sob condições iniciais. Portanto, sob tais condições, devemos compreender que a ideia de probabilidade não é idêntica à sua compreensão numa teoria clássica.

#### 2.3.4 Experimento da fenda dupla

Agora consideraremos a experiência da fenda dupla. Com ambas as fendas abertas, para as partículas com momentos  $p > h/d$ , o padrão de interferência é a soma dos padrões para cada fenda individual, assim como para uma partícula clássica (vide a Fig. 2.4-(c)). Quando o momento das partículas é diminuído, para estarmos no limite oposto, ou seja,  $p < h/d$ , obtemos um padrão de intensidade tal como para uma onda clássica com máximos e mínimos de intensidade (vide a Fig. 2.5-(c)). Esta observação é interpretada como dualidade onda-partícula. Entretanto, é assertivo afirmar que objetos quânticos são partículas cujas leis de movimento fornecem fenômenos que são equivalentes à interferência de ondas clássicas, embora seu comportamento seja similar, mas não idêntico.

1. Abrindo a segunda fenda, a intensidade dos objetos quânticos em alguns pontos decresce, enquanto em outros pontos a intensidade se anula. Para partículas clássicas não observamos este comportamento.
2. A interferência de ondas clássicas requer que ambas as ondas estejam na mesma posição em simultâneo, para que a interferência possa ocorrer. Porém, repetindo o experimento com intensidades pequenas da fonte ao ponto de não existir mais de

uma partícula entre a fonte e o detector por algum período, o padrão de interferência persiste após coletar dados suficientes para ser gerado (ilustrado na Fig. 2.6).

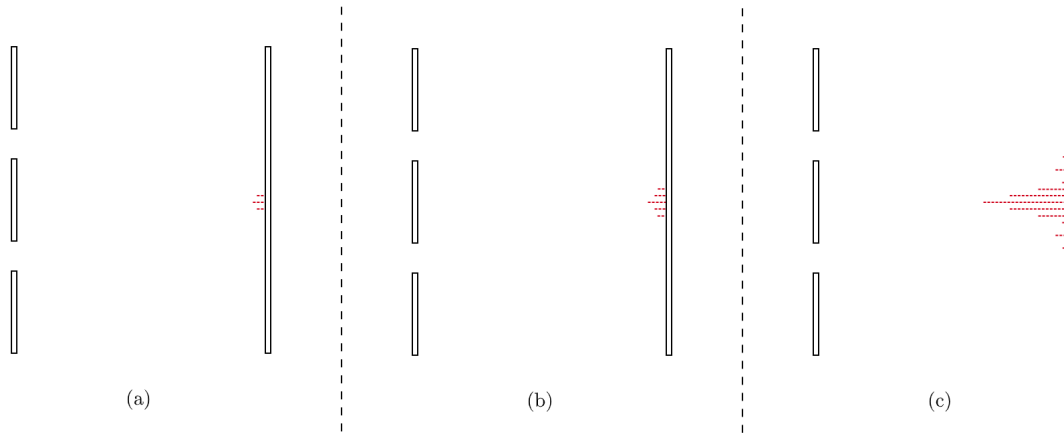


Figura 2.6 – Contando eventos individuais na experiência da fenda dupla (com uma fonte da densidade baixa) (a) depois de um tempo curto (b) depois de um tempo médio e (c) depois de um tempo longo. Retirado de (SCHRECK, 2018).

### 2.3.5 Caminhos e amplitudes

Sabemos que a discretização dos objetos quânticos nos revela que não podemos compreender a interferência de uma maneira análoga à física clássica. Portanto, não se deve interpretar a interferência em frentes de onda, como para uma onda clássica, mas como **possibilidades** ou **caminhos** alternativos disponíveis para a partícula. Chamaremos estes caminhos de **amplitudes**. Para descrever a interferência é conveniente representar as amplitudes como números complexos no formalismo da teoria. Além disso, a distribuição de probabilidade será calculada em termos da norma quadrada da amplitude.

Na mecânica clássica, os dois caminhos acessíveis para as partículas devem ser considerados como **possibilidades distinguíveis**. As partículas ou vão para uma fenda particular ou outra. Mas, se pudéssemos classificar todas as partículas (independente da fenda que escolhessem) e se não existissem forças entre elas, a distribuição de intensidade no anteparo seria igual à soma das distribuições de intensidade causadas pelas fendas individuais, como nas Fig. 2.4-(a) e 2.4-(b). Portanto, o resultado do experimento deve ser interpretado com a partícula realizando o oposto do esperado classicamente. Outra possibilidade seria que as partículas passem pelas duas fendas, se dividam e uma metade passa pela primeira fenda e a outra metade pela segunda fenda. Porém, esta interpretação danifica a natureza discreta do objeto quântico, evidenciando que, nem a descrição de ondas clássicas, nem a descrição de partículas pode explicar os resultados. Então, não há uma dualidade onda-partícula e estas duas abordagens não podem explicar os resultados dos experimentos. Ao invés disso, introduziremos o conceito quântico de **possibilidades não-distinguíveis** que deve ser incorporado nas leis fundamentais da mecânica quântica.

### 2.3.6 Observação da fenda escolhida pela partícula

Existe um fato curioso relacionado ao experimento da fenda dupla: não podemos dizer onde uma partícula arbitrária chega no anteparo, mas talvez pelo menos consigamos observar por qual fenda a partícula passou através de um experimento adicional. Então, consideremos o caso onde as partículas passando pelas fendas têm carga elétrica para poderem ser detectadas por espalhamento de luz, onde essa fonte de luz é monocromática e a luz incide diretamente nas fendas (NUSSENZVEIG, 2014). Além disso, precisamos de detectores de luz com uma resolução espacial e temporal precisa para analisar onde foi a origem da luz espalhada e quando chegou (vide a Fig. 2.7). Esta configuração possibilitará deduzir por qual fenda a partícula passou e quando. Se adaptarmos a intensidade da fonte para que o detector identifique um raio de luz quando uma partícula passa por uma das fendas, também ajustamos a intensidade da fonte para que cada partícula que passe pelas fendas possa ser contada individualmente.

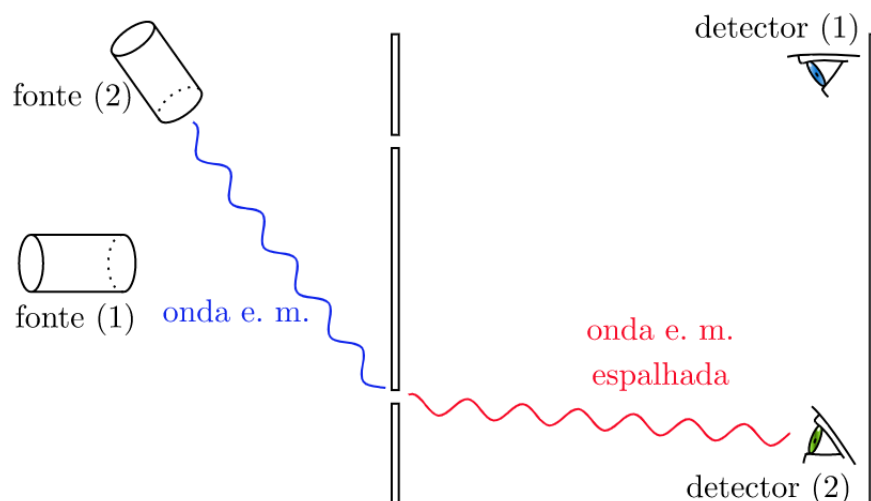


Figura 2.7 – Instalando uma segunda fonte de ondas eletromagnéticas (e.m.) para detectar qual fenda e escolhida pelo objeto quântico. Uma segunda detector é necessário para observar as ondas eletromagnéticas espalhadas perto de uma das duas fendas. Adaptado de (SCHRECK, 2018).

Refazendo o experimento da fenda dupla nestas condições, cada raio de luz espalhado e detectado é associado com uma partícula detectada no anteparo. Os eventos associados a este experimento podem ser organizados em duas classes, a primeira sendo associada a uma partícula que passa pela primeira fenda e a outra considerando partículas a passar pela outra fenda. As distribuições serão as mesmas para o caso da experiência de uma fenda única (veja Fig. 2.4-(a)). Considerando a superposição dos eventos, a distribuição muda, pois não observamos as partículas nas fendas. O padrão de interferência desaparece

e será dado soma dos padrões de intensidade das fendas individuais no anteparo (Fig. 2.4-(c)).

Os resultados do experimento da fenda dupla para partículas clássicas não geram mais uma interferência, o que não é um resultado surpreendente da perspectiva clássica. É claro que a luz interage com as partículas carregadas e esta interação pode destruir a diferença de fases entre os dois caminhos e a interferência. Então, deve-se salientar que não é possível efetuar um experimento onde a perturbação da luz possa ser negligenciada, para não destruir o padrão de interferência e ainda descobrir por qual fenda a partícula passou. A razão que justifica isso é que um objeto que pode interagir com as partículas deve também obedecer às leis da mecânica quântica.

Outra alternativa possível seria reduzir a intensidade da fonte de luz, e assim, decrescer a perturbação da luz na partícula. Esta se fundamenta na suposição da luz ser descrita por uma onda clássica e que uma redução da intensidade da fonte de luz corresponde a uma redução da amplitude de onda. Porém, a luz obedece às leis da mecânica quântica e pode comportar-se como uma partícula (fóton). Por isso, uma redução da intensidade da luz somente reduz o número dos fótons incidindo nas partículas, isto é, não reduz a transferência de momento causada pelo fóton interagindo com a partícula. E se reduzirmos o número de fótons incidindo, as partículas que atravessam as fendas não irão passar pelo processo de espalhamento para que um fóton chegue no detector de luz. Somente para esta classe de eventos o padrão de interferência surge novamente e o padrão de intensidade no anteparo é uma combinação entre o padrão de interferência e o padrão de partículas clássicas para eventos com fótons detectados (vide Fig. 2.8).

Para diminuir a perturbação de partículas uma alternativa possível é decrescer o momento dos fótons, mas isso também não funciona, porque o caminho dos fótons deve se restringir a um tamanho que tem que ser menor que a distância de separação  $D$  entre as fendas para poder ser observada qual das fendas foi escolhida pela partícula. Entretanto, isto somente acontece quando o momento satisfaz a  $p > h/D$ , que corresponde a um comprimento de onda de De Broglie  $\lambda < D$ . O comprimento de onda deve ser menor que o tamanho do objeto. Quando o momento é diminuído, chegamos ao regime  $p < h/D$ , que corresponde a um comprimento de onda de De Broglie  $\lambda > D$ . Neste caso, o comprimento de onda do fóton incidente é suficientemente grande para sabermos qual fenda foi escolhida pelo objeto quântico. Dado que  $\lambda > D$ , o fóton pode interagir com a partícula independentemente da fenda escolhida pela partícula e o detector irá identificar um raio de luz, mas não pode distinguir por qual fenda passou. Depois deste experimento, obtém-se o mesmo resultado que num experimento sem luz detectada (padrão de interferência) vide Fig. 2.5-(c). Esta condição não depende das propriedades específicas do fóton, antes, porém, da relação de De Broglie entre o momento do fóton e seu comprimento de onda que fornece um limite superior à resolução espacial possível. Dado que a relação de De Broglie

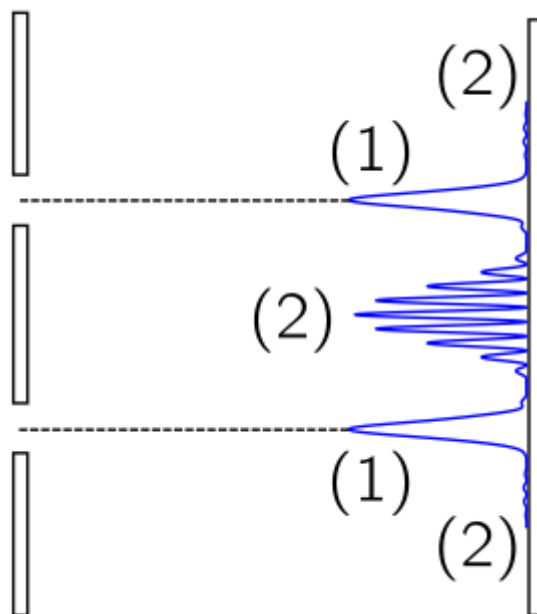


Figura 2.8 – Soma de distribuições clássicas (para classe 1: partículas observadas) e de um padrão de interferência (para classe 2: partículas não-observadas). Retirado de (SCHRECK, 2018).

é a mesma para todas as partículas, esta limitação é válida para partículas alternativas além de fótons.

Neste contexto, o princípio de incerteza de Heisenberg pode ser formulado como um processo que pode escolher possibilidades múltiplas para ocorrer, e se uma medição é efetuada, o padrão de interferência deixa de ser uma possível alternativa. Deve-se salientar que as regras de mecânica quântica devem incorporar esta condição para concordar com o experimento. Destes resultados podemos concluir como se pode combinar amplitudes na mecânica quântica. A regra obtida deste experimento é que as alternativas diferentes que podem fornecer o evento final são *não-distinguíveis*, por isso, temos que adicionar as amplitudes como efetuado para ondas clássicas. Depois precisamos calcular a norma quadrada desta amplitude para obter a probabilidade. Por outro lado, se as alternativas são *distinguíveis*, temos que adicionar as probabilidades diretamente, obedecendo às leis da cinemática quântica (Seção 2.1). Outros experimentos mostram que este comportamento é o mesmo para todas as partículas observadas (NUSSENZVEIG, 2014). Portanto, deve ser uma das propriedades gerais para o movimento na mecânica quântica sendo regido pelas leis da cinemática quântica.

## 2.4 Propagação da partícula livre pela fenda dupla

Nesta seção, serão apresentados os resultados da propagação de uma partícula livre no contexto do experimento da fenda dupla. Os detalhes de obtenção destes resultados

encontra-se descritos no Apêndice A.2.1. Então, considerando a amplitude de propagação da partícula livre com massa  $m$  descrita na expressão (2.34), encontramos o propagador

$$K(x, t; x', t') = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t-t')}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{(x-x')^2}{(t-t')}\right]. \quad (2.76)$$

Considerando a distância de separação entre as fendas igual a  $D$ , o comprimento da fenda  $d$  e a fonte sendo pontual a função de onda se comporta como uma distribuição delta de Dirac, portanto

$$\psi(x', 0) = \delta(x'). \quad (2.77)$$

O esquema que ilustra a construção do experimento, bem como possibilidades de propagação está ilustrado na Fig. A.4 do Apêndice A.2.1.

Usando a lei (4) da cinemática quântica para obter a função de onda no anteparo final (vide Seção 2.1), encontramos as seguintes amplitudes

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}(x, T) &= K(x, T; 0, 0) \\ &= K\left(x, T; \frac{D}{2}, T_1\right) K\left(\frac{D}{2}, T_1; 0, 0\right), \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} \psi^{(2)}(x, T) &= K(x, T; 0, 0) \\ &= K\left(x, T; -\frac{D}{2}, T_1\right) K\left(-\frac{D}{2}, T_1; 0, 0\right). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Usando a lei (3) da cinemática quântica para caminhos não-distinguíveis, a amplitude será a soma das amplitudes individuais de cada caminho. Obtemos

$$\psi(x, T) = \psi^{(1)}(x, T) + \psi^{(2)}(x, T), \quad (2.80)$$

e usando os resultados das equações (2.78) e (2.79), conseguimos

$$\psi(x, T) = K\left(x, T; \frac{D}{2}, T_1\right) K\left(\frac{D}{2}, T_1; 0, 0\right) + K\left(x, T; -\frac{D}{2}, T_1\right) K\left(-\frac{D}{2}, T_1; 0, 0\right), \quad (2.81)$$

que é a função de onda total no anteparo final, onde  $T = T_1 + T_2$ . Calculando os propagadores, temos:

$$K\left(x, T; \frac{D}{2}, T_1\right) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T_2}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{\left(x - \frac{D}{2}\right)^2}{T_2}\right], \quad (2.82a)$$

$$K\left(\frac{D}{2}, T_1; 0, 0\right) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T_1}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{T_1}\right], \quad (2.82b)$$

$$K\left(x, T; -\frac{D}{2}, T_1\right) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T_2}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{\left(x + \frac{D}{2}\right)^2}{T_2}\right], \quad (2.83a)$$

$$K\left(-\frac{D}{2}, T_1; 0, 0\right) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T_1}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{T_1}\right]. \quad (2.83b)$$

Substituindo os propagadores na função de onda, temos:

$$\begin{aligned} \psi(x, T) = & \left\{ \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T_2}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{\left(x - \frac{D}{2}\right)^2}{T_2}\right] \right\} \left\{ \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T_1}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{T_1}\right] \right\} \\ & + \left\{ \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T_2}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{\left(x + \frac{D}{2}\right)^2}{T_2}\right] \right\} \left\{ \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T_1}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{T_1}\right] \right\}, \quad (2.84) \end{aligned}$$

resultando em:

$$\begin{aligned} \psi(x, T) = \frac{m}{ih\sqrt{T_1 T_2}} \left\{ \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m(x - D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1}\right)\right] \right. \\ \left. + \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m(x + D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1}\right)\right] \right\}. \quad (2.85) \end{aligned}$$

Usando  $\psi(x, T)$  podemos obter explicitamente a norma quadrada da amplitude  $|\psi(x, T)|^2$ , temos

$$\begin{aligned} |\psi(x, T)|^2 &= \frac{m}{h^2 T_1 T_2} \left| \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m(x - D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1}\right)\right] \right. \\ &+ \left. \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m(x + D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1}\right)\right] \right|^2, \\ &= \frac{m^2}{h^2 T_1 T_2} \left( 2 + 2 \cos \left\{ \frac{m}{2\hbar T_2} \left[ \left(x - \frac{D}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 \right] \right\} \right), \quad (2.86) \end{aligned}$$

$$|\psi(x, T)|^2 = \frac{m^2}{h^2 T_1 T_2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{mD}{\hbar T_2} x\right) \right]. \quad (2.87)$$

O resultado da Eq. (2.87) representa o padrão de interferência da partícula livre para a experiência da fenda dupla com fendas pontuais. É uma função caracterizada por máximos e mínimos iguais a zero. Portanto, a ocorrência de interferência entre as amplitudes dos dois caminhos não-distinguíveis é óbvia. Este padrão de interferência não possui um envelope, visto que as fendas são consideradas pontuais. Além disso, o padrão de interferência torna-se mais complicado considerando uma extensão finita de cada fenda.

## 3 MODIFICAÇÕES NO PROPAGADOR NÃO-RELATIVÍSTICO

Neste capítulo, apresentamos o conceito de quebra de simetria de Lorentz e mostramos exemplos. Apresentamos as modificações no propagador não-relativístico introduzindo coeficientes de controle do tipo  $a$  que mudam a estrutura do propagador. Consideramos ainda a experiência da fenda dupla para este propagador modificado. Deve-se salientar que esta é a contribuição original deste trabalho.

### 3.1 Quebra de simetria de Lorentz

Na física, a simetria de um sistema físico é uma característica física ou matemática do sistema que é preservada ou permanece inalterada sob alguma transformação. Uma família de transformações específicas pode ser contínua ou discreta. A invariância de Lorentz é satisfeita quando as equações que descrevem um sistema físico não mudam sua forma sob alterações de coordenadas de um tipo particular (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1997; COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1998). Na relatividade restrita a covariância de Lorentz concorda com o requisito fundamental da teoria, que prevê que as leis físicas têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais (RESNICK, 1971).

#### 3.1.1 Espuma de espaço-tempo

O contínuo espaço-tempo como descrito por Einstein, já foi comprovado em vários experimentos, e pesquisas teóricas indicam que ele é formado por uma estrutura menor. Em escalas de comprimento perto ao comprimento de Planck poderiam existir minúsculas flutuações de curvatura criadas e aniquiladas constantemente dando origem a uma espuma de espaço-tempo (estas flutuações formam uma espécie de estrutura quântica esponjosa, vide Fig. 3.1). Neste contexto, a gravitação não é descrita pelas leis clássicas, por estar em um regime quântico. Portanto, efeitos da mecânica quântica são fundamentais.

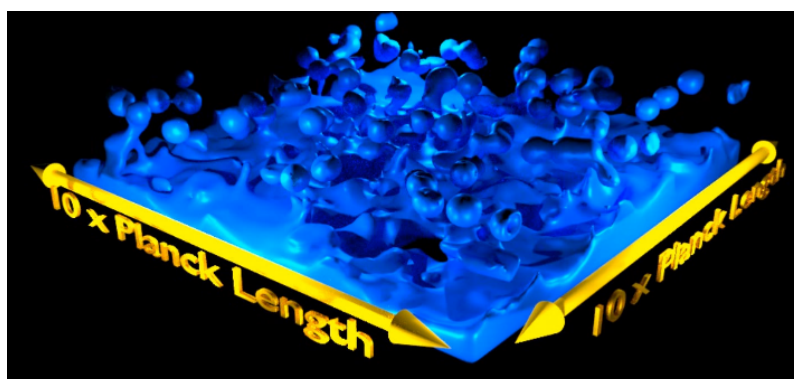


Figura 3.1 – Espuma de espaço-tempo.



Esperam-se que algumas grandezas características da relatividade restrita (curvatura do espaço-tempo, componentes do tensor de energia-momento) não sejam mais arbitrariamente bem determinadas, mas sejam caracterizadas por incertezas intrínsecas. Neste caso, existiriam flutuações da curvatura e das componentes do tensor de energia-momento. Estas dão origem na espuma quântica e representam instabilidades que fazem o espaço mudar sua forma a todo instante.

Considerando partículas com energias  $\ll E_{\text{Pl}}$  (a escala de energia de Planck) movendo-se pelo espaço-tempo, estes efeitos não são “visíveis” para a partícula. Enquanto para energias aproximando-se a  $E_{\text{Pl}}$ , o comprimento de onda de De Broglie da partícula decresce, favorecendo a observação de tais efeitos. Sendo assim, a forma das leis da física depende da energia e não é mantida implicando na quebra da simetria de Lorentz. Um problema associado a esta manifestação de efeitos da gravitação quântica é a extração de grandezas físicas mensuráveis em experimentos por se tratar de um modelo bem específico.

### 3.1.2 Campos de fundo

Campos de fundo são usados na construção de uma teoria efetiva descrevendo efeitos da quebra de Lorentz para energias  $\ll E_{\text{Pl}}$ . Tais campos de fundo se transformam como campos vetoriais e tensoriais por transformações de Lorentz das coordenadas, mas são fixos perante transformações de Lorentz de um experimento. Podemos representar um campo de fundo (vetorial) como um conjunto de setas de comprimentos e direções fixas (no espaço-tempo) (vide Fig. 3.2). Os comprimentos das setas são característicos para o tamanho da quebra de Lorentz e o campo de fundo próprio leva a direções privilegiadas no espaço-tempo. Formalmente, um campo de fundo envolve componentes chamadas coeficientes de controle na literatura ([VISSER, 1995](#); [KLINKHAMER](#); [RUPP, 2004](#); [BERNADOTTE](#); [KLINKHAMER, 2007](#); [SCHRECK](#); [SORBA](#); [THAMBYAHPILLAI, 2013](#)).



Figura 3.2 – Campo de fundo.

Considere dois experimentos se movendo com uma velocidade relativa constante  $v$  um com respeito ao outro. Na presença de um campo de fundo, os resultados dos dois experimentos não são conectados por um impulso como esperado. Considerando ainda dois experimentos englobando um ângulo constante, os resultados não são conectados por uma rotação como esperado.

Neste caso, a forma das leis da física é dependente da velocidade de um experimento bem como da orientação dele. O MPE envolve tais campos de fundo. As vantagens de tal descrição efetiva da quebra de Lorentz são que é modelo-independente e permite uma busca ampla de tais efeitos. Além disso, facilita a comparação de resultados de experimentos diferentes. Até agora a comunidade trabalhando no MPE conseguiu um conjunto extenso de limites nas componentes dos diversos campos de fundo (KOSTELECKÝ; RUSSELL, 2011; KOSTELECKÝ; RUSSELL, 2008). A Fig. 3.3 ilustra uma partícula se propagando num campo de fundo.

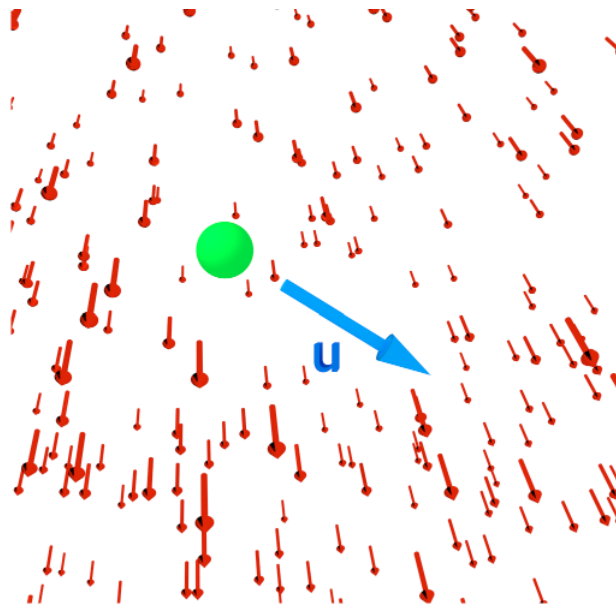


Figura 3.3 – Partícula se propagando num campo de fundo.

## 3.2 Propagador modificado

Um exemplo a considerar é uma partícula sujeita a uma quebra de Lorentz governada por coeficientes de controle particulares que são chamados  $a$  na literatura (vide Fig. 3.3). Esta escolha é razoável para uma investigação inicial, uma vez que a estrutura destas modificações é a mais simples de todos os termos do MPE. Partimos com a cinemática clássica descrita pela Lagrangiana (KOSTELECKÝ; RUSSELL, 2010)

$$\begin{aligned} L^{(a)} &= -m\sqrt{1 - \mathbf{v}^2} - (a_0 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}), \\ &\approx \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 - (a_0 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

no regime não-relativístico, em que  $m$  é a massa da partícula e  $\mathbf{v}$  sua velocidade. Além disso,  $a_0$  e  $\mathbf{a}$  são coeficientes de controle do tipo  $a$ . Trabalhamos em uma única dimensão espacial, com que  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = av$ , em que  $[a_0] = \text{J}$  e  $[a] = \text{J} \cdot \text{s/m}$ . A velocidade da partícula livre é constante. Portanto, a ação segue a partir de uma integral temporal simples:

$$\begin{aligned} S^{(a)} &= \int_{t'}^t d\tau L^{(a)}, \\ &= \frac{1}{2}mv^2(t-t') - (a_0 + av)(t-t'), \\ &= \frac{1}{2}m \frac{(x-x')^2}{(t-t')} - a_0(t-t') - a(x-x'). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Agora para um período de propagação infinitesimal  $\Delta t$  o propagador tem a forma

$$\tilde{K}^{(a)}(x, t' + \Delta t; x', t') = \sqrt{\frac{m}{i\hbar\Delta t}} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \frac{1}{2} \frac{m\Delta x^2}{\Delta t} - a_0\Delta t - a\Delta x \right) \right], \quad (3.3)$$

com  $\Delta x = x - x'$  e  $\Delta t = t - t'$ . O termo envolvendo  $a_0$  pode levar a um comportamento complicado, dado que depende do período  $\Delta t$  infinitesimal e quando  $\Delta t \rightarrow 0$  o propagador deve corresponder a uma distribuição de Dirac. Investigações mais avançadas são necessárias para demonstrar que esta propriedade é, de fato, satisfeita. Por isso, consideramos o caso  $a_0 \mapsto 0$ :

$$K^{(a)}(x, t' + \Delta t; x', t') = \sqrt{\frac{m}{i\hbar\Delta t}} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \frac{1}{2} \frac{m\Delta x^2}{\Delta t} - a\Delta x \right) \right]. \quad (3.4)$$

Neste ponto vale

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} K(x, t' + \Delta t; x', t') = \exp \left( -\frac{i}{\hbar} a\Delta x \right) \delta(x - x'), \quad (3.5)$$

utilizando:

$$\begin{aligned} \delta(\xi) &= \lim_{\kappa \rightarrow 0} g_\kappa(\xi), \\ g_\kappa(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi i\kappa}} \exp \left( i \frac{\xi^2}{2\kappa} \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde a Eq. (3.5) descreve o limite em que só há uma amplitude diferente de zero quando  $x'$  corresponde a  $x$ . Portanto, obtemos uma fase global em frente da função de Dirac, o que não muda esta última propriedade essencial do propagador. Completando o quadrado do argumento da exponencial:

$$\begin{aligned} K^{(a)}(x, t' + \Delta t; x', t') &= \sqrt{\frac{m}{i\hbar\Delta t}} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2\Delta t} \left( \Delta x^2 - \frac{2a}{m} \Delta t \Delta x \right) \right], \\ &= \sqrt{\frac{m}{i\hbar\Delta t}} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2\Delta t} \left( \Delta x - \frac{a}{m} \Delta t \right)^2 - \frac{i}{\hbar} \frac{a^2}{2m} \Delta t \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

No próximo passo é necessário calcular o propagador total:

$$\begin{aligned}
K_{\text{Livre}}^{(a)}(x, t; x', t') &= \prod_{i=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i K^{(a)}(x_{i+1}, t_i + \delta t; x_i, t_i), \\
&= \exp\left\{\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{a^2}{2m}\right)\right\} \left(\frac{m}{i\hbar\Delta t}\right)^{N/2} \\
&\times \prod_{i=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i \exp\left[\sum_{j=0}^{N-1} \frac{i}{\hbar} \frac{m(x_{j+1} - x_j - \frac{a}{m}\Delta t)^2}{2\Delta t}\right]. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Esta última sequência de integrais fornece

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^n \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i \exp\left[-\alpha \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i - \frac{a}{m}\Delta t)^2\right] \\
= \frac{(\pi/\alpha)^{n/2}}{\sqrt{n+1}} \exp\left[-\alpha \frac{(x_{n+1} - x_0 - \frac{a}{m}(n+1)\Delta t)^2}{n+1}\right]. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Utilizando a Eq. (3.9) para  $n = N - 1$  e  $\alpha = m/(2i\hbar\Delta t)$  temos

$$\begin{aligned}
K_{\text{Livre}}^{(a)}(x, t; x', t') &= \exp\left\{\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{a^2}{2m} N\Delta t\right)\right\} \left(\frac{m}{i\hbar\Delta t}\right)^{N/2} \left(\frac{i\hbar\Delta t}{m}\right)^{(n-1)/2} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left[\frac{1}{\hbar} \frac{m(x_N - x_0 - \frac{a}{m}N\Delta t)^2}{2N\Delta t}\right],
\end{aligned}$$

$$K_{\text{Livre}}^{(a)}(x, t; x', t') = \sqrt{\frac{m}{i\hbar(t-t')}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m(x - x' - \frac{a}{m}(t-t'))^2}{2(t-t')} - \frac{a^2}{2m}(t-t')\right)\right]. \quad (3.10)$$

A equação (3.10) é o propagador não-relativístico modificado com coeficientes de quebra de Lorentz do tipo  $a$  que será utilizado para estudarmos o experimento da fenda dupla posteriormente.

### 3.3 Padrão de Interferência Modificado

Nesta seção, apresentamos os resultados de aplicação do propagador modificado na experiência da fenda dupla. Deve-se ressaltar que os detalhes do procedimento estão descritos no Apêndice A.2.2. Considerando o propagador modificado obtido na seção anterior, podemos escrever:

$$K_{\text{Livre}}^{(a)}(x, t; x', t') = \sqrt{\frac{m}{i\hbar(t-t')}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m(x - x' - \frac{a}{m}(t-t'))^2}{2(t-t')} - \frac{a^2}{2m}(t-t')\right)\right]. \quad (3.11)$$

Considerando que tanto a fonte quanto as fendas sejam pontuais e a distância entre as duas fendas é  $D$ , como o ilustrado na Fig. A.4, usamos a lei (4) da cinemática quântica para obter a função de onda no anteparo final. Como os eventos são sucessivos, podemos

escrever

$$\psi^{(1)}(x, T) = K(x, T; 0, 0) = K\left(x, T; \frac{D}{2}, T_1\right) K\left(\frac{D}{2}, T_1; 0, 0\right), \quad (3.12a)$$

$$\psi^{(2)}(x, T) = K(x, T; 0, 0) = K\left(x, T; -\frac{D}{2}, T_1\right) K\left(-\frac{D}{2}, T_1; 0, 0\right). \quad (3.12b)$$

com

$$K\left(x, T; \frac{D}{2}, T_1\right) = \sqrt{\frac{m}{i\hbar T_2}} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m\left(x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_2\right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m}T_2 \right]}, \quad (3.13a)$$

$$K\left(\frac{D}{2}, T_1; 0, 0\right) = \sqrt{\frac{m}{i\hbar T_1}} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m\left(\frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_1\right)^2}{2T_1} - \frac{a^2}{2m}T_1 \right]}, \quad (3.13b)$$

$$K\left(x, T; -\frac{D}{2}, T_1\right) = \sqrt{\frac{m}{i\hbar T_2}} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m\left(x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_2\right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m}T_2 \right]}, \quad (3.13c)$$

$$K\left(-\frac{D}{2}, T_1; 0, 0\right) = \sqrt{\frac{m}{i\hbar T_1}} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m\left(-\frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_1\right)^2}{2T_1} - \frac{a^2}{2m}T_1 \right]}. \quad (3.13d)$$

Agora, recorreremos à lei (3) da cinemática quântica considerando que as partículas podem seguir dois caminhos não-distinguíveis,

$$\psi(x, T) = \psi^{(1)}(x, T) + \psi^{(2)}(x, T), \quad (3.14)$$

e usando as equações (3.12a) e (3.12b), bem como a definição do propagador, podemos encontrar a seguinte amplitude de probabilidade:

$$\begin{aligned} \psi(x, T) = \frac{m}{i\hbar\sqrt{T_1 T_2}} \left\{ \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m\left(\frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_1\right)^2}{2T_1} + \frac{m\left(x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_2\right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m}(T_1 + T_2) \right] \right\} \right. \\ \left. + \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m\left(-\frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_1\right)^2}{2T_1} + \frac{m\left(x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_2\right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m}(T_1 + T_2) \right] \right\} \right\}, \quad (3.15) \end{aligned}$$

Calculando a norma quadrada desta amplitude, podemos encontrar a função que descreve o padrão de interferência baseando-se no propagador modificado cuja expressão é dada por

$$|\psi(x, T)|^2 = \frac{2m^2}{\hbar^2 T_1 T_2} \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{mD}{\hbar T_2} x \right] \right\}. \quad (3.16)$$

Uma vez que o último resultado corresponde à Eq. (2.87), podemos deduzir que o padrão de interferência não é afetado pelos coeficientes do tipo  $a$ . Note que os coeficientes do tipo  $a$  podem ser removidos da densidade de Lagrange fermiônica do MPE por uma redefinição

dos campos (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1997; COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1998). Portanto, não podem conter informação física, e o resultado obtido corrobora com este fato e mostra que também vale na mecânica quântica não-relativística.

## 4 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Concluimos que o presente trabalho abordou conceitos fundamentais da mecânica quântica não-relativística, apresentando as leis da cinemática e dinâmica quântica. Foi usado o formalismo integral da Mecânica Quântica para descrever o movimento de uma partícula livre no contexto do experimento de uma e da fenda dupla, abordando as propriedades do propagador, bem como as observações feitas a partir destes experimentos, e as conclusões deduzidas sobre o comportamento desta. Foi incorporada uma possível manifestação da quebra da simetria de Lorentz parametrizada pelo Modelo Padrão Estendido (MPE). Este termo envolve parâmetros conhecidos como coeficientes do tipo  $a$  na literatura. Em particular, adaptamos a amplitude de propagação (o propagador) de um objeto quântico não-relativístico. Como resultado, obtivemos uma invariância no padrão de interferência para esta contribuição particular do MPE. Isso indica que a modificação investigada não pode conter informação física. Este resultado foi esperado, visto que os coeficientes do tipo  $a$  podem ser removidos do MPE por uma redefinição do campo fermiônico (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1997; COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1998). Portanto, o descobrimento feito mostra que este argumento também se aplica à mecânica quântica não-relativística.

Cabe citar que análises no contexto da mecânica quântica relativística convencional e da teoria quântica de campos em quatro dimensões vêm sendo realizadas em construção no MPE mínimo, que pode servir de base para estabelecer limites quantitativos na quebra das simetrias de Lorentz e de CPT (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1997). Os estudos sobre estabilidade e causalidade para teorias quânticas de campo, incorporando violação de Lorentz e CPT vem gerando resultados interessantes no contexto da mecânica quântica relativística (KOSTELECKÝ; LEHNERT, 2001).

A partir dos resultados obtidos, demonstrou-se a validade da aplicação para regimes não-relativísticos e no cenário de experiências de fendas. Vale a pena estender as considerações realizadas a contribuições mais complicadas do MPE, que não podem ser removidas por uma redefinição dos campos físicos, por exemplo, os coeficientes do tipo  $c$ . Porém, a obtenção do propagador modificado será bem mais desafiadora neste caso.

## REFERÊNCIAS

- AMELINO-CAMELIA, G. *et al.* The search for quantum gravity signals. In: AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS. **AIP Conference Proceedings**. [S.l.], 2005. v. 758, n. 1, p. 30–80.
- BASSALO, J. M. F. **Eletrodinâmica Quântica**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2006.
- BERGER, M.; KOSTELECKÝ, V. A. Supersymmetry and Lorentz violation. **Physical Review D**, APS, v. 65, n. 9, p. 091701, 2002.
- BERNADOTTE, S.; KLINKHAMER, F. R. Bounds on length-scales of classical spacetime foam models. **Phys. Rev. D**, v. 75, p. 024028, 2007.
- BOLOKHOV, P. A.; NIBBELINK, S. G.; POSPELOV, M. Lorentz-violating supersymmetric quantum electrodynamics. **Physical Review D**, APS, v. 72, n. 1, p. 015013, 2005.
- BONDER, Y.; SUDARSKY, D. Quantum gravity phenomenology without Lorentz invariance violation: a detailed proposal. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 25, n. 10, p. 105017, 2008.
- CARROLL, S. M. *et al.* Noncommutative field theory and Lorentz violation. **Physical Review Letters**, APS, v. 87, n. 14, p. 141601, 2001.
- COHEN-TANNOUJDI C. DIU, B.; LALOË, F. **QUANTUM MECHANICS: Basic Concepts, Tools, and Applications**. 2. ed. [S.l.]: Wiley-VCH, 2020.
- COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. CPT violation and the standard model. **Phys. Rev. D**, v. 55, p. 6760–6774, 1997.
- COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. CPT violation and the standard model. **Physical Review D**, APS, v. 55, n. 11, p. 6760, 1997.
- COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz-violating extension of the standard model. **Physical Review D**, APS, v. 58, n. 11, p. 116002, 1998.
- COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz-violating extension of the standard model. **Phys. Rev. D**, v. 58, p. 116002, 1998.
- COLLADAY, D.; MCDONALD, P. Classical Lagrangians for momentum dependent Lorentz violation. **Physical Review D**, APS, v. 85, n. 4, p. 044042, 2012.
- COWIE, L. L.; SONGAILA, A. The inconstant constant? **Nature**, Nature Publishing Group, v. 428, n. 6979, p. 132–133, 2004.
- DAVIES, P. C.; DAVIS, T. M.; LINEWEAVER, C. H. Black holes constrain varying constants. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 418, n. 6898, p. 602–603, 2002.
- DIRAC, P. A. M., 'The lagrangian in quantum mechanics', *phys. Zeit*, 1933.
- DUQUE, M. C. M. **Alguns métodos para o cálculo do propagador de Feynman**. [S.l.: s.n.], 2013.



- DVALI, G.; PUJOLAS, O.; REDI, M. Consistent Lorentz violation in flat and curved space. **Physical Review D**, APS, v. 76, n. 4, p. 044028, 2007.
- EDWARDS, B. R.; KOSTELECKÝ, V. A. Riemann–Finsler geometry and Lorentz-violating scalar fields. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 786, p. 319–326, 2018.
- FEYNMAN, R. P. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics. **Rev. Mod. Phys.**, v. 20, p. 367–387, 1948.
- FEYNMAN, R. P.; BROWN, L. M. **Feynman’s thesis: a new approach to quantum theory**. [S.l.]: World Scientific, 2005.
- FEYNMAN, R. P.; HIBBS, A. R.; STYER, D. F. **Quantum mechanics and path integrals**. [S.l.]: Courier Corporation, 2010.
- FOLDY, L. L.; WOUTHUYSEN, S. A. On the Dirac theory of spin 1/2 particle and its nonrelativistic limit. **Phys. Rev.**, v. 78, p. 29–36, 1950.
- GAMBINI, R.; PULLIN, J. Nonstandard optics from quantum space-time. **Physical Review D**, APS, v. 59, n. 12, p. 124021, 1999.
- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical Mechanics**. second. [S.l.]: Addison Wesley, 1980.
- GORBUNOV, D. S.; SIBIRYAKOV, S. M. Ultra-large distance modification of gravity from Lorentz symmetry breaking at the Planck scale. **Journal of High Energy Physics**, IOP Publishing, v. 2005, n. 09, p. 082, 2005.
- KLINKHAMER, F. R.; RUPP, C. Space-time foam, CPT anomaly, and photon propagation. **Phys. Rev. D**, v. 70, p. 045020, 2004.
- KOSTELECKÝ, V. A.; LEHNERT, R. Stability, causality, and Lorentz and CPT violation. **Physical Review D**, APS, v. 63, n. 6, p. 065008, 2001.
- KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Electrodynamics with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension. **Physical Review D**, APS, v. 80, n. 1, p. 015020, 2009.
- KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Neutrinos with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension. **Physical Review D**, APS, v. 85, n. 9, p. 096005, 2012.
- KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Fermions with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension. **Physical Review D**, APS, v. 88, n. 9, p. 096006, 2013.
- KOSTELECKÝ, V. A.; POTTING, R. CPT, strings, and meson factories. **Physical Review D**, APS, v. 51, n. 7, p. 3923, 1995.
- KOSTELECKÝ, V. A.; RUSSELL, N. Data Tables for Lorentz and CPT Violation. 1 2008. Versão 2022.
- KOSTELECKÝ, V. A.; RUSSELL, N. Classical kinematics for Lorentz violation. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 693, n. 4, p. 443–447, 2010.
- KOSTELECKÝ, V. A.; RUSSELL, N. Data Tables for Lorentz and CPT Violation. **Rev. Mod. Phys.**, v. 83, p. 11–31, 2011.

- KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory. **Physical Review D**, APS, v. 39, n. 2, p. 683, 1989.
- KOSTELECKÝ, V. A. Gravity, Lorentz violation, and the standard model. **Physical Review D**, v. 69, p. 105009, 2004.
- LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. **Mechanics**. [S.l.]: Pergamon Press, 1976. v. 1.
- LIBANOV, M. V.; RUBAKOV, V. A. More about spontaneous Lorentz violation and infrared modification of gravity. **Journal of High Energy Physics**, IOP Publishing, v. 2005, n. 08, p. 001, 2005.
- MOCIOIU, I.; POSPELOV, M.; ROIBAN, R. Low-energy limits on the antisymmetric tensor field background on the brane and on the non-commutative scale. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 489, n. 3-4, p. 390–396, 2000.
- MOTA, A. L. *et al.* Vórtices BPS na eletrodinâmica de Maxwell-Higgs com acoplamento não mínimo quebrando as simetrias de CPT e de Lorentz. Universidade Federal do Maranhão, 2014.
- NETO, j. B. **Teoria de Campos e a Natureza: Parte Quântica**. [S.l.]: Livraria da Física, 2017.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica: Ótica, relatividade, física quântica (vol. 4)**. [S.l.]: Editora Blucher, 2014.
- REIS, J. A. A. S.; SCHRECK, M. Leading-order classical Lagrangians for the nonminimal standard-model extension. **Physical Review D**, APS, v. 97, n. 6, p. 065019, 2018.
- REIS, J. A. A. S.; SCHRECK, M. Classical Lagrangians for the nonminimal spin-nondegenerate standard-model extension at higher orders in Lorentz violation. **Physical Review D**, APS, v. 103, n. 9, p. 095029, 2021.
- RESNICK, R. Introduction to special relativity. Wiley Estern Pvt. Ltd., New Delhi, 1971.
- RUSSELL, N. Finsler-like structures from Lorentz-breaking classical particles. **Physical Review D**, APS, v. 91, n. 4, p. 045008, 2015.
- SAKURAI, J.; NAPOLITANO, J. **Modern Quantum mechanics, 2: nd edition**. [S.l.: s.n.], 2011.
- SCHRECK, M. Classical Lagrangians and Finsler structures for the nonminimal fermion sector of the standard model extension. **Physical Review D**, APS, v. 93, n. 10, p. 105017, 2016.
- SCHRECK, M. **Notas de aulas de Mecânica Quântica I**. [S.l.]: no prelo, 2018.
- SCHRECK, M. Classical Lagrangians for the nonminimal standard-model extension at higher orders in Lorentz violation. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 793, p. 70–77, 2019.
- SCHRECK, M.; SORBA, F.; THAMBYAHPILLAI, S. Simple model of pointlike spacetime defects and implications for photon propagation. **Phys. Rev. D**, v. 88, n. 12, p. 125011, 2013.

SONGAILA, A.; COWIE, L. L. Fine-structure variable? **Nature**, Nature Publishing Group, v. 398, n. 6729, p. 667–668, 1999.

THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. [S.l.]: Cengage Learning, 2011.

VISSER, M. **Lorentzian wormholes: From Einstein to Hawking**. New York: Springer, 1995. ISBN 978-1-56396-653-8.

WEBB, J. *et al.* Further evidence for cosmological evolution of the fine structure constant. **Physical Review Letters**, APS, v. 87, n. 9, p. 091301, 2001.

# Apêndices

# APÊNDICE A – O PROPAGADOR NÃO-RELATIVÍSTICO

## A.1 Propriedades do Propagador Livre

Nesta seção, iremos investigar as propriedades do propagador livre (raízes, máximos e mínimos), com o objetivo de entender melhor sua estrutura. Considerando o resultado do propagador livre, escolheremos  $x' = t' = 0$  para simplificarmos a análise,

$$K_{\text{Livre}} = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar it}} \exp\left\{\left(\frac{i}{\hbar} \frac{mx^2}{2t}\right)\right\}. \quad (\text{A.1})$$

Inicialmente, iremos calcular o valor de  $\sqrt{i}$ , com o objetivo de separar a parte real da parte imaginária do propagador e investigar seu comportamento. Para tanto, consideremos um  $z \in \mathbb{C}$  da forma  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  e usaremos o Teorema de Moivre,

$$[\cos \theta + i \sin \theta]^{\frac{1}{n}} = \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad (\text{A.2})$$

com  $n, k \in \mathbb{Z}$ . Se atribuirmos os valores de  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e  $n = 2$  na Eq. (A.2), reproduziremos o caso que precisamos,

$$[\cos \theta + i \sin \theta]^{\frac{1}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right), \quad (\text{A.3})$$

logo:

$$\sqrt{i} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right). \quad (\text{A.4})$$

Usando as seguintes relações trigonométricas:

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A, \quad (\text{A.5})$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B. \quad (\text{A.6})$$

Aplicando as equações supracitadas,

$$\sqrt{i} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(k\pi) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(k\pi) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(k\pi) + i \sin(k\pi) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

obtemos que:

$$\sqrt{i} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i). \quad (\text{A.7})$$

Para escrever a  $\sqrt{i}$  de forma mais conveniente, multiplicaremos a Eq. (A.7) por  $(1 - i)$  no

numerador e no denominador, logo:

$$\begin{aligned}\sqrt{i} &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(1+1)}{(1-i)}, \\ &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{2}{(1-i)} = \pm \frac{\sqrt{2}}{(1-i)}.\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

Chegando ao seguinte resultado:

$$\sqrt{i} = \pm \frac{\sqrt{2}}{(1-i)}.\quad (\text{A.9})$$

Retomando a equação (A.1), podemos escrevê-la de modo a explicitar  $\sqrt{i}$ ,

$$K_{\text{Livre}}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{i}} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar t}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{mx^2}{2t}\right).\quad (\text{A.10})$$

Utilizando ainda a raiz positiva da equação (A.9) e a fórmula de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta,\quad (\text{A.11})$$

podemos escrever,

$$K_{\text{Livre}}(x, t) = \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar t}} \left[ \cos\left(\frac{mx^2}{2\hbar t}\right) + i \sin\left(\frac{mx^2}{2\hbar t}\right) \right],\quad (\text{A.12})$$

ou até:

$$\begin{aligned}K_{\text{Livre}}(x, t) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t}} \left[ \cos\left(\frac{mx^2}{2\hbar t}\right) + i \sin\left(\frac{mx^2}{2\hbar t}\right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t}} \left[ \sin\left(\frac{mx^2}{2\hbar t}\right) - i \cos\left(\frac{mx^2}{2\hbar t}\right) \right],\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned}K_{\text{Livre}}(x, t) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t}} \left[ \sin\left(\frac{mx^2}{2\hbar t}\right) + \cos\left(\frac{mx^2}{2\hbar t}\right) \right] \\ &\quad + i \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t}} \left[ \sin\left(\frac{mx^2}{2\hbar t}\right) - \cos\left(\frac{mx^2}{2\hbar t}\right) \right] \right\}.\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

E este resultado mostra que o propagador possui partes real e imaginária dadas por:

$$\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x, t)] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t}} \left[ \sin\left(\frac{mx^2}{2\hbar t}\right) + \cos\left(\frac{mx^2}{2\hbar t}\right) \right],\quad (\text{A.15})$$

$$\text{Im}[K_{\text{Livre}}(x, t)] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t}} \left[ \sin\left(\frac{mx^2}{2\hbar t}\right) - \cos\left(\frac{mx^2}{2\hbar t}\right) \right].\quad (\text{A.16})$$

Se consideramos o propagador como uma função de  $x$  onde  $t = t_0$  seja uma constante, podemos obter as raízes, os mínimos e os máximos de  $\text{Re} [K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$  e  $\text{Im} [K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$  para avaliar suas propriedades. Fazendo tais considerações, temos:

$$\text{Re} [K_{\text{Livre}}(x, t_0)] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t_0}} \left[ \sin \left( \frac{mx^2}{2\hbar t_0} \right) + \cos \left( \frac{mx^2}{2\hbar t_0} \right) \right], \quad (\text{A.17})$$

$$\text{Im} [K_{\text{Livre}}(x, t_0)] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t_0}} \left[ \sin \left( \frac{mx^2}{2\hbar t_0} \right) - \cos \left( \frac{mx^2}{2\hbar t_0} \right) \right]. \quad (\text{A.18})$$

### A.1.1 Raízes da $\text{Re} [K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$ e $\text{Im} [K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$

Para obter as raízes de  $\text{Re} [K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$ , considere:

$$\text{Re} [K_{\text{Livre}}(x, t_0)] = 0, \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t_0}} \left[ \sin \left( \frac{mx^2}{2\hbar t_0} \right) + \cos \left( \frac{mx^2}{2\hbar t_0} \right) \right] = 0, \quad (\text{A.20})$$

$$\sin \left( \frac{mx^2}{2\hbar t_0} \right) + \cos \left( \frac{mx^2}{2\hbar t_0} \right) = 0. \quad (\text{A.21})$$

Analisando a Eq. (A.21), devemos buscar soluções que a satisfaçam. Uma delas encontra-se no quadrante em que o  $\sin \theta = -\cos \theta$  (vide Fig. A.1-(a)),

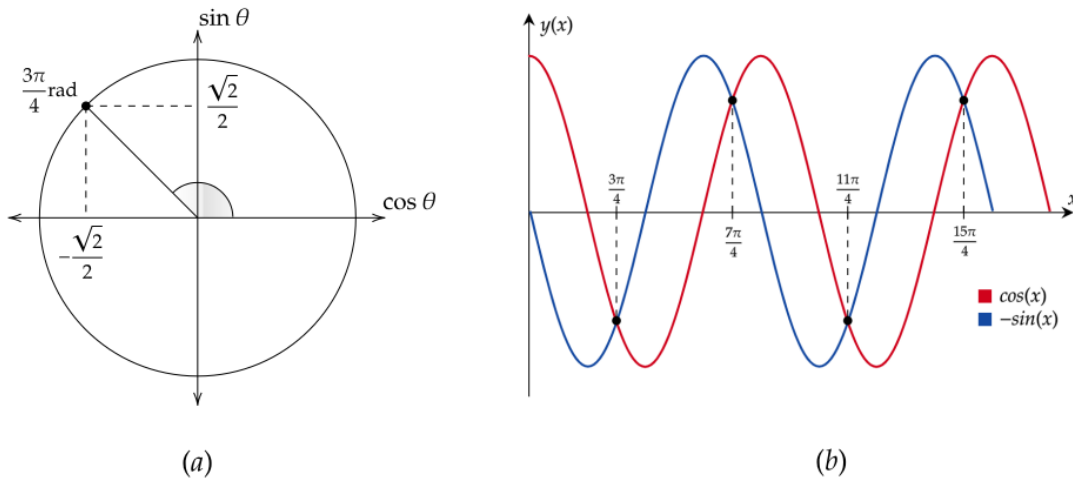


Figura A.1 – (a) Raízes do segundo quadrante da  $\text{Re} [K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$ . (b) Representação gráfica das funções  $-\sin x$  e  $\cos x$ .

Este caso trata-se do ângulo de  $135^\circ$  ( $\frac{3\pi}{4}$  rad), onde vemos que:

$$\sin \left( \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \cos \left( \frac{3\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (\text{A.22})$$

Fazendo o argumento do seno e do cosseno seja igual a  $\frac{3\pi}{4}$  e multiplicando por  $n$ , encontra-

mos:

$$\frac{mx_1^2}{2\hbar t_0} = \frac{3\pi n}{4} \implies x_1 = \pm \sqrt{\frac{3\pi n \hbar t_0}{2m}} \text{ para } n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.23})$$

Outras soluções possíveis são obtidas no quadrante onde  $\cos \theta = -\sin \theta$  (vide Fig. A.2-(b)),

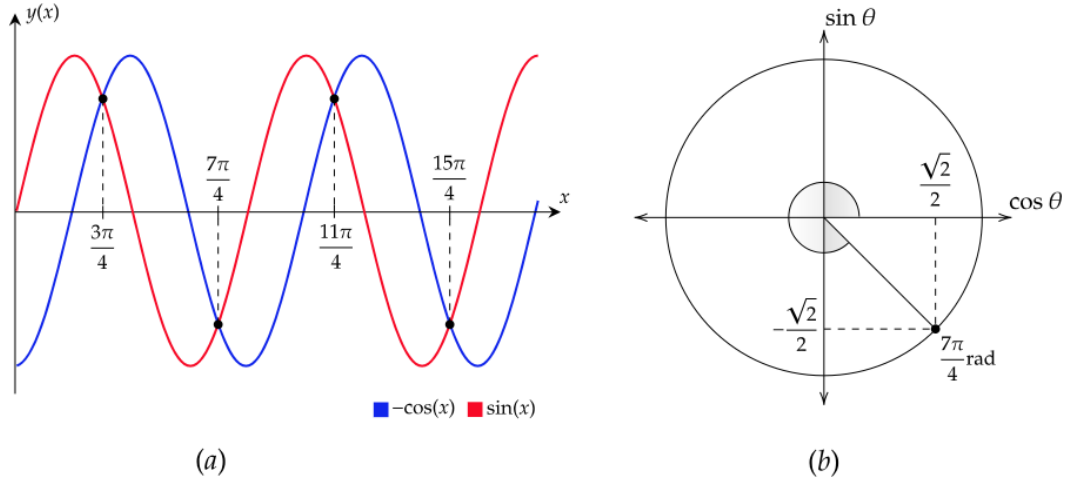


Figura A.2 – (a) Representação gráfica das funções  $\sin x$  e  $-\cos x$ . (b) Raízes do quarto quadrante da  $\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$ .

E neste caso, o ângulo em questão é  $315^\circ$  ( $\frac{7\pi}{4}$  rad),

$$\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (\text{A.24})$$

E fazendo o argumento do seno e do cosseno iguais a  $\frac{7\pi}{4}$  e multiplicando por  $n$ , teremos:

$$\frac{mx_2^2}{2\hbar t_0} = \frac{7\pi n}{4} \implies x_2 = \pm \sqrt{\frac{7\pi n \hbar t_0}{2m}} \text{ para } n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.25})$$



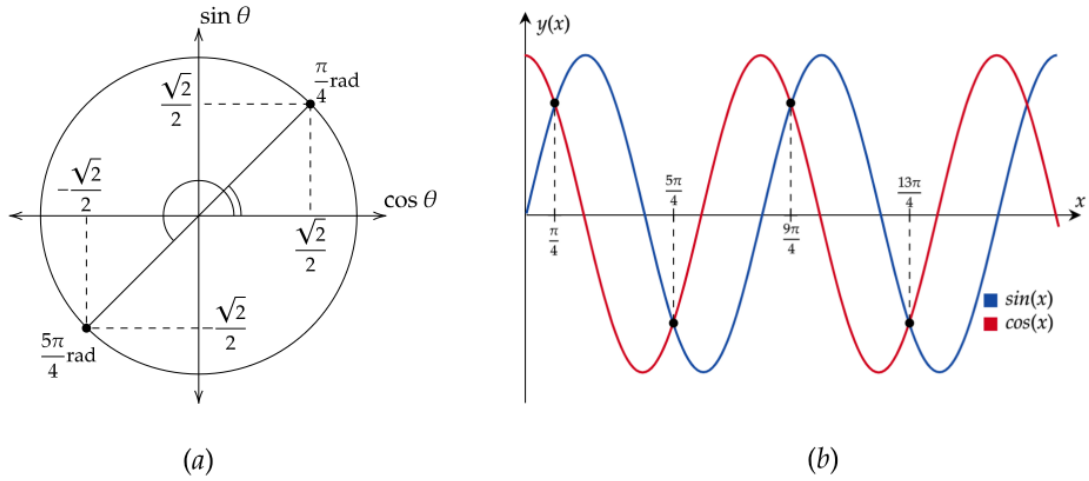


Figura A.3 – (a) Raízes do primeiro e terceiro quadrante da  $\text{Im}[K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$ . (b) Representação gráfica das funções  $\sin x$  e  $\cos x$ .

E a forma que temos de obter a generalização para as raízes, é analisar o gráfico das funções e propor uma fórmula que contemple os casos estudados anteriormente (vide Fig. A.3-(b)), ou seja,  $x_n = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$ , com  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Usando a expressão (A.21), teremos:

$$\frac{mx_n^2}{2\hbar t_0} = \frac{\pi}{4}(4n - 1) \implies x_n^2 = \frac{\pi\hbar t_0}{2m}(4n - 1), \quad (\text{A.26})$$

$$x_n = \pm \sqrt{\frac{\pi\hbar t_0}{2m}(4n - 1)}, \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.27})$$

E fazendo  $n \rightarrow n + 1$ , encontramos:

$$x_n = \pm \sqrt{\frac{2\pi\hbar t_0}{m}\left(n + \frac{3}{4}\right)}, \quad \text{com } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.28})$$

A Eq. (A.28) expressa as raízes da  $\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$ , e para a  $\text{Im}[K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$ , faremos o procedimento análogo ao da seção anterior, considerando:

$$\text{Im}[K_{\text{Livre}}(x, t_0)] = 0, \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t_0}} \left[ \sin\left(\frac{mx^2}{2\hbar t_0}\right) - \cos\left(\frac{mx^2}{2\hbar t_0}\right) \right] = 0, \quad (\text{A.30})$$

$$\sin\left(\frac{mx^2}{2\hbar t_0}\right) - \cos\left(\frac{mx^2}{2\hbar t_0}\right) = 0. \quad (\text{A.31})$$

Analisando a Eq.(A.31), vamos considerar o quadrante em que o  $\sin \theta = \cos \theta$  (vide Fig.

A.3-(a)), considerando o ângulo de  $45^\circ$  ( $\frac{\pi}{4}$  rad),

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (\text{A.32})$$

E fazendo o argumento do seno e do cosseno seja igual a  $\frac{\pi}{4}$  e multiplicando por  $n$ , encontramos:

$$\frac{mx_1^2}{2\hbar t_0} = \frac{\pi n}{4} \implies x_1 = \pm \sqrt{\frac{\pi n \hbar t_0}{2m}} \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.33})$$

Outras soluções possíveis são obtidas onde o valor do seno e cosseno são negativos (vide Fig. A.3-(a)), para tanto, consideraremos  $225^\circ$  ( $\frac{5\pi}{4}$  rad),

$$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (\text{A.34})$$

E por fim, com o argumento do seno e do cosseno igual a  $\frac{5\pi}{4}$  e multiplicando por  $n$ , teremos:

$$\frac{mx_2^2}{2\hbar t_0} = \frac{\pi n}{4} \implies x_2 = \pm \sqrt{\frac{5\pi n \hbar t_0}{2m}} \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.35})$$

E de maneira similar a seção passada, através da análise do gráfico das funções podemos propor uma generalização (vide Fig. A.3-(b)), ou seja,  $x_n = \frac{\pi}{4}(4n+1)$ , com  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . E usando a expressão (A.31), teremos:

$$\frac{mx_n^2}{2\hbar t_0} = \frac{\pi}{4}(4n+1) \implies x_n^2 = \frac{\pi \hbar t_0}{2m}(4n+1), \quad (\text{A.36})$$

$$x_n = \pm \sqrt{\frac{\pi \hbar t_0}{2m}(4n+1)}, \quad (\text{A.37})$$

ou até:

$$x_n = \pm \sqrt{\frac{2\pi \hbar t_0}{m}\left(n + \frac{1}{4}\right)}, \quad \text{com } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.38})$$

### A.1.2 Máximos e Mínimos da $\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$ e $\text{Im}[K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$

Para obter os máximos e mínimos associados a  $\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$  e  $\text{Im}[K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$ , devemos derivar as funções e igualar a zero. Portanto, teremos que para a parte real:

$$\frac{d\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x, t_0)]}{dx} = \frac{mx}{2\hbar t_0} \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t_0}} \left[ \cos\left(\frac{mx^2}{2\hbar t_0}\right) - \sin\left(\frac{mx^2}{2\hbar t_0}\right) \right] = 0. \quad (\text{A.39})$$

Analisando a igualdade anterior, teremos que ou o primeiro termo será nulo, ou o segundo, de modo que

$$\frac{mx}{2\hbar t_0} \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t_0}} = 0 \implies x = 0. \quad (\text{solução trivial}) \quad (\text{A.40})$$

Ou até:

$$\cos\left(\frac{mx^2}{2\hbar t_0}\right) - \sin\left(\frac{mx^2}{2\hbar t_0}\right) = 0. \quad (\text{A.41})$$

E esta análise é análoga à realizada para as raízes, portanto resulta em:

$$x_n = \pm \sqrt{\frac{2\pi\hbar t_0}{m} \left(n + \frac{3}{4}\right)}, \text{ com } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.42})$$

que são os pontos em que a derivada é identicamente nula. Vamos verificar agora os valores máximos e mínimos da função, substituindo o valor de  $x$  em  $\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$ . Portanto, teremos:

$$\begin{aligned} \text{Re}[K_{\text{Livre}}(x_n, t_0)] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t_0}} \left\{ \sin \left[ \frac{m}{2\hbar t_0} \left( \sqrt{\frac{2\pi\hbar t_0}{m} \left(n + \frac{3}{4}\right)} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + \cos \left[ \frac{m}{2\hbar t_0} \left( \sqrt{\frac{2\pi\hbar t_0}{m} \left(n + \frac{3}{4}\right)} \right)^2 \right] \right\}, \quad (\text{A.43}) \end{aligned}$$

$$\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x_n, t_0)] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t_0}} \left\{ \sin \left[ \left(n + \frac{3}{4}\right) \pi \right] + \cos \left[ \left(n + \frac{3}{4}\right) \pi \right] \right\}. \quad (\text{A.44})$$

Interpretando a equação (A.44), teremos que o valor será máximo ou mínimo dependendo necessariamente do valor de  $n$ . Utilizando o gráfico para analisarmos, podemos ver que quando  $n = 0, 2, 4, 6, \dots$ , teremos valores máximos e para  $n = 1, 3, 5, 7, \dots$ , teremos valores de mínimos, ou seja,

1) Os pontos de máximo serão:

$$\max \{ \text{Re}[K_{\text{Livre}}(x, t_0)] \} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t_0}} \left\{ \sin \left[ \left(n + \frac{3}{4}\right) \pi \right] + \cos \left[ \left(n + \frac{3}{4}\right) \pi \right] \right\}, \quad (\text{A.45})$$

com  $n = 0, 2, 4, 6, \dots$ .

2) Os pontos de mínimo serão:

$$\min \{ \text{Re}[K_{\text{Livre}}(x, t_0)] \} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t_0}} \left\{ \sin \left[ \left(n + \frac{3}{4}\right) \pi \right] + \cos \left[ \left(n + \frac{3}{4}\right) \pi \right] \right\}, \quad (\text{A.46})$$

com  $n = 1, 3, 5, 7, \dots$ .

Podendo assumir portanto os seguintes valores máximos e mínimos:

$$\max \{ \text{Re}[K_{\text{Livre}}(x, t_0)] \} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t_0}}, \quad (\text{A.47})$$

$$\min \{ \text{Re}[K_{\text{Livre}}(x, t_0)] \} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t_0}}. \quad (\text{A.48})$$

Para a parte imaginária, teremos o procedimento análogo:

$$\frac{d \operatorname{Im} [K_{\text{Livre}}(x, t_0)]}{dx} = \frac{mx}{2\hbar t_0} \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t_0}} \left[ \sin \left( \frac{mx^2}{2\hbar t_0} \right) + \cos \left( \frac{mx^2}{2\hbar t_0} \right) \right] = 0. \quad (\text{A.49})$$

Portanto, de maneira similar, encontramos:

$$\frac{mx}{2\hbar t_0} \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t_0}} = 0 \implies x = 0, \text{ (solução trivial)} \quad (\text{A.50})$$

E encontramos a equação:

$$\sin \left( \frac{mx^2}{2\hbar t_0} \right) + \cos \left( \frac{mx^2}{2\hbar t_0} \right) = 0. \quad (\text{A.51})$$

A qual resulta nos seguintes pontos:

$$x_n = \pm \sqrt{\frac{2\pi \hbar t_0}{m} \left( n + \frac{1}{4} \right)}, \text{ com } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.52})$$

que são os pontos de derivada nula. Verificando agora o valor máximo e mínimo da função, substituindo o valor de  $x$  em  $\operatorname{Im} [K_{\text{Livre}}(x, t_0)]$ .

$$\operatorname{Im} [K_{\text{Livre}}(x_n, t_0)] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t_0}} \left\{ \sin \left[ \frac{m}{2\hbar t_0} \left( \sqrt{\frac{2\pi \hbar t_0}{m} \left( n + \frac{1}{4} \right)} \right)^2 \right] - \cos \left[ \frac{m}{2\hbar t_0} \left( \sqrt{\frac{2\pi \hbar t_0}{m} \left( n + \frac{1}{4} \right)} \right)^2 \right] \right\}, \quad (\text{A.53})$$

$$\operatorname{Im} [K_{\text{Livre}}(x_n, t_0)] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t_0}} \left\{ \sin \left[ \left( n + \frac{1}{4} \right) \pi \right] - \cos \left[ \left( n + \frac{1}{4} \right) \pi \right] \right\}. \quad (\text{A.54})$$

Interpretando a equação (A.54), teremos que o valor será máximo ou mínimo dependendo necessariamente do valor de  $n$ . Utilizando o gráfico para analisarmos, podemos ver que quando  $n = 0, 2, 4, 6, \dots$ , teremos valores mínimos e para  $n = 1, 3, 5, 7, \dots$ , teremos valores de máximo, ou seja,

3) Os pontos de máximo serão:

$$\max \{ \operatorname{Im} [K_{\text{Livre}}(x, t_0)] \} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t_0}} \left\{ \sin \left[ \left( n + \frac{1}{4} \right) \pi \right] - \cos \left[ \left( n + \frac{1}{4} \right) \pi \right] \right\}, \quad (\text{A.55})$$

com  $n = 0, 2, 4, 6, \dots$ .

4) Os pontos de mínimo serão:

$$\min \{ \text{Im} [K_{\text{Livre}}(x, t_0)] \} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t_0}} \left\{ \sin \left[ \left( n + \frac{1}{4} \right) \pi \right] - \cos \left[ \left( n + \frac{1}{4} \right) \pi \right] \right\}. \quad (\text{A.56})$$

com  $n = 1, 3, 5, 7, \dots$ .

Encontrando, enfim, os seguintes valores máximos e mínimos:

$$\max \{ \text{Im} [K_{\text{Livre}}(x, t_0)] \} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t_0}}, \quad (\text{A.57})$$

$$\min \{ \text{Im} [K_{\text{Livre}}(x, t_0)] \} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t_0}}. \quad (\text{A.58})$$

### A.1.3 Raízes da $\text{Re} [K_{\text{Livre}}(x_0, t)]$ e $\text{Im} [K_{\text{Livre}}(x_0, t)]$

Nesta seção, iremos considerar o propagador como uma função de  $t$  onde  $x = x_0$  seja uma constante. As raízes para  $\text{Re} [K_{\text{Livre}}(x_0, t)]$  e  $\text{Im} [K_{\text{Livre}}(x_0, t)]$  podem ser determinadas como antes. E para o início de nossa investigação, consideraremos,

$$\text{Re} [K_{\text{Livre}}(x_0, t)] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t}} \left[ \sin \left( \frac{mx_0^2}{2\hbar t} \right) + \cos \left( \frac{mx_0^2}{2\hbar t} \right) \right], \quad (\text{A.59})$$

$$\text{Im} [K_{\text{Livre}}(x_0, t)] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t}} \left[ \sin \left( \frac{mx_0^2}{2\hbar t} \right) - \cos \left( \frac{mx_0^2}{2\hbar t} \right) \right]. \quad (\text{A.60})$$

Recomeçando por  $\text{Re} [K_{\text{Livre}}(x_0, t)]$ , teremos:

$$\text{Re} [K_{\text{Livre}}(x_0, t)] = 0, \quad (\text{A.61})$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t}} \left[ \sin \left( \frac{mx_0^2}{2\hbar t} \right) + \cos \left( \frac{mx_0^2}{2\hbar t} \right) \right] = 0. \quad (\text{A.62})$$

Portanto, teremos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{t}} = 0, \quad (\text{A.63})$$

e ainda que:

$$\sin \left( \frac{mx_0^2}{2\hbar t} \right) + \cos \left( \frac{mx_0^2}{2\hbar t} \right) = 0, \quad (\text{A.64})$$

que é um procedimento análogo a obtenção das raízes obtidas anteriormente. Então,

$$\frac{mx_0^2}{2\hbar t} = \left( n + \frac{1}{4} \right) \pi, \quad \text{com } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.65})$$

Obtendo o seguinte resultado:

$$t_n = \frac{mx_0^2}{2\hbar\pi(n+1/4)}, \text{ com } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.66})$$

A Eq. (A.66) expressa as raízes da  $\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x_0, t)]$ . Semelhantemente, para a parte imaginária, teremos:

$$\text{Im}[K_{\text{Livre}}(x_0, t)] = 0, \quad (\text{A.67})$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t}} \left[ \sin\left(\frac{mx_0^2}{2\hbar t}\right) - \cos\left(\frac{mx_0^2}{2\hbar t}\right) \right] = 0. \quad (\text{A.68})$$

E, usando que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{t}} = 0, \quad (\text{A.69})$$

teremos a seguinte equação:

$$\sin\left(\frac{mx_0^2}{2\hbar t}\right) - \cos\left(\frac{mx_0^2}{2\hbar t}\right) = 0, \quad (\text{A.70})$$

através da qual fazendo os procedimentos semelhantes aos realizados nas seções anteriores, nos fazem achar:

$$\frac{mx_0^2}{2\hbar t} = \left(n + \frac{3}{4}\right)\pi, \text{ com } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.71})$$

ou até:

$$t_n = \frac{mx_0^2}{2\hbar\pi(n+3/4)}, \text{ com } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.72})$$

#### A.1.4 Máximos e Mínimos da $\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x_0, t)]$ e $\text{Im}[K_{\text{Livre}}(x_0, t)]$

Para calcular os máximos e mínimos, devemos novamente derivar e igualar a zero. Portanto, para  $\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x_0, t)]$ , calculamos:

$$\begin{aligned} \frac{d\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x_0, t)]}{dt} = & -\frac{m}{4} \frac{\left[\cos\left(\frac{mx_0^2}{2\hbar t}\right) + \sin\left(\frac{mx_0^2}{2\hbar t}\right)\right]}{\pi\hbar t^2 \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t}}} \\ & + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t}} \left\{ \frac{mx_0^2}{2\hbar t^2} \left[ \sin\left(\frac{mx_0^2}{2\hbar t}\right) - \cos\left(\frac{mx_0^2}{2\hbar t}\right) \right] \right\} = 0, \quad (\text{A.73}) \end{aligned}$$

fazendo  $\zeta = \frac{mx_0^2}{\hbar t}$ , obtemos:

$$-\frac{m}{4\pi\hbar t^2} \sqrt{\frac{\pi\hbar t}{m}} \left[ \cos\left(\frac{\zeta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\zeta}{2}\right) \right] + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t}} \left\{ \frac{mx_0^2}{2\hbar t^2} \left[ \sin\left(\frac{\zeta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\zeta}{2}\right) \right] \right\} = 0, \quad (\text{A.74})$$

$$\cos\left(\frac{\zeta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\zeta}{2}\right) = \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t}} \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t}} \frac{x_0^2}{\hbar t^2} \pi\hbar t^2 \left[ \sin\left(\frac{\zeta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\zeta}{2}\right) \right], \quad (\text{A.75})$$

$$\cos\left(\frac{\zeta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\zeta}{2}\right) = \frac{m}{\pi\hbar t} \frac{x_0^2}{\hbar t^2} \pi\hbar t^2 \left[ \sin\left(\frac{\zeta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\zeta}{2}\right) \right], \quad (\text{A.76})$$

$$\cos\left(\frac{\zeta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\zeta}{2}\right) = \underbrace{\frac{mx_0^2}{\hbar t}}_{\zeta} \left[ \sin\left(\frac{\zeta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\zeta}{2}\right) \right], \quad (\text{A.77})$$

$$\cos\left(\frac{\zeta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\zeta}{2}\right) = \zeta \left[ \sin\left(\frac{\zeta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\zeta}{2}\right) \right], \quad (\text{A.78})$$

$$\sin\left(\frac{\zeta}{2}\right) - \zeta \sin\left(\frac{\zeta}{2}\right) = -\zeta \cos\left(\frac{\zeta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\zeta}{2}\right), \quad (\text{A.79})$$

$$(1 - \zeta) \sin\left(\frac{\zeta}{2}\right) = -(\zeta + 1) \cos\left(\frac{\zeta}{2}\right) \implies \tan\left(\frac{\zeta}{2}\right) = \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}. \quad (\text{A.80})$$

Analogamente, para  $\text{Im}[K_{\text{Livre}}(x_0, t)]$ , teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d \text{Im}[K(x_0, t)]}{dt} &= -\frac{m}{4} \frac{\left[ \cos\left(\frac{mx_0^2}{2\hbar t}\right) - \sin\left(\frac{mx_0^2}{2\hbar t}\right) \right]}{\pi\hbar t^2 \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t}}} \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t}} \left\{ -\frac{mx_0^2}{2\hbar t^2} \left[ \sin\left(\frac{mx_0^2}{2\hbar t}\right) + \cos\left(\frac{mx_0^2}{2\hbar t}\right) \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

Fazendo  $\xi = \frac{mx_0^2}{\hbar t}$ , temos:

$$-\frac{m}{4\pi\hbar t^2} \sqrt{\frac{\pi\hbar t}{m}} \left[ \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t}} \left\{ -\frac{mx_0^2}{2\hbar t^2} \left[ \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \right\} = 0, \quad (\text{A.82})$$

$$-\left[ \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] = \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t}} \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t}} \frac{x_0^2}{\hbar t^2} \pi\hbar t^2 \left[ \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \right], \quad (\text{A.83})$$

$$\cos\left(\frac{\xi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{m}{\pi\hbar t} \frac{x_0^2}{\hbar t^2} \pi\hbar t^2 \left[ \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \right], \quad (\text{A.84})$$

$$\cos\left(\frac{\xi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) = \underbrace{\frac{mx_0^2}{\hbar t}}_{\xi} \left[ \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \right], \quad (\text{A.85})$$

$$\cos\left(\frac{\xi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) = \xi \left[ \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \right], \quad (\text{A.86})$$

$$t \left[ \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) - \xi \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] = \xi \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad (\text{A.87})$$

$$-(1 - \xi) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) = -(\xi + 1) \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \implies \tan\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}. \quad (\text{A.88})$$

Então, os mínimos e máximos da  $\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x_0, t)]$  e  $\text{Im}[K_{\text{Livre}}(x_0, t)]$  podem somente ser determinados numericamente. Através das equações que encontramos anteriormente:

$$\tan\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \tan\left(\frac{\zeta}{2}\right) = \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}. \quad (\text{A.89})$$

Portanto, os mínimos da  $\text{Re}[K_{\text{Livre}}(x_0, t)]$  e  $\text{Im}[K_{\text{Livre}}(x_0, t)]$ , assumirão a seguinte forma:

$$\bar{t}_{1,2,3} = \frac{mx_0^2}{2\hbar\zeta_{1,2,3}}, \quad t_{1,2,3} = \frac{mx_0^2}{2\hbar\xi_{1,2,3}} \quad (\text{A.90})$$

As relações supracitadas tem as primeiras três soluções numéricas dadas por  $\xi_1 \approx 0.555968$ ,  $\xi_2 \approx 5.099658$ ,  $\xi_3 \approx 11.174084$  e  $\zeta_1 \approx 2.369501$ ,  $\zeta_2 \approx 8.099662$ ,  $\zeta_3 \approx 14.277024$ , respectivamente.

## A.2 Aplicação da Experiência da Dupla Fenda

### A.2.1 Propagador da Partícula Livre

Nesta seção, iremos aplicar o propagador da partícula livre no experimento da dupla fenda com o objetivo de encontrar o padrão de interferência. Para tanto, consideremos a amplitude de propagação da partícula livre com massa  $m$  como descrito na equação (2.34),

$$K_{\text{Livre}}(x, t; x', t') = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t-t')}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{(x-x')^2}{(t-t')}\right]. \quad (\text{A.91})$$

Deve-se salientar que cada fenda é pontual e distância entre as duas fendas é  $D$ . Além disso, a fonte é pontual, isto é, é descrita por

$$\psi(x', 0) = \delta(x'), \quad (\text{A.92})$$

como mostrado na Fig. A.4.



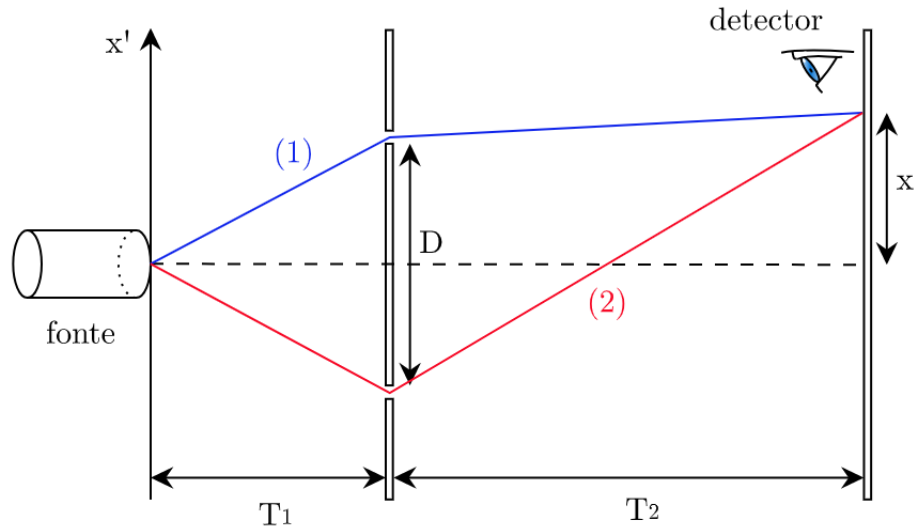


Figura A.4 – Experiência da dupla fenda com fendas pontuais. Adaptado de (SCHRECK, 2019).

Agora, para obter a função de onda no anteparo final, usaremos a lei (4) da cinemática quântica enunciada na Seção 2.1. Assim, as amplitudes associadas são decompostas da seguinte forma,

$$\begin{aligned}\psi^{(1)}(x, T) &= K(x, T; 0, 0) \\ &= K\left(x, T; \frac{D}{2}, T_1\right) K\left(\frac{D}{2}, T_1; 0, 0\right),\end{aligned}\quad (\text{A.93})$$

$$\begin{aligned}\psi^{(2)}(x, T) &= K(x, T; 0, 0) \\ &= K\left(x, T; -\frac{D}{2}, T_1\right) K\left(-\frac{D}{2}, T_1; 0, 0\right).\end{aligned}\quad (\text{A.94})$$

O que nos leva a conclusão de que a partícula quântica pode seguir dois caminhos que são não-distinguíveis.

Portanto, usando agora a lei (3) da cinemática quântica enunciada na Seção 2.1. Obtemos o seguinte resultado,

$$\psi(x, T) = \psi^{(1)}(x, T) + \psi^{(2)}(x, T),\quad (\text{A.95})$$

e substituindo as expressões (A.93) e (A.94), encontramos,

$$\begin{aligned} \psi(x, T) = & K\left(x, T; \frac{D}{2}, T_1\right) K\left(\frac{D}{2}, T_1; 0, 0\right) \\ & + K\left(x, T; -\frac{D}{2}, T_1\right) K\left(-\frac{D}{2}, T_1; 0, 0\right), \end{aligned} \quad (\text{A.96})$$

que é a função de onda no anteparo final, em que  $T = T_1 + T_2$ . Calculando os propagadores, temos:

$$K\left(x, T; \frac{D}{2}, T_1\right) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(T - T_1)}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{\left(x - \frac{D}{2}\right)^2}{(T - T_1)}\right] \quad (\text{A.97})$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T_2}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{\left(x - \frac{D}{2}\right)^2}{T_2}\right]. \quad (\text{A.98})$$

$$K\left(\frac{D}{2}, T_1; 0, 0\right) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T_1}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{T_1}\right]. \quad (\text{A.99})$$

$$K\left(x, T; -\frac{D}{2}, T_1\right) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(T - T_1)}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{\left(x + \frac{D}{2}\right)^2}{(T - T_1)}\right] \quad (\text{A.100})$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T_2}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{\left(x + \frac{D}{2}\right)^2}{T_2}\right]. \quad (\text{A.101})$$

$$K\left(-\frac{D}{2}, T_1; 0, 0\right) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T_1}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{T_1}\right]. \quad (\text{A.102})$$

Substituindo os propagadores na Eq. (A.96), encontramos:

$$\begin{aligned} \psi(x, T) = & \left\{ \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T_2}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{\left(x - \frac{D}{2}\right)^2}{T_2}\right] \right\} \left\{ \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T_1}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{T_1}\right] \right\} \\ & + \left\{ \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T_2}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{\left(x + \frac{D}{2}\right)^2}{T_2}\right] \right\} \left\{ \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T_1}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{T_1}\right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.103})$$

$$\begin{aligned} \psi(x, T) = & \frac{m}{2\pi i\hbar\sqrt{T_1 T_2}} \left\{ \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \left(\frac{\left(x - \frac{D}{2}\right)^2}{T_2} + \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{T_1}\right)\right] \right. \\ & \left. + \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \left(\frac{\left(x + \frac{D}{2}\right)^2}{T_2} + \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{T_1}\right)\right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.104})$$

$$\psi(x, T) = \frac{m}{2\pi i \hbar \sqrt{T_1 T_2}} \left\{ \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x - D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right) \right] + \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x + D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right) \right] \right\}, \quad (\text{A.105})$$

$$\psi(x, T) = \frac{m}{i \hbar \sqrt{T_1 T_2}} \left\{ \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x - D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right) \right] + \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x + D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right) \right] \right\}. \quad (\text{A.106})$$

Usando  $\psi(x, T)$  podemos obter explicitamente a norma quadrada da amplitude  $|\psi(x, T)|^2$  (probabilidade),

$$|\psi(x, T)|^2 = \frac{m}{\hbar^2 T_1 T_2} \left| \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x - D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right) \right] + \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x + D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right) \right] \right|^2, \quad (\text{A.107})$$

a partir deste ponto, mudaremos a notação da função exponencial para evitar poluição visual, de modo que encontramos

$$|\psi(x, T)|^2 = \psi(x, T)^\dagger \psi(x, T), \quad (\text{A.108})$$

$$|\psi(x, T)|^2 = \frac{m^2}{\hbar^2 T_1 T_2} \left[ e^{-\frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x-D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right)} + e^{-\frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x+D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right)} \right] \times \left[ e^{\frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x-D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right)} + e^{\frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x+D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right)} \right], \quad (\text{A.109})$$

$$|\psi(x, T)|^2 = \frac{m^2}{\hbar^2 T_1 T_2} \left[ e^{-\frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x-D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right)} e^{\frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x-D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right)} + e^{-\frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x-D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right)} e^{\frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x+D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right)} + e^{-\frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x+D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right)} e^{\frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x-D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right)} + e^{-\frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x+D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right)} e^{\frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x+D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right)} \right], \quad (\text{A.110})$$

$$|\psi(x, T)|^2 = \frac{m^2}{h^2 T_1 T_2} \left[ 1 + e^{-\frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x-D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right)} e^{\frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x+D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right)} + e^{-\frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x+D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right)} e^{\frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x-D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right)} + 1 \right], \quad (\text{A.111})$$

$$|\psi(x, T)|^2 = \frac{m^2}{h^2 T_1 T_2} \left[ 2 + e^{\frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x+D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right)} - \frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x-D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right)} + e^{\frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x-D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right)} - \frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x+D/2)^2}{2T_2} + \frac{mD^2}{8T_1} \right)} \right], \quad (\text{A.112})$$

$$|\psi(x, T)|^2 = \frac{m^2}{h^2 T_1 T_2} \left\{ 2 + e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m(x+D/2)^2}{2T_2} - \frac{m(x-D/2)^2}{2T_2} \right]} + e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m(x-D/2)^2}{2T_2} - \frac{m(x+D/2)^2}{2T_2} \right]} \right\}, \quad (\text{A.113})$$

$$|\psi(x, T)|^2 = \frac{m^2}{h^2 T_1 T_2} \left\{ 2 + e^{\frac{mi}{2\hbar T_2} \left[ \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{D}{2}\right)^2 \right]} + e^{-\frac{mi}{2\hbar T_2} \left[ \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{D}{2}\right)^2 \right]} \right\}, \quad (\text{A.114})$$

$$|\psi(x, T)|^2 = \frac{m^2}{h^2 T_1 T_2} \left\{ 2 + e^{\frac{mi}{2\hbar T_2} \left[ \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{D}{2}\right)^2 \right]} + e^{-\frac{mi}{2\hbar T_2} \left[ \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{D}{2}\right)^2 \right]} \right\}, \quad (\text{A.115})$$

e como temos que:

$$e^{\frac{mi}{2\hbar T_2} \left[ \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{D}{2}\right)^2 \right]} + e^{-\frac{mi}{2\hbar T_2} \left[ \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{D}{2}\right)^2 \right]} = 2 \cos \left\{ \frac{m}{2\hbar T_2} \left[ \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{D}{2}\right)^2 \right] \right\}. \quad (\text{A.116})$$

Podemos escrever,

$$|\psi(x, T)|^2 = \frac{m^2}{h^2 T_1 T_2} \left\{ 2 + 2 \cos \left[ \frac{m}{2\hbar T_2} \left( \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{D}{2}\right)^2 \right) \right] \right\}, \quad (\text{A.117})$$

$$|\psi(x, T)|^2 = \frac{m^2}{h^2 T_1 T_2} \left( 2 + 2 \cos \left[ \frac{m}{2\hbar T_2} \left( \cancel{x^2} + xD + \frac{D^2}{4} - \cancel{x^2} + xD - \frac{D^2}{4} \right) \right] \right), \quad (\text{A.118})$$

$$|\psi(x, T)|^2 = \frac{m^2}{h^2 T_1 T_2} \left( 2 + 2 \cos \left[ \frac{m}{2\hbar T_2} (2xD) \right] \right) = \frac{m^2}{h^2 T_1 T_2} \left( 2 + 2 \cos \left( \frac{mD}{\hbar T_2} x \right) \right), \quad (\text{A.119})$$

obtendo enfim o seguinte resultado:

$$|\psi(x, T)|^2 = \frac{2m^2}{\hbar^2 T_1 T_2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{mD}{\hbar T_2} x \right) \right]. \quad (\text{A.120})$$

E comparando o comportamento de  $|\psi(x, T)|^2$  em termos da posição final  $x$  com o comportamento do padrão de interferência na experiência da dupla fenda com luz, sem considerar o fator constante, e utilizando  $k = p/\hbar$  (com o número de onda  $k$  e momento  $p$  da partícula), temos

$$\begin{aligned} 1 + \cos \left( \frac{xkD}{q} \right) &= 1 + \cos \left( \frac{pD}{\hbar q} x \right), \\ &= 1 + \cos \left( \frac{mD}{\hbar v q} x \right), \\ &= 1 + \cos \left( \frac{mD}{\hbar T_2} x \right), \end{aligned}$$

e por fim, encontramos

$$1 + \cos \left( \frac{xkD}{q} \right) = 1 + \cos \left( \frac{mD}{\hbar T_2} x \right). \quad (\text{A.121})$$

Vemos que estas expressões correspondem uma à outra utilizando a **relação de De Broglie** onde  $v$  é a velocidade da partícula massiva.

### A.2.2 Propagador Modificado

Nesta seção, iremos aplicar o propagador modificado na descrição do experimento da dupla fenda visando encontrar o padrão de interferência modificado pela presença de um termo de quebra da simetria de Lorentz  $a$ . Considerando o propagador livre modificado,

$$K_{\text{Livre}}^{(a)}(x, t; x', t') = \sqrt{\frac{m}{i\hbar(t-t')}} e^{\left[ \frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(x-x' - \frac{a}{m}(t-t'))^2}{2(t-t')} - \frac{a^2}{2m}(t-t') \right) \right]}. \quad (\text{A.122})$$

E realizando as considerações análogas às da seção passada (fonte pontual, comprimento da fenda  $d$  e distância entre as duas fendas é  $D$ , vide arranjo da Fig. A.4). Para obter a função de onda no anteparo final, usaremos a lei (4) da cinemática quântica enunciada na Seção 2.1. Assim, as amplitudes associadas são decompostas da seguinte forma,

$$\psi^{(1)}(x, T) = K(x, T; 0, 0) = K \left( x, T; \frac{D}{2}, T_1 \right) K \left( \frac{D}{2}, T_1; 0, 0 \right), \quad (\text{A.123})$$

$$\psi^{(2)}(x, T) = K(x, T; 0, 0) = K \left( x, T; -\frac{D}{2}, T_1 \right) K \left( -\frac{D}{2}, T_1; 0, 0 \right). \quad (\text{A.124})$$

As partículas quânticas podem seguir dois caminhos não-distinguíveis. Portanto, usando agora a lei (3) da cinemática quântica enunciada na Seção 2.1. Chegamos ao seguinte resultado,

$$\psi(x, T) = \psi^{(1)}(x, T) + \psi^{(2)}(x, T), \quad (\text{A.125})$$

e usando as equações (A.123) e (A.124), encontramos

$$\begin{aligned} \psi(x, T) = & K\left(x, T; \frac{D}{2}, T_1\right) K\left(\frac{D}{2}, T_1; 0, 0\right) \\ & + K\left(x, T; -\frac{D}{2}, T_1\right) K\left(-\frac{D}{2}, T_1; 0, 0\right), \end{aligned} \quad (\text{A.126})$$

que é a função de onda no anteparo final, onde  $T = T_1 + T_2$ . Calculando os propagadores:

$$\begin{aligned} K\left(x, T; \frac{D}{2}, T_1\right) &= \sqrt{\frac{m}{ih(T-T_1)}} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m\left(x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m}(T-T_1)\right)^2}{2(T-T_1)} - \frac{a^2}{2m}(T-T_1) \right]}, \\ &= \sqrt{\frac{m}{ihT_2}} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m\left(x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_2\right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m}T_2 \right]}. \end{aligned} \quad (\text{A.127})$$

$$K\left(\frac{D}{2}, T_1; 0, 0\right) = \sqrt{\frac{m}{ihT_1}} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m\left(\frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_1\right)^2}{2T_1} - \frac{a^2}{2m}T_1 \right]}. \quad (\text{A.128})$$

$$\begin{aligned} K\left(x, T; -\frac{D}{2}, T_1\right) &= \sqrt{\frac{m}{ih(T-T_1)}} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m\left(x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m}(T-T_1)\right)^2}{2(T-T_1)} - \frac{a^2}{2m}(T-T_1) \right]}, \\ &= \sqrt{\frac{m}{ihT_2}} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m\left(x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_2\right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m}T_2 \right]}. \end{aligned} \quad (\text{A.129})$$

$$K\left(-\frac{D}{2}, T_1; 0, 0\right) = \sqrt{\frac{m}{ihT_1}} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m\left(-\frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_1\right)^2}{2T_1} - \frac{a^2}{2m}T_1 \right]}. \quad (\text{A.130})$$

Substituindo estes propagadores, temos:

$$\begin{aligned} \psi(x, T) = & \left\{ \sqrt{\frac{m}{ihT_2}} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m\left(x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_2\right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m}T_2 \right]} \right\} \left\{ \sqrt{\frac{m}{ihT_1}} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m\left(\frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_1\right)^2}{2T_1} - \frac{a^2}{2m}T_1 \right]} \right\} \\ & + \left\{ \sqrt{\frac{m}{ihT_2}} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m\left(x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_2\right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m}T_2 \right]} \right\} \left\{ \sqrt{\frac{m}{ihT_1}} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m\left(-\frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_1\right)^2}{2T_1} - \frac{a^2}{2m}T_1 \right]} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.131})$$

$$\psi(x, T) = \frac{m}{ih\sqrt{T_1 T_2}} \left\{ e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} T_2 \right]} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} - \frac{a^2}{2m} T_1 \right]} \right. \\ \left. + e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} T_2 \right]} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( -\frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} - \frac{a^2}{2m} T_1 \right]} \right\}, \quad (\text{A.132})$$

$$\psi(x, T) = \frac{m}{ih\sqrt{T_1 T_2}} \left\{ e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} T_2 + \frac{m \left( \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} - \frac{a^2}{2m} T_1 \right]} \right. \\ \left. + e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} T_2 + \frac{m \left( -\frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} - \frac{a^2}{2m} T_1 \right]} \right\}, \quad (\text{A.133})$$

$$\psi(x, T) = \frac{m}{ih\sqrt{T_1 T_2}} \left\{ e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} (T_1 + T_2) \right]} \right. \\ \left. + e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( -\frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} (T_1 + T_2) \right]} \right\}. \quad (\text{A.134})$$

Calculando a norma quadrada da amplitude, obtemos:

$$|\psi(x, T)|^2 = \psi(x, T)^\dagger \psi(x, T), \quad (\text{A.135})$$

$$\begin{aligned}
 |\psi(x, T)|^2 = \frac{m^2}{h^2 T_1 T_2} & \left\{ e^{-\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} (T_1 + T_2) \right]} \right. \\
 & + e^{-\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( -\frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} (T_1 + T_2) \right]} \left. \right\} \\
 & \times \left\{ e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} (T_1 + T_2) \right]} \right. \\
 & \left. + e^{\frac{i}{\hbar} \left( \frac{m \left( -\frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} (T_1 + T_2) \right)} \right\}. \quad (\text{A.136})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\psi(x, T)|^2 = \frac{m^2}{h^2 T_1 T_2} & \times \left\{ e^{-\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} (T_1 + T_2) \right]} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} (T_1 + T_2) \right]} \right\} \\
 & + e^{-\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} (T_1 + T_2) \right]} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( -\frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} (T_1 + T_2) \right]} \\
 & + e^{-\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( -\frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} (T_1 + T_2) \right]} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} (T_1 + T_2) \right]} \\
 & + e^{-\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( -\frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} (T_1 + T_2) \right]} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( -\frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} (T_1 + T_2) \right]} \left. \right\}, \quad (\text{A.137})
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 |\psi(x, T)|^2 &= \frac{m^2}{h^2 T_1 T_2} \\
 &\times \left\{ 1 + e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( -\frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} (T_1 + T_2) \right]} - \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} (T_1 + T_2) \right]} \right. \\
 &\left. + e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} (T_1 + T_2) \right]} - \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( -\frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} (T_1 + T_2) \right]} \right\} + 1, \tag{A.138}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\psi(x, T)|^2 &= \frac{m^2}{h^2 T_1 T_2} \\
 &\times \left\{ 2 + e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( -\frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} (T_1 + T_2) \right]} - \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} (T_1 + T_2) \right]} \right. \\
 &\left. + e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} (T_1 + T_2) \right]} - \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( -\frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} - \frac{a^2}{2m} (T_1 + T_2) \right]} \right\}, \tag{A.139}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\psi(x, T)|^2 &= \frac{m^2}{h^2 T_1 T_2} \left\{ 2 + e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( -\frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} \right]} - \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} \right]} \right. \\
 &\left. + e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} \right]} - \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \left( -\frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{2T_1} + \frac{m \left( x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{2T_2} \right]} \right\}, \tag{A.140}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\psi(x, T)|^2 &= \frac{m^2}{h^2 T_1 T_2} \left\{ 2 + e^{\frac{mi}{2\hbar} \left[ \frac{\left( \frac{D}{2} + \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{T_1} + \frac{\left( x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{T_2} - \frac{\left( \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{T_1} - \frac{\left( x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{T_2} \right]} \right. \\
 &\left. + e^{-\frac{mi}{2\hbar} \left[ \frac{\left( \frac{D}{2} + \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{T_1} + \frac{\left( x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{T_2} - \frac{\left( \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_1 \right)^2}{T_1} - \frac{\left( x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m} T_2 \right)^2}{T_2} \right]} \right\}, \tag{A.141}
 \end{aligned}$$

E como sabemos que:

$$\begin{aligned}
 & e^{\frac{mi}{2\hbar} \left[ \frac{\left(\frac{D}{2} + \frac{a}{m}T_1\right)^2}{T_1} + \frac{\left(x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_2\right)^2}{T_2} - \frac{\left(\frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_1\right)^2}{T_1} - \frac{\left(x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_2\right)^2}{T_2} \right]} \\
 & + e^{-\frac{mi}{2\hbar} \left[ \frac{\left(\frac{D}{2} + \frac{a}{m}T_1\right)^2}{T_1} + \frac{\left(x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_2\right)^2}{T_2} - \frac{\left(\frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_1\right)^2}{T_1} - \frac{\left(x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_2\right)^2}{T_2} \right]} \\
 & = 2 \cos \left( \frac{m}{2\hbar} \left( \frac{\left(\frac{D}{2} + \frac{a}{m}T_1\right)^2}{T_1} + \frac{\left(x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_2\right)^2}{T_2} - \frac{\left(\frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_1\right)^2}{T_1} - \frac{\left(x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_2\right)^2}{T_2} \right) \right). \tag{A.142}
 \end{aligned}$$

Podemos escrever que:

$$|\psi(x, T)|^2 = \frac{m^2}{h^2 T_1 T_2} \left\{ 2 + 2 \cos \left[ \frac{m}{2\hbar} \left( \frac{\left(\frac{D}{2} + \frac{a}{m}T_1\right)^2}{T_1} + \frac{\left(x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_2\right)^2}{T_2} - \frac{\left(\frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_1\right)^2}{T_1} - \frac{\left(x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_2\right)^2}{T_2} \right) \right] \right\}, \tag{A.143}$$

$$\begin{aligned}
 |\psi(x, T)|^2 = \frac{2m^2}{h^2 T_1 T_2} \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{m}{2\hbar} \left( \left( \frac{D^2}{4} + \frac{aD}{m}T_1 + \frac{a^2}{m^2}T_1^2 \right) \frac{1}{T_1} \right. \right. \\
 + \left( x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_2 \right) \left( x + \frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_2 \right) \frac{1}{T_2} \\
 - \left( \frac{D^2}{4} - \frac{aD}{m}T_1 + \frac{a^2}{m^2}T_1^2 \right) \frac{1}{T_1} \\
 \left. \left. - \left( x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_2 \right) \left( x - \frac{D}{2} - \frac{a}{m}T_2 \right) \frac{1}{T_2} \right) \right] \right\}, \tag{A.144}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\psi(x, T)|^2 = \frac{2m^2}{h^2 T_1 T_2} \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{m}{2\hbar} \left( \left( \frac{D^2}{4} + \frac{aD}{m}T_1 + \frac{a^2}{m^2}T_1^2 \right) \frac{1}{T_1} \right. \right. \\
 + \left( x^2 + \frac{D}{2}x - \frac{aT_2}{m}x + \frac{D}{2}x + \frac{D^2}{4} - \frac{aDT_2}{2m} - \frac{aT_2}{m}x - \frac{aDT_2}{2m} + \frac{a^2T_2^2}{m^2} \right) \frac{1}{T_2} \\
 - \left( \frac{D^2}{4} - \frac{aD}{m}T_1 + \frac{a^2}{m^2}T_1^2 \right) \frac{1}{T_1} \\
 \left. \left. - \left( x^2 - \frac{D}{2}x - \frac{aT_2}{m}x - \frac{D}{2}x + \frac{D^2}{4} + \frac{aDT_2}{2m} - \frac{aT_2}{m}x + \frac{aDT_2}{2m} + \frac{a^2T_2^2}{m^2} \right) \frac{1}{T_2} \right) \right] \right\}, \tag{A.145}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\psi(x, T)|^2 = \frac{2m^2}{h^2 T_1 T_2} \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{m}{2\hbar} \left( \left( \frac{D^2}{4} + \frac{aD}{m} T_1 + \frac{a^2}{m^2} T_1^2 \right) \frac{1}{T_1} \right. \right. \right. \\
 \left. \left. + \left( x^2 + xD - \frac{2aT_2}{m} x + \frac{D^2}{4} - \frac{aDT_2}{m} + \frac{a^2 T_2^2}{m^2} \right) \frac{1}{T_2} \right. \right. \\
 \left. \left. - \left( \frac{D^2}{4} - \frac{aD}{m} T_1 + \frac{a^2}{m^2} T_1^2 \right) \frac{1}{T_1} \right. \right. \\
 \left. \left. - \left( x^2 - xD - \frac{2aT_2}{m} x + \frac{D^2}{4} + \frac{aDT_2}{m} + \frac{a^2 T_2^2}{m^2} \right) \frac{1}{T_2} \right) \right] \right\}, \quad (\text{A.146})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\psi(x, T)|^2 = \frac{2m^2}{h^2 T_1 T_2} \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{m}{2\hbar} \left( \left( \frac{aD}{m} T_1 \right) \frac{1}{T_1} + \left( xD - \frac{aDT_2}{m} \right) \frac{1}{T_2} \right. \right. \right. \\
 \left. \left. - \left( -\frac{aD}{m} T_1 \right) \frac{1}{T_1} - \left( -xD + \frac{aDT_2}{m} \right) \frac{1}{T_2} \right) \right] \right\}, \quad (\text{A.147})
 \end{aligned}$$

$$|\psi(x, T)|^2 = \frac{2m^2}{h^2 T_1 T_2} \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{m}{2\hbar} \left[ \frac{aD}{m} + \frac{xD}{T_2} - \frac{aD}{m} + \frac{aD}{m} + \frac{xD}{T_2} - \frac{aD}{m} \right] \right] \right\}, \quad (\text{A.148})$$

$$|\psi(x, T)|^2 = \frac{2m^2}{h^2 T_1 T_2} \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{m}{2\hbar} \left[ \frac{2xD}{T_2} \right] \right] \right\}. \quad (\text{A.149})$$

E por fim, chegamos ao resultado:

$$|\psi(x, T)|^2 = \frac{2m^2}{h^2 T_1 T_2} \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{mD}{\hbar T_2} x \right] \right\}. \quad (\text{A.150})$$

Note que o resultado dado pela Eq. (A.150) mostra que os coeficientes do tipo  $a$  podem ser removidos por uma redefinição dos campos fermiônicos do MPE. Portanto, esta assertiva é a confirmação que este argumento também se aplica à mecânica quântica não-relativística.