

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

PEDRO DIEGO DA SILVA E SILVA

**Mecanismo de Aceleração de Fermi Modificado por  
Termos de Violação da Simetria de Lorentz**

SÃO LUIS  
2017

PEDRO DIEGO DA SILVA E SILVA

# Mecanismo de Aceleração de Fermi Modificado por Termos de Violação da Simetria de Lorentz

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como pré-requisito para obtenção do título de Mestre.

**Área de concentração:** Física de Partículas Elementares e Campos.

**Linha de Pesquisa:** Teoria de Campos com violação da simetria de Lorentz em cenários astrofísicos.

**Orientador:** Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Junior

SÃO LUIS

2 0 1 7

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

da Silva e Silva, Pedro Diego.

Mecanismo de Aceleração de Fermi Modificado por Termos de Violação da Simetria de Lorentz / Pedro Diego da Silva e Silva. - 2017.

113 f.

Orientador(a): Manoel Messias Ferreira Jr.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Física/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luis, 2017.

1. Mecanismo de Aceleração de Fermi. 2. Raios Cósmicos. 3. Relações de Dispersão. 4. Violação da Simetria de Lorentz. I. Ferreira Jr, Manoel Messias. II. Título.

# Mecanismo de Aceleração de Fermi Modificado por Termos de Violação da Simetria de Lorentz

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como pré-requisito para obtenção do título de Mestre.

**Área de concentração:** Física de Partículas Elementares e Campos.

**Linha de Pesquisa:** Teoria de Campos com violação da simetria de Lorentz em cenários astrofísicos.

Aprovada em

## Banca Examinadora

---

**Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Jr.** (Orientador)  
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

---

**Prof. Dr. Edilberto Oliveira Silva**  
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

---

**Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes**  
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

---

**Prof. Dr. Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio**  
Universidade Federal do ABC

SÃO LUIS  
2 0 1 7

*À minha família*

# Agradecimentos

A mais longa jornada é feita passo a passo. Os passos dados até aqui se devem a muitas pessoas; agradeço imensamente a todas elas. Especialmente, agradeço aos meus pais, pois, sem eles, jamais teria o apoio e carinho fundamentais na vida. Aos meus irmãos Luis Henrique e Rayanne, por mostram preocupação e carinho comigo. Aos meus queridos filhos Galileu, Nitty e Mel, por demonstrarem afeto e devoção incondicionais. Ao meu amigo Jonas, pelos ótimos conselhos, dicas, esclarecimentos, companhia calorosa, conversas agradáveis, e pelo incentivo na carreira acadêmica. Ao meu orientador, Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Jr, por sua excelente orientação, discussões, preocupação quanto ao desenvolvimento de bons trabalhos e minha formação, e pela sua inestimável contribuição nesse trabalho. Aos professores Casana, Edilberto e Marcos Sampaio, por terem composto a banca de avaliação deste trabalho e por suas excelentes sugestões de correções e melhorias. Aos professores da Pós-Graduação em Física, por seus esforços constantes no desenvolvimento da Física na UFMA e pelas excelentes disciplinas ministradas. À coordenação da Pós-Graduação em Física, pois sempre busca melhorar os programas de Mestrado e Doutorado. Também agradeço à Angra e Lucy, pois sempre me ajudam com quaisquer dúvidas a respeito da pós. E aos amigos do GFTPC: Victor Mouchrek, Alex Lucena, Letícia, João Alfieres, Marcos e tantos outros. À Capes pelo apoio financeiro. Agradeço imensamente a todos que já cruzaram comigo por essa jornada.

*The only thing we're allowed to do... is to believe that we won't regret the choice we made.*

Levi

# RESUMO

O Modelo Padrão Estendido (MPE) é uma extensão do Modelo Padrão (MP) que inclui termos que violam as simetrias de Lorentz e CPT em todos os seus setores. Motivado pela possibilidade de novos efeitos surgirem em sistemas físicos conhecidos na literatura, o presente trabalho investiga os possíveis efeitos que esses termos de violação podem gerar no mecanismo de aceleração de raios cósmicos de Fermi, uma vez que entender efetivamente os mecanismos de aceleração de raios cósmicos constitui objeto de muitas pesquisas na Astrofísica. Para desenvolver essa temática, realiza-se inicialmente um estudo sobre as principais características dos raios cósmicos, como detecção, análise do espectro de energia, critério de Hillas, origem galáctica e extragaláctica, a propagação dessas partículas e suas interações com a radiação cósmica de fundo (limite GZK). Na sequência, discute-se sobre os mecanismos de aceleração de raios cósmicos, abordando os cenários top-down e bottom-up. É mostrado como o critério de Hillas estabelece limitações sobre os possíveis sítios astrofísicos onde partículas podem ser aceleradas e adquirir energia. Depois disso, explana-se a ideia geral de aceleração de raios cósmicos por campos eletromagnéticos, analisando ainda dois casos deste tipo de mecanismo de aceleração: sunspots e pulsars. A seguir, deriva-se o famoso resultado do mecanismo de Fermi e como ele foi melhorado implementando-se um cenário de frentes de choque, que geralmente ocorrem em remanescentes de supernovas. Nos últimos capítulos, discute-se sobre a possibilidade de violação da simetria de Lorentz descrita no MPE e então se investiga como o termo de violação  $\bar{\psi}c^{\mu\nu}\gamma_\nu\partial_\mu\psi$  deforma as relações de dispersão no setor fermiônico, e os possíveis efeitos que esse termo pode gerar no mecanismo de aceleração de Fermi.

**Palavras-Chave:** Raios Cósmicos. Mecanismo de Aceleração de Fermi. Relações de Dispersão. Violação da Simetria de Lorentz.



# Abstract

The Standard Model Extension (SME) is an extension of Standard Model (SM) which includes Lorentz and CPT symmetries violating terms in all of its sectors. Motivated by possibility of new effects on known physical systems in literature, this work performs an investigation about possible effects produced by these violation terms in Fermi acceleration mechanism of cosmic rays since understanding the acceleration mechanisms of cosmic rays constitutes an object of many researches in Astrophysics. In order to develop this theme, firstly it is studied the main features about cosmic rays, such as detection, energy spectrum analysis, Hillas criterion, galactic and extragalactic origin of cosmic rays, propagation and interactions with cosmic microwave background radiation (GKZ limit). Afterwards, it is discussed about cosmic rays acceleration mechanisms, approaching the top-down and bottom-up scenarios. It is shown how Hillas criterion establishes limitations on possible astrophysical sites where particles can be accelerated and obtain energy. Hereafter it is explained the basic idea of cosmic rays acceleration due to electromagnetic fields and this section gives two examples of this acceleration mechanism (sunspots and pulsars). Afterward it is derived the famous result of Fermi mechanism and how it was improved by implementing a different scenario constituted by shock fronts. In the last chapters, it is discussed about Lorentz symmetry violation in SME and then this work investigates how the term  $\bar{\psi}c^{\mu\nu}\gamma_\nu\partial_\mu\psi$  deforms the dispersion relations in fermion sector and the possible effects this term can yield in Fermi acceleration mechanism.

**Key-words:** Comic Rays. Fermi Acceleration Mechanism. Dispersion Relations. Lorentz Symmetry Violation.

# Sumário

<b>RESUMO</b>	8
Abstract . . . . .	9
<b>1 Introdução</b>	12
<b>2 Raios Cósmicos</b>	16
2.1 Descoberta dos Raios Cósmicos . . . . .	16
2.2 Breves comentários acerca da detecção de raios cósmicos . . . . .	19
2.3 Espectro de Energia . . . . .	20
2.3.1 Energia máxima de uma partícula numa região com campo magnético . . . . .	21
2.4 O Limite GZK . . . . .	23
2.4.1 Eventos acima de $10^{20}$ eV . . . . .	29
<b>3 Mecanismos de aceleração de raios cósmicos</b>	30
3.1 Critério de Hillas, Cenários Top-down e Bottom-up . . . . .	31
3.2 Conceito geral de aceleração por campos eletromagnéticos . . . . .	34
3.3 Sunspots . . . . .	35
3.4 Pulsars . . . . .	38
3.5 Mecanismo de aceleração de Fermi . . . . .	39
3.5.1 Espectro previsto . . . . .	43
3.6 Mecanismo de aceleração em frentes de choque . . . . .	47
<b>4 Teoria de violação de Lorentz e astropartículas</b>	54
4.1 Simetria de Lorentz . . . . .	54
4.2 Modelo Padrão Estendido . . . . .	56
4.2.1 O Setor de Férmions do Modelo Padrão Estendido . . . . .	57
4.2.2 Relação de dispersão modificada pelo termo $c^{\mu\nu}$ . . . . .	58
4.3 Possíveis efeitos da violação de Lorentz em raios cósmicos . . . . .	62

<b>5 Mecanismo de aceleração de Fermi modificado por anisotropia</b>	<b>69</b>
5.1 Efeito do termo $c^{0i}$ no mecanismo de Fermi	69
5.1.1 Espectro modificado	72
5.2 Efeito do termo $c^{ij}$ no mecanismo de Fermi	74
5.2.1 Espectro modificado	76
<b>Considerações Finais</b>	<b>78</b>
<b>Apêndices</b>	<b>79</b>
<b>A Threshold Energy e Efeito Compton Inverso</b>	<b>80</b>
A.1 Threshold Energy	80
A.2 Efeito Compton Inverso	82
<b>B Livre caminho médio</b>	<b>87</b>
<b>C Sobre espelhos magnéticos</b>	<b>89</b>
<b>D Probabilidade de colisão</b>	<b>99</b>
<b>E Análise detalhada do mecanismo de Fermi</b>	<b>103</b>
<b>F Equação de Difusão</b>	<b>107</b>
Referências	110

# Capítulo 1

## Introdução

Por volta de 1912, Victor Hess<sup>1</sup> realizou experimentos [1, 2] com balões a altitudes acima de 5 km e descobriu que havia uma fonte de radiação (ionizando a atmosfera) que se tornava mais intensa à medida que a altitude aumentava. Após suas análises, concluiu que essa radiação provinha do espaço. Posteriormente, recebeu a denominação de *raios cósmicos*.

Os raios cósmicos são constituídos predominantemente [2, 4] por prótons com energias relativísticas que viajam através do meio interestelar e, eventualmente, atingem a atmosfera da Terra em todas as direções. Ao longo do século passado, muitas partículas foram descobertas através do estudo das colisões entre esses raios e núcleos atômicos dos gases atmosféricos. Por exemplo, em 1947, César Lattes (1924-2005), juntamente com sua equipe<sup>2</sup> descobriram o méson  $\pi$ .

Isso ocorreu basicamente devido à descoberta [1, 2, 4, 5] dos *chuveiros atmosféricos extensos* por Pierre V. Auger (1899-1993) em 1938. Ele descobriu que as partículas secundárias eram originadas após a colisão das partículas primárias (raios cósmicos) com energias em torno de  $10^{15}$  eV com a atmosfera da Terra. Isso possibilitou posteriormente a construção de detectores na superfície e no céu (em satélites), para a sondagem dos raios primários. Atualmente, existem grandes colaborações [1, 2, 4, 5], como Observatório Pierre Auger (Argentina), HiRes – *High Resolution Fly’s Eye* (USA)– e o AGASA (*Akenko Giant Air Shower Array*, no Japão) que fazem essas medições e se observa que o espectro de raios cósmicos detectado obedece a uma lei de potência do tipo  $N(E) \propto E^{-x}$ , onde  $N$  representa o fluxo de partículas observado. O expoente  $x$  sofre pequenas variações em alguns intervalos de energia: por volta de  $10^{15}$  eV, região chamada de *knee*, o expoente muda de 2,7 para 3,1

<sup>1</sup>Laureado com o Prêmio Nobel em 1936 por descobrir os raios cósmicos.

<sup>2</sup>A equipe de Lattes era chefiada por Cecil F. Powell (1903-1969), que, em 1950, recebeu o Prêmio Nobel por seu desenvolvimento do método fotográfico de estudo de processos nucleares e suas descobertas de mésons detectados com esse método embora Lattes tenha contribuído significativamente para o desenvolvimento do referido método e para a descoberta do méson.

[1, 20, 35]; em torno de  $10^{19}$  eV, na região chamada de *ankle*, o expoente muda novamente para 2,7 [18]. Por volta de  $10^{20}$  eV, observa-se um número pequeno de eventos, o que parece contradizer o corte [6, 7] no espectro devido ao efeito GZK<sup>3</sup>, que é uma previsão teórica para a diminuição drástica no fluxo de raios cósmicos acima do valor correspondente. Essas mudanças tem sido pesquisadas e se acredita que ocorrem devido a mudança no mecanismo pelo qual os raios cósmicos ganham energia ou nas fontes de origem dos raios cósmicos, que podem ser galácticas ou extragalácticas.

Muitas outras partículas foram descobertas através de raios cósmicos durante a primeira metade do século passado, como os kaóns (mésons) descobertos em 1947. Até que no início dos anos 1950, [3, 4] a construção dos primeiros aceleradores de partículas (capazes de originar novas partículas), como o Cosmotron, fundado em 1953 no *Brookhaven National Laboratory* em New York (USA) e o SLAC<sup>4</sup> (*Stanford Linear Accelerator Center*), fundado em 1962 na Califórnia (USA) permitiu, então, a realização de experimentos em laboratórios com energias suficientes para a criação de novas partículas.

Dessa forma, o interesse maior em raios cósmicos passou a ser basicamente estudos para se determinar os mecanismos que fornecem altas energias a essas partículas<sup>5</sup>, os cenários astrofísicos em que tais mecanismos podem ocorrer e suas fontes de origem. Um importante trabalho na investigação de raios cósmicos foi derivado por Enrico Fermi [10] em 1949, no qual ele mostra que partículas de altas energias podem adquirir energia através de colisões com nuvens interestelares.

Embora essa ideia original tenha possibilitado a aceleração de raios cósmicos em novos ambientes astrofísicos e tenha servido como base para o mecanismo de aceleração em frentes de choque [4], o motivo pelo qual algumas dessas partículas conseguem atingir<sup>6</sup> energias da ordem de  $10^{20}$  eV ainda continua um motivo de mistério.

Com esse cenário naturalmente existente no universo, os raios cósmicos possibilitaram grandes descobertas e aprimoramentos na compreensão da estrutura da matéria. Assim, as pesquisas em raios cósmicos e outras áreas da Física de vários físicos desde o final do século XIX (e o início do século XX)<sup>7</sup> resultaram numa notável visão sobre a estrutura fundamental

---

<sup>3</sup> Nesse processo, um próton ultra-energético colide com um fóton da radiação cósmica de fundo, gerando um próton e um pión neutro. Através da Teoria da Relatividade Restrita, pode-se determinar a energia do próton incidente.

<sup>4</sup> Algumas pesquisas feitas no SLAC renderam alguns prêmios Nobel, como as descobertas do quark *charm* e do lépton *tau*.

<sup>5</sup> Um mecanismo famoso é o Mecanismo de Fermi de aceleração de raios cósmicos.

<sup>6</sup> O espectro de raios cósmicos obtido através das medidas observacionais de várias colaborações, como o Observatório Pierre Auger, o Fly's Eye, etc., detectaram alguns eventos com energias acima de  $10^{20}$  eV.

<sup>7</sup> Podem-se citar alguns desses trabalhos [1, 3]: a descoberta da radioatividade (H. Becquerel, 1896), o elétron (J. J. Thomson, 1897), raios cósmicos (V. Hess, 1912), o próton (E. Rutherford, 1903-1911) e o "famoso" espalhamento de Rutherford (que estabeleceu a base para a sondagem da estrutura da matéria), a Teoria da Relatividade Restrita (A. Einstein, 1905), a medição da carga elétrica elementar (R. A. Milikan,

da matéria: tudo no universo é formado por blocos fundamentais conhecidos como partículas elementares, regidos por 4 interações fundamentais.

Por volta dos anos 1970 [3], havia uma quantidade variada de partículas descobertas. Foi então que, aos poucos, construiu-se um arcabouço teórico capaz de descrever todas essas partículas e suas interações. A Mecânica Quântica e a Teoria da Relatividade Restrita tornaram-se as bases para a atual Física de Partículas e para as modernas teorias que viriam posteriormente. Algumas delas são a Eletrodinâmica Quântica, a Cromodinâmica Quântica e a Teoria Eletrofraca que, juntas, formam o bem estabelecido Modelo Padrão das Partículas Elementares.

O Modelo Padrão é a maior construção teórica da Física atualmente, representando uma teoria muito bem sucedida, que teve muitas das suas previsões confirmadas por vários testes experimentais de precisão. A mais recente foi a observação do Bóson de Higgs<sup>8</sup> em 2012 pelo CERN (Suíça).

Segundo o Modelo Padrão (MP), a grande quantidade de partículas elementares detectadas até hoje, em aceleradores de partículas ou em raios cósmicos, pode ser agrupada em léptons, quarks e as partículas mediadoras das interações (bósons). O MP reúne 3 das 4 interações fundamentais<sup>9</sup> (a gravidade ainda não foi incorporada ao escopo do MP), explicando como as partículas interagem na natureza. A inclusão da gravidade no Modelo Padrão tem se apresentado como uma atividade complexa (e desafiadora): as teorias quânticas descrevem o mundo subatômico (microscópico) e a teoria da relatividade geral, o macro-mundo (planetas, estrelas, buracos negros, etc.); assim, "colocá-las" em pé de igualdade para a descrição de um mesmo cenário físico ainda não foi possível.

Assim, muitos trabalhos em física teórica visam a busca por uma gravitação quântica, que possa ser incorporada ao Modelo Padrão. Tais teorias devem ser capazes de descrever a física na escala de energia de Planck ( $\simeq 10^{19}$  GeV =  $10^{28}$  eV), que define a era de Planck onde se acredita que as 4 interações fundamentais eram unidas. Um forte candidato é a teoria de cordas, na qual as partículas são interpretadas como os modos de vibração das cordas (elementos fundamentais dessa teoria). Apesar das teorias de cordas possuírem como fundamento a covariância de Lorentz (ou simetria de Lorentz), assim como o MP, existe a possibilidade da quebra espontânea da simetria de Lorentz nessas teorias. O trabalho pioneiro sobre essa possibilidade foi realizado [8, 29, 30] por Colladay e A. Kostelecký.

Foi a partir dessa pesquisa que surgiu o Modelo Padrão Estendido (MPE), que é uma

---

1923), a existência de buracos negros – por D. Schwarzschild (1916) através da Teoria da Relatividade Geral (A. Einstein, 1915) –, a descoberta do pósitron (prevista por Dirac em 1926 e observada por C. D. Anderson em 1932), a descoberta de píons através de raios cósmicos (C. Lattes, 1947), e muitos outros relevantes trabalhos.

<sup>8</sup>O bóson de Higgs foi previsto teoricamente em 1964 pelo físico britânico Peter Higgs (1929- ).

<sup>9</sup>As interações fundamentais são: interações forte, fraca, eletromagnética e gravitacional.

generalização do Modelo Padrão que inclui termos de violação da simetria de Lorentz<sup>10</sup> nas suas bases teóricas.

O Modelo Padrão Estendido (MPE) é uma teoria efetiva que incorpora ao Lagrangeano do Modelo Padrão e da Relatividade Geral todos os possíveis termos escalares que se podem construir com os campos do MP e da gravitação contraídos com coeficientes de índices tensoriais apropriados e que, ao final, resultam ser os parâmetros fenomenológicos que controlam e caracterizam a possível violação da simetria de Lorentz.

Uma proposta para a violação da simetria de Lorentz tem como base [9] a anisotropia do espaço-tempo. Essa quebra ocorre pela anisotropia do espaço-tempo causada pela presença dos campos de fundo. Dessa forma, os coeficientes tensoriais do modelo são interpretados como campos de fundo (*background fields*), isto é, campos externos que permeiam todo o sistema (o Universo), definindo direções privilegiadas no espaço-tempo. É importante ressaltar ainda que os termos adicionados preservam a invariância de Lorentz (as leis da Física) quando são realizadas transformações de Lorentz de observador (transformações passivas – rotaciona-se o referencial). Entretanto, a violação de tal simetria ocorre quando se efetuam transformações de partícula (transformações ativas – mantém-se o referencial fixo e as variáveis dinâmicas, como campos, posição, etc. são alteradas). Dessa forma, a partir de modelos com violação da simetria de Lorentz, obtêm-se resultados novos ou modificações em resultados já estabelecidos (quando não há violação) devido à presença desses campos de fundo, como equações de campo e relações de dispersão modificadas.

Com base nas modificações que os termos da violação da invariância de Lorentz podem originar em resultados importantes, como nas relações de dispersão, o presente trabalho investigará os efeitos que tais termos podem gerar no mecanismo de aceleração de Fermi. Sabendo disso, tomar-se-ão os seguintes passos: o Capítulo 2 abordará os principais resultados acerca de raios cósmicos. O Capítulo 3 explanará sobre os mecanismos de aceleração de raios cósmicos, dando maior ênfase no mecanismo de Fermi. A seguir, o Capítulo 4 abordará o setor de férmions do Modelo Padrão Estendido e investigará o efeito que o termo de violação de Lorentz do tipo  $\bar{\psi}c^{\mu\nu}\gamma_\nu\partial_\mu\psi$  pode gerar nas relações de dispersão. Em seguida, estudar-se-á como a presença do campo de fundo modifica o mecanismo de Fermi. Ao final, fazem-se considerações sobre os resultados obtidos.

---

<sup>10</sup>Inclui termos que violam as simetrias CPT e de Lorentz.

# Capítulo 2

## Raios Cósmicos

A riqueza, grandeza e diversidade da Física de Partículas e Campos atual deve-se às inúmeras descobertas importantes e desenvolvimentos realizados no século XX. Uma destas grandes descobertas ocorreu em 1912 quando Victor Hess detectou e mediu uma radiação ionizante que provinha do espaço. Essa radiação ficou conhecida como *raios cósmicos* e constituem uma relevante fonte de informações acerca do Universo. As pesquisas em raios cósmicos iniciaram-se com as descobertas de várias partículas [1, 3, 4], como o pósitron (Anderson, 1932), o múon (Neddermeyer e Anderson, 1936) e o pión (Powell, Occhialini e Lattes, 1947), o que contribuiu para a estruturação das teorias quânticas de campos que compõem o Modelo Padrão. Atualmente, as grandes questões sobre os raios cósmicos concentram-se em determinar as fontes de origem e seus mecanismos de aceleração, uma vez que são observados eventos com energias variando num intervalo de  $10^{11}$  eV a  $10^{20}$  eV.

O presente capítulo abordará fundamentos no estudo de raios cósmicos, comentando alguns aspectos importantes nesse campo de pesquisa, como sua descoberta, o espectro de energia e o limite GZK.

### 2.1 Descoberta dos Raios Cósmicos

Embora sejam comumente denominados por *raios cósmicos*, na verdade, tratam-se de partículas de altas energias – relativísticas – que se propagam no meio interestelar e intergaláctico. Eventualmente, algumas dessas partículas alcançam a Terra, podendo ser detectadas por vias indiretas.

Em 1912, Victor Hess realizou medidas de radiação ionizante com eletroscópios em balões atmosféricos a altitudes superiores a 5 Km. Ele percebeu que os eletroscópios continuavam a demonstrar ionização (formação de cargas), mesmo na ausência das fontes naturais de radiação (crosta terrestre) e que sua intensidade aumentava com a altitude. Dessa forma,



concluiu corretamente que a fonte dessa radiação era extraterrestre.

Os raios cósmicos [2, 4] são constituídos predominantemente por prótons de altas energias. Porém, medidas realizadas pelo Observatório Auger e outras colaborações confirmam que sua composição contém, em pequenas quantidades, núcleos de elementos mais pesados (como lítio e berílio) e elétrons.

A radiação cósmica produzida pelo Universo é chamada de *raios cósmicos primordiais*. Destes raios, aqueles que alcançam a Terra e interagem com os núcleos atmosféricos são denominados por *raios cósmicos primários*. Ao penetrarem na atmosfera, estes raios primários – produzidos em algum processo astrofísico – colidem com os núcleos dos átomos dos gases atmosféricos, originando partículas secundárias, que podem decair em outras partículas ou colidir com outros núcleos atômicos atmosféricos [20], formando uma "cascata", denominada [1, 2, 16] de chuva atmosférica extenso – *Extensive Air Shower*<sup>1</sup>. O vértice do chuva é o local onde ocorre a primeira colisão com a partícula atmosférica. As novas partículas são originadas em colisões relativísticas que conservam energia-momento, carga elétrica, momento angular, etc. [1, 3].

Como um exemplo simples, mostrar-se-á como a conservação de energia-momento num decaimento possível para os múons, que são partículas produzidas naturalmente no chuva atmosférica extenso ou, artificialmente, em aceleradores de partículas, pode ser utilizado para a verificação da existência de neutrinos. O processo<sup>2</sup> pode ser descrito por:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu. \quad (2.1.1)$$

Escrevendo os 4-vetores energia-momento das partículas envolvidas no decaimento acima, tem-se:

$$P_{\mu^-}^\lambda = (m_{0\mu^-}, \mathbf{0}), \quad (2.1.2)$$

$$P_{e^-}^\lambda = (\gamma_e m_{0e^-} c, \mathbf{p}_{e^-}) = \left( \frac{E_{e^-}}{c}, \mathbf{p}_{e^-} \right), \quad (2.1.3)$$

$$P_{\bar{\nu}_e}^\lambda = \left( \frac{E_{\bar{\nu}_e}}{c}, \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e} \right), \quad P_{\nu_\mu}^\lambda = \left( \frac{E_{\nu_\mu}}{c}, \mathbf{p}_{\nu_\mu} \right). \quad (2.1.4)$$

<sup>1</sup>Os chuviscos atmosféricos extensos foram descobertos por Pierre Auger (1899–1993) em 1938 e estabelecem uma representação esquemática de todas as partículas secundárias que podem ser criadas após a colisão do raio cósmico primário. O principal fator para esse processo é o nível energético do raio cósmico incidente.

<sup>2</sup>Em 1930, Wolfgang E. Pauli (1900 – 1958) postulou a existência de uma partícula sem massa e com spin-1/2 para preservar a conservação de energia e momento no decaimento- $\beta$ . Mais tarde, essa partícula ficou conhecida como neutrino – E. Fermi atribuiu esse nome a ela.

Usando a conservação do 4-vetor energia-momento,

$$P_{\mu^-}^\lambda = P_{e^-}^\lambda + P_{\bar{\nu}_e}^\lambda + P_{\nu_\mu}^\lambda, \quad (2.1.5)$$

$$P_{\mu^-}^\lambda - P_{e^-}^\lambda = P_{\bar{\nu}_e}^\lambda + P_{\nu_\mu}^\lambda, \quad (2.1.6)$$

pode-se determinar a energia do elétron criado. Realizando a contração tensorial da eq. (2.1.6), resulta:

$$P_{\mu^-}^2 + P_{e^-}^2 - 2P_{\mu^-} \cdot P_{e^-} = P_{\bar{\nu}_e}^2 + P_{\nu_\mu}^2 + 2P_{\bar{\nu}_e} \cdot P_{\nu_\mu}, \quad (2.1.7)$$

$$m_{0\mu}^2 c^2 + m_{0e}^2 c^2 - 2\gamma_e m_{0e} m_{0\mu}^2 c^2 = 2P_{\bar{\nu}_e} \cdot P_{\nu_\mu}. \quad (2.1.8)$$

Na eq. (2.1.8), foram desprezadas as massas de repouso do neutrino do múon ( $\nu_\mu$ ) e do anti-neutrino do elétron ( $\bar{\nu}_e$ ). Assim, tem-se finalmente:

$$E_{e^-} = \gamma_e m_{0e} c^2 = \frac{(m_{0\mu}^2 + m_{0e}^2) c^2 - 2P_{\bar{\nu}_e} \cdot P_{\nu_\mu}}{2m_{0\mu}}. \quad (2.1.9)$$

Como as massas dos neutrinos são praticamente nulas<sup>3</sup>, os 4-momentos dos neutrinos são escritos como:

$$P_{\bar{\nu}_e}^\lambda = \frac{E_{\bar{\nu}_e}}{c} \left( 1, \hat{\mathbf{k}}_{\bar{\nu}_e} \right), \quad P_{\nu_\mu}^\lambda = \frac{E_{\nu_\mu}}{c} \left( 1, \hat{\mathbf{k}}_{\nu_\mu} \right). \quad (2.1.10)$$

Dessa forma:

$$P_{\bar{\nu}_e}^\lambda \cdot P_{\nu_\mu}^\lambda = \frac{E_{\bar{\nu}_e} E_{\nu_\mu}}{c^2} (1 - \cos \theta). \quad (2.1.11)$$

Assim, a eq. (2.1.9) torna-se:

$$E_{e^-} = \gamma_e m_{0e} c^2 = \frac{(m_{0\mu}^2 + m_{0e}^2) c^2 - 2 \frac{E_{\bar{\nu}_e} E_{\nu_\mu}}{c^2} (1 - \cos \theta)}{2m_{0\mu}}. \quad (2.1.12)$$

Na eq. (2.1.12), observa-se que a energia do elétron criado no processo varia entre um máximo e um mínimo dependendo do ângulo entre o neutrino e o antineutrino ejetados no mesmo processo. Uma prova experimental disso consiste em se medir a energia do elétron emergente e verificar que assume vários valores, conforme a relação (2.1.12).

Através da detecção das partículas secundárias do chuvaire atmosférico, podem-se obter informações sobre os raios cósricos iniciais. Grandes colaborações atuais, como o

<sup>3</sup>As massas dos neutrinos são muito pequenas [1], como foi indicado pelos experimentos do Super-Kamiokande (localizado no Japão) e SNO (localizado no Canadá).

Observatório Auger (Argentina), o HiRes – *High Resolution Fly’s Eye* – (USA) e o AGASA – *Akenko Giant Air Shower Array* – (Japão), dedicam-se a medir e estudar essas partículas relativísticas que colidem na atmosfera e os produtos de suas colisões.

## 2.2 Breves comentários acerca da detecção de raios cósmicos

Existem várias técnicas [2, 4] que podem ser utilizadas para se detectar raios cósmicos, como medidas da radiação Cherenkov, raios X, fluorescência, etc. Os dispositivos utilizados nesse campo de pesquisa são os *detectores* que podem ser instalados no solo (como os que são utilizados pelo Observatório Auger), em balões atmosféricos, em satélites e também no subterrâneo, como o Super-Kamiokande (Japão) – dedicado a estudar neutrinos produzidos por interações de raios cósmicos. A acurácia das medidas depende das energias da partículas e da precisão do detector.

Todos os detectores são baseados num mesmo princípio fundamental, a saber: durante a propagação da partícula incidente, ocorre transferência total ou parcial da sua energia para o detector devido a algum processo físico (colisão, por exemplo). O detector *converte* essa quantidade de energia numa forma mais acessível à percepção humana<sup>4</sup>.

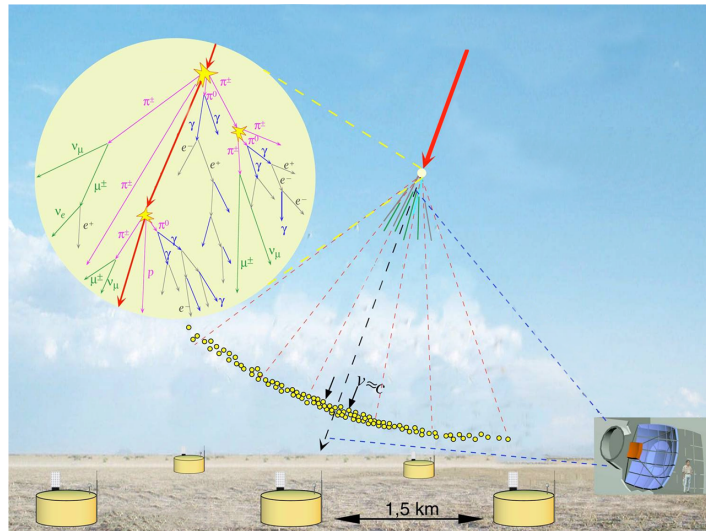


Figura 2.1: Detectores e cascata de partículas [5].

A descoberta dos chuviscos atmosféricos extensos possibilitou grande avanço na detecção dos raios cósmicos primários. Isso acontece porque [5] partículas com energias em

<sup>4</sup>Geralmente, o detector converte a energia recebida da partícula num sinal elétrico que é interpretado por um software adequado para a leitura da medida em questão.

torno de  $10^{14}$  eV que incidem na atmosfera terrestre produzem partículas secundárias que atingem o solo numa faixa de 100 metros de diâmetro. Para partículas incidentes com energias maiores, a área de alcance das secundárias torna-se muito maior. Assim, com detectores espalhados pelo solo, as energias das partículas secundárias podem ser medidas e, portanto, podem-se inferir a energia e natureza das partículas primárias que originaram a cascata.

A Figura [2.1] ilustra de forma simples os detectores colocados no solo e a cascata de partículas formada pela colisão do raio primário com algum átomo da atmosfera. Para se determinar com boa precisão a energia dos raios cósmicos primários, são necessários, além de detectores contruídos com boa engenharia, modelos que traduzem a cascata de partículas formada.

## 2.3 Espectro de Energia

O espectro de energia dos raios cósmicos é medido através da contagem de todas as partículas, numa faixa de energia específica, que incidem, por unidade de tempo, sobre a superfície do detector dentro de uma janela de ângulo sólido. Para se estimar a energia do raio cósmico primário, deve-se, de forma simples, contar o número de partículas secundárias produzidas no chuveiro atmosférico extenso e suas energias e então medir de forma indireta a energia do primário<sup>5</sup> [21]. O resultado é obtido na forma de um fluxo de partículas (número de partículas detectadas por unidade de área, por unidade de tempo, por unidade de energia e por unidade de ângulo sólido) e suas energias correspondentes. O espectro abrange raios cósmicos detectados com energias até pouco mais do que  $10^{20}$  eV. A Fig. [2.2] reproduz uma compilação do fluxo de partículas medido por várias colaborações [1, 2, 4, 5, 12].

Na Fig. [1.2], os resultados são apresentados na forma de uma distribuição diferencial de energia,  $F(E)$  – fluxo medido –, multiplicada pelo fator  $E^{2.6}$ , a fim de que o gráfico evidencie mais visualmente as características de leis de potências, isto é, o fato do espectro ser da forma  $F(E) \propto E^{-x}$  onde o índice espectral  $x$  sofre variações em determinadas faixas de energias. Na região chamada de *knee*, ocorre uma mudança nesse expoente. A razão para tal mudança ainda não está esclarecida para a Astrofísica. É possível [2, 16] que essa variação ocorra devido a mudanças nos mecanismos de aceleração dessas partículas. Na região denominada de *ankle* do espectro, por volta de  $10^{18}$  eV, o expoente muda novamente, o que está possivelmente relacionada à mudança de fontes astrofísicas dos raios cósmicos (geralmente, provenientes [14] de fontes extragalácticas). Isso se justifica porque a Via Láctea tem um limite para a aceleração de uma partícula carregada. Para que se possa compreender

<sup>5</sup>Medir a energia dos raios cósmicos primários é a parte mais difícil, pois é possível que uma pequena parte das partículas secundárias não sejam detectadas ou o experimento não possui precisão suficiente.

esse processo, deve-se levar em consideração que os principais mecanismos de aceleração de raios cósmitos<sup>6</sup> fundamentam-se na ideia de uma partícula carregada ganhando energia numa região permeada por um campo magnético. Na subseção seguinte, mostrar-se-á de forma simples como esse resultado é obtido na Astrofísica.

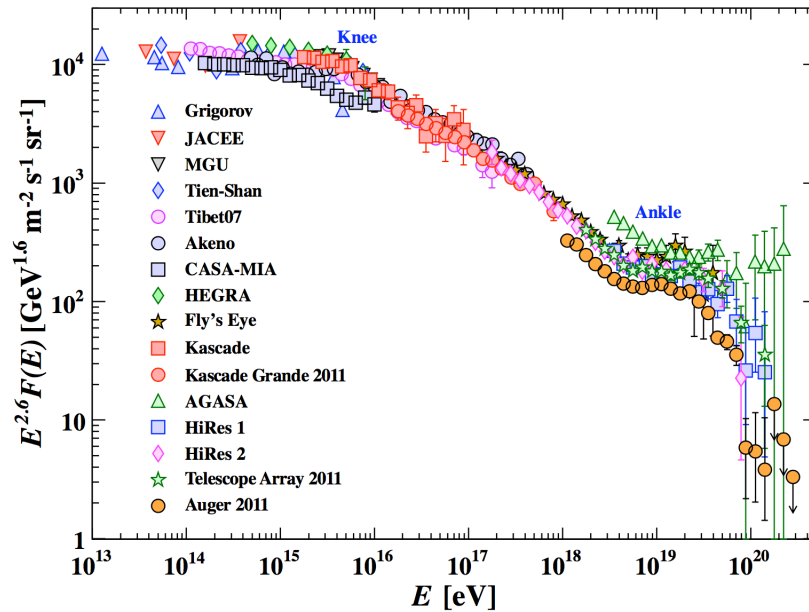


Figura 2.2: Espectro de energia de raios cósmitos obtido por várias colaborações atuais [2].

Note ainda que, próximo de  $10^{20}$  eV na Fig. [2.2], observa-se um corte abrupto no espectro de energia, ou seja, há uma drástica diminuição na detecção de eventos<sup>7</sup> em torno dessa energia. Tal corte é o resultado previsto do efeito GZK, tópico da próxima seção.

### 2.3.1 Energia máxima de uma partícula numa região com campo magnético

Por serem partículas carregadas, os raios cósmitos primários sofrem influência dos campos magnéticos presentes no meio interestelar. Considere uma fonte astrofísica de raio  $R$  (uma galáxia, por exemplo), permeada por um campo magnético com intensidade  $B$ . Se uma partícula move-se nesse campo a uma distância  $\rho$  do centro da fonte, irá descrever uma trajetória circular, sujeita à força centrípeta:

<sup>6</sup>Um exemplo de mecanismo de aceleração de raios cósmitos é [1] descrito por partículas carregadas (prótons) que interagem com *pulsar stars*, que são estrelas de nêutrons magnetizadas com alta rotação resultantes de supernovas.

<sup>7</sup>Ao longo deste trabalho, a expressão *deteccção de eventos* será usada como sinônimo para deteccção de raios cósmitos.

$$\mathbf{F}_{cp} = \frac{\gamma m_0 \mathbf{v}^2}{\rho}, \quad (2.3.1)$$

onde  $m_0$  e  $\mathbf{v}$  são a massa (de repouso) e a velocidade da partícula, respectivamente. Se a força de Lorentz é a única (ou a mais efetiva) força que atua sobre a partícula, então deve valer

$$\mathbf{F}_{cp} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (2.3.2)$$

o que implica em:

$$\frac{\gamma m_0 v^2}{\rho} = qvB \operatorname{sen} \theta. \quad (2.3.3)$$

Mas o raio da trajetória da partícula,  $\rho$ , não pode ser maior que o raio da fonte,  $R$ , pois quando isto ocorre, a partícula abandona a região onde sofre aceleração e deixa de ser acelerada. Portanto, é acelerada enquanto:

$$\rho \leq R. \quad (2.3.4)$$

Conseqüentemente, a força centrípeta<sup>8</sup> exercida na fronteira da fonte (com raio  $R$ ) deve ser<sup>9</sup> menor ou igual do que a força exercida em qualquer distância (até o centro da fonte), ou seja:

$$\frac{\gamma m_0 v^2}{\rho} \geq \frac{\gamma m_0 v^2}{R}. \quad (2.3.5)$$

Substituindo-se o primeiro membro da expressão acima pela eq. (2.3.3), obtém-se:

$$qBv \operatorname{sen} \theta \geq \frac{\gamma m_0 v^2}{R}, \quad (2.3.6)$$

$$p \leq qBR \operatorname{sen} \theta, \quad (2.3.7)$$

expressão que fornece uma limitação superior [14] para o momento linear da partícula acelerada numa região com campo magnético. O momento máximo corresponde a  $\operatorname{sen} \theta = 1$ ; considerando partículas ultra-relativísticas – como raios cósmicos –, tem-se que  $E \approx pc$ . Assim, a equação acima torna-se:

$$E^{max} \lesssim cqBR. \quad (2.3.8)$$

<sup>8</sup>Na verdade, a partícula sente a força centrífuga ao se mover no campo.

<sup>9</sup>Dada a condição na eq. (2.3.4), tem-se o seguinte:  $F_1 = A/\rho$  e  $F_2 = A/R$  são duas forças centrípetas; como  $\rho \leq R$ , então  $F_1 \geq F_2$ .

Para a Via Láctea [1], a intensidade do campo magnético galáctico é de aproximadamente  $4 \times 10^{-6} G$ , o raio médio é de  $15 kpc$  e a carga do próton é de  $1,602 \times 10^{-19} C$ . Utilizando esses dados [10], a eq. (2.3.8) fornece:

$$E^{max} \lesssim 10^{19} eV. \quad (2.3.9)$$

Esse resultado implica que raios cósmitos com energias superiores a  $10^{19}$  eV não podem ser criados ou acelerados na Via Láctea, conseqüentemente eles devem ter origem extragaláctica. A eq. (2.3.8), conhecida na literatura como critério de Hillas [2, 4, 5, 14, 16, 18], constitui uma ferramenta clara para determinação de origem galáctica ou extragaláctica dos raios cósmitos, em se considerando a magnitude do campo magnético e a dimensão da galáxia (fonte aceleradora).

## 2.4 O Limite GZK

Após a descoberta da radiação cósmita de fundo, Kenneth Greisen (1918-2007), Georgiy Zatsepin (1917-2010) e Vadim Kuz'min publicaram trabalhos [6, 7] independentemente [11], em 1966, prevendo um corte [12] no espectro dos raios cósmitos que chegam à Terra, devido à colisão dos mesmos com fótons da radiação de fundo, via efeito Compton inverso, com a produção de píons. O Apêndice A mostra em detalhes como o efeito Compton inverso pode ser entendido em termos de energia e momento.

A densidade de matéria na Galáxia e, particularmente, no espaço intergalático é muito baixa. Prótons podem, contudo, interagir com fótons da radiação cósmita de fundo, que representam um alvo com densidade relativamente alta, em média  $400$  fótons/ $cm^3$ . A energia desses fótons é aproximadamente  $2,34 \times 10^{-4} eV$ . Greisen-Zatsepin-Kuz'min (GZK) previram que a produção de píons ocorreria quando um próton ultra-energético atingisse um desses fótons da radiação de fundo que permeia o Universo. Para que o processo [13] ocorra, é necessário que o próton tenha uma energia mínima – o threshold energy. Pode-se descrever [14] a colisão por:

<sup>10</sup>Após a conversão, é claro, para unidades do SI. Lembrando que  $1G = 10^{-4}T$  e  $1pc = 3,26$  anos-luz e  $1$  ano-luz  $= 9,46 \times 10^{15}m$ .

<sup>11</sup>No artigo de Zatsepin e Kuz'min, há uma nota na qual eles agradecem a Greisen por comunicar-lhes o resultado do seu trabalho.

<sup>12</sup>K. Greisen disse em seu artigo que deve existir uma diminuição considerável na quantidade de eventos acima de  $10^{20} eV$ ; e que os experimentos em preparação (ou em mente) devem observar tal efeito.

<sup>13</sup>Na verdade, ocorre a criação de uma partícula  $\Delta^+$ , um bárion de carga elétrica positiva; que rapidamente decai num próton e um pión.

<sup>14</sup>O subscrito no  $\gamma$ , a sigla CMBR, significa *Cosmic Microwave Background Radiation* e é utilizado para especificar que esse fóton representa a radiação cósmita de fundo.

$$p + \gamma_{CMBR} \rightarrow p + \pi^0. \quad (2.4.1)$$

Escrevendo os 4-vetores energia-momento, antes da colisão, para o próton e o fóton, tem-se:

$$P_p^\mu = \left( \frac{E_p}{c}, \mathbf{p}_p \right), \quad P_\gamma^\mu = \left( \frac{E_\gamma}{c}, \frac{E_\gamma}{c} \hat{\mathbf{k}} \right). \quad (2.4.2)$$

O 4-momento total inicial,  $P_{T(i)} = P_p + P_\gamma$ , tem módulo quadrático dado por:

$$P_{T(i)}^2 = (P_p + P_\gamma)^2 = P_p^2 + P_\gamma^2 + 2P_p \cdot P_\gamma, \quad (2.4.3)$$

$$P_{T(i)}^2 = m_{0p}^2 c^2 + 2P_p \cdot P_\gamma. \quad (2.4.4)$$

O 4-momento total final é dado por  $P_{T(f)} = P_p + P_\pi$ , cujo módulo quadrático deve ser igual à eq. (2.4.4). Assim, tem-se:

$$P_{T(f)}^2 = (P_p + P_\pi)^2 = P_p^2 + P_\pi^2 + 2P_p \cdot P_\pi. \quad (2.4.5)$$

O módulo quadrático mínimo de  $P_{T(f)}$  que viabiliza o processo<sup>15</sup> (2.4.1) é dado por:  $P_{T(f)}^2 = (m_{0p} + m_{0\pi})^2 c^2$ . O limiar de energia (*threshold energy*) para que o processo (2.4.1) ocorra advém da condição:

$$P_{T(i)}^2 > P_{T(f)}^2, \quad (2.4.6)$$

que leva a, utilizando a eq. (2.4.4):

$$2P_p \cdot P_\gamma > m_{0\pi}^2 c^2 + 2m_{0\pi} m_{0p} c^2 \quad (2.4.7)$$

Como o propósito aqui é determinar a energia mínima do próton incidente (raio cósmico) que desencadeia o processo descrito na expressão (2.4.1), escreve-se o primeiro membro da (2.4.7) como:

$$P_p \cdot P_\gamma = \frac{E_p}{c} \frac{E_\gamma}{c} - \frac{E_\gamma}{c} \mathbf{p}_p \cdot \hat{\mathbf{k}}, \quad (2.4.8)$$

onde  $\hat{\mathbf{k}}$  é o versor de propagação do fóton. Usando a relação relativística  $E^2 = (\mathbf{p}c)^2 + (m_0c^2)^2$ , o 3-momento  $\mathbf{p}_p$  do próton pode ser expresso da seguinte forma:

$$\mathbf{p}_p = \hat{\mathbf{p}} \sqrt{\frac{E_p^2}{c^2} - m_{0p}^2 c^2}, \quad (2.4.9)$$

---

<sup>15</sup>Vide Apêndice A.



onde  $\hat{\mathbf{p}}$  é o versor que fornece a direção do próton. Sabendo disso, a equação (2.4.8) tornar-se-á:

$$P_p \cdot P_\gamma = \frac{E_p E_\gamma}{c} - \frac{E_\gamma}{c} \sqrt{\frac{E_p^2}{c^2} - m_{0p}^2 c^2 (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}})}, \quad (2.4.10)$$

sendo  $\theta$  o ângulo entre  $\hat{\mathbf{p}}$  e  $\hat{\mathbf{k}}$ , direção do próton e do fóton antes da colisão, tem-se  $\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \cos \theta$ , de modo que:

$$P_p \cdot P_\gamma = \frac{E_p E_\gamma}{c} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{m_{0p}^2 c^4}{E_p^2} (\cos \theta)} \right], \quad (2.4.11)$$

$$P_p \cdot P_\gamma = \frac{E_p E_\gamma}{c} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2} (\cos \theta)} \right] \quad (2.4.12)$$

onde se utilizou  $E_p^2 = \gamma^2 (m_{0p} c^2)^2$ .

Para raios cósmicos ultra-energéticos, o fator de Lorentz  $\gamma$  é extremamente alto, de sorte que a expressão (2.4.12) pode ser bem aproximada como:

$$P_p \cdot P_\gamma = \frac{E_p E_\gamma}{c^2} (1 - \cos \theta) \quad (2.4.13)$$

Com esse resultado, a equação (2.4.7) se torna<sup>16</sup>:

$$E_p > \frac{(m_{0\pi}^2 + 2m_{0\pi} m_{0p}) c^4}{2E_\gamma (1 - \cos \theta)}. \quad (2.4.14)$$

Essa expressão fornece a energia mínima que o próton deve ter para que a colisão com um fóton da radiação cósmica de fundo viabilize a produção de um próton e um pión. Essa energia será mínima quando  $\theta = \pi$ , o que caracteriza uma colisão frontal. As energias de repouso [3] do próton e do pión são  $m_{0p} c^2 = 938,26 \text{ MeV}$  e  $m_{0\pi} c^2 = 134,96 \text{ MeV}$ , respectivamente, enquanto a energia do fóton da radiação de fundo é  $2,34 \times 10^{-4} \text{ eV}$ . Utilizando esses valores, a eq. (2.4.14) leva ao limite:

$$E_p^{\text{min}} > 2,705 \times 10^{20} \text{ eV}. \quad (2.4.15)$$

Esse valor de energia, conhecido como *limite GZK*, ou *GZK cutoff*, ou ainda, *GZK supression*, representa um corte no espectro de energia dos raios cósmicos. Uma vez que a

<sup>16</sup>Se as considerações tomadas aqui para se chegar na equação (2.4.13) não fossem levadas em conta, chegar-se-ia a uma expressão muito semelhante; entretanto, haveria um fator  $v/c$ , onde  $v$  é o módulo da velocidade do próton incidente, multiplicando o cosseno do ângulo  $\theta$ . Assim, para se determinar a energia do próton, seria necessário considerar a velocidade do próton aproximadamente igual à da luz.

partir desse limite, o próton passa a ter energia para criar o par  $p + \pi$  via colisão com um fóton. Após este processo, o próton perde energia e passa a apresentar uma energia menor que  $10^{20}$  eV. Deste modo, os prótons com energia maior que  $2,7 \times 10^{20}$  eV, que colidem ou encontram um fóton, não chegam até a Terra, pois ao encontrar um fóton em seu caminho, perderão parte considerável da sua energia inicial.

Para entender corretamente o cenário do efeito GZK, pode-se discutir sobre possíveis fontes de origem dos raios cósmicos ultra-energéticos que participam do efeito mencionado. Para isso, é necessário avaliar a probabilidade que um próton ultra-energético vindo de uma fonte distante alcance a Terra. Nesse sentido, é necessário introduzir o conceito de livre caminho médio<sup>[17]</sup>. De forma sucinta, o livre caminho médio,  $\lambda$ , é a distância média percorrida por uma partícula até que ela colida com alguma partícula-alvo, sendo definido por:

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma}, \quad (2.4.16)$$

onde  $\sigma$  é a seção de choque<sup>[18]</sup> para a colisão e  $n$  é o número de partículas-alvo por unidade de volume. Importante mencionar que, de posse do livre caminho médio, escreve-se a probabilidade que uma determinada partícula incidente alcance a Terra, propagando-se por uma distância  $x$  até a Terra, como sendo:

$$P \simeq e^{-x/\lambda}. \quad (2.4.17)$$

A seção de choque para a colisão principal do efeito GZK é [1, 4, 6, 7]

$$\sigma_{p\gamma_{CMBR}} \approx 10^{-28} \text{ cm}^2, \quad (2.4.18)$$

para um próton incidente com energia de  $10^{20}$  eV. É importante mencionar que a seção de choque depende do inverso das energias das partículas incidentes, conforme a regra de ouro de Fermi para colisões [3]. Dessa forma, para um raio cósmico com energia acima de  $10^{20}$  eV, a seção de choque, neste caso, seria menor do que o valor expresso na eq. (2.4.18). Conseqüentemente, o livre caminho médio desse próton ultra-energético seria maior do que para um próton com energia de  $10^{20}$  eV. Pode-se concluir então que quanto maior a energia do próton incidente, maior será a distância média percorrida até colidir com um fóton da radiação cósmica de fundo.

A densidade de fótons da radiação cósmica de fundo é [1], aproximadamente, 400

<sup>17</sup>O Apêndice B demonstra o resultado da eq. (2.4.16).

<sup>18</sup>De forma simplista, a seção de choque é entendida como uma área efetiva para a qual há grande probabilidade de que ocorra alguma colisão, isto é, representa a região que a partícula incidente percebe a interação com a partícula-alvo. Depende de alguns parâmetros, como as energias e momentos das partículas envolvidas e o tipo de interação entre elas.

fótons/ $cm^3$ . Assim, o livre caminho médio para os prótons ultra-energéticos do efeito GZK vale<sup>[19]</sup>

$$\lambda_{GZK} = 0,25 \times 10^{24}m, \quad (2.4.19)$$

que equivale aproximadamente a 8  $Mpc$ , onde  $pc$  representa o parsec<sup>[20]</sup>, unidade usual em Astronomia.

Os observatórios [1, 2, 5, 12] HiRes, em Utah (USA), e Auger, na Argentina, confirmaram o efeito previsto (e esperado) para o limite GZK. Algumas questões em aberto ainda precisam ser respondidas, como a presença de pouquíssimos eventos com energias acima de  $10^{20}eV$ , as fontes desses prótons (raios cósmicos) ultra-energéticos e seus mecanismos de aceleração.

Como é de fato observado uma supressão no espectro dos raios cósmicos com energia acima de  $E_{GZK}$ , chega-se à conclusão de que os raios cósmicos ultra-energéticos são de origem extragaláctica, pois sendo o raio médio da Via Láctea em torno de 15  $kpc$ , tal supressão não estaria sendo observada caso tais partículas fossem originadas na própria Via Láctea. Isso significa que, em média, após percorrer 8  $Mpc$ , a partícula ultra-energética sofrerá colisão com um fóton da radiação cósmica de fundo, desencadeando a produção de um píon.

Através da eq. (2.4.17), pode-se investigar a probabilidade de que prótons ultra-energéticos, advindos de alguma fonte, alcancem a Terra sem interagir com os fótons da radiação cósmica de fundo. A galáxia M87 (NGC 4486), localizada no centro do *cluster* de Virgem<sup>[21]</sup>, encontra-se a uma distância de 18  $Mpc$  da Terra. Como o livre caminho médio para os prótons do efeito GZK (energia em torno de  $10^{20}$  eV) é de 8  $Mpc$ , a probabilidade que um próton vindo desse aglomerado alcance a Terra é da ordem de  $P \simeq e^{-18/8} \sim 10,5\%$ . Para comparação, considere agora as galáxias Mrk 421 e Mrk 501 da Cadeia de Markarian<sup>[22]</sup> que se encontram a pouco mais que 100  $Mpc$  da Terra. Como é estimado que [1, 11] os raios cósmicos com energias em torno de  $10^{20}$  eV possam percorrer distâncias de aproximadamente 100  $Mpc$  até que sua energia decaia abaixo do limite GZK, quando não sofreriam mais colisões com os fótons de fundo, partículas com essa energia tem probabilidade  $P \simeq e^{-100/8} \sim 3,72 \times 10^{-4}\%$  de alcançar a Terra. Outra estrutura no Universo muito estudada é Centaurus A (NGC 5128),

<sup>19</sup>Após a conversão das unidades de  $\sigma$  e  $n$  para o S.I.

<sup>20</sup>Um parsec equivale a 3,26 anos-luz ou, ainda,  $3,085 \times 10^{16}$  m.

<sup>21</sup>O cluster – aglomerado – de Virgem é um conjunto de galáxias espirais e elípticas a uma distância de aproximadamente 18  $Mpc$  na direção da constelação de Virgem. Ela possui a galáxia M87 (ou NGC 4486), uma das maiores galáxias elípticas conhecidas, cujo centro possui um dos maiores buracos negros supermassivos.

<sup>22</sup>Nomenclatura dada em homenagem ao físico Benjamin E. Markarian (1913-1985) que as descobriu por volta de 1970. Ela é um grupo de galáxias que faz parte do Aglomerado (cluster) de Virgem; elas estão dispostas numa linha levemente curva quando observadas da Terra.

que é o núcleo ativo de galáxia mais próximo da Terra, a uma distância de 3,8 Mpc [17]. Isso implica que uma partícula com energia  $E_{GZK}$  tem probabilidade  $P \simeq e^{-3,8/8} \sim 62,2\%$  de alcançar a Terra. Sendo, dessa forma, um dos principais candidatos a fontes de raios cósmicos ultra-energéticos. O Observatório Auger identificou eventos com direção de chegada muito próxima da localização de Centaurus A [17].

É importante mencionar que a probabilidade de chegada de raios cósmicos advindos de uma fonte (galáxias, por exemplo) não constitui o único fator para a determinação exata da fonte dessas partículas. Deve-se levar em consideração também a capacidade que tais fontes possuem para fornecer energias (acelerar) os raios cósmicos.

A relação (2.4.17) foi obtida através de algumas considerações. Supondo que um conjunto com  $N$  partículas (iguais) partem de sua fonte de origem com destino à Terra<sup>23</sup>, o número de partículas desse conjunto diminui  $dN$  quando percorre uma distância  $dx$  ao atravessar o meio interestelar – isso porque, eventualmente, essas partículas poderão colidir com os fótons da radiação cósmica de fundo. Além disso, o número de partículas do conjunto que colidem é proporcional ao número de partículas do conjunto, ou seja,  $dN \propto -Ndx$ . Mais especificamente, tem-se:

$$dN = -\mu N dx, \quad (2.4.20)$$

onde o sinal negativo indica uma diminuição no número de partículas do conjunto e  $\mu$  é o coeficiente de absorvidade<sup>24</sup>, ou seja, o meio interestelar *absorve*  $dN$  partículas quando estas percorrem uma distância  $dx$ . Na verdade, o que acontece é que essas partículas colidem com os fótons da radiação cósmica de fundo. Logo:

$$N = N_0 e^{-\mu x}, \quad (2.4.21)$$

onde  $N$  representa o número de partículas (do conjunto inicial) que atravessaram o meio interestelar de comprimento  $x$ , ou seja, o número de partículas que alcançaram a Terra,  $N_0$  é o número de partículas iniciais do conjunto e o coeficiente de absorvidade, neste caso, está relacionado com as colisões que essas partículas sofrem durante seu percurso e é dado [1] por  $\mu = 1/\lambda$ . Logo, a eq. (2.4.21) torna-se:

$$N = N_0 e^{-x/\lambda}. \quad (2.4.22)$$

Sabendo disso, a probabilidade de que alguma partícula do conjunto inicial alcance a

<sup>23</sup> Isso não significa, de modo algum, que a Terra é importante para a propagação dessas partículas; entretanto, é o local onde os pesquisadores se encontram no Universo e, de onde, fazem as medidas.

<sup>24</sup> As considerações tomadas aqui são baseadas em argumentos semelhantes da Lei de Lambert-Beer.

Terra é da mesma ordem do número de partículas, eq. (2.4.22), que alcançam a Terra. Daí, ter se utilizado a eq. (2.4.17).

Embora os raios cósmicos tenham sido descobertos há mais de 100 anos, sua origem ainda é uma questão em aberto. Geralmente, pressupõe-se que núcleos ativos de galáxias, como quasares, ou explosões de supernova sejam excelentes candidatos a serem fontes de raios cósmicos ultra-energéticos, mas não há evidências fortes para esse pressuposto. Daí a importância das grandes colaborações atuais para o estudo dessas partículas.

É evidente que ainda não se sabe exatamente de onde essas partículas vem e nem como adquirem tamanha energia, da ordem de  $10^{20}$  eV.

### 2.4.1 Eventos acima de $10^{20}$ eV

Embora os resultados experimentais obtidos pelas várias colaborações atuais indiquem uma supressão no fluxo de partículas com energias em torno de  $10^{20}$  eV, consistente com o limite GZK, alguns eventos acima desse limite energético foram detectados no último século [20]. HiRes (1991) detectou um evento<sup>25</sup> em torno de  $3,2 \times 10^{20}$  eV; Volcano Ranch<sup>26</sup> com o primeiro evento acima de  $10^{20}$  eV [12, 20, 21, 26]; o AGASA detectou a maior quantidade de eventos detectados acima de  $10^{20}$  eV [18, 20, 26] e o Observatório Auger também reportou alguns eventos acima desse limite de energia [20, 24].

Os mecanismos que fornecem energias extremamente altas a essas partículas e suas fontes astrofísicas de origem constituem temas ainda não esclarecidos. Esse fato constitui temas de interesse em muitas pesquisas, possibilitando ideias mais *ousadas* sobre a origem dessas partículas com energias maiores ou iguais a  $10^{20}$  eV, como a *existência* de objetos ou partículas exóticas primordiais e instáveis que sofrem decaimentos em raios cósmicos ultra-energéticos [16] (diferentemente do consenso científico de que essas partículas sofrem aceleração – ganho de energia – por meio de algum mecanismo); ou ainda, mais drasticamente, que os eventos com energias maiores ou iguais a  $10^{20}$  eV seriam uma possível violação da simetria de Lorentz.

<sup>25</sup>O evento mais energético detectado [24].

<sup>26</sup>O *Volcano Ranch experiment* consistiu numa série de detectores localizados na estação Volcano Ranch próximo a Albuquerque, New Mexico (USA) [21]. Funcionou entre 1959 –1978.

## Capítulo 3

# Mecanismos de aceleração de raios cósmicos

A origem dos raios cósmicos ultra-energéticos e os mecanismos que lhes *fornecem* altas energias<sup>1</sup> ainda é uma das questões não esclarecidas pela Astrofísica, constituindo tema de muitas pesquisas na área [2, 5, 12].

O primeiro ponto a se destacar é a distinção entre o poder (ou potência) da fonte geradora e os chamados mecanismos de aceleração. O primeiro refere-se à capacidade que determinado sítio astrofísico, onde a partícula é originada, possui para fornecer-lhe energia. Por outro lado, os mecanismos de aceleração são processos físicos que explicam como os raios cósmicos adquirem energia ao se propagar pelo meio interestelar, depois de abandonarem a região em que foram gerados. Geralmente, assume-se que raios cósmicos possam ganhar energia não somente nos sítios onde são criados ou muito próximo a eles, mas também devido a efeitos de campos eletromagnéticos, presentes no meio interestelar, ao longo das trajetórias descritas por essas partículas ao se propagarem pelo espaço. Existem basicamente dois tipos básicos de mecanismos de aceleração de raios cósmicos [18, 20], a saber: aceleração ocasionada por campos eletromagnéticos e aceleração estocástica<sup>2</sup>.

O presente capítulo abordará sobre conceitos fundamentais para aceleração de partículas, discutindo preliminarmente elementos de aceleração classificados em dois cenários principais na literatura: cenários top-down e bottom-up. Após esta introdução, focalizar-se-á no famoso mecanismo de aceleração de Fermi (de 1ª e 2ª ordem).

---

<sup>1</sup>Os eventos mais energéticos são da ordem de  $10^{20}$  eV; mas  $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$ . Logo  $10^{20} \text{ eV} \approx 10 \text{ J}$ .

<sup>2</sup>Um processo estocástico é aquele que ocorre com dependência de uma variável aleatória.

### 3.1 Critério de Hillas, Cenários Top-down e Bottom-up

O critério de Hillas estabelece um limite para a energia máxima que uma partícula pode adquirir ao ser acelerada numa região do cosmos com raio médio  $R$ , permeada por um campo magnético  $B$ , antes que ela escape da região, quando não será mais acelerada. Na seção (2.3.1), foi mostrado que o critério de Hillas é dado por:

$$E^{max} \lesssim cqBR, \quad (3.1.1)$$

onde  $E^{max}$  indica a energia máxima que uma partícula pode adquirir de uma dada fonte. Manipulando a eq. (3.1.1), pode-se escrever uma função linear entre o campo magnético e o raio médio da fonte, da seguinte forma:

$$f(x) = K_E - x, \quad (3.1.2)$$

onde  $f(x) = \log B$ ,  $K_E = \log (E/cq)$  e  $x = \log R$ .

De posse das expressões (3.1.1) e (3.1.2), pode-se construir um diagrama para um dado valor de energia do raio cósmico<sup>3</sup>. A fig. [3.1] ilustra o conhecido diagrama de Hillas ou *Hillas plot* [4, 5]. Nesse diagrama, estão representados os possíveis candidatos a fontes aceleradoras de partículas, em termos do campo magnético e raio médio da fonte, como gamma ray busters (GRB), núcleos ativos de galáxias, estrelas de nêutrons, etc. As elipses representam essas possíveis fontes aceleradoras e suas posições são colocadas no diagrama de acordo com os dados conhecidos de campo magnético e tamanho médio (nos catálogos astronômicos). O ponto onde cada linha diagonal cruza o eixo vertical refere-se ao valor de energia (para a partícula) que as possíveis fontes podem fornecer ao raio cósmico.

Somente as fontes aceleradoras que estão em cima da linha diagonal ou acima dela podem acelerar os raios cósmicos até a energia associada a cada linha, pois, o critério de Hillas, dado na eq. (3.1.1), é, na verdade, dado por  $f(x) \geq K_E - x$ . Uma consequência disso é que existe uma delimitação sobre quais sítios astrofísicos podem acelerar partículas até determinado valor de energia  $E$ . Nota-se assim que não há fontes ou há poucas fontes aptas a acelerar partículas até  $E \sim 10^{20}$  eV.

Sabendo dessa limitação imposta pelo critério de Hillas para as fontes aceleradoras de raios cósmicos e da presença de partículas com energias tão altas quanto  $10^{20}$  eV, ou até maiores, tem-se buscado mecanismos que podem explicar como os raios cósmicos adquirem os valores de energia, que hoje são observados, nos mais variados cenários astrofísicos.

---

<sup>3</sup>A constante  $K_E$  estabelece o valor de energia desejável para a partícula adquirir por uma fonte astrofísica na eq. (3.1.2). Estabelecendo-se esse valor de energia, a eq. (3.1.2) indicará uma função relacionando a intensidade do campo magnético e o tamanho médio das possíveis fontes aceleradoras.

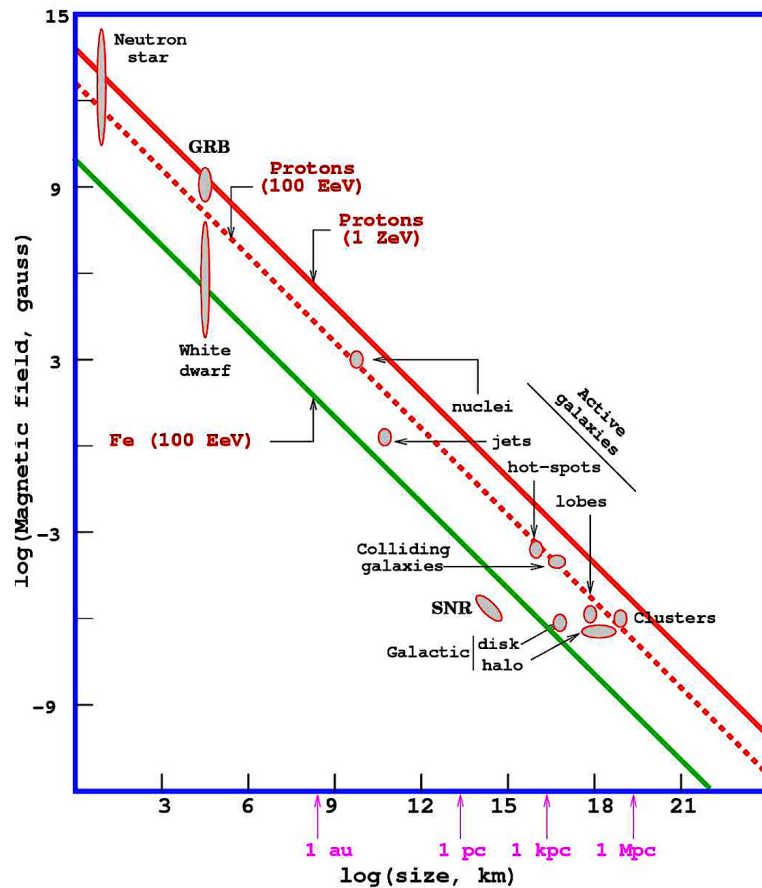


Figura 3.1: Diagrama de Hillas contendo possíveis fontes aceleradoras para raios cósmicos (prótons) atingirem energias  $E = 100 \text{ EeV} = 10^{20} \text{ eV}$  (linha vermelha tracejada) e  $E = 1 \text{ ZeV} = 10^{21} \text{ eV}$  (linha vermelha contínua). A linha verde indica possíveis fontes para núcleos de Fe atingirem energias  $E = 10^{20} \text{ eV}$  [5, 20].

Uma das primeiras ideias estudadas consiste na possibilidade de que os eventos mais energéticos possam representar uma classe fundamentalmente diferente de raios cósmicos [18], isto é, essas partículas podem ser "simplesmente" o resultado de decaimentos [16, 18, 25, 26, 35] de partículas massivas exóticas (às vezes, chamadas genericamente de *X-particles*) originadas no início do Universo. Esse mecanismo de produção de raios cósmicos energéticos, sem ação de mecanismos de aceleração, é conhecido na literatura como cenário *Top-down*<sup>4</sup>.

Como exemplo, pode-se comentar que, por volta dos anos 1950, a primeira suposição de um modelo top-down estava relacionada à hipótese do átomo primordial (*Primeval Atom*) de Georges Lemaître<sup>5</sup>. A matéria no Universo teria sido originada através de uma

<sup>4</sup>Os cenários top-down também envolvem extensões do Modelo Padrão [20].

<sup>5</sup>Georges Lemaître (1894–1966) foi um físico, astrônomo e padre belga. Entre seus trabalhos, vale mencionar citar sua teoria para expansão do Universo (na qual derivou uma relação que hoje é conhecida como lei de Hubble, porém os dados de E. Hubble permitiram-lhe provar que a relação é linear). Também propôs que o Universo se originou de um átomo primordial (*Primeval Atom*).



"super-desintegração" de um único átomo primordial extremamente massivo, que teria decaído sucessivamente em átomos (partículas) de massas cada vez menores. Os raios cósmicos ultra-energéticos seriam partículas produzidas durante esses decaimentos, isto é, o átomo primordial teria decaído em partículas exóticas (*X-particles*), que, por sua vez, também teriam decaído em outras partículas, incluindo os raios cósmicos ultra-energéticos. Apesar dessa hipótese ter sido abandonada nas pesquisas atuais em Astrofísica, a ideia de decaimentos gerando raios cósmicos ultra-energéticos faz parte de alguns modelos do tipo top-down [18, 20, 35, 26].

Como o efeito GZK impede que raios cósmicos extremamente energéticos se propaguem por longas distâncias [18], essas partículas não teriam sido originadas em decaimentos de partículas-X nos instantes iniciais do Universo<sup>6</sup>, conseqüentemente, essas partículas<sup>7</sup> teriam tempo de vida média da ordem da época cosmológica atual, em torno de 13 bilhões de anos, para que, dessa forma, pudessem decair (em épocas recentes) e originar os raios cósmicos com energias maiores ou iguais a  $10^{20}$  eV. Tais partículas supermassivas poderiam ser uma resposta para a detecção dos eventos com  $E > 10^{20}$  eV, pois, por possuírem massa muito maior do que o próton, o threshold energy para a produção de um pión através de colisão com um fóton da radiação cósmica de fundo seria maior<sup>8</sup> do que  $10^{20}$  eV [25], de acordo com a eq. (2.4.14). E, conforme se discutiu na seção 2.4, o livre caminho médio para essas partículas X também seria maior, o que permitiria a possibilidade de alcançar a Terra. Nesse sentido, o quasar 3C147 ( $\sim 2$  Gpc de distância da Terra) tem sido estudado como um dos melhores candidatos a fontes dessas partículas [24, 25].

Outro cenário para se entender como os raios cósmicos possuem altas energias consiste em mecanismos de aceleração nos quais as partículas são aceleradas (e adquirem energia gradualmente) por campos eletromagnéticos, presentes em vários sítios astrofísicos, ou por processos estocásticos. Esses mecanismos de aceleração são conhecidos na literatura como cenários *Bottom-up* [5, 18, 20, 35] ou por *Zevatrons*, que consistem em regiões de aceleração (nos objetos astrofísicos conhecidos), nas quais partículas podem ser aceleradas, podendo ainda alcançar energias da ordem 1 ZeV [20, 35]. As próximas seções discutirão sobre alguns mecanismos de aceleração de raios cósmicos que fazem parte dos cenários bottom-up, dando-se ênfase no mecanismo de aceleração de Fermi [1, 20].

<sup>6</sup>Se os raios cósmicos com energias  $> 10^{20}$  eV (assumindo-se que eles atingem a Terra) fossem resultado de decaimentos no início do Universo, teriam que percorrer distâncias extremamente altas para serem detectados na Terra no tempo recente, o que implicaria em altíssima probabilidade de interagir com a radiação cósmica de fundo, via reação típica do processo GZK, perdendo energia.

<sup>7</sup>Um possível candidato seriam partículas denominadas *uhecron*, vide refs. [16, 24, 25].

<sup>8</sup>Fica implícito que se supõe que tal partícula-X sofreria um processo do tipo:  $X + \gamma_{CMBR} \rightarrow \pi + (A, B, \dots)$ , onde  $(A, B, \dots)$  designa outras possíveis partículas criadas no processo.

## 3.2 Conceito geral de aceleração por campos eletromagnéticos

A aceleração de raios cósmicos é uma nomenclatura usual na Astrofísica para se referir a variações positivas de energia (ganho de energia<sup>9</sup>) auferidas por essas partículas quando se propagam através do meio interestelar ou próximo a estrelas, buracos negros, núcleos ativos de galáxias, remanescentes de supernovas, jatos de matéria, etc. As pesquisas na área<sup>10</sup> apontam basicamente para duas formas de aceleração: ganho de energia devido a campos eletromagnéticos e ganho de energia através de processos estocásticos (nomeadamente, mecanismo de Fermi).

A equação fundamental para uma partícula carregada numa região com campo eletromagnético é dada pela segunda lei de Newton:

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 \mathbf{v}) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.2.1)$$

onde  $\gamma$  é o fator de Lorentz para a partícula e  $q$ , a carga. O ganho de energia da partícula ocorre quando a força que atua sobre ela realiza trabalho. Para a força de Lorentz, tem-se:

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = q \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = q \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (3.2.2)$$

onde se utilizou  $d\mathbf{l} = \mathbf{v} dt$  no segundo membro da terceira igualdade para se obter  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$ . Dessa forma, apenas os campos elétricos dos objetos astrofísicos podem acelerar raios cósmicos. O cômputo da variação de energia da partícula é feito através do teorema trabalho-energia,  $W = \Delta E_c$ , onde  $E_c$  é a energia cinética da partícula, e de que o trabalho para se mover uma carga numa região com potencial  $V$  é menos a variação da energia potencial elétrica,  $\Delta U = qV$ , da partícula. Assim,  $\Delta E_c = W = -\Delta U$ , o que implica em  $\Delta E_c = -qV$ .

Entretanto, campos magnéticos variáveis no tempo induzem campos elétricos via Lei de Faraday-Lenz<sup>11</sup>, isto é:

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \Phi_B, \quad (3.2.3)$$

<sup>9</sup>Isso deixa claro que se usa a convenção de que  $\Delta E > 0$  representa ganho de energia enquanto  $\Delta E < 0$ , perda de energia.

<sup>10</sup>Referindo-se a estudos em cenários bottom-up.

<sup>11</sup>A lei da indução estabelece que a variação do fluxo magnético através de uma superfície é igual a *menos* a força eletromotriz induzida,  $V$ . Apesar do potencial escalar do campo elétrico e a força eletromotriz possuírem a mesma unidade de medida, elas são diferentes pois a força eletromotriz induzida é de origem não-eletrostática, ou seja, essa diferença de potencial não é ocasionada por cargas eletrostáticas. Vide refs. [\[22\]](#), [\[23\]](#).

onde  $\Phi_{\mathbf{B}}$  é o fluxo do campo magnético através da superfície delimitada pela curva fechada  $c$ . Consequentemente, aceleração de partículas pode acontecer mesmo na ausência de campo elétrico, desde que  $\frac{\partial B}{\partial t} \neq 0$ . Campos elétricos induzidos também se formam quando um condutor<sup>[12]</sup> se move com velocidade  $\mathbf{v}$  em relação a um observador. A teoria da relatividade restrita permite escrever uma transformação de campos elétricos da forma [22]:

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad (3.2.4)$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}, \quad (3.2.5)$$

onde os campos com linha referem-se ao referencial em repouso do condutor, enquanto os campos sem linha referem-se ao referencial do observador na Terra. Considerando que tais condutores astrofísicos (como manchas solares) se deslocam com velocidades  $v \ll c$ , as expressões (3.2.4) e (3.2.5) podem ser aproximadas para:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{E}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp} - (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}, \quad (3.2.6)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}. \quad (3.2.7)$$

Dessa forma, mesmo que um objeto astrofísico não possua um campo elétrico no seu referencial de repouso – o que geralmente ocorre com plasmas, que possuem alta condutividade, de modo que seus campos eletrostáticos se tornam aproximadamente nulos [4, 13], um campo elétrico é induzido devido ao movimento relativo entre o condutor e o observador e, por consequência, uma partícula pode ser acelerada por esse campo.

### 3.3 Sunspots

Ao se investigar fontes, permeadas por campos eletromagnéticos, capazes de acelerar partículas, o primeiro candidato é o Sol (por ser o objeto com intenso campo eletromagnético mais próximo da Terra), que possui campos magnéticos em torno de  $10^{-4}$  T. Os campos magnéticos solares originam-se de correntes geradas pelos movimentos do plasma (constituído por prótons e elétrons), que circulam em seu interior.

Durante ciclos<sup>[13]</sup> de atividade solar, esses campos podem sofrer variações e gerar manchas solares (*sunspots*), que são regiões na superfície solar mais escuras e "frias", pois parte da energia térmica é transformada em energia magnética. A intensidade dos campos

<sup>12</sup>Referindo-se a qualquer objeto capaz de conduzir cargas, desde um fio de corrente até plasmas em torno de estrelas, por exemplo.

<sup>13</sup>Observações da atividade solar por dois séculos mostram que o número de *sunspots* é uma função periódica no tempo com período aproximadamente igual a 11 anos [19].

magnéticos nessas regiões é da ordem de 0, 1 T [1, 13] e apresentam variações em determinados intervalos de tempo. Sunspots possuem tempo de vida de aproximadamente um mês ou mais e raio médio em da ordem de  $10^7$  m. Quando esse campos variam no tempo, campos elétricos são induzidos e podem acelerar cargas, pois campos elétricos realizam trabalho.

Considere uma partícula de carga  $q$ , movendo-se com velocidade  $\mathbf{v}$ , em torno de uma mancha solar de raio  $R$ , permeada por um campo magnético variável  $\mathbf{B}$ , conforme ilustra a Fig. [3.2]:

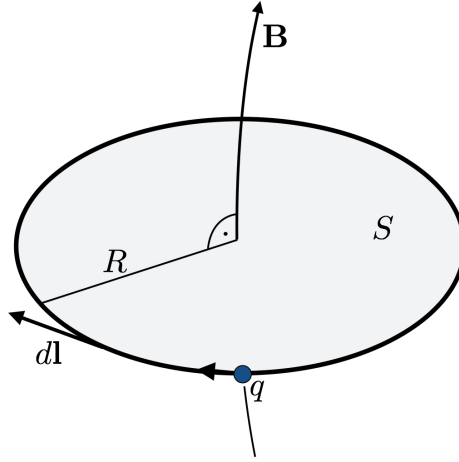


Figura 3.2: Partícula descrevendo órbita circular em torno de um *sunspot* de raio  $R$ .

A variação do fluxo magnético sobre a mancha será:

$$\frac{d}{dt}\Phi_{\mathbf{B}} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} (B\pi R^2) = \pi R^2 \frac{dB}{dt}, \quad (3.3.1)$$

onde foi utilizado  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B \cdot dS$ , sendo  $B$  a intensidade do campo magnético. Ao percorrer uma volta, a variação na energia da partícula é lida como<sup>14</sup>:

$$\Delta E_c = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -qV. \quad (3.3.2)$$

Num ciclo completo, tem-se:  $V = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_{\mathbf{B}}}{dt}$ . Assim, a eq. (3.3.2) leva a:

$$\Delta E_c = q \frac{d\Phi_{\mathbf{B}}}{dt} = q\pi R^2 \frac{dB}{dt}. \quad (3.3.3)$$

Para manchas solares típicas [1], com  $R = 10^7$  m, campos magnéticos de intensidade  $B = 0, 2$

<sup>14</sup>O sinal (-) significa que o trabalho é feito sobre a partícula.

T com taxa de variação diária<sup>15</sup>, a eq. (3.3.3) leva a um ganho de energia de:

$$\Delta E = 1,16 \times 10^{-10} J = 0,725 GeV. \quad (3.3.5)$$

Um ganho de energia também é possível quando o campo magnético da mancha solar mantém-se aproximadamente constante, com  $\mathbf{B} = B\hat{z}$ , mas a mancha se desloca com uma velocidade<sup>16</sup>  $\mathbf{v} = v\hat{x}$  perpendicular às linhas de campo. Dessa forma, o campo elétrico, medido pelo observador na Terra (também um campo elétrico induzido), será dado<sup>17</sup> pela eq. (3.2.7):

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3.3.6)$$

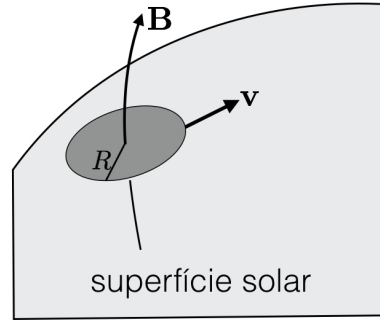


Figura 3.3: Sunspot de raio R deslocando-se sobre a superfície solar.

A Fig. [3.3] esquematiza de forma simples o movimento da mancha. A partícula obtém uma variação de energia dada<sup>18</sup> por:

$$\Delta E = q \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -q \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = qvB\Delta r, \quad (3.3.7)$$

onde se utilizou  $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = vB(-\hat{y})$  e  $d\mathbf{r} = dr\hat{y}$ . Assim, para uma mancha solar com velocidade

<sup>15</sup>Taxa de variação diária significa que:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{0,2}{8,64 \times 10^4} = 0,23 \times 10^5 T.s^{-1}, \quad (3.3.4)$$

onde se utilizou  $1dia = 8,64 \times 10^4 s$ .

<sup>16</sup>Essa consideração deve ser feita para que o formalismo descrito na eq. (3.2.7) seja consistente, pois os dois ref.  $S$  e  $S'$ , para a obtenção da eq. (3.2.7) estão dispostos de forma que os eixos  $x$  e  $x'$  são paralelos, enquanto os eixos  $y$  e  $z$  são ortogonais aos eixos  $y'$  e  $z'$ , respectivamente.

<sup>17</sup>Considerando-se que o campo elétrico no referencial da mancha é nulo pelas razões já discutidas.

<sup>18</sup>Note que, desta vez, não se está calculando uma integral sobre um caminho fechado, pois a partícula não está descrevendo uma volta completa em torno da mancha.

de deslocamento de  $10^7$  m por dia, com  $B = 0,2$  T e um deslocamento<sup>[19]</sup> de  $10^7$  m, a eq. (3.3.7) fornece a seguinte variação de energia,

$$\Delta E_c = 0,37 \times 10^{-10} \text{ J} = 0,23 \text{ GeV}, \quad (3.3.8)$$

para uma partícula que se desloca nas proximidades da mancha, seguindo a direção do campo induzido.

## 3.4 Pulsars

Um dos possíveis estágios finais da evolução estelar pode ser a formação de um *pulsar*<sup>[20]</sup>, uma estrela de nêutrons [4, 19, 27] que é altamente compacta, com alta densidade, e possui intensos campos magnéticos. Enquanto uma estrela evolui em direção ao final do seu ciclo de vida e forma um pulsar, seu momento angular é conservado [1, 19], isto é,  $L_e = L_p$ , onde o índice  $e$  indica estrela, enquanto  $p$  designa pulsar. Tem-se então:

$$I_e \omega_e = I_p \omega_p, \quad (3.4.1)$$

onde  $I$ ,  $L$  e  $\omega$  são as intensidades do momento de inércia, momento angular e velocidade angular, respectivamente. Como  $I = 2MR^2/5$  para uma esfera<sup>[21]</sup>, a eq. (3.4.1) leva a:

$$\omega_p = \left( \frac{R_e}{R_p} \right)^2 \omega_e, \quad (3.4.2)$$

onde se utilizou  $M_e/M_p \sim 1$  [1]. Como o raio de um pulsar é da ordem de 20 Km, enquanto uma estrela típica, que evolui para um pulsar, possui raio em torno de  $10^6$  Km, os pulsars possuem alta velocidade angular (rotação). Por exemplo, o Crab Pulsar possui um período de rotação de  $33 \times 10^{-3}$  s. Devido ao movimento de rotação do pulsar, forma-se um campo elétrico induzido dado por<sup>[22]</sup> [19, 27]:

$$\mathbf{E} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.4.3)$$

<sup>19</sup>Geralmente, manchas solares se deslocam na direção de outra mancha solar (*sunspots pairs*), cujo campo magnético é de sinal oposto. As distâncias típicas nesse cenário ficam em torno de  $10^7$  m [1].

<sup>20</sup>Apesar de terem sido descobertos há 50 anos, esses objetos compactos estelares ainda continuam sendo motivo de mistério e temas de muitas pesquisas em Astrofísica e Física de Plasmas.

<sup>21</sup>Consideram-se estrelas e pulsar aproximadamente esféricos.

<sup>22</sup>A obtenção da eq. (3.4.3), apesar de ser semelhante àquela dada na eq. (3.2.7), é feita através da relatividade geral, pois o referencial (com linha) em repouso com a estrela não é inercial quando visto pelo observador na Terra (referencial sem linha), devido ao movimento de rotação [27]. As ref. [18, 19] também comentam que esse resultado pode ser obtido por indução unipolar.

onde  $\mathbf{v} = \omega r \hat{\theta}$  é a velocidade de um ponto qualquer na estrela a uma distância  $r$  do seu centro.

Considerando que o campo magnético seja dado por  $\mathbf{B} = B\hat{z}$ , para um ponto na superfície do pulsar, obtém-se  $\mathbf{E} = -\omega RB(\hat{\theta} \times \hat{z}) = \omega BR\hat{r}$ . Assim, o ganho de energia para uma partícula deslocando-se na mesma direção que o campo elétrico será:

$$\Delta E_c = q \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = q\omega RB\Delta r. \quad (3.4.4)$$

Para um pulsar típico [1], tem-se  $R = 20$  Km,  $B = 0,25 \times 10^9$  T e  $\omega = 0,6 \times 10^4$  rad/s, a eq. (3.4.4) fornece uma variação de energia (por unidade de comprimento<sup>23</sup>) da ordem de:

$$\frac{\Delta E_c}{\Delta r} = 0,48 \times 10^{-2} \left( \frac{J}{m} \right) \sim 10^{16} \left( \frac{eV}{m} \right). \quad (3.4.5)$$

O ganho de energia típico ocorre nas "proximidades" do pulsar, onde a partícula pode se deslocar por distâncias de 10 Km enquanto sobre ação do campo induzido. Nesse caso, o ganho de energia alcança valores da ordem  $10^{20}$  eV [18].

### 3.5 Mecanismo de aceleração de Fermi

Os mecanismos de aceleração comentados brevemente nas seções anteriores ilustram como raios cósmicos podem adquirir energias *próximas* a fontes de campos eletromagnéticos. Entretanto, outros mecanismos de aceleração podem indicar como as partículas adquirem energia ao se propagarem pelo espaço. Uma das ideias básicas para aceleração deste tipo surgiu num trabalho de [10] Enrico Fermi (1901-1954), em 1949, que propôs que as partículas ganham energia ao colidirem de forma estocástica com nuvens<sup>24</sup> magnéticas no meio interestelar. Esta é a essência do chamado *Mecanismo de Fermi* [1, 2, 4, 5, 10, 18, 20].

Essas colisões são *reflexões perfeitas*, pois essas nuvens atuam como espelhos magnéticos. Isto é, são permeadas por campo magnético não-homogêneo, com variação de baixa para alta intensidade numa pequena extensão espacial, sendo assim capazes de refletir uma partícula carregada que atinge (*adentra*) tal região. O Apêndice C demonstra brevemente como essa reflexão pode ocorrer.

Considere que uma nuvem move-se com velocidade  $V$  em relação ao referencial do observador (ref. S). Nesse referencial, a partícula tem, inicialmente, energia e momento dados por  $E$  e  $p$ . A Fig. [3.4] é uma visualização simples do processo da colisão da partícula com a nuvem.

<sup>23</sup>O resultado será apresentado nessa forma pois não se supôs o deslocamento total da partícula no campo elétrico.

<sup>24</sup>Fermi diz em seu artigo que partículas cósmicas eventualmente *colidem* com nuvens de campos magnéticos que vagam no meio interestelar.

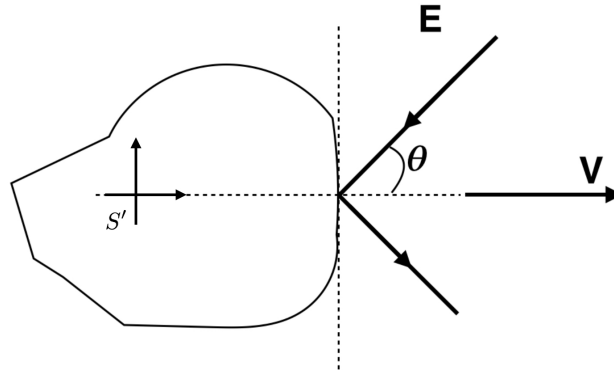


Figura 3.4: A partícula *incide* sobre uma nuvem, que se propaga com velocidade  $V$ , com energia inicial  $E$ , segundo um ângulo  $\theta$  com a direção da velocidade  $V$ , medidos no referencial do observador  $S$ .

No referencial  $S$ , o momento inicial da partícula na direção  $x$  é dado por  $p_x = -p \cos \theta$  e a energia (inicial) é dada por  $E$ . No referencial  $S'$ , que *viaja* junto com a nuvem, a partícula terá energia inicial dada<sup>25</sup> por:

$$E'_i = \gamma (E - p_x V), \quad (3.5.1)$$

$$E'_i = \gamma (E + pV \cos \theta). \quad (3.5.2)$$

O momento inicial (antes da colisão com a nuvem), na direção  $x$ , visto no ref.  $S'$ , será dado por:

$$p'_{x(i)} = \gamma \left( p_x - \frac{EV}{c^2} \right), \quad (3.5.3)$$

$$p'_{x(i)} = \gamma \left( -p \cos \theta - \frac{EV}{c^2} \right), \quad (3.5.4)$$

onde se utilizou a transformação de Lorentz para o 4-vetor energia-momento e  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ , com  $\beta = V/c$ .

No referencial  $S'$  (na nuvem), a colisão é elástica, conseqüentemente, a energia é conservada:  $E'_i = E'_f$ . Além disso, o momento na direção  $x$ , no referencial  $S'$ , é revertido<sup>26</sup>:  $p'_{x(f)} = -p'_{x(i)}$ , logo:

$$p'_{x(f)} = -\gamma \left( -p \cos \theta - \frac{EV}{c^2} \right). \quad (3.5.5)$$

<sup>25</sup>É necessário efetuar transformações de Lorentz na energia e no momento pois a partícula é relativística e a colisão é descrita de forma mais simples no referencial da nuvem.

<sup>26</sup>Analogamente a uma bola de tênis colidindo com uma parede rígida. Fermi levou isso em consideração pois, no referencial da nuvem, ela está em repouso e a energia da partícula é conservada, havendo apenas uma mudança no sentido do momento da mesma.



Assim, para se determinar a energia final da partícula após a colisão no referencial  $S$  (do observador), deve-se fazer uma transformada reversa na energia final – depois da colisão – vista em no ref.  $S$ . Isto é:

$$E_f = \gamma (E'_f + V p'_{x(f)}). \quad (3.5.6)$$

Substituindo as eq. (3.5.2) e (3.5.5) na eq. (3.5.6), obtém-se:

$$E_f = \gamma \left[ \gamma (E + pV \cos \theta) - \gamma V \left( -p \cos \theta - \frac{EV}{c^2} \right) \right] \quad (3.5.7)$$

cuja simplificação leva a

$$E_f = \gamma^2 E \left( 1 + \frac{2pV}{E} \cos \theta + \frac{V^2}{c^2} \right), \quad (3.5.8)$$

onde  $E = E_i$  no ref.  $S$ . Lembrando que:

$$\frac{p}{E} = \frac{mu}{mc^2}, \quad (3.5.9)$$

onde  $u$  é o módulo da velocidade da partícula no ref.  $S$  e  $\beta = V/c$ , a eq. (3.5.8) reduz-se a:

$$E_f = E \left( \frac{1 + 2\beta \frac{u}{c} \cos \theta + \beta^2}{1 - \beta^2} \right). \quad (3.5.10)$$

Calculando a diferença  $\Delta E = E_f - E$  a partir da eq. (3.5.10), obtém-se:

$$\Delta E = E_f - E = E \left( \frac{1 + 2\beta \frac{u}{c} \cos \theta + \beta^2}{1 - \beta^2} - 1 \right), \quad (3.5.11)$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \left( 2\beta \frac{u}{c} \cos \theta + 2\beta^2 \right) (1 - \beta^2)^{-1}. \quad (3.5.12)$$

Usando a aproximação  $(1 - \beta^2)^{-1} \simeq (1 + \beta^2)$  e considerando apenas os termos de menor ordem em  $\beta$ , resulta:

$$\frac{\Delta E}{E} \simeq 2\beta^2 + 2\beta \frac{u}{c} \cos \theta. \quad (3.5.13)$$

Esta equação representa a taxa (percentagem) de variação na energia da partícula ao colidir uma única vez com uma dada nuvem.

Ao longo de sua trajetória pelo espaço, a partícula colide com várias nuvens magnéticas, não sendo possível determinar sob qual ângulo a partícula incide sobre cada uma das nuvens. Deste modo, o ângulo de incidência pode ser considerado randômico, variando entre 0 e  $\pi$ . Para  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , as colisões são frontais (*head-on*), enquanto para  $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ ,

as colisões são chamadas de "traseiras" (*following*). Vale destacar que, quando a colisão é frontal, o termo em primeira ordem em  $\beta$  da eq. (3.5.13) contribui positivamente para a taxa de variação de energia; no caso em que a colisão é "traseira", a contribuição em primeira ordem é negativa. Dessa forma, deve-se calcular um valor médio sobre tal ângulo, que repercutirá diretamente sobre o valor médio<sup>27</sup> da taxa de variação de energia, eq. (3.5.13), ou seja:

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = 2 \left( \beta^2 + \beta \frac{u}{c} \langle \cos \theta \rangle \right). \quad (3.5.14)$$

O problema agora se restringe ao cômputo do valor médio do cosseno do ângulo de incidência da partícula sobre a nuvem. Numa situação em que todas as configurações de choque ocorressem com a mesma probabilidade, ter-se-ia  $\langle \cos \theta \rangle = 0$  ao integrar sobre todos os ângulos. Entretanto, colisões frontais (*head-on*) e colisões "traseiras" (*following*) transcorrem [10] com probabilidades diferentes. A probabilidade de ocorrência de colisão é proporcional ao elemento de ângulo sólido subtendido pelo elemento de área da nuvem sobre a qual a partícula incide e à taxa de incidência de partículas, que é proporcional ao fator<sup>28</sup>  $1 + (V/c) \cos \theta$ . Dessa forma, a densidade de probabilidade para uma colisão é:

$$dP \approx \left( 1 + \frac{V}{c} \cos \theta \right) d\Omega. \quad (3.5.15)$$

Para colisão frontal, tem-se  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , o que implica em contribuição positiva em  $V/c$ . A probabilidade de colisão traseira é dada também por (3.5.15). A diferença é que, neste caso, o ângulo  $\theta$  é maior que  $\pi/2$ , o que faz a contribuição em  $V/c$  ser negativa, ou seja, implicando num elemento de probabilidade proporcional a  $1 - (V/c) \cos \theta$ .

As colisões frontais ocorrem com maior frequência, assim, ao final do processo de aceleração, a partícula sofre efetivamente mais colisões frontais. Dessa forma, calcular-se-á o ganho médio de energia para este tipo de colisão. Então, teremos:

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int \cos \theta dP}{\int dP}, \quad (3.5.16)$$

onde  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi = -d(\cos \theta) d\phi$ ; assim, a eq. (3.5.16) simplifica-se em:

<sup>27</sup> *Spoiler alert*: ver-se-á que o valor médio dessa taxa representará um ganho de energia para a partícula.

<sup>28</sup> O Apêndice D demonstra como se obter tal fator, que "coincide" com a velocidade de aproximação entre nuvem e partícula vista do ponto de vista da partícula.

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int_{-1}^{+1} \cos \theta (1 + \beta \cos \theta) d(\cos \theta) \int d\phi}{\int_{-1}^{+1} (1 + \beta \cos \theta) d(\cos \theta) \int d\phi}. \quad (3.5.17)$$

Implementando a substituição  $x = \cos \theta$ , obtém-se:

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int_{-1}^{+1} x(1 + \beta x) dx}{\int_{-1}^{+1} (1 + \beta x) dx} = \frac{2\beta/3}{2}, \quad (3.5.18)$$

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{1}{3}\beta. \quad (3.5.19)$$

Substituindo esse resultado na eq. (3.5.14) e lembrando que  $u \simeq c$ , o ganho médio de energia numa colisão será dado por  $\frac{\Delta E}{E} = 2\beta^2 + \frac{2}{3}\beta^2$ , ou seja:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{8}{3}\beta^2, \quad (3.5.20)$$

onde os termos de ordens superiores em  $\beta$  foram desprezados.

Esse é o resultado previsto para a taxa média de ganho de energia (por colisão). O apêndice E faz uma descrição mais detalhada sobre o mecanismo de Fermi. Observe que a eq. (3.5.20) sugere uma lei exponencial para a energia ganha por colisão. Como a velocidade da nuvem, em torno [1, 4] de 10 km/s, é muito menor que a velocidade da partícula, o ganho médio de energia por colisão é muito pequeno, sendo necessário um grande número de colisões até que a partícula obtenha energias extremamente altas. Fermi sugeriu, através desse mecanismo, que quanto maior for a energia da partícula incidente, maior será o ganho médio de energia quando a mesma chocar-se com uma nuvem vagando pelo meio interestelar e, assim, o mecanismo consegue se tornar eficiente. Esse mecanismo é conhecido também como mecanismo de Fermi de segunda ordem.

### 3.5.1 Espectro previsto

A possibilidade de colisões randômicas com várias nuvens durante a propagação dos raios cósmicos no meio interestelar indica que essas partículas difundem-se ao longo de suas trajetórias até a Terra onde são detectadas.

Isso significa que as partículas sofrem espalhamentos aleatórios quando colidem com as nuvens magnéticas. Assim, a propagação de um conjunto de  $N$  partículas, partindo de sua fonte de origem, cruzando o meio interestelar e alcançando a Terra, pode ser descrito por

um processo de difusão [4, 14, 20, 28]. Sabendo disso, a equação de difusão para o número de partículas que se difundem pelo espaço,  $N = N(E, \mathbf{r}, t)$ , é dada por [4]:

$$\frac{dN}{dt} = D\nabla^2 N + \frac{\partial}{\partial E} [b(E)N(E)] - \frac{N}{\tau_c} + Q(E), \quad (3.5.21)$$

onde  $D$  é o coeficiente de difusão<sup>29</sup>,  $b(E)$  é a taxa de variação temporal de energia das partículas ao interagirem (neste caso, está relacionada à variação de energia devido a colisões com as nuvens),  $Q(E)$  é um termo que indica fontes de partículas dentro da região onde difundem, e o termo  $N/\tau_c$  indica o número de partículas que abandonam a região de aceleração (a região onde as partículas se difundem). Aqui  $\tau_c$  representa o tempo característico para que uma partícula abandone a região de aceleração.

No estado estacionário, ou seja,  $\frac{dN}{dt} = 0$ , e considerando que  $Q(E) = 0$  e  $\nabla^2 N = 0$  (sem fontes ou sumidouros para a densidade de partículas  $N$  dentro da região de aceleração), a eq. (3.5.21) simplifica-se em:

$$\frac{\partial}{\partial E} [b(E)N(E)] - \frac{N}{\tau_c} = 0. \quad (3.5.22)$$

Para se resolver a eq. (3.5.22), é necessário determinar  $b(E)$ , que é definido por:

$$b(E) = -\frac{dE}{dt}. \quad (3.5.23)$$

Da eq. (3.5.20), sabe-se que após uma colisão com uma nuvem, a variação de energia da partícula é dada por  $\Delta E = \frac{8}{3}\beta^2 E$ . Pode-se estimar o tempo entre duas colisões sucessivas com as nuvens assumindo-se que a distância média entre as nuvens seja dada por  $L$ . Assim, o intervalo entre duas colisões será aproximadamente  $\Delta t \sim L/c$ , no caso de partículas ultra-relativísticas. Dessa forma, pode-se estabelecer que:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{8}{3}\beta^2 E \frac{c}{L}, \quad (3.5.24)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{8}{3} \frac{V^2}{cL} E = \alpha E, \quad (3.5.25)$$

onde  $\alpha = \frac{8V^2}{3cL}$  é uma constante. Utilizando as eqs. (3.5.25) e (3.5.23), a eq. (3.5.22) leva a:

$$-\alpha \frac{d}{dE} [EN(E)] = \frac{N(E)}{\tau_c}, \quad (3.5.26)$$

$$N(E) + E \frac{dN(E)}{dE} = -\frac{1}{\alpha\tau_c} N(E), \quad (3.5.27)$$

<sup>29</sup>Esse coeficiente vem da Lei de Fick para difusão.

$$E \frac{dN(E)}{dE} = -xN(E), \quad (3.5.28)$$

onde  $x = 1 + \frac{1}{\alpha\tau_c}$ . Resolvendo a eq. (3.5.28), obtém-se:

$$N(E) = kE^{-x}, \quad (3.5.29)$$

onde  $k$  é uma constante de integração.

Note que o modelo de propagação de raios cósmicos através de colisões randômicas com nuvens magnéticas (que levam a um ganho de energia pelo mecanismo de Fermi) conduz a um processo natural de difusão capaz de reproduzir um espectro (uma função para o número de partículas em relação a energia) numa lei de potência da mesma forma que é observada no espectro de energia dos raios cósmicos [4, 18].

Entretanto, é um modelo que depende de dois parâmetros,  $L$  e  $\tau_c$ , que não são conhecidos. O que se pode fazer, neste caso, é estimar possíveis valores. Por exemplo, se se considera que a região de aceleração é a Via Láctea, então, o tempo para escapar dessa região,  $\tau_c$ , será da mesma ordem que o tempo para se abandonar a galáxia.

É possível obter uma forma para o espectro de raios cósmicos através de uma contagem estatística do número de colisões, com nuvens diversas, que uma partícula precisa efetuar para obter um valor de energia  $E > E_0$ , onde  $E_0$  é a energia inicial da partícula antes da primeira colisão. Para isso, define-se  $P$  como a probabilidade de que a partícula escape da região de aceleração [1],  $(1 - P)$  será a probabilidade de que continue sendo acelerada depois de uma colisão. E se assume também que  $(1 - P)$  seja constante com a energia, ou seja, mesmo após algumas colisões (quando a energia da partícula será maior do que sua energia inicial), a probabilidade de permanecer na região de aceleração após a  $i$ -ésima colisão continuará sendo dada por  $(1 - P)$ .

A cada colisão, observa-se que a energia sofre um incremento:  $E - E_0 = (8/3)\beta^2 E_0$ , o que implica que  $E = E_0(1 + \epsilon)$ , onde  $E_0$  é a energia inicial da partícula e  $\epsilon = (8/3)\beta^2$ . Após uma segunda colisão, ter-se-á  $E_2 = E_1(1 + \epsilon) = E_0(1 + \epsilon)^2$ . Assim, após  $n$  colisões, a energia da partícula será dada por:

$$E_n = E_0(1 + \epsilon)^n. \quad (3.5.30)$$

Partindo desse resultado, pode-se determinar o número de colisões ( $n$ ) necessárias para que a partícula possa adquirir energia  $E_n$ , aplicando o logaritmo na expressão anterior, o que fornece:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{E}{E_0}\right)}{\ln(1 + \epsilon)}. \quad (3.5.31)$$

A probabilidade de que a partícula continue na região de aceleração após  $n$  colisões será o produto da probabilidade de permanecer na região após cada uma das  $n$  colisões, isto é, será  $1 - P$  elevada a  $n$ -ésima potência, ou seja,  $(1 - P)^n$ .

O fluxo de partículas (raios cósmicos) observado, composto por  $N$  partículas com energia maior ou igual<sup>30</sup> a  $E_n$  (lembrando que  $E_n$  é a energia da partícula após  $n$  colisões na região de aceleração), será constituído por todas as partículas que sofreram  $m \geq n$  colisões e permaneceram dentro da zona de aceleração. Logo deve ser proporcional à probabilidade de que cada partícula tenha permanecido na região de aceleração até sofrer pelo menos  $n$  colisões, ou seja:

$$N(\geq E) \approx \sum_{m=n}^{\infty} (1 - P)^m. \quad (3.5.32)$$

A eq. (3.5.32) corresponde a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, de razão  $(1 - P)$ , cuja soma é dada por  $a_1/(1 - q)$ , onde  $q$  é a razão e, neste caso, é menor que 1. Logo:

$$N(\geq E) \approx \frac{(1 - P)^n}{P}, \quad (3.5.33)$$

$$\ln(N) = \ln(1 - P)^n - \ln(P). \quad (3.5.34)$$

Utilizando-se a eq. (3.5.31), a eq. (3.5.34) simplifica-se em:

$$N(\geq E) = \left(\frac{E}{E_0}\right)^{\lambda} \left(\frac{1}{P}\right), \quad (3.5.35)$$

onde  $\lambda = \frac{\ln(1-P)}{\ln(1+\epsilon)}$ . Observe que  $\lambda$  é negativo pois  $\ln(1 - P)$  é negativo, uma vez que  $P < 1$ . Assim, substituindo-se  $\lambda$  por  $-x'$ , que será positivo, a eq. (3.5.35) leva a:

$$N(\geq E) \approx \left(\frac{E}{E_0}\right)^{-x'}. \quad (3.5.36)$$

As expressões (3.5.36) e (3.5.29) representam lei de potências que surgem no mecanismo de Fermi e que podem se ajustar à forma do fluxo  $N$  de partículas observado. Entretanto, os expoentes  $x$  e  $x'$  dependem da energia média adquirida por colisão, que é

<sup>30</sup>Esse valor é útil apenas para que se obtenha uma lei de potência no final.

muito pequena. Além disso, ambos os índices dependem de parâmetros que foram introduzidos para a construção do modelo: no caso da eq. (3.5.29),  $x$  depende de  $\alpha$  (que está associado ao ganho de energia por colisão) e  $\tau_c$ ; na eq. (3.5.36),  $x'$  depende da probabilidade de que a partícula continue a ser acelerada após uma colisão,  $(1 - P)$ , e de  $\epsilon$  (que está associado ao ganho de energia por colisão). Assim, é razoável supor que tais parâmetros estejam relacionados, uma vez que as eq. (3.5.36) e (3.5.29) são provenientes do mesmo mecanismo.

## 3.6 Mecanismo de aceleração em frentes de choque

O mecanismo de aceleração de Fermi proporciona um ganho de energia para a partícula, por colisão, em segunda ordem em  $\beta = V/c$ . Isso diminui a eficiência do processo, pois as velocidades típicas das nuvens magnéticas no meio interestelar são em torno de  $V \sim 10$  Km/s. Entretanto, a ideia de Fermi inicial inspirou e motivou a busca por mecanismos de aceleração mais eficazes, capazes de explicar maiores ganhos de energia.

Um mecanismo mais eficiente foi desenvolvido por volta dos anos 1970 por vários pesquisadores [2, 4, 5, 15, 14, 18, 28] e trata de colisões de partículas com frentes de choque. As frentes de choque se formam quando perturbações num gás se propagam, a partir de sua fonte, a uma velocidade maior do que a velocidade do som no referido meio. Isso gera uma descontinuidade entre as regiões atrás (chamada de *downstream*) e na frente (*upstream*) da perturbação. Essas descontinuidades são chamadas de frentes de choque ou ondas de choque e, geralmente<sup>31</sup>, surgem em explosões de supernova onde o fluxo de gases ejetados se propaga com velocidades supersônicas, em torno de  $10^4$  Km/s [1, 4].

À medida em que a frente de choque se propaga, grandezas relacionadas ao gás (*upstream* e *downstream*), como pressão  $P$ , densidade  $\rho$  e temperatura  $T$ , sofrem variações. A Fig. [3.5] ilustra esse processo.

É possível mostrar [4] que existem algumas relações de conservação entre essas grandezas. Uma dessas relações, a conservação do fluxo de massa,

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \quad (3.6.1)$$

com  $v_i$ ,  $i = 1, 2$ , sendo a velocidade do gás, será útil na análise a seguir. Se um observador viaja junto com a frente de choque, ele observa o gás upstream se aproximando com velocidade

<sup>31</sup>As frentes de choque podem surgir em vários ambientes astrofísicos, como no sistema solar, na Via Láctea e por todo o Universo. Podem surgir também em jatos de núcleos ativos de galáxias [18]. Alguns pesquisadores também buscam evidências de que os eventos  $\sim 10^{20}$  eV podem ser causados em choques de *gamma ray bursters* (as explosões mais energéticas já observadas no Universo) [28].

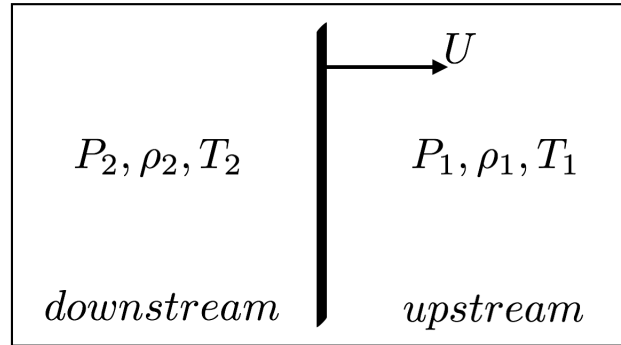


Figura 3.5: Descrição vista no referencial no qual a frente de choque se move com velocidade  $U$ .

$-U$  e o gás downstream se afastando com velocidade<sup>32</sup>  $1/4U$ . A Fig. [3.6] ilustra essa situação.

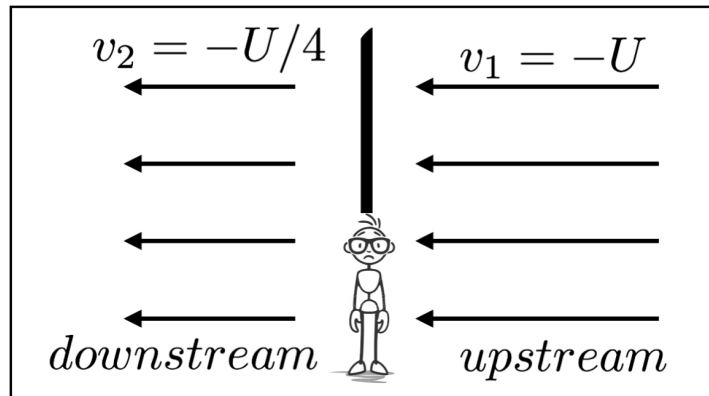


Figura 3.6: Situação vista no ref. S no qual o choque está em repouso.

Considerando agora o ref. das partículas no upstream, a situação é um pouco diferente. Nesse ref. o choque se aproxima com velocidade  $U$  e o gás *downstream* se aproxima com velocidade<sup>33</sup>  $v_2 = 3/4U$ . Conforme a Fig. [3.7a]. No ref. das partículas no downstream, o choque se afasta com velocidade  $U/4$  e o gás *upstream* se aproxima com velocidade<sup>34</sup>  $3U/4$ .

<sup>32</sup>Para essa análise, considera-se um plasma ionizado com coeficiente adiabático dado por  $\gamma_a = 5/3$ . Uma relação de conservação para frentes de choque é dada [4] por:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \quad (3.6.2)$$

Assim, utilizando essa relação e a eq. (3.6.1), obtém-se  $v_2 = \frac{1}{4}v_1$ .

<sup>33</sup>Como o choque é não relativístico, pode-se fazer uma transformação galileana de velocidades. Nesse caso, tem-se  $v'_1 = -U$ ,  $v_2 = -1/4U$ . Assim:

$$v'_2 = v_2 - V = -\frac{1}{4}U - (-U) = \frac{3}{4}U. \quad (3.6.3)$$

<sup>34</sup>Pode-se obter essa velocidade fazendo-se, novamente, uma transformação galileana. Note, entretanto,



A Fig. [3.7b] ilustra este caso.

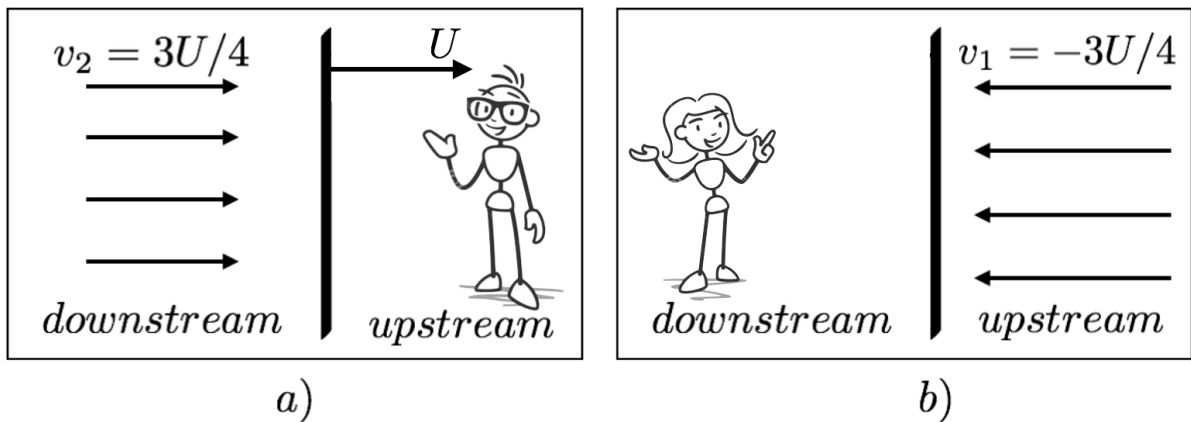


Figura 3.7: Situações distintas em relação à situação vista no referencial de repouso do choque dado na Fig. [3.6].

Nesses dois casos, as partículas na região (downstream ou upstream) observam o gás da outra região (upstream ou downstream) se aproximando com o mesmo módulo de velocidade. Assim, se uma partícula na região upstream se move em direção ao choque, perceberá o gás downstream se aproximando, o que caracteriza uma colisão frontal. O mesmo efeito ocorre quando uma partícula na região downstream se desloca em direção ao choque: perceberá o gás upstream se aproximando, o que também caracteriza uma colisão frontal. Dessa forma, diferentemente do mecanismo de Fermi, no qual colisões frontais e traseiras podem acontecer, no mecanismo por frentes de choque, as colisões (partícula incidindo sobre o gás através da frente de choque) são sempre frontais.

Agora, é possível determinar o ganho<sup>35</sup> de energia da partícula ao colidir com a frente de choque, ou seja, ao passar de uma região (downstream ou upstream) para a outra. Assume-se que a partícula de alta energia esteja presente na região upstream. Considera-se também que a velocidade dessa partícula é muito maior do que a velocidade de propagação do choque. Considere que uma partícula, com momento  $\mathbf{p}_i$  e energia  $E_i$ , medidos pelos referencial  $S$  (que está em repouso com o gás upstream), incide sobre o choque sob um ângulo  $\theta$ , tal como a Fig. [3.8] ilustra<sup>36</sup>.

que a velocidade do choque no referencial downstream será a velocidade que o gás downstream tinha no ref.  $S$  em que choque estava em repouso. Assim:

$$v'_1 = v_1 - V = -U - \left(-\frac{U}{4}\right) = -\frac{3}{4}U. \quad (3.6.4)$$

<sup>35</sup>Mais uma vez, a conclusão de que a partícula irá ganhar energia é compreendida *a posteriori*.

<sup>36</sup>Partícula e observador fora de escala na Fig. [3.8].

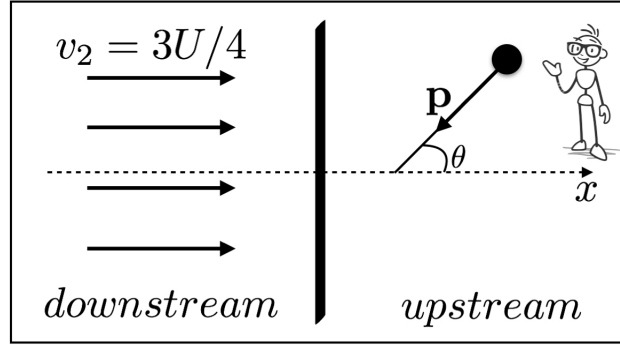


Figura 3.8: Partícula atravessando a frente de choque.

Como a partícula é relativística (raio cósmico ultra-energético), efetua-se uma transformação de Lorentz na energia da partícula para o observador na região downstream (grandezas com linha se referem, neste caso, ao observador downstream), isto é:

$$E'_i = \gamma (E_i - v p_{i(x)}), \quad (3.6.5)$$

$$E'_i = \gamma (E_i + p_i v \cos \theta), \quad (3.6.6)$$

onde  $v = 3U/4$  é a velocidade do gás downstream (para o caso de um plasma ionizado com coeficiente adiabático  $\gamma_a = 5/3$ ) medido pelo observador upstream. Considera-se que após atravessar o choque, a partícula irá sofrer efetivamente reflexão<sup>37</sup> na nuvem de gás downstream (tal como no mecanismo de Fermi) [18, 20], ou seja, a interação da partícula com a nuvem resulta numa reflexão no momento da partícula. A Fig. [3.9] ilustra a interação entre o raio cósmico com as nuvens e a frente de choque.

Dessa forma, a energia e momento finais da partícula no referencial downstream serão  $E'_f = E'_i$  e  $p'_f = -p'_i$ . Assim, a transformada no momento será:

$$p'_{i(x)} = \gamma \left( p_{i(x)} - \frac{E_i V}{c^2} \right), \quad (3.6.7)$$

$$p'_{i(x)} = \gamma \left( -p_i \cos \theta - \frac{E_i V}{c^2} \right). \quad (3.6.8)$$

Pode-se obter a energia final, medida pelo observador upstream (sem linha), realizando-se outra transformada de Lorentz:

$$E_f = \gamma (E'_f + p'_{f(x)} V). \quad (3.6.9)$$

<sup>37</sup>Isso acontece porque as nuvens magnéticas também são formadas em todos os sistemas onde os choques estão presentes.

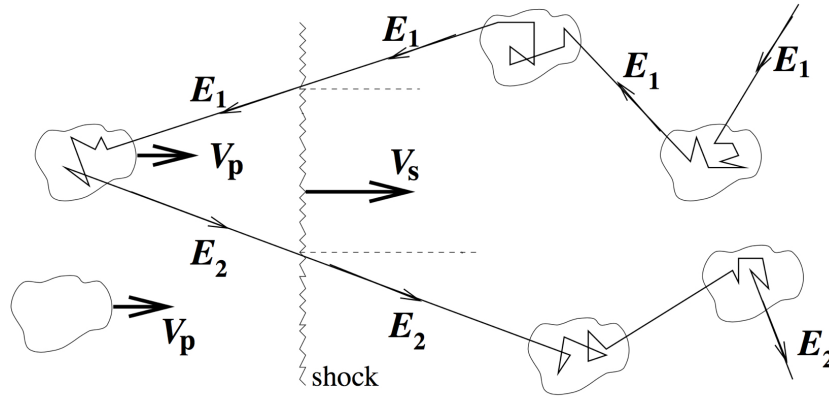


Figura 3.9: Partícula (com energia inicial  $E_1$ ) interagindo com as nuvens de plasma (com velocidades  $V_p$ ), atravessando a frente de choque (com velocidade  $V_s$ ) e sofrendo *reflexões* [20, 34].

Utilizando as eqs. (3.6.6) e (3.6.8), a eq. (3.6.9) leva a:

$$E_f = \gamma \left[ \gamma (E_i + p_i v \cos \theta) - \gamma v \left( -p_i \cos \theta - \frac{E_i v}{c^2} \right) \right], \quad (3.6.10)$$

cuja simplificação fornece:

$$E_f = \gamma^2 E_i \left( 1 + \frac{2pv}{E_i} \cos \theta + \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (3.6.11)$$

Calculando-se a taxa de variação de energia, obtém-se:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_f - E_i}{E_i} = \gamma^2 \left( 1 + 2 \frac{p_i}{E_i} V \cos \theta + \frac{V^2}{c^2} - 1 + \frac{V^2}{c^2} \right), \quad (3.6.12)$$

com  $\gamma^2 = (1 - v^2/c^2)^{-1}$ . Considerando que as frentes de choque não são relativísticas, pode-se fazer a aproximação  $\gamma^2 \sim 1$ , tal como foi feito para o mecanismo de Fermi, obtendo:

$$\frac{\Delta E}{E} \simeq 2\beta \cos \theta + 2\beta^2, \quad (3.6.13)$$

onde se utilizou  $\frac{p}{E} = u/c^2$ , sendo  $u$  o módulo da velocidade da partícula que é  $u \simeq c$  e  $\beta = v/c$ .

Note que o resultado obtido na eq. (3.6.13) é idêntico à eq. (3.5.13) obtida no mecanismo de Fermi [19]. A diferença entre os cenários físicos em que tais mecanismos de aceleração ocorrem se manifesta quando se efetua o cálculo do valor médio para taxa de variação de energia. No caso de colisão com a frente de choque, a probabilidade de ocorrência de colisão será proporcional ao elemento de ângulo sólido subtendido pelo elemento de área do choque sob o qual a partícula incide e à taxa de incidência de partículas que, neste

caso, está sendo medida pelo observador upstream. Neste referencial, a taxa de incidência é proporcional<sup>38</sup> a componente- $x$  da velocidade com a qual as partículas incidem, ou seja,  $dP \propto u \cos \theta d\Omega$  [4, 15]. Além disso, a janela de ângulo de incidência  $\theta$  para a partícula será  $[0, \pi/2]$ , pois a outra metade desse ângulo azimutal,  $[\pi/2, \pi]$ , caracterizaria colisões não frontais e, conforme já foi comentando, no mecanismo de aceleração por frentes de choque, as colisões são apenas frontais. Levando em conta essas considerações, obtém-se:

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = 2\beta \langle \cos \theta \rangle + 2\beta^2, \quad (3.6.14)$$

com o valor médio de  $\cos \theta$  sendo dado por:

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int_0^1 \cos^2 \theta d(\cos \theta) \int d\phi}{\int_0^1 \cos \theta d(\cos \theta) \int d\phi}. \quad (3.6.15)$$

Implementando a substituição  $x = \cos \theta$ , a eq. (3.6.15) resulta:

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{2}{3}. \quad (3.6.16)$$

Dessa forma, a taxa média de variação de energia para a partícula atravessar o choque (upstream para downstream) e ser refletida na região downstream será (desprezando-se termos de ordens superiores em  $\beta$ ):

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{4}{3}\beta. \quad (3.6.17)$$

O ganho de energia por colisão será de primeira ordem em  $\beta$ . Por isso, esse mecanismo de aceleração por frentes de choque é comumente chamado de mecanismo de aceleração de Fermi de primeira ordem [4, 2, 5, 14, 28].

Entretanto, é importante mencionar que são distintos os cenários astrofísicos em que ocorrem os mecanismos de Fermi de primeira e segunda ordem. O mecanismo de segunda ordem acontece por reflexões especulares dos raios cósmicos em espelhos magnéticos de nuvens que vagam pelo meio interestelar. O mecanismo de primeira ordem acontece quando raios cósmicos colidem com frentes de choque que, geralmente, ocorrem em supernovas e núcleos ativos de galáxias. Além disso, o fator  $\beta$  em ambos os mecanismos são diferentes: para as

<sup>38</sup>Considere duas partículas que incidem sobre o choque sob um mesmo ângulo  $\theta$  com uma mesma velocidade  $u \simeq c$ . A partícula 1 leva um tempo  $t_1 = L_1/c \cos \theta$  alcançar o choque; onde  $L_1$  é uma distância arbitrária (paralela ao eixo- $x$ ) percorrida pela partícula 1. A partícula 2 leva um tempo  $t_2 = L_2/c \cos \theta$ . O intervalo de tempo de chegada dessas partículas sobre o choque será  $\Delta t = (L_1 + L_2)/c \cos \theta$ . Dessa forma a taxa de incidência de partículas,  $T = N/\Delta t$ , será proporcional ao fator  $c \cos \theta$ .

nuvens magnéticas,  $\beta \sim 10^{-4}$ , pois as nuvens possuem velocidades típicas em torno de 10 Km/s; nas frentes de choque,  $\beta \sim 10^{-1}$ , já que as ondas de choque de supernovas possuem velocidades em torno de  $10^4$  Km/s.

Dessa forma, o mecanismo de primeira ordem é muito mais eficiente do que o mecanismo original proposto por Fermi. Tendo em vista esse fato, os próximos capítulos deste trabalho investigarão uma forma de melhorar o mecanismo de segunda ordem de Fermi propondo anisotropia no espaço através de violação da simetria de Lorentz.

## Capítulo 4

# Teoria de violação de Lorentz e astropartículas

O Modelo Padrão Estendido (MPE) é uma construção teórica desenvolvida por Kostelecký e Colladay em 1998 e inclui todos os termos que podem violar a simetria de Lorentz, um pilar do Modelo Padrão da Física de Partículas. É possível que, num cenário no qual a simetria de Lorentz possa ser quebrada, novos efeitos podem surgir devido a esses termos violadores do MPE em sistemas físicos conhecidos. Neste capítulo, abordam-se tópicos básicos para o prosseguimento da proposta deste trabalho, explanando brevemente sobre a invariância de Lorentz, o setor de férmions do MPE, as relações de dispersão modificadas pelo termo  $\bar{\Psi} c^{\mu\nu} \gamma_\nu \partial_\mu \Psi$  e alguns possíveis efeitos da violação de Lorentz (VL) sobre astropartículas.

### 4.1 Simetria de Lorentz

Simetrias são propriedades de sistemas físicos que não mudam sob certas transformações. Por exemplo, o comprimento de um vetor no plano não muda sob uma rotação. A identificação de simetrias na Natureza é de importância na Física pois levam a certas quantidades físicas (como momento, energia, etc.) que são conservadas, através do teorema de Noether<sup>[1]</sup>

Por muito tempo, pensou-se que a simetria de Galileu (transformações de Galileu), que deixavam a mecânica newtoniana invariante, fosse exata. Porém, com o advento da teoria de Maxwell, constatou-se que esse conjunto de simetrias não funcionava para as leis

---

<sup>1</sup>O teorema de Noether, desenvolvido em 1918 por Emmy Noether (1882-1935), estabelece que simetrias contínuas num sistema levam a cargas conservadas, isto é, se um sistema é invariante sob transformações contínuas, uma quantidade física relacionada é conservada. Por exemplo, simetria sob translações levam a conservação de momento linear.

do eletromagnetismo. Como as equações de Maxwell eram leis físicas consistentes com todos os experimentos, acreditava-se que deveriam ser invariantes por tais transformações (ou algum outro conjunto de transformações). Com o advento da Teoria da Relatividade Restrita (TRR), verificou-se que o conjunto de simetrias mais fundamental, e que mantinha invariância no eletromagnetismo de Maxwell, eram as transformações de Lorentz [30].

Ao lançar a TRR, Einstein utilizou dois postulados básicos, a saber: as leis da física são as mesmas para todos os referenciais inerciais e a velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os referenciais inerciais. Estabelecia-se assim que todos os referenciais inerciais eram equivalentes, ou seja, não havia referenciais privilegiados na natureza. Sendo as transformações de Lorentz responsáveis por relacionar as grandezas observadas em diferentes referenciais inerciais através de mudanças de coordenadas (mudança no sistema de referência escolhido para descrever o sistema), estabelecendo a simetria de Lorentz.

Atualmente, simetria de Lorentz tem se mantido como exata. Entretanto, trabalhos que surgiram por volta dos anos 1990, buscando teorias quânticas para a gravitação, no contexto das teorias de cordas, sugeriram que a simetria de Lorentz pode ser espontaneamente violada em altas escalas de energia<sup>2</sup>. A possibilidade de quebra ou violação da simetria de Lorentz implica numa não equivalência física entre dois referenciais inerciais, isto é, as transformações de Lorentz aplicadas num referencial não descreveriam mais o mesmo cenário físico que descrevem em outro referencial. Geralmente esse tipo de efeito ocorre quando existem os chamados campos de fundo fixos (*background fields*), gerados como valores esperados no vácuo, permeando todo o espaço. Dessa forma, as transformações de Lorentz podem ser classificadas em dois tipos [30]: as transformações de observador (nas quais se realizam transformações no sistema de coordenadas, não se alterando os pontos do espaço-tempo ou grandezas relacionadas a um evento, como o vetor posição de uma partícula) e as transformações de partícula (nas quais se mantém o sistema de coordenadas fixo, transformando-se os pontos do espaço-tempo e grandezas relacionadas às partículas)<sup>3</sup>. A mudança de coordenadas não deve alterar os resultados de medidas de grandezas num sistema, isto é, os resultados (medições de alguma grandeza) não podem depender da escolha de eixos coordenados usados para descrever o sistema [30]. Assim, a simetria de Lorentz não é violada no referencial onde se realizam transformações de observador (mudança de coordenadas). Entretanto, as transformações no referencial das partículas quebram essa invariância, pois os campos de fundo são fixos e não se transformam como vetores ou tensores genuínos neste referencial.

<sup>2</sup>A simetria CPT, fundamental do Modelo Padrão, também seria violada nessa escala de energia.

<sup>3</sup>A ref. [31] apresenta um exemplo descrevendo um sistema constituído por um elétron e um campo elétrico de fundo: aplicando transformações de observador, rotacionando-se os eixos coordenados, por exemplo, o vetor posição do elétron continua perpendicular em relação ao campo elétrico de fundo; aplicando-se transformações de partícula, ou seja, rotacionando-se o vetor posição do elétron, verifica-se que sua direção não é mais perpendicular ao campo de fundo.

Levando em consideração a possibilidade de violação da simetria de Lorentz, Kostelecký e Colladay [8, 29, 30] desenvolveram o Modelo Padrão Estendido<sup>4</sup>.

## 4.2 Modelo Padrão Estendido

Uma das bases fundamentais do Modelo Padrão é a simetria de Lorentz, que estabelece equivalência entre todos os referenciais inerciais e a inexistência de direções privilegiadas no espaço. Todavia a violação da simetria de Lorentz tem sido objeto de estudo nas últimas décadas e vários modelos sugerem que tal simetria possa ser quebrada espontaneamente, em um contexto de altas energias [36]. Devido a essa possibilidade de violação, Colladay e Kostelecký elaboraram o Modelo Padrão Estendido, que é uma teoria efetiva capaz de descrever todos os efeitos advindos da violação espontânea da simetria de Lorentz. No Modelo Padrão Estendido, são adicionados termos, que violam a simetria de Lorentz<sup>5</sup>, aos vários setores do Modelo Padrão. Os termos que violam a simetria de Lorentz apresentam quantidades tensoriais que são interpretados como campos de fundo fixos<sup>6</sup>, que permeiam todo o espaço. Quando a simetria de Lorentz é quebrada, esses parâmetros de violação de Lorentz assumem valores não-nulos no vácuo (estado de menor energia do modelo), definindo certas direções no espaço-tempo (anisotropias), o que conduz a referenciais privilegiados, pois algumas propriedades físicas podem depender das direções desses parâmetros.

O Modelo Padrão Estendido é descrito pelas seguintes densidades lagrangeanas:

$$\mathcal{L}_{MPE} = \mathcal{L}_{MP} + \mathcal{L}_{GR} + \delta\mathcal{L}_{LV}, \quad (4.2.1)$$

onde  $\mathcal{L}_{MP}$  é a densidade lagrangeana que descreve o Modelo Padrão,  $\mathcal{L}_{GR}$ , descreve a interação gravitacional e  $\delta\mathcal{L}_{LV}$  representa todos os termos que violam a simetria de Lorentz (sendo alguns CPT-pares, outros CPT-ímpares).

Em muitas situações, teorias de violação da simetria de Lorentz são estudadas, investigando-se os efeitos que esses termos de violação causam nos sistemas físicos usuais. Alguns dos principais efeitos em sistemas fotônicos ou fermiônicos podem ser estudados através da deformação das relações de dispersão, que modificadas relacionam energia e momento. Relações de dispersão modificadas podem viabilizar processos proibidos no Modelo Padrão usual, tal como o efeito Cherenkov no vácuo e decaimentos em pares partícula–antipartícula, além de implicar na alteração do threshold energy de alguns processos, aumentando ou di-

<sup>4</sup>O Modelo Padrão Estendido inclui todos os termos que podem violar a simetria de Lorentz.

<sup>5</sup>O Modelo Padrão Estendido incorpora todos os termos (escalares) que causam violação de Lorentz através de contrações tensoriais entre os campos do Modelo Padrão e os parâmetros de violação de Lorentz [29].

<sup>6</sup>As fontes desses campos de fundo são inacessíveis.



minuindo o limite de energia mínima. Esse tipo de alteração pode ser usado para explicar os eventos com energias acima do limite GZK [20, 24, 36].

### 4.2.1 O Setor de Férmions do Modelo Padrão Estendido

O setor de férmions do Modelo Padrão Estendido é descrito pela seguinte densidade lagrangeana<sup>7</sup>:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} i \bar{\Psi} \Gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi - \bar{\Psi} M \Psi, \quad (4.2.2)$$

onde  $\Psi$  é o espinor de Dirac ( $\bar{\Psi}$  é o conjugado). Os operadores  $\Gamma^\mu$  e  $M$  são dados [29, 30] por:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu + c^{\mu\nu} \gamma_\nu + d^{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\nu + e^\mu + i f^\mu \gamma_5 + \frac{1}{2} g^{\mu\nu\kappa} \sigma_{\nu\kappa}, \quad (4.2.3)$$

$$M = m + a^\mu \gamma_\mu + b_\mu \gamma_5 \gamma^\mu - \frac{1}{2} H_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}, \quad (4.2.4)$$

onde  $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac. Os tensores  $c^{\mu\nu}$ ,  $d^{\mu\nu}$ ,  $e^\mu$ ,  $f^\mu$ ,  $g^{\mu\nu\kappa}$ ,  $a^\mu$ ,  $b_\mu$  e  $H_{\mu\nu}$  representam os campos de fundos que violam a simetria de Lorentz.

Na eq. (4.2.2),  $\Gamma^\mu$  é adimensional, pois a derivada possui dimensão de massa, sendo  $c^{\mu\nu}$ ,  $d^{\mu\nu}$ ,  $e^\mu$ ,  $f^\mu$  e  $g^{\mu\nu\kappa}$  adimensionais. Por outro lado,  $M$  tem dimensão de massa, de forma que os termos  $a^\mu$ ,  $b_\mu$  e  $H_{\mu\nu}$  possuem dimensão de massa.

A partir da eq. (4.2.2), pode-se obter as equações de Euler-Lagrange, isto é:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \right) = 0, \quad (4.2.5)$$

que levam a:

$$(i \Gamma^\mu \partial_\mu - M) \Psi = 0. \quad (4.2.6)$$

Inúmeros trabalhos foram publicados sobre efeitos advindos de investigações no setor de férmions do Modelo Padrão Estendido. Muitos deles buscaram estabelecer limites para os parâmetros de violação (os campos de fundo) com base em alguns experimentos, como níveis de energia do átomo de hidrogênio, comparando os momentos magnéticos anômalos do elétron e do pósitron, e estudando a estrutura hiperfina do estado fundamental do múon e seu momento magnético anômalo [30, 37]. Isto demonstra grande interesse no setor ferminônico

<sup>7</sup>No sistema de unidades naturais, com  $c = \hbar = 1$ , o que leva a  $L = T^{-1}$  e  $L = M^{-1}$ , onde  $L$ ,  $T$  e  $M$  representam unidade de comprimento, tempo e massa respectivamente.

do Modelo Padrão Estendido por parte das pesquisas atuais. A seguir, investigar-se-á o efeito que o termo de violação, do tipo  $i\bar{\Psi}c^{\mu\nu}\gamma_\nu\partial_\mu\Psi$ , fornece ao mecanismo de aceleração de Fermi.

## 4.2.2 Relação de dispersão modificada pelo termo $c^{\mu\nu}$

A lagrangeana de Dirac (setor de férmions do Modelo Padrão) com termo de violação de Lorentz dado pelo campo de fundo  $c^{\mu\nu}$  é dada por<sup>8</sup>:

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar c}{2}\bar{\Psi}(\gamma^\mu + c^{\mu\nu}\gamma_\nu)\overleftrightarrow{\partial}_\mu\Psi - mc^2\bar{\Psi}\Psi, \quad (4.2.7)$$

As equações de Euler-Lagrange para  $\Psi$  são dadas por:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\Psi}} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})}\right) = 0, \quad (4.2.8)$$

que levam a:

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + i\hbar c^{\mu\nu}\gamma_\nu\partial_\mu - mc)\Psi = 0. \quad (4.2.9)$$

Utilizando o ansatz para soluções de ondas planas, isto é:

$$\Psi(x) = Ne^{-\frac{i}{\hbar}(p\cdot x)}\Psi(p), \quad (4.2.10)$$

com  $p\cdot x = p_\mu x^\mu$  e  $N$  sendo uma constante de normalização, a eq. (4.2.9) pode ser reescrita como:

$$(\gamma^\mu p_\mu + c^{\mu\nu}\gamma_\nu p_\mu - mc)\Psi = 0. \quad (4.2.11)$$

Para se determinar a relação de dispersão, pode-se calcular o determinante do operador de Dirac [33], ou seja, o determinante do operador aplicado ao spinor  $\Psi$  na eq. (4.2.11):

$$\det(\Gamma^\mu p_\mu - M) = 0, \quad (4.2.12)$$

ou então:

$$\det(\gamma^\mu p_\mu + c^{\mu\nu}\gamma_\nu p_\mu - mc) = 0, \quad (4.2.13)$$

com  $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + c^{\mu\nu}\gamma_\nu$  e  $M = mc$  para o caso descrito pela eq. (4.2.11). O determinante na eq. (4.2.12), com  $\Gamma^\mu$  dado pela eq. (4.2.3) e  $M$  pela eq. (4.2.4), pode ser expresso de forma geral pela seguinte relação [33]:

<sup>8</sup>A lagrangeana do setor de férmions com todos os termos de violação de Lorentz pode ser encontrada na ref. [29].

$$\det(\Gamma^\mu P_\mu - M) = 4 \left( V_{[\mu A_\nu]} - V_\mu V_\nu + A_\mu A_\nu + PT_{\mu\nu} - S\tilde{T}_{\mu\nu} + T_{\mu\alpha} T_\nu^\alpha + \tilde{T}_{\mu\alpha} \tilde{T}_\nu^\alpha \right)^2 + (V^2 - A^2 - S^2 - P^2)^2 - 4(V^2 - A^2)^2 + 6(\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} A^\alpha V^\beta)^2, \quad (4.2.14)$$

onde:

$$S = e^\mu i\partial_\mu - m, \quad (4.2.15)$$

$$P = f^\mu i\partial_\mu, \quad (4.2.16)$$

$$V^\mu = i\partial^\mu + c^{\mu\nu} i\partial_\nu - a^\mu, \quad (4.2.17)$$

$$A^\mu = d^{\mu\nu} i\partial_\nu - b^\mu, \quad (4.2.18)$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (g^{\mu\nu\rho} i\partial_\rho - H^{\mu\nu}), \quad (4.2.19)$$

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\alpha\beta}, \quad (4.2.20)$$

$$V_{[\mu A_\nu]} = V_\mu A_\nu - A_\mu V_\nu. \quad (4.2.21)$$

são termos tensoriais que incorporam todos os campos de fundo que parametrizam a violação de Lorentz, apresentados nas expressões (4.2.3) e (4.2.4).

A eq. (4.2.14) está descrita no espaço dos momentos. Dessa forma, é necessário fazer a substituição  $i\partial_\mu \rightarrow p_\mu$  nas expressões descritas nas equações (4.2.15) a (4.2.21) para que se possa efetuar o cômputo da relação de dispersão modificada dada nas equações (4.2.13) e (4.2.12)

Como o único termo de violação de Lorentz, considerado aqui não-nulo, é  $c^{\mu\nu}$ , obtém-se:

$$S = -mc, \quad V^\mu = p^\mu + c^{\mu\nu} p_\nu, \quad A^\mu = P = T^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\mu\nu} = V_{[\mu A_\nu]} = 0. \quad (4.2.22)$$

Dessa forma, pode-se calcular os termos que aparecem na eq. (4.2.14) e, então, pode-se determinar a relação de dispersão modificada aplicando-se a condição dada na eq. (4.2.12) e (4.2.13). Tem-se então:

$$V^2 = V_\mu V^\mu, \quad (4.2.23)$$

$$V^2 = (p_\mu + c_{\mu\nu} p^\nu) (p^\mu + c^{\mu\beta} p_\beta), \quad (4.2.24)$$

cuja simplificação leva a:

$$V^2 = p^2 + c^{\mu\beta} p_\mu p_\beta + c^{\nu\mu} p^\mu p^\nu + c_{\mu\nu} c^{\mu\beta} p^\nu p_\beta, \quad (4.2.25)$$

$$V^2 = p^2 + 2c^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + c_{\mu\nu} c^{\mu\beta} p^\nu p_\beta. \quad (4.2.26)$$

A relação de dispersão (4.2.13) é dada então por:

$$4(V_\mu V_\nu)^2 + (V^2 - S^2)^2 - 4V^4 = 0, \quad (4.2.27)$$

$$V^2 - m^2 c^2 = 0, \quad (4.2.28)$$

$$p^2 - m^2 c^2 + 2c^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + c_{\mu\nu} c^{\mu\beta} p^\nu p_\beta = 0. \quad (4.2.29)$$

A eq. (4.2.29) apresenta a relação de dispersão para férmions modificada pelo termo de violação de Lorentz,  $c^{\mu\nu}$ . Para simplificação, será investigado agora as soluções da eq. (4.2.29) para energia, considerando-se inicialmente apenas os termos  $c^{0i}$  não-nulos, e também fazendo nulos os termos de segunda ordem em  $c^{\mu\nu}$  por serem muito pequenos. Nesse cenário, a eq. (4.2.29) leva a:

$$p_0^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2 c^2 + 2c^{0i} p_0 p_i = 0, \quad (4.2.30)$$

onde se utilizou  $p^\mu = (p_0, \mathbf{p})$  e a métrica  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . No último termo da eq. (4.2.30), nota-se um produto escalar entre dois vetores, isto é:

$$c^{0i} p_i = -(c^{01} p^{(1)} + c^{02} p^{(2)} + c^{03} p^{(3)}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}), \quad (4.2.31)$$

onde se define o vetor de fundo  $\mathbf{n} = -(c^{01}, c^{02}, c^{03})$ , com  $n^i = -c^{0i}$ . Dessa forma, a relação de dispersão simplifica-se em:

$$E^2 - |\mathbf{p}|^2 c^2 - m^2 c^4 + 2E(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})c = 0, \quad (4.2.32)$$

com  $p_0 = E/c$ . A eq. (4.3.2) fornece uma relação de dispersão modificada e anisotropia, originada do campo de fundo  $c^{\mu\nu}$ . Resolvendo para a energia, obtém-se:

$$E = -c(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{4c^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})^2 - 4(-|\mathbf{p}|^2 c^2 - m^2 c^4)}. \quad (4.2.33)$$

Fazendo-se  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = |\mathbf{n}| |\mathbf{p}| \cos \phi$ , sendo  $\phi$  o ângulo entre o momento da partícula e o campo de fundo, a eq. (4.2.33) leva a:

$$E = -c(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) \pm c \sqrt{|\mathbf{n}|^2 |\mathbf{p}|^2 \cos^2 \phi + |\mathbf{p}|^2 + m^2 c^2}, \quad (4.2.34)$$

$$E = -c(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) \pm |\mathbf{p}|c\sqrt{1 + \frac{m^2c^2}{|\mathbf{p}|^2} + |\mathbf{n}|^2\cos^2\phi}, \quad (4.2.35)$$

que no regime ultra-relativístico, com  $|\mathbf{p}|^2 \gg m^2c^2$ , simplifica-se em:

$$E = -c(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) + |\mathbf{p}|c\sqrt{1 + |\mathbf{n}|^2\cos^2\phi}, \quad (4.2.36)$$

$$E \simeq -c(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) + |\mathbf{p}|c\left(1 + \frac{|\mathbf{n}|^2}{2}\cos^2\phi\right), \quad (4.2.37)$$

$$E \simeq -c(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) + |\mathbf{p}|c = |\mathbf{p}|c(1 - |\mathbf{n}| \cos \phi), \quad (4.2.38)$$

onde o termo de segunda ordem em  $|\mathbf{n}|$  foi desprezado.

O resultado (4.2.38) será utilizado na seção seguinte para se determinar os possíveis efeitos deste campo de fundo sobre o ganho de energia de raios cósmicos no mecanismo de Fermi.

Até aqui, foi considerado apenas o caso em que os termos  $c^{0i}$  são não nulos, o que resultou na relação de dispersão dada na eq. (4.2.38). A seguir, será analisado o caso em que os termos  $c^{ij} \neq 0$  e são nulos os termos  $c^{0i} = 0$  e termos de segunda ordem em  $c^{\mu\nu}$ . Da eq. (4.2.29), tem-se:

$$p^2 - m^2c^2 + 2c_{ij}p^ip^j = 0. \quad (4.2.39)$$

Implementando-se a seguinte parametrização para  $c_{ij}$ ,

$$c_{ij} = \frac{1}{2}(a_ib_j + a_jb_i), \quad (4.2.40)$$

onde  $a_i$  e  $b_i$  representam campos de fundo, a eq. (4.2.39) simplifica-se em:

$$p^2 - m^2c^2 + a_ib_jp^ip^j + a_jb_ip^jp^i = 0, \quad (4.2.41)$$

$$p^2 - m^2c^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}) = 0, \quad (4.2.42)$$

onde se utilizou  $a_ip^ib_jp^j = (-a^ip^i)(-b^jp^j) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{p})$ . Resolvendo a eq. (4.2.42) para a energia, isto é, para  $p_0 = E/c$ , tem-se:

$$p_0^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2c^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}) = 0, \quad (4.2.43)$$

$$E^2 = m^2c^4 + |\mathbf{p}|^2c^2 - 2c^2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}). \quad (4.2.44)$$

Fazendo-se agora  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}) = |\mathbf{a}||\mathbf{p}|\cos\phi_a$  e  $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}) = |\mathbf{b}||\mathbf{p}|\cos\phi_b$ , onde  $\phi_a$  e  $\phi_b$  são os ângulos entre os vetores de fundo  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  e o momento da partícula, respectivamente, a eq. (4.2.44)

leva a:

$$E^2 = m^2 c^4 + |\mathbf{p}|^2 c^2 - 2|\mathbf{p}|^2 c^2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \phi_a \cos \phi_b, \quad (4.2.45)$$

cuja solução para E será:

$$E = |\mathbf{p}| c \sqrt{1 + \frac{m^2 c^2}{|\mathbf{p}|^2} - 2|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \phi_a \cos \phi_b}. \quad (4.2.46)$$

No limite ultra-relativístico, com  $|\mathbf{p}|^2 \gg m^2 c^2$ , pode-se simplificar a expressão acima em:

$$E = |\mathbf{p}| c \sqrt{1 - 2|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \phi_a \cos \phi_b}, \quad (4.2.47)$$

$$E \simeq |\mathbf{p}| c (1 - |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \phi_a \cos \phi_b). \quad (4.2.48)$$

A eq. (4.2.48) fornece uma solução para a energia de férmions modificada pelo campo de fundo  $c^{\mu\nu}$  para o caso em que  $c^{ij} \neq 0$  e  $c^{0i} = 0$ . Por outro lado, a eq. (4.2.38) também apresenta a energia de férmions modificada pelo campo de fundo no caso em que  $c^{ij} = 0$  e  $c^{0i} \neq 0$ . A seguir, serão analisados os possíveis efeitos que este campo de fundo pode gerar no mecanismo de aceleração de Fermi em nos dois casos.

### 4.3 Possíveis efeitos da violação de Lorentz em raios cósmicos

Nas últimas décadas, vários trabalhos abordando possíveis efeitos da violação da simetria de Lorentz foram realizados e muitos deles conseguiram determinar limites (*bounds*) sobre os parâmetros de violação. Uma das consequências da violação de Lorentz consiste em modificações nas relações de dispersão em relação àquelas derivadas do MP [26]. Como exemplo, observa-se que a lagrangeana (4.2.7) levou às relações de dispersão modificadas para férmions (4.2.38) e a expressão (4.2.48) no caso ultra-relativístico.

Uma abordagem da violação da simetria de Lorentz (VL) parte de relações de dispersão modificadas por termos adicionais que dependem dos parâmetros de violação [26, 36]. Num cenário sem VL, vale a relação  $E^2 = m_0^2 c^4 + |\mathbf{p}|^2 c^2$ , que conduz a uma velocidade de grupo,  $u_g$ , dada por:

$$u_g = \frac{\partial E}{\partial |\mathbf{p}|} = \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{m_0^2 c^2 + |\mathbf{p}|^2}} c. \quad (4.3.1)$$

Pode-se definir a máxima velocidade alcançável (*maximal attainable velocity* - MAV) quando

$|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$ , que conduz a MAV  $u_g = c$ . Se se introduz um pequeno termo de violação de Lorentz, uma forma possível para a relação de dispersão modificada é [26, 36]:

$$E^2 = |\mathbf{p}|^2 c^2 + m_0^2 c^4 - \epsilon |\mathbf{p}|^2 c^2, \quad (4.3.2)$$

onde  $\epsilon$  é o parâmetro que controla a violação da simetria de Lorentz. Manipulando a eq. (4.3.2), pode-se escrevê-la numa forma similar àquela obtida do MP [36]:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + (1 - \epsilon) |\mathbf{p}|^2 c^2, \quad (4.3.3)$$

$$E^2 = |\mathbf{p}|^2 c_p^2 + m^2 c_p^4, \quad (4.3.4)$$

onde se definiu a massa renormalizada por  $m = m_0/(1 - \epsilon)$  e  $c_p^2 = (1 - \epsilon)c^2$ . A velocidade de grupo da partícula agora será dada por:

$$u_g = \frac{\partial E}{\partial |\mathbf{p}|} = \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2 c_p^2}} c_p. \quad (4.3.5)$$

Neste caso, a velocidade máxima atingível (MAV), definida quando  $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$  [26, 36], será igual a  $c_p = c\sqrt{1 - \epsilon}$ , que é menor que  $c$ , sendo esse um dos efeitos da VL no limite de altas energias [26].

A existência do pequeno parâmetro de violação pode permitir que alguns processos proibidos ocorram ou vetar processos que são usualmente permitidos no MP. Como exemplo, pode-se analisar a possibilidade de que uma partícula, designada pelo sub-índice 0, decaia num conjunto de outras partículas na presença de violação. Supondo que as partículas produtos do decaimento possam apresentar MAVs diferentes, no limite  $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$ , a energia de cada partícula pode ser escrita como  $E \simeq |\mathbf{p}|c_p$ , sendo a conservação de energia dada por:

$$p_0 c_0 = \sum_i |\mathbf{p}_i| c_i, \quad (4.3.6)$$

onde o índice  $i = 1, 2, \dots$  designa uma partícula qualquer produto do decaimento. Definindo  $c_{min}$  como a MAV mínima dos produtos do decaimento, a condição de conservação de energia (4.3.6) conduz a<sup>9</sup>:

$$|\mathbf{p}_0| c_0 = \sum_i |\mathbf{p}_i| c_i \geq c_{min} \sum_i |\mathbf{p}_i|. \quad (4.3.7)$$

---

<sup>9</sup>A desigualdade da eq. (4.3.7) estabelece a condição para que o decaimento possa ocorrer, isto é, a partícula inicial deve ter energia maior ou igual a energia resultante do decaimento na condição mínima (soma das energias das partículas produtos do decaimento com  $c_{min}$ ).

Como  $|\mathbf{p}_0| = \sum_i |\mathbf{p}_i|$ , decorre que  $|\mathbf{p}_0|c_0 \geq c_{min}|\mathbf{p}_0|$ , o que implica finalmente em  $c_0 \geq c_{min}$ . Essa condição surge num contexto em que há possibilidade de violação da simetria de Lorentz e estabelece uma condição para as MAVs (que carregam os parâmetros de violação) para que o decaimento possa acontecer. Se a condição  $c_0 \geq c_{min}$  não se verifica, então o decaimento passa a ser proibido. Por outro lado, novos decaimentos podem ser permitidos (a altas energias), como o decaimento  $\gamma \rightarrow e^- + e^+$  [26], usualmente proibido no MP.

Outro importante exemplo a ser citado, ocorre no efeito GZK na presença de violação de Lorentz. Nesse caso, considera-se que a MAV do próton incidente (que desencadeia a colisão com o fóton da radiação cósmica de fundo) é dada por:

$$c_p = (1 - \epsilon)c < c. \quad (4.3.8)$$

A condição de energia para a colisão ocorrer (ver Apêndice A) é dada por<sup>10</sup>  $P_{T(antes)}^2 > P_{T(depois)}^2$ , o que leva a:

$$(m_p + m_\pi)^2 \leq P_{T(antes)}^2, \quad (4.3.9)$$

$$(m_{0p} + m_\pi)^2 \leq (E_p + \omega)^2 - (|\mathbf{p}| - \omega)^2, \quad (4.3.10)$$

$$(m_{0p} + m_\pi)^2 \leq E_p^2 - |\mathbf{p}|^2 + 2\omega(E_p + |\mathbf{p}|), \quad (4.3.11)$$

onde  $|\mathbf{p}|$  é o momento do próton e  $\omega$  é a energia do fóton da radiação cósmica de fundo. O cálculo de  $E_p^2$  agora é modificado devido à relação de dispersão modificada para o próton, isto é:

$$E_p^2 = |\mathbf{p}|^2 c_p^2 + m_p^2 c_p^4, \quad (4.3.12)$$

$$E_p^2 - |\mathbf{p}|^2(1 - \epsilon) = \frac{m_{0p}^2}{(1 - \epsilon)^2} (1 - \epsilon)^2, \quad (4.3.13)$$

onde se utilizou  $m_p = m_{0p}/(1 - \epsilon)$  e  $c_p^2 = (1 - \epsilon)c^2$  com  $c = 1$ . Manipulando a eq. (4.3.13), obtém-se:

$$E_p^2 - |\mathbf{p}|^2 = m_{0p}^2 - \epsilon|\mathbf{p}|^2. \quad (4.3.14)$$

Tomando o limite ultra-relativístico da eq. (4.3.2), isto é

$$E_p^2 = |\mathbf{p}|^2 c^2 \left( 1 + \frac{m_{0p}^2 c^2}{|\mathbf{p}|^2} - \epsilon \right), \quad (4.3.15)$$

<sup>10</sup>Essa condição, threshold energy, será representada fazendo-se  $c = 1$ .



obtem-se:

$$|\mathbf{p}|^2 = \frac{E_p^2}{c^2(1 - \epsilon)} \quad (4.3.16)$$

Utilizando a eq. (4.3.16), a expressão (4.3.14) pode ser reescrita como:

$$E_p^2 - |\mathbf{p}|^2 = m_{0p}^2 - \epsilon E_p^2, \quad (4.3.17)$$

onde se fez  $c = 1$  e se desprezou o termo de segunda ordem em  $\epsilon$ .

Substituindo a expressão (4.3.17) na eq. (4.3.11) e utilizando a relação (4.3.16), obtém-se:

$$(m_{0p} + m_\pi)^2 \leq m_{0p}^2 - \epsilon E_p^2 + 2\omega(E_p + |\mathbf{p}|), \quad (4.3.18)$$

$$(m_{0p} + m_\pi)^2 - m_{0p}^2 + \epsilon E_p^2 \leq 2\omega E_p + 2\omega E_p(1 - \epsilon)^{-1/2}, \quad (4.3.19)$$

$$(m_{0p} + m_\pi)^2 - m_{0p}^2 + \epsilon E_p^2 \left(1 - \frac{\omega}{E_p}\right) \leq 4\omega E_p, \quad (4.3.20)$$

$$(m_{0p} + m_\pi)^2 - m_{0p}^2 + \epsilon E_p^2 \leq 4\omega E_p, \quad (4.3.21)$$

onde se fez  $1 - \omega/E_p \approx 1$ , pois  $E_p \gg \omega$ . Note que a eq. (4.3.21) é muito similiar àquela obtida na eq. (2.4.14) para colisões frontais. A principal diferença entre elas consiste na presença do termo de violação em  $\epsilon$ . A altas energias, o efeito desse termo será um aumento no threshold da colisão, o que pode modificar o limite GZK. A Fig. [4.1] ilustra o comportamento do threshold representando pela eq. (4.3.21) e no caso sem VL.

Na ausência de violação, o threshold da colisão é dado por  $E_0 \sim 10^{20}$  eV, conforme se estudou na seção (2.4). Nota-se que um pequeno parâmetro  $\epsilon > 0$  leva a um aumento no threshold energy da colisão e, como a eq. (4.3.21) é quadrática em  $E_p$ , soluções reais são obtidas quando

$$16\omega^2 - 4\epsilon [(m_{0p} + m_\pi)^2 - m_{0p}^2] \geq 0, \quad (4.3.22)$$

$$\epsilon \leq \frac{4\omega^2}{(m_{0p} + m_\pi)^2 - m_{0p}^2}. \quad (4.3.23)$$

Na seção (2.4), foi obtido o threshold da colisão do efeito GZK como sendo  $E_p \geq E_0$ , onde  $E_0 = [(m_{0p} + m_\pi)^2 - m_{0p}^2]/4\omega$ . Assim, a eq. (4.3.23) pode ser reescrita como:

$$\epsilon \leq \frac{\omega}{E_0} \simeq 2,34 \times 10^{-24}, \quad (4.3.24)$$

onde se utilizou  $\omega = 2,34 \times 10^{-4}$  eV.

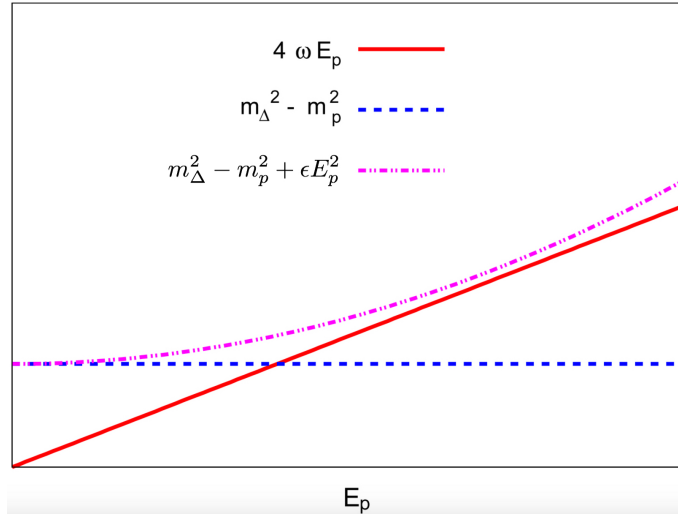


Figura 4.1: Aqui  $m_\Delta = m_p + m_\pi$ . Na ausência de violação, o threshold é representado pela linha tracejada azul. Assim, quando  $\omega E_p$  alcançar esse valor de energia, a colisão do efeito GZK irá ocorrer. Na presença de violação, à medida em que a energia  $E_p$  do próton aumenta, o termo  $\epsilon E_p^2$  aumenta de tal forma que o threshold, nesse caso, passa a ser representado pela linha tracejada cor-de-rosa e, conseqüentemente, o limite mínimo de energia do próton para que a colisão do efeito GZK ocorra é incrementado. [26].

Utilizando agora a relação de dispersão modificada pelo termo  $c^{\mu\nu}$ , no caso em que  $c^{0i} \neq 0$ , expressão (4.2.38), pode-se encontrar um limite para o parâmetro de violação através do threshold energy do limite GZK. Para isso, revisita-se seção (2.4) e se obtém a seguinte expressão<sup>11</sup>:

$$p_p^2 + 2p_p \cdot p_\gamma \geq (m_{0p} + m_{0\pi})^2 c^2, \quad (4.3.25)$$

onde  $p_p$  é o 4-momento do próton e  $p_\gamma$  é o 4-momento do fóton. Na seção (4.2), obtivemos (para o caso em que  $c^{0i} \neq 0$  e  $c^{ij} = 0$ ):

$$p^2 - m_{0p}^2 c^2 + 2c^{0i} p_i p_0 = 0, \quad (4.3.26)$$

$$p^2 = m_{0p}^2 c^2 - 2 \frac{E_p}{c} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}), \quad (4.3.27)$$

onde se utilizou  $n^i = -c^{0i}$ . Dessa forma, a eq. (4.3.25) simplifica-se em:

$$m_{0p}^2 c^2 - 2 \frac{E_p}{c} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) + 2 \frac{E_p E_\gamma}{c^2} - 2 \frac{E_\gamma}{c} (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \geq (m_{0p} + m_{0\pi})^2 c^2, \quad (4.3.28)$$

onde  $\hat{\mathbf{k}}$  é o versor de propagação do fóton. Implementando-se  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = |\mathbf{n}| |\mathbf{p}| \cos \phi$ , onde  $\phi$  é o ângulo entre o momento do próton e o vetor de fundo  $\mathbf{n}$ , e  $\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{k}} = |\mathbf{p}| \cos \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo

<sup>11</sup>Mais detalhes da condição de threshold energy estão no Apêndice A.

entre o momento e a direção do fóton, a eq. (4.3.28) leva a:

$$-2\frac{E_p}{c}|\mathbf{n}||\mathbf{p}|\cos\phi + 2\frac{E_p E_\gamma}{c^2} - 2\frac{E_\gamma}{c}|\mathbf{p}|\cos\theta \geq (m_{0p} + m_{0\pi})^2 c^2 - m_{0p}^2 c^2. \quad (4.3.29)$$

Utilizando a eq. (4.2.38), a eq. (4.3.29) pode ser reescrita como:

$$-2E_p^2|\mathbf{n}|\cos\phi + 2E_p E_\gamma (1 - \cos\theta + |\mathbf{n}|\cos\phi\cos\theta) \geq (m_{0p} + m_{0\pi})^2 c^4 - m_{0p}^2 c^4. \quad (4.3.30)$$

Para a colisão frontal no efeito GZK, tem-se  $\theta = \pi$ . Escolhendo  $\phi = 0$  (momento e vetor de fundo na mesma direção), obtém-se:

$$-2E_p^2|\mathbf{n}| + 4E_p E_\gamma - 2E_p E_\gamma |\mathbf{n}| - [(m_{0p} + m_{0\pi})^2 c^4 - m_{0p}^2 c^4] \geq 0. \quad (4.3.31)$$

Soluções reais para  $E_p$  são obtidas quando

$$(4E_\gamma - 2E_\gamma|\mathbf{n}|)^2 - 8|\mathbf{n}|[(m_{0p} + m_{0\pi})^2 c^4 - m_{0p}^2 c^4] \geq 0, \quad (4.3.32)$$

cujas simplificação leva a:

$$|\mathbf{n}| \leq \frac{2E_\gamma^2}{2E_\gamma^2 + [(m_{0p} + m_{0\pi})^2 c^4 - m_{0p}^2 c^4]}. \quad (4.3.33)$$

Como  $E_p \geq E_0$ , onde  $E_0 = [(m_{0p} + m_\pi)^2 - m_{0p}^2]/4\omega$  na colisão do efeito GZK sem violação, a eq. (4.3.33) pode ser reescrita como:

$$|\mathbf{n}| \leq \frac{E_\gamma}{2E_0 + E_\gamma} \simeq 1,17 \times 10^{-24}, \quad (4.3.34)$$

onde se utilizou o valor de energia do threshold (sem violação)  $E_0 = 3,2 \times 10^{20}$  eV e  $E_\gamma = 2,34 \times 10^{-4}$  eV obtidos na seção (2.4). Nota-se que a abordagem de máxima velocidade alcançável (MAV), sugerida pelas refs. [26, 36], e o uso da relação de dispersão obtida na seção (4.2.2) levam a uma mesma ordem para o limite do parâmetro de violação de Lorentz necessário para se alterar o threshold da colisão do efeito GZK.

Como último tópico, porém não menos importante, vale mencionar a relação entre as simetrias de Lorentz e CPT do MPE. O teorema CPT garante que uma teoria quântica de campos relativística é invariante perante as transformações: C (conjugação de carga) – transforma partículas em suas anti-partículas e vice-versa; P (paridade) – gera reflexão espacial,  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ ; e T (inversão temporal) – muda a direção do fluxo do tempo,  $t \rightarrow -t$  [26]. Greenberg demonstrou que qualquer violação da simetria CPT implica na violação da simetria de Lorentz, porém o contrário não se verifica [26, 30]. Isso torna possível contextos

em que se apenas a invariância de Lorentz é violada, a simetria CPT pode ou não ser violada. Dessa forma, os diversos termos violadores de Lorentz do MPE são classificados em CPT-par, quando violam Lorentz, mas deixam CPT invariante, e CPT-ímpar, quando violam Lorentz e CPT. No setor de férmions do MPE, dado pela expressão (4.2.2), os termos de violação de Lorentz  $c^{\mu\nu}$ ,  $d^{\mu\nu}$  e  $H_{\mu\nu}$  são CPT-pares, enquanto os termos  $e^\mu$ ,  $f^\mu$ ,  $g^{\mu\nu\kappa}$ ,  $a^\mu$  e  $b^\mu$  são CPT-ímpares<sup>12</sup>.

---

<sup>12</sup>Maiores detalhes estão bem descritos nas refs. [30, 37].

## Capítulo 5

# Mecanismo de aceleração de Fermi modificado por anisotropia

No capítulo 3, ilustrou-se como as colisões randômicas com nuvens magnéticas levam a um ganho de energia média por colisão para os raios cósmicos. Tal mecanismo indica que durante a propagação dessas partículas, de suas fontes de origem até a Terra, há um incremento na energia por colisão. Entretanto o ganho de energia é em segunda ordem em  $\beta = V/c$ , o que torna o mecanismo de Fermi pouco eficiente.

Com o objetivo de melhorar o mecanismo original de Fermi, vários físicos, nos anos 1970, sugeriram um mecanismo de aceleração por frentes de choque, que garantia ganhos de energia em primeira ordem<sup>1</sup> em  $\beta$ . Isso mostra que as ideias básicas do mecanismo de Fermi podem, aparentemente, ser aplicadas a cenários astrofísicos diferentes. Sabendo disso, o presente capítulo abordará uma forma de melhorar o mecanismo de aceleração de Fermi propondo anisotropia espacial devido à quebra da simetria de Lorentz gerada pela presença de um campo de fundo dado por  $c^{\mu\nu}$  do Modelo Padrão Estendido.

### 5.1 Efeito do termo $c^{0i}$ no mecanismo de Fermi

Da seção (3.6), obteve-se a taxa de variação de energia da partícula ao colidir com uma nuvem de velocidade  $\mathbf{V}$  no meio interestelar, cujo resultado foi:

$$\frac{\Delta E}{E} = \left( 2 \frac{p}{E} V \cos \theta + 2\beta^2 \right) (1 - \beta^2)^{-1}, \quad (5.1.1)$$

---

<sup>1</sup>É importante lembrar que, no caso de aceleração por frentes de choque, o fator  $\beta$  é diferente daquele para colisões com as nuvens. Vide seção 3.6.

onde  $p$  e  $E$  representam o módulo do momento e a energia da partícula, respectivamente; enquanto  $\theta$  indica o ângulo de incidência da partícula em relação à velocidade  $\mathbf{V}$  da frente da nuvem. Essa taxa de variação média de energia foi obtida utilizando-se a relação de dispersão que advém da equação de Dirac para férmions livres, isto é,  $E^2 = |\mathbf{p}|^2 c^2 + (mc^2)^2$ , ou  $E^2 = |\mathbf{p}|^2 c^2$ , considerando-se partículas ultra-relativísticas,  $|\mathbf{p}| \gg mc^2$ . O resultado obtido foi uma taxa de ganho de energia em segunda ordem de  $\beta = V/c$ , o que indica um ganho de energia pequeno por colisão.

Como o tensor de violação de Lorentz  $c^{\mu\nu}$  modifica a relação de dispersão, de uma forma anisotrópica, é necessário recalculá-la em sua presença, ou seja, a taxa de variação média de energia para o raio cósmico por colisão. Para isso, considerar-se-á que a probabilidade de colisão continuará sendo dada por  $dP \approx (1 + \beta \cos \theta) d\Omega$ .

Fixando o campo de fundo  $\mathbf{n}$  com um ângulo  $\alpha$  em relação ao eixo-x do referencial (em relação ao qual o ângulo  $\theta$  também é medido), tem-se que  $\phi = \alpha - \theta$ . Note que este eixo está alinhado com a velocidade  $\mathbf{V}$  da nuvem. A Fig. [5.1] ilustra essa situação.

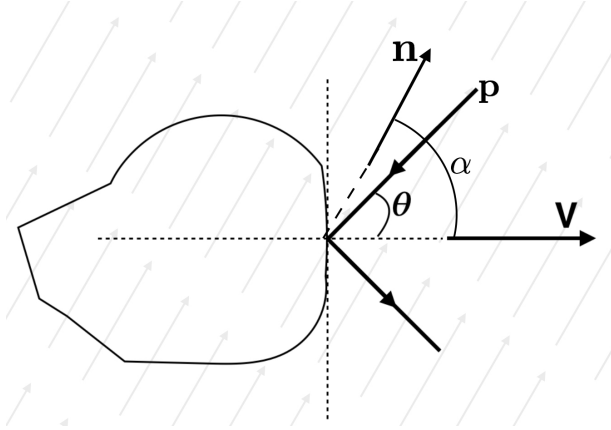


Figura 5.1: Colisão com nuvem na presença de um campo de fundo,  $\mathbf{n}$ , que forma ângulo  $\alpha$  com a velocidade  $\mathbf{V}$  da nuvem.

Da eq. (4.2.38), pode-se escrever:

$$\frac{|\mathbf{p}|}{E} = \frac{1}{c(1 - |\mathbf{n}|\cos\phi)}, \quad (5.1.2)$$

que pode ser aproximada em:

$$\frac{|\mathbf{p}|}{E} \simeq \frac{1}{c} [1 + |\mathbf{n}|\cos(\alpha - \theta)]. \quad (5.1.3)$$

Utilizando a eq. (5.1.3), a eq. (5.1.1) leva a:

$$\frac{\Delta E}{E} = 2\beta \cos \theta [1 + |\mathbf{n}|\cos(\alpha - \theta)] + 2\beta^2, \quad (5.1.4)$$

onde se fez  $(1 - \beta^2) \sim 1$ . Continuando o desenvolvimento,

$$\frac{\Delta E}{E} = 2\beta \cos \theta + 2\beta |\mathbf{n}| \cos(\alpha - \theta) \cos \theta + 2\beta^2, \quad (5.1.5)$$

$$\frac{\Delta E}{E} = 2\beta \cos \theta + 2\beta |\mathbf{n}| \cos \alpha \cos^2 \theta + 2\beta |\mathbf{n}| \sin \alpha \sin \theta \cos \theta + 2\beta^2, \quad (5.1.6)$$

cujo valor médio é obtido realizando média sobre o ângulo  $\theta$  de incidência:

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = 2\beta \langle \cos \theta \rangle + 2\beta |\mathbf{n}| \cos \alpha \langle \cos^2 \theta \rangle + 2\beta |\mathbf{n}| \sin \alpha \langle \sin \theta \cos \theta \rangle + 2\beta^2. \quad (5.1.7)$$

O problema agora se restringe ao cômputo das integrais de média de cada um dos termos em  $\theta$  da eq. (5.1.7). Tais integrais envolvem o fator "peso" de probabilidade,  $(1 + \beta \cos \theta)$ , ou seja:

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int_{-1}^1 (1 + \beta \cos \theta) \cos \theta d(\cos \theta)}{\int_{-1}^1 (1 + \beta \cos \theta) d(\cos \theta)} = \frac{\beta}{3}, \quad (5.1.8)$$

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{\int_{-1}^1 (1 + \beta \cos \theta) \cos^2 \theta d(\cos \theta)}{\int_{-1}^1 (1 + \beta \cos \theta) d(\cos \theta)} = \frac{1}{3}, \quad (5.1.9)$$

$$\langle \sin \theta \cos \theta \rangle = \frac{\int_{-1}^1 (1 + \beta \cos \theta) \sin \theta \cos \theta d(\cos \theta)}{\int_{-1}^1 (1 + \beta \cos \theta) d(\cos \theta)} = \frac{\pi}{16} \beta. \quad (5.1.10)$$

Utilizando os resultados (5.1.8) a (5.1.10), a média (5.1.7) fornece:

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = \frac{2}{3} \beta^2 + 2\beta^2 + \frac{2}{3} \beta |\mathbf{n}| \cos \alpha + \frac{2\pi}{16} \beta^2 |\mathbf{n}| \sin \alpha, \quad (5.1.11)$$

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = \frac{2}{3} \beta |\mathbf{n}| \cos \alpha + \frac{8}{3} \beta^2, \quad (5.1.12)$$

onde o termo  $|\mathbf{n}| \beta^2$  foi desprezado por ser muito pequeno.

A eq. (5.1.12) mostra a taxa média de variação de energia do raio cósmico ao colidir com nuvens magnéticas no meio interestelar num cenário com anisotropia indicada pelo vetor de fundo  $\mathbf{n}$ . Note que se o campo de fundo for desligado, recupera-se o resultado original

do mecanismo de Fermi,  $\langle \Delta E/E \rangle = 8\beta^2/3$ . A orientação do vetor de fundo (que é fixa) em relação ao referencial do observador pode contribuir para ganhos (aceleração) e perdas (desaceleração) no termo de primeira ordem em  $\beta$ , uma vez que  $\cos \alpha > 0$  para ângulos agudos e  $\cos \alpha < 0$  para ângulos obtusos, de acordo com o esquema da Fig. [4.1]. Nota-se ainda que, de acordo com a análise ao final da seção (3.6),  $\beta \sim 10^{-4}$ , de forma que se  $|\mathbf{n}| \leq 10^{-4}$ ,  $\beta|\mathbf{n}| \leq \beta^2$ , o que tornaria o termo de primeira ordem em  $\beta$ , originado pela anisotropia, da eq. (5.1.12), menor do que o termo de segunda ordem original do mecanismo de Fermi. Assim, a presença de anisotropia espacial, devido à violação de Lorentz, pode melhorar o mecanismo de Fermi por permitir ganhos de energia em primeira ordem de  $\beta$ .

### 5.1.1 Espectro modificado

Sabendo que o termo de violação de Lorentz leva um ganho médio de energia que apresenta um termo de primeira ordem em  $\beta$  no mecanismo de Fermi, espera-se que o espectro de energia dos raios cósmicos, tal como feito na seção (3.5.1), apresente alguma alteração. Da eq. (3.5.23), tem-se:

$$b(E) = -\frac{dE}{dt}. \quad (5.1.13)$$

Utilizando-se as mesmas considerações feitas na seção (3.5.1), obtém-se:

$$b(E) = -\frac{\Delta E}{\Delta t}, \quad (5.1.14)$$

onde  $\Delta E$  é a variação média de energia sofrida pela partícula após uma colisão e será dada pela eq. (5.1.13), enquanto  $\Delta t \simeq L/c$  é o tempo médio entre uma colisão e outra entre nuvens separadas por uma distância média  $L$ . Dessa forma, tem-se:

$$\frac{dE}{dt} = \sigma' E, \quad (5.1.15)$$

com

$$\sigma' = \frac{2}{3}\beta|\mathbf{n}|\cos\alpha + \frac{8}{3}\beta^2. \quad (5.1.16)$$

Da seção (3.5.1), obteve-se o espectro da forma  $N(E) = k.E^{-x}$ , com

$$x = 1 + \frac{1}{\frac{8}{3}\frac{V^2}{cL}\tau_c}, \quad (5.1.17)$$

para o mecanismo de Fermi na ausência de violação de Lorentz. Para o caso com violação de Lorentz, o espectro de energia apresentará o seguinte expoente  $x'$ :



$$x' = 1 + \frac{1}{\frac{8}{3} \frac{V^2}{cL} \tau_c + \frac{2}{3} \frac{V}{L} |\mathbf{n}| \cos \alpha \tau_c}. \quad (5.1.18)$$

Os dados do espectro de raios cósmicos obtido por várias colaborações (HiRes, Auger, Agasa) [2, 4, 12] indicam que o expoente sofre variações de acordo com a faixa de energia observada para as partículas. Até energias de  $10^{15}$  eV, o expoente vale 2,7. No intervalo entre  $10^{15}$  eV e  $10^{19}$  eV, vale 3,1 [20, 35]. Sabendo disso, é possível fazer uma estimativa para a razão  $\tau_c/L$  com o expoente obtido do mecanismo de Fermi sem VL e depois ajustar o parâmetro de violação que surge no expoente modificado pela VL, dado na eq. (5.1.18), com o valor observado. Logo, para 2.7, o mecanismo de Fermi fornece:

$$1 + \frac{1}{\frac{8}{3} \frac{V^2}{c} \frac{\tau_c}{L}} = 2,7, \quad (5.1.19)$$

$$\frac{\tau_c}{L} = \frac{30c}{136V^2} = 0,66. \quad (5.1.20)$$

Para 3.1, obtém-se:

$$1 + \frac{1}{\frac{8}{3} \frac{V^2}{c} \frac{\tau_c}{L}} = 3,1, \quad (5.1.21)$$

$$\frac{\tau_c}{L} = \frac{30c}{168V^2} = 0,54. \quad (5.1.22)$$

Utilizando os resultados das expressões (5.1.20) e (5.1.22), pode-se estimar um valor médio para  $\tau_c/L$ . Assim:

$$\left\langle \frac{\tau_c}{L} \right\rangle = 0,6. \quad (5.1.23)$$

Com esse último resultado, ajusta-se o expoente modificado com o valor observado de 2.7 para que se estime o valor do parâmetro de violação, isto é:

$$1 + \frac{1}{\left\langle \frac{\tau_c}{L} \right\rangle \left( \frac{8}{3} \frac{V^2}{c} + \frac{2}{3} V |\mathbf{n}| \cos \alpha \right)} = 2,7. \quad (5.1.24)$$

Como  $V = 10^4 \text{ m.s}^{-1}$  e  $\langle \tau_c/L \rangle = 0,6 \text{ m}^{-1}.\text{s}$ , a eq. (5.1.24) fornece em:

$$|\mathbf{n}| \cos \alpha = 0,14 \times 10^{-4}. \quad (5.1.25)$$

Note que esse ajuste fenomenológico consiste numa "ferramenta" para se estimar o valor do parâmetro de violação dado pelo módulo do vetor de fundo  $\mathbf{n}$ , para o caso  $c^{0i} \neq 0$ .

## 5.2 Efeito do termo $c^{ij}$ no mecanismo de Fermi

A anisotropia gerada pelo termo de violação de Lorentz  $c^{\mu\nu}$ , no caso em que  $c^{0i} = 0$  e  $c^{ij} \neq 0$ , fornece uma relação de dispersão modificada para os férmions dada por:

$$E \simeq |\mathbf{p}|c(1 - |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \phi_a \cos \phi_b), \quad (5.2.1)$$

onde  $2c^{ij} = (a^i b^j + a^j b^i)$ ;  $\phi_a$  e  $\phi_b$  são os ângulos entre os vetores de fundo  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  e o momento da partícula, respectivamente.

Como o ângulo de incidência da partícula é  $\theta$ , fixam-se, para simplificação, os vetores de fundo  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  com ângulos  $\alpha_a$  e  $\alpha_b$  em relação ao eixo-x do referencial (no qual se definiu a direção de propagação da nuvem), obtendo-se  $\phi_a = \alpha_a - \theta$  e  $\phi_b = \theta - \alpha_b$ . A Fig. [4.2] ilustra essa situação.

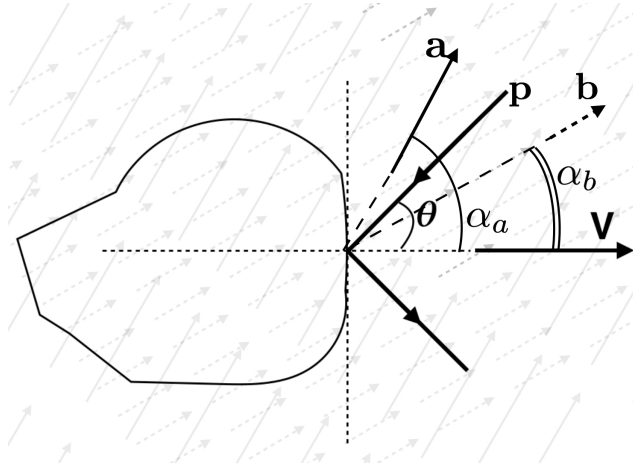


Figura 5.2: Colisão com nuvem na presença dos vetores de fundo  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  que formam ângulos  $\alpha_a$  e  $\alpha_b$  com a velocidade  $\mathbf{V}$  da nuvem, respectivamente.

Com essas considerações, a eq. (5.2.1) leva a:

$$E \simeq |\mathbf{p}|c[1 - |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\alpha_a - \theta) \cos(\theta - \alpha_b)], \quad (5.2.2)$$

$$\frac{|\mathbf{p}|}{E} \simeq \frac{1}{c[1 - |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| (\cos \alpha_a \cos \theta + \sin \alpha_a \sin \theta) (\cos \theta \cos \alpha_b + \sin \theta \sin \alpha_b)]}, \quad (5.2.3)$$

que pode ser reescrita como:

$$\frac{|\mathbf{p}|}{E} \simeq \frac{1}{c} [1 + |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| (\cos \alpha_a \cos \alpha_b \cos^2 \theta + \cos \alpha_a \sin \alpha_b \sin \theta \cos \theta + \sin \alpha_a \cos \alpha_b \sin \theta \cos \theta + \sin \alpha_a \sin \alpha_b \sin^2 \theta)]. \quad (5.2.4)$$

Substituindo a relação de dispersão modificada eq. (5.2.4) na taxa de variação de energia do mecanismo de Fermi, ou seja, eq. (5.2.1), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{E} = & 2\beta \cos \theta + 2\beta |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha_a \cos \alpha_b \cos^3 \theta + 2\beta |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha_a \sin \alpha_b \sin \theta \cos^2 \theta + \\ & + 2\beta |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha_a \cos \alpha_b \sin \theta \cos^2 \theta + 2\beta |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha_a \sin \alpha_b \sin^2 \theta \cos \theta + 2\beta^2, \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

cujo valor médio é obtido realizando a média sobre o ângulo  $\theta$  de incidência:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = & 2\beta \langle \cos \theta \rangle + 2\beta |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha_a \cos \alpha_b \langle \cos^3 \theta \rangle + 2\beta |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha_a \sin \alpha_b \langle \sin \theta \cos^2 \theta \rangle + \\ & + 2\beta |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha_a \cos \alpha_b \langle \sin \theta \cos^2 \theta \rangle + 2\beta |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha_a \sin \alpha_b \langle \sin^2 \theta \cos \theta \rangle + 2\beta^2. \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Para se determinar o valor médio em cada um dos termos da eq. (5.2.6), assume-se que a probabilidade de colisão continua sendo dada por  $dP \approx (1 + \beta \cos \theta)d\Omega$ , tal como foi feito no caso em que  $c^{0i} \neq 0$ . Dessa forma, calculam-se:

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int_{-1}^1 (1 + \beta \cos \theta) \cos \theta d(\cos \theta)}{\int_{-1}^1 (1 + \beta \cos \theta) d(\cos \theta)} = \frac{\beta}{3}, \quad (5.2.7)$$

$$\langle \cos^3 \theta \rangle = \frac{\int_{-1}^1 (1 + \beta \cos \theta) \cos^3 \theta d(\cos \theta)}{\int_{-1}^1 (1 + \beta \cos \theta) d(\cos \theta)} = \frac{\beta}{5}, \quad (5.2.8)$$

$$\langle \sin \theta \cos^2 \theta \rangle = \frac{\int_{-1}^1 (1 + \beta \cos \theta) \sin \theta \cos^2 \theta d(\cos \theta)}{\int_{-1}^1 (1 + \beta \cos \theta) d(\cos \theta)} = \frac{\pi}{16}, \quad (5.2.9)$$

$$\langle \sin^2 \theta \cos \theta \rangle = \frac{\int_{-1}^1 (1 + \beta \cos \theta) \sin^2 \theta \cos \theta d(\cos \theta)}{\int_{-1}^1 (1 + \beta \cos \theta) d(\cos \theta)} = \frac{2}{15}\beta. \quad (5.2.10)$$

Utilizando os resultados (5.2.7) a (5.2.10), a eq. (5.2.6) resulta em:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = & 2\beta^2 + \frac{2}{3}\beta^2 + \frac{2}{5}\beta^2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha_a \cos \alpha_b + \frac{2\pi}{16}\beta |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha_a \sin \alpha_b + \\ & + \frac{2\pi}{16}\beta |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha_a \cos \alpha_b + \frac{4}{15}\beta^2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha_a \sin \alpha_b, \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

que pode ser simplificada em:

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = \frac{\pi}{8} |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\alpha_a + \alpha_b) \beta + \frac{8}{3} \beta^2, \quad (5.2.12)$$

onde se omitiram os termos em  $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \beta^2$  por serem muito pequenos.

A eq. (5.2.13) mostra a taxa média de variação de energia da partícula ao colidir com nuvens magnéticas num cenário cuja anisotropia é indicada pelos vetores de fundo  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  que compõem as componentes  $c^{ij}$  do termo de violação  $c^{\mu\nu}$ . É notável que o termo de primeira ordem em  $\beta$  pode contribuir para ganhos (aceleração) ou perdas (desaceleração) conforme as direções fixas  $\alpha_a$  e  $\alpha_b$  dos vetores de fundo em relação à velocidade  $\mathbf{V}$  da nuvem, uma vez que  $\sin(\alpha_a + \alpha_b)$  pode assumir valores positivos ou negativos. Uma vez que  $\beta \sim 10^{-4}$ , o termo de primeira ordem em  $\beta$  representará uma contribuição eficiente se  $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \geq 10^{-4}$ , pois assim se obterá  $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \beta \geq \beta^2$ .

### 5.2.1 Espectro modificado

Da seção (3.5.1), o espectro dos raios cósmicos obtido do mecanismo de Fermi é dado por  $N(E) = kE^{-x}$ , com

$$x = 1 + \frac{1}{\sigma \tau_c}, \quad (5.2.13)$$

onde  $\sigma$  está relacionado com o ganho médio de energia, isto é:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \sigma E, \quad (5.2.14)$$

onde  $\Delta t \simeq L/c$  é o tempo médio entre colisões com as nuvens. Seguindo o mesmo procedimento realizado na seção (4.3.1), o espectro modificado pelo termo  $c^{ij}$ , representado pelos vetores de fundo  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , apresentará:

$$\sigma' = \frac{\pi}{8} |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\alpha_a + \alpha_b) \frac{V}{L} + \frac{8}{3} \frac{v^2}{cL}. \quad (5.2.15)$$

Utilizando a eq. (5.2.13), o expoente do espectro modificado será dado por:

$$x' = 1 + \frac{1}{\frac{\pi}{8} |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\alpha_a + \alpha_b) \frac{V}{L} \tau_c + \frac{8}{3} \frac{V^2}{cL} \tau_c}. \quad (5.2.16)$$

Agora é possível ajustar o valor do parâmetro de violação dado por  $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$  de acordo com o expoente observado 2.7. Para isso, deve-se fazer:

$$1 + \frac{1}{\langle \frac{\tau_c}{L} \rangle \left[ \frac{8}{3} \frac{V^2}{c} + \frac{\pi}{8} |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\alpha_a + \alpha_b) V \right]} = 2,7. \quad (5.2.17)$$

Como  $V = 10^4 \text{ m.s}^{-1}$  e  $\langle \tau_c/L \rangle = 0,6 \text{ m}^{-1}.\text{s}$ , a eq. (5.2.17) fornece finalmente:

$$|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\alpha_a + \alpha_b) = 0,23 \times 10^{-4}. \quad (5.2.18)$$

As expressões (5.1.25) e (5.2.18) indicam uma estimativa para os valores dos parâmetros de violação que, num cenário no qual a VL seja possível, ajustam-se ao expoente observado no espectro de raios cósmicos sem a necessidade de se explicitar qual a região de aceleração onde as partículas se difundem e são aceleradas.

## Considerações Finais

Estudos e trabalhos sobre raios cósmicos têm sido realizados ativamente na Astrofísica desde a descoberta de V. Hess em 1912. Uma consequência dessas pesquisas foi a detecção de várias partículas antes dos aceleradores de partículas, tal como o méson  $\pi$  descoberto por Lattes e sua equipe. Ainda existem muitas questões em aberto, como a origem dos raios cósmicos e seus mecanismos de aceleração. Um exemplo disso foi discutido quando se abordou o limite GZK, onde se explanou sobre o efeito esperado no espectro de energia e a presença de eventos com energias  $E \geq 10^{20}$  eV. Assim, analisou-se a probabilidade de que partículas, com esse valor de energia, possam vir de certos objetos astrofísicos, como as galáxias M87 e Centaurus A.

Ao se discutir sobre mecanismos de aceleração de raios cósmicos, estudou-se um importante resultado derivado por Fermi em 1949, no qual as partículas adquirem energia ao colidir com nuvens magnéticas que se propagam pelo espaço interestelar. Apesar de ser pouco eficiente, pois os ganhos de energia são proporcionais a  $\beta^2 \sim 10^{-8}$  a cada colisão, esse mecanismo sugere naturalmente que os raios cósmicos difundem-se pelo espaço enquanto sofrem colisões, o que conduz a um espectro na forma  $N(E) = kE^{-x}$ , no qual o expoente  $x$  depende do ganho médio de energia que o mecanismo de Fermi estabelece. Buscando melhorias no mecanismo de segunda ordem, vários físicos elaboraram um mecanismo de aceleração em frentes de choque, no qual o ganho de energia é dado em primeira ordem em  $\beta$  (daí esse mecanismo ser conhecido também como mecanismo de Fermi de primeira ordem). Esses dois mecanismos de Fermi se baseiam em colisões estocásticas com nuvens magnéticas e frentes de choque que se propagam no meio interestelar. O presente trabalho também mostrou outros mecanismos conhecidos na literatura, como aceleração de partículas por sunspots e pulsars, nos quais o ganho de energia ocorre devido a interação de partículas carregadas com os campos eletromagnéticos gerados por esses objetos astrofísicos. É importante comentar que, para esses mecanismos, o ganho de energia ocorre enquanto a partícula está nas "proximidades" desses objetos.

Depois foi abordado o Modelo Padrão Estendido (MPE), no qual a possibilidade da

quebra espontânea da simetria de Lorentz é representada por valores esperados do vácuo de quantidades tensoriais que quebram a simetria de Lorentz. Muitos trabalhos interessantes foram feitos nessa área desde que Kostelecky e Colladay estabeleceram as bases do MPE, indicando possíveis novos efeitos em sistemas físicos conhecidos, como os níveis de energia do átomo de hidrogênio. Motivado pela possibilidade de violação de Lorentz, neste trabalho, investigaram-se os possíveis efeitos que o termo de violação  $i\bar{\Psi}c^{\mu\nu}\gamma_\nu\partial_\mu\Psi$  pode gerar no mecanismo de aceleração de Fermi (de segunda ordem), buscando melhorar esse mecanismo. Como resultado, o termo de violação proposto mostrou-se "promissor", pois forneceu relações de dispersão modificadas anisotropicamente, o que gerou um ganho de energia em primeira ordem em  $\beta$ . Isso foi mostrado através do estudo de dois casos:  $c^{0i} \neq 0$  e  $c^{ij} = 0$ ;  $c^{0i} = 0$  e  $c^{ij} \neq 0$ . Entretanto, para que o termo de primeira ordem em  $\beta$  seja potencialmente mais significativo do que o termo de segunda ordem no mecanismo de Fermi, o vetor de fundo deve ser  $|\mathbf{n}| \gtrsim 10^{-4}$  (para  $c^{0i}$ ) e  $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \gtrsim 10^{-4}$  (para  $c^{ij}$ ), o que não acontece, pois trabalhos na literatura [38] limitam a magnitude deste termo  $c^{\mu\nu}$  em patamares limites da ordem de  $10^{-23} - 10^{-24}$ , muito menores que  $10^{-4}$ . Sendo assim, anisotropias do espaço-tempo provocadas pela violação da simetria de Lorentz, tal como estabelecido no Modelo Padrão Estendido, não podem contribuir efetivamente para uma melhoria do aumento na taxa de ganho de energia do raio cósmico por colisão em relação ao mecanismo de aceleração de Fermi de segunda ordem.

# Apêndice A

## Threshold Energy e Efeito Compton Inverso

### A.1 Threshold Energy

Talvez a possibilidade mais notável sugerida pela equivalência massa-energia seja a criação de novas partículas – através de processos relativísticos, como colisões – se uma quantidade adequada de energia está disponível. Assim, para que um processo desse tipo ocorra, é necessário uma quantidade mínima de energia, denominada, *threshold energy*. Muitos cenários astrofísicos envolvendo interações entre partículas só acontecem sob essa quantidade mínima de energia. Dessa forma, é importante conhecer como essa condição de viabilização de interações entre partículas é determinado em termos de energia e momento.

Para melhor compreensão, determinar-se-á a energia mínima que viabiliza o seguinte processo:

$$A + B \rightarrow C + D + E, \quad (\text{A.1.1})$$

onde as letras latinas representam as partículas colidentes (A e B) e os produtos da colisão (C, D e E). Construindo-se os 4-momentos para cada partícula e fazendo uso do princípio de conservação de energia-momento, ter-se-ão:

$$P_A^\mu = \left( \frac{E_A}{c}, \mathbf{p}_A \right) = (m_{0A}c\gamma_A, m_{0A}\gamma_A\mathbf{v}_A), \quad (\text{A.1.2})$$

$$P_B^\mu = \left( \frac{E_B}{c}, \mathbf{p}_B \right) = (m_{0B}c, \mathbf{0}). \quad (\text{A.1.3})$$

Note que a representação acima foi feita no referencial da partícula B. O momento



total antes do processo será a soma dos dois 4-vetores acima. Para que se estabeleça a conservação de energia-momento, é necessário descrever adequadamente os 4-momentos das partículas produtos da colisão. É nesse ponto da análise que se deve impor uma condição de minimização de energia para que tal processo possa ocorrer.

Observe que a conservação do 3-momento exige que as partículas (produtos) apresentem algum movimento, pois  $\mathbf{p}_{inicial} = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B \neq \mathbf{0}$ ; assim, elas precisam ter alguma energia cinética. Assim, a energia mínima para que o processo ocorra deve ser maior que a soma das energias de repouso das partículas criadas.

A condição mais *econômica* para a criação de partículas é aquela em que, num dado processo, as partículas produtos estejam em repouso num dado referencial<sup>1</sup>. Dessa forma, o 4-momento total após a colisão será dado por:

$$P_{T(depois)}^\mu = \left( \frac{E_C + E_D + E_E}{c}, \mathbf{p}_C + \mathbf{p}_D + \mathbf{p}_E \right). \quad (\text{A.1.4})$$

Aplicando a condição de minimização, tem-se o seguinte invariante relativístico:

$$P_{T(depois)min}^\mu = (m_{0C}c + m_{0D}c + m_{0E}c, \mathbf{0}), \quad (\text{A.1.5})$$

$$P_{T(depois)min}^2 = P_{T(depois)min}^\mu \cdot P_{\mu T(depois)min} = (m_{0C} + m_{0D} + m_{0E})^2 c^2. \quad (\text{A.1.6})$$

A contração tensorial do 4-momento total inicial – antes da colisão – leva a:

$$P_{T(antes)}^2 = (P_A^\mu + P_B^\mu)^2, \quad (\text{A.1.7})$$

$$P_{T(antes)}^2 = P_A^2 + P_B^2 + 2P_A^\mu \cdot P_B^\mu, \quad (\text{A.1.8})$$

$$P_{T(antes)}^2 = m_{0A}^2 c^2 + m_{0B}^2 c^2 + 2m_{0A}m_{0B}c^2 \gamma_A. \quad (\text{A.1.9})$$

A expressão (B.0.6) fornece a energia mínima para a viabilização do processo na configuração mais econômica. Entretanto, os processos que ocorrem na Natureza (envolvendo raios cósmicos) e nos aceleradores de partículas artificiais envolvem configurações diferentes da que foi suposta aqui, ou seja, as partículas criadas apresentam alguma energia cinética. Dessa forma, a condição, para que o processo de criação de partículas representado pela expressão (B.0.1) seja possível, será dado por:

$$P_{T(antes)}^2 > P_{T(depois)min}^2, \quad (\text{A.1.10})$$

$$m_{0A}^2 c^2 + m_{0B}^2 c^2 + 2m_{0A}m_{0B}c^2 \gamma_A > (m_{0C} + m_{0D} + m_{0E})^2 c^2, \quad (\text{A.1.11})$$

---

<sup>1</sup>A condição de minimização de energia para que o processo ocorra consiste na criação de partículas que emergem juntas após o processo, isto é, num referencial em que  $\sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ ; que é o ref. do CM.

$$\gamma_A^{min} > \frac{(m_{0C} + m_{0D} + m_{0E})^2 - (m_{0A}^2 + m_{0B}^2)}{2m_{0A}m_{0B}}. \quad (\text{A.1.12})$$

A eq. (B.0.12) indica o fator de Lorentz para a partícula colidente  $A$ ; dessa forma, pode-se facilmente determinar qual deve ser sua energia inicial mínima,  $E_A^{min} = m_{0A}c^2\gamma_A^{min}$ , para que o processo ocorra.

O Threshold Energy fornece um importante resultado para a produção de partículas, pois indica as energias mínimas para que tais processos ocorram, além de estabelecer a conservação de energia. Entretanto, essa não é a única lei de conservação que é estabelecida na criação de partículas. Outras leis fundamentais também são necessárias, como a conservação de números quânticos, tais como os números leptônico, bariônico, isospin e spin; e a conservação da carga elétrica.

## A.2 Efeito Compton Inverso

O efeito Compton inverso é um processo de colisão relativística no qual um próton (ou elétron) muito energético colide com um fóton de baixa energia que, após a colisão, recebe parte da energia da partícula incidente. É um efeito *oposto* ao espalhamento Compton, no qual o fóton é a partícula incidente de alta energia que, após a colisão, perde energia e, conseqüentemente, tem seu comprimento de onda incrementado.

A expansão do Universo é um dos aspectos observacionais da Astronomia que corroboram a origem do Universo numa gigante explosão em algum instante no passado. Esse é um dos pressupostos do modelo do Big Bang, fortemente defendido por Fred Hoyle (1915-2001) – que sugeriu o termo *Big Bang* –, que durante os anos 4 (século XX) tinha como *rival* o modelo de Universo de Estado Estacionário<sup>2</sup>,

George Gamow (1904-1968)<sup>3</sup> previu que deveria existir uma radiação residual – *um fóssil* – do Big Bang. De acordo sua estimativa, a temperatura dessa radiação seria da ordem de uns poucos Kelvins (K). Somente em 1965, Arno Penzias e Robert Wilson<sup>4</sup> detectaram esse fóssil do Big Bang enquanto tentavam desenvolver uma antena de rádio de baixo ruído em Holmdel, New Jersey (USA). Com essa descoberta, o modelo do Big Bang começou a ter aceitação geral.

A temperatura dessa radiação foi medida pelo COBE<sup>5</sup> como  $2,725 \pm 0,001\text{K}$ , estando

<sup>2</sup>O modelo de Estado Estacionário estava baseado no pressuposto de que o Universo inteiro não dependia do tempo; estrelas novas *nasciam* continuamente enquanto as velhas *morriam*, fortemente defendido por Fred Hoyle (1915-2001) – que sugeriu o termo *Big Bang*. Assim, o Universo seria imutável e eterno.

<sup>3</sup>Juntamente com Ralph Alpher (1921-2007) e Robert Herman (1914-1997).

<sup>4</sup>Laureados com o Prêmio Nobel em 1978. Vide referências [II], p. 12.

<sup>5</sup>COsmic ray Background Explorer, lançado em 1989.

associada à energia de fótons de  $10^{-4}$  eV.

Sabendo o valor da energia da radiação cósmica de fundo<sup>6</sup>, pode-se prosseguir com o efeito Compton Inverso.

A colisão mencionada pode ser representada por:

$$p + \gamma \rightarrow p + \gamma. \quad (\text{A.2.1})$$

Os 4-vetores energia-momento para o próton e o fóton antes (sem linha) e depois (com linha) da colisão são<sup>7</sup>:

$$P_p^\mu = \left( \frac{E_p}{c}, \mathbf{p}_p \right) = (\gamma m_{0p} c, \gamma m_{0p} \mathbf{v}), \quad (\text{A.2.2})$$

$$P_p'^\mu = \left( \frac{E_p'}{c}, \mathbf{p}_p' \right) = (\gamma' m_{0p} c, \gamma' m_{0p} \mathbf{v}'), \quad (\text{A.2.3})$$

$$P_\gamma^\mu = \left( \frac{E_\gamma}{c}, \mathbf{p}_\gamma \right) = \left( \frac{E_\gamma}{c}, \frac{E_\gamma}{c} \mathbf{i} \right), \quad (\text{A.2.4})$$

$$P_\gamma'^\mu = \left( \frac{E_\gamma'}{c}, \mathbf{p}_\gamma' \right) = \left( \frac{E_\gamma'}{c}, \frac{E_\gamma'}{c} \mathbf{i}' \right). \quad (\text{A.2.5})$$

Estabelecendo a conservação do 4-momento, tem-se:

$$P_p^\mu + P_\gamma^\mu = P_p'^\mu + P_\gamma'^\mu. \quad (\text{A.2.6})$$

A manipulação dos 4-vetores possibilita um rearranjo na eq. (A.0.6), de forma que o trabalho algébrico na determinação da energia final do fóton da radiação cósmica de fundo seja simplificado.

$$P_p^\mu + P_\gamma^\mu - P_\gamma'^\mu = P_p'^\mu. \quad (\text{A.2.7})$$

Realizando a contração tensorial, tem-se:

$$P_p^2 + P_\gamma^2 + P_\gamma'^2 + 2P_p \cdot P_\gamma - 2P_p \cdot P_\gamma' - 2P_\gamma \cdot P_\gamma' = P_p'^2. \quad (\text{A.2.8})$$

Com a métrica de Minkowski dada por  $g_{\mu\nu} = (+, -, -, -)$ , tem-se  $P_p^2 = P_p'^2 = m_{0p}^2 c^2$ . Como fótons são partículas sem massa, tem-se  $P_\gamma^2 = P_\gamma'^2 = 0$ . Portanto, a eq. (A.0.9) fica:

<sup>6</sup>Usando a lei de Boltzman,  $E = k_B T$ , onde  $k_B \approx 1,38 \times 10^{-23} (J/K)$ , pode-se determinar o valor da energia dos fótons da radiação de fundo. Assim, para a temperatura de  $2,725K$ , tem-se um valor de energia de  $2,34 \times 10^{-4} eV$ .

<sup>7</sup>É importante não confundir o fator de Lorentz  $\gamma$  que aparece no 4-vetor energia-momento do próton com o subíndice  $\gamma$  no 4-vetor do fóton; esse subíndice é apenas uma designação de que o 4-vetor refere-se ao fóton.

$$P_\gamma \cdot P'_\gamma = P_p \cdot P_\gamma - P_p \cdot P'_\gamma. \quad (\text{A.2.9})$$

Utilizando as relações (A.0.2 – A.0.5):

$$\frac{E_\gamma E'_\gamma}{c^2} - \frac{E_\gamma E'_\gamma}{c^2} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}' = \gamma m_{0p} E_\gamma - \gamma m_{0p} \frac{E_\gamma}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} - \gamma m_{0p} E'_\gamma + \gamma m_{0p} \frac{E'_\gamma}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}', \quad (\text{A.2.10})$$

onde os vetores  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{i}'$  representam as direções de propagação do fóton antes e depois da colisão, respectivamente; o vetor  $\mathbf{v}$  é a velocidade do próton ultra-energético.

A Fig. [A.1] ilustra o comportamento desse processo:

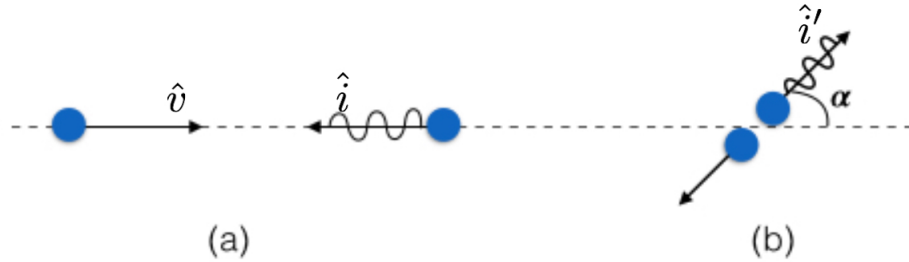


Figura A.1: Configurações antes (à esquerda) e depois (à direita) da colisão do próton ultra-energético com fóton da radiação cósmica de fundo.

Assim, podem-se determinar os produtos escalares entre os vetores presentes na eq. (A.0.11). Isto é:

$$\mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{i}}' = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \quad (\text{A.2.11})$$

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{i}} = v \cos \pi = -v, \quad (\text{A.2.12})$$

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{i}}' = v \cos \alpha, \quad (\text{A.2.13})$$

onde  $\alpha$  é o ângulo de espalhamento do fóton. Substituindo as expressões acima na eq. (A.0.11), ter-se-á:

$$\frac{E_\gamma E'_\gamma}{c^2} + \frac{E_\gamma E'_\gamma}{c^2} \cos \alpha = \gamma m_{0p} E_\gamma + \gamma m_{0p} \frac{E_\gamma}{c} v - \gamma m_{0p} E'_\gamma + \gamma m_{0p} \frac{E'_\gamma}{c} v \cos \alpha, \quad (\text{A.2.14})$$

cuja simplificação leva a:

$$E'_\gamma = \frac{\gamma m_{0p} c^2 \left(1 + \frac{v}{c}\right)}{(1 + \cos \alpha) + \frac{\gamma m_{0p} c^2}{E_\gamma} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha\right)}. \quad (\text{A.2.15})$$

A eq. (A.2.15) mostra a energia do fóton após a colisão com o próton ultra-energético. Verificar-se-á agora quanto a energia do fóton aumenta e quanto a energia do próton diminui. Para isso, deve-se lembrar que, no efeito Compton, o aumento no comprimento de onda (e subsequente diminuição na frequência) do fóton era máximo quando a colisão ocorria frontalmente. Assim, no efeito Compton inverso descrito aqui, a colisão frontal ( $\alpha = 0$ ) deve resultar num aumento máximo de energia para o fóton.

Usando<sup>8</sup>  $\gamma v = c\gamma\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$ , a expressão (A.0.20) simplifica-se em:

$$E'_\gamma = \frac{m_{0p} c^2 \left(\gamma + \frac{\gamma v}{c}\right)}{(1 + \cos \alpha) + \frac{m_{0p} c^2}{E_\gamma} \left(\gamma - \frac{\gamma v}{c} \cos \alpha\right)}, \quad (\text{A.2.16})$$

$$E'_\gamma = \frac{m_{0p} c^2 \left(\gamma + \gamma\sqrt{1 - 1/\gamma^2}\right)}{(1 + \cos \alpha) + \frac{m_{0p} c^2}{E_\gamma} \left(\gamma - \gamma\sqrt{1 - 1/\gamma^2} \cos \alpha\right)}. \quad (\text{A.2.17})$$

A aproximação  $\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$  permite simplificar a eq. (A.0.22) em:

$$E'_\gamma = \frac{m_{0p} c^2 \left(2\gamma - \frac{1}{2\gamma}\right)}{(1 + \cos \alpha) + \frac{m_{0p} c^2}{E_\gamma} \left[\gamma - \left(\gamma - \frac{1}{2\gamma}\right) \cos \alpha\right]}, \quad (\text{A.2.18})$$

que, para uma colisão frontal, torna-se

$$E'_\gamma = \frac{m_{0p} c^2 \left(2\gamma - \frac{1}{2\gamma}\right)}{2 + \frac{m_{0p} c^2}{2\gamma E_\gamma}}. \quad (\text{A.2.19})$$

---

<sup>8</sup>Essa relação pode ser obtida do próprio fator de Lorentz:  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$  através de algumas manipulações algébricas simples.

A energia do fóton incidente da radiação cósmica de fundo é  $E_\gamma = 2,34 \times 10^{-4}$  eV; a energia de repouso do próton é 938,26 MeV; e um próton ultra-energético (raio cósmico) tem  $\gamma = 10^{11}$ . Substituindo esses valores na expressão (A.0.24), obtém-se  $E'_\gamma = 8,51 \times 10^{12}$  MeV. Observe que o fóton (antes da colisão) tinha alguns elétron-volts de energia e, após o choque com o raio cósmico, sua energia aumenta em torno de 22 ordens de grandeza. Comparando essa energia com a energia inicial do raio cósmico, isto é,  $E_p = \gamma m_{0p} c^2 = 938,26 \times 10^{11}$  MeV, percebe-se que ela representa cerca de 9,07% da energia do próton incidente.

A taxa de transferência de energia do próton para o fóton cresce à medida que a energia inicial do próton aumenta. Por exemplo: se a energia inicial do próton fosse 5 vezes maior, com  $\gamma = 5 \times 10^{11}$ , a energia do fóton após a colisão seria de  $1,56 \times 10^{14}$  MeV. Isso significaria que o próton cederia cerca de aproximadamente 33,25% de sua energia.

Isso é uma evidência de que prótons ultra-energéticos (raios cósmicos) sofrem significativas perdas de energia durante sua viagem partindo de suas fontes até a Terra, por interagirem com fótons da radiação cósmica de fundo. Assim, é possível perceber que esse tipo de interação é uma das causas do pouco fluxo de raios cósmicos ultra-energéticos (da ordem de  $10^{20}$  eV) que chegam à Terra.

## Apêndice B

### Livre caminho médio

Em muitas situações físicas de interesse, é importante determinar a distância média que uma partícula trafega, entre tantas outras, sem sofrer qualquer colisão, sendo esta uma grandeza relevante e experimentalmente verificada, denominada *livre caminho médio*.

Em termos formais, o livre caminho médio<sup>[1]</sup>,  $\lambda$ , é a distância média percorrida por uma partícula até que ela colida com alguma partícula-alvo, sendo dado por:

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma}, \quad (\text{B.0.1})$$

onde  $\sigma$  é a seção de choque para a colisão em questão e  $n$  é o número de partículas-alvo por unidade de volume. Num gás, líquido ou meio material de densidade  $\rho$ , vale [1]:  $n = N_A\rho/A$ , onde  $A$  é o número atômico do átomo que compõe o meio. Observe que o livre caminho médio é inversamente proporcional à seção de choque de um dado processo. Assim, quanto menor a seção de choque, maior o valor de  $\lambda$ ; isso significa, obviamente, que baixa probabilidade de colisão permitirá à partícula percorrer uma distância maior até colidir eventualmente. Por outro lado, quanto maior a densidade  $n$  de partículas-alvo, menor será o valor de  $\lambda$ , pois ao *adentrar* numa região com maior número de alvos por unidade de volume, a partícula irá percorrer uma distância menor até se chocar com um desses alvos.

Uma forma relativamente simples de se entender a construção da eq. (B.0.1) é *visualizar* que ao longo de sua trajetória numa região com partículas-alvo, a partícula (incidente) descreve um percurso, durante um intervalo de tempo de referência  $\Delta t$ , contido num volume cuja área de seção é a seção de choque  $\sigma$ . Isso porque, conforme já foi mencionado,  $\sigma$  representa a área efetiva para a colisão entre a partícula-alvo e a incidente; somente dentro dessa

---

<sup>1</sup>Pode-se entender o livre caminho médio [1] de maneira similar. Considerando que uma partícula incida sobre (ou passe através de) uma região com área transversal  $A$  contendo  $n$  partículas-alvo por unidade de volume, o livre caminho médio é definido como a distância média percorrida pela partícula incidente antes que ela se choque com um desses alvos. Se a colisão dessa partícula com um dos alvos tem uma seção de choque  $\sigma$ , a probabilidade de ocorrência da colisão pode ser dada por  $p = \sigma/A$ .

área, poderá ocorrer a colisão. A Fig. [B.1] ilustra um cilindro cujo comprimento equivale a  $\bar{v}\Delta t$ , onde  $\bar{v}$  é a velocidade média da partícula ao percorrer o volume formado por esse cilindro.

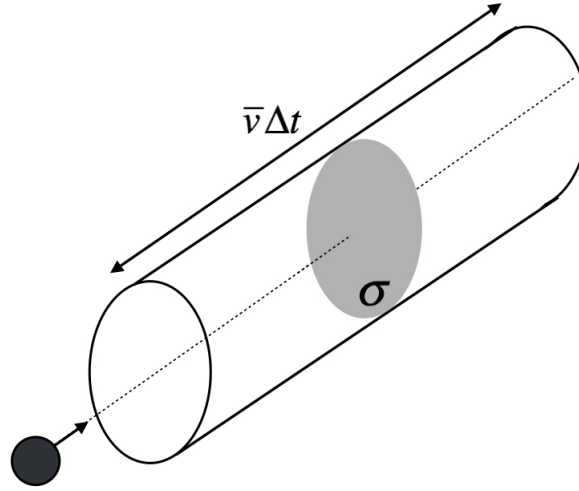


Figura B.1: *Cilindro* por onde a partícula incidente irá passar.

O volume do cilindro corresponde à região, com uma densidade volumétrica  $n$  de partículas-alvo, em que a partícula incidente irá percorrer durante um intervalo de tempo  $\Delta t$  de referência. Assim, o número de colisões sofridas pela partícula (incidente) durante sua trajetória<sup>2</sup> coincide com o número médio de partículas-alvo dentro do volume da Fig. [B.1]. Isto é,  $\bar{N}_{colisoes} = nV$ .

Dividindo a distância total percorrida pela partícula-incidente pelo número médio de colisões, obtém-se:

$$\frac{\text{distancia percorrida}}{\text{numero medio de colisoes}} = \frac{\bar{v}\Delta t}{nV}, \quad (\text{B.0.2})$$

$$\frac{\text{distancia percorrida}}{\text{numero medio de colisoes}} = \frac{\bar{v}\Delta t}{n\sigma\bar{v}\Delta t}, \quad (\text{B.0.3})$$

$$\frac{\text{distancia percorrida}}{\text{numero medio de colisoes}} = \frac{1}{n\sigma}. \quad (\text{B.0.4})$$

Assim, a distância percorrida, em média, pela partícula incidente até que ela sofra uma colisão, isto é, a distância média entre uma colisão e outra, corresponderá a  $1/n\sigma$ . Observe que essa distância corresponde ao livre caminho médio,  $\lambda$ , definido na eq. (C.0.1).

<sup>2</sup>Fica implícito que, para essa descrição, as colisões são elásticas e a partícula incidente ao entrar numa região com várias partículas-alvo irá, eventualmente, colidir com esses alvos, alterando sua direção.



## Apêndice C

### Sobre espelhos magnéticos

Um espelho magnético é um efeito que ocorre quando uma partícula carregada encontra- com uma região permeada por um campo magnético não homogêneo, sendo refletida por esse campo em algum ponto. Para se entender como essa reflexão ocorre, é necessário definir o momento magnético gerado pela partícula ao descrever uma trajetória circular num campo magnético.

Considere que uma partícula de carga  $q$  com velocidade  $\mathbf{v}$  adentra numa região com campo magnético que aponta para fora do plano da página. A força magnética sentida pela partícula a obriga a descrever uma trajetória circular de raio  $r$ . Numa situação mais geral, a velocidade da partícula possui duas componentes: uma longitudinal ou paralela ao campo magnético e outra perpendicular ao campo, sendo a trajetória helicoidal. No caso em que a partícula possui velocidade ortogonal ao campo  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{v}_\perp$ ), ocorre apenas movimento circular uniforme, cujo raio é:

$$r = \frac{mv_\perp}{qB}, \quad (\text{C.0.1})$$

onde  $q$  e  $m$  são a carga e a massa da partícula.

A Fig. [C.1] mostra as trajetórias descritas por partículas de cargas positiva e negativa. Neste caso, a velocidade inicial da partícula é descrita por  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp$ , onde a velocidade  $\mathbf{v}_\parallel$  é a componente paralela ao campo magnético da velocidade da partícula, ou seja, essa componente aponta na mesma direção e sentido de  $\mathbf{B}$ . Enquanto  $\mathbf{v}_\perp$  é a componente perpendicular ao campo magnético (e tangente à trajetória circular da partícula).

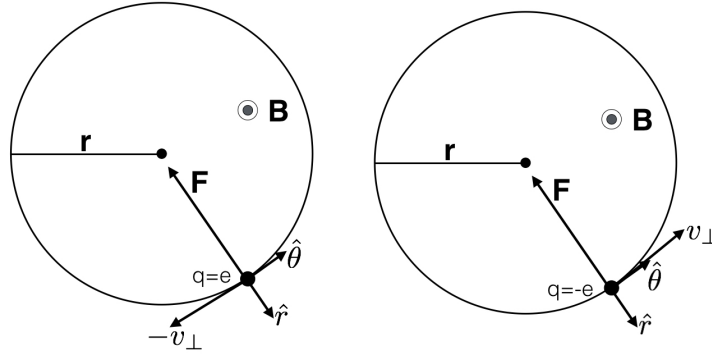


Figura C.1: À esquerda – trajetória para uma partícula de carga positiva; à direita – para uma partícula de carga negativa.

Ao descrever a trajetória circular, forma-se uma linha de corrente devido ao movimento da carga.  $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ . Se a carga do sistema é suposta distribuída ao longo da sua extensão ( $\Delta l = 2\pi r$ ), pode-se escrever  $\Delta q = \lambda \Delta l$ , onde  $\lambda$  é a densidade linear de carga:  $\lambda = q/2\pi r$ . Neste caso,

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lambda v_{\perp}, \quad (\text{C.0.2})$$

onde  $v_{\perp} = \Delta l / \Delta t$ .

Note que tanto  $q$ , quanto  $v_{\perp}$ , pode ser positiva ou negativa. Nas duas situações possíveis, conforme a Fig. [C.1], teremos  $qv_{\perp} = -|q||v_{\perp}|$ . Esse resultado será importante na determinação da *força de espelho magnético*. Por enquanto, tem-se a seguinte intensidade de corrente:

$$I = \frac{qv_{\perp}}{2\pi r}, \quad (\text{C.0.3})$$

onde se fez  $|q||v_{\perp}| \rightarrow qv_{\perp}$  para uma notação menos carregada.

Pode-se ainda interpretar que a corrente produzida pela carga em movimento gera um momento magnético, definido por:

$$\mu = IS, \quad (\text{C.0.4})$$

onde  $S = \pi r^2$  é a área delimitada pela linha de corrente. Ter-se-á então:

$$\mu = \frac{qv_{\perp}}{2} r. \quad (\text{C.0.5})$$

Substituindo  $r$  dado pela eq. (C.0.1), resulta:

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}. \quad (\text{C.0.6})$$

Antes de se analisar o espelho magnético, é importante discutir alguns aspectos essenciais acerca do movimento de uma partícula carregada num campo magnético uniforme. É conhecido dos cursos básicos de Física 3 [23] que quando uma partícula adentra uma região com campo magnético uniforme, sofrerá ação da força magnética,  $F = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  (sendo  $\mathbf{v}$  perpendicular ao campo), que é sempre ortogonal ao campo magnético. Dessa forma, a cada ponto da trajetória da partícula, a força magnética será sempre perpendicular a  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{B}$ , e atuará como uma força centrípeta alterando a direção do movimento da partícula, mas não o módulo da velocidade, obrigando-a a executar um movimento circular uniforme<sup>1</sup> cujo raio é dado pela eq. (C.0.1).

Outra situação interessante ocorre quando a partícula adentra a região com campo magnético uniforme com uma velocidade que não é perfeitamente perpendicular ao campo. Neste caso, pode-se escrever a velocidade da partícula ao adentrar na região com campo na forma  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$ , onde a velocidade  $\mathbf{v}_{\parallel}$  é a componente paralela ao campo magnético da velocidade da partícula (essa componente aponta na mesma direção e sentido de  $\mathbf{B}$ ), enquanto  $\mathbf{v}_{\perp}$  é a componente perpendicular ao campo magnético. Uma vez que não haverá força magnética na direção de  $\mathbf{v}_{\parallel}$ , pois  $\mathbf{v}_{\parallel} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ , a partícula irá descrever um movimento retilíneo uniforme na direção do campo magnético. Enquanto isso, a componente perpendicular ao campo magnético,  $\mathbf{v}_{\perp}$ , originará um movimento circular uniforme (conforme foi comentado anteriormente) com raio da órbita dado pela eq. (C.0.1). Dessa forma, ao adentrar na região com campo magnético uniforme a partícula irá descrever dois movimentos concomitantemente, resultando num movimento helicoidal.

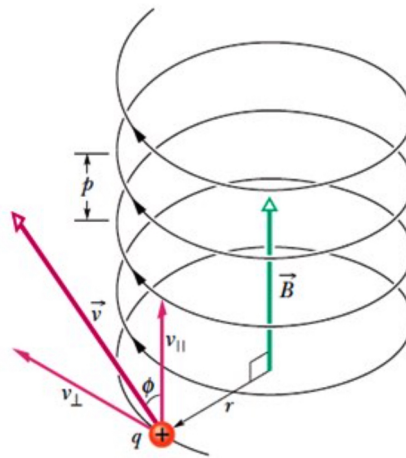


Figura C.2: Movimento helicoidal de uma partícula num campo magnético uniforme [32].

<sup>1</sup>Outras informações importantes podem ser determinadas, além do raio da trajetória, como a frequência angular, dada por  $\omega = v/r$  (onde  $v$  é perpendicular ao campo), e o período do movimento,  $T = 2\pi/\omega$ .

A Fig. [C.2] ilustra o movimento helicoidal descrito pela partícula ao adentrar na região com campo magnético formando um ângulo  $\phi$  com a direção do campo. É possível definir o *passo* da trajetória, dado por  $p = v_{\parallel}T$  (onde  $T = 2\pi/\omega = 2\pi m/qB$  é o período do movimento circular), como a distância entre dois laços vizinhos (ou duas "órbitas" circulares adjacentes). Da Fig. [C.2], tem-se:

$$v_{\parallel} = |\mathbf{v}_{\parallel}| = v \cos \phi, \quad v_{\perp} = |\mathbf{v}_{\perp}| = v \sin \phi, \quad (\text{C.0.7})$$

onde  $v$  é o módulo da velocidade da partícula. Dessa forma, o passo e o raio da trajetória serão dados por:

$$p = \frac{2\pi m v \cos \phi}{qB}, \quad r = \frac{m v \sin \phi}{qB}. \quad (\text{C.0.8})$$

Quando a partícula adentra ortogonalmente a região com campo magnético uniforme, tem-se  $\phi = \pi/2$ , o que leva a um passo nulo e raio dado pela eq. (C.0.1) e, conseqüentemente, o movimento deixa de ser helicoidal para ser apenas circular uniforme.

De maneira qualitativa, pode-se descrever o que acontece quando a partícula adentra numa região com campo magnético não uniforme e com velocidade inicial não perpendicular ao campo. Nesse caso, a partícula continuará a descrever trajetória helicoidal, porém essa hélice não é uniforme: das eqs. (C.0.8), nota-se que o passo e o raio diminuem à medida que o campo magnético  $B$  fica mais intenso. Conseqüentemente, quando a partícula passa para uma região com campo  $B$  maior, os círculos da hélice tornam-se menores e mais próximos.

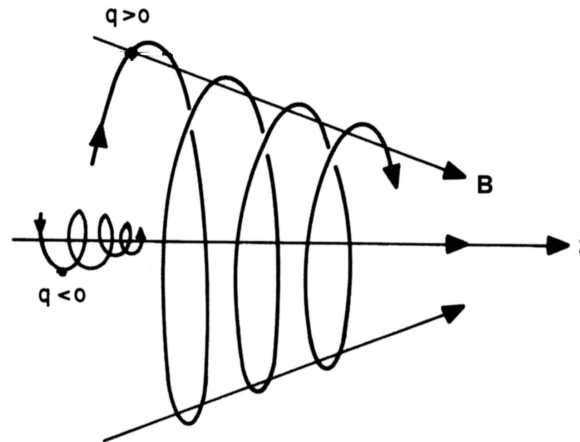


Figura C.3: Movimento helicoidal de uma partícula num campo magnético crescente ao longo do eixo-z [13].

Agora será analisado o caso dos espelhos magnéticos, que conferem uma situação com campo magnético não uniforme.

Considere agora que a partícula esteja se movendo num campo magnético não uniforme cuja componente na direção  $z$  esteja aumentando. Mostrar-se-á que o momento magnético  $\mu$ , dado na eq. (C.0.6), constitui um *invariante adiabático*. Para isso, será considerado o campo magnético seja da forma  $\mathbf{B} = B_r \hat{r} + B_z \hat{z}$  em coordenadas cilíndricas, devido à simetria geométrica do problema, conforme a Fig. [C.4]:

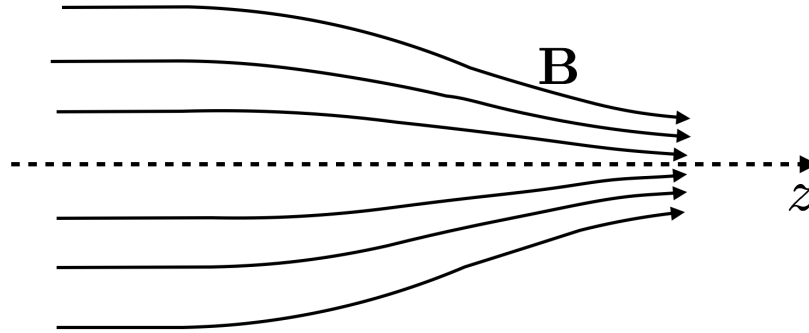


Figura C.4: Configuração das linhas de campo magnético que formam o espelho magnético.

Primeiramente, considerar-se-á que a componente  $B_z$  do campo magnético é muito maior do que a componente radial  $B_r$  e que  $B_z$  varia lentamente com  $r$ . A partícula possui velocidade que, de forma geral, pode ser descrita por  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$ , onde  $\mathbf{v}_{\parallel}$  é a componente paralela ao campo magnético e  $\mathbf{v}_{\perp}$ , a componente perpendicular ao campo. Em coordenadas cilíndricas, essa componente perpendicular possui agora duas componentes: uma tangencial às órbitas circulares (que são perpendiculares ao campo magnético) e outra radial, pois, conforme discutiu-se anteriormente, os círculos descritos (perpendicularmente ao campo) pela partícula possuem raios diferentes pois o campo não é uniforme, ver eq. (C.0.8) para o raio. Noutras palavras, tem-se  $\mathbf{v}_{\perp} = v_r \hat{r} + v_{\theta} \hat{\theta}$ .

Considera-se que  $v_{\theta}$  é muito maior do que  $v_r$ . Isso garante que  $v_{\perp} \approx v_{\theta}$  e que o movimento perpendicular da partícula ao longo das linhas do campo magnético serão aproximadamente circulares quando a partícula executa uma órbita completa.

Isso acontece porque, num campo magnético não uniforme, a partícula descreve uma trajetória helicoidal: a velocidade perpendicular ao campo magnético é responsável pela órbita circular cujo raio vai diminuindo a cada passo dado pela partícula na direção onde a magnitude de  $B$  aumenta, enquanto a componente paralela da velocidade é responsável por manter a partícula deslocando-se em movimento retilíneo na direção de  $B$  [13]. Assim, considerando-se duas órbitas (perpendiculares ao campo magnético) muito próximas, o raio se mantém aproximadamente constante.

Pode-se determinar agora a componente radial do campo magnético através da lei de Gauss para o campo magnético:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{C.0.9})$$

que em coordenadas cilíndricas, lê-se na forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) = -\frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (\text{C.0.10})$$

Como  $B_z$  é muito maior do que a componente radial, então  $B \approx B_z$ . Assim, pode-se fazer a seguinte aproximação:

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} \simeq \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (\text{C.0.11})$$

Então a eq. (C.0.10) simplifica-se agora em:

$$\frac{\partial}{\partial r} (rB_r) \simeq -r \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (\text{C.0.12})$$

A eq. (C.0.12) pode ser "facilmente" resolvida se se considera que  $\frac{\partial B}{\partial z}$  seja conhecido para  $r = 0$  e, como foi suposto no início, que varie lentamente com  $r$ ; noutras palavras,  $\frac{\partial B}{\partial z}$  é aproximadamente constante com  $r$ . Então, integrando a eq. (C.0.12) em  $r$ , obtém-se:

$$rB_r \simeq -\int_0^r r' \frac{\partial B}{\partial z} dr' \quad (\text{C.0.13})$$

$$B_r \simeq -\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial z} \quad (\text{C.0.14})$$

Esse resultado será útil para se mostrar que o momento magnético se conserva.

A equação de movimento da partícula ao longo do eixo-z será:

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = F_z. \quad (\text{C.0.15})$$

Pode-se determinar a componente-z da força magnética que atua sobre a partícula:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (\text{C.0.16})$$

Como  $\mathbf{v}_{\perp} = v_r \hat{r} + v_{\theta} \hat{\theta}$  e  $\mathbf{B} = B_r \hat{r} + B_z \hat{z}$ , a eq. (C.0.16) fica:

$$\mathbf{F} = qv_{\theta} B_z \hat{r} + q(v_z B_r - v_r B_z) \hat{\theta} - qv_{\theta} B_r \hat{z}. \quad (\text{C.0.17})$$

Usando a componente-z da eq. (C.0.17), a eq. (C.0.15) leva a:

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -qv_{\theta} B_r. \quad (\text{C.0.18})$$

Com as aproximações consideradas anteriormente, isto é,  $v_{\perp} \approx v_{\theta}$  e que  $qv_{\perp} = -|q| |v_{\perp}|$ , a eq. (C.0.18) simplifica-se em:

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = |q| |v_{\perp}| B_r. \quad (\text{C.0.19})$$

Utilizando a eq. (C.0.14), obtém-se:

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -|q| |v_{\perp}| \frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (\text{C.0.20})$$

Como a componente radial da velocidade da partícula é muito pequena, a partícula percorre uma órbita aproximadamente circular (perpendicularmente às linhas de campo magnético) com raio  $r$  dado pela eq. (C.0.1). Assim, a eq. (C.0.20) se torna:

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -|q| |v_{\perp}| \frac{mv_{\perp}}{2qB} \frac{\partial B}{\partial z}, \quad (\text{C.0.21})$$

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (\text{C.0.22})$$

Note que o fator multiplicativo no segundo membro da eq. (C.0.22) é o momento magnético da linha de corrente gerada pela partícula ao se movimentar numa órbita perpendicular ao campo. Assim:

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{\partial B}{\partial z}, \quad (\text{C.0.23})$$

de onde se conclui que a componente-z, ou longitudinal às linhas de campo, da força magnética é dada<sup>2</sup> por:

$$F_z = -\mu \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (\text{C.0.24})$$

Essa expressão é conhecida também por força do espelho magnético (*mirror force*) e é responsável por frear a partícula, uma vez que opõe-se ao gradiente do campo magnético na direção-z, conforme aponta a eq. (C.0.24).

Multiplicando a eq. (C.0.22) por  $v_{\parallel}$  e considerando que  $v_{\parallel} = \frac{dz}{dt}$ , obtém-se:

---

<sup>2</sup>Levando em conta as aproximações consideradas.

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} v_{\parallel} = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{dz}{dt}, \quad (\text{C.0.25})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv_{\parallel}^2}{2} \right) = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B} \frac{dB}{dt}, \quad (\text{C.0.26})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv_{\parallel}^2}{2} \right) = -\mu \frac{dB}{dt}. \quad (\text{C.0.27})$$

Esse resultado mostra a variação da energia cinética longitudinal da partícula.

Uma vez que a força magnética não executa trabalho<sup>3</sup>, o teorema trabalho-energia fornecerá a conservação de energia:

$$\Delta E_c = W = 0. \quad (\text{C.0.29})$$

Mas a energia cinética da partícula terá duas contribuições: uma devido à velocidade perpendicular e outra devido à velocidade longitudinal. Assim:

$$\Delta E_c = \frac{d}{dt} (E_{\parallel} + E_{\perp}) = 0, \quad (\text{C.0.30})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv_{\parallel}^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{mv_{\perp}^2}{2} \right) = 0. \quad (\text{C.0.31})$$

Substituindo o primeiro membro da expressão acima pela eq. (C.0.27) e usando a eq. (C.0.6) para simplificação do segundo termo, obtém-se:

$$-\mu \frac{dB}{dt} + \frac{d}{dt} (\mu B) = 0, \quad (\text{C.0.32})$$

$$B \frac{d\mu}{dt} = 0. \quad (\text{C.0.33})$$

Uma vez que a intensidade do campo magnético  $B$  é não-nula, obtém-se:

$$\frac{d\mu}{dt} = 0. \quad (\text{C.0.34})$$

A eq. (C.0.34) estabelece que o momento magnético é um invariante, isto é, uma

---

<sup>3</sup>O trabalho da força magnética será:

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = \int q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = 0. \quad (\text{C.0.28})$$

Pois o termo  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  é sempre perpendicular a  $\mathbf{v}$ .



quantidade conservada.

Todo o trabalho algébrico feito até aqui auxilia na obtenção de duas quantidades que se conservar-se-ão ao longo do movimento da partícula no campo magnético não uniforme, a saber:

- a energia cinética,
- o momento magnético.

De posse desses dois importantes resultados, pode-se finalmente compreender como funciona o efeito de espelho magnético. Considere duas regiões distintas com campos magnéticos de intensidade  $B_0$  e  $B_1$ , com  $B_1 > B_0$ . A Fig. [C.3] representa essas regiões.

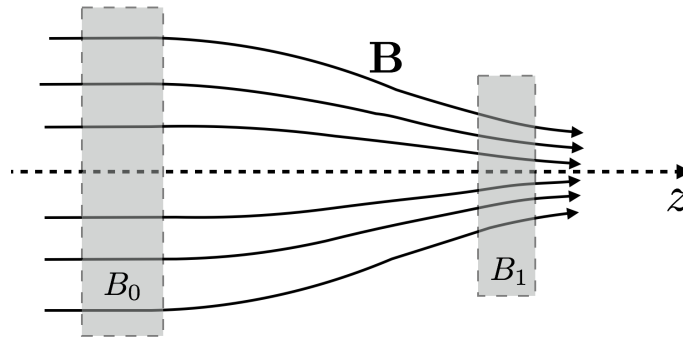


Figura C.5: Duas regiões com campos magnéticos de intensidades diferentes.

Da conservação do momento magnético, tem-se:

$$\mu_0 = \mu_1, \quad (\text{C.0.35})$$

$$\frac{mv_{0\perp}^2}{2B_0} = \frac{mv_{1\perp}^2}{2B_1}, \quad (\text{C.0.36})$$

$$v_{1\perp}^2 = \frac{B_1}{B_0} v_{0\perp}^2. \quad (\text{C.0.37})$$

Como  $B_1 > B_0$ , isso implica que  $v_{1\perp}^2 > v_{0\perp}^2$ . Logo a partícula irá girar mais rapidamente à medida em que se desloca na direção onde a magnitude de  $B$  aumenta. Outra consequência imediata é que a velocidade longitudinal  $v_{1\parallel}$  irá diminuir (em relação a  $v_{0\parallel}$ ) para que a energia se conserve, de acordo com a eq. (C.0.31). Note que a conservação de energia impõe limites máximo e mínimo sobre a velocidade perpendicular e longitudinal, respectivamente.

À medida que a partícula adentra a região onde o campo magnético se torna mais intenso (como a região com  $B_1$  da Fig. [C.5]), sua velocidade perpendicular  $v_{\perp}$  aumenta para que o momento magnético seja conservado. Como  $v_{\perp}$  aumenta, a velocidade longitudinal

$v_{\parallel}$  (responsável por fazer partícula viajar na direção do campo magnético) diminui, para que a energia cinética seja conservada. Esse processo continua até que, eventualmente, a partícula chegue numa região onde  $B$  seja muito intenso, de tal forma que  $v_{\perp}$  seja máximo e, conseqüentemente,  $v_{\parallel}$  se anule. Então, o movimento da partícula ao longo das linhas de campo cessa e ela começa a retroceder devido à força magnética do espelho (*mirror force*), dada na eq. (C.0.24).

Esse efeito de reflexão no espelho magnético é tomado como pressuposto para o mecanismo de aceleração de Fermi.

## Apêndice D

### Probabilidade de colisão

A probabilidade de colisão frontal (*head-on*) no mecanismo de Fermi depende da unidade de ângulo sólido subtendido pelo elemento de área infinitesimal sobre o qual a partícula incide sobre a nuvem. Além disso, essa probabilidade também é proporcional à taxa de incidência de partículas sobre a nuvem. Para se determinar essa taxa, considere inicialmente que no referencial da nuvem, ref.  $S'$ , duas partículas chegam na origem (por simplicidade) nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ . Assim, as coordenadas [4] desses eventos serão:

- partícula 1:  $(ct'_1, 0, 0, 0)$ ;
- partícula 2:  $(ct'_2, 0, 0, 0)$ .

A Fig. [D.1] mostra um esquema simples do que ocorre no ref.  $S'$ .

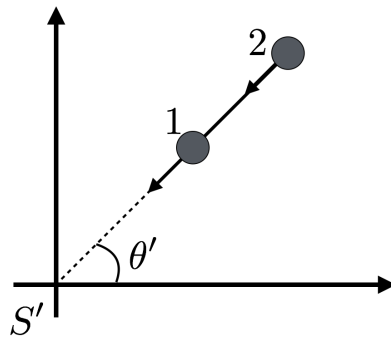


Figura D.1: Duas partículas incidindo sobre a nuvem em instantes diferentes.

No referencial do laboratório, ref.  $S$ , as coordenadas desses eventos serão dadas por:

- partícula 1:  $(ct_1, x_1, 0, 0)$ ;
- partícula 2:  $(ct_2, x_2, 0, 0)$ .

Isso porque geralmente essas partículas não incidem sobre um mesmo ponto no ref.  $S$ . A Fig. [D.2] esquematiza a situação vista no laboratório. Note que as partículas incidem sobre o referencial  $S$  sob o mesmo ângulo  $\theta$ , pois elas incidem no ref.  $S'$  sob um mesmo ângulo.

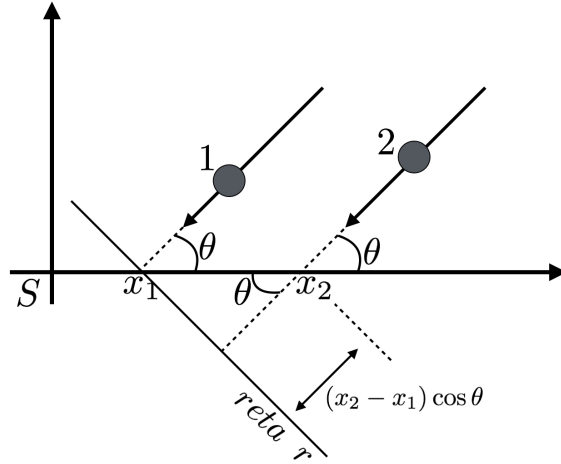


Figura D.2: Duas partículas incidindo sobre a nuvem visto no ref.  $S$ .

Através das transformações de Lorentz, podem-se obter relações entre  $x_i$  e  $t_i$ , com  $i = 1, 2$ , isto é:

$$ct_i = \gamma \left( ct'_i + \frac{V}{c} x'_i \right), \quad (\text{D.0.1})$$

$$x_i = \gamma (x'_i + V t'_i), \quad (\text{D.0.2})$$

onde  $V$  é a velocidade do ref.  $S'$  medido pelo ref.  $S$ .

No ref.  $S$ , o intervalo de tempo entre as partículas 1 e 2 de chegada na reta  $r$  será então:

$$\Delta t = t_2 + \frac{(x_2 - x_1) \cos \theta}{u} - t_1, \quad (\text{D.0.3})$$

onde  $u$  é o módulo da velocidade das partículas.

Usando as transformações (D.0.1 – D.0.2), obtém-se:

$$\Delta t = \gamma t'_2 - \gamma t'_1 + \frac{\gamma V t'_2 - \gamma V t'_1}{u} \cos \theta, \quad (\text{D.0.4})$$

$$\Delta t = \gamma (t'_2 - t'_1) \left( 1 + \frac{V}{u} \cos \theta \right), \quad (\text{D.0.5})$$

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \left( 1 + \frac{V}{u} \cos \theta \right), \quad (\text{D.0.6})$$

Agora é possível determinar a taxa de incidência de partículas. No ref.  $S$ , essa taxa,  $T$ , será definida por:

$$T = \frac{N}{\Delta t}. \quad (\text{D.0.7})$$

Usando a eq. (D.0.6), tem-se:

$$T = \frac{N}{\gamma \Delta t' \left( 1 + \frac{V}{u} \cos \theta \right)}, \quad (\text{D.0.8})$$

mas  $\frac{N}{\Delta t'}$  é a taxa de incidência de partículas no ref.  $S'$ . Logo:

$$T = \frac{T'}{\gamma \left( 1 + \frac{V}{u} \cos \theta \right)}, \quad (\text{D.0.9})$$

$$T' = T \gamma \left( 1 + \frac{V}{u} \cos \theta \right). \quad (\text{D.0.10})$$

No mecanismo de aceleração de Fermi, a colisão das partículas ocorrem no ref.  $S'$ , com uma taxa de incidência  $T'$  medida por esse referencial. Essa taxa de incidência de partículas sobre a nuvem é vista pelo observador (referencial  $S$ ) sendo proporcional a uma fator  $1 + (V/u) \cos \theta$ , consequência do movimento relativo. Assim, a probabilidade de ocorrência de colisão para o observador (ref.  $S$ ) será proporcional a esse fator que relaciona as taxas de incidência entre os refs.  $S'$  e  $S$ . Portanto:

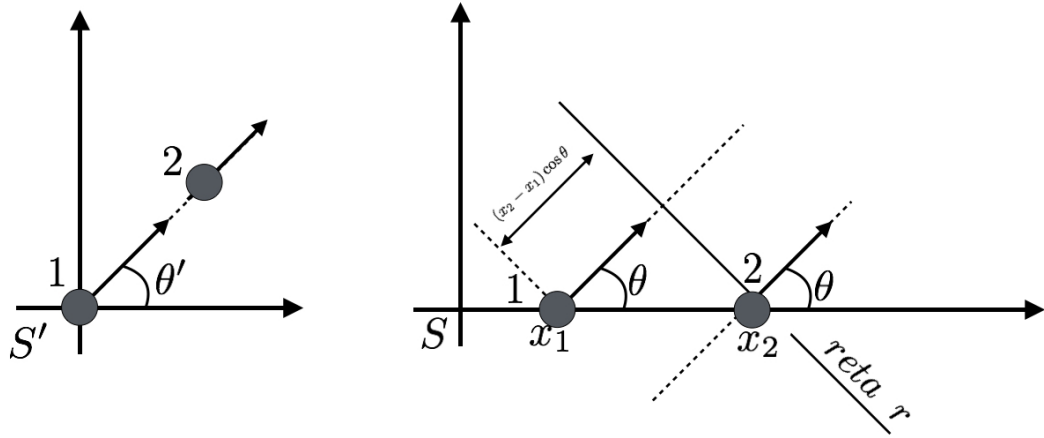
$$dP \propto \gamma \left( 1 + \frac{V}{u} \cos \theta \right). \quad (\text{D.0.11})$$

O fator de Lorentz é cancelado ao se efetuar as integrais na eq. (3.5.16). Para partículas ultra-relativísticas, considera-se  $u \approx c$ . Dessa forma, justifica-se o uso do fator  $\left( 1 + \frac{V}{u} \cos \theta \right)$  na probabilidade de colisão frontal, com  $\beta = V/c$ .

Para o caso de colisão *following*, pode-se prosseguir da mesma forma utilizada para a colisão *head-on* com algumas diferenças: consideram-se as partículas 1 e 2 partindo do mesmo ponto (origem) no referencial  $S'$  em instantes diferentes; conseqüentemente, elas partirão de pontos diferentes quando vistas no ref.  $S$ . A Fig. [D.3] esquematiza essa situação.

O intervalo de tempo entre as duas partículas de chegada na reta  $r$  será então:

$$\Delta t = t_2 - t_1 - \frac{(x_2 - x_1) \cos \theta}{u}, \quad (\text{D.0.12})$$


 Figura D.3: Situação para colisão *following*.

cuja simplificação leva a:

$$\Delta t = \Delta t' \gamma \left( 1 - \frac{V}{u} \right) \cos \theta. \quad (\text{D.0.13})$$

Assim, a taxa de incidência de partículas na colisão *following* será:

$$T = \frac{N}{\Delta t}, \quad (\text{D.0.14})$$

$$T = \frac{N}{\gamma \Delta t' \left( 1 - \frac{V}{u} \cos \theta \right)}, \quad (\text{D.0.15})$$

mas  $\frac{N}{\Delta t'}$  é a taxa de incidência de partículas no ref.  $S'$ . Logo:

$$T = \frac{T'}{\gamma \left( 1 - \frac{V}{u} \cos \theta \right)}, \quad (\text{D.0.16})$$

$$T' = T \gamma \left( 1 - \frac{V}{u} \cos \theta \right). \quad (\text{D.0.17})$$

Assim, a probabilidade de colisão *following* será proporcional à essa taxa de incidência  $T'$ , uma vez que a colisão ocorre no ref. da nuvem (ref.  $S'$ ), isto é:

$$dP \propto \gamma \left( 1 - \frac{V}{u} \cos \theta \right). \quad (\text{D.0.18})$$

A eq. (D.0.18) corresponde ao resultado associado a um ângulo obtuso no 1º caso, isto é, eq. (D.0.11). Implementando  $u \simeq c$  para partículas ultra-relativísticas, obtém-se o fator de probabilidade para colisões traseiras.

## Apêndice E

# Análise detalhada do mecanismo de Fermi

O mecanismo de Fermi sugere que uma partícula adquira energia a cada colisão com nuvens de gás vagando no meio interestelar. Tal processo ocorre de maneira semelhante à reflexão de uma partícula num *espelho* em repouso.

Sabendo disso, considere que uma partícula de energia  $E_{inicial}$  (e velocidade  $\mathbf{u}_i$ ) é refletida por um **espelho em repouso** num referencial  $S'$ , conforme a Fig. [E.1] ilustra.

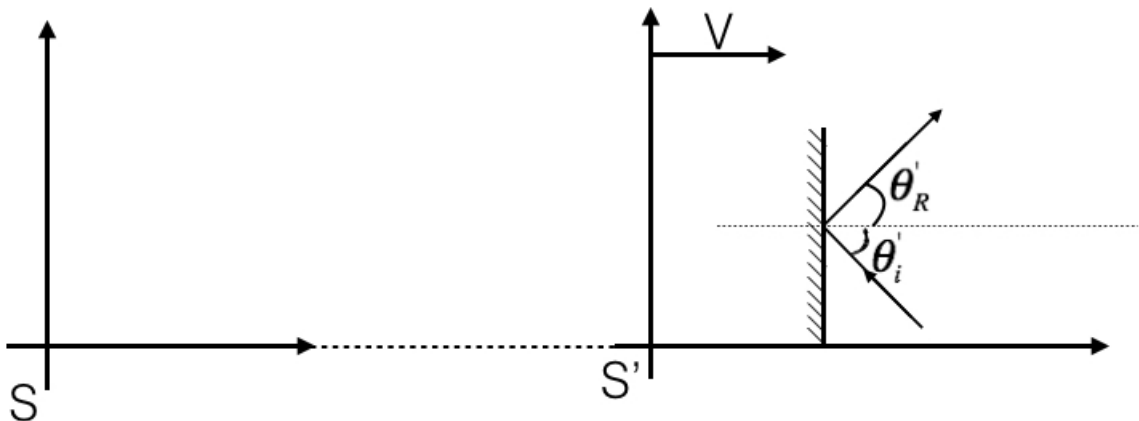


Figura E.1: Partícula sendo *refletida* num espelho.

Vale a lei de reflexão  $\theta'_R = \theta'_i$ , sendo  $\theta'_i, \theta'_R$  os ângulos de incidência e reflexão neste referencial, respectivamente. Além disso, vale  $E'_{inicial} = E'_{final}$  (colisão elástica em que se supõe que a massa do espelho é muito maior que a massa da partícula incidente). No referencial em que o espelho está em movimento, referencial S, o ângulo de reflexão passa a ser diferente do ângulo de incidência, ao mesmo tempo que a energia da partícula refletida torna-se diferente da energia incidente.

Para tratar esta questão, considere dois referenciais inerciais,  $S$  e  $S'$  – referencial de repouso do espelho –, que se desloca em relação ao Ref.  $S$  com velocidade  $\mathbf{V}$ . Seja o espelho disposto sobre o eixo- $y'$  do referencial  $S'$ , e a normal ao espelho a linha tracejada paralela ao eixo  $x'$ , conforme ilustrado na Fig. [E.1].

No ref.  $S$ , o processo de reflexão da partícula é caracterizado pelos seguintes elementos:  $\theta_i, \mathbf{p}_i, E_i = E_{inicial}$  – o ângulo de incidência, momento e a energia da partícula incidente sobre o espelho, enquanto  $\theta_R, \mathbf{p}_R, E_R = E_{final}$  representam o ângulo de reflexão, o momento e a energia da partícula refletida, medidos no referencial  $S$ . No ref.  $S'$ , estas grandezas estão rotuladas com linha:  $\theta'_i, \theta'_R, \mathbf{p}'_i, E'_i = E'_{inicial}, \mathbf{p}'_R, E'_R = E'_{final}$  – tendo o mesmo significado das suas correspondentes no Ref.  $S$ , onde  $\beta = V/c$ .

No referencial  $S$ , que enxerga o espelho em movimento, o momento incidente (inicial) é

$$\mathbf{p}_i = (-p_i \cos \theta_i, p_i \sin \theta_i), \quad (\text{E.0.1})$$

enquanto o momento refletido (final) escreve-se como

$$\mathbf{p}_R = (p_R \cos \theta_R, p_R \sin \theta_R). \quad (\text{E.0.2})$$

No referencial  $S'$ , no qual o espelho está em repouso, a componente- $x$  do momento refletido é oposta à componente- $x$  do momento incidente, ou seja:

$$p'_{Rx} = -p'_{ix}, \quad (\text{E.0.3})$$

enquanto a componente- $y$  permanece inalterada. No referencial  $S'$ , o momento da partícula incidente e refletido são:

$$\mathbf{p}'_i = (p'_{ix}, p'_{iy}) = (p'_i \cos \theta'_i, p'_i \sin \theta'_i), \quad (\text{E.0.4})$$

$$\mathbf{p}'_R = (-p'_{ix}, p'_{iy}) = (-p'_i \cos \theta'_i, p'_i \sin \theta'_i). \quad (\text{E.0.5})$$

Pelas transformações de  $p$  e  $E$ , tem-se:

$$p'_{ix} = \gamma(p_{ix} - \beta E_i/c) \quad \Rightarrow \quad p'_{ix} = \gamma(-p_i \cos \theta_i - \beta E_i/c), \quad (\text{E.0.6})$$

$$E'_i = \gamma(E_i - V p_{ix}) \quad \Rightarrow \quad E'_i = \gamma(E_i + V p_i \cos \theta_i). \quad (\text{E.0.7})$$

Durante a reflexão, a energia não é alterada no referencial em que o espelho está em repouso (choque elástico), ou seja,

$$E'_R = E'_i. \quad (\text{E.0.8})$$



Além disto,  $p'_{Rx} = -p'_{ix}$ , o que leva a

$$p'_{Rx} = -\gamma(-p_i \cos \theta_i - \beta E_i/c). \quad (\text{E.0.9})$$

Para determinar o momento e a energia final no ref.  $S$ ,  $\mathbf{p}_R = (p_{Rx}, p_{Ry})$  e  $E_R$ , em que o espelho está em movimento, deve-se fazer uso das transformações reversas para  $p_x$  e  $E$ , dadas por:

$$p_{Rx} = \gamma(p'_{Rx} + \beta E'_R/c), \quad (\text{E.0.10})$$

$$E_R = \gamma(E'_R + V p'_{Rx}). \quad (\text{E.0.11})$$

Substituindo (E.0.9), (E.0.8) e (E.0.7) em (E.0.10), obtém-se:

$$p_{Rx} = \gamma \left( -\gamma(-p_i \cos \theta_i - \beta E_i/c) + \frac{\beta}{c} \gamma(E_i + V p_i \cos \theta_i) \right), \quad (\text{E.0.12})$$

$$p_{Rx} = \gamma^2 \left[ p_i \cos \theta_i + \frac{\beta E_i}{c} + \frac{\beta E_i}{c} + \frac{V p_i \beta}{c} \cos \theta_i \right], \quad (\text{E.0.13})$$

$$p_{Rx} = \gamma^2 [p_i \cos \theta_i (1 + \beta^2) + 2\beta E_i/c], \quad (\text{E.0.14})$$

$$p_{Rx} = \gamma^2 E_i \left[ 2\beta/c + \frac{u_i}{c^2} \cos \theta_i (1 + \beta^2) \right], \quad (\text{E.0.15})$$

onde foi usado

$$\frac{p_i}{E_i} = u_i/c^2. \quad (\text{E.0.16})$$

Da mesma forma, podemos deduzir como a energia da partícula,  $E$ , altera-se. Considerando  $p'_{Rx} = -p'_{ix}$ ,  $E'_R = E'_i$ , na Eq. (E.0.11),  $E_R = \gamma(E'_R + V p'_{Rx})$ , escrevem-se

$$E_R = \gamma(E'_R + V p'_{Rx}). \quad (\text{E.0.17})$$

$$E_R = \gamma(E'_i - V p'_{ix}). \quad (\text{E.0.18})$$

Substituindo (E.0.7), (E.0.9) e (E.0.8) em (E.0.18) resulta:

$$E_R = \gamma [\gamma(E_i + V p_i \cos \theta_i) - V \gamma(-p_i \cos \theta_i - \beta E_i/c)], \quad (\text{E.0.19})$$

$$E_R = E_{final} = \gamma^2 \left( E_i + V p_i \cos \theta_i + V p_i \cos \theta_i + \beta \frac{u}{c} E_i \right), \quad (\text{E.0.20})$$

$$E_R = E_{final} = \gamma^2 E_i \left( 1 + 2V \frac{p_i}{E_i} \cos \theta_i + \beta^2 \right), \quad (\text{E.0.21})$$

onde se pode usar novamente (E.0.16), assim:

$$E_R = E_{final} = \gamma^2 E_i \left( 1 + 2 \frac{V}{c^2} u_i \cos \theta_i + \beta^2 \right) \quad (\text{E.0.22})$$

$$E_R = E_i \left[ \frac{1 + 2\beta \left( \frac{u_i}{c} \right) \cos \theta_i + \beta^2}{1 - \beta^2} \right] \quad (\text{E.0.23})$$

Esta é a energia da partícula refletida (energia final – após a colisão), medida pelo referencial  $S$ . Calculando a diferença entre a energia final e inicial,  $\Delta E = E_R - E_i$ , tem-se:

$$E_R - E_i = E_i \left[ \frac{1 + 2\beta \left( \frac{u_i}{c} \right) \cos \theta_i + \beta^2}{1 - \beta^2} - 1 \right], \quad (\text{E.0.24})$$

$$E_R - E_i = E_i \left[ \frac{1 + 2\beta \left( \frac{u_i}{c} \right) \cos \theta_i + \beta^2 - 1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \right], \quad (\text{E.0.25})$$

$$\frac{E_R - E_i}{E_i} = \left[ \frac{2\beta \left( \frac{u_i}{c} \right) \cos \theta_i + 2\beta^2}{1 - \beta^2} \right]. \quad (\text{E.0.26})$$

Expandido o denominador, ou seja,  $(1 - \beta^2) \approx 1 + \beta^2$ , obtém-se:

$$\frac{E_R - E_i}{E_i} = \frac{\Delta E}{E} = \left[ 2\beta \left( \frac{u_i}{c} \right) \cos \theta_i + 2\beta^2 \right] \cdot (1 + \beta^2), \quad (\text{E.0.27})$$

$$\frac{\Delta E}{E} = 2\beta \left( \frac{u_i}{c} \right) \cos \theta_i + 2\beta^2 + 2\beta^3 \left( \frac{u_i}{c} \right) \cos \theta_i + 2\beta^4, \quad (\text{E.0.28})$$

onde os termos de ordens superiores em  $\beta$  podem ser desprezados, uma vez que  $\beta$  é muito pequeno. Assim:

$$\frac{\Delta E}{E} \simeq 2 \left[ \beta^2 + \beta \left( \frac{u_i}{c} \right) \cos \theta_i \right]. \quad (\text{E.0.29})$$

Esse foi o resultado utilizado na seção 3.5, considerando-se o caso em que  $u_i \simeq c$ .

## Apêndice F

### Equação de Difusão

Considere um elemento de volume  $dV$  dentro do qual partículas são injetadas a uma taxa  $Q(E, t)dV$ . As partículas dentro de  $dV$  estão sujeitas a ganhos e perdas de energias, que são escritas como:

$$-\frac{dE}{dt} = b(E), \quad (\text{F.0.1})$$

onde para  $b(E)$  positivo, a partícula perde energia.

Considere inicialmente a mudança na função  $N(E)$ , que descreve o espectro de energia das partículas<sup>1</sup> como sendo  $N(E)dE$  devido a perdas de energia,  $b(E)$ , na ausência de injeção de partículas. No instante  $t$ , o número de partículas no intervalo de energia  $E$  a  $E + \Delta E$  será definido por  $N(E)\Delta E$ . Num instante posterior  $t + \Delta t$ , essas partículas são substituídas por aquelas que tinham energias no intervalo  $E'$  a  $E' + \Delta E'$  no instante  $t$ , onde:

$$E' = E + b(E)\Delta t, \quad (\text{F.0.2})$$

$$E' + \Delta E' = (E + \Delta E) + b(E + \Delta E)\Delta t. \quad (\text{F.0.3})$$

Substituindo a eq. (F.0.3) na eq. (F.0.2), obtém-se:

$$\Delta E' = E + \Delta E + b(E + \Delta E)\Delta t - E - b(E)\Delta t, \quad (\text{F.0.4})$$

$$\Delta E' = \Delta E + b(E + \Delta E)\Delta t - b(E)\Delta t. \quad (\text{F.0.5})$$

Para pequenos valores de  $\Delta E$ , pode-se fazer<sup>2</sup>

$$\Delta E' = \Delta E + \frac{db(E)}{dE}\Delta E \Delta t. \quad (\text{F.0.6})$$

<sup>1</sup>Na verdade, descreve uma função densidade no sentido de se tratar de número de partículas por energia.

<sup>2</sup>Através de uma expansão de Taylor.

Dessa forma, a mudança em  $N(E)\Delta E$  no intervalo  $\Delta t$  será *número de partículas com energias entre  $E'$  e  $(E' + \Delta E')$  menos o número de partículas com energias entre  $E$  e  $(E + \Delta E)$* . Então:

$$\Delta N(E)\Delta E = N(E', t)\Delta E' - N(E, t)\Delta E, \quad (\text{F.0.7})$$

que, através das eqs. (F.0.2) e (F.0.6), simplifica-se em:

$$\Delta N(E)\Delta E = N[E + b(E)\Delta t, t] \left( \Delta E + \frac{db}{dE}\Delta E \Delta t \right) - N(E, t)\Delta E. \quad (\text{F.0.8})$$

Maso termo  $N[E + b(E)\Delta t, t]$  pode ser escrito como<sup>3</sup>:

$$N[E + b(E)\Delta t, t] = N(E, t) + \frac{dN(E)}{dE}b(E)\Delta t, \quad (\text{F.0.9})$$

que leva a eq. (F.0.8) a:

$$\Delta N(E, t)\Delta E = \left[ N(E, t) + \frac{dN(E)}{dE}b(E)\Delta t \right] \left( \Delta E + \frac{db}{dE}\Delta E \Delta t \right) - N(E, t)\Delta E. \quad (\text{F.0.10})$$

Como os valores  $\Delta E$  e  $\Delta t$  são pequenos, termos de ordens superiores serão desprezados. Assim, a eq. (F.0.10) fornece:

$$\Delta N(E, t)\Delta E = N(E, t)\frac{db(E)}{dE}\Delta E \Delta t + \frac{dN(E, t)}{dE}b(E)\Delta E \Delta t. \quad (\text{F.0.11})$$

Dividindo por  $\Delta E \Delta t$  e tomando o limite para  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtém-se:

$$\frac{dN(E, t)}{dt} = \frac{d}{dE} [N(E, t)b(E)]. \quad (\text{F.0.12})$$

A eq. (F.0.12) descreve a evolução temporal da função  $N$ , espectro de partículas, no elemento de volume  $dV$ , sujeito somente a perdas e ganhos de energia. Podem-se adicionar termos a essa equação, mantendo cada termo com a mesma unidade de medida [\[4\]](#).

Lembrando que  $Q(E, t)dV$  indica a quantidade de partículas com energia  $E$  injetadas no volume  $dV$  no instante  $t$ , pode-se fazer:

$$\frac{dN(E, t)}{dt} = \frac{d}{dE} [N(E, t)b(E)] + Q(E, t). \quad (\text{F.0.13})$$

Além disso, as partículas movimentam-se por difusão, que permite escrever

---

<sup>3</sup>Usando novamente uma expansão de Taylor.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{J}, \quad (\text{F.0.14})$$

que é a equação de continuidade (que estabelece a conservação da densidade  $\rho$  no volume  $dV$ ). Utilizando a Lei de Fick para difusão, isto é,  $\mathbf{J} = -D\vec{\nabla}\rho$  (que estabelece que o sentido da difusão das partículas aponta na direção contrária ao gradiente da densidade  $\rho$ , ou seja, o movimento difuso ocorre da região de maior concentração de  $\rho$  para a região de menor concentração), a equação de continuidade para a função densidade  $N$  (espectro de partículas) fica:

$$\frac{\partial N(E, t)}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot [D\vec{\nabla}N(E, t)]. \quad (\text{F.0.15})$$

Adicionando esse termo à eq. (F.0.13), obtém-se:

$$\frac{dN(E, t)}{dt} = \vec{\nabla} \cdot [D\vec{\nabla}N(E, t)] + \frac{d}{dE} [N(E, t)b(E)] - \frac{N(E, t)}{\tau} + Q(E, t), \quad (\text{F.0.16})$$

onde se adicionou o termo  $N/\tau$  para indicar o número de partículas com energia  $E$  que abandonam o volume  $dV$  no instante  $\tau$ .

## Referências Bibliográficas

- [1] GRUPEN, Claus. *Astroparticle Physics*. Berlin (Germany): Springer-Verlag, 2005.
- [2] DOVA, M. T. *Ultra High Energy Cosmic Rays*. La Plata Institut of Physics (Argentina), 2016. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1604.07584.pdf>>. Acesso em: 20 de Maio de 2017.
- [3] GRIFFITHS, David. *Introduction to Elementary Particles*. Federal Republic of Germany: WILEY-VCH, 2004.
- [4] LONGAIR, M. S. *High energy astrophysics*. 3rd Edition. New York (USA): Cambridge University Press, 2011.
- [5] FRASCHETTI, Frederico. *On the acceleration of Ultra-High-Energy Cosmic Rays*. Phil. Trans. Royal Society A, 366, 2008. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/0809.3057.pdf>>. Acesso em: 20 de Maio de 2017.
- [6] GREISEN, Kenneth. *End to the Cosmic-Ray Spectrum?*. Phys. Rev. Letters, vol. 16, n 17, p. 748-750., 25 April 1966.
- [7] ZATSEPIN, G. T. and KUZ'MIN, V. A. *Upper Limit of the Spectrum of Cosmic Rays*. Journal of Experimental and Theoretical Phys. Lett. 4, p. 78-80, 1966.
- [8] KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. *Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory..* Phys. Rev. D, 39, 683 (1989).

- [9] ARAÚJO, Arilo P. *Assinaturas da violação da simetria de Lorentz na radiação cósmica de fundo..* (Dissertação). Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, 2016. Disponível em: <[http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/19728/1/2016\\_dis\\_aparaújo.pdf](http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/19728/1/2016_dis_aparaújo.pdf)>. Acesso em 21 de Maio de 2017.
- [10] FERMI, Enrico. *On the Origin of the Cosmic Radiation.* Phys. Rev. Letters, vol. 75, n 8, p. 1169-1174. April 15, 1949.
- [11] BERGSTROM, Lars; GOOBAR, Ariel. *Cosmology and Particle Astrophysics.* 2nd Edition. Chichester (UK): Springer-PRAXIS, 2004.
- [12] SOMMERS, Paul. *Ultra-high energy cosmic rays: Observational results.* Astrop. Phys. vol. 39-40, p. 88-94, 2012.
- [13] BITTENCOURT, J. A. *Fundamentals of plasma physics.* 3rd. Edition. New York (USA): Springer-Verlag, 2004.
- [14] DRURY, Luke O'C. *Origin of cosmic rays.* Astrop. Phys. vol. 39-40, p. 52-60, 2012.
- [15] BELL, A. R. *The acceleration of cosmic rays in shock fronts I.* Mon. Not. R. Astro. Soc., vol. 182, 147-156, 1978.
- [16] MORA, Karen S. C. *Identifying the nature of high energy Astroparticles.* J. Phys. Conf. Ser. vol. 761, n. 1, 012077, 2016.
- [17] KEIVANI, Azadeh; GLENNYS, R. Farrar; SUTHERLAND, Michael. *Magnetic Deflections of Ultra-High Energy Cosmic Rays from Centaurus A.* Astrop. Phys. 61, p. 47-55, 2015.
- [18] BHATTACHARJEE, Pijushpani. *Origin and Propagation of Extremely High Energy Cosmic Rays.* Phys. Rept. 327, p. 109-247, 2000.
- [19] PADMANABHAN, T. *Theoretical Astrophysics. vol. II: Stars and Stellar Systems.* New York (USA): Cambridge University Press, 2001.
- [20] PAGLIARO, A. *The extreme energy cosmic rays puzzle.* J. Phys. Studies, vol. 12, n. 2, p. (2901-1 – 13), 2008.

- [21] LINSLEY, John. *The cosmic ray spectrum above  $10^{19}$  eV at Volcano Ranch and Haverah Park*. In NASA: 19th International Cosmic Ray Conference. Conference Papers: Invited Rapporteur, Highlight, Miscellaneous, vol. 9, p. 475-486, 1986. Disponível em: <<https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19860022038.pdf>>. Acesso em 10 de Julho de 2017.
- [22] HENRIQUES, A. B.; ROMÃO, J. C. *Electromagnetismo*. 2nd. Edition. Lisboa (Portugal): IST Press, 2011.
- [23] NUSSENZVEIG, H. Moysés. *Curso de Física básica. vol. 3: Eletromagnetismo*. 1st. Edition. São Paulo: Blucher, 1997.
- [24] ALBUQUERQUE, Ivone F. M.; CHOU, Aaron. *A faraway quasar in the direction of the highest energy Auger event*. J. Cosmol. and Astrop. Phys. JCAP 1008:016, 2010.
- [25] ALBUQUERQUE, Ivone F. M.; CARVALHO JR., Washington R. *Detection of Exotic Massive Hadrons in Ultra High Energy Cosmic Ray Telescopes*. Phys. Rev. D, 80:023006, 2009.
- [26] BIETENHOLZ, Wolfgang. *Cosmic rays and the search for a Lorentz Invariance Violation*. Phys. Rep., vol. 505, p. 145-185, 2011.
- [27] PÉTRI, J. *Theory of pulsar magnetosphere and wind*. J. Plasma Phys. 82, 635820502, 2016.
- [28] BARING, Matthew G. *Diffusive Shock Acceleration: the Fermi Mechanism*. In Proc. of XXXIInd Rencontres de Moriond, "Very High Energy Phenomena in the Universe", (Editions Frontières, Paris), p. 97, 1997. Disponível em: <[astro-ph/9711177](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9711177)>.
- [29] FERREIRA JR, M. M.; MOUCHERÉK, Fernando M. O. *Influence of Lorentz- and CPT-violating terms on the Dirac equation*. Int. J. Mod. Phys. A21 p.6211-6227, 2006.
- [30] REIS, João Alfieres A. S. *Teoria de Dirac modificada no Modelo Padrão Estendido não-mínimo*. (Dissertação). Programa de Pós-Graduação em Física – UFMA, 2017.
- [31] BELICH, H. *et al. Violação da simetria de Lorentz*. Rev. Brasileira de Ensino de Física, vol. 29, n 1, p. 57-64, 2007.



- [32] Disponível em: <<https://donaatraente.files.wordpress.com/2013/02/imagem31.png>>.
- [33] LEHNERT, Ralf. *Dirac theory within the Standard-Model Extension*. J. Math. Phys. 45, p. 3399-3412, 2004.
- [34] PROTHEROE, Ray. J. *Origin and propagation of the highest energy cosmic rays*. In Towards the Millennium in Astrophysics: Problems and Prospects, Erice 1996, eds. M.M. Shapiro and J.P. Wefel (World Scientific, Singapore), 1996. Disponível em: <arXiv:astro-ph/9612212>.
- [35] OLINTO, A. V. *Ultra High Energy Cosmic Rays: the theoretical challenge*. Phys. Rept. 333, p. 329-348, 2000.
- [36] SCULLY, S. T.; STECKER, F. W. *Lorentz invariance violation and the observed spectrum of ultrahigh energy cosmic rays*. Astro. Phys. 31, p. 220-225, 2009.
- [37] MOUCHREK, Victor E. S. *Elétrons em Anéis Unidimensionais sob Ação de Termos de Violação da Simetria de Lorentz*. (Dissertação). Programa de Pós-Graduação em Física – UFMA, 2014.
- [38] KOSTELECKÝ, A.; RUSSEL, N. *Data Tables for Lorentz and CPT violation*. Rev. Mod. Phys. vol. 83, n 1, 2008 (last revised in 13 Jan 2017).