

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA - PPGEE

ANTONIO BARROS FEITOSA JÚNIOR

**METODOLOGIA DE IDENTIFICAÇÃO NEBULOSA EVOLUTIVA MULTIVARIÁVEL
NO ESPAÇO DE ESTADOS COM ORDEM VARIANTE NO TEMPO**

São Luís - MA

2023

ANTONIO BARROS FEITOSA JÚNIOR

**METODOLOGIA DE IDENTIFICAÇÃO NEBULOSA EVOLUTIVA MULTIVARIÁVEL
NO ESPAÇO DE ESTADOS COM ORDEM VARIANTE NO TEMPO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Maranhão como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica na área de concentração de Automação e Controle.

Orientador: Prof. Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra

São Luís - MA

2023

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Feitosa Júnior, Antonio Barros.

Metodologia de identificação nebulosa evolutiva
multivariável no espaço de estados com ordem variante no
tempo / Antonio Barros Feitosa Júnior. - 2023.
89 f.

Orientador(a): Ginalber Luiz de Oliveira Serra.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em
Engenharia Elétrica/ccet, Universidade Federal do
Maranhão, São Luís - MA, 2023.

1. Espaço de estados. 2. Identificação de sistemas.
3. Sistemas MIMO. 4. Sistemas não lineares. 5. Sistemas
nebulosos evolutivos. I. Serra, Ginalber Luiz de
Oliveira. II. Título.

ANTONIO BARROS FEITOSA JÚNIOR

**METODOLOGIA DE IDENTIFICAÇÃO NEBULOSA EVOLUTIVA MULTIVARIÁVEL
NO ESPAÇO DE ESTADOS COM ORDEM VARIANTE NO TEMPO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Maranhão como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica na área de concentração de Automação e Controle.

Trabalho aprovado em São Luís - MA, 06 de Fevereiro de 2023.

Prof. Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra
Orientador - IFMA

Prof. Dr. Francisco das Chagas de Souza
Membro da banca examinadora - UFMA

Profa. Dra. Patrícia Helena Moraes Rêgo
Membro da banca examinadora - UEMA

*Aos meus pais, Maria Pereira e Antonio Barros, e à minha esposa, Brenda Gleicy,
pelo apoio incondicional e por acreditarem em mim.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelas bênçãos sem medida, por me fortalecer e me dar ânimo para chegar ao fim deste desafio.

Agradeço também ao Prof. Dr. Ginalber Serra pela orientação, encorajamento, serenidade, disposição em ajudar e por acreditar no meu potencial.

Sou grato aos meus pais, Antonio Barros e Maria Pereira, irmã, Aline Araújo, e esposa, Brenda Gleicy, pelo amor, motivação, cuidado, paciência, e total suporte durante a realização do mestrado.

Agradeço aos membros da Casa de Oração, em especial à irmã Judithe, pelas orações e palavras de incentivo. Também pelas orações e incentivo, sou grato aos membros da Segunda Igreja Batista de Imperatriz, especialmente ao pastor Uédel Farias e sua esposa Léa Farias.

Agradeço aos membros do laboratório de Inteligência Computacional Aplicada a Tecnologia (ICAT), em especial à colega e amiga, Daiana Gomes, pelas boas conversas e trocas de conhecimento.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

Por fim, a todos que direta ou indiretamente fizeram parte desta jornada, minha gratidão.

*"Saberás, pois, que o Senhor, teu Deus, é Deus,
o Deus fiel, que guarda o concerto e a
misericórdia até mil gerações aos que o amam
e guardam os seus mandamentos;"*

(Bíblia Sagrada, Deuteronômio 7:9)

RESUMO

Neste trabalho, é proposta uma metodologia para a identificação de modelos nebulosos evolutivos para sistemas dinâmicos não lineares, com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), baseada nos algoritmos OKID (*Observer/Kalman Filter Identification*) e ERA (*Eigensystem Realization Algorithm*). O modelo evolutivo obtido é capaz de alterar sua estrutura de forma autônoma, de acordo com o fluxo de dados. O algoritmo OKID é executado de forma recursiva, não exigindo o armazenamento e processamento em batelada dos dados de entrada e saída do sistema real, reduzindo significativamente a necessidade de alocação de memória e tempo de execução. A realização mínima dos submodelos consequentes das regras garante a simplicidade do modelo obtido. Além disso, os modelos locais no espaço de estados são capazes de alterar sua ordem independentemente para cada regra nebulosa. Ainda, esta metodologia visa reduzir o número de parâmetros do algoritmo a serem especificados durante sua inicialização. A técnica proposta foi aplicada na identificação de um sistema de tanque, um robô aéreo quadricóptero, um evaporador industrial e uma fornalha para vidro. Os resultados obtidos demonstram a aplicabilidade da metodologia proposta.

Palavras-chaves: Sistemas nebulosos evolutivos; Identificação de sistemas; Sistemas não lineares; Sistemas MIMO; Espaço de estados.

ABSTRACT

In this work, an evolving fuzzy methodology for the identification of nonlinear, Multi-Input Multi-Output (MIMO) dynamic systems, based on the algorithms OKID (Observer/Kalman Filter Identification) and ERA (Eigensystem Realization Algorithm), is proposed. The evolving model obtained is capable of autonomously changing its structure according to the data flow. The OKID algorithm is executed recursively, not requiring the storage and batch processing of input and output data of the real system, significantly reducing the need for memory allocation and execution time. The minimal realization of the rule consequent submodels guarantees the simplicity of the model obtained. Moreover, the local state space models are able to change their order independently for each fuzzy rule. In addition, this methodology aims to reduce the number of algorithm parameters to be specified during its initialization. The proposed technique was applied in the identification of a tank system, an aerial quadrotor robot, an industrial evaporator, and a glass kiln. The results obtained demonstrate the applicability of the proposed methodology.

Key-words: Evolving fuzzy systems, System identification, Nonlinear systems, MIMO systems, State space.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Benefícios da modelagem.	24
Figura 2 – Classificação de modelos.	25
Figura 3 – Diagrama de blocos do modelo proposto.	45
Figura 4 – Sistema de tanque.	56
Figura 5 – Sistema de tanque: diagrama de blocos.	56
Figura 6 – Sistema de tanque: entrada u_k	57
Figura 7 – Sistema de tanque: saída y_k	57
Figura 8 – Sistema de tanque: evolução do número de regras.	58
Figura 9 – Sistema de tanque: Estimção recursiva dos três primeiros elementos da diagonal principal das matrizes $\mathbf{A}_k^i _{i=1, \dots, 4}$	58
Figura 10 – Sistema de tanque: Ordem do modelo local.	59
Figura 11 – Sistema de tanque: Saída real e estimada. (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimção.	59
Figura 12 – RAQ: (a) Vista superior; (b) diagrama de blocos.	60
Figura 13 – RAQ: Entrada u^1	61
Figura 14 – RAQ: Entrada u^2	61
Figura 15 – RAQ: Entrada u^3	61
Figura 16 – RAQ: Saída y^1	62
Figura 17 – RAQ: Saída y^2	62
Figura 18 – RAQ: Saída y^3	62
Figura 19 – RAQ: Evolução do número de regras.	63
Figura 20 – RAQ: Ordem do modelo local para as regras 1 e 2 ($\hat{n} = 4$). Não houveram mudanças na ordem do modelo local para estas regras no intervalo [1000-2500].	63
Figura 21 – RAQ: Estimção recursiva dos três primeiros elementos da diagonal principal das matrizes $\mathbf{A}_k^i _{i=1,2}$ ($\hat{n} = 4$).	64
Figura 22 – RAQ: Saída y^1 real e estimada ($\hat{n} = 4$). (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimção.	64
Figura 23 – RAQ: Saída y^2 real e estimada ($\hat{n} = 4$). (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimção.	64
Figura 24 – RAQ: Saída y^3 real e estimada ($\hat{n} = 4$). (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimção.	65
Figura 25 – RAQ: Ordem do modelo local para as regras 1 e 2 ($\hat{n} = 20$). Não houveram mudanças na ordem do modelo local para estas regras no intervalo [1000-2500].	65
Figura 26 – RAQ: Estimção recursiva dos três primeiros elementos da diagonal principal das matrizes $\mathbf{A}_k^i _{i=1,2}$ ($\hat{n} = 20$).	65

Figura 27 – RAQ: Saída y^1 real e estimada ($\hat{n} = 20$). (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.	66
Figura 28 – RAQ: Saída y^2 real e estimada ($\hat{n} = 20$). (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.	66
Figura 29 – RAQ: Saída y^3 real e estimada ($\hat{n} = 20$). (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.	66
Figura 30 – RAQ: Erro Médio Quadrático para diferentes valores de \hat{n}	67
Figura 31 – RAQ: Ordem final do modelo local. Isto representa a ordem do modelo local ao término do processo de identificação para diferentes valores de \hat{n}	67
Figura 32 – Evaporador Industrial: Entrada u^1	68
Figura 33 – Evaporador Industrial: Entrada u^2	69
Figura 34 – Evaporador Industrial: Entrada u^3	69
Figura 35 – Evaporador Industrial: Saída y^1	69
Figura 36 – Evaporador Industrial: Saída y^2	70
Figura 37 – Evaporador Industrial: Saída y^3	70
Figura 38 – Evaporador Industrial: Evolução do número de regras.	71
Figura 39 – Evaporador Industrial: Ordem do modelo local. Não houveram mudanças na ordem do modelo local para estas regras no intervalo [2000-6000].	71
Figura 40 – Evaporador Industrial: Estimação recursiva dos três primeiros elementos da diagonal principal das matrizes $A_k^i _{i=1, \dots, 4}$	72
Figura 41 – Evaporador Industrial: Saída y^1 real e estimada. (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.	72
Figura 42 – Evaporador Industrial: Saída y^2 real e estimada. (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.	73
Figura 43 – Evaporador Industrial: Saída y^3 real e estimada. (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.	73
Figura 44 – Fornalha para vidro: Entrada u^1	74
Figura 45 – Fornalha para vidro: Entrada u^2	74
Figura 46 – Fornalha para vidro: Entrada u^3	75
Figura 47 – Fornalha para vidro: Saída y^1	75
Figura 48 – Fornalha para vidro: Saída y^2	75
Figura 49 – Fornalha para vidro: Saída y^3	76
Figura 50 – Fornalha para vidro: Saída y^4	76
Figura 51 – Fornalha para vidro: Saída y^5	76
Figura 52 – Fornalha para vidro: Saída y^6	77
Figura 53 – Fornalha para vidro: Evolução do número de regras.	77
Figura 54 – Fornalha para vidro: Ordem do modelo local.	78
Figura 55 – Fornalha para vidro: Estimação recursiva dos três primeiros elementos da diagonal principal das matrizes $A_k^i _{i=1, \dots, 4}$	78

Figura 56 – Fornalha para vidro: Saída y^1 real e estimada. (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.	79
Figura 57 – Fornalha para vidro: Saída y^2 real e estimada. (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.	79
Figura 58 – Fornalha para vidro: Saída y^3 real e estimada. (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.	79
Figura 59 – Fornalha para vidro: Saída y^4 real e estimada. (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.	80
Figura 60 – Fornalha para vidro: Saída y^5 real e estimada. (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.	80
Figura 61 – Fornalha para vidro: Saída y^6 real e estimada. (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.	80

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Sistema de tanque: Índices de desempenho.	59
Tabela 2	– RAQ: Índices de desempenho.	68
Tabela 3	– Evaporador industrial: Comparação dos resultados obtidos através da metodologia proposta com os resultados apresentados em (TORRES, 2018) ^[1] e (JAFARI; SALIMIFARD; DEHGHANI, 2014) ^[2]	71
Tabela 4	– Fornalha para vidro: Comparação dos resultados obtidos através da metodologia proposta com os resultados apresentados em (TORRES, 2018) ^[1] e (JAFARI; SALIMIFARD; DEHGHANI, 2014) ^[2]	81

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EDA	<i>Empyrical Data Analytics</i>
EFS	<i>Evolving Fuzzy Systems</i>
EIS	<i>Evolving Intelligent Systems</i>
ERA	<i>Eigensystem Realization Algorithm</i>
eTS	<i>Evolving Takagi-Sugeno</i>
FCM	<i>Fuzzy C-Means</i>
FIT	<i>Best Fit Criterion</i>
FRB	<i>Fuzzy Rule-Based</i>
GK	<i>Gustafson-Kessel</i>
IA	Inteligência Artificial
IC	Inteligência Computacional
L-FWRLS	<i>Local Fuzzy Weighted Recursive Least Squares</i>
MIMO	<i>Multi-Input, Multi-Output</i>
MSE	<i>Mean Square Error</i>
NF-TS	<i>Neuro-Fuzzy Takagi-Sugeno</i>
OKID	<i>Observer/Kalman Filter Identification</i>
RAQ	Robô Aéreo Quadrirotor
RDE	<i>Recursive Density Estimator</i>
SISO	<i>Single-Input, Single-Output</i>
SSA	<i>Singular Spectrum Analysis</i>
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i>
TS	<i>Takagi-Sugeno</i>

SUMÁRIO

1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	16
1.1	Introdução	16
1.2	Motivação e Relevância	17
1.3	Estado da Arte	18
1.4	Principais Contribuições	21
1.5	Objetivos	22
1.5.1	Objetivo geral	22
1.5.2	Objetivos específicos	22
1.6	Produção Bibliográfica	22
1.7	Organização da Dissertação	23
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	24
2.1	Identificação de Sistemas	24
2.1.1	Representação Matemática	25
2.2	Modelagem Nebulosa	26
2.2.1	Sistema nebuloso <i>Takagi-Sugeno</i>	27
2.2.2	Técnicas de agrupamento de dados	28
2.2.3	Tipos de partição	28
2.2.4	Algoritmos de agrupamento nebuloso	29
2.2.4.1	<i>Fuzzy C-Means</i>	29
2.2.4.2	<i>Gustafson-Kessel (GK)</i>	30
2.2.4.3	<i>eClustering+</i>	31
2.2.5	Sistema nebuloso AnYa	33
2.3	Realização Mínima de Sistemas	36
2.3.1	Controlabilidade no domínio do tempo discreto	36
2.3.2	Observabilidade no domínio do tempo discreto	38
2.3.3	Conceitos básicos de realização	38
2.3.4	Algoritmo de realização de auto-sistema (ERA)	40
2.4	O algoritmo OKID	41
3	METODOLOGIA PROPOSTA	44
3.1	Estrutura do modelo nebuloso evolutivo	44
3.2	Estimação do Antecedente	45
3.3	Estimação Paramétrica do Consequente	47
3.3.1	Estimação recursiva dos parâmetros de Markov nebulosos	47
3.3.2	Realização de auto-sistema	50

4	RESULTADOS EXPERIMENTAIS	55
4.1	Sistema de Tanque	55
4.2	Robô Aéreo Quadrirotor	60
4.3	Evaporador Industrial	68
4.4	Fornalha para Vidro	74
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	82
5.1	Conclusões	82
5.2	Trabalhos Futuros	82
	REFERÊNCIAS	83

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

1.1 Introdução

O modelo matemático de um sistema é uma representação matemática que possibilita estimar de forma aproximada o comportamento da(s) saída(s) de um sistema, de acordo com as variáveis explanatórias do mesmo. Keesman (2011) define um sistema como um objeto no qual diferentes variáveis interagem em todos os tipos de escalas de tempo e espaço e que produzem sinais observáveis.

De acordo com o nível de conhecimento (a respeito do sistema) utilizado na obtenção do modelo matemático, a modelagem pode ser classificada em três grupos: caixa branca, caixa preta e caixa cinza. A modelagem caixa branca demanda conhecimento profundo a respeito do sistema a ser modelado, enquanto a modelagem caixa preta, também conhecida como identificação, requer pouco ou nenhum conhecimento a respeito do sistema. Já na modelagem caixa cinza, é realizada a identificação a partir de algum conhecimento acerca do sistema real.

São inúmeras as vantagens decorrentes da utilização de modelos, dentre elas podemos citar: projeto e sintonia de sistemas de controle, previsão do comportamento dinâmico do sistema, monitoramento e otimização de processos. Além disso, a utilização de modelos provê economia e segurança.

A utilização do modelo para simulação do sistema constitui-se um procedimento de baixo custo e seguro para experimentar o sistema. Entretanto, a validade (adequação) dos resultados de simulação depende completamente da qualidade do modelo matemático do sistema. (COELHO; COELHO, 2004).

Neste trabalho são utilizadas técnicas de identificação para obtenção dos modelos matemáticos das plantas estudadas. Os principais fatores que motivam a necessidade de identificação são a necessidade de modelos em análise e automação de processos e as limitações práticas da abordagem conceitual no desenvolvimento de modelos (TANGIRALA, 2014).

A proposta apresentada nesta dissertação visa a identificação de um modelo nebuloso evolutivo no espaço de estados com ordem variável no tempo a partir de dados experimentais. Sistemas evolutivos inteligentes (EIS, do inglês *Evolving Intelligent Systems*) como uma estrutura para incorporar o processamento recursivo de dados, aprendizagem incremental com passagem única e métodos para desenvolver sistemas com capacidade duradoura de aprendizagem e auto-organização foram formalmente conceituados por Angelov e Kasabov (2005). Esta abordagem, em vez de considerar a evolução de uma população ou genes como os algoritmos de computação evolucionária, se concentra na evolução de um único sistema inteligente, através de uma evolução por herança e modificação, atualização e redução.

As características importantes que qualquer sistema evolutivo inteligente possui são

a capacidade de expandir ou encolher sua estrutura, bem como adequar seus parâmetros, e assim evoluir, além de trabalhar e adapte-se de forma incremental e, se necessário, em tempo real (ANGELOV; FILEV; KASABOV, 2010). Os sistemas nebulosos evolutivos (EFS, do inglês *Evolving Fuzzy Systems*), em particular, têm a vantagem adicional da interpretabilidade linguística e podem ser usados para extrair conhecimento (ANGELOV; FILEV; KASABOV, 2010; PEDRYCZ, 2005; ANGELOV, 2002; ZADEH, 1975).

Nesse sentido, a área de sistemas evolutivos inteligentes está preocupada com processos não estacionários, algoritmos computacionalmente eficientes para aplicações em tempo real e uma família dinamicamente evolutiva de subsistemas válidos localmente que podem representar diferentes situações ou condições operacionais (ANGELOV; FILEV; KASABOV, 2010).

Para demonstrar a aplicabilidade da técnica proposta neste trabalho, a metodologia é utilizada na identificação de um sistema de tanque, um robô aéreo quadricóptero, um evaporador industrial e uma fornalha para vidro.

1.2 Motivação e Relevância

Com o aumento na complexidade dos sistemas dinâmicos e a busca por processos cada vez mais eficientes, torna-se indispensável o emprego de técnicas de identificação cada vez mais sofisticadas. A maioria dos processos na indústria é caracterizada por um comportamento não linear e variável no tempo (BABUŠKA, 2003), o que eleva a demanda por modelos cada vez mais eficazes. Tais modelos devem ser capazes de representar características do sistema como incertezas, não linearidades, perturbações, variação temporal dos parâmetros do processo, etc.

Para lidar com essas complexidades, métodos de identificação de sistemas baseados em técnicas de inteligência computacional têm sido amplamente investigados na comunidade científica (QUARANTA; LACARBONARA; MASRI, 2020; BOLOURCHI; MASRI; AL-DRAIHEM, 2015; WILLIS et al., 1997; BANERJEE; ABU-MAHFOUZ, 2014; BARTKOWSKI; ZALEWSKI; CHODKIEWICZ, 2019; BOUBAKER, 2017; BREWICK; MASRI, 2016; FU et al., 2016; GUERRA; COELHO, 2008; HERGLI et al., 2019; JIN et al., 2016; LENG et al., 2018; LI; KOU; ZHANG, 2019; RUBIO-SOLIS et al., 2019; TAKAHASHI; SHIBATA; HASHIMOTO, 2021). Inteligência computacional¹ (IC) é um sub-ramo da inteligência artificial (IA) no qual são estudados mecanismos adaptativos para permitir ou facilitar o comportamento inteligente em ambientes complexos e mutáveis. Esses mecanismos incluem paradigmas de IA que exibem uma capacidade de aprender ou se adaptar a novas situações, de generalizar, abstrair, descobrir e associar (ENGELBRECHT, 2007). Essas técnicas de CI têm a capacidade de processar informações imprecisas e buscar soluções aproximadas, mas boas o suficiente, garantindo robustez e tratabilidade computacional (ASIM et al., 2020; PRIMEAU et al., 2018).

¹ Os principais paradigmas de IC incluem: redes neurais artificiais, computação evolutiva, inteligência de enxame (ou inteligência coletiva), sistemas imunológicos artificiais e sistemas nebulosos (sistemas *fuzzy*). Além disso, é possível o desenvolvimento de sistemas híbridos, combinando técnicas de inteligência computacional.

Entretanto, mudanças no comportamento ou nas condições operacionais do sistema podem degradar o desempenho do modelo obtido. Enquanto pequenas mudanças nos parâmetros do sistema podem ser entendidas como uma forma de incerteza e podem ser tratadas adequadamente usando mecanismos de estimação de parâmetros, mudanças na estrutura do sistema requerem um nível mais alto de adaptação (ŠKRJANC et al., 2019). Os sistemas evolutivos são sistemas inteligentes adaptativos que, diferentemente dos sistemas adaptativos, atualizam sua estrutura e parâmetros simultaneamente através do fluxo de dados. Enquanto sistemas adaptativos atuam principalmente com estimativa de parâmetros, sistemas evolutivos se beneficiam do aprendizado com a experiência, herança, mudança gradual e geração de conhecimento a partir de fluxos de dados (GOMIDE, 2017).

Além disso, a crescente demanda por conhecimento a partir de dados muitas vezes envolve a interpretabilidade dos modelos para que realmente haja compreensão da informação extraída. Modelos baseados em regras, aos quais os sistemas nebulosos (ou sistemas *fuzzy*) ou neuro-*fuzzy* pertencem, normalmente oferecem melhor interpretabilidade do que redes neurais puras ou abordagens de *deep learning* (ŠKRJANC et al., 2019). Um sistema nebuloso evolutivo atualiza seus componentes estruturais e parâmetros sob demanda, com base nas novas características do processo, comportamento do sistema e condições operacionais, além de expandir seu alcance, desenvolvendo novas estruturas de modelo para integrar novos conhecimentos (LUGHOFER, 2011).

1.3 Estado da Arte

Os sistemas nebulosos são modelos matemáticos específicos destinados a imitar as dependências naturais reais, tão precisa e transparente quanto possível, com base no conceito de lógica nebulosa (ou lógica *fuzzy*), que foi introduzido pela primeira vez em 1965 por Lotfi A. Zadeh (ZADEH, 1965).

Modelos *Fuzzy State Space* são modelos dinâmicos nebulosos em que o consequente de cada regra nebulosa é um modelo dinâmico local no espaço de estados. Uma vez que a parte consequente do modelo é um submodelo dinâmico afim em vez de um conjunto nebuloso ou um valor constante, esta abordagem apresenta várias vantagens (PIRES, 2018; TANGIRALA, 2014; JOHANSEN; SHORTEN; MURRAY-SMITH, 2000):

- Do ponto de vista da engenharia de controle, o uso de modelos lineares locais preenche a lacuna entre o controle nebuloso e o controle convencional;
- A parte consequente relativamente complexa permite que o número de regras nebulosas (modelos locais) seja bastante pequeno em muitas aplicações;
- A capacidade das representações no espaço de estados para lidar com sistemas multi-variáveis. Aplicações construídos em representações no espaço de estado acomodam

naturalmente sistemas multivariáveis e sistemas de entrada única e saída única;

- Um modelo no espaço de estados oferece mais informações físicas sobre a dinâmica do processo do que modelos na forma de entrada-saída porque explica o comportamento interno de um processo;
- A notação de matriz compacta facilita manipulações complexas;
- As equações de estado permitem a simulação computacional de sistemas complexos de ordem superior, lineares ou não e com múltiplas entradas e saídas;
- A estrutura no espaço de estados facilita a estimativa conjunta e o problema de identificação, enquanto a estrutura de entrada-saída só permite construir um modelo entre variáveis conhecidas, mas não pode estimar as variáveis ocultas;
- A estrutura do modelo (particionamento do espaço de estados e estrutura do modelo local) e as propriedades do modelo local podem, em algumas aplicações, ser facilmente relacionadas à física do sistema.

Além das vantagens supracitadas, vale ressaltar a vasta teoria solidificada que pode ser aplicada a modelos no espaço de estados, como análise de estabilidade, controlabilidade, observabilidade, técnicas de controle, filtros, etc. Além disso, aumentando o número de variáveis de estado, o número de entradas, ou o número de saídas não aumenta a complexidade das equações.

Modelos *Fuzzy State Space* são um campo de pesquisa ativo, especialmente para fins de controle (JAMMALI; MOUFTAH, 2020; LEITE et al., 2019; SUN; LI; ZHANG, 2003; WANG; TANAKA, 2001; JOHANSEN; SHORTEN; MURRAY-SMITH, 2000; CAO; REES; FENG, 1999; CAO; REES; FENG, 1996; KIM; AHN; KWON, 1995; TONG, 1978). Habbi, Zelmat e Bouamama (2003) apresentam um modelo nebuloso dinâmico para um sistema tambor-caldeira-turbina. Este é um modelo nebuloso dinâmico do tipo *Takagi-Sugeno* (TS) em que a parte funcional consequente para cada regra é um modelo no espaço de estados deduzido a partir do modelo não linear do sistema através de linearização dinâmica sobre um ponto de operação variável.

Sun, Feng e Cao (2010) aplicam uma abordagem de modelagem nebulosa dinâmica para modelar redes regulatórias genéticas a partir de dados de expressão gênica. Um algoritmo de agrupamento ótimo, que minimiza a variância em cada *cluster* e maximiza a variância entre os *clusters* é usado para formar um modelo nebuloso TS. Os parâmetros do modelo dinâmico local são identificados pela aplicação do método dos mínimos quadrados.

Samadi e Saif (2017) apresentam um modelo nebuloso TS de baterias de íon de lítio para ser usado no monitoramento e diagnóstico de baterias. O modelo proposto é composto por regras de inferência nebulosa onde cada uma está associada a um modelo local no espaço de estados.

Silveira Júnior e Costa (2020, 2018b) propõem uma metodologia para identificação nebulosa orientada por dados para sistemas não lineares multivariáveis. O antecedente e o consequente são estimados em batelada, usando os algoritmos *Fuzzy C-Means* e *Fuzzy OKID/ERA*.

Gomes e Serra (2022, 2021) apresentam um modelo computacional baseado em sistemas nebulosos intervalares tipo 2 para análise e previsão do comportamento dinâmico de disseminação da COVID-19. As proposições antecedentes das regras nebulosas são obtidas pela formulação de um algoritmo de agrupamento nebuloso tipo 2. Os submodelos no espaço de estados e os ganhos de Kalman intervalares nas proposições consequentes das regras nebulosas são atualizados recursivamente por um algoritmo de identificação *Fuzzy OKID* intervalar tipo 2.

Recentemente, metodologias evolutivas para a identificação de modelos nebulosos (*fuzzy* e *neuro-fuzzy*) com consequentes no espaço de estados têm sido propostas para aplicações em tempo real. Rodrigues Júnior e Serra (2017) apresentam uma metodologia para modelagem baseada em uma rede evolutiva *Neuro-Fuzzy Takagi-Sugeno* (NF-TS) e *Singular Spectrum Analysis* (SSA) recursiva. As proposições consequentes das regras nebulosas são modelos lineares no espaço de estados, obtidos através do método *Local Fuzzy Weighted Recursive Least Squares* (L-FWRLS). Essa abordagem é aplicada para previsão e caracterização de séries temporais sazonais.

Evangelista e Serra (2020) propõem uma metodologia para identificação *neural-fuzzy* intervalar tipo 2 de sistemas dinâmicos multivariáveis. Cada conjunto nebuloso intervalar tipo 2 é calculado por um algoritmo de agrupamento nebuloso gaussiano multivariável e a estimação dos parâmetros do modelo local no espaço de estados é realizada pela estimação recursiva dos parâmetros de Markov nebulosos e pelo algoritmo recursivo dos mínimos quadrados ponderados nebulosos.

Santos e Serra (2018) apresentam uma abordagem para identificação nebulosa evolutiva de sistemas dinâmicos MIMO não lineares. A metodologia é baseada em modelos Hammerstein multivariáveis no espaço de estados, nos quais, o bloco de não linearidade estático é aproximado por um sistema de inferência nebuloso evolutivo Takagi-Sugeno e o bloco dinâmico linear é representado por um modelo linear no espaço de estados obtido através de um algoritmo recursivo de realização de auto-sistemas.

Torres e Serra (2018a, 2018b) apresentam uma abordagem para identificação nebulosa evolutiva multivariável *online*. Um algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo baseado no conceito de estimação de densidade recursiva é usado para a estimação *online* dos antecedentes, enquanto a estimação recursiva dos parâmetros de Markov nebulosos e o Algoritmo de Realização de Auto-Sistema nebuloso são aplicados para estimar os modelos locais no espaço de estados.

Pires e Serra (2020, 2019, 2018) propõem uma metodologia para identificação de sistemas baseada no *Evolving Fuzzy Kalman Filter*. O algoritmo eTS (*Evolving Takagi-Sugeno*) é usado para estimar os parâmetros do antecedente e uma versão nebulosa dos algoritmos OKID/ERA é

usada para estimar os parâmetros do consequente do filtro de Kalman nebuloso evolutivo.

1.4 Principais Contribuições

A principal contribuição da metodologia proposta nesta dissertação é a identificação de um modelo nebuloso evolutivo no espaço de estados, resultante da combinação de técnicas consolidadas na literatura. O modelo nebuloso é capaz de evoluir sua estrutura de forma *online*, aumentando ou reduzindo o número de regras para melhor representar o fluxo de dados.

Além disso, os parâmetros consequentes evoluem recursivamente através da identificação dos parâmetros de Markov nebulosos do sistema e da Realização de Auto-Sistema. Como os consequentes das regras são modelos no espaço de estados, a metodologia proposta pode ser facilmente aplicada em sistemas com uma entrada e uma saída (SISO) e sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO). Ainda, a ordem do modelo consequente para cada regra é definida automaticamente, não sendo necessário que esta seja fixada *a priori*.

Ademais, a metodologia proposta é um sistema nebuloso do tipo AnYa (ANGELOV; YAGER, 2012). Desta forma, a base de regras nebulosas é simplificada, eliminando os problemas relacionados à definição de funções de pertinência escalares parametrizadas.

Por fim, como os modelos no espaço de estados para cada regra são definidos pelo Algoritmo de Realização de Auto-Sistema (ERA), é garantido que, para cada regra o modelo é uma realização mínima, permitindo que o mesmo possua a menor ordem possível, garantindo a controlabilidade e observabilidade do modelo, bem como transparência e interpretabilidade. A originalidade e as principais características da metodologia proposta são apresentadas nos seguintes aspectos:

- **Flexibilidade do modelo.** O modelo obtido através desta metodologia adapta-se em tempo real ao fluxo de dados, variando o número de regras nebulosas, adaptando os parâmetros do consequente e até mesmo variando a ordem do modelo para cada regra. Tal flexibilidade é desejável porque, na prática, sistemas dinâmicos reais são não lineares, variantes no tempo ou mesmo inseridos em ambientes não estacionários (PIRES, 2018);
- **Otimização do custo computacional.** Nesta proposta, o algoritmo OKID é executado de forma recursiva, não necessitando do armazenamento e processamento em batelada de dados de entrada e saída do sistema real, reduzindo significativamente a necessidade de alocação de memória e tempo de execução. A proposta é executada de forma que não há a necessidade da coleta de dados para uma identificação prévia *offline*. Por se tratar de uma realização mínima, o consequente para cada regra possui as menores dimensões dentre todos os modelos realizáveis que possuem as mesmas relações de entrada-saída para o sistema dinâmico real, o que também reduz o custo computacional. Além disso, a

definição automática das dimensões das matrizes de Hankel utilizadas durante a realização de auto-sistema permite o uso otimizado de todos os parâmetros de Markov identificados.

- **Redução do número de parâmetros do algoritmo.** A metodologia proposta visa reduzir o número de parâmetros do algoritmo a serem especificados *a priori* por um especialista, eliminando a necessidade de especificar o tamanho da janela de dados e o número dos parâmetros de Markov do sistema para a execução do algoritmo OKID. Além disso, não é necessário especificar as dimensões das matrizes de Hankel nem definir a ordem do sistema para o Algoritmo de Realização de Auto-Sistema, uma vez que estas são determinadas automaticamente pelo algoritmo de identificação.

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo geral

Apresentar uma metodologia para identificação evolutiva de sistemas dinâmicos não lineares multivariáveis baseada em modelos nebulosos AnYa no Espaço de Estados com ordem variável.

1.5.2 Objetivos específicos

- Desenvolver um algoritmo para identificação evolutiva de sistemas dinâmicos não lineares multivariáveis baseada em modelos nebulosos AnYa no Espaço de Estados com ordem variável a partir de dados experimentais;
- Minimizar o número de variáveis a serem especificadas previamente à execução do algoritmo;
- Validar a metodologia proposta a partir de resultados experimentais e comparações com outras estratégias de identificação.

1.6 Produção Bibliográfica

FEITOSA JÚNIOR, A. B.; SERRA, G. L. de O. Multivariable evolving fuzzy modeling approach with time varying order state space. *Anais do XIX Encontro Nacional de Inteligência Artificial e Computacional*, Sociedade Brasileira de Computação - SBC, p. 648–659, 11 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.5753/eniac.2022.226779>>.

FEITOSA JÚNIOR, A. B.; SERRA, G. L. de O. Evolving Fuzzy Identification of Multivariable Systems with Time Varying Order State Space Submodels. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. Qualis A1 (Submetido).

1.7 Organização da Dissertação

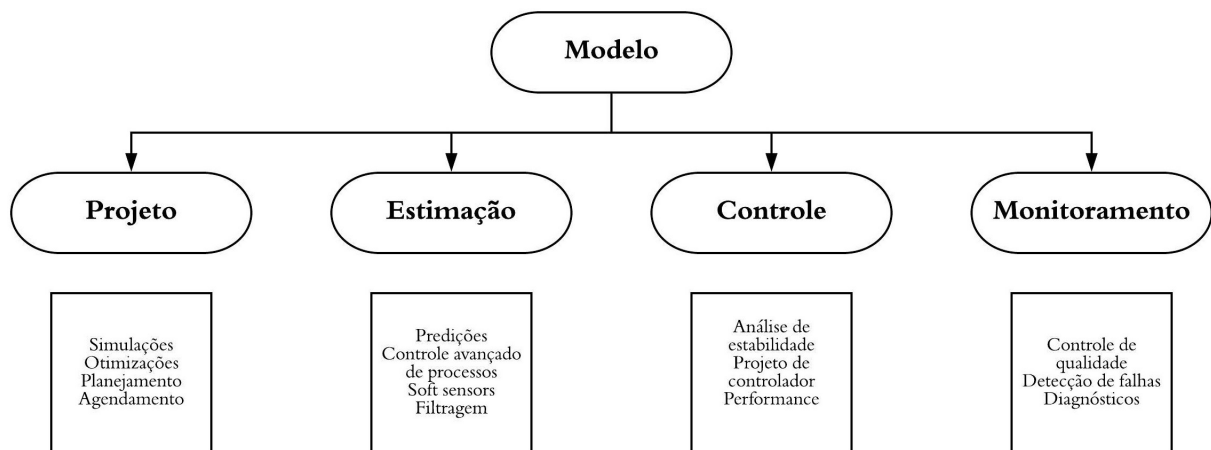
Esta dissertação apresenta uma metodologia para identificação evolutiva de sistemas dinâmicos não lineares multivariáveis baseada em modelos nebulosos AnYa no Espaço de Estados com ordem variável. No capítulo 1 são apresentadas as considerações iniciais sobre o trabalho, destacando as motivações, contribuições, objetivos e trabalhos publicados. No capítulo 2 são percorridos conceitos preliminares acerca da identificação de sistemas, modelagem nebulosa, realização mínima e OKID. Estes conceitos são essenciais para o desenvolvimento da metodologia proposta. No capítulo 3 é apresentada a metodologia para identificação evolutiva de sistemas dinâmicos não lineares multivariáveis proposta nesta dissertação. No capítulo 4 são apresentados os resultados experimentais que demonstram a eficiência e aplicabilidade da metodologia proposta. No capítulo 5 são apresentadas as conclusões deste trabalho e propostas para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Identificação de Sistemas

A análise das características de um processo e relações entre suas variáveis é de fundamental importância para diversas aplicações como: projeto, monitoramento, predição e controle. Para tanto, pode-se estabelecer uma descrição matemática do sistema em estudo. Esta descrição matemática é conhecida como modelo. Aguirre (2015) descreve modelagem matemática como a área do conhecimento que estuda maneiras de desenvolver e implementar modelos matemáticos de sistemas reais. Tangirala (2014) agrupa os benefícios do desenvolvimento de modelos em quatro ramos principais da engenharia de sistemas de processos: projeto, estimação, controle e monitoramento, conforme a Figura 1.

Figura 1 – Benefícios da modelagem.



Fonte: Adaptado de Tangirala (2014).

Existem diversas maneiras de se obter o modelo matemático de um sistema. As técnicas de modelagem matemática podem ser divididas em modelagem caixa branca, modelagem caixa preta e modelagem caixa cinza. A modelagem caixa branca (também conhecida como modelagem conceitual) recebe este nome porque seu método de desenvolvimento é transparente ao sistema, ou seja, o modelo possui um significado físico, já que é desenvolvido através de relações matemáticas que descrevem os fenômenos envolvidos no processo. Entretanto, este tipo de modelagem requer conhecimento aprofundado a respeito do sistema a ser modelado. Aguirre (2015) destaca que "devido ao conhecimento e tempo necessário para modelar um sistema partindo do equacionamento dos fenômenos envolvidos, nem sempre é viável seguir esse procedimento de modelagem".

Identificação de Sistemas é a utilização de técnicas computacionais para a obtenção de uma descrição matemática adequada de um sistema através de dados experimentais. Segundo Tangirala (2014, tradução nossa)

Identificação é o exercício de desenvolver uma relação matemática (modelo) entre as causas (entradas) e os efeitos (saídas) de um sistema (processo) baseado em dados observados ou medidos. Em outras palavras, a identificação estabelece um mapa matemático entre os espaços de entrada e saída, de acordo com os dados.¹

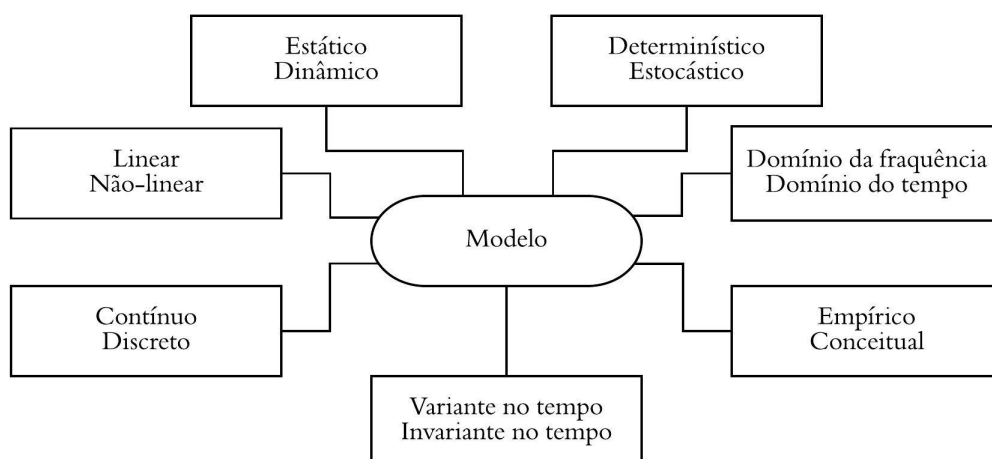
Neste sentido, Aguirre (2015) afirma que "a identificação de sistemas se propõe a obter um modelo matemático que explique, pelo menos em parte e de forma aproximada, a relação de causa e efeito presente nos dados."

2.1.1 Representação Matemática

Existem diversas formas de representar matematicamente um sistema. Tangirala (2014) define modelo matemático como um conjunto de equações algébricas ou diferenciais, lineares ou não-lineares em termos de variáveis ou estados de processo, entradas e parâmetros, construído sobre um conjunto de suposições.

A escolha de um modelo apropriado para representar determinado sistema deve levar em consideração vários aspectos como: abordagem (empírica ou conceitual), características do sistema (linear ou não-linear, variante no tempo ou invariante no tempo), conhecimento disponível (determinístico ou estocástico, caixa preta ou caixa cinza, etc.), domínio da modelagem (tempo contínuo ou tempo discreto, domínio da frequência ou domínio do tempo), características da resposta (estática ou dinâmica, agrupada ou distribuída, etc.). A Figura 2 ilustra algumas classificações de modelos que podem servir de guia para a seleção de uma representação matemática adequada.

Figura 2 – Classificação de modelos.



Fonte: Autor.

¹ Identification is the exercise of developing a mathematical relationship (model) between the causes (inputs) and the effects (outputs) of a system (process) based on observed or measured data. Stated otherwise, identification establishes a mathematical map between the input and output spaces as determined by the data.

Tangirala (2014) determina que quatro fatores primários regem a escolha e desenvolvimento de um modelo adequado, a saber: propósito, considerações de estimação, simplicidade do modelo e significância física.

O propósito da identificação é um dos principais fatores a serem considerados na escolha do modelo. Tangirala (2014) afirma que este é um fator significativo na determinação da natureza, estrutura e precisão do modelo a ser desenvolvido. Todo o exercício de identificação pode ser adaptado para se adequar a uma aplicação específica. Quanto às considerações de estimação, Tangirala (2014) exemplifica: Quando duas ou mais estruturas são igualmente candidatas prováveis, a facilidade de estimação é um fator decisivo. Modelos autorregressivos, por exemplo, resultam em preditores lineares, enquanto os modelos de média móvel produzem preditores não-lineares.

Com relação à simplicidade do modelo, modelos mais simples são sempre preferíveis por representarem maior facilidade de estimação e implementação. Por fim, deve ser avaliada a necessidade de significância física do modelo, pois várias aplicações exigem que os modelos sejam fisicamente significativos, particularmente que a estrutura do modelo possua alguma correspondência com a física ou a biologia do processo (TANGIRALA, 2014).

2.2 Modelagem Nebulosa

Técnicas de modelagem nebulosa têm se tornado uma área de pesquisa ativa devido ao sucesso de suas aplicações em modelagem de sistemas complexos, onde métodos clássicos são difíceis de serem aplicados devido à falta de conhecimento suficiente relacionado ao sistema.

Com base na teoria de conjuntos nebulosos (ZADEH, 1965), modelos nebulosos consistem em regras nebulosas do tipo SE-ENTÃO, como descrito em (2.1). Uma regra nebulosa SE-ENTÃO é uma afirmação SE-ENTÃO em que algumas palavras se caracterizam por funções de pertinência (WANG, 1996).

$$\mathbf{SE} \quad \langle \text{proposição do antecedente} \rangle \quad \mathbf{ENTÃO} \quad \langle \text{proposição do consequente} \rangle. \quad (2.1)$$

Os sistemas nebulosos, ou sistemas baseados em regras nebulosas (FRB, do inglês *Fuzzy Rule-Based*) são aplicados em diversos campos, desde controle, processamento de sinais, comunicações, fabricação de circuitos integrados e sistemas especialistas a negócios, medicina, psicologia, etc (WANG, 1996). No entanto, as aplicações mais significativas se concentraram em problemas de controle. Os dois principais tipos de sistemas nebulosos são:

- sistema nebuloso linguístico (ou *Mamdani*);
- sistema nebuloso *Takagi-Sugeno* (TS).

No sistema nebuloso do tipo *Mamdani* (MAMDANI, 1974), o antecedente e o consequente são formados por proposições nebulosas. Já no sistema nebuloso do tipo *Takagi-Sugeno* (TAKAGI;

SUGENO, 1985), o antecedente é formado por uma proposição nebulosa, mas o consequente é formado por um funcional *crisp* (rígido).

Um modelo TS consiste em um conjunto de modelos lineares locais que são suavemente conectados por funções de pertinência nebulosas não lineares. Desta forma, modelos nebulosos TS fornecem uma base fundamental para o desenvolvimento de ferramentas sistemáticas para análise de estabilidade e projeto de sistemas de controle nebulosos, através de poderosas técnicas e teorias de controle convencionais (FENG, 2018).

2.2.1 Sistema nebuloso *Takagi-Sugeno*

Sistemas nebulosos *Takagi-Sugeno* são amplamente utilizados para representar sistemas não-lineares complexos. Estes modelos consistem de regras nebulosas e modelos dinâmicos lineares locais como segue (LENDEK et al., 2010),

$$R^i : \quad \mathbf{SE} \quad z_1 \text{ é } Z_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_p \text{ é } Z_p^i \quad \mathbf{ENTÃO} \quad \mathbf{y}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{z}), \quad (2.2)$$

onde o vetor \mathbf{z} possui p componentes, z_j , $j = 1, 2, \dots, p$, e é o vetor de variáveis do antecedente. Os conjuntos Z_j^i , $i = 1, 2, \dots, L$, onde L é o número de regras, são os conjuntos nebulosos do antecedente. O grau de pertinência da variável z_j ao conjunto nebuloso Z_j^i é dado pela função de pertinência $\omega_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. O grau de ativação φ_i da i -ésima regra é dado por:

$$\varphi_i(\mathbf{z}) = \omega_{i1} \star \omega_{i2} \star \dots \star \omega_{ip}, \quad (2.3)$$

onde \star representa uma norma-t (KLIR; YUAN, 1995). No modelo nebuloso TS a norma-t utilizada é o produto algébrico:

$$\varphi_i(\mathbf{z}) = \prod_{j=1}^p \omega_{ij}. \quad (2.4)$$

O grau de ativação normalizado para a i -ésima regra é dado por:

$$\gamma_i(\mathbf{z}) = \frac{\varphi_i(\mathbf{z})}{\sum_{j=1}^L \varphi_j(\mathbf{z})}, \quad (2.5)$$

assumindo que $\sum_{j=1}^L \varphi_j(\mathbf{z}) \neq 0$ para qualquer combinação permitida de z_j . A saída do modelo \mathbf{y} é calculada como a soma ponderada dos consequentes das regras, dados por funções lineares locais (modelos locais) \mathbf{F}_i . Dessa forma, tem-se:

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^L \gamma_i(\mathbf{z}) \mathbf{F}_i(\mathbf{z}) \quad (2.6)$$

Duas abordagens principais podem ser usadas para obter modelos nebulosos TS (LENDEK et al., 2010):

- identificação do modelo usando dados medidos ou simulados;

- construção analítica do modelo.

Existem diversos métodos úteis para a obtenção de modelos nebulosos a partir de dados medidos, como treinamento de gradiente descendente, mínimos quadrados recursivos e técnicas de agrupamento de dados. A seguir são descritas algumas técnicas de agrupamento de dados e conceitos relevantes ao tema.

2.2.2 Técnicas de agrupamento de dados

Por muito tempo, técnicas de agrupamento (ou *clusterização*) têm sido consideradas métodos úteis para extrair informação a partir de grandes conjuntos de dados (HYDE; ANGELOV, 2014). Agrupamento de dados tem por objetivo o particionamento de um conjunto de dados em subconjuntos cujos elementos apresentem alguma similaridade entre si. Dentre as várias medidas de similaridade que podem ser consideradas; uma das mais comumente utilizadas é a distância entre as amostras de dados. Existem diferentes tipos de distâncias, como euclidiana, *Mahalanobis*, cosseno, *Minkowski* e assim por diante (ANGELOV, 2013). Técnicas de agrupamento podem ser utilizadas no reconhecimento de padrões, processamento de imagens, aprendizado de máquina, etc.

Os dados a serem particionados por uma técnica de agrupamento podem ser quantitativos, qualitativos ou uma combinação de ambos. Na identificação de sistemas é realizado o particionamento de dados quantitativos (observações de entradas e saídas de sistemas dinâmicos). Cada observação consiste de p variáveis medidas, dispostas em um vetor $\mathbf{z}_k = [z_k^1 \ z_k^2 \ \dots \ z_k^p]^T$. Um conjunto de N observações definido por $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}_k | k = 1, 2, \dots, N\}$ forma uma matriz de dados de dimensões $p \times N$ (BABUŠKA, 2012),

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1^1 & z_2^1 & \dots & z_N^1 \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^p & z_2^p & \dots & z_N^p \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

2.2.3 Tipos de partição

Partições geradas por algoritmos de agrupamento podem ser rígidas (*crisp*) ou nebulosas (*fuzzy*). O particionamento rígido de um conjunto de dados provém da teoria clássica de conjuntos, onde um conjunto de dados \mathbf{Z} pode ser particionado em uma família de subconjuntos $\{\mathbf{T}_i | 1 \leq i \leq c\} \subset \mathbf{Z}$ que satisfazem as seguintes propriedades (BABUŠKA, 2012):

$$\bigcup_{i=1}^c \mathbf{T}_i = \mathbf{Z} \quad (2.8a)$$

$$\mathbf{T}_i \cap \mathbf{T}_j = \emptyset, \quad 1 \leq i \neq j \leq c, \quad (2.8b)$$

$$\emptyset \subset \mathbf{T}_i \subset \mathbf{Z}, \quad 1 \leq i \leq c. \quad (2.8c)$$

As equações descritas em (2.8) afirmam que a união de todos os subconjuntos \mathbf{T}_i contém todos os dados de \mathbf{Z} (2.8a), entretanto, nenhum elemento (dado) pertence a dois ou mais subconjuntos simultaneamente (2.8b), ou seja, os subconjuntos são disjuntos. Além disso, nenhum subconjunto deve ser vazio ou conter todos os elementos de \mathbf{Z} (2.8c). As equações (2.8) podem ser expressas em termos de funções de pertinência (BABUŠKA, 2012):

$$\mu_{ik} \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq i \leq c, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (2.9a)$$

$$\sum_{i=1}^c \mu_{ik} = 1, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (2.9b)$$

$$0 < \sum_{k=1}^N \mu_{ik} < N, \quad 1 \leq i \leq c, \quad (2.9c)$$

onde μ_{ik} é o grau de pertinência de \mathbf{z}_k ao subconjunto \mathbf{T}_i . A equação (2.9a) evidencia que o valor de pertinência de um elemento a um subconjunto somente pode assumir valores 0 ou 1, ou seja, pertence ou não pertence a um subconjunto.

Já no particionamento nebuloso, μ_{ik} pode assumir valores no intervalo $[0, 1]$. Sendo assim, semelhante à definição de particionamento rígido, uma partição nebulosa é dada por (BABUŠKA, 2012):

$$\mu_{ik} \in [0, 1], \quad 1 \leq i \leq c, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (2.10a)$$

$$\sum_{i=1}^c \mu_{ik} = 1, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (2.10b)$$

$$0 < \sum_{k=1}^N \mu_{ik} < N, \quad 1 \leq i \leq c. \quad (2.10c)$$

Desta forma, o particionamento nebuloso difere do particionamento rígido apenas no fato de μ_{ik} poder assumir valores no intervalo $[0, 1]$.

2.2.4 Algoritmos de agrupamento nebuloso

Na literatura é possível encontrar diversos algoritmos de agrupamento que variam quanto ao tipo de informação que deve ser fornecida de antemão (como número de agrupamentos), os tipos de agrupamentos gerados, a função objetivo a ser otimizada, etc. A seguir são apresentados alguns dos algoritmos de agrupamento nebuloso mais conhecidos e utilizados.

2.2.4.1 Fuzzy C-Means

O algoritmo *Fuzzy C-Means* (FCM) tem por objetivo agrupar os dados em c partições nebulosas, ou seja, cada elemento pertence a cada uma das partições com um devido grau de pertinência. Este algoritmo necessita que o número c de partições seja informado previamente. O resultado da execução deste algoritmo é uma matriz U contendo os valores de pertinência de cada ponto de dado em cada partição e um conjunto de vetores $V = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_c)$ contendo as coordenadas dos centroides das partições.

Este algoritmo é executado de acordo com os passos a seguir (BEZDEK; EHRLICH; FULL, 1984):

Passo 1: Para um conjunto de dados \mathbf{Z} , definir $c \in [2, 3, \dots, N - 1]$, $m \in (1, \infty)$ e $U^{(l)}$, sendo $U^{(l)}$ uma matriz $c \times N$ gerada aleatoriamente e a soma dos elementos de cada uma de suas colunas deve ser igual a 1.

Passo 2: Na iteração l , calcular:

$$\mathbf{v}_i^{(l)} = \frac{\sum_{k=1}^N \left(u_{ik}^{(l)}\right)^m \mathbf{z}_k}{\sum_{k=1}^N \left(u_{ik}^{(l)}\right)^m}, \quad 1 \leq i \leq c \quad (2.11)$$

Passo 3: Atualizar $U^{(l)} = [u_{ik}^{(l)}]$ para $U^{(l+1)} = [u_{ik}^{(l+1)}]$ de acordo com (2.12).

$$u_{ik}^{(l+1)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^c \left(\frac{\|\mathbf{z}_k - \mathbf{v}_i^{(l)}\|}{\|\mathbf{z}_k - \mathbf{v}_j^{(l)}\|}\right)^{\frac{2}{m-1}}}, \quad 1 \leq i \leq c, 1 \leq k \leq N \quad (2.12)$$

Passo 4: Se $\|U^{(l+1)} - U^{(l)}\| < \epsilon$, pare; senão, faça $l = l + 1$ e repita o algoritmo a partir do *Passo 2*.

A constante m é conhecida como grau de *fuzzyficação* ou constante de ponderação. Quando $m \rightarrow 1$, as pertinências são maximamente *crisp* e quando $m \rightarrow \infty$, as pertinências são maximamente *fuzzy* (HWANG; RHEE, 2007).

2.2.4.2 Gustafson-Kessel (GK)

O algoritmo de Gustafson-Kessel (GK) (GUSTAFSON; KESSEL, 1978) é uma extensão do algoritmo *Fuzzy C-Means* (FCM) (ANGELOV, 2013). O algoritmo GK usa a norma *Mahalanobis* que permite gerar partições de vários tamanhos e formas diferentes da esférica. Cada partição é caracterizada por um ponto focal e uma matriz de covariância. O uso da norma de Mahalanobis permite que o formato das partições reflita melhor os dados, pois a autoestrutura da matriz de covariância da partição representa a forma e a orientação desta (ANGELOV, 2013).

A desvantagem desse algoritmo é que ele é computacionalmente mais intensivo se comparado ao FCM, devido ao envolvimento de cálculo da inversa de matriz durante a atualização da matriz de covariância. Além disso, o algoritmo é sensível à inicialização dos parâmetros.

O algoritmo começa com uma alocação aleatória de amostras de dados nas partições. Os valores médios de cada partição são então calculados com base nessa alocação inicial aleatória e as pertinências nebulosas dos elementos para cada partição são definidas. Em seguida, inicia-se o processo de realocação, por meio de um método baseado em gradiente, objetivando a minimização de um critério de otimização. As iterações de realocação continuam até que nenhuma melhoria significativa do critério seja observada ou nenhuma realocação real ocorra.

2.2.4.3 eClustering+

O eClustering, proposto por Angelov (2004), realiza o agrupamento *online* dos dados de entrada e saída utilizando uma medida de proximidade espacial calculada recursivamente. Entretanto, este é incapaz de adaptar o raio do agrupamento, sendo o raio predefinido durante a inicialização. Em sua versão mais recente, chamada de eClustering+, o algoritmo adapta o raio, tornando-se independente do usuário ou do problema (ANGELOV; KORDON, 2010; ANGELOV, 2013). Este algoritmo estima a densidade de um ponto de dados usando uma função de Cauchy:

$$D_t(z_t) = \frac{1}{1 + \frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^{t-1} \sum_{j=1}^{n+m} (z_{tj} - z_{ij})^2}, \quad (2.13)$$

$$D_1(z_1) = 1; t = 2, 3, \dots,$$

onde $D_t(z_t)$ é a densidade dos dados avaliada em torno do último ponto de dados do fluxo de dados fornecido ao algoritmo (z_t), n é a dimensão do vetor de entradas, m é a dimensão do vetor de saídas e t é o número de pontos para os quais informações sobre z estão disponíveis.

No eClustering+, a densidade $D_t(z_t)$ é calculada recursivamente da seguinte forma (ANGELOV; ZHOU, 2006):

$$D_t(z_t) = \frac{t-1}{(t-1) \left(\sum_{j=1}^{n+m} z_{tj}^2 + 1 \right) + b_t - 2 \sum_{j=1}^{n+m} z_{tj} c_{tj}}, \quad (2.14)$$

$$D_1(z_1) = 1; t = 2, 3, \dots,$$

onde $b_t = b_{t-1} + \sum_{j=1}^{n+m} z_{(t-1)j}^2$; $b_1 = 0$; $c_{tj} = c_{(t-1)j} + z_{(t-1)j}$; e $c_{1j} = 0$. A equação (2.14) é conhecida como estimador de densidade recursivo (RDE do inglês *recursive density estimator*) e é componente fundamental do eClustering+ (ANGELOV; KORDON, 2010).

Pontos de dados com alta densidade são bons candidatos a pontos focais de agrupamentos. A natureza recursiva do algoritmo torna possível projetar uma base de regras nebulosa que evolui de forma *online*, se adaptando às variações no padrão dos dados.

Se um ponto de dados for selecionado para ser um ponto focal do agrupamento, sua densidade determinada no momento em que se torna um ponto focal pela equação (2.14) será mantida na memória e atualizada. A densidade dos pontos focais dos agrupamentos também pode ser atualizada recursivamente, como segue (ANDREU; ANGELOV, 2010):

$$D_t(z^{i*}) = \frac{t-1}{t-1 + (t-2) \left(\frac{1}{D_{t-1}(z^{i*})} - 1 \right) + \sum_{j=1}^{n+m} (z_{tj} - z_{(t-1)j})^2}, \quad (2.15)$$

$$D_1(z^{i*}) = 1; t = 2, 3, \dots,$$

onde z^{i*} é o ponto focal da i -ésima regra nebulosa.

Assim que as densidades da nova amostra de dados e de cada um dos pontos focais existentes são recursivamente atualizadas, elas são comparadas. Se a nova amostra de dados tiver uma densidade mais alta do que qualquer um dos pontos focais já existentes, esta é uma boa candidata para se tornar um ponto focal de uma nova regra, pois tem alto poder descritivo. Além disso, se a nova amostra de dados tiver uma densidade menor que qualquer um dos pontos focais já existentes, esta também é uma boa candidata para se tornar um ponto focal de uma nova regra, pois amplia a cobertura do espaço de dados. Desta forma, para garantir a formação de agrupamentos representativos, a **Condição A** deve ser verificada para que os agrupamentos sejam formados em torno de pontos focais que possuam alta densidade e garantam boa cobertura do espaço de dados:

$$\text{Condição A : } D_t(z_t) > \max_{i=1}^L D_t(z_t^{i*}) \quad \text{OU} \quad D_t(z_t) < \min_{i=1}^L D_t(z_t^{i*}).$$

Para evitar redundância e controlar o nível de sobreposição, é verificada a **Condição B**, que é fundamental para a remoção de agrupamentos altamente sobrepostos (ANGELOV; ZHOU, 2006; ANGELOV; KORDON, 2010):

$$\text{Condição B: SE } \left(\exists i, i \in [1, L] : \mu_i^j(z_t) > e^{-1}, \forall j, j \in [1, n], t = 2, 3, \dots \right) \text{ ENTÃO } (L \leftarrow L - 1).$$

Se a Condição B for satisfeita, significa que o novo candidato a ponto focal de agrupamento descreve qualquer um dos pontos focais previamente existentes em um certo grau. Os pontos focais existentes anteriormente para os quais esta condição é satisfeita são, então, removidos.

Após a verificação das condições A e B, a amostra de dados atual é atribuída ao ponto focal mais próximo. A seguir, é realizado o monitoramento da qualidade dos agrupamentos gerados. Regras com baixa qualidade devem ser removidas para simplificar a estrutura do modelo e minimizar o efeito de perturbações. Dentre as medidas de qualidade dos agrupamentos, pode-se destacar (ANGELOV; KORDON, 2010):

- Suporte - indica o poder de generalização que uma regra nebulosa específica fornece;
- Idade - indica o quão atualizadas estão as informações que são generalizadas por uma determinada regra nebulosa;
- Utilidade - indica o quanto uma determinada regra nebulosa foi usada depois que foi gerada.

Segundo Angelov (2013), a utilidade é uma medida mais representativa porque se baseia no peso (grau de ativação, confiança). A utilidade é dada por:

$$U_t^i = \frac{\sum_{l=I^{i*}}^t \lambda_l^i}{t - I^{i*}}, \quad i = [1, L], t = 2, 3, \dots, \quad (2.16)$$

onde I^{i*} é o instante em que a i -ésima regra nebulosa foi criada e λ_l^i é o grau de ativação da i -ésima regra no instante l . Regras que satisfazem a seguinte condição são removidas:

$$\text{SE } U_t^i < \eta \quad \text{ENTÃO } L \leftarrow L - 1. \quad (2.17)$$

Angelov (2013) sugere que η assuma valores entre 0,03 e 0,1.

Por fim, a zona de influência da regra (também conhecida como dispersão ou variância) é atualizada recursivamente de acordo com a equação a seguir (ANGELOV, 2013):

$$\sigma_{t,j}^i = \sqrt{\alpha \left(\sigma_{(t-1)j}^i \right)^2 + (1 - \alpha) \frac{1}{S_t^i} (z_t^j - z_j^{i*})^2}, \quad (2.18)$$

onde S_t^i é o suporte da i -ésima regra no instante t . A constante α é denominada passo de aprendizagem e seu valor recomendado é 0,5 (ANGELOV; ZHOU, 2006; ANGELOV, 2013). O valor de $\alpha = 0,5$ significa que a nova informação possui o mesmo peso da informação já existente. Angelov e Zhou (2006) afirmam que esse valor fornece resultados de desempenho muito bons e pode ser adotado como uma constante genérica independente do problema.

2.2.5 Sistema nebuloso AnYa

Os sistemas nebulosos *Takagi-Sugeno* e *Mamdani* compartilham o mesmo tipo de antecedente, baseado em conjuntos nebulosos escalares; apenas diferindo no consequente, que para o tipo TS é do tipo funcional *crisp*, enquanto que para o tipo Mamdani é baseado em conjuntos nebulosos. Em ambos os tipos, o antecedente é determinado por conjuntos nebulosos (um para cada variável), que são definidos por funções de pertinência escalares parametrizadas. Alguns problemas são oriundos dessa abordagem, como (ANGELOV; YAGER, 2012):

- O grau de ativação de uma regra nebulosa é determinado por uma agregação (norma-t) dos graus de pertinência de uma amostra de dados para cada um dos conjuntos nebulosos;
- A definição de uma função de pertinência requer parametrização, determinando os limites central e esquerdo/direito ou espalhamento;
- As funções de pertinência muitas vezes diferem significativamente da distribuição real dos dados.

Em seu artigo, Angelov e Yager (2012) propõem um conceito inovador para a forma como a parte antecedente é definida, conhecido como sistema nebuloso AnYa. De acordo com o conceito proposto, assume-se que o sistema é decomponível em um conjunto de sistemas locais mais simples, livremente conectados, agregados de forma nebulosa (*fuzzy*). Cada subsistema local é válido apenas para um determinado subconjunto de dados, denominado nuvem de dados (do inglês *data cloud*). Cada amostra de dados está associada a mais de uma nuvem ao mesmo

tempo, com diferentes graus de pertinência determinados pela densidade local para todas as amostras da nuvem.

A abordagem proposta substitui as funções de pertinência escalares (por variável) por uma função não paramétrica, que representa a densidade de dados local (por nuvem) (ANGELOV; YAGER, 2012). A intenção é simplificar a definição da base de regras nebulosas, removendo os problemas relacionados à definição de funções de pertinência parametrizadas escalares.

Assim sendo, este método permite a criação de uma base de regras nebulosas evolutiva sem predefinir os parâmetros do antecedente (YANG et al., 2021), definindo a parte SE das regras sem funções de pertinência explícitas ou quaisquer operadores nebulosos. Os antecedentes das regras nebulosas são formados sobre as nuvens de dados, que são os conjuntos de amostras atraídas ao redor dos pontos focais (ANGELOV; SKRJANC; BLAZIC, 2013).

Apesar de apresentar algumas semelhanças com agrupamento (*clustering*), existem várias diferenças importantes entre nuvens e *clusters*. A principal diferença é que o AnYa não considera e não requer funções de pertinência ou conjuntos nebulosos por variável escalar a ser formulada. Nesse sentido, esta estrutura FRB simplificada também pode ser vista como conjuntos nebulosos tipo 0 (ANGELOV; YAGER, 2012).

Ainda segundo Angelov e Yager (2012), nuvens de dados são conjuntos de amostras de dados anteriores com propriedades comuns (proximidade em termos de mapeamento de entrada-saída). Elas representam diretamente todas as amostras de dados anteriores. Em contraste a isso, as funções de pertinência tradicionais geralmente não representam as verdadeiras distribuições de dados. Entretanto, a *fuzzyficação* é preservada no sentido de que uma determinada amostra de dados pode pertencer a todas as nuvens com diferentes graus de pertinência, $\gamma \in [0; 1]$.

Considera-se um sistema complexo, geralmente não linear, não estacionário, não determinístico, que só pode ser descrito e observado por seus vetores de entrada e saída $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ e $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$, respectivamente. O objetivo é descrever a dependência entrada-saída com base em um histórico de observações de pares de entrada-saída, $\mathbf{z}_j = [\mathbf{x}_j^T; \mathbf{y}_j^T]^T$, $j = 1, 2, \dots, k-1$ e as entradas no instante atual \mathbf{x}_k .

Uma nuvem é descrita pelo conjunto de amostras de dados que lhe pertencem e linguisticamente por uma declaração da seguinte forma (ANGELOV; YAGER, 2012):

$$(\mathbf{z} \text{ se parece com } \mathcal{J}^i), \quad (2.19)$$

onde \mathcal{J}^i , ($\mathcal{J} \in \mathbb{R}^{n+m}$ e $i \in [1, N]$) representa uma nuvem no espaço de dados entrada-saída.

$$(\mathbf{x} \text{ se parece com } \mathfrak{X}^i), \quad \mathfrak{X} \in \mathbb{R}^n, \quad i \in [1, N], \quad (2.20)$$

onde \mathfrak{X}^i representa uma nuvem no espaço de dados de entrada. O grau de pertinência a uma nuvem é medido pela densidade local normalizada para uma dada amostra de dados \mathbf{x}_k :

$$\lambda_k^i = \frac{\gamma_k^i}{\sum_{j=1}^N \gamma_k^j}, \quad i \in [1, N], \quad (2.21)$$

onde γ^i é a densidade local da i -ésima nuvem para uma dada amostra de dados, que é definida por um *kernel* adequado sobre a distância entre a amostra atual, \mathbf{x}_k , e todas as outras amostras dessa nuvem,

$$\gamma^i = K \left(\sum_{j=1}^{M^i} d_{kj}^i \right), \quad i \in [1, N], \quad (2.22)$$

onde M^i representa o número de amostras de entrada associadas com a i -ésima nuvem. De forma similar, a densidade global Υ para uma dada amostra de dados, \mathbf{z}_k , que é definida por um *kernel* adequado sobre a distância entre a amostra atual, \mathbf{z}_k , e todas as outras amostras,

$$\Upsilon_k = K \left(\sum_{j=1}^k d_{kj} \right). \quad (2.23)$$

O *kernel* é uma medida de similaridade e, neste caso, é utilizada a densidade. A densidade local com uma função do tipo Cauchy pode ser definida como

$$\gamma_k^i = \frac{1}{1 + (1/M^i) \sum_{j=1}^{M^i} (d_{kj}^i)^2}. \quad (2.24)$$

Recursivamente, tem-se

$$\gamma_k^i = \frac{1}{1 + \|\mathbf{x}_k - \boldsymbol{\mu}_k^L\|^2 + \boldsymbol{\Sigma}_k^L - \|\boldsymbol{\mu}_k^L\|^2}, \quad (2.25)$$

onde $\boldsymbol{\mu}_k^L$ é o valor médio local dos dados da nuvem e $\boldsymbol{\Sigma}_k^L$ é o produto escalar médio local dos dados da nuvem.

De maneira muito semelhante, a densidade global, Υ_k , pode ser definida, dessa vez considerando todos os pontos em vez de pontos de uma nuvem específica:

$$\Upsilon_k = \frac{1}{1 + \|\mathbf{x}_k - \boldsymbol{\mu}_k\|^2 + \boldsymbol{\Sigma}_k - \|\boldsymbol{\mu}_k^L\|^2}, \quad (2.26)$$

onde $\boldsymbol{\mu}_k$ é o valor médio global de todos os dados disponíveis e $\boldsymbol{\Sigma}_k^L$ é o produto escalar médio global de todos os dados disponíveis.

Pode-se agora definir a base de regras nebulosas simplificada como

$$R^i : \quad \text{SE } (\mathbf{x}_k \text{ se parece com } \mathfrak{X}^i) \quad \text{ENTÃO } (\mathbf{y}^i = \mathbf{x}_k^T \boldsymbol{\pi}^i), \quad (2.27)$$

onde o grau de satisfação da parte premissa é determinado pela densidade local, γ^i , e

$$\boldsymbol{\pi}^i = \begin{bmatrix} a_{01}^i & a_{02}^i & \cdots & a_{0m}^i \\ a_{11}^i & a_{12}^i & \cdots & a_{1m}^i \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1}^i & a_{n2}^i & \cdots & a_{nm}^i \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

são os parâmetros do conseqüente do subsistema. A saída geral do sistema, \mathbf{y} , é formada como uma coleção de vários submodelos mais simples válidos localmente (por nuvem), \mathbf{y}^i :

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^N \lambda^i \mathbf{y}^i, \quad (2.29)$$

onde \mathbf{y}^i representa a saída do subsistema local.

2.3 Realização Mínima de Sistemas

Nesta seção são apresentados alguns conceitos básicos da teoria de realização mínima de sistemas. Considere a seguinte representação no espaço de estados de um sistema dinâmico linear, invariante no tempo, no domínio do tempo discreto:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (2.30a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k, \quad (2.30b)$$

onde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de estados, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ é a matriz de entrada, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ é a matriz de saída, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q \times r}$ é a matriz de transmissão direta, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de entrada (ou de controle), $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saída e n é a ordem do modelo no espaço de estados.

A teoria de realização de sistemas trata do estudo e aplicação de métodos que permitem determinar as características dinâmicas de um sistema, através da identificação de um modelo no espaço de estados (PIRES, 2018). O problema da realização de sistemas é o seguinte: Dadas as funções de medição \mathbf{y}_k , construa matrizes constantes de modo que as funções \mathbf{y} sejam reproduzidas pelas equações de variáveis de estado (JUANG; PAPPA, 1985). Uma realização é mínima se a ordem do modelo é mínima. Além disso, uma realização $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ é mínima se e somente se for controlável e observável (SCHUTTER, 2000). Diante disso, os conceitos de controlabilidade e observabilidade, introduzidos por Kalman (1963), se mostram essenciais na teoria de realização de sistemas e serão apresentados nas próximas subseções.

Os métodos para realização mínima no espaço de estados podem ser classificados em dois grupos principais (SCHUTTER, 2000):

- Métodos que começam com uma realização não mínima que pode ser obtida facilmente e então reduzida para obter uma realização que é controlável e observável e, portanto, também mínima;
- Métodos que começam com a resposta ao impulso (ou parâmetros de Markov) do sistema e obtêm a realização mínima diretamente por transformações adequadas da matriz de Hankel resultante.

2.3.1 Controlabilidade no domínio do tempo discreto

O estado \mathbf{x}_k de um sistema é dito controlável se esse estado pode ser alcançado a partir de qualquer estado inicial \mathbf{x}_0 do sistema em um intervalo de tempo finito por alguma ação de controle (JUANG; PHAN, 2001). Se todos os estados são controláveis, o sistema é considerado completamente controlável ou simplesmente controlável.

Se qualquer variável de estado é independente do sinal de controle, então é impossível controlar esse estado e, conseqüentemente, o sistema é incontrolável. Embora a maioria dos

sistemas físicos sejam controláveis, seus respectivos modelos matemáticos podem não possuir esta propriedade (OGATA, 1995). Portanto, se faz necessário conhecer as condições nas quais um sistema é controlável.

A solução para a equação (2.30a) no instante de tempo $k = p$ é dada por:

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{A}^p \mathbf{x}_0 + \sum_{j=1}^p \mathbf{A}^{j-1} \mathbf{B} \mathbf{u}_{p-j} \quad (2.31)$$

ou na forma matricial

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{A}^p \mathbf{x}_0 + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{p-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{p-1} \\ \mathbf{u}_{p-2} \\ \mathbf{u}_{p-3} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Partindo de um estado inicial \mathbf{x}_0 e especificando qualquer estado desejado \mathbf{x}_p no instante de tempo $k = p$, a sequência de entradas de controle que trará \mathbf{x}_0 para \mathbf{x}_p deve ser obtida a partir da seguinte equação (JUANG; PHAN, 2001):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{p-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{p-1} \\ \mathbf{u}_{p-2} \\ \mathbf{u}_{p-3} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_p - \mathbf{A}^p \mathbf{x}_0. \quad (2.33)$$

A existência ou não de uma sequência de controle que trará o sistema de um estado inicial \mathbf{x}_0 para algum estado desejado \mathbf{x}_p depende do posto da matriz de controlabilidade:

$$\mathbf{Q}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{p-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Definindo \mathbf{u}_p por

$$\mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{p-1} \\ \mathbf{u}_{p-2} \\ \mathbf{u}_{p-3} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

a equação (2.33) torna-se

$$\mathbf{Q}_p \mathbf{u}_p = \mathbf{x}_p - \mathbf{A}^p \mathbf{x}_0. \quad (2.36)$$

O vetor coluna \mathbf{u}_p contém rp elementos e a matriz de controlabilidade \mathbf{Q}_p tem $n \times rp$ elementos. Desta forma, a equação (2.36) possui n equações com rp incógnitas em \mathbf{u}_p . Portanto,

a equação (2.36) tem uma solução para qualquer estado final desejado \mathbf{x}_p apenas quando rp é maior ou igual a n e \mathbf{Q}_p tem posto n . Assim sendo, um sistema dinâmico linear, de dimensão finita, no tempo discreto e invariante no tempo, de ordem n é controlável se e somente se a matriz de controlabilidade \mathbf{Q}_p tem posto n .

2.3.2 Observabilidade no domínio do tempo discreto

Um estado \mathbf{x}_p do sistema no instante de tempo $k = p$ é dito ser observável se o conhecimento da entrada \mathbf{u}_k e da saída \mathbf{y}_k ao longo de um intervalo de tempo finito $0 \leq k \leq p - 1$ pode ser usado para determinar o estado \mathbf{x}_p (JUANG; PHAN, 2001). Se todos os estados são observáveis, diz-se que o sistema é completamente observável ou simplesmente observável.

Para determinar a observabilidade do sistema descrito em (2.30), é condição suficiente verificar se o estado inicial \mathbf{x}_0 pode ser determinado apenas a partir da saída \mathbf{y}_k , $0 \leq k \leq p - 1$, quando a entrada \mathbf{u}_k é nula, pois uma vez conhecido o estado inicial \mathbf{x}_0 , o estado do sistema em qualquer instante de tempo $k > 0$ pode ser obtido a partir da equação de estado descrita em (2.30a).

A partir do sistema descrito em (2.30), fazendo $\mathbf{u}_k = 0 \forall k$, a saída do sistema é dada por:

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{C}\mathbf{x}_0, \quad (2.37a)$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}_0, \quad (2.37b)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{y}_{p-1} = \mathbf{C}\mathbf{A}^{p-1}\mathbf{x}_0. \quad (2.37c)$$

Na forma matricial, estas equações podem ser escritas como

$$\mathbf{y}_p = \mathbf{P}_p\mathbf{x}_0, \quad (2.38)$$

onde

$$\mathbf{y}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{p-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{p-1} \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

A solução para este sistema de equações é dada por

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}_p^\dagger \mathbf{y}_p, \quad (2.40)$$

onde \dagger representa a pseudo-inversa. O estado inicial \mathbf{x}_0 pode ser obtido unicamente se e somente se a matriz de observabilidade \mathbf{P}_p , de dimensões $pq \times n$ possui posto n .

2.3.3 Conceitos básicos de realização

Dado o sistema apresentado pela equação (2.30), fazendo $u_{s0} = 1$ ($s = 1, 2, \dots, r$) e $u_{sk} = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), pode ser obtida a matriz de resposta ao impulso, \mathbf{M}_k , com dimensões

$q \times r$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_0 &= \mathbf{D}, \\
 \mathbf{M}_1 &= \mathbf{CB}, \\
 \mathbf{M}_2 &= \mathbf{CAB}, \\
 \mathbf{M}_3 &= \mathbf{CA}^2\mathbf{B}, \\
 &\vdots \\
 \mathbf{M}_k &= \mathbf{CA}^{k-1}\mathbf{B}.
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Esta sequência de matrizes constantes é conhecida como parâmetros de Markov do sistema.

Os parâmetros de Markov são utilizados na identificação do sistema disposto em (2.30). Como $\mathbf{M}_0 = \mathbf{D}$, apenas as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} precisam ser determinadas. O problema da realização de sistemas visa construir as matrizes constantes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} a partir dos parâmetros de Markov do sistema.

Todo sistema possui um número infinito de realizações que irão prever respostas idênticas para qualquer entrada particular (JUANG; PAPPAS, 1985). Entretanto, a realização mínima produz um modelo com a menor dimensão em espaço de estados sobre todos os sistemas realizáveis que possuem a mesma relação entrada-saída. Além disso, todas as realizações mínimas têm o mesmo conjunto de autovalores, os quais correspondem aos parâmetros modais do sistema.

A realização do sistema se inicia na formação da matriz generalizada de Hankel $pq \times \gamma r$, composta pelos parâmetros de Markov descritos em (2.41).

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \cdots & \mathbf{M}_\gamma \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \cdots & \mathbf{M}_{\gamma+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_p & \mathbf{M}_{p+1} & \cdots & \mathbf{M}_{p+\gamma-1} \end{bmatrix}, \tag{2.42}$$

onde p e γ são inteiros de forma que $\gamma r \geq pq$. O primeiro parâmetro de Markov $\mathbf{M}_0 = \mathbf{D}$ não é incluído em \mathbf{H}_0 .

A matriz \mathbf{H}_0 possui posto n se $pq \geq n$, pois esta pode ser decomposta em duas matrizes de posto n :

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & \mathbf{CAB} & \cdots & \mathbf{CA}^{\gamma-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^\gamma\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{p-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^p\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{p+\gamma-2}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_p \mathbf{Q}_\gamma, \tag{2.43}$$

onde \mathbf{P}_p e \mathbf{Q}_γ são dadas por

$$\mathbf{P}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{p-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_\gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{\gamma-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

A matriz \mathbf{P}_p é a matriz de observabilidade, enquanto a matriz \mathbf{Q}_γ é a matriz de controlabilidade. Se a ordem do sistema for n , então a dimensão mínima da matriz de estados é $n \times n$. Se o sistema for controlável e observável, as matrizes \mathbf{P}_p e \mathbf{Q}_γ são de ordem n (JUANG; PHAN, 2001). Portanto, a matriz de Hankel \mathbf{H}_0 possui posto n .

2.3.4 Algoritmo de realização de auto-sistema (ERA)

Existem vários métodos disponíveis para calcular um modelo no espaço de estados a partir dos parâmetros de Markov do sistema. Um método comumente utilizado é o algoritmo de realização de auto-sistema (ERA, do inglês *Eigensystem Realization Algorithm*). O processo ERA se inicia com a fatoração da matriz de Hankel, definida em (2.42), através da sua decomposição em valores singulares (SVD, do inglês *Singular Value Decomposition*):

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{R}\mathbf{\Sigma}\mathbf{S}^T, \quad (2.45)$$

onde as colunas das matrizes \mathbf{R} e \mathbf{S} são ortonormais e $\mathbf{\Sigma}$ é uma matriz retangular,

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

na qual $\mathbf{0}$ são matrizes nulas com dimensões apropriadas e

$$\mathbf{\Sigma}_n = \text{diag} \left[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n \right], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.47)$$

sendo $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_i \geq \sigma_{i+1} \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$.

Em seguida, formam-se as matrizes \mathbf{R}_n e \mathbf{S}_n a partir das primeiras n colunas de \mathbf{R} e \mathbf{S} , respectivamente. Então tem-se

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{R}_n \mathbf{\Sigma}_n \mathbf{S}_n^T, \quad \text{onde} \quad \mathbf{R}_n^T \mathbf{R}_n = \mathbf{I}_n = \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n. \quad (2.48)$$

Analisando as equações (2.43) e (2.48), é possível escrever a seguinte igualdade:

$$\mathbf{H}_0 = \left[\mathbf{R}_n \mathbf{\Sigma}_n^{1/2} \right] \left[\mathbf{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \right] \cong \mathbf{P}_p \mathbf{Q}_\gamma, \quad (2.49)$$

onde o sinal de aproximação \cong é usado devido ao ruído e ao truncamento de pequenos valores singulares diferentes de zero.

Uma interpretação da equação (2.49) é que \mathbf{P}_p está relacionada a \mathbf{R}_n e \mathbf{Q}_γ está relacionada a \mathbf{S}_n^T . De fato, uma escolha possível é (JUANG; PHAN, 2001):

$$\mathbf{P}_p = \mathbf{R}_n \mathbf{\Sigma}_n^{1/2}, \quad (2.50a)$$

$$\mathbf{Q}_\gamma = \mathbf{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T. \quad (2.50b)$$

A partir da equação (2.44), é possível obter

$$\mathbf{B} = \text{as } r \text{ primeiras colunas de (2.50b),} \quad (2.51a)$$

$$\mathbf{C} = \text{as } q \text{ primeiras linhas de (2.50a).} \quad (2.51b)$$

Para determinar a matriz \mathbf{A} , é formada a matriz de Hankel generalizada \mathbf{H}_1 , de dimensões $pq \times \gamma r$ da seguinte forma:

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \cdots & \mathbf{M}_{\gamma+1} \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \cdots & \mathbf{M}_{\gamma+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{p+1} & \mathbf{M}_{p+2} & \cdots & \mathbf{M}_{p+\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{CAB} & \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^\gamma\mathbf{B} \\ \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \mathbf{CA}^3\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{\gamma+1}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^p\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{p+1}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{p+\gamma-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Similarmente à equação (2.43), tem-se

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{P}_p \mathbf{A} \mathbf{Q}_\gamma \quad (2.53)$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{R}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T. \quad (2.54)$$

A matriz \mathbf{A} é, então, obtida a partir da seguinte equação:

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}_1 \mathbf{S}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2}. \quad (2.55)$$

Vale ressaltar que a realização no espaço de estados representada por \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} , obtidas através de do algoritmo ERA é uma realização mínima, ou seja, o modelo é controlável e observável e sua ordem é mínima (JUANG; PHAN, 2001).

2.4 O algoritmo OKID

O algoritmo OKID (Identificação com Observador/Filtro de Kalman, do inglês *Observer/Kalman Filter Identification*) é uma metodologia utilizada na obtenção dos parâmetros de Markov de um sistema a partir de dados de entrada e saída do mesmo, com a utilização de um observador de Luenberger.

Considere o sistema dinâmico linear, invariante no tempo, no domínio do tempo discreto descrito pela equação (2.30). Para uma dada sequência de entrada \mathbf{u}_k , partindo do instante \mathbf{k}_0 , pode-se determinar o estado \mathbf{x}_{k_0+r} ($r \geq 0$) da seguinte forma:

$$\mathbf{x}_{k_0+r} = \mathbf{A}^r \mathbf{x}_{k_0} + \sum_{j=1}^r \mathbf{A}^{r-j} \mathbf{B} \mathbf{u}_{k_0+j-1}. \quad (2.56)$$

A equação para a saída do sistema é então dada por

$$\mathbf{y}_{k_0+r} = \mathbf{C} \mathbf{A}^r \mathbf{x}_{k_0} + \sum_{j=1}^r \mathbf{C} \mathbf{A}^{r-j} \mathbf{B} \mathbf{u}_{k_0+j-1} + \mathbf{D} \mathbf{u}_{k_0}, \quad (2.57)$$

ou na forma matricial:

$$\mathbf{y}_{k_0+r} = \mathbf{C} \mathbf{A}^r \mathbf{x}_{k_0} + \mathbf{M}_r \bar{\mathbf{u}}_{k_0}^{(r)}, \quad (2.58)$$

onde

$$\mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{A}^{r-1} \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{C} \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

e

$$\bar{\mathbf{u}}_{k_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k_0} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k_0+r} \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

A matriz \mathbf{M}_r é composta por r parâmetros de Markov do sistema.

Para um sistema assintoticamente estável, $\mathbf{A}^r \rightarrow \mathbf{0}$ para valores crescentes de r . Desta forma, para um valor de p suficientemente grande, tem-se $\mathbf{A}^p \approx \mathbf{0}$. Isto significa que as condições anteriores do sistema possuem influência negligenciável nos dados medidos após p instantes de tempo. Assim sendo, pode-se reescrever a equação (2.58) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k_0+p} &= \mathbf{CA}^p \mathbf{x}_{k_0} + \mathbf{M}_p \bar{\mathbf{u}}_{k_0}^{(p)} \\ &\approx \mathbf{M}_p \bar{\mathbf{u}}_{k_0}^{(p)}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Assim, pode-se obter \mathbf{M}_p resolvendo a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k_0+p} & \mathbf{y}_{k_0+p+1} & \cdots & \mathbf{y}_{k_0+l-1} \end{bmatrix} \approx \mathbf{M}_p \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{k_0}^{(p)} & \bar{\mathbf{u}}_{k_0+1}^{(p)} & \cdots & \bar{\mathbf{u}}_{k_0+l-1}^{(p)} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

A equação (2.62) pode ser resolvida através do método de mínimos quadrados utilizando-se n medições, preferencialmente $l \gg p$. Entretanto, para sistemas levemente amortecidos e, conseqüentemente, com tempo de acomodação elevado, a quantidade (l) de medições necessárias é elevada e a solução da equação pode tornar-se computacionalmente inviável.

Para contornar este problema, ao invés de identificar diretamente os parâmetros de Markov do sistema como em (2.62), o OKID identifica os parâmetros de Markov de um sistema modificado que é assintoticamente estável, através de um observador de Luenberger (1964). O objetivo principal de introduzir um observador é usá-lo como um artifício para compactar os dados e melhorar os resultados de identificação do sistema na prática (JUANG et al., 1991). Neste sentido, o papel do observador não é fornecer estimativas dos estados do sistema, mas sim fornecer um conjunto de equações assintoticamente estáveis cujos parâmetros podem ser facilmente identificados (PHAN et al., 1993). Adicionando e subtraindo o termo $\mathbf{G}\mathbf{y}_k$ do lado direito da equação (2.30a), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{G}\mathbf{y}_k - \mathbf{G}\mathbf{y}_k \\ &= [\mathbf{A} + \mathbf{GC}]\mathbf{x}_k + [\mathbf{B} + \mathbf{GD}]\mathbf{u}_k - \mathbf{G}\mathbf{y}_k \\ &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}_k + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{GC} \quad (2.64)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = [\mathbf{B} + \mathbf{GD} - \mathbf{G}] \quad (2.65)$$

$$\mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

e $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ é uma matriz escolhida para tornar a matriz $\bar{\mathbf{A}}$ tão estável quanto desejado. A relação de entrada-saída em forma matricial para a equação (2.63) é:

$$\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{V}} \quad (2.67)$$

onde

$$\bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} y_p & y_{p+1} & \cdots & y_{l-1} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{C}\bar{\mathbf{B}} & \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} & \cdots & \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^{p-1}\bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$$\bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_p & \mathbf{u}_{p+1} & \cdots & \mathbf{u}_{l-1} \\ \mathbf{v}_{p-1} & \mathbf{v}_p & \cdots & \mathbf{v}_{l-2} \\ \mathbf{v}_{p-2} & \mathbf{v}_{p-1} & \cdots & \mathbf{v}_{l-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_0 & \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_{l-p-1} \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

A equação (2.67) pode então ser resolvida para os parâmetros de Markov do observador ($\bar{\mathbf{M}}$) por mínimos quadrados:

$$\bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{V}}^T [\bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{V}}^T]^{-1} \quad (2.71)$$

Para recuperar os parâmetros de Markov do sistema (\mathbf{M}) a partir dos parâmetros de Markov do observador ($\bar{\mathbf{M}}$), particiona-se $\bar{\mathbf{M}}$ da seguinte maneira:

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{-1} & \bar{\mathbf{M}}_0 & \bar{\mathbf{M}}_1 & \cdots & \bar{\mathbf{M}}_{p-1} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}_k &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^k\bar{\mathbf{B}} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})^k(\mathbf{B} + \mathbf{G}\mathbf{D}) & -\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})^k\mathbf{G} \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_k^{(1)} & \bar{\mathbf{M}}_k^{(2)} \end{bmatrix}; \quad k \in [0, p-1] \end{aligned} \quad (2.73)$$

e

$$\bar{\mathbf{M}}_{-1} = \mathbf{D}. \quad (2.74)$$

A relação geral entre os parâmetros de Markov do sistema real e os parâmetros de Markov do observador é (JUANG et al., 1993):

$$\mathbf{M}_k = \bar{\mathbf{M}}_k^{(1)} + \sum_{i=0}^{k-1} \bar{\mathbf{M}}_i^{(2)} \mathbf{M}_{k-i-1} + \bar{\mathbf{M}}_k^{(2)} \mathbf{D} \quad (2.75)$$

Uma vez obtidos os parâmetros de Markov do sistema, um procedimento padrão de realização pode ser utilizado para a obtenção dos parâmetros do sistema no domínio do tempo (JUANG; PHAN; LONGMAN, 1991). Para um sistema de dimensão finita, o conhecimento de um número suficiente de parâmetros de Markov do sistema real é suficiente para deduzir uma realização no espaço de estados do sistema de interesse (PHAN et al., 1993).

3 METODOLOGIA PROPOSTA

Este capítulo apresenta a formulação matemática baseada em modelagem nebulosa com estimação evolutiva do antecedente e estimação recursiva do consequente.

3.1 Estrutura do modelo nebuloso evolutivo

A i -ésima regra do modelo nebuloso evolutivo da planta a ser identificado é dada por:

$$R^i: \quad \text{SE } (\mathbf{z}_k \sim \xi_k^i) \text{ ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^i &= \mathbf{A}_k^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{B}_k^i \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k^i &= \mathbf{C}_k^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{D}_k^i \mathbf{u}_k \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad (3.1)$$

onde L é o número de regras, $\mathbf{z}_k = [\mathbf{u}_k^T \mathbf{y}_k^T]^T \in \mathbb{R}^{r+q}$ é a amostra de dados no instante k , ξ_k^i representa a i -ésima nuvem de dados, \sim indica que a associação nebulosa é expressa linguisticamente como "está associado a", $\mathbf{A}_k^i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $\mathbf{B}_k^i \in \mathbb{R}^{n_i \times r}$, $\mathbf{C}_k^i \in \mathbb{R}^{q \times n_i}$, $\mathbf{D}_k^i \in \mathbb{R}^{q \times r}$, $\mathbf{x}_k^i = [x_k^1 \ x_k^2 \ \dots \ x_k^{n_i}]^T \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\mathbf{u}_k = [u_k^1 \ u_k^2 \ \dots \ u_k^r]^T \in \mathbb{R}^r$ e $\mathbf{y}_k^i = [y_k^1 \ y_k^2 \ \dots \ y_k^q]^T \in \mathbb{R}^q$ são, respectivamente, matriz de estados, matriz de entrada, matriz de saída, matriz de transmissão direta, vetor de estados, vetor de entrada e vetor de saída do modelo linear local para a i -ésima regra. n_i é a ordem do modelo para a i -ésima regra.

O antecedente do sistema é representado por uma nuvem de dados que descreve um determinado subconjunto de todo o conjunto de dados. Assim, a abordagem proposta substitui as funções de pertinência escalares por uma função não paramétrica que é representada pelas densidades locais (YANG et al., 2021).

Considerando o tipo de distância euclidiana, a densidade local da i -ésima nuvem de dados é definida da seguinte forma (ANGELOV; GU; KANGIN, 2017; YANG et al., 2021):

$$\gamma_k^i = \frac{1}{1 + \frac{\|\mathbf{z}_k - \bar{\mathbf{z}}_k^i\|^2}{\Xi_k^i - \|\bar{\mathbf{z}}_k^i\|^2}} \quad (3.2)$$

onde $\bar{\mathbf{z}}_k^i$ e Ξ_k^i são, respectivamente, o valor médio e o produto escalar das amostras de dados dentro da i -ésima nuvem de dados. A densidade local normalizada para cada nuvem de dados é dada por:

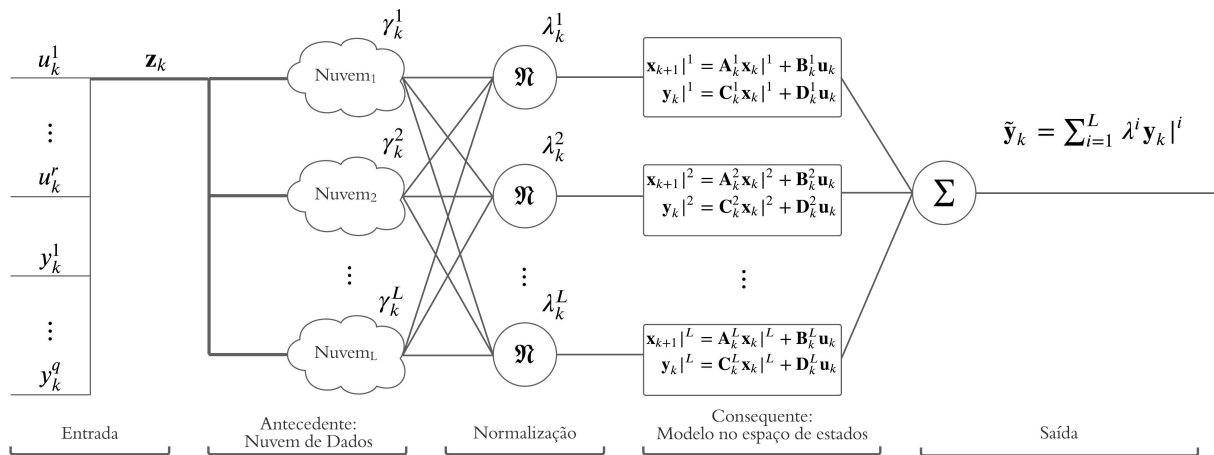
$$\lambda_k^i = \frac{\gamma_k^i}{\sum_{i=1}^L \gamma_k^i}, \quad i = 1, 2, \dots, L. \quad (3.3)$$

A saída do modelo nebuloso é dada por

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \sum_{i=1}^L \lambda_k^i \mathbf{y}_k^i \quad (3.4)$$

O modelo nebuloso evolutivo proposto é representado graficamente na figura 3.

Figura 3 – Diagrama de blocos do modelo proposto.



Fonte: Autor.

3.2 Estimação do Antecedente

A estimação do antecedente é feita utilizando o conceito proposto inicialmente por Angelov e Yager (2012), no qual foi introduzido um tipo simplificado de sistema baseado em regras nebulosas, chamado AnYa, que oferece uma maneira de definir o antecedente das regras sem definir as funções de pertinência por variável de maneira explícita. As partes antecedentes das regras nebulosas são formadas sobre nuvens de dados, que são livres de parâmetros e reduzem os problemas de definição e ajuste de funções de pertinência (ANGELOV; SKRJANC; BLAZIC, 2013).

No artigo original, os pontos focais foram identificados usando o algoritmo eClustering (ANGELOV, 2013). O sistema proposto neste trabalho forma nuvens de dados com base na análise de dados empíricos (EDA, do inglês *Empirical Data Analytics*) (ANGELOV; GU; KANGIN, 2017; ANGELOV; GU, 2018).

O sistema proposto inicia com zero nuvens de dados e forma suas nuvens de dados a partir do fluxo de dados *online*. A primeira amostra de dados é usada para construir a primeira nuvem de dados e é designada como seu ponto focal ξ_1 . A medida em que novas amostras de dados vão chegando, mais nuvens de dados são formadas, desde que sejam atendidos dois critérios.

O primeiro critério relaciona a densidade global da i -ésima nuvem de dados ($\gamma_k^{i(G)}$) e a densidade global da amostra de dados (Υ_k) no instante k , conforme a equação (3.5).

$$\left(\Upsilon_k - \gamma_k^{i(G)} > 0 \right) \text{ OU } \left(\Upsilon_k - \gamma_k^{i(G)} < 0 \right); \quad \forall i \in [1, L] \quad (3.5)$$

com

$$\Upsilon_k = \frac{1}{1 + \frac{\|\mathbf{z}_k - \Upsilon_k^G\|^2}{\Xi_k^G - \|\Upsilon_k^G\|^2}} \quad (3.6)$$

e

$$\Upsilon_k^{i(G)} = \frac{1}{1 + \frac{\|\Upsilon_k^i - \Upsilon_k^G\|^2}{\Xi_k^G - \|\Upsilon_k^G\|^2}}, \quad (3.7)$$

sendo Υ_k^G e Ξ_k^G , respectivamente, a média global e o produto escalar global de todas as amostras de dados observadas:

$$\Upsilon_k^G = \frac{k-1}{k} \Upsilon_{k-1}^G + \frac{1}{k} \mathbf{z}_k, \quad \Upsilon_1^G = \mathbf{z}_1 \quad (3.8)$$

e

$$\Xi_k^G = \frac{k-1}{k} \Xi_{k-1}^G + \frac{1}{k} \|\mathbf{z}_k\|^2, \quad \Xi_1^G = \|\mathbf{z}_1\|^2. \quad (3.9)$$

O segundo critério é a informação de distância, definido como

$$\zeta_{ki} > \rho_k^i; \quad \forall i \in [1, L], \quad (3.10)$$

onde ζ_{ki} representa a distância entre a amostra atual \mathbf{z}_k e o ponto focal da i -ésima nuvem de dados ξ_i

$$\zeta_{ki} = \|\mathbf{z}_k - \xi_i\|. \quad (3.11)$$

ρ_k^i representa a propagação da nuvem de dados e é atualizada da seguinte maneira:

$$\rho_k^i = \frac{1}{2} (\rho_{k-1}^i + \varphi_k^i), \quad \rho_0^i = 1, \quad (3.12)$$

e φ_k^i representa a dispersão local da i -ésima nuvem de dados sobre o espaço de dados no k -ésimo instante de tempo e é expressa como

$$\varphi_k^i = \sqrt{\Xi_k^i - \|\Upsilon_k^i\|^2}. \quad (3.13)$$

Quando ambos os critérios, representados pelas equações (3.5) e (3.10), são satisfeitos, uma nova nuvem de dados é formada e a nova amostra é definida como seu ponto focal:

$$\xi_{L+1} = \mathbf{z}_k, \quad (3.14)$$

caso contrário, o ponto focal da nuvem de dados mais próxima é atualizado pela nova amostra de dados:

$$\xi_f = \mathbf{z}_k; \quad f = \arg \min_{i=1}^L \|\mathbf{z}_k - \xi_i\|. \quad (3.15)$$

Durante o aprendizado, a distância entre duas densidades locais de nuvens de dados pode se tornar baixa. Nesse caso, a regra redundante precisa ser removida. A distância normalizada dos dados das nuvens duplicadas é expressa como

$$d_k^i = \frac{D_k^{ij}}{\sum_{j=1}^L D_k^{ij}}, \quad D_k^{ij} = \|\Upsilon_k^i - \Upsilon_k^j\|, \quad (3.16)$$

sendo i e j definidos como $\arg \min_{i=1}^L \min_{j=1}^{L, i \neq j} \|\boldsymbol{\tau}_k^i - \boldsymbol{\tau}_k^j\|$. A i -ésima nuvem de dados é removida se a distância normalizada d_k^i ficar abaixo de um valor limite d_e .

Por fim, regras obsoletas são removidas seguindo o critério de utilidade descrito a seguir:

$$U_k^i = \frac{\sum_{l=1}^k \lambda^l}{k - I^{i*}}, \quad i \in [1, L], \quad t = 2, 3, \dots, \quad (3.17)$$

onde I^{i*} é o instante em que a i -ésima regra nebulosa foi criada. Regras que satisfazem a seguinte condição são removidas:

$$\text{SE } U_k^i < \eta \quad \text{ENTÃO } L \leftarrow L - 1, \quad \eta \in [0,03, 0,1]. \quad (3.18)$$

3.3 Estimação Paramétrica do Consequente

O consequente de cada regra nebulosa é formado pelo modelo linear no espaço de estados a seguir:

$$\mathbf{x}_{k+1}|^i = \mathbf{A}_k^i \mathbf{x}_k|^i + \mathbf{B}_k^i \mathbf{u}_k \quad (3.19a)$$

$$\mathbf{y}_k|^i = \mathbf{C}_k^i \mathbf{x}_k|^i + \mathbf{D}_k^i \mathbf{u}_k, \quad (3.19b)$$

tendo como parâmetros a serem identificados as matrizes \mathbf{A}_k^i , \mathbf{B}_k^i , \mathbf{C}_k^i e \mathbf{D}_k^i . Para tanto, é utilizado o algoritmo ERA que, por sua vez, necessita dos parâmetros de Markov do sistema para cada regra nebulosa.

3.3.1 Estimação recursiva dos parâmetros de Markov nebulosos

A estimação dos parâmetros do consequente inicia-se com uma versão recursiva nebulosa do algoritmo OKID, descrito na seção 2.4, a fim de estimar os parâmetros de Markov nebulosos para cada regra nebulosa. Adicionando e subtraindo $\mathbf{G}^i \mathbf{y}_k|^i$ ao lado direito da equação (3.19a), tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}|^i &= \mathbf{A}_k^i \mathbf{x}_k|^i + \mathbf{B}_k^i \mathbf{u}_k + \mathbf{G}^i \mathbf{y}_k|^i - \mathbf{G}^i \mathbf{y}_k|^i \\ &= [\mathbf{A}_k^i + \mathbf{G}^i \mathbf{C}_k^i] \mathbf{x}_k|^i + [\mathbf{B}_k^i + \mathbf{G}^i \mathbf{D}_k^i] \mathbf{u}_k - \mathbf{G}^i \mathbf{y}_k|^i \\ &= \bar{\mathbf{A}}_k^i \mathbf{x}_k|^i + \bar{\mathbf{B}}_k^i \mathbf{v}_k|^i, \end{aligned} \quad (3.20)$$

sendo

$$\bar{\mathbf{A}}_k^i = [\mathbf{A}_k^i + \mathbf{G}^i \mathbf{C}_k^i], \quad (3.21)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_k^i = [\mathbf{B}_k^i + \mathbf{G}^i \mathbf{D}_k^i - \mathbf{G}^i], \quad (3.22)$$

$$\mathbf{v}_k|^i = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k|^i \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

e $\mathbf{G}^i \in \mathbb{R}^{n \times q}$ é uma matriz escolhida para tornar a matriz $\bar{\mathbf{A}}_k^i$ tão estável quanto desejado. A solução da equação (3.20) é dada por

$$\mathbf{x}_k|^i = \sum_{j=1}^k (\bar{\mathbf{A}}_k^i)^{j-1} \bar{\mathbf{B}}_k^i \mathbf{v}_{k-j}|^i. \quad (3.24)$$

Substituindo a equação (3.24) na equação (3.19b), tem-se:

$$\mathbf{y}_k|^i = \mathbf{C}_k^i \bar{\mathbf{A}}_k^i \mathbf{x}_0 + \sum_{j=1}^k \mathbf{C}_k^i (\bar{\mathbf{A}}_k^i)^{j-1} \bar{\mathbf{B}}_k^i \mathbf{v}_{k-j}|^i + \mathbf{D}_k^i \mathbf{u}_k. \quad (3.25)$$

Para um valor suficientemente grande de p ($k > p$), tem-se $(\bar{\mathbf{A}}_k^i)^p \approx \mathbf{0}$. A equação (3.25) pode então ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k|^i &= \sum_{j=1}^p \mathbf{C}_k^i (\bar{\mathbf{A}}_k^i)^{j-1} \bar{\mathbf{B}}_k^i \mathbf{v}_{k-j}|^i + \mathbf{D}_k^i \mathbf{u}_k \\ &= \sum_{j=1}^p \bar{\mathbf{M}}_j^i \mathbf{v}_{k-j}|^i + \mathbf{D}_k^i \mathbf{u}_k, \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde $\bar{\mathbf{M}}_j^i$ é o j -ésimo parâmetro de Markov do observador para o sistema linear do consequente da i -ésima regra nebulosa.

A equação (3.26) tem a seguinte representação matricial (TORRES; SERRA, 2018b):

$$\mathbf{y}_k|^i = \boldsymbol{\theta}_k^i \boldsymbol{\phi}_k^i \quad (3.27)$$

onde $\boldsymbol{\theta}_k^i = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_k^i & \bar{\mathbf{M}}_{k_1}^i & \cdots & \bar{\mathbf{M}}_{k_p}^i \end{bmatrix}$, com o subíndice k indicando que $\boldsymbol{\theta}_k^i$ é estimada utilizando os dados obtidos até o k -ésimo instante de tempo, e $\boldsymbol{\phi}_k^i = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^T & (\mathbf{v}_{k-1}|^i)^T & \cdots & (\mathbf{v}_{k-p}|^i)^T \end{bmatrix}^T$. Em batelada, tem-se:

$$\mathbf{Y}_k|^i = \boldsymbol{\theta}_k^i \boldsymbol{\Phi}_k^i, \quad (3.28)$$

onde

$$\mathbf{Y}_k|^i = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{p+1}|^i & \mathbf{y}_{p+2}|^i & \cdots & \mathbf{y}_k|^i \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

e

$$\boldsymbol{\Phi}_k^i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_{p+1}^i & \boldsymbol{\phi}_{p+2}^i & \cdots & \boldsymbol{\phi}_k^i \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Considerando a equação (3.4), a saída do modelo nebuloso é dada em batelada por:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_k = \sum_{i=1}^L \boldsymbol{\theta}_k^i \boldsymbol{\Phi}_k^i \boldsymbol{\Lambda}_k^i, \quad (3.31)$$

onde

$$\boldsymbol{\Lambda}^i = \begin{bmatrix} \lambda_{p+1}^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{p+2}^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^i \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

é a matriz diagonal de ponderação dos valores de pertinência na i -ésima regra e

$$\tilde{\mathbf{Y}}_k = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{p+1} & \tilde{y}_{p+2} & \cdots & \tilde{y}_k \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

é o vetor de saída.

A solução do problema de mínimos quadrados é feita utilizando a abordagem local para garantir a interpretabilidade dos modelos nebulosos obtidos (TORRES, 2018):

$$\boldsymbol{\theta}_k^i = \tilde{\mathbf{Y}}_k \boldsymbol{\Lambda}_k^i (\boldsymbol{\Phi}_k^i)^T \left[\boldsymbol{\Phi}_k^i \boldsymbol{\Lambda}_k^i (\boldsymbol{\Phi}_k^i)^T \right]^{-1}. \quad (3.34)$$

Com a chegada de uma nova amostra de dados, adiciona-se os termos \mathbf{u}_{k+1} e \mathbf{y}_{k+1} em (3.34). Dessa forma, tem-se:

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1}^i = \tilde{\mathbf{Y}}_{k+1} \boldsymbol{\Lambda}_{k+1}^i (\boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i)^T \left[\boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i \boldsymbol{\Lambda}_{k+1}^i (\boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i)^T \right]^{-1}, \quad (3.35)$$

onde $\tilde{\mathbf{Y}}_{k+1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_k & \mathbf{y}_{k+1} \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_k^i & \boldsymbol{\phi}_{k+1}^i \end{bmatrix}$.

A solução da equação (3.35) requer a inversão de uma matriz de dimensões elevadas, o que pode ser computacionalmente dispendioso e, além disso, induzir erros numéricos (WU et al., 2015). Para contornar este problema, a equação (3.35) pode ser calculada pelo método dos mínimos quadrados recursivos, sendo a matriz de covariância dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1}^i &= \left[\boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i \boldsymbol{\Lambda}_{k+1}^i (\boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i)^T \right]^{-1} \\ &= \left[\boldsymbol{\Phi}_k^i \boldsymbol{\Lambda}_k^i (\boldsymbol{\Phi}_k^i)^T + \boldsymbol{\phi}_{k+1}^i \lambda_{k+1}^i (\boldsymbol{\phi}_{k+1}^i)^T \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Usando o lema da inversão de matrizes, a equação (3.36) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{P}_{k+1}^i = \mathbf{P}_k^i \left[\mathbf{I} - \frac{\boldsymbol{\phi}_{k+1}^i (\boldsymbol{\phi}_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i}{(\lambda_{k+1}^i)^{-1} + (\boldsymbol{\phi}_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i \boldsymbol{\phi}_{k+1}^i} \right]. \quad (3.37)$$

Substituindo (3.37) em (3.35), tem-se:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_{k+1}^i &= \tilde{\mathbf{Y}}_{k+1} \boldsymbol{\Lambda}_{k+1}^i (\boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i)^T \left[\boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i \boldsymbol{\Lambda}_{k+1}^i (\boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i)^T \right]^{-1} \\ &= \boldsymbol{\theta}_k^i + \left[\mathbf{y}_{k+1} - \boldsymbol{\theta}_k^i \boldsymbol{\phi}_{k+1}^i \right] \frac{(\boldsymbol{\phi}_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i}{(\lambda_{k+1}^i)^{-1} + (\boldsymbol{\phi}_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i \boldsymbol{\phi}_{k+1}^i}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Os parâmetros de Markov do observador podem então ser obtidos recursivamente reformulando as equações (3.37) e (3.38) da seguinte forma:

$$\mathbf{Kw}_k^i = \frac{(\boldsymbol{\phi}_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i}{(\lambda_{k+1}^i)^{-1} + (\boldsymbol{\phi}_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i \boldsymbol{\phi}_{k+1}^i} \quad (3.39)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1}^i = \boldsymbol{\theta}_k^i + \left[\mathbf{y}_{k+1} - \boldsymbol{\theta}_k^i \boldsymbol{\phi}_{k+1}^i \right] \mathbf{Kw}_k^i \quad (3.40)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^i = \mathbf{P}_k^i [\mathbf{I} - \Phi_{k+1}^i \mathbf{K} \mathbf{W}_k^i] \quad (3.41)$$

Uma vez obtidos os parâmetros de Markov do observador, a partir destes pode-se obter os parâmetros de Markov nebulosos do sistema. Para a obtenção dos parâmetros de Markov nebulosos do sistema para a i -ésima regra, é feito o particionamento dos parâmetros de Markov do observador da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\theta}_k^i = [\bar{\mathbf{M}}_{-1}^i \quad \bar{\mathbf{M}}_0^i \quad \bar{\mathbf{M}}_1^i \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{M}}_{p-1}^i] \quad (3.42)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}_j^i &= \mathbf{C}_k^i (\bar{\mathbf{A}}_k^i)^j \bar{\mathbf{B}}_k^i \\ &= \left[\mathbf{C}_k^i (\mathbf{A}_k^i + \mathbf{G}_k^i \mathbf{C}_k^i)^j (\mathbf{B}_k^i + \mathbf{G}_k^i \mathbf{D}_k^i), \quad -\mathbf{C}_k^i (\mathbf{A}_k^i + \mathbf{G}_k^i \mathbf{C}_k^i)^j \mathbf{G}_k^i \right] \\ &\triangleq [\bar{\mathbf{M}}_j^{i(1)}, \quad \bar{\mathbf{M}}_j^{i(2)}]; \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.43)$$

e

$$\bar{\mathbf{M}}_{-1}^i = \mathbf{D}_k^i. \quad (3.44)$$

Os parâmetros de Markov nebulosos do sistema para a i -ésima regra são então obtidos através da equação a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0^i &= \mathbf{D}_k^i \\ \mathbf{M}_{j+1}^i &= \bar{\mathbf{M}}_j^{i(1)} + \sum_{s=0}^{j-1} \bar{\mathbf{M}}_s^{i(2)} \mathbf{M}_{j-s-1}^i + \bar{\mathbf{M}}_s^{i(2)} \mathbf{D}_k^i, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.3.2 Realização de auto-sistema

Uma vez obtidos os parâmetros de Markov nebulosos do sistema, é feita a realização de auto-sistema para cada regra. Para tanto, inicialmente é formada uma matriz de Hankel para cada regra, utilizando os parâmetros de Markov nebulosos obtidos anteriormente, conforme segue:

$$\mathbf{H}_0^i = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1^i & \mathbf{M}_2^i & \cdots & \mathbf{M}_\gamma^i \\ \mathbf{M}_2^i & \mathbf{M}_3^i & \cdots & \mathbf{M}_{\gamma+1}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_\beta^i & \mathbf{M}_{\beta+1}^i & \cdots & \mathbf{M}_{\beta+\gamma-1}^i \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

A matriz \mathbf{H}_0^i possui dimensões $\beta \times \gamma r q$, onde r é o número de entradas do sistema, q é o número de saídas do sistema, γ e β são inteiros de forma que $\gamma r \geq \beta q$.

No intuito de reduzir o número de parâmetros a serem especificados durante a implementação da proposta, os parâmetros β e γ são determinados de forma automática. Fazendo $\beta = \kappa r$ e $\gamma = \kappa q$, garante-se $\gamma r = \beta q$. Evidentemente, para uma utilização computacionalmente otimizada dos parâmetros de Markov nebulosos adquiridos, $\beta + \gamma - 1 = p - 1$, sendo p o número

de parâmetros de Markov nebulosos do sistema obtidos na etapa anterior. Tem-se, então:

$$\begin{aligned}\beta + \gamma - 1 &= p - 1 \\ \kappa r + \kappa q &= p \\ \kappa &= \frac{p}{r+q}.\end{aligned}\tag{3.47}$$

Como κ deve ser um número inteiro, faz-se:

$$\kappa = \text{floor}\left(\frac{p}{r+q}\right),\tag{3.48}$$

onde o operador $\text{floor}(\cdot)$ arredonda o elemento entre parênteses para o número inteiro mais próximo menor ou igual a esse elemento. Esta operação, no entanto, dependendo dos valores de p , q e r , pode resultar em uma utilização não-otimizada dos p parâmetros de Markov nebulosos identificados. Para uma utilização de fato otimizada dos parâmetros de Markov nebulosos, p deve ser múltiplo de $r+q$. Para tanto, faz-se:

$$p = \varkappa(r+q),\tag{3.49}$$

sendo \varkappa um número natural não-nulo. Além disso, é recomendável que p seja pelo menos quatro ou cinco vezes maior que a ordem efetiva do sistema (JUANG et al., 1993), portanto:

$$\begin{aligned}\varkappa(r+q) &\geq 5\hat{n} \\ \varkappa &\geq \frac{5\hat{n}}{r+q}.\end{aligned}\tag{3.50}$$

Como \varkappa deve ser um número inteiro, faz-se:

$$\varkappa = \text{ceil}\left(\frac{5\hat{n}}{r+q}\right),\tag{3.51}$$

onde o operador $\text{ceil}(\cdot)$ arredonda o elemento entre parênteses para o número inteiro mais próximo maior ou igual a esse elemento. Substituindo (3.51) em (3.49), tem-se:

$$p = \text{ceil}\left(\frac{5\hat{n}}{r+q}\right)(r+q).\tag{3.52}$$

Substituindo (3.52) em (3.48), tem-se:

$$\kappa = \text{floor}\left[\frac{\text{ceil}\left(\frac{5\hat{n}}{r+q}\right)(r+q)}{r+q}\right] = \text{ceil}\left(\frac{5\hat{n}}{r+q}\right).\tag{3.53}$$

Como $\beta = \kappa r$ e $\gamma = \kappa q$, tem-se:

$$\beta = \text{ceil}\left(\frac{5\hat{n}}{r+q}\right)r\tag{3.54}$$

$$\gamma = \text{ceil} \left(\frac{5\hat{n}}{r+q} \right) q. \quad (3.55)$$

As equações (3.52), (3.54) e (3.55) permitem que os parâmetros p , β e γ sejam determinados automaticamente, tendo o usuário que determinar apenas uma estimativa \hat{n} da ordem do sistema. Vale ressaltar que a estimativa \hat{n} não é o limite máximo da ordem do modelo que pode ser identificado. De fato, a maior ordem do modelo que pode ser identificado é igual ao posto da matriz \mathbf{H}_0^i , dado por βq (JUANG; PHAN, 2001). Assim, a ordem máxima do modelo que pode ser identificado é:

$$\begin{aligned} n_{max} &= \beta q \\ n_{max} &= \text{ceil} \left(\frac{5n}{r+q} \right) r q. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Utilizando as equações (3.54) e (3.55), \mathbf{H}_0^i possui o seguinte formato:

$$\mathbf{H}_0^i = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1^i & \mathbf{M}_2^i & \cdots & \mathbf{M}_\gamma^i \\ \mathbf{M}_2^i & \mathbf{M}_3^i & \cdots & \mathbf{M}_{\gamma+1}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_\beta^i & \mathbf{M}_{\beta+1}^i & \cdots & \mathbf{M}_{p-1}^i \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

Uma vez formada a matriz \mathbf{H}_0^i , é feita sua decomposição em valores singulares (SVD), como segue:

$$\mathbf{H}_0^i = \mathbf{R}^i \boldsymbol{\Sigma}^i \mathbf{S}^{iT}, \quad (3.58)$$

com

$$\boldsymbol{\Sigma}^i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_n^i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

na qual $\mathbf{0}$ são matrizes nulas com dimensões apropriadas e

$$\boldsymbol{\Sigma}_n^i = \text{diag} \left[\sigma_1^i, \sigma_2^i, \cdots, \sigma_j^i, \sigma_{j+1}^i, \cdots, \sigma_n^i \right], \quad (3.60)$$

sendo $\sigma_1^i \geq \sigma_2^i \geq \cdots \geq \sigma_j^i \geq \sigma_{j+1}^i \geq \cdots \geq \sigma_n^i \geq 0$.

A matriz $\boldsymbol{\Sigma}_n^i$, para cada regra, é então truncada de modo a conter apenas os n_i primeiros valores singulares suficientes para satisfazerem a seguinte equação:

$$\frac{\sum_{a=1}^{n_i} \sigma_a^i}{\sum_{b=1}^{n_i} \sigma_b^i} \geq \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (3.61)$$

Por conseguinte, formam-se as matrizes $\mathbf{R}_{n_i}^i$ e $\mathbf{S}_{n_i}^i$ a partir das primeiras n_i colunas de \mathbf{R}^i e \mathbf{S}^i , respectivamente. Então, tem-se

$$\mathbf{H}_0^i = \mathbf{R}_{n_i}^i \boldsymbol{\Sigma}_{n_i}^i \mathbf{S}_{n_i}^{iT}. \quad (3.62)$$

Em seguida, são obtidas as matrizes \mathbf{P}_β^i e \mathbf{Q}_γ^i , dadas por

$$\mathbf{P}_\beta^i = \mathbf{R}_{n_i}^i \boldsymbol{\Sigma}_{n_i}^{i-1/2}, \quad (3.63a)$$

$$\mathbf{Q}_\gamma^i = \boldsymbol{\Sigma}_{n_i}^{i-1/2} \mathbf{S}_{n_i}^{i T}. \quad (3.63b)$$

Então, as matrizes \mathbf{B}_k^i e \mathbf{C}_k^i são obtidas como segue:

$$\mathbf{B}_k^i = \text{as } r \text{ primeiras colunas de (3.63b)}, \quad (3.64a)$$

$$\mathbf{C}_k^i = \text{as } q \text{ primeiras linhas de (3.63a)}. \quad (3.64b)$$

Para determinar a matriz \mathbf{A}_k^i , é formada a matriz de Hankel generalizada \mathbf{H}_1^i da seguinte forma:

$$\mathbf{H}_1^i = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_2^i & \mathbf{M}_3^i & \cdots & \mathbf{M}_{\gamma+1}^i \\ \mathbf{M}_3^i & \mathbf{M}_4^i & \cdots & \mathbf{M}_{\gamma+2}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{\beta+1}^i & \mathbf{M}_{\beta+2}^i & \cdots & \mathbf{M}_p^i \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

A matriz \mathbf{A}_k^i é, então, obtida a partir da seguinte equação:

$$\mathbf{A}_k^i = \boldsymbol{\Sigma}_{n_i}^{i-1/2} \mathbf{R}_{n_i}^{i T} \mathbf{H}_1^i \mathbf{S}_{n_i}^i \boldsymbol{\Sigma}_{n_i}^{i-1/2}. \quad (3.66)$$

O algoritmo a seguir descreve os passos necessários para a execução da metodologia proposta.

Algoritmo 1 Metodologia proposta

- 1: **Parâmetros do algoritmo**
- 2: Informe d_e , η , \hat{n} e ε ;
- 3: **Inicialização**
- 4: Determine os parâmetros p , β e γ – Equações (3.52), (3.54) e (3.55) ;
- 5: $k = 1$; $L = 1$; $\xi_1 = \mathbf{z}_k$; $\Upsilon_1^G = \mathbf{z}_1$; $\Xi_1^G = \|\mathbf{z}_1\|^2$;
- 6: **enquanto** $\mathbf{z}_{k+1} \neq \emptyset$ **faça**
- 7: $k = k + 1$;
- 8: **Atualização dos parâmetros do antecedente**
- 9: Adquira a amostra \mathbf{z}_k ;
- 10: Atualize a média global (Υ_k^G) – Equação (3.8);
- 11: Atualize o produto escalar global (Ξ_k^G) – Equação (3.9);
- 12: Determine a densidade global da nova amostra (Υ_k) – Equação (3.6);
- 13: **para** $i \leftarrow 1$ **até** L **faça**
- 14: Determine a densidade global da i -ésima nuvem de dados ($\gamma_k^{i(G)}$) – Equação (3.7);
- 15: **fim para**
- 16: Verifique o critério 1 – Equação (3.5);
- 17: Verifique o critério 2 – Equação (3.10);
- 18: **se** critério 1 **E** critério 2 **então**
- 19: Forme uma nova nuvem de dados – Equação (3.14);
- 20: **senão**
- 21: Atualize o ponto focal da nuvem mais próxima – Equação (3.15);
- 22: **fim se**
- 23: Remova regras redundantes – Equação (3.16);
- 24: Remova regras obsoletas – Equação (3.18);
- 25: Atualize a densidade local normalizada (λ_k^i) para cada nuvem de dados – Equação (3.3);
- 26: **Atualização dos parâmetros do consequente**
- 27: Atualize ϕ_k^i , incluindo a nova amostra \mathbf{z}_k ;
- 28: **para** $i \leftarrow 1$ **até** L **faça**
- 29: Obtenha os parâmetros de Markov nebulosos do observador (θ_k^i) – Equações (3.39), (3.40) e (3.41);
- 30: Obtenha os parâmetros de Markov nebulosos do sistema (\mathbf{M}_k^i) – Equação (3.45);
- 31: Construa a matriz de Hankel (\mathbf{H}_0^i) – Equação (3.57);
- 32: Decomponha \mathbf{H}_0^i em seus valores singulares – Equação (3.58);
- 33: Determine a ordem (n_i) do sistema para a i -ésima regra – Equação (3.61);
- 34: Determine \mathbf{B}_k^i e \mathbf{C}_k^i – Equações (3.64a) e (3.64a);
- 35: Forme a matriz de Henkel generalizada (\mathbf{H}_1^i) – Equação (3.65);
- 36: Determine a matriz \mathbf{A}_k^i – Equação (3.66);
- 37: **fim para**
- 38: **fim enquanto**

A execução deste algoritmo resulta na obtenção da densidade local normalizada (λ_k^i) para cada nuvem de dados e seus parâmetros do consequente (matrizes \mathbf{A}_k^i , \mathbf{B}_k^i , \mathbf{C}_k^i e \mathbf{D}_k^i).

4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Neste capítulo são apresentados resultados experimentais com o objetivo de demonstrar a aplicabilidade e a eficácia da metodologia proposta nesta dissertação. Esta metodologia é aplicada na identificação de quatro sistemas dinâmicos. O primeiro é um sistema de tanque, sendo este um sistema SISO não linear. O segundo é um Robô Aéreo Quadrirotor (RAQ), um sistema MIMO não linear de dinâmica rápida. O terceiro e o quarto, um evaporador industrial e uma fornalha para vidro, respectivamente, são casos de referência utilizados para comparar os resultados obtidos pela metodologia proposta com aqueles obtidos pela aplicação de outras quatro metodologias.

Para validar a metodologia proposta e avaliar seu desempenho, são utilizadas duas métricas, sendo a primeira o Erro Médio Quadrático (MSE, do inglês *Mean Square Error*), dado por:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k^i - \hat{y}_k^i)^2, \quad (4.1)$$

onde y_k^i é a saída i do sistema real no instante k , \hat{y}_k^i é a saída i estimada pelo modelo no instante k e N é o tamanho do conjunto de dados. A segunda métrica de desempenho utilizada é o *Best Fit Criterion* (FIT), dado por:

$$FIT(\%) = \left[1 - \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y_k^i - \hat{y}_k^i)^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y_k^i - \bar{y}^i)^2}} \right] \times 100, \quad \text{com} \quad \bar{y}^i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k^i, \quad (4.2)$$

onde y_k^i é a saída i do sistema real no instante k , \hat{y}_k^i é a saída i estimada pelo modelo no instante k e N é o tamanho do conjunto de dados.

4.1 Sistema de Tanque

O sistema de tanque utilizado neste estudo é composto por um tanque cilíndrico horizontal, uma bomba com vazão fixa, um reservatório de água, sensores discretos de nível, um sensor contínuo de nível e uma válvula com um servomotor acoplado a ela para controlar a vazão de saída do tanque. O sensor contínuo de nível é do tipo capacitivo e sua tensão de saída varia de 0 a 10 volts, proporcionalmente ao nível de líquido no tanque. O tanque e sensores de nível podem ser visualizados na figura 4.

Neste sistema, uma bomba fornece líquido para o tanque com vazão constante. Como não é possível controlar a vazão de entrada do tanque, controla-se a vazão de saída deste. Desta forma, o nível de líquido dentro do tanque varia de acordo com a vazão de saída, ou seja, se a vazão de saída for menor que a de entrada, o nível de líquido no tanque aumentará, caso contrário,

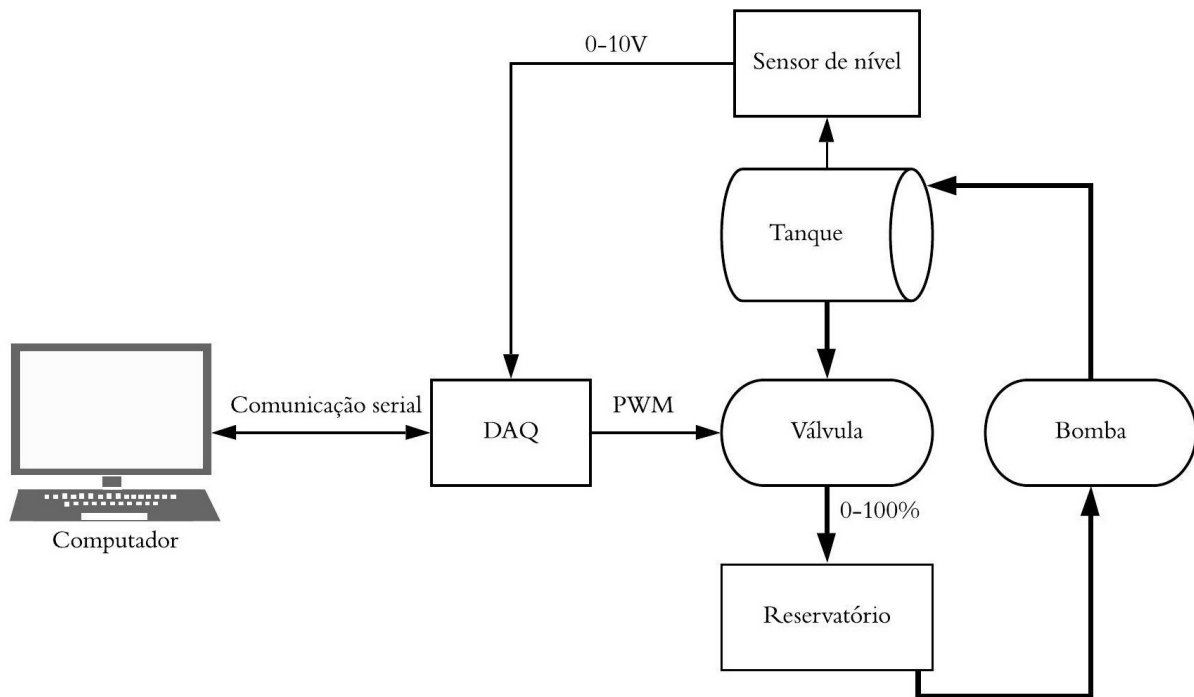
Figura 4 – Sistema de tanque.



Fonte: Autor.

este diminuirá. Se ambas as vazões forem iguais, o nível de líquido no tanque permanecerá constante. A figura 5 exibe o diagrama de blocos do sistema de tanque.

Figura 5 – Sistema de tanque: diagrama de blocos.

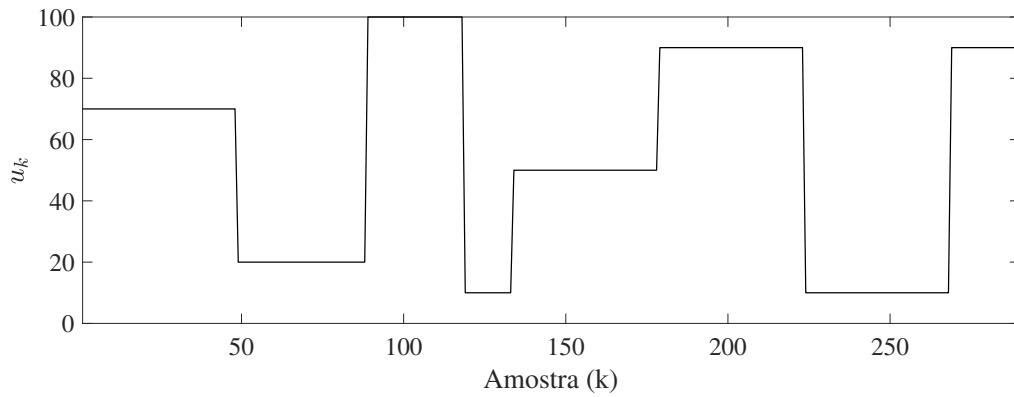


Fonte: Autor.

Com a vazão da bomba constante, a coleta de dados de entrada u_k e saída y_k desta planta foi realizada com um período de amostragem T_s igual a 10 segundos, sendo a entrada da planta o

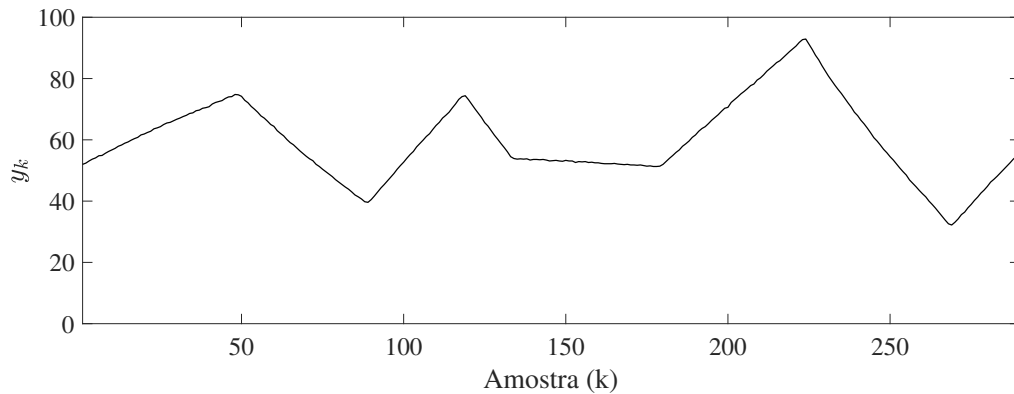
ângulo de fechamento da válvula (0 – 100%) e a saída o nível de água no reservatório (0 – 100%). Foram coletadas 290 amostras de entrada e saída. Os dados coletados estão dispostos nas figuras 6 e 7.

Figura 6 – Sistema de tanque: entrada u_k .



Fonte: Autor.

Figura 7 – Sistema de tanque: saída y_k .



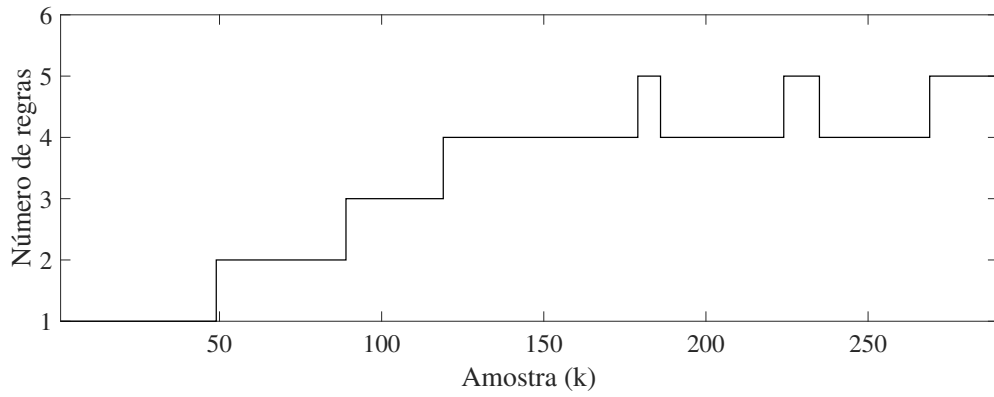
Fonte: Autor.

Foram utilizados os seguintes parâmetros durante a inicialização do algoritmo de identificação: $d_e = 0,1$, $\eta = 0,03$, $\hat{n} = 4$ e $\varepsilon = 0,5$. As amostras 151 a 290 foram utilizadas na etapa de validação.

À medida em que novas amostras de dados chegam, o número de regras do modelo evolui, aumentando ou diminuindo para melhor representar o sistema. A evolução do número de regras do modelo nebuloso evolutivo pode ser vista na figura 8.

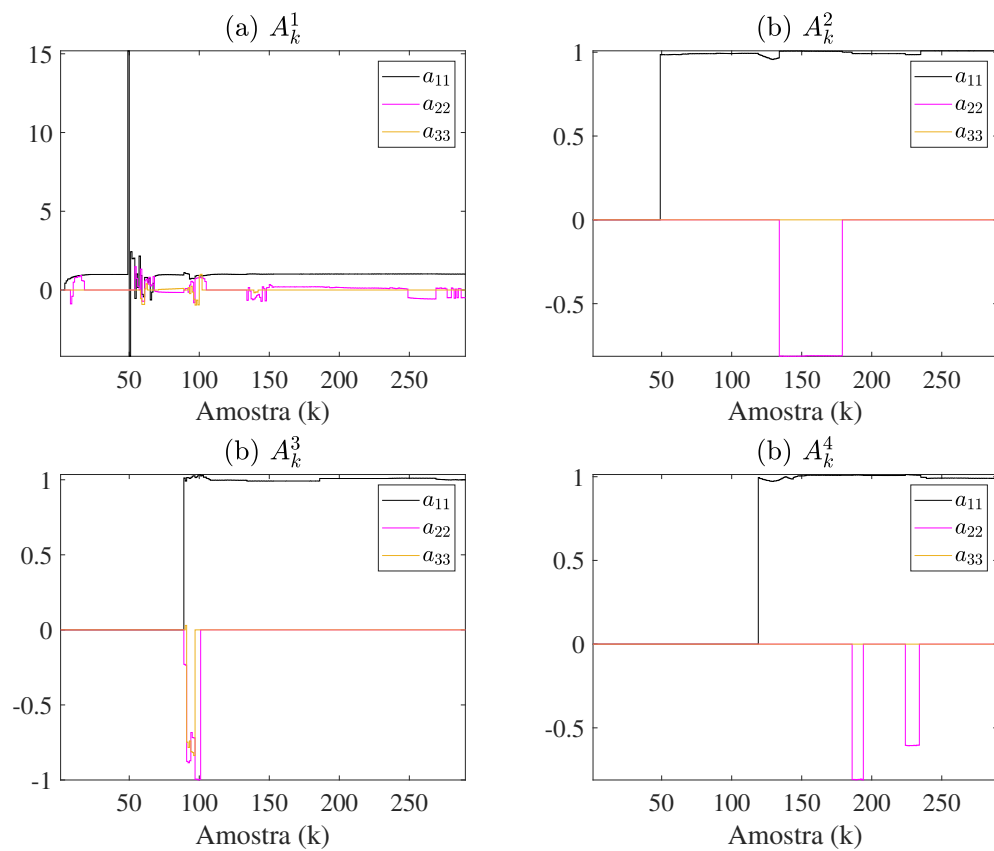
Além de atualizar recursivamente seus parâmetros, para cada regra, a ordem do modelo local no espaço de estados também evolui de forma independente, aumentando ou diminuindo para melhor representar o sistema local. A figura 9 mostra a característica adaptativa do modelo local para as regras 1 a 4, enquanto a figura 10 exibe sua característica evolutiva.

Figura 8 – Sistema de tanque: evolução do número de regras.



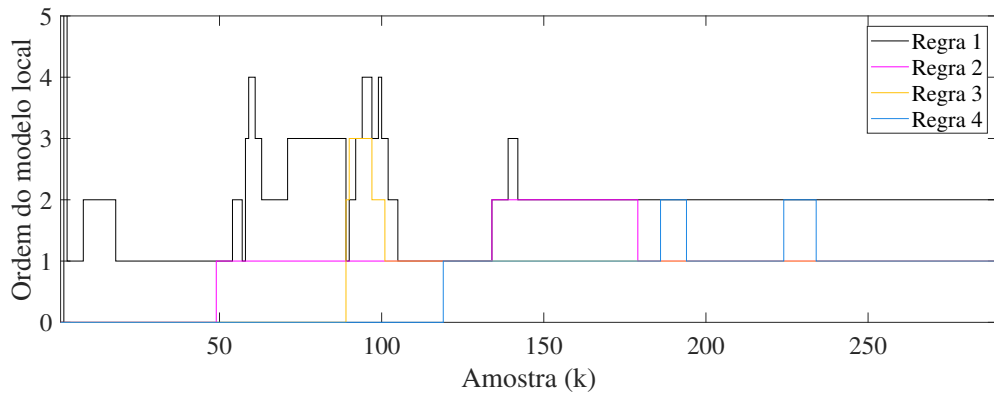
Fonte: Autor.

Figura 9 – Sistema de tanque: Estimção recursiva dos três primeiros elementos da diagonal principal das matrizes $A_k^i | i=1, \dots, 4$.



Fonte: Autor.

Figura 10 – Sistema de tanque: Ordem do modelo local.



Fonte: Autor.

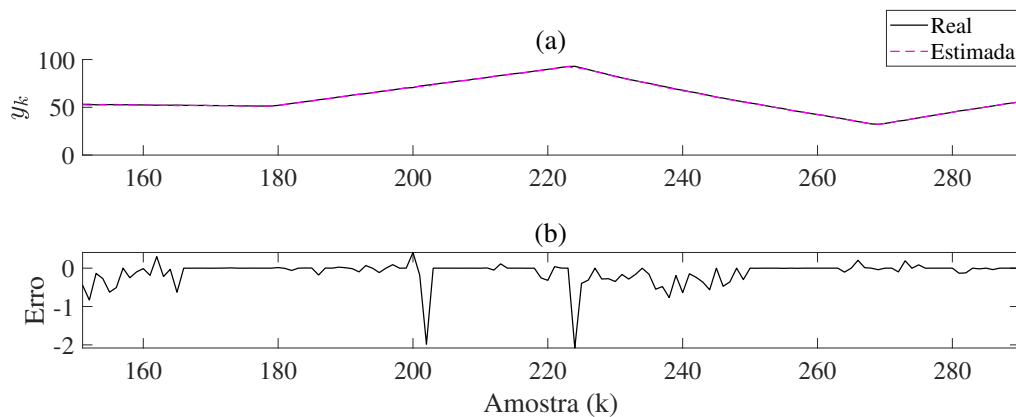
Tabela 1 – Sistema de tanque: Índices de desempenho.

Métrica	Valor
MSE	0,1004
FIT (%)	99,9594

Embora a ordem estimada do modelo (\hat{n}) informada ao algoritmo durante sua inicialização tenha sido fixada em 4, esta era apenas uma sugestão, que foi utilizada pelo algoritmo para determinar automaticamente p , β e γ . A ordem real do modelo local no espaço de estados para cada regra evoluiu independentemente, assumindo diferentes valores a medida em que os dados fluíram.

A figura 11 exibe a resposta real do sistema e a saída do modelo estimado, além da diferença entre elas. A tabela 1 resume os resultados obtidos pela metodologia de identificação proposta.

Figura 11 – Sistema de tanque: Saída real e estimada. (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.



Fonte: Autor.

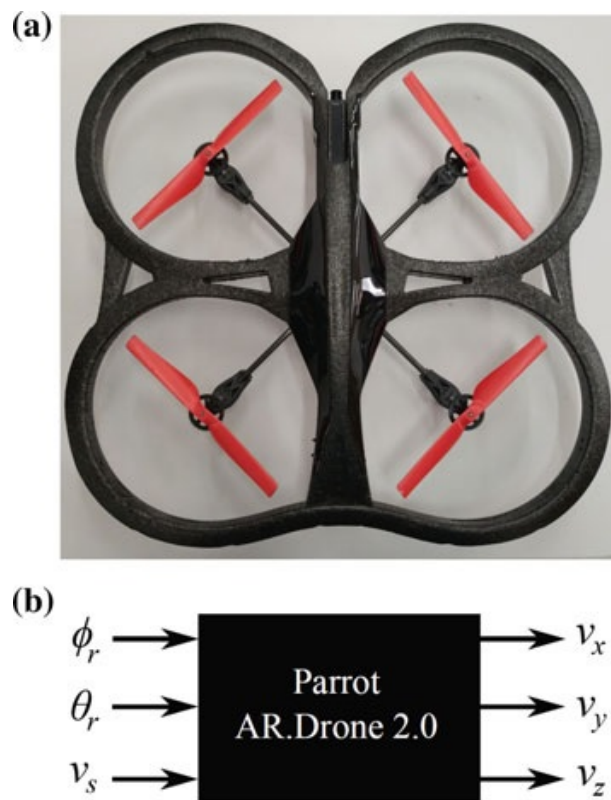
Os resultados apresentados na tabela 1 demonstram que a metodologia proposta é eficaz

na identificação de sistemas SISO complexos.

4.2 Robô Aéreo Quadrirotor

Nesta seção, é utilizado um conjunto de dados, disponibilizado por Silveira Júnior e Costa (2018a), coletado de um Robô Aéreo Quadrirotor (RAQ). O sistema, apresentado na figura 12, é um sistema multivariável não linear de dinâmica rápida. Na figura, ϕ_r e θ_r representam as velocidades angulares de *roll* e *pitch*, em $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, v_s é a velocidade de referência vertical, em $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, e v_x , v_y e v_z são velocidades lineares, em $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, associadas ao movimento lateral (direita e esquerda), movimento longitudinal (para frente e para trás) e movimento vertical (para cima e para baixo), respectivamente (SILVEIRA JÚNIOR; COSTA, 2020). Para implementar a metodologia proposta, foram utilizadas 2500 amostras de dados. As figuras 13 a 18 exibem os dados de entrada e saída utilizados.

Figura 12 – RAQ: (a) Vista superior; (b) diagrama de blocos.

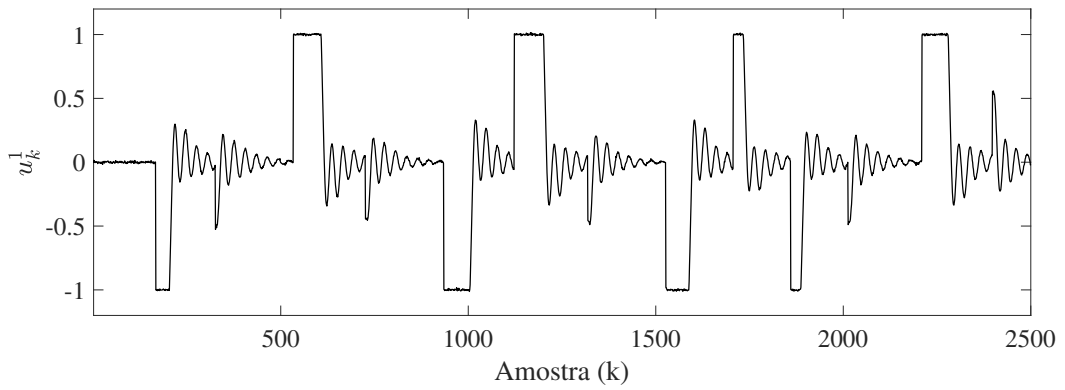


Fonte: (SILVEIRA JÚNIOR; COSTA, 2020).

Foram utilizados os seguintes parâmetros durante a inicialização do algoritmo de identificação: $d_e = 0,1$, $\eta = 0,03$, $\hat{n} = 4$ e $\varepsilon = 0,8$. As amostras 1500 a 2500 foram utilizadas na etapa de validação do modelo.

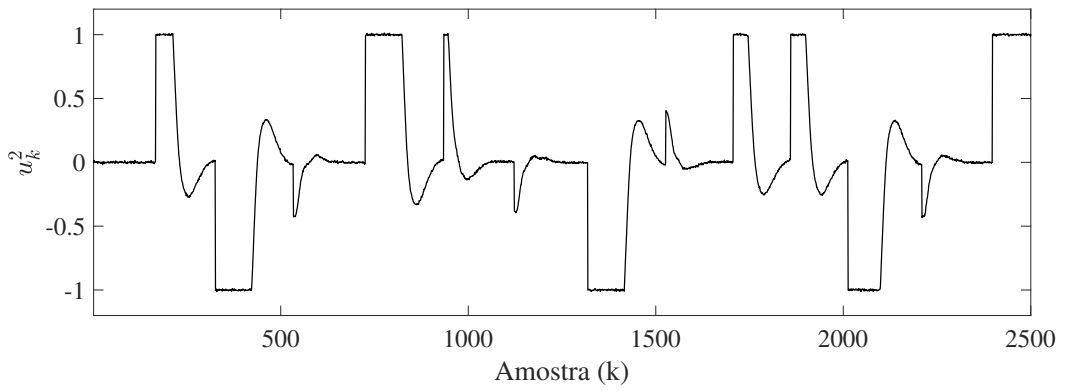
Ao término da identificação, o modelo possui 2 regras. A evolução do número de regras do modelo nebuloso evolutivo pode ser vista na figura 19. A ordem final para as duas regras é 13, como pode ser visto na figura 20. A estimação recursiva dos primeiros três elementos da

Figura 13 – RAQ: Entrada u^1 .



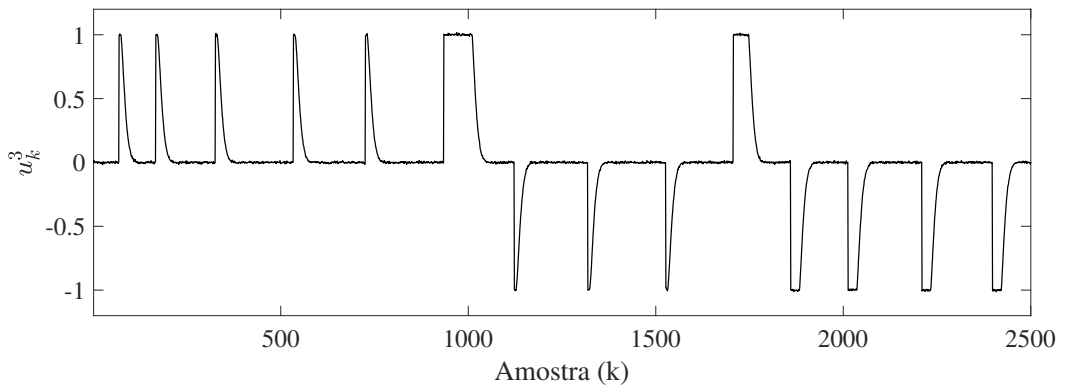
Fonte: Autor.

Figura 14 – RAQ: Entrada u^2 .



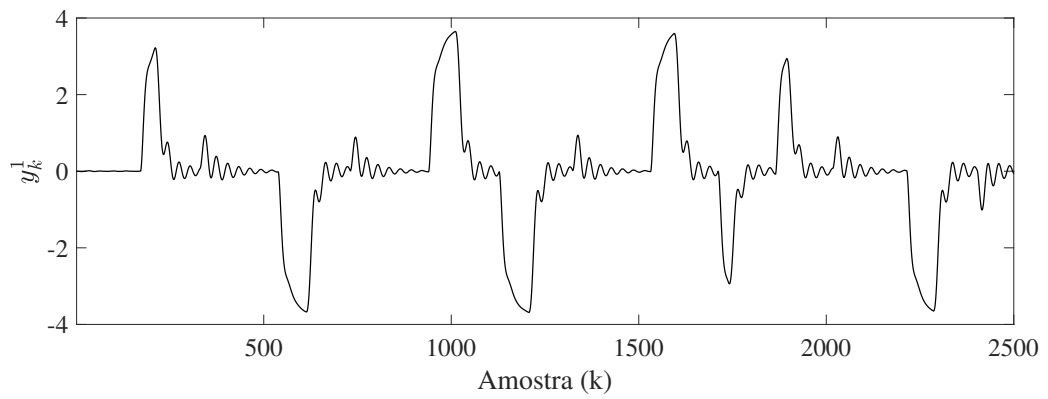
Fonte: Autor.

Figura 15 – RAQ: Entrada u^3 .



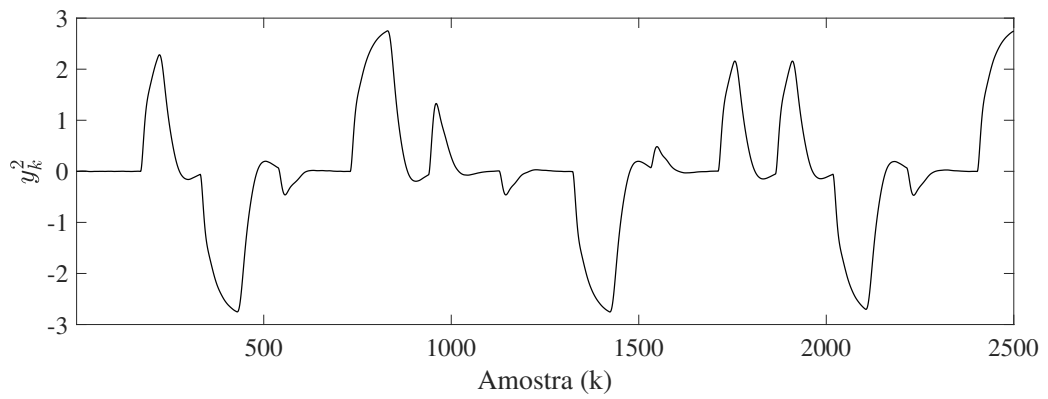
Fonte: Autor.

Figura 16 – RAQ: Saída y^1 .



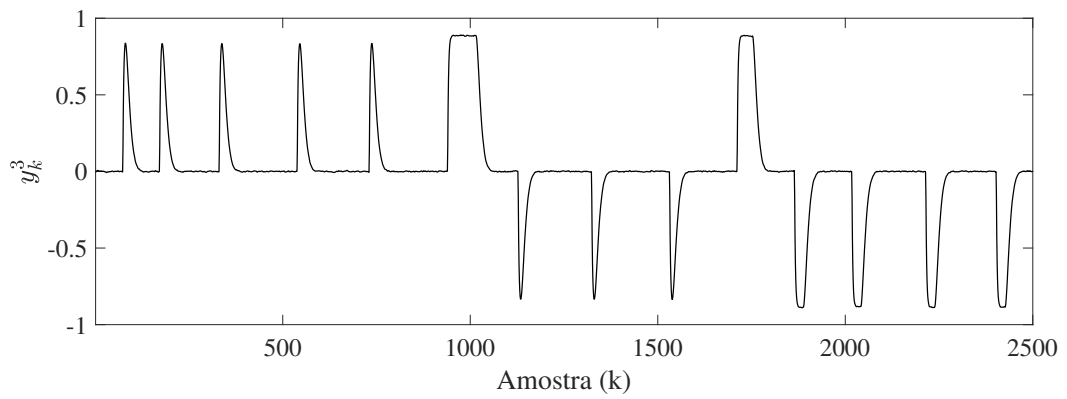
Fonte: Autor.

Figura 17 – RAQ: Saída y^2 .



Fonte: Autor.

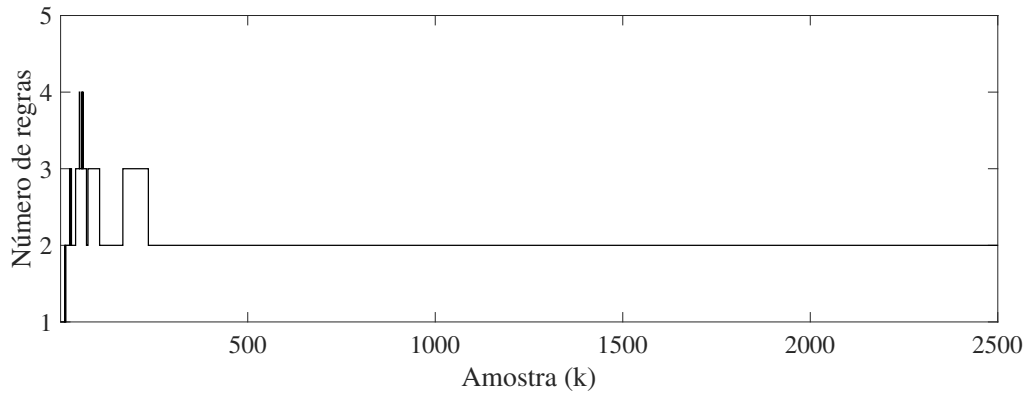
Figura 18 – RAQ: Saída y^3 .



Fonte: Autor.

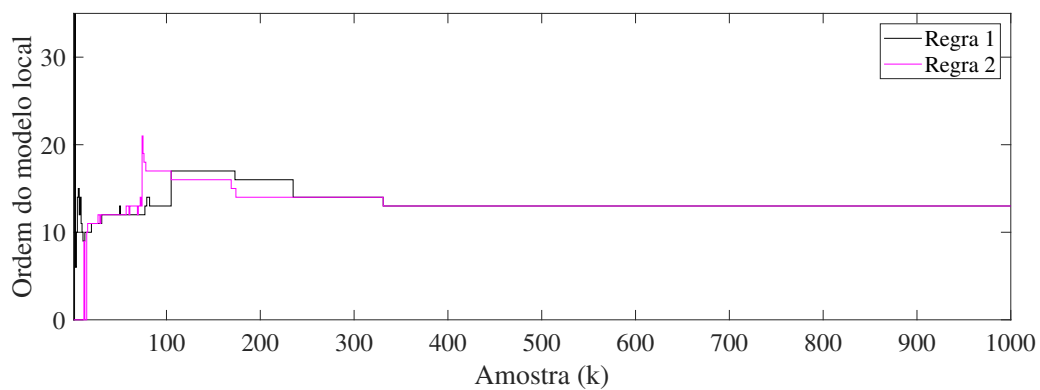
diagonal principal da matriz dinâmica $\mathbf{A}_k^i |^{i=1,2}$ é exibida na figura 21. O resultado da predição das saídas através do modelo identificado, no intervalo [1500,2500] do conjunto de dados é ilustrado nas figuras 22 a 24.

Figura 19 – RAQ: Evolução do número de regras.



Fonte: Autor.

Figura 20 – RAQ: Ordem do modelo local para as regras 1 e 2 ($\hat{n} = 4$). Não houveram mudanças na ordem do modelo local para estas regras no intervalo [1000-2500].

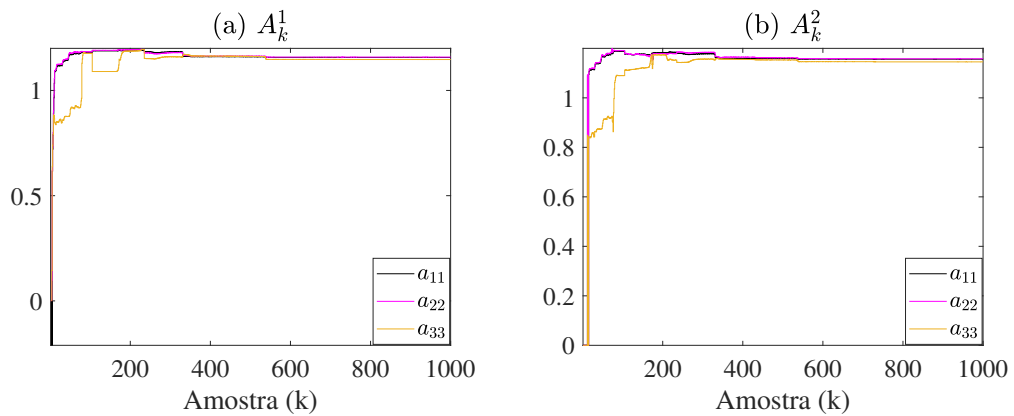


Fonte: Autor.

Observando as figuras 22 a 24, é possível notar que o modelo obtido apresentou baixo desempenho. Isso se deve ao fato de que a ordem do modelo sugerida ($\hat{n} = 4$) na inicialização do sistema foi muito baixa para este sistema, o que resultou na utilização de um número insuficiente de parâmetros de Markov na identificação dos modelos locais no espaço de estados para cada regra.

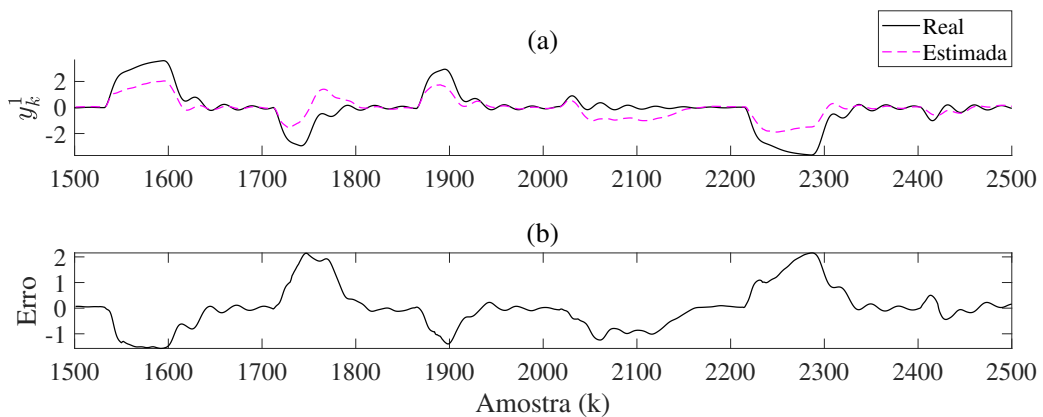
Dito isso, uma nova identificação foi realizada, mantendo os mesmos parâmetros do algoritmo e apenas modificando a ordem sugerida do modelo, fazendo $\hat{n} = 20$. A ordem final para as duas regras é 20, como pode ser visto na figura 25. A estimação recursiva dos três primeiros elementos da diagonal principal das matrizes dinâmicas $\mathbf{A}_k^i |^{i=1,2}$ é mostrada na figura 26. O resultado da predição das saídas através do modelo identificado, no intervalo [1500,2500] do conjunto de dados é ilustrado nas figuras 27 a 29.

Figura 21 – RAQ: Estimação recursiva dos três primeiros elementos da diagonal principal das matrizes $A_k^i |_{i=1,2}$ ($\hat{n} = 4$).



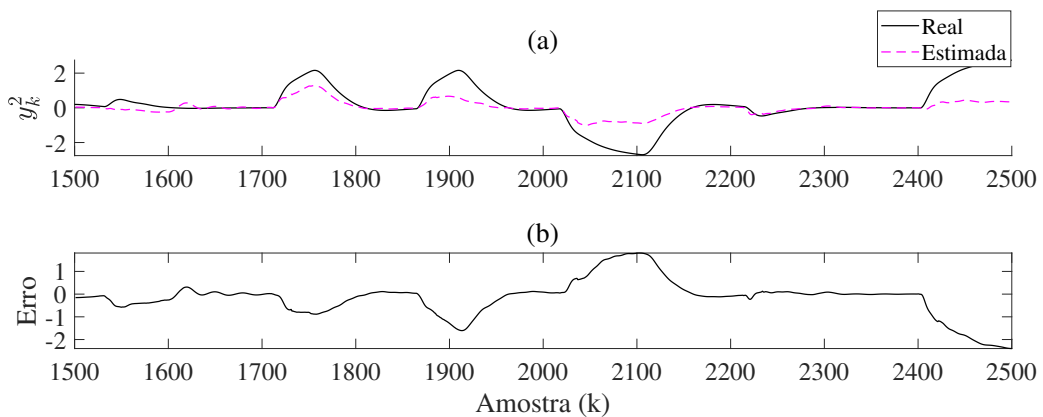
Fonte: Autor.

Figura 22 – RAQ: Saída y^1 real e estimada ($\hat{n} = 4$). (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.



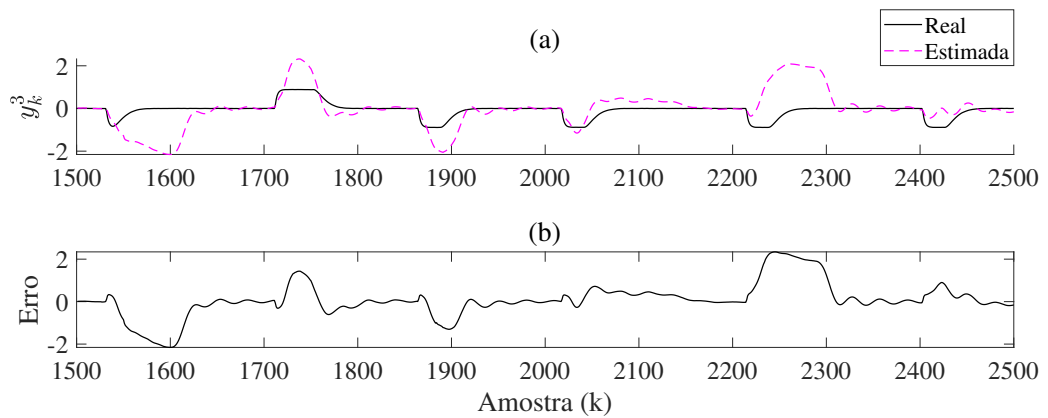
Fonte: Autor.

Figura 23 – RAQ: Saída y^2 real e estimada ($\hat{n} = 4$). (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.



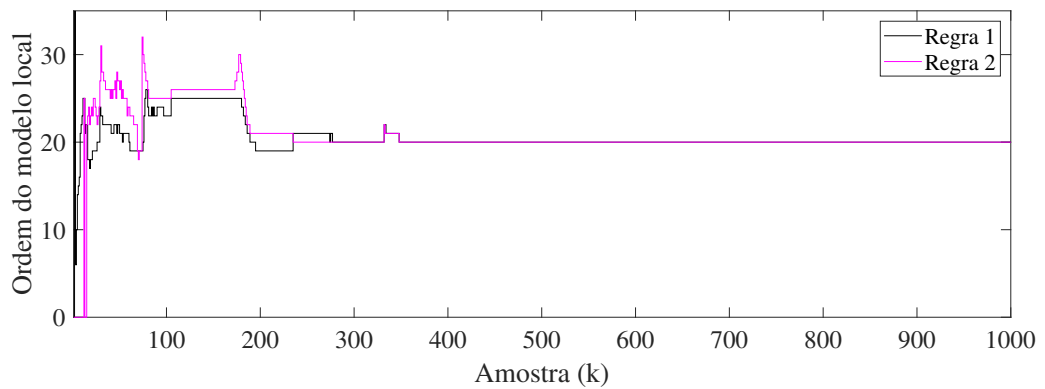
Fonte: Autor.

Figura 24 – RAQ: Saída y^3 real e estimada ($\hat{n} = 4$). (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.



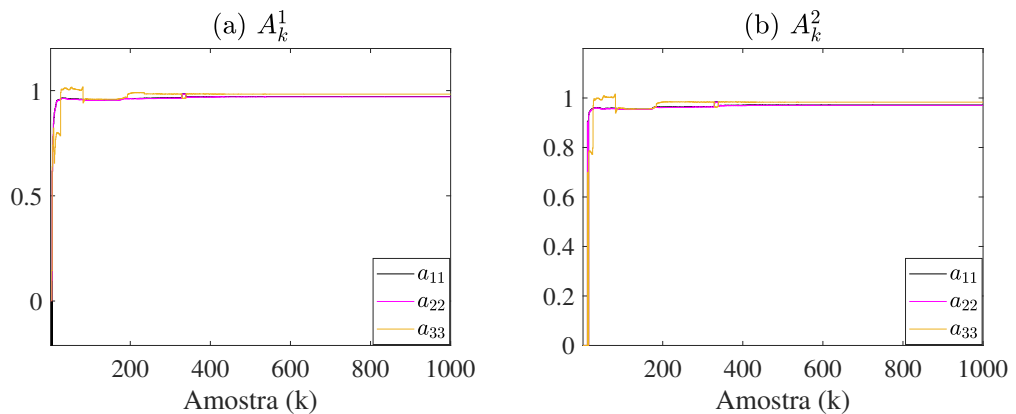
Fonte: Autor.

Figura 25 – RAQ: Ordem do modelo local para as regras 1 e 2 ($\hat{n} = 20$). Não houveram mudanças na ordem do modelo local para estas regras no intervalo [1000-2500].



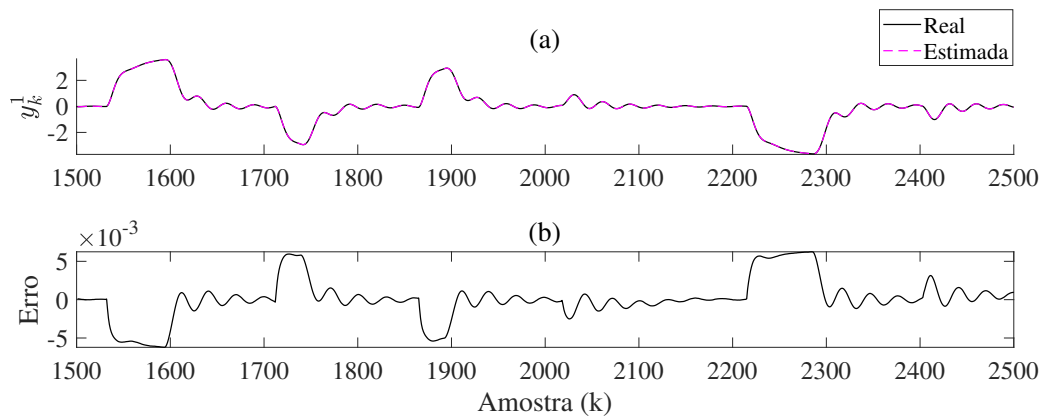
Fonte: Autor.

Figura 26 – RAQ: Estimação recursiva dos três primeiros elementos da diagonal principal das matrizes $\mathbf{A}_k^i |_{i=1,2}$ ($\hat{n} = 20$).



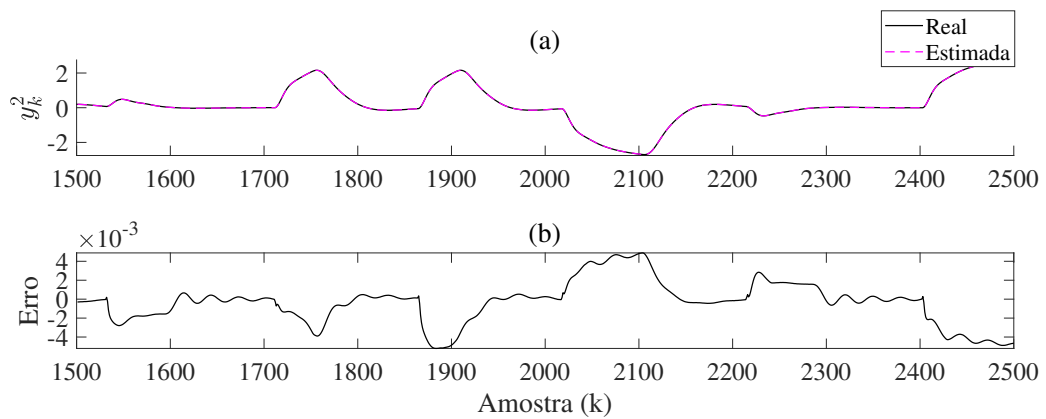
Fonte: Autor.

Figura 27 – RAQ: Saída y^1 real e estimada ($\hat{n} = 20$). (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.



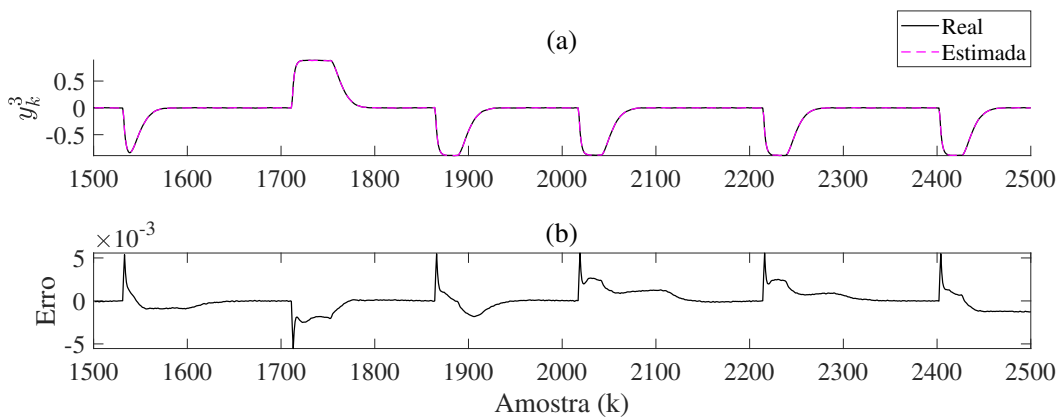
Fonte: Autor.

Figura 28 – RAQ: Saída y^2 real e estimada ($\hat{n} = 20$). (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.



Fonte: Autor.

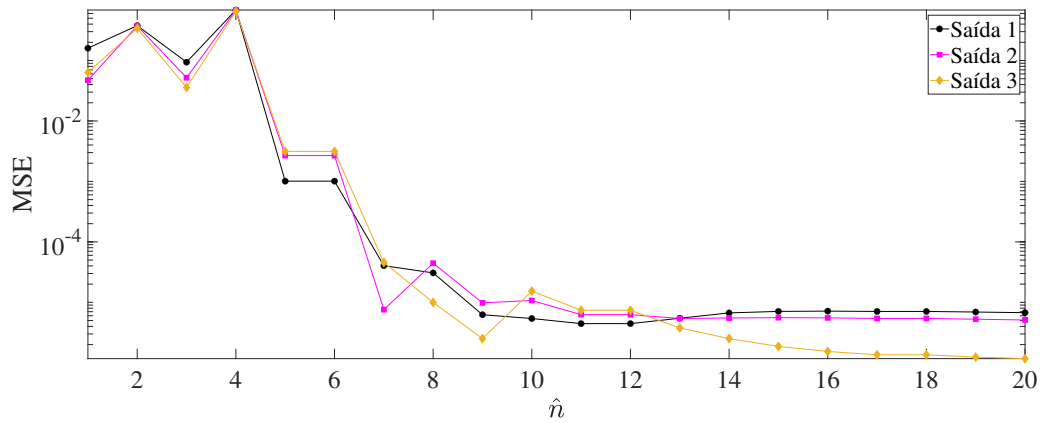
Figura 29 – RAQ: Saída y^3 real e estimada ($\hat{n} = 20$). (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.



Fonte: Autor.

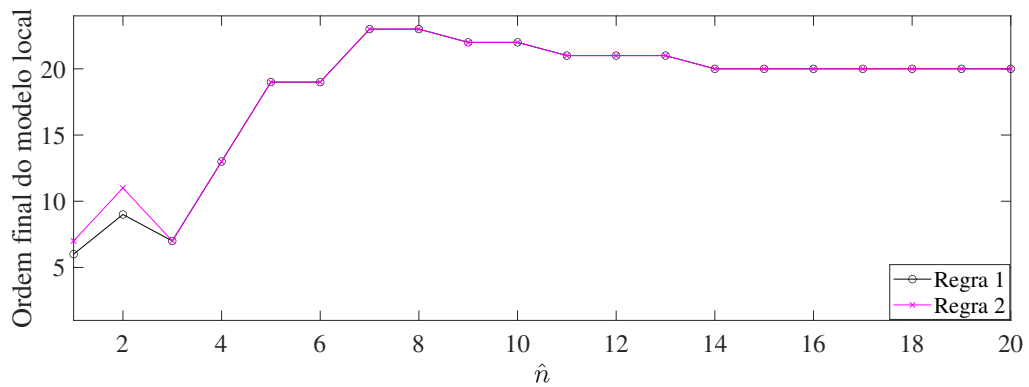
Valores maiores de \hat{n} podem trazer melhores resultados para a identificação do sistema, ao custo de um aumento no consumo de recursos computacionais. De certa forma, \hat{n} atua como um *trade-off* entre eficácia e custo computacional, mas, à medida que \hat{n} aumenta além do que deveria ser a ordem real do sistema, os ganhos desse aumento tornam-se muito pequenos, se comparados ao aumento do custo computacional. A figura 30 exibe os valores de MSE para diferentes valores de \hat{n} e a figura 31 mostra a ordem final do modelo local para cada valor de \hat{n} .

Figura 30 – RAQ: Erro Médio Quadrático para diferentes valores de \hat{n} .



Fonte: Autor.

Figura 31 – RAQ: Ordem final do modelo local. Isto representa a ordem do modelo local ao término do processo de identificação para diferentes valores de \hat{n} .



Fonte: Autor.

A tabela 2 exibe os resultados obtidos através da metodologia proposta para os valores de $\hat{n} = 20$, $\hat{n} = 10$ e $\hat{n} = 4$.

Tabela 2 – RAQ: Índices de desempenho.

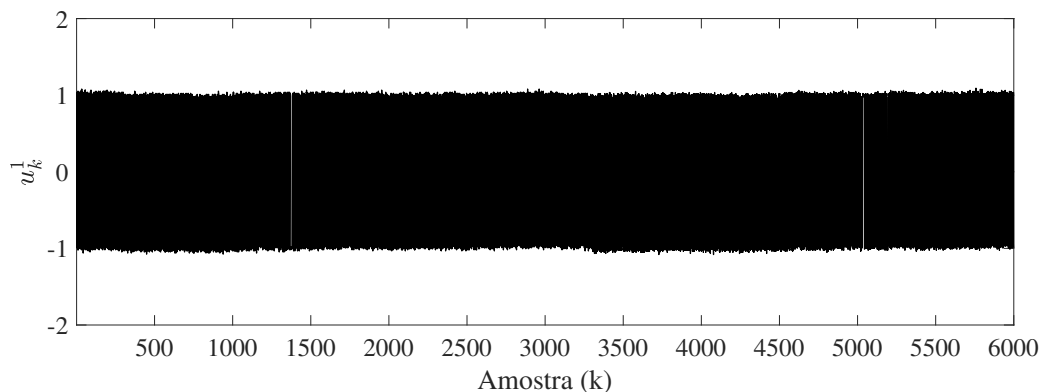
Métrica	Saída	$\hat{n} = 20$	$\hat{n} = 10$	$\hat{n} = 4$
MSE	y^1	$6,7406 \times 10^{-6}$	$5,3988 \times 10^{-6}$	0,6837
	y^2	$5,1042 \times 10^{-6}$	$1,0716 \times 10^{-5}$	0,6798
	y^3	$1,1712 \times 10^{-6}$	$1,5338 \times 10^{-5}$	0,6474
FIT (%)	y^1	99,9997	99,9997	64,5690
	y^2	99,9996	99,9992	47,8776
	y^3	99,9991	99,9880	-404,4430

Fonte: Autor.

Embora o processo de identificação tenha apresentado um desempenho insatisfatório para $\hat{n} = 4$, foram obtidos bons resultados para $\hat{n} = 10$ e $\hat{n} = 20$. Ao fazer $\hat{n} = 10$, bons resultados foram alcançados, mas aumentar \hat{n} para 20 (dobrar o valor de \hat{n}) não proporcionou grandes ganhos para a eficácia do modelo, principalmente considerando o critério FIT. Dito isso, vale ressaltar que a escolha de \hat{n} muito alto aumentará principalmente o custo computacional com poucos ganhos para a eficácia do modelo.

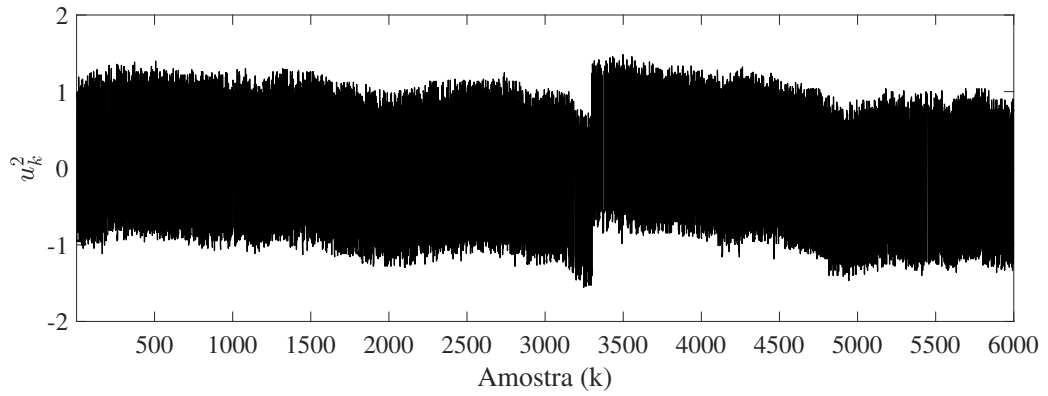
4.3 Evaporador Industrial

Nesta seção, é realizada a identificação de um evaporador industrial de quatro estágios, utilizado para reduzir o teor de água de um determinado produto (JAFARI; SALIMIFARD; DEHGHANI, 2014; ZHU et al., 1994). Este é um sistema MIMO com três entradas e três saídas. As entradas são: fluxo de alimentação para o primeiro estágio do evaporador (u^1), fluxo de vapor para o primeiro estágio do evaporador (u^2) e fluxo de água de resfriamento (u^3). As saídas são: teor de matéria seca (y^1), fluxo do produto final (y^2) e temperatura do produto final (y^3). Foram utilizadas 6000 amostras de dados de entrada e saída. Os dados utilizados foram obtidos em (DE MOOR, 2018a) e são exibidos nas figuras 32 a 37.

Figura 32 – Evaporador Industrial: Entrada u^1 .

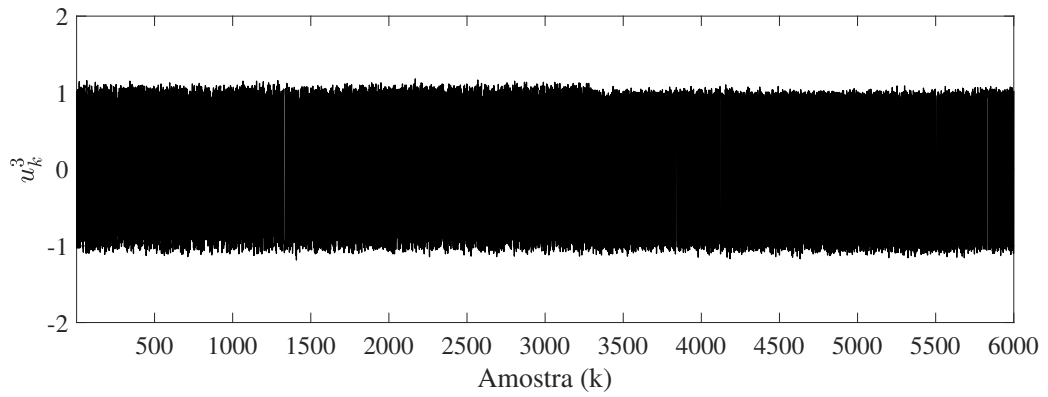
Fonte: Autor.

Figura 33 – Evaporador Industrial: Entrada u^2 .



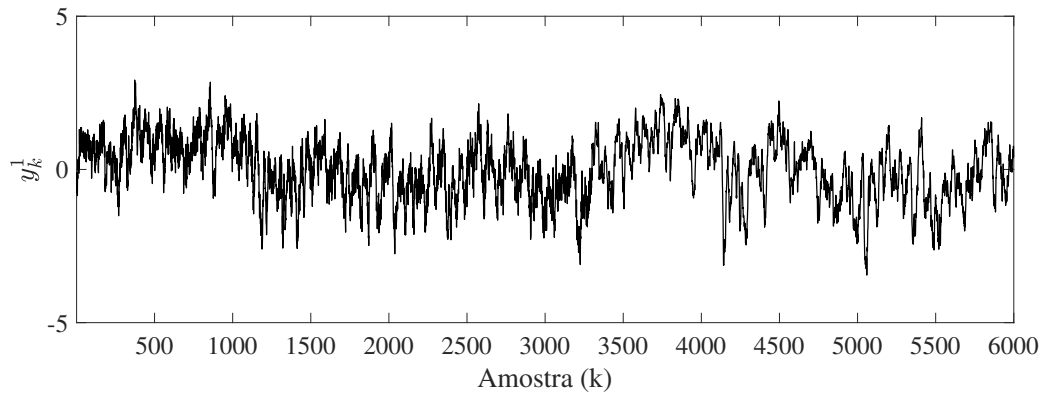
Fonte: Autor.

Figura 34 – Evaporador Industrial: Entrada u^3 .

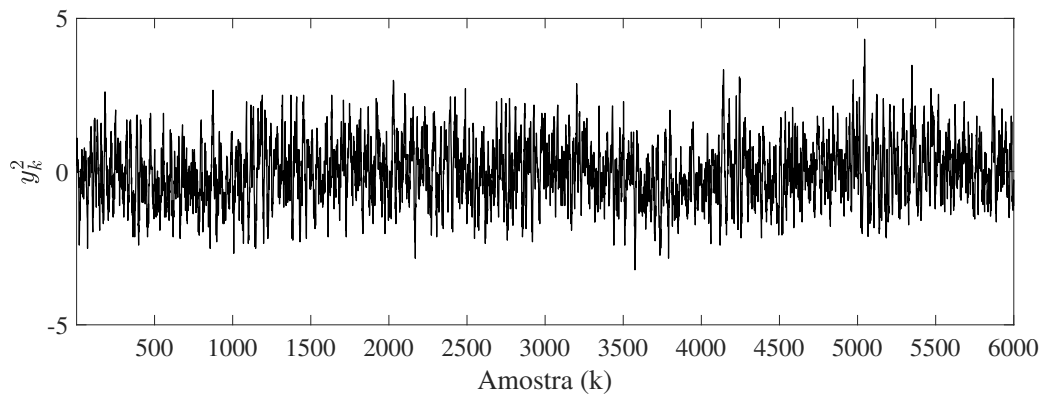


Fonte: Autor.

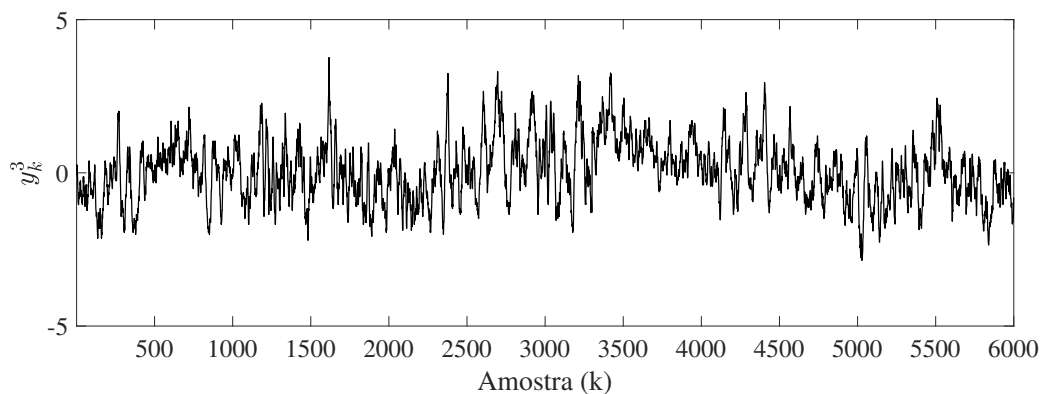
Figura 35 – Evaporador Industrial: Saída y^1 .



Fonte: Autor.

Figura 36 – Evaporador Industrial: Saída y^2 .

Fonte: Autor.

Figura 37 – Evaporador Industrial: Saída y^3 .

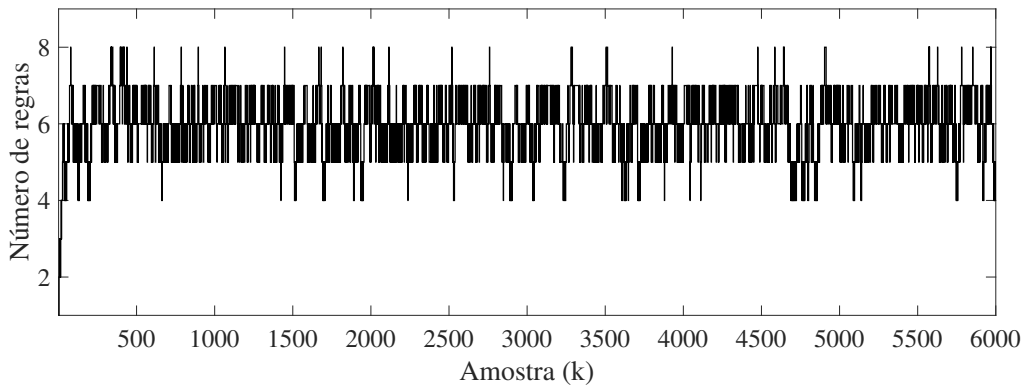
Fonte: Autor.

Foram utilizados os seguintes parâmetros durante a inicialização do algoritmo de identificação: $d_e = 0,1$, $\eta = 0,03$, $\hat{n} = 4$ e $\varepsilon = 0,8$. As amostras 3000 a 6000 foram utilizadas na etapa de validação.

Ao término da identificação, o modelo possui 5 regras. A evolução do número de regras do modelo nebuloso evolutivo pode ser vista na figura 38. A ordem final para todos os modelos locais no espaço de estados é igual a 8, como pode ser visto na figura 39. A estimação recursiva dos primeiros três elementos da diagonal principal da matriz dinâmica $\mathbf{A}_k^i | i=1, \dots, 4$ é exibida na figura 40. O resultado da predição das saídas através do modelo identificado, no intervalo [3000,6000] do conjunto de dados é ilustrado nas figuras 41 a 43.

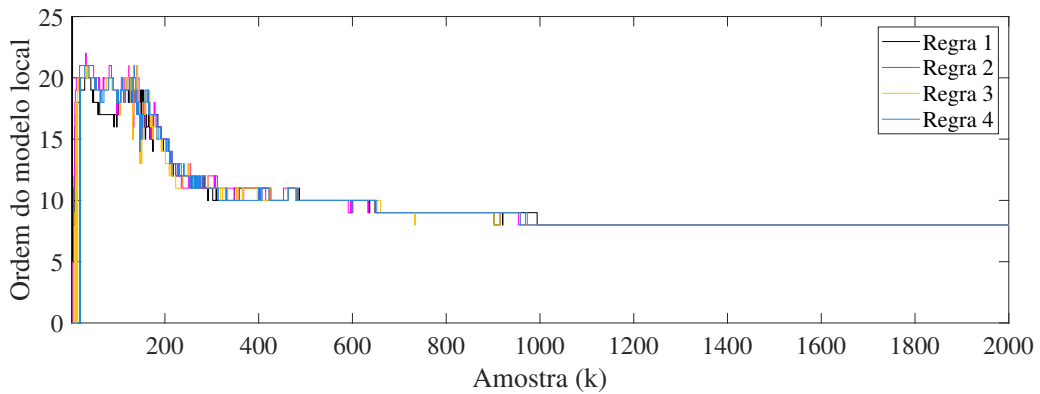
A tabela 3 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos nesta proposta, os resultados obtidos por Torres (2018) e os resultados obtidos por Jafari, Salimifard e Dehghani (2014).

Figura 38 – Evaporador Industrial: Evolução do número de regras.



Fonte: Autor.

Figura 39 – Evaporador Industrial: Ordem do modelo local. Não houveram mudanças na ordem do modelo local para estas regras no intervalo [2000-6000].



Fonte: Autor.

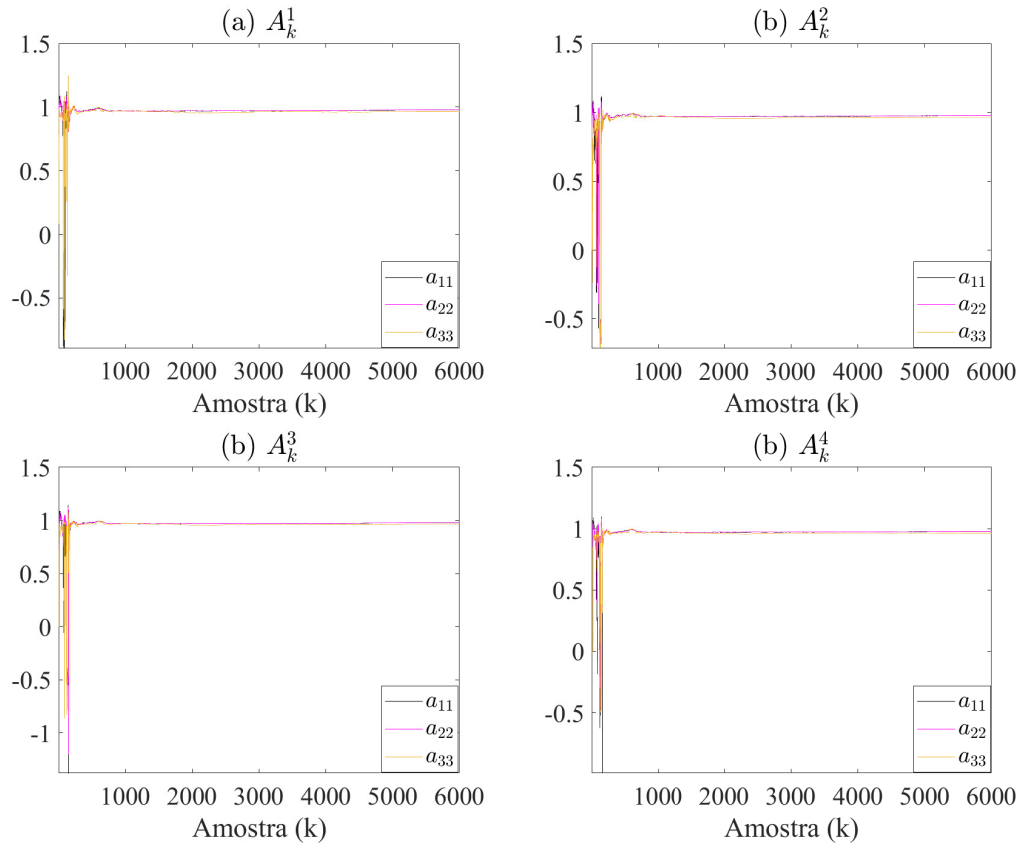
Tabela 3 – Evaporador industrial: Comparação dos resultados obtidos através da metodologia proposta com os resultados apresentados em (TORRES, 2018)^[1] e (JAFARI; SALIMIFARD; DEGHANI, 2014)^[2].

Métrica	Saída	Metodologia Proposta	[1] F-ERA	[2] Hammerstein	[2] Wiener I	[2] Wiener II
MSE	y^1	0,0005	0,0108	0,0234	0,0781	0,0233
	y^2	0,0086	0,0212	0,1001	0,2153	0,1261
	y^3	0,0170	0,0109	0,0204	0,0461	0,0172
FIT (%)	y^1	99,9534	90,0872	85,4225	73,3457	85,4391
	y^2	99,1077	85,1431	67,7202	52,6547	63,7737
	y^3	98,3089	89,5791	85,7438	78,5727	86,9015

Fonte: Autor.

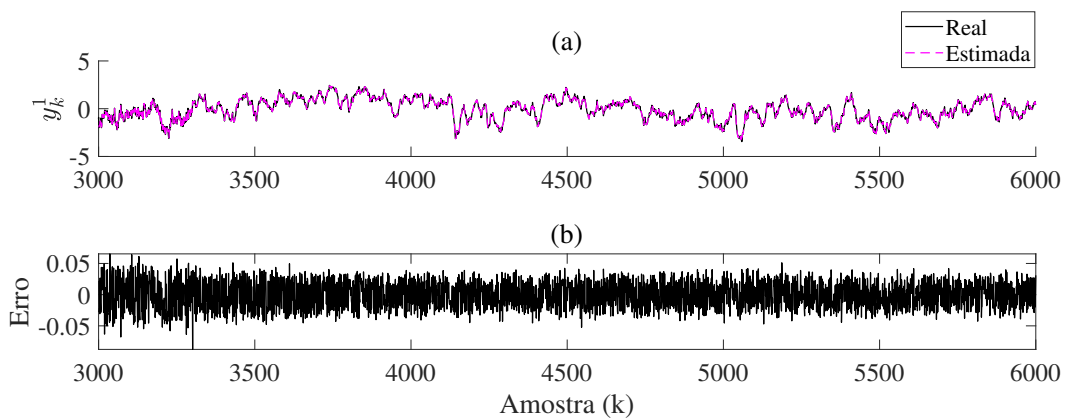
Os resultados apresentados na tabela 3 indicam que a metodologia proposta obtém melhores valores de MSE para as saídas y^1 e y^2 e melhores valores de FIT para todas as saídas. Os resultados obtidos demonstram o bom desempenho e a aplicabilidade da metodologia proposta

Figura 40 – Evaporador Industrial: Estimação recursiva dos três primeiros elementos da diagonal principal das matrizes A_k^i $i=1, \dots, 4$.



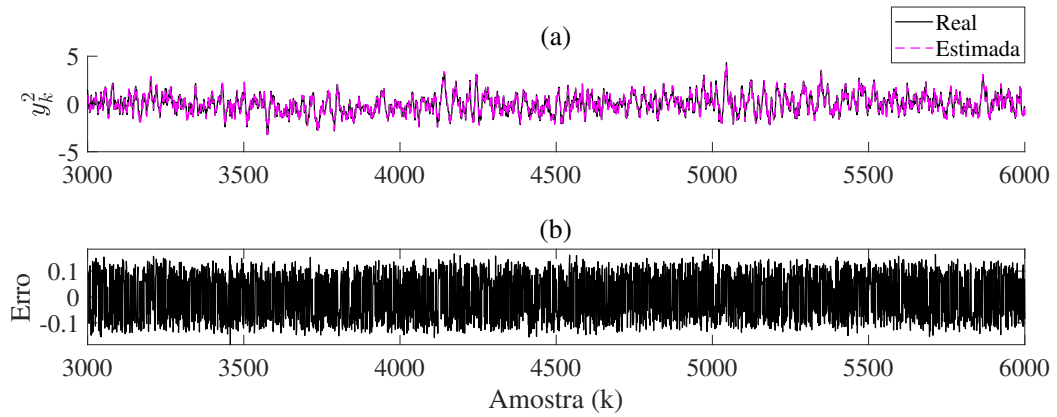
Fonte: Autor.

Figura 41 – Evaporador Industrial: Saída y^1 real e estimada. (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.



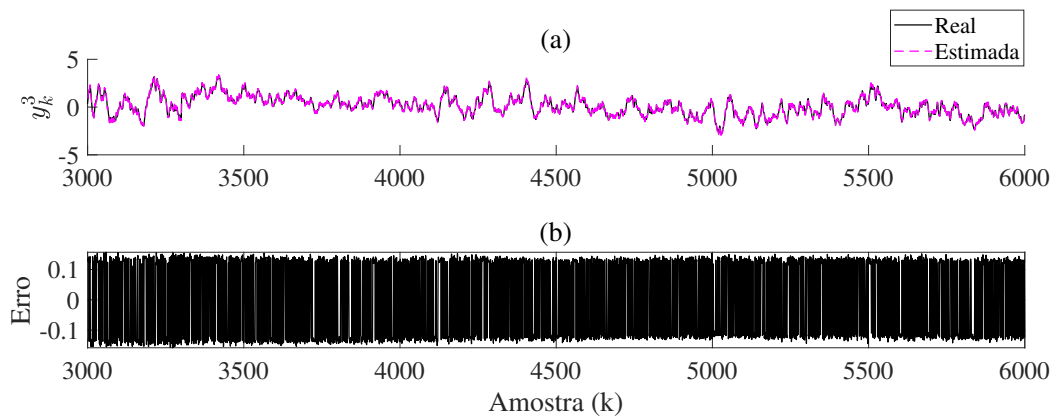
Fonte: Autor.

Figura 42 – Evaporador Industrial: Saída y^2 real e estimada. (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.



Fonte: Autor.

Figura 43 – Evaporador Industrial: Saída y^3 real e estimada. (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.



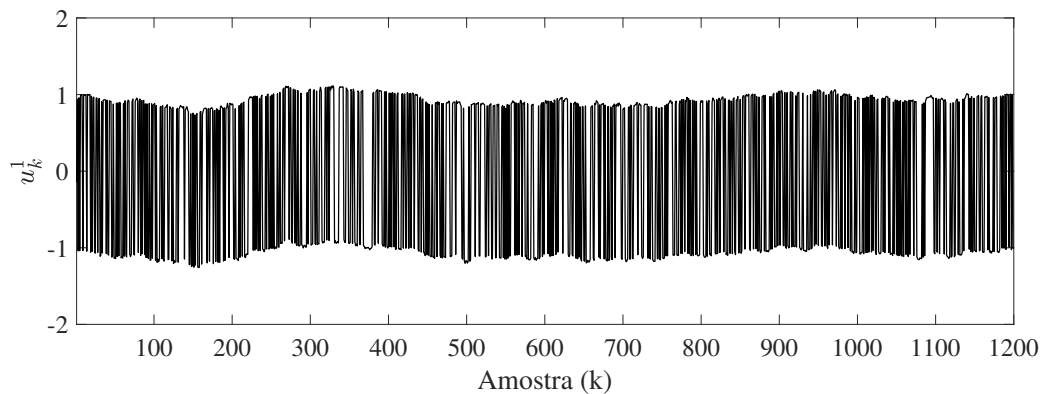
Fonte: Autor.

em sistemas industriais multivariáveis não lineares.

4.4 Forno para Vidro

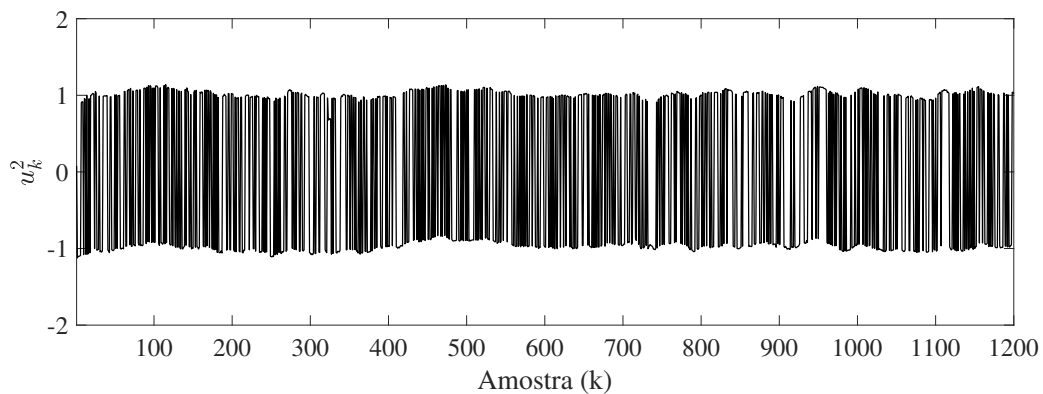
Nesta seção, um processo de fornalha para vidro é identificado. Este também é um sistema industrial multivariável não linear. Este sistema possui três entradas, duas entradas de aquecimento e uma entrada de resfriamento e seis saídas de sensores de temperatura em uma seção transversal do forno (JAFARI; SALIMIFARD; DEGHANI, 2014; OVERSCHEE; MOOR, 1994). Neste processo, 1200 amostras de dados foram utilizadas. Os dados utilizados foram obtidos em (DE MOOR, 2018b) e são exibidos nas figuras 44 a 52.

Figura 44 – Forno para vidro: Entrada u^1 .



Fonte: Autor.

Figura 45 – Forno para vidro: Entrada u^2 .

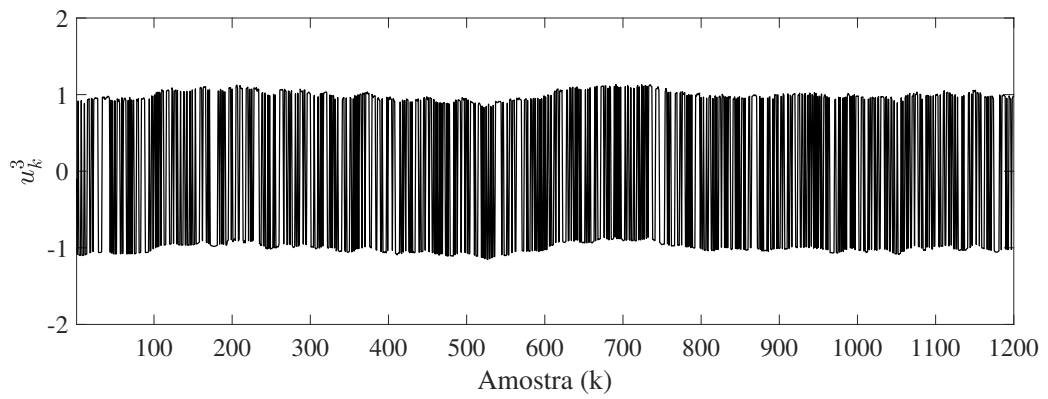


Fonte: Autor.

Foram utilizados os seguintes parâmetros durante a inicialização do algoritmo de identificação: $d_e = 0,1$, $\eta = 0,03$, $\hat{n} = 4$ e $\varepsilon = 0,8$. As amostras 800 a 1200 foram utilizadas na etapa de validação do modelo obtido através da metodologia proposta.

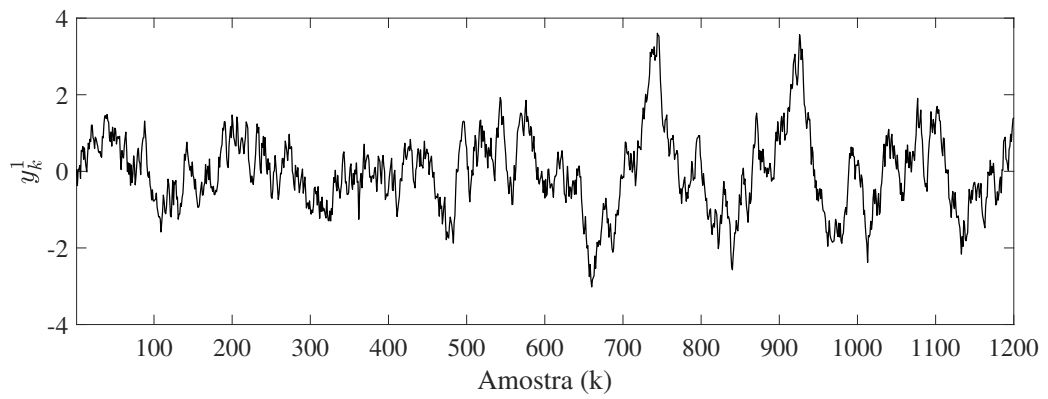
Ao término da identificação, o modelo possui 7 regras. A evolução do número de regras do modelo nebuloso evolutivo pode ser vista na figura 53. A ordem final para todos os modelos locais no espaço de estados é igual a 11, como pode ser visto na figura 54. A estimação recursiva

Figura 46 – Fornalha para vidro: Entrada u^3 .



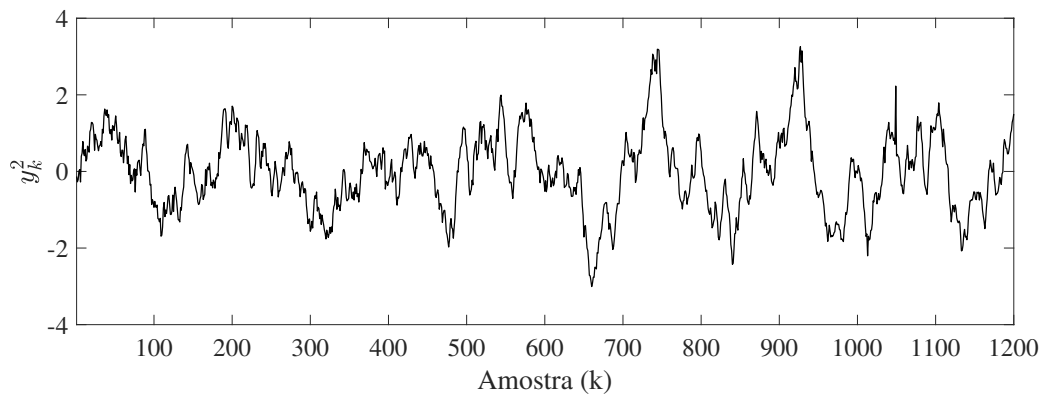
Fonte: Autor.

Figura 47 – Fornalha para vidro: Saída y^1 .



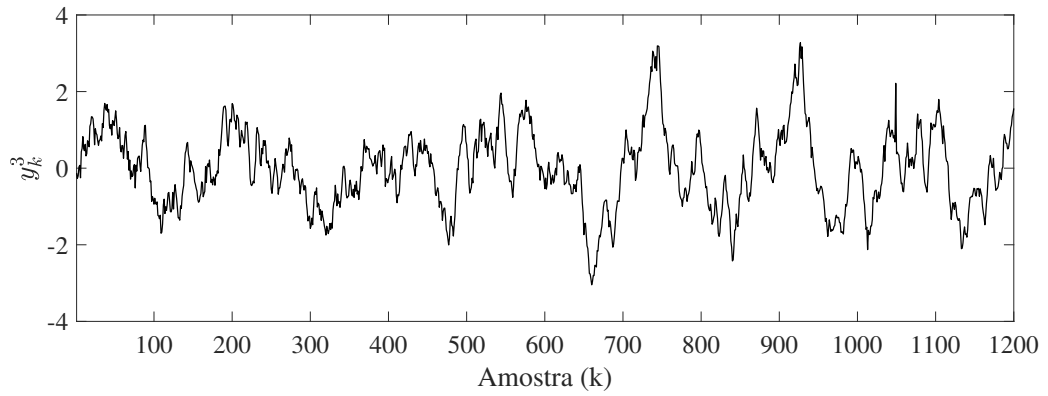
Fonte: Autor.

Figura 48 – Fornalha para vidro: Saída y^2 .



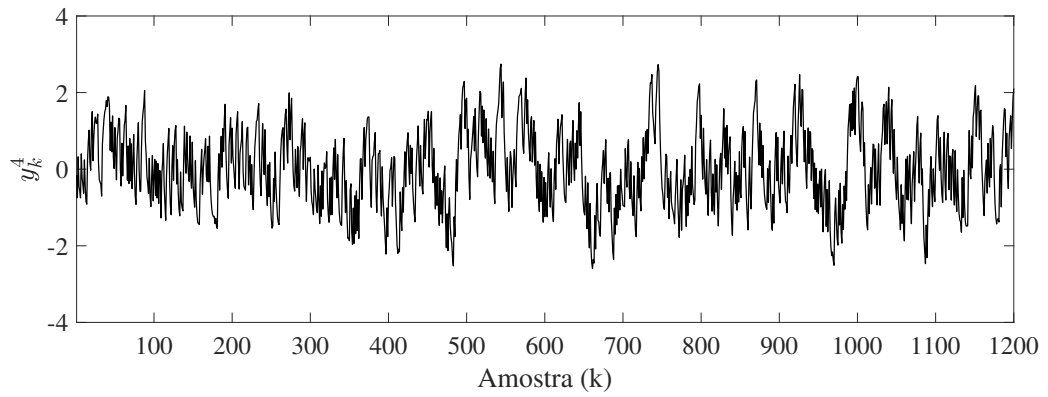
Fonte: Autor.

Figura 49 – Fornalha para vidro: Saída y^3 .



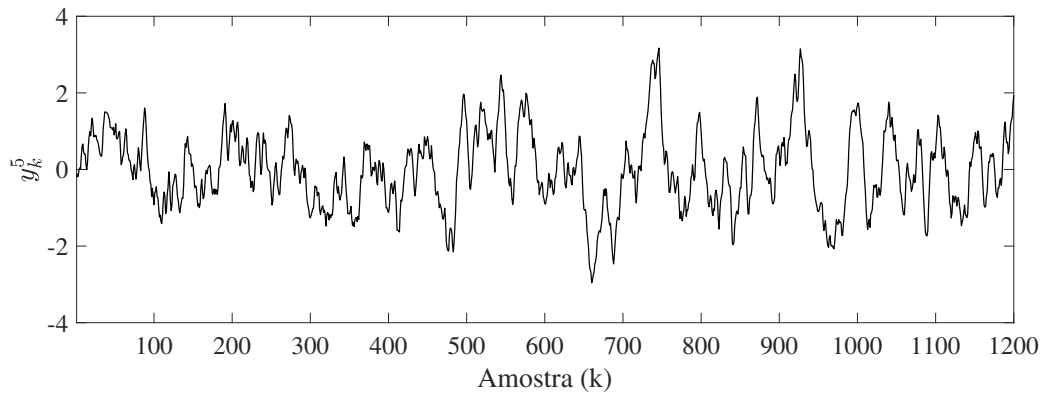
Fonte: Autor.

Figura 50 – Fornalha para vidro: Saída y^4 .

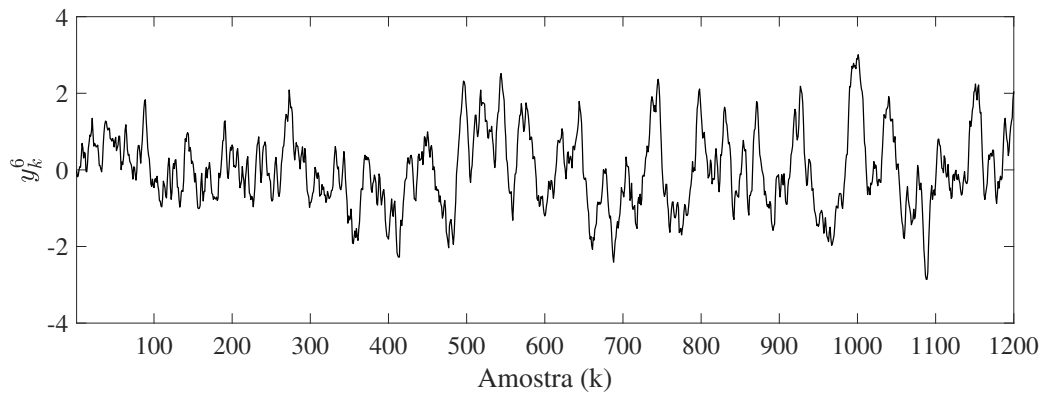


Fonte: Autor.

Figura 51 – Fornalha para vidro: Saída y^5 .



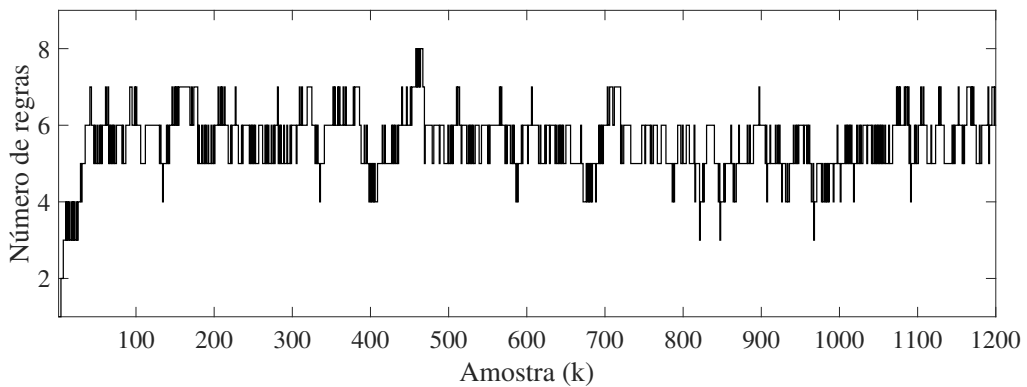
Fonte: Autor.

Figura 52 – Fornalha para vidro: Saída y^6 .

Fonte: Autor.

dos três primeiros elementos da diagonal principal das matrizes dinâmicas $\mathbf{A}_k^i | i=1, \dots, 4$ é exibida na figura 55. O resultado da predição das saídas através do modelo identificado, no intervalo [800,1200] do conjunto de dados é ilustrada nas figuras 56 a 61.

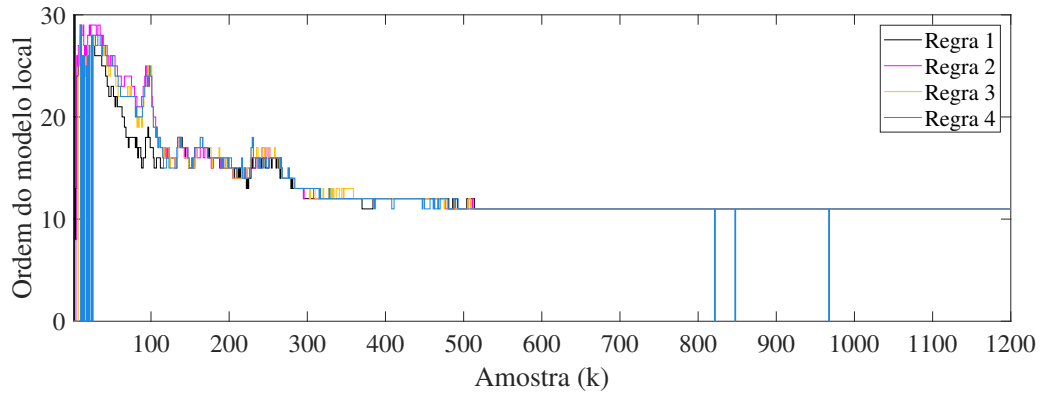
Figura 53 – Fornalha para vidro: Evolução do número de regras.



Fonte: Autor.

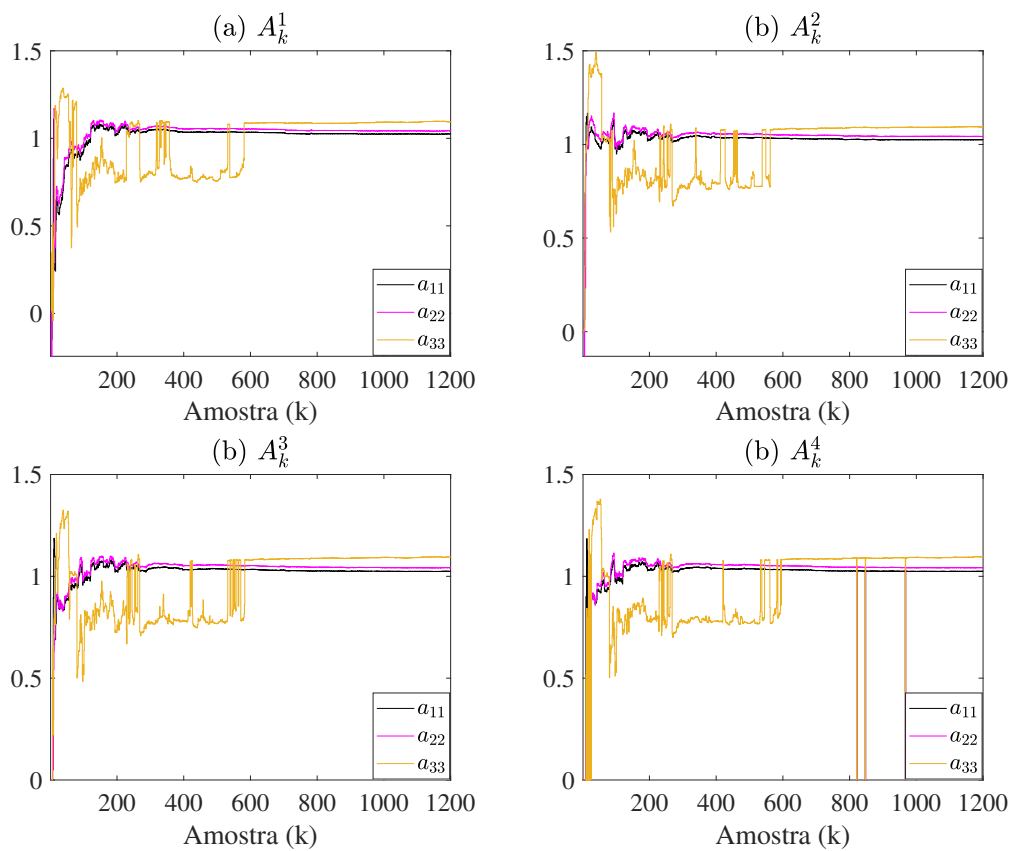
Para demonstrar a eficácia da metodologia proposta, a tabela 4 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos nesta proposta com os resultados obtidos por Torres (2018) e os resultados obtidos por Jafari, Salimifard e Dehghani (2014).

Figura 54 – Fornalha para vidro: Ordem do modelo local.



Fonte: Autor.

Figura 55 – Fornalha para vidro: Estimação recursiva dos três primeiros elementos da diagonal principal das matrizes $A_k^i | i=1, \dots, 4$.



Fonte: Autor.

Figura 56 – Fornalha para vidro: Saída y^1 real e estimada. (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.

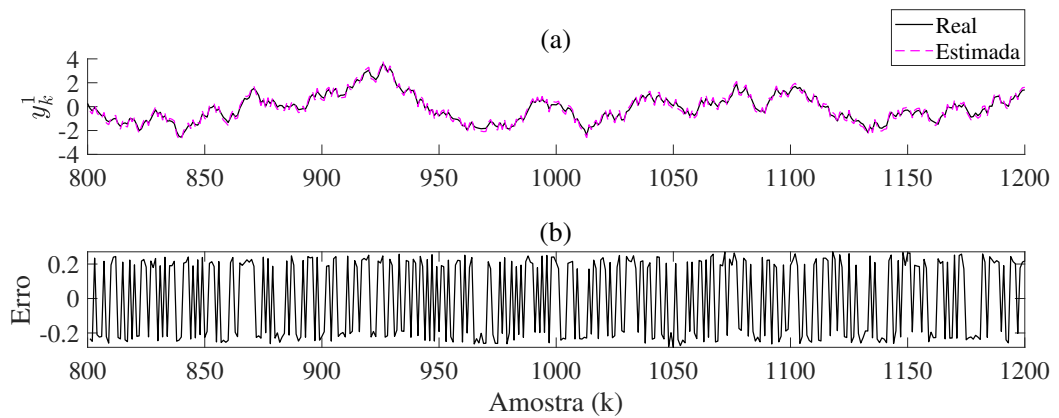


Figura 57 – Fornalha para vidro: Saída y^2 real e estimada. (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.

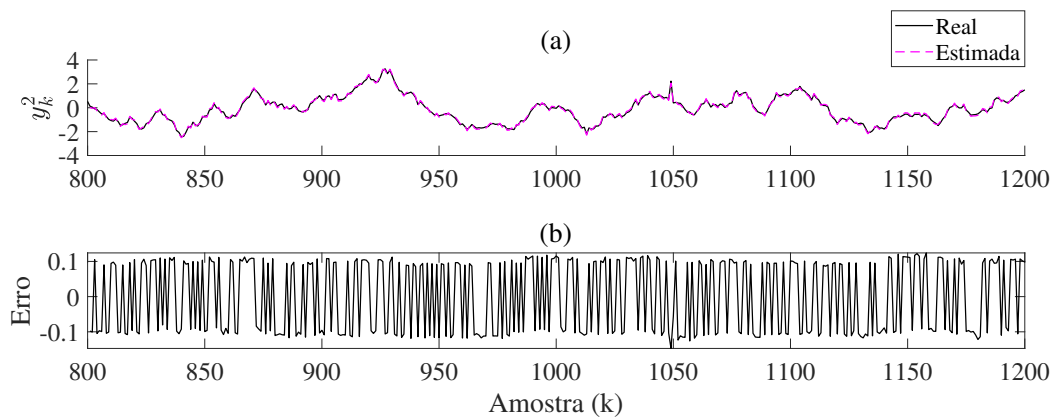


Figura 58 – Fornalha para vidro: Saída y^3 real e estimada. (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.

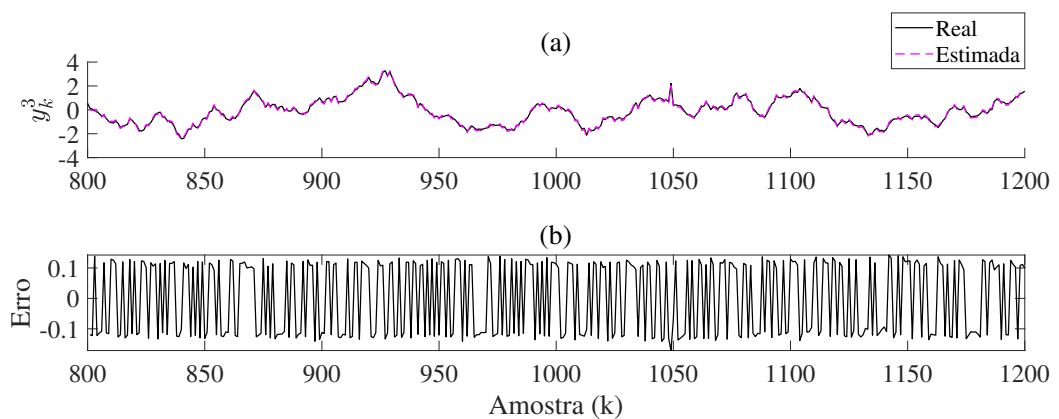
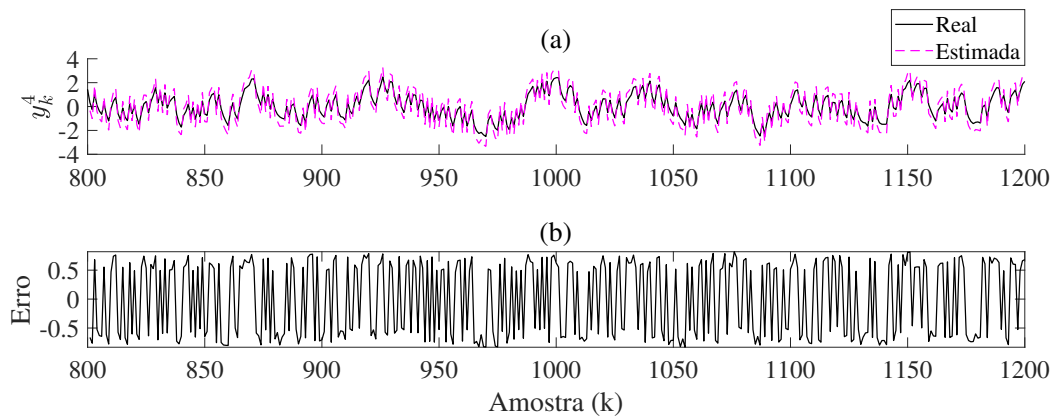
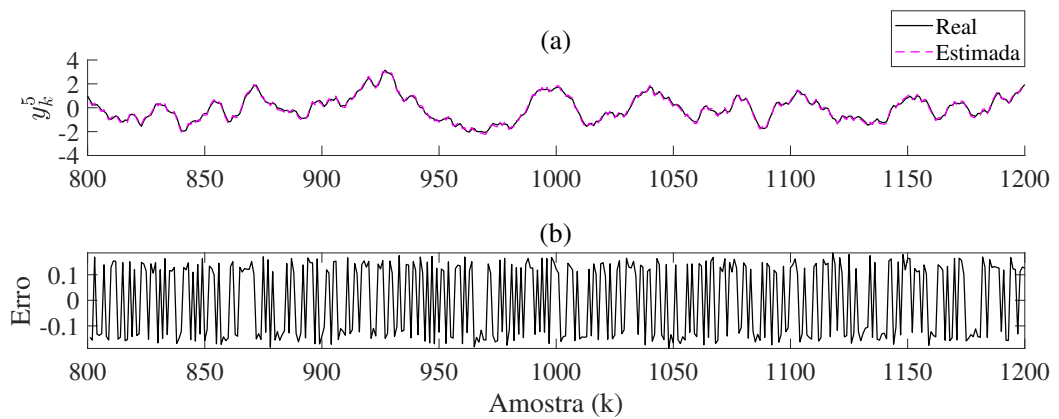


Figura 59 – Fornalha para vidro: Saída y^4 real e estimada. (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.



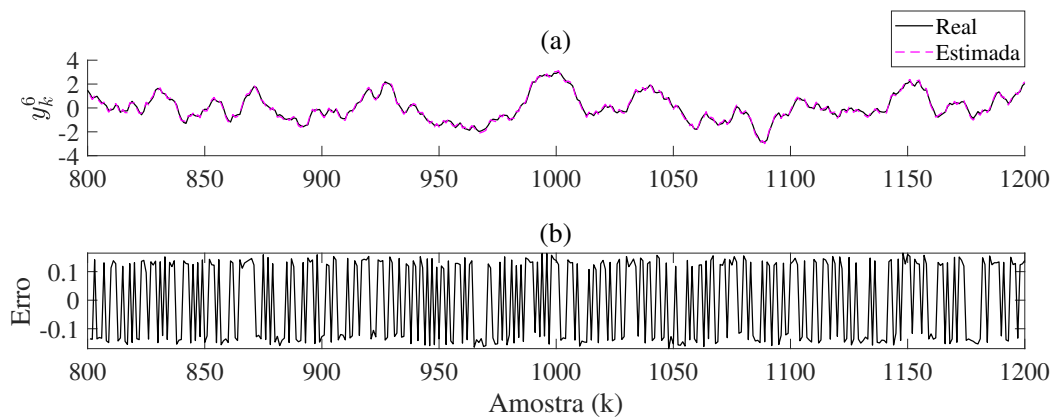
Fonte: Autor.

Figura 60 – Fornalha para vidro: Saída y^5 real e estimada. (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.



Fonte: Autor.

Figura 61 – Fornalha para vidro: Saída y^6 real e estimada. (a) comparação entre as saídas real e estimada, (b) erro de estimação.



Fonte: Autor.

Tabela 4 – Fornalha para vidro: Comparação dos resultados obtidos através da metodologia proposta com os resultados apresentados em (TORRES, 2018)^[1] e (JAFARI; SALIMIFARD; DEHGHANI, 2014)^[2].

Métrica	Saída	Metodologia Proposta	[1]	[2]	[2]	[2]
			F-ERA	Hammerstein	Wiener I	Wiener II
MSE	y^1	0,0496	0,0135	0,0327	0,0280	0,0373
	y^2	0,0107	0,0204	0,0311	0,0210	0,0246
	y^3	0,0144	0,0303	0,0313	0,0212	0,0245
	y^4	0,4168	0,0147	0,1419	0,1684	0,1899
	y^5	0,0201	0,0351	0,0407	0,0326	0,0365
	y^6	0,0190	0,0152	0,0473	0,0364	0,0352
FIT (%)	y^1	96,2365	85,6598	74,7545	76,1005	67,3832
	y^2	99,1056	81,5115	80,3904	78,8191	73,3235
	y^3	98,7756	77,2783	80,1415	75,5570	73,0043
	y^4	62,7731	83,7629	33,3666	34,7442	14,3157
	y^5	98,1541	74,5709	84,2126	83,3281	70,8378
	y^6	98,4646	84,3339	81,5102	80,4249	70,4023

Fonte: Autor.

Os resultados apresentados na tabela 4 indicam que a metodologia proposta obtém melhores valores de MSE para as saídas y^2 , y^3 e y^5 e melhores valores de FIT para as saídas y^1 , y^2 , y^3 , y^5 e y^6 . Como os resultados demonstram, a metodologia proposta é capaz de gerar um modelo do processo real capaz de o descrever de forma satisfatória.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1 Conclusões

Nesta dissertação foi introduzida uma metodologia de identificação de modelo nebuloso evolutivo com sistemas locais no espaço de estados com ordem variável para lidar com dinâmicas complexas, não lineares e variantes no tempo. O modelo obtido é capaz de alterar sua estrutura de forma autônoma de acordo com o fluxo de dados. Além disso, a realização mínima dos submodelos dos consequentes das regras garante a simplicidade do modelo obtido. Ainda, o modelo local no espaço de estados é capaz de alterar sua ordem independentemente para cada regra nebulosa.

A metodologia proposta foi aplicada na identificação de sistemas dinâmicos complexos, como o sistema de tanque cilíndrico e o robô aéreo quadricóptero. Além disso, a metodologia foi aplicada em dois casos de *benchmark*, sendo estes o evaporador industrial e a fornalha para vidro. Os resultados obtidos apresentam a alta eficácia da metodologia proposta na identificação *online* destes sistemas.

5.2 Trabalhos Futuros

A seguir são apresentadas sugestões de trabalhos futuros relacionados à metodologia proposta nesta dissertação:

- Definir \hat{n} automaticamente a partir do fluxo de dados;
- Aplicar a metodologia em sistemas de controle nebulosos evolutivos;
- Ampliar a metodologia para sistemas nebulosos tipo-2;
- Realizar uma análise de custo computacional, comparando com outras técnicas de identificação existentes na literatura.

REFERÊNCIAS

AGUIRRE, L. A. *Introdução à Identificação de Sistemas - Técnicas Lineares e Não-Lineares: Teoria e Aplicação*. 4. ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2015.

ANDREU, J.; ANGELOV, P. Forecasting time-series for nn gc1 using evolving takagi-sugeno (ets) fuzzy systems with on-line inputs selection. In: . IEEE, 2010. p. 1–5. ISBN 978-1-4244-6919-2. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/FUZZY.2010.5584130>>.

ANGELOV, P. An approach for fuzzy rule-base adaptation using on-line clustering. *International Journal of Approximate Reasoning*, v. 35, p. 275–289, 3 2004. ISSN 0888613X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijar.2003.08.006>>.

ANGELOV, P.; FILEV, D.; KASABOV, N. *Evolving Intelligent Systems: Methodology and Applications*. [S.l.]: Wiley, 2010. (IEEE Press Series on Computational Intelligence). ISBN 9780470569955.

ANGELOV, P.; GU, X.; KANGIN, D. Empirical data analytics. *International Journal of Intelligent Systems*, v. 32, p. 1261–1284, 12 2017. ISSN 08848173. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/int.21899>>.

ANGELOV, P.; KASABOV, N. Evolving computational intelligence systems. In: *Proceedings of the 1st international workshop on genetic fuzzy systems*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 76–82.

ANGELOV, P.; KORDON, A. Adaptive inferential sensors based on evolving fuzzy models. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, v. 40, p. 529–539, 4 2010. ISSN 1083-4419. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TSMCB.2009.2028315>>.

ANGELOV, P.; SKRJANC, I.; BLAZIC, S. Robust evolving cloud-based controller for a hydraulic plant. In: . IEEE, 2013. p. 1–8. ISBN 978-1-4673-5855-2. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/EAIS.2013.6604098>>.

ANGELOV, P.; YAGER, R. A new type of simplified fuzzy rule-based system. *International Journal of General Systems*, v. 41, p. 163–185, 2 2012. ISSN 0308-1079. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/03081079.2011.634807>>.

ANGELOV, P.; ZHOU, X. Evolving fuzzy systems from data streams in real-time. In: . IEEE, 2006. p. 29–35. ISBN 0-7803-9718-5. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ISEFS.2006.251157>>.

ANGELOV, P. P. *Evolving Rule-Based Models: A Tool for Design of Flexible Adaptive Systems*. [S.l.]: Physica-Verlag HD, 2002. v. 92. ISBN 978-3-7908-2506-0.

ANGELOV, P. P. *Autonomous learning systems: from data streams to knowledge in real-time*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Ltd, 2013.

ANGELOV, P. P.; GU, X. Empirical fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems*, v. 33, p. 362–395, 2 2018. ISSN 08848173. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/int.21935>>.

ASIM, M. et al. A review on computational intelligence techniques in cloud and edge computing. *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence*, v. 4, n. 6, p. 742–763, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TETCI.2020.3007905>>.

- BABUŠKA, R. *Neuro-Fuzzy Methods for Modeling and Identification*. Heidelberg: Physica-Verlag HD, 2003. 161-186 p. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-7908-1770-6_8>.
- BABUŠKA, R. *Fuzzy Modeling for Control*. [S.l.]: Springer Netherlands, 2012. (International Series in Intelligent Technologies). ISBN 9789401148689.
- BANERJEE, A.; ABU-MAHFOUZ, I. A comparative analysis of particle swarm optimization and differential evolution algorithms for parameter estimation in nonlinear dynamic systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 58, p. 65–83, 1 2014. ISSN 09600779. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.chaos.2013.11.004>>.
- BARTKOWSKI, P.; ZALEWSKI, R.; CHODKIEWICZ, P. Parameter identification of bouc-wen model for vacuum packed particles based on genetic algorithm. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, v. 19, p. 322–333, 3 2019. ISSN 16449665. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.acme.2018.11.002>>.
- BEZDEK, J. C.; EHRLICH, R.; FULL, W. Fcm: The fuzzy c-means clustering algorithm. *Computers & Geosciences*, v. 10, p. 191–203, 1 1984. ISSN 00983004. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0098-3004\(84\)90020-7](https://doi.org/10.1016/0098-3004(84)90020-7)>.
- BOLOURCHI, A.; MASRI, S. F.; ALDRAIHEM, O. J. Development and application of computational intelligence approaches for the identification of complex nonlinear systems. *Nonlinear Dynamics*, v. 79, p. 765–786, 1 2015. ISSN 0924-090X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11071-014-1702-9>>.
- BOUBAKER, S. Identification of nonlinear hammerstein system using mixed integer-real coded particle swarm optimization: application to the electric daily peak-load forecasting. *Nonlinear Dynamics*, v. 90, p. 797–814, 10 2017. ISSN 0924-090X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11071-017-3693-9>>.
- BREWICK, P. T.; MASRI, S. F. An evaluation of data-driven identification strategies for complex nonlinear dynamic systems. *Nonlinear Dynamics*, v. 85, p. 1297–1318, 7 2016. ISSN 0924-090X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11071-016-2761-x>>.
- CAO, S.; REES, N.; FENG, G. Stability analysis of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, v. 26, p. 201–204, 2 1996. ISSN 1083-4419. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/3477.484455>>.
- CAO, S.-G.; REES, N.; FENG, G. Analysis and design of fuzzy control systems using dynamic fuzzy-state space models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 7, p. 192–200, 4 1999. ISSN 1063-6706. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/91.755400>>.
- COELHO, A. A. R.; COELHO, L. d. S. *Identificação de sistemas dinâmicos lineares*. Florianópolis: Ed. da UFSC, 2004.
- DE MOOR, B. L. R. *DaISy: Database for the Identification of Systems [Data from an industrial evaporator]*. KU Leuven, Belgium, 2018. <<http://homes.esat.kuleuven.be/~smc/daisy/>> (Acesso em 10 de Agosto de 2022).
- DE MOOR, B. L. R. *DaISy: Database for the Identification of Systems [Data of a glass furnace (Philips)]*. KU Leuven, Belgium, 2018. <<http://homes.esat.kuleuven.be/~smc/daisy/>> (Acesso em 10 de Agosto de 2022).

ENGELBRECHT, A. *Computational Intelligence: An Introduction*. [S.l.]: Wiley, 2007. ISBN 9780470512500.

EVANGELISTA, A. P. F.; SERRA, G. L. de O. State space black-box modelling via markov parameters based on evolving type-2 neural-fuzzy inference system for nonlinear multivariable dynamic systems. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 394, p. 1–39, 9 2020. ISSN 01650114. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.fss.2019.08.013>>.

FENG, G. *Analysis and Synthesis of Fuzzy Control Systems: A Model-Based Approach*. [S.l.]: CRC Press, 2018. (Automation and Control Engineering). ISBN 9781420092653.

FU, J. et al. Narx neural network modeling and robustness analysis of magnetorheological elastomer isolator. *Smart Materials and Structures*, v. 25, p. 125019, 12 2016. ISSN 0964-1726. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0964-1726/25/12/125019>>.

GOMES, D. C. dos S.; SERRA, G. L. de O. Machine learning model for computational tracking and forecasting the covid-19 dynamic propagation. *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, v. 25, p. 615–622, 3 2021. ISSN 2168-2194. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/JBHI.2021.3052134>>.

GOMES, D. C. dos S.; SERRA, G. L. de O. Interval type-2 fuzzy computational model for real time kalman filtering and forecasting of the dynamic spreading behavior of novel coronavirus 2019. *ISA Transactions*, v. 124, p. 57–68, 5 2022. ISSN 00190578. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.isatra.2022.03.031>>.

GOMIDE, F. *Evolving Granular Neural Networks From Data Streams*. John Wiley & Sons, Inc., 2017. 1-9 p. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/047134608X.W8358>>.

GUERRA, F. A.; COELHO, L. dos S. Multi-step ahead nonlinear identification of lorenz's chaotic system using radial basis neural network with learning by clustering and particle swarm optimization. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 35, p. 967–979, 3 2008. ISSN 09600779. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.05.077>>.

GUSTAFSON, D.; KESSEL, W. Fuzzy clustering with a fuzzy covariance matrix. In: . IEEE, 1978. p. 761–766. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/CDC.1978.268028>>.

HABBI, H.; ZELMAT, M.; BOUAMAMA, B. O. A dynamic fuzzy model for a drum–boiler–turbine system. *Automatica*, v. 39, p. 1213–1219, 7 2003. ISSN 00051098. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(03\)00075-X](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(03)00075-X)>.

HERGLI, K. et al. Identification of preisach hysteresis model parameters using genetic algorithms. *Journal of King Saud University - Science*, v. 31, p. 746–752, 10 2019. ISSN 10183647. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jksus.2017.11.005>>.

HWANG, C.; RHEE, F. C.-H. Uncertain fuzzy clustering: Interval type-2 fuzzy approach to c-means. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 15, p. 107–120, 2 2007. ISSN 1063-6706. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2006.889763>>.

HYDE, R.; ANGELOV, P. Data density based clustering. In: . IEEE, 2014. p. 1–7. ISBN 978-1-4799-5538-1. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/UKCI.2014.6930157>>.

- JAFARI, M.; SALIMIFARD, M.; DEGHANI, M. Identification of multivariable nonlinear systems in the presence of colored noises using iterative hierarchical least squares algorithm. *ISA Transactions*, v. 53, p. 1243–1252, 7 2014. ISSN 00190578. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.isatra.2013.12.034>>.
- JAMMALI, M. A.; MOUFTAH, H. T. Takagi-sugeno fuzzy control for multi-input multi-output systems based on subspace state space identification. In: . IEEE, 2020. p. 18–23. ISBN 978-1-7281-8815-7. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/STA50679.2020.9329299>>.
- JIN, X. et al. Modeling of nonlinear system based on deep learning framework. *Nonlinear Dynamics*, v. 84, p. 1327–1340, 5 2016. ISSN 0924-090X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11071-015-2571-6>>.
- JOHANSEN, T.; SHORTEN, R.; MURRAY-SMITH, R. On the interpretation and identification of dynamic takagi-sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 8, p. 297–313, 6 2000. ISSN 10636706. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/91.855918>>.
- JUANG, J.; PHAN, M. *Identification and Control of Mechanical Systems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001. ISBN 9781139430111.
- JUANG, J.-N.; PAPPAS, R. S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 8, p. 620–627, 9 1985. ISSN 0731-5090. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.20031>>.
- JUANG, J.-N. et al. Identification of observer/kalman filter markov parameters: Theory and experiments. In: . American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/6.1991-2735>>.
- JUANG, J.-N. et al. Identification of observer/kalman filter markov parameters: Theory and experiments. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 16, p. 320–329, 3 1993. ISSN 0731-5090. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.21006>>.
- JUANG, J.-N.; PHAN, M.; LONGMAN, R. W. Identification of linear multivariable systems from a single set of data by identification of observers with assigned real eigenvalues. In: . American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/6.1991-949>>.
- KALMAN, R. E. Mathematical description of linear dynamical systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control*, v. 1, p. 152–192, 1 1963. ISSN 0887-4603. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/0301010>>.
- KEESMAN, K. J. *System Identification: An Introduction*. 1. ed. London: Springer-Verlag, 2011. (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing).
- KIM, W. C.; AHN, S. C.; KWON, W. H. Stability analysis and stabilization of fuzzy state space models. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 71, p. 131–142, 4 1995. ISSN 01650114. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0165-0114\(94\)00190-I](https://doi.org/10.1016/0165-0114(94)00190-I)>.
- KLIR, G. J.; YUAN, B. *Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1995.
- LEITE, D. et al. Nonlinear fuzzy state-space modeling and lmi fuzzy control of overhead cranes. In: . IEEE, 2019. p. 1–6. ISBN 978-1-5386-1728-1. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/FUZZ-IEEE.2019.8858968>>.

- LENDEK, Z. et al. *Stability Analysis and Nonlinear Observer Design using Takagi-Sugeno Fuzzy Models*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2010. (Studies in Fuzziness and Soft Computing). ISBN 9783642167751.
- LENG, D. et al. Modeling the behaviors of magnetorheological elastomer isolator in shear-compression mixed mode utilizing artificial neural network optimized by fuzzy algorithm (annofa). *Smart Materials and Structures*, v. 27, p. 115026, 11 2018. ISSN 0964-1726. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1361-665X/aadfa9>>.
- LI, K.; KOU, J.; ZHANG, W. Deep neural network for unsteady aerodynamic and aeroelastic modeling across multiple mach numbers. *Nonlinear Dynamics*, v. 96, p. 2157–2177, 5 2019. ISSN 0924-090X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11071-019-04915-9>>.
- LUENBERGER, D. G. Observing the state of a linear system. *IEEE Transactions on Military Electronics*, v. 8, p. 74–80, 1964. ISSN 0536-1559. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TME.1964.4323124>>.
- LUGHOFER, E. *Evolving Fuzzy Systems - Methodologies, Advanced Concepts and Applications*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2011. (Studies in Fuzziness and Soft Computing). ISBN 9783642180866.
- MAMDANI, E. H. Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. In: IET. *Proceedings of the institution of electrical engineers*. [S.l.], 1974. v. 121, n. 12, p. 1585–1588.
- OGATA, K. *Discrete-time Control Systems*. [S.l.]: Prentice Hall, 1995. ISBN 9780130342812.
- OVERSCHEE, P. V.; MOOR, B. D. N4sid: Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems. *Automatica*, v. 30, p. 75–93, 1 1994. ISSN 00051098. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0005-1098\(94\)90230-5](https://doi.org/10.1016/0005-1098(94)90230-5)>.
- PEDRYCZ, W. *Knowledge-based clustering: from data to information granules*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2005. ISBN 978-0-471-70859-9.
- PHAN, M. et al. Linear system identification via an asymptotically stable observer. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 79, p. 59–86, 10 1993. ISSN 0022-3239. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00941887>>.
- PIRES, D. S. *Metodologia para modelagem de filtros de Kalman nebulosos evolutivos de realização mínima no espaço de estados via dados experimentais*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Maranhão, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, São Luís, MA, 2018. Disponível em: <<https://tedebc.ufma.br/jspui/handle/tede/2504>>.
- PIRES, D. S.; SERRA, G. L. Methodology for modeling fuzzy kalman filters of minimum realization from evolving clustering of experimental data. *ISA Transactions*, v. 105, p. 1–23, 10 2020. ISSN 00190578. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.isatra.2020.05.034>>.
- PIRES, D. S.; SERRA, G. L. de O. Methodology for evolving fuzzy kalman filter identification. *International Journal of Control, Automation and Systems*, v. 17, p. 793–800, 3 2019. ISSN 1598-6446. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s12555-017-0503-6>>.
- PRIMEAU, N. et al. A review of computational intelligence techniques in wireless sensor and actuator networks. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, v. 20, n. 4, p. 2822–2854, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/COMST.2018.2850220>>.

QUARANTA, G.; LACARBONARA, W.; MASRI, S. F. A review on computational intelligence for identification of nonlinear dynamical systems. *Nonlinear Dynamics*, v. 99, p. 1709–1761, 1 2020. ISSN 0924-090X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11071-019-05430-7>>.

RODRIGUES JÚNIOR, S. E.; SERRA, G. L. de O. A novel intelligent approach for state space evolving forecasting of seasonal time series. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, v. 64, p. 272–285, 9 2017. ISSN 09521976. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.engappai.2017.06.016>>.

RUBIO-SOLIS, A. et al. General type-2 radial basis function neural network: A data-driven fuzzy model. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 27, p. 333–347, 2 2019. ISSN 1063-6706. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2018.2858740>>.

SAMADI, M. F.; SAIF, M. State-space modeling and observer design of li-ion batteries using takagi–sugeno fuzzy system. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 25, p. 301–308, 1 2017. ISSN 1063-6536. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TCST.2016.2549270>>.

SANTOS, J. A.; SERRA, G. L. O. Recursive identification approach of multivariable nonlinear dynamic systems based on evolving fuzzy hammerstein models. In: . IEEE, 2018. p. 1–8. ISBN 978-1-5090-6020-7. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/FUZZ-IEEE.2018.8491606>>.

SCHUTTER, B. Minimal state-space realization in linear system theory: an overview. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 121, p. 331–354, 9 2000. ISSN 03770427. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(00\)00341-1](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00341-1)>.

SILVEIRA JÚNIOR, J. S.; COSTA, E. B. M. *ARDrone2Data [Experimental data collected from a Quadrotor Aerial Robot, Parrot AR.Drone 2.0]*. Newton Bello Av., Vila Maria, Imperatriz, Maranhão, Brazil, 2018. <<http://bit.ly/ARDrone2Data>> (Acesso em 21 de Julho de 2022).

SILVEIRA JÚNIOR, J. S.; COSTA, E. B. M. Data-driven fuzzy modelling methodologies for multivariable nonlinear systems. In: . IEEE, 2018. p. 125–131. ISBN 978-1-5386-7097-2. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/IS.2018.8710486>>.

SILVEIRA JÚNIOR, J. S.; COSTA, E. B. M. Fuzzy modelling methodologies based on okid/era algorithm applied to quadrotor aerial robots. In: _____. *Intelligent Systems: Theory, Research and Innovation in Applications*. Cham: Springer International Publishing, 2020. p. 295–317. ISBN 978-3-030-38704-4. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-38704-4_13>.

SUN, Q.; LI, R.; ZHANG, P. Stable and optimal adaptive fuzzy control of complex systems using fuzzy dynamic model. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 133, p. 1–17, 1 2003. ISSN 01650114. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(02\)00124-0](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(02)00124-0)>.

SUN, Y.; FENG, G.; CAO, J. A new approach to dynamic fuzzy modeling of genetic regulatory networks. *IEEE Transactions on NanoBioscience*, v. 9, p. 263–272, 12 2010. ISSN 1536-1241. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TNB.2010.2082559>>.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-15, p. 116–132, 1 1985. ISSN 0018-9472. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TSMC.1985.6313399>>.

TAKAHASHI, K.; SHIBATA, S.; HASHIMOTO, M. Remarks on system identification using a quaternion recurrent neural network trained by backpropagation through time. In: . IEEE, 2021. p. 122–125. ISBN 978-1-6654-1650-4. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ANZCC53563.2021.9628201>>.

TANGIRALA, A. K. *Principles of System Identification: Theory and Practice*. New York: CRC Press, 2014.

TONG, R. M. Analysis and control of fuzzy systems using finite discrete relations. *International Journal of Control*, v. 27, p. 431–440, 3 1978. ISSN 0020-7179. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00207177808922381>>.

TORRES, L. M. M. *Metodologia nebulosa para identificação recursiva no espaço de estados baseado em agrupamento evolutivo de dados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Maranhão, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, São Luís, MA, 2018. Disponível em: <<https://tedebc.ufma.br/jspui/handle/tede/2168>>.

TORRES, L. M. M.; SERRA, G. L. de O. State-space recursive fuzzy modeling approach based on evolving data clustering. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, v. 29, p. 426–440, 8 2018. ISSN 2195-3880. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s40313-018-0393-8>>.

TORRES, L. M. M.; SERRA, G. L. O. A novel approach for online multivariable evolving fuzzy modeling from experimental data. In: . IEEE, 2018. p. 1–6. ISBN 978-1-5090-6020-7. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/FUZZ-IEEE.2018.8491470>>.

WANG, H. O.; TANAKA, K. *Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001.

WANG, L.-X. *A Course in Fuzzy Systems and Control*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1996. ISBN 0135408822.

WILLIS, M. et al. Systems modelling using genetic programming. *Computers & Chemical Engineering*, v. 21, p. S1161–S1166, 5 1997. ISSN 00981354. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0098-1354\(97\)87659-4](https://doi.org/10.1016/S0098-1354(97)87659-4)>.

WU, C.-Y. et al. A novel on-line observer/kalman filter identification method and its application to input-constrained active fault-tolerant tracker design for unknown stochastic systems. *Journal of the Franklin Institute*, v. 352, p. 1119–1151, 3 2015. ISSN 00160032. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2014.12.004>>.

YANG, Z.-X. et al. Self-evolving data cloud-based pid-like controller for nonlinear uncertain systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 68, p. 4508–4518, 5 2021. ISSN 0278-0046. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TIE.2020.2982094>>.

ZADEH, L. Fuzzy sets. *Information and Control*, v. 8, p. 338–353, 6 1965. ISSN 00199958. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)>.

ZADEH, L. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—i. *Information Sciences*, v. 8, p. 199–249, 1975. ISSN 00200255.

ZHU, Y. et al. Comparison of three classes of identification methods. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 27, p. 169–174, 7 1994. ISSN 14746670. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)47710-X](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)47710-X)>.

ŠKRJANC, I. et al. Evolving fuzzy and neuro-fuzzy approaches in clustering, regression, identification, and classification: A survey. *Information Sciences*, v. 490, p. 344–368, 7 2019. ISSN 00200255. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.03.060>>.