



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Oswaldo José de Mesquita Neto

**Teorema do Limite Central para dimensão de  
medida Gibbs**

São Luís - MA

2022

Oswaldo José de Mesquita Neto

# **Teorema do Limite Central para dimensão de medida Gibbs**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Giovane Ferreira Silva

São Luís - MA

2022

Oswaldo José de Mesquita Neto

## **Teorema do Limite Central para dimensão de medida Gibbs**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

### **BANCA EXAMINADORA**

---

**Prof. Dr. Giovane Ferreira Silva**  
Orientador  
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

---

**Prof. Dra. Vanessa Ribeiro Ramos**  
Examinador interno  
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

---

**Prof. Dr. Marlon Cesar Santos Oliveira**  
Examinador externo  
Universidade Estadual do Maranhão -  
UEMA

São Luís - MA  
2022

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Mesquita Neto, Osvaldo José de.

Teorema do limite central para dimensão de medida Gibbs  
/ Osvaldo José de Mesquita Neto. - 2022.  
60 p.

Orientador(a): Giovane Ferreira Silva.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em  
Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São  
Luís - MA, 2022.

1. Dimensão. 2. Medida Gibbs. 3. Skew-product. 4.  
Teorema do limite central. 5. Transformação expansora. I.  
Silva, Giovane Ferreira. II. Título.

*Aos meus pais Eliane Martins Dantas e  
Orion da Silva Mesquita.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado forças e direção, por ter enviado Seu Filho Jesus Cristo, para que todo aquele que nEle Crê não pereça, mas tenha a Vida eterna.

Agradeço aos meus pais, Eliane Martins e Orion Mesquita, que sempre me apoiaram em todas as minha decisões, sempre me deram amor, motivação, condições e estrutura para poder estudar.

Agradeço ao professor Giovane Ferreira Silva, sem o qual este trabalho não teria sido feito. Sou grato a ele por ter acreditado no meu potencial, por não ter desistido de mim, por ter tido paciência e pelos grandes ensinamentos.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA, sou grato a todos aqueles que foram meus professores durante o mestrado, e também aos meus professores de graduação da UFPI.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas que em algum momento cursaram disciplina comigo.

Agradeço ao professor Marlon e a professora Vanessa pelas valiosas sugestões e correções do trabalho.

Agradeço a minha esposa pela companhia, amor e carinho, minha amada Wellida Mesquita.

*Assim diz o Senhor: Não se glorie o sábio na sua sabedoria, nem se glorie o forte na sua força; não se glorie o rico nas suas riquezas, mas o que se gloriar, glorie-se nisto: em me entender e me conhecer, que eu sou o Senhor [...]*

Jeremias 9.23-24

# Resumo

Esta dissertação tem como objetivo principal estudar uma versão do Teorema do Limite Central para dimensão de medida, quando esta for Gibbs. Estabeleceremos o que acontece com a medida de  $\log \mu(B(x, \varepsilon)) / \log \varepsilon$  quando o raio da bola convencional vai para zero, no contexto de aplicações não-conformes e uniformemente expansoras do tipo skew product definidas no toro bidimensional.

**Palavras-chave:** medida Gibbs, transformação expansora, dimensão, skew-product, teorema do limite central.

# Abstract

This dissertation has the main goal to study a version of the Central Limite Theorem for dimension measure, when it is Gibbs. What happen with the measure  $\log \mu(B(x, \varepsilon)) / \log \varepsilon$  when the radius of the traditional ball goes to zero, in the context of non-conformal expanding maps of the type skew-product defined in the two-dimensional torus.

**Keywords:** Gibbs measure, expanding maps, dimension, skew product, central limit theorem.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Variedade local estável e instável (ver [1]). . . . .	23
Figura 2 – Estrutura de produto local (ver [1]). . . . .	24
Figura 3 – Obtendo o toro de um quadrado (ver [2]). . . . .	35
Figura 4 – Partição de Markov com $f$ e $g$ possuindo grau 2. . . . .	36
Figura 5 – O Lema 3 evita situações como esta. . . . .	42
Figura 6 – Cilindro hiperbólico com $f$ e $g$ de grau 2. . . . .	44
Figura 7 – Cilindro hiperbólico inserido na "gravata borboleta". . . . .	48

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b>	<b>14</b>
<b>2.1</b>	<b>Teoria da Medida</b>	<b>14</b>
<b>2.2</b>	<b>Processos de Wiener</b>	<b>16</b>
2.2.1	Variáveis aleatórias, esperança e desvio padrão.	16
2.2.2	Teorema do Limite Central	18
2.2.3	Processos estocásticos	18
2.2.4	Processos de Wiener	19
<b>2.3</b>	<b>Teoria Ergódica</b>	<b>20</b>
<b>2.4</b>	<b>Dimensão de Hausdorff</b>	<b>21</b>
<b>2.5</b>	<b>Topologia de Skorokhod</b>	<b>22</b>
<b>2.6</b>	<b>Conjunto hiperbólico e partições de Markov</b>	<b>22</b>
2.6.1	Partições de Markov	24
<b>2.7</b>	<b>Expoente de Lyapunov</b>	<b>25</b>
2.7.1	Caso unidimensional	25
2.7.2	Caso multidimensional	25
<b>2.8</b>	<b>Entropia</b>	<b>27</b>
2.8.1	Entropia de Shannon	27
2.8.2	Entropia de um Sistema Dinâmico	27
<b>2.9</b>	<b>Formalismo Termodinâmico</b>	<b>28</b>
2.9.1	Pressão topológica	28
<b>2.10</b>	<b>Medida de Gibbs</b>	<b>29</b>
<b>2.11</b>	<b>Outras definições</b>	<b>31</b>
<b>3</b>	<b>RESULTADO PRINCIPAL</b>	<b>33</b>
<b>3.1</b>	<b>Etapas da demonstração</b>	<b>33</b>
<b>3.2</b>	<b>Redução a uma soma de variáveis aleatórias não homogênea</b>	<b>34</b>
3.2.1	Toro como um quadrado	34
3.2.2	Partições de Markov fibrada	35
3.2.3	Expoente de Lyapunov e geometria da partição	37
3.2.4	Aproximação de Markov multi-temporal da bola tradicional	41
3.2.5	A medida projetada é Gibbs	47
3.2.6	Medida da bola como soma de Birkhoff	49
<b>3.3</b>	<b>Princípio de invariância, mudança do tempo aleatório</b>	<b>54</b>
3.3.1	Princípio de invariância	54

3.3.2	Mudança do tempo aleatório e conclusões . . . . .	55
3.3.2.1	Existência do limite de distribuição . . . . .	55
3.3.2.2	O limite é um processo de Wiener . . . . .	57
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>58</b>

# 1 Introdução

Introduzidas no início dos anos setenta, no contexto dos Sistemas Dinâmicos, as medidas de Gibbs desempenham um papel importante na compreensão da Teoria Ergódica de aplicações hiperbólicas e/ou expansoras. Para essas aplicações, as medidas Gibbs são estados de equilíbrio para potenciais regulares (Hölder contínuo, por exemplo). Derivar propriedades estatísticas dessas medidas, como o Teorema do Limite Central, Princípio de Grandes Desvios tem sido alvo de um grande volume de pesquisas na área. Geralmente, a abordagem nos casos conformes não possui muitas dificuldades. Porém, ao abordar o caso não-conforme vários problemas de controle surgem (detalhamos abaixo alguns desses problemas). Devido a isso, há grandes desafios em estudar o contexto do caso não-conforme. Visando contribuir para a teoria não-conforme, em [3], os autores Renaud Leplaider e Benoit Saussol obtêm propriedades estatísticas, propõem uma versão do Teorema do Limite Central para dimensão de medida, e de uma medida específica, a medida Gibbs que é o estado de equilíbrio de um sistema que é uniformemente expansor.

Nesta dissertação estudaremos o artigo [3], e tentaremos fornecer uma referência bibliográfica em português dos resultados contidos no mesmo. Mais precisamente, estabeleceremos a convergência do limite da medida bola convencional  $B(x, \varepsilon)$  de centro  $x$  e raio  $\varepsilon$ , quando o raio se torna cada vez menor, em outras palavras, queremos estudar

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(B(x, \varepsilon)).$$

Uma maneira é entender essa convergência através da Teoria de Dimensão em Teoria Ergódica. Nesse caso utiliza-se o conceito de *dimensão pontual de uma medida*  $\mu$ , introduzido por Lai-Sang Young em 1982. Ou seja,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, \varepsilon))}{\log \varepsilon}. \quad (1.1)$$

O primeiro problema nessa direção é provar a existência de tal limite. No contexto das medidas ergódica e hiperbólica, em [4] foi provado que o limite existe e é igual a uma constante  $\delta_\mu$  em  $\mu$ -q.t.p. Portanto, uma estimativa para a bola  $B(x, \varepsilon)$  será na ordem de  $\varepsilon^{\delta_\mu}$ .

Há uma grande dificuldade em conseguir controles da bola comum  $B(x, \varepsilon)$ , por termos basicamente um ente puramente topológico. Por isso, outras propriedades são necessárias, por exemplo, sobre a aplicação (ser conforme é um exemplo delas). No ponto de vista da Teoria da Medida, em alguns contextos, conseguimos lançar luz sobre o controle da medida da bola fazendo uma aproximação com a medida da bola dinâmica  $B(x, n, \varepsilon)$ , que é o conjunto dos pontos  $y$  tais que os iterados  $f^j(y)$  estão a uma distância no máximo  $\varepsilon$

de  $f^j(x)$  para  $j = 0, \dots, n-1$ . Neste caso, usamos a propriedade da medida  $\mu$  ser Gibbs que basicamente significa que  $\mu(B(x, n, \varepsilon)) \approx e^{\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x))}$  onde  $\varphi$  é uma aplicação contínua de  $X$  em  $\mathbb{R}$  com algum tipo de regularidade (no nosso contexto aqui, Hölder contínua). A estratégia é encontrarmos o seguinte tipo de inclusão:  $B(x, n, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon) \subseteq B(x, m, \varepsilon')$ . A grande dificuldade que reside em obter este tipo de inclusão no caso não-conforme é exatamente a falta de controle dos iterados da bola  $B(x, \varepsilon)$ , pois difere do caso conforme, onde os expoentes de Lyapunov são iguais e constantes em todas as direções, onde após iterações da bola ela continua "redondinha" permitindo as inclusões acima. No caso não-conforme, o cenário é totalmente distinto pois como os expoentes de Lyapunov são diferentes em várias direções, o tipo de inclusão que queremos é mais difícil. Para isso, abordaremos o caso de um *skew product*  $T(x, y) = (f(x), g(x, y))$  pois conseguimos controles nas fibra verticais (pelo fato do skew product preservá-las) e consideraremos as aplicações  $f$  e  $g$  uniformemente expansoras para usarmos o seu formalismo termodinâmico. Após uma "abordagem termodinâmica", iremos fazer uma abordagem probabilística para estudar o tipo de convergência que ocorre no limite 1.1. Nesse caso, usaremos o Teorema do Limite Central e a convergência ocorre em distribuição para a gaussiana. Baseado nas explicações, há alguns problemas em abertos sobre esse problema. Listamos alguns:

1. A abordagem em [3] é no toro  $\mathbb{T}^n$ . Em uma variedade qualquer  $M$  ainda não há resultados.
2. O skew-product  $T(x, y) = (f(x), g(x, y))$  é uniformemente expansor. Teríamos o mesmo resultado para transformações não uniformemente expansora? Existem estudos que abordam este caso. Mas a título de informação, a medida não é mais Gibbs e sim uma versão mais fraca fazendo com que a abordagem seja muito difícil.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: no capítulo 2 será revistos alguns conteúdos necessários para a compreensão do resultado principal como a Teoria Ergódica, Processos de Wiener, Expoente de Lyapunov e Medida Gibbs. No capítulo 3 é apresentado o Teorema Principal e suas consequências, além de um breve roteiro em 3.1 sobre como será feito a demonstração. As seções 3.2 e 3.3 contém a construção da demonstração do resultado principal.

## 2 Preliminares

A história do Teorema do Limite Central iniciou com um trabalho de Moivre em 1733. Laplace descobriu a essência desse resultado em 1810 utilizando o termo "teorema do limite central para teoria das probabilidades". Georg Pólya utilizou este termo em 1920 no título do seu artigo, que desde então passou a ser amplamente adotado mundialmente. Hoje, a expressão "teorema do limite central" está associado a uma ampla variedade de afirmações que envolvem a convergência de elementos aleatórios para uma distribuição normal ou outra distribuição relacionada (mais detalhes da história em [5]).

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados para a compreensão do teorema principal desta dissertação, que é uma versão do Teorema do Limite Central.

### 2.1 Teoria da Medida

Seria interessante ter uma função que medisse o tamanho de qualquer subconjunto dos reais. A intuição nos faz acreditar que o tamanho do conjunto  $(1, 3) \cup (7, 10)$  seja igual a 5 (pois o primeiro intervalo tem tamanho 2, e o segundo tamanho 3, logo  $2+3=5$ ). Porém, medir o tamanho de um subconjunto mais complicado, que não seja a união de intervalos abertos, é uma tarefa difícil. De fato, não existe uma função de  $\mathbb{R}$  em  $[0, \infty]$  com as seguintes propriedades:

- (a)  $\mu$  é uma função de  $A \subset \mathbb{R}$  em  $[0, \infty]$ .
- (b)  $\mu(I) = |I|$  para qualquer intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ .
- (c)  $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$  para cada sequência disjunta  $A_1, A_2, \dots$  de subconjuntos de  $\mathbb{R}$ .
- (d)  $\mu(a + A) = \mu(A)$  para cada  $A \subset \mathbb{R}$  e cada ponto  $a \in \mathbb{R}$ .

Para medirmos conjuntos mais gerais, deve-se relaxar a condição (a). É onde entram as  $\sigma$ -álgebras.

**Definição 2.1.1.** *Seja  $X$  um conjunto e  $\mathcal{B} \subset X$ . Então  $\mathcal{B}$  é chamado  $\sigma$ -álgebra em  $X$  se as seguintes condições são satisfeitas:*

- $\emptyset \in \mathcal{B}$ ;
- Se  $E \in \mathcal{B}$ , então  $E^c \in \mathcal{B}$ ;

- Se  $E_1, E_2, \dots$  é uma sequência de elementos em  $\mathcal{B}$ , então  $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{B}$ .

Um *espaço mensurável* é um par ordenado  $(X, \mathcal{B})$ , onde  $X$  é um conjunto e  $\mathcal{B}$  é a  $\sigma$ -álgebra em  $X$ , os elementos de  $\mathcal{B}$  são chamados *conjuntos mensuráveis*. Dados dois espaços mensuráveis  $(X, \mathcal{B})$  e  $(Y, \mathcal{C})$ , a função  $f : X \rightarrow Y$  é dita *mensurável* se, e somente se,  $f^{-1}(C) \in \mathcal{B}$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ . A palavra medida pode ser usada no contexto de comprimento, área ou volume.

**Definição 2.1.2** (Medida). *Suponha que  $X$  é um conjunto e  $\mathcal{B}$  uma  $\sigma$ -álgebra sob  $X$ . Uma **medida** sob  $(X, \mathcal{B})$  é uma função  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  tal que  $\mu(\emptyset) = 0$  e*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k),$$

para cada sequência de conjuntos disjuntos  $E_1, E_2, \dots$  em  $\mathcal{B}$ .

Um *espaço de medida* é uma tripla  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  onde  $X$  é um conjunto,  $\mathcal{B}$  é a  $\sigma$ -álgebra em  $X$ , e  $\mu$  é uma medida em  $(X, \mathcal{B})$ .

Uma medida é chamada *medida de probabilidade* no espaço mensurável  $(\Omega, \mathcal{F})$  se  $\mu(\Omega) = 1$ . No contexto de probabilidade utilizamos  $P$  ao invés de  $\mu$ . Se  $P$  é uma medida de probabilidade em  $(\Omega, \mathcal{F})$ , então a tripla  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  é chamado *espaço de probabilidade*. Um evento acontece quase certamente se  $P(A) = 1$  ou equivalentemente, se  $P(\Omega \setminus A) = 0$ , com  $A \subset \mathcal{F}$ .

**Definição 2.1.3** (Medida invariante). *Seja  $f : M \rightarrow M$  uma função mensurável. A medida  $\mu$  é chamada invariante por  $f$ , ou que  $f$  preserva  $\mu$ , se*

$$\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E)$$

para todo conjunto mensurável  $E$ .

**Lema** (Borel-Cantelli). *Seja  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  uma sequência de subconjuntos mensuráveis no espaço de probabilidade  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ .*

(i) *Se  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ , então*

$$\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0.$$

(ii) *Suponha que  $A_1, A_2, \dots$  são independentes. Se  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \infty$ , então*

$$\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1.$$

Mais detalhes de Teoria da Medida podem ser encontrados em [6].

## 2.2 Processos de Wiener

### 2.2.1 Variáveis aleatórias, esperança e desvio padrão.

Muitas vezes não nos importamos com o resultado de um experimento em si, mas estamos interessados em alguma consequência desse resultado. Por exemplo, um jogador pode não estar interessado se a face superior de uma moeda é cara ou coroa, mas sim nas consequências financeiras de tal resultado. Consequentemente o jogador está interessado em uma função da consequência do resultado, e não no resultado em si. Tal função é chamada de variável aleatória (ver [7]).

Mais precisamente, dos conceitos de probabilidade, seja  $\Omega$  o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, e  $\mathcal{F}$  uma coleção de subconjuntos de  $\Omega$ , no qual  $\mathcal{F}$  é uma  $\sigma$ -álgebra.

Suponha que lancemos uma moeda  $n$  vezes. Cada vez em que a face superior for coroa perdemos um real, e se for cara ganhamos um real. Nesse caso, o espaço amostral é  $\Omega = \{-1, 1\}$ . Lançando a moeda uma vez, a probabilidade de ganhar ou perder dinheiro é  $P(-1) = P(1) = 1/2$ . Como podemos expressar a quantidade ganha após lançar a moeda  $n$  vezes?

Escrevendo  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_n$ , onde  $w_i = 1$  se o  $i$ -ésimo lançamento for cara, a quantidade total de dinheiro ganho (ou perdido) após  $n$  lançamentos será

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i.$$

Então, nossa fortuna é uma função  $S : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$ . Tal função é chamada *variável aleatória*.

**Definição 2.2.1.** *Seja  $E \subset \mathbb{R}$  um conjunto enumerável. A função  $X : \Omega \rightarrow E$  tal que para todo  $x \in E$*

$$\{\omega; X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$$

*é chamado **variável aleatória discreta**. Se  $E$  é um intervalo de números reais, então  $X$  é chamado **variável aleatória contínua**. Se  $E$  é não enumerável com subconjuntos enumeráveis (finito ou infinito), em que cada um dos pontos tem probabilidade maior que zero, então  $X$  é chamada **variável aleatória mista**.*

Frequentemente estamos interessados na probabilidade em que uma variável aleatória atinge um determinado valor, isto é

$$P(\{\omega; X(\omega) = x\}),$$

para todo  $x$  apropriado. Geralmente escrevemos  $\{X = x\}$  para  $\{\omega; X(\omega) = x\}$ , e  $P(X = x)$  para  $P(\{\omega; X(\omega) = x\})$ .

**Definição 2.2.2.** A **função distribuição (densidade) de probabilidade** de uma variável aleatória  $X$ , é uma função  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  dado por  $F_X(x) = P(X \leq x)$  (em outras palavras,  $F_X(x)$  é a probabilidade que  $X$  assuma valor inferior ou igual a  $x$ ).

**Exemplo 1.** Suponha que a variável aleatória  $X$  assumo valor 1 com probabilidade 1, isto é,  $P(X = 1) = 1$ . A função distribuição é dada por  $F_X(x) = 1$ , se  $x \geq 1$ , e  $F_X(x) = 0$  se  $x < 1$ .

**Definição 2.2.3.** A **função massa de probabilidade** de uma variável aleatória  $X$  é uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , dada por  $f(x) = P(X = x)$ .

A função distribuição e a função massa podem ser relacionadas por

$$F(x) = \sum_{i: x_i \leq x} f(x_i).$$

**Definição 2.2.4.** O **valor médio**, ou **esperança**, ou **valor esperado** de uma variável aleatória  $X$  com função massa  $f$  é definido por

$$E(X) = \sum_x xP(X = x),$$

onde a soma abrange todos os possíveis valores  $x$  de  $X$ .

A esperança de  $X$  é uma média ponderada dos possíveis valores que  $X$  pode receber, com cada valor sendo ponderado pela probabilidade de que  $X$  seja igual a esse valor.

**Exemplo 2.** Suponha que  $X$  tome valores  $-1, 1$  e  $2$  com probabilidades iguais, e considere uma variável aleatória  $Y = X^2$ . Claramente,  $Y$  toma valores  $1$  e  $4$  com probabilidade  $2/3$  e  $1/3$  respectivamente. Então  $E(Y) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} = 2$ .

O conceito de *variância* nos diz o quanto as variáveis aleatórias se dispersam, ou "fogem" da média  $E(X)$ .

**Definição 2.2.5.** Seja  $X$  com esperança finita  $E(X) = \mu$ . A **variância**  $\text{var}(X)$  de  $X$  é definida como

$$\text{var}(X) = E((X - \mu)^2) = \sum_x (x - \mu)^2 P(X = x).$$

O **desvio padrão**  $\sigma(X)$  de  $X$  é definido como a raiz quadrada da variância,

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{var}(X)}.$$

**Definição 2.2.6.** Uma variável aleatória  $X$  tem uma **distribuição normal** ou **distribuição gaussiana** com parâmetros  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 > 0$  se a função densidade de  $X$  é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(x - \mu)^2}{2\sigma^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

cuja notação é  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Se  $\mu = 0$  e  $\sigma^2 = 1$ , então

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

é chamado **distribuição normal padrão**.

Neste caso dizemos que  $X$  é uma *variável aleatória Gaussiana*. O motivo pelo qual a distribuição normal é importante se tornará evidente no estudo do Teorema do Limite Central.

**Definição 2.2.7.** Se  $X_1, X_2, X_3, \dots$  é uma sequência de variáveis aleatórias e  $F_1, F_2, F_3, \dots$  suas respectivas função distribuição, então dizemos que  $X_n$  **converge em distribuição** para  $X$  se  $F_n \rightarrow F$  quando  $n \rightarrow \infty$ , escrevemos  $X_n \xrightarrow{D} X$ .

## 2.2.2 Teorema do Limite Central

Este teorema é de grande importância, aplica-se em muitas situações no qual um efeito aleatório é a soma de um grande número de fatores aleatórios menores. Alguns barulhos que ocorrem na natureza tem essa característica.

No geral, este teorema diz que somando um grande número de variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição, esta soma tem uma distribuição normal padrão, independentemente da distribuição da soma.

**Teorema 1** (Teorema do Limite Central clássico). *Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição, e com a mesma esperança  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  finitas. Seja  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Então*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow N$$

onde  $N$  é uma variável aleatória com distribuição normal padrão.

Mais detalhes sobre teoria das probabilidades podem ser encontrados em [7],[8], [9] e [10].

## 2.2.3 Processos estocásticos

*Processos estocásticos* (ou processos aleatórios) é uma coleção de variáveis aleatórias, indexadas por um número inteiro ou real, geralmente interpretado como o tempo, lembrando a evolução de um fenômeno. Este conceito pode ser generalizado para se adaptar a modelos onde o espaço, não somente o tempo, desempenha um papel importante. Consideraremos  $\mathbf{T}$  um subconjunto dos naturais, inteiros, reais ou dos reais não negativos.

**Definição 2.2.8.** Um **processo estocástico** é uma família  $\{X_t\}_{t \in \mathbf{T}}$  de variáveis aleatórias definidas em um mesmo espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , e tomando valores em algum espaço mensurável  $(E, \mathcal{E})$ .

Um processo estocástico é chamado de **real (complexo)** se os índices tomam valores em  $\mathbb{R}$  ( $\mathbb{C}$ ). Caso os índices forem reais não negativos, chamamos processo estocástico de **tempo contínuo**, e quando os índices forem  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$  chamamos processo estocástico de **tempo discreto**.

**Exemplo 3.** Gabriel recebe mensagens de texto a qualquer instante durante o dia. Seja  $X_t$  o número de mensagens de texto recebidas no tempo  $t$ . Então o conjunto  $\{X_t; t \in [0, \infty)\}$  é um processo estocástico de tempo contínuo.

Duas variáveis aleatórias  $X, Y$  são *independentes* se  $\{X \leq x\}$  e  $\{Y \leq y\}$  são eventos independentes, para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .

## 2.2.4 Processos de Wiener

Uma partícula de pólen suspensa sob um líquido está sujeita a infinitas colisões com átomos, por isso é impossível observar sua trajetória exata. Com a ajuda de um microscópio, tem-se a confirmação de que o movimento da partícula é totalmente caótico. Este tipo de movimento descoberto pelo bontânico Robert Brown, é chamado movimento Browniano. É necessário fazer aproximações afim de descrever o processo.

A parte formal matemática que descreve esses fatos é chamada Processos de Wiener. Nos limitaremos ao estudo em dimensão  $\mathbb{R}$ , assumindo que as três componentes no espaço determinando o movimento são independentes.

**Definição 2.2.9.** **Processo de Wiener** é um processo estocástico  $\{X_t; t \in \mathbb{R}_+\}$  com as seguintes propriedades

- (a) Todo incremento  $X_{(t+s)} - X_s$  tem distribuição normal com esperança 0, e variância  $\sigma^2 t$  onde  $\sigma$  é um parâmetro fixado.
- (b) Para cada par de intervalo de tempo disjunto  $[t_1, t_2], [t_3, t_4]$  com  $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ , os incrementos  $X_{t_4} - X_{t_3}$  e  $X_{t_2} - X_{t_1}$  são variáveis aleatórias independentes com distribuição normal dada em (a), similarmente acontece para  $n \in \mathbb{N}$  intervalos de tempo disjuntos.
- (c)  $X_0 = 0$  e  $X_t$  é contínua em  $t = 0$ .

O processo onde  $\sigma^2 = 1$  é chamado *processo de Wiener padrão*. Qualquer processo pode ser convertido em um processo padrão  $W_t$  definindo  $W_t = X_t/\sigma$ . Quando não há ambiguidade, escreveremos  $X(t)$  ao invés de  $X_t$ .

Um estudo mais aprofundado sobre processos estocásticos e processos de Wiener pode ser feito em [11], [12] e [13].

## 2.3 Teoria Ergódica

A Teoria Ergódica é o estudo do comportamento de um sistema a longo prazo, preservando um certo tipo de medida.

Do ponto de vista matemático, seja  $X$  o conjunto de todos os estados possíveis de um sistema durante sua evolução (também chamado de espaço fásico),  $T : X \rightarrow X$  uma transformação que descreve sua evolução, e  $\mu$  uma medida de probabilidade definida em  $X$  invariante por  $T$ . Então, a quádrupla formada pelo espaço fásico  $X$ , pela medida  $\mu$ , pela  $\sigma$ -álgebra contendo todos os conjuntos mensuráveis com respeito a  $\mu$ , e pela transformação mensurável  $T$  preservando  $\mu$  formam os chamados *sistemas dinâmicos preservando medida*.

Na transformação  $T$ ,  $T(x)$  é o estado do sistema quando o tempo é 1 (no tempo 0 o sistema estava no estado  $x$ ), os sucessivos iterados  $T^2(x), T^3(x), \dots$  nos dão o estado do sistema nos tempos 2, 3... ou seja, queremos estudar sequência  $\{T^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  que representa sucessivos estados do sistema ao longo do tempo, onde

$$T^n(x) = \underbrace{T \circ T \circ T \cdots \circ T}_{n \text{ vezes}}.$$

Esta sequência compõe a trajetória do ponto  $x$ , ou sua órbita. E finalmente, a medida  $\mu$  corresponde a uma ação sob os iterados  $T^n(x)$ , que acontece (é preservada) durante o movimento. Vamos considerar uma quantidade observável  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e estudar sua evolução no tempo. As quantidades

$$S_n(f(x)) = \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)), \quad k \in \mathbb{N}$$

são chamadas *soma de Birkhoff* da função  $f$ , e as médias

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)), \quad k \in \mathbb{N}$$

são chamadas *média de Birkhoff* de  $f$ .

Em 1932, George Birkhoff provou que a sequência  $\frac{1}{n}S_n(f(x))$  converge para quase todo  $x \in X$  quando  $f$  é integrável. Se  $f$  é a função característica no conjunto  $A \subset X$ , essas médias correspondem a frequência de visitas dos iterados de  $x$  no conjunto  $A$ , entre

os tempos 0 e  $n - 1$ . Essas frequências convergem, e o limite é o tempo médio que  $x$  gasta dentro de  $A$  durante seu movimento, ou simplesmente a *média temporal*.

Sem dúvida, a maneira ideal de tratar um problema é tentar dividi-lo em vários subproblemas mais simples do que o inicial. Para estudar a dinâmica de uma transformação, podemos tentar "quebrar" o espaço  $X$  em vários pedaços disjuntos, cada um de medida zero, e restringir a transformação a cada um desses pedaços. Se isso não for possível, então o sistema é chamado **Ergódico**. Mais precisamente, seja  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de medida, e  $T : X \rightarrow X$  uma transformação mensurável preservando  $\mu$ . Dizemos que  $T$  é **ergódica** com respeito a  $\mu$  se os únicos conjuntos invariantes são os de medida 0, ou os que tem complemento 0, isto é se

$$T^{-1}(A) = A \quad \text{implica} \quad \mu(A) = 0 \quad \text{ou} \quad \mu(A^c) = 0.$$

Quando um sistema é Ergódico, é possível calcular explicitamente o limite das médias de Birkhoff  $\frac{1}{n}S_n(f)$ . O limite não depende de  $x$ , e é obtido medindo  $f$  sob  $X$  com respeito a uma medida invariante  $\mu$ . Logo, podemos dizer que em um sistema ergódico, a *média temporal e a média do espaço coincidem*.

O teorema Ergódico de Birkhoff garante que as trajetórias visitem todo o espaço durante o movimento.

**Teorema 2** (Birkhoff). *Seja  $T : M \rightarrow M$  uma transformação mensurável e seja  $\mu$  uma medida de probabilidade invariante por  $T$ . Dada qualquer função integrável  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ , o limite*

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k(x))$$

*existe em quase todo ponto  $x \in M$ . Além disso, a função  $\tilde{\varphi}$  definida desta forma é integrável e satisfaz*

$$\int \tilde{\varphi}(x) d\mu(x) = \int \varphi(x) d\mu(x) \quad \text{e} \quad \tilde{\varphi}(T(x)) = \tilde{\varphi}(x).$$

Se a medida  $\mu$  for ergódica, então o limite do teorema anterior é constante quase sempre. Mais informações sobre Teoria Ergódica podem ser encontradas em [14],[15] e [16].

## 2.4 Dimensão de Hausdorff

Estimamos o tamanho de uma curva pelo seu comprimento, o tamanho de uma superfície por sua área, o tamanho de um sólido pelo seu volume, mas como medir o tamanho de um conjunto fractal? (ver [17]).

Uma solução para este problema foi proposta por Felix Hausdorff em 1915. Ele definiu para cada número real  $d > 0$ , uma medida  $\mu_d$  de dimensão  $d$  como explicaremos

a seguir. Seja  $X$  um subconjunto compacto do  $\mathbb{R}^n$ . Então para todo  $\varepsilon > 0$ , existe uma cobertura finita de  $X$  por bolas com raio  $\varepsilon$  (os centros dessas bolas formam uma  $\varepsilon$ -rede de  $X$ ). Seja  $N(\varepsilon)$  o menor número de bolas que cobrem  $X$ .

É evidente que  $N(\varepsilon)$  cresce quando  $\varepsilon$  decresce. Assumindo que existe, o limite

$$\mu_d(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^d \quad (2.1)$$

é chamado *d-medida de Hausdorff* de  $X$ . Se esta medida for diferente de 0 ou  $\infty$ , então  $d$  é chamado de *Dimensão de Hausdorff* de  $X$ .

## 2.5 Topologia de Skorokhod

Um processo estocástico que descreve o faturamento de uma empresa pode possuir descontinuidades do tipo salto ao comprar bens e vender serviços. Por isso é conveniente trabalhar em um espaço específico.

O conjunto das funções de *cadlag* é formado pelas funções simultaneamente contínuas a direita e com limite a esquerda. A topologia no espaço das funções de *cadlag*, definida no intervalo unitário  $[0, 1]$  é chamado *Topologia de Skorokhod*. Denotamos por  $\mathcal{D}([0, 1])$  o conjunto das funções de *cadlag* no intervalo  $[0, 1]$ , dotado com a topologia de Skorokhod. A letra  $\mathcal{D}$  vem de "descontinua" (ver [18]).

Duas funções  $u$  e  $v$  em  $\mathcal{D}([0, 1])$  são chamadas  $\rho$ -close se existe  $\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tal que

1.  $\lambda(0) = 0$ ,  $\lambda(1) = 1$  e  $\lambda$  é crescente;
2.  $\forall t \in [0, 1]; |\lambda(t) - t| \leq \rho$ ;
3.  $\forall t, |u(\lambda(t)) - v(t)| \leq \rho$ .

## 2.6 Conjunto hiperbólico e partições de Markov

Esta seção tem como objetivo definir uma partição que será a base para aproximarmos a bola convencional por uma espécie de bola dinâmica, no capítulo 3. Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo em uma variedade suave  $M$ , e seja  $\Lambda \subset M$  um conjunto compacto  $f$ -invariante, ou seja,  $f^{-1}\Lambda = \Lambda$ .

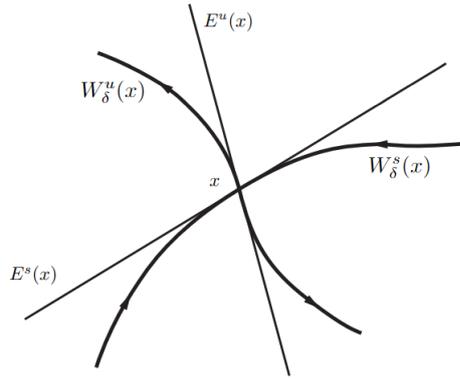


Figura 1 – Variedade local estável e instável (ver [1]).

**Definição 2.6.1.** Dizemos que  $\Lambda$  é um **conjunto hiperbólico** de  $f$  se, para cada  $x \in \Lambda$  existe uma decomposição do espaço tangente

$$T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x),$$

satisfazendo

$$d_x f E^s(x) = E^s(fx) \text{ e } d_x f E^u(x) = E^u(fx)$$

e existe constantes  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $c > 0$  tal que

$$\|d_x f^n|E^s(x)\| \leq c\lambda^n \text{ e } \|d_x f^{-n}|E^u(x)\| \leq c\lambda^n$$

para cada  $x \in \Lambda$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

Dado  $\delta > 0$ , para cada  $x \in M$  o conjunto

$$W_\delta^s(x) = \{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta, n \in \mathbb{N}\}$$

é chamado de *variedade local estável*, e o conjunto

$$W_\delta^u(x) = \{y \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \delta, n \in \mathbb{N}\}$$

é chamado *variedade local instável*. Para  $\delta > 0$  suficientemente pequeno,  $W_\delta^s(x)$  e  $W_\delta^u(x)$  são discos suaves tangentes a  $E^s(x)$  e  $E^u(x)$ , respectivamente, no ponto  $x$ .

Um conjunto hiperbólico  $\Lambda$  é chamado *localmente máximo*, se existe uma vizinhança  $V$  de  $\Lambda$  tal que  $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n U$ .

Um conjunto hiperbólico  $\Lambda$  tem uma *estrutura de produto local*, se existe  $\delta = \delta_\Lambda > 0$  tal que  $W_\delta^s(x) \cap W_\delta^u(y) \subset \Lambda$  para todo  $x, y \in \Lambda$ . Dessa estrutura, segue-se que existe  $0 < a < \delta$  tal que para  $x, y \in \Lambda$  e  $d(x, y) < a$ , então  $W_\delta^s(x) \cap W_\delta^u(y)$  consiste em um único ponto  $z = [x, y]$ . Pode ser provado que todo conjunto hiperbólico máximo tem uma estrutura de produto local.

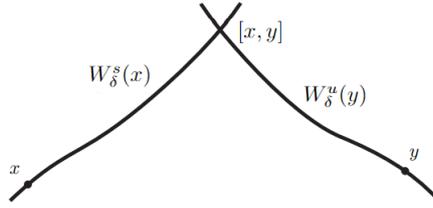


Figura 2 – Estrutura de produto local (ver [1]).

**Teorema 3.** *Sejam  $W_\delta^s(x)$  e  $W_\delta^u(x)$ . Então existe  $\varepsilon > 0$  tal que para qualquer  $x, y \in \Lambda$ , a interseção  $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y)$  consiste em no máximo um ponto  $z = [x, y]$ , e existe  $\delta > 0$  tal que  $d(x, y) < \delta$  para algum  $x, y \in \Lambda$ , então  $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y) \neq \emptyset$ .*

### 2.6.1 Partições de Markov

Seja  $\Lambda$  um conjunto hiperbólico localmente máximo, tome  $\varepsilon, \delta$  e  $[x, y]$  como no teorema anterior, fazendo  $\eta = \varepsilon$ . O conjunto  $R \subset \Lambda$  é chamado *retângulo* se o diâmetro é menor do que  $\eta/10$ , e  $[x, y] \in R$  sempre que  $x, y \in R$ . Um retângulo é chamado *próprio* se  $R = \overline{\text{int } R}$ . Definiremos

$$W_R^s(x) := W_\eta^s(x) \cap R, \quad x \in R$$

(trocando s pelo u teríamos a definição de  $W_R^u$ ) e a fronteira de  $R$  como

$$\partial^s R := \{x \in R \mid x \notin \text{int } W_R^u(x)\}$$

$$\partial^u R := \{x \in R \mid x \notin \text{int } W_R^s(x)\}.$$

**Definição 2.6.2.** *Uma **partição de Markov** é uma cobertura finita  $\mathcal{R} = R_1, \dots, R_n$  de  $\Lambda$  tal que*

1.  $R_i = \overline{\text{int } R_i}$ ;
2.  $\Lambda = \bigcup_{i=1}^n R_i$ .
3.  $\text{int } R_i \cap \text{int } R_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ ;
4. Se  $x \in \text{int } R_i$  e  $f(x) \in \text{int } R_j$ , então  $W_{R_j}^u(f(x)) \subset f(W_{R_i}^u(x))$  e  $f(W_{R_i}^s(x)) \subset W_{R_j}^s(f(x))$ .

**Teorema 4.** *Se  $R$  é um retângulo, então  $\partial R = \partial^s R \cup \partial^u R$ .*

Demonstração pode ser encontrada em [19]. Para mais detalhes sobre partições de Markov, veja [20].

## 2.7 Expoente de Lyapunov

### 2.7.1 Caso unidimensional

Suponha que  $T$  é uma aplicação diferenciável definida por partes em  $X = [0, 1]$ , isto é, a derivada de  $T$  é contínua em partes. Para  $|x - y| \approx 0$  escolha um valor  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, mas não tão grande. Então teremos

$$|T(x) - T(y)| \approx |T'(x)| \times |x - y|,$$

e

$$|T^n(x) - T^n(y)| \approx \prod_{i=0}^{n-1} |T'(T^i x)| \times |x - y|.$$

Ao invés de considerarmos produtos, é mais conveniente trabalhar com somas. Calculando o logaritmo, temos

$$\frac{1}{n} \log |T^n(x) - T^n(y)| \approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |T'(T^i x)|$$

(o motivo pelo qual  $n$  não pode ser muito grande é que se  $n \rightarrow \infty$ , então  $T^n(x)$ ,  $T^n(y)$  podem se aproximar um do outro para algum  $n$  muito grande, uma vez que  $X$  é limitado). Se  $\mu$  é uma medida ergódica invariante por  $T$ , então o lado direito da última expressão converge para  $\int_0^1 \log |T'| d\mu$ , pelo teorema ergódico de Birkhoff. Portanto,  $\int_0^1 \log |T'| d\mu$  mede a velocidade de deivergência de  $T^n$ .

**Definição 2.7.1.** O número  $\int_0^1 \log |T'| d\mu$  é chamado *expoente de Lyapunov de  $T$*  (Veja o Teorema 9.4 em [21]).

### 2.7.2 Caso multidimensional

O comportamento local de um sistema dinâmico em uma variedade  $M$ , sob iterações de uma função diferenciável  $T : M \rightarrow M$ , pode ser investigado estudando seu diferencial. Sob o Jacobiano  $DT(x)$ , uma esfera de raio pequeno centrado em  $x$  é transformada aproximadamente em um elipsoide. Calculando  $DT(T^k x)$ ,  $k \geq 1$ , repetidamente ao longo da órbita de  $x$ , observamos que a imagem da esfera é aproximada por um elipsoide, e que o comprimento dos semi-eixos crescem exponencialmente. A média dos expoentes de crescimento são chamados *expoentes de Lyapunov*, e portanto nos dá a medida de expansão (ou contração) de um sistema dinâmico. Além disso, o maior expoente coincide com a velocidade de divergência entre dois pontos próximos.

**Definição 2.7.2** (Expoente de Lyapunov). *Seja  $T : M \rightarrow M$  uma aplicação diferenciável entre variedades de Riemann. Para cada  $x \in M$ ,  $v \in T_x M$ , se o limite*

$$\lambda(x, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D(T^n)(x) \cdot v\|$$

existir, então  $\lambda(x, v)$  é o expoente de Lyapunov na direção  $v$ . Se  $\mu$  é  $f$ -invariante no espaço de probabilidade  $(M, \mathcal{B}, \mu)$ , então  $\lambda(x, v)$  está definido para  $\mu$ -q.t.p  $x$  e todo vetor  $v$ , o conjunto  $\{\lambda_i(x)\}$  são as taxas de crescimento partindo de  $x$  e são chamados expoentes de Lyapunov de  $(f, \mu)$  (veja [22]).

Nestas mesmas condições, uma aplicação é dita **conforme** quando o conjunto  $\{\lambda_i(x)\}$  dos expoentes de Lyapunov é igual a  $\lambda$ , para algum  $\lambda > 0$ . Em particular, isso significa que  $f$  não pode ser invertível. Uma aplicação é chamada **não-conforme** quando possui vários valores  $\lambda_1(x), \lambda_2(x) \cdots \lambda_n(x) \in \{\lambda_i(x)\}$ . Isso se traduz em taxas de crescimento diferentes ao longo das direções saindo de  $x$ .

Os expoentes de Lyapunov assumem no máximo  $n$  valores distintos em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Seja  $\lambda_1 < \cdots < \lambda_r$  para algum inteiro  $r \leq n$ . Para cada  $1 \leq i \leq r$ , o subespaço vetorial

$$E_i = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \lambda(v) \leq \lambda_i\}$$

satisfaz

$$\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \dots \subsetneq E_n = \mathbb{R}^n,$$

e é chamado *filtração associado à  $\lambda$* .

**Definição 2.7.3.** A coleção

$$\mathcal{V} = \{E_i \mid i = 0, \dots, n\}$$

de subespaços vetoriais é chamado **filtração** de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 5** (Oseledets). *Seja  $T : M \rightarrow M$  uma aplicação diferenciável preservando uma medida de probabilidade em  $M$ . Então, para quase todo  $x \in M$ , existem números*

$$\lambda_1(x) > \cdots > \lambda_{k(x)}(x)$$

e uma filtração

$$T_x M = \mathcal{V}_1(x) \supset \dots \supset \mathcal{V}_{k(x)}(x) \supset \mathcal{V}_{k(x)+1} = \{0\},$$

onde

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log \frac{1}{n} \|D(T^n)(x) \cdot v\| = \lambda_i.$$

Além disso, temos

$$(i) DT(x) \cdot \mathcal{V}_i(x) = \mathcal{V}_i(Tx),$$

$$(ii) k(x), \lambda_i(x) \text{ e } \mathcal{V}_i(x) \text{ dependem mensuravelmente de } x,$$

$$(iii) k(x), \lambda_i(x) \text{ e } \dim \mathcal{V}_i(x) \text{ são constantes ao longo da órbita de } T.$$

Os números  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq k(x)$ , são os expoentes de Lyapunov e  $\dim \mathcal{V}_i(x)$  são chamados *multiplicidade* dos expoentes. A demonstração pode ser encontrada em [21].

## 2.8 Entropia

### 2.8.1 Entropia de Shannon

Seja  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de probabilidade. Uma partição  $\mathcal{P} = \{A_i; i \in \mathbb{N}\}$  é um subconjunto mensurável e enumerável de  $X$ , onde  $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 1$ , e  $i \neq j$  implica  $A_i \cap A_j = \emptyset$ . O conjunto  $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \{A_i \cap B_j; A_i \in \mathcal{P}, B_j \in \mathcal{Q}\}$  é também uma partição de  $X$ .

A entropia de Shannon em relação a  $\mathcal{P}$  mede a quantidade de informação cujo significado motivaremos a seguir. Seja  $x$  um ponto aleatório de  $X$ , suponha que a única informação que temos a respeito de  $x$  é que ele está contido em algum  $A_i \in \mathcal{P}$ . Com base nesta única informação, queremos estabelecer uma medida da quantidade de informações que  $x$  pode nos dar. Quanto menor for a medida de  $A_i$ , maior será o ganho de informação, uma vez que estaremos mais aptos a distinguir  $x$  de outro ponto qualquer em  $\mathcal{P}$ . Além disso, se soubermos que  $x$  pertence a dois conjuntos diferentes, que são mutuamente independentes, então o ganho de informação será a soma das informações dos dois conjuntos. A entropia de Shannon de  $\mathcal{P}$  é definida por

$$H_{\mu}(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n -\mu(A_i) \log \mu(A_i),$$

para partições disjuntas  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  tem-se

$$H_{\mu}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = H_{\mu}(\mathcal{P}) + H_{\mu}(\mathcal{Q}).$$

Dizemos que  $\mathcal{Q}$  é *menos fino* do que  $\mathcal{P}$ , quando cada elemento de  $\mathcal{P}$  está contido em algum  $Q$ , ou cada  $B_i \in \mathcal{Q}$  é união de elementos  $A_i \in \mathcal{P}$ , em notação  $\mathcal{Q} \prec \mathcal{P}$ .

### 2.8.2 Entropia de um Sistema Dinâmico

Seja  $(X, \mathcal{B}, \mu, f)$  um sistema dinâmico preservando medida,  $\mu(\mathcal{B}) = 1$  e seja  $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  uma partição finita de  $X$ . O conjunto  $f^{-1}(\mathcal{P}) = \{f^{-1}(A_i) \mid i \in N, i \leq k\} = \{x \mid f(x) \in A_i, i \in N, i \leq k\}$  também é uma partição e temos  $H_{\mu}(f^{-1}\mathcal{P}) = H_{\mu}(\mathcal{P})$ . Para  $n \in \mathbb{N}$ , defina a partição

$$\mathcal{P}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P})$$

cujos elementos são da forma  $A_{i_0} \cap f^{-1}A_{i_1} \cap f^{-2}A_{i_2} \cap \dots \cap f^{-n+1}A_{i_{n-1}}$ , com  $i_j \in \{1, \dots, k\}$ . A entropia de  $f$  em relação a  $\mathcal{P}$  é dado por

$$H_{\mu}(f, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_{\mu}(\mathcal{P}^n)}{n}.$$

A entropia de Kolmogorov do sistema  $(f, \mu)$  é definido por

$$h_\mu(f) = \sup_P H_\mu(f, \mathcal{P}),$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições com entropia finita. O cálculo de  $h_\mu(f)$  é raramente feito diretamente da definição, devido a sua dificuldade.

**Teorema 6** (Kolmogorov-Sinai). *Seja  $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2 \prec \dots \prec \mathcal{P}_n \dots$  uma sequência não-decrescente de partições com entropia finita, tais que  $\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{P}_n$  gera a  $\sigma$ -álgebra dos conjuntos mensuráveis a menos de medida nula. Então*

$$h_\mu(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_\mu(f, \mathcal{P}_n).$$

Informações mais aprofundadas sobre entropia podem ser encontradas em [22],[23] e [16].

## 2.9 Formalismo Termodinâmico

### 2.9.1 Pressão topológica

Seja  $(X, d)$  um espaço métrico e  $T : X \rightarrow X$  uma transformação contínua. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definiremos uma nova distância em  $X$  por

$$d_n(x, y) = \max \left\{ d(T^k(x), T^k(y)) : 0 \leq k \leq n-1 \right\}.$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , dizemos que o conjunto finito  $E \subset X$  é  $(n, \varepsilon)$ -separado se  $d_n(x, y) > \varepsilon$ , para cada  $x, y \in E$  com  $x \neq y$ .

**Definição 2.9.1.** *A **pressão topológica** de uma função contínua  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  (com respeito a  $T$ ) é definida por*

$$P(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_E \sum_{x \in E} \exp \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k(x)), \quad (2.2)$$

onde o supremo é tomado entre todos os conjuntos  $(n, \varepsilon)$ -separado contidos em  $X$ .

Uma vez que a função

$$\varepsilon \mapsto \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_E \sum_{x \in E} \exp \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k(x))$$

é não decrescente, o limite (2.2) existe quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

A noção de pressão topológica foi introduzida por David Ruelle, e depois generalizada por Peter Walters. Apresentaremos agora uma definição alternativa para a pressão topológica.

**Teorema 7** (Princípio Variacional). *Se  $T : X \rightarrow X$  é uma transformação contínua entre espaços métricos compactos, e  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, então*

$$P(\varphi) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}} \left\{ h_\mu(T) + \int_X \varphi d\mu \right\} \quad (2.3)$$

onde  $\mathcal{M}$  é o conjunto de todas as medidas  $T$ -invariante de probabilidade em  $X$ .

Quando o supremo é alcançado por uma única medida  $\mu$ , a chamamos de *estado de equilíbrio* de  $\varphi$ .

**Definição 2.9.2.** *Seja  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, a medida  $T$ -invariante de probabilidade  $\mu_\varphi$  em  $X$  é chamado medida de equilíbrio, ou **estado de equilíbrio** de  $\varphi$  (em relação à  $T$ ) se*

$$P(\varphi) = h_{\mu_\varphi}(T) + \int_X \varphi d\mu_\varphi. \quad (2.4)$$

Para mais detalhes sobre os assuntos desta subseção veja [1], [24] e [25].

## 2.10 Medida de Gibbs

As medidas de Gibbs estão relacionadas com o estado de equilíbrio. Enquanto toda medida de Gibbs invariante no contexto hiperbólico é um estado de equilíbrio, o contrário nem sempre acontece. Nesta seção veremos que a medida da bola dinâmica está relacionada com a medida Gibbs. Antes, revisaremos alguns conceitos da Dinâmica Simbólica (veja [26]).

Seja  $\mathcal{A}$  um conjunto finito (ou infinito) de *símbolos* chamado *alfabeto*, que pode conter letras  $a, b, c \dots$  ou dígitos  $1, 2, 3 \dots$ , uma sequência de símbolos de um alfabeto  $\mathcal{A}$  é denotado por  $\underline{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , ou por

$$\underline{x} = \dots x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2 \dots$$

ou

$$\underline{x} = (\dots x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2 \dots)$$

onde cada símbolo  $x_i \in \mathcal{A}$  está na coordenada de posição  $i$  em  $\underline{x}$ .

O conjunto de todas as coleções de sequências  $\underline{x}$  de um alfabeto  $\mathcal{A}$  (finito ou infinito) é denotado por

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{ \underline{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} : x_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{Z} \}.$$

Considerando o alfabeto  $\mathcal{B} = \{1, 2, \dots, \kappa\}$  onde  $\kappa \in \mathbb{N}$ , a coleção de sequências *unilateral* é dada por

$$\Sigma_{\kappa}^+ = \{\underline{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_i \in \mathcal{B}, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Dado uma sequência  $\underline{\omega} = i_1 i_2 \dots \in \Sigma_{\kappa}^+$ , defina a *função deslocamento*  $\sigma : \Sigma_{\kappa}^+ \rightarrow \Sigma_{\kappa}^+$  como  $\sigma(i_1 i_2 \dots) = (i_2 i_3 \dots)$ . Pode-se introduzir uma distancia que torna  $\Sigma_{\kappa}^+$  um espaço topológico.

Os *m-cilindros*  $\mathcal{C}$  são conjuntos cujas coordenadas iniciais são fixadas, matematicamente

$$\mathcal{C}_{i_1 i_2 \dots i_m} = \{(j_1 j_2 \dots) \in \Sigma_{\kappa}^+ : j_l = i_l \text{ para } l = 1, \dots, m\}.$$

Quando o tamanho do cilindro é  $m$ , denotamos por  $|\mathcal{C}_{i_1 i_2 \dots i_m}| = m$ .

Existe uma fórmula mais curta para pressão topológica com relação a função deslocamento.

**Teorema 8.** *Para cada função contínua  $\varphi : \Sigma_{\kappa}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  temos*

$$P(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{i_1 \dots i_n} \exp \sup_{\mathcal{C}_{i_1 \dots i_n}} \sum_{l=0}^{n-1} \varphi \circ \sigma^l.$$

*Demonstração.* Veja teorema 3.1.1, livro [24].

□

**Definição 2.10.1** (Medida de Gibbs para a função deslocamento). *Dada uma função contínua  $\varphi : \Sigma_{\kappa}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , dizemos que a medida de probabilidade  $\mu$  em  $\Sigma_{\kappa}^+$  é **Gibbs** para  $\varphi$ , se existe  $K \geq 1$  tal que*

$$K^{-1} \leq \frac{\mu(\mathcal{C}_{i_1 \dots i_n})}{\exp[-nP(\varphi) + \sum_{l=0}^{n-1} \varphi(\sigma^l(\omega))]} \leq K \quad (2.5)$$

para todo  $(i_1 i_2 \dots) \in \Sigma_{\kappa}^+, n \in \mathbb{N}$  e  $\omega \in \mathcal{C}_{i_1 \dots i_n}$ .

**Definição 2.10.2** (Bola dinâmica (ver [27])). *Seja  $X$  um espaço métrico compacto,  $f : X \rightarrow X$ . A **bola de Bowen ou bola dinâmica** de centro  $x$ , raio  $\varepsilon$  e ordem  $n$  é definida por*

$$B_n(x, n, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(f^k(y), f^k(x)) < \varepsilon, \text{ para } 0 \leq k \leq n\}.$$

**Definição 2.10.3** (Medida de Gibbs, ver [28]). *Seja  $T : X \rightarrow X$  uma transformação contínua entre espaços métricos. Suponha que  $\mu$  é uma medida de probabilidade em  $X$  e seja  $\phi \in C(X, \mathbb{R})$ . A medida  $\mu$  é chamada **Gibbs** com respeito a  $\phi$  se existem constantes  $A, B > 0$  e  $P$  tal que*

$$A \leq \frac{\mu(B_n(x, n, \varepsilon))}{\exp[-nP(\phi) + \sum_{l=0}^{n-1} \phi(T^l(x))]} \leq B \quad \forall x \in X, n \in \mathbb{N}.$$

O próximo teorema diz que toda medida de Gibbs invariante para a função deslocamento é um estado de equilíbrio.

**Teorema 9.** *Se uma medida  $\mu$  de probabilidade em  $\Sigma_\kappa^+$  é uma medida de Gibbs  $\sigma$ -invariante para  $\varphi$ , então  $\mu$  também é um estado de equilíbrio para  $\varphi$ .*

*Demonstração.* Veja teorema 3.4.2, livro [24]. □

## 2.11 Outras definições

**Definição 2.11.1** (Componente conexo). *Um espaço topológico  $X$  é dito **conexo**, quando  $X$  não pode ser representado como união de dois ou mais conjuntos abertos disjuntos e não-vazios, ou seja, quando não admite outra cisão além da trivial  $(\emptyset \cup X)$ . A **componente conexa** de  $x$  é o maior subconjunto conexo de  $X$  que contém o ponto  $x$ .*

**Definição 2.11.2** (Função Hölder contínua (ver [29])). *Seja  $x_0 \in D$ , com  $D \subset \mathbb{R}^n$  limitado e  $0 < \alpha < 1$ . A função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é dita Hölder contínua de ordem  $\alpha$  se existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha,$$

para todo  $x \in D$ . Se  $\alpha = 1$ , então a função  $f$  é dita Lipschitziana.

**Definição 2.11.3** (Coomologia). *Seja  $f : X \rightarrow X$  uma transformação contínua no espaço topológico  $X$ . Duas funções  $\varphi_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\varphi_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$  são coomologas em  $X$  com relação a  $f$ , ou simplesmente coomologas se existe uma função contínua  $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \psi - \psi \circ f \text{ em } X.$$

**Definição 2.11.4** (Skew product). *Seja  $T : X \rightarrow X$  uma aplicação no espaço métrico  $(X, d)$ . A aplicação  $T$  é chamada **skew product** se é da forma*

$$T(x) = (f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots, f_d(x_1, \dots, x_d))$$

onde  $f_1, \dots, f_d$  são funções mensuráveis.

**Definição 2.11.5** (Aplicação expansora e repulsores). *Seja  $f : M \rightarrow M$  uma aplicação diferenciável em uma variedade suave, e  $J \subset M$  um conjunto compacto invariante por  $f$ , ou seja,  $f^{-1}(J) = J$ . Dizemos que  $J$  é um **repulsor** de  $f$  e que  $f$  é **expansora** em  $J$ , se existe constantes  $c > 0$  e  $\beta > 1$  tal que*

$$\|d_x f^n(v)\| \geq c\beta^n \|v\|$$

para todo  $x \in J$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , e  $v \in T_x M$ .

**Definição 2.11.6** (Aplicação uniformemente expansora (ver [30])). *Seja  $T : M \rightarrow M$  uma aplicação entre variedades compactas suave de Riemann. Dizemos que  $T$  é uma aplicação uniformemente expansora se existe constantes  $c, \beta > 0$  tal que para todo  $x \in M$ , todo  $v \in T_x M$  e todo  $n \geq 0$ , temos*

$$\| d_x T^n(v) \| \geq \beta e^{cn} \| v \| .$$

As transformações expansoras carregam uma característica importante: a *distorção limitada*, que será útil para termos o controle sobre o tamanho de uma partição de Markov fibrada no capítulo 3.

**Lema** (Distorção limitada). *Dizemos que uma transformação expansora  $T$  tem distorção limitada se existe  $C > 0, \alpha > 0$  tal que*

$$\left| \frac{|\det(T'(x))|}{|\det(T'(y))|} - 1 \right| \leq C \| T(x) - T(y) \|^\alpha$$

onde  $x, y$  estão na mesma partição.

**Definição 2.11.7** (Medida conforme). *Seja  $T$  uma transformação mensurável no espaço  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ . A medida  $\mu$  é chamada **conforme** para a função  $\beta : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ , se para cada  $E \in \mathcal{B}$  onde  $T$  age como isomorfismo mensurável, tem-se*

$$\mu(T(E)) = \int_E \beta(\xi) \mu(d\xi).$$

**Definição 2.11.8** (Medida hiperbólica). *Seja  $T : M \rightarrow M$  um difeomorfismo. Dizemos que a medida  $\mu$  invariante por  $T$  é **hiperbólica** (com respeito a  $T$ ) se todos os expoentes de Lyapunov são não-nulos em todo ponto, isto é, se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \| D(T^n)(x)v \| \neq 0$$

para todo  $v \in T_x M$  e todo  $x$  no conjunto de medida completa.

**Definição 2.11.9** (Dimensão pontual (ver [31])). *Seja  $\mu$  uma medida de probabilidade, e  $B(x, \varepsilon)$  a bola de centro  $x$  e raio  $\varepsilon$ . A **dimensão pontual ou local** da medida  $\mu$  no ponto  $x$  é definida como*

$$\delta_\mu := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, \varepsilon))}{\log \varepsilon}$$

se o limite existir. Se  $\delta_\mu = d$ , então para  $\varepsilon$  pequeno a medida da bola é da escala de  $\mu(B(x, \varepsilon)) \approx \varepsilon^d$ .

A dimensão pontual é uma Dimensão de Hausdorff, de 2.1 podemos chegar na fórmula anterior.

## 3 Resultado principal

O teorema principal possui uma semelhança com o Teorema do Limite Central clássico de probabilidade apresentado na seção 2.2.2, veremos que o  $\log$  da medida da bola tradicional será transformado em um somatório. Esta dissertação focará no caso em duas dimensões no toro bidimensional, porém o artigo [3] trabalha no toro em qualquer dimensão. Defina  $\pi(x, y) = x$  como a projeção na primeira coordenada. Nosso teorema principal é

**Teorema principal.** *Seja  $T : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  uma aplicação expansora de classe  $C^2$  da forma  $T(x, y) = (f(x), g(x, y))$ . Seja  $\varphi$  uma função hölder contínua de  $\mathbb{T}^2$  em  $\mathbb{R}$ . Seja  $\mu_\varphi$  o estado de equilíbrio associado a  $\varphi$ , e  $\delta := \delta_{\mu_\varphi}$  sua dimensão de Hausdorff, assumindo que  $\int \log |f' \circ \pi| d\mu_\varphi < \int \log \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| d\mu_\varphi$ . Então existe um número real  $\sigma \geq 0$  tal que o processo*

$$\frac{\log \mu_\varphi(B((x, y), \varepsilon^t)) - t\delta \log \varepsilon}{\sqrt{-\log \varepsilon}}, \quad t \in [0, 1] \quad (3.1)$$

*converge sob  $\mathcal{D}([0, 1])$  em distribuição sob a lei de  $\mu_\varphi$  para o processo  $\sigma W(t)$ , onde  $W$  é o processo de Wiener padrão. Além disso, a variancia  $\sigma^2$  é zero se, e somente se,  $\mu_\varphi$  é a única medida invariante absolutamente contínua, ou equivalentemente,  $\varphi$  é coomologo a  $-\log |\det DT|$ .*

A hipótese  $\int \log |f' \circ \pi| d\mu_\varphi < \int \log \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| d\mu_\varphi$  significa que estamos tratando com o caso não-conforme (Lema 2). Consideraremos a pressão topológica  $P(\varphi)$  como sendo zero, isso pode ser percebido trocando  $\varphi$  por  $\varphi$  menos a pressão.

**Corolário 1** (Teorema do Limite Central). *Com as mesmas hipóteses e notações, a família de variáveis aleatórias.*

$$\frac{\log \mu_\varphi(B((x, y), \varepsilon)) - \delta \log \varepsilon}{\sqrt{-\log \varepsilon}}$$

*converge em distribuição para a distribuição gaussiana  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .*

### 3.1 Estapas da demonstração

Na seção 3.2.1 será mostrado que o toro  $\mathbb{T}^2$  pode ser visto como um quadrado unitário  $[0, 1] \times [0, 1]$ , então as contas serão feitas neste quadrado. Uma bola tradicional em  $\mathbb{T}^2$  é topologicamente um retângulo contido em  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Iremos considerar um skew product da forma  $T(x, y) = (f(x), g(x, y))$  expansora que a cada iteração preserva linhas verticais, usaremos na seção 3.2.2 um tipo de partição para aproximar a bola tradicional

por uma "espécie" de bola dinâmica (cilindro hiperbólico) com a seguinte inclusão:

$$C_{\varepsilon^t} \subset B(x, \varepsilon) \subseteq C_{\varepsilon^{t'}}.$$

Isso nos habilitará a trocar o processo

$$N_\varepsilon(t) = \frac{\log \mu_\varphi(B((x, y), \varepsilon^t)) - t\delta \log \varepsilon}{\sqrt{-\log \varepsilon}}, \quad t \in [0, 1],$$

pelo processo

$$N'_\varepsilon(t) = \frac{\log \mu_\varphi(C_{\varepsilon^t}(x, y)) - t\delta \log \varepsilon}{\sqrt{-\log \varepsilon}}, \quad t \in [0, 1].$$

Na seção 3.2.6, utilizando argumentos dinâmicos e ergódicos reduziremos o problema para o estudo de convergência um processo da forma

$$N''_\varepsilon(t) = \frac{S_{n_{\varepsilon^t}}\phi_1 + S_{m_{\varepsilon^t}}\phi_2}{\sqrt{-\log \varepsilon}}, \quad t \in [0, 1], \quad (3.2)$$

onde  $n_\varepsilon$  e  $m_\varepsilon$  são tempos aleatórios que dependem do ponto considerado.

Então, na Seção 3.3 utiliza-se argumentos da Teoria das Probabilidades para provar a convergência deste último processo. Estes argumentos são, de alguma maneira, gerais e independentes das funções  $\phi_1$  e  $\phi_2$ .

Os autores Leplaideur e Saussol mencionam que o uso da topologia de Skorohod talvez não seja necessário. Parece útil porque o processo estudado a priori é descontínuo. Entretanto, note que o limite do processo é contínuo em quase todo ponto. Portanto a convergência é uniforme. Porém, o espaço das funções de cadlag munido com a norma da convergência uniforme não é separável, o que pode causar alguns problemas, como os citados por Billingsley em [32]. Os autores preferem então trabalhar em  $\mathcal{D}([0, 1])$ .

O método em [3] se aplica para o caso dos repulsores conforme, e no caso de difeomorfismos entre superfícies do Axioma A. De agora em diante, assumiremos que  $T(x, y) := (f(x), g(x, y))$  e  $\varphi$  satisfaz as hipóteses do teorema principal.

## 3.2 Redução a uma soma de variáveis aleatórias não homogênea

### 3.2.1 Toro como um quadrado

Para descrever o toro, vamos começar com o plano. Considere como idêntico todos os pontos cujas coordenadas diferem por um inteiro. Isto é, o ponto  $(\alpha, \beta)$  no plano é considerado como o ponto  $(\alpha + 1, \beta)$ ,  $(\alpha + 5, \beta + 3)$ , e, no geral  $(\alpha, \beta)$  é o mesmo que  $(\alpha + M, \beta + N)$  onde  $M, N \in \mathbb{Z}$ . Denotaremos  $[\alpha, \beta]$  como o conjunto de todos os pontos equivalentes à  $(\alpha, \beta)$  sob esta relação. Mais precisamente,  $(x, y) \sim (x', y')$  acontece se, e

somente se,  $x - x'$  e  $y - y'$  são números inteiros que geram uma relação de equivalência sob pontos no plano. O toro é portanto o conjunto de todas as classes de equivalência nesta relação.

Geometricamente, considere o quadrado unitário  $[0, 1]^2$ . Sob a relação do parágrafo anterior, somente os pontos da fronteira do quadrado precisam ser considerados. De fato, a fronteira superior  $y = 1$  pode ser considerado o mesmo que a fronteira inferior  $y = 0$ , similarmemente ocorre com as fronteiras do lado direito ( $x = 1$ ) e esquerdo ( $x = 0$ ). Quando isto acontece, o quadrado se torna primeiro um cilindro, e depois um toro como na figura 3

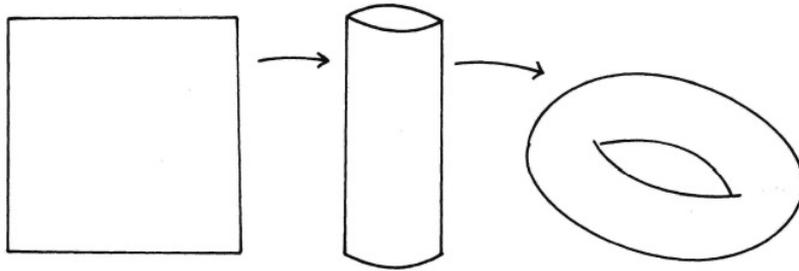


Figura 3 – Obtendo o toro de um quadrado (ver [2]).

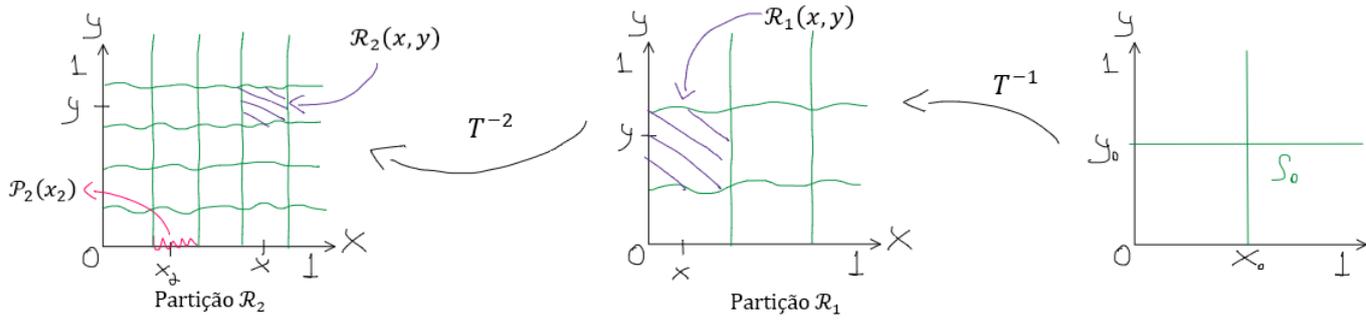
### 3.2.2 Partições de Markov fibrada

Das hipóteses do teorema principal, existe uma partição de Markov para o toro  $\mathbb{T}^2$ . Preferimos trabalhar com partições mais simples. Enfatizamos que "partição" é aqui entendido como um conjunto de medida nula  $\mu_\varphi$ -mensurável.

Considere a projeção  $\pi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}$ ,  $\pi(x, y) = x$ . As propriedades principais dessas partições são listadas no Lema abaixo (consideraremos  $\mathring{R}_i = \text{int } R_i$ ).

**Lema 1.** Para todo  $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$ , e para cada  $n \geq 1$  existe uma partição finita  $\mathcal{R}_n$  de  $\mathbb{T}^2$  em subconjuntos próprios de Markov  $R_i$  tal que

- (1) Cada elemento  $R_i$  de  $\mathcal{R}_n$  é um conjunto próprio.
- (2) Para cada elemento  $R_i$  de  $\mathcal{R}_n$ ,  $T^n(R_i) = \mathbb{T}^2$  e  $T^n|_{R_i}$  é injetiva.
- (3) Se  $R_i$  e  $R_j$  são elementos diferentes de  $\mathcal{R}_n$ , então  $\pi(\mathring{R}_i) \cap \pi(\mathring{R}_j) = \emptyset$  ou  $\pi(\mathring{R}_i) = \pi(\mathring{R}_j)$ .
- (4) A fronteira  $\partial\mathcal{R}_n$  é aplicado por  $T^n$  em  $S_0$ .
- (5)  $\mathcal{P}_n = \pi(\mathcal{R}_n)$ .
- (6)  $T^k(\mathcal{R}_n) = \mathcal{R}_{n-k}$  para  $k \leq n$ .


 Figura 4 – Partição de Markov com  $f$  e  $g$  possuindo grau 2.

(7) Cada elemento  $P_i$  de  $\mathcal{P}_n$  é um intervalo fechado.

(8) Para cada elemento  $P_i$  de  $\mathcal{P}_n$ ,  $f^n(R_i) = \mathbb{T}$  e  $f^n|_{P_i}$  é injetiva.

(9) Se  $P_i$  e  $P_j$  são elementos diferentes de  $\mathcal{P}_n$ , então  $\overset{\circ}{P}_i \cap \overset{\circ}{P}_j = \emptyset$ .

(10) A fronteira  $\partial\mathcal{P}$  é aplicado por  $f^n$  em  $S_0$ .

(11)  $f^k(P_n) = \mathcal{P}_{n-k}$  para  $k \leq n$ .

*Demonstração.* Escolha  $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$  e considere o conjunto  $S_0(x_0, y_0) = S_0 = (\{x_0\} \times \mathbb{T}) \cup (\mathbb{T} \times \{y_0\})$ . E para cada  $n \geq 1$ , seja  $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n(x_0, y_0)$  a coleção das componentes conexas  $R_{n,i}(x_0, y_0)$  de  $T^{-n}(\mathbb{T}^2 \setminus S_0)$  ou seja,  $\mathcal{R}_n = \bigcup_{i=1}^{k_n} R_{n,i}(x_0, y_0)$ . Claramente,  $\mathcal{R}_n$  é uma partição em  $\mathbb{T}^2$ . Semelhantemente, podemos definir uma partição em  $\mathbb{T}$ , denotaremos por  $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(x_0)$ , como a coleção de componentes conexos de  $f^{-n}(\mathbb{T} \setminus \{x_0\})$ .

(1) Da forma como  $\mathcal{R}_n$  é definido, temos que  $\mathcal{R}_n = \bigcup_{i=1}^{k_n} R_{n,i}(x_0, y_0)$  onde o número de elementos  $k_n$  da partição é limitado superiormente pelo produto  $(\partial f^n + 1)(\partial g^n + 1)$ . Então  $R_i := R_{n,i}(x_0, y_0) \subset \mathcal{R}_n$ .

(2) Este item decorre diretamente da definição de  $\mathcal{R}_n$ , pois sendo  $T$  um difeomorfismo local, os subconjuntos  $R_i$  são regiões de injetividade.

(3) Suponha que  $\pi(\overset{\circ}{R}_i) \cap \pi(\overset{\circ}{R}_j) \neq \emptyset$ . Seja  $x \in \pi(\overset{\circ}{R}_i) \cap \pi(\overset{\circ}{R}_j)$ . Então, pedaços da linha vertical que contém pontos da forma  $(x, y)$  estão em  $R_i$  e  $R_j$  (lembrando que  $R_i \cap R_j = \emptyset$ ). E como  $R_i, R_j$  são conjunto abertos e o skew product  $T$  preserva fibras verticais (os bordos verticais de  $R_i$  e  $R_j$  são projetado em dois pontos) temos que  $\pi(\overset{\circ}{R}_i) = \pi(\overset{\circ}{R}_j)$ .

(4) Este item segue diretamente da definição da partição  $\mathcal{R}_n$ .

(5) Note que os elementos da partição  $\mathcal{R}_n$  que pertencem ao mesmo retângulo vertical (isso significa que os seus bordos verticais estão contidos em uma mesma linha vertical) são projetados em um mesmo segmento (elemento) de  $\mathcal{P}_n$  e isso é exatamente o que diz o item (3) acima. Então, podemos considerar somente um representante de cada retângulo

vertical. Mais precisamente,

$$\pi(\mathcal{R}_n) = \pi\left(\bigcup_{i=1}^{k_n} R_i\right) = \bigcup_{\pi(R_i) \cap \pi(R_j) = \emptyset} \pi(R_i) = \bigcup P_i = \mathcal{P}_n.$$

(6) Note que, pela definição, para cada  $n \geq 2$  cada partição  $\mathcal{R}_n$  é formado pela imagem inversa  $T^{-1}(\mathcal{R}_{n-1})$ , ou seja,  $T(\mathcal{R}_n) = \mathcal{R}_{n-1}$ . Logo, por indução em  $k$ , temos  $T^k(\mathcal{R}_n) = \mathcal{R}_{n-k}$  para  $k \leq n$ .

(7) Pelos argumentos do item (5), as linhas horizontais que compõem o bordo de  $R_i$  são projetadas no interior de cada  $P_i$ , e as linhas verticais do bordo são projetadas em seus pontos extremos, fazendo com que  $P_i$  sejam intervalos fechados.

(8) Similar ao item (2).

(9) Suponha por absurdo que  $\mathring{P}_i \cap \mathring{P}_j \neq \emptyset$ . Escolhendo  $x \in \mathring{P}_i \cap \mathring{P}_j$ , este elemento é a projeção de algum  $y \in R_i, R_j$  que está contido em  $\mathcal{R}_n$ , um absurdo pois pela definição 2.6.2 item 3 cada  $R_k$  é disjunto.

(10) Similar ao item (4).

(11) Similar ao item (6).

□

Após a demonstração do Lema 1, nota-se que a partição  $\mathcal{R}_n$  possui propriedades quase que markovianas, no sentido de possuir algumas propriedades típica de uma partição de Markov. E que a quantidade de elementos da partição depende do grau das aplicações  $f$  e  $g$  possuem, ilustrado na figura 4.

A fronteira da partição  $\partial\mathcal{R}_n$  terá um papel importante. Para um ponto  $(x, y)$  fixado e um inteiro  $n$ , a fronteira de  $\mathcal{R}_n(x, y)$  é denotado por  $\partial\mathcal{R}_n(x, y)$ . Ela é a união da fronteira vertical  $\partial^v\mathcal{R}_n(x, y)$  com a fronteira horizontal  $\partial^h\mathcal{R}_n(x, y)$ . A fronteira vertical é exatamente a união de dois segmentos verticais (suas projeções por  $\pi$  é a união de dois pontos diferentes). A fronteira horizontal é a união de duas curvas "relativamente" horizontais. A ideia de utilizar essa partição está em substituir a bola comum  $B(x, \varepsilon)$  por algum elemento  $R_i$  conveniente da partição  $\mathcal{R}_n$ .

### 3.2.3 Expoente de Lyapunov e geometria da partição

Sejam  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  e  $g : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}$  funções de classe  $C^1$ , definiremos para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$F_n(x, y) = \prod_{j=0}^{n-1} |f' \circ f^j \circ \pi(x, y)|, \quad G_n(x, y) = \prod_{j=0}^{n-1} \left| \frac{\partial g}{\partial y} \circ T^j(x, y) \right|, \quad (3.3)$$

onde  $F_n$  significa a derivada da  $n$ -ésima iteração de  $f$

$$\begin{aligned} F_1 &= f'(f^0(\pi(x, y))) = f'(f^0(x)) = f'(x) = (f^1(x))' \\ F_2 &= f'(f^0(x)) \cdot f'(f^1(\pi(x, y))) = f'(x)f'(f(x)) = f'(f(x))f'(x) = (f^2(x))' \\ F_3 &= f'(f^0(x)) \cdot f'(f^1(\pi(x, y))) \cdot f'(f^2(\pi(x, y))) = f'(f(x))f'(x) \cdot f'(f^2(x)) = [f(f^2(x))]'' = (f^3(x))' \\ &\vdots \\ F_n &= (f^n(x))', \end{aligned}$$

e  $G_n$  é o produto das derivadas parciais na direção vertical.

**Lema 2.** *Seja  $T : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  como no teorema principal. Existe uma decomposição invariante  $T_{(x,y)}\mathbb{T}^2 = E^u(x, y) \oplus E^{uu}(x, y)$  definida para  $\mu$ -q.t.p.  $(x, y)$ . Os dois expoentes de Lyapunov associados a  $(T, \mu)$  são  $\lambda^u := \int \log |f'(x)| d\mu_\varphi(x, y)$  e  $\lambda^{uu} := \int \log \left| \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right| d\mu_\varphi(x, y)$ .*

*Demonstração.* Pela definição de derivada,

$$\begin{aligned} \log F_n &= \log \left( \left| \prod_{j=0}^{n-1} f' \circ f^j \circ \pi \right| \right) \\ &= \log \left[ \left| (f' \circ f^0 \circ \pi) \cdot (f' \circ f^1 \circ \pi) \cdots (f' \circ f^{n-1} \circ \pi) \right| \right] \\ &= \left[ \log(f' \circ f^0 \circ \pi) + \log(f' \circ f^1 \circ \pi) + \cdots + \log(f' \circ f^{n-1} \circ \pi) \right] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \log \left( \left| f' \circ f^j \circ \pi \right| \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \log \left[ \left| f'(f^j(\pi(x, y))) \right| \right]. \end{aligned}$$

Pelo teorema ergódico de Birkhoff, temos para  $\mu$ -q.t.p.  $(x, y)$

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \left[ \left| f' \circ f^j \circ \pi(x, y) \right| \right] = \lim \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \left( \left| f' \circ f^j(x) \right| \right) = \int \log |f'(x)| d\mu_\varphi = \lambda^u,$$

similarmente concluímos que para  $\mu$ -q.t.p.  $(x, y)$

$$\lim \frac{1}{n} \log G_n(x, y) = \lim \int \log \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| d\mu_\varphi = \lambda^{uu}, \quad \text{onde } \lambda^u \leq \lambda^{uu}.$$

Então, a série

$$U(x, y) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k}{G_{k+1}} \frac{\partial g}{\partial x} \circ T^k(x, y)$$

converge para  $\mu$ -q.t.p.  $(x, y)$ . Com efeito, pela definição de expoentes de Lyapunov em  $\mu_\varphi$ -q.t.p.  $(x, y)$ , temos que  $F_n$  é da ordem  $e^{\lambda^u n}$ , isto é,  $F_n \approx e^{\lambda^u n}$  e de maneira análoga  $G_n \approx e^{\lambda^{uu} n}$ . Logo,

$$|U(x, y)| \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|e^{\lambda^u k}|}{|e^{\lambda^{uu}(k+1)}|} \left| \frac{\partial g}{\partial x} \circ T^k(x, y) \right|.$$

Como por hipótese,  $\lambda^u < \lambda^{uu}$  e  $\left| \frac{\partial g}{\partial x} \circ T^k(x, y) \right|$  é limitado, pelo teste da razão temos que a série  $|U(x, y)|$  converge absolutamente. Definimos os seguintes espaços em  $\mu_\phi$ -q.t.p.  $(x, y) \in \mathbb{T}^2$

$$E^u(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ U(x, y) \end{bmatrix}, \quad E^{uu}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

não é difícil verificar que  $T\mathbb{T}^2 = E^u \oplus E^{uu}$  em  $\mu_\phi$ -q.t.p.  $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ . Um pouco mais complicado é verificar que essa decomposição é invariante. De fato, note que

$$DT(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x) & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix},$$

então

$$\begin{aligned} DT(x, y) \begin{pmatrix} 1 \\ U(x, y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x) & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ U(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \circ U(x, y) \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \begin{pmatrix} 1 \\ U \circ T(x, y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned} DT(x, y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x) & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Em geral, por indução, temos que para  $n \geq 1$

$$DT^n(x, y) \begin{pmatrix} 1 \\ U(x, y) \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} f' \circ f^k \circ \pi(x, y) \begin{pmatrix} 1 \\ U \circ T^n(x, y) \end{pmatrix}$$

e

$$DT^n(x, y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial y} \circ T^k(x, y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Resta provar que  $\lambda^u$  e  $\lambda^{uu}$  são dois expoentes de Lyapunov de  $T$  em relação à medida  $\mu_\phi$ . Como as duas direções, os espaços unidimensionais  $E^u$  e  $E^{uu}$  são  $DT$ -invariantes e as expansões ao longo dessas direções são exatamente  $\lambda^u$  e  $\lambda^{uu}$ , pelo Teorema de Oseledets  $\lambda^u$  e  $\lambda^{uu}$  são os expoentes de Lyapunov da medida  $\mu_\phi$ .

□

Lembrando que o nosso objetivo é usar "espécies" de bolas dinâmicas através das partições  $\mathcal{R}_n$  para substituímos a bola  $B((x, y), \varepsilon)$ . Ter o total controle das bordas dessa partição é de suma importância. Como  $T$  é um skew product, temos esse controle nas bordas verticais. Porém, o mesmo pode não acontecer com as horizontais  $\partial^h \mathcal{R}_n$ . Note que se o ponto  $(x, y)$  pertence a  $\partial^h \mathcal{R}_n$ , então  $(x, y)$  também pertence a  $\partial^h \mathcal{R}_m$  para todo  $m \geq n$ , pois a cada iteração  $T^n$  o número de fronteiras aumenta.

O próximo Lema nos fornece um controle nessas bordas através de estimativas de suas inclinações usando um propriedade interessante das transformações expansoras: a *propriedade de distorção limitada*. Denotamos  $\mathcal{T}_{x,y,n}$  a inclinação da tangente em  $\partial^h \mathcal{R}_n$  no ponto  $(x, y)$ .

**Lema 3.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$  e  $\mu_\varphi$  quase todo ponto  $(x, y)$ , existe um número real  $A_{\partial^h}(x, y)$  tal que para todo  $(x', y')$  em  $\partial^h \mathcal{R}_n(x, y)$ , temos*

$$|\mathcal{T}_{x',y',n}| \leq A_{\partial^h}(x, y).$$

*Demonstração.* Assumimos que a decomposição invariante está definida em  $(x, y)$ . Para  $(x', y')$  em  $\partial^h \mathcal{R}_n(x, y)$ , defina a sequência de somas parciais da série  $U$

$$U_n := - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F_k(x', y')}{G_{k+1}(x', y')} \frac{\partial g}{\partial x} \circ T^k(x', y').$$

Denote por  $(\alpha, \beta) = (D_{(x',y')}T^n)^{-1}(1, 0)$ . Então  $(\alpha, \beta)$  é tangente ao bordo  $\partial^h \mathcal{R}_n(x, y)$  no ponto  $(x', y')$ . Além disso, temos

$$DT^n = \begin{bmatrix} F_n & 0 \\ -G_n U_n & G_n \end{bmatrix}.$$

Com efeito, provaremos por indução

$$DT = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ -G_1 U_1 & G_1 \end{pmatrix}.$$

Suponha que temos para  $k \leq n - 1$

$$DT^k = \begin{pmatrix} F_k & 0 \\ -G_k U_k & G_k \end{pmatrix},$$

então

$$\begin{aligned} DT^{k+1} = DT(T^k) \cdot DT^k &= \begin{pmatrix} F_1 \circ T^k & 0 \\ -G_1 \circ T^k \cdot U_1 \circ T^k & G_1 \circ T^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_k & 0 \\ -G_k U_k & G_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_1 \circ T^k \cdot F_k & 0 \\ -G_1 \circ T^k \cdot U_1 \circ T^k \cdot F_k - G_1 \circ T^k \cdot G_k U_k & G_1 \circ T^k \cdot G_k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Não é difícil verificar que  $F_1 \circ T^k \cdot F_k = F_{k+1}$  e  $G_1 \circ T^k \cdot G_k = G_{k+1}$  e

$$\begin{aligned}
 -G_1 \circ T^k \cdot U_1 \circ T^k \cdot F_k - G_1 \circ T^k \cdot G_k U_k &= -\frac{\partial g}{\partial y} \circ T^k \left( -\frac{F_0 \circ T^k}{G_1 \circ T^k} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \circ T^k \cdot F_k + G_k \cdot U_k \right) = \\
 &= -\frac{\partial g}{\partial y} \circ T^k \left( -\frac{1 \cdot G_k}{G_{k+1}} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \circ T^k \cdot F_k + G_k \cdot U_k \right) = \\
 &= -G_k \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \circ T^k \cdot U_k - G_k \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \circ T^k \cdot \frac{F_k}{G_{k+1}} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \circ T^k = \\
 &= -G_{k+1} \left( U_k - \frac{F_k}{G_{k+1}} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \circ T^k \right) = G_{k+1} U_{k+1}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$(DT^n)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{F_n} & 0 \\ \frac{U_n}{F_n} & \frac{1}{G_n} \end{pmatrix}$$

e então  $(\alpha, \beta) = \left( \frac{1}{F_n}, \frac{U_n}{F_n} \right)$ .

Portanto, a inclinação de  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  na base canônica é

$$\frac{\beta}{\alpha} = U_n.$$

Pelo lema de distorção limitada na seção 2.11, existe uma constante  $A_T$  tal que para todo  $(x'', y'') \in \mathcal{R}_n(x, y)$  temos

$$\frac{1}{A_T} |U_n(x, y)| \leq |U_n(x'', y'')| \leq A_T |U_n(x, y)|.$$

Usamos essas duas desigualdades para  $(x', y')$  e temos  $|\mathcal{T}_{x', y', n}| \leq A_T |U_n(x, y)|$ . Como a sequência  $U_n(x, y)$  converge para  $U$  em quase todo ponto  $(x, y)$ , implica que ela é limitada. E com isso, o lema está provado. □

Graças a este Lema, podemos garantir que cada elemento  $R_i$  da partição de Markov pode conter uma bola  $B((x, y), \varepsilon)$  (ver figura 3).

### 3.2.4 Aproximação de Markov multi-temporal da bola tradicional

No objetivo de efetuarmos aproximações da bola  $B((x, y), \varepsilon)$ , definimos os seguintes números:

**Definição 3.2.1.** *Seja  $\varepsilon$  um número real positivo*

- (i) Denotamos por  $n_\varepsilon(x, y)$  o maior inteiro  $k$  tal que  $G_k(x, y)\varepsilon \leq 1$ .
- (ii) Denotamos por  $m_\varepsilon(x)$  o maior inteiro  $k$  tal que  $F_k(x)\varepsilon \leq 1$ .

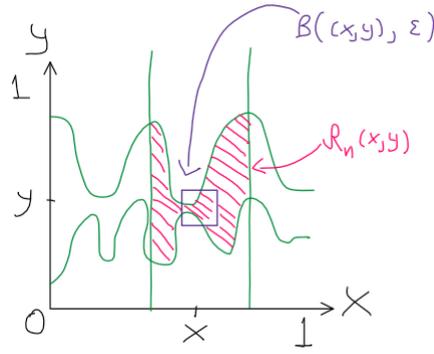


Figura 5 – O Lema 3 evita situações como esta.

O número  $n_\varepsilon$  é o tempo onde ocorre a máxima expansão de  $G_k(x, y)$ , e  $m_\varepsilon$  é o tempo em que a função  $F_k(x)$  atinge a expansão máxima que é 1, pois estamos no quadrado unitário.

**Lema 4.** *Existe uma constante  $c > 0$  tal que*

$$c \leq F_{m_\varepsilon(x)}(x)\varepsilon \leq 1, \quad e \quad c \leq G_{n_\varepsilon(x,y)}(x, y)\varepsilon \leq 1.$$

*Demonstração.* A demonstração segue diretamente das definições de  $F_m$ ,  $G_n$  e das definições dos tempos  $n_\varepsilon$  e  $m_\varepsilon$  (Definição 3.2.1), juntamente com o fato das funções  $f'$  e  $\frac{\partial g}{\partial y}$  serem limitadas, pois são contínuas definidas em um compacto. Considerando que  $c_f \leq f'$  e  $c_g \leq \frac{\partial g}{\partial y}$  basta tomar  $c := \min\{c_f, c_g\}$ .

□

**Lema 5.** *Para  $\mu_\varphi$  quase todo ponto  $(x, y)$  temos  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{n_\varepsilon(x, y)}{-\log \varepsilon} = \frac{1}{\lambda^u u}$  e  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m_\varepsilon(x)}{-\log \varepsilon} = \frac{1}{\lambda^u}$ . Em particular, temos  $n_\varepsilon(x, y) \ll m_\varepsilon(x)$  (quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) para  $\mu_\varphi$  q.t.p  $(x, y)$ .*

*Demonstração.* Pelo Lema 4, existe  $c > 0$  tal que  $c \leq F_{m_\varepsilon(x)}\varepsilon \leq 1$ . Daí

$$\begin{aligned} c \leq F_{m_\varepsilon(x)}\varepsilon \leq 1 &\iff \log c \leq \log F_{m_\varepsilon(x)}\varepsilon \leq \log 1 \\ &\iff \log c \leq \log F_{m_\varepsilon(x)} + \log \varepsilon \leq 0 \\ &\iff \log c - \log \varepsilon \leq \log F_{m_\varepsilon(x)} \leq -\log \varepsilon \\ &\iff \frac{1}{m_\varepsilon}(\log c - \log \varepsilon) \leq \log \frac{1}{m_\varepsilon} F_{m_\varepsilon(x)} \leq -\frac{1}{m_\varepsilon} \log \varepsilon \\ &\iff \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m_\varepsilon(x)}{\log F_{m_\varepsilon(x)}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m_\varepsilon(x)}{-\log \varepsilon}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2, quando  $n \rightarrow \infty$ , temos

$$\begin{aligned}
\lambda^u &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log F_n(x) \iff \frac{1}{\lambda^u} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log F_n(x)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\log F_n(x)}{n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log F_n(x)}.
\end{aligned}$$

Em particular, para a subsequência  $m_\varepsilon(x)$  (aqui  $\varepsilon$  está se aproximando de zero),

$$\frac{1}{\lambda^u} = \lim_{m_\varepsilon(x) \rightarrow \infty} \frac{m_\varepsilon(x)}{\log F_{m_\varepsilon}(x)},$$

e como  $\varepsilon \rightarrow 0$  quando  $m_\varepsilon(x) \rightarrow \infty$ , então

$$\frac{1}{\lambda^u} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m_\varepsilon(x)}{-\log \varepsilon}.$$

Analogamente, concluímos que

$$\frac{1}{\lambda^{uu}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{n_\varepsilon(x, y)}{-\log \varepsilon}.$$

Pela hipótese do Lema 2, para  $\mu_\varphi$  q.t.p  $(x, y)$

$$\begin{aligned}
\lambda^u(x, y) < \lambda^{uu}(x, y) &\iff \frac{1}{\lambda^u(x, y)} > \frac{1}{\lambda^{uu}(x, y)} \\
&\iff \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m_\varepsilon(x)}{-\log \varepsilon} > \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{n_\varepsilon(x, y)}{-\log \varepsilon} \implies m_\varepsilon(x) > n_\varepsilon(x, y).
\end{aligned}$$

Como as transformações  $f, g$  são expansoras e a taxa da expansão horizontal é bem mais lenta que a taxa de expansão vertical (conforme hipótese do Lema 2) para  $\varepsilon$  cada vez mais próximo de zero, o tempo  $m_\varepsilon(x, y)$  será muito maior que  $n_\varepsilon(x)$ . Logo,  $m_\varepsilon(x) \gg n_\varepsilon(x, y)$ .

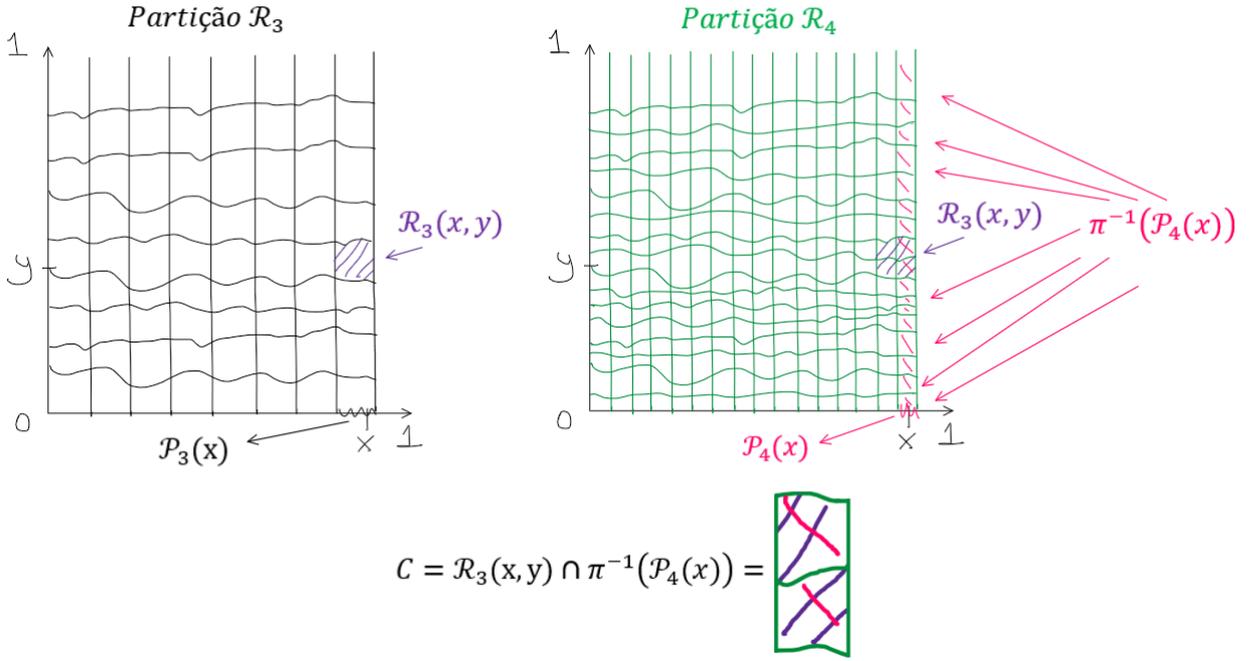
□

Definiremos agora "cilindro hiperbólico" que será uma boa aproximação da bola convencional  $B((x, y), \varepsilon)$ .

**Definição 3.2.2.** *A aproximação multi-temporal da bola é*

$$C_\varepsilon := \mathcal{R}_{n_\varepsilon(x, y)}(x, y) \cap \pi^{-1}(\mathcal{P}_{m_\varepsilon(x)}(x)).$$

Note que esta aproximação possui um formato de cilindro cuja base (curvas suaves) é bem mais curta e as laterais (linhas verticais) longas (veja figura 6). É "multi-temporal" porque envolve dois tempos  $n_\varepsilon$  e  $m_\varepsilon$ .


 Figura 6 – Cilindro hiperbólico com  $f$  e  $g$  de grau 2.

**Lema 6.** *Seja  $(x, y)$  um ponto fixado em  $\mathbb{T}^2$ . A aplicação  $T^{n_\varepsilon(x, y)}$  é uma bijeção de  $\mathring{\mathcal{R}}_{n_\varepsilon(x, y)} \cap \{x\} \times \mathbb{T}$  em  $f^{n_\varepsilon(x, y)}(x) \times (\mathbb{T} \setminus \{y_0\})$ .*

*Demonstração.* Sabendo que  $\mathcal{R}_n = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_i$  e que  $\mathring{R}_i \subset R_i$ , temos como consequência  $\mathring{\mathcal{R}}_n = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathring{R}_i \subset \mathcal{R}_n$ . Pelo item (2) do Lema 1,  $T$  é injetiva de  $\mathring{R}_i$  em  $\mathbb{T}^2$ , então  $T^n$  é também injetiva do interior de  $\mathcal{R}_n$  em  $\mathbb{T}^2$ . Como a fibra vertical  $\mathring{\mathcal{R}}_n \cap \{x\} \times \mathbb{T}$  está contida em  $\mathring{\mathcal{R}}_n$ ,  $f^{n_\varepsilon(x, y)}(x) \times (\mathbb{T} \setminus \{y_0\})$  está contido em  $\mathbb{T}^2$  e o skew product  $T(x, y)$  preserva fibras, então  $T^n$  é injetiva de  $\mathring{\mathcal{R}}_n \cap \{x\} \times \mathbb{T}$  em  $f^n(x) \times (\mathbb{T} \setminus \{y_0\}) \subset \mathbb{T}^2$ . Em particular, para  $n = n_\varepsilon(x, y)$ , segue o resultado.  $\square$

O próximo Lema nos dá um controle do comprimento horizontal e vertical de cada elemento  $R_i$  da partição de Markov fibrada, e conseqüentemente do cilindro hiperbólico.

**Lema 7.** *Existe uma constante  $D > 0$  tal que para  $\mu_\varphi$  quase todo ponto  $(x, y)$  tem-se  $\text{diam} \mathcal{P}_{m_\varepsilon(x)} \leq D\varepsilon$  e  $\text{diam}(\mathcal{R}_{n_\varepsilon(x, y)} \cap \{x\} \times \mathbb{T}) \leq D\varepsilon$ .*

*Demonstração.* Para a primeira desigualdade precisamos controlar a distorção de  $\mathcal{P}_{m_\varepsilon(x)}$ . Pelo Teorema do Valor Médio, existe um  $y \in \mathcal{P}_{m_\varepsilon(x)}(x)$  tal que

$$\text{diam} \mathcal{P}_{m_\varepsilon} = \frac{f^{m_\varepsilon}[\text{diam} \mathcal{P}_{m_\varepsilon}(x)]}{(f^{m_\varepsilon})'(y)} \leq \frac{1}{(f^{m_\varepsilon})'(y)}.$$

Lembrando que  $(f^{m_\varepsilon})'(y) = F_{m_\varepsilon}(y) \geq \frac{c}{\varepsilon}$ , usando a propriedade de distorção limitada e a injetividade de  $f^{m_\varepsilon}(x)$  em  $\mathcal{P}_{m_\varepsilon}(x)$  temos que para todo  $x', y' \in \mathcal{P}_{m_\varepsilon}(x)$

$$\frac{1}{D'} \leq \frac{(f^{m_\varepsilon})'(x')}{(f^{m_\varepsilon})'(y')} \leq D'.$$

Logo,

$$\text{diam } \mathcal{P}_{m_\varepsilon} \leq \frac{D'}{(f^{m_\varepsilon})'(x')} = \frac{D'}{F_{m_\varepsilon}(x')} \leq \frac{D'}{c} \cdot \varepsilon = D_1 \varepsilon.$$

Para a outra desigualdade, o segmento vertical  $\mathcal{R}_{n_\varepsilon(x,y)}(x, y) \cap (\{x\} \times \mathbb{T})$  não precisa estar contido em uma bola dinâmica, pois o seu "comportamento" é dado pela aplicação  $g$ , que é expansora.

Consideremos o segmento vertical que passa em  $x$  e que está contido em  $\mathcal{R}_{n_\varepsilon}(x, y)$ , ou seja o conjunto  $(\{x\} \times \mathbb{T}) \cap \mathcal{R}_{n_\varepsilon}(x, y)$ . Pelo Teorema do Valor Médio, esse segmento é expandido por  $T^{n_\varepsilon}$  por um taxa  $G_{n_\varepsilon}(x, y')$ , com  $(x, y')$  nesse segmento.

Então, pelos mesmos argumentos acima (nesse caso distorção limitada de  $g$  e pela injetividade de  $T^{n_\varepsilon}$  nessa fibra), temos

$$\begin{aligned} \text{diam } \mathcal{R}_{n_\varepsilon}(x, y) &\leq \frac{T^{n_\varepsilon}(\text{diam } \mathcal{R}_{n_\varepsilon}(x, y))}{G_{n_\varepsilon(x,y)}(x, y')} \\ &\leq \frac{D''}{G_{n_\varepsilon(x,y)}(x, y)} \leq \frac{D''}{c} \cdot \varepsilon = D_2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Para finalizar a demonstração do Lema, basta tomar  $D = \max\{D_1, D_2\}$ . □

Daqui em diante usaremos a linguagem da teoria das probabilidades. Consideraremos constantes aleatórias ou processos aleatórios sob o espaço de probabilidade  $(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}, \mu_\varphi)$ , onde  $\mathcal{B}$  é a  $\sigma$ -álgebra de Borel. A parte aleatória depende do ponto  $(x, y)$  escolhido em  $\mathbb{T}^2$  com respeito a medida  $\mu_\varphi$ . Processos são funções em  $t \in [0, 1]$ . Escreveremos  $n_\varepsilon$  e  $m_\varepsilon$  ao invés de  $n_\varepsilon(x, y)$  e  $m_\varepsilon(x)$ .

O próximo Lema é muito importante, pois nos habilitará a trocar a bola convencional pelo cilindro hiperbólico multi-temporal.

**Lema 8.** *Existe  $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$  tal que o seguinte acontece:*

*Existe uma constante  $\underline{c} < 1$  positiva em quase todo lugar, e uma função  $\bar{c}_\varepsilon > 1$  satisfazendo  $\bar{c}_\varepsilon = O(|\log \varepsilon|)$  (que significa  $|\bar{c}_\varepsilon| \leq M |\log \varepsilon|$ , para algum  $M \in \mathbb{R}$ ) em uma vizinhança de  $\varepsilon = 0$ , e em  $\mu_\varphi$  q.t.p tal que para cada  $\varepsilon > 0$ ,*

$$C_{\underline{c}\varepsilon}(x, y) \subset B((x, y), \varepsilon) \subset C_{\bar{c}_\varepsilon(x,y)\varepsilon}(x, y).$$

*Demonstração.* Seja  $(x', y') \in C_\varepsilon(x, y)$ . Pela primeira parte do Lema 7 e Lema 3,  $C_\varepsilon(x, y)$  está contido em uma "gravata borboleta" de tamanho vertical menor do que  $D\varepsilon \leq D\varepsilon + 2A_{\partial^h}(x, y)D\varepsilon$  (ver figura 6). Logo, dado  $\varepsilon > 0$ ,

$$C_\varepsilon(x, y) \subset B\left((x, y), D(1 + 2A_{\partial^h}(x, y))\varepsilon\right) \subset B\left((x, y), 2D(1 + 2A_{\partial^h}(x, y))\varepsilon\right).$$

Definindo  $\underline{c} := \frac{1}{2D(1+2A_{\partial^h}(x,y))}$ , então  $C_{\underline{c}\varepsilon}(x, y) \subset B((x, y), \varepsilon)$  pois  $\underline{c}\varepsilon < \varepsilon$  implica  $n_{\underline{c}\varepsilon} > n_\varepsilon$  e  $m_{\underline{c}\varepsilon} > m_\varepsilon$ . Para obter a outra inclusão, precisamos controlar a distância entre o ponto  $(x, y)$  e a fronteira de  $C_\varepsilon(x, y)$ .

Afirmamos que é possível obter  $x_0, y_0$  tal que

$$\mu_\varphi(B(\partial\mathcal{R}, r)) \leq a.r, \quad \forall r > 0,$$

onde  $a = 8\|DT\|_\infty$ . De fato, uma vez que  $\mu_\varphi$  é uma medida de probabilidade, existe  $x_0, y_0$  tal que  $\mu_\varphi(B(x_0, r) \times \mathbb{T}) \leq 4r$  e  $\mu_\varphi(\mathbb{T} \times B(y_0, r)) \leq 4r$  (mais detalhes em [33], demonstração Lema 3).

Temos  $B(\partial\mathcal{R}, r) = B(T^{-1}S_0, r) \subset T^{-1}B(S_0, \|DT\|_\infty r)$ . Logo, pela invariância da medida obtemos  $\mu_\varphi(B(\partial\mathcal{R}, r)) \leq \mu_\varphi(B(S_0, \|DT\|_\infty r)) \leq ar$ . Agora, mostraremos que para  $\mu_\varphi$ -q.t.p a órbita não se aproxima da fronteira  $\partial\mathcal{R}$  tão rapidamente.

Pelo lema de Borel-Cantelli e pela invariância de  $\mu_\varphi$ , a afirmação implica que existe  $N = N(x, y)$ , finito em quase todo lugar, tal que para todo  $n \geq N$  temos  $d(T^n(x, y), \partial\mathcal{R}) > 1/n^2$ . Além disso, a distância  $d_N(x, y) := d((x, y), \partial\mathcal{R}_N)$  é não nula em quase todo lugar uma vez que  $\cup_{n=0}^N S_0$  tem medida nula. Note que

$$DT^n = \begin{bmatrix} F_n & 0 \\ -G_n U_n & G_n \end{bmatrix}.$$

Logo, para  $\mu_\varphi$  q.t.p  $(x, y)$  teremos

$$\begin{aligned} \sup_{\mathcal{R}_n(x,y)} |DT^n| &= \sup_{\mathcal{R}_n(x,y)} \max\{|F_n| + |-G_n U_n|, |G_n|\} \leq |F_n| + |-G_n| |U_n| \\ &\leq |G_n| + |G_n| |U_n| \\ &= (1 + |U_n|) |G_n| \\ &\leq \kappa(x, y) |G_n| \end{aligned}$$

onde a constante  $\kappa > 1$  é finita em quase todo lugar.

Seja  $\rho_n = \frac{1}{n^2 \kappa |G_n|}$ . Seja  $n$  suficientemente grande tal que  $\rho_n < d_N(x, y)$ . Por indução temos  $B((x, y), \rho_n) \subset \mathcal{R}_n(x, y)$ . De fato, suponha que para algum  $N \leq k \leq n - 1$  tem-se  $B((x, y), \rho_n) \subset \mathcal{R}_k(x, y)$ . Uma vez que a imagem  $T^k B((x, y), \rho_n)$  está contida na bola  $B((x, y), \kappa |G_k| \rho_n)$ , que não intersecta a fronteira  $\partial\mathcal{R}$ , obtemos  $B((x, y), \rho_n) \subset \mathcal{R}_{k+1}(x, y)$ .

Tomando  $n = n_\varepsilon$  (quando  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno) obtemos

$$B((x, y), \rho_\varepsilon) \subset \mathcal{R}_{n_\varepsilon}(x, y).$$

Um argumento similar usando a função  $f$  e a partição  $\mathcal{P}$  nos dá, para alguma sequência

$$\rho'_m = \frac{1}{m^2 \kappa' |F_m|} \text{ que}$$

$$B(x, \rho'_{m_\varepsilon}) \subset \mathcal{P}_{m_\varepsilon}(x).$$

Unindo as duas últimas inclusões, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno temos

$$B((x, y), \min(\rho_{n_\varepsilon}, \rho'_{m_\varepsilon})) \subset C_\varepsilon(x, y). \quad (3.4)$$

Para obtermos a inclusão  $B((x, y), \varepsilon) \subset C_{\bar{c}_\varepsilon}(x, y)$ , reescreveremos (3.4) em função da variável  $\alpha$  ao invés de  $\varepsilon$

$$B((x, y), \min(\rho_{n_\alpha}, \rho'_{m_\alpha})) \subset C_\alpha(x, y).$$

Agora queremos inverter a expressão em  $\alpha$  e  $\varepsilon$ : dado  $\varepsilon$ , existe  $\alpha$  tal que  $\min(\rho_{n_\alpha}, \rho'_{m_\alpha}) = \varepsilon$ . Portanto,

$$B((x, y), \varepsilon) \subset C_{\bar{c}_\varepsilon}(x, y)$$

onde  $\bar{c}_\varepsilon = \frac{\alpha}{\varepsilon}$ .

Note que podemos sempre assumir que as constantes  $\kappa$  e  $\kappa'$  são maiores que 1. Então, o Lema 4 diz que  $\alpha$  é muito maior do que  $\varepsilon$ . Isto mostra que  $n_\varepsilon(x, y)$  e  $m_\varepsilon(x)$  são respectivamente maiores do que  $n_\alpha(x, y)$  e  $m_\alpha(x)$ . Assumindo por exemplo que  $\rho_\alpha = \varepsilon$ , de  $\bar{c}_\varepsilon = \frac{\alpha}{\varepsilon}$  teremos

$$\rho_\alpha = \varepsilon = \frac{\alpha}{\bar{c}_\varepsilon} = \frac{1}{n^2 \kappa |G_\alpha|} \implies \bar{c}_\varepsilon = n_\alpha^2 \kappa |G_{m_\alpha}| \alpha.$$

Novamente, usando os Lemas 4 e 5 concluímos que

$$\bar{c}_\varepsilon \leq \tilde{\kappa}(x, y) |\log \varepsilon|,$$

para alguma constante  $\tilde{\kappa}$  finito em quase todo lugar. □

**Observação 1.** Uma consequência direta do Lema 8 é que a expressão  $\frac{\log \bar{c}_\varepsilon}{|\log \frac{1}{4} \varepsilon|}$  é limitada superiormente quando  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$ .

### 3.2.5 A medida projetada é Gibbs

Definiremos a medida projetada  $\nu_\varphi = \pi_* \mu_\varphi$  em  $\mathbb{T}$  por

$$\nu_\varphi(A) := \mu_\varphi(A \times \mathbb{T}).$$

Como  $T$  é uma aplicação fibrada em  $\mathbb{T}^2$ , a medida  $\nu_\varphi$  é f-invariante. O objetivo dessa seção é provar que  $\nu_\varphi$  é uma medida Gibbs (isso vem de [34] e [35]).

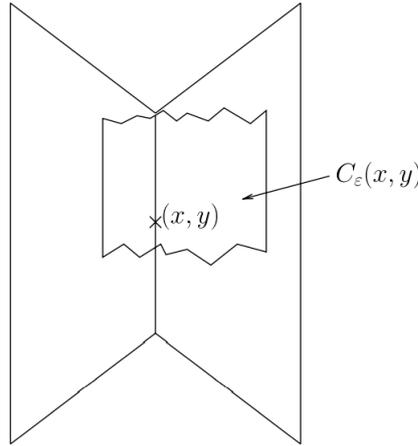


Figura 7 – Cilindro hiperbólico inserido na "gravata borboleta".

**Definição 3.2.3** (Aplicação amalgamação). *Sejam  $A, B$  dois alfabetos finitos, com  $\text{Card}(A) > \text{Card}(B)$ , e  $\pi : A \rightarrow B$  uma aplicação sobrejetora (amalgamação) que se estende à aplicação  $\pi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow B^{\mathbb{N}}$  (usamos a mesma letra para ambos) tal que  $(\pi a)_n = (\pi a_n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . A aplicação  $\pi$  é contínua e também é uma aplicação fator de  $A^{\mathbb{N}}$  em  $B^{\mathbb{N}}$ .*

Lembrando que a variação é  $\text{var}_n \phi = \sup_C \sup_{x, y \in C} |\phi(x) - \phi(y)|$  onde o supremo é tomando entre todos os cilindros  $C$  de posto  $n$ .

**Teorema 10** (Chazottes-Ugalde). *Seja  $\pi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow B^{\mathbb{N}}$  uma aplicação amalgamação e  $\varphi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$  um potencial com variação decrescente exponencialmente:  $\text{var}_n(\varphi) \in O(e^{-qn})$ , para algum  $q > 0$ . Então a medida  $\mu_\varphi \circ \pi^{-1}$  é Gibbs com suporte  $B^{\mathbb{N}}$ , para um potencial  $\psi : B^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$  com variação exponencialmente estendida:  $\text{var}_n(\psi) \in O(e^{-c\sqrt{n}})$  para algum  $c > 0$ .*

Utilizando o vocabulário e a notação desta dissertação teremos:

**Proposição 1.** *Existe uma função  $\psi$  que satisfaz:*

- (i) *A variação de  $\psi$  é exponencialmente estendida.*
- (ii) *A medida  $\nu_\psi$  é Gibbs para  $(\mathbb{T}, f)$  associado ao potencial  $\psi$ .*

**Observação 2.** Sem perda de generalidade, estabeleceremos a pressão de  $\psi$  com respeito a  $(\mathbb{T}, f)$  como zero. Em particular, temos  $h_{\nu_\psi}(f) = - \int \psi \circ \pi d\mu_\varphi$ .

### 3.2.6 Medida da bola como soma de Birkhoff

**Notação.** Para duas variáveis aleatórias  $a_\varepsilon$  e  $b_\varepsilon$ , usaremos a notação  $a_\varepsilon \approx b_\varepsilon$  significando que existe  $\tilde{\varepsilon} > 0$  tal que para  $\mu_\varphi$ -q.t.p  $(x, y)$ ,

$$\sup_{0 < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}} |a_\varepsilon(x, y) - b_\varepsilon(x, y)| < +\infty.$$

Vamos relembrar a definição do processo principal

$$N_\varepsilon(t) = \frac{\log \mu_\varphi(B((x, y), \varepsilon^t)) - t\delta \log \varepsilon}{\sqrt{-\log \varepsilon}}, \quad t \in [0, 1].$$

Pela regularidade da medida,  $N_\varepsilon$  é cadlag. Queremos mostrar a convergência de  $N_\varepsilon$  na topologia de Skorohod em  $[0, 1]$ .

Agora, definiremos outro processo

$$N'_\varepsilon(t) = \frac{\log \mu_\varphi(C_{\varepsilon^t}(x, y)) - t\delta \log \varepsilon}{\sqrt{-\log \varepsilon}}, \quad t \in [0, 1].$$

**Lema 9.** *Se o processo  $N'_\varepsilon$  converge em distribuição sob  $\mathcal{D}([0, 1])$  para um processo de Wiener cuja variância é  $\sigma^2$ , então  $N_\varepsilon$  converge em distribuição para o mesmo processo.*

*Demonstração.* Observe que o processo  $N_\varepsilon$  tem invariância de escala

$$N_\varepsilon(t) = \sqrt{2}N_{\varepsilon^2}(t/2), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Uma vez que por si só o processo de Wiener possui a mesma invariância de escala, e a aplicação  $w(\cdot) \mapsto \sqrt{2}w(\cdot/2)$  é contínua, é suficiente mostrar a convergência em distribuição do processo  $N_\varepsilon$  sob  $\mathcal{D}([0, 1/2])$ .

Sejam  $\underline{c}$  e  $\bar{c}_\varepsilon$  como no Lema 8. Para cada  $\varepsilon < 1/e^4$  no conjunto

$$\Omega_\varepsilon^0 := \{\log \underline{c} \geq -(\log \frac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{4}}\}$$

e para  $t \leq 1/2$ , temos

$$N_\varepsilon(t) \geq \frac{\log \mu_\varphi(C_{\underline{c}\varepsilon^t}(x, y)) - t\delta \log \varepsilon}{\sqrt{-\log \varepsilon}}$$

↑

pois  $C_{\underline{c}\varepsilon^t}(x, y) \subset B((x, y), \varepsilon^t)$ , Lema 8.

$$\geq \frac{\log \mu_\varphi(C_{\exp(-\log^{1/4} \frac{1}{\varepsilon})\varepsilon^t}(x, y)) - t\delta \log \varepsilon}{\sqrt{-\log \varepsilon}}$$

↑

pois  $\exp \underline{c} \geq \exp \log \underline{c} \geq \exp\left(-\log^{1/4} \frac{1}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^{\log^{-3/4} \frac{1}{\varepsilon}}$ .

$$\geq \frac{\log \mu_\varphi(C_{\varepsilon^{\log^{-3/4} \frac{1}{\varepsilon} t}}(x, y)) - t\delta \log \varepsilon}{\sqrt{-\log \varepsilon}} - \delta \log^{-1/4} \frac{1}{\varepsilon}$$

↑

$$\text{pois } \delta \log^{-1/4} \frac{1}{\varepsilon} > 0.$$

$$= N'_\varepsilon\left(t + \log^{-3/4} \frac{1}{\varepsilon}\right) - \delta \log^{-1/4} \frac{1}{\varepsilon} =: U_\varepsilon(t)$$

Por outro lado, no conjunto  $\Omega_\varepsilon^1 = \left\{ \log \bar{c}_\eta \leq \log^{1/8} \frac{1}{\varepsilon} \log^{1/4} \frac{1}{\eta}, \forall \eta \in (0, \frac{1}{2}) \right\}$ , e para  $t \in [\log^{-5/8} \frac{1}{\varepsilon}, 1/2]$  temos

$$N_\varepsilon(t) \leq \frac{\log \mu_\varphi(C_{\bar{c}_{\varepsilon^t} \varepsilon^t}(x, y)) - t\delta \log \varepsilon}{\sqrt{-\log \varepsilon}}$$

↑

pois  $B((x, y), \varepsilon^t) \subset C_{\bar{c}_{\varepsilon^t} \varepsilon^t}(x, y)$ , Lema 8.

$$\leq \frac{\log \mu_\varphi\left(C_{\varepsilon^{-\log^{-5/8} \frac{1}{\varepsilon} t}}(x, y)\right) - t\delta \log \varepsilon}{\sqrt{-\log \varepsilon}}$$

↑

$$\text{pois } \bar{c}_{\varepsilon^t} \leq \exp\left(\log^{1/8} \frac{1}{\varepsilon} \log^{1/4} \frac{1}{\varepsilon^t}\right) \leq \varepsilon^{-\log^{-5/8} \frac{1}{\varepsilon}}.$$

$$\leq N'_\varepsilon\left(t - \log^{-5/8} \frac{1}{\varepsilon}\right) + \delta \log^{-1/8} \frac{1}{\varepsilon}$$

↑

$$\text{pois } \log^{-1/8} \frac{1}{\varepsilon} > 0.$$

Note que para  $t \in [0, \log^{-5/8} \frac{1}{\varepsilon})$ , e uma vez que  $\mu$  é uma medida de probabilidade, o processo  $N_\varepsilon(t)$  é limitado por

$$N_\varepsilon(t) \leq \frac{0 - t\delta \log \varepsilon}{\sqrt{-\log \varepsilon}} \leq \delta \log^{-1/8} \frac{1}{\varepsilon}.$$

Defina

$$V_\varepsilon := \delta \log^{-1/8} \frac{1}{\varepsilon} + \begin{cases} N'_\varepsilon\left(t - \log^{-5/8} \frac{1}{\varepsilon}\right) & \text{se } t \geq \log^{-5/8} \frac{1}{\varepsilon}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para qualquer  $\varepsilon < 1/e^2$  em  $\Omega_\varepsilon^0 \cap \Omega_\varepsilon^1$ , temos a seguinte limitação sob  $[0, 1/2]$ :

$$U_\varepsilon \leq N_\varepsilon \leq V_\varepsilon.$$

A medida de  $\Omega_\varepsilon^0 \cap \Omega_\varepsilon^1$  vai para 1 (veja Observação 1), e ambos  $U_\varepsilon, V_\varepsilon$  convergem em distribuição para o mesmo processo. Podemos concluir a demonstração aplicando o Teorema do sanduíche para processos.

□

Graças a este lema, é suficiente mostrar a convergência em distribuição do processo  $(N'_\varepsilon(t))_{t \in [0,1]}$ .

O Lema chave abaixo relaciona a medida do cilindro hiperbólico multi-temporal com uma soma de Birkhoff não homogênea. Este é o momento onde usamos as propriedades da medida Gibbs e sua projeção.

**Lema 10.** *A seguinte aproximação acontece:*

$$\log \mu_\varphi(C_\varepsilon(x, y)) \approx S_{n_\varepsilon}(\varphi - \psi \circ \pi)(x, y) + S_{m_\varepsilon}(\psi \circ \pi)(x, y).$$

*Demonstração.* Lembre-se que  $C_\varepsilon := \mathcal{R}_{n_\varepsilon}(x, y) \cap \pi^{-1}(\mathcal{P}_{m_\varepsilon}(x))$ . Dado  $\varepsilon_0 > 0$ , seja

$$\Omega(\varepsilon_0) := \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 : \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0, m_\varepsilon(x) \geq n_\varepsilon(x, y)\}.$$

Pela definição 2.11.7, a medida  $\mu$  é conforme para  $e^{-\beta}$ , com  $\beta = S_{n_\varepsilon}\varphi$  e  $T^{n_\varepsilon}$  é injetora em  $C_\varepsilon$  pelo Lema 1 item (2), então

$$\mu_\varphi(T^{n_\varepsilon}C_\varepsilon) = \int_{C_\varepsilon} e^{-S_{n_\varepsilon}\varphi} d\mu_\varphi \iff \log \mu_\varphi(T^{n_\varepsilon}C_\varepsilon) = \log \left( \int_{C_\varepsilon} e^{-S_{n_\varepsilon}\varphi} d\mu_\varphi \right)$$

Uma vez que  $C_\varepsilon$  está contido no cilindro  $\mathcal{R}_{n_\varepsilon}$ , o lema de distorção nos dá

$$\log \mu_\varphi(T^{n_\varepsilon}C_\varepsilon) \approx \log \left( e^{-S_{n_\varepsilon}\varphi} \int_{C_\varepsilon} d\mu_\varphi \right)$$

$$\log \mu_\varphi(T^{n_\varepsilon}C_\varepsilon) \approx \log e^{-S_{n_\varepsilon}\varphi} + \log \int_{C_\varepsilon} d\mu_\varphi$$

$$\log \mu_\varphi(T^{n_\varepsilon}C_\varepsilon) \approx -S_{n_\varepsilon}\varphi + \log \mu_\varphi(C_\varepsilon)$$

$$\log \mu_\varphi(C_\varepsilon) \approx S_{n_\varepsilon}\varphi(x, y) + \log \mu_\varphi(T^{n_\varepsilon}C_\varepsilon)$$

em  $C_\varepsilon$ . Além disso, o Lema 6 implica  $T^{n_\varepsilon}C_\varepsilon = T^{n_\varepsilon}(\mathcal{R}_{n_\varepsilon} \cap \pi^{-1}(\mathcal{P}_{m_\varepsilon})) = \pi^{-1}(f^{n_\varepsilon}\mathcal{P}_{m_\varepsilon})$ , e pelo item (11) do Lema 1, obtemos  $f^{n_\varepsilon}\mathcal{P}_{m_\varepsilon}(x) = \mathcal{P}_{m_\varepsilon - n_\varepsilon}(f^{n_\varepsilon}(x))$ . Então

$$\log \mu_\varphi(T^{n_\varepsilon}C_\varepsilon) = \log \mu_\varphi \left( \pi^{-1}([\mathcal{P}_{m_\varepsilon - n_\varepsilon}(f^{n_\varepsilon}(x))]) \right).$$

Usando a propriedade que a medida projetada é Gibbs (Teorema 10)

$$\log \mu_\varphi(T^{n_\varepsilon}C_\varepsilon) = \log \nu_\varphi(\mathcal{P}_{m_\varepsilon - n_\varepsilon}(f^{n_\varepsilon}(x))) \approx S_{m_\varepsilon - n_\varepsilon}\psi \circ f^{n_\varepsilon}(x).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \log \mu_\varphi(C_\varepsilon) &\approx S_{n_\varepsilon} \varphi + S_{m_\varepsilon - n_\varepsilon} \psi \circ \pi \circ T^{n_\varepsilon} = S_{n_\varepsilon} \varphi + (S_{m_\varepsilon} \psi \circ \pi - S_{n_\varepsilon} \psi \circ \pi) \\ &= S_{n_\varepsilon} (\varphi - \psi \circ \pi) + S_{m_\varepsilon} (\psi \circ \pi) \end{aligned}$$

é verdade em  $\Omega(\varepsilon_0)$ . A conclusão segue de  $\mu_\varphi(\Omega(\varepsilon_0)) \rightarrow 1$  quando  $\varepsilon_0 \rightarrow 0$  pelo Lema 5. □

Denotaremos as entropias intermediárias por  $h^{uu} = h_{\mu_\varphi}(T) - h_{\nu_\varphi}(f)$  e  $h^u = h_{\nu_\varphi}(f)$ . Uma vez que a pressão de  $(T, \varphi)$  e  $(f, \psi)$  são zeros, obtemos (pela Observação 2)

$$h^u = - \int \psi \circ \pi d\mu_\varphi, \quad h^{uu} = - \int \varphi d\mu + \int \psi \circ \pi d\mu_\varphi = - \int (\varphi - \psi \circ \pi) d\mu_\varphi. \quad (3.5)$$

**Lema 11.** *Com a notação anterior, obtemos a seguinte fórmula para a dimensão pontual:*

$$\frac{h^{uu}}{\lambda^{uu}} + \frac{h^u}{\lambda^u} = \delta$$

*Demonstração.* Devido aos lemas 5, 8 e 10 tem-se para  $\mu_\varphi$ -q.t.p  $(x, y)$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu_\varphi(C_\varepsilon)}{\log \varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S_{n_\varepsilon} (\varphi - \psi \circ \pi) + S_{m_\varepsilon} (\psi \circ \pi)}{\log \varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{n_\varepsilon S_{n_\varepsilon} (\varphi - \psi \circ \pi)}{n_\varepsilon \log \varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m_\varepsilon S_{m_\varepsilon} (\psi \circ \pi)}{m_\varepsilon \log \varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{n_\varepsilon S_{n_\varepsilon} (\varphi - \psi \circ \pi)}{\log \varepsilon n_\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m_\varepsilon S_{m_\varepsilon} (\psi \circ \pi)}{\log \varepsilon m_\varepsilon} \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{n_\varepsilon S_{n_\varepsilon} (\varphi - \psi \circ \pi)}{n_\varepsilon (-\log \varepsilon)} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m_\varepsilon S_{m_\varepsilon} (\psi \circ \pi)}{m_\varepsilon (-\log \varepsilon)} \\ &= - \frac{1}{\lambda^{uu}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S_{n_\varepsilon} (\varphi - \psi \circ \pi)}{n_\varepsilon} - \frac{1}{\lambda^u} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S_{m_\varepsilon} (\psi \circ \pi)}{m_\varepsilon} \\ &= - \frac{1}{\lambda^{uu}} \int (\varphi - \psi \circ \pi) d\mu_\varphi - \frac{1}{\lambda^u} \int (\psi \circ \pi) d\mu_\varphi. \end{aligned}$$

Usando a equação (3.5) na última igualdade, obtemos o resultado, uma vez que é uma constante, e portanto necessariamente a dimensão de Hausdorff  $\delta$  da medida  $\mu_\varphi$ . Aqui, recuperamos que a dimensão pontual da medida  $\mu_\varphi$  existe para  $\mu_\varphi$ -q.t.p  $(x, y)$ , e é constante. □

Estabeleceremos  $\delta^{uu} = \frac{h^{uu}}{\lambda^{uu}}$ ,  $\delta^u = \frac{h^u}{\lambda^u}$  e defina as funções

$$\phi_1 = \varphi - \psi \circ \pi + \delta^{uu} \log \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \phi_2 = \psi \circ \pi + \delta^u \log f' \circ \pi.$$

Pela equação (3.5) e pelo Lema 2 temos

$$\begin{aligned}
 \int \phi_1 d\mu_\varphi &= \int (\varphi - \psi \circ \pi) d\mu_\varphi + \int \delta^{uu} \log \frac{\partial g}{\partial y} d\mu_\varphi = -h^{uu} + \delta^{uu} \int \log \frac{\partial g}{\partial y} d\mu_\varphi \\
 &= -h^{uu} + \frac{h^{uu}}{\lambda^{uu}} \lambda^{uu} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \int \phi_2 d\mu_\varphi &= \int (\psi \circ \pi) d\mu_\varphi + \int \delta^u \log(f' \circ \pi) d\mu_\varphi = -h^u + \delta^u \int \log(f'(x)) d\mu_\varphi \\
 &= -h^u + \frac{h^u}{\lambda^u} \lambda^u \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

**Proposicao 1.** *Se as funções  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são ambas coomologas a zero, então  $\varphi$  é coomologa a  $-\log |\det DT|$ , valendo também a volta.*

*Demonstração.* Suponha que  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são coomologo a zero, ou seja, coomologos ao potencial zero. Uma vez que  $\phi_2$  é T-coomologa a zero,  $\psi - \delta^u \log |f'|$  é f-coomologa a zero, logo  $\psi$  é f-coomologa a  $-\delta^u \log |f'|$ . Portanto a f-pressão de  $-\delta^u \log |f'|$  é zero. Uma vez que  $f$  é uniformemente expansora, isso implica que  $\delta^u = 1$ .

Temos que  $\phi_1$  é coomologa a  $-\log |f'| - \delta^{uu} \log \left| \frac{\partial g}{\partial f} \right|$ . Uma vez que  $\det DT = f' \circ \pi \frac{\partial g}{\partial y}$ , obtemos que  $\varphi$  é coomologa a  $-\log |\det DT| + (1 - \delta^{uu}) \log \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right|$ . Mas a convexidade da pressão nos dá

$$0 = P_T(\varphi) \geq P_T(-\log |\det DT|) + (1 - \delta^{uu}) \int \log \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| d\mu_\varphi = (1 - \delta^{uu}) \lambda^{uu}.$$

Logo  $\delta^{uu} \geq 1$ . Por outro lado,  $\delta^u + \delta^{uu} = \delta \leq 2$  implica que  $\delta^{uu} = 1$ , provando o resultado. A recíproca é imediata.  $\square$

Defina o processo

$$N_\varepsilon''(t) := \frac{S_{n_\varepsilon t} \phi_1 + S_{m_\varepsilon t} \phi_2}{\sqrt{-\log \varepsilon}}, \quad t \in [0, 1].$$

Agora estamos habilitados a relacionar a convergência dos dois processos.

**Lema 12.** *Existe uma constante finita  $C_0 < +\infty$  quase sempre tal que*

$$\sup_{t \in [0, 1]} |N_\varepsilon'(t) - N_\varepsilon''(t)| \leq \frac{C_0}{\sqrt{-\log \varepsilon}}$$

para qualquer  $\varepsilon > 0$ .

*Demonstração.* Pelo Lema 11 temos  $\delta = \delta^{uu} + \delta^u$ , então pelo Lema 4 temos

$$-\delta \log \varepsilon \approx \delta^u \log F_{m_\varepsilon} + \delta^{uu} \log G_{n_\varepsilon}.$$

Esta relação, junto com o fato de que  $\log F_{m_\varepsilon} = S_{m_\varepsilon} \log f' \circ \pi$  e  $\log G_{n_\varepsilon} = S_{n_\varepsilon} \log \frac{\partial g}{\partial y}$ , e o Lema 10 nos dá

$$\begin{aligned}
\log \mu_\varphi(C_\varepsilon(x, y)) - \delta \log \varepsilon &\approx \\
&\approx S_{n_\varepsilon}(\varphi - \psi \circ \pi)(x, y) + S_{m_\varepsilon}(\psi \circ \pi)(x, y) + \delta^u \log F_{m_\varepsilon} + \\
&\quad + \delta^{uu} \log G_{n_\varepsilon} \\
&\approx S_{n_\varepsilon}(\varphi - \psi \circ \pi)(x, y) + S_{m_\varepsilon}(\psi \circ \pi)(x, y) + \delta^u S_{m_\varepsilon} \log f' \circ \pi + \\
&\quad + \delta^{uu} S_{n_\varepsilon} \log \frac{\partial g}{\partial y} \\
&\approx S_{n_\varepsilon} \left( \varphi - \psi \circ \pi + \delta^{uu} \log \frac{\partial g}{\partial y} \right) + S_{m_\varepsilon} (\psi \circ \pi + \delta^u \log f' \circ \pi) \\
&= S_{n_\varepsilon} \phi_1 + S_{m_\varepsilon} \phi_2 .
\end{aligned}$$

Portanto, existe uma constante  $C_0$  finita em quase todo lugar sob  $\mathbb{T}^2$  tal que para qualquer  $\varepsilon$  e  $t \in [0, 1]$ , temos

$$|N'_\varepsilon(t) - N''_\varepsilon(t)| = \left| \frac{\log \mu_\varphi(C_{\varepsilon^t}(x, y)) - t\delta \log \varepsilon}{\sqrt{-\log \varepsilon}} - \frac{S_{n_{\varepsilon^t}} \phi_1 + S_{m_{\varepsilon^t}} \phi_2}{\sqrt{-\log \varepsilon}} \right| \leq \frac{C_0}{\sqrt{-\log \varepsilon}}.$$

□

Podemos então trocar  $N'_\varepsilon(t)$  por  $N''_\varepsilon(t)$ , para completar a demonstração do teorema principal, nos resta provar a convergência do processo  $N''_\varepsilon$  para um processo de Wiener (possivelmente degenerado). Uma vez que  $\phi_1$  e  $\phi_2$  tem boas regularidades e são centrados, é conhecido que suas somas de Birkhoff obedecem um teorema do limite central. Entretanto o problema surge agora. Os tempos  $n_\varepsilon$  e  $m_\varepsilon$  não são constantes, mas dependem do ponto.

### 3.3 Princípio de invariância, mudança do tempo aleatório

O princípio de invariância consiste em uma aproximação de toda trajetória do processo  $(S_n \phi_1)$  e  $(S_m \phi_2)$  por um movimento browniano, e isto é o que precisamos em um primeiro momento. Então, uma mudança de tempo aleatório no processo nos dará de volta  $N''_\varepsilon$ . Observe que é suficiente mostrar a convergência em distribuição ao longo da subsequência  $\varepsilon = e^{-k}$ , que é a convergência do processo  $\mathcal{X}_k = N''_{e^{-k}}$  na topologia de Skorohod.

#### 3.3.1 Princípio de invariância

Seja  $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ . A função  $\phi$  tem decaimento da variação  $var_n \phi$  na intensidade da função exponencial estendida. Logo, definindo  $S_n \phi = (S_n \phi_1, S_n \phi_2)$ ,

o teorema central do limite vale para  $S_n\phi$ . Denote por  $Q$  a matriz limite de covariância de  $\frac{1}{\sqrt{n}}S_n\phi$ . Defina o processo  $\mathcal{Y}_k$  por

$$\mathcal{Y}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{k}}(S_{[kt]}\phi + (kt - [kt])\phi \circ T^{[kt]}).$$

Denotamos por  $\mathcal{C}$  (respectivamente por  $\mathcal{C}_2$ ) o espaço  $C([0, 1], \mathbb{R})$  (respectivamente  $C([0, 1], \mathbb{R}^2)$ ) munido com a topologia da convergência uniforme.

O *princípio de invariância fraco para vetores* abaixo, ou Teorema do Limite Central funcional vetorial, é um teorema folclórico (um resultado que por muito tempo foi aceito sem ter sido provado). Este teorema é uma consequência imediata do *princípio de invariância quase certo para vetores* [36].

**Teorema 11.** *O processo  $\mathcal{Y}_k$  converge em distribuição no espaço  $\mathcal{C}_2$ , para um movimento browniano de duas dimensões  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_t)_{t \in [0,1]}$  com matriz de covariância  $Q$ .*

*Demonstração.* Note que  $\mathcal{B}$  (e também  $\mathcal{Y}_k$ ) é contínua, logo a topologia de Skorohod coincide com a topologia da convergência uniforme.

Escrevendo  $Q = U\mathcal{A}U^*$  para alguma matrix ortogonal  $U$  e  $\mathcal{A} = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2)$ , temos que  $\mathcal{W} := U^*\mathcal{B} = (\sigma_1\mathcal{W}_1, \sigma_2\mathcal{W}_2)$ , onde  $\mathcal{W}_1$  e  $\mathcal{W}_2$  são dois processos independentes de Wiener padrão.  $\square$

### 3.3.2 Mudança do tempo aleatório e conclusões

Se  $n_\varepsilon$  e  $m_\varepsilon$  não dependem do ponto, e independentes do processo  $(\mathcal{Y}_k)$ , então a conclusão vem como consequência do teorema anterior, mas essas independências são geralmente falsas. Uma boa estratégia é fazer uma mudança de tempo aleatório neste processo. Seguimos a linha do autor Billingsley ([32], Teorema 14.4). Aqui faremos um pouco diferente: estaremos no caso em duas dimensões, e sem a necessidade da topologia de Skorohod.

#### 3.3.2.1 Existência do limite de distribuição

Lembre-se que  $\lambda^{uu}$  e  $\lambda^u$  são os dois expoentes de Lyapunov de  $T$ . Fixe  $a > 1/\lambda^u$ . Seja  $\mathcal{Y}_{k,i}$ ,  $i = 1, 2$ , as coordenadas do processo  $\mathcal{Y}_k$ . Seja  $\mathcal{Z}_k$  o processo em  $C([0, a]^2, \mathbb{R}^2)$  definido por

$$\mathcal{Z}_k(t_1, t_2) = (\mathcal{Y}_{k,1}(t_1), \mathcal{Y}_{k,2}(t_2))$$

para qualquer  $(t_1, t_2) \in [0, a]^2$ . Seja  $\tilde{\nu}_k(t) = (n_{\varepsilon^{-kt}}, m_{\varepsilon^{-kt}})$ . As funções reais  $\tilde{\nu}_{k,i}(t)$ ,  $i = 1, 2$ , não são contínuas em  $t$ . Definimos  $\nu_{k,i}(t)$  como a função contínua obtida de  $\tilde{\nu}_{k,i}(t)$  por uma interpolação linear nos pontos de descontinuidade do tipo salto. Então  $\nu_{k,i}$  é contínua em partes, e coincide com  $\tilde{\nu}_{k,i}$  nos pontos de salto.

Seja  $\theta_1 = 1/\lambda^{uu}$ ,  $\theta_2 = 1/\lambda^u$  e defina a variável aleatória  $\Phi_k$  (que será a mundaça aleatório do tempo) tomando valores em  $C([0, 1], [0, a]^2)$  por

$$\Phi_k(t) = \begin{cases} (n_{\varepsilon^{-kt}}/k, m_{\varepsilon^{-kt}}/k) & \text{se } \nu_{k,1}(1)/k \leq a \text{ e } \nu_{k,2}(1)/k \leq a, \\ (t/\lambda^{uu}, t/\lambda^u) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja  $\gamma : C([0, 1], \mathbb{R}^2) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$  definida por  $\gamma(u)(t) = u_1(t) + u_2(t)$ . Note que

$$\mathcal{X}_k = \gamma(\mathcal{Z}_k \circ \Phi_k) + O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right),$$

sempre que a condição na definição de  $\Phi_k$  vale (ambos os tempos são menores do que  $a$ ), o que acontece eventualmente quase sempre.

**Lema 13.** *Os processos  $(\frac{n_{\varepsilon t_1}}{-\log \varepsilon})_{t_1 \in [0,1]}$  e  $(\frac{m_{\varepsilon t_2}}{-\log \varepsilon})_{t_2 \in [0,1]}$  convergem em probabilidade sob a lei de  $\mu_\varphi$  em  $\mathcal{C}$ , respectivamente, para  $(\frac{t_1}{\lambda^{uu}})$  e  $(\frac{t_2}{\lambda^u})$ .*

*Demonstração.* Pelo Lema 5, para quase todo ponto tem-se  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{n_{\varepsilon}}{-\log \varepsilon} = \frac{1}{\lambda^{uu}}$ , então  $\frac{n_{\varepsilon t_1}}{-\log \varepsilon}$  converge para  $(\frac{t_1}{\lambda^{uu}})$ . Uma vez que este processo é positivo e não decrescente para  $t_1$ , segue-se pelo teorema de Dini que a convergência é uniforme. Logo o processo converge quase sempre em  $\mathcal{C}$ , portanto em probabilidade. O mesmo acontece para  $m_{\varepsilon}$ .  $\square$

Pelo Lema 13, a aplicação  $\Phi_k$  converge quase sempre em norma uniforme para uma aplicação determinística  $\Phi$ , definida por  $\Phi(t) = (\theta_1 t, \theta_2 t)$  para qualquer  $t \in [0, 1]$ . Defina a aplicação contínua  $h$  de  $C([0, 1], \mathbb{R}^2)$  em  $C([0, 1]^2, \mathbb{R}^2)$  por

$$h(y)(t_1, t_2) = (y_1(t_1), y_2(t_2)), \quad y \in C([0, a], \mathbb{R}^2).$$

**Lema 14.** *O processo  $(\mathcal{Z}_k)$  converge em distribuição sob a lei de  $\mu_\varphi$  para  $\mathcal{Z} = h(\mathcal{B})$ .*

*Demonstração.* Lembrando que  $\mathcal{Y}(t) = \frac{1}{\sqrt{k}}(S_{\lfloor kt \rfloor} \phi + (kt - \lfloor kt \rfloor) \phi \circ T^{\lfloor kt \rfloor})$  e  $\mathcal{Z}_k(t_1, t_2) = (\mathcal{Y}_{k,1}(t_1), \mathcal{Y}_{k,2}(t_2))$ , temos  $h(\mathcal{Y}_k)(t_1, t_2) = (\mathcal{Y}_{k,1}(t_1), \mathcal{Y}_{k,2}(t_2))$ . Pela continuidade de  $h$  junto com o Teorema 11, concluímos que  $\mathcal{Z}_k$  converge em distribuição para  $h(\mathcal{B})$ .  $\square$

Uma vez que  $\mathcal{Z}_k$  converge em distribuição para  $\mathcal{Z}$ , e  $\Phi_k$  converge em probabilidade para (um determinístico)  $\Phi$ , a dupla  $(\mathcal{Z}_k, \Phi_k)$  converge para  $(\mathcal{Z}, \Phi)$  ([32], Teorema 3.9). Pela continuidade da composição, concluímos que  $\mathcal{Z}_k \circ \Phi_k$  converge em distribuição para  $\mathcal{Z} \circ \Phi$ . Novamente pela continuidade e pelo Lema 14 obtemos

$$\mathcal{X}_k = \gamma(\mathcal{Z}_k \circ \Phi_k) + O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \implies N''_{e^{-k}} \approx \gamma(h(\mathcal{B}) \circ \Phi).$$

## 3.3.2.2 O limite é um processo de Wiener

Para completar a demonstração nos resta caracterizar o processo limite  $\mathcal{X}$ . Denote a matriz de transferência por  $U = (u_{ij})$ . Note que  $\theta_1 < \theta_2$ . Para qualquer  $t \in [0, 1]$  temos

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(t) &= \gamma(h(\mathcal{B}) \circ \Phi)(t) \\ &= h_1(U\mathcal{W})(\theta_1 t, \theta_2 t) + h_2(U\mathcal{W})(\theta_1 t, \theta_2 t) \\ &= u_{11}\sigma_1 W_1(\theta_1 t) + u_{12}\sigma_2 W_2(\theta_1 t) + u_{21}\sigma_1 W_1(\theta_2 t) + u_{22}\sigma_2 W_2(\theta_2 t) \\ &= (u_{11} + u_{21})\sigma_1 W_1(\theta_1 t) + (u_{12} + u_{22})\sigma_2 W_2(\theta_1 t) \\ &\quad + u_{21}\sigma_1 (W_1(\theta_2 t) - W_1(\theta_1 t)) + u_{22}\sigma_2 (W_2(\theta_2 t) - W_2(\theta_1 t)).\end{aligned}$$

Pela independência do processo  $W_i$  e pela independência dos seus incrementos, obtemos que  $\mathcal{X}(t)$  é novamente um processo de Wiener, e sua variância é

$$\begin{aligned}\sigma^2 &:= \text{var}\mathcal{X}(1) \\ &= ((u_{11} + u_{21})\sigma_1)^2 \theta_1 + ((u_{12} + u_{22})\sigma_2)^2 \theta_1 + (u_{21}\sigma_1)^2 (\theta_2 - \theta_1) \\ &\quad + (u_{22}\sigma_2)^2 (\theta_2 - \theta_1).\end{aligned}$$

**Observação 3.** A variância é nula se e somente se

$$\begin{cases} u_{11}\sigma_1 + u_{21}\sigma_1 = 0 \\ u_{12}\sigma_2 + u_{22}\sigma_2 = 0 \\ u_{21}\sigma_1 = 0 \\ u_{22}\sigma_2 = 0 \end{cases} \iff U \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = 0,$$

no qual é equivalente a  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  uma vez que a matriz  $U$  é invertível. Isto é equivalente ao fato da matriz de covariância  $Q$  ser igual a zero, o que acontece se, e somente se, ambos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  forem coomologos a zero. Então, usamos a proposição 1.

Finalmente temos a conclusão: o processo  $N_\varepsilon$  converge na topologia de Skorohod para um processo de Wiener  $N$  com variância  $\sigma^2$ .

# Referências

- [1] BARREIRA, L. *Dimension and recurrence in hyperbolic dynamics*. 1. ed. Basel: Birkhäuser, 2008. v. 272.
- [2] DEVANEY, R. L. *An introduction to chaotic dynamical systems*. 3. ed. Boca Raton: CRC press, 2021.
- [3] LEPLAIDEUR, R.; SAUSSOL, B. Central limit theorem for dimension of gibbs measures in hyperbolic dynamics. *Stochastics and Dynamics*, v. 12, 2012. ISSN 02194937.
- [4] BARREIRA, L.; PESIN, Y.; SCHMELING, J. Dimension and product structure of hyperbolic measures. *Annals of Mathematics*, JSTOR, v. 139, n. 3, p. 755–783, 1999.
- [5] FISCHER, H. *A history of the central limit theorem: from classical to modern probability theory*. 1. ed. New York: Springer, 2011.
- [6] AXLER, S. *Measure, Integration and Real Analysis*. 1. ed. Gewerbestrasse: Springer Nature, 2020.
- [7] MEESTER, R. *A natural introduction to probability theory*. 2. ed. Basel: Birkhäuser, 2008.
- [8] BERTSEKAS, D.; TSITSIKLIS, J. N. *Introduction to probability*. 2. ed. Nashua NH: Athena Scientific, 2008. v. 1.
- [9] GRIMMETT, G.; STIRZAKER, D. *Probability and random processes*. 4. ed. Oxford: Oxford university press, 2020.
- [10] BRÉMAUD, P. *Probability theory and stochastic processes*. 1. ed. Gewerbestrasse: Springer, 2020.
- [11] DOBROW, R. P. *Introduction to stochastic processes with R*. 1. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2016.
- [12] KARLIN, S. *A first course in stochastic processes*. 2. ed. New York: Academic press, 2014.
- [13] CAPASSO, V.; BAKSTEIN, D. *Introduction to Continuous-Time Stochastic Processes*. 4. ed. Gewerbestrasse: Springer, 2021.
- [14] COUDÈNE, Y. *Ergodic theory and dynamical systems*. 1. ed. London: Springer, 2016.
- [15] COLLET, P.; ECKMANN, J.-P. *Concepts and results in chaotic dynamics: a short course*. 1. ed. Berlin: Springer, 2006.

- [16] OLIVEIRA, K.; VIANA, M. *Fundamentos da teoria ergódica*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- [17] KIRILLOV, A. A. *A tale of two fractals*. 1. ed. New York: Birkhäuser, 2013.
- [18] STELAND, A.; RAFAJŁOWICZ, E.; SZAJOWSKI, K. (Ed.). *Stochastic Models, Statistics and Their Applications*. Springer International Publishing, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007%2F978-3-319-13881-7>>.
- [19] KATOK, A.; HASSELBLATT, B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. 1. ed. Now York: Cambridge university press, 1997.
- [20] FIELD, M.; FIELD, M.; NICOL, M. *Ergodic Theory of Equivariant Diffeomorphisms: Markov Partitions and Stable Ergodicity: Markov Partitions and Stable Ergodicity*. 1. ed. Providence: American Mathematical Soc., 2004. v. 803.
- [21] CHOE, G. H. *Computational ergodic theory*. 1. ed. Berlin: Springer, 2005.
- [22] GREVEN, A.; KELLER, G.; WARNECKE, G. *Entropy*. 1. ed. Princeton: Princeton University Press, 2003.
- [23] KERR, D.; LI, H. *Ergodic theory*. 1. ed. Gewerbestrasse: Springer, 2016.
- [24] BARREIRA, L. *Thermodynamic formalism and applications to dimension theory*. 1. ed. Basel: Springer, 2011.
- [25] BARREIRA, L. *Ergodic theory, hyperbolic dynamics and dimension theory*. 1. ed. Berlin: Springer, 2012.
- [26] LIND, D.; MARCUS, B. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. 2. ed. Cambridge: Cambridge university press, 2021.
- [27] CLIMENHAGA, V. Bowen's equation in the non-uniform setting. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Cambridge University Press, v. 31, n. 4, p. 1163–1182, 2011.
- [28] NELSON, D. K. *Dimension theory and multifractal analysis via thermodynamic formalism*. Tese (Doutorado) — University of Warwick, Coventry, UK, jun. 2015.
- [29] NANDAKUMARAN, A.; DATTI, P. *Partial Differential Equations: Classical Theory with a Modern Touch*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2020.
- [30] HASSELBLATT, B.; KATOK, A. *Handbook of dynamical systems*. 1. ed. Amsterdam: Elsevier, 2002.
- [31] MEYERS, R. A. *Mathematics of complexity and dynamical systems*. 1. ed. New York: Springer, 2011.

- 
- [32] BILLINGSLEY, P. *Convergence of Probability Measures*. 2. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 1999.
- [33] SAUSSOL, B. Recurrence rate in rapidly mixing dynamical systems. *arXiv preprint math/0412211*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, v. 15, n. 1, p. 259–267, 2004.
- [34] CHAZOTTES, J.-R.; UGALDE, E. On the preservation of gibbsianness under symbol amalgamation. *arXiv preprint arXiv:0907.0528*, 2009.
- [35] POLLICOTT, M.; KEMPTON, T. Factors of gibbs measures for full shifts. *Entropy of hidden Markov processes and connections to dynamical systems*, v. 385, p. 246–257, 2011.
- [36] MELBOURNE, I.; NICOL, M. A vector-valued almost sure invariance principle for hyperbolic dynamical systems. *The Annals of Probability*, Institute of Mathematical Statistics, v. 37, n. 2, p. 478–505, 2009.