PPGMAT - UFMA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Programa de Pós-Graduação em Matemática

MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

Walterlino Santos Alves

Existência, unicidade e comportamento assintótico da solução de uma equação hiperbólica abstrata não linear com termo de amortecimento forte

São Luís - MA

2022

Walterlino Santos Alves

Existência, unicidade e comportamento assintótico da solução de uma equação hiperbólica abstrata não linear com termo de amortecimento forte

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo.**

São Luís - MA

2022

Walterlino Santos Alves

Existência, unicidade e comportamento assintótico da solução de uma equação hiperbólica abstrata não linear com termo de amortecimento forte

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo.**

BANCA EXAMINADORA

(ORIENTADOR) Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo (UFMA)

Dra. Renata de Farias Limeira Carvalho (UFMA)

Dr. Flank David Morais Bezerra (UFPB)

Dedico esta dissertação a Deus, à família e aos amigos.

FICHA CATALOGRÁFICA

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Alves, Walterlino Santos.
Existência, unicidade e comportamento assintótico da solução de uma equação hiperbólica abstrata não linear com termo de amortecimento forte / Walterlino Santos Alves. - 2022.
70 f.

Orientador(a): Marcos Antonio Ferreira de Araújo.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2022.

1. Comportamento Assintótico. 2. Equação de Kirchhoff. 3. Equação Hiperbólica Não Linear. 4. Espaços de Hilbert. 5. Teoria Espectral. I. Araújo, Marcos Antonio Ferreira de. II. Título.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus pela vida e por conceder-me força e coragem.

Agradeço à minha família pela forma surpreendente com que sempre acreditaram em mim.

Agradeço ao Professor *Marcos Antonio Ferreira de Araújo*, que foi mais que um orientador, foi um verdadeiro amigo. A ele devo também a sugestão do tema desta dissertação e toda a ajuda na execução da mesma. Sou grato por sua paciência e por sempre mostrar-se disposto a ajudar-me em todos os seguimentos deste trabalho.

Agradeço aos Professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática PPGMAT-UFMA, especialmente, aos professores *Ivaldo Paz Nunes, Vanessa Ribeiro Ramos, Pedro Henrique Apoliano* e *Renata de Farias Limeira Carvalho*, responsáveis pela ajuda e incentivo, por contribuir na minha formação acadêmica.

Agradeço aos colegas do curso pela parceria e incentivo, em especial ao meu amigo *Osvaldo Mesquita*.

Agraceço a todos que, mesmo de longe, torceram pelo meu sucesso.

RESUMO

O trabalho aqui apresentado, tem por objetivo, provar a existência e unicidade da solução e investigar o comportamento assintótico para um modelo abstrato de uma equação diferencial hiperbólica do tipo Kirchhoff, que descreve as vibrações não lineares de uma corda elástica com amortecimento forte. Isto é,

$$\begin{cases} u''(t) + M\left(|A^{1/2}u(t)|^2\right)Au(t) + Au'(t) = 0 \\ u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1 \end{cases}$$

onde $M \in C^1[0,\infty)$, com $M(\lambda) \geq 0$, $\forall \lambda \geq 0$ e A é um operador autoadjunto com espectro discreto, definido positivamente em um espaço Hilbert H e $D(A^{1/2}) = V$ compactamente imerso e denso em H.

Palavras-chaves: Espaços de Hilbert. Equação Hiperbólica Não Linear. Equação de Kirchhoff. Teoria Espectral. Comportamento Assintótico.

ABSTRACT

The work presented here aims to prove the existence and uniqueness of the solution and investigate the asymptotic behavior for an abstract model of a hyperbolic differential equation of the Kirchhoff type, which describes the nonlinear vibrations of an elastic string with strong damping. This is,

$$\begin{cases} u''(t) + M\left(|A^{1/2}u(t)|^2\right) Au(t) + Au'(t) = 0 \\ u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1 \end{cases}$$

where $M \in C^1[0,\infty)$, with $M(\lambda) \geq 0$, $\forall\lambda \geq 0$ and A is a self-adjoint operator with discrete spectrum, positively defined on a Hilbert space H and $D(A^{1/2}) = V$ compactly immersed and dense in H.

Keywords: Hilbert Spaces. Nonlinear Hyperbolic Equation. Kirchhoff Equation. Spectral Theory. Asymptotic Behavior.

Sumário

Introdução

Esta dissertação tem como motivação o artigo do Luis Adaldo Medeiros e Manuel Milla Miranda [1], intitulado *On a nonlinear wave equation with damping*, que concentram-se em provar a existência global e o decaimento exponencial da energia para as soluções do problema misto:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M\left(\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx\right)\Delta u(x,t) + (-\Delta)^\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = f \quad \text{em } Q, \quad \text{com} \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ &u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad (x,t) \in \Sigma \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{aligned} \tag{0.0.1}$$

onde $M(s)$ é uma função contínua positiva em $[0,\infty[$; Ω é um conjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, com bordo suave Γ; Q é o cilindro $\Omega\times]0,\infty[$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, com contorno lateral $\Sigma = \Gamma \times [0,\infty[$; $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ é o operador de Laplace e $|\nabla u(x,t)|^2 = \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2$.

Para resolver o problema (0.0.1), os autores consideraram uma equação abstrata para (0.0.1) e encontraram soluções globais para esta equação não linear com amortecimento dado por:

$$u''(t) + M\left(|A^{1/2}u(t)|^2\right) Au(t) + A^\alpha u'(t) = f \quad \text{em }]0,T] \quad 0 < \alpha \leq 1 \tag{0.0.2}$$

$$u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1,$$

onde $M \in C^1[0,\infty)$, com $M(\lambda) \geq 0$, $\forall \lambda \geq 0$ e $0 < \alpha \leq 1$.

A unicidade da solução de (0.0.2) é obtida para $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$. Eles também provam que o decaimento da energia é exponencial para $0 < \alpha \leq 1$.

A equação (0.0.1), sem o amortecimento $(-\Delta)^\alpha \frac{\partial u}{\partial t}$, tem sua origem no estudo das vibrações de uma corda elástica (veja Carrier [2]).

Alguns casos particulades de (0.0.1), das vibrações não lineares de uma corda elástica, foram estudados em conjunto com por muitos autores. Por exemplo;

$$u_{tt} - M\left(\int_\Omega |\nabla u(y,t)|^2 dy\right) \Delta u = 0, \tag{0.0.3}$$

por Dickey [3], Nishida [4], Menzala [5], Rodriguez [6], Greenberg e Hu [7], Pohozaev [8], Nishihara [9].

$$u_{tt} - M\left(\int_\Omega |\nabla u(y,t)|^2 dy\right) \Delta u + \Delta u_t = 0, \tag{0.0.4}$$

por Dickey [10], Brito [11], Yamada [12], Nishihara [13].

$$u_{tt} - M\left(\int_\Omega |\nabla u(y,t)|^2 dy\right) \Delta u + \Delta^2 u = 0, \tag{0.0.5}$$

por Ball [14], Dickey [15], Medeiros [16], Menzala [5] e outros.

O principal texto usado no desenvolvimento deste trabalho, foi o artigo de Marivaldo Matos e Ducival Pereira [17], intitulado *On a Hyperbolic Equation with Strong Damping*, que é um caso particular do problema (0.0.1), descrito da seguinte maneira:

Sejam V e H espaços de Hilbert com produto interno e norma representados, respectivamente, por $((,))$, $\|.\|$ e $(,)$, $|.|$, com V compactamente imerso e denso em H. Representamos por A o operador definido pela terna $\{V, H; ((,))\}$. Assim, A é um operador autoadjunto definido positivamente em H com espectro discreto e $D(A^{1/2}) = V \quad (D(X)$ representa o domínio de $X)$.

Em H consideramos o seguinte problema:

$$u''(t) + M\left(|A^{1/2}u(t)|^2\right)Au(t) + Au'(t) = 0 \tag{0.0.6}$$

$$u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1,$$

onde $M \in C^1[0, \infty), \quad \text{com} \quad M(\lambda) \geq 0 \ , \forall \lambda \geq 0.$

A equação (0.0.6) é um modelo abstrato para uma equação que descreve o movimento de uma corda elástica com amortecimento forte, ou seja,

$$u_{tt}(x,t) + M\left(\int_\Omega |\nabla u(y,t)|^2 dy\right)(-\Delta u(x,t)) - \Delta u_t(x,t) = 0 \tag{0.0.7}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$.

Usaremos o artigo de Marivaldo e Ducival, conforme [17] na prova da existência e Nishihara, conforme [18], na prova da unicidade da solução do problema (0.0.6) quando $u_0 \in D(A)$ e $u_1 \in D(A^{1/2})$. Na prova da existência, aproximamos os dados iniciais $u_0 \in V$ e $u_1 \in H$ por $u_{0k} \in D(A)$ e $u_{1k} \in D(A^{1/2})$, respectivamente, com $u_{0k} \to u_0$ fortemente em V e $u_{1k} \to u_1$ fortemente em H. Consideramos u_k a solução do problema (0.0.6) com os dados iniciais u_{0k} e u_{1k}. Usando o teorema de Arzelá-Ascoli com algumas técnicas adicionais, provamos que $u_k \to u$ e u é uma solução de (0.0.6) com dados iniciais $u_0 \in V$ e

$u_1 \in H$. A unicidade é obtida de maneira clássica. O comportamento assintótico conforme t se aproxima do infinito é obtido usando um Lema devido a Nakao (ver [19]).

Este trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro, com a finalidade de tornar o trabalho um pouco mais auto-suficiente, apresentamos as idéias básicas sobre os espaços funcionais envolvidos, os principais teoremas utilizados no decorrer do trabalho. No segundo capítulo, fazemos uma análise matemática do modelo físico. No terceiro capítulo, provamos a existência e unicidade da solução da equação abstrata e abordamos uma análise do comportamento assintótico da sua solução.

Capítulo 1

Fundamentos de Espaços Funcionais

Com a finalidade de tornar a exposição mais autossuficiente, pontuamos a seguir conceitos utilizados no decorrer do trabalho. Apresentaremos aqui alguns resultados já conhecidos de espaços de Hilbert, espaços L^p , teoria das distribuições e um pouco da teoria espectral, os quais serão fundamentais para as demonstrações dos nossos resultados. Provaremos alguns destes resultados e apenas indicaremos onde se encontra a demonstração dos demais.

1.1 Espaços de Hilbert

Definição 1.1.1 (Espaços de Hilbert) *Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial H dotado de um produto escalar (u, v) e que é completo para a norma $\|u\|_H := (u, v)^{\frac{1}{2}}$.*

Um exemplo fundamental de espaços de Hilbert é o espaço L^2 que definiremos posteriormente com o produto escalar dado por:

$$(u,v) := \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Como podemos ver em [20], todo espaço de Hilbert separável admite uma base hilbertiana, ou seja, se H é um espaço de Hilbert separável, então existe uma sequência (e_n) de elementos de H, tais que: $\|e_n\|_H = 1$ para todo n, $(e_n, e_m) = 0$ para todo m, com $m \neq n$, sendo que o espaço vetorial gerado por (e_n) é denso em H.

1.2 Espaços $L^p(\Omega)$

Nesta seção, Ω denota um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ dotado da medida de Lebesgue. Usaremos termos da teoria da medida, como função integrável, função mensurável, igualdade e desigualdade em quase todo ponto e conjuntos de medida nula.

Definição 1.2.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado munido da medida de Lebesgue dx. Por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, definimos o espaço vetorial*

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \ \textit{mensurável}\,; \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\},$$

com norma dada por

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

No caso particular quando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert munido do produto escalar

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

e norma induzida

$$|u|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

No caso $p = \infty$, definimos

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável }; \ |f(x)| \leq C \ \ q.s \text{ em } \Omega\}.$$

Munido da norma

$$|u|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess} \sup_{x\in\Omega} \ |u(x)|,$$

onde ess $\sup\limits_{x\in\Omega}$ indica o *supremo quase sempre em* Ω.

1.3 Os espaços $L^p(0, T; X)$

Definição 1.3.1 *Seja X um espaço de Banach e X' seu dual topológico.*

Diz-se que uma função vetorial $u : (0, T) \to X$ é mensurável se a função numérica $t \mapsto \langle u(t), w\rangle_{X,X'}$ for Lebesgue mensurável em $(0, T)$, $\ T > 0$.

Diz-se que $u : (0, T) \to X$ é Bochner integrável em $(0, T)$ se u for mensurável e a função $t \mapsto ||u(t)||_X$ for Lebesgue integrável em $(0, T)$. Neste caso, a integral de Bochner de u é um vetor de X denotado por $\int_0^T u(t)dt$, caracterizado por

$$\langle f, \int_0^T u(t)dt\rangle_{X',X} = \int_0^T \langle f, u(t)\rangle_{X',X} dt,$$

$\forall f \in X'$.

Se $1 \leq p < \infty$, denotamos $L^p(0, T; X)$ o espaço das (classes) funções $u : (0, T) \to X$ mensuráveis tais que a função $t \mapsto ||u(t)||_X^p$ seja Lebesgue integrável em (0,T). Com norma dada por

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \infty.$$

No caso $p = 2$ e H espaço de Hilbert, $L^2(0,T;H)$ é um espaço de Hilbert munido do produto escalar

$$(u,v)_{L^2(0,T;H)} = \int_0^T (u(t), v(t))_H dt.$$

Denota-se por $L^\infty(0,T;X)$ o espaço das (classes) funções mensuráveis $u : (0,T) \to X$ tais que

$$\operatorname*{ess\ sup}_{t\in(0,T)} ||u(t)||_X < \infty.$$

Se $1 \leq p < \infty$, então o dual topológico de $L^p(0,T;X)$ é identificado com o espaço $L^{p'}(0,T;X')$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Com esta identificação, temos

$$\langle f, u \rangle_{L^{p'}(0,T;X'),L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle f(t), u(t) \rangle_{X',X} dt.$$

Maiores detalhes sobre esses espaços são encontrados em [21].

Definição 1.3.2 *Denotamos por $C([0,T];X)$ o espaço das funções contínuas $u : [0,T] \longrightarrow X$ com a norma:*

$$\|u\|_{C([0,T];X)} := \max_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_X < \infty$$

1.4 Algumas desigualdades

A seguir, veremos algumas das desigualdades que serão usadas durante o trabalho.

1.4.1 Desigualdade de Cauchy-Schwartz

Proposição 1.4.1 *(Desigualdade de Cauchy-Schwartz) Seja V um espaço com produto interno e sejam $x, u \in V$. Então,*

$$|(x, y)| \leq \|x\|.\|y\|$$

Demonstração: Ver [22], página 137.

1.4.2 Desigualdade de Young

Proposição 1.4.2 (Desigualdade de Young) *Sejam $p, q \leq 1$ expoentes conjugados, ou seja, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então para quaisquer números reais positivos a e b, temos que*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Demonstração: Ver [23], página 85.

1.4.3 Desigualdade de Hölder

Teorema 1.4.1 *(Desigualdade de Hölder): Seja $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |uv|dx \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}.$$

Demonstração: Ver [21], página 92.

1.4.4 Desigualdade de Minkowski

Teorema 1.4.2 *(Desigualdade de Minkowski) Sejam $u, v \in L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

Demonstração: Veja [24], página 179.

Teorema 1.4.3 *Os espaços $L^P(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$ são espaços de Banach.*

Demonstração: Veja [21], página 93.

Observação 1.4.1 *Dizemos que duas funções em $L^1(\Omega)$ são idênticas, se elas são iguais em quase todo ponto.*

1.5 Distribuições

1.5.1 Imersão

Sejam V e H espaços de Hilbert com normas $\|.\|_V$ e $\|.\|_H$ respectivamente. Suponha que $V \subset H$. Seja ainda, $\tau : V \longrightarrow H$ a injeção canônica de V em H, que a cada vetor $v \in V$ faz corresponder τv como um elemento de H. Diz-se que o operador linear τ é o operador de imersão τ de V em H.

Diz-se que a imersão $\tau : V \longrightarrow H$ é contínua, quando existe um $K > 0$ tal que:

$$\|v\|_H \leqq K\|v\|_V$$

Diz-se que a imersão $\tau : V \longrightarrow H$ é compacta, quando a imagem dos conjuntos limitados de V, por τ , são conjuntos relativamente compactos de H, isto é, conjuntos cujo o fecho é compacto em H.

Espaço de funções teste

Sejam $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ e por D^α representamos o operador derivação de ordem $|\alpha|$, definido por

$$D^\alpha = \frac{D^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Se u é uma função mensurável sobre Ω e $(\omega_i)_{i\in I}$ é a família de todos subconjuntos abertos de Ω, tal que $u = 0$ q.t.p em cada ω_i, temos que $u = 0$ q.t.p. em $\omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i$, e o suporte de u (supp u) é definido como o subconjunto fechado

$$supp\ u = \Omega \backslash \omega.$$

Se u for uma função contínua, então:

$$supp\ u = \overline{\{x \in \Omega\ ;\ u(x) \neq 0\}}$$

Dizemos que uma função u tem suporte compacto em Ω, se existir $K \subset \Omega$ compacto tal que

$$supp\ u \subset K$$

Representa-se por $\mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções reais definidadas em Ω, com suporte compacto e derivadas parciais de todas as ordens. Em $\mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ considera-se a seguinte noção de convergência:

Uma sequência de funções $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ quando:

(i) Todas as ϕ_n possuem suportes contidos em um compacto fixo K de Ω;

(ii) A sequência $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero uniformemente em K, juntamente com suas derivadas de todas as ordens.

Seja $\phi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para ϕ em $\mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ se $(\phi_n - \phi)_{n\in\mathbb{N}}$ convege para zero como definido acima. Denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço $\mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$, munido desta notação de convergência. Chamamos $\mathcal{D}(\Omega)$ de espaço das funções testes.

1.5.2 Distribuição

Definição 1.5.1 *(Distribuição) Uma distribuição sobre Ω, é uma forma linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, uma função*

$$T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$;

(ii) Se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$ então $(T(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$.

Representamos por $\langle T, \varphi \rangle$ a distribuição T em φ, e por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço vetorial das distribuições sobre Ω. Dizemos que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando a sequência $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

A notação $L^p_{loc}(\Omega)$ será usada para designar o espaço vetorial

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \longleftrightarrow \mathbb{R};\ f \in L^p(K)\ \ \forall K\ \ compacto\ \ K \subset \Omega\}.$$

Pode-se provar sem dificuldades que $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$, para todo $p \geq 1$.

Exemplo 1.2 Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então a forma linear T_u definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

é uma distribuição.

Prova: Como cada φ possui suporte compacto em Ω, esta integral existe, logo T_u está bem definida. Aém disso, T_u é univocamente determinada por u. Como T é dada por uma integral, é linear, logo para provar que é uma distribuição, basta demostrar que é contínua.

$$|\langle T_u, \varphi \rangle| \leq \int_\Omega |u(x)||\varphi(x)|dx \leq (max_{x\in K}|\varphi(x)|)\int_K |u(x)|dx,$$

isto é,

$$|\langle T_u, \varphi \rangle| \leq C(max_{x\in K}|\varphi(x)|).$$

Logo se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, para todo $\delta > 0$ existe um compacto fixo $K \subset \Omega$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$se \quad n > n_0 \Longrightarrow max_{x\in K}|\varphi(x) - \varphi_n(x)| < \delta.$$

Tomando $\delta = \frac{\epsilon}{C}$, temos que, dado $\epsilon > 0$, se $n > n_0$

$$|\langle T_u, \varphi \rangle - \langle T_u, \varphi_n \rangle| \leq C(max_{x\in K}|\varphi(x) - \varphi_n(x)|) < C\frac{\epsilon}{C} = \epsilon.$$

Derivada fraca

A noção de derivada fraca de uma função foi proposta inicialmente por Sobolev, motivado pela fórmula de integração por partes do cálculo.

Dada uma função u continuamente derivável em $\mathbb{R}$, no sentido de Newton-Leibniz, então para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ temos:

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} u'(x)\varphi(x)dx \tag{1.5.1}$$

porque φ se anula fora de um compacto da reta.

Motivados pela fórmula (1.5.1), Sobolev-Schwartz definiram a derivada de uma distribuição. Inicialmente, vejamos como Sobolev definiu a derivada de uma função localmente integrável em $\mathbb{R}$. Dizemos que a distribuição $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ possui derivada fraca, quando existir uma distribuição $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} v(x)\varphi(x)dx \tag{1.5.2}$$

A função v denomina-se derivada fraca de u.

Para uma distribuição qualquer de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, Schwartz formulou o seguinte conceito: dado $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, define-se a derivada distribucional de T como sendo a forma linear $\frac{dT}{dx}$: $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\langle \frac{dT}{dx}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{d\varphi}{dx} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{1.5.3}$$

No caso em que T e $\frac{dT}{dx}$ são definidas por funções localmente integráveis u e v, respectivamente, então (1.5.2) e (1.5.3) coincidem. Agora, se $u \in C^1(\mathbb{R})$, então (1.5.2) e (1.5.3) identificam-se a (1.5.1), isto é, a derivada no sentido clássico identifica-se à derivada no sentido das distribuições.

Uma vantagem da derivada no sentido das distribuições, à Schwartz, é que uma distribuição T possui derivada de todas as ordens $\frac{d^nT}{dx^n}$, definidas por:

$$\langle \frac{d^nT}{dx^n}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \frac{d^n\varphi}{dx^n} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

1.5.3 Distribuição Vetorial

Definição 1.5.2 *(Distribuição Vetorial) Uma distribuição vetorial sobre* $(0,T)$*, com valores em* X*, é uma aplicação linear contínua sobre* $\mathcal{D}(0,T)$ *com valores em* X*. Denotamos o espaço das distribuições vetoriais com* $\mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);X)$*.*

Exemplo 1.3 Semelhante ao Exemplo 1.2, dada $v \in L^p(0,T;X)$, a aplicação definida por

$$\langle T_v, \varphi \rangle = \int_0^T v(s)\varphi(s)|ds, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T),$$

é uma distribuição vetorial.

Dada $S \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);X)$ definimos sua derivada de ordem n por

$$\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle S, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T),$$

Sendo $\frac{d^n S}{dt^n}$ também é uma distribuição vetorial. Dizemos que $S_i \longrightarrow S$ em $\mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);X)$ quando:

$$\langle S_i, \varphi \rangle \longrightarrow \langle S, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

1.6 Um pouco da teoria espectral

1.6.1 Operadores densamente definidos

Definição 1.6.1 *Seja* H *um espaço de Hilbert. Um operador*

$$A : D(A) \subseteq H \to H$$

é uma aplicação que para cada elemento $u \in D(A)$ *associa um único elemento* $v \in H$*, e nesse caso, indicamos* $v = Au$*. O conjunto* $D(A)$ *é chamado domínio do operador* A*. Dizemos que* A *é um operador densamente definido, quando seu domínio é denso em* H*.*

Definição 1.6.2 *Um operador* $A : D(A) \subseteq H \to H$ *é chamado de limitado quando, existe* $k \in \mathbb{R}$, $K > 0$, *tal que, para todo* $u \in D(A)$, *temos que*

$$\|Au\| \leq K\|u\|,$$

a norma do operador A *é o número que se indica por* $\|A\|$, *e definido por*

$$\|A\| = \sup_{\substack{u \in D(A) \\ u \neq 0}} \left\{ \frac{\|Au\|}{\|u\|} \right\}$$

Um operador A *é chamado de ilimitado quando não é limitado, ou seja, uma aplicação* $A : H \to H$ *é um operador linear não limitado de* H *se* A *é linear e* A *está definido num subespaço vetorial* $D(A)$ *de* H.

De modo mais geral, sejam E *e* F *espaços de Banach. Dizemos que* $A : E \to F$ *é um operador linear não limitado de* E *em* F, *se* A *é linear e* $D(A) \subset E$ *é um subespaço vetorial de* E.

Em ambos os casos $D(A)$ *é denominado o domínio de* A.

Teorema 1.6.1 *Seja* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. *Então* A *é contínuo se, e somente se,* A *é limitado.*

Demonstração Ver [25], página 10.

Definição 1.6.3 *Dizemos que* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *é positivo se* $\langle A(v), v \rangle \geq 0$ *para qualquer* $v \in H$.

1.6.2 Operadores Adjuntos e Autoadjuntos

Definição 1.6.4 *(Operador Adjunto) Seja* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *densamente definido. O operador*

$$A^* : D(A^*) \subseteq H \to H,$$

onde

$$D(A^*) = \{v \in H| \text{ tal que } \exists h(v) \in H \text{ com } \langle Au, v\rangle = \langle u, h\rangle, \ \forall u \in D(A)\}$$

e $h = A^*v$, é chamado de operador adjunto de A.

Definição 1.6.5 *(Operador Autoadjunto) Seja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, com $D(A)$ denso em H. O operador A é chamado de autoadjunto quando*

$$D(A) = D(A^*) \text{ e } Au = A^*u, \text{para todo} u \in D(A), \text{isto é}, A = A^*,$$

ou ainda

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle, \forall u, v \in H.$$

1.6.3 O espectro de operadores lineares

Seja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Um autovalor de A é um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $Au = \lambda u$ para algum $u \in H$ com $u \neq 0$. O subespaço V_λ definido por

$$V_\lambda = \{u \in H : Au = \lambda u\},$$

é chamado de autoespaço associado ao autovalor λ e os elementos de V_λ são chamados de autovetores de A associados a λ.

Como já visto em Álgebra Linear, se X for um espaço vetorial de dimensão finita então o conjunto dos autovalores de A é o conjunto dos escalares λ tais que $(A - \lambda I)$ não é invertível, onde I é o operador identidade em $D(A)$.

No caso de dimensão infinita, esta afirmação não é verdadeira, pois um operador linear que não é invertível pode ser injetor.

Definição 1.6.6 *Seja X um espaço normado e seja $A : X \to X$ contínua. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é valor espectral se $A - \lambda I$ não for bijetor.*

Definição 1.6.7 *Seja X um espaço normado e seja $A : X \to X$ contínua. O espectro de A é o conjunto de todos os valores espectrais. Denotaremos o espectro de A por $\sigma(A)$, ou seja,*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : A_\lambda \ \text{ não é invertível}\}.$$

Definição 1.6.8 *O espectro discreto de A, $\sigma_p(A)$, é o conjunto dos autovalores de A. Portanto, $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{K}; N(A_\lambda) \neq \{0\}\}$*

Observação 1.6.1 *Usaremos a notação $Y \hookrightarrow X$ para designar que o espaço Y está imerso continuamente em X.*

Operador não limitado definido pela terna $\{\mathbf{V}, \mathbf{H}, ((,))\}$

Sejam V e H espaços de Hilbert separáveis tais que $dim H = +\infty$; $V \subsetneqq H$,

$$V \overset{c}{\hookrightarrow} H \quad \text{e } V \text{ é denso em } H :$$

Sendo $((\ ;\ ))$ e $(\ ;\ )$, respectivamente, os produtos internos de V e H, consideremos

$$A \longleftarrow \{V, H, ((\ ,\ ))\}$$

Conforme é bem sabido A é um operador autoadjunto, positivo e não limitado de H. Temos também a existência de uma sucessão de autovetores $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de A e correspondentes autovalores $(\lambda_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ tais que

$$(w_\nu) \ \text{ é um sistema ortonormal completo de } H.$$

$$\left(\frac{w_\nu}{\sqrt{\lambda_\nu}}\right) \text{ é um sistema ortonormal completo de } V.$$

Também

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \text{ e } \lambda_\nu \to +\infty \text{ quando } \nu \to +\infty$$

Agora, se $\alpha \in \mathbb{R}$, denominamos as potências de A por

$$D(A^\alpha) = \left\{ u \in H; \sum_{\nu=1}^{+\infty} \lambda_\nu^{2\alpha} |(u, w_\nu)|^2 < +\infty \right\}$$

e

$$A^\alpha u = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \lambda_\nu^\alpha (u, w_\nu) w_\nu$$

Temos que A^α é igualmente autoadjunto e positivo, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, tendo sentido pois falarmos na raiz de A^α. Resulta daí que se definirmos

$$D(T) = \left\{ u \in H; \sum_{\nu=1}^{+\infty} \lambda_\nu^{\alpha} |(u, w_\nu)|^2 < +\infty \right\}$$

e

$$Tu = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \lambda_\nu^{\alpha/2} (u, w_\nu) w_\nu$$

então,

$$T = A^{\alpha/2}.$$

Podemos provar também que T é o único operador autoadjunto positivo que verifica

$$T^2 = A^\alpha.$$

Logo

$$(A^\alpha u, u) = (T^2 u, u) = (Tu, Tu) = (A^{\alpha/2} u, A^{\alpha/2} u); \quad \forall u \in D(A^\alpha)$$

Agora, se $\alpha \geq 0$, mostramos que existe $c > 0$ tal que

$$(A^\alpha u, u) \geq c|u|^2; \quad \forall u \in D(A^\alpha)$$

Muniremos $D(A^\alpha)$ do produto interno

$$(u, v)_{D(A^\alpha)} = (u, v) + (A^\alpha u, A^\alpha v); \quad \forall u, v \in D(A^\alpha);$$

que o torna um espaço de Hilbert uma vez que A^α é fechado posto que é autoadjunto.

Sendo $\alpha \geq 0$, vem de que as normas

$$\|u\|_{D(A^\alpha)} = (|u|^2 + |A^\alpha u|^2)^{1/2}$$

e

$$\|u\|_{D(A^\alpha)} = |A^\alpha u|$$

são equivalentes.

Notamos ainda que as potências de A satisfazem a seguinte propriedade

$$\text{Se } \ \alpha_1 \leq \alpha_2 \ \text{ então } \ D(A^{\alpha_2}) \subset D(A^{\alpha_1})$$

Para mais detalhes sobre a Teoria Espectral, consultar [26].

1.7 Resultados Importantes

Proposição 1.7.1 (Lema de Gronwall) *Se para $t_0 \leq t \leq t_1$, $\varphi(t) \geq 0$ e $\psi(t) \geq 0$ são funções contínuas tais que*

$$\varphi(t) \leq C_1 + C_2 \int_{t_0}^{t_1} \psi(s)\varphi(s)ds,$$

então

$$\varphi(t) \leq C_1 e^{C_2 \int_{t_0}^{t_1} \psi(s)ds}$$

onde C_1 *e* C_2 *são constantes não negativas.*

Demonstração: Consultar [27], página 61.

Proposição 1.7.2 (Teorema de Arzelá-Ascoli) *Se* (X, ρ) *é um espaço métrico compacto, um subconjunto* $\mathfrak{F}$ *(uma família* $\mathfrak{F}$ *de funções uniformemente limitada) de* $C(X, \mathbb{R})$ *é relativamente compacto se, e somentre se, é uniformemente limitado e equicontínuo.*

Demonstração: Consultar [28], página 85 e [21], página 11.

Outra forma de enunciar o teorema, seria:

Sejam K um espaço métrico compacto e $\mathfrak{H}$ um subconjunto limitado de $C(K)$. Suponhamos que $\mathfrak{H}$ é uniformemente equicontínua, isto é, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x_1, x_2) < \delta$ implica que $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$, seja qual for a $f \in \mathfrak{H}$. Então, $\mathfrak{H}$ é relativamente compacto em $C(K)$.

Proposição 1.7.3 (Teorema de Aubin-Lions) *Sejam* B_0, B *e* B_1 *espaços de Banach, tais que* $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$, *sendo* B_0 *e* B_1 *reflexivos e compacta a imersão* $B_0 \hookrightarrow B$. *Defina-se*

$$W[0,T] = \{v \in L^{p_0}(0,T;B_0),\ v' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\},$$

com $1 < p_i < \infty$, $i = 0, 1$, *e norma definida por*

$$||v||_{W[0,T]} = ||v||_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + ||v'||_{L^{p_0}(0,T;B)}.$$

Então $W[0,T]$ *é um espaço de Banach reflexivo compactamente imerso em* $L^{p_0}(0,T;B)$.

Demonstração: Consultar [29].

Como consequência deste resultado, se $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^{p_0}(0,T;B_0)$ com $(u'_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ limitada em $L^{p_1}(0,T;B_1)$, então existe uma subsequência de $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ que converge fortemente em $L^{p_0}(0,T;B)$.

Proposição 1.7.4 (Teorema Espectral) *Sejam $V \subset H$ espaços de Hilbert reais, com imersão $V \hookrightarrow H$ compacta e densa, munidos dos produtos escalares $((.,.))$ e $(.,.)$, respectivamente. Se $A : V \hookrightarrow V'$ é o operador definido pela terna $\{V, H; ((.,.))\}$ por $\langle Au, v\rangle_{V',V} = ((u,v))$ $\forall u \in D(A)$ e $v \in V$, então:*

i) existe um sistema ortonormal completo $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de H formado pelos vetores próprios do operador A;

ii) os valores próprios λ_j, associados aos w_j, formam uma sucessão não-decrescente $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \lambda_j \leq \ldots \to \infty$ e vale a relação

$$((w_j, v))_V = \langle Aw_j, v\rangle_{V',V} = \lambda_j (w_j, v), \quad \forall v \in V.$$

Os vetores $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ formam um sistema ortogonal completo de V e $D(A)$.

Demonstração: Consultar [26], página 349.

Capítulo 2

O modelo físico

O problema de vibração de corpos elásticos é antigo. Ao que se sabe, ele atraiu a atenção de d'Alembert (1717-1793) e Euler (1707-1783). Neste trabalho nos propomos estudar uma equação não linear de ondas descrevendo um modelo para pequenas vibrações de uma corda elástica. O modelo que estudaremos tem como caso particular o modelo de Kirchhof com condições de contorno e do deslocamento da corda elástica com termo de amortecimento, conforme definiremos posteriormente.

2.1 A dedução do modelo físico

Vibrações não lineares de uma corda elástica

Consideremos uma corda elástica com os seguintes dados:

L = Comprimento da corda

δ = Área da seção reta da corda

T = Tensão

T_0 =Tensão inicial quando a corda está em equilíbrio sobre o eixo x

E = Módulo de Young do material

A tensão longitudinal (Tensão média) na corda é $\frac{T}{E\delta}$ e suposta pequena, isto é, $\frac{T}{E\delta} << 1$. Desta hipótese deduz-se que a tensão tende a ficar uniforme ao longo da corda. Isto acontecendo, calcula-se a tensão pela Lei de Hooke

$$T - T_0 = K\frac{S-L}{L} \tag{2.1.1}$$

Notamos que S é o comprimento da corda deformada e K é a constante $E\delta$, que depende do material e da seção da corda.

Observação 2.1: Por [30], deduz-se que a razão da velocidade da onda longitudinal para a velocidade da onda transversal é

$$\sqrt{\frac{T}{E\delta}}$$

Assim, da hipótese $\frac{T}{E\delta}$ pequeno, resulta que o efeito inercial longitudinal é desprezível. Como consequência, a tensão tende a tornar-se uniforme ao longo da corda. Quando isto acontece, calcula-se a tensão em função da variação do comprimento da corda por meio da Lei de Hooke, fornecendo a expressão (2.1.1).

Trata-se do caso de um movimento com pequena amplitude, isto é

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx sen\theta$$

$$\frac{u(x+\Delta x, t) - u(x,t)}{\Delta x} \approx tg\theta$$

onde θ é a inclinação da tangente em qualquer ponto da corda deformada, $u(x,t)$ é o deslocamento vertical dos pontos da corda no eixo vertical.

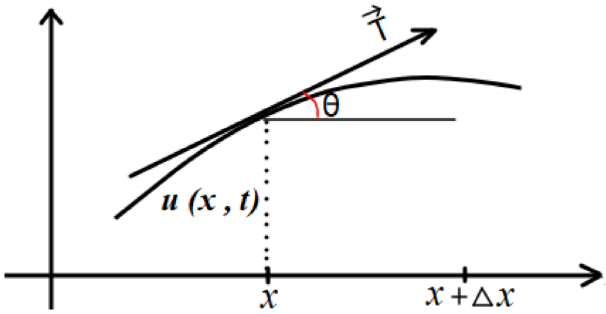

Figura 2.1: Vibrações não lineares

Equação do movimento

Denotamos por T o módulo do vetor $\vec{T}$ o qual tem a direção da tangente.

Componente vertical da tensão $\vec{T}$: $Tcos(\frac{\pi}{2} - \theta) = Tsen\theta$

Componente Longitudinal da tensão $\vec{T}$: $Tcos\theta$.

A variação da tensão é uma força, então, pela segunda Lei de Newton

$$\frac{\partial}{\partial x}(Tsen\theta) = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.1.2}$$

podemos observar que a tensão longitudinal tem variação desprezível (ver Observação 2.1).

A equação (2.1.2) é a equação de Carrier para as vibrações transversais de uma corda elástica.

Efetuando a derivação em (2.1.2) obtemos:

$$\frac{\partial T}{\partial x}sen\theta + T\frac{\partial sen\theta}{\partial x} = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Da Observação 2.1, resulta que $\frac{\partial T}{\partial x} \approx 0$ (A variação longitudinal da tensão é desprezível) e da hipótese da amplitude ser pequena, obtemos $\frac{\partial u}{\partial x} \approx sen\theta$, logo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{\partial sen\theta}{\partial x}.$$

Então, a equação de Carrier toma a forma

$$\frac{T}{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{2.1.3}$$

Cálculo das Tensões

Sendo S o comprimento do arco que representa a deformação vertical da corda, obtem-se

$$S = \int_0^L \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2} dx \tag{2.1.4}$$

e aproximando com o polinômio de Newton, obtemos

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

para pequenos deslocamentos. Logo,

$$S = \int_0^L \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] dx,$$

ou seja,

$$S = L + \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \tag{2.1.5}$$

Encontramos em (2.1.1) $T = T_0 + K\frac{S-L}{L}$, e substituindo $S - L$ dado por (2.1.5), tem-se

$$T = T_0 + \frac{E\delta}{2L}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{2.1.6}$$

Substituindo (2.1.6) em (2.1.3), resulta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[\frac{T_0}{m} + \frac{E\delta}{2mL}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{2.1.7}$$

$$\text{Com} \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0;$$

que é o modelo de Kirchhoff-Carrier para vibrações transversais não lineares de uma corda elástica.

Observação 2.2:

(i) Quando $S = S_0$, na Lei de Hooke, obtem-se $T = T_0$ e de (2.1.3) resulta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T_0}{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.1.8}$$

que é o modelo de Euler - d'Alembert.

(ii) Denotando $P_0 = \frac{T_0}{m}$ e $P = \frac{E\delta}{2mL}$, obtem-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(P_0 + P \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{2.1.9}$$

denominado modelo de Euler - d'Alembert - Carrier para vibrações verticais de uma corda elástica.

Da equação (2.1.7), também escrevemos $M : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ e $M(\lambda) = \frac{T_0}{m} + \frac{E\delta}{2mL}\lambda$.

(iii) Uma generalização significativa para o modelo é o caso n-dimensional dado por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M \left(\sum_{i=1}^{m} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right) \Delta u = 0, \tag{2.1.10}$$

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma, \ t > 0 \quad (\Gamma \text{ é a fronteira de } \Omega)$$

com extremidades variáveis e condições iniciais

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x) \quad \text{em} \quad \Omega,$$

onde $M(\lambda)$ é uma função real não negativa, com $\lambda \geq 0$, e Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$.

Este é o modelo de *Kirchhoff*, conforme [31], para pequenas vibrações.

Em [32] encontra-se uma vasta referência bibliográfica sobre esse modelo.

(iv) Agora, inserindo um termo $-\Delta u_t(x,t)$ de amortecimeto, temos a seguinte equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - M\left(\sum_{i=1}^{m}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)\right)^2 dx\right)\Delta u(x,t) - \Delta u_t(x,t) = 0, \text{ em } \Omega\times[0,\infty[\quad (2.1.11)$$

$$u(x,t) = 0 \text{ em } \Gamma\times[0,\infty[,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x) \quad \text{em } \Omega,$$

que é a equação hiperbólica de *Kirchhoff* com amortecimento. Neste caso, em que a vibração é amortecida, a amplitude do sistema diminui quando t cresce. Simplificando, podemos reescrever a equação (2.1.11), assim:

$$u_{tt}(x,t) - M\left(\int_{\Omega}|\nabla u(x,t)|^2 dx\right)\Delta u(x,t) - \Delta u_t(x,t) = 0. \quad (2.1.12)$$

$$u(x,t) = 0 \text{ em } \Gamma\times[0,\infty[,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x) \quad \text{em } \Omega,$$

onde $M(s)$ é uma função contínua positiva em $[0,\infty[$; Ω é um conjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, com bordo suave Γ; Q é o cilindro $\Omega\times]0,\infty[$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, com contorno lateral $\Sigma = \Gamma\times[0,\infty[$; $\Delta = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ é o operador de Laplace e $|\nabla u(x,t)|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2$.

Capítulo 3

Uma equação hiperbólica abstrata com amortecimento forte

Neste capítulo, resolvemos o problema abstrato para um modelo de equação da onda do tipo Kirchhoff com amortecimento forte.

3.1 O modelo abstrato

Considerando $|\nabla u| = |A^{1/2}u|$ e $-\Delta u = Au$ na equação 2.1.12, teremos um modelo abstrato para o operador de ondas do tipo Kirchhoff com amortecimento, dado por

$$u''(t) + M\left(|A^{1/2}u(t)|^2\right) Au(t) + Au'(t) = 0 \tag{3.1.1}$$

$$u(0) = u_0 \;\text{ e }\; u'(0) = u_1$$

onde A é um operador positivo autoadjunto com espectro discreto, definido em um espaço de Hilbert H e $D(A^{1/2}) = V$ compactamente imerso e denso em H. Estabelecemos condições iniciais e provamos a existência e unicidade da solução de (3.1.1) e analisaremos seu decaimento de energia, conforme [17].

Este problema foi estudado por Nishihara [18] e Pereira [33]. Nishihara, prova a existência e unicidade da solução do problema (3.1.1) quando $u_0 \in D(A)$ e $u_1 \in D(A^{1/2})$. Além disso, se $M(\lambda) = \lambda$ e u_0, u_1 pertencem a $D(A^{3/2})$, ele prova que a solução de (3.1.1), em particular, satisfaz

$$\|u(t)\|^4 = |A^{1/2}u(t)|^4 \leqq C_\epsilon(1+t)^{\epsilon-2}$$

onde $\epsilon > 0$ e $C_\epsilon \to +\infty$ com $\epsilon \to 0$

Neste trabalho, conforme [17], provaremos a existência e unicidade para as soluções de (3.1.1) quando $u_0 \in V$ e $u_1 \in H$. Além disso, se $M(\lambda) = \lambda$ a solução de(3.1.1) satisfaz

$$\|u(t)\|^4 \leqq C(1+t)^{-2}$$

onde C é uma constante positiva.

Na prova da existência, aproximamos os dados iniciais $u_0 \in V$ e $u_1 \in H$ por $u_{0k} \in D(A)$ e $u_{1k} \in D(A^{1/2})$, respectivamente, com $u_{0k} \to u_0$ fortemente em V e $u_{1k} \to u_1$ fortemente em H. Consideramos u_k a solução do problema (3.1.1) com os dados iniciais u_{0k} e u_{1k}. Usando o teorema de Arzelá-Ascoli com algumas técnicas adicionais, provamos que $u_k \to u$ e u é uma solução de (3.1.1) com dados iniciais $u_0 \in V$ e $u_1 \in H$.

O problema abstrato

Sejam V e H espaços de Hilbert com produto interno e norma representados, respectivamente, por $((,))$, $\|.\|$ e $(,)$, $|.|$, com V imersamente compacto e denso em H.

Representamos por A o operador definido pela terna $\{V, H; ((,))\}$, de modo que A seja um operador autoadjunto, definido positivamente em H, com espectro discreto e $D(A^{1/2}) = V$ $(D(X)$ representa o domínio de $X)$. Também sabemos que $((u,u)) = (Au, v)$ para todo $u \in D(A)$, $v \in V$ o que implica $((u,v)) = |A^{1/2}u|^2$.

Em H consideramos o seguinte problema:

- (E.3) $$\begin{cases} u''(t) + M\left(|A^{1/2}u(t)|^2\right) Au(t) + Au'(t) = 0 \\ u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1 \end{cases}$$

onde $M \in C^1[0,\infty)$ com $M(\lambda) \geq 0$, $\forall \lambda \geq 0$.

3.2 Existência e unicidade da solução

Assumimos a seguinte hipótese para o problema (E.3),

(H.1) $M \in C^1[0,\infty)$ com $M(\lambda) \geq 0$ para todo $\lambda \geq 0$

Então temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.1 *Sob a hipótese (H.1), se $u_0 \in V$ e $u_1 \in H$, então existe uma única função $u : [0,T] \to H$ na classe:*

$$u \in L^\infty(0,T;V) \tag{3.2.2}$$

$$u' \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V) \tag{3.2.3}$$

e satisfaz

$$u'' + M\left(|A^{1/2}u|^2\right) Au + Au' = 0 \quad em \quad L^2(0,T;V') \tag{3.2.4}$$

$$u(0) = u_0 \quad e \quad u'(0) = u_1. \tag{3.2.5}$$

3.2.1 Problema aproximado

Para provar a existência da solução do Problema (E.3) conforme o teorema 3.2.1, utilizaremos o Método de Galerkin, mais precisamente o Método de Faedo - Galerkin, ver [34]. Em seguida, definindo as aproximações de Galerkin, obteremos um sistema de equações diferenciais ordinárias com valores iniciais, cuja existência de solução local será garantida pelo Teorema de Caratheodory (ver [35]). Por meio das estimativas a priori, estenderemos a solução a todo o intervalo $[0,T]$, obtendo uma sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, que convergirá para a solução de (E.3), verificando as condições iniciais.

Definimos por A o operador positivo, auto-adjunto com espectro discreto. Isto implica que A tem uma sequência infinita de autovalores λ_j^2 com

$$0 < \lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq ... \leq \lambda_j^2 \leq ... \,, \; \lim_{j\to\infty} \lambda_j^2 = \infty$$

Sendo assim, como $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$, então temos o problema espectral $((u,w)) = \lambda(u,w)$ para todo $u \in V$. Seja w_j uma base de V e ortonormal em H, sendo w_j uma sequência de autovetores para cada número real λ_j^2.

Para cada $u \in V$, temos uma expansão:

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} u_j w_j, \qquad u_j = ((u, w_j))$$

Com $\|u\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} u_j^2\right)^{1/2}$. Se $u \in D(A)$, ficamos com

$$Au = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 u_j w_j, \qquad \|Au\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^4 u_j^2\right)^{1/2}$$

Agora, definimos a aproximação de Galerkin $u_k(t) = \sum_{j=1}^{\infty} g_{jk}(t) w_j$ como uma solução para o problema de valor inicial para o sistema:

$$(u_k''(t) + M\left(|A^{1/2}u_k(t)|^2\right) Au_k(t) + Au_k'(t), w) = 0 \tag{3.2.6}$$

para qualquer $w \in V^k$ fixo, onde V^k é um espaço vetorial k-dimensional estendido por $\{w_1, ..., w_k\}$, com

$$u_k(0) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j w_j \longrightarrow u_0 \qquad \text{fortemente em } V \tag{3.2.7}$$
$$u_k'(0) = \sum_{j=1}^{k} \beta_j w_j \longrightarrow u_1 \qquad \text{fortemente em } H$$

para este caso, consideramos $(u_{0k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(u_{1k})_{k\in\mathbb{N}}$ sequências em $D(A)$ e $D(A^{1/2})$, respectivamente. Então obtemos certo sistema diferencial ordinário não linear aproximado para os g_{jk}. Assim, o sistema aproximado acima encontra-se nas condições de Caratheodory (ver [35]) e, portanto, possui uma única solução definida em algum intervalo $[0, t_k)$ desde que $M \in C^1[0, \infty)$.

3.2.2 Estimativas a priori

Vamos assumir a seguinte hipótese para o problema (E.3):

(H.1) $\qquad M \in C^1[0, \infty) \quad \text{com} \quad M(\lambda) \geq 0$ para todo $\lambda \geq 0$

As estimativas obtidas a seguir nos permitirão estender as solucões u_k para o intervalo $[0, T[$.

(I) Colocando $w = 2u_k'(t)$ em (3.2.6) temos

$$(u_k''(t), 2u_k'(t)) + M\left(|A^{1/2}u_k(t)|^2\right)(Au_k(t), 2u_k'(t)) + (Au_k'(t), 2u_k'(t)) = 0$$

Analisando cada termo, note que

- No primeiro termo

$$(u_k''(t), 2u_k'(t)) = 2\int u_k''(t)\ u_k'(t) = 2\int \frac{1}{2}\frac{d}{dt}u_k'(t)\ u_k'(t) = 2\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_k'(t)|^2 = \frac{d}{dt}|u_k'(t)|^2$$

- No segundo termo $M\left(|A^{1/2}u_k(t)|^2\right)(Au_k(t), 2u_k'(t))$, tem-se

$$(Au_k(t), 2u_k'(t)) = 2(A^{1/2}u_k(t), A^{1/2}u_k'(t)) = 2\int \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(A^{1/2}u_k(t))^2 = \frac{d}{dt}|A^{1/2}u_k(t)|^2$$

Daí,

$$M\left(|A^{1/2}u_k(t)|^2\right)(Au_k(t), 2u_k'(t)) = M\left(|A^{1/2}u_k(t)|^2\right)\frac{d}{dt}|A^{1/2}u_k(t)|^2$$

Tomando $\hat{M}(\lambda) = \displaystyle\int_0^\lambda M(\tau)d\tau$, temos

$$\frac{d}{dt}\hat{M}(|A^{1/2}u_k(t)|^2) = M\left(|A^{1/2}u_k(t)|^2\right)\frac{d}{dt}|A^{1/2}u_k(t)|^2$$

- No terceiro termo

$$(Au_k', 2u_k'(t)) = 2(A^{1/2}u_k'(t), A^{1/2}u_k'(t)) = 2|A^{1/2}u_k'(t)|^2$$

Assim, chegamos em

$$\frac{d}{dt}[|u_k'(t)|^2 + \hat{M}\left(|A^{1/2}u_k(t)|^2\right)] + 2|A^{1/2}u_k'(t)|^2 = 0 \tag{3.2.8}$$

onde $\hat{M}(\lambda) = \displaystyle\int_0^\lambda M(\tau)d\tau$.

Integrando (3.2.8) de 0 a t ($t < t_k$), temos

$$\int_0^t \frac{d}{dt}|u_k'(\tau)|^2 d\tau + \int_0^t \frac{d}{dt}\hat{M}\left(|A^{1/2}u_k(\tau)|^2\right)d\tau + \int_0^t 2|A^{1/2}u_k'(\tau)|^2 d\tau = 0$$

$$|u_k'(t)|^2 - |u_k'(0)|^2 + \hat{M}\left(|A^{1/2}u_k(t)|^2\right) - \hat{M}\left(|A^{1/2}u_k(0)|^2\right) + 2\int_0^t |A^{1/2}u_k'(\tau)|^2 d\tau = 0$$

$$|u_k'(t)|^2 + \hat{M}\left(|A^{1/2}u_k(t)|^2\right) + 2\int_0^t |A^{1/2}u_k'(\tau)|^2 d\tau \quad = \quad |u_k'(0)|^2 + \hat{M}\left(|A^{1/2}u_k(0)|^2\right)$$

usando (3.2.7), temos

$$|u_k'(t)|^2 + \hat{M}\left(\|u_k(t)\|^2\right) + 2\int_0^t |A^{1/2}u_k'(\tau)|^2 d\tau \leq |u_1|^2 + \hat{M}\left(\|u_0\|^2\right)$$

de onde obtemos

$$|u_k'(t)| \leq C_1, \tag{3.2.9}$$

$$\int_0^t |A^{1/2}u_k'(\tau)|^2 d\tau \leq C. \tag{3.2.10}$$

Assim,

$$u_k' \quad \text{é limitado em} \quad L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;D(A^{1/2})).$$

A partir de agora denotamos por C ou C_i $(i=1,2,...)$ várias constantes independentes de t e m.)

(II) Tomando $w=u_k(t)$ em (3.2.6), temos

$$\frac{d}{dt}(u_k'(t),u_k(t))-|u_k'(t)|^2+M\left(|A^{1/2}u_k(t)|^2\right)|A^{1/2}u_k(t)|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|A^{1/2}u_k(t)|^2=0 \quad (3.2.11)$$

e integrando (3.2.11) em $[0,t[$, $t<t_k$, passamos a (3.2.9)

$$\begin{aligned}
&\int_0^t M\left(|A^{1/2}u_k(\tau)|^2\right)|A^{1/2}u_k(\tau)|^2d\tau+\frac{1}{2}|A^{1/2}u_k(t)|^2\\
&=\frac{1}{2}|A^{1/2}u_k(0)|^2+\int_0^t|u_k'(\tau)|^2d\tau+(u_k'(0),u_k(0))-(u_k'(t),u_k(t))\\
&\leq\frac{1}{2}|A^{1/2}u_0|^2+|u_1||u_0|+\frac{1}{\lambda_1^2}\int_0^t|A^{1/2}u_k'(\tau)|^2d\tau+\frac{1}{\lambda_1}|u_k'(t)||A^{1/2}u_k(t)|\\
&\leq C+\left(\frac{C_1}{\lambda_1}\right)|A^{1/2}u_k(t)|,
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$|A^{1/2}u_k(t)|^2\leq C_2 \quad \text{ou} \quad \|u_k(t)\|^2\leq C_2 \quad (3.2.12)$$

e

$$\int_0^t M\left(|A^{1/2}u_k(\tau)|^2\right)|A^{1/2}u_k(\tau)|^2d\tau\leq C. \quad (3.2.13)$$

Portanto,

$$u_k \quad \text{é limitado em} \quad L^\infty(0,T;D(A^{1/2})).$$

Encontramos estimativas para $u_k(t)$ na norma de V e H, concluímos que todos os intervalos $[0,t_k)$ podem ser estendidos para todo intervalo $[0,T)$.

(III) Tomando $w = Au_k(t)$ em (3.2.6) e integrando em $[0,t)$, temos

$$\begin{aligned} & M(|A^{1/2}u_k(t)|^2)|Au_k(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Au_k(t)|^2 \\ &= -\frac{d}{dt}(A^{1/2}u_k'(t), A^{1/2}u_k(t)) + |A^{1/2}u_m'(t)|^2 \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

e

$$\begin{aligned} & \int_0^t M\left(|A^{1/2}u_k(\tau)|^2\right)|Au_k(\tau)|^2 d\tau + \frac{1}{2}|Au_k(t)|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}|Au_0|^2 + |u_1||Au_0| + |u_k'(t)||Au_k(t)| + \int_0^t |A^{1/2}u_k'(\tau)|^2 d\tau \end{aligned}$$

$$\leq C + C_1|Au_k(t)|,$$

Este último significa que

$$|Au_k(t)| \leq C \tag{3.2.15}$$

e

$$\int_0^t M\left(|A^{1/2}u_k(\tau)|^2\right)|Au_k(\tau)|^2 d\tau \leq C. \tag{3.2.16}$$

Portanto,

$$u_k \ \text{ é limitado em } \quad L^\infty(0,T;D(A)).$$

(IV) Tomando $w = 2Au_k'(t)$ em (3.2.6), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|A^{1/2}u_k'(t)|^2 + 2|Au_k'(t)|^2 &= -2M(|A^{1/2}u_k(t)|^2)(Au_k(t), Au_k'(t)) \\ &\leq M(|A^{1/2}u_k(t)|^2)\left(M_1|Au_k(t)|^2 + \frac{1}{M_1}|Au_k'(t)|^2\right) \\ &\leq M_1.M(|A^{1/2}u_k(t)|^2)|Au_k(t)|^2 + |Au_k'(t)|^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}|A^{1/2}u_k'(t)|^2 + |Au_k'(t)|^2 \leq M_1.M(|A^{1/2}u_k(t)|^2)|Au_k(t)|^2 \tag{3.2.17}$$

onde $M_1 = \max\ \{M(s);\ \ 0 \leq s \leq C_2\}$.

Então, integrando (3.2.17) em $[0,t)$, temos

$$|A^{1/2}u_k'(t)|^2 + \int_0^t |Au_k'(\tau)|^2 d\tau \leq |A^{1/2}u_1|^2 + M_1 \int_0^t M(|A^{1/2}u_k(\tau)|^2)|Au_k(\tau)|^2 d\tau$$

que é dado por (3.2.16)

$$|A^{1/2}u_k'(t)| \leq C \tag{3.2.18}$$

e

$$\int_0^t |Au_k'(\tau)|^2 d\tau \leq C. \tag{3.2.19}$$

Portanto,

$$u_k' \ \text{ é limitado em } \quad L^\infty(0,T;D(A^{1/2})) \cap L^2(0,T;D(A)).$$

(V) Tomando $w = u_k''(t)$ em (3.2.6), temos

$$\begin{aligned} |u_k''(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|A^{1/2}u_k'(t)|^2 &= -\frac{d}{dt}\{M(|A^{1/2}u_k(t)|^2)(A^{1/2}u_k(t), A^{1/2}u_k'(t))\} \\ &+2M'(|A^{1/2}u_k(t)|^2)(A^{1/2}u_k(t), A^{1/2}u_k'(t))^2 + M(|A^{1/2}u_k(t)|^2)|A^{1/2}u_k'(t)|^2 \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

e

$$\begin{aligned} &\int_0^t |u_k''(\tau)|^2 d\tau + \frac{1}{2}|A^{1/2}u_k'(t)|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}|A^{1/2}u_1|^2 + M_1|A^{1/2}u_0||A^{1/2}u_1| + M_1|A^{1/2}u_k(t)||A^{1/2}u_k'(t)| \\ &+2M_2 \int_0^t |A^{1/2}u_k(\tau)|^2|A^{1/2}u_k'(\tau)|^2 d\tau + M_1 \int_0^t |A^{1/2}u_k'(\tau)|^2 d\tau, \end{aligned}$$

onde $M_2 = \max\{|M'(s)|;\ \ 0 \leq s \leq C_2\}$. Portanto, por (3.2.10), (3.2.12) e (3.2.18), temos

$$\int_0^t |u_k''(\tau)|^2 d\tau \leq C. \tag{3.2.21}$$

Portanto,

$$u_k'' \text{ é limitado em } \quad L^2(0,T;H).$$

Sobre a prova da existência

Do que foi exposto, temos que, se tomarmos $(u_{0k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(u_{1k})_{k\in\mathbb{N}}$ sequências em $D(A)$ e $D(A^{1/2})$, respectivamente, tais que

$$u_{0k} \to u_0 \text{ fortemente em } V \tag{3.2.22}$$

$$u_{1k} \to u_1 \text{ fortemente em } H. \tag{3.2.23}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideramos u_k uma solução do problema (E.3) com dados iniciais u_{0k} e u_{1k}. Então u_k satisfaz (Veja também [18]):

$$u_k \in L^\infty(0,T;D(A)) \tag{3.2.24}$$

$$u_k' \in L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;D(A)) \tag{3.2.25}$$

$$u_k'' \in L^2(0,T;H) \tag{3.2.26}$$

$$u_k'' + M\left(|A^{1/2}u_k|^2\right)Au_k + Au_k' = 0 \text{ em } L^2(0,T;H) \tag{3.2.27}$$

$$u_k(0) = u_{0k} \quad e \quad u_k'(0) = u_{1k}. \tag{3.2.28}$$

Assim, tomando o produto interno da equação (3.2.27) com $2u_k'(t)$, temos

$$(u_k''(t), 2u_k'(t)) + M\left(|A^{1/2}u_k(t)|^2\right)(Au_k(t), 2u_k'(t)) + (Au_k', 2u_k'(t)) = 0$$

Analisando cada termo, note que

- No primeiro termo

$$(u_k''(t), 2u_k'(t)) = 2\int u_k''(t)\ u_k'(t) = 2\int \frac{1}{2}\frac{d}{dt}u_k'(t)\ u_k'(t) = 2\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_k'(t)|^2 = \frac{d}{dt}|u_k'(t)|^2$$

- No segundo termo $M\left(|A^{1/2}u_k(t)|^2\right)(Au_k(t), 2u_k'(t))$, tem-se

$$M\left(|A^{1/2}u_k(t)|^2\right) = M\left(\|Au_k(t)\|^2\right) = M\left(\|u_k(t)\|^2\right)$$

e

$$(Au_k(t), 2u_k'(t)) = 2(Au_k(t), u_k'(t)) = 2((u_k(t), u_k'(t))) = 2\int u_k(t)u_k'(t) =$$

$$= 2\int \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_k(t))^2 = \frac{d}{dt}\|u_k(t)\|^2$$

Daí,

$$M\left(|A^{1/2}u_k(t)|^2\right)(Au_k(t), 2u_k'(t)) = M\left(\|Au_k(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|u_k(t)\|^2.$$

Tomando $\hat{M}(\lambda) = \int_0^\lambda M(\tau)d\tau$, temos

$$\frac{d}{dt}\hat{M}(\|u_k(t)\|^2) = M\left(\|u_k(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|u_k(t)\|^2 = M\left(|A^{1/2}u_k(t)|^2\right)(Au_k(t), 2u_k'(t)).$$

- No terceiro termo

$$(Au_k'(t), 2u_k'(t)) = 2(Au_k'(t), u_k'(t)) = 2((u_k'(t), u_k'(t))) = 2\|u_k'(t)\|^2$$

Assim, chegamos em

$$\frac{d}{dt}(|u_k'(t)|^2 + \hat{M}(\|u_k(t)\|^2)) + 2\|u_k'(t)\|^2 = 0, \quad \text{onde} \quad \hat{M}(\lambda) = \int_0^\lambda M(\tau)d\tau.$$

Integrando de 0 a $t \leq T$, temos

$$\int_0^t \frac{d}{dt}|u_k'(s)|^2 ds + \int_0^t \frac{d}{dt}\hat{M}(\|u_k(s)\|^2)ds + 2\int_0^t \|u_k'(s)\|^2 ds = 0$$

$$|u_k'(t)|^2 - |u_k'(0)|^2 + \hat{M}(\|u_k(t)\|^2) - \hat{M}(\|u_k(0)\|^2) + 2\int_0^t \|u_k'(s)\|^2 ds = 0$$

aplicamos (3.2.28) em seguida e obtemos

$$|u_k'(t)|^2 - |u_{1k}|^2 + \hat{M}(\|u_k(t)\|^2) - \hat{M}(\|u_{0k}\|^2) + 2\int_0^t \|u_k'(s)\|^2 ds = 0$$

$$|u_k'(t)|^2 + \hat{M}(\|u_k(t)\|^2) + 2\int_0^t \|u_k'(s)\|^2 \; ds = |u_{1k}|^2 + \hat{M}(\|u_{0k}\|^2).$$

Contudo, pelo fato de

$$\hat{M}(\|u_k(t)\|^2) = \int_0^t M(\|u_k(s)\|^2) \; ds \; \geq C_0\|u_k(t)\|^2$$

resulta que pela (H.1) e as convergências (3.2.22) e (3.2.23) segue que

$$|u_k'(t)|^2 + C_0\|u_k(t)\|^2 + 2\int_0^t \|u_k'(s)\|^2 \; ds \leq |u_{1k}|^2 + \hat{M}(\|u_{0k}\|^2) \leq |u_{1k}|^2 + C_1\|u_{0k}\|^2$$

resulta que

$$|u_k'(t)|^2 + \|u_k(t)\|^2 \leq C$$

$$u_k' \;\text{ é limitado em } L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V). \tag{3.2.29}$$

Por (3.2.29) e pelo teorema fundamental do cálculo, segue que

$$u_k \text{ é limitado em } L^\infty(0,T;V). \tag{3.2.30}$$

De (3.2.29), (3.2.30) e (3.2.26) deduzimos a existência de subsequências de (u_k), que ainda denotaremos por (u_k), tal que

$$u_k \to u \;\text{ fraco-estrela em }\quad L^\infty(0,T;V) \tag{3.2.31}$$

$$u_k' \to u' \;\text{ fraco-estrela em }\quad L^\infty(0,T;H) \tag{3.2.32}$$

$$u_k' \to u' \;\text{ fraco em }\quad L^2(0,T;V) \tag{3.2.33}$$

$$u_k'' \to u'' \;\text{ fraco em }\quad L^2(0,T;H) \tag{3.2.34}$$

Passagem ao limite

Em (3.2.30), temos que a sequência u_k é limitada em $L^\infty(0,T;V)$.

De (3.2.29), a sequência u_k' é limitada em $L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$.

De (3.2.21), a sequência u_k'' é limitada em $L^2(0,T;H)$.

Como a imersão de $L^\infty(0,T;V)$ em $L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ é compacta, podemos extrair uma subsequência, mais uma vez indicada por (u_k), da seguinte forma

$$V \overset{c}{\hookrightarrow} H \hookrightarrow H$$

$$W = \left\{ u \in L^2(0,T;V);\ u' \in L^2(0,T;H) \right\}$$

Assim,

$$W \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(0,T;H)$$

Então, pelo teorema da compacidade de Aubin-Lions, podemos obter de $(u_k) \in W$, uma subsequência que ainda denotaremos por (u_k), tal que

$$(u_k) \longrightarrow u \ \text{ fortemente em } \ L^2(0,T;H)$$

Das convergências (3.2.31)-(3.2.34), podemos tomar o limite nos termos lineares da equação aproximada (3.2.27), quando $k \to \infty$. Contudo, para passamos o limite na parte não linear do problema é necessário que tenhamos uma convergência forte em $L^2(0;T;V)$. Entretanto, das estimativas obtidas anteriormente nos garante apenas, face o teorema de Aubin-Lions, a convergência forte em $L^2(0,T;H)$ o que é insuficiente para passarmos o limite na parte não linear.

Para a parte linear, sejam $j \in \mathbb{N}$ e $k \geq j$. Consideramos $\theta \in \mathcal{D}(0,T_0)$. Multiplicando o problema aproximado (3.2.27) por θ e integrando em $[0,T_0]$ resulta que

$$\int_0^{T_0} (u_k''(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^{T_0} M\left(\|u_k(t)\|^2\right)(Au_k(t), w_j))\theta(t)dt + \int_0^{T_0} (Au_k', w_j)\theta(t)dt = 0$$

De (3.2.31) obtemos

$$\int_0^{T_0} (u_k(t), w_j)\theta(t)dt \quad \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int_0^{T_0} (u(t), w_j)\theta(t)dt$$

De (3.2.32) obtemos

$$\int_0^{T_0} (u_k'(t), w_j)\theta'(t)dt \quad \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int_0^{T_0} (u'(t), w_j)\theta'(t)dt$$

3.2.3 Convergência do termo não linear

Seja $\phi_k(t) = |A^{1/2}u_k(t)|^2 = \|u_k(t)\|^2$, $t \in [0, T]$.

Observamos que para todo $k \in \mathbb{N}$, ϕ é uma função contínua de $[0, T]$ em $\mathbb{R}$. Portanto por (3.2.30) temos

$$\phi_k(t) \leq C_1, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, T] \tag{3.2.35}$$

onde C_1 é uma constante positiva. Agora, se t_1 , $t_2 \in [0, T]$, temos

$$|\phi_k(t_1) - \phi_k(t_2)| = |\|u_k(t_1)\|^2 - \|u_k(t_2)\|^2|$$

$$\leq (\|u_k(t_1)\| + \|u_k(t_2)\|)\|u_k(t_1) - u_k(t_2)\|$$

$$\leq C_2 \int_{t_1}^{t_2} \|u_k'(s)\|ds \leq C_3\|u_k'\|_{L^2(0,T;V)}|t_1 - t_2|^{1/2}$$

onde C_2 e C_3 são constantes positivas. Por (3.2.30) segue que

$$|\phi_k(t_1) - \phi_k(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|^{1/2}, \quad \forall_k \in \mathbb{N} \tag{3.2.36}$$

onde C é uma constante positiva. Por (3.2.35), (3.2.36) e pelo teorema de Arzelá-Ascoli, existe uma função contínua $\phi : [0, T] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\phi_k \to \phi \text{ uniformemente em } [0, T]. \tag{3.2.37}$$

Desde que $M \in C^1[0,\infty)$, e seque que

$$M(\phi_k(t)) \to M(\phi(t)) \text{ uniformemente em } [0,T]. \tag{3.2.38}$$

Por (3.2.29), (3.2.30) e (3.2.37) existe uma subsequência de (u_k) que ainda denotamos por (u_k), tal que

$$u_k \to u \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0,T;V) \tag{3.2.39}$$

$$u_k' \to u' \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0,T;H) \tag{3.2.40}$$

$$u_k' \to u' \text{ fraco em } L^2(0,T;V) \tag{3.2.41}$$

$$\|u_k(t)\|^2 \to \phi(t) \text{ uniformemente em } [0,T]. \tag{3.2.42}$$

Por (3.2.27) e as convergências (3.2.39)-(3.2.42) obtemos que

$$u'' + M(\phi)Au + Au' = 0 \text{ em } L^2(0,T;V') \tag{3.2.43}$$

$$u(0) = u_0 \ , \ u'(0) = u_1. \tag{3.2.44}$$

Nosso objetivo é mostrar que $\phi(t) = \|u(t)\|^2$, $t \in [0,T]$.

Seja $\omega_k = u_k - u$, então

$$(\omega_k) \text{ é limitado em } \ L^\infty(0,T;V) \tag{3.2.45}$$

$$(\omega_k') \text{ é limitado em } L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V) \tag{3.2.46}$$

$$\omega_k'' + A\omega_k' + M(\phi_k)\ A\omega_k + [M(\phi_k) - M(\phi)]Au = 0 \text{ em } L^2(0,T;V') \tag{3.2.47}$$

$$\omega_k(0) = \omega_{0k} \to 0 \text{ fortemente em } V. \tag{3.2.48}$$

$$\omega'_k(0) = \omega_{1k} \to 0 \text{ fortemente em } H. \tag{3.2.49}$$

Por (3.2.47) obtemos

$$\langle \omega''_k, \omega_k \rangle + \langle A\omega'_k, \omega_k \rangle + M(\phi_k)\langle A\omega_k, \omega_k \rangle + [M(\phi_k) - M(\phi)]\langle Au, \omega_k \rangle = 0$$

Onde $\langle , \rangle$ representa a dualidade $V' \times V$.

Então,

$$\frac{d}{dt}(\omega'_k, \omega_k) - |\omega'_k|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega_k\|^2 + M(\phi_k)\|\omega_k\|^2 + [M(\phi_k) - M(\phi)]((u, \omega_k)) = 0$$

. Integrando de 0 a $t \leq T$, obtemos

$$\frac{1}{2}\|\omega_k(t)\|^2 \leq \sup_{[0,T]} |M(\phi_k(s))| \int_0^t \|\omega_k\|^2 ds + \int_0^t |\omega'_k(s)| ds + C_4|\omega'_k(t)|^2 + \frac{1}{4}\|\omega_k(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\omega_{0k}\|^2$$

$$+ \quad |\omega_{1k}||\omega_{0k}| + \sup_{[0,T]} |M(\phi(s)) - M(\phi_k(s))| \int_0^t \|u(s)\|\|\omega_k(s)\| ds$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\|\omega_k(t)\|^2 \leq m_0 \int_0^t \|\omega_k(s)\|^2 ds + C_5 \int_0^t \|\omega'_k(s)\|^2 ds + C_6|\omega'_k(t)|^2 \tag{3.2.50}$$

$$+\frac{1}{2}\|\omega_{0k}\|^2 + |\omega_{1k}||\omega_{0k}| + C_7 \sup_{[0,T]} |M(\phi(s)) - M(\phi_k(s))|$$

onde $m_o = \sup_{[0,T]} |M(\phi_k(s))|$ e C_5, C_6 e C_7 são constantes positivas. Por (3.2.47) obtemos

$$\langle \omega''_k, \omega'_k \rangle + \langle A\omega'_k, \omega'_k \rangle + M(\phi_k)\langle A\omega_k, \omega'_k \rangle + [M(\phi_k) - M(\phi)]\langle Au, \omega'_k \rangle = 0.$$

Então,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\omega'_k(t)|^2 + \|\omega'_k(t)\|^2 = -M(\phi_k)((\omega_k, \omega'_k)) + [M(\phi) - M(\phi_k)]((u, \omega'_k)).$$

Integrando de 0 a $t \leq T$, obtemos

$$\frac{1}{2}|\omega'_k(t)|^2 + \int_0^t \|\omega'_k(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{2}|\omega_{1k}|^2 + \sup_{[0,T]} |M(\phi_k(s))| \int_0^t \|\omega_k(s)\| \; \|\omega'_k(s)\| ds$$

$$+ \sup_{[0,T]} |M(\phi(s)) - M(\phi_k(s))| \int_0^t \|u(s)\| \; \|\omega_k'(s)\| \; ds$$

$$\leq \frac{1}{2}|\omega_{1k}|^2 \; + \; \frac{m_0^2}{2} \int_0^t \|\omega_k(s)\|^2 \; ds \; + \; C_8 \sup_{[0,T]} |M(\phi(s)) - M(\phi_k(s))| \; + \; \frac{1}{2} \int_0^t \|\omega_k'(s)\|^2 \; ds$$

onde C_8 é uma constante positiva independente de k e t. Portanto,

$$|\omega_k'(t)|^2 \; + \; \int_0^t \|\omega_k'(s)\|^2 \; ds \leq |\omega_{1k}|^2 \; + \; m_0^2 \int_0^t \|\omega_k(s)\|^2 \; ds \tag{3.2.51}$$

$$+ \; 2C_8 \sup_{[0,T]} |M(\phi(s)) - M(\phi_k(s))|.$$

Por (3.2.50) e (3.2.51) existe uma constante positiva C tal que

$$\|\omega_k(t)\|^2 \leq C[|\omega_{1k}|^2 \; + \; \|\omega_{0k}\|^2 \; + \; \sup_{[0,T]} |M(\phi(s)) - M(\phi_k(s))|] \; + \; C \int_0^t \|\omega_k(s)\|^2 \; ds$$

e pela desigualdade de Gronwall, segue que:

$$\|\omega_k(s)\|^2 \to 0 \text{ uniformemente em } [0,T]. \tag{3.2.52}$$

Se $t \in [0,T]$, então temos

$$|\phi(t) - \|u(t)\|^2| \leq |\phi_k(t) - \phi(t)| \; + \; |\|u_k(t)\|^2 - \|u(t)\|^2|$$

$$\leq |\phi_k(t) - \phi(t)| \; + \; (\|u_k(t)\| \; + \; \|u(t)\|)\|u_k(t) - u(t)\|$$

$$\leq |\phi_k(t) - \phi(t)| \; + \; \tilde{C}\|\omega_k(t)\|.$$

Por (3.2.42) e (3.2.52) obtemos que $\phi(t) = \|u(t)\|^2$

Do que foi exposto, verificamos que tomando-se o limite na equação (3.2.6), quando $k \to \infty$, temos que u é uma solução do sistema e o resultado está provado.

3.2.4 Unicidade da solução

Na prova da unicidade, vamos considerar u e v duas soluções do problema (E.3) proposto.

- (I) $$\begin{cases} u''(t) + M\left(|A^{1/2}u(t)|^2\right) Au(t) + Au'(t) = 0 \\ u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1 \end{cases}$$

- (II) $$\begin{cases} v''(t) + M\left(|A^{1/2}v(t)|^2\right) Av(t) + Av'(t) = 0 \\ v(0) = u_0,\ v'(0) = u_1 \end{cases}$$

Subtraindo as equações (I) e (II), temos

$$w''(t) + Aw'(t) = M\left(|A^{1/2}v(t)|^2\right) Av(t) - M\left(|A^{1/2}u(t)|^2\right) Au(t)$$

Assim, tomando $w \equiv u - v$, tem-se

$$w''(t) + M\left(|A^{1/2}u(t)|^2\right) Aw(t) + Aw'(t)$$

$$= w''(t) + Aw'(t) + M\left(|A^{1/2}u(t)|^2\right) A(u(t) - v(t))$$

$$= M\left(|A^{1/2}v(t)|^2\right) Av(t) - M\left(|A^{1/2}u(t)|^2\right) Au(t) + M\left(|A^{1/2}u(t)|^2\right) Au(t) - M\left(|A^{1/2}u(t)|^2\right) Av(t)$$

$$= M\left(|A^{1/2}v(t)|^2\right) Av(t) - M\left(|A^{1/2}u(t)|^2\right) Av(t)$$

então, $w \equiv u - v$ satisfaz

$$\begin{aligned} &w''(t) + M\left(|A^{1/2}u(t)|^2\right) Aw(t) + Aw'(t) \\ &= -[M\left(|A^{1/2}u(t)|^2\right) - M\left(|A^{1/2}v(t)|^2\right)]Av(t) \end{aligned} \tag{3.2.53}$$

e

$$w(0) = 0, \qquad w'(0) = 0 \tag{3.2.54}$$

Aplicando $2w'(t)+\gamma w(t), \quad 0<\gamma<\lambda_1^2$, em (3.2.53) e (3.2.54) e integrando de $[0,t]$, temos

$$\left(w''(t)+M\left(|A^{1/2}u(t)|^2\right)Aw(t)+Aw'(t), \quad 2w'(t)+\gamma w(t)\right)$$

$$=\left(-[M\left(|A^{1/2}u(t)|^2\right)-M\left(|A^{1/2}v(t)|^2\right)]Av(t), \quad 2w'(t)+\gamma w(t)\right)$$

Segue que,

$$[|w'(t)|^2+M(|A^{1/2}u(t)|^2)|A^{1/2}w(t)|^2+\frac{\gamma}{2}|A^{1/2}w(t)|^2+\gamma(w'(t),w(t))]$$

$$+\int_0^t[2|A^{1/2}w'(\tau)|^2-\gamma|w'(\tau)|^2+\gamma M(|A^{1/2}u(\tau)|^2)|A^{1/2}w(\tau)|^2]d\tau$$

$$=\int_0^t[2M'(|A^{1/2}u(\tau)|^2)(A^{1/2}u(\tau),A^{1/2}u'(\tau))|A^{1/2}w(\tau)|^2 \tag{3.2.55}$$

$$-\{M(|A^{1/2}u(\tau)|^2)-M(|A^{1/2}v(\tau)|^2)\}\{2(Av(\tau),w'(\tau))+(A^{1/2}v(\tau),A^{1/2}w(\tau))\}]d\tau$$

$$\leq C\int_0^t[|w'(\tau)|^2+|A^{1/2}w(\tau)|^2]d\tau \quad = \quad C\int_0^t[|w'(\tau)|^2+\|w(\tau)\|^2]d\tau$$

Desde que

$$|M(|A^{1/2}u(\tau)|^2)-M(|A^{1/2}v(\tau)|^2)|\leq C(|A^{1/2}u(\tau)|+|A^{1/2}v(\tau)|)|A^{1/2}w(\tau)|.$$

estimamos o lado esquerdo de (3.2.55) como descrito abaixo:

$$\text{(primeiro termo)} \;\geq |w'(t)|^2+\frac{\gamma}{2}|A^{1/2}w(t)|^2-\frac{\gamma}{2}\left(\frac{2}{\lambda_1^2}|w'(t)|^2+\frac{\lambda_1^2}{2}|w(t)|^2\right)$$

$$\geq \underbrace{c_0[|w'(t)|^2+|A^{1/2}w(t)|^2]}_{c_0[|w'(t)|^2+\|w(t)\|^2]}, \qquad c_0=min(1-\frac{\gamma}{\lambda_1^2},\frac{\gamma}{4})$$

e

$$\text{(segundo termo)} \;\geq \int_0^t(2\lambda_1^2-\gamma)|w'(\tau)|^2d\tau\geq 0.$$

Portanto, (3.2.55) produz

$$c_0[|w'(t)|^2+|A^{1/2}w(t)|^2]\leq C\int_0^t[|w'(\tau)|^2+|A^{1/2}w(\tau)|^2]d\tau$$

ou ainda

$$c_0[|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2] \leq C \int_0^t [|w'(\tau)|^2 + \|w(\tau)\|^2] d\tau$$

Conclui-se, pelo Lema de Gronwall, que $w \equiv 0$, ou seja, $u = v$. Assim, a parte da unicidade está completa.

Condições iniciais

Seja $\theta \in C^1([0, T_0])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T_0) = 0$. Consideremos $v \in H$, então $v\theta \in L^2(0, T_0; H)$ e, por conseguinte de (3.2.32) ($u'_k \to u$ fraco estrela em $L^\infty(0, T_0; H)$) vem que

$$\int_0^{T_0} (u'_k(t), v)\theta(t)dt \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{T_0} (u'(t), v)\theta(t)dt$$

Integrando por partes o resultado acima, temos

$$-(u_k(0), v) - \int_0^{T_0} (u_k(t), v)\theta'(t)dt \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -(u_(0), v) - \int_0^{T_0} (u(t), v)\theta'(t)dt$$

como

$$\int_0^{T_0} (u_k(t), v)\theta(t)dt \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{T_0} (u(t), v)\theta(t)dt$$

Resulta que

$$(u_{0k}, v) \longrightarrow (u(0), v); \quad \forall v \in H \tag{3.2.56}$$

Mas, $u_{0k} \longrightarrow u_0$ em $D(A^{1/2}) = V \overset{c}{\hookrightarrow} H$. Logo

$$(u_{0k}, v) \longrightarrow (u_0, v); \quad \forall v \in H \tag{3.2.57}$$

De (3.2.56) e (3.2.57) concluímos que

$$u(0) = u_0$$

Agora, seja $\delta > 0$. consideremos a função auxiliar.

$$\theta_\delta(t) = \begin{cases} -\frac{t}{\delta} + 1; & \text{se } \ 0 \leq t \leq \delta \\ 0; & \text{se } \ \delta \leq t \leq T_0 \end{cases}$$

Seja $j \in \mathbb{N}$ e consideremos $k \geq j$. Multiplicando ambos os lados de (3.2.27) por θ_δ e integrando em $[0;T_0]$ resulta que

$$\int_0^{T_0} (u_k''(t), w_j)\theta_\delta(t)dt + \int_0^{T_0} M(|A^{1/2}u_k(t)|^2)(Au_k(t), w_j)\theta_\delta(t)dt \qquad (3.2.58)$$
$$+ \int_0^{T_0} (Au_k'(t), w_j)\theta_\delta(t)dt = 0$$

Como $(u_k'(t), w_j) \in H'(0, T_0)$ vem que

$$\frac{d}{dt}(u_k'(t), w_j) = \frac{d}{dt}(u_k'|_{[0,\delta]}, w_j) = \left(\frac{d}{dt}(u_k'|_{[0,\delta]}), w_j\right) = (u_k''|_{[0,\delta]}, w_j).$$

Assim, como $\theta_\delta \in C^1[0,\delta]$, então a derivada de θ_δ no sentido das distribuições em $[0,\delta]$ coincide com a derivada clássica. Logo,

$$\frac{d}{dt}[(u_k'(t), w_j)\theta_\delta(t)] = (u_k''(t), w_j)\theta_\delta(t) + (u_k'(t), w_j)\theta_\delta'(t).$$

Integrando por partes a primeira integral de (3.2.58) vem

$$\underbrace{(u_k'(t), w_j)\theta_\delta(\delta)}_{=0} - (u_k'(0), w_j)\underbrace{\theta_\delta(0)}_{=1} - \int_0^\delta (u_k'(t), w_j)\theta_\delta'(t)dt$$
$$+ \int_0^\delta M(|A^{1/2}u_k(t)|^2)(Au_k(t), w_j)\theta_\delta(t)dt + \int_0^\delta (Au_k'(t), w_j)\theta_\delta(t)dt = 0$$

Tomando o limite em k na expressão acima, vem que

$$-(u_1, w_j) - \int_0^\delta (u'(t), w_j)\theta_\delta'(t)dt + \int_0^\delta M(\|u(t)\|^2)(Au(t), w_j)\theta_\delta(t)dt + \int_0^\delta (Au'(t), w_j)\theta_\delta(t)dt = 0$$

observando que em $[0,\delta]$, $\theta_\delta'(t) = -\frac{1}{\delta}$ e $\theta_\delta(t) = -\frac{t}{\delta} + 1$ obtemos

$$-(u_1', w_j) + \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (u'(t), w_j)dt + \int_0^\delta M(\|u(t)\|^2)(Au(t), w_j)dt \qquad (3.2.59)$$
$$-\frac{1}{\delta}\int_0^\delta M(\|u(t)\|^2)(Au(t), w_j)dt + \int_0^\delta (Au'(t), w_j)dt - \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (Au'(t), w_j)dt = 0$$

Como $u' \in C_s([0;T_0]; D(A^{1/2})) \hookrightarrow C_s([0;T]; H)$ (Representamos por $C_s([0;T_0]; D(A^{1/2}))$ o espaço de funções fracamente contínuas de $[0,T]$ em $D(A^{1/2})$), temos que todo $t \in [0,T]$ é ponto de Lebesgue da função $(u'(t), w_j)$ e, portanto, em particular para $t = 0$, temos que

$$\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}(u'(t), w_j)dt \overset{\delta\to 0^+}{\longrightarrow} (u'(0), w_j).$$

Desta forma, tomando o limite em (3.2.59) quando $\delta \to 0^+$ obtemos

$$-(u_1, w_j) + (u'(0), w_j) = 0; \quad \forall_j \in \mathbb{N}$$

ou seja

$$(u'(0), w_j) = (u_1, w_j); \quad \forall_j \in \mathbb{N}$$

Pela totalidade dos $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em H, segue que:

$$u'(0) = u_1$$

3.3 Comportamento assintótico quando $t \to +\infty$

Agora consideramos o problema (E.3) com $M(\lambda) = \lambda$, isto é

- (E.4) $$\begin{cases} u''(t) + M\left(|A^{1/2}u(t)|^2\right)Au(t) + Au'(t) = 0 \\ u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1 \end{cases}$$

com

$$E(t) = \frac{1}{2}|u'(t)|^2 \ + \ \frac{1}{4}\|u(t)\|^4$$

onde $E(t)$ é a energia associada ao problema (E.4).

Temos o seguinte resultado:

Teorema 3.3.1 (Decaimento de energia) *Nas condições do problema (E.4), com*

$$E(t) = \frac{1}{2}|u'(t)|^2 \ + \ \frac{1}{4}\|u(t)\|^4,$$

onde $E(t)$ é a energia associada ao problema (E.4), então a solução u de (E.3) obtida no **Teorema 1** *satisfaz*

$$|u'(t)|^2 + \|u'(t)\|^4 \leq C(1+t)^{-2}$$

para $t \geq 0$, onde C é uma constante positiva.

Na prova do teorema acima, utilizamos o seguinte lema devido a Nakao (ver [36] e [37]).

Lema 3.3.1 *Suponha que E seja uma função não negativa limitada em $\mathbb{R}^+$, satisfazendo*

$$\max_{t \leq s \leq t+1} E(s)^{1+\beta} \leq C_0[E(t) - E(t+1)]$$

para $t \geq 0$, onde C_0 e β são constantes positivas. Então,

$$E(t) \leq C(1+t)^{-1/\beta}$$

onde C é uma constante positiva.

Prova do **Teorema 3.5.1**

Tomando o produto interno da equação (E.4) com $u'(t)$, temos

$$(u''(t), u'(t)) + M\left(\|A^{1/2}u(t)\|^2\right)(Au(t), u'(t)) + (Au', u'(t)) = 0$$

Analisando cada termo, note que:

- No primeiro termo

$$(u''(t), u'(t)) = \int u''(t)\ u'(t) = \int \frac{1}{2}\frac{d}{dt}u'(t)\ u'(t) = \ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'(t)|^2$$

- No segundo termo, tomando $M(\lambda) = \lambda$, temos

$$(M\left(|A^{1/2}u(t)|^2\right)\ Au(t),\ u'(t)) = (|A^{1/2}u(t)|^2\ Au(t),\ u'(t)) = ((|u(t)|^2 u(t), u'(t))) =$$

$$= \int |u(t)|^2\ u(t)\ u'(t) = \int (u(t))^2\ u(t)\ u'(t) = \int (u(t))^3\ u'(t) = \int \frac{1}{4}\frac{d}{dt}(u(t))^4 =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^4$$

- No terceiro termo

$$(Au', u'(t)) = ((u'(t), u'(t))) = \|u'(t)\|^2$$

Portanto, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|u'(t)|^2 \ + \ \frac{1}{4}\|u(t)\|^4\right) \ + \ \|u'(t)\|^2 = 0. \tag{3.3.60}$$

Integrando (3.3.60) de t a $t+1$, obtemos

$$\int_t^{t+1} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'(s)|^2 ds \ + \ \int_t^{t+1} \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|u(s)\|^4 ds \ + \ \int_t^{t+1} \|u'(s)\|^2 ds = 0.$$

$$\frac{1}{2}|u'(t+1)|^2 - \frac{1}{2}|u'(t)|^2 \ + \ \frac{1}{4}\|u(t+1)\|^4 - \frac{1}{4}\|u(t)\|^4 \ + \ \int_t^{t+1} \|u'(s)\|^2 ds = 0.$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}|u'(t+1)|^2 \ + \ \frac{1}{4}\|u(t+1)\|^4}_{E(t+1)} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}|u'(t)|^2 \ + \ \frac{1}{4}\|u(t)\|^4\right)}_{E(t)} \ + \ \int_t^{t+1} \|u'(s)\|^2 ds = 0.$$

$$E(t) - E(t+1) = \int_t^{t+1} \|u'(s)\|^2 ds$$

Temos que

$$\int_t^{t+1} |u'(s)|^2 ds \leq C_0 \int_t^{t+1} \|u'(s)\|^2 ds \tag{3.3.61}$$

$$= C_0[E(t) - E(t+1)] \equiv F(t)^2$$

onde

$$E(t) = \frac{1}{2}|u'(t)|^2 \ + \ \frac{1}{4}\|u(t)\|^4$$

e C_0 é uma constante positiva tal que $|v|^2 \leq C_0\|v\|^2$. Portanto, usando o Teorema do Valor Médio para integrais em (3.3.61), existem dois pontos $t_1 \in [t, t+1/4]$ e $t_2 \in [t+3/4, t+1]$ tais que

$$\frac{1}{4}|u'(t_1)|^2 = \int_t^{t+\frac{1}{4}} |u'(s)|^2 ds \quad \text{e} \quad \frac{1}{4}|u'(t_2)|^2 = \int_{t+\frac{3}{4}}^{t+1} |u'(s)|^2 ds$$

Observe que

- $$|u'(t_1)|^2 = 4\int_t^{t+\frac{1}{4}} |u'(s)|^2 ds \leq 4\int_t^{t+1} |u'(s)|^2 ds = 4F(t)^2$$

  assim, temos
  $$|u'(t_1)| \leq 2F(t).$$

- Analogamente, tem-se
  $$|u'(t_2)| \leq 2F(t)$$

  ,

ou seja,

$$|u'(t_i)| \leq 2F(t), \quad i = 1, 2. \tag{3.3.62}$$

Tomando o produto interno da equação (E.4) com $u(t)$, temos

$$(u''(t), u(t)) + (|A^{1/2}u(t)|^2 Au(t), u(t)) + (Au'(t), u(t)) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(u'(t), u(t)) - |u'(t)|^2 + ((u(t)^3, u(t))) + ((u'(t), u(t))) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(u'(t), u(t)) - |u'(t)|^2 + \|u(t)\|^4 + ((u'(t), u(t))) = 0$$

Integrando de t_1 a t_2, obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(u'(s), u(s))ds - \int_{t_1}^{t_2} |u'(s)|^2 ds + \int_{t_1}^{t_2} \|u(s)\|^4 ds + \int_{t_1}^{t_2} ((u'(s), u(s)))ds = 0$$

$$(u'(t_2), u(t_2)) - (u'(t_1), u(t_1)) - \int_{t_1}^{t_2} |u'(s)|^2 ds + \int_{t_1}^{t_2} \|u(s)\|^4 ds + \int_{t_1}^{t_2} ((u'(s), u(s)))ds = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \|u(s)\|^4 ds = -(u'(t_2), u(t_2)) + (u'(t_1), u(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} |u'(s)|^2 ds - \int_{t_1}^{t_2} ((u'(s), u(s)))ds$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwars no produto interno, ficamos com

$$\int_{t_1}^{t_2} \|u(s)\|^4 ds \leq |u'(t_2)||u(t_2)| + |u'(t_1||u(t_1)| + \int_{t_1}^{t_2} |u'(s)|^2 ds + \int_{t_1}^{t_2} \|u(s)\|\|u'(s)\|ds$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \|u(s)\|^4 ds \leq |u'(t_1)|\ |u(t_1)| + |u(t_2)|\ |u'(t_2)| + \int_{t_1}^{t_2} |u'(s)|^2 ds + \int_{t_1}^{t_2} \|u(s)\|\ \|u'(s)\|\ ds$$

$$\leq 2F(t)|u(t_1)| + 2F(t)|u(t_2)| + \int_{t_1}^{t_2} |u'(s)|^2 ds + \int_{t_1}^{t_2} \|u(s)\|\ \|u'(s)\|\ ds \qquad (3.3.63)$$

Note que $[t_1, t_2] \subset [t, t+1]$, implicando em

$$\int_{t_1}^{t_2} |u'(s)|^2 ds \leq \int_{t}^{t+1} |u'(s)|^2 ds = F(t)^2$$

Logo, de (3.3.63) e da desigualdade de Young, temos

$$\int_{t_1}^{t_2} \|u(s)\|^4 ds \leq 2F(t)k_0\|u(t_1)\| + 2F(t)k_0\|u(t_2)\| + F(t)^2 + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\|u'(s)\|^{4/3}}{4/3} + \frac{\|u(s)\|^4}{4} \right) ds$$

$$= 2F(t)k_0\|u(t_1)\| + 2F(t)k_0\|u(t_2)\| + F(t)^2 + \frac{3}{4}\int_{t_1}^{t_2} \|u'(s)\|^{4/3} + \frac{1}{4}\int_{t_1}^{t_2} \|u(s)\|^4 ds$$

Daí

$$\frac{5}{4}\int_{t_1}^{t_2} \|u(s)\|^4 ds \quad \leq \quad 2F(t)k_0\|u(t_1)\| + 2F(t)k_0\|u(t_2)\| + F(t)^2 + \frac{3}{4}F(t)^{4/3}$$

Pela definição de $E(t)$ mais o fato de ser decrescente,

$$|u(t_i)| \leq k_0\|u(t_i)\| \leq k_0(2E(t_i))^{1/4} \leq k_0(2E(t))^{1/4}, \quad i = 1, 2.$$

De $\quad \frac{5}{4}\int_{t_1}^{t_2} \|u(s)\|^4 ds \leq 2F(t)k_0\|u(t_1)\| + 2F(t)k_0\|u(t_2)\| + F(t)^2 + \frac{3}{4}F(t)^{4/3}$, obtemos

$$\frac{5}{4}\int_{t_1}^{t_2} \|u(s)\|^4 ds \leq 2F(t)k_0(2E(t))^{1/4} + 2F(t)k_0(2E(t))^{1/4} + F(t)^2 + \frac{3}{4}F(t)^{4/3}$$

$$= 4F(t)k_0(2E(t))^{1/4} + F(t)^2 + \frac{3}{4}F(t)^{4/3}$$

como $2^{1/4} < 2$, obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \|u(s)\|^4 ds \leq \frac{4}{5}\left(8F(t)k_0(E(t))^{1/4} + F(t)^2 + \frac{3}{4}F(t)^{4/3} \right)$$

$$\leq C\left(F(t)(E(t))^{1/4} + F(t)^2 + F(t)^{4/3} \right)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \|u(s)\|^4 ds \leq C|F(t)(E(t))^{1/4} + F(t)^2 + F(t)^{4/3}| \ \equiv G(t)^2 \tag{3.3.64}$$

Integrando E de t_1 até t_1 e de (3.3.61) - (3.3.64), segue que

$$\int_{t_1}^{t_2} E(s)ds = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}|u'(s)|^2 ds + \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{4}\|u(s)\|^4 ds$$

$$\int_{t_1}^{t_2} E(s)ds \ \leq \ \frac{1}{2} \ F(t)^2 \ + \ \frac{1}{4} \ G(t)^2.$$

Novamente, pelo Teorema do Valor Médio para integrais, existe $t^* \in [t_1, t_2]$, tal que:

$$E(t^*)(t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} E(s)ds \ \leq \ \frac{1}{2} \ F(t)^2 \ + \ \frac{1}{4} \ G(t)^2$$

$$E(t^*) \leq \frac{1}{t_2 - t_1}\left(\frac{1}{2} \ F(t)^2 \ + \ \frac{1}{4} \ G(t)^2\right)$$

como $t_2 - t_1 \geq \frac{1}{2}$, ou seja, $\frac{1}{t_2 - t_1} \leq 2$, tem-se

$$E(t^*) \leq 2\left(\frac{1}{2} \ F(t)^2 \ + \ \frac{1}{4} \ G(t)^2\right)$$

$$E(t^*) \leq F(t)^2 \ + \ \frac{1}{2} \ G(t)^2. \tag{3.3.65}$$

Integrando (3.3.60) de t a t^*, temos:

$$\int_{t}^{t^*} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'(s)|^2 ds \ + \ \int_{t}^{t^*} \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|u(s)\|^4 ds \ + \ \int_{t}^{t^*} \|u'(s)\|^2 ds = 0.$$

$$\frac{1}{2}|u'(t^*)|^2 - \frac{1}{2}|u'(t)|^2 \ + \ \frac{1}{4}\|u(t^*)\|^4 - \frac{1}{4}\|u(t)\|^4 \ + \ \int_{t}^{t^*} \|u'(s)\|^2 ds = 0.$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}|u'(t^*)|^2 \ + \ \frac{1}{4}\|u(t^*)\|^4}_{E(t^*)} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}|u'(t)|^2 \ + \ \frac{1}{4}\|u(t)\|^4\right)}_{E(t)} \ + \ \int_{t}^{t^*} \|u'(s)\|^2 ds = 0.$$

$$\begin{aligned} E(t) &= E(t^*) \ + \ \int_{t}^{t^*} \ \|u'(s)\|^2 \ ds \\ &\leq F(t)^2 \ + \ \frac{1}{2} \ G(t)^2 + F(t)^2 \\ &= 2F(t)^2 \ + \ \frac{1}{2} \ G(t)^2 \end{aligned}$$

Note que $2F(t)^2 \leq 2kG(t)^2$, assim

$$E(t) \leq \frac{1+4k}{2}\, G(t)^2$$

$$\leq C_1|F(t)E(t)^{1/4} + F(t)^2 + F(t)^{4/3}|$$

Portanto,

$$E(t) \;\leq\; C_2[F(t)^2 \;+\; F(t)^{4/3}].$$

Assim,

$$\max_{s\in[t,t+1]} E(s) \;=\; E(t) \;\leq\; C_3F(t)^{4/3}.$$

Então

$$E(t)^{3/2} \;\leq\; C_4F(t)^2 \;=\; C_4[E(t) - E(t+1)]$$

ou

$$E(t)^{1+1/2} \;\leq\; C_4[E(t) - E(t+1)]$$

onde $C_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$, são constantes positivas. Portanto, aplicando o Lema de Nakao com $\beta = 1/2$, segue que

$$E(t) \leq C(1+t)^{-2}$$

onde C é uma constante positiva. Assim, a prova do **Teorema 2** está completa.

Concluímos que a energia associada a equação (E.4) possui decaimento polinomial ou que o comportamento da solução da equação (E.4) decai polinomialmente.

Referências Bibliográficas

[1] L. Medeiros and M. M. Miranda, "On a nonlinear wave equation with damping.," *Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid*, vol. 3, no. 2-3, pp. 213–231, 1990.

[2] G. Carrier, "On the vibration problem of elastic string," *QJ Appl. Math*, vol. 3, pp. 151–165, 1945.

[3] R. Dickey, "Infinite systems of nonlinear oscillation equations related to the string," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 23, no. 3, pp. 459–468, 1969.

[4] T. Nishida, "A note on the nonlinear vibratons of the elastic string," *Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ.*, vol. 33, pp. 329–341, 1971.

[5] G. P. Menzala, "On classical solutions of a quasilinear hyperbolic equation," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 3, no. 5, pp. 613–627, 1979.

[6] P. H. Rivera Rodriguezt, J. K. Hale, and P. Rivera, "On local strong solutions of a nonlinear partial differential equation," *Applicable Analysis*, vol. 10, no. 2, pp. 93–104, 1980.

[7] S. Greenberg, JM e Hu, "O problema do valor inicial para uma string esticada."

[8] S. Pohožaev, "On a class of quasilinear hyperbolic equations," *Mathematics of the USSR-Sbornik*, vol. 25, no. 1, p. 145, 1975.

[9] K. Nishihara, "On a global solution of some quasilinear hyperbolic equation," *Tokyo journal of mathematics*, vol. 7, no. 2, pp. 437–459, 1984.

[10] "Sistemas infinitos de equações de oscilação não linear com amortecimento linear."

[11] E. H. De Brito and J. Hale, "The damped elastic stretched string equation generalized: existence, uniqueness, regularity and stability," *Applicable Analysis*, vol. 13, no. 3, pp. 219–233, 1982.

[12] Y. Yamada, "On some quasilinear wave equations with dissipative terms," *Nagoya Mathematical Journal*, vol. 87, pp. 17–39, 1982.

[13] K. Nishihara, "Exponential decay of solutions of some quasilinear hyperbolic equations with linear damping," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 8, no. 6, pp. 623–636, 1984.

[14] J. Ball, "Initial-boundary value problems for an extensible beam," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 42, no. 1, pp. 61–90, 1973.

[15] "Vibrações livres e flambagem dinâmica da viga extensível," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 29.

[16] L. A. Medeiros, "Em uma nova classe de equações de onda não linear."

[17] M. P. Matos and D. C. Pereira, "On a hyperbolic equation with strong damping," *Funkcial. Ekvac*, vol. 34, no. 2, pp. 303–311, 1991.

[18] K. Nishihara, "Degenerate quasilinear hyperbolic equation with strong damping," *Funkcial. Ekvac*, vol. 27, no. 1, pp. 125–145, 1984.

[19] M. Nakao, "Decay of solutions of some nonlinear evolution equations," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 60, no. 2, pp. 542–549, 1977.

[20] H. Brezis, "Analyse fonctionnelle," *Théorie et applications*, 1983.

[21] H. Brezis and H. Brézis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, vol. 2. Springer, 2011.

[22] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, vol. 17. John Wiley & Sons, 1991.

[23] L. MEDEIROS and E. MELO, "A integral de lebesgue. textos de métodos matemáticos," 1989.

[24] R. G. Bartle, *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons, 2014.

[25] E. Amaral *et al.*, "Operadores lineares em espaços de hilbert e aplicações," 2006.

[26] M. M. Cavalcanti, V. D. Cavalcanti, and V. Komornik, "Introduçao a análise funcional," *Eduem, Maringá*, 2011.

[27] M. A. F. Araújo, *Introdução às equações diferenciais parciais*. No. 1, EDUFMA, São Lu is, 2020.

[28] M. Landsberg, "K. yosida, functional analysis.(die grundlehren der mathematischen wissenschaften, band 123) xii+ 458 s. berlin/heidelberg/new york 1965. springer-verlag. preis geb. dm 66,—," 1966.

[29] J. Simon, "Compact sets in the spacel p (o, t; b)," *Annali di Matematica pura ed applicata*, vol. 146, no. 1, pp. 65–96, 1986.

[30] J. Cole, C. Dougherty, and J. Huth, “Constant-strain waves in strings,” 1953.

[31] L. A. Medeiros and J. Límaco, “On the kirchhoff equation in noncylindrical domains of r,” *Pro Mathematica*, vol. 19, no. 37-38, pp. 91–106, 2005.

[32] H. R. Clark, S. G. L. P. Jutuca, and M. M. Miranda, “Vibrations of elastic stretched strings,” [19–].

[33] D. Pereira, “Asymptotic behaviour of solutions of a degenerate quasilinear hyperbolic equation,” tech. rep., Laboratorio Nacional de Computacao Cientifica, 1988.

[34] V. Rezende, “O método de galerkin,” *Universidade Estadual de Maringá*, 2005.

[35] P. Linz, *Analytical and numerical methods for Volterra equations*. SIAM, 1985.

[36] Y. S. S. Ayala, “El lema de nakao y algunas aplicaciones,” *Pesquimat*, vol. 10, no. 1.

[37] M. Nakao, “Convergence of solutions of the wave equation with a nonlinear dissipative term to the steady state,” *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University. Series A, Mathematics*, vol. 30, no. 2, pp. 257–265, 1976.