

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Dinâmica de Defeitos Topológicos em Modelos
Hiperbólicos Generalizados**

Daniel Pinheiro Santos

ORIENTADOR: FABIANO DE CARVALHO SIMAS

SÃO LUÍS
2022

Dinâmica de Defeitos Topológicos em Modelos Hiperbólicos Generalizados

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Física.

Orientador: Fabiano de Carvalho Simas

Doutor em Física - UFMA

SÃO LUÍS

2022

Santos, Daniel Pinheiro

Dinâmica de Defeitos em Modelos Hiperbólicos

Generalizados. / Daniel Pinheiro Santos.

- 2022.

120 f.

Orientador: Fabiano de Carvalho Simas.

Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Física/CCET, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2022.

1. Defeitos topológicos. 2. Kinks.
3. Modelos Hiperbólicos. 4. Campos Escalares. I. Simas, Fabiano de Carvalho. II. Título.

DANIEL PINHEIRO SANTOS

Dinâmica de Defeitos em Modelos Hiperbólicos Generalizados

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Física.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fabiano de Carvalho Simas
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Carlos Eduardo da Hora Santos
Universidade Federal do Maranhão

Prof^ª. Dr^ª. Azadeh Mohammadi
Universidade Federal de Pernambuco

Aos que virão

Agradecimentos

Agradeço a todos que contribuíram e me incentivaram para a realização deste trabalho. Em particular agradeço à CAPES pelo financiamento de minha bolsa. Agradeço aos colegas da graduação e da pós-graduação. Agradeço ao grupo de Dinâmica de Defeitos Topológicos da UFMA pelo incentivo através de reuniões, seminários, discussões, exemplos e conversas. Agradeço ao meu orientador, professor Fabiano Simas, pelo direcionamento, esclarecimentos, conversas, compreensão, incentivo, conselhos e paciência. Agradeço a minha família, em especial à minha noiva Deusilene, pelo companheirismo, cuidado e incentivo, e aos meus pais Rose e Jacob, por serem meu alicerce e maior exemplo para minha vida. Agradeço ao SENHOR, meu Deus, por todas estas coisas e muito mais.

*“Somos todos iguais, braços dados ou não
Nas escolas, nas ruas, campos, construções
Caminhando e cantando e seguindo a canção.”*

Geraldo Vandré

Resumo

Neste trabalho, utilizamos campos escalares reais para estudar o processo de colisão de soluções do tipo *kink*. Realizamos uma revisão da literatura, obtendo as características e realizando colisões das soluções do tipo sóliton do modelo integrável sine-Gordon e dos modelos não integráveis ϕ^4 e ϕ^6 . As colisões apontam para a influência dos modos de vibração no processo de espalhamento. Apresentamos uma família de generalizações de modelos hiperbólicos, descritos por uma função geratriz de potenciais hiperbólicos. Utilizamos duas teorias geradas por essa função geratriz para estudar o espalhamento, que chamamos de modelo H^4 e modelo H^6 . Na teoria H^4 os fenômenos decorrentes do processo de colisão se mostraram bastante ricos, sendo estados de *bion*, janelas de ressonância, supressão e reaparecimento de janelas de *two-bounce*, criação de pulsos oscilatórios e variação da velocidade crítica com um parâmetro característico da teoria. A riqueza de fenômenos também se fez presente nas interações das soluções do modelo H^6 . Na configuração *kink-antikink*, encontramos estados de *bion* e fenômenos de *one-bounce* caracterizados por uma mudança de setor topológico inicial, no qual as soluções estão inseridas, janelas de *one-bounce*, visitas no setor topológico secundário, *three-bounce*, criação de pulsos oscilatórios e um padrão para o decaimento do par das soluções em pulsos oscilatórios. Na configuração *antikink-kink*, encontramos estados de *bion*, janelas de ressonância, supressão das janelas de *two-bounce*, uma mesma janela de *two-bounce* levando a colisões de ordem diferente e a criação de pulsos oscilatórios.

Palavras-chaves: Defeitos Topológicos, Kinks, Modelos Hiperbólicos, Campos Escalares.

Abstract

In this work, we take real scalar fields to study the collision process of solutions like kink. We carried out a literature review, obtaining the characteristics and performing collisions of the soliton-type solutions of the integrable sine-Gordon model and the non-integrable models ϕ^4 and ϕ^6 . Collisions point to the influence of vibrational modes on the scattering process. We present a family of generalizations of hyperbolic models, working with a generating function of hyperbolic potentials. We consider two theories generated by this generating function to study scattering, which we call the H^4 model and the H^6 model. In the H^4 theory the phenomena resulting from the collision process are diversified, being states of bion, resonance windows, suppression and reappearance of two-bounce windows, creation of oscillating pulses and variation of the critical speed with a parameter characteristic of the theory. The richness of phenomena was also present in the interactions of the solutions of the model H^6 . In the configuration kink-antikink, we found states of bion and phenomena of one-bounce characterized by an initial topological sector change, in which the solutions are inserted, windows of one-bounce, visits to the secondary topological sector, three-bounce, creation of oscillating pulses and a pattern for the pair decay of solutions into oscillating pulses. In the configuration antikink-kink, we found states of bion, resonance windows, suppression of two-bounce windows, a same two-bounce window leading to different order collisions and the creation of oscillating pulses.

Keywords: Topological Defects, Kinks, Hyperbolic Models, Scalar Fields.

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Resumo | i |
| Abstract | ii |
| Sumário | iv |
| Lista de Figuras | v |
| Lista de Tabelas | x |
| 1 Introdução | 1 |
| 2 Campos escalares reais | 7 |
| 2.1 Formulação lagrangeana | 7 |
| 2.2 O teorema de Noether | 9 |
| 2.3 O método de Bogomol'nyi | 11 |
| 2.4 Características topológicas das soluções | 12 |
| 2.5 Análise de estabilidade linear | 13 |
| 3 Modelos integráveis: uma revisão do modelo sine-Gordon | 18 |
| 3.1 O modelo sine-Gordon e suas características | 18 |
| 3.2 Colisões <i>kink-antikink</i> no modelo sine-Gordon | 22 |
| 4 Modelos não integráveis: uma revisão dos modelos ϕ^4 e ϕ^6 | 24 |
| 4.1 O modelo ϕ^4 e suas características | 24 |
| 4.2 Colisões <i>kink-antikink</i> do modelo ϕ^4 | 28 |
| 4.3 O modelo ϕ^6 e suas características | 33 |
| 4.4 Sobre as colisões das soluções do modelo ϕ^6 | 38 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.5 | Colisões <i>kink-antikink</i> do modelo ϕ^6 | 39 |
| 4.6 | Colisões <i>antikink-kink</i> do modelo ϕ^6 | 40 |
| 5 | Modelos com interações hiperbólicas | 44 |
| 5.1 | Modelos hiperbólicos generalizados | 44 |
| 5.2 | O modelo H^4 e suas características | 49 |
| 5.3 | Colisões <i>kink-antikink</i> do modelo H^4 | 52 |
| 5.4 | O modelo H^6 e suas características | 62 |
| 5.5 | Sobre as colisões das soluções do modelo H^6 | 67 |
| 5.6 | Colisões <i>kink-antikink</i> do modelo H^6 | 68 |
| 5.7 | Colisões <i>antikink-kink</i> do modelo H^6 | 77 |
| 6 | Conclusão | 83 |
| A | Equação de movimento | 88 |
| A.1 | Equação de movimento | 88 |
| B | Métodos numéricos | 90 |
| B.1 | Diferenças finitas | 90 |
| B.2 | Runge-Kutta 4 ^a ordem | 92 |
| C | O método da deformação | 93 |
| C.1 | Estados BPS | 93 |
| C.2 | Energia das soluções | 94 |
| C.3 | Estabilidade linear | 95 |
| | Referências | 96 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | (a) Sistema sem quebra de simetria. (b) Sistema com quebra de simetria. | 2 |
| 3.1 | (a) Potencial do modelo sine-Gordon. (b) Solução <i>kink</i> e solução <i>antikink</i> do modelo sine-Gordon: <i>kink</i> em azul e <i>antikink</i> em laranja. | 19 |
| 3.2 | Densidade de energia das solução <i>kink</i> do modelo sine-Gordon. | 20 |
| 3.3 | (a) Potencial de estabilidade do modelo sine-Gordon. (b) Modo zero do modelo sine-Gordon. | 21 |
| 3.4 | (a) Perfil inicial das soluções do modelo sine-Gordon. (b) Colisão <i>kink-antikink</i> do modelo sine-Gordon para $v_i = 0.2$ | 22 |
| 3.5 | Perfil das soluções do modelo sine-Gordon. (a) Perfil <i>kink-antikink</i> antes da colisão, com Tempo 2, em vermelho, posterior ao Tempo 1, em azul. (b) Perfil <i>antikink-kink</i> depois da colisão, com Tempo 4, em verde, posterior ao Tempo 3, em amarelo. | 23 |
| 4.1 | (a) Potencial do modelo ϕ^4 . (b) Solução <i>kink</i> (azul) e solução <i>antikink</i> (laranja) do modelo ϕ^4 | 25 |
| 4.2 | Densidade de energia da solução <i>kink</i> do modelo ϕ^4 | 26 |
| 4.3 | Potencial de perturbação da solução <i>kink</i> do modelo ϕ^4 em azul. Modo zero em amarelo e modo vibracional em laranja. | 27 |
| 4.4 | Perfil inicial das soluções do modelo ϕ^4 | 28 |
| 4.5 | Colisão <i>kink-antikink</i> do modelo ϕ^4 para $v_i = 0.3$. (a) Centro de massa da colisão. (b) Vista superior da colisão. | 29 |
| 4.6 | Colisão <i>kink-antikink</i> para $v_i = 0.18$: (a) Malha 3D da evolução espaço-temporal; (b) centro de massa da evolução do campo. | 30 |
| 4.7 | Centro de massa da evolução do campo para colisão <i>kink-antikink</i> com: (a) $v_i = 0.2$, na primeira janela de <i>two-bounce</i> , e (b) $v_i = 0.2396$, na terceira janela de <i>two-bounce</i> | 31 |
| 4.8 | Número de <i>bounce</i> por velocidade inicial do modelo ϕ^4 | 31 |
| 4.9 | Tempo da primeira, segunda e terceira colisão. Em preto: tempo da primeira colisão; em vermelho: tempo da segunda colisão; em azul: tempo da terceira colisão. | 32 |

| | | |
|------|---|----|
| 4.10 | Centro de massa da evolução do campo para colisão <i>kink-antikink</i> com: (a) $v_i = 0.1829$, na primeira janela de <i>three-bounce</i> em torno da primeira janela de <i>two-bounce</i> , e (b) $v_i = 0.2368$, na terceira janela de <i>three-bounce</i> em torno da terceira janela de <i>two-bounce</i> | 33 |
| 4.11 | Potencial do modelo ϕ^6 | 34 |
| 4.12 | Solução <i>kink</i> , em azul, e solução <i>antikink</i> , em laranja, do modelo ϕ^6 : (a) Soluções do primeiro setor topológico; (b) Soluções do segundo setor topológico. | 35 |
| 4.13 | Densidade de energia da solução <i>kink</i> do primeiro setor topológico do modelo ϕ^6 | 36 |
| 4.14 | Potencial de perturbação das soluções <i>kink</i> e <i>antikink</i> do modelo ϕ^6 do primeiro setor topológico.. (a) Potencial da solução <i>kink</i> . (b) Potencial da solução <i>antikink</i> | 37 |
| 4.15 | Perfil das soluções de modo zero do primeiro setor topológico do modelo ϕ^6 . Em azul: modo zero da solução <i>kink</i> ; em laranja: modo zero da solução <i>antikink</i> | 38 |
| 4.16 | (a) Perfil inicial da colisão <i>kink-antikink</i> do modelo ϕ^6 . (b) Perfil inicial da colisão <i>antikink-kink</i> do modelo ϕ^6 | 39 |
| 4.17 | Colisão <i>kink-antikink</i> do modelo ϕ^6 . (a) Evolução do centro de massa $\phi(x = 0, t)$ do campo inicial, para $v_i = 0.2$. (b) Vista superior da evolução espaço-temporal do campo inicial, para $v_i = 0.3$ | 40 |
| 4.18 | Centro de massa do campo escalar. (a) Colisão <i>antikink-kink</i> para $v_i = 0.023$; (b) Colisão <i>antikink-kink</i> para $v_i = 0.23$ | 41 |
| 4.19 | Tempo da primeira (t_1), segunda (t_2) e terceira (t_3) colisão do par <i>antikink-kink</i> do modelo ϕ^6 em função da velocidade inicial v_i | 42 |
| 4.20 | Evolução do centro de massa do campo inicial do par <i>antikink-kink</i> , para $v_i = 0.0274$. Inicialmente a colisão resulta em <i>two-bounce</i> , mas após um tempo decai, o que caracteriza um estado de <i>quasiresonance</i> | 42 |
| 4.21 | Configuração do potencial de perturbação e do par das soluções topológicas do modelo ϕ^6 . (a) Configuração inicial do par <i>kink-antikink</i> . (b) Configuração inicial do par <i>antikink-kink</i> | 43 |
| 5.1 | Potenciais V_a multiplicados por a^2 , com valor fixo de $n = 2$. (a) Potencial (5.3) em azul e potencial (5.5) em laranja. (b) Potencial (5.4) em verde e potencial (5.6) em ciano. | 45 |
| 5.2 | Soluções <i>kink</i> para $n = 2$. (a) Solução <i>kink</i> para $a = 1$ ($m = 0$) em azul e soluções <i>kink</i> para $a = 3$ ($m = 0, 1, 2$) em laranja. (b) Soluções <i>kink</i> para $a = 2$ ($m = 0, 1$) em verde e soluções <i>kink</i> para $a = 4$ ($m = 0, 1, 2, 3$) em ciano. | 46 |

| | | |
|------|---|----|
| 5.3 | Densidade de energia das soluções <i>kink</i> para $n = 2$. (a) Densidade de energia da solução <i>kink</i> para $a = 1$ ($m = 0$) em azul e densidade de energia das soluções <i>kink</i> para $a = 3$ ($m = 0, 1, 2$) em laranja. (b) Densidade de energia das soluções <i>kink</i> para $a = 2$ ($m = 0, 1$) em verde e densidade de energia das soluções <i>kink</i> para $a = 4$ ($m = 0, 1, 2, 3$) em ciano. | 47 |
| 5.4 | Potencial de perturbação das soluções <i>kink</i> para $n = 2$. (a) Potencial de perturbação para $a = 1$ e $m = 0$. (b) Potencial de perturbação para $a = 2$ e $m = 0, 1$. (c) Potencial de perturbação para $a = 3$ e $m = 0, 1, 2$. (d) Potencial de perturbação para $a = 4$ e $m = 0, 1, 2, 3$ | 48 |
| 5.5 | Soluções de modo zero (5.11) para $n = 2$. (a) Solução para $a = 1$ ($m = 0$) em azul e soluções para $a = 3$ ($m = 0, 1, 2$) em laranja. (b) Soluções para $a = 2$ ($m = 0, 1$) em verde e soluções para $a = 4$ ($m = 0, 1, 2, 3$) em ciano. | 48 |
| 5.6 | (a) Potencial H^4 para $n = 2$ em azul e potencial ϕ^4 em laranja. (b) Potencial H^4 para diversos valores de n | 49 |
| 5.7 | (a) Solução (5.15): <i>kink</i> em azul, com $m = 0$, e <i>antikink</i> em laranja, com $m = 1$. (b) Solução (5.15) com $m = 0$, para diversos valores de n | 50 |
| 5.8 | (a) Densidade de energia da solução <i>kink</i> de (5.15) para diversos valores de n . (b) Energia da solução <i>kink</i> de (5.15) em função de n | 51 |
| 5.9 | Potencial de perturbação (5.19) para diversos valores de n | 51 |
| 5.10 | Solução de modo zero do modelo H^4 para diversos valores de n | 52 |
| 5.11 | Perfil inicial do par <i>kink-antikink</i> do modelo H^4 para diversos valores de n | 53 |
| 5.12 | Janelas de <i>two-bounce</i> , em azul, e <i>one-bounce</i> , em vermelho, do modelo H^4 em função de n . A região branca corresponde a fenômenos de <i>n-bounce</i> , estado de <i>bion</i> ou pulsos oscilatórios. | 54 |
| 5.13 | Número de modos vibracionais em função de n . (a) Região $1.01 < n < 1.1$. (b) Região $1.01 < n < 2.4$ | 55 |
| 5.14 | Tempo da primeira (linha azul), segunda (linha vermelha) e terceira colisão (linha amarela) das soluções <i>kink-antikink</i> do modelo H^4 para $n = 6$ | 56 |
| 5.15 | Colisão <i>kink-antikink</i> do modelo H^4 para $n = 6$. (a) Colisão para $v_i = 0.115$, na primeira janela de <i>two-bounce</i> . (b) Colisão para $v_i = 0.157$, na segunda janela de <i>two-bounce</i> | 57 |
| 5.16 | Tempo da primeira (linha azul), segunda (linha vermelha) e terceira colisão (linha amarela). (a) $n = 4$, (b) $n = 2.3$, (c) $n = 2.2$ e (d) $n = 1.8$ | 58 |
| 5.17 | Surgimento de falsa janela de <i>two-bounce</i> em função de n e v_i | 59 |

| | | |
|------|--|----|
| 5.18 | Tempo da primeira (linha azul), segunda (linha vermelha) e terceira colisão (linha amarela). (a) $n = 1.563$, (b) $n = 1.405$, (c) $n = 1.247$ e (d) $n = 1.168$ | 60 |
| 5.19 | (a) Criação de pulsos oscilatórios através da colisão <i>kink-antikink</i> no modelo H^4 . (a) Colisão para $n = 1.0005$ e $v_i = 0.25$. (b) Colisão para $n = 1.168$ e $v_i = 0.1987$ | 61 |
| 5.20 | Velocidade crítica do modelo H^4 em função do parâmetro n | 61 |
| 5.21 | (a) Potencial H^6 para $n = 2$ em laranja e potencial ϕ^6 em azul. (b) Potencial H^6 para diversos valores de n | 62 |
| 5.22 | Soluções <i>kink</i> e <i>antikink</i> do modelo H^6 para $n = 2$ (a) Solução <i>kink</i> em azul e solução <i>antikink</i> em laranja, do primeiro setor topológico; (b) Solução <i>kink</i> em azul e solução <i>antikink</i> em laranja, do segundo setor topológico. | 63 |
| 5.23 | Solução <i>kink</i> do modelo H^6 para diversos valores de n | 64 |
| 5.24 | (a) Densidade de energia da solução <i>kink</i> (5.26) para diversos valores de n . (b) Energia da solução <i>kink</i> (5.26) em função de n | 65 |
| 5.25 | (a) Potencial de perturbação (5.32) da solução <i>kink</i> (5.26) para diversos valores de n . (b) Modo zero 5.33 para diversos valores de n | 66 |
| 5.26 | (a) Perfil inicial da colisão <i>kink-antikink</i> do modelo H^6 para diversos valores de n . (b) Perfil inicial da colisão <i>antikink-kink</i> do modelo H^6 para diversos valores de n | 67 |
| 5.27 | Potencial de perturbação do par <i>kink-antikink</i> do modelo H^6 para diversos valores de n | 68 |
| 5.28 | Vista superior da malha 3D da evolução espaço-temporal da colisão <i>kink-antikink</i> do modelo H^6 . (a) Colisão para $n = 1.05$ e $v_i = 0.1$, mostrando a mudança de mínimo das soluções; (b) Colisão para $n = 1.0005$ e $v_i = 0.1$, mostrando o estado de <i>bion</i> | 69 |
| 5.29 | Centro de massa do campo escalar do modelo H^6 para $n = 1.0005$. Colisão <i>kink-antikink</i> para (a) $v_i = 0.1752$ e (b) $v_i = 0.1857$ | 70 |
| 5.30 | Número de oscilações que ocorrem antes do escape para o infinito no fenômeno de <i>one-bounce</i> em função da velocidade inicial. | 70 |
| 5.31 | Centro de massa do campo escalar do modelo H^6 para $n = 1.0005$. Colisão <i>kink-antikink</i> para (a) $v_i = 0.1781$ e (b) $v_i = 0.17805$ | 70 |
| 5.32 | Centro de massa do campo escalar do modelo H^6 para $n = 1.0000005$. Colisão <i>kink-antikink</i> para (a) $v_i = 0.1$ e (b) $v_i = 0.21863$ | 71 |
| 5.33 | Centro de massa do campo escalar do modelo H^6 para $n = 1.0000005$. Colisão <i>kink-antikink</i> para (a) $v_i = 0.194$ e (b) $v_i = 0.135$ | 72 |

| | | |
|------|--|----|
| 5.34 | Vista superior da colisão <i>kink-antikink</i> do modelo H^6 para $n = 1.0000005$. Colisão para $v_i = 0.217$ | 72 |
| 5.35 | Vista superior da colisão <i>kink-antikink</i> do modelo H^6 para $n = 1.0000005$. Colisão para $v_i = 0.2174$ | 73 |
| 5.36 | Colisão <i>kink-antikink</i> do modelo H^6 para $n = 1.0000005$. (a) Colisão para $v_i = 0.21059$. (b) Colisão para $v_i = 0.21816$ | 74 |
| 5.37 | Vista superior da colisão <i>kink-antikink</i> do modelo H^6 para $n = 1.0000005$. (a) Colisão para $v_i = 0.2034$. (b) Colisão para $v_i = 0.218$ | 75 |
| 5.38 | Número de visitas ao setor topológico secundário antes do decaimento em estados oscilatório em função da velocidade inicial. Em vermelho: 7 visitas; em laranja: 6 visitas; em amarelo: 5 visitas; em verde: 4 visitas; em ciano: 3 visitas; em azul: 2 visitas. | 75 |
| 5.39 | Vista superior da colisão <i>kink-antikink</i> do modelo H^6 para $n = 1.0000005$. (a) Colisão para $v_i = 0.2196$. (b) Colisão para $v_i = 0.21963$ | 76 |
| 5.40 | Potencial de perturbação do par <i>antikink-kink</i> do modelo H^6 para diversos valores de n | 77 |
| 5.41 | Tempo da primeira (linha azul), segunda (linha vermelha) e terceira colisão (linha amarela). (a) Processo para $n = 1.05$; (b) Processo para $n = 1.0005$ | 78 |
| 5.42 | Centro de massa do campo escalar no processo de colisão para $n = 1.02525$ com (a) $v_i = 0.1505$ e (b) $v_i = 0.1557$ | 79 |
| 5.43 | Centro de massa do campo escalar no processo de colisão para $n = 1.0005$ com (a) $v_i = 0.3373$ e (b) $v_i = 0.3376$ | 79 |
| 5.44 | Número de <i>bounce</i> , N_b em função da velocidade inicial, v_i | 80 |
| 5.45 | Centro de massa do campo escalar no processo de colisão para $n = 1.0000005$ com (a) $v_i = 0.3632$ e (b) $v_i = 0.243$ | 80 |
| 5.46 | Vista superior da colisão <i>antikink-kink</i> do modelo H^6 para $n = 1.0000005$. Colisão para $v_i = 0.2174$. (a) Coloração artificial. (b) A coloração representa os valores assumidos pelo campo durante o processo. | 81 |
| 5.47 | Vista superior do processo de colisão <i>antikink-kink</i> do modelo H^6 para $n = 1.0005$. (a) Colisão para $v_i = 0.33$; (b) Colisão para $v_i = 0.321$; (c) Colisão para $v_i = 0.32$; e (d) Colisão para $v_i = 0.322$ | 82 |
| B.1 | Malha de pontos uniformemente espaçados. | 90 |

Lista de Tabelas

| | | |
|-----|--|----|
| 4.1 | Cargas topológicas das soluções estáticas do modelo ϕ^6 | 35 |
| 5.1 | Relação do parâmetro n com a velocidade crítica v_{cr} , ordem k_1 , velocidade v_1 e velocidade v_2 , da primeira janela de <i>two-bounce</i> e com o intervalo de velocidades (ou espessura) Δv de cada janela. | 56 |
| 5.2 | Relação do parâmetro n com a velocidade crítica v_{cr} , ordem k_1 , velocidade v_1 e velocidade v_2 , da primeira janela de <i>two-bounce</i> , bem como o intervalo de velocidades (ou espessura) Δv de cada janela. | 59 |
| 5.3 | Relação do parâmetro n com a ordem k_1 , k_2 e k_3 | 61 |
| 5.4 | Cargas topológicas das soluções estáticas do modelo H^6 | 64 |
| 5.5 | Relação do parâmetro n com a velocidade crítica, v_{cr} , e com a ordem, k_i , e a espessura, Δv_i , da i -ésima janela de <i>two-bounce</i> | 78 |

1 Introdução

O estudo de soluções com energia localizada, tem seu primeiro registro realizado pelo engenheiro escocês John Scott Russel [1]. Este estava observando um barco puxado por cavalos em um canal estreito. Após parar, o barco criou uma onda que se moveu por uma longa distância sem perder sua forma. O fenômeno, ocorrido em agosto de 1834, foi assim relatado por Russell em 1844 [1, 2]:

“Eu estava observando o movimento de um barco, que era puxado rapidamente ao longo de um canal estreito por um par de cavalos, quando o barco parou de repente - mas não a massa de água no canal que ele havia posto em movimento; esta acumulou-se ao redor da proa do barco num estado de violenta agitação e, em seguida, deixando-o repentinamente para trás, rolou para a frente a grande velocidade, assumindo a forma de uma grande elevação solitária, um monte de água arredondado, suave e bem definido que continuou seu curso ao longo do canal aparentemente sem mudança de forma ou diminuição de velocidade. Eu a segui a cavalo e a alcancei ainda rolando a uma velocidade de umas oito ou nove milhas por hora, preservando seu contorno original de uns trinta pés de comprimento por um pé a um pé e meio de altura. Sua altura diminuiu gradualmente e, depois de uma perseguição por uma ou duas milhas, eu a perdi nos meandros do canal.”

A onda descrita por Russell ficou conhecida como onda solitária. Uma descrição matemática desta onda solitária foi realizada por Korteweg e de Vries, através do que ficou conhecido como equação KdV [3].

Ao estudar numericamente a equação KdV, Zabusky e Kruskal descobriram que ondas solitárias podem manter sua forma, velocidade e energia ao interagir com outra onda solitária. Ondas que possuem essa característica foram chamadas de sólitons [4]. Equações diferenciais que suportam soluções do tipo sóliton são a equação KdV [5, 6], a equação de *Schrödinger* não linear [7, 8] e generalizações da equação de Klein Gordon [9, 10].

A natureza possui diversas estruturas do tipo sóliton, que são conhecidas como defeitos topológicos¹. Estes defeitos não variam sua forma com o tempo, se apresentam como estruturas bem localizadas, com uma energia bem definida e surgem em diversos cenários [11 - 13]. Dentre as soluções do tipo sóliton, podemos destacar paredes de domínio ou *skyrmions* em (3,1) dimensões [11, 13, 15, 16]; vórtice [14] em (2,1) dimensões; e *kinks* [17] em (1,1) dimensão.

O aparecimento de defeitos topológicos é relacionado à quebra espontânea de simetria [13]. Para compreender esta relação, vamos considerar o exemplo de uma mesa redonda composta por oito pessoas, conforme mostra a Figura 1.1. Existe uma xícara de café para cada pessoa. Podemos dizer que o sistema é satisfeito² quando todas as pessoas estão sentadas com a xícara ou quando todos estão com a xícara.

¹Cada defeito topológico possui sua contraparte: um antidefeito.

²Neste caso, considere que o sistema deverá satisfazer a exigência de alguém.

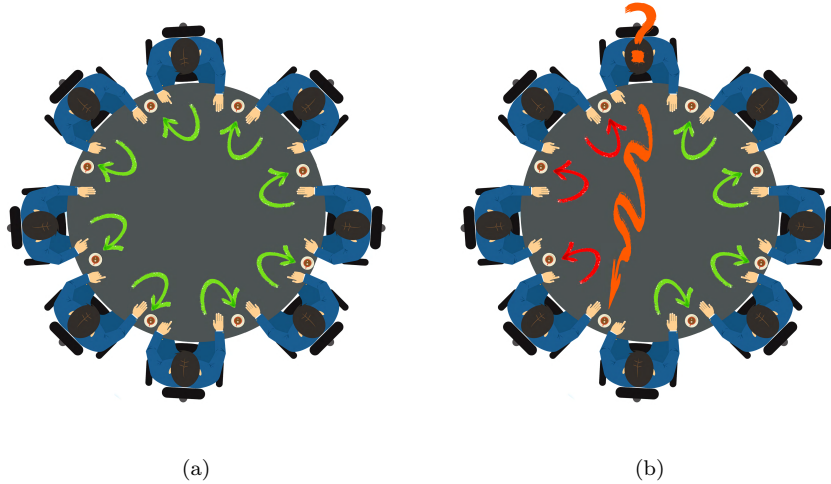


Figura 1.1: (a) Sistema sem quebra de simetria. (b) Sistema com quebra de simetria.

Inicialmente todas as pessoas estão sem a xícara. Vamos considerar duas situações. A primeira situação, sem quebra de simetria, é apresentada na Figura 1.1a, onde uma pessoa aleatória pega a xícara que está à sua direita e, na sequência, cada pessoa pega a xícara à sua direita. No final, todos estarão sentados com sua xícara e o sistema é satisfeito. Na segunda situação, mostrada na Figura 1.1b, vamos considerar que uma pessoa pegue a xícara que está à sua direita e que a pessoa da esquerda pegue a xícara à sua esquerda. Neste cenário haverá quebra de simetria e alguém ficará sem sua xícara. A solução para que o sistema seja satisfeito é que esta pessoa levante e pegue sua xícara.

A Figura 1.1 apresenta um sistema discreto. Para sistemas contínuos e realizando uma analogia com o exemplo apresentado na Figura 1.1, quando há quebra espontânea de simetria, o defeito topológico é uma solução que ligará diferentes estados de mínima energia.

Neste trabalho, vamos obter soluções do tipo *kink* e estudar colisões com velocidades relativísticas³ entre estas (colisões *kink-antikink* ou *antikink-kink*). Para isso, vamos partir de densidades lagrangeanas e obter uma equação de movimento em (1,1) dimensão para cada modelo. Esta densidade lagrangeana possui um termo cinético e um termo do potencial. Em nosso estudo a forma cinética da equação não muda, mas a forma do potencial é modificada para caracterizar as teorias que serão apresentadas. Em outras palavras, a forma do potencial define o modelo de teoria de campos que será trabalhado.

As colisões de defeitos topológicos em modelos integráveis, possuem a característica de serem totalmente elásticas, ocorrendo apenas uma mudança de fase; enquanto que as colisões em modelos não integráveis, não apresentam esta característica.

Em 1974, Clifford S. Gardner realizou um estudo que lhe rendeu o prêmio Steele em 2006

³Neste caso, vamos adotar a velocidade da luz como $c = 1$ e a velocidade inicial das soluções será $0 < v_i < 1$.

[18]. Este estudo garante que em modelos integráveis ocorrerão somente colisões elásticas [19], justificadas através da teoria de transformação de espalhamento inverso (*inverse scattering transformation - IST*) [20]. Portanto, soluções do tipo *kink* possuem a característica de sólitons em teoria de campos integráveis, havendo conservação de energia e momento após colisões entre estas devido a um número infinito de leis de conservação [11]. O mesmo não ocorre em modelos não integráveis.

O modelo ϕ^4 tem sido objeto de estudo por diversos anos [19]. Dentre os fenômenos decorrente do processo de colisão, existe a possibilidade de armadilhamento das soluções, reportado primeiramente por A. E. Kudryavtsev através de estudos do modelo ϕ^4 [21]. Acontece que, após a colisão, as soluções entram num estado oscilatório até perderem toda sua energia e se aniquilarem. Outro fenômeno é a possibilidade de *multi-bounce*⁴, ou seja, múltiplas batidas, o que significa que podem haver múltiplas colisões entre as soluções até que estas escapem para o infinito, sem se aniquilarem.

Em 1979 foi realizado um trabalho que possui grande destaque até hoje, devido à identificação de janelas de *two-bounce* e ao que ficou conhecido como mecanismo de troca de energia ressonante. Neste trabalho, D. K. Campbell, J. F. Schonfeld, e C. A. Wingate encontraram faixas de velocidades nas quais ocorre o fenômeno de *two-bounce*⁵. A explicação é que as soluções possuem modos internos, sendo um modo translacional e um modo vibracional e, durante o processo de colisão, estes modos internos trocam energia entre si, podendo ocasionar fenômenos de *two-bounce* dependendo da velocidade inicial das soluções [22]. Esta explicação ficou conhecida como mecanismo CSW, devido a seus autores.

Em 1991, P. Anninos, S. Oliviera, e R. A. Matzner apresentam um estudo que evidencia o aparecimento das janelas de *n-bounce*. Eles mostraram também que as janelas de *n-bounce* apresentam uma estrutura fractal. Ocorre que próximo à uma janela de *n-bounce*, se acumulam janelas de *n+1-bounce* e quanto mais próximo da janela de *n-bounce*, menor é a espessura da janela de *n+1-bounce* [23].

Os trabalhos de Campbell, Anninos e seus colaboradores apresentam resultados que se formaram como base para o estudo de colisões *kink-antikink*. O mecanismo de troca de energia, bem como a estrutura fractal, têm se provado em diversos estudos de colisões [17, 23 - 26]. No entanto, em 2011, P. Dorey, K. Mersh, T. Romanczukiewicz, e Y. Shnir apresentaram um trabalho referenciado como um contra exemplo ao mecanismo de Campbell [27]. Eles realizaram colisões das soluções de um modelo não integrável, conhecido como modelo ϕ^6 , cuja solução não possui modos vibracionais isoladamente e obtiveram uma estrutura fractal semelhante à apresentada por Anninos. Como cada solução não possui modo vibracional, o mecanismo CSW não poderia ser aplicado. Então os autores levaram em consideração os modos de vibração que poderiam surgir através da configuração inicial do par das soluções. Ocorre que para o modelo ϕ^6 , cada solução e a configuração do par *kink-antikink* não possui modos vibracionais. Porém quando considerado o par *antikink-kink*, modos vibracionais surgem e é possível realizar a explicação dos fenômenos através do mecanismo CSW

⁴Vamos utilizar a expressão "*n-bounce*" para nos referir a *n* colisões antes do escape para o infinito.

⁵Neste caso, duas colisões antes da restituição das soluções e escape para o infinito

[27].

Outro trabalho que apresentou resultados inesperados decorrentes do processo de colisão foi realizado por F. Simas e seus colaboradores [28]. Neste trabalho os autores estudam colisões *kink-antikink* num modelo ϕ^4 que possui um parâmetro de deformação. Quando este parâmetro é igual a zero, o modelo ϕ^4 é restituído. Existe uma região de valores para o parâmetro de deformação que leva a modos vibracionais adicionais e a supressão das janelas de *two-bounce*, ou seja, janelas de *two-bounce* desaparecem mesmo com a presença de modos vibracionais. A explicação dada é que a supressão ocorre quando o modelo apresenta mais de um modo vibracional e, no processo de colisão, estes modos interagem entre si, dificultando a ocorrência do mecanismo de troca de energia [28].

O processo de colisão pode levar ainda à criação de pulsos oscilatórios diferentes do estado de *bion*. Estes pulsos se assemelham a *oscillons*, que são configurações do campo que oscilam em torno do vácuo da teoria com baixa amplitude e podem se propagar por muito tempo [29 - 31]. *Oscillons* têm sido objeto de estudo há muito tempo [32 - 36] e podem surgir a partir de colisões de defeitos topológicos [37]. O processo inverso também pode ocorrer: a produção de soluções topológicas a partir da colisão de *oscillons* [38].

A caracterização de pulsos oscilatórios em *oscillons*, pode ser realizada através de uma transformada rápida de Fourier - FFT⁶ [38]. Quando a frequência do modo está na região do espectro contínuo, tais configurações do campo são chamadas de estados oscilatórios⁷; quando a frequência está do modo na região de estados ligados, chamamos de *oscillons*. [38].

Cenários de espalhamento *kink-antikink* aparecem em diversas áreas da física. Na cosmologia, podemos citar estudos relacionados à colisão de bolhas relativísticas, que podem ser descritas através do espalhamento *kink-antikink* [39]; na matéria condensada o *kink* e o *antikink* do modelo ϕ^4 são utilizados para estudar a dinâmica de nanofitas de grafeno deformadas através da dinâmica de simulação molecular [40]. Neste cenário, os fenômenos decorrentes das colisões são semelhantes aos de estudos teóricos de colisões do modelo ϕ^4 , sendo o armadilhamento das soluções em baixas velocidades e a reflexão das soluções para altas velocidades [40]. Podemos citar ainda dinâmica de *kinks* ao longo de um polímero como entidade independente, no modelo de rede de Su-Schrieffer-Heeger [41].

Em teorias de campos não linear em (1,1) dimensões, o modelo ϕ^4 é o modelo polinomial não integrável mais simples, cuja dinâmica de suas soluções tem sido bastante estudada ao longo das últimas décadas [19]. Os resultados das colisões das soluções de um determinado modelo, geralmente são comparados com os resultados do modelo ϕ^4 . Dentre os modelos polinomiais, podemos citar o estudo de dinâmica de defeitos no modelo ϕ^6 [17, 27, 42 - 44] e ϕ^8 [45 - 47]. Além disso existem estudos de espalhamento em modelos não polinomiais [48 - 51], modelos com dois campos escalares [52 - 57], modelos com quebra de simetria de Lorentz [59], modelos hiperbólicos [26, 58], em colisões de defeitos com a fronteira [60 - 62], na dinâmica de

⁶Do inglês: *Fast Fourier Transform*.

⁷Ou pulsos oscilatórios.

defeitos com impurezas [63 - 67], configurações de *multi-kinks* [68 - 71] e outros [24, 72 - 74].

Se tratando de modelos hiperbólicos, soluções do tipo sóliton aparecem numa extensão hiperbólica do modelo de Calogero, que é um modelo cujas soluções estáticas são exatas no limite do contínuo e é responsável por descrever partículas idênticas em velocidades não relativísticas [75]. Modelos com interações hiperbólicas aparecem em cenários de mundo brana, onde soluções do tipo *kink* podem ser obtidas através da dinâmica não padrão e do formalismo de primeira ordem [76, 77]. Destaca-se, ainda, interações hiperbólicas em estudo de táquions [78]; soluções para modelos de buracos negros [79]; modelos de estudo da inflação de quintessência [80].

Neste trabalho, vamos estudar colisões de soluções do tipo *kink*. No capítulo 2 é realizado um estudo sobre o formalismo de campos escalares reais, visando mostrar de que forma são obtidos os conteúdos físicos que caracterizam cada modelo, como as soluções e o potencial de perturbação. Para isso, partimos de uma densidade lagrangeana e da integral de ação, das quais obtemos a equação que governa a dinâmica das soluções, a partir do princípio de Hamilton e equação de Euler-Lagrange [2]. Através do teorema de Noether encontramos a densidade de energia e energia das soluções [81, 82]. O método de Bogomol'nyi nos permite ter certeza de que trataremos com soluções com mínima energia [83, 84]. As características topológicas das soluções nos permitem quantificar se as soluções que estamos tratando são do tipo *kink* ou do tipo *lump* [85]. Por fim, a análise de estabilidade linear nos mostra como o modelo se comporta sob pequenas perturbações, levando a uma equação de autovalor do tipo *Schrödinger* independente do tempo, com potencial de perturbação das soluções e possíveis modos adicionais ao modo zero [86].

O capítulo 3 apresenta uma revisão do modelo integrável sine-Gordon [87] e das características do espalhamento de suas soluções. As características físicas do modelo são obtidas e o espalhamento *kink-antikink* é realizado. O resultado obtido concorda com a literatura, indicando que as colisões são elásticas, independente da velocidade inicial das soluções.

O capítulo 4 apresenta uma revisão dos modelos não integráveis ϕ^4 [23] e ϕ^6 [27], onde encontramos as características físicas de cada modelo e o respectivo espalhamento de suas soluções. A riqueza de fenômenos encontrados no modelo ϕ^4 e no modelo ϕ^6 concorda com a literatura [22, 23, 27]. São observadas colisões inelásticas, fenômenos de armadilhamento, estrutura fractal e *one-bounce* para velocidades suficientemente grandes. As colisões *kink-antikink* do modelo ϕ^6 também concordam com a literatura, indicando ausência de janelas de *n-bounce* e ausência de estrutura fractal.

O capítulo 5 é dividido em três partes e apresenta uma família de modelos hiperbólicos originados a partir do método da deformação trabalhado junto ao modelo ϕ^4 [88]. A primeira parte, apresenta a estrutura generalizada dos modelos com interações hiperbólicas que trataremos neste trabalho e estruturas que podem ser utilizadas para trabalhos futuros [88]. A estrutura generalizada dos modelos apresenta três parâmetros, aqui denotados por a , m e n . O parâmetro a é relacionado à ordem do potencial e à quantidade de setores topológicos do modelo em questão. O parâmetro m é associado à classificação das soluções, como *kink* ou

antikink, e suas respectivas características. O parâmetro n é um parâmetro de deformação das características do modelo e possui a restrição $n > 1$. Neste trabalho vamos estudar os modelos para $a = 1$ e $a = 2$, que equivalem a modelos com potenciais hiperbólicos com auto interação de quarta e sexta ordem. No limite $n = 2$, as deformações das características do modelo e os resultados decorrentes do processo de colisão já foram estudados [26]. Por simplicidade e devido ao caráter de generalização de modelos hiperbólicos já existentes, vamos chamar o modelo com auto interação de quarta ordem de modelo H^4 e o modelo com auto interação de sexta ordem de modelo H^6 .

Na segunda parte do capítulo 5 apresentamos o modelo H^4 , suas características e a forma como cada uma destas características é deformada em função do parâmetro de deformação n . O processo de colisão indica supressão e reaparecimento nas janelas de *two-bounce* para uma região de valores de n . A velocidade crítica⁸ sofre alterações significativas nesta mesma região de n . É realizado um estudo sobre a ordem da primeira, segunda e terceira janela de *two-bounce* em função de n , visando identificar a supressão das janelas de *two-bounce*.

Na terceira parte do capítulo 5 apresentamos o modelo H^6 , suas características físicas e deformações destas em função parâmetro n . Neste modelo devemos considerar colisões *kink-antikink* e *antikink-kink*. A assimetria do potencial de perturbação sob a transformação $x \rightarrow -x$, torna a configuração inicial diferente entre as configurações iniciais possíveis. Para determinados valores de n , as colisões na configuração *kink-antikink* levam as soluções para o outro setor topológico, para velocidades iniciais suficientemente altas, e estados de armadilhamento, para velocidades iniciais suficientemente baixas. Também são encontrados fenômenos de *three-bounce* e a formação de pulsos oscilatórios. Neste cenário, ainda foi possível identificar um padrão que ocorre antes do decaimento em pulsos oscilatórios. Já o processo de colisão *antikink-kink* apresenta estruturas de janelas de *two-bounce* e supressão destas em função de n . É realizado um estudo da espessura da primeira, segunda e terceira janela de *two-bounce* e identificado que não existe um padrão quanto à diminuição ou aumento da espessura de cada janela. É observado que numa mesma janela de *two-bounce* podem existir fenômenos de *two-bounce* de ordens⁹ distintas. Por fim, são encontrados pulsos oscilatórios e, para um parâmetro de deformação bem próximo do limite permitido¹⁰, ocorre supressão total das janelas de *two-bounce* e a formação de uma janela de *three-bounce* consideravelmente grande, quando comparada com a espessura das janelas obtidas neste trabalho.

Por fim, apresentamos a conclusão do trabalho e perspectivas futuras. O Apêndice A apresenta o procedimento matemático realizado no Capítulo 2 para a obtenção da equação de movimento; o Apêndice B apresenta os métodos numéricos utilizados neste trabalho e o Apêndice C apresenta o método da deformação.

⁸Velocidade a partir da qual ocorre *one-bounce*.

⁹A ordem é caracterizada pelo número de oscilações que existem entre as duas colisões.

¹⁰ $n > 1$.

2 Campos escalares reais

Neste capítulo, vamos estudar campos escalares reais em $(1, 1)$ dimensões. O campo escalar pode ser entendido como função que associa um escalar a cada ponto no espaço. Para exemplificar, imagine uma barra longa de metal sendo aquecida em uma de suas extremidades. A medida que nos afastamos da fonte de calor a barra se torna mais fria, de forma que cada ponto desta representa uma determinada temperatura. Em outras palavras, a temperatura dependerá de x , y e z . Isso nos permite concluir que a temperatura pode ser descrita por um campo escalar, pois em cada ponto do espaço ela assumirá um valor escalar diferente. Dentre muitas aplicações, campos escalares podem ser utilizados para descrever sistemas físicos presentes na cosmologia [89 - 91], física de altas energias e física da matéria condensada [96, 97]. Como exemplo, temos a descrição da aceleração do universo primordial, através do campo do inflaton [89 - 91]; modelos de quintessência, que relacionam energia escura na atual fase do universo com campos escalares [92 - 95]; e defeitos topológicos, que são soluções estáticas caracterizadas por interpolar os mínimos do potencial de um sistema físico [96, 97].

Na seção 2.1, vamos estudar a formulação lagrangeana para campos escalares, obtendo a equação de Euler-Lagrange e a equação que governa a dinâmica do sistema a partir do princípio de mínima ação de Hamilton [2]. Na seção 2.2, vamos estudar o teorema de Noether, buscando encontrar o tensor de energia-momento, que leva a uma expressão para a densidade de energia das soluções estáticas e, conseqüentemente, à obtenção da energia das soluções [81, 82]. Na seção 2.3, vamos estudar o método de Bogomol'nyi, que nos permite ter certeza que estamos trabalhando com soluções de mínima energia [83, 84]. Na seção 2.4, vamos estudar uma forma quantitativa de classificar as soluções e também as características associadas à suas topologias [85]. Por fim, na seção 2.5, vamos estudar sob quais critérios as soluções estáticas são estáveis através da obtenção de uma equação do tipo *Schrödinger* [86].

2.1 Formulação lagrangeana

Através da formulação lagrangeana, podemos encontrar a equação que governa a dinâmica de um determinado sistema utilizando o princípio de mínima ação de Hamilton [2]. A densidade lagrangeana que descreve a dinâmica de um campo escalar real é o ponto de partida e é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.1)$$

onde μ é um índice que pode ir de 0 a 3, associado ao tempo e ao espaço. Essa densidade lagrangeana apresenta um termo cinético e um termo $V(\phi)$, denominado potencial. É o termo do potencial que caracteriza

as diversas teorias de campos existentes descritas pela densidade lagrangeana (2.1).

Por definição, a integral de ação é obtida através da integral temporal da lagrangeana. Dessa forma, observando que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$, a integral de ação, S , é definida por

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (2.2)$$

onde também definimos $d^4x = dt d^3x$.

De forma análoga ao que acontece na mecânica clássica, o princípio de Hamilton, $\delta S = 0$, aplicado na integral de ação (2.2) conduz à equação de Euler-Lagrange. Prosseguimos com:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right] = 0. \quad (2.3)$$

A variação δ é arbitrária, sendo independente do tempo e das coordenadas espaciais. Por conta disso, ao realizarmos a variação na ação, o termo de variação arbitrária pôde entrar no integrando de (2.2), nos dando a forma (2.3), e também nos permitindo escrever $\delta (\partial_\mu \phi) = \partial_\mu (\delta \phi)$. Com isso, o segundo termo no integrando de (2.3) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi) = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi. \quad (2.4)$$

Então, substituindo (2.4) em (2.3) encontramos:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] = 0. \quad (2.5)$$

Para tratar o termo da derivada do produto em (2.4), utilizamos o teorema de Gauss, transformando tal termo numa integral de volume, onde os extremos da integração são fixos, de forma que a integral se anula. Para que a equação (2.5) seja válida para todo $\delta \phi$, é necessário que seu integrando seja nulo e encontramos [81]:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (2.6)$$

A expressão (2.6) é a equação de Euler-Lagrange em sua forma geral para um campo escalar real em (1+3) dimensões do espaço-tempo. A equação que governa a dinâmica do campo ϕ é obtida ao se inserir a densidade lagrangeana (2.1) na equação de Euler-Lagrange (2.6):

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.7)$$

Um passo a passo para a obtenção da equação (2.7) é apresentada no Apêndice A.

Como o objeto de estudo deste trabalho são soluções em (1,1) dimensões, devemos escrever a equação de movimento nestas mesmas dimensões. Então temos $\mu = 0, 1$ e utilizaremos a métrica de Minkowski (+-). Dessa forma, temos $\partial_0 = \partial^0 = \frac{\partial}{\partial t}$ e $\partial_1 = -\partial^1 = \frac{\partial}{\partial x}$. A equação de movimento se torna

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.8)$$

A equação (2.8) é uma equação diferencial parcial não linear de segunda ordem, cuja não linearidade está associada ao termo de derivada do potencial. Observe que para esta equação precisamos de soluções dependentes da posição e do tempo: $\phi = \phi(x, t)$. Entretanto, para o estudo de soluções do tipo sóliton devemos considerar soluções que não variem sua forma com o tempo, pois soluções solitônicas possuem como características serem bem localizadas e estáveis, podendo ser descritas através de um campo escalar real estático $\phi = \phi(x)$. Dessa forma, para campos estáticos a equação (2.8) assume a forma

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}. \quad (2.9)$$

A equação (2.9) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem não linear. É possível diminuir a ordem da equação (2.9) através de uma pequena manipulação matemática:

$$\frac{d\phi}{dx} \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{d\phi}{dx} \frac{dV}{d\phi} \rightarrow \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right] = \frac{d}{dx} V(\phi). \quad (2.10)$$

Agora integramos ambos os membros de (2.10) e isolamos $\frac{d\phi}{dx}$, obtendo

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi) + C}, \quad (2.11)$$

onde C é uma constante de integração. Essa constante deve ser nula para garantir que as soluções possuam energia finita, como será mostrado na próxima seção. Com essa consideração, a expressão (2.11) se torna:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi)}. \quad (2.12)$$

A equação (2.12) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem não linear, que pode ser resolvida por integração. Novamente, a não linearidade está associada ao termo do potencial.

2.2 O teorema de Noether

O teorema de Noether, formulado pela matemática alemã Amalie Emmy Noether, nos permite estabelecer formalmente uma conexão entre simetrias e quantidades conservadas [81, 82]. Dizemos que um sistema possui simetria, quando ele passa por uma transformação de coordenadas sem que perca suas propriedades fundamentais. Ao sofrer esta transformação, o teorema nos garante uma quantidade conservada. Como exemplo, podemos citar que quando consideramos um espaço homogêneo (sistema com simetria), sua homogeneidade implica invariância translacional (transformação de coordenadas), que está relacionada à conservação de momento linear (quantidade conservada); outro exemplo é o de um espaço isotrópico, onde todas as direções são equivalentes e está relacionado com a conservação de momento angular; por fim, quando há invariância de translação temporal, a quantidade conservada relacionada é a energia de um sistema [98].

Para estudar de forma quantitativa o teorema de Noether, vamos considerar translações infinitesimais contínuas no espaço-tempo de Minkowski, a princípio, representadas pelo quadri-vetor constante ϵ^μ ,

de forma que a transformação nas coordenadas e nos campos sejam dadas por

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu \Rightarrow \phi(x^\mu) \rightarrow \phi'(x'^\mu) = \phi(x^\mu + \epsilon^\mu). \quad (2.13)$$

A densidade lagrangeana escrita em termo das coordenadas transformadas não tem sua forma funcional alterada. Podemos relacioná-la com $x^\mu + \epsilon^\mu$ através de

$$\mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi') = \mathcal{L}(x^\mu + \epsilon^\mu). \quad (2.14)$$

Agora vamos realizar uma expansão em série de Taylor no segundo membro de (2.14), considerando apenas os termos lineares em ϵ^μ , de forma que obtemos

$$\mathcal{L}(x^\mu + \epsilon^\mu) = \mathcal{L}(x^\mu) + \epsilon^\mu \partial_\nu \mathcal{L} = \mathcal{L}(x^\mu) + \epsilon^\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \partial_\mu \phi \right]. \quad (2.15)$$

Para obter o terceiro membro de (2.15), consideramos a forma funcional da densidade lagrangeana, o mesmo não acontece para a obtenção do segundo membro. Prosseguimos com a igualdade entre segundo e terceiro membro de (2.15). Vamos levar em consideração que $\partial_\nu \mathcal{L} = \delta_\nu^\mu \partial_\mu \mathcal{L}$ e $\partial_\nu \partial_\mu \phi = \partial_\mu \partial_\nu \phi$. Agora utilizamos a equação (2.6) para reescrever o primeiro termo nos colchetes de (2.15). Realizando as devidas substituições, encontramos

$$\epsilon^\mu \left\{ \left[\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \partial_\nu \phi \right] - \delta_\nu^\mu \partial_\mu \mathcal{L} \right\} = 0. \quad (2.16)$$

O termo ϵ^μ é um termo infinitesimal arbitrário diferente de zero. Portanto, para que a equação (2.16) seja verdadeira, é necessário que os termos dentro das chaves sejam nulos. O termo entre colchetes em (2.16) pode ser escrito como a derivada de um produto, nos levando a

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi \right] - \delta_\nu^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = 0, \quad (2.17)$$

que nos permite finalmente encontrar uma quantidade conservada:

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right] \rightarrow \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right] = \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.18)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é a métrica e

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.19)$$

é o tensor de energia-momento, cujas componentes T^{00} e T^{0i} correspondem a densidade de energia e densidade de momento linear do campo. Para soluções estáticas em (1,1) dimensões, a densidade de energia e a densidade de momento linear são dadas respectivamente por:

$$\rho(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi) \quad (2.20)$$

e

$$p(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi). \quad (2.21)$$

A energia e momento total para soluções estáticas são obtidos através da integração de (2.20) e (2.21) em todo espaço:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] dx \quad (2.22)$$

e

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - V(\phi) \right] dx. \quad (2.23)$$

A partir da expressão (2.22), podemos concluir que a constante C na expressão (2.11) deve ser nula para que a energia das soluções seja finita. Para isso, basta que, a partir de (2.11), escrevamos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = V(\phi) + K, \quad (2.24)$$

onde consideramos $C = 2K$. Então substituímos (2.24) em (2.22), nos levando a

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [2V(\phi) + K] dx. \quad (2.25)$$

Logo, a integração em K sempre irá divergir e, portanto, para que tenhamos configurações de energia finita e não triviais, a constante K deve ser nula, o que leva a $C = 0$.

2.3 O método de Bogomol'nyi

Soluções de mínima energia podem ser obtidas de diversas formas. Podemos destacar um método que considera a conservação do tensor de energia-momento [99] ou métodos desenvolvidos através da exploração da equação de Euler-Lagrange [100, 101]. Neste trabalho, vamos obter soluções com energia mínima através de manipulações matemáticas na expressão da energia, utilizando o que ficou conhecido como método de Bogomol'nyi [83, 84]. Para desenvolvê-lo, devemos completar quadrados na expressão (2.22). Antes disso, vamos fazer uso de outra relação matemática, ao escrever o potencial $V(\phi)$ em termos de uma função denominada superpotencial $W(\phi)$. Estas funções se relacionam da seguinte forma:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2. \quad (2.26)$$

Prosseguimos substituindo a relação (2.26) na expressão (2.22), ficando com

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2 \right]. \quad (2.27)$$

Agora vamos escrever a soma dos quadrados entre os colchetes como o quadrado da soma, ou da diferença, das mesmas quantidades. Com isso aparecerá um termo cruzado que não existe na expressão

(2.27), o que implica que precisamos adicionar um termo de cancelamento, subtraindo ou somando o termo cruzado que surgirá do produto notável. Assim, ficamos com

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \mp \frac{dW}{d\phi} \right)^2 \pm 2 \frac{d\phi}{dx} \frac{dW}{d\phi} \right], \quad (2.28)$$

que leva a

$$E(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \frac{dW}{d\phi} \right)^2 \pm \frac{dW}{dx} \right]. \quad (2.29)$$

Então podemos concluir que

$$E(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \frac{dW}{d\phi} \right)^2 \pm W \Big|_{\phi(-\infty)}^{\phi(\infty)}. \quad (2.30)$$

Para que a expressão (2.30) seja uma expressão de energia mínima, devemos anular o termo da integral. Então, basta que seja satisfeita a seguinte condição:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{dW}{d\phi}. \quad (2.31)$$

De acordo com a relação entre o potencial e o superpotencial (2.26), a expressão (2.31) se torna

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V}. \quad (2.32)$$

Encontramos agora duas equações diferenciais de primeira ordem para o campo ϕ , que o relaciona com o potencial da mesma maneira como encontrado em (2.12). A diferença está que no primeiro processo encontramos tal relação ao reduzirmos a ordem da equação de movimento para soluções estáticas e no segundo processo encontramos a expressão através da busca de configurações com energia mínima.

Satisfazendo a condição (2.31), a energia mínima pode ser escrita como

$$E_{min} = \pm W \Big|_{-\infty}^{\infty} = \|W[\phi(x \rightarrow \infty)] - W[\phi(x \rightarrow -\infty)]\|. \quad (2.33)$$

A expressão (2.33) nos permite determinar a energia mínima de uma determinada configuração ao conhecermos somente os limites assintóticos da solução ϕ , sem que seja necessário conhecer sua forma analítica, quando aplicada no superpotencial $W(\phi(\pm\infty))$.

O método desenvolvido nesta seção, em termos da função superpotencial $W(\phi)$, é conhecido como formalismo BPS, devido a Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfiel. As soluções que advêm deste método são soluções de mínima energia conhecidas como estados BPS [83, 84].

2.4 Características topológicas das soluções

Nesta seção, vamos explorar algumas características associadas às soluções da equação (2.32). Em teoria de campos escalares reais em (1, 1) dimensões as soluções topológicas conectam os mínimos distintos

de um potencial. Uma teoria pode apresentar um potencial com diversos mínimos e, conseqüentemente, com diversas soluções topológicas. Neste sentido, para teorias com potenciais que apresentam mais que dois mínimos, devemos indicar quais mínimos são conectados pela solução que estaremos trabalhando. Esta indicação pode ser feita através de setores topológicos. Neste caso, setor topológico corresponde aos mínimos do potencial nos quais as soluções topológicas estão inseridas.

Para classificar quantitativamente as soluções, introduziremos a carga topológica, que advém de uma corrente topológica conservada [85]. Esta corrente será utilizada como um ferramental matemático.

Para que a densidade de energia dessas soluções sejam localizadas e elas possuam energia finita, é preciso que seus limites assintóticos estejam nos pontos de mínimo do potencial. Geralmente os mínimos de um potencial são discretos em (1,1) dimensões, no entanto existe uma configuração de potencial que suporta soluções topológicas com energia finita e que não possui mínimos discretos [102]. Em casos como estes, podemos definir a carga topológica em termos da energia das soluções, desta forma a carga topológica vai advir da corrente topológica definida em termos da função superpotencial $j^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu W(\phi)$ [102].

Neste trabalho, vamos considerar teorias com potenciais com mínimos discretos. Portanto, a corrente topológica conservada é definida como [85]

$$j^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \Rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0, \quad (2.34)$$

onde $\epsilon^{\mu\nu}$ é o tensor de Levi-Civita, que em (1,1) dimensão é dado por $\epsilon_{00} = -\epsilon_{11} = 0$ e $\epsilon_{01} = -\epsilon_{10} = 1$. Dessa forma, ficamos com

$$j^0 = \frac{1}{2} \partial_1 \phi \Rightarrow Q_T = \int_{-\infty}^{\infty} j^0 dx,$$

que nos leva à seguinte carga topológica

$$Q_T = \frac{1}{2} \phi(x \rightarrow \infty) - \frac{1}{2} \phi(x \rightarrow -\infty). \quad (2.35)$$

Portanto, podemos concluir que soluções do tipo *lump*, que possuem limites assintóticos iguais, possuem carga topológica nula, enquanto soluções do tipo *kink*, que possuem limites assintóticos diferentes, possuem carga topológica não nula.

2.5 Análise de estabilidade linear

Nesta seção, vamos realizar a análise de estabilidade linear das soluções do tipo BPS. Para isso, adicionamos uma pequena perturbação dependente do tempo à solução estática $\phi_s(x)$ [86]. Chamaremos essa perturbação de $\eta(x, t)$ e ficamos com

$$\phi_p(x, t) = \phi_s(x) + \eta(x, t), \quad (2.36)$$

onde $\phi_p(x, t)$ é a solução perturbada.

A solução (2.36) deve ser considerada na equação que governa a dinâmica do sistema e no termo do potencial. Para tratar o termo do potencial, realizamos uma expansão em série de Taylor em torno de $\eta = 0$ e consideramos somente os termos lineares em η . Dessa forma, temos [86]

$$V(\phi) = V[\phi_s + \eta(x, t)] = V(\phi_s) + \eta \left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_s}, \quad (2.37)$$

de forma que

$$\frac{dV}{d\phi} = \left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_s} + \eta \left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_s}. \quad (2.38)$$

Agora utilizando (2.36) e (2.37) na equação de movimento (2.8), encontramos

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_s} + \eta \left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (2.39)$$

Considerando a relação (2.9), obtemos:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \eta \left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (2.40)$$

Dado que, após realizarmos a segunda derivada de V em relação a ϕ e tomarmos $\phi = \phi_s$, esse termo será dependente somente de x , podemos escrever $\left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_s} = U(x)$. Assim a equação (2.40) pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + U(x)\eta = 0, \quad (2.41)$$

nos fornecendo uma equação diferencial parcial de segunda ordem, que pode ser desenvolvida por separação de variáveis. Para isso escrevemos $\eta = \eta(x, t)$ como um produto entre funções:

$$\eta(x, t) = \psi(x)\xi(t). \quad (2.42)$$

Ao substituir (2.42) em (2.41) e realizar algumas manipulações matemáticas para separar as variáveis, encontramos

$$-\frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x) = -\frac{1}{\xi} \frac{d^2\xi}{dt^2}. \quad (2.43)$$

Igualamos ambos os lados de (2.43) a uma constante de acoplamento: ω_n^2 . O lado direito de (2.43) depende somente do tempo e se torna uma equação do tipo oscilador harmônico:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\omega_n^2 \xi, \quad (2.44)$$

cujas soluções são dadas por

$$\xi(t) = e^{\pm i\omega_n t}. \quad (2.45)$$

Assim a solução perturbada (2.36) pode ser escrita como

$$\phi_p(x, t) = \phi_s(x) + \psi(x)e^{\pm i\omega_n t}. \quad (2.46)$$

O lado esquerdo de (2.43) possui apenas dependência espacial e se torna uma equação do tipo *Schrödinger* independente do tempo:

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi = \omega_n^2\psi, \quad (2.47)$$

que pode ser escrita como uma equação de autovalor:

$$\hat{H}\psi(x) = \omega_n^2\psi(x), \quad (2.48)$$

com ω_n^2 sendo o autovalor, $\psi(x)$ a autofunção e \hat{H} o operador hamiltoniano, definido por

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + U(x). \quad (2.49)$$

A razão para utilizarmos a letra n em ω_n^2 é que para determinados modelos, o autovalor ω_n^2 pode assumir valores discretos distintos. Para o caso de estabilidade com autovalor nulo, utilizamos $\omega_0^2 = 0$. Convém adotarmos o índice n às autofunções ($\psi_n(x)$), pois cada autovalor possuirá uma autofunção específica associada. Em particular, as soluções advindas da equação do tipo *Schrödinger* com autovalor nulo são chamadas de modo zero ou modo translacional, enquanto que as soluções associadas a um autovalor positivo são estados excitados conhecidos como modos de vibração.

Dado que a equação (2.47) é uma equação do tipo *Schrödinger*, suas soluções poderão ser de estado ligado ou de estado de espalhamento. Isto dependerá do espectro dos autovalores e do potencial $U(x)$. Quando o autovalor é menor que a barreira do potencial de Schrödinger encontramos soluções de estado ligados, que são bem localizadas e tendem a zero para $x \rightarrow \pm\infty$. Neste caso temos autovalores discretos. Caso o autovalor seja maior que a barreira do potencial, chegamos no espectro contínuo das soluções e encontramos soluções de espalhamento, que são ondas planas e não são bem definidas [103, 104].

É possível mostrar que o operador hamiltoniano \hat{H} possui um espectro de autovalores maiores ou iguais a zero [105]. Para isso vamos escrever o operador hamiltoniano em termos da função superpotencial, definida anteriormente. Notemos que

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2V}{d\phi^2} \Big|_{\phi=\phi_s}. \quad (2.50)$$

Dada a forma (2.26), podemos inferir que as derivadas primeira e segunda de $V(\phi)$ são dadas por:

$$\frac{dV}{d\phi} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\phi} W_\phi^2 = W_\phi W_{\phi\phi} \quad \text{e}$$

$$\frac{d^2 V}{d\phi^2} = W_{\phi\phi}^2 + W_{\phi} W_{\phi\phi\phi}. \quad (2.51)$$

Com isso, o operador hamiltoniano em (2.50) se torna

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\phi\phi}^2 \Big|_{\phi=\phi_s} + W_{\phi} W_{\phi\phi\phi} \Big|_{\phi=\phi_s}. \quad (2.52)$$

Agora definimos os operadores \hat{S}_{\pm}^{\dagger} e \hat{S}_{\pm} :

$$\hat{S}_{\pm}^{\dagger} = \frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi} \Big|_{\phi=\phi_s} \quad \text{e} \quad \hat{S}_{\pm} = -\frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi} \Big|_{\phi=\phi_s} \quad (2.53)$$

e escrevemos o operador hamiltoniano em termo destes:

$$\hat{H} = \hat{S}_{\pm}^{\dagger} \hat{S}_{\pm}. \quad (2.54)$$

Então utilizamos o hamiltoniano escrito na forma (2.54) para escrever a equação de autovalor (2.48)

$$\hat{H} \psi_n = \hat{S}_{\pm}^{\dagger} \hat{S}_{\pm} \psi_n = \omega_n^2 \psi_n \quad (2.55)$$

e a escrevemos em termos de sua base de autoestados [104]:

$$\langle \psi_n | \hat{S}_{\pm}^{\dagger} \hat{S}_{\pm} | \psi_n \rangle = \langle \psi_n | \omega_n^2 | \psi_n \rangle. \quad (2.56)$$

Aplicando uma relação de completeza $\sum_m |\psi_m\rangle \langle \psi_m|$ em (2.56) ficamos com

$$\sum_m \langle \psi_n | \hat{S}_{\pm}^{\dagger} | \psi_m \rangle \langle \psi_m | \hat{S}_{\pm} | \psi_n \rangle = \omega_n^2 \sum_m \langle \psi_n | \psi_m \rangle \langle \psi_m | \psi_n \rangle. \quad (2.57)$$

Logo,

$$\sum_m \left| \langle \psi_m | \hat{S}_{\pm} | \psi_n \rangle \right|^2 = \omega_n^2 \sum_m |\langle \psi_m | \psi_n \rangle|^2 = \omega_n^2, \quad (2.58)$$

que nos leva a

$$\omega_n^2 = \sum_m \left| \langle \psi_m | \hat{S}_{\pm} | \psi_n \rangle \right|^2 \geq 0. \quad (2.59)$$

O resultado (2.59) nos permite concluir que os autovalores associados ao operador \hat{H} são maiores ou iguais a zero. Dessa forma, concluímos que as soluções BPS são estáveis.

Por fim, é possível estabelecer uma relação entre a solução BPS e o modo zero. Para isso, basta derivarmos a equação (2.9) em relação a x em $\phi = \phi_s$ e compará-la com a equação (2.48) para $\omega_0 = 0$. A derivada mencionada se desenvolve como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[-\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{dV}{d\phi} \right] \Big|_{\phi=\phi_s} &= 0, \\ \left[-\frac{d^3 \phi}{dx^3} + \frac{d}{d\phi} \frac{d}{dx} V(\phi(x)) \right] \Big|_{\phi=\phi_s} &= 0, \\ \left[-\frac{d^2}{dx^2} \frac{d\phi}{dx} + \frac{d}{d\phi} \frac{dV}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} \right] \Big|_{\phi=\phi_s} &= 0, \\ \left[-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2 V}{d\phi^2} \Big|_{\phi=\phi_s} \right] \phi'_s &= 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Considerando (2.50), podemos afirmar que (2.60) se resume a

$$\hat{H}\phi'_s = 0, \quad (2.61)$$

que possui a mesma forma da equação (2.48) para $\omega_0 = 0$. Portanto a derivada da solução estática é proporcional ao modo zero. Assim podemos escrever que

$$\psi_0(x) = A \frac{d\phi_s}{dx}, \quad (2.62)$$

sendo A uma constante de proporcionalidade, determinada através da condição de normalização da auto-função $\psi_0(x)$. Dado ainda a relação (2.31), podemos relacionar o modo zero com a função superpotencial:

$$\psi_0(x) = AW_\phi. \quad (2.63)$$

Logo podemos determinar o modo zero sempre que a solução BPS ou a função superpotencial forem conhecidos. É possível ainda estabelecer uma relação entre o modo zero e a invariância translacional das soluções. Isto é, se $\phi(x)$ é solução da equação (2.32) então $\phi(x + x_0)$, onde x_0 representa uma translação, também é. Então, realizamos uma expansão em primeira ordem $\phi(x + x_0) = \phi(x) + x_0\phi'(x)$ e comparamos com (2.46), identificando que $\phi'(x)$ se comporta como uma pequena perturbação em torno da solução estática com frequência $\omega_0 = 0$.

3 Modelos integráveis: uma revisão do modelo sine-Gordon

Neste capítulo, vamos realizar uma revisão do modelo integrável sine-Gordon, determinando suas características através das equações desenvolvidas no capítulo 2. Dessa forma, vamos apresentar o potencial associado ao modelo, sua equação de movimento, soluções BPS, energia da solução *kink*, carga topológica e potencial de estabilidade com modo zero e autovalor nulo associados. Em seguida, vamos realizar as colisões *kink-antikink* e discutir os resultados.

Associado à integrabilidade do modelo sine-Gordon, podemos destacar sua solução analítica [2, 106] e que no processo de colisão *kink-antikink* ocorrem somente colisões elásticas, independente da velocidade inicial das soluções [87], evidenciando a característica de sóliton das soluções. Sob análise de estabilidade linear, o potencial de estabilidade do modelo não apresenta modos de vibração, o que é relacionado diretamente à dinâmica de espalhamento de defeitos, implicando na ausência de janelas de *n-bounce*, estado de *bion* e estrutura fractal.

3.1 O modelo sine-Gordon e suas características

Vamos considerar o modelo sine-Gordon, descrito pela seguinte densidade lagrangeana [87]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - [1 - \cos(\phi)], \quad (3.1)$$

sendo

$$V(\phi) = 1 - \cos(\phi) \quad (3.2)$$

o potencial característico do modelo, apresentado na Figura 3.1a. O potencial do modelo apresenta uma função periódica em ϕ , possuindo infinitos mínimos em $2n\pi$, sendo n um número inteiro. Além disso, podemos destacar que o potencial é invariante com a transformação $\phi \rightarrow \phi + 2n\pi$.

De acordo com a equação (2.8), a equação de movimento para o modelo sine-Gordon é dada por

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sin(\phi) = 0. \quad (3.3)$$

As soluções do tipo BPS para o modelo sine-Gordon são obtidas a partir da equação (2.30), utilizando o potencial característico do modelo:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi)} = \pm \sqrt{2[1 - \cos(\phi)]}. \quad (3.4)$$

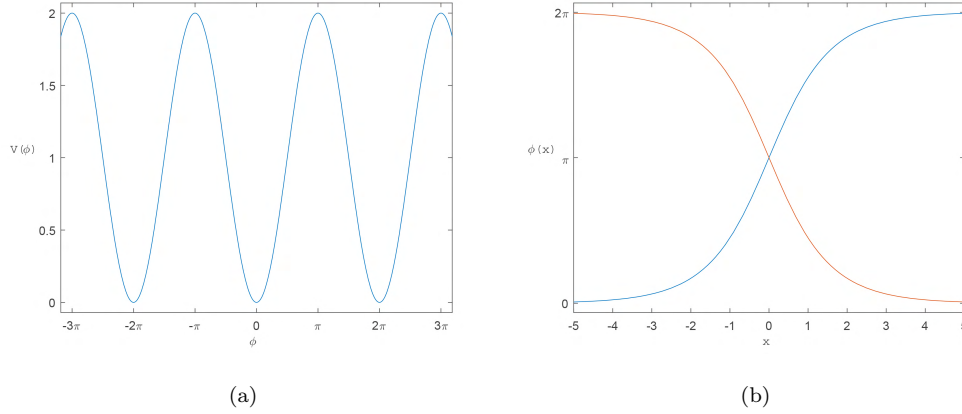


Figura 3.1: (a) Potencial do modelo sine-Gordon. (b) Solução *kink* e solução *antikink* do modelo sine-Gordon: *kink* em azul e *antikink* em laranja.

Portanto, as soluções de estado BPS associadas ao modelo sine-Gordon são dadas por

$$\phi_s = 4 \arctan(e^{\pm x}) + 2n\pi. \quad (3.5)$$

O sinal ”+” na solução (3.5) representa as soluções *kink*, enquanto que o sinal ”-” representa as soluções *antikink*. A solução (3.5) apresenta ainda uma infinita família de soluções, pois n é um número inteiro qualquer. Neste caso, o valor de n vai indicar em qual setor topológico as soluções se encontram. Neste trabalho vamos considerar $n = 0$, correspondendo ao setor topológico caracterizado pelos mínimos 0 e 2π . O perfil de cada solução é apresentado na Figura 3.1.

A Figura 3.1 apresenta o perfil das soluções, onde é possível observar que a solução *kink* interpola os mínimos do potencial (3.2) de 0 a 2π , enquanto a solução *antikink* interpola os mínimos de 2π a 0. Dado que as soluções possuem limites assintóticos diferentes, elas possuem carga topológica não nula, o que as caracterizam como defeitos topológicos. Para a solução *kink*, a carga topológica é dada por

$$Q_{T_k} = \frac{1}{2} \phi_k(x \rightarrow \infty) - \frac{1}{2} \phi_k(x \rightarrow -\infty) = \pi, \quad (3.6)$$

enquanto para a solução *antikink* a carga topológica é

$$Q_{T_{\bar{k}}} = \frac{1}{2} \phi_{\bar{k}}(x \rightarrow \infty) - \frac{1}{2} \phi_{\bar{k}}(x \rightarrow -\infty) = -\pi. \quad (3.7)$$

Conforme já mencionado, as soluções de estado BPS (3.5) são independentes do tempo. No entanto, é preciso que essas soluções viajem no tempo para que se torne possível realizar o processo de colisão. Para obtermos soluções que viajantes sem que percam suas características solitônicas, aplicamos um *boost* de Lorentz nas soluções (3.5) [17, 26]. A solução *kink* se torna:

$$\phi_s = 4 \arctan(e^x) \rightarrow \phi_s = 4 \arctan[e^{\gamma(x+x_0-v_it)}], \quad (3.8)$$

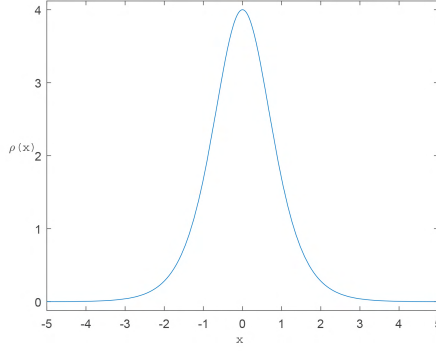


Figura 3.2: Densidade de energia das solução *kink* do modelo sine-Gordon.

onde x_0 é a distância a partir da qual o centro do *kink* viaja, em direção o ponto de impacto, e γ é o fator de Lorentz, definido como $\gamma = 1/\sqrt{1 - v_i^2}$, sendo v_i a velocidade inicial do *kink*.

Outra característica importante das soluções do tipo sóliton é a de possuir uma densidade de energia bem localizada. A densidade de energia das soluções do modelo é obtida através da expressão (2.20), que para o modelo sine-Gordon assume a seguinte forma:

$$\rho(x) = \frac{8e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} - \cos[4 \arctan(e^x)] + 1. \quad (3.9)$$

O perfil da densidade de energia (3.9) é mostrado na Figura 3.2. É possível ver que a densidade de energia é bem localizada e simétrica em torno da origem, sendo nula nos limites assintóticos $x \rightarrow \pm\infty$. A energia das soluções é obtida através da integração em todo o espaço da densidade de energia:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 8. \quad (3.10)$$

Seguindo o método de Bogolmo'nyi, podemos determinar a energia das soluções também através dos limites assintóticos da função superpotencial, considerando a relação (2.33). Para isso, consideremos a função superpotencial do modelo:

$$W = \mp 4 \cos\left(\frac{1}{2}\phi\right), \quad (3.11)$$

Para o modelo sine-Gordon, a relação (2.33) nos permite determinar que

$$E_{min} = \pm W \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \| 4 + 4 \| = 8. \quad (3.12)$$

O processo de análise de estabilidade linear nos leva à seguinte equação do tipo *Schrödinger* independente do tempo:

$$-\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + \cos[4 \arctan(e^x)]\psi_n = \omega_n^2\psi_n, \quad (3.13)$$

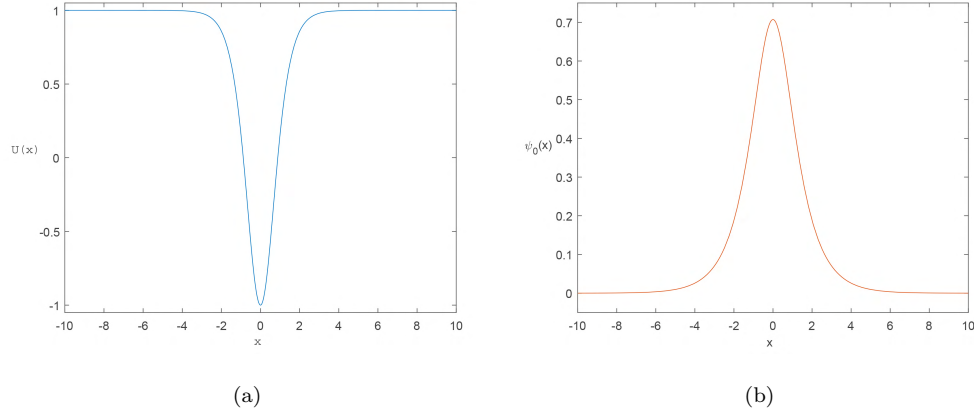


Figura 3.3: (a) Potencial de estabilidade do modelo sine-Gordon. (b) Modo zero do modelo sine-Gordon.

com potencial de estabilidade definido por

$$U(x) = \cos[4 \arctan(e^x)]. \quad (3.14)$$

A equação (3.13) é uma equação que possui apenas solução de estado ligado para o autovalor $\omega_0^2 = 0$. Associado a este autovalor temos o modo zero (normalizado):

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\cosh(x)} \quad (3.15)$$

O potencial de estabilidade e o modo zero do modelo sine-Gordon são mostrados na Figura 3.3. A Figura 3.3a apresenta o potencial de estabilidade, que possui um poço em $x = 0$ e é limitado em $U(x) = 1$, para $x \rightarrow \pm\infty$. Já a solução de estado ligado é apresentada na Figura 3.3b, se mostrando bem definida, sem nós e tendendo para 0 quando $x \rightarrow \pm\infty$.

É possível também obter a solução de modo zero a partir da resolução da equação (3.13) para $\omega_0^2 = 0$. No entanto esta solução pode ser obtida de forma mais simplificada quando consideramos a relação (2.62):

$$\psi_0(x) = A \frac{d\phi_s}{dx}.$$

Com isso, basta derivar a solução estática e obter o valor da constante a partir da condição de normalização. De fato, para o modelo sine-Gordon, temos

$$\frac{d\phi_s}{dx} = \frac{4e^x}{1 + e^{2x}} = \frac{A_1}{\cosh(x)}, \quad (3.16)$$

onde A_1 é uma constante auxiliar que será incorporada na constante de normalização. Seguimos com a condição de normalização:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0|^2 dx = 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{A}{\cosh(x)} \right|^2 dx = 2A^2 = 1. \quad (3.17)$$

O que nos permite concluir que $A = 1/\sqrt{2}$, nos levando à forma analítica (3.14).

A ausência do modo vibracional colabora para o não aparecimento de resultados mais ricos no processo de colisão. Como resultado, é esperado que após as colisões ocorra apenas uma mudança de fase das soluções, levando-as para outro setor topológico.

3.2 Colisões *kink-antikink* no modelo sine-Gordon

O processo de colisão *kink-antikink* é resolvido numericamente através da discretização da equação de movimento com determinadas condições iniciais e de contorno. No caso do modelo sine-Gordon, vamos desenvolver numericamente a equação (3.3). As condições iniciais são dadas pelo perfil inicial e sua derivada temporal. O perfil inicial contém as soluções seu limite assintótico deve coincidir com os mínimos do potencial. As condições de contorno são dadas pelos limites assintóticos do perfil inicial e de sua derivada temporal. Portanto, o perfil inicial é composto da soma das soluções estáticas em $t = 0$:

$$\phi(x, x_0, v_i, t) = \phi_k(x + x_0, v_i, t = 0) + \phi_{\bar{k}}(x - x_0, -v_i, t = 0). \quad (3.18)$$

Em (3.18) a solução *kink* é representada por ϕ_k e a solução *antikink* é representada por $\phi_{\bar{k}}$, sendo $\phi_{\bar{k}} = -\phi_k$. O perfil inicial pode ser visto na Figura 3.4a.

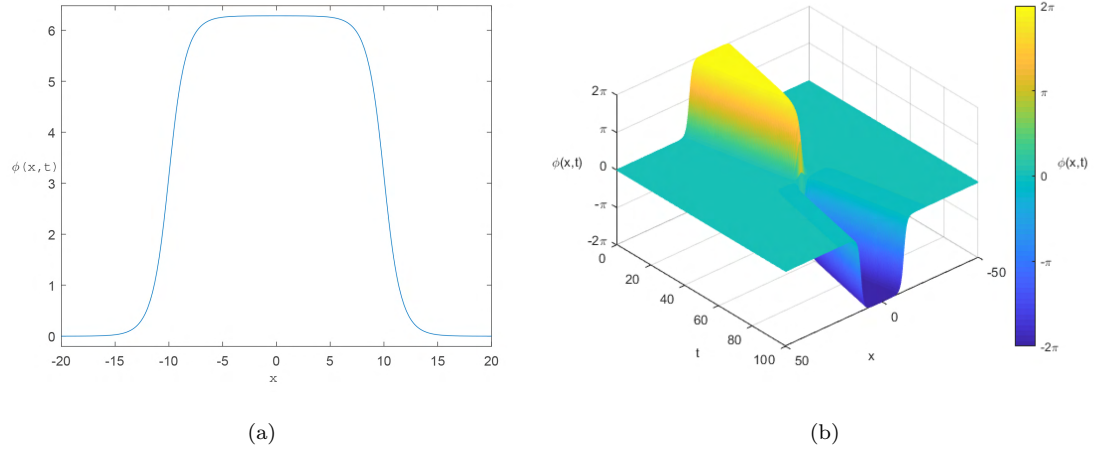


Figura 3.4: (a) Perfil inicial das soluções do modelo sine-Gordon. (b) Colisão *kink-antikink* do modelo sine-Gordon para $v_i = 0.2$.

A derivada do perfil inicial, em $t = 0$, é dada por

$$\dot{\phi}(x, x_0, v_i, t) = \dot{\phi}_k(x + x_0, v_i, t = 0) + \dot{\phi}_{\bar{k}}(x - x_0, -v_i, t = 0). \quad (3.19)$$

As condições de contorno são dadas através dos limites assintóticos de (3.18) e (3.19), sendo $\phi(x \rightarrow \pm\infty, 0) = 0$ e $\dot{\phi}(x \rightarrow \pm\infty, 0) = 0$.

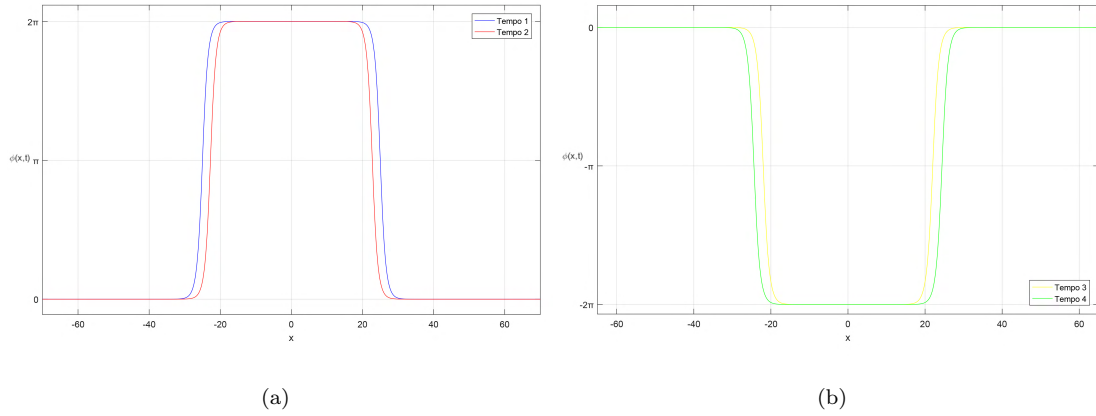


Figura 3.5: Perfil das soluções do modelo sine-Gordon. (a) Perfil *kink-antikink* antes da colisão, com Tempo 2, em vermelho, posterior ao Tempo 1, em azul. (b) Perfil *antikink-kink* depois da colisão, com Tempo 4, em verde, posterior ao Tempo 3, em amarelo.

Os métodos numéricos utilizados para o desenvolvimento das colisões são o método de diferenças finitas centradas de quarta ordem para o tratamento da parte espacial, com passo de $\delta x \approx 0.6$, e o método de Runge-Kutta de quarta ordem para o desenvolvimento da parte temporal, com passo de $\delta t = 0.4$.

As colisões *kink-antikink* do modelo são colisões elásticas e independente da velocidade inicial das soluções encontramos sempre o mesmo resultado: as soluções para outro setor topológico.

A Figura 3.4b apresenta a colisão *kink-antikink* do modelo sine-Gordon, para velocidade inicial $v_i = 0.2$. Inicialmente o par das soluções está no setor topológico entre 0 e 2π . Após a colisão, as soluções escapam para o infinito no outro setor topológico, entre 0 e -2π . Independente da velocidade inicial ocorre um processo semelhante e as colisões são elásticas. Isto nos permite inferir que não há perda de energia durante o processo e que a velocidade final das soluções é igual a velocidade inicial, implicando que as soluções do tipo *kink* do modelo sine-Gordon podem ser classificadas como sólitons.

A Figura 3.5a ilustra o perfil das soluções antes da colisão, sendo que em vermelho (Tempo 2) é representado o perfil posterior ao mostrado na cor azul (Tempo 1). Essa é uma representação da forma como as soluções se aproximam. Por outro lado, a Figura 3.5b representa o perfil das soluções após a colisão, onde o perfil ilustrado pela cor verde (Tempo 4) é posterior ao perfil ilustrado pela cor amarela (Tempo 3). No caso da Figura 3.5a, temos inicialmente o par *kink-antikink* no setor topológico entre 0 e 2π com as soluções se aproximando, enquanto na Figura 3.5b temos um par *antikink-kink* com as soluções se afastando e no outro setor topológico, entre 0 e -2π .

Fenômenos mais ricos decorrentes do processo de colisão das soluções serão apresentados nos próximos capítulos. A ausência destes fenômenos no modelo sine-Gordon, está relacionada à integrabilidade do modelo.

4 Modelos não integráveis: uma revisão dos modelos ϕ^4 e ϕ^6

Os fenômenos ocasionados a partir de colisões em modelos não integráveis são mais ricos que em modelos integráveis [13, 22, 23]. Dentre os modelos não integráveis, o mais simples e também extensivamente estudado é o modelo ϕ^4 [19]. Foi a partir do modelo ϕ^4 que Campbell e Anninos encontraram janelas de ressonância [22, 23].

A explicação para o aparecimento da estrutura fractal a partir do mecanismo de troca de energia ressonante, parecia apontar que em modelos cujas soluções não apresentam modos vibracionais, como o modelo ϕ^6 , não haveriam os fenômenos de *n-bounce* [22]. No entanto, o estudo de Patrick Dorey e seus colaboradores [27] se mostrou como um contra exemplo ao mecanismo de troca de energia. Os autores mostraram o surgimento das janelas de *two-bounce* na ausência do modo vibracional para a solução *kink* isolada. Os autores argumentaram que o aparecimento dos modos vibracionais que atuam durante o processo de colisão podem surgir através da configuração do par das soluções.

4.1 O modelo ϕ^4 e suas características

Vamos considerar o modelo ϕ^4 , descrito pela densidade lagrangeana [13, 23]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}(\phi^2 - 1)^2, \quad (4.1)$$

cujos potencial com auto interação de quarta ordem é dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(\phi^2 - 1)^2. \quad (4.2)$$

O potencial (4.2) é apresentado na Figura 4.1a. É possível identificar que o potencial do modelo possui um setor topológico apenas dois mínimos, em $\phi_{min} = \pm 1$, e um ponto de máximo, em $\phi_{MAX} = 0$.

Considerando a relação (2.8), é possível obter a equação de que governa a dinâmica do modelo ϕ^4 apenas derivando potencial. Com isso, para o modelo ϕ^4 , a equação de movimento é dada por

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\phi(\phi^2 - 1) = 0. \quad (4.3)$$

A não linearidade da equação de movimento (4.3) é devido ao termo de auto interação de terceira ordem do campo.

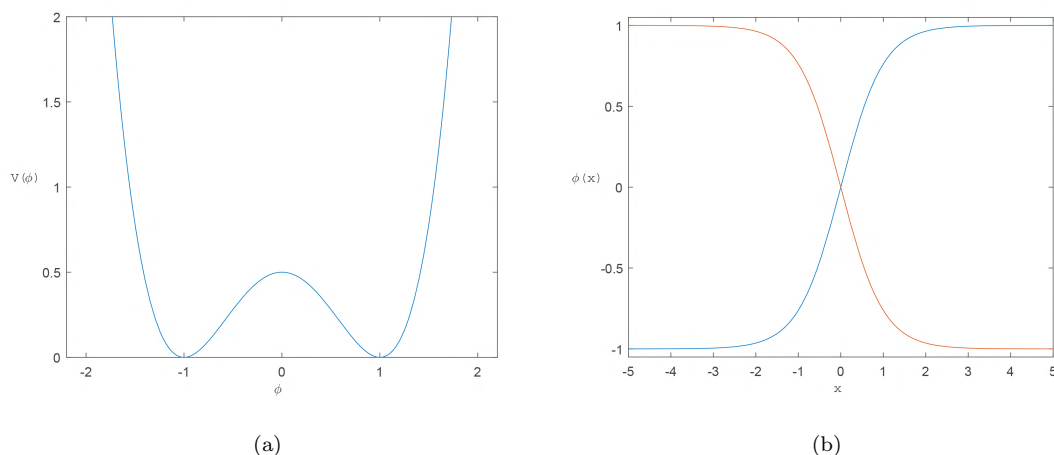


Figura 4.1: (a) Potencial do modelo ϕ^4 . (b) Solução *kink* (azul) e solução *antikink* (laranja) do modelo ϕ^4 .

O procedimento para obter as soluções do tipo BPS que conectam os mínimos do potencial nos leva à seguinte equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi)} = \pm \sqrt{(\phi^2 - 1)^2}. \quad (4.4)$$

A equação (4.4) é resolvida por integração levando às soluções estáticas, dadas por [86]

$$\phi_s = \pm \tanh(x), \quad (4.5)$$

onde a solução com sinal $+$ é o *kink*, que por vezes representaremos por (ϕ_k) , e a solução com sinal $-$ é o *antikink*, que por vezes representaremos por $(\phi_{\bar{k}})$. Na Figura 4.1b é apresentado o perfil de cada solução, sendo a solução *kink* em azul e a solução *antikink* em laranja. É possível ver que os limites assintóticos das soluções $(\phi_k(x \rightarrow \pm\infty) = \pm 1$ e $\phi_{\bar{k}}(x \rightarrow \pm\infty) = \mp 1)$ tendem aos mínimos do potencial, conectando-os. A solução *kink* interpola os mínimos de -1 a 1 e a solução *antikink* interpola os mínimos de 1 a -1 .

Considerando a solução *kink* mostrada na Figura 4.1b, podemos observar que seus limites assintóticos são diferentes. Conforme apresentado na seção 2.4, isso implica uma solução topológica. De fato, para a solução *kink* de (4.5), a carga topológica é dada por

$$Q_{Tk} = \frac{1}{2}\phi(x \rightarrow \infty) - \frac{1}{2}\phi(x \rightarrow -\infty) = 1, \quad (4.6)$$

enquanto para o *antikink* é

$$Q_{T\bar{k}} = \frac{1}{2}\phi(x \rightarrow \infty) - \frac{1}{2}\phi(x \rightarrow -\infty) = -1. \quad (4.7)$$

Para obtermos soluções que viajam sem perder sua forma, aplicamos um *boost* de Lorentz. A solução *kink* viajante assume a forma

$$\phi_s = \pm \tanh(x) \rightarrow \phi_s = \tanh[\gamma(x + x_0 - v_it)], \quad (4.8)$$

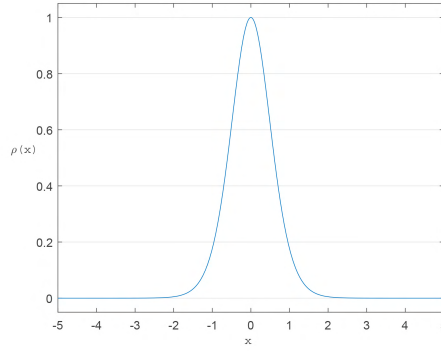


Figura 4.2: Densidade de energia da solução *kink* do modelo ϕ^4 .

sendo que x_0 é a posição do centro do *kink* e γ é o fator de Lorentz, que depende apenas da velocidade inicial e é definido por $\gamma = 1/\sqrt{1 - v_i^2}$, com v_i sendo a velocidade inicial da solução.

Para determinar a densidade de energia das soluções, consideramos a relação (2.20) com o potencial do modelo ϕ^4 e as soluções BPS (4.5), assim temos:

$$\rho(x) = \text{sech}^4(x). \quad (4.9)$$

O perfil da densidade de energia da solução *kink* pode ser visto na Figura 4.2. A densidade de energia é finita e é possível observar que ela é bem localizada e simétrica em torno da origem.

A energia das soluções é obtida através da integração da densidade de energia em todo o espaço. Conforme a relação (2.22), obtemos:

$$E(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^4(x) dx = \frac{4}{3}. \quad (4.10)$$

A determinação da energia através do procedimento de Bogomol'nyi leva ao mesmo valor encontrado. De fato, essa determinação pode ser feita quando consideramos a função superpotencial do modelo:

$$W(\phi) = \frac{\phi^3}{3} - \phi. \quad (4.11)$$

Com isso, utilizamos uma das soluções (4.5) em (4.11) e calculamos seu limites assintóticos, de forma que, de acordo com a expressão (2.33), a energia mínima é dada por

$$E_{min} = \pm W \Big|_{-\infty}^{\infty} = \|W[\phi(x \rightarrow \infty)] - W[\phi(x \rightarrow -\infty)]\| = \frac{4}{3}. \quad (4.12)$$

O potencial de estabilidade linear é obtido através da aplicação de uma das soluções (4.5) na derivada segunda do potencial do modelo. Com isso, para o modelo ϕ^4 , o potencial de estabilidade é dado pela seguinte expressão:

$$U(x) = 6 \tanh^2(x) - 2, \quad (4.13)$$

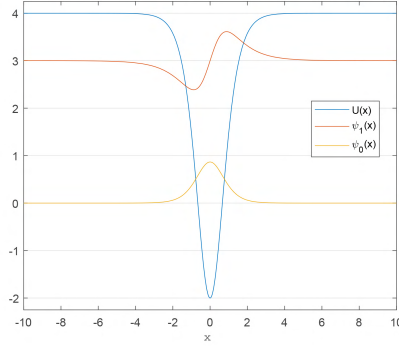


Figura 4.3: Potencial de perturbação da solução *kink* do modelo ϕ^4 em azul. Modo zero em amarelo e modo vibracional em laranja.

que é conhecido como potencial de *Pöschl-Teller* modificado [107, 108]. A equação do tipo *Schrödinger* independente do tempo para o modelo ϕ^4 assume a forma

$$-\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + [6 \tanh^2(x) - 2]\psi_n = \omega_n^2\psi_n. \quad (4.14)$$

Esta equação possui dois autovalores discretos e autovalores no contínuo [109]. Já é conhecido que existe uma solução associada a um autovalor nulo. O autovalor discreto adicional é conhecido na literatura como *internal shape mode* [23] e contribui para a presença de diversos fenômenos decorrentes do processo de colisão *kink-antikink*.

A solução normalizada associada ao autovalor $\omega_0^2 = 0$ é dada por

$$\psi_0(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sech}^2(x), \quad (4.15)$$

enquanto que a solução normalizada associada ao autovalor adicional $\omega_1^2 = 3$ é dada por

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \tanh(x) \operatorname{sech}(x). \quad (4.16)$$

A Figura 4.3 mostra o potencial de perturbação em azul, o modo translacional em amarelo e o modo vibracional em laranja. O potencial de perturbação possui um mínimo em $U(x=0) = -2$ e é limitado superiormente em $U(x \rightarrow \pm\infty) = 4$. Uma característica importante, que ainda será explorada neste trabalho, é que o potencial de perturbação é invariante sob a transformação $x \rightarrow -x$. Sobre os modos, é possível ver que as soluções tendem a zero para os limites assintóticos $x \rightarrow \pm\infty$. Também é possível identificar que a solução de modo zero apresenta somente um pico em torno da origem, enquanto que o primeiro estado excitado apresenta um nó.

4.2 Colisões *kink-antikink* do modelo ϕ^4

O processo de colisão *kink-antikink* do modelo ϕ^4 é extremamente rico [22, 23]. Nesta seção vamos fazer uma revisão da literatura, destacando os fenômenos de janelas de *n-bounce*, estado de *bion* e estrutura fractal. Apenas a mudança na velocidade inicial de cada solução influenciará no resultado obtido.

Realizar uma colisão *kink-antikink* consiste em evoluir numericamente a equação (4.3) com determinadas condições iniciais e condições de contorno. As condições são dadas pelo perfil inicial das soluções em rota de impacto e sua derivada temporal. Para o modelo ϕ^4 , o perfil inicial e sua derivada temporal são respectivamente

$$\phi(x, x_0, v_i, t) = \phi_k(x + x_0, v_i, t = 0) + \phi_{\bar{k}}(x - x_0, -v_i, t = 0) - 1 \quad (4.17)$$

e

$$\dot{\phi}(x, x_0, v_i, t) = \dot{\phi}_k(x + x_0, v_i, t = 0) + \dot{\phi}_{\bar{k}}(x - x_0, -v_i, t = 0), \quad (4.18)$$

onde ϕ_k ($\phi_{\bar{k}}$) é o *kink* (*antikink*), x_0 é a distância na qual o centro da solução se encontra até o ponto de impacto e v_i é a velocidade inicial de cada solução. O perfil inicial pode ser visto na Figura 4.4.

As condições de contorno para o problema são obtidas através dos limites assintóticos de (4.17) e (4.18), sendo, respectivamente, $\phi(x \rightarrow \pm\infty) = -1$ e $\dot{\phi}(x \rightarrow \pm\infty) = 0$.

Os métodos numéricos utilizados são método de Runge-Kutta de quarta ordem para desenvolver a parte temporal, com passo temporal $\delta t = 0.4$ e o método de diferenças finitas de quarta ordem para desenvolver a parte espacial, com passo espacial $\delta x = 0.8$.

Os resultados indicam que os fenômenos que decorrem do processo de colisão dependem diretamente da velocidade inicial das soluções. Estes fenômenos podem ser: a aniquilação das soluções através da formação de um estado de armadilhamento, conhecido como estado de *bion*, no qual as soluções ficam presas

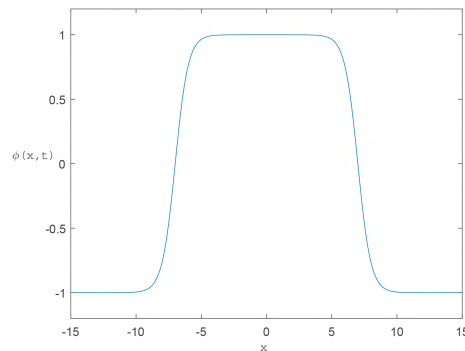


Figura 4.4: Perfil inicial das soluções do modelo ϕ^4 .

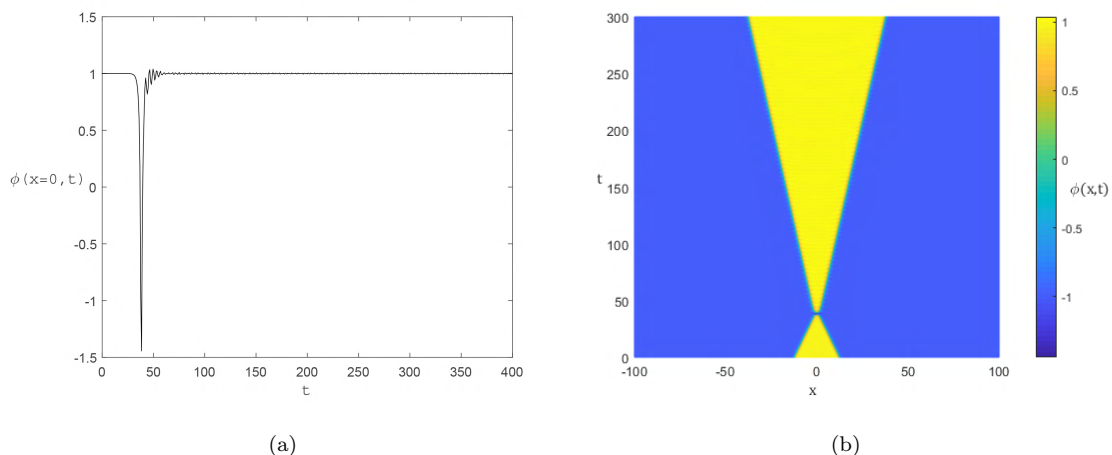


Figura 4.5: Colisão *kink-antikink* do modelo ϕ^4 para $v_i = 0.3$. (a) Centro de massa da colisão. (b) Vista superior da colisão.

uma na outra, oscilando indefinidamente; janelas de *n-bounce*, que representam faixas de velocidades para as quais as soluções vão colidir n vezes e então escapar para o infinito.

Para colisões com velocidades iniciais superiores a uma certa velocidade crítica, que aqui representaremos por v_{cr} , ocorrerá somente o fenômeno de *one-bounce*. As janelas de *n-bounce* ocorrem somente para velocidades inferiores e próximas à velocidade crítica. O fenômeno de *bion* sempre ocorre para velocidades suficientemente pequenas e entre as janelas de *n-bounce*.

A velocidade crítica obtida neste trabalho é $v_{cr} = 0.2598$, concordando com a literatura [23]. A colisão das soluções que levam ao fenômeno de *one-bounce* é representada na Figura 4.5, na qual é possível observar que as soluções colidem e se afastam. Através da vista superior da malha que representa o processo de colisão é possível observar que o ângulo de abertura das soluções é sutilmente menor após a colisão, indicando que a velocidade das soluções diminuiu, caracterizando uma colisão inelástica.

Para baixas velocidades o fenômeno encontrado é o de *bion*. Na Figura 4.6 podemos ver a aniquilação das soluções e o estado de *bion* formado após a colisão com velocidade inicial $v_{in} = 0.18$. A Figura 4.6 mostra como o centro de massa da configuração inicial do campo se comporta durante o processo de colisão, sendo que cada ponto de mínimo representa uma colisão.

As janelas de *n-bounce* representam faixas de velocidades nas quais acontecem n colisões antes do escape para o infinito. Por exemplo, uma colisão em uma janela de *two-bounce*, quer dizer que após a primeira colisão, as soluções vão se afastar e colidir mais uma vez e então escapar para o infinito.

A Figura 4.7 apresenta o centro de massa das colisões para $v_i = 0.2$ e $v_i = 0.2396$, ocasionando *two-bounce* de forma de distinta. Na Figura 4.7a as soluções colidem, se afastam, sofrem uma pequena oscilação, colidem novamente e então escapam para o infinito. Na Figura 4.7b as soluções sofrem três

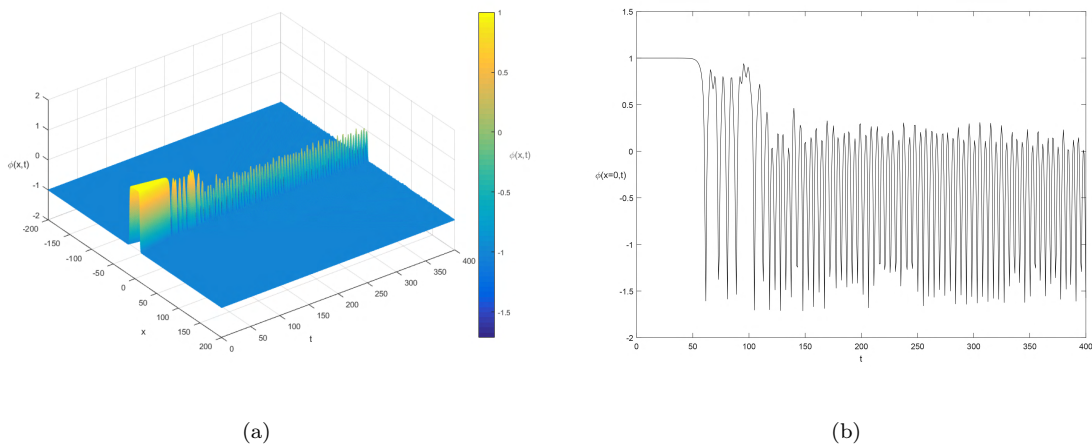


Figura 4.6: Colisão *kink-antikink* para $v_i = 0.18$: (a) Malha 3D da evolução espaço-temporal; (b) centro de massa da evolução do campo.

pequenas oscilações antes da segunda colisão e escape para o infinito. A Figura 4.7a ilustra a colisão com velocidade inicial na primeira janela de *two-bounce*, enquanto a Figura 4.7b ilustra a colisão com velocidade inicial na terceira janela de *two-bounce*. Para o fenômeno de *two-bounce* no modelo ϕ^4 , o número de oscilações entre as duas colisões indica a ordem da janela de *two-bounce* em questão.

As janelas de *n-bounce* são encontradas em velocidades próximas e inferiores à velocidade crítica. Essas janelas possuem um padrão característico de uma estrutura fractal. Antes de explicar este padrão, vamos estabelecer que quando comparamos janelas que representam diferentes números de *bounce*, algumas possuirão números de *bounce* maiores ou menores que outras. Neste sentido, uma janela com número de *bounce* inferior representa uma janela que leva a menos colisões antes do escape para o infinito. Com isso, o padrão que está presente nas janelas de *n-bounce* é que as janelas de *bounce* superior se acumulam e diminuem em espessura quando mais próximas às janelas de *bounce* inferior. Este padrão se repete, criando uma estrutura fractal.

Para mostrar a estrutura fractal, consideremos a Figura 4.8, que mostra o número de *bounce* em função da velocidade inicial. É possível identificar que as janelas representadas diminuem em espessura conforme se aproximam da janela inferior: as janelas de *two-bounce* se acumulam e diminuem em espessura conforme se aproximam da janela de *one-bounce*, assim como as janelas de *three-bounce*, ao se aproximar de uma janela de *two-bounce*, se assemelham às janelas de *two-bounce* quando estas se aproximam da janela de *one-bounce*, assim resultando na estrutura fractal do modelo [23]. Contudo, esta estrutura não é perfeita devido a perda de energia através de radiação no processo de colisão [110].

A explicação destes fenômenos é feita através dos modos vibracionais presentes em cada solução topológica do modelo. Para o fenômeno de *bion*, as soluções colidem com baixa velocidade e assim há tempo

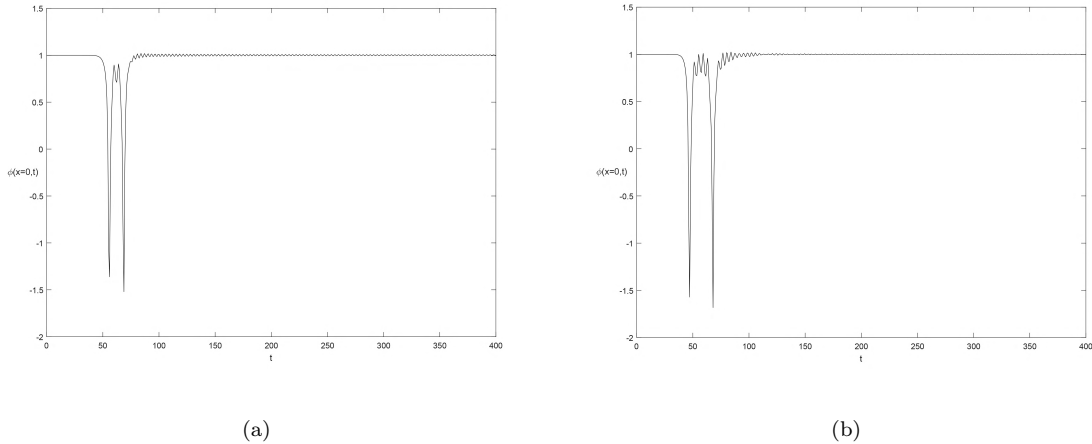


Figura 4.7: Centro de massa da evolução do campo para colisão *kink-antikink* com: (a) $v_i = 0.2$, na primeira janela de *two-bounce*, e (b) $v_i = 0.2396$, na terceira janela de *two-bounce*.

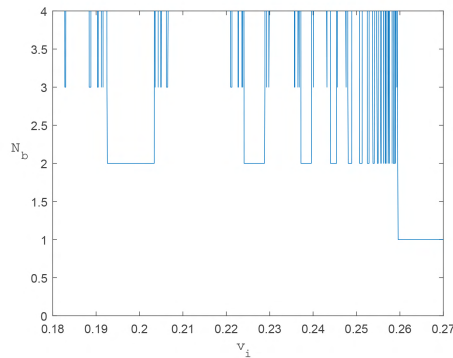


Figura 4.8: Número de *bounce* por velocidade inicial do modelo ϕ^4 .

suficiente para que o modo de translação da solução transfira uma energia considerável para o modo de vibração, de forma que as soluções fiquem presas uma na outra.

Para velocidades maiores que a velocidade crítica, não há tempo suficiente para que o modo translacional transfira energia considerável para o modo vibracional, de forma a manter as soluções presas. Assim ocorre apenas uma colisão e as soluções escapam para o infinito, ocasionando *one-bounce*.

Para que ocorra o fenômeno de *two-bounce*, as soluções colidem e parte da energia do modo translacional é transferida para o modo vibracional. A energia transferida é suficiente para que as soluções não escapem para o infinito, de forma que elas se afastam e colidam novamente. Na segunda colisão, parte da energia do modo vibracional retorna ao modo translacional, sendo grande o suficiente para que as soluções escapem. Essa explicação é conhecida como o mecanismo de troca de energia ressonante ou mecanismo CSW,

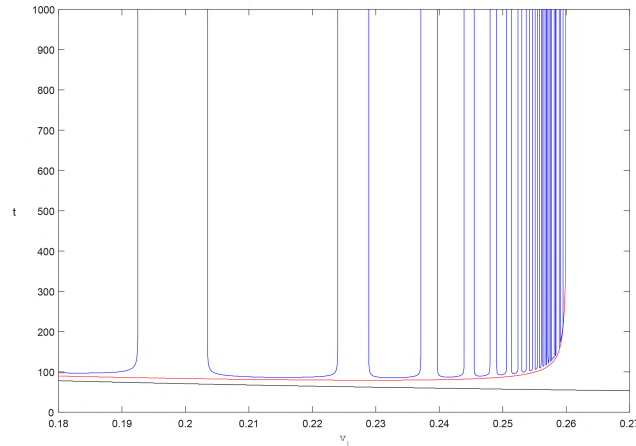


Figura 4.9: Tempo da primeira, segunda e terceira colisão. Em preto: tempo da primeira colisão; em vermelho: tempo da segunda colisão; em azul: tempo da terceira colisão.

pois foi proposta por Campbell, Schonfeld e Wingate [22]. As janelas de *two-bounce* obedecem a relação

$$\omega_1 T_{12} = 2\pi n + \delta, \quad (4.19)$$

onde ω_1 é a frequência do modo vibracional, T_{12} é o tempo entre a primeira e a segunda colisão, n é o número da janela de *two-bounce* e δ é uma fase. A expressão (4.19) foi obtida sem uma base teórica que a justifique, sendo uma construção fenomenológica.

Uma outra forma de olhar para as janelas de *two-bounce* é através da Figura 4.9. Esta figura apresenta o tempo entre primeira, segunda e terceira colisão em função da velocidade inicial. A linha preta representa o tempo da primeira colisão. Como sempre haverá uma primeira colisão o tempo até a primeira colisão somente diminui, conforme aumentamos a velocidade inicial. A linha vermelha representa o tempo da segunda colisão. Em colisões com velocidades inferiores à velocidade crítica, ocorrerão *n-bounce* ou *bion*, não importando a velocidade, por isso a linha vermelha está sempre presente. Conforme nos aproximamos da e ultrapassamos da velocidade crítica, não haverá mais uma segunda colisão, pois ocorrerá somente *one-bounce* e, por conta disso, a linha vermelha começa a divergir conforme $v_i \rightarrow v_{cr}$. A linha azul representa o tempo da terceira colisão. Quando a colisão acarretar em *two-bounce*, não haverá uma terceira colisão e a linha azul irá divergir. Portanto, as faixas de velocidades nas quais a linha azul diverge, representam janelas de *two-bounce*.

A classificação das janelas de *three-bounce* é realizada de forma semelhante a classificação das janelas de *two-bounce*. Para isso, devemos levar em consideração a janela de *two-bounce* próxima ao fenômeno de *three-bounce* que estamos analisando. A Figura 4.10 mostra o centro de massa do campo escalar, apresentando fenômenos de *three-bounce*. Na Figura 4.10a é mostrado o centro de massa da colisão para $v_i = 0.1829$,

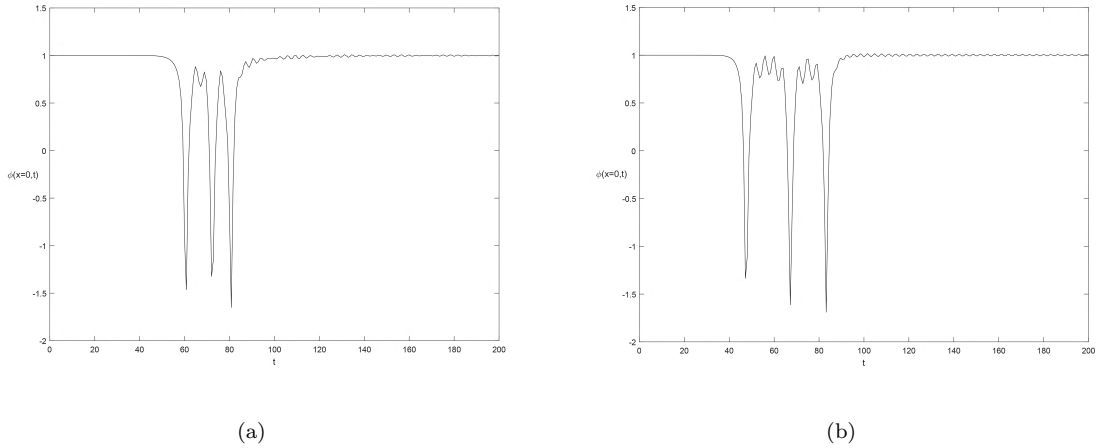


Figura 4.10: Centro de massa da evolução do campo para colisão *kink-antikink* com: (a) $v_i = 0.1829$, na primeira janela de *three-bounce* em torno da primeira janela de *two-bounce*, e (b) $v_i = 0.2368$, na terceira janela de *three-bounce* em torno da terceira janela de *two-bounce*.

onde é possível perceber que entre as duas primeiras colisões existe apenas uma pequena oscilação, indicando que o fenômeno ocorre próximo à primeira janela de *two-bounce*. Entre a segunda e terceira colisão não existe oscilação, caracterizando um resultado na primeira janela de *three-bounce* em torno da primeira janela de *two-bounce*. Na Figura 4.10b é mostrado o centro de massa da colisão para $v_i = 0.2368$, onde é possível notar que existem três oscilações entre as duas primeiras colisões, indicando que o fenômeno ocorre próximo à terceira janela de *two-bounce*, e que entre a segunda e terceira colisão existem duas oscilações, caracterizando, um fenômeno na terceira janela de *three-bounce* em torno da terceira janela de *two-bounce*.

4.3 O modelo ϕ^6 e suas características

Vamos considerar o modelo ϕ^6 , descrito pela seguinte densidade lagrangeana [27]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \phi^2 (\phi^2 - 1)^2, \quad (4.20)$$

onde o potencial que caracteriza o modelo é dado por:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \phi^2 (\phi^2 - 1)^2. \quad (4.21)$$

O potencial (4.21) possui mínimos em $\phi_{min} = -1, 0$ e 1 , o que leva a dois setores topológicos. Vamos chamar o setor compreendido entre 0 e 1 de primeiro setor topológico e o setor compreendido entre -1 e 0 de segundo setor topológico. O potencial do modelo está representado na Figura 4.11. A densidade lagrangeana (4.20) conduz à seguinte equação de movimento:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi(\phi^2 - 1)^2 + 2\phi^3(\phi^2 - 1) = 0. \quad (4.22)$$

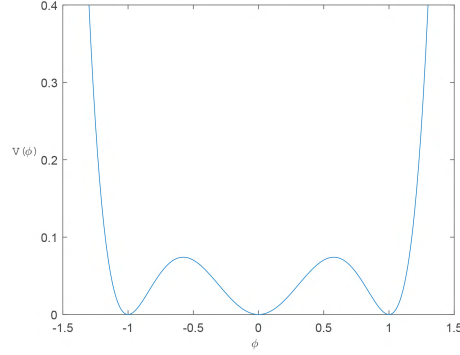


Figura 4.11: Potencial do modelo ϕ^6 .

A obtenção de soluções de estado BPS é realizada através da relação (2.31). Para isso vamos considerar a função superpotencial do modelo, definida por:

$$W(\phi) = \frac{\phi^4}{4} - \frac{\phi^2}{2}. \quad (4.23)$$

Portanto, considerando a relação (2.29), as equações de primeira ordem que levam às soluções estáticas do modelo são dadas por

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm(\phi - \phi^3). \quad (4.24)$$

As equações (4.24) possuem quatro soluções analíticas não triviais, correspondendo às soluções *kink* e *antikink* do modelo de cada setor topológico. A equação com sinal "+", em (4.24), apresenta duas soluções, sendo um *kink* no primeiro setor topológico, que será representado por $\phi_k = \phi_{k(0,1)}$, e um *antikink* no segundo setor topológico, que será representado por $\phi_{\bar{k}} = \phi_{\bar{k}(0,-1)}$. Essas soluções são expressas por

$$\phi_{k(0,1)} = \sqrt{\frac{1}{2}[1 + \tanh(x)]}, \quad (4.25)$$

$$\phi_{\bar{k}(0,-1)} = -\sqrt{\frac{1}{2}[1 + \tanh(x)]}. \quad (4.26)$$

A equação com sinal "-" em (4.24), apresenta as outras duas soluções, sendo um *antikink* no primeiro setor topológico, que será representado por $\phi_{\bar{k}} = \phi_{\bar{k}(1,0)}$, e um *kink* no segundo setor topológico, que será representado por $\phi_k = \phi_{k(-1,0)}$. Essas soluções são expressas por

$$\phi_{\bar{k}(1,0)} = \sqrt{\frac{1}{2}[1 - \tanh(x)]}, \quad (4.27)$$

$$\phi_{k(-1,0)} = -\sqrt{\frac{1}{2}[1 - \tanh(x)]}. \quad (4.28)$$

Analisando o tipo e os sinais das soluções, podemos observar que um *kink* se transforma num *antikink* (ou um *antikink* se transforma num solução *kink*) do setor topológico oposto quando realizamos

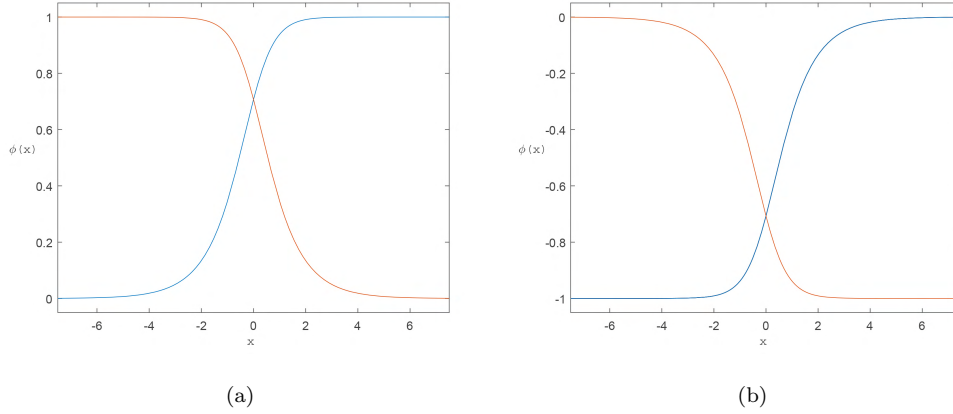


Figura 4.12: Solução *kink*, em azul, e solução *antikink*, em laranja, do modelo ϕ^6 : (a) Soluções do primeiro setor topológico; (b) Soluções do segundo setor topológico.

uma transformação do tipo $\phi \rightarrow -\phi$. Por outro lado, para obtermos uma solução *kink* (ou *antikink*) no mesmo setor topológico a partir de uma solução *antikink* (*kink*) devemos realizar uma transformação do tipo $x \rightarrow -x$, conforme pode ser visto no par (4.25) e (4.27) e no par (4.26) e (4.28). O perfil das soluções (4.25), (4.26), (4.27) e (4.28) é apresentado na Figura 4.12.

É evidenciado na Figura 4.12 que as quatro soluções possuem limites assintóticos diferente, o que nos permite inferir que todas possuem carga topológica diferente de zero e, portanto, são soluções topológicas. A Tabela 4.1 apresenta o tipo de solução, seus limites assintóticos e suas cargas topológicas.

| Solução | $\phi(x \rightarrow \infty)$ | $\phi(x \rightarrow -\infty)$ | Q_T |
|------------------------|------------------------------|-------------------------------|----------------|
| $\phi_{k(0,1)}$ | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| $\phi_{\bar{k}(1,0)}$ | 0 | 1 | $-\frac{1}{2}$ |
| $\phi_{k(-1,0)}$ | 0 | -1 | $\frac{1}{2}$ |
| $\phi_{\bar{k}(0,-1)}$ | -1 | 0 | $-\frac{1}{2}$ |

Tabela 4.1: Cargas topológicas das soluções estáticas do modelo ϕ^6 .

Para obtermos soluções que viajam sem perder sua forma aplicamos um *boost* de Lorentz na solução estática. A solução *kink* viajante do primeiro setor topológico assume a forma

$$\phi_{k(0,1)} = \sqrt{\frac{1}{2}\{1 + \tanh[\gamma(x + x_0 - v_i t)]\}}, \quad (4.29)$$

onde x_0 é a distância em que o centro do *kink* está em relação ao ponto de colisão e γ é o fator de Lorentz, que depende apenas da velocidade inicial, v_i , da solução e é definido como $\gamma = 1/\sqrt{1 - v_i^2}$.

Seguindo o procedimento da seção 2.2 deste trabalho, é possível determinar a densidade de energia das soluções através da expressão (2.20) ao se utilizar o potencial do modelo ϕ^6 e uma de suas

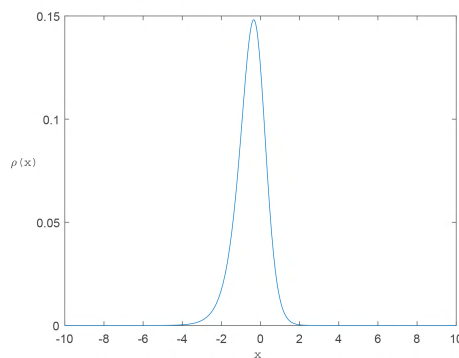


Figura 4.13: Densidade de energia da solução *kink* do primeiro setor topológico do modelo ϕ^6 .

soluções estáticas. Com isso, a densidade de energia da solução *kink* (4.25) é dada por

$$\rho(x) = \frac{1}{8} \operatorname{sech}^2(x) [1 - \tanh(x)]. \quad (4.30)$$

A Figura 4.13 apresenta a densidade de energia da solução *kink* do primeiro setor topológico. Através dela é possível identificar que a densidade de energia é bem localizada, porém não é simétrica em torno da origem. Isso ocorre pois a solução *kink* também não é simétrica em torno da origem. A energia mínima de cada solução topológica do modelo ϕ^6 é obtida através da integração em todo o espaço da expressão (4.30) e é dada por $E_{min} = 1/4$.

O procedimento de Bogomol'nyi para o cálculo de energia mínima também leva ao mesmo resultado. De fato, precisamos apenas considerar a aplicação de alguma das soluções topológicas do modelo na função superpotencial (4.23) e utilizar a relação (2.33). Assim, a energia mínima das soluções é dada por

$$E_{min} = \pm W \Big|_{-\infty}^{\infty} = \|W[\phi(x \rightarrow \infty)] - W[\phi(x \rightarrow -\infty)]\| = \left\| -\frac{1}{4} \right\| = \frac{1}{4}. \quad (4.31)$$

Através da análise de estabilidade linear, podemos determinar o potencial de perturbação por meio da aplicação de uma das soluções estáticas na derivada segunda do potencial do modelo. No entanto, como o modelo ϕ^6 apresenta soluções assimétricas, é de se esperar que seu potencial de estabilidade também seja assimétrico. O procedimento para determinar o potencial de estabilidade do modelo ϕ^6 nos conduz a

$$U(x) = 15\phi_s^4 - 12\phi_s^2 + 1. \quad (4.32)$$

A solução ϕ_s em (4.32) pode ser qualquer uma das soluções (4.25), (4.27), (4.28) e (4.26). A assimetria das soluções de um mesmo setor topológico e a assimetria do potencial de estabilidade acontecem sob a transformação $x \rightarrow -x$. Logo, a forma do potencial dependerá do tipo de solução utilizada para obtê-lo.

A Figura 4.14a apresenta o potencial de perturbação do *kink* (4.25) e a Figura 4.14b apresenta o potencial de perturbação do *antikink* (4.27). Para a solução *kink* o potencial apresenta os limites assintóticos

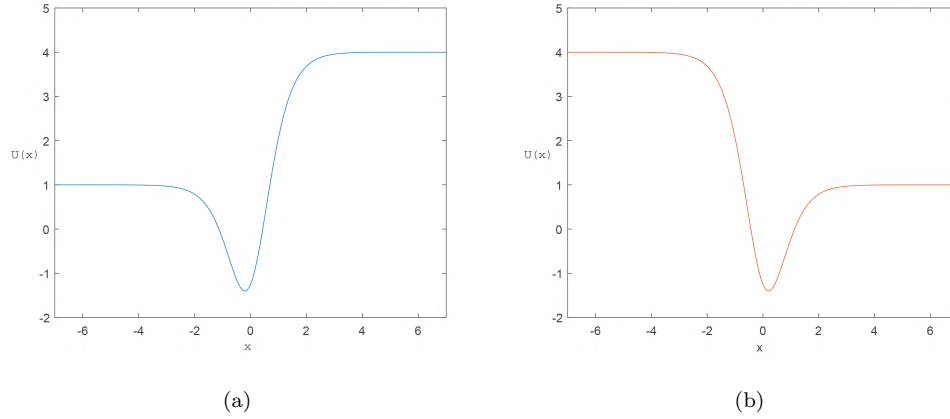


Figura 4.14: Potencial de perturbação das soluções *kink* e *antikink* do modelo ϕ^6 do primeiro setor topológico.. (a) Potencial da solução *kink*. (b) Potencial da solução *antikink*.

$U[\phi(x \rightarrow -\infty)] = 1$ e $U[\phi(x \rightarrow \infty)] = 4$, enquanto que para a solução *antikink* os limites assintóticos são $U[\phi(x \rightarrow -\infty)] = 4$ e $U[\phi(x \rightarrow \infty)] = 1$, evidenciando seu caráter assimétrico sob a transformação $x \rightarrow -x$.

Considerando o potencial de estabilidade (4.32) para a solução *kink*, a equação do tipo *Schrödinger* independente do tempo assume a forma

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{15}{4} \tanh^2(x) + \frac{3}{2} \tanh(x) - \frac{5}{4} \right] \psi_n = \omega_n^2 \psi_n. \quad (4.33)$$

A equação (4.33) possui apenas soluções de estado ligado para o autovalor nulo, ou seja, não existem modos vibracionais adicionais ao modo zero. De maneira geral, a solução de modo zero pode ser obtida através da expressão (2.59), levando a

$$\psi_0(x) = A \frac{d\phi_s}{dx}, \quad (4.34)$$

onde A é a constante de normalização, determinada através da condição $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0|^2 dx = 1$. A solução (4.34) apresenta uma forma diferente para cada solução estática. Considerando as soluções topológicas do primeiro setor, o modo zero normalizado para a solução *kink* é dado pela expressão

$$\psi_0(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sech}(x) [\cosh(x) - \sinh(x)] \sqrt{1 + \tanh(x)} \quad (4.35)$$

e o modo zero normalizado da solução *antikink* é dado por

$$\psi_0(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sech}(x) [\cosh(x) + \sinh(x)] \sqrt{1 - \tanh(x)}. \quad (4.36)$$

Os perfis das soluções de modo zero do primeiro setor topológico do modelo ϕ^6 são apresentados na Figura 4.15, onde a cor azul representa o modo zero da solução *kink* e a cor laranja representa a solução de modo zero da solução *antikink*.

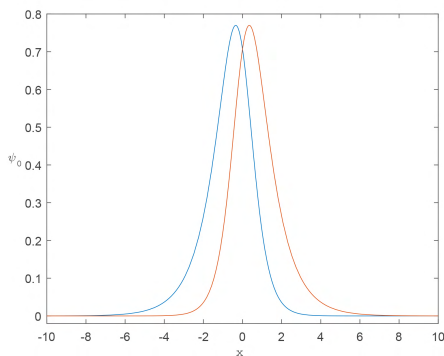


Figura 4.15: Perfil das soluções de modo zero do primeiro setor topológico do modelo ϕ^6 . Em azul: modo zero da solução *kink*; em laranja: modo zero da solução *antikink*.

A equação (4.33) também apresenta soluções de espectro contínuo, obtidas através de funções hipergeométricas [111].

Devido a ausência de modos vibracionais, não seria esperado que haja uma riqueza de fenômenos decorrentes do processo de espalhamento das soluções do modelo ϕ^6 . Contudo, conforme será estudado na próxima seção, mesmo sem a presença de modos vibracionais em cada solução topológica, os resultados das colisões do modelo ϕ^6 são tão ricos quanto os resultados do modelo ϕ^4 , se mostrando, a princípio, como um contra exemplo ao mecanismo de troca de energia.

4.4 Sobre as colisões das soluções do modelo ϕ^6

Como os setores topológicos do modelo ϕ^6 possuem o mínimo $\phi_{min} = 0$ em comum, é suficiente estudar o processo de colisão das soluções de apenas um setor [42]. Os resultados das colisões das soluções do outro setor serão análogos. Vamos trabalhar com as soluções (4.25) e (4.27) que, por simplicidade, chamaremos respectivamente de ϕ_k e $\phi_{\bar{k}}$.

Devido a assimetria do potencial de perturbação sob a transformação $x \rightarrow -x$, devemos realizar colisões para as configurações *kink-antikink* e *antikink-kink* [27]. Conforme será estudado nesta seção, a configuração do par influenciará os resultados do processo de colisão.

Com essas considerações, as condições iniciais para a simulação numérica se apresentam de duas formas: podemos considerar a colisão do par *kink-antikink*, dado por

$$\phi_{k\bar{k}}(x, x_0, v_i, t) = \phi_k(x, x_0, v_i, t = 0) + \phi_{\bar{k}}(x, -x_0, -v_i, t = 0), \quad (4.37)$$

ou podemos considerar a configuração *antikink-kink*, dada por

$$\phi_{\bar{k}k}(x, x_0, v_i, t) = \phi_{\bar{k}}(x, x_0, v_i, t = 0) + \phi_k(x, -x_0, -v_i, t = 0) + 1. \quad (4.38)$$

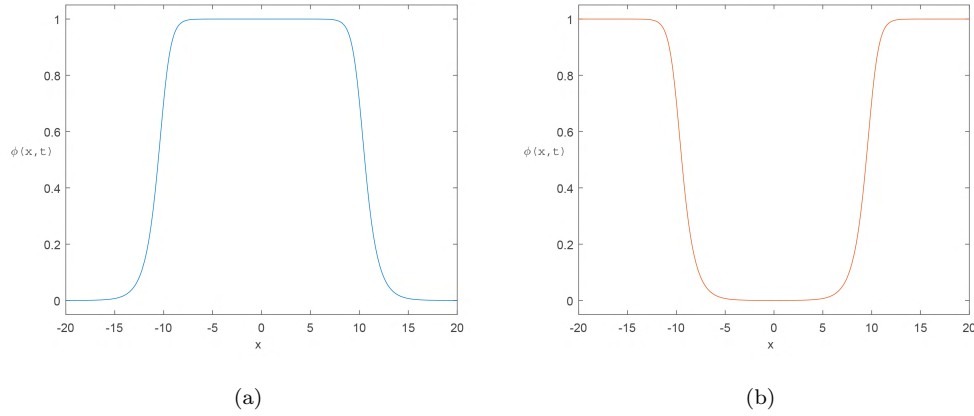


Figura 4.16: (a) Perfil inicial da colisão *kink-antikink* do modelo ϕ^6 . (b) Perfil inicial da colisão *antikink-kink* do modelo ϕ^6 .

Os perfis dos campos iniciais (4.37) e (4.38), em $t = 0$ podem ser vistos respectivamente nas Figuras 4.16a e 4.16b. A Figura 4.16a apresenta um *kink* centrado em $x = -x_0 = -10$ e um *antikink* centrado em $x = x_0 = 10$, enquanto que a Figura 4.16b apresenta um *antikink* centrado em $x = -x_0 = -10$ e um *kink* centrado em $x = x_0 = 10$.

Utiliza-se também a derivada temporal dos perfis iniciais como condição inicial:

$$\dot{\phi}_{k\bar{k}}(x, x_0, v_i, t) = \dot{\phi}_k(x, x_0, v_i, t = 0) + \dot{\phi}_{\bar{k}}(x, -x_0, -v_i, t = 0) \quad (4.39)$$

para a configuração *kink-antikink* e

$$\dot{\phi}_{\bar{k}k}(x, x_0, v_i, t) = \dot{\phi}_{\bar{k}}(x, x_0, v_i, t = 0) + \dot{\phi}_k(x, -x_0, -v_i, t = 0) \quad (4.40)$$

para a configuração *antikink-kink*.

Os limites assintóticos dos perfis iniciais e de suas derivadas temporais são utilizados como condições de contorno: $\phi_{k\bar{k}}(x \rightarrow \pm\infty) = 0$ e $\dot{\phi}_{k\bar{k}}(x \rightarrow \pm\infty) = 0$ para a configuração *kink-antikink* e $\phi_{\bar{k}k}(x \rightarrow \pm\infty) = 1$ e $\dot{\phi}_{\bar{k}k}(x \rightarrow \pm\infty) = 0$ para a configuração *antikink-kink*.

Em ambos os casos, as colisões acontecem através da evolução numérica da equação (4.22). Foi utilizado o método de Runge-Kutta de 4ª ordem para a parte temporal, com passo $\delta t = 0.4$, e o método de diferenças finitas de quarta ordem para a parte espacial, com passo $\delta x = 0.8$.

4.5 Colisões *kink-antikink* do modelo ϕ^6

Os fenômenos decorrentes das colisões do modelo ϕ^6 , assim como no modelo ϕ^4 , dependem da velocidade inicial de impacto das soluções. Os resultados aqui obtidos concordam com a literatura [27].

Para colisões *kink-antikink*, este modelo não apresenta janelas de *n-bounce*. É esperado um comportamento semelhante ao modelo sine-Gordon, pois o modelo em questão não possui modos de vibração para cada solução isolada. De fato, para velocidades maiores que a velocidade crítica, as soluções colidem e vão para o outro setor topológico. A velocidade crítica é $v_{cr} = 0.289$. Para velocidades menores que a velocidade crítica encontramos o estado de *bion*, no qual as soluções ficam presas uma na outra, oscilando até que o par *kink-antikink* se aniquile completamente.

Os resultados das colisões podem ser vistos na Figura 4.17, que mostra colisões *kink-antikink* para a velocidade inicial $v_i = 0.2$ e $v_i = 0.3$. Na Figura 4.17a temos a evolução do centro de massa do campo inicial na colisão para $v_i = 0.2$, resultando num estado oscilatório característico do estado de *bion*. Na Figura 4.17b temos a vista superior da evolução espaço-temporal do campo na colisão para $v_i = 0.3$, resultando em *one-bounce* e mostrando que após a colisão, as soluções escapam para o infinito em outro setor topológico.

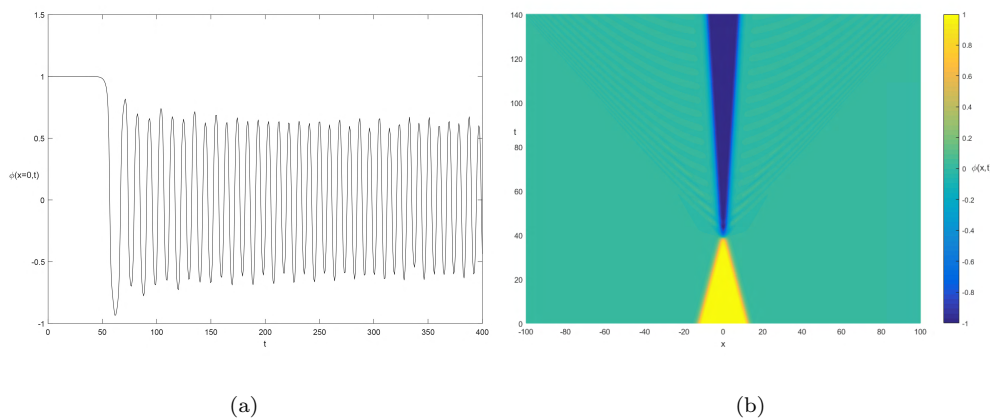


Figura 4.17: Colisão *kink-antikink* do modelo ϕ^6 . (a) Evolução do centro de massa $\phi(x = 0, t)$ do campo inicial, para $v_i = 0.2$. (b) Vista superior da evolução espaço-temporal do campo inicial, para $v_i = 0.3$.

Apesar de apresentarem um comportamento semelhante às colisões do modelo sine-Gordon para velocidades iniciais superiores à velocidade crítica, as colisões *kink-antikink* do modelo ϕ^6 são inelásticas. A perda de energia durante o processo de colisão está relacionada a não integrabilidade do modelo e pode ser vista na Figura 4.17b: após a colisão, as soluções precisam de um tempo maior para estarem à mesma distância que estavam antes da colisão, indicando que após a colisão as soluções possuem menor velocidade e, portanto, menos energia.

4.6 Colisões *antikink-kink* do modelo ϕ^6

Para colisões *antikink-kink*, o cenário muda e foi encontrado um comportamento inesperado. Aparecem janelas de ressonância e uma estrutura fractal semelhantes às encontradas no modelo ϕ^4 . Neste

caso a velocidade crítica é $v_{cr} = 0.0457$. Velocidades superiores à velocidade crítica ocasionam somente *one-bounce*. Colisões com velocidades inferiores a velocidade crítica, ocasionam o estado de *bion* e também as janelas de *n-bounce*.

Como as soluções do modelo ϕ^6 não possuem modos vibracionais, a estrutura de ressonância presente no modelo, a princípio, se tornou um contra exemplo sobre como explicar estes resultados, ou seja, um contra exemplo ao mecanismo CSW [27].

Para a configuração de colisão *antikink-kink* do modelo ϕ^6 , além do estado de *bion*, aparecem o fenômeno de *quasiresonance* [49] e estruturas de *n-bounce*. Para velocidades maiores que a velocidade crítica, não há mudança de setor topológico e sim uma colisão inelástica. A Figura 4.18 mostra o fenômeno de *two-bounce* através da evolução do centro de massa do campo escalar para a colisão com $v_i = 0.023$ e o fenômeno de *one-bounce* para $v_i = 0.23$. Os resultados aqui encontrados concordam com a literatura [27].

Na Figura 4.19 é apresentado o tempo da primeira, segunda e terceira colisão em função da velocidade inicial, nos permitindo identificar as janelas de *two-bounce* e também como a estrutura ressonante se comporta conforme a velocidade das colisões se aproxima e ultrapassa a velocidade crítica.

Conforme pode ser visto na Figura 4.19, a linha preta (t_1) representa o tempo da primeira colisão entre as soluções. Sempre haverá uma primeira colisão e, quanto maior for a velocidade inicial, menor será o tempo para que esta ocorra.

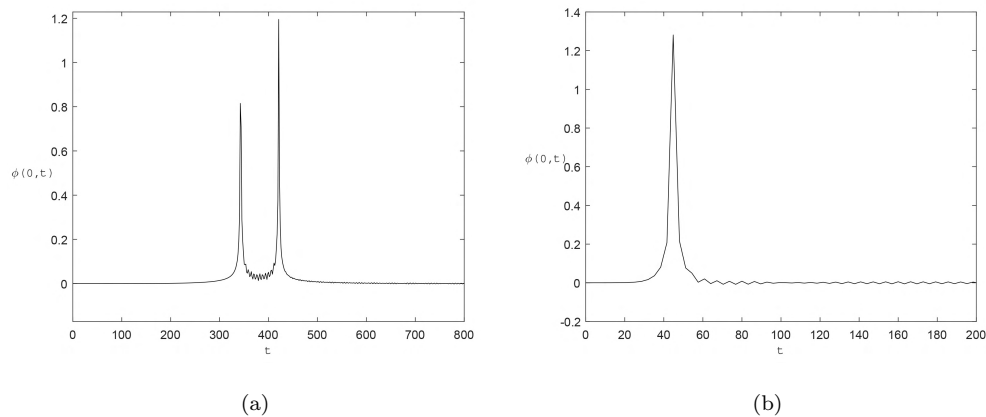


Figura 4.18: Centro de massa do campo escalar. (a) Colisão *antikink-kink* para $v_i = 0.023$; (b) Colisão *antikink-kink* para $v_i = 0.23$.

A linha vermelha na Figura 4.19 representa o tempo da segunda colisão. Para velocidades inferiores a velocidade crítica, teremos janelas de *n-bounce* ou estado de *bion*. Em ambos os casos, haverá duas ou mais colisões entre as soluções. Conforme nos aproximamos da velocidade crítica, a estrutura ressonante vai desaparecendo e o tempo necessário para que aconteça a segunda colisão vai aumentando, o que faz com que a linha vermelha comece a divergir para velocidades próximas à velocidade crítica.

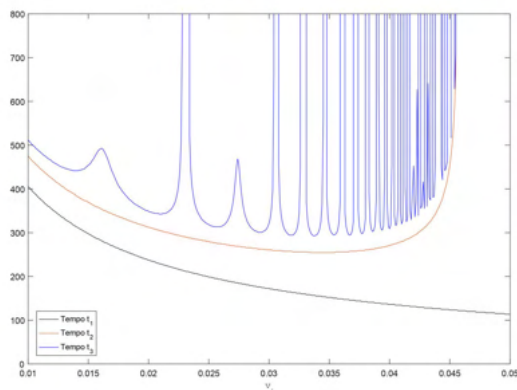


Figura 4.19: Tempo da primeira (t_1), segunda (t_2) e terceira (t_3) colisão do par *antikink-kink* do modelo ϕ^6 em função da velocidade inicial v_i .

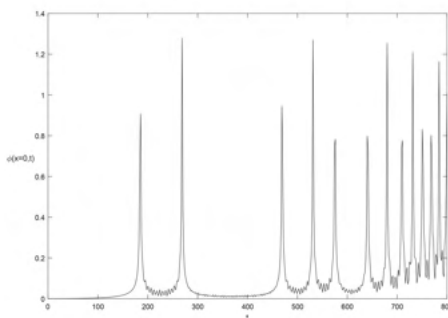


Figura 4.20: Evolução do centro de massa do campo inicial do par *antikink-kink*, para $v_i = 0.0274$. Inicialmente a colisão resulta em *two-bounce*, mas após um tempo decaí, o que caracteriza um estado de *quasiresonance*.

A linha azul Figura 4.19 representa o tempo até que ocorra a terceira colisão. Nas velocidades que ocasionam *two-bounce*, não existe uma terceira colisão e o resultado é que a linha azul diverge, assim representando janelas de *two-bounce*. A primeira janela de *two-bounce* é calculada em $0.0229 < v_i < 0.0233$. A linha azul também apresenta picos que não divergem. Estes picos representam as chamadas falsas janelas de *two-bounce*. Ocorre que para sabermos se uma colisão irá ou não resultar em *two-bounce*, devemos observar a evolução do processo de colisão por um tempo maior.

Na Figura 4.20 é mostrada a evolução do centro de massa do campo para $v_i = 0.0274$. Se a análise da colisão for realizada somente até o tempo $t = 400$, teremos *two-bounce*. Contudo, conforme o processo é observado por mais tempo é possível identificar o estado de *quasiresonance*.

Conforme já mencionado, os resultados das colisões aparentemente ignoram o mecanismo CSW,

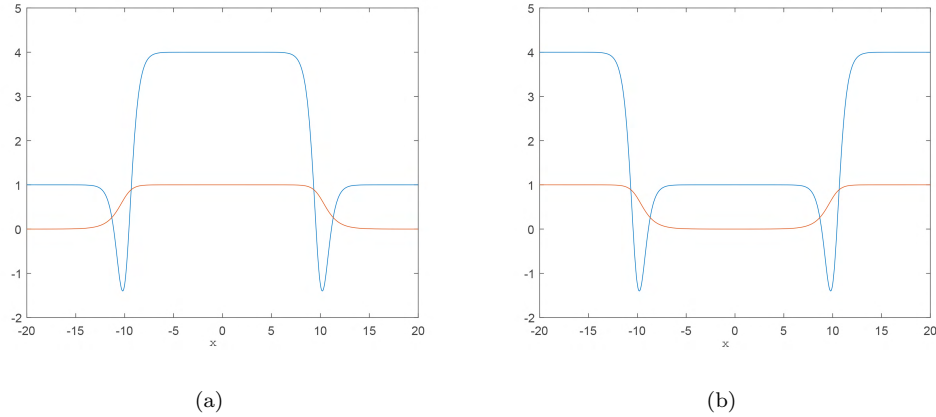


Figura 4.21: Configuração do potencial de perturbação e do par das soluções topológicas do modelo ϕ^6 . (a) Configuração inicial do par *kink-antikink*. (b) Configuração inicial do par *antikink-kink*.

pois cada solução não possui modo vibracional. Acontece que no modelo ϕ^6 , devemos considerar o par das soluções e verificar se este par possui modos vibracionais. Como o potencial de perturbação não é simétrico sob a transformação $x \rightarrow -x$, a configuração inicial para os potenciais de perturbação de cada par *kink-antikink* ou *antikink-kink* será diferente, conforme pode ser visto na Figura 4.21. Para a configuração *kink-antikink* o potencial de perturbação do par apresenta uma barreira no centro, dificultando a presença de modos vibracionais, enquanto a configuração do par *antikink-kink* apresenta um vale no centro, facilitando a presença de modos vibracionais. De fato, em [27] é mostrado que a configuração do potencial de perturbação para o par *antikink-kink* possui modos vibracionais, desde que $x_0 \geq 4$.

Com essas considerações, a explicação para a estrutura ressonante decorrente do processo de colisão *antikink-kink* do modelo ϕ^6 pode ser realizada através do mecanismo de troca de energia entre os modos do par *antikink-kink*. O modelo ϕ^4 não apresenta essa situação pois o potencial de perturbação é simétrico sob a transformação $x \rightarrow -x$ e cada solução possui modo de vibração.

5 Modelos com interações hiperbólicas

Neste capítulo, vamos estudar modelos com interações hiperbólicas. Para obter estes modelos, consideramos uma expressão geral para o potencial [88]. Esta família de potenciais surge a partir do método da deformação trabalhado junto ao modelo ϕ^4 [108 - 111]. O apêndice C apresenta o método da deformação.

5.1 Modelos hiperbólicos generalizados

Vamos considerar a expressão que determina o tipo de teoria que será estudada [88]:

$$V_a(\phi) = \frac{1}{2na^2} \frac{[1 - (n-1) \sinh^2(\phi)]}{\operatorname{sech}^2(\phi)} [1 - f(\phi)^2], \quad (5.1)$$

sendo a função de deformação

$$f(\phi) = \cos\{a \arccos[\sqrt{n} \tanh(\phi)] - m\pi\}, \quad (5.2)$$

onde ϕ é o campo, a é o parâmetro que determina o potencial da teoria, n é o parâmetro de deformação das características do modelo determinado por a e m é um número inteiro com a seguinte dependência: $m = 0, 1, \dots, 2a - 1$. O parâmetro m determina se as características do modelo que estamos estudando está relacionada à solução *kink* ou à solução *antikink* e em qual setor topológico.

Neste trabalho vamos estudar colisões das soluções das teorias que advêm de $a = 1$ e $a = 2$. No entanto, como as teorias que podem surgir da expressão (5.1) são inúmeras, vamos apresentá-las também para $a = 3$ e $a = 4$, que podem servir para trabalhos futuros. Será representado por V_a o conjunto com os quatro potenciais para $a = 1, 2, 3$ e 4 .

Para cada teoria o valor do parâmetro n pode assumir diversos valores, desde que respeite a restrição $n > 1$. Portanto, nesta seção vamos apresentar as expressões que caracterizam cada teoria e os potenciais para os valores de a mencionados. Para obtenção das figuras utilizamos o valor fixo $n = 2$.

Para os valores de $a = 1, 2, 3$ e 4 são obtidos, respectivamente, os seguintes potenciais [88]:

$$V_1(\phi) = \frac{1}{2n} [1 - (n-1) \sinh^2(\phi)]^2, \quad (5.3)$$

$$V_2(\phi) = \frac{1}{2} \tanh^2(\phi) [1 - (n-1) \sinh^2(\phi)]^2, \quad (5.4)$$

$$V_3(\phi) = \frac{1}{18n} \operatorname{sech}^4(\phi) [1 - (4n-1) \sinh^2(\phi)]^2 [1 - (n-1) \sinh^2(\phi)]^2, \quad (5.5)$$

$$V_4(\phi) = \tanh^2(\phi) \operatorname{sech}^4(\phi) [1 - (2n-1) \sinh^2(\phi)]^2 [1 - (n-1) \sinh^2(\phi)]^2. \quad (5.6)$$

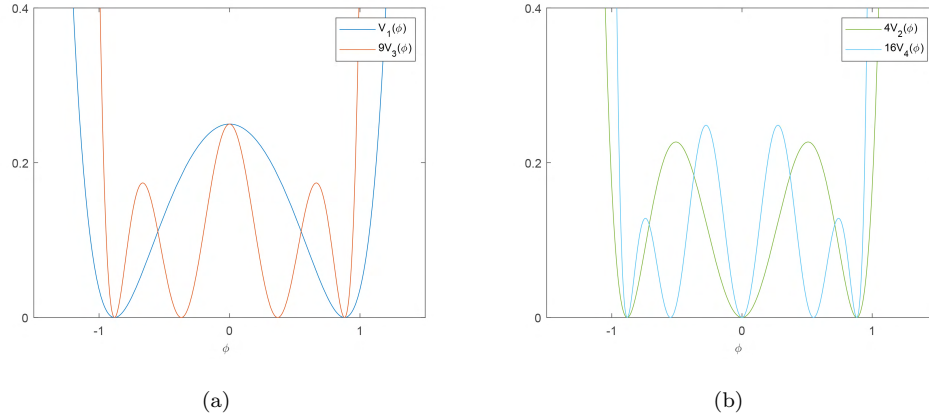


Figura 5.1: Potenciais V_a multiplicados por a^2 , com valor fixo de $n = 2$. (a) Potencial (5.3) em azul e potencial (5.5) em laranja. (b) Potencial (5.4) em verde e potencial (5.6) em ciano.

A Figura 5.1 apresenta os potenciais V_a multiplicados por a^2 . A Figura 5.1a apresenta os potenciais (5.3) e (5.5), enquanto que a Figura 5.1b apresenta os potenciais (5.4) e (5.6).

Através da Figura 5.1 é possível identificar que a quantidade de setores topológicos corresponde ao valor de a e também que a quantidade de mínimos é obtida por $a + 1$.

Apesar de cada potencial apresentado caracterizar teorias diferentes, a expressão (5.1) nos fornece uma forma de determinar as demais características de cada teoria a partir de expressões gerais.

O primeiro ponto a ser destacado é a obtenção dos mínimos de cada potencial, encontrados em [88]

$$\phi_{min} = \operatorname{arctanh} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \cos \left(\frac{k\pi}{a} \right) \right]. \quad (5.7)$$

onde $k = 0, 1, \dots, a$. A expressão (5.7) determina os mínimos dos potenciais V_a apresentados na Figura 5.1, para cada valor de a correspondente.

As soluções estáticas que conectam os mínimos de cada potencial têm sua forma geral dada pela expressão [88]

$$\phi(x) = \operatorname{arctanh} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \cos \left(\frac{\theta(x) + m\pi}{a} \right) \right], \quad (5.8)$$

onde $\theta(x) = \arccos[\tanh(x)]$ e $m = 0, 1, \dots, 2a - 1$. Neste caso o parâmetro m é responsável por caracterizar o setor topológico, bem como se a solução é *kink* ou *antikink*. Encontramos soluções *kink* quando $m = 0, \dots, a - 1$ e soluções *antikink* quando $m = a, \dots, 2a - 1$.

A Figura 5.2 apresenta o perfil das soluções *kink* relacionadas a cada potencial. A representação das cores nas soluções é a mesma utilizada na Figura 5.1. A Figura 5.1a apresenta um potencial em azul com um único setor topológico e um potencial em laranja com três setores topológicos; já a Figura 5.2a apresenta

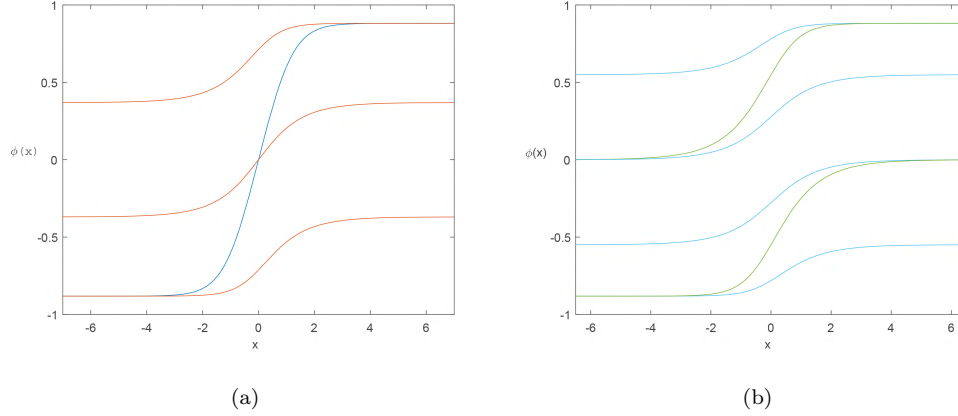


Figura 5.2: Soluções *kink* para $n = 2$. (a) Solução *kink* para $a = 1$ ($m = 0$) em azul e soluções *kink* para $a = 3$ ($m = 0, 1, 2$) em laranja. (b) Soluções *kink* para $a = 2$ ($m = 0, 1$) em verde e soluções *kink* para $a = 4$ ($m = 0, 1, 2, 3$) em ciano.

uma solução *kink* em azul, correspondente ao potencial em azul da Figura 5.1a, e três soluções *kink* em laranja, correspondentes aos três setores topológicos presentes no potencial em laranja da Figura 5.1a. A Figura 5.2b apresenta duas soluções *kink* em verde, correspondentes ao potencial representado na Figura 5.1b em verde, e quatro soluções *kink*, correspondentes aos quatro setores topológicos representados no potencial em ciano na Figura 5.1b.

Vamos considerar a expressão (5.1) e a relação (2.22) para obter a densidade de energia das soluções em sua forma geral, que é [88]:

$$\rho_a(x) = \frac{n \sin^2\left(\frac{\theta(x)+m\pi}{a}\right) \operatorname{sech}^2(x)}{a^2 \left[n - \cos^2\left(\frac{\theta(x)+m\pi}{a}\right) \right]^2}. \quad (5.9)$$

De forma semelhante às soluções, a densidade de energia de cada modelo é obtida somente da expressão (5.9). A Figura 5.3 apresenta a densidade de energia (5.9) relacionada à cada solução *kink* na mesma representação de cores, ou seja, a Figura 5.3a representa a densidade de energia do *kink* para $a = 1$ e $m = 0$ na cor azul e a densidade de energia das soluções *kink* para $a = 3$ e $m = 0, 1, 2$ na cor laranja; a Figura 5.3b a cor verde representa a densidade de energia das soluções para $a = 2$ e $m = 0, 1$ e a cor ciano representa a densidade de energia das soluções *kink* para $a = 4$ e $m = 0, 1, 2, 3$.

O procedimento de análise de estabilidade linear nos fornece uma expressão geral para os potenciais de perturbação que surgem a partir de cada teoria obtida para cada valor de a . A expressão geral

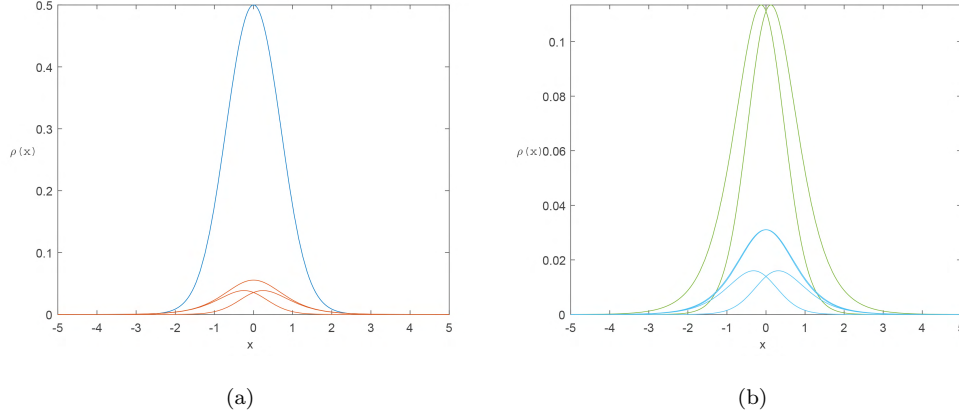


Figura 5.3: Densidade de energia das soluções *kink* para $n = 2$. (a) Densidade de energia da solução *kink* para $a = 1$ ($m = 0$) em azul e densidade de energia das soluções *kink* para $a = 3$ ($m = 0, 1, 2$) em laranja. (b) Densidade de energia das soluções *kink* para $a = 2$ ($m = 0, 1$) em verde e densidade de energia das soluções *kink* para $a = 4$ ($m = 0, 1, 2, 3$) em ciano.

do potencial de perturbação é [88]:

$$U_a(x) = 1 - 2\operatorname{sech}^2(x) + \frac{3}{a}\operatorname{sech}(x)\tanh(x) \frac{\cotg\left(\frac{\theta(x)+m\pi}{a}\right) \left[n - 2 + \cos^2\left(\frac{\theta(x)+m\pi}{a}\right) \right]}{n - \cos^2\left(\frac{\theta(x)+m\pi}{a}\right)} - \frac{\operatorname{sech}^2(x)}{na^2} \left\{ n - 2 + \cos^2\left(\frac{\theta(x)+m\pi}{a}\right) \frac{[n(4n-5) + \cos^2\left(\frac{\theta(x)+m\pi}{a}\right)]}{[n - \cos^2\left(\frac{\theta(x)+m\pi}{a}\right)]^2} \right\}. \quad (5.10)$$

A Figura 5.4 apresenta o potencial de perturbação para cada solução *kink* de cada setor topológico, sendo que na Figura 5.4a temos o potencial de perturbação para a solução *kink* com $a = 1$ e $m = 0$. Este é o caso onde há somente um setor topológico e, portanto, somente uma solução *kink*. Para teorias com mais de um setor topológico o potencial de perturbação de cada solução *kink* muda quando $x \rightarrow -x$, o que fica evidenciado nas Figuras 5.4b, 5.4c e 5.4d, que mostram o potencial de perturbação associado a cada solução *kink* de seus respectivos setores topológicos.

Associado ao potencial (5.1), temos uma equação do tipo Schrödinger independente do tempo que, conforme visto na seção 2.5, sempre possuirá soluções para o autovalor nulo $\omega_0^2 = 0$. Uma forma geral de obter a solução associada ao autovalor nulo é através da expressão (2.59). Neste caso, a solução normalizada é dada por [88]

$$\psi_0 = \frac{\sqrt{n} \sin\left(\frac{\theta(x)+m\pi}{a}\right) \operatorname{sech}(x)}{a \left[n - \cos^2\left(\frac{\theta(x)+m\pi}{a}\right) \right]}. \quad (5.11)$$

A Figura 5.5 apresenta o perfil das soluções (5.11) para cada valor de a . A Figura 5.5a apresenta

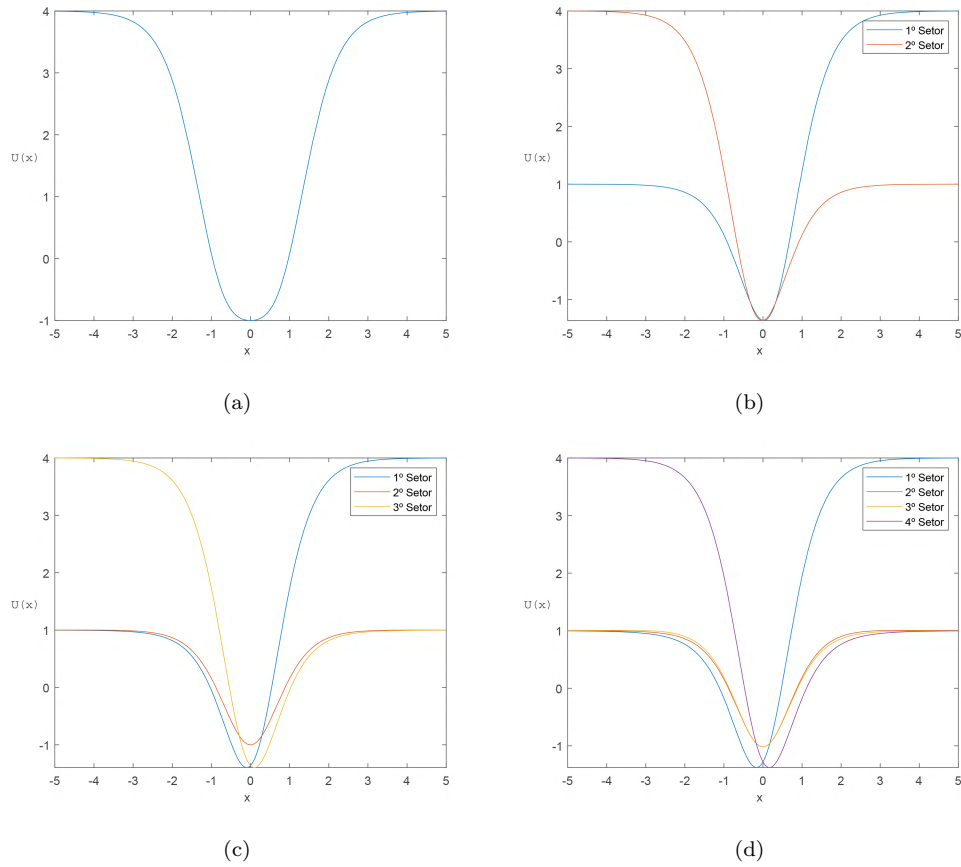


Figura 5.4: Potencial de perturbação das soluções *kink* para $n = 2$. (a) Potencial de perturbação para $a = 1$ e $m = 0$. (b) Potencial de perturbação para $a = 2$ e $m = 0, 1$. (c) Potencial de perturbação para $a = 3$ e $m = 0, 1, 2$. (d) Potencial de perturbação para $a = 4$ e $m = 0, 1, 2, 3$.

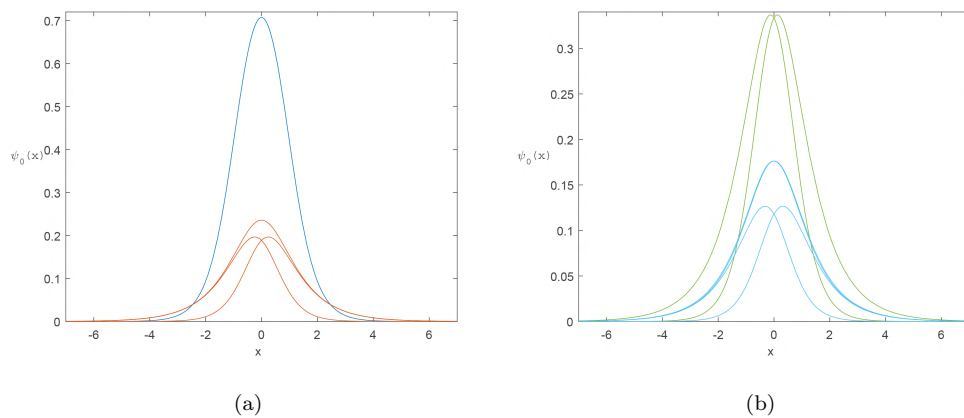


Figura 5.5: Soluções de modo zero (5.11) para $n = 2$. (a) Solução para $a = 1$ ($m = 0$) em azul e soluções para $a = 3$ ($m = 0, 1, 2$) em laranja. (b) Soluções para $a = 2$ ($m = 0, 1$) em verde e soluções para $a = 4$ ($m = 0, 1, 2, 3$) em ciano.

a solução para $a = 1$ e $m = 0$ em azul e soluções para $a = 3$ e $m = 0, 1, 2$ em laranja. A Figura 5.11b apresenta as soluções para $a = 2$ e $m = 0, 1$ em verde e soluções para $a = 4$ e $m = 0, 1, 2, 3$ em ciano.

5.2 O modelo H^4 e suas características

Nesta seção, vamos estudar o modelo H^4 descrito pelo potencial (5.3) [88]:

$$V_1(\phi) = \frac{1}{2n}[1 - (n-1)\sinh^2(\phi)]^2. \quad (5.12)$$

No limite $n = 2$ o potencial (5.12) se transforma no potencial descrito em [116]. O potencial resultante é conhecido como modelo ϕ^4 hiperbólico, pois para pequenos valores de ϕ reencontramos o potencial do modelo ϕ^4 .

Considerando o potencial (5.12) e a relação (2.8), a equação que governa a dinâmica das soluções do modelo H^4 é dada por

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{2}{n}(n-1)\sinh(\phi)\cosh(\phi)[1 - (n-1)\sinh^2(\phi)] = 0. \quad (5.13)$$

Na Figura 5.6a podemos ver o potencial (5.12), em azul, para $n = 2$ e o potencial do modelo ϕ^4 , em laranja. Para pequenos valores de ϕ os potenciais se aproximam. Na Figura 5.6b podemos ver o potencial (5.12) para diversos valores de n . Conforme aumentamos o valor de n , a barreira do potencial se torna menor e seus mínimos se aproximam. Os mínimos do potencial estão localizados em

$$\phi_{min} = \pm \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (5.14)$$

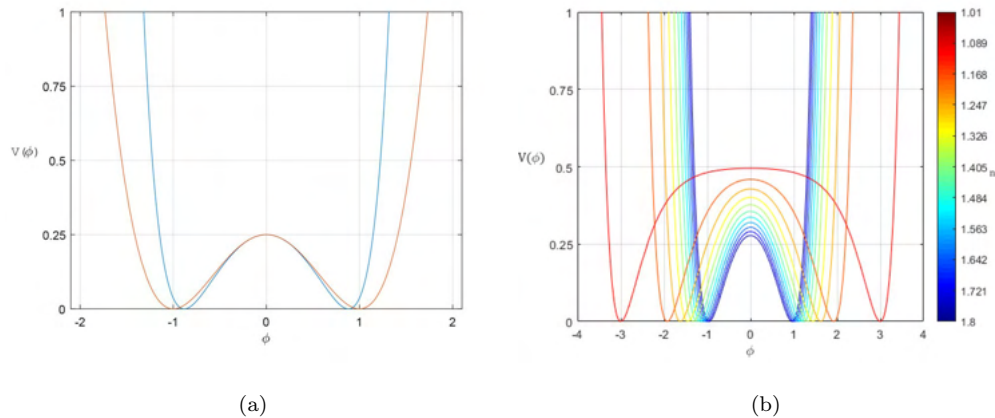


Figura 5.6: (a) Potencial H^4 para $n = 2$ em azul e potencial ϕ^4 em laranja. (b) Potencial H^4 para diversos valores de n .

Como $a = 1$, m pode assumir os valores $m = 0, 1$, nos fornecendo as soluções estáticas que conectam os mínimos do potencial (5.12). Para $m = 0$ temos a solução *kink* e para $m = 1$ temos a solução

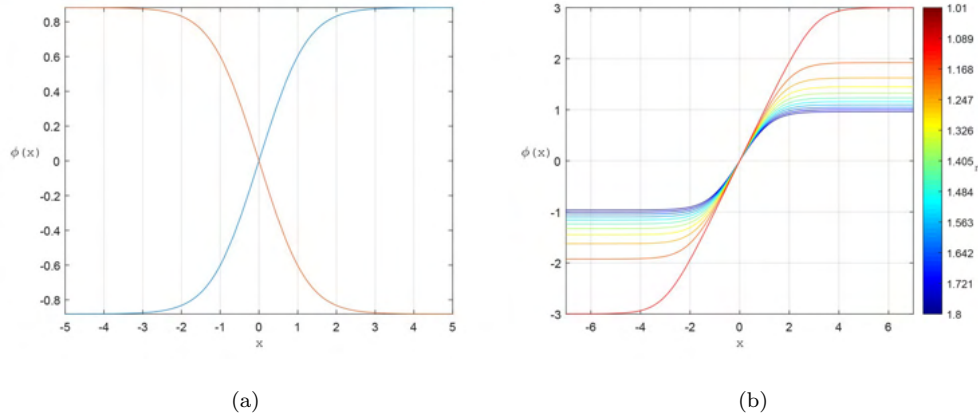


Figura 5.7: (a) Solução (5.15): *kink* em azul, com $m = 0$, e *antikink* em laranja, com $m = 1$. (b) Solução (5.15) com $m = 0$, para diversos valores de n .

antikink. As soluções estáticas associadas ao modelo H^4 são dadas por

$$\phi = \operatorname{arctanh} \left\{ \cos[\arccos(\tanh(x)) + m\pi] \right\}. \quad (5.15)$$

A Figura 5.7a mostra as soluções (5.15) do modelo H^4 , sendo o *kink* com $m = 0$, e o *antikink*, com $m = 1$, ambas com $n = 2$. Na Figura 5.7b temos a solução *kink* para diversos valores de n .

Os limites assintóticos das soluções tendem aos mínimos do potencial, conectando-os. Os limites assintóticos das soluções são dados por $\phi(x \rightarrow \pm\infty) = \pm \operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$. A carga topológica das soluções é diferente de zero e varia com o parâmetro n , podendo ser calculada através de

$$Q_T = \frac{1}{2} \operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right). \quad (5.16)$$

Logo, temos soluções topológicas.

Através da Figura 5.7b é possível ver que, conforme aumentamos o valor de n , as soluções *kink* possuem limites assintóticos mais próximos da origem, concordando com o que ocorre com os mínimos do potencial. Para obter uma solução viajante, aplicamos um *boost* de Lorentz. O *kink* de (5.15), se torna

$$\phi(x) = \operatorname{arctanh} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \tanh[\gamma(x + x_0 - v_i t)] \right\}, \quad (5.17)$$

onde γ é o fator de Lorentz, que depende somente da velocidade inicial: $\gamma = 1/\sqrt{1 - v_i^2}$.

A densidade de energia das soluções é obtida através da expressão (5.9). Neste caso, para $a = 1$ e $m = 0$, a forma analítica da densidade de energia é dada por

$$\rho(x) = n \frac{[\tanh^2(x) - 1]^2}{[\tanh^2(x) - n]^2}. \quad (5.18)$$

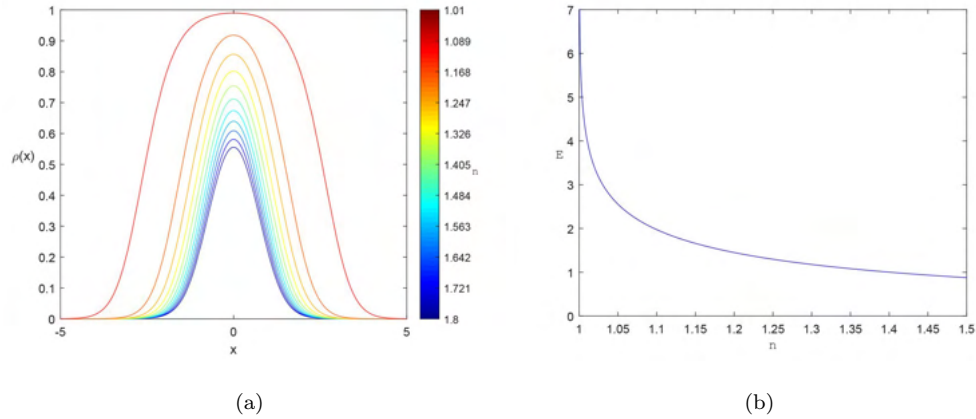


Figura 5.8: (a) Densidade de energia da solução *kink* de (5.15) para diversos valores de n . (b) Energia da solução *kink* de (5.15) em função de n .

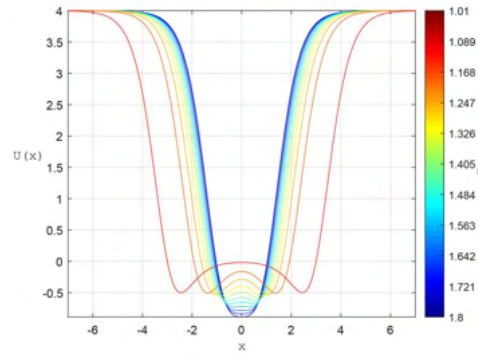


Figura 5.9: Potencial de perturbação (5.19) para diversos valores de n .

A Figura 5.8a apresenta a densidade de energia (5.18) para diversos valores de n e a partir dela é possível ver que densidade de energia é simétrica e finita em torno da origem. É possível identificar que, conforme aumentamos o valor de n , a densidade de energia se torna menor, indicando que a energia das soluções também diminui. Isto está de acordo com o encontrado para as soluções e para o potencial. Conforme já foi mostrado, para valores maiores de n , a barreira do potencial se torna menor e os limites assintóticos das soluções se tornam próximos à origem. Dessa forma, a energia que as soluções precisam para ir de um mínimo a outro também se torna menor. O gráfico da energia da solução *kink* em função do parâmetro n é mostrado na Figura 5.8b, onde é possível verificar que a energia diminui conforme o valor de n aumenta. A energia é obtida através da integração espacial da densidade de energia.

O procedimento de estabilidade linear nos fornece o seguinte potencial de perturbação:

$$U(x) = \frac{2(n-1)[\tanh^4(x) + 3n \tanh^2(x) - 3 \tanh^2(x) - n]}{[\tanh^2(x) - n]^2}. \quad (5.19)$$

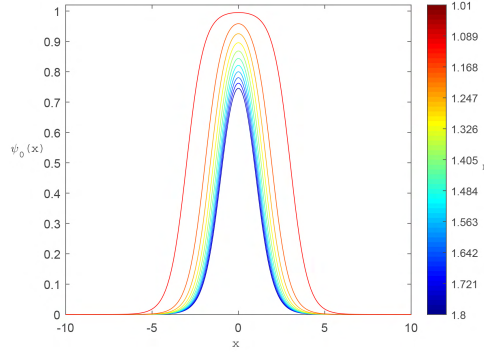


Figura 5.10: Solução de modo zero do modelo H^4 para diversos valores de n .

O potencial (5.19) muda consideravelmente sua forma para uma determinada região de valores de n .

A Figura 5.9 apresenta o potencial de perturbação (5.19) para diversos valores de n , onde é possível notar que quando n se aproxima de 1, um novo pico de máximo local começa a aparecer. Essa considerável mudança em sua forma pode indicar que o número de autovalores e autofunções da equação do tipo *Schrödinger* associada pode variar em função de n .

As soluções de modo zero são obtidas a partir da expressão (2.59) e são dadas por:

$$\psi_0 = \sqrt{n} \frac{\operatorname{sech}(x) \sqrt{1 - \tanh^2(x)}}{n - \tanh^2(x)}. \quad (5.20)$$

O perfil da solução de modo zero em função de n é apresentado na Figura 5.10.

5.3 Colisões *kink-antikink* do modelo H^4

Em razão do potencial de perturbação do *kink* no modelo H^4 apresentar simetria Z_2 (ou seja, invariante sob a transformação $x \rightarrow -x$), os resultados decorrentes do processo de colisão de suas soluções topológicas serão os mesmos, não importando se as configurações iniciais correspondem à colisão *kink-antikink* ou *antikink-kink*. Portanto, para o estudo dos fenômenos decorrentes da colisão das soluções, é suficiente considerarmos apenas uma das configurações iniciais.

Nesta seção vamos realizar colisões *kink-antikink* do modelo H^4 , através da resolução numérica da equação (5.13). São utilizados os métodos numéricos de Runge-Kutta de 4ª ordem, para a parte temporal, com passo de $\delta t \approx 0.5$, e o método de diferenças finitas centradas de 4ª ordem para a parte espacial, com passo de $\delta x \approx 0.9$. Como condições iniciais, utilizamos o perfil inicial do par *kink-antikink* e sua derivada

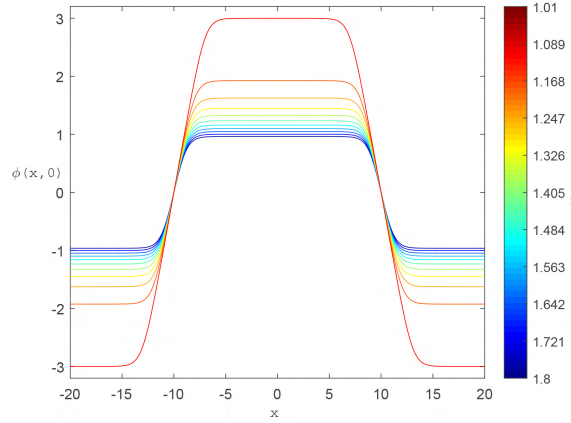


Figura 5.11: Perfil inicial do par *kink-antikink* do modelo H^4 para diversos valores de n .

temporal:

$$\phi_{k\bar{k}} = \phi_k(x, x_0, v_i, n, t = 0) + \phi_{\bar{k}}(x, -x_0, -v_i, n, t = 0) - \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (5.21)$$

$$\dot{\phi}_{k\bar{k}} = \dot{\phi}_k(x, x_0, v_i, n, t = 0) + \dot{\phi}_{\bar{k}}(x, -x_0, -v_i, n, t = 0). \quad (5.22)$$

O termo $\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, presente em (5.21), varia com o valor do parâmetro n e é responsável por fazer com que os limites assintóticos do perfil inicial coincidam com os mínimos do potencial, que também variam com n . As condições de contorno são os limites assintóticos do perfil inicial e sua derivada temporal: $\phi_{k\bar{k}}(x \rightarrow \pm\infty) = -\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ e $\dot{\phi}_{k\bar{k}}(x \rightarrow \pm\infty) = 0$. O perfil inicial do par *kink-antikink* é apresentado na Figura 5.11 para diversos valores de n .

Os fenômenos decorridos das colisões *kink-antikink* do modelo H^4 são as já estabelecidas janelas de *n-bounce*, que têm sua espessura diminuída e se acumulam conforme a velocidade inicial da colisão se aproxima da velocidade de uma janela inferior; a partir da velocidade crítica, ocorre somente *one-bounce*; o estado de *bion*, que sempre ocorre para velocidade iniciais suficientemente pequenas e está presente entre as janelas de *n-bounce*; e aparecem estados oscilatórios que não estão presentes nas colisões das soluções dos modelos sine-Gordon, ϕ^4 e ϕ^6 , até aqui estudados.

O modelo H^4 passa por mudanças significativas quando o parâmetro n varia. Antes da realização das colisões, é necessário estabelecer os valores de n que serão adotados. A restrição a respeito de n , para a obtenção de soluções topológicas, é $n > 1$. Portanto, existe uma infinidade de valores possíveis de serem adotados. Levando em consideração que os fenômenos decorrentes das colisões das soluções é diretamente relacionado ao modo translacional e aos possíveis modos vibracionais que a equação do tipo *Schrödinger* pode apresentar, nos convém adotar valores de n para os quais o potencial de perturbação passa por mudanças significativas. Também é útil adotar valores de n para os quais a forma do potencial já não passe por tantas

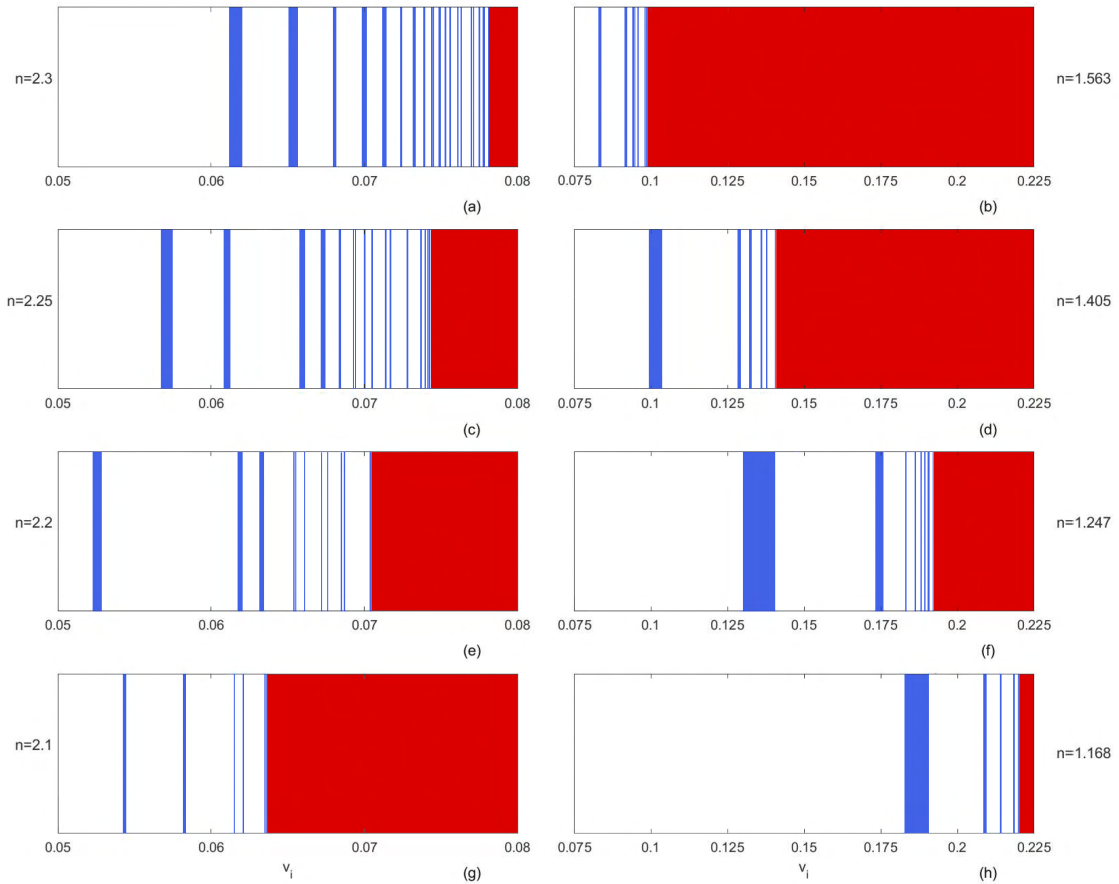


Figura 5.12: Janelas de *two-bounce*, em azul, e *one-bounce*, em vermelho, do modelo H^4 em função de n . A região branca corresponde a fenômenos de n -*bounce*, estado de *bion* ou pulsos oscilatórios.

mudanças, pois assim teremos os fenômenos que ocorrem numa região bem caracterizada.

A Figura 5.12 apresenta as janelas de *two-bounce* em azul e *one-bounce* em vermelho. A região branca da figura corresponde aos comportamentos de n -*bounce*, *bions* ou pulsos oscilatórios.

No lado esquerdo da Figura 5.12 podemos ver o aumento no valor da velocidade crítica a medida que o valor de n cresce. Além disso, as janelas de *two-bounce* diminuem em quantidade conforme o valor do parâmetro n diminui. É possível realizar essa identificação através da diminuição de linhas azuis. Por outro lado, quando analisamos o lado direito da Figura 5.12, é possível ver que o parâmetro n diminui, porém a velocidade crítica aumenta e janelas de *two-bounce* surgem e diminuem.

Vamos considerar agora a quantidade de modos vibracionais, N_ω , conforme n diminui, apresentados na Figura 5.13. Na região $2.1 < n < 2.3$, o número de modos permanece o mesmo ($N_\omega = 2$) e as janelas de *two-bounce* começam a ser suprimidas. Na região $1.563 < n < 2.1$, onde existe total supressão das janelas de *two-bounce*, o número de modos aumenta ($N_\omega = 3$). Na região $1.168 < n < 1.563$, continuamos com

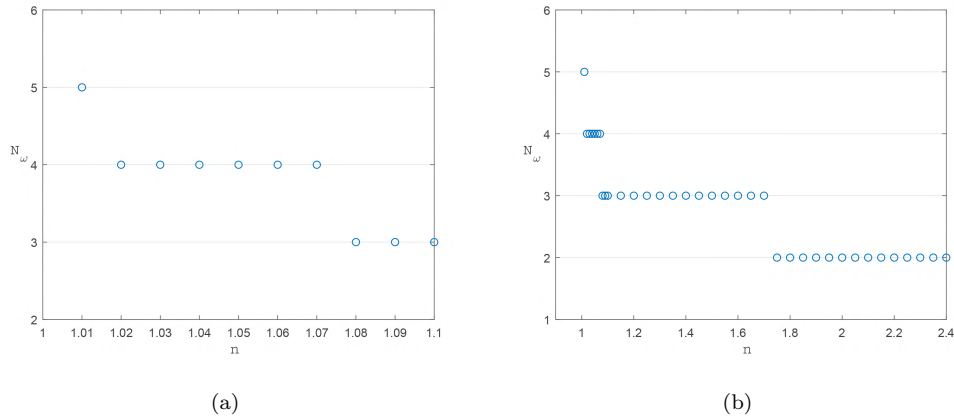


Figura 5.13: Número de modos vibracionais em função de n . (a) Região $1.01 < n < 1.1$. (b) Região $1.01 < n < 2.4$.

a mesma quantidade de modos ($N_\omega = 3$) as janelas de *two-bounce* aparecem e são suprimidas novamente. Estes resultados indicam que a quantidade de modos pode não ser diretamente responsável pela supressão das janelas de *two-bounce*. Para um estudo mais aprofundado, poderíamos considerar a frequência de cada modo, porém este estudo não será realizado no trabalho e fica como perspectiva para um trabalho futuro. Para valores de n mais próximos a 1, a quantidade de modos começa a aumentar, o que implica que o mecanismo de troca de energia pode se tornar mais difícil e então as janelas de *two-bounce* serem suprimidas novamente. Para o modelo H^4 consta ainda que existem sete modos para $n = 1.0005$ e onze modos para $n = 1.0000005$.

Para estudar as janelas de *two-bounce* mostradas na Figura 5.12 vamos caracterizá-las através de sua ordem, definida através do número de oscilações que as soluções apresentam entre as duas colisões. A ordem da i -ésima janela de *two-bounce* será representada por k_i , onde $i = 1, 2$ e 3 . Neste capítulo, vamos estudar somente até a terceira janela de *two-bounce* para alguns valores de n . Esta caracterização é realizada, pois nem sempre a primeira, segunda e terceira janelas de *two-bounce* são de ordem 1, 2 e 3. Estas variações ocorrem em função de n .

Inicialmente, vamos considerar a Figura 5.14, que apresenta o tempo da primeira, segunda e terceira colisão das soluções *kink-antikink* do modelo H^4 para $n = 6$. Esta figura apresenta um padrão de janelas de *two-bounce* semelhante ao encontrado para o modelo ϕ^4 . O estudo das janelas de *two-bounce* em função de n é útil através desta representação pois ela permite identificar a supressão das janelas de maneira lúdica, por meio do surgimento de falsas janelas.

Agora vamos realizar colisões na primeira e segunda janela de *two-bounce* para identificar quais as ordens das janelas e explanar a caracterização que será realizada neste trabalho. A Figura 5.15 apresenta colisões *kink-antikink* na primeira e na segunda janela de *two-bounce* mostradas na Figura 5.14. A Figura 5.15a apresenta uma colisão na primeira janela, sendo de ordem $k_1 = 1$, pois existe apenas uma oscilação

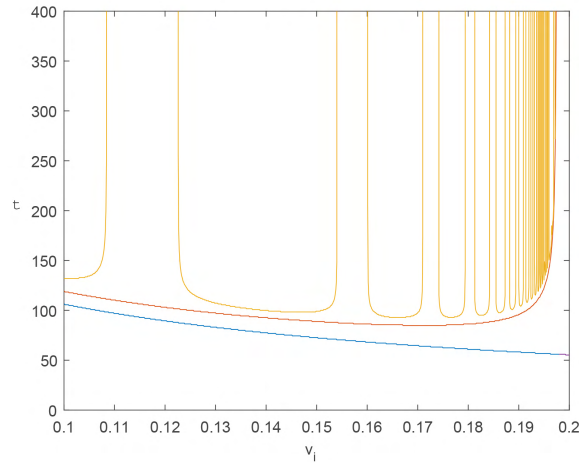


Figura 5.14: Tempo da primeira (linha azul), segunda (linha vermelha) e terceira colisão (linha amarela) das soluções *kink-antikink* do modelo H^4 para $n = 6$.

| n | k_1 | v_1 | v_2 | Δv | v_{cr} |
|------|-------|--------|--------|------------|----------|
| 6 | 1 | 0.1085 | 0.1225 | 0.014 | 0.1975 |
| 4 | 1 | 0.044 | 0.0568 | 0.0128 | 0.1618 |
| 2.3 | 6 | 0.0612 | 0.062 | 0.0008 | 0.0782 |
| 2.25 | 6 | 0.0568 | 0.0574 | 0.0006 | 0.0744 |
| 2.2 | 6 | 0.0524 | 0.0528 | 0.0004 | 0.0706 |
| 2.1 | 11 | 0.0543 | 0.0544 | 0.0001 | 0.0637 |

Tabela 5.1: Relação do parâmetro n com a velocidade crítica v_{cr} , ordem k_1 , velocidade v_1 e velocidade v_2 , da primeira janela de *two-bounce* e com o intervalo de velocidades (ou espessura) Δv de cada janela.

entre as duas colisões. A Figura 5.15b apresenta uma colisão na segunda janela, sendo de ordem $k_2 = 2$, pois existem duas oscilações entre as duas colisões. Esta é a caracterização de ordem de janelas que serão estudadas neste trabalho.

A menor velocidade possível de uma determinada janela de *two-bounce* será representada por v_1 , enquanto que, a maior possível, será representada por v_2 . Neste sentido, a espessura de uma determinada janela de *two-bounce* será dada por $\Delta v = v_2 - v_1$.

Os fenômenos para outros valores de n são mostrados na Tabela 5.1, que o relaciona com a velocidade crítica v_{cr} , com a ordem k_i , velocidade v_1 , velocidade v_2 e com o intervalo de velocidades (ou espessura) Δv da primeira janela de *two-bounce*.

A primeira coluna da Tabela 5.1 apresenta os valores de n . A segunda coluna mostra a ordem

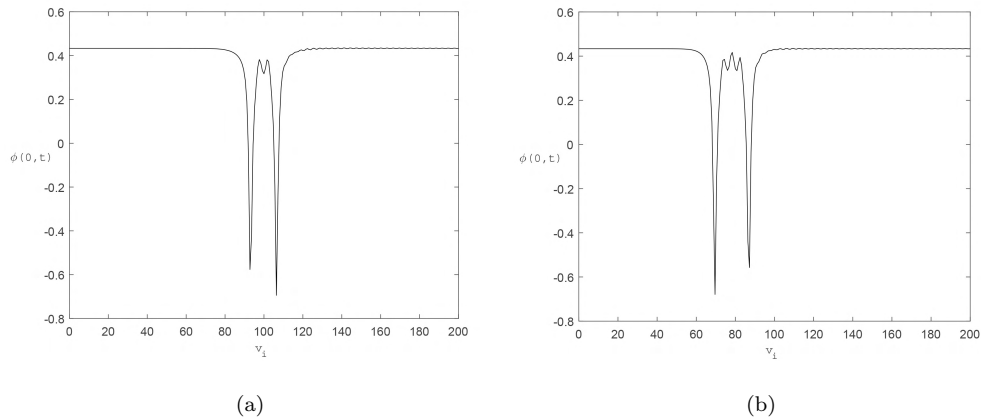


Figura 5.15: Colisão *kink-antikink* do modelo H^4 para $n = 6$. (a) Colisão para $v_i = 0.115$, na primeira janela de *two-bounce*. (b) Colisão para $v_i = 0.157$, na segunda janela de *two-bounce*.

da primeira janela de *two-bounce*, associada a cada valor de n . Para os valores de $n = 6$ e $n = 4$ a primeira janela de *two-bounce* encontrada é de primeira ordem. Na Figura 5.16a ($n = 4$) é possível ver que apesar da primeira janela de *two-bounce* ser de primeira ordem, existe um intervalo de velocidades muito grande entre a primeira e segunda janela de *two-bounce*, o que não existe para $n = 6$. Para os valores de $n = 2.3$ até $n = 2.2$, a primeira janela de *two-bounce* é de sexta ordem, havendo uma supressão nas janelas de ordem inferior. O padrão sempre presente é que conforme n diminui, a ordem da primeira janela de *two-bounce* se torna cada vez maior e a espessura de todas as janelas e a velocidade crítica diminuem.

A Figura 5.16 mostra o tempo da primeira, segunda e terceira colisão para outros valores de n . A partir da Figura 5.16b ($n = 2.3$), Figura 5.16c ($n = 2.2$) e da Tabela 5.1, é possível ver que a ordem da primeira janela de *two-bounce* é a mesma para os valores de n , porém a Figura 5.16c apresenta uma supressão da segunda, terceira e sexta janela de *two-bounce*, levando-as a se tornarem falsas janelas. Para valores de n em torno de 1.8 as janelas de *two-bounce* são totalmente suprimidas, restando apenas falsas janelas, conforme pode ser visto na Figura 5.16d.

A Figura 5.17 mostra o tempo da terceira colisão para alguns valores de n em função da velocidade inicial. Esta figura representa o surgimento de uma das falsas janelas de *two-bounce* mostrada na Figura 5.16c. Para entender isto, basta considerarmos que conforme n diminui, a segunda janela de *two-bounce* mostrada na Figura 5.16b se torna uma falsa janela, mostrada na Figura 5.16c. Esta transição é apresentada na Figura 5.17.

Como observado na Figura 5.12, a partir da diminuição de um certo valor de n a velocidade crítica passa a aumentar e as janelas de *two-bounce* reaparecem e desaparecem novamente. A Tabela 5.2 relaciona os valores de n nesta faixa de valores com a ordem e espessura das janelas e velocidade crítica. Para $n = 1.563$ podemos ver que a primeira janela é de ordem $k_1 = 4$, indicando que diversas janelas foram

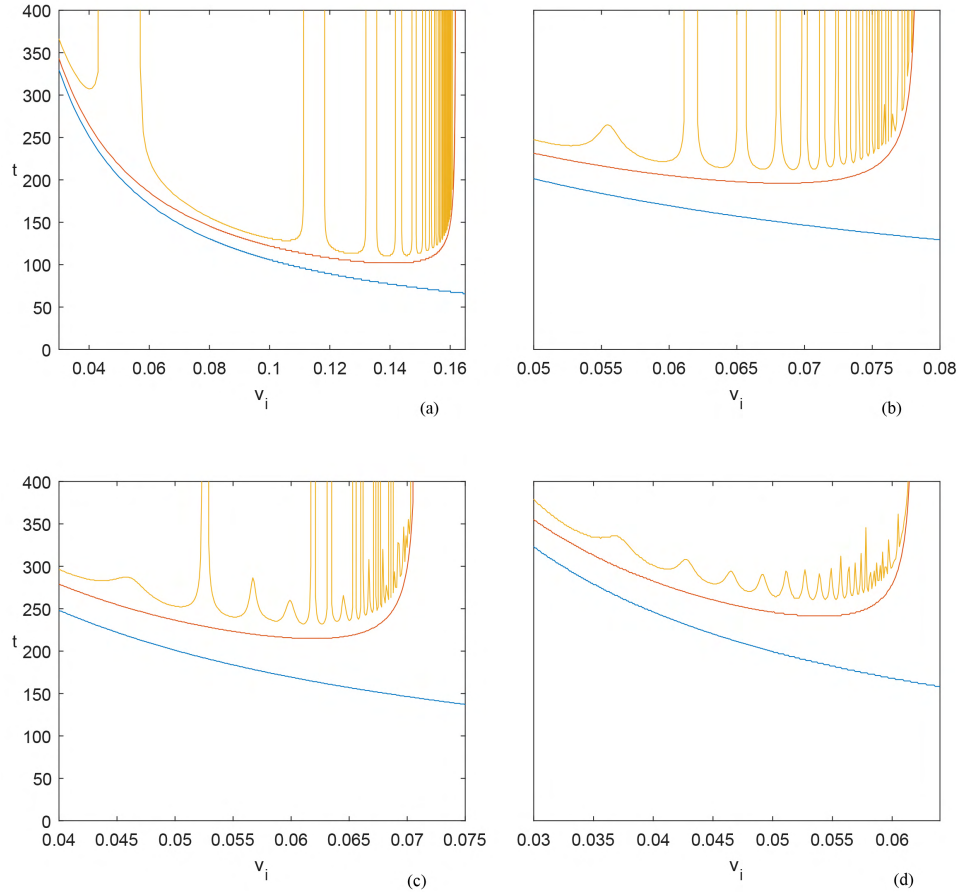


Figura 5.16: Tempo da primeira (linha azul), segunda (linha vermelha) e terceira colisão (linha amarela). (a) $n = 4$, (b) $n = 2.3$, (c) $n = 2.2$ e (d) $n = 1.8$.

recuperadas, em comparação a $n = 2.1$. Para $n = 1.4$, a primeira janela de *two-bounce* é de primeira ordem e a velocidade crítica aumenta, porém, conforme n diminui, a espessura da primeira janela de *two-bounce* sofre uma oscilação: a espessura aumenta até $n = 1.247$ e diminui para valores menores de n .

A Figura 5.18 apresenta o tempo da primeira, segunda e terceira colisão em função da velocidade inicial, para $n = 1.563, 1.405, 1.247$ e 1.168 . A Figura 5.18a, onde a primeira janela de *two-bounce* é de quarta ordem, apresenta algumas falsas janelas de *two-bounce* e é possível identificar que algumas janelas de *two-bounce* são recuperadas em comparação à Figura 5.16d. Através da Figura 5.18b, onde a primeira janela de *two-bounce* é de primeira ordem, é possível identificar uma falsa janela de *two-bounce* entre a primeira e segunda janela de *two-bounce*, que não está presente na Figura 5.18c. A Figura 5.18c não apresenta falsas janelas de *two-bounce* e algumas janelas de *two-bounce* são recuperadas. Por outro lado, a Figura 5.18d apresenta uma diminuição significativa na quantidade de janelas de *two-bounce*. Para $n = 1.0005$ e $n = 1.0000005$ não foram encontradas janelas de *two-bounce*. Entretanto há o surgimento de uma janela de *six-bounce* com espessura $\Delta v_6 = 0.0009$, de $v_1 = 0.2137$ a $v_2 = 0.2146$, para $n = 1.0005$ e uma janela de

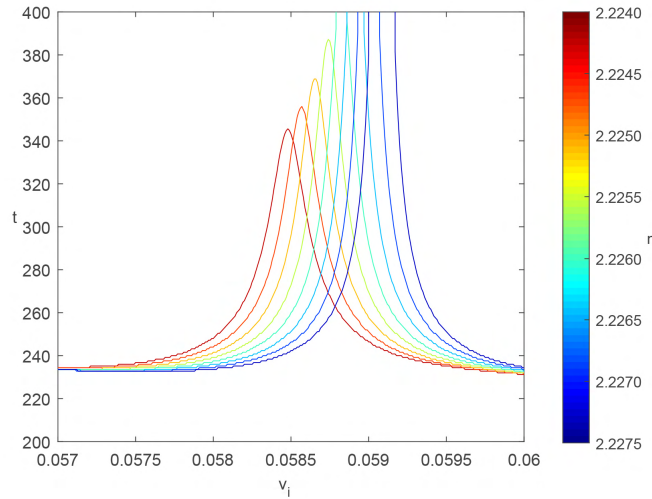


Figura 5.17: Surgimento de falsa janela de *two-bounce* em função de n e v_i .

| n | k_1 | v_1 | v_2 | Δv | v_{cr} |
|-------|-------|--------|--------|------------|----------|
| 1.563 | 4 | 0.0829 | 0.0836 | 0.0007 | 0.0985 |
| 1.405 | 1 | 0.0995 | 0.1035 | 0.0040 | 0.1406 |
| 1.247 | 1 | 0.1301 | 0.1404 | 0.0103 | 0.1921 |
| 1.168 | 1 | 0.1829 | 0.1905 | 0.0076 | 0.2490 |

Tabela 5.2: Relação do parâmetro n com a velocidade crítica v_{cr} , ordem k_1 , velocidade v_1 e velocidade v_2 , da primeira janela de *two-bounce*, bem como o intervalo de velocidades (ou espessura) Δv de cada janela.

five-bounce com espessura Δv_5 , de $v_1 = 0.2244$ a $v_2 = 0.2285$, para $n = 1.0000005$.

Conforme mostrado nas Figuras 5.16 e 5.18 e nas Tabelas 5.1 e 5.2, a supressão e o reaparecimento das janelas de *two-bounce* não ocorrem especificamente da janela de mais baixa ordem para janelas de ordem superior, pois as variações de n implicam o desaparecimento e surgimento da segunda e terceira janela sem qualquer padrão aparente.

Uma análise mais profunda da ordem das janelas em função de n pode ser feita com base na Tabela 5.3, que relaciona alguns valores de n com a ordem da primeira, segunda e terceira janela de *two-bounce*. Para $n > 4$ não existe supressão de janelas. No entanto, destaca-se que a segunda janela está bem mais distante da primeira para $n = 4$ do que para $n = 6$, conforme pode ser visto nas Figuras 5.16a e 5.17. Para $n = 2.3$ as janelas até quinta ordem são suprimidas e as demais seguem em ordem crescente. Para $n = 2.25$ a primeira e segunda janela são em ordem crescente, $k_1 = 6$ e $k_2 = 7$, porém $k_3 = 9$, indicando que a antiga terceira janela, de oitava ordem, foi suprimida. Para $n = 2.2$ ficamos somente com a primeira janela com mesma ordem $k_1 = 6$, a segunda se torna de ordem $k_2 = 9$ e a terceira de ordem $k_3 = 10$. Uma alteração

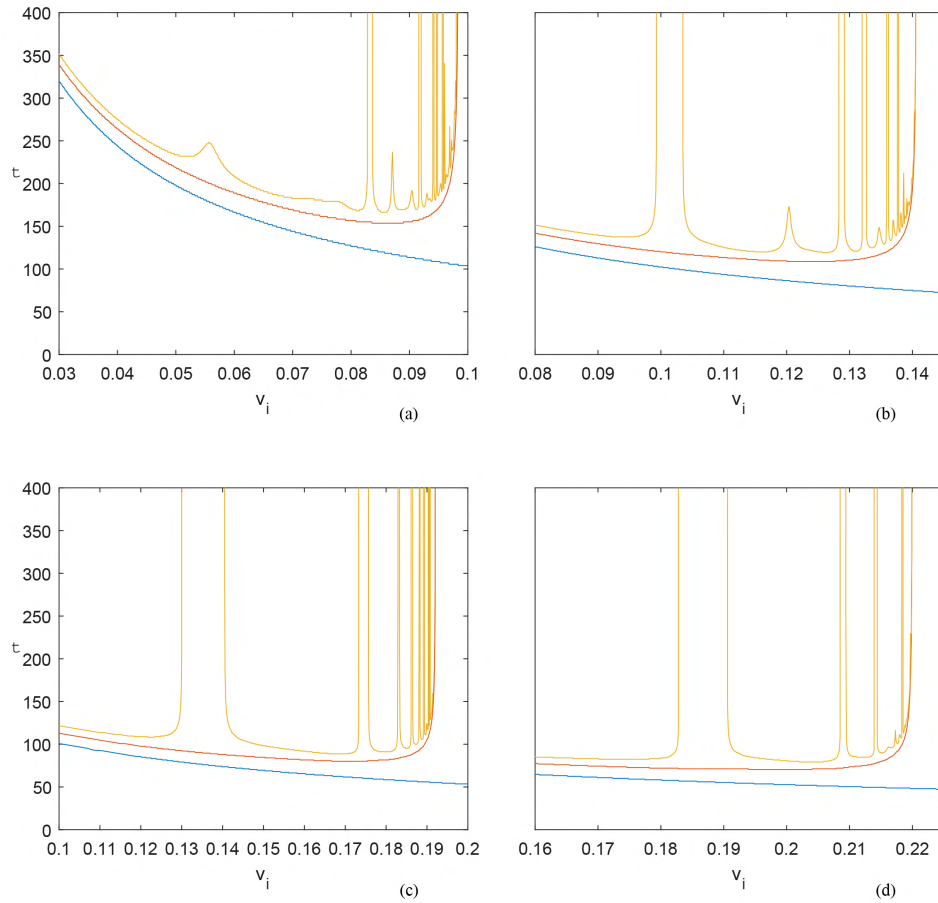


Figura 5.18: Tempo da primeira (linha azul), segunda (linha vermelha) e terceira colisão (linha amarela). (a) $n = 1.563$, (b) $n = 1.405$, (c) $n = 1.247$ e (d) $n = 1.168$.

ainda mais acentuada na ordem das janelas ocorre para $n = 2.1$, onde a primeira janela é de ordem $k_1 = 11$, a segunda é de ordem $k_2 = 14$ e a terceira chega a ser de ordem $k_3 = 23$. Para os valores de $n = 1.563$, 1.405 , 1.247 e 1.168 , as janelas reaparecem.

Vamos apresentar agora colisões que levam à aniquilação das soluções e geram pulsos oscilatórios. A Figura 5.19 mostra a colisão *kink-antikink* levando à criação de pulsos para dois valores de n . A Figura 5.19a apresenta a colisão para $n = 1.0005$ e $v_i = 0.25$, cenário onde o potencial de perturbação de cada solução apresenta sete modos vibracionais. Este resultado leva à aniquilação das soluções e à criação de cinco pulsos oscilatórios. A Figura 5.19b apresenta a colisão para $n = 1.168$ e $v_i = 0.1987$. Neste cenário existe a criação de dois pulsos oscilatórios e cada solução possui três modos vibracionais.

Outra característica que o modelo apresenta é a forma como a variação de n influencia a velocidade crítica. A Figura 5.20 apresenta a variação da velocidade crítica em função do parâmetro n . Para valores de n bem próximos de 1, a velocidade crítica se torna cada vez maior, se estabelecendo em

| | | | | | | | | | | | |
|-------|---|---|-----|------|-----|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| n | 6 | 4 | 2.3 | 2.25 | 2.2 | 2.1 | 1.563 | 1.405 | 1.247 | 1.168 | 1.089 |
| k_1 | 1 | 1 | 6 | 6 | 6 | 11 | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| k_2 | 2 | 2 | 7 | 7 | 9 | 14 | 8 | 3 | 2 | 2 | 3 |
| k_3 | 3 | 3 | 8 | 9 | 10 | 23 | 12 | 4 | 3 | 3 | 4 |

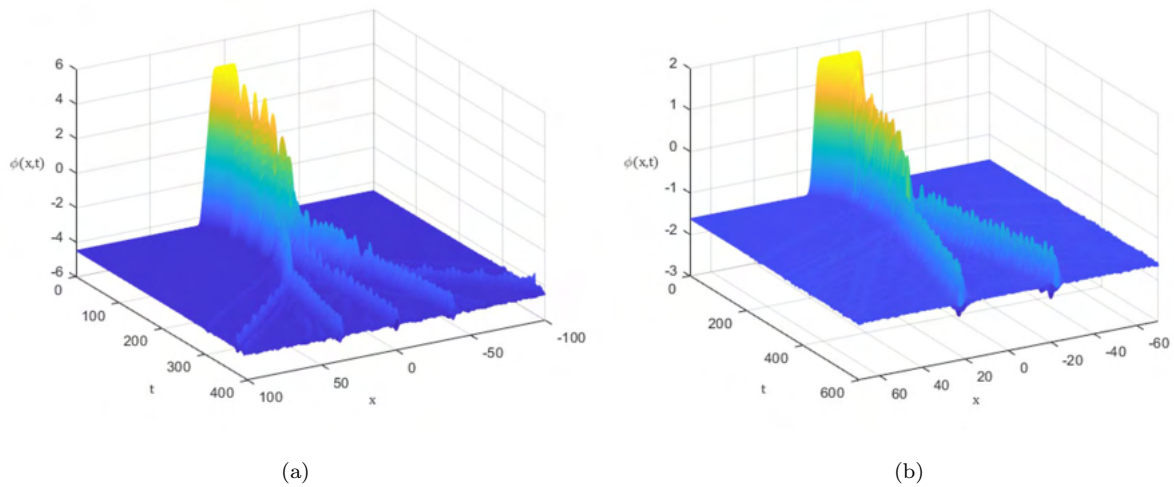
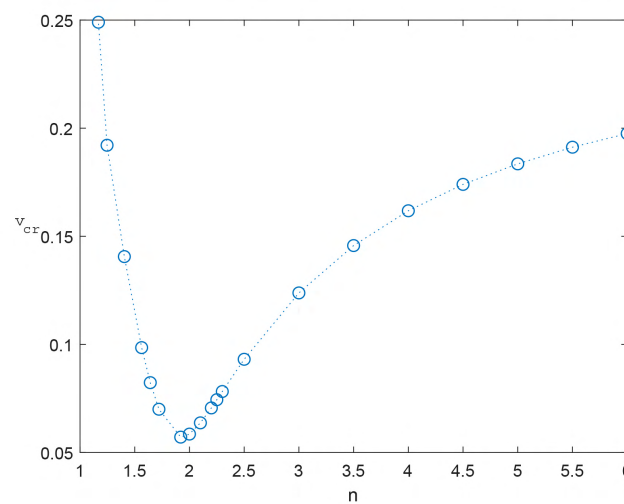
Tabela 5.3: Relação do parâmetro n com a ordem k_1 , k_2 e k_3 .

Figura 5.19: (a) Criação de pulsos oscilatórios através da colisão *kink-antikink* no modelo H^4 . (a) Colisão para $n = 1.0005$ e $v_i = 0.25$. (b) Colisão para $n = 1.168$ e $v_i = 0.1987$.

Figura 5.20: Velocidade crítica do modelo H^4 em função do parâmetro n .

$v_{cr} = 0.2766$. Conforme n vai aumentando, velocidade crítica vai se tornando menor e tem seu valor mínimo em torno de $n = 1.9$: $v_{cr} = 0.0571$. Para valores de n maiores que 1.91 a velocidade crítica passa a aumentar e tende a se estabilizar em $v_{cr} = 0.26$. Para $n = 5 \times 10^5$ e $n = 5 \times 10^6$ encontramos $v_{cr} = 0.26$.

5.4 O modelo H^6 e suas características

Vamos considerar o modelo H^6 , descrito pelo seguinte potencial [88]:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \tanh^2(\phi) [1 - (n-1) \sinh^2(\phi)]^2. \quad (5.23)$$

De acordo com a equação (2.8) é possível obter uma equação que governa a dinâmica do modelo H^6 quando consideramos a derivada do potencial (5.23) e o inserimos na mesma. Portanto, a equação que governa a dinâmica do modelo H^6 é

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \tanh(\phi) (1 - \tanh^2(\phi)) [1 - (n-1) \sinh^2(\phi)]^2 \\ - 2 \tanh^2(\phi) \sinh(\phi) \cosh(\phi) (n-1) [1 - (n-1) \sinh^2(\phi)] = 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Para $n = 2$ e ϕ suficientemente pequeno o potencial (5.23) se torna o potencial ϕ^6 . Na Figura 5.21a é apresentado o potencial (5.23) em laranja e o potencial ϕ^6 em azul, onde é possível ver que para valores de ϕ próximos a zero as linhas se sobrepõem e os potenciais se aproximam dos mesmos valores.

A Figura 5.21b apresenta o potencial (5.23) para diversos valores de n . É possível identificar que o mínimo $\phi_{min} = 0$ se mantém, enquanto os outros mínimos se afastam para valores menores de n .

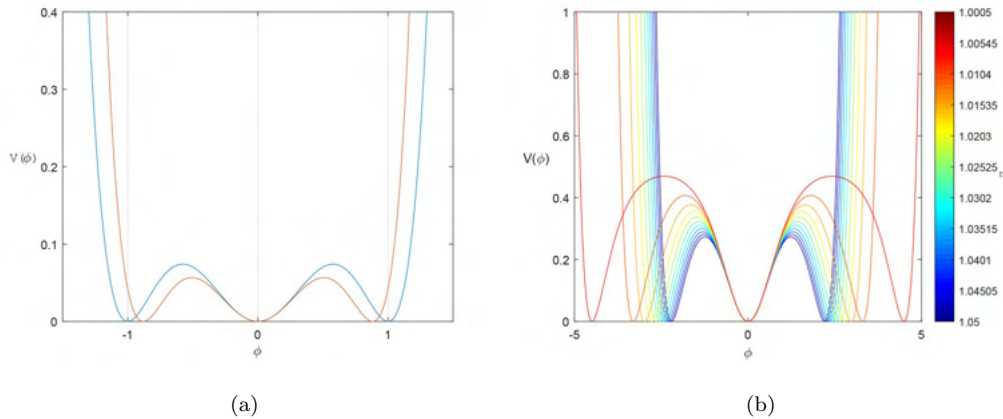


Figura 5.21: (a) Potencial H^6 para $n = 2$ em laranja e potencial ϕ^6 em azul. (b) Potencial H^6 para diversos valores de n .

É evidente que os mínimos devem depender de n . Estes são obtidos através da expressão (5.7)

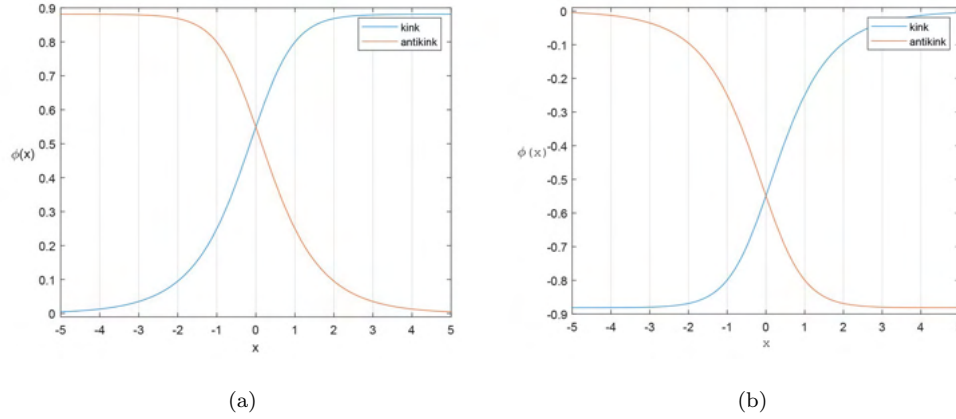


Figura 5.22: Soluções *kink* e *antikink* do modelo H^6 para $n = 2$ (a) Solução *kink* em azul e solução *antikink* em laranja, do primeiro setor topológico; (b) Solução *kink* em azul e solução *antikink* em laranja, do segundo setor topológico.

e são dados por

$$\phi_{-min} = -\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad \phi_{0min} = 0 \quad \text{e} \quad \phi_{+min} = \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (5.25)$$

As soluções topológicas associadas ao potencial (5.23) são dadas pela expressão (5.8), através de $a = 2$ e $m = 0, 1, 2$ e 3 . Os valores de $m = 1, 2$ fornecem as soluções *kink* e *antikink* do segundo setor topológico, enquanto os valores $m = 0, 3$ fornecem as soluções *kink* e *antikink* do primeiro setor topológico. Vamos caracterizar o primeiro setor topológico através do par que possui a solução *kink* com limite assintótico $\phi(x \rightarrow \infty) > 0$. Em contrapartida, o segundo setor topológico será caracterizado através da solução *kink* com limite assintótico $\phi(x \rightarrow \infty) = 0$.

Em relação à atribuição de índices para identificar o tipo de solução e em qual setor topológico está inserida, vamos considerar a forma como as soluções interpolam os mínimos do potencial. As soluções *kink* do primeiro setor interpolam os mínimos de 0 a um valor positivo dependente de n . Portanto, as soluções do tipo *kink* do primeiro setor serão identificadas como $\phi_{k(0,n)}$. No caso das soluções *antikink* do primeiro setor a identificação será $\phi_{\bar{k}(n,0)}$. Para o segundo setor topológico utilizaremos $\phi_{k(-n,0)}$ para as soluções do tipo *kink* e $\phi_{\bar{k}(0,-n)}$ para as soluções do tipo *antikink*.

As soluções *kink* e *antikink* do primeiro setor são dadas respectivamente por

$$\phi_{k(0,n)} = \operatorname{arctanh}\left\{\frac{\cos\left[\frac{1}{2}\operatorname{arccos}(\tanh(x))\right]}{\sqrt{n}}\right\}, \quad (5.26)$$

$$\phi_{\bar{k}(n,0)} = \operatorname{arctanh}\left\{\frac{\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arccos}(\tanh(x))\right]}{\sqrt{n}}\right\}. \quad (5.27)$$

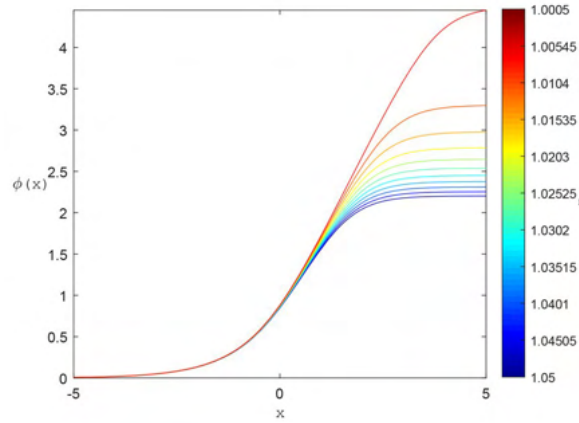


Figura 5.23: Solução *kink* do modelo H^6 para diversos valores de n .

| Solução | $\phi(x \rightarrow \infty)$ | $\phi(x \rightarrow -\infty)$ | Q_T |
|------------------------|--|--|---|
| $\phi_{k(0,n)}$ | $\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ | 0 | $\frac{1}{2}\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ |
| $\phi_{\bar{k}(n,0)}$ | 0 | $\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ | $-\frac{1}{2}\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ |
| $\phi_{k(-n,0)}$ | 0 | $-\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ | $\frac{1}{2}\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ |
| $\phi_{\bar{k}(0,-n)}$ | $-\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ | 0 | $-\frac{1}{2}\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ |

Tabela 5.4: Cargas topológicas das soluções estáticas do modelo H^6 .

As soluções *kink* e *antikink* do segundo setor são dadas respectivamente por

$$\phi_{k(-n,0)} = -\operatorname{arctanh}\left\{\frac{\sin\left[\frac{1}{2}\arccos(\tanh(x))\right]}{\sqrt{n}}\right\}, \quad (5.28)$$

$$\phi_{\bar{k}(0,-n)} = -\operatorname{arctanh}\left\{\frac{\cos\left[\frac{1}{2}\arccos(\tanh(x))\right]}{\sqrt{n}}\right\}. \quad (5.29)$$

O perfil das soluções (5.26), (5.27), (5.28) e (5.29) são mostrados na Figura 5.22. As soluções *kink* são mostradas em azul e as soluções *antikink* em laranja. Na Figura 5.23 é mostrado a solução *kink* (5.26) para diversos valores de n . É possível ver que conforme o valor de n aumenta, os limites assintóticos $\phi(x \rightarrow \infty)$ se tornam mais próximos de zero e os limites assintóticos $\phi(x \rightarrow -\infty)$ convergem para o mínimo em comum do potencial $\phi_{min} = 0$, concordando com o mostrado na Figura 5.21b.

A partir do perfil das soluções mostrado na Figura 5.22 é evidente que cada solução possui um limite assintótico igual e outro limite assintótico diferente de zero. Isto nos permite classificá-las como soluções topológicas. A Tabela 5.4 apresenta a carga topológica de cada solução do modelo H^6 em função do parâmetro n .

Para obtermos uma solução viajante que não varie sua forma com o passar do tempo, mas

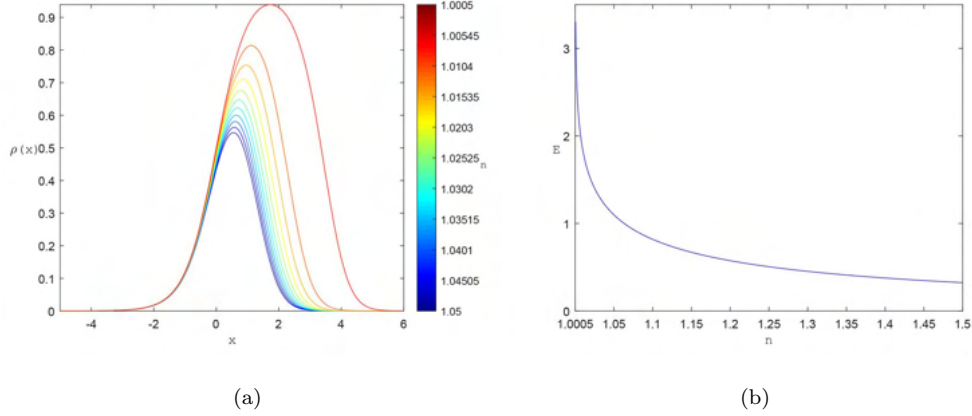


Figura 5.24: (a) Densidade de energia da solução *kink* (5.26) para diversos valores de n . (b) Energia da solução *kink* (5.26) em função de n .

somente sua posição, aplicamos um *boost* de Lorentz. A solução *kink* (5.26) se torna:

$$\phi_{k(0,n)} = \operatorname{arctanh} \left\{ \frac{\cos \left[\frac{1}{2} \arccos(\tanh(\gamma(x + x_0 - v_i t))) \right]}{\sqrt{n}} \right\}, \quad (5.30)$$

onde x_0 é a posição da qual o centro do *kink* viaja, v_i é a velocidade inicial da solução e γ é o fator de Lorentz, definido como $\gamma = 1/\sqrt{1 - v_i^2}$.

A densidade de energia das soluções é obtida através da expressão (5.9). Para a solução *kink* (5.26) utilizamos $m = 0$ e $a = 2$ em (5.9) e obtemos:

$$\rho(x) = \frac{1}{8} n \frac{\left\{ 4 \cos^6 \left[\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right] \cosh^2(x) - 8 \cos^4 \left[\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right] \cosh^2(x) \right\}}{\cosh^2(x) \left[\cos^4 \left(\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right) - 2 \cos^2 \left(\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right) n + n^2 \right]} + \frac{n \left\{ 4 \cos^2 \left[\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right] \cosh^2(x) - \cos^2 \left[\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right] + 1 \right\}}{\cosh^2(x) \left[\cos^4 \left(\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right) - 2 \cos^2 \left(\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right) n + n^2 \right]}. \quad (5.31)$$

A Figura 5.24a apresenta a densidade de energia da solução *kink* (5.26) para diversos valores de n . É possível ver que conforme n aumenta, a densidade de energia diminui. Consequentemente a energia da solução, obtida através da integração da densidade de energia, diminui. Na Figura 5.24b é possível ver como a energia varia em função do parâmetro n .

O potencial de perturbação para o presente modelo é obtido através da expressão (5.1), utilizando $a = 2$. Para a solução *kink* do primeiro setor, ou seja, para $m = 0$, este potencial é dado pela

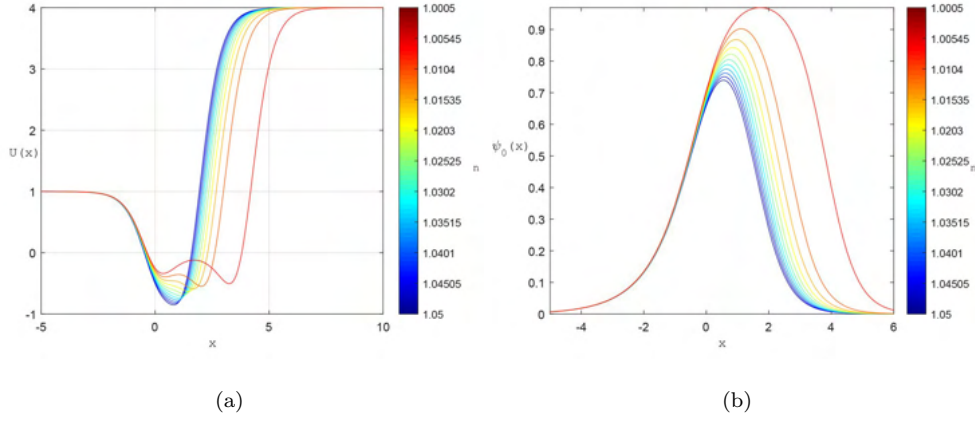


Figura 5.25: (a) Potencial de perturbação (5.32) da solução *kink* (5.26) para diversos valores de n . (b) Modo zero 5.33 para diversos valores de n .

expressão

$$\begin{aligned}
 U(x) = & \frac{3 \cos^8 \left[\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right] - 10n \cos^6 \left[\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right] + 15n^2 \cos^4 \left[\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right]}{\cos^4 \left[\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right] - 2n \cos^2 \left[\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right] + n^2} \\
 & - \frac{4n \cos^4 \left[\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right] + \cos^4 \left[\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right] - 12n^2 \cos^2 \left[\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right]}{\cos^4 \left[\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right] - 2n \cos^2 \left[\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right] + n^2} \\
 & + \frac{6n \cos^2 \left[\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right] + n^2}{\cos^4 \left[\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right] - 2n \cos^2 \left[\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right] + n^2} \quad (5.32)
 \end{aligned}$$

A Figura 5.25a apresenta o potencial de perturbação (5.32) para diversos valores de n . Conforme o valor de n diminui é possível ver que o potencial deixa de ter apenas um mínimo e passa a ter dois, também surgindo um ponto de máximo. Devido essa mudança considerável em sua forma, as variações de n favorecem mudanças relacionadas à quantidade de autovalores e possíveis soluções associadas à equação do tipo *Schrödinger* independente do tempo. De fato, conforme n diminui surgem diversos outros modos de vibração. O número de modos em função de n e os fenômenos decorridos do processo de colisão serão mostrados na próxima seção.

Conforme já visto, associado ao potencial de perturbação sempre haverá soluções da equação do tipo *Schrödinger* associadas ao autovalor nulo. Para o presente modelo, as soluções associadas a $\omega_0^2 = 0$ são dadas por

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n} \sin \left[\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right] \operatorname{sech}(x)}{n - \cos^2 \left[\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \right]}. \quad (5.33)$$

Na Figura 5.25b é possível ver a solução (5.33) para diversos valores de n .

5.5 Sobre as colisões das soluções do modelo H^6

Em razão do potencial de perturbação não ser simétrico sob a transformação $x \rightarrow -x$, vamos realizar colisões *kink-antikink* e *antikink-kink*, pois dependendo da configuração inicial adotada, a configuração do potencial de perturbação pode ser mais ou menos favorável à presença de modos vibracionais.

Como os setores topológicos do modelo H^6 possuem o mínimo $\phi_{min} = 0$ em comum, nos é suficiente trabalhar com as soluções somente de um setor. Neste trabalho, vamos considerar as soluções do primeiro setor topológico do modelo. Portanto, o perfil inicial das soluções para a colisão *kink-antikink* é dado pela expressão

$$\phi_{k\bar{k}} = \phi_k(x, x_0, v_i, n, t = 0) + \phi_{\bar{k}}(x, -x_0, -v_i, n, t = 0) - \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (5.34)$$

onde o termo $-\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ serve para que os limites assintóticos do par das soluções coincidam com o mínimo do potencial. A configuração *antikink-kink* é dada por

$$\phi_{\bar{k}k} = \phi_{\bar{k}}(x, x_0, v_i, n, t = 0) + \phi_k(x, -x_0, -v_i, n, t = 0). \quad (5.35)$$

Os perfis das configurações iniciais (5.34) e (5.35), em $t = 0$ são mostrados na Figura 5.26.

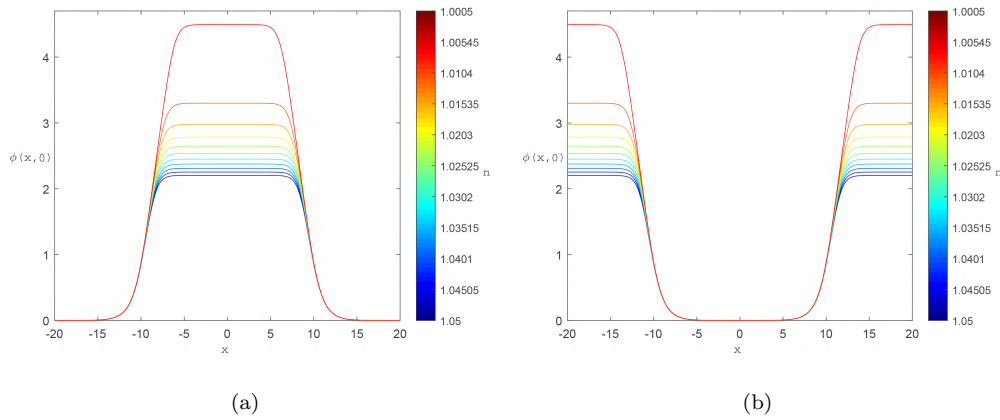


Figura 5.26: (a) Perfil inicial da colisão *kink-antikink* do modelo H^6 para diversos valores de n . (b) Perfil inicial da colisão *antikink-kink* do modelo H^6 para diversos valores de n .

Em ambos os casos, as colisões serão estudadas através da evolução numérica da equação de movimento (5.24). Para isto, utilizaremos o método de Runge-Kutta de 4^a ordem para desenvolver a parte temporal, com passo de $\delta t \approx 0.5$, e o método de diferenças finitas de 4^a ordem para desenvolver a parte espacial, com passo de $\delta x \approx 0.9$. Para cada colisão, as condições iniciais são dadas através da configuração inicial das soluções: (5.34) ou (5.35); e também pela derivada temporal de cada uma destas configurações: $\dot{\phi}_{k\bar{k}}$ e $\dot{\phi}_{\bar{k}k}$. As condições de contorno serão dadas pelos limites assintóticos que cada configuração inicial

assumir, ou seja, $\phi_{k\bar{k}}(x \rightarrow \pm\infty) = 0$ e $\dot{\phi}_{k\bar{k}}(x \rightarrow \pm\infty) = 0$ para a configuração *kink-antikink* e $\phi_{\bar{k}k}(x \rightarrow \pm\infty) = -\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ e $\dot{\phi}_{\bar{k}k}(x \rightarrow \pm\infty) = 0$ para a configuração *antikink-kink*.

Até agora foram apresentadas as características do modelo H^6 em função de um mesmo conjunto de valores de n . Estes valores adotados foram escolhidos de forma que o modelo apresente deformações significativas em suas características. O exemplo mais evidente é o da deformação do potencial de perturbação. Portanto, vamos trabalhar com valores de n que mudam significativamente a forma das características do modelo e com valores que levam à presença de diferentes números de modos de vibração.

5.6 Colisões *kink-antikink* do modelo H^6

Os fenômenos decorrentes das colisões *kink-antikink* para $n \gg 1$ são *bions* para velocidades suficientemente baixas e uma mudança no setor topológico, no qual as soluções estão inicialmente inseridas para valores de velocidades maiores que a velocidade crítica. Neste caso, a velocidade crítica representa a velocidade a partir da qual as soluções passarão para o outro setor topológico após a colisão. Esse comportamento já era esperado, dado que cada solução não apresenta modos vibracionais. Para a configuração *kink-antikink*, o potencial de perturbação apresenta uma barreira entre seus mínimos, dificultando a presença de modos vibracionais adicionais. A Figura 5.27 apresenta o potencial de perturbação do par *kink-antikink* do modelo H^6 para diversos valores de n .

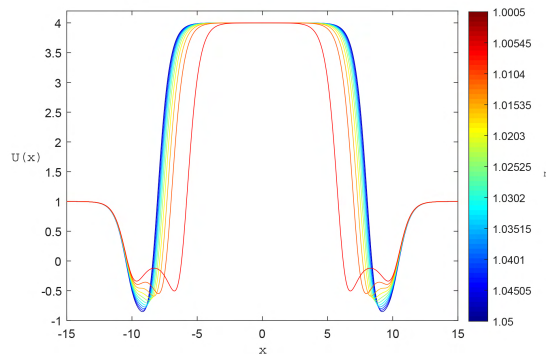


Figura 5.27: Potencial de perturbação do par *kink-antikink* do modelo H^6 para diversos valores de n .

A Figura 5.28 mostra a vista superior da colisão *kink-antikink*. A Figura 5.28a indica a mudança de fase após a colisão para $n = 1.05$ e $v_i = 0.1$, levando as soluções para o outro mínimo do potencial. O estado de *bion* é apresentado na Figura 5.28b.

Para $n \approx 1$, o potencial de perturbação do par *kink-antikink* apresenta modos vibracionais adicionais, mesmo possuindo uma barreira maior que os mínimos. Para $n = 1.0005$ o potencial de perturbação do par apresenta um modo vibracional, enquanto que para $n = 1.000005$, apresenta dois modos vibracionais.

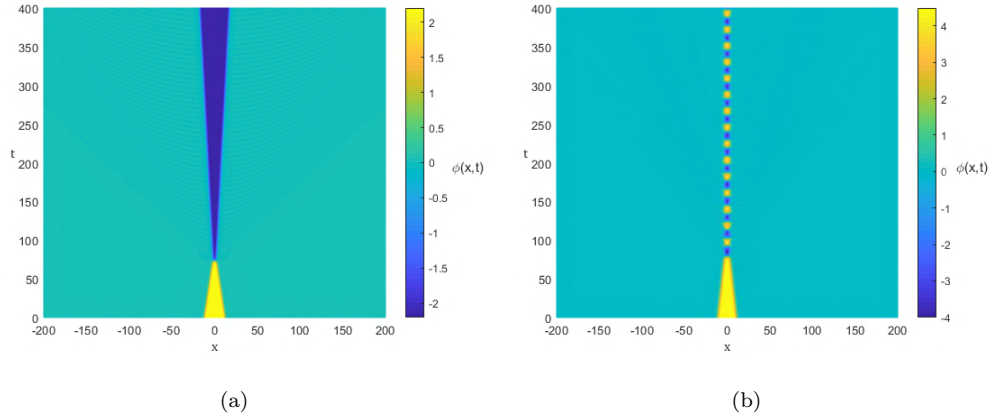


Figura 5.28: Vista superior da malha 3D da evolução espaço-temporal da colisão *kink-antikink* do modelo H^6 . (a) Colisão para $n = 1.05$ e $v_i = 0.1$, mostrando a mudança de mínimo das soluções; (b) Colisão para $n = 1.0005$ e $v_i = 0.1$, mostrando o estado de *bion*.

Vamos estudar colisões *kink-antikink* para estes valores de n , onde as soluções e os potenciais estarão consideravelmente deformados quando comparados com sua forma para $n \gg 1$. Essa deformação torna necessário um valor de x_0 suficientemente grande, para que não haja interferência entre as soluções desde o instante inicial da colisão, nos levando a adotar $x_0 = 25$. Para determinar os modos vibracionais foi utilizado o método numérico de elementos finitos.

As colisões *kink-antikink* para $n = 1.0005$ e $n = 1.0000005$ apresentam o comportamento de *bion* para velocidades baixas e uma mudança de setor topológico para velocidades superiores à velocidade crítica.

Para $n = 1.0005$ existem janelas de *one-bounce*, semelhante às estudadas em [17]. Neste caso, existem dois comportamentos de *one-bounce*: no primeiro, que chamaremos simplesmente de *one-bounce*, mostrado na Figura 5.28a, o fenômeno é caracterizado pelo escape para o infinito das soluções em outro setor topológico; no segundo, que chamaremos de *one-bounce* de segunda forma, ao colidir, as soluções vão para o outro setor topológico, oscilam em torno do seu mínimo e então retornam para o setor topológico inicial, escapando para o infinito. Existem algumas janelas de *one-bounce* de segunda forma. Na Figura 5.29 são apresentados o centro de massa do par *kink-antikink* no processo de colisões para $v_i = 0.1752$ e $v_i = 0.1857$, indicando colisões na primeira e na segunda janela de *one-bounce* de segunda forma.

Foram encontradas cinco janelas de *one-bounce* de segunda forma para $n = 1.0005$. O número de oscilações de cada janela de *one-bounce* de segunda forma aumenta e a espessura da janela diminui conforme a velocidade inicial se aproxima da velocidade crítica. A velocidade crítica é $v_{cr} = 0.1913$. A Figura 5.30 apresenta o número de oscilações, N_{osc} , que ocorrem antes do escape para o infinito no fenômeno de *one-bounce* de segunda forma em função da velocidade inicial.

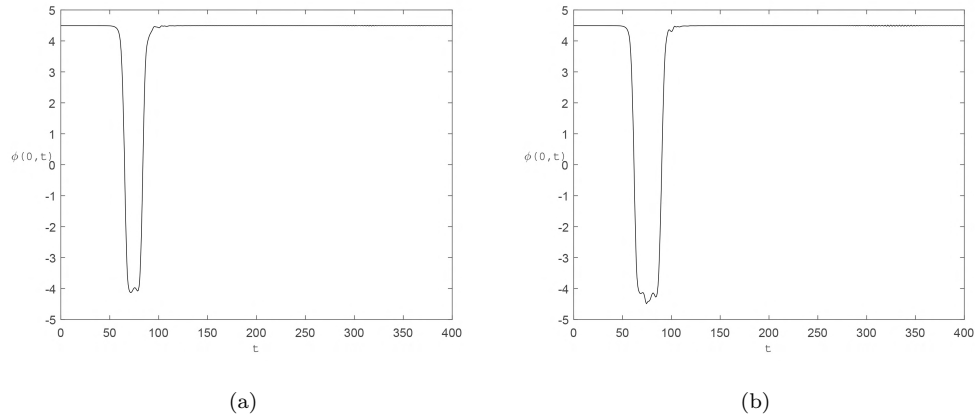


Figura 5.29: Centro de massa do campo escalar do modelo H^6 para $n = 1.0005$. Colisão *kink-antikink* para (a) $v_i = 0.1752$ e (b) $v_i = 0.1857$.

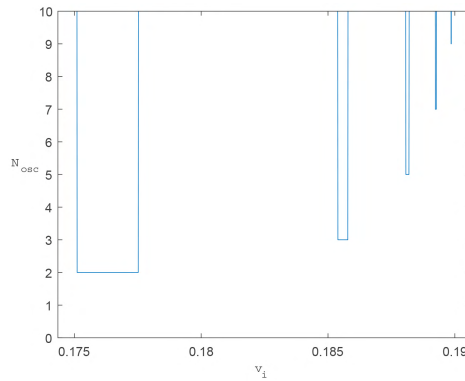


Figura 5.30: Número de oscilações que ocorrem antes do escape para o infinito no fenômeno de *one-bounce* em função da velocidade inicial.

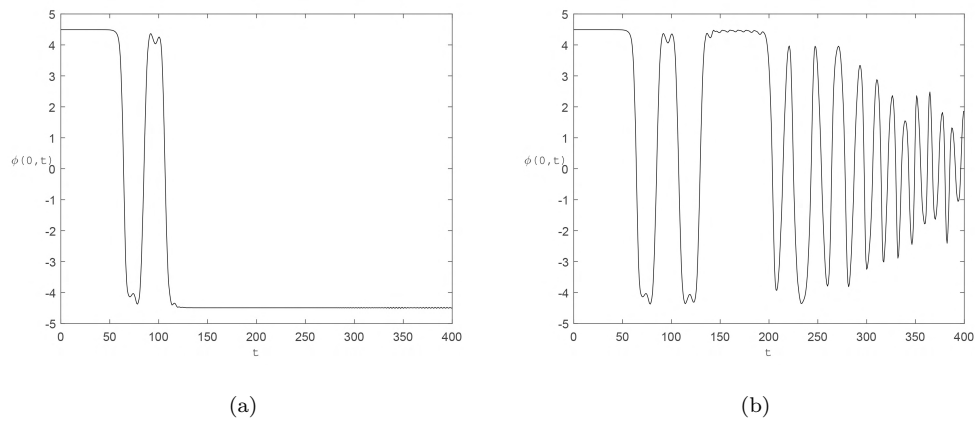


Figura 5.31: Centro de massa do campo escalar do modelo H^6 para $n = 1.0005$. Colisão *kink-antikink* para (a) $v_i = 0.1781$ e (b) $v_i = 0.17805$.

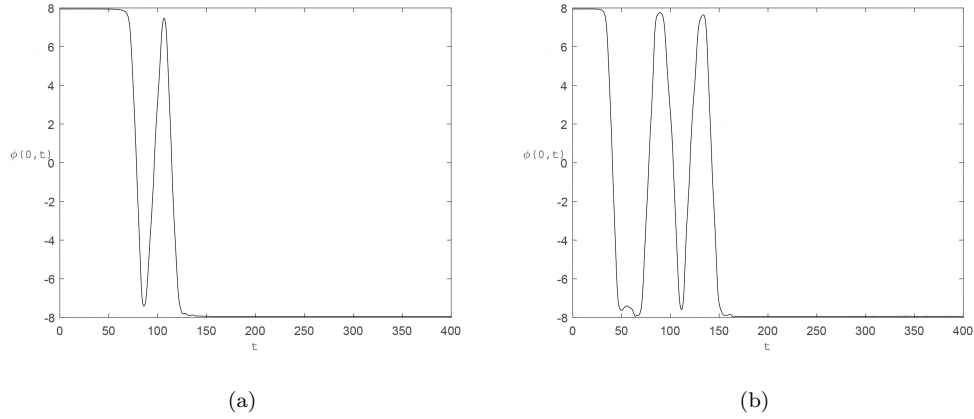


Figura 5.32: Centro de massa do campo escalar do modelo H^6 para $n = 1.0000005$. Colisão *kink-antikink* para (a) $v_i = 0.1$ e (b) $v_i = 0.21863$.

O fenômeno mostrado na Figura 5.29 pode ser explicado qualitativamente através do mecanismo de troca de energia: inicialmente toda energia do par *kink-antikink* está armazenada no modo translacional. Após a colisão, as soluções são levadas para o outro setor topológico onde começam a oscilar, então parte da energia do modo translacional é transferida para o modo vibracional e retorna, ocasionando a separação e escape para o infinito das soluções.

Outro ponto de destaque é o que foi classificado como uma "estrutura peculiar" em [17]: após a primeira colisão, as soluções são levadas para o outro setor topológico, oscilam em torno de seu mínimo e retornam para o setor topológico inicial onde oscilam novamente e retornam para o setor topológico secundário, finalmente escapando para o infinito. Este fenômeno foi encontrado somente nas faixas de velocidade de 0.17484 a 0.17486, 0.17807 a 0.17814 e na velocidade $v_i = 0.18594$. A Figura 5.31a apresenta este fenômeno, para $v_i = 0.1781$.

Vamos analisar agora o centro de massa da colisão para $v_i = 0.17805$, mostrado na Figura 5.31b. Após a primeira colisão, as soluções são levadas para o segundo setor topológico, oscilam, retornam ao primeiro setor, oscilam, vão para o segundo setor novamente, oscilam e finalmente retornam para o primeiro setor, onde permanecem oscilando por um certo período até caírem num estado de *bion*. Este fenômeno só foi encontrado nesta velocidade específica. Podemos especular que para variações pequenas de n , o processo mostrado na Figura 5.31b ocorra sem que haja o estado de *bion*, ocasionando o escape para o infinito após o segundo retorno do segundo setor topológico. Contudo, esta investigação não será realizada neste trabalho.

A partir de agora vamos estudar os resultados das colisões *kink-antikink* para $n = 1.0000005$. Conforme já mencionado, o potencial de perturbação do par, para este valor de n , apresenta dois modos vibracionais. Para velocidades baixas, encontramos estados que inicialmente oscilam, como no estado de *bion*, e após um tempo decaem em pulsos oscilatórios, com ou sem oscilações no centro de massa. A velocidade

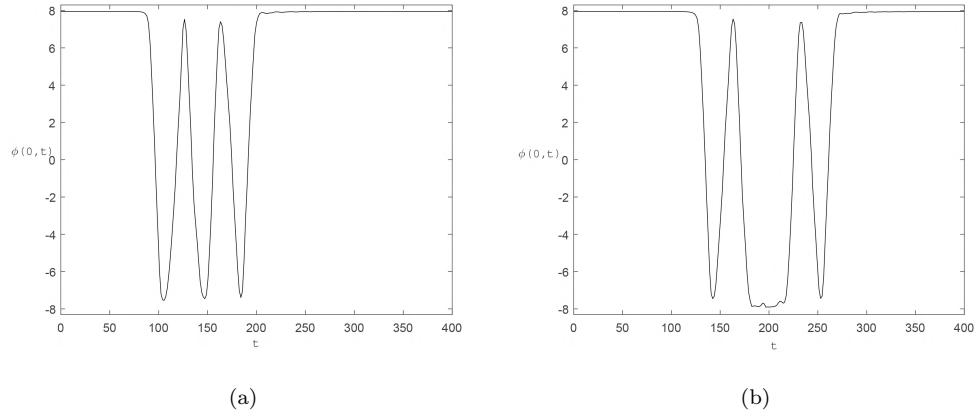


Figura 5.33: Centro de massa do campo escalar do modelo H^6 para $n = 1.0000005$. Colisão *kink-antikink* para (a) $v_i = 0.194$ e (b) $v_i = 0.135$.

crítica é $v_{cr} = 0.21968$ e para velocidades superiores a esta, as soluções mudam de setor topológico após a colisão. Vamos destacar alguns resultados obtidos para velocidades próximas e inferiores à velocidade crítica.

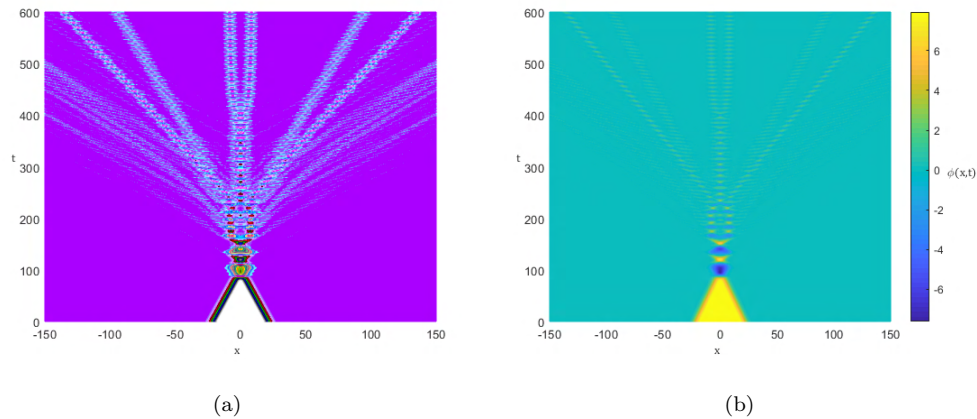


Figura 5.34: Vista superior da colisão *kink-antikink* do modelo H^6 para $n = 1.0000005$. Colisão para $v_i = 0.217$.

Os resultados apresentados na Figura 5.32 destacam o que ocorre com o centro de massa da solução *kink-antikink*, indicando as mudanças de mínimo que as soluções passam, antes de se estabelecerem no setor topológico diferente do inicial. A Figura 5.32a corresponde a uma colisão para $v_i = 0.1$ e mostra que as soluções são lançadas no segundo setor topológico, retornam para o primeiro setor e então voltam para o segundo setor, onde escapam para o infinito. Neste caso não ocorrem oscilações entre os *bounces*. Já a Figura 5.32b corresponde a uma colisão para $v_i = 0.21863$, mostrando que as soluções oscilam entre o primeiro e segundo setor topológico, visitando cada um duas vezes antes de se estabelecerem no segundo setor. Na primeira visita ao segundo setor, ocorrem oscilações antes do retorno ao primeiro setor. A Figura

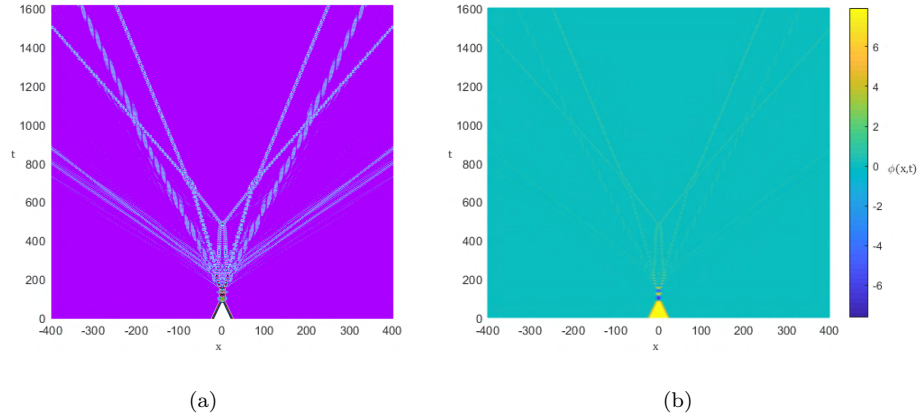


Figura 5.35: Vista superior da colisão *kink-antikink* do modelo H^6 para $n = 1.0000005$. Colisão para $v_i = 0.2174$.

5.32a apresenta um resultado semelhante ao mostrado na Figura 5.31a.

Um comportamento intrigante é o fenômeno de *three-bounce*, apresentado na Figura 5.33. A Figura 5.33a indica que as soluções visitam três vezes o setor topológico secundário antes de escaparem para o infinito no setor topológico inicial. Perceba que não há nenhuma oscilação entre os *bounces*. Já a Figura 5.33b apresenta um resultado semelhante. A diferença ocorre devido às oscilações presentes na segunda visita ao segundo setor topológico.

Agora vamos considerar a Figura 5.34, que representa a vista superior da colisão *kink-antikink* para $v_i = 0.217$. A Figura 5.34a e a Figura 5.34b representam uma colisão para a mesma velocidade inicial e mesmo valor de n . A razão de utilizar duas figuras para representar o mesmo fenômeno ocorre devido a utilização de uma coloração diferente, visando facilitar a identificação do que de fato ocorre durante o processo. Após a colisão acontece a total aniquilação das soluções e o processo evolui para a criação de estados oscilatórios com valores muito próximos entre si, dificultando sua análise através do conteúdo físico representado pelas cores e mostrado na Figura 5.34b. Neste caso, então, a Figura 5.34a possui uma coloração artificial, sem representação dos valores assumidos pelo campo durante o processo, servindo como um meio de identificação dos pulsos. Portanto, no processo de colisão apresentado na Figura 5.34, após a colisão as soluções inicialmente oscilam, visitando os mínimos do potencial e então formam dois pulsos oscilatórios, que posteriormente colidem e emanam quatro pulsos oscilatórios e um *bion*. Após um tempo, o *bion* se transforma em dois pulsos oscilatórios.

Vamos apresentar o resultado encontrado para a colisão *kink-antikink* com $v_i = 0.2174$ de forma semelhante ao mostrado na Figura 5.34, ou seja, a Figura 5.35a e 5.35b representam o mesmo processo, onde a coloração na Figura 5.35a representa apenas uma forma de identificarmos o que ocorre no processo, visto que após a colisão o campo assume valores muito próximos entre si, dificultando a análise dos fenômenos

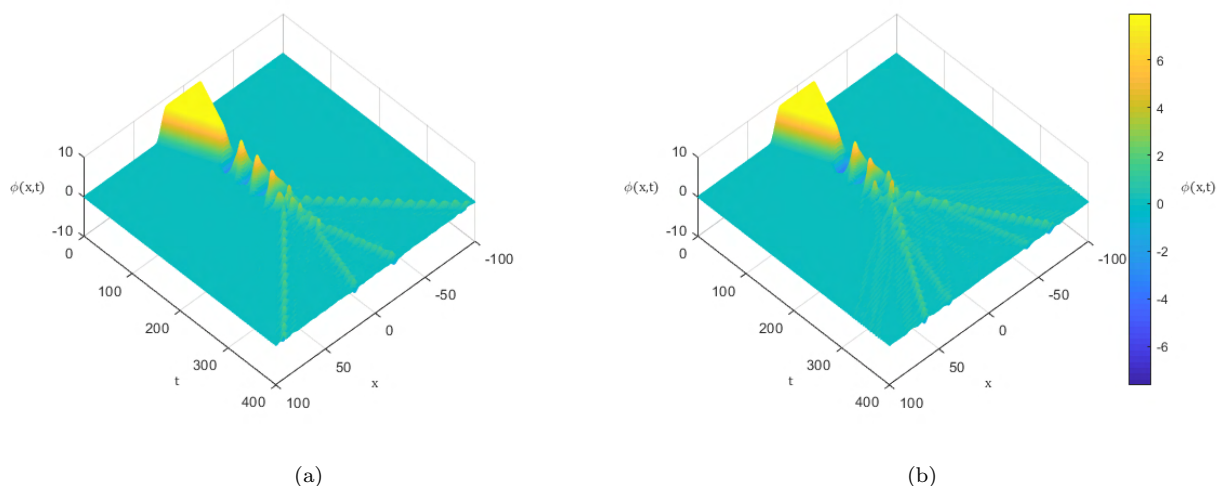


Figura 5.36: Colisão *kink-antikink* do modelo H^6 para $n = 1.0000005$. (a) Colisão para $v_i = 0.21059$. (b) Colisão para $v_i = 0.21816$.

encontrados, e a coloração na Figura 5.35b representa os valores assumidos pelo campo durante o processo.

Para $v_i = 0.2174$, o resultado indica que após a colisão o campo oscila entre os mínimos do potencial e então se divide em dez pulsos oscilatórios. Inicialmente, oito destes pulsos escapam para o infinito. O par de pulsos mais próximos ao centro de massa colide após um tempo, resultando em dois pulsos que se espalham com um ângulo de abertura grande o suficiente para colidir com outros quatro pulsos. Este processo é melhor visto na Figura 5.35a; enquanto que na Figura 5.35b é possível ver que todo o processo ocorre para em valores do campo bem próximos entre si.

Estados oscilatórios aparecem para diversas velocidades iniciais, porém não foi possível obter um padrão que relacionasse a quantidade de estados oscilatórios, e se estes surgiram com ou sem um pulso central, com a velocidade inicial da colisão. A Figura 5.36 mostra a criação de dois pares de pulsos oscilatórios com comportamento mais simples que os mostrados na Figura 5.35. Na Figura 5.36a, inicialmente as soluções entram num estado oscilatório e decaem em um par pulsos, mantendo oscilações centrais que posteriormente decaem em outro par de pulsos; enquanto na Figura 5.36b, o estado oscilatório resultante da colisão decaí imediatamente em quatro pulsos.

Apesar de não ter sido encontrado um padrão para a criação de pulsos, observa-se um padrão relacionado ao número de visitas ao setor topológico secundário após a colisão e antes do decaimento em estados oscilatórios em função da velocidade inicial. A Figura 5.37 representa a vista superior do processo de colisão, sendo a Figura 5.37a uma colisão com velocidade inicial $v_i = 0.2034$ e a Figura 5.37b uma colisão para $v_i = 0.218$. A quantidade de visitas ao setor topológico secundário antes do decaimento em estados oscilatórios pode ser identificada através do número de vezes que a cor azul aparece antes do decaimento. O processo mostrado na Figura 5.37a possui sete visitas, enquanto o processo da Figura 5.37b possui duas

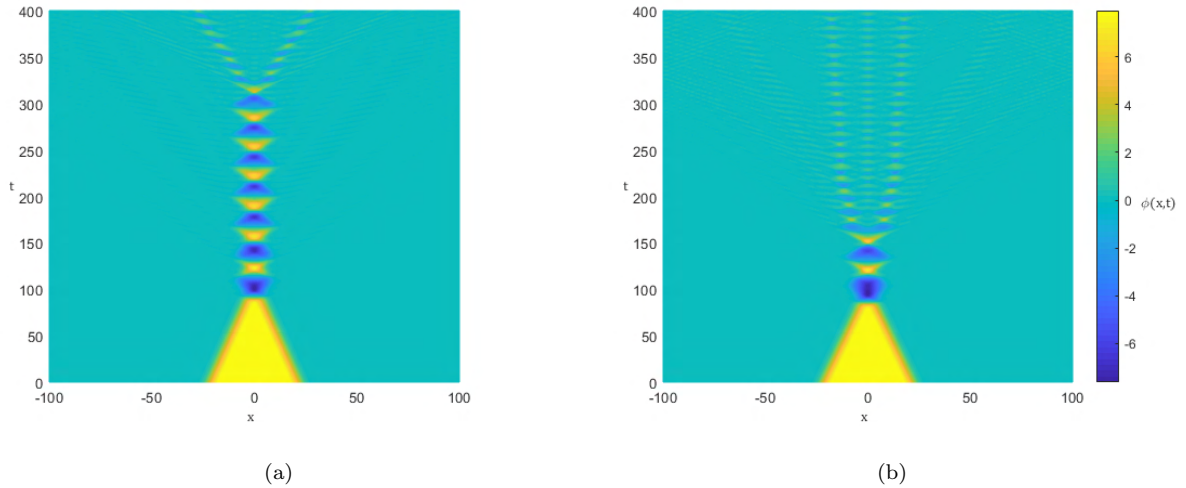


Figura 5.37: Vista superior da colisão *kink-antikink* do modelo H^6 para $n = 1.0000005$. (a) Colisão para $v_i = 0.2034$. (b) Colisão para $v_i = 0.218$.

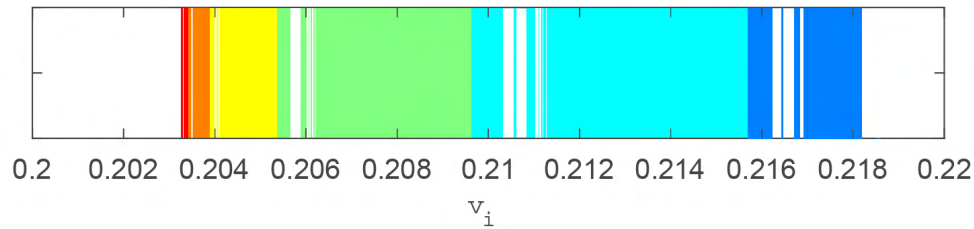


Figura 5.38: Número de visitas ao setor topológico secundário antes do decaimento em estados oscilatório em função da velocidade inicial. Em vermelho: 7 visitas; em laranja: 6 visitas; em amarelo: 5 visitas; em verde: 4 visitas; em ciano: 3 visitas; em azul: 2 visitas.

visitas.

A Figura 5.38 apresenta a quantidade de visitas que o par *kink-antikink* fazem ao setor topológico secundário antes do decaimento em estados oscilatórios. Cada cor representa uma quantidade de visitas. Em sequência, a partir de duas até sete visitas, as cores correspondentes são: azul, ciano, verde, amarelo, laranja e vermelho. Isto quer dizer que a cor azul representa faixas de velocidades que levam o par visitar duas vezes o segundo setor topológico antes do decaimento em estados oscilatórios, enquanto que a cor vermelha representa faixas de velocidades que levam o par a visitar o segundo setor sete vezes antes do decaimento em estados oscilatórios. Nesta representação, a cor branca apresenta fenômenos sem qualquer padrão. Através da Figura 5.38 podemos destacar que:

- existem janelas de velocidades associadas ao número de visitas que o campo realizado ao outro setor

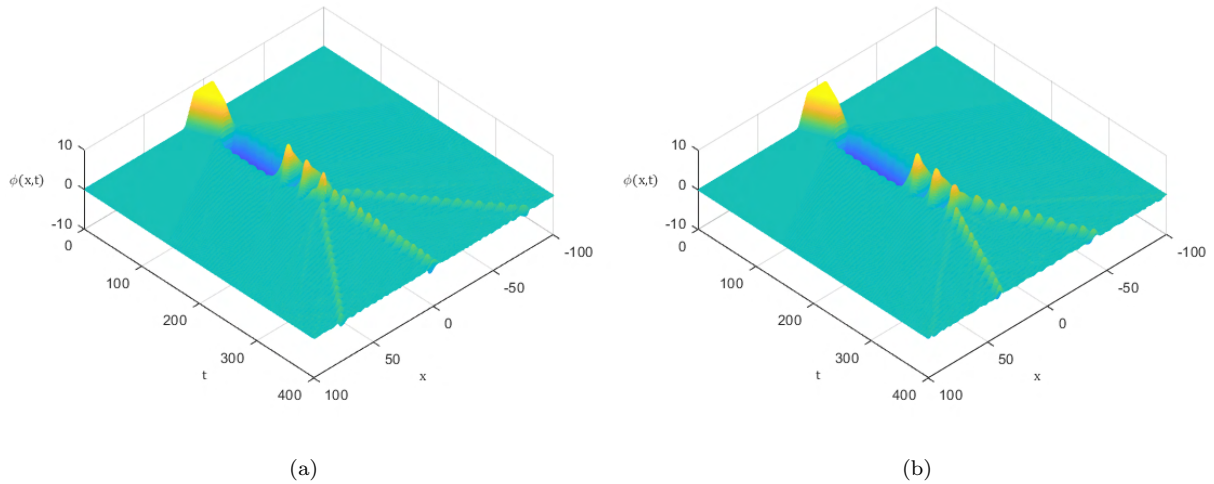


Figura 5.39: Vista superior da colisão *kink-antikink* do modelo H^6 para $n = 1.0000005$. (a) Colisão para $v_i = 0.2196$. (b) Colisão para $v_i = 0.21963$.

topológico antes do decaimento em estados oscilatórios;

- conforme a velocidade aumenta, somente $l + 1$ oscilações estão na fronteira de l oscilações
- o número de visitas ao setor topológico secundário diminui para valores maiores de velocidade.

Realizando um paralelo com o mecanismo de troca de energia, poderíamos inferir que colisões com velocidades menores favorecem o armadilhamento das soluções, permitindo que estas oscilem mais vezes antes do decaimento em estados oscilatórios, devido o modo translacional ter tempo para fornecer mais energia para os modos vibracionais. Seguindo a ideia de [28], a presença de dois modos vibracionais tornaria mais difícil o armazenamento de energia em um único modo, dificultando o surgimento de fenômenos de *two-bounce* e favorecendo o aparecimento de estados oscilatórios. Para o caso de velocidades maiores, o modo translacional não tem tempo para transmitir energia considerável para os modos vibracionais, de forma que leva a menos oscilações antes do decaimento em estados oscilatórios.

Ainda sobre colisões *kink-antikink* para $n = 1.0000005$, foi encontrada uma pequena janela de *one-bounce* de segunda forma, de $v_1 = 0.21850$ a $v_2 = 0.21857$, com duas oscilações no setor topológico secundário, e um outro padrão próximo à velocidade crítica: após a colisão as soluções são levadas ao setor topológico secundário, onde oscilam em torno de seu mínimo, em seguida as soluções passam a alternar entre os setores topológicos duas vezes e então decaem em estados oscilatórios. Quanto maior a velocidade, mais tempo as soluções oscilam em torno do mínimo do segundo setor. Este comportamento pode ser visto na Figura 5.39a e 5.39b. Apesar de serem colisões para velocidades bem próximas, o surgimento de estados oscilatórios não apresenta um padrão.

5.7 Colisões *antikink-kink* do modelo H^6

No estudo de colisões *antikink-kink*, encontramos uma estrutura de janelas de *two-bounce* semelhante às já estudadas até o momento. Neste cenário, o potencial de perturbação do par é mais propício para o surgimento de modos vibracionais. Para $1.012 < n < 1.05$ encontramos quatro modos vibracionais. Utilizamos ainda valores de n para os quais o potencial de perturbação possui uma deformação bem estabelecida: para $n = 1.0005$ encontramos cinco modos e para $n = 1.0000005$ apresenta oito modos. O perfil do potencial de perturbação da configuração *antikink-kink* é apresentado na Figura 5.40 para diversos valores de n .

Para $n \gg 1$, os resultados das colisões são semelhantes aos das colisões para o modelo ϕ^6 , apresentando uma estrutura que alterna entre os fenômenos de *n-bounce* e *bion*, sendo que acima da velocidade crítica ocorre somente *one-bounce*. Para valores de n próximos a 1 e para determinadas velocidades ocorre o fenômeno de decaimento em estados oscilatórios após as colisões, com ou sem o *bion* e levando à aniquilação das soluções.

Em relação às janelas de *two-bounce*, as variações de n no processo de colisão mostraram apenas uma diminuição significativa em sua quantidade, conforme n se aproxima de 1, o que já era esperado, pois conforme já mencionado a presença de modos vibracionais adicionais dificulta o mecanismo de troca de energia, suprimindo as janelas de *two-bounce*. A Figura 5.41 mostra o tempo da primeira, segunda e terceira colisão em função da velocidade inicial, permitindo identificar as janelas de *two-bounce* nas faixas de velocidades onde o tempo da terceira colisão diverge. A Figura 5.41a apresenta resultados para $n = 1.05$, enquanto a Figura 5.41b apresenta para $n = 1.0005$. É possível identificar facilmente que para $n = 1.0005$ o número de janelas de *two-bounce* diminui consideravelmente.

Devido a diminuição na quantidade de janelas de *two-bounce* para $n \approx 1$, vamos considerar agora o estudo da ordem das primeiras três janelas para alguns valores de n . A Tabela 5.5 relaciona o valor de n com a i -ésima janela de *two-bounce*, de ordem k_i e espessura Δv_i .

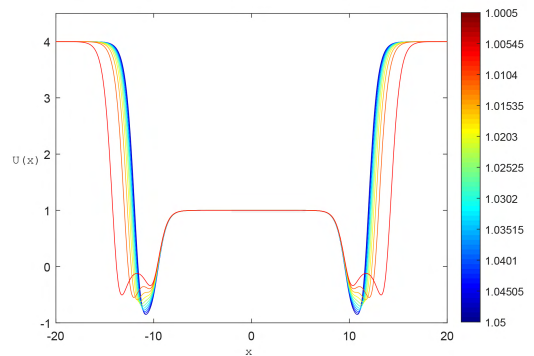


Figura 5.40: Potencial de perturbação do par *antikink-kink* do modelo H^6 para diversos valores de n .

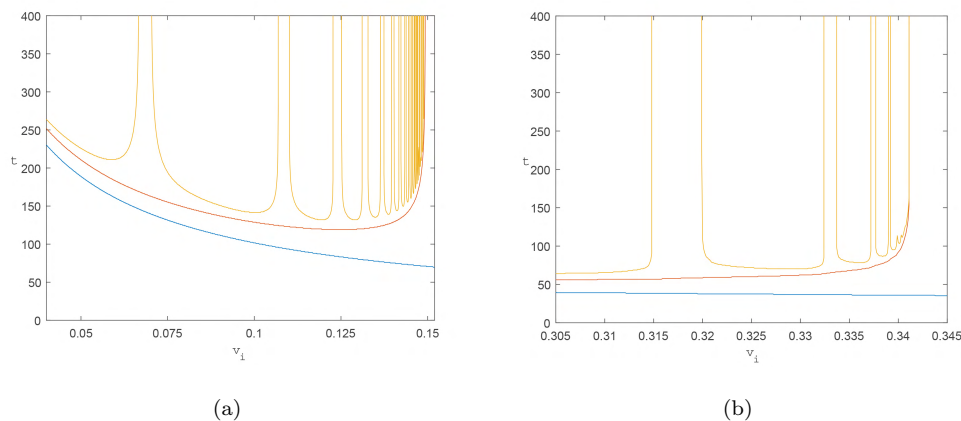


Figura 5.41: Tempo da primeira (linha azul), segunda (linha vermelha) e terceira colisão (linha amarela). (a) Processo para $n = 1.05$; (b) Processo para $n = 1.0005$.

| n | Δv_1 | Δv_2 | Δv_3 | k_1 | k_2 | k_3 | v_{cr} |
|----------|--------------|--------------|--------------|-------|-------|-------|----------|
| 1.05 | 0.0036 | 0.0030 | 0.0023 | 1 | 2 – 3 | 3 | 0.1494 |
| 1.03762 | 0.0062 | 0.0031 | 0.0019 | 1 – 2 | 2 – 3 | 3 – 4 | 0.1680 |
| 1.02525 | 0.0018 | 0.0052 | 0.0024 | 1 | 1 – 2 | 3 | 0.1944 |
| 1.012875 | 0.0081 | 0.0033 | 0.0014 | 2 | 3 | 4 | 0.2364 |
| 1.0005 | 0.0049 | 0.0011 | 0.0003 | 1 | 2 | 3 – 4 | 0.3412 |

Tabela 5.5: Relação do parâmetro n com a velocidade crítica, v_{cr} , e com a ordem, k_i , e a espessura, Δv_i , da i -ésima janela de *two-bounce*.

A Tabela 5.5 relaciona o valor de n com alguns fenômenos. A primeira coluna representa os valores de n adotados com o potencial de perturbação do par *antikink-kink* apresentando quatro modos vibracionais, com exceção de $n = 1.0005$, onde o potencial apresenta cinco modos. A segunda, terceira e quarta coluna apresentam a espessura da primeira janela, segunda e terceira janela de *two-bounce*. É possível ver que as espessuras das janelas não apresentam um padrão, aumentando e diminuindo inicialmente de forma aleatória, mesmo para os valores de n nos quais o potencial apresenta quatro modos. Esta possível aleatoriedade será explorada a seguir. A quinta, sexta e sétima coluna apresentam a ordem k_i da i -ésima janela de *two-bounce*, apresentando algumas informações: conforme n se aproxima de 1, a primeira janela é suprimida para $n = 1.012875$ e existem transições na ordem de uma mesma janela, ou seja, existem fenômenos de *two-bounce* de ordens distintas numa mesma janela. A oitava coluna mostra que a velocidade crítica sempre aumenta conforme n diminui.

Para estudar o fenômenos de ordens distintas numa mesma janela de *two-bounce*, vamos considerar colisões que estão na segunda janela para $n = 1.02525$, que vai de $v_i = 0.1505$ a $v_i = 0.1557$, e na

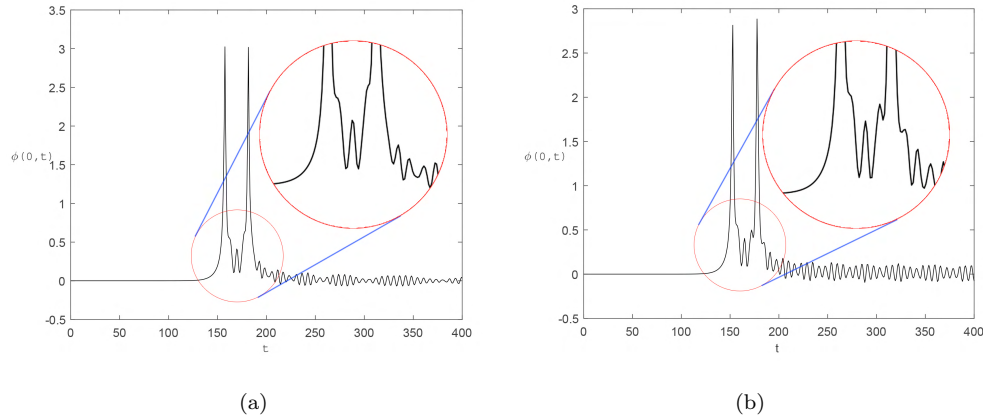


Figura 5.42: Centro de massa do campo escalar no processo de colisão para $n = 1.02525$ com (a) $v_i = 0.1505$ e (b) $v_i = 0.1557$.

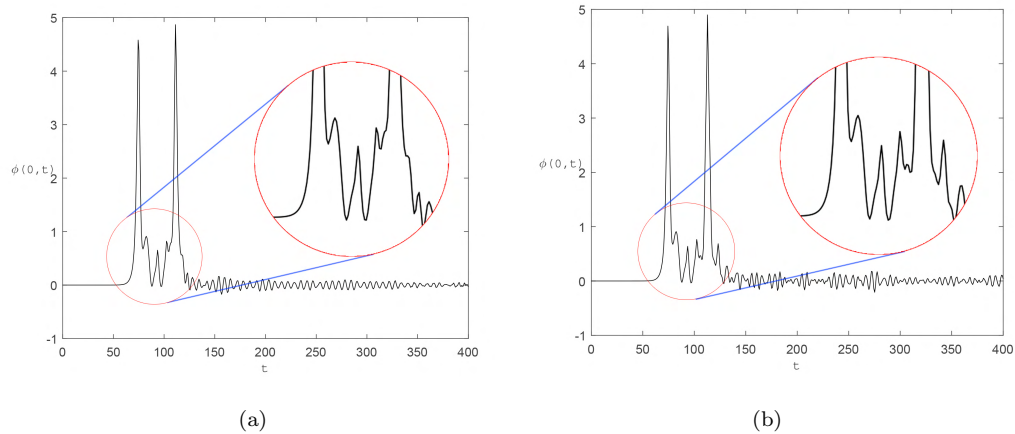


Figura 5.43: Centro de massa do campo escalar no processo de colisão para $n = 1.0005$ com (a) $v_i = 0.3373$ e (b) $v_i = 0.3376$.

terceira janela para $n = 1.0005$, que vai de $v_i = 0.3373$ a $v_i = 0.3376$. As velocidades de colisão adotadas são aquelas que estão nos extremos de cada janela. A Figura 5.42 mostra o centro de massa do campo escalar no processo de colisão para $v_i = 0.1505$ e $v_i = 0.1557$. É possível ver que a Figura 5.42a representa uma colisão de primeira ordem, enquanto que a Figura 5.42b representa uma colisão de segunda ordem. A alteração na ordem da colisão em uma mesma janela de *two-bounce* pode ser vista também na Figura 5.43, que apresenta o centro de massa do campo escalar para duas velocidades que estão na terceira janela de *two-bounce*, para $n = 1.0005$. A Figura 5.43a representa uma colisão para $v_i = 0.3373$, de terceira ordem, enquanto que a Figura 5.43b representa uma colisão para $v_i = 0.3376$, de quarta ordem.

Conforme visto anteriormente, as janelas de *two-bounce* diminuem consideravelmente para valores de n bem próximos de 1. Foram investigados e encontrados fenômenos de *two-bounce* até para

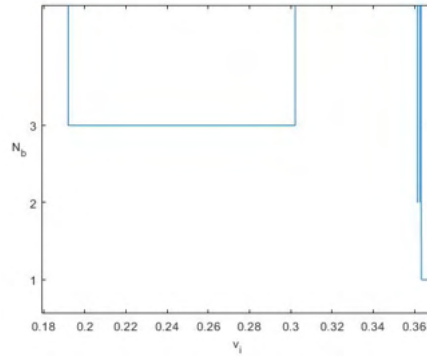


Figura 5.44: Número de *bounce*, N_b em função da velocidade inicial, v_i .

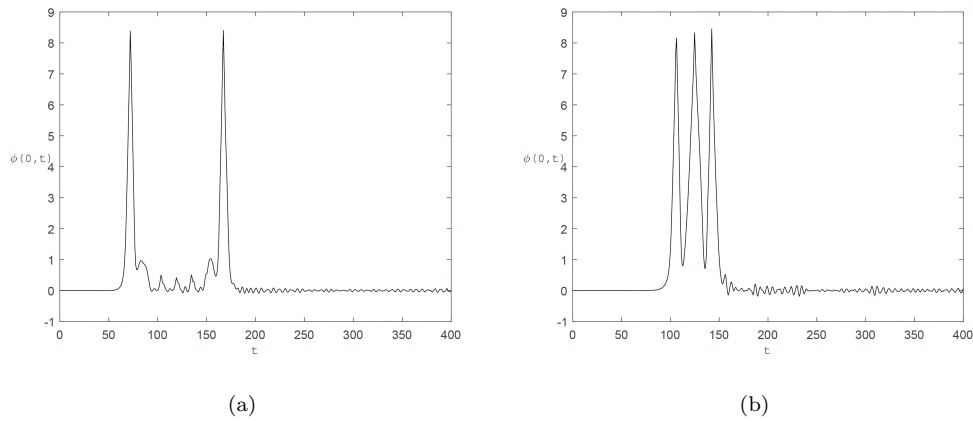


Figura 5.45: Centro de massa do campo escalar no processo de colisão para $n = 1.0000005$ com (a) $v_i = 0.3632$ e (b) $v_i = 0.243$.

$n = 1.0000005$, cenário onde existem oito modos vibracionais adicionais. Apesar do foco do estudo até agora ter sido janelas de *two-bounce*, para este valor de n , encontramos uma janela de *three-bounce* com espessura consideravelmente maior, quando comparada com as janelas de *two-bounce* apresentadas neste trabalho. Geralmente as janelas de *three-bounce* se acumulam próximas às janelas de *two-bounce* e são bem menores que estas. No entanto, neste caso a janela de *three-bounce* é quem possui maior espessura ($\Delta v = 0.1102$). Estes resultados podem ser vistos na Figura 5.44, que relaciona o número de *bounce* em função da velocidade inicial v_i . Três velocidades levam a *two-bounce* e a velocidade crítica continua a aumentar para n cada vez menor.

A Figura 5.45 mostra o fenômeno de *two-bounce*, com $v_i = 0.3632$, e o *three-bounce*, com $v_i = 0.243$, para $n = 1.0000005$. Na Figura 5.45a é possível ver que existem nove oscilações entre as colisões, indicando que é um resultado de nona ordem. Por outro lado, na Figura 5.45b, não existem quaisquer oscilações entre as colisões, indicando que é um fenômeno de *three-bounce* de ordem zero.

Em determinadas velocidades as colisões também levam ao surgimento de pulsos oscilatórios e

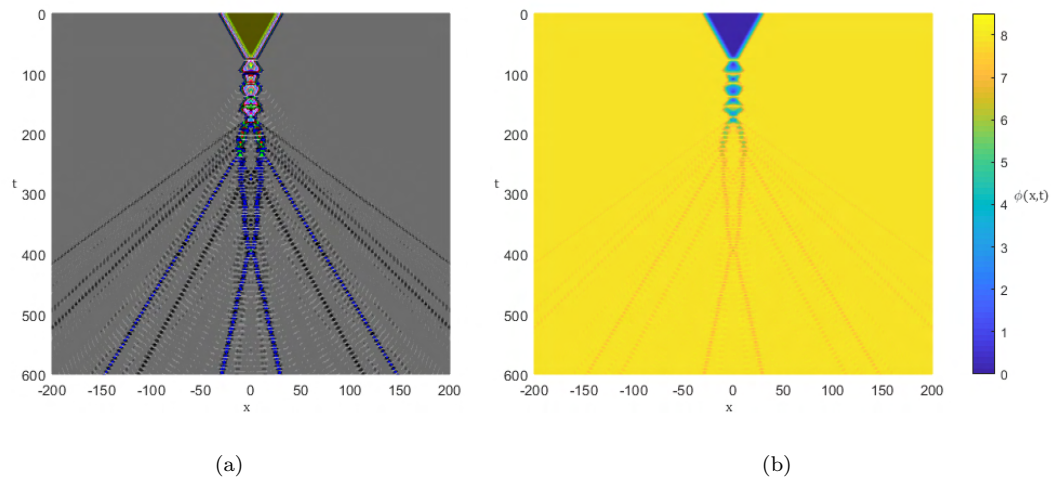


Figura 5.46: Vista superior da colisão *antikink-kink* do modelo H^6 para $n = 1.0000005$. Colisão para $v_i = 0.2174$. (a) Coloração artificial. (b) A coloração representa os valores assumidos pelo campo durante o processo.

a aniquilação total das soluções. De maneira semelhante a como foi mostrado nas colisões *kink-antikink*, a Figura 5.46 representa a vista superior da colisão *antikink-kink* para $v_i = 0.34$, sendo que a coloração da Figura 5.46a é escolhida para facilitar a identificação dos pulsos originados da colisão, enquanto a coloração da Figura 5.46b representa os valores assumidos pelo campo durante o processo. A Figura 5.46 mostra que após a colisão, as soluções entram num estado oscilatório e decaem em diversos pulsos, sendo dois destes maiores e, conseqüentemente, mais fáceis de se identificar. A partir destes dois pulsos maiores, diversos outros pulsos menores são originados e escapam para o infinito, ocasionando uma diminuição nos pulsos maiores e fazendo com eles mudem sua direção inicial e colidam em torno de $t = 400$.

O decaimento em estados oscilatórios ocorre para os valores de n próximo de 1, cenário em que a presença de modos vibracionais adicionais dificulta o mecanismo de troca de energia. Estruturas de estados oscilatórios podem ser na Figura 5.47.

A Figura 5.47 apresenta resultados para o valor fixo $n = 1.0005$. A Figura 5.47a apresenta a colisão para $v_i = 0.33$ e a Figura 5.47b apresenta a colisão para $v_i = 0.321$. É possível ver que após a colisão, as soluções inicialmente entram no estado de *bion* e após um tempo este estado se divide em oscilações sem preservar o um pulso central. Na Figura 5.47a são encontrados dois estados oscilatórios sem *bion* e na Figura 5.47b são encontrados 6 estados oscilatórios. Já na Figura 5.47c, colisão para $v_i = 0.32$, e na Figura 5.47d, colisão para $v_i = 0.322$, são encontrados quatro estados oscilatórios após a colisão e um pulso central. É possível notar que os dois pares das oscilações da Figura 5.47d são mais próximas que da Figura 5.47c.

Não foram encontrados quaisquer padrões no decaimento em estados oscilatórios a partir das colisões *antikink-kink* do modelo H^6 em função de v_i . Por outro lado, conforme pode ser visto na Figura

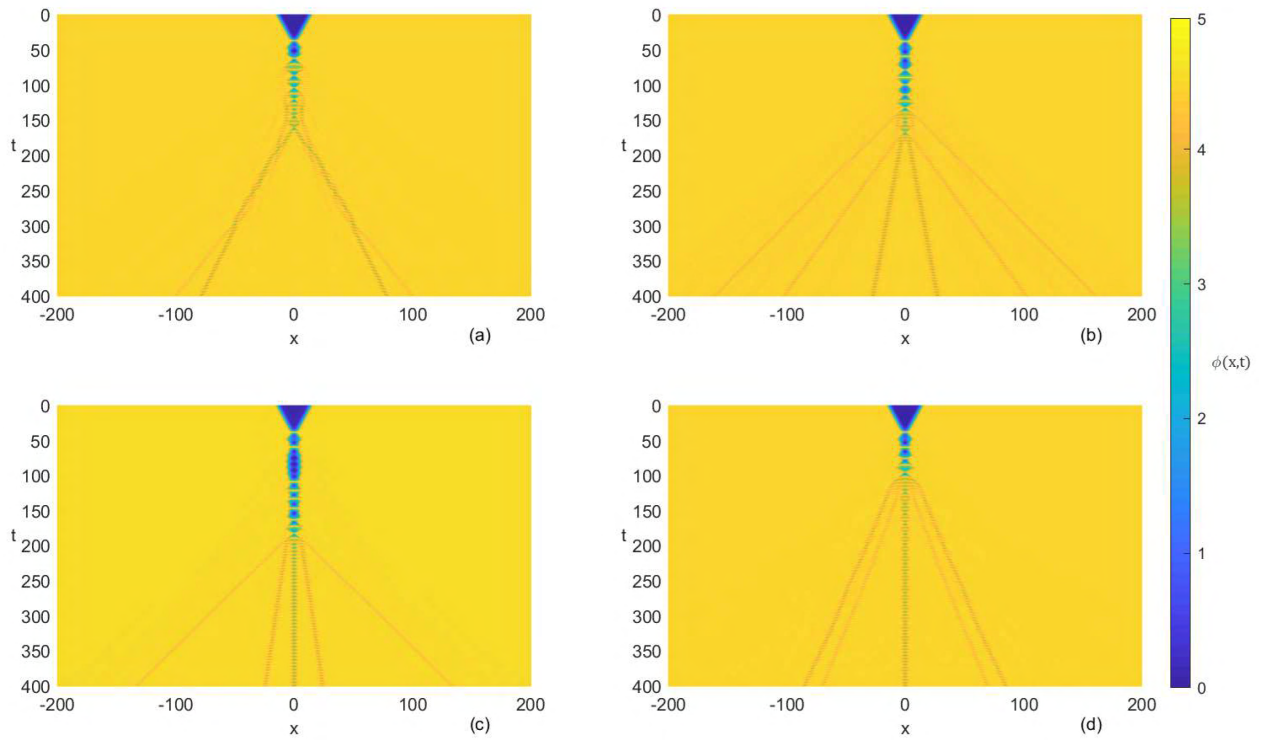


Figura 5.47: Vista superior do processo de colisão *antikink-kink* do modelo H^6 para $n = 1.0005$. (a) Colisão para $v_i = 0.33$; (b) Colisão para $v_i = 0.321$; (c) Colisão para $v_i = 0.32$; e (d) Colisão para $v_i = 0.322$.

5.47, mesmo para um valor de n fixo e para velocidades iniciais bem próximas, os fenômenos decorrentes das colisões se mostram bastante distintos.

6 Conclusão

Este trabalho apresentou um estudo de interação de soluções *kink* e *antikink* e os fenômenos que decorrem deste processo. As estruturas que surgem a partir da colisão são: estrutura fractal, janelas de *n-bounce*, estado de *bion*, em alguns casos a mudança de setor topológico e o decaimento em estados oscilatórios. Todos estes fenômenos dependem diretamente da velocidade inicial das soluções. O estudo também indica que estes fenômenos estão relacionados à presença de modos vibracionais que cada modelo pode apresentar. Realizamos uma revisão dos modelos sine-Gordon, ϕ^4 e ϕ^6 . Como objeto de estudo principal deste trabalho, consideramos dois modelos com interação hiperbólica que variam em suas formas com um parâmetro n . Os modelos são chamados de modelo H^4 e modelo H^6 , pois para $n \rightarrow 2$ e $\phi \rightarrow 0$ estes modelos se aproximam dos modelos ϕ^4 e ϕ^6 . Para o caso de modelos com mais de um setor topológico e quantidade finita de mínimos, o perfil inicial da colisão, se *kink-antikink* ou *antikink-kink*, afetará os resultados da dinâmica das colisões.

O capítulo 2 é constituído do estudo dos campos escalares reais. Neste capítulo é estudado como obter a equação que governa a dinâmica de um sistema composto por um campo escalar real em (1,1) dimensões a partir de uma densidade lagrangeana geral. Esta densidade lagrangeana possui um termo caracterizado como o termo do potencial, que é o responsável por definir distintas teorias. Em outras palavras, uma teoria de campo escalar em (1,1) dimensões pode ser definida pelo termo do potencial presente na densidade lagrangeana. O teorema de Noether nos permite encontrar uma expressão para a energia das soluções estáticas. A partir da expressão para a energia fornecida pelo teorema de Noether, utilizamos o método de Bogomol'nyi para encontrar uma equação diferencial que nos permitirá obter uma solução estática e ter certeza que esta é de mínima energia. As soluções advindas do método de Bogomol'nyi são conhecidas como estados BPS. Já obtendo uma forma de encontrar soluções de mínima energia, realizamos uma caracterização destas a partir de sua carga topológica. Neste trabalho a carga topológica é calculada a partir da corrente topológica conservada. Soluções com carga topológica nula são caracterizadas como soluções do tipo *lump* e soluções com carga topológica não nula são caracterizadas como soluções do tipo *kink*. O processo de análise de estabilidade linear das soluções estáticas busca entender como as soluções se comportam com pequenas perturbações dependentes do tempo. Este estudo leva a uma equação do tipo *Schrödinger*. É a partir desta equação que surgem os modos internos das soluções. Todo modelo possui um modo zero, conhecido como modo translacional e alguns podem apresentar modos adicionais, conhecidos como modos de vibração.

O capítulo 3 apresentou uma revisão do modelo sine-Gordon. O modelo sine-Gordon é um modelo integrável, caracterizado por um potencial com uma função periódica na variável do campo. Dessa forma, o modelo possui infinitos setores topológicos e infinitos mínimos. Suas características, tais como

potencial, soluções, densidade de energia das soluções, potencial de perturbação e modo zero, são apresentadas e o processo de espalhamento das soluções é estudado. As colisões indicam apenas uma mudança de setor topológico, independente da velocidade inicial. A ausência de um fenômeno mais complexo se dá devido à integrabilidade do modelo.

No capítulo 4 realizamos uma revisão dos modelos não integráveis ϕ^4 e ϕ^6 . O modelo ϕ^4 tem sido exaustivamente estudado em relação à dinâmica *kink-antikink*. Este modelo é caracterizado por um potencial com auto interação de quarta ordem na variável do campo, que possui dois $\phi_{min} = \pm 1$. São apresentadas as funções características do modelo: potencial, soluções, densidade de energia das soluções, potencial de perturbação e modo zero. Os resultados do processo de colisão concordam com os da literatura [22, 23], indicando fenômenos de *bion* para colisões com velocidades iniciais suficientemente pequenas, fenômenos de *one-bounce* para colisões com velocidades superiores à uma velocidade crítica e janelas de *n-bounce*, que são fenômenos nos quais as soluções colidem n vezes antes de escapar para o infinito. A estrutura fractal foi obtida e apresentada. Estes fenômenos ocorrem devido à presença de um modo de vibração presente em cada solução. A explicação destes resultados é realizada através do mecanismo de troca de energia ressonante, ou mecanismo CSW, devido a cada solução possuir um modo de translação e um modo de vibração. Os fenômenos ocorrem devido à troca de energia entre estes modos, sendo que para velocidades baixas há tempo para o modo de translação transferir uma energia considerável para o modo de vibração e então as soluções ficam presas uma na outra. Para altas velocidades esse tempo é curto e não há transferência de energia suficiente para que as soluções fiquem presas. Para velocidades intermediárias, os modos trocam energia entre si de forma a permitir ou não n colisões antes do escape para o infinito.

A outra parte do capítulo 4 constitui um estudo do modelo ϕ^6 . O modelo ϕ^6 é caracterizado por um potencial que possui auto interação de sexta ordem na variável do campo, com três mínimos e dois setores topológicos. Os setores topológicos compartilham o mínimo em comum $\phi_{min} = 0$. São apresentados o potencial, solução, densidade de energia da solução, potencial de perturbação e modo zero do modelo. Como o modelo ϕ^6 possui dois setores topológicos, os resultados das colisões irão depender da configuração inicial das soluções: *kink-antikink* ou *antikink-kink*. Diferente do modelo ϕ^4 , as soluções do modelo ϕ^6 não apresentam, isoladamente, modos de vibração. Para a configuração *kink-antikink*, encontramos para velocidades superiores à uma velocidade crítica, que a colisão leva as soluções para o outro setor topológico. Para velocidades suficientemente baixas encontramos o estado de *bion*. O cenário muda quando consideramos colisões *antikink-kink*. Neste caso encontramos janelas de *n-bounce*, estados de *bion* para velocidades suficientemente baixas e fenômenos de *one-bounce* para velocidade superiores à uma velocidade crítica. Devido a ausência de modos vibracionais em cada solução, a princípio, estes resultados se mostraram como um contra exemplo ao mecanismo CSW. No entanto a obtenção de modos de vibração deve ser realizada quando consideramos o potencial de perturbação do par das soluções. Para configurações *kink-antikink* o potencial de perturbação do par, de fato, não apresenta modos vibracionais adicionais, porém quando consideramos o potencial de perturbação do par *antikink-kink* aparecem modos de vibração e o mecanismo de troca de energia pode ser

utilizado para explicar os resultados de espalhamento.

O capítulo 5 apresenta uma família de modelos com interações hiperbólicas e o estudo de colisões em dois destes. A família de teorias surge a partir de uma função geral para o potencial. Esta função varia com alguns parâmetros. O parâmetro a é responsável por determinar o modelo em questão. Neste trabalho adotamos o nome de modelo H^4 para $a = 1$ e o nome de modelo H^6 para $a = 2$. Foram apresentados os potenciais, soluções, densidades de energia, potenciais de perturbação e modos zero para os valores de $a = 1, 2, 3$ e 4 . O parâmetro n , presente na função geratriz, é responsável por mudar a forma das características de cada modelo gerado pelo parâmetro a . O terceiro e último parâmetro na função geratriz é o m , que possui a seguinte restrição: $m = 0, 1, 2, \dots, 2a - 1$. O parâmetro m fornece a informação sobre qual setor topológico as características do modelo estarão associadas e se estas são relacionadas às soluções *kink* ou *antikink*.

As características do modelo H^4 e o resultados das colisões foram apresentadas para variações de n . Para $n = 2$ e $\phi \rightarrow 0$, o modelo H^4 se aproxima do modelo ϕ^4 . Para valores de n mais próximos a 1, os mínimos do potencial do modelo se afastam e conseqüentemente as soluções vão ter seus limites assintóticos mais distantes, maior densidade de energia e energia. Para uma faixa de valores de n as características do modelo passam por mudanças significativas em sua forma. Essa mudanças são mais fáceis de serem identificadas através do potencial de perturbação. A quantidade de modos de vibração da equação com potencial de perturbação também sofre influência de n , onde chegamos a encontrar até onze modos para cada solução. O foco maior de estudo das colisões foram as janelas de *two-bounce* e os pulsos oscilatórios. Para valores de n suficientemente grandes, encontramos janelas de *two-bounce* com uma estrutura semelhante à do modelo ϕ^4 . No entanto, conforme n se aproxima de 1, as janelas passam por um processo de supressão. O estudo de ordem das janelas indica que no primeiro processo de supressão as janelas se tornam falsas janelas e são suprimidas sem um padrão aparente, ou seja, conforme n diminui, uma estrutura ressonante pode ter suprimido sua segunda, terceira ou qualquer janela antes da primeira. Como os resultados das colisões são explicados através do mecanismo de troca de energia, estudamos a quantidade de modos que cada solução possui nas faixas de valores de n em que este fenômeno pode ocorrer. O cenário de colisão com valores de n para os quais há diversos modos vibracionais é favorável ao decaimento das soluções após a colisão em estados oscilatórios. O processo para determinar se estes estados oscilatórios são *oscillons* não foi realizado neste trabalho, ficando como uma perspectiva de trabalho futuro. No cenário onde cada solução possui onze modos vibracionais não aparecem janelas de *two-bounce*. Já era de se esperar o não aparecimento de janelas, pois a presença de diversos modos vibracionais pode dificultar consideravelmente o mecanismo de troca de energia [28]. No entanto, no processo com sete modos de vibração aparece uma janela de *six-bounce* e no processo com onze modos de vibração aparece uma janela de *five-bounce*. É intrigante que mesmo com diversos modos possam aparecer janelas de *n-bounce*. Por fim, a velocidade crítica sofre uma variação significativa em função de n .

O modelo H^6 é obtido a partir da função geratriz dos potenciais através de $a = 2$. Para

$n = 2$ e valores de ϕ próximos a zero, o modelo H^6 se aproxima do modelo ϕ^6 . Dentre as semelhanças dos modelos, podemos destacar a presença de dois setores topológicos e o mínimo $\phi_{min} = 0$ em comum, o que confere a presença de quatro soluções topológicas, sendo dois *kinks* e dois *antikinks*. Conforme n diminui, os outros mínimos do potencial se afastam e estão localizados sempre em $\pm \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Consequentemente os limites assintóticos diferentes de zero das soluções, estão distribuídos em $\phi(x \rightarrow \pm\infty) = \pm \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Por conseguinte a densidade de energia das soluções aumenta para valores de n próximos à 1. O potencial de perturbação de cada solução também é semelhante ao do modelo ϕ^6 e sofre deformações consideráveis numa determinada faixa de valores de n .

Para o processo de colisão *kink-antikink* no modelo H^6 , utilizamos valores de n que levam o potencial de perturbação apresentar nenhum, um e dois modos vibracionais. No cenário onde não há modos vibracionais, existe o estado de *bion* para velocidades baixas e para altas velocidades ocorre *one-bounce* e mudança de setor topológico. No cenário com um modo vibracional para o potencial de perturbação do par, encontramos fenômenos que aqui classificamos como *one-bounce* de segunda forma. Neste fenômeno, ocorre que as soluções visitam o outro setor topológico, oscilam em torno de seu mínimo e então retornam para o setor topológico inicial, escapando para o infinito. Existem janelas de *one-bounce* de segunda forma e cada janela representa colisões que levam a uma determinada quantidade de oscilações no setor topológico secundário, tornando possível caracterizar as janelas de *one-bounce* de segunda forma através de sua ordem. Foram encontradas cinco janelas de *one-bounce* de segunda forma que apresentam as seguintes características: a espessura das janelas diminui e a quantidade de oscilações aumenta conforme a velocidade inicial se aproxima da velocidade crítica. Encontramos uma estrutura peculiar, na qual o par das soluções oscila entre os setores topológicos e escapam no setor topológico secundário. Como perspectiva futura, investigaremos a possibilidade de ocorrência deste fenômeno com escape no setor topológico inicial. Considerando agora o cenário com dois modos vibracionais, destacamos que as soluções também realizam visitas aos setores, porém com algumas diferenças: a quantidade de visitas que o par realiza a cada setor é maior antes do escape; as soluções podem escapar no setor inicial ou no secundário; podem existir oscilações no setor em cada visita ou não; encontramos um cenário de *three-bounce*. Destacamos a criação de pulsos oscilatórios que levam à aniquilação das soluções e podem levar a interações complexas. Encontramos dois padrões relacionados à criação de pulsos oscilatórios. O primeiro padrão é relacionado à quantidade de oscilações entre os setores topológicos antes do decaimento em pulsos oscilatórios: ocorre que para velocidades mais baixas, as soluções realizam mais visitas ao segundo setor topológico do que para velocidades maiores. O outro padrão é que próximo e para velocidades inferiores à velocidade crítica, após as colisões, as soluções são levadas ao setor topológico secundário onde permanecem oscilando por um tempo, retornam para o primeiro setor, oscilando três vezes e então decaem em pulsos oscilatórios. Quanto maior a velocidade, mais tempo as soluções ficam no setor topológico secundário. Para explicar estes fenômenos, podemos considerar que para velocidades mais baixas o modo translacional tem tempo para transferir energia suficiente para o modo vibracional manter as soluções ligadas antes de decair em pulsos oscilatórios. A configuração inicial *kink-antikink* do modelo H^6

com dois modos vibracionais leva ao decaimento em estados oscilatórios e não apresenta estrutura fractal nem janelas de ressonância como o ϕ^4 . Talvez estes fenômenos possuam relação com a frequência dos modos e o fato do modelo H^6 possuir dois setores topológicos. Estas hipóteses serão estudadas em trabalhos futuros.

Em relação às colisões *antikink-kink* do modelo H^6 , os resultados encontrados concordam com o que vem se estabelecendo na literatura: a presença de diversos modos contribui para o aparecimento de pulsos oscilatórios e suprime as janelas de *two-bounce*. De fato, no cenário de colisões *antikink-kink*, utilizamos valores de n nos quais o potencial de perturbação do par apresenta quatro, cinco e oito modos vibracionais. Conforme o valor de n se aproxima de 1, o número de modos passa a aumentar e notamos uma diminuição significativa no número das janelas de *two-bounce* encontradas. Neste processo, destacamos ainda a presença de fenômenos de *two-bounce* de ordens distintas numa mesma janela. No cenário com oito modos de vibração, os fenômenos de *two-bounce* são encontrados somente para três determinadas velocidades iniciais e encontramos uma janela de *three-bounce* com espessura consideravelmente grande ($\Delta v = 0.1102$). Por fim, a configuração *antikink-kink* do modelo H^6 também apresenta a criação de pulsos oscilatórios sem qualquer padrão relacionando a velocidade inicial das soluções com a quantidade de pulsos e se estes emergirão com ou sem um pulso central.

A Equação de movimento

Vamos mostrar o procedimento para a obtenção da equação de movimento em sua forma geral (2.8) através da utilização da densidade lagrangeana (2.1) na equação de Euler-Lagrange (2.6)

A.1 Equação de movimento

Para realizar esse procedimento matemático, vamos inicialmente trocar o índice da densidade lagrangeana por ν e então inseri-la na equação de Euler-Lagrange. Com isso, vamos considerar a seguinte densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - V(\phi). \quad (\text{A.1})$$

Como somente o potencial depende explicitamente de ϕ , ao utilizar (A.1) em (2.6), encontramos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{dV}{d\phi}. \quad (\text{A.2})$$

O outro termo da equação de Euler-Lagrange fornece

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} \left[\partial^\nu \phi \frac{\partial(\partial_\nu \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} + \partial_\nu \phi \frac{\partial(\partial^\nu \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right]. \quad (\text{A.3})$$

Podemos escrever $\partial^\nu \phi = \eta^{\nu\kappa} \partial_\kappa \phi$ e $\frac{\partial(\partial_\nu \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \delta_\nu^\mu$. Então a expressão (A.3) se torna

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} \left[\partial^\nu \phi \delta_\nu^\mu + \partial_\nu \phi \frac{\partial(\eta^{\nu\kappa} \partial_\kappa \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right]. \quad (\text{A.4})$$

Mas, $\partial(\eta^{\nu\kappa} \partial_\kappa \phi) = \eta^{\nu\kappa} \partial(\partial_\kappa \phi)$. Logo, o segundo termo nos colchetes do segundo membro de (A.4) se torna

$$\partial_\nu \phi \frac{\partial(\eta^{\nu\kappa} \partial_\kappa \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial_\nu \phi \frac{\eta^{\nu\kappa} \partial(\partial_\kappa \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial_\nu \phi \eta^{\nu\kappa} \delta_\kappa^\mu. \quad (\text{A.5})$$

Dessa forma, o termo de derivada em relação a $\partial_\mu \phi$ na equação de Euler-Lagrange se torna

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} [\partial^\nu \phi \delta_\nu^\mu + \partial_\nu \phi \eta^{\nu\kappa} \delta_\kappa^\mu]. \quad (\text{A.6})$$

Podemos escrever ainda que $\partial_\nu \phi \eta^{\nu\kappa} \delta_\kappa^\mu = \partial^\kappa \phi \delta_\kappa^\mu$. Assim,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} [\partial^\nu \phi \delta_\nu^\mu + \partial^\kappa \phi \delta_\kappa^\mu], \quad (\text{A.7})$$

levando a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} [\partial^\mu \phi + \partial^\mu \phi] = \partial^\mu \phi. \quad (\text{A.8})$$

Dessa forma, podemos concluir que

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] = \partial_\mu \partial^\mu \phi. \quad (\text{A.9})$$

Então, considerando a equação de Euler-Lagrange e os resultados obtidos em (A.2) e (A.9), encontramos a equação (2.8).

B Métodos numéricos

Para realizarmos o processo de colisão, utilizamos métodos numéricos para evoluir as equações de movimento. Um método pode ser compreendido como uma forma de resolver uma equação. Geralmente estes métodos são utilizados quando as equações que descrevem determinados sistemas são tão complexas a ponto de até mesmo não apresentarem uma solução analítica, como as equações que descrevem a dinâmica de sistemas não integráveis presentes neste trabalho. Para desenvolver nossas simulações, utilizamos o método de diferenças finitas de quarta para evoluir a parte espacial e o método de Runge-Kutta de quarta ordem para desenvolver a parte temporal. As simulações são realizadas no software Matlab. Vamos apresentar os métodos utilizados com base em [117] e [118].

B.1 Diferenças finitas

Os métodos numéricos são descritos por algoritmos que evoluem ponto a ponto. Em geral, quando trabalhos com matemática para a resolução de problemas consideramos sempre variáveis contínuas. No entanto, em métodos numéricos o domínio deve ser discretizado e precisamos realizar a migração de um domínio contínuo para um discreto. Um domínio discreto é apresentado na Figura A.1, que apresenta uma malha de pontos uniformemente espaçados de $x_i - x_{i-1} = h$. Vamos apresentar o método de diferenças finitas tendo em vista a referência [117], através de aproximações discretas para as derivadas de uma função. Para isso, consideramos a função que queremos discretizar e realizamos uma expansão em série de Taylor na mesma. O objetivo é encontrar uma forma discreta para a derivada segunda da função $f(x_i)$.

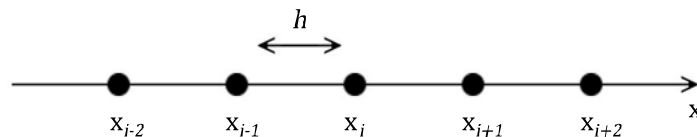


Figura B.1: Malha de pontos uniformemente espaçados.

Vamos considerar a função $f(x_i)$. É possível realizar uma expansão em série de Taylor de duas formas:

$$f(x_i + h) = f(x_i) + h \frac{df}{dx_i} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx_i^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx_i^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{d^4 f}{dx_i^4} \quad (\text{B.1})$$

e

$$f(x_i - h) = f(x_i) - h \frac{df}{dx_i} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx_i^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx_i^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{d^4 f}{dx_i^4}. \quad (\text{B.2})$$

Agora vamos considerar as expressões (B.1) e (B.2) como um sistema de equações, somá-las e obter.

$$f(x_i + h) + f(x_i - h) = 2f(x_i) + h^2 \frac{d^2 f}{dx_i^2} + \frac{h^4}{12} \frac{d^4 f}{dx_i^4}. \quad (\text{B.3})$$

Afim de simplificar a notação que estamos utilizando, vamos considerar f' para primeira derivada de f em relação a x_i , f'' para segunda derivada de f em relação a x_i e assim sucessivamente. Agora vamos isolar a derivada segunda em (B.3), obtendo.

$$f''(x_i) = -\frac{h^2}{12} f''''(x_i) + \frac{1}{h^2} [f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)]. \quad (\text{B.4})$$

Encontramos uma aproximação para a derivada segunda da função $f(x_i)$, porém ainda há um termo de derivada quarta que precisa ser tratado. Para tratar este termo, vamos considerar as expressões (B.1) e (B.2) até segunda ordem, fornecendo

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) \quad (\text{B.5})$$

e

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i). \quad (\text{B.6})$$

Agora podemos somar as expressões (B.5) e (B.6), obtendo

$$f''(x_i) = \frac{1}{h^2} [f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)]. \quad (\text{B.7})$$

Agora vamos considerar o termo de derivada quarta e reescrevê-lo como

$$f''''(x_i) = \frac{d^2}{dx_i^2} f''(x_i). \quad (\text{B.8})$$

Então vamos utilizar a expressão (B.7) na expressão (B.8) e obter

$$\begin{aligned} f''''(x_i) &= \frac{1}{h^2} \frac{d^2}{dx_i^2} [f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)], \\ f''''(x_i) &= \frac{1}{h^2} [f''(x_i + h) - 2f''(x_i) + f''(x_i - h)]. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Novamente vamos utilizar a aproximação (B.7), em cada derivada segunda encontrada em (A.9), o que nos fornece

$$f''(x_i + h) = \frac{1}{h^2}[f(x_i + 2h) - 2f(x_i + h) + f(x_i)], \quad (\text{B.10})$$

$$f''(x_i) = \frac{1}{h^2}[f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)], \quad (\text{B.11})$$

$$f''(x_i - h) = \frac{1}{h^2}[f(x_i) - 2f(x_i - h) + f(x_i - 2h)]. \quad (\text{B.12})$$

Por fim, podemos utilizar (B.10), (B.11) e (B.12) na expressão (B.9) e então utilizá-la em (B.4). Isto nos levará à aproximação em quarta ordem para a derivada segunda de $f(x_i)$:

$$f''(x_i) = -\frac{1}{12h^2}[f(x_i + 2h) - 16f(x_i + h) + 30f(x_i) - 16f(x_i - h) + f(x_i - 2h)]. \quad (\text{B.13})$$

B.2 Runge-Kutta 4ª ordem

O método de Runge-Kutta é apresentado com base na referência [118]. Este método é consideravelmente mais simples, quando comparado de diferenças finitas e amplamente utilizado. O algoritmo deste método corresponde a utilizar uma média ponderada de uma função $f(t, y)$. Não vamos entrar em detalhes sobre o desenvolvimento do algoritmo, apenas apresentá-lo:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}), \quad (\text{B.14})$$

com

$$k_{n1} = f(t_n, y_n), \quad (\text{B.15})$$

$$k_{n2} = f(t_n + h/2, y_n + hk_{n1}/2), \quad (\text{B.16})$$

$$k_{n3} = f(t_n + h/2, y_n + hk_{n2}/2), \quad (\text{B.17})$$

$$k_{n4} = f(t_n + h, y_n + hk_{n3}). \quad (\text{B.18})$$

A fórmula mostra em (B.14) corresponde ao método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

C O método da deformação

O método da deformação [112, 113] consiste em obter novos modelos a partir de um modelo já conhecido, utilizando uma função deformadora. Para desenvolver o método, consideramos um modelo descrito pela densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \tilde{V}(\chi) \quad (\text{C.1})$$

e com soluções BPS obtidas através de

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm \sqrt{2\tilde{V}(\chi)}. \quad (\text{C.2})$$

Agora vamos considerar uma solução já conhecida, $\phi = \phi(x)$, que deve satisfazer

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi)}. \quad (\text{C.3})$$

Então escrevemos $\phi = f(\chi)$, sendo $f(\chi)$ a função deformadora, nos levando a

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{df}{d\chi} \frac{d\chi}{dx} \Rightarrow \frac{d\chi}{dx} = \frac{1}{df/d\chi} \frac{d\phi}{dx}. \quad (\text{C.4})$$

Para simplificar, vamos escrever $df/d\chi = f_\chi$. Elevando ambos os membros de (C.4) ao quadrado, obtemos

$$\left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 = \frac{1}{f_\chi^2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2. \quad (\text{C.5})$$

Substituindo (C.2) e (C.3) em (C.5) obtemos

$$\tilde{V}(\chi) = \frac{1}{f_\chi^2} V[\phi = f(\chi)]. \quad (\text{C.6})$$

A expressão (C.6) fornece uma relação entre um potencial conhecido $V(\phi)$ com um novo potencial $\tilde{V}(\chi)$ quando consideramos $\phi = f(\chi)$.

C.1 Estados BPS

Seja $\phi(x)$ um estado BPS. Como $\phi = f(\chi)$, o estado BPS deformado pode ser obtido através de $\chi = f^{-1}[\phi(x)]$. No entanto, para obtermos equações cujas soluções sejam estados BPS advindas do método da deformação, vamos considerar o potencial conhecido escrito como

$$V(\phi) = \frac{1}{2} W_\phi^2. \quad (\text{C.7})$$

Sabemos que as soluções BPS advêm das equações

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi. \quad (\text{C.8})$$

Então vamos considerar relações semelhantes para o modelo deformado, sendo

$$\tilde{V}(\chi) = \frac{1}{2} \tilde{W}_\chi^2 \quad (\text{C.9})$$

para o potencial deformado e

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm W_\chi \quad (\text{C.10})$$

para as equações das soluções BPS deformadas.

Considerando (C.6) e (C.7), podemos escrever que

$$\tilde{V}(\chi) = \frac{1}{2f_\chi^2} [W_\phi(\phi = f(\chi))]^2. \quad (\text{C.11})$$

Relacionando (C.9) e (C.11), obtemos

$$\tilde{W}_\chi = \frac{1}{f_\chi} W_\phi[\phi = f(\chi)]. \quad (\text{C.12})$$

Por fim, relacionamos (C.10) com (C.12) para obtermos as equações BPS do modelo deformado:

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm \frac{1}{f_\chi} W_\phi[\phi = f(\chi)]. \quad (\text{C.13})$$

C.2 Energia das soluções

Vamos considerar a energia das soluções deormadas como

$$\tilde{E}(\chi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + \tilde{V}(\chi) \right] dx(\chi). \quad (\text{C.14})$$

Considerando as relações (C.9) e (C.10), a expressão (C.14) pode ser escrita como

$$\tilde{E}(\chi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 dx. \quad (\text{C.15})$$

Como $\chi = f^{-1}[\phi(x)]$, obtemos

$$\frac{d\chi}{dx} = \frac{df^{-1}}{d\phi} \frac{d\phi}{dx}. \quad (\text{C.16})$$

Logo, a energia das soluções pode ser escrita como

$$\tilde{E}(\chi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{df^{-1}}{d\phi} \right)^2 \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right] dx, \quad (\text{C.17})$$

sendo a densidade de energia das soluções determinadas por

$$\tilde{\rho}(x) = \left(\frac{df^{-1}}{d\phi} \right)^2 \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2. \quad (\text{C.18})$$

C.3 Estabilidade linear

O procedimento de estabilidade linear é análogo ao apresentado no capítulo 1. De forma que obtemos uma equação do tipo *Schrödinger*:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \tilde{U}(x) \right] \tilde{\psi} = \tilde{\omega}_n \tilde{\psi}, \quad (\text{C.19})$$

que pode ser escrita como uma equação de autovalor:

$$\hat{H} \tilde{\psi} = \tilde{\omega}_n \tilde{\psi}, \quad (\text{C.20})$$

sendo $\tilde{\omega}_n$ o autovalor e $\tilde{\psi}$ a autofunção deformados e \hat{H} o operador hamiltoniano, definido por

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + \tilde{U}(x). \quad (\text{C.21})$$

Neste caso, o potencial de estabilidade é obtido através de

$$\tilde{U}(x) = \frac{d^2 \tilde{V}}{d\chi^2} \Big|_{\chi=\chi(x)}. \quad (\text{C.22})$$

A solução associada ao autovalor nulo pode ser obtida através de

$$\tilde{\psi}_0(x) = A \tilde{W}_\chi. \quad (\text{C.23})$$

Considerando a relação (C.12), podemos escrever que

$$\tilde{\psi}_0(x) = \frac{A}{f_\chi} W_\phi[\phi = f(\chi)], \quad (\text{C.24})$$

sendo A a constante de normalização, determinada através da condição

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}_0|^2 dx = 1. \quad (\text{C.25})$$

Referências

- [1] J. S. Russell. Report on Waves. *14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science* 311, 1844.
- [2] N. A. Lemos. *Mecânica Analítica*. 2. ed. São Paulo. Editora Livraria da Física, 2007.
- [3] D.J. Korteweg e G de Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philos. Mag.* 39 422, 1895.
- [4] N.J. Zabusky e M.D Kruskal. Interaction of solitons in a collision less plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 15, nº6, p. 240, 1965.
- [5] A. M. Wazwaz e G. Q. Xu. Negative-order modified KdV equations: multiple soliton and multiple singular soliton solutions. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 39: 661– 667, 2016. doi: 10.1002/mma.3507.
- [6] M. Hayashi et al. The static elliptic N-soliton solutions of the KdV equation. 2019 *J. Phys. Commun.* 3 045004.
- [7] G. Wei, Ismael Hajar F., Mohammed Sizar A., Baskonus Haci Mehmet e Bulut Hasan. Complex and Real Optical Soliton Properties of the Paraxial Non-linear Schrödinger Equation in Kerr Media With M-Fractional. *Frontiers in Physics*, Vol 7, 2019.
- [8] G. Ferriere. Existence of multi-solitons for the focusing Logarithmic Non-Linear Schrödinger Equation. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*. Vol 38, 2021.
- [9] R. Sassaman e A. Biswas. Topological and non-topological solitons of the generalized Klein–Gordon equations. *Applied Mathematics and Computation*, Volume 215, Issue 1, 2009, Pages 212-220, ISSN 0096-3003, <https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.05.001>.
- [10] R. Côte e C. Munoz. Multi-solitons for nonlinear Klein–Gordon equations. *Forum of Mathematics, Sigma*, 2, E15. doi:10.1017/fms.2014.13 (2014).
- [11] N. Manton e P. Sutcliffe. *Topological Solitons*. Cambridge University Press, Cambridge, England (2004).
- [12] T. Dauxois, M. Peyrard. *Physics of Solitons*. Cambridge University Press, Cambridge (2006).
- [13] T. Vachaspati, *Kink and Domain Walls - An introduction to Classical and Quantum Soliton*. Cambridge University Press, New York, 2006.
- [14] E. Babichev. Gauge k-vortices. *Phys. Rev. D*, 77, 065021 (2008) [arXiv:0711.0376].

- [15] C. Felser. Skyrmions. *Angew. Chem. Int. Ed.*, 52: 1631-1634. <https://doi.org/10.1002/anie.201207056> (2013).
- [16] B. M. A. G. Piette e R.S. Ward. Planar Skyrmions: vibrational modes and dynamics. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Volume 201, Issues 1–2, 2005, Pages 45-55, ISSN 0167-2789, <https://doi.org/10.1016/j.physd.2004.12.001>.
- [17] D. Bazeia, Adalto R. Gomes, K. Z. Nobrega, et al. Kink scattering in a hybrid model. *Physics Letters B*, Volume 793, 2019, Pages 26-32, ISSN 0370-2693, <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.04.013>.
- [18] Steele Prizes, Volume 53, N^o 4, 2006.
- [19] P. G. Kevrekidis e R. H. Goodman. Four Decades of Kink Interactions in Nonlinear Klein-Gordon Models: A Crucial Typo, Recent Developments and the Challenges Ahead. *arXiv 1909.03128*, 2019.
- [20] C. S. Gardner, J. M. Greeme, M. D. Kruskal, et al. KortewegdeVries equation and generalizations. VI. Methods for exact solution. *Comm. Pure Appl. Math*, 27 (1974), 97–133.
- [21] A. E. Kudryavtsev. Solitonlike solutions for a Higgs scalar field. *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz* 22, N^o 3, 178-181. Agosto 5, 1975.
- [22] D. K. Campbell, J. F. Schonfeld. e C. A. Wingate. Resonance structure in kink-antikink interactions in φ^4 theory. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 9(1-2), 1983.
- [23] P. Anninos, S. Oliveira e R. A. Matzner. Fractal structure in the scalar $\lambda(\varphi^2 - 1)^2$ theory. *Phys. Rev. D*, vol. 44, n^o 4, p. 1147, 1991.
- [24] Adalto R. Gomes, R. Menezes, K. Z. Nobrega, et al. Kink-antikink collisions for twin models. *Phys. Rev. D*, 90.065022, 2014.
- [25] Adalto R. Gomes, F. C. Simas, K. Z. Nobrega, et al. False vacuum decay in kink scattering. *J. High Energ. Phys.*, 192, 2018.
- [26] D. Bazeia, Adalto R. Gomes, K. Z. Nobrega, et al. Kink scattering in hyperbolic models. *International Journal of Modern Physics*, Vol. 34, N^o. 31 (2019) 1950200.
- [27] P. Dorey, K. Mersh, T. Romanczukiewicz, et al. Kink-Antikink Collisions in the ϕ^6 Model. *Phys. Rev. Lett.*, 2011.
- [28] F. C. Simas, Adalto R. Gomes, K. Z. Nobrega, et al. Suppression of two-bounce windows in kink-antikink collisions. *J. High Energ. Phys.*, 2016, 104 (2016).
- [29] I. Bogolyubsky e V. Makhankov. On the pulsed soliton lifetime in two classical relativistic theory models *JETP Lett.*, 24 (1976), p. 12.

- [30] E. J. Copeland, M. Gleiser e H. R. Müller Oscillons: resonant configurations during bubble collapse *Phys. Rev. D*, 52 (1995), p. 1920, 10.1103/PhysRevD.52.1920.
- [31] M. Gleiser. Pseudostable bubbles. *Phys. Rev. D*, 49 (1994), p. 2978, 10.1103/PhysRevD.49.2978.
- [32] A. Riotto. Are oscillons present during a first order electroweak phase transition? *Phys. Lett. B*, 365 (1996), pp. 64-71, 10.1016/0370-2693(95)01239-7 *arXiv:hep-ph/9507201*.
- [33] O.M. Umurhan, L. Tao e E.A. Spiegel. Stellar oscillons. *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, 867 (1998), p. 298, 10.1111/j.1749-6632.1998.tb11265.x *arXiv:astro-ph/9806209*.
- [34] M. Gleiser. Oscillons in scalar field theories: applications in higher dimensions and inflation. *Int. J. Mod. Phys. D*, 16 (2007), pp. 219-229, 10.1142/S0218271807009954 *arXiv:hep-th/0602187*.
- [35] N. Graham. An electroweak oscillon. *Phys. Rev. Lett.*, 98 (2007), Article 101801, 10.1103/PhysRevLett.98.101801 *arXiv:hep-th/0610267*.
- [36] G. Fodor, P. Forgacs e M. Mezei. Mass loss and longevity of gravitationally bound oscillating scalar lumps (oscillatons) in D-dimensions. *Phys. Rev. D*, 81 (2010), Article 064029, 10.1103/PhysRevD.81.064029 *arXiv:0912.5351*.
- [37] D. Bazeia, Adalto R. Gomes, K.Z. Nobrega e Fabiano C. Simas. Oscillons in hyperbolic models. *Physics Letters B*, Volume 803, 2020.
- [38] T. Romanczukiewicz, e Y. Shnir. Oscillon Resonances and Creation of Kinks in Particle Collisions. *Phys. Rev. Lett*, 105.081601. 2010.
- [39] J. T. Giblin, L. Hui, E. A. Lim e I.S. Yang. How to run through walls: Dynamics of bubble and soliton collisions. *Phys. Rev. D*, 82, 045019 (2010).
- [40] R. D. Yamaletdinov, V. A. Slipko e Y. V. Pershin. Kinks and antikinks of buckled graphene: a testing ground for the field model. *Phys. Rev. B*, 96, 094306 (2017).
- [41] W. P. Su, J.R. Schrieffer, A. J. Heeger. Solitons in polyacetylene. *Phys. Rev. Lett.*, 42 (1979), pp. 1698-1701.
- [42] V. A. Gani, A. E. Kudryavtsev e M. A. Lizunova. Kink interactions in the (1+1)-dimensional φ^6 model. *Phys. Rev. D*, 89, 125009 2014.
- [43] A. Demirkaya, R. Decker, P.G. Kevrekidis, et al. Kink dynamics in a parametric φ^6 system: a model with controllably many internal modes, *J. High Energy Phys*, 12 (2017) 071.
- [44] H. Weigel. Kink-antikink scattering in φ^4 and φ^6 models. *J. Phys. Conf. Ser.*, 482 012045 2014.

- [45] V. A. Gani, V. Lensky e M. A. Lizunova. Kink excitation spectra in the $(1 + 1)$ -dimensional φ^8 model. *JHEP*, 08, 147 (2015).
- [46] N. S. Manton. Forces between kinks and antikinks with long-range tails. *J. Phys. A*, 52, 065401 (2019).
- [47] E. Belendryasova e V.A. Gani. Scattering of the φ^8 kinks with power-law asymptotics. *Commun. Nonlinear Sci., Numer. Simul.* 67, 414 (2019).
- [48] M. Peyrard e D. K. Campbell. Kink-antikink interactions in a modified sine-Gordon model. *Phys. D*, 9, 33–51 (1983).
- [49] V. A. Gani e A. E. Kudryavtsev. Kink-antikink interactions in the double sine-Gordon equation and the problem of resonance frequencies. *Phys. Rev. E*, 60, 3305 (1999).
- [50] V. A. Gani, A. M. Marjaneh, A. Askari, et al. Scattering of the double sine-Gordon kinks. *Eur. Phys. J. C*, 78, 345 (2018).
- [51] F. C. Simas, F. C. Lima, K. Z. Nobrega, et al. Solitary oscillations and multiple antikink-kink pairs in the double sine-Gordon model. *J. High Energ. Phys.*, 2020, 143 (2020).
- [52] A. Halavanau, T. Romanczukiewicz e Y. Shnir. Resonance structures in coupled two-component φ^4 model. *Phys. Rev. D*, 86, 085027 (2012).
- [53] A. Alonso-Izquierdo. Reflection, transmutation, annihilation and resonance in two-component kink collisions. *Phys. Rev. D*, 97(4), 045016 (2018).
- [54] A. Alonso-Izquierdo. Kink dynamics in a system of two coupled scalar fields in two space-time dimensions. *Physica*, 365, 12–26 (2018).
- [55] A. Alonso-Izquierdo. Asymmetric kink scattering in a two-component scalar field theory model. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 75, 200–219 (2019).
- [56] A. Alonso-Izquierdo. Kink dynamics in the MSTB model. *Phys. Scr.*, 94(8), 085302 (2019).
- [57] Alonso-Izquierdo. Non-topological kink scattering in a two-component scalar field theory model. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 85, 105251 (2020).
- [58] D. Bazeia, E. Belendryasova e V. A. Gani. Scattering of kinks of the sinh-deformed φ^4 model. *Eur. Phys. J. C*, 78, 340 (2018)
- [59] H. Yan, Y. Zhong, Y. X. Liu, et al. Kink-antikink collision in a Lorentz-violating ϕ^4 model. *Physics Letters B*, Vol 807. 2020.
- [60] P. Dorey, A. Halavanau, J. Mercer, et al. Boundary scattering in the φ^4 model. *J. High Energy Phys.*, 1705, 107 (2017).

- [61] R. Arthur, P. Dorey e R. Parini. Breaking integrability at the boundary: the sine-Gordon model with robin boundary conditions. *J. Phys. A Math. Theor.*, 49, 165205 (2016).
- [62] F. C. Lima, F. C. Simas, K. Z. Nobrega, et al. Boundary scattering in the φ^6 model. *J. High Energy Phys.*, 10, 147 (2019).
- [63] R. H. Goodman e R. Haberman. Interaction of sine-Gordon kinks with defects: the two-bounce resonance. *Phys. D*, 195(3), 303 (2004).
- [64] Z. Fei, Y.S. Kivshar e L. Vazquez. Resonant kink-impurity interactions in the sine-Gordon model. *Phys. Rev. A*, 45, 6019–6030 (1992).
- [65] M. I. W. Roy, H. Goodman e P. J. Holmes. Interaction of sine-Gordon kinks with defects: phase space transport in a two-mode model. *Phys. D*, 161, 21 (2002).
- [66] J. G. F. Campos e A. Mohammadi. Fermion transfer in the φ^4 model with a half-BPS preserving impurity. *Phys. Rev. D*, 102, 045003 (2020).
- [67] C. Adam, K. Oles, T. Romanczukiewicz, et al. Spectral walls in soliton collisions. *Phys. Rev. Lett.*, 122(24), 241601 (2019).
- [68] A. M. Marjaneh, V. A. Gani, D. Saadatmand, et al. Multi-kink collisions in the φ^6 model. *J. High Energy Phys.*, 2017(7), 28 (2017).
- [69] A. M. Marjaneh, D. Saadatmand, K. Zhou, et al. High energy density in the collision of n kinks in the φ^4 model. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 49, 30–38 (2017).
- [70] A. M. Marjaneh, A. Askari, D. Saadatmand, et al. Extreme values of elastic strain and energy in sine-Gordon multi-kink collisions. *Eur. Phys. J. B*, 91(1), 22 (2018).
- [71] V. A. Gani, A. M. Marjaneh e D. Saadatmand. Multi-kink scattering in the double sine-Gordon model. *Eur. Phys. J. C*, 79(7), 620 (2019).
- [72] F. C. Simas, A. R. Gomes e K.Z. Nobrega. Degenerate vacua to vacuumless model and kink-antikink collisions. *Phys. Lett. B*, 775, 290–296 (2017).
- [73] T. S. Mendonça e H. P. de Oliveira. The collision of two-kinks defects. *J. High Energy Phys.*, 09, 120 (2015).
- [74] T. S. Mendonça e H. P. de Oliveira. A note about a new class of two kinks. *J. High Energy Phys.*, 06, 133 (2015).
- [75] A. K. Gon e M. Kulkarni. Duality in a hyperbolic interaction model integrable even in a strong confinement: multi-soliton solutions and field theory. *J. Phys. A, Math. Theor.*, 52 (2019), Article 415201.

- [76] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. Gubser, et al. Modeling the fifth dimension with scalars and gravity. *Phys. Rev. D*, 62, 046008 (2000).
- [77] D. Bazeia, L. Losano e R. Menezes. First-order framework and generalized global defect solutions. *Phys. Lett. B*, 668, 246 (2008).
- [78] B. Pourhassan e J. Naji. Tachyonic matter cosmology with exponential and hyperbolic potentials. *Int. J. Mod. Phys. D*, 26 (2016), Article 1750012.
- [79] Q. Wen. Strategy to construct exact solutions in Einstein-scalar gravities. *Phys. Rev. D*, 92 (2015), Article 104002.
- [80] A. Agarwal, R. Myrzakulov, M. Sami, et al. Quintessential inflation in a thawing realization. *Phys. Lett. B*, 770 (2017), p. 200.
- [81] V. Rubakov. *Classical theory of gauge field*. Princeton University Press, 2009.
- [82] M. Maggiore. *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxford University Press, New York, 2005.
- [83] E. B. Bogomolny. The stability of classical solutions. *Yad. Fiz.* 24, 1976.
- [84] M. K. Prasad e C. M. Sommerfield, Exact classical solution for the 't Hooft monopole and the Julia-Zee dyon. *Phys. Rev. Lett.*, 35, 1975.
- [85] R. Rajaraman. *Solitons and Instantons*. North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [86] D. Bazeia. *Defect Structures in Field Theory*. Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba.
- [87] J. Rubinstein. Sine-Gordon equation. *Journal of Mathematical Physics*, 11(1), 1970.
- [88] D. Bazeia, Elisama E. M. Lima e L. Losano. Kinks and branes in models with hyperbolic interactions. *Int. J. Mod. Phys. A*, 32 (2017) 1750163. arXiv:1705.02839.
- [89] A. Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D*, 23, 347-356 (1981).
- [90] A. Linde. A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems. *Phys. Lett. B*, 108, 389-393 (1982).
- [91] A. Albrecht, e P. Steinhardt. Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking. *Phys. Rev. Lett. B*, 48, 1220-1223 (1982).
- [92] R. Caldwell, R. Dave e P. Steinhardt. Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation-of-State. *Phys. Rev. Lett.*, 80, 1582-1585 (1998).

- [93] S. Carroll. Quintessence and the Rest of the World. *Phys. Rev. Lett.*, 81, 3067-3070 (1998).
- [94] P. Peebles e B. Ratra. The cosmological constant and dark energy. *Rev. Mod. Phys.*, 75, 559-666 (2003).
- [95] T. Padmanabham. Cosmological Constant - the Weight of the Vacuum. *Phys. Rep.*, 380, 235-320 (2003).
- [96] A. Abrikosov. On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group. *Sov. Phys. JETP* 5, 1174-1182 (1957).
- [97] W. Zurek. Cosmological Experiments in Condensed Matter Systems. *Phys. Rep.*, 276, 177-221 (1996).
- [98] M. M. Ferreira Júnior. *Teorema de Noether, simetrias e quantidades conservadas*. Notas de aula. Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão.
- [99] H. J. de Vega e F. A. Schaposnik. Classical vortex solution of the Abelian Higgs model. *Phys. Rev. D* 14, 1100 (1976).
- [100] A. N. Atmaja e H. S. Ramadhan. Bogomol'nyi equations of classical solutions. *Phys. Rev. D* 90, 105009 (2014).
- [101] A. N. Atmaja, H. S. Ramadhan e E. da Hora. More on Bogomol'nyi equations of three-dimensional generalized Maxwell-Higgs model using on-shell method. *J. High Energy Phys.* 1602, 117 (2016).
- [102] D. Bazeia. Topological solitons in a vacuumless system. *Physical Review D.*, Vol 60, 067705. 1999.
- [103] D. J. Griffiths. *Introduction to quantum mechanics*. Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [104] J. J. Sakural e J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 2011.
- [105] R. Jackiw. Quantum meaning of classical field theory. *Rev. Mod. Phys.*, 49, 1977.
- [106] P. Dorey, T. Romańczukiewicz e Y. Shnir. Staccato radiation from the decay of large amplitude oscillons. *Physics Letters B*, Vol 806, 2020, 135497, ISSN 0370-2693.
- [107] P. Morse e H. Feshbach. *Methods of Mathematical Physics*. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [108] S. Flügge. *Practical Quantum Mechanics*. Spring. 2nd print. 1994.
- [109] T. Sugiyama. Kink-antikink collisions in the two-dimensional ϕ^4 model. *Progress of Theoretical Physics*, 51(5), 1979.
- [110] T. I. Belova e A. E. Kudryavtsev. Solitons and their interactions in classical field theory. *Phys. Usp.*, 40, 1997.
- [111] M. A. Lohe. Soliton structures in $P(\varphi_2)$. *Phys. Rev. D*, 20, 1979.
- [112] D. Bazeia, L. Losano e J. M. C. Malbouisson. Deformed defects. *Phys. Rev. D*, 66, 101701 (2002).

-
- [113] C. A. Almeida, D. Bazeia, L. Losano, et al. New results for deformed defects. *Phys. Rev. D*, 69, 067702 (2004).
- [114] D. Bazeia e L. Losano. Deformed defects with applications to braneworlds. *Phys. Rev. D*, 73, 025016 (2006).
- [115] D. Bazeia, M. A. Gonzalez Leon, L. Losano, et al. Deformed defects for scalar fields with polynomial interactions. *Phys. Rev. D*, 73, 105008 (2006).
- [116] D. Bazeia, L. Losano e Gonzalo J. Olmo. Novel connection between lump-like structures and quantum mechanics. *Eur. Phys. J. Plus*, 133 (2018) 251. *arXiv:1806.00346*.
- [117] A. O. Fortuna. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações*. Edusp, São Paulo, 2000.
- [118] W. E. Boyce e R. C. Di Prima. *Equações Diferenciais e Problemas de Valores de Contorno*. Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, 1994.