UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUCAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

RENATA GASPAR DA COSTA

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO CONTEXTO DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: UMA ANÁLISE EM LIVROS DIDÁTICOS

São Luís – MA

2022

RENATA GASPAR DA COSTA

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO CONTEXTO DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: UMA ANÁLISE EM LIVROS DIDÁTICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Antonio José da Silva

São Luís – MA

2022

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Costa, Renata Gaspar da.
Funções trigonométricas no contexto dos registros de representação semiótica: uma análise em livros didáticos / Renata Gaspar da Costa. - 2022.
138 f.

Orientador(a): Antonio José da Silva.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2022.

1. Educação Matemática. 2. Ensino Médio. 3. Livro Didático. 4. Representação Semiótica. 5. Trigonometria. I. Silva, Antonio José da. II. Título.

RENATA GASPAR DA COSTA

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO CONTEXTO DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: UMA ANÁLISE EM LIVROS DIDÁTICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Antonio José da Silva

Aprovada em: 22 de setembro de 2022

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Antonio José da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

____

Prof. Dr. Raimundo Luna Neres
Universidade CEUMA

____

Prof. Dr. Carlos Erick Brito de Sousa
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

São Luís – MA
2022

Dedicatória

A Deus por ter me dado forças para que eu chegasse aqui. À minha família pelo apoio e ao meu padrinho pelo exemplo e incentivo.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida, por sempre iluminar meu caminho e por mais esta etapa realizada.

À Universidade Federal do Maranhão, pela oportunidade e por ser o veículo que me possibilitou chegar a essa etapa da minha formação profissional.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento da pesquisa.

À Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão – FAPEMA pelo incentivo e financiamento da pesquisa.

À Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática e todo corpo docente pela oportunidade de acesso ao curso e os conhecimentos inestimáveis que me foram oportunizados.

Aos meus pais, Marilene e Reginaldo, pelo amor e carinho, pelos valores e sempre me apoiarem.

Ao meu padrinho, Aécio A. Andrade, pelos ensinamentos e valores, pelas conversas de apoio, por ser esse anjo que me guia e ilumina meu caminho desde sempre.

Ao meu orientador, professor Dr. Antonio José da Silva, pela orientação e paciência, pela confiança depositada em mim, pelas sábias palavras que exalavam tranquilidade e me motivavam.

Aos professores do PPECEM pelos ensinamentos que contribuíram para esta formação profissional.

Aos meus colegas de turma, pelos significativos diálogos e pela cooperação mútua durante esses anos.

À amiga e irmã que ganhei nessa etapa, Samanda, pelos momentos de risadas que tornaram leve este percurso acadêmico.

A todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a concretização desse sonho.

RESUMO

Esta pesquisa busca responder ao seguinte questionamento: a abordagem do conteúdo ciclo trigonométrico, especificamente as funções seno e cosseno, no livro didático contempla aspectos da teoria dos registros de representação semiótica segundo Raymond Duval? Elucida-se como objetivo geral analisar como a abordagem do conteúdo funções trigonométricas seno e cosseno em livros didáticos do Ensino Médio, aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático - PNLD 2021, contempla a hipótese fundamental da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval. A pesquisa envolveu a análise de dois livros didáticos de Matemática que foram aprovados no PNLD-2021, voltado para o Ensino Médio, e os procedimentos de coleta e análise dos dados foram subsidiados pela Análise de Conteúdo de Laurence Bardin. Em ambos os livros analisados observou-se que os autores mobilizam diversos registros de representação matemáticos, porém, somente essa mobilização não caracteriza a utilização da teoria de Duval. Não basta apenas colecionar registros, seria preciso articular as unidades significantes de cada registro entre si de modo que o leitor tenha uma visão global do objeto matemático. Notou-se ainda que ambos os livros tentam realizar a articulação entre os registros de representação algébrico e representação gráfica, todavia, a associação entre as unidades significantes desses registros não se deu de forma completa.

Palavras–chave: Educação Matemática. Ensino Médio. Livro Didático. Representação Semiótica. Trigonometria.

ABSTRACT

This research seeks to answer the following question: does the approach to the trigonometric cycle content, specifically the sine and cosine functions, in the textbook include aspects of the theory of semiotic representation registers according to Raymond Duval? The general objective is to analyze how the approach to the content of trigonometric functions sine and cosine in high school textbooks, approved by the Plano Nacional do Livro Didático - PNLD 2021, contemplates the fundamental hypothesis of the theory of semiotic representation registers by Raymond Duval. The research involved the analysis of two Mathematics textbooks that were approved in the PNLD-2021, aimed at High School, and the data collection and analysis procedures were subsidized by Laurence Bardin's Content Analysis. In both analyzed books, it was observed that the authors mobilize several records of mathematical representation, however, this mobilization alone does not characterize the use of Duval's theory. It is not enough just to collect records, it would be necessary to articulate the significant units of each record with each other so that the reader has a global view of the mathematical object. It was also noted that both books try to articulate the records of algebraic representation and graphic representation, however, the association between the significant units of these records did not occur completely.

Keywords: Mathematics Education. High School. Textbook. Semiotic Representation. Trigonometry.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

BPM – Batidas por Minuto

BDTD – Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CEMPEM – Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática

EDO – Equação Diferencial Ordinária

EDOs – Equações Diferenciais Ordinárias

FNDE – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

LD – Livro Didático

LE – Livro do Estudante

MDP – Material Digital do Professor

MD – Manual do Professor

PNLD – Programa Nacional do Livro Didático

TRRS – Teoria dos Registros de Representação Semiótica

UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Durante minha vivência escolar sempre demonstrei interesse pelas aulas de Matemática, experiência que me motivou a cursar Licenciatura em Matemática no Instituto Federal do Maranhão.

O ensino da Matemática durante minha Educação Básica era focado na repetição de procedimentos e memorização de técnicas, o que facilitava meu desempenho nessa disciplina. Entretanto, ao ingressar na graduação, logo de início essa minha visão foi rompida. Percebi que para ensinar Matemática, além de dominar os conhecimentos matemáticos, é preciso ter didática. As disciplinas pedagógicas do curso me levaram para o campo da Educação Matemática.

Recordo-me que os docentes do curso motivavam os licenciandos a realizar pós-graduação, pois como futuros professores, devemos sempre estar antenados com a sociedade. Durante o último ano do curso decidi que queria ingressar logo em curso de mestrado. Por isso, em 2019, foi-me sugerido o estudo da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) para realizar um projeto de pesquisa para o mestrado, uma teoria voltada para o processo de aprendizagem.

Para aprofundar o estudo na teoria, utilizei-a como aporte teórico na minha monografia intitulada Estado da arte da Teoria Dos Registros De Representação Semiótica no Ensino-Aprendizagem de Derivadas de Funções. Uma das categorias levantadas nesse levamento bibliográfico foi a Análise em Livros Didáticos. As pesquisas enquadradas nessa categoria me chamaram atenção e então escolhi seguir esse tipo de pesquisa para a seleção do mestrado.

Em outras palavras, a ideia do projeto inicial para o mestrado sempre foi utilizar a TRRS como aporte teórico na análise de livros didáticos de Matemática.

Desde criança fui ensinada a ser autodidata, por isso, ganhava muito livros. Falavam-me que quando não entendesse o conteúdo em livro, deveria buscar em outro. Com isso, percebi que cada autor tem sua própria maneira de apresentar os conteúdos. Esse foi um dos motivos que me levou a escolher trabalhar com análise em livros didáticos. À medida que fui amadurecendo intelectualmente, notei que esse recurso didático, dentre outras coisas, também influencia na prática pedagógica do professor.

Além disso, apesar dos avanços tecnológicos no campo da educação, muitas escolas carentes conseguem apenas disponibilizar o livro didático para os alunos. Devido a isso, o livro deve ser elaborado de modo que possa garantir a aprendizagem dos conteúdos.

Os livros são veiculadores de mensagens e vários trabalhos apontam que é muito frequente que os professores o sigam para estruturar suas aulas. Zabala (1998) afirma que o papel do livro didático, durante o século XX, foi questionado por movimentos progressistas, que posteriormente se declararam contra seu uso, manifestação que até hoje esse material recebe críticas ou desclassificações generalizadas. As críticas da época estão fundamentadas no slogan “não ao livro didático como material único”, que se refere a um tipo de livro elaborado conforme modelo estritamente transmissor.

Acredita-se que este não deve ser o único material a ser utilizado no processo de ensino aprendizagem, mas devido a ser um dos mais utilizados por professores e alunos, convém analisá-los com atenção.

Um livro didático não pode mais conter simples exposições de fatos, mas, como contém conceitos, deve também fornecer meios para facilitar a compreensão (ZABALA, 1998).

Diante disso, viu-se na Teoria do Registros de Representação Semiótica – TRRS uma maneira de facilitar a compreensão dos conceitos expostos nos livros, visto que se trata de uma teoria de aprendizagem que leva em consideração os processos cognitivos empregados na apreensão de um conteúdo.

Thiel (2013) aponta que o ensino da Matemática tem sido objeto de estudo, reflexões e teorias desde a antiguidade devido sua relação com outras áreas do conhecimento e implicações com a cultura, sociedade, política. Como qualquer outra ciência, apresenta limitações e desafios. Duval (2018) menciona que a incompreensão da Matemática está presente em todos os níveis de ensino.

Diferente de outras teorias cognitivas, a TRRS reconhece que a aprendizagem da Matemática difere das demais áreas de conhecimento. Duval (2018, p.14) aponta que essas demais teorias cognitivas “foram elaboradas à margem da análise da atividade matemática e do desenvolvimento histórico dos conhecimentos matemáticos e tem como característica comum ignorar o paradoxo cognitivo da matemática e o obstáculo da conversão”.

Dado a vastidão da área da Matemática, optou-se por delimitar a pesquisa para o campo da Trigonometria, especificamente, as funções trigonométricas seno e cosseno. A escolha pela Trigonometria surgiu a partir de leituras sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem desse assunto, e por ser um assunto com bastante aplicabilidade no cotidiano e em outras áreas de conhecimento (Física, Química, Astronomia, Medicina, Música entre outros).

Ao realizar uma leitura na Base Nacional Comum Curricular – BNCC, documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas da Educação Básica, buscou-se verificar o que do ciclo trigonométrico é enfatizado, sob o qual nos deparamos com as funções trigonométricas seno e cosseno, o que se tornou alvo da análise.

Buscou-se olhar para a BNCC, pois esta emprega alguns verbos, dentre eles, **representar**, que se assemelha com a teoria de Duval, além de alguns trechos fazerem referência à atividade de conversão, porém não utilizada adequadamente como pede a teoria.

Em razão dessas ponderações, a presente pesquisa, baseada na teoria dos registros de representação semiótica, visa analisar as funções trigonométricas seno e cosseno em livros didáticos do Ensino Médio aprovados no Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2021.

Os livros didáticos aprovados no PNLD 2021 devem seguir o que está escrito na Base Nacional Comum Curricular – BNCC. Esse documento normativo designa competências e habilidades a serem alcançadas pelos alunos em cada ano da Educação Básica. Na área de Matemática, a quarta competência está relacionada com a ideia de representação. Dada a aproximação da competência quatro do documento normativo com a TRRS, se escolheu trabalhar com os livros aprovados no PNLD 2021.

Refletindo sobre o papel do livro didático no processo de ensino e aprendizagem, sob a construção dos conceitos em Matemática e os processos cognitivos envolvidos nesse processo, se define como questão central da pesquisa: A forma de abordagem do conteúdo Ciclo trigonométrico, especificamente as funções seno e cosseno, contempla aspectos da teoria dos registros de representação semiótica segundo Raymond Duval? Para responder essa questão, recorre-se aos referenciais teóricos da didática francesa, especificamente, a teoria de Raymond Duval. Ainda, a Análise de Conteúdo de Laurence Bardin é utilizada no procedimento de coleta dos dados.

Dessa forma, define-se como objetivo geral analisar como a abordagem do conteúdo funções trigonométricas seno e cosseno em livros didáticos do Ensino Médio, aprovados pelo PNLD 2021, contempla a hipótese fundamental da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval. Sendo os objetivos específicos:

a) Verificar a abordagem conceitual das funções trigonométricas seno e cosseno presente na amostragem dos livros;
b) Caracterizar os registros de representação semiótica empregados em definições, demonstrações, exercícios resolvidos e propostos em relação aos diferentes registros de representação;
c) Analisar as representações semióticas do conteúdo em relação às conversões feitas;
d) Confrontar o que é apresentado no livro didático com a teoria de Duval e com a BNCC;

Visando alcançar o objetivo geral proposto, a pesquisa está estruturada em seis capítulos.

No capítulo 1 encontra-se a introdução. O problema e os objetivos são apresentados. Justifica-se a relevância da pesquisa e o tema.

O capitulo 2 trata do referencial teórico que dá suporte ao trabalho, a teoria de Duval - TRRS. Além de apresentar a teoria, o capítulo apresenta uma revisão de literatura de teses e dissertações voltadas para a análise de livros. Ainda traz as unidades significantes do registro gráfico e algébrico que são essenciais para a atividade de conversão.

O capítulo 3 se dedica aos procedimentos metodológicos. O método de análise dos LD foi a análise de conteúdo proposta por Bardin (2011). A princípio, se busca apenas explicar as fases da análise, posteriormente se mostra como cada fase foi aplicada.

A descrição e análise dos livros com base na teoria de Duval é fornecida no capítulo 4, onde a análise de cada livro está dividida em subtópicos.

Por fim, no capítulo 5 é apresentada uma reflexão final sobre a dissertação, enfatizando os principais pontos do estudo

2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: TEORIA, ENSINO E PESQUISA

2.1 Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica - TRRS foi desenvolvida pelo filósofo e psicólogo francês Raymond Duval, suas pesquisas focam no funcionamento cognitivo na aprendizagem de conceitos matemáticos.

A TRRS faz parte da Didática Francesa da Matemática, que se caracteriza aqui no Brasil como uma das tendências que compõe a Educação Matemática (PAIS, 2015). Em 1995 foi publicada a obra *Sémiosis et pensée humaine* que representa a primeira apresentação sistemática da teoria.

Duval (2018) argumenta que em todos os níveis de ensino, o processo de ensino e aprendizagem da Matemática encontra dificuldades em sua compreensão que não são vistas em demais disciplinas, logo a aquisição do conhecimento nessa área envolve processos cognitivos específicos.

Para compreender as dificuldades enfrentadas pelos alunos não basta somente uma análise do ponto de vista matemático e epistemológico nos conceitos, mas se faz necessário uma análise também do ponto de vista cognitivo das atividades matemáticas. Segundo Duval (2011b), a análise do conhecimento deve levar em consideração, além da natureza dos objetos, a forma como eles são apresentados ou acessados.

A aquisição do conhecimento, mais especificamente do conhecimento matemático, tem sido uma das grandes preocupações entre os educadores matemáticos e estudar a aquisição desses conhecimentos requer a noção de representação, isso decorre do fato que para haver conhecimento matemático é necessário a mobilização de uma representação visto que a Matemática trabalha com objetos abstratos (DAMM, 2016; DUVAL, 2009).

Em outras palavras, do ponto de vista epistemológico, a Matemática requer um processo específico que a diferencia de outras áreas do conhecimento, pois para se ter acesso aos objetos matemáticos é necessário primeiro representá-lo já que estes não são acessíveis à percepção.

Há duas classes de sistemas produtores de representação, que são: sistemas semióticos e sistemas não semióticos. Como exemplo de sistemas não semióticos se tem os instrumentos que revelam imagens de objetos que não se consegue ver diretamente, enquanto que aos sistemas semióticos têm-se a linguagem. Este segundo refere-se ao sistema utilizado na área da Matemática (D’AMORE; PINILLA; IORI, 2015).

Os objetos matemáticos não são coisas que podem ser percebidas através dos sentidos (não se pode ver, tocar, saborear, ouvir, sentir, quebrar, pesar), entre todas as ciências esse fato é específico da Matemática. Enquanto na Física é possível visualizar ao vivo e estudar a queda de um objeto ou em Química verificar a diferença entre ácido e base ou em Biologia analisar células por meios de microscópio óptico, em Matemática nenhuma dessas ações é possível, a única forma viável de acessar os objetos matemáticos é “descrevê-los, defini-los, denotá-los, denomina-los, desenhá-los, ..., isto é, fornecer representações semióticas” (D’AMORE; PINILLA; IORI, 2015, p.131-132).

Uma vez que o acesso aos objetos matemáticos só ocorre por meio de representações é imprescindível que o objeto não seja confundido com sua representação.

> Toda confusão entre o objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão. Os conhecimentos adquiridos tornam-se então rapidamente inutilizáveis fora de seus contextos de aprendizagem: seja por falta de atenção, seja porque eles tornam-se representações inertes não sugerindo tratamento produtor (DUVAL, 2009, p.14)

A noção de representação aparece imposta em Psicologia para o estudo da aquisição dos conhecimentos, esta noção acha-se introduzida em três abordagens: representação subjetiva ou mental, representação interna ou computacional e representação semiótica.

As representações subjetivas ou mentais são as representações conscientes elaboradas no nível de pensamento ou o que se tem na mente de cada sujeito, diz respeito às suas crenças, convicções, explicações e ideias sobre fenômenos naturais e físicos. As representações internas e computacionais são representações do inconsciente, em que o sujeito realiza tarefas sem estar preocupado em pensar em todas as etapas da realização. Por fim, as representações semióticas são externas e consciente ao sujeito, pertencentes a um sistema particular de linguagem natural, linguagem formal, figuras, gráficos, escrita algébrica entre outros.

Damm (2016, p.174) destaca que:

> As representações semióticas, as representações computacionais e as representações mentais não são espécies diferentes de representação, mas sim representações que realizam funções diferentes. As representações mentais têm a função de objetivação. As representações computacionais realizam uma função de tratamento. As representações semióticas realizam, de maneira indissociável, uma função de objetivação e uma função de expressão.

Logo, na visão de Duval, as representações preenchem três funções fundamentais para o funcionamento cognitivo: função de comunicação, função de tratamento e função de objetivação.

- Função de Comunicação: É a função de expressar a comunicação ou interação de conhecimento entre dois ou mais sujeitos. Para isso, requer o uso de códigos comuns entre os envolvidos (THIEL, 2013).
- Função de Tratamento: É a função de transformar uma representação em outra dentro do mesmo sistema de semiótico.
- Função de Objetivação: Corresponde ao próprio sujeito descobrir algo em que não tinha pensado antes, embora outros já lhe tenham explicado (DUVAL, 2009).

As representações semióticas estão estritamente ligadas com o desenvolvimento da Matemática. Esse campo de conhecimento dispõe de uma grande variedade de representações semióticas como sistemas de numeração, figuras, escritas algébricas, língua natural e língua formal entre outros, sendo o registro figural, registro gráfico, registro em língua natural e registro algébrico considerados os quatro grandes registros.

2.1.1 Registro figural

O registro figural compreende as figuras geométricas, logo, também pode ser chamado de registro geométrico. Diferente de uma fotografia ou obra de arte, as figuras requerem um modo específico de vê-las, de modo que seja possível modificá-las a fim de obter novas percepções para ajudar na compreensão de um conceito ou na resolução de problema.

As figuras geométricas desempenham um papel primordial na construção de conhecimentos matemáticos, pois “recorre-se a elas para compreender um conceito, para reconhecer ou aplicar uma propriedade, para demonstrar um teorema, para resolver um problema” (MENONCINI, 2018, p.27).

2.1.2 Registro gráfico

Este registro contempla as representações de funções construídas no plano cartesiano. O esboço de curvas no plano cartesiano pode ocorrer por meio de três possibilidades: 1) abordagem ponto a ponto, 2) abordagem de extensão do traçado e 3) abordagem de interpretação global de propriedades figurais.

A abordagem ponto a ponto é a mais presente no ensino. Essa abordagem trata os eixos graduados como referência e marca pontos nele que correspondem a pares ordenados. Existe uma forte correlação entre pontos e pares ordenados. É frequentemente usado na conversão do registro algébrico para o registro gráfico. Entretanto, a conversão inversa, do registro gráfico para o registro algébrico é quase inoperante, pois essa abordagem não privilegia uma articulação entre as duas representações.

Em outras palavras, a abordagem ponto a ponto impede uma leitura ampla e global acerca do esboço da curva e suas propriedades, pois limita-se a pontos específicos.

A abordagem de extensão do traçado realizada é semelhante a abordagem ponto-a-ponto, pois essa também considera a análise de pontos específicos da curva sem se preocupar com suas propriedades globais. No entanto, sua diferença é que a abordagem de expansão do traçado não se limita a um conjunto finito de pontos marcados no plano cartesiano. Inclui atividades de interpolação e extrapolação.

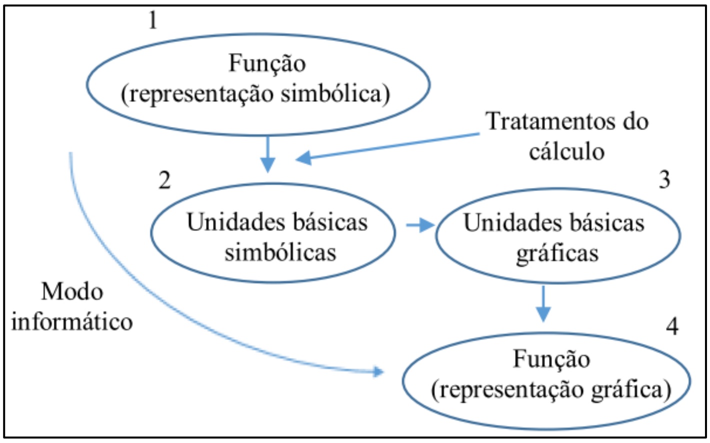
Já a abordagem de interpretação global de propriedades figurais busca identificar unidades significantes do registro gráfico e associar essas unidades a unidades significantes do registro algébrico para que as alterações feitas em um registro sejam percebidas em outro.

Duval (2011a) apontou alguns exemplos de unidades significantes. Para a expressão algébrica tem-se: símbolos relacionais (>, <, =, ...), símbolos de operações ou de sinais (+, -, ...) símbolos de variável, símbolos de expoente, coeficiente e de constante.

Para as representações gráficas, a discriminação torna-se menos evidente, entretanto Duval (2011a) apontou duas variáveis gerais e três relativas para o caso em que o gráfico é um traçado simples, isto é, uma reta ou parábola. As duas variáveis gerais remetem a: 1) o fundo da figura é linha ou zona? 2) a linha traçada é reta ou curva? Aberta ou fechada? Já as variáveis relativas para o caso da reta são: sentido da inclinação, ângulo dos traçados com os eixos e posição do traçado em relação à origem do eixo vertical. Para cada variável visual particular corresponde uma unidade significa na representação algébrica.

Moretti e Luiz (2014) propõem o procedimento informático de interpretação global que alia a abordagem de interpretação global de propriedade figurais com o uso de software, permitindo que a conversão com maior confiabilidade e rapidez.

Figura 1 – Esquema de conversão entre representações simbólica e gráfica



Fonte: Moretti e Luiz (2014)

A conversão no sentido 1→4 é desenvolvida mais agilmente se compara à forma manual. Além disso, no modo informático, qualquer modificação na representação algébrica da função é reconhecida na representação no registro gráfico. Já na conversão inversão, no sentido 4→1, é necessário o reconhecimento das unidades significantes do registro algébrico e gráfico.

0.1.1 Registro gráfico-geométrico

O registro gráfico-geométrico é proposto por Menoncini (2018). Visto que o esboço de curvas abrange simultaneamente o registro gráfico e o registro geométrico, surgiu a necessidade desse registro de representação.

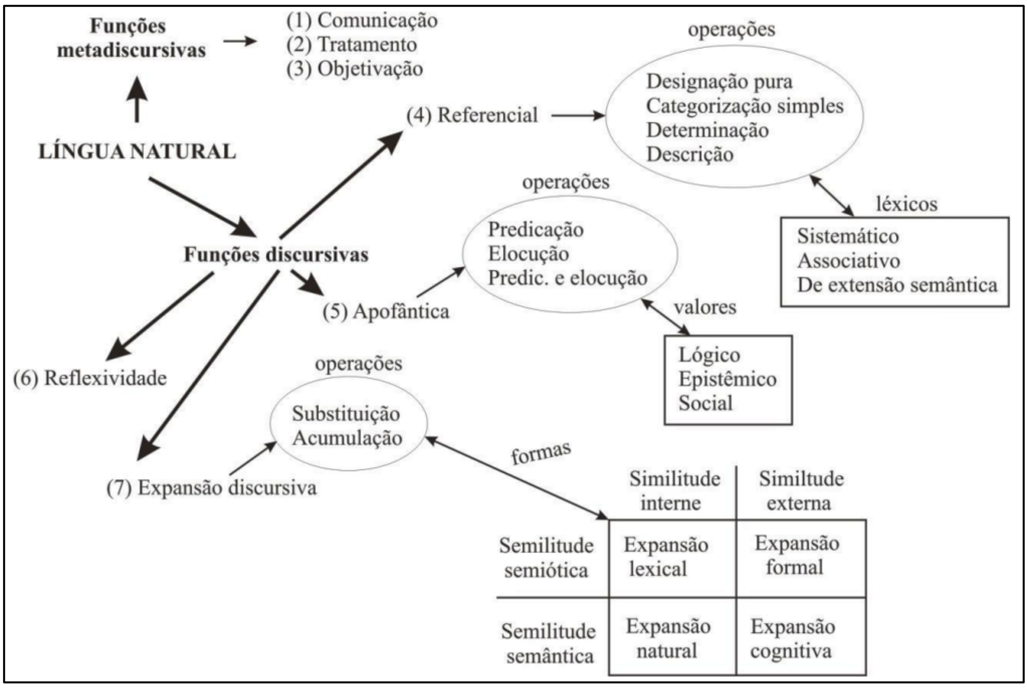
A nomenclatura registro gráfico-geométrico é proposta "para o registro que está no plano cartesiano, mas é uma figura geométrica" (MENONCINI, 2018, p. 51).

2.1.3 Registro em língua natural

O registro linguístico se refere às representações discursivas que compreende o registro em língua natural ou registro em língua formal. Para Duval (2004) a língua se vale de duas funções radicalmente diferentes que quando mobilizadas produz uma diversidade de discursos. Essas funções são separadas em dois grupos: funções meta-discursivas e funções discursivas.

O grupo das meta-discursivas compreende três funções: comunicação, tratamento e objetivação, essas funções são comuns a todo registro de representação. As funções discursivas são: referencial, apofântica, expansão discursiva e de reflexividade. Essas funções podem ser melhor observadas no esquema da Figura 2 a seguir:

Figura 2 - Funções discursivas e meta-discursivas no uso de uma língua



Fonte: Brandt, Moretti e Dionizio (2014)

As funções meta-discursivas foram descritas no subtópico anterior. Focando nas funções discursivas, a figura nos mostra que cada função desempenha uma operação.

A função referencial recorre ao uso de léxicos (sistemático, associativo ou de extensão semântica) para designar o objeto. As operações discursivas são: a) designação pura, consiste na identificação do objeto por meio de uma característica específica; b) categorização simples, o objeto é identificado através de uma de suas qualidades e quanto ao emprego de substantivo, adjetivo e verbo para qualifica-lo; c) determinação, que quando combinada com a operação de categorização simples torna mais preciso o campo de aplicação por meio do uso de artigos definidos e indefinidos; d) descrição, que compara-se à operação de descrição, porém com maior nível de complexidade, pois consiste na combinação das operações de categorização (DIONIZIO; BRANDT; MORETTI, 2014; MENONCINI, 2018).

Por meio de expressões de enunciados completos, a função apofântica permite dizer alguma coisa sobre o objeto designado. Estas expressões também são também denominadas de unidades apofânticas e se diferenciam de uma expressão referencial pelo valor (social, lógico ou epistêmico) que assume. As operações associadas a essa função são: a) predicação, que “equivale a vincular a expressão de uma propriedade de uma relação ou de uma ação com uma expressão que designe os objetos” (SILVA, 2018, p.120); b) elocução, que segundo Silva (2018), compreende o momento de fala. Menoncini (2018) aponta que essas duas operações se diferenciam pelos valores que assumem, enquanto a predicação assume os valores lógico ou epistêmico, a elocução assume o valor social.

A terceira função é a expansão discursiva. Como o nome sugere, essa função amplia o discurso a partir da conexão entre frases completas, isso porque um discurso nem sempre mostra tudo o que realmente quer dizer, sendo necessário analisar nas entrelinhas. Em outras palavras, essa função permite que diferentes discursos sejam vinculados entre si e apontem para o mesmo tema, de forma que o discurso seja coerente e o tema seja melhor explicado sem cair na redundância, por esse motivo é considerada a função mais importante. A vinculação entre as frases pode se dá por inferência, descrição, narração, explicação, etapas de apresentação raciocínio (DIONIZIO, BRANDT, MORETTI; 2014).

As operações discursivas desta função são: a) substituição, nesse caso a expansão ocorre através de inferências, como se fosse um cálculo; b) acumulação, onde "as frases se unem umas às outras e vão, por meio de conectores, determinando a progressão dos objetos nelas tratados, transformando-os ou enriquecendo-os no próprio percurso discursivo" (BRANDT; MORETTI; BASSOI, 2014, p.484). Além disso, são categorizadas quatro formas de expansão discursiva: expansão formal; expansão cognitiva; expansão lexical; expansão natural.

A última função do discurso é a função reflexiva. Segundo Menoncini (2018), esta função tem a ver com a elocução, isto é, ao usar uma linguagem, o falante produz um enunciado que expressa suas intenções para que o interlocutor possa interpretar o que lhe foi dito. A relação entre o ato intencional que produz um discurso e suas condições de interpretação é chamada de fala. A função de elocução permite que as marcas de pronúncia apareçam no enunciado, o que é importante para a comunicação e os enunciados com finalidades científicas estritas. A referida função, atrelada ao discurso científico é chamada função de reflexividade.

2.1.4 Registro Algébrico

O registro algébrico compreende as representações discursivas provenientes do registro simbólico. Onde através da função de designação é possível nomear signos e dar-lhes um significado matemático. Ou seja, nomear os signos pertencentes ao sistema semiótico simbólico, sem essa designação o símbolo por se só não tem significado.

Nas palavras de Duval (2009, p.17) a pluralidade dos registros semióticos "permite uma diversificação das representações de um mesmo objeto. Tal pluralidade aumenta as capacidades cognitivas dos sujeitos e em seguida as suas representações mentais". Duas condições devem ser cumpridas para que uma representação seja considerada verdadeira, isto é, permita o acesso ao objeto representado, que são:

i. Dispor de pelo menos dois registros diferentes para chegar à representação do objeto;
ii. Que eles consigam se converter de um registro a outro "espontaneamente".

Essas duas condições quando não preenchidas levam à confusão entre a representação e o objeto representado e duas representações distintas de um mesmo objeto acabam não sendo reconhecidas como representações do mesmo objeto.

Segundo Duval (2009, p.14), "toda confusão entre o objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão. Os conhecimentos adquiridos tornam-se então rapidamente inutilizáveis fora de seus contextos de aprendizagem". Logo, para haver compreensão em Matemática se faz necessário distinguir um objeto de sua representação.

Os quatro grandes registros são classificados em discursivos ou não discursivos e plurifuncionais ou monofuncionais (DUVAL, 2013), conforme mostra o Quadro 1.

Quadro 1 - Grupos de registros de representação semiótica

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua natural Associações verbais (conceituais) Forma de raciocinar: • Argumentação a partir de observações, de crenças...; • Dedução válida a partir de definição ou de teoremas;	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0,1, 2 ou 3). • Apreensão operatória e não somente perceptiva; • Construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • Numéricas (binária, decimal, fracionária...); • Algébricas; • Simbólicas (línguas formais) Cálculo	Gráficos cartesianos • Mudança no sistema de coordenadas; • Interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2013)

Esta classificação é importante, pois o ensino de Matemática que enfatiza somente os registros monofuncionais prioriza o ensino das operações em detrimento do seu significado, o que se costuma chamar na Educação Matemática de ensino baseado em algoritmos. É necessário transitar em mais de um registro para compreender o significado das operações. (MORETTI, 2002).

Assim, a teoria dos registros de representação semiótica é descrita por Duval (2018, p.2) como um instrumento elaborado "para analisar a maneira de pensar e de trabalhar a matemática quaisquer que sejam os conceitos e domínios (geometria, álgebra, análise...) tratados".

Em outra passagem, o filósofo francês menciona que a Matemática possui duas faces: face exposta e face oculta. A face exposta condiz com os objetos matemáticos e suas propriedades, algoritmos e fórmulas enquanto que a face oculta "corresponde aos gestos intelectuais que constituem o caráter cognitivo e epistemológico específicos da matemática"

(FREITAS; REZENDE, 2013, p.17). Esta última raramente é considerada e é a esta face que corresponde à teoria de Raymond Duval.

Do ponto de vista matemático, ter sucesso em uma atividade matemática é responder corretamente uma pergunta ou solucionar um problema, todavia, do ponto de vista cognitivo, o sucesso é a capacidade de transferir conhecimento de uma situação para outra totalmente diferente sem nunca tê-las visto.

O funcionamento cognitivo do pensamento humano é inseparável da existência da grande variedade de registros semióticos de representação, logo a aquisição do conhecimento depende de acesso e mobilização de diversos registros de representação. Quando ocorre a apreensão ou produção de uma representação semiótica chamamos de *semiose* e chama-se *noésis* a apreensão conceitual de um objeto. Portanto, não há *noésis* sem semiose (DUVAL, 2009).

Três atividades cognitivas são enfatizadas por Duval (2009) que estão ligadas a apreensão ou produção de uma representação, isto é, para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação:

- Formação de uma representação identificável: Esta formação pode ser comparada a realização de uma tarefa de descrição, onde são selecionados relações e dados do conteúdo que se deseja representar. A seleção deve seguir regras para (1) assegurar a identificação e reconhecimento da representação e (2) assegurar a possibilidade de sua utilização para tratamentos.
- Tratamento: O tratamento é operação semiótica onde ocorre uma transformação interna a um registro, podendo também ser chamada de intra-registro. Ocorre quando se opera mantendo o objeto no mesmo registro semiótico de representação, em outras palavras, a forma de representar o objeto muda, entretanto continua no mesmo registro semiótico. O tratamento está ligado à forma e não ao conteúdo do objeto (CAMPOS, 2007). Menoncini (2018, p.20) acrescenta que "o tratamento consiste em substituir representações de modo que a nova representação ofereça algum ganho de conhecimento em relação à representação que foi substituída.". De modo geral, podemos dizer que essa atividade corresponde à expansão informacional.
- Conversão: É outra operação semiótica, porém ocorre uma transformação externa ao registro, também chamada de inter-registro. A conversão consiste em converter a representação do objeto, situação ou informação dada em um registro para a representação do mesmo objeto, situação ou informação em outro registro, mantendo todo ou parte da representação inicial (DUVAL, 2009; DUVAL, 2012a).

Do ponto de vista matemático, a conversão não tem significância “nos processos matemáticos de justificação ou de prova, pois eles se fazem baseados num tratamento efetuado em *um registro determinado, necessariamente* discursivo” (DUVAL, 2013, p.16). Por outro lado, considerando a visão cognitiva, a conversão é quem conduz os mecanismos subjacentes à compreensão.

No processo de aprendizagem, a atividade conversão desempenha um papel fundamental na conceitualização do objeto estudado. A capacidade de utilizar no mínimo duas representações de um mesmo objeto sem que haja confusão entre este com os conteúdos respectivos das duas representações é tida como a primeira exigência cognitiva para compreender a Matemática. Entretanto, dessas três atividades cognitivas ligadas à semiose, apenas a formação e tratamento são consideradas no ensino (DUVAL, 2012a).

O acesso a uma vasta variedade de representações de um mesmo objeto se faz necessário, pois toda representação não apresenta o objeto em sua totalidade, isto é, cada representação é cognitivamente tendenciosa em relação ao conteúdo que representa, e o conteúdo contextual apresentado diverge de uma representação para outra.

O primeiro e maior obstáculo na compreensão da Matemática repousa na operação de conversão e isso ocorre, pois não há nada em comum no conteúdo representado de dois diferentes registros, “as dificuldades são oriundas do não reconhecimento de um mesmo objeto em representações distintas cujos conteúdos são diferentes” (DUVAL, 2018, p.9).

Os obstáculos se apresentam de duas formas:

> – A primeira é a incapacidade de reconhecer em uma das representações – um enunciado, uma equação, uma figura, um gráfico, etc. – as unidades a serem postas em correspondência com as unidades da outra representação. Isso leva a um bloqueio e a um abandono rápido das atividades de busca para resolver um problema ou a erros que apontam confusões ininterpretáveis;
> – A segunda maneira, a mais frequente, é o falso reconhecimento das unidades discursivas, figurais ou simbólicas a serem postas em correspondência. Este falso reconhecimento é tão entranhado, como seria na realidade, um bom reconhecimento caso não estivesse no domínio da matemática, o que conduz a erros sistemáticos e contumazes encontrados em todos os níveis de ensino. Os falsos reconhecimentos, enquanto persistem, tornam incompreensível toda explicação matemática e provocam, cada vez mais, dificuldades no progresso real da aprendizagem matemática (DUVAL,2018, p.10).

Um dos meios de enfrentar os obstáculos à conversão de representações tem sido o desenvolvimento de novas tecnologias. Os primeiros softwares construídos com finalidades pedagógicas remontam aos anos 1980, desde então os softwares educacionais se multiplicam, o que Duval comparou a um novo Eldorado para o ensino de Matemática (FREITAS; REZENDE, 2013).

Para Duval (2011b), o computador é considerado outro modo fenomenológico de produção de representações semióticas. Seu uso na aprendizagem, juntamente com os softwares, se diferencia do uso de papel e lápis, pois permite realizar tarefas que não são realizadas tão facilmente com esses materiais. É um importante recurso para visualização gráfica, pois complementa e dá sentido às representações algébrica e numérica, além de possibilitar uma melhor articulação entre registros de representação semiótica.

Sobre esse assunto, Duval (2011b) apontou que:

- Os computadores não constituem um novo registro de representação, isso porque as representações que exibem são iguais às produzidas graficamente no papel para compreensão visual.
- Constituem um modo fenomenológico de produção radicalmente novo, fundamentado na aceleração dos tratamentos, isto é, comparado com as possibilidades do modo visual gráfico, a exibição do software no monitor é tão rápida quanto a produção mental, mas com potencial de tratamento ilimitado.
- A novidade mais espetacular se deve ao fato de que as representações semióticas não discursivas, tornam-se manipuláveis como objetos reais podendo ser alongadas, rotacionadas, deslocadas a partir de um ponto, além desse aspecto dinâmico desempenha também a função de simulação, extremamente importante, pois permite a exploração heurística de problemas matemáticos.

Ademais, o uso de softwares se refere à uma representação auxiliar, sempre que se faz uso de uma representação auxiliar é importante ter clareza quanto ao objetivo de seu uso, pois assim como qualquer outra representação semiótica, dispõe de prós e contras, além de levar ao surgimento de outras dúvidas que talvez não tivessem aparecido em representações anteriores.

O autor ressalta dois tipos de fenômenos característicos da conversão das representações: a) as variações de congruência e não congruência; b) a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão. A dificuldade enfrentada pelos alunos em reconhecer o mesmo objeto através de duas representações diferentes se explica pelo fenômeno de não congruência. Além disso, “os fatos de não congruência mudam conforme os tipos de registros entre os quais a conversão é, ou deve ser, efetuada” (DUVAL, 2013, p.15).

Quanto à congruência entre representações, Duval (2009) aponta que para verificar se duas representações são congruentes se faz necessário primeiro segmentá-las em unidades significantes e modo que sejam colocadas em correspondências. Assim, Duval elenca três critérios de congruência semântica.

O primeiro critério é sobre a possibilidade de uma correspondência “semântica” dos elementos significantes. Esse critério diz respeito sobre “cada unidade significante simples de uma das representações, pode-se associar uma unidade significante elementar” (DUVAL, 2009, p.68)

O segundo é a univocidade “semântica” terminal, onde cada unidade significante da representação de partida pode se corresponder a uma só unidade significante no registro de representação de chegada.

O terceiro versa sobre a ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das representações, em outras palavras, esse critério é relativo à organização das unidades significantes. Esse critério apenas é pertinente quando se trabalha como mesmo número de dimensão, além de que tem sua grande importância quando se trata de comparar frases e fórmulas literais.

Quando os três critérios são satisfeitos se diz que existe correspondência semântica entre as representações. Por outro lado, pode ocorrer de nenhum desses critérios serem cumpridos, ou apenas dois ou apenas um. Sendo um desses critérios não cumprido as representações deixam de ser congruentes e a passagem de uma para outra não é mais imediata.

Estes critérios permitem definir o grau de não congruência entre representações semióticas distinta. Quando os três critérios são cumpridos, a substituição torna-se fácil e direta, entretanto, segundo Menoncini (2018), no desenvolvimento do pensamento matemático a maioria das substituições correspondem à não congruência, o que firma resistências e entraves ao seu desenvolvimento. Esta dificuldade encontra-se em diferentes domínios da aprendizagem matemática e aflige alunos em distintos níveis. (DUVAL, 2012b).

Quando a não-congruência acontece, esta leva frequentemente a fracassos na atividade cognitiva de conversão. O desconhecimento de um dos dois registros de representação pode agravar as dificuldades ligadas à não-congruência da conversão. Nesse ponto, Duval (2009, p.78) menciona que

> Isso é particularmente o caso para diferentes registros bi-dimensionais como gráficos cartesianos, as figuras geométricas ou mesmo as tabelas, quer dizer, para todos os registros para os quais se admite muito facilmente que é suficiente “ver” o que as curvas, os desenhos ou a repartição dos números em quatro casos “mostram”.

A dificuldade de assegurar a não-congruência nada tem a ver com a complexidade conceitual do conteúdo da representação a ser convertido, pois dadas duas representações do mesmo conteúdo, uma pode ser congruente com a terceira representação, enquanto a segunda não o é. Duval (2009, p.80) ainda acrescenta que “os fracassos dados a não-congruência revelam um fechamento dos registros de representação", onde essa dificuldade pode ocorrer mesmo depois de se ter ensinado e mobilizado registros de representação divergentes.

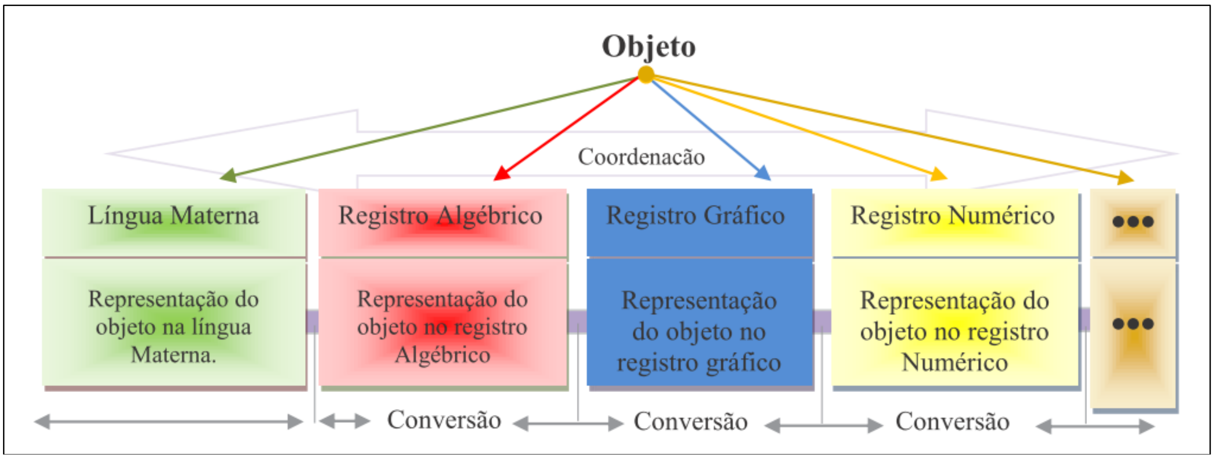
Ter acesso a diversos registros de representação e saber mobilização não basta para que haja compreensão do objeto estudado. A hipótese fundamental dessa teoria aponta que ao realizar a conversão se deve assegurar que ocorra a coordenação entre os registros de representação, pois "é a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática" (DUVAL, 2013, p.22).

A coordenação se refere à heterogeneidade dos dois sentidos da conversão, ou seja, é importante realizar a conversão levando em consideração os dois sentidos (ida e volta), pois os processos cognitivos podem variar na transformação de uma representação a outra.

A atividade conceitual está ligada à coordenação de registros de representação simbólica. O sujeito deve ser capaz de atingir um estado de coordenação de representações heterogêneas, de modo que possa distinguir entre representante e representado, ou entre a representação e o conteúdo conceitual expresso, instanciado ou ilustrado pela representação (DUVAL, 2009).

Henriques e Almouloud (2016, p.470) conceituam a coordenação entre duas representações como a "capacidade do o indivíduo em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos". Ainda em seu trabalho, os autores mencionam que os registros de representação em língua materna, registro algébrico, registro gráfico e registro numérico são os mais utilizados no ensino de Matemática desde a Educação Básica ao Ensino Superior. Posteriormente exibem como ocorrem a conversão e coordenação entre esses registros. Observe a Figura **3** a seguir:

Figura 3 - Conversão e coordenação de representações de um objeto entre registros



Fonte: Henriques e Almouloud (2016, p.470)

Ao analisar a figura levando em consideração o sentido das setas, se compreende que ao realizar uma conversão de um registro A para o registro B é fundamental que se mostre no sentido inverso também, isto é, do registro B para o registro A e para coordenar é preciso conhecer os elementos significantes de cada um dos registros.

Nas palavras de Duval (2009, p.100), a atividade conversão requer "a discriminação das unidades significantes a serem postas em correspondência nos registros de partida e nos de chegada" e é na discriminação dessas unidades significantes que repousa a dificuldade da atividade de conversão.

De um registro para outra, a natureza e discriminação das unidades sofrem mudanças o que torna o processo penoso. Além de que duas representações podem ser congruentes em um sentido de conversão, mas no sentido inverso ser não-congruente. Portanto, é necessário compreender a importância da discriminação das unidades significantes visto que esta é condição necessária para a conversão e, posteriormente, para o desenvolvimento de coordenação (DUVAL, 2009).

Ainda sobre a coordenação, Duval (2009) argumenta que é ingênuo pensar que a introdução de exercícios de conversão em alguns casos típicos seja suficiente para criar condições favoráveis à coordenação dos registros de representação entre os alunos e isso decorrer de dois motivos.

O primeiro se refere ao fenômeno de não-congruência, pois esse fenômeno não pode ser subsumido sob um processo de resolução visto que os casos de não-congruência são sempre particulares.

O segundo motivo é que a atividade de conversão necessita da identificação das unidades significantes dos dois registros de representação, porém é a discriminação das unidades que faz falta.

Na perspectiva de Duval, a análise do conhecimento matemático confronta três fenômenos que estão estreitamente ligados: a diversificação dos registros de representação semiótica, diferenciação entre representante e representado e por fim, a coordenação entre diferentes registros. A pluralidade de sistemas semióticos permite diversas representações do mesmo objeto. Essa diversidade aumenta as habilidades cognitivas dos sujeitos, o que por sua vez aumenta suas representações mentais (DUVAL, 2009).

2.2 Dificuldades na Aprendizagem de Trigonometria

São inúmeras as dificuldades enfrentadas pelos alunos no processo de aprendizagem da Trigonometria, buscando também no objeto de estudo desta pesquisa – ciclo trigonométrico/funções trigonométricas, apresentaremos aqui alguns registros coletados em pesquisas já publicadas. Para isso, se realizou um estudo bibliográfico em teses, dissertações, artigos de periódicos e anais de evento científicos.

A princípio, se destaca a importância da trigonometria no avanço da humanidade. Assim como em qualquer outro ramo da Matemática, ao estudar a história da construção da trigonometria se nota que esse conhecimento foi sendo construindo por diversos estudiosos, em tempos, distintos, conforme a necessidade da época.

Dentre esses estudiosos, Hiparco de Niceia é considerado o pai da trigonometria, pois foi o primeiro a dividir a circunferência em 360°, atribuindo a cada parte da circunferência arco de 1°, além disso, foi pioneiro na construção de tabelas trigonométricas.

Os conhecimentos trigonométricos se estendem por diversas áreas. A exemplo disso, na medicina se evidencia "no estudo e análise da frequência cardíaca, ou seja, os números de batidas por minuto, denominado como BPM" (COSTA; PEQUENO; PEREIRA, 2019, p.9).

As primeiras manifestações da Trigonometria se encontram tanto no Egito quanto na Babilônia, onde esses povos utilizavam desse conhecimento para as medições das pirâmides. Os babilônios foram excelentes astrônomos, utilizavam triângulos para estudar as fases da lua, pontos cardeais e as estações do ano (COSTA, 2003).

Segundo Costa (2003), a trigonometria tomou sua forma atual quando Euler (1707-1783) adotou a medida do raio de um círculo como unidade e definiu funções a serem aplicadas a números, ao invés de ângulos como em 1748. O método trigonométrico de conversão de funções periódicas de razões começou com Viète no século XVI e ganhou novo impulso com o advento do cálculo infinitesimal no século XVII, culminando nos diagramas de Euler.

De acordo com Freitas et al. (2016, p. 2), a aplicabilidade na Física está "nos cálculos presentes na óptica, dinâmica, cinemática entre outros". Outra extensão da trigonometria é a música, onde as notas podem ser transformadas em ondas senoidais. Os seres humanos podem ouvir ondas senoidais - essas ondas são semelhantes às vibrações produzidas pelas das ondas do oceano e do vidro ao se passar os dedos molhados no cristal (COSTA; PEQUENO; PEREIRA, 2019).

Apesar da importância da Trigonometria e vasta aplicabilidade, esse conteúdo se configura como um dos mais complicados a se trabalhar em sala de aula e a falta de compreensão pode estar atrelado a diversos fatores (ALMEIDA, 2019; DIONIZIO; BRANDT, 2011).

Almeida (2019) buscou investigar as principais causas que levem os estudantes a terem dificuldade no estudo das funções trigonométricas seno e cosseno, para tanto, aplicou um questionário com alunos do 2º ano Ensino Médio em uma escola de rede estadual. A pesquisadora constatou que apesar dos alunos relatarem compreender o conceito das funções trigonométricas possuem dificuldades para interpretar questões que solicitam o conhecimento dessas funções. Alguns alunos relatam sentir dificuldades em questões que envolvem gráficos e quando questionado sobre o procedimento para a construção dos gráficos, a resposta seguia a linha de raciocínio “ver qual a fórmula, aplicar na tabela e quando descobrir jogar os valores no gráfico” (ALMEIDA, 2019, n.p.).

Uma forma mecânica de construção que enfatiza apenas a passagem da função algébrica para o gráfico, sem valorizar a volta, abordagem caracterizada por Duval (2011a) como “ponto a ponto” por ser limitada. Outra dificuldade salientada está no grau de abstração do conteúdo, quanto maior esse grau a dificuldade tende a ampliar e não evidenciar as reais aplicações das funções trigonométricas contribui para o aprofundamento dessa dificuldade.

Dionizio e Brandt (2011), fundamentadas na teoria de Raymond Duval, buscaram identificar a natureza das dificuldades apresentadas em Trigonometria por alunos de Ensino Médio de uma escola pública, onde foi aplicada uma atividade com alunos do 2º ano. De modo geral, as pesquisadoras buscavam identificar se o problema está na aprendizagem dos alunos ou na forma como os conteúdos são apresentados a estes.

Dentre as dificuldades citadas, chama atenção aquela relacionada à confusão dos valores numéricos como sendo da mesma natureza, isto é, mesma unidade de medida (de ângulo e de comprimento). Por fim, as autoras concluem que a natureza das dificuldades “está na falta de conceitualização dos objetos matemáticos, pois os alunos não fazem relação da forma de representação com o objeto matemático que está sendo representado” (DIONIZIO; BRANDT, 2011, p. 4420).

Feijó (2018) procurou identificar, dentro desse tema, os principais erros e/ou dificuldades apresentados por alunos do 2º ano do ensino médio matriculados em escolas públicas do Distrito Federal. O estudo mostra que as dificuldades permeiam todos os ramos da trigonometria, desde definições e conceitos até manipulações. Desde os fundamentos da trigonometria podem ser observados os problemas no aprendizado. Destacam-se dificuldades em relação à definição de radiano, onde a definição desse conceito parece não existir para os alunos.

Os alunos também demonstraram dificuldade em propriedades, características e comportamentos das funções trigonométricas e à conexão entre o círculo trigonométrico e as funções trigonométricas pela função de Euler. A autora menciona que:

> Uma descoberta significativa dessa pesquisa foi o fato dos gráficos das funções trigonométricas não serem relevantes para os alunos na análise de itens que questionavam propriedades dessas funções. Além disso, as entrevistas indicam que,

> para esses alunos, as imagens gráficas das funções trigonométricas parecem não existir, pois nenhum deles conseguiu desenhar sequer um dos gráficos, nem mesmo um esboço com seu formato característico (FEIJÓ, 2018, p.52)

Oliveira (2006), por outro lado, classifica em cinco categorias as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem da Trigonometria, que são: 1) dificuldades relacionadas ao ambiente físico e de materiais; 2) dificuldades relacionadas à estrutura organizacional da escola; 3) dificuldades decorrentes dos paradigmas do ensino tradicional; 4) dificuldades decorrentes dos paradigmas da profissão docente; 5) dificuldades decorrentes das competências e habilidades dos alunos.

Weber (2005) realizou um estudo onde investigou a compreensão dos alunos de dois cursos do Ensino Superior sobre as funções trigonométricas.

> A primeira limitação na compreensão dos alunos diz respeito ao papel que as figuras geométricas desempenharam na compreensão dessas funções. Relacionar claramente funções trigonométricas com modelos geométricos apropriados é importante para entender essas funções (WEBER, 2005, p. 103)

Orhun (2004) buscando investigar os níveis de aprendizagem sobre o assunto de Trigonometria e erros equívocos sobre o conteúdo realizou um estudo com alunos de uma turma do ensino médio na Turquia. O estudo indica que muitos alunos um número real como um ângulo no argumento de uma função trigonométrica.

Em outro estudo, Orhun (2010) buscou investigar a relação entre números reais e relações trigonométricas, além de identificar alguns erros comuns dos alunos em trigonometria. Dois níveis foram definidos para medir o conhecimento dos alunos: 1) conceito de radianos e 2) conceito de função trigonométrica.

O estudo mostrou que, apesar dos alunos saberem converter o ângulo de grau para radianos, eles não sabiam lidar quando o ângulo era expresso em número real sem notação de graus. Uma possível explicação seria a familiarização do aluno com o ângulo medido em graus, pois na abordagem inicial do ensino de trigonometria essa é a notação mais utilizada, essa afeição gera detrimento pelo uso do ângulo medido em radianos e quando necessário usar a segunda notação, a performance do estudante pode cair (ORHUN, 2010).

Ainda, há erros conceituais na definição de domínio de uma função e na transposição do ciclo trigonométrico para a reta real, pois quando os estudantes foram questionados sobre o domínio de uma função trigonométrica, um grupo respondeu que estava limitado ao intervalo $[0°, 360°]$ enquanto outro indicou que estava limitado ao intervalo $[-1,1]$.

Demir e Heck (2013) argumentam que as funções trigonométricas são diferentes das demais funções, visto que não podem ser calculadas realizando certos cálculos aritméticos revelados por uma fórmula algébrica. A natureza complexa da Trigonometria se torna um desafio para os alunos compreenderem o conteúdo de maneira profunda

> as funções seno e cosseno podem ser definidas no método da razão, método do círculo unitário ou uma combinação de ambas as abordagens, mas os gráficos dessas funções permanecem misteriosos ou meramente diagramas produzidos por uma calculadora gráfica ou software de matemática (DEMIR; HECK, 2013, n.p.)

A falta de compreensão de conceitos trigonométricos por parte dos alunos tem um efeito cascata na taxa de sucesso dos alunos em Matemática. Por isso, Chiconga (2016) procurou encontrar os conceitos problemáticos e os erros cometidos pelos alunos quando resolvem equações trigonométricas. O estudo revela que os estudantes interpretam erroneamente o seno, cosseno e tangente de um ângulo quando seus valores são negativos.

Sierpinska (1992, p.25 apud Feijó, 2018, p.18) diz que "os alunos têm dificuldade em fazer conexões entre diferentes representações de funções: fórmulas, gráficos, diagramas, relacionar descrições de palavras; na interpretação de gráficos; em símbolos de manipulação relacionados a funções[...]".

Na visão de May e Courtney (2016, p.25), a divisão curricular pode ser um empecilho para o aprendizado efetivo da Trigonometria, pois

> Em vez de desenvolver um significado de medida de ângulo que suporte uma única trigonometria, que engloba tanto a semelhança do triângulo como o comportamento periódico, os currículos típicos os desenvolvem separadamente e de forma independente. Especificamente, os livros escolares de ensino fundamental e médio desenvolvem duas abordagens não relacionadas da trigonometria: trigonometria de triângulos e trigonometria de funções periódicas. (MAY & COURTNEY, 2016, p.25, tradução nossa)

Brown (2006) realizou um estudo com cento e vinte alunos, no qual buscava explorar a compreensão deles pela Trigonometria. A pesquisa revelou que os alunos possuíam uma compreensão incompleta e fragmentada acerca das maneiras de visualizar o seno e cosseno, seja como coordenadas de um ponto no círculo unitário, seja como proporções entre lado de um triângulo retângulo ou como gráfico das funções. Além disso, vários obstáculos cognitivos foram identificados. Algumas questões específicas envolvendo o estudo da trigonometria. Isso inclui noções frágeis de ângulo de rotação e unidade, e falha em conectar rotações no círculo unitário a pontos em um gráfico de função cosseno ou seno.

Foi um longo caminho da humanidade para chegar até a trigonometria que hoje é ensinada em sala de aula, nota-se que cada sociedade/povo contribui com a construção e evolução desse conhecimento. O docente ao atribuir à sua prática pedagógica a história de construção de um conhecimento matemático ajuda os estudantes no seu processo de aprendizagem, pois assim perceberá que não se trata de um conceito pronto e acabado.

Entretanto, apesar da importância da história no processo de aprendizagem da matemática, acreditamos que compreender um objeto matemático de estudo é necessário interagir com suas representações e mobilizar atividades com essas representações de modo que ocorra a apreensão conceitual, dessa forma nos voltamos para a teoria de Raymond Duval que será explanada no próximo capítulo.

2.3 Registros de representação semiótica e os livros didáticos: um cenário sobre pesquisas brasileiras

O objetivo deste capítulo é apresentar um mapeamento de teses e dissertações que fundamentados na teoria de Duval investigam livros didáticos. Trata-se de um levantamento bibliográfico com delineamento do tipo estado da arte, já que a busca se concentrou em mais de um lócus.

A respeito de pesquisas que adotam essa metodologia, Ferreira (2002, p.259) fala que:

> Sustentados e movidos pelo desafio de conhecer o já construído e produzido para depois buscar o que ainda não foi feito, de dedicar cada vez mais atenção a um número considerável de pesquisas realizadas de difícil acesso, de dar conta de determinado saber que se avoluma cada vez mais rapidamente e de divulgá-lo para a sociedade, todos esses pesquisadores trazem em comum a opção metodológica, por se constituírem pesquisas de levantamento e de avaliação do conhecimento sobre determinado tema.

A coleta de dados foi direcionada para o período de 2016 a 2020, entretanto já se tinha conhecimento de três outros trabalhos que realizaram mapeamentos da teoria de modo bem amplo, pois buscavam evidenciar a utilização da teoria revelando quais temáticas (objetos) eram enfatizadas, quais os níveis de abrangências e processos (ensino, aprendizagem, livro didático, formação de professores entre outros) eram beneficiados. Assim, buscou-se nesses trabalhos aqueles referentes aos livros didáticos.

O primeiro deles é o de Colombo, Flores, Moretti (2008), onde os autores consultaram os principais bancos de teses e dissertações do Brasil, como o site da CAPES, do INEP e o banco de teses EduMat do Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática (CEMPEM) da UNICAMP; estipularam um período de 1990 a 2005. A pesquisa encontrou um total de 30 trabalhos, sendo apenas 2 voltados para a análise para análise de livros didáticos, que são as dissertações de Catto (2000) e Silva (2004).

O segundo mapeamento compreende os períodos de 2006 a 2009 e foi realizado por Brandt e Moretti (2014), sendo mais amplo, pois além de teses e dissertações inclui artigos publicados em periódicos e em eventos da área da Educação Matemática, totalizando vinte e cinco dissertações, quatro teses, sete artigos em periódicos e vinte comunicações científicas.

Os autores organizaram os trabalhos coletados em dez categorias, livro didático dentre elas, que tinha por foco “a análise das diversas representações de um objeto matemático, que se encontravam presentes em livros de matemática, utilizados ou não em sala de aula e que consideravam um conteúdo matemático, foram agrupados na categoria livro didático” (BRANDT; MORETTI, 2014, p.26)

Nessa categoria foram encontrados um total de 12 pesquisas, sendo quatro em eventos, sete dissertações e uma tese. Uma vez que nossa pesquisa se direciona para teses e dissertações, levamos em consideração apenas essas pesquisas, logo, do trabalho de Brandt e Moretti (2014) se encontrou oito pesquisas voltadas para a análise de livros didáticos, que foram as dissertações de Battaglioli (2008), Bica (2009), Campos (2007), Grande (2006), Mateus (2007), Silva (2007), Jacomelli (2006) e a tese de Karrer (2006).

Já no terceiro, Pontes, Finck e Nunes (2017) fizeram um recorte temporal de 2010 a 2015, onde mapearam teses e dissertações no banco de dados da CAPES, no BDTD (Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações) e o banco de dados das instituições evidenciadas, além de alguns artigos de periódicos. Foram encontrados um total de sessenta e cinco trabalhos, sendo apenas sete desses identificados pelos autores como voltados para análise de livros didáticos.

Desses sete, um se refere a artigo de periódico, logo foi descartado. Dos seis restantes realizou-se uma breve leitura e se identificou que um não deixa claro tratar da análise de livro. Logo, da pesquisa de Pontes, Finck e Nunes (2017) reaproveitou-se cinco pesquisas, sendo elas: Kluppel (2012), Thiel (2013), Anjos (2015), Silva (2010) e Silva (2014).

Devido à ausência de mapeamentos nessa vertente no período de 2016 a 2020, se buscou então realizar tal feito. Para tanto, foi realizada uma consulta preliminar no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e na BDTD (Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações).

A busca comtemplou teses e dissertações dessas plataformas que utilizam a TRRS como aporte teórico e posteriormente foi feita uma leitura nos trabalhos para identificar aqueles voltados para a análise de livros didáticos. Foram encontrados cento e sessenta e cinco trabalhos, sendo vinte e sete direcionado para a análise de livros didáticos.

Portanto, juntando esse resultado com o das pesquisas de Colombo, Flores e Moretti (2008), Brandt e Moretti (2014) e Pontes, Finck e Nunes (2017), se tem um total de quarenta e duas pesquisas direcionadas para a análise de livros didáticos, onde estas foram identificadas por meio dos números 1 a 42, está disponível no quadro em apêndice.

A seguir está uma introdução aos dados sobre o nível de abrangência das pesquisas mapeadas e suas respectivas análises.

Quadro 2 - Nível de abrangência das pesquisas

Nível de abrangência	**Identificação da pesquisa**
Ensino Fundamental	Catto (2000), Jacomelli (2006), Kluppel (2012), Thiel (2013), Anjos (2015), Silva (2014), Sena Filho (2019), Soppelsa (2016), Arcego (2017), Hauser (2018), Imafuku (2019), Machado (2019) e Fischer (2020).
Ensino Médio	Battaglioli (2008), Bica (2009), Silva (2010), Lobo (2017), Anjos (2019), Terra Neto (2016), Silva (2017), Andrade (2018), Domingos (2017), Miranda (2018), Ginez (2020) e Silva (2020).
Ensino Fundamental e Médio	Silva (2007), Soares (2016), Alencar (2017) e Silva (2019)
Ensino Superior	Silva (2004), Karrer (2006), Campos (2007), Grande (2006), Mateus (2007), Ferreira (2016), Barros (2017), Menoncini (2018), Silva (2018), Agricco Júnior (2017), Andreotti (2017), Londero (2017), Santos (2017),

Fonte: Elaborado pela autora

O quadro 2 apresenta os níveis de abrangência das pesquisas, isto é, se foram analisados livros do Ensino Fundamental (anos iniciais e finais), do Ensino Médio, em alguns casos notamos que os autores analisam tanto livros do nível fundamental como do médio, por isso optamos por adicionar o nível de abrangência Ensino Fundamental e Médio (que corresponde ao Ensino Básico) e por fim o Ensino Superior.

No total foram trezes pesquisas voltadas para o ensino fundamental, doze para o ensino médio, quatro para o ensino fundamental e médio e treze para o ensino superior. Se nota um número significante de pesquisas voltadas para a educação básica (69,05%), as demais pesquisas se voltaram para o ensino superior (30,95%).

Consideramos a hipótese levantada por Pontes, Finck e Nunes (2017) como uma possível explicação para a defasagem nas porcentagens. As autoras acreditam que haja mais trabalhos voltados para a Educação Básica, pois Duval desenvolveu diversas pesquisas no Collège (alunos entre 12 e 15 anos), que equivale ao Ensino Fundamental no Brasil.

O Quadro 2 a seguir trata dos objetos matemáticos destacados nas pesquisas mapeadas, o levantamento desses trabalhos permitiu não só conhecer quais eram os objetos, mas também compreender a justificativa da escolha dos pesquisadores, que podem variar desde a importância do conteúdo até dificuldade apresentadas pelos alunos no momento de aprendizagem e mesmo pelos professores em sua prática pedagógica.

Quadro 3 - Objeto matemático das pesquisas mapeadas

Objeto	Identificação da pesquisa
Número racional	Catto (2000)
Sistemas lineares	Battaglioli (2008) e Andrade (2018)
Sistema de equações	Sena Filho (2019)
Funções	Bica (2009), Silva (2007), Silva (2010), Alencar (2017), Silva (2017), Miranda (2018), Ginez (2020) e Silva (2020)
Teorema Fundamental do Cálculo	Campos (2007)
Geometria	Kluppel (2012), Anjos (2015), Ferreira (2016), Terra Neto (2016), Domingos (2017), Silva (2019), Silva (2014), Arcego (2017), Imafuku (2019), Machado (2019), Anjos (2019)
Proporção	Soares (2016)
Quádricas	Silva (2018) e Londero (2017)
Divisão Euclidiana	Soppelsa (2016)
Números complexos	Agricco Júnior (2017)
Vetores	Andreotti (2017)
Escala Cartográfica	Hauser (2018)
Plano cartesiano	Thiel (2013)
Fração	Fischer (2020)
Equações Diferenciais Ordinárias	Barros (2017)
Integral	Silva (2004), Menoncini (2018)
Derivada	Santos (2017)
Álgebra	Karrer (2006), Grande (2006), Jacomelli (2006),
Taxa de variação	Lobo (2017)
Cálculo Diferencial e Integral	Mateus 2007

Fonte: Elaborado pela autora

Se percebe que os estudos estão centrados em um ou outro conteúdo. Duval (2018) ao desenvolver a teoria analisou os objetos matemáticos função e geometria, deixando claro que a teoria foi elaborada para contemplar quaisquer conceitos e domínios matemáticos tratados.

Assim notamos com o levantamento que os pesquisadores que se apropriam estão estendendo aos demais objetos, não só matemáticos, mas também de outras áreas de conhecimento como é o caso da pesquisa de Hauser (2018) que fundamentado na TRRS analisa a escala cartográfica em livros didáticos do ensino fundamental, segundo o autor, o estudo da escala cartográfica depende de conhecimentos matemáticos, a desarticulação desse conhecimento com o conteúdo matemático foi o que norteou a pesquisa.

Nas pesquisas de Catto (2000) e Silva (2004), segundo Colombo, Flores e Moretti (2008), a escolha dos conteúdos para análise partiu da dificuldade dos alunos para sua compreensão.

Outros pesquisadores justificam a escolha do objeto, pois buscavam compreender como se dá o processo de aprendizagem de um objeto matemático específico, é o caso de

Arcego (2017) ao afirmar que sua pesquisa objetiva analisar os registros de representação semiótica e as apreensões sequencial, perceptiva, discursiva e operatória mobilizadas no estudo da área do círculo.

Por outro lado, se nota a ausência de análise de alguns objetos matemáticos em livros didáticos. Aqui levanta-se a hipótese que à medida que a teoria for se mostrando eficaz para a aprendizagem da Matemática, mas objetos veem a ser contemplados.

Dada a complexidade da TRRS, optou-se por verificar quais aspectos da teoria foram mais enfatizados pelos pesquisadores, assim lista-se os principais tópicos da teoria: operações (formação, tratamento e conversão), congruência semântica (e consequentemente, não congruência semântica), funções discursivas, aprendizagem da geometria e apreensão global de propriedades figurais. Esses dados podem ser observados no quadro 4 a seguir, juntamente com o autor da pesquisa, objeto estudado, nível de abrangência e considerações.

Quadro 4 - Síntese das pesquisas analisadas

Autor(a)	Objeto Matemático	Nível de abrangência	Aspectos abordados da TRRS	Resultados / Contribuições
Catto (2000)	Número Racional	Ens. Fundamental	Operações; diversidade de registros	Os LD abordam todos os registros, mas carecem de atividades de mobilização nos dois sentidos da conversão.
Silva (2004)	Integral	Ens. Superior	Operações; diversidade de registros	Concluí que os LD analisados utilizam os mesmos RRS da integral: simbólico (algébrico e numérico), língua natural, gráfico e tabela. São valorizados tanto os tratamentos quanto as conversões.
Karrer (2006)	Álgebra	Ens. Superior	Operações; diversidade de registros	A análise apontou uma forte valorização dos registros simbólicos (algébrico e numérico), por outro lado, as representações gráficas foram pouco exploradas, bem como as conversões que têm o gráfico como registro de partida.
Battaglioli (2008)	Sistemas lineares	Ens. Médio	Diversidade de registros; operação de conversão	A conversão ainda é tratada de forma tímida, sendo predominante a conversão da língua natural para o registro algébrico; além disso, se nota uma carência do registro gráfico nos livros didáticos, onde a autora acredita que o uso de softwares possa solucionar a lacuna deixada pelos livros.
Bica (2009)	Função	Ens. Médio	Apreensão global; fenômeno de congruência e não-congruência	Dos três LD analisados apenas dois promoviam a apreensão global e apresentava diversidade de registros. Quanto aos exercícios, a pesquisa mostrou que os LD também apresentaram alguns exercícios com fenômenos de não-congruência.
Campos (2007)	Teorema Fundamental do Cálculo	Ens. Superior	Coordenação; diversidade de registros	Conclui que a data de publicação dos livros não tem relação direta com a diversidade de registros empregados. Quanto a coordenação entre os registros de representação, alguns livros a tornam mais evidente que em outros.

Grande (2006)	Álgebra	Ens. Superior	Diversidade de registros; operação de conversão	O autor aponta uma escassez da utilização de alguns registros de representação como, por exemplo, o registro geométrico e o registro em língua natural. Notou também a ausência de conversão de registros em definições, exemplos e exercícios propostos.
Mateus (2006)	Cálculo Diferencial e Integral	Ens. Superior	Operações; diversidade de registros	Os resultados apontam que a articulação entre registros de representação semiótica é débil, pois há preferência do uso de registros algébricos e seus tratamentos em vez de promover a articulação com a conversão entre registros.
Silva (2007)	Função	Ens. Fund. e Médio	Diversidade de registros; apreensão global; operação de conversão	Observou-se que na maioria dos livros, a conversão entre os registros gráfico e algébrico não ocorre nos dois sentidos e que as variáveis visuais pertinentes geralmente não são levadas em conta, no esboço de gráficos.
Jacomelli (2006)	Álgebra	Ens. Fundamental	Operações; diversidade de registros	A autora concluí que ambas coleções analisadas dão lugar ao trabalho de conversão e tratamento. Ambas propuseram exercícios que contemplam as conversões classificadas no estudo; além disso, se notou que a congruência é bem mais trabalhada que a não-congruência.
Kluppel (2012)	Geometria	Ens. Fundamental	Operações; funções discursivas; aprendizagem da geometria	Os resultados apontam que a Geometria analisada nos LD apresenta lacunas em relação aos aspectos da teoria de Duval. Isso acontece no que concerne às possibilidades de propostas para o ensino. A autora ainda menciona que se os autores dos livros se apropriassem da TRRS tem a possibilidade de guiar o aluno por definições, demonstrações e resolução de problemas, estabelecendo uma relação dialógica.
Thiel (2013)	Plano cartesiano	Ens. Fundamental	Operações; congruência e não-congruência; funções discursivas	Verifica-se que as séries de atividades sobre coordenadas e o plano cartesiano não estabelecem uma relação entre os diferentes registros de representação semiótica, não alternando a ordem das formas e a ação de ir e vir ligadas ao tema com vistas a uma melhor compreensão por parte do aluno. Os LD fazem uso de algumas formas de registros; entretanto eles não estabelecem relações entre eles; apenas realizam poucas conversões entre pares de registros.
Anjos (2015)	Geometria	Ens. Fundamental	Operações; congruência e não-congruência	A partir da análise de congruência semântica percebeu-se possíveis pontos geradores de dificuldades para o estudante cego e seu professor.
Silva (2010)	Função	Ens. Médio	Operações	Se nota que os autores dos LD utilizaram dos registros: língua natural, simbólico (algébrico e numérico) figural e gráfica. Além disso, há exercícios propostos que propiciam a coordenação de registros.
Silva (2014)	Geometria	Ens. Fundamental	Operações; congruência e não-congruência; aprendizagem da geometria	Conclui que há uma predominância de representações gráficas para triângulos equiláteros e isósceles, em relação aos ângulos há uma ausência de representações gráficas de triângulos obtusângulos. Ademais, há pouca atenção para atividades de conversão.

Sena Filho (2019)	Sistema de equações	Ens. Fundamental	Diversidade de registros; operações.	As coleções de livros analisadas não fazem uso da teoria conforme sugere a teoria, que seria realizando uma troca entre os registros. Os livros utilizam os registros de modo isolado.
Ferreira (2016)	Geometria	Ens. Superior	Diversidade de registros; operações.	Os LD utilizam registros de representação figural, discursivo e simbólico. As provas e demonstrações apresentadas no livro influenciam nas provas e demonstrações dos alunos
Soares (2016)	Proporção	Ens. Fundamental e Médio	Operações	A conversão foi mais enfatizada nas atividades analisadas, entretanto, na maioria das vezes, sendo realizada apenas em um sentido, restringindo a compreensão dos objetos matemáticos.
Barros (2017)	EDO	Ens. Superior	Operações; diversidade de registros	Os LD priorizam uma abordagem algébrica das EDOs.
Lobo (2017)	Taxa de variação	Ens. Médio	Operações; diversidade de registros	Destacam a importância de usar vários livros nas aulas de matemática, pois um complementa o outro e eles possuem diversas abordagens do mesmo assunto.
Menoncini (2018)	Integral	Ens. Superior	Operações; diversidade de registros	Os LD privilegiam alguns registros. o discurso é o registro de partida que predomina e que o registro gráfico-geométrico serve de intermediário para fornecer os dados necessários à integral para determinar a área procurada.
Silva (2018)	Superfícies Quádricas	Ens. Superior	Operações; apreensão global; funções discursivas.	Os LD não deixam explícitas correlações entre os registros em língua natural com unidades simbólicas e visuais. Dentre as consequências disso, os aspectos semióticos e cognitivos podem ser comprometidos ou pouco explorados além de comprometer os tratamentos, as conversões entre outros.
Anjos (2019)	Geometria	Ens. Médio	Operações; diversidade de registros; coordenação; funções discursivas	Apesar de uma grande diversidade de registros sendo apresentada a estudante em seu material didático em Braille, para alguns deles há a necessidade de modificações.
Terra Neto (2016)	Geometria	Ens. Médio	Operações; diversidade de registros	Os LD analisados pouco exploram a possibilidade de conversão entre registros. A conversão, que poderia ser abundante, é pouco explorada. Além disso, as poucas possiblidades de conversão não desafiam o aluno a utilizar mais de um registro geométrico.
Soppelsa (2016)	Divisão euclidiana	Ens. Fundamental	Diversidade de registros.	Nos LD, a operação de divisão se limita a utilização de algoritmo, criticado pela pesquisadora, pois operar com o algoritmo da divisão não significa que o aluno compreenda cada termo da operação. Ainda aponta que os LD contêm informações e conceitos ilustrados de várias formas, tópicos essenciais para aprendizagem e desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos.
Agricco Júnior (2017)	Números complexos	Ens. Superior	Operações; diversidade de registros	As abordagens dos números complexos são feitas predominantemente utilizando representações algébricas cartesianas e representações algébricas polares, embora

				outras representações semióticas de números complexos sejam assinaladas.
Alencar (2017)	Função	Ens. Fundamental e Médio	Diversidade de registros	De modo geral, o autor apresenta fatores que dificultam o entendimento da função tais como: pouco uso de representações, valorização excessiva de alguns registros e ausência da conversão.
Andreotti (2017)	Vetores	Ens. Superior	Operações; diversidade de registros	A diversidade de notações adotadas pelo livro pode tornar a compreensão do objeto mais complexa. Nos livros de disciplinas da área de matemática, não é dada ênfase para as transformações de conversão entre as diversas representações semióticas para os vetores, condição oposta ao que foi constatado nos livros técnico-científicos.
Arcego (2017)	Geometria	Ens. Fundamental	Aprendizagem da geometria	Com exceção de uma atividade, o registro em língua natural foi empregado apenas nos enunciados, e os tratamentos enfatizaram registros algébricos e numéricos. Notou-se que a frequência com que os registros são utilizados varia de uma coleção de livros a outra.
Silva (2017)	Função	Ens. Médio	Operações; diversidade de registros	Nota-se no decorrer da análise do LD, o cuidado e a preocupação do autor com a comunicação desses conceitos matemáticos para a apreensão conceitual dos alunos nos diferentes registros.
Londero (2017)	Quádricas	Ens. Superior	Diversidade de registros;	Observou-se, em sua maioria, atividades que permaneciam no âmbito apenas das representações algébricas, apesar da conversão ter mobilizado uma grande quantidade de registros de representações.
Santos (2017)	Derivada	Ens. Superior	Operações; diversidade de registros	Os LD trazem noções equivocadas que geram dificuldades manifestadas pelos estudantes acerca do conceito estudado.
Andrade (2018)	Sistemas lineares	Ens. Médio	Operações	Observam-se que todos os livros apresentam elementos que permitam que os alunos trabalhem o objeto matemático Sistemas Lineares em ao menos dois registros de representação e, mais que isso, transitem entre eles, proporcionando, assim, aprendizado efetivo do conteúdo.
Domingos (2017)	Geometria	Ens. Médio	Operações; aprendizagem da geometria	Uma análise feita em livros didáticos atuais mostrou que, de um modo geral, o ensino de Geometria Analítica é apresentado por meio de uma abordagem mais algébrica, com destaque para o uso de fórmulas e, nos exercícios, a representação algébrica é a mais utilizada.
Hauser (2017)	Escala cartográfica (geografia)	Ens. Fundamental	Diversidade de registros	Constatou-se que a complexidade existente no conceito de escala é decorrente da natureza dos conteúdos matemáticos e mesmo sabendo disso viu-se que a Geografia não se esforça em utilizar a Matemática como uma ferramenta.
Miranda (2018)	Função	Ensino Médio	Operações; diversidade de registros	Apesar de uma predominância dos exercícios cuja solução permanece em um mesmo tipo de registro, a solução de muitos dos exercícios propostos, permitem ao estudante de matemática mobilizar diferentes tipos de representação do mesmo objeto matemático.

Imafuku (2019)	Geometria	Ens. Fundamental	Aprendizagem da geometria	O processo de decomposição e composição é abordado em todas as coleções analisadas, mas, para consolidar o cálculo de área seria interessante mais atividades nas quais o aluno realizasse, por si só, as reconfigurações de uma figura.
Machado (2019)	Geometria	Ens. Fundamental	Diversidade de registros	O ensino de semelhança de figuras, presente nas obras, é enunciado e exibido por registros multifuncionais e monofuncionais, discursivos e não discursivos, contudo, apenas duas obras apresentam uma multiplicidade de representações semióticas, proporcionando ao aluno uma compreensão efetiva no processo da transição do meio geométrico conceitual para a escrita algébrica numérica.
Silva (2019)	Geometria	Ens. Fundamental e Médio	Aprendizagem da geometria	Conclui-se que as figuras podem auxiliar na resolução de problemas uma vez que podem propiciar o desenvolvimento das apreensões revelando seu potencial em oferecer suporte ao professor em sua prática na sala de aula.
Fischer (2020)	Fração	Ens. Fundamental	Operações; diversidade de registros	Todos os autores abordam a questão "fração de", mas nenhum deles tomou isso como definição para a multiplicação de frações explicitamente, o que, no nosso ponto de vista, constitui uma barreira para o desenvolvimento do pensamento matemático do estudante sobre ampliação de universo numérico, particularmente, sobre a ampliação da operação de multiplicação.
Ginez (2020)	Função	Ens. Médio	Diversidade de registros; operações; congruência semântica.	A análise apontou uma mobilização, manipulação e coordenação de representações do objeto, que possibilita a compreensão do mesmo por meio de diferentes representações, oportunizando ao professor situações de aprendizagem diferenciada.
Silva (2020)	Função	Ens. Médio	Diversidade de representações; operações; congruência semântica	O LD destaca a conversão em linguagem natural para algébrico e registro algébrico para registro gráfico. Quanto ao fenômeno de congruência semântica, os resultados apontaram que nos itens analisados no livro didático, existe mais em médio e alto grau de não congruência.

Fonte: Elaborado pela autora

O Quadro 4 permite uma melhor visualização dos trabalhos analisados ao mostrar qual objeto está sendo trabalho por qual autor, o nível de ensino, e quais resultados foram alcançados pelos aspectos abordados da teoria.

Quanto aos aspectos da TRRS abordados pelas pesquisa, percebe-se que a maioria das análises dos livros estão interessadas na diversidade de representações utilizadas, isto é, identificar quais os registros de representações semióticas são utilizadas pelos livros analisados, supõe-se que esse interesse na diversidade dos registros seja devido por esse ser um fator importante para a aprendizagem em Matemática, Duval (2018) aponta que saber distinguir um objeto de sua representação e saber utilizar ao menos duas representações de um objeto é a primeira exigência para compreender Matemática.

Outro aspecto bastante utilizado pelos autores está nas operações de formação, tratamento e conversão, sendo estas duas últimas ligadas a atividade de substituição, isto é, toda atividade matemática implica numa substituição, de uma expressão por outra ou representação por outra, a substitutividade é essencial em toda mudança de registro semiótico (DUVAL, 2012b).

Para Duval (2009) não há *noésis* sem *semiósis*, ou seja, para que o conceito do objeto matemático seja compreendido é necessário a produção de representações semióticas e estas três operações (formação, tratamento e conversão) são consideradas três atividades cognitivas ligadas a *semiósis*.

Percebe-se que nem todas as pesquisas se empenham em verificar o fenômeno de congruência semântica entre as representações e menos ainda aquelas que optam pelas funções discursivas.

Quanto aos resultados alcançados pelos pesquisadores, de modo geral, nota-se que estes sempre apontam pontos que podem ser melhorados para promover uma melhor aprendizagem do conteúdo analisado. Visto que a análise se apoia na TRRS, uma teoria voltada para a aprendizagem, as críticas dos pesquisadores se mostram importante para as editoras e autores de livros didáticos como uma forma de aperfeiçoarem o material didático.

A tabela a seguir mostra a quantidade de pesquisas que utilizam a TRRS para análise de LD. Para esse levantamento, consideramos os mapeamentos anteriores de Colombo, Flores e Moretti (2008), Brandt e Moretti (2014), Pontes, Finck e Nunes (2017) e o mapeamento aqui realizado no período de 2016-2020.

Tabela 1 - Levantamento quantitativo das pesquisas mapeadas

Autores	Período analisado	Total de pesquisas	Pesquisas LD
Colombo, Flores e Moretti (2008)	1990-2005	30	2
Brandt e Moretti (2014)	2006-2009	56	8
Pontes, Finck e Nunes (2017)	2010-2015	65	5
A autora	2016-2020	165	27

Fonte: Elaborado pela autora

A tabela mostra um crescente interesse da parte dos pesquisadores pela teoria e sua aplicabilidade para a análise do livro didático, isso se justifica devido a importância desse material no processo de ensino-aprendizagem.

Catto (2000), a primeira pesquisadora nesse período a direcionar a uso da teoria para análise de LD, justifica sua escolha por esse material por apoiar os professores durantes as aulas e que muitas vezes os livros são de qualidade insatisfatória.

Battaglioli (2008) defende sua escolha pelos livros, pois esse material é o mais utilizado pelos professores para preparar e ministrar suas aulas, podendo determinar os conteúdos e estratégias a serem trabalhadas.

Para justificar a escolha pela análise de livros, Kluppel (2012), fundamentado em Gérard e Roegiers (1998), lista algumas funções desempenhadas por esse material tanto em relação ao docente como ao discente. Em relação ao docente, auxiliar no planejamento e na gestão das aulas, favorecer a aquisição dos conhecimentos são algumas das funções. Já ao discente, dentre as funções se tem a propiciação do desenvolvimento de competências cognitivas.

Ginez (2020) aponta que a incompreensão dos alunos sobre determinado conteúdo em matemática leva a repensar os métodos de ensino para possibilitar melhores estratégias que enriqueçam a aprendizagem, visto que os livros didáticos são usados neste processo se faz importante um olhar crítico sobre esse material.

Enfim, ao compreender que o LD pode ser uma ferramenta de extrema relevância no processo de ensino e aprendizagem muitos pesquisadores direcionam suas pesquisas para a análise desse material.

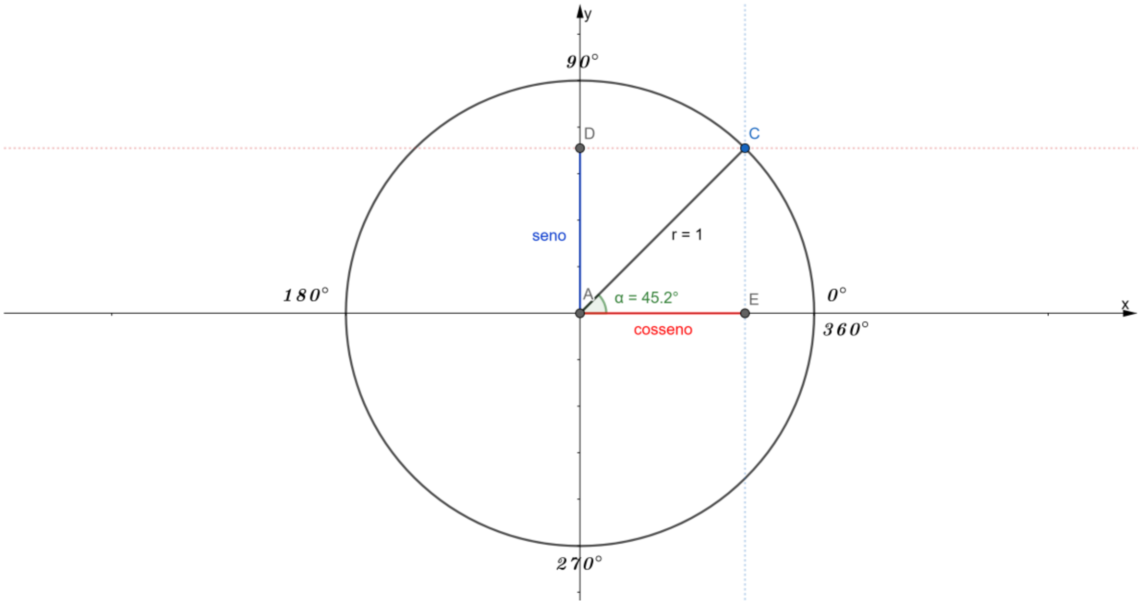
2.4 Unidades significantes das funções seno e cosseno: correspondências entre a expressão algébrica e propriedades da curva

Esta pesquisa tem como objeto de estudo as funções trigonométricas seno e cosseno em livros didáticos. A habilidade EM13MAT404 da BNCC contempla este objeto e menciona que o aluno deve ser capaz de “identificar as características fundamentais seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais” (BRASIL, 2018, p.531). Assim, nesta subseção será apresentado as unidades significantes desse objeto que servirá para a análise dos livros.

A discriminação dessas unidades significantes é de fundamental importância para a atividade de conversão e posteriormente para a coordenação dos registros de representação. Duval (2009, p.100) aponta que “a dificuldade própria à atividade de conversão reside essencialmente nessa discriminação”, isso porque a natureza das unidades e o modo de discriminar tende a mudar de um registro a outro.

Abaixo se tem a imagem de um ciclo trigonométrico, este objeto é frequentemente representado centrado na origem do plano cartesiano com circunferência de uma unidade.

Gráfico 1 - Representação gráfico-geométrico do ciclo trigonométrico



Fonte: Elaborado pela autora

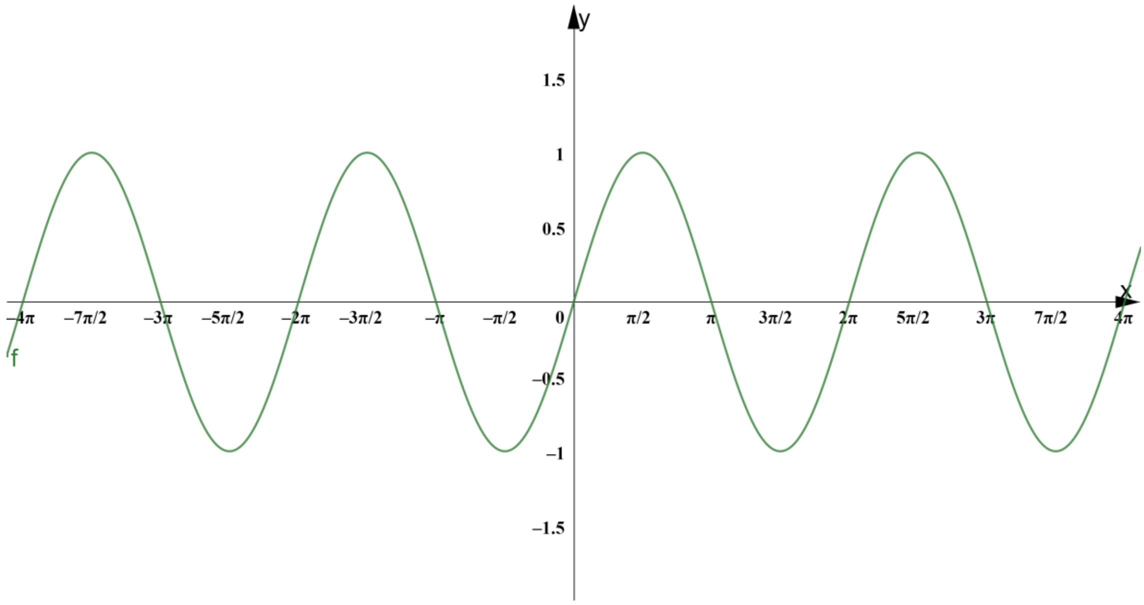
Do ciclo trigonométrico provém as funções trigonométrica seno, cosseno e tangente. Nesta pesquisa será enfatizado apenas as funções trigonométricas seno e cosseno. O esboço gráfico destas funções normalmente segue o procedimento de ligação de pontos utilizando uma tabela, onde os valores de x são retirados do próprio ciclo trigonométrico. O mesmo se aplica para o esboço do gráfico de uma curva cossenóide. A essa abordagem para a construção gráfica da função, Duval (2011a, p.98) chamou de Abordagem Ponto a Ponto, pois se limita "a alguns valores particulares e aos pontos marcados no plano referencial".

Objetivando orientar uma conversão entre os registros algébrico e gráfico, pretendemos apresentar variáveis visuais para as funções trigonométricas seno e cosseno. Na pesquisa de Silva (2008) algumas sugestões sobre as unidades significantes para essas funções trigonométricas são apontadas. Nesta dissertação foram aproveitadas essas sugestões e realizada outras.

Definiremos aqui a função seno como tendo a equação algébrica $y = \pm a \pm b.sen(mx + n)$, sendo $a, b, m, n \in \mathbb{R}$. Buscaremos verificar quais modificações nos coeficientes da equação algébrica (representação algébrica) implica mudanças no esboço do gráfico (registro gráfico). Entendemos que mudanças no coeficiente da equação algébrica que modificam o registro gráfico e vice-versa são então as unidades significantes desse registro de representação.

Já sendo conhecido o esboço da curva $y = senx$, tomaremos como uma curva base, assim temos:

Gráfico 2 - Esboço da curva $y = senx$

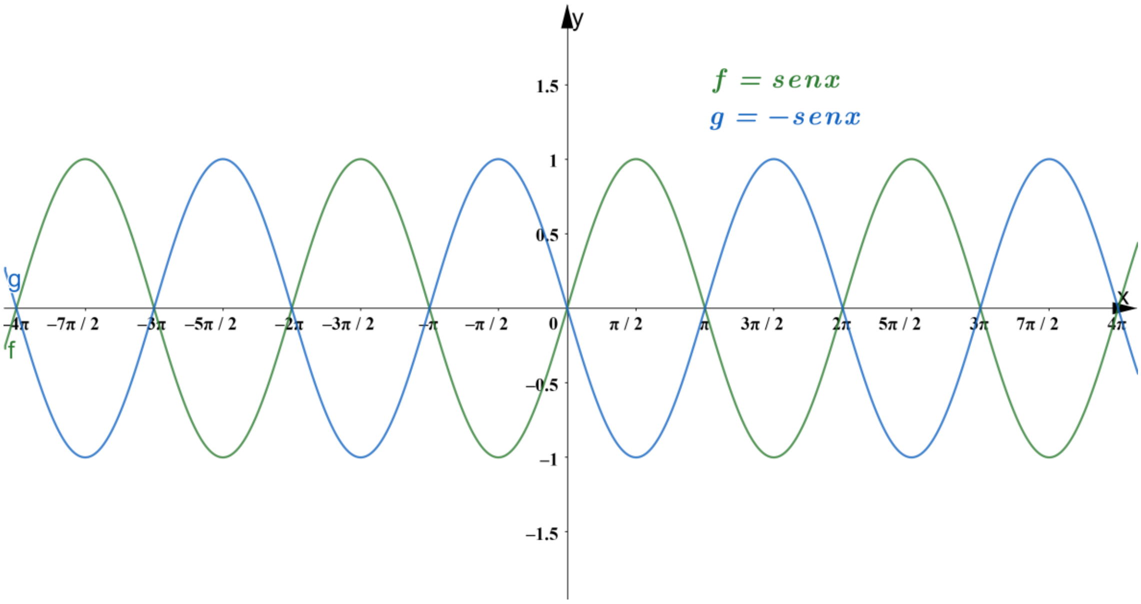


Fonte: Elaborado pela autora

Apesar dos valores dos coeficientes não aparecerem na expressão algébrica, fica implícito que se trata de uma função $y = b.senx; b \in \mathbb{R}^*, \; com\, b = 1$ e $m = 1$ assim como $a = 0$ e $n = 0$. O período é igual a 2π, a imagem vai de -1 a 1 e a curva é simétrica ao plano cartesiano.

Tomemos agora a função $y = b.senx$ com $b \in \mathbb{R}^*$ e $b \neq 1$. Para esse caso consideramos dois valores para b: 1) b sendo número negativo, para isso tomemos $b = -1$ e 2) b um número diferente de $|1|$, tomemos $b = 2$. A figura a seguir compara o gráfico da função $f = senx$ com o gráfico da função $g = -senx$. Observe:

Gráfico 3 - Esboço das curvas *f* = *senx* e *g* = -*senx*

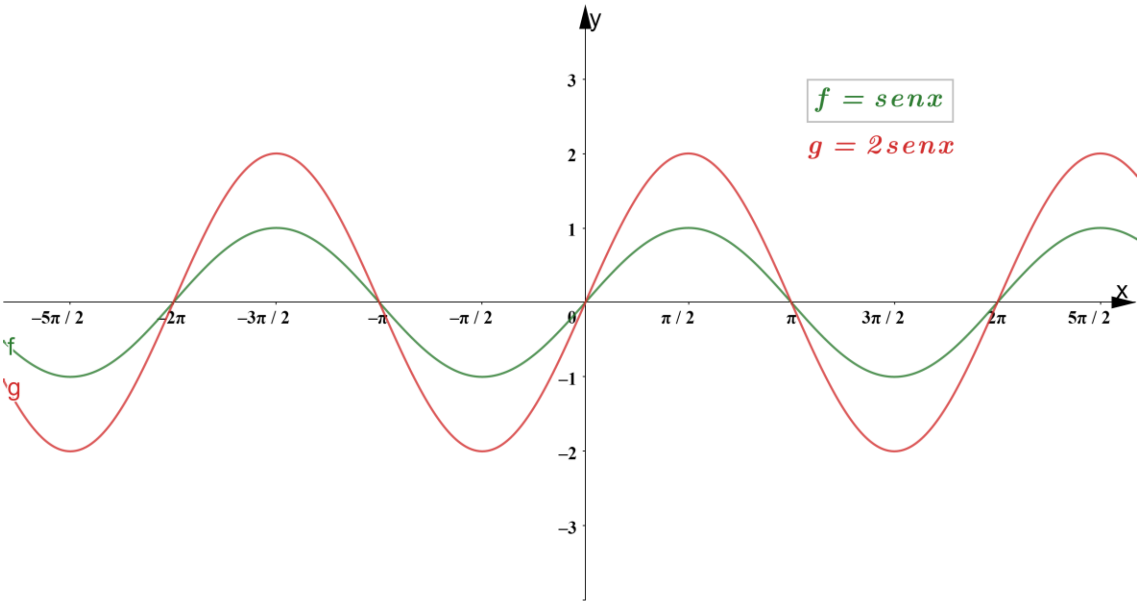


Fonte: Elaborado pela autora

Por simetria, podemos obter o esboço da curva $y = -senx$ a partir do esboço da curva de $y = senx$, além disso, uma vez mudados os valores do coeficiente b se nota que a amplitude do gráfico também se modifica, podemos perceber isso para o caso em que $b = 2$, isto é, $y = 2senx$.

Para melhor compreensão, comparemos o gráfico da função $y = senx$ com o gráfico de $g = 2senx$. Observe a figura a seguir:

Gráfico 4 - Esboço das curvas *f* =*senx* e *g* = *2senx*

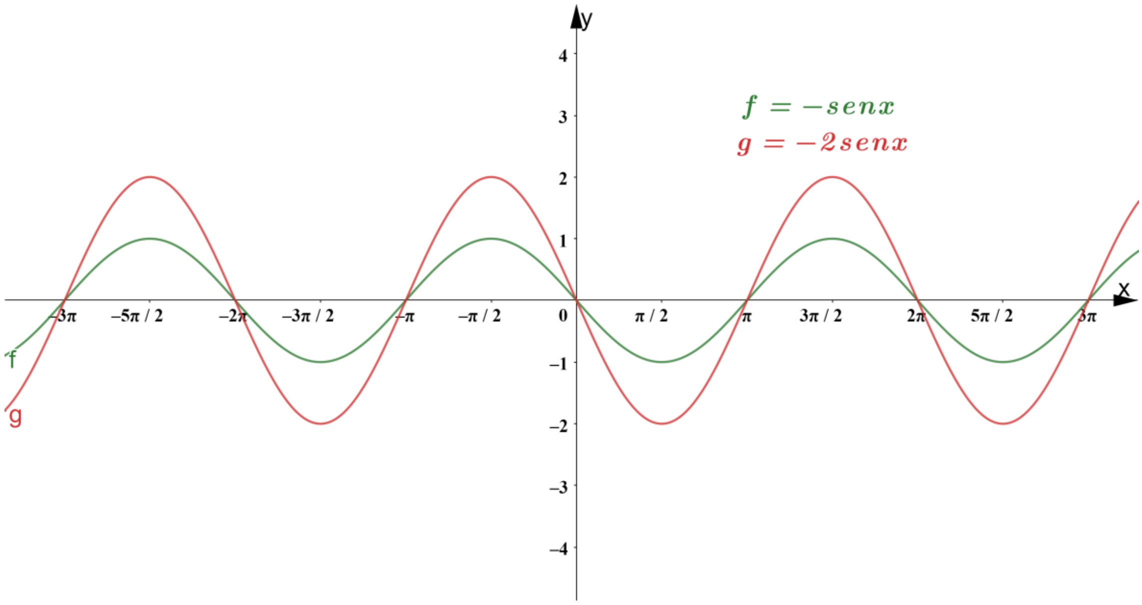


Fonte: Elaborado pela autora

Se nota que quanto maior o valor de b, maior será amplitude e vice-versa. O gráfico nos mostra ainda que o coeficiente b influencia na imagem da função, pois enquanto a função $y = senx$ tem por imagem os valores de y no intervalo de [-1,1], a função $y = 2.senx$ tem por imagem os valores de y no intervalo de [-2,2].

Portanto, o coeficiente b muda a amplitude do gráfico, isto é, altera a distância vertical entre os valores máximo e mínimo, e influencia na imagem da função. Ainda, o sinal (+ ou -) que acompanha o coeficiente b define se o gráfico inicia crescente ou decrescente, considerando a origem do plano cartesiano como início da curva. No gráfico anterior observa-se que para $y = senx$, onde $b = 1$, a curva inicia crescente; para $y_1 = 2senx$, com $b = 2$, a curva também inicia crescente. O gráfico a seguir o esboço da curva para as funções $y = -senx$ e $g = -2senx$.

Gráfico 5 - Esboço das curvas *f* = -*senx* e *g* = -2*senx*



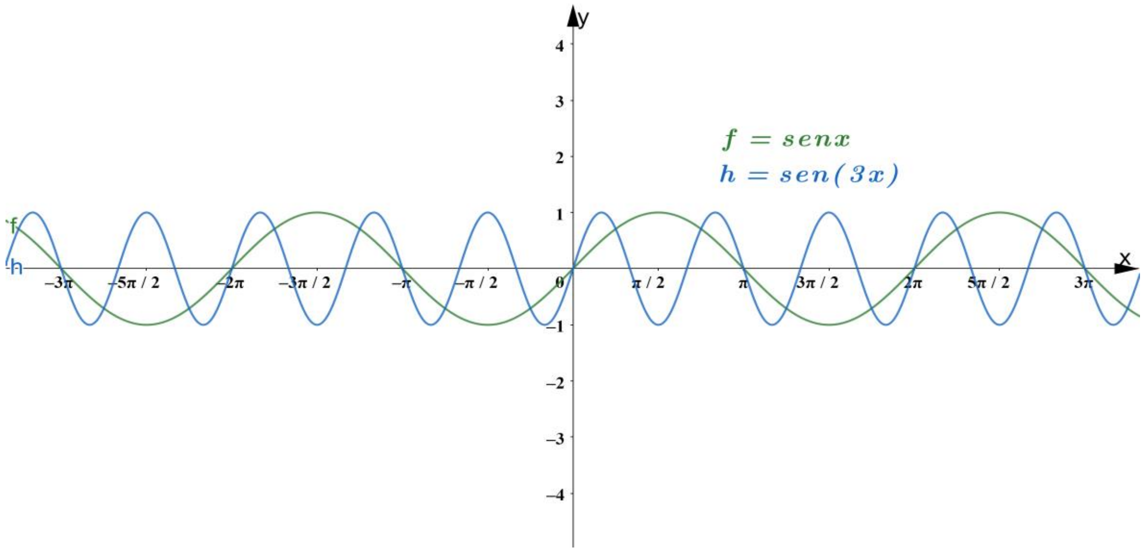
Fonte: Elaborado pela autora

Logo, se b for um número real positivo a curva começará crescente a partir da origem e se b for um número real negativo a curva começará decrescente a partir da origem.

Consideremos agora a função $y = sen(mx); m \in \mathbb{R}^*$. Antes disso, lembremos que a função $y = senx$ é uma função periódica de período igual a 2π, ou seja, a cada intervalo de 2π a curva da função se repete.

Para $m = 1$ temos a função $f = sen(1.x) \rightarrow f = senx$ cuja curva já é conhecida (Gráfico X). Consideremos $m = 3$ e vejamos o que ocorre com a curva $h = sen(3x)$.

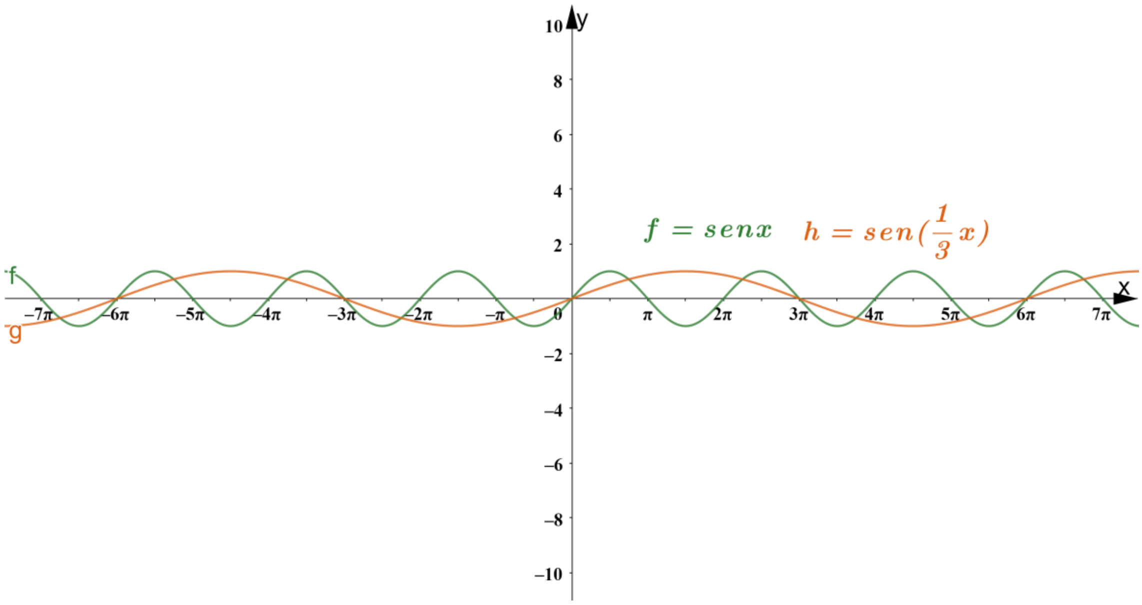
Gráfico 6 - Esboço das curvas *f* = *senx* e *h* = *sen(3x)*



Fonte: Elaborado pela autora

Comparando as curvas se nota que o período de repetição foi reduzido, pois na mesma região do plano cartesiano se consegue o triplo da curva. Se quanto maior for o valor de m o período de repetição decai, então quanto menor o valor de m o período aumenta, podemos constatar no próximo gráfico que compara as curvas de $f = senx$ e $h = sen(\frac{1}{3}x)$.

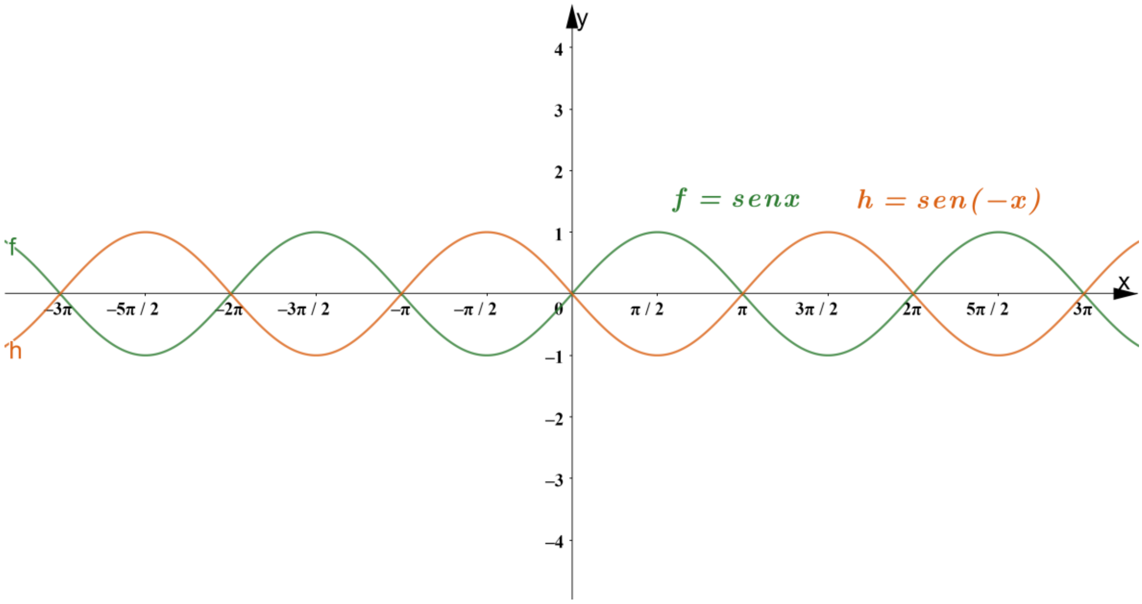
Gráfico 7 - Esboço das curvas $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{senx}$ e $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sen}(\frac{1}{3}\boldsymbol{x})$



Fonte: Elaborado pela autora

Comparando ambas as curvas se percebem que o período triplicou. Logo o coeficiente m altera o período da curva, para $m = 1$ o período da curva será 2π, para $m > 1$ o período será menor que 2π e para $m < 1$ o período será maior que 2π. A figura a seguir exibe mais um caso para quando m for um número negativo. Observe:

Gráfico 8 - Esboço das curvas $\boldsymbol{f(x) = senx}$ e $\boldsymbol{h(x) = sen(-x)}$

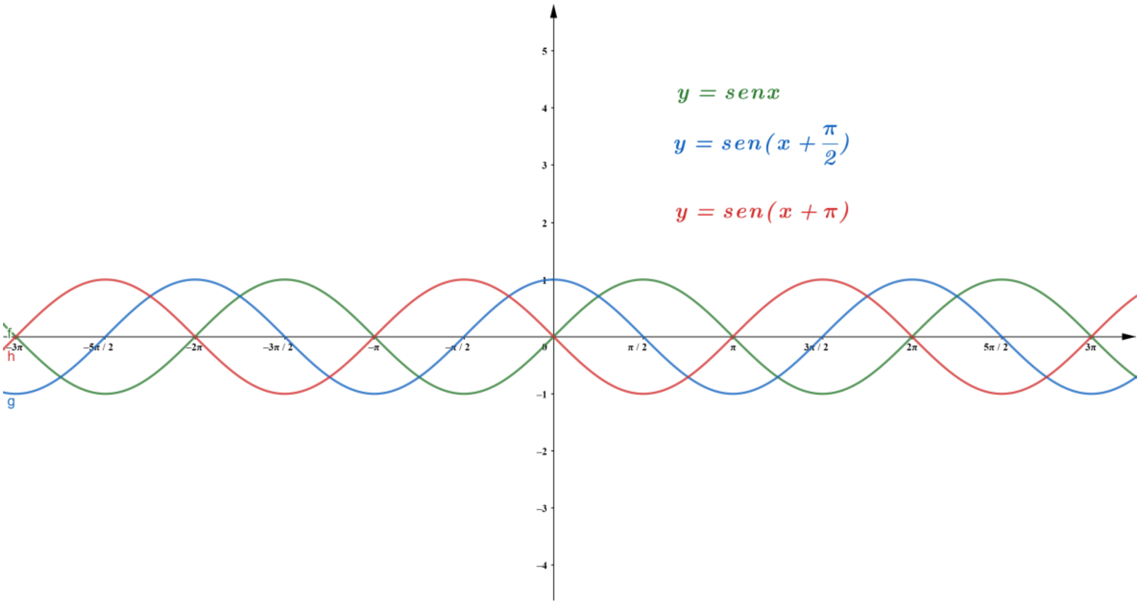


Fonte: Elaborado pela autora

Em comparação a curva $f = senx$ à curva $h = sen(-x)$, onde $m = -1$, se nota que o período continua o mesmo havendo apenas uma mudança simétrica na curva em relação ao eixo das abscissas.

Analisemos agora a função $y = senx \pm n; n \in \mathbb{R}^*$. Já sendo conhecido o esboço gráfico de $y = senx$, tomemos então como base, atribuindo valores a n e esboçando o gráfico para comparação. Considerando as funções $y_1 = senx + \frac{\pi}{2}$ e $y_2 = senx + \pi$, vamos comparando os gráficos:

Gráfico 9 - Esboço das curvas $\boldsymbol{y = senx}$, $\boldsymbol{y_1 = senx + \frac{\pi}{2}}$ e $\boldsymbol{y_2 = senx + \pi}$



Fonte: Elaborado pela autora

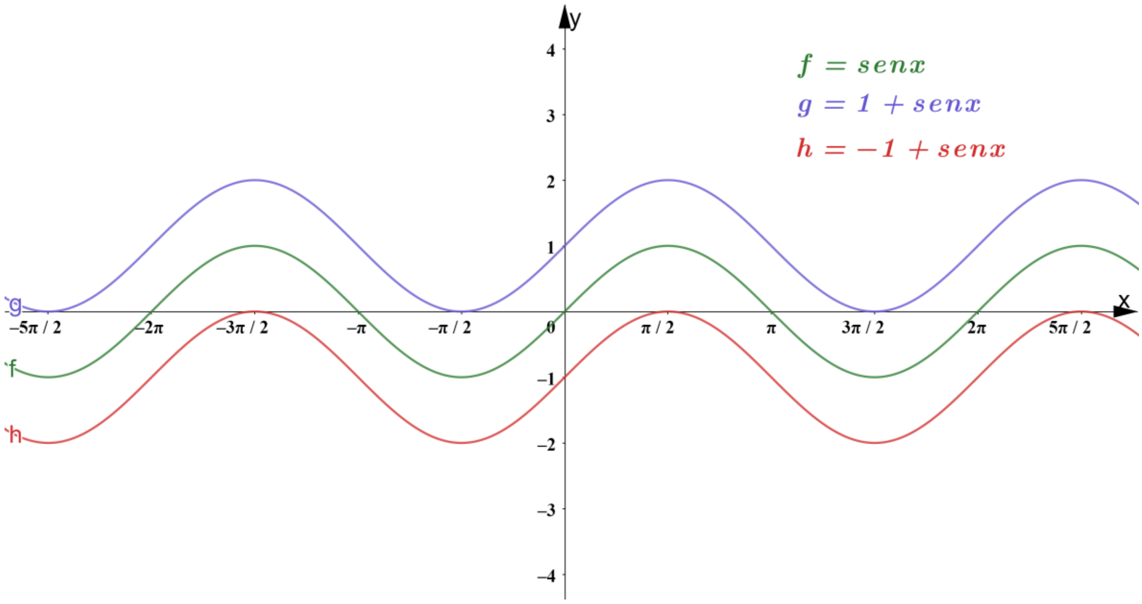
Se nota que a imagem e o período da função não se alteram. O coeficiente n movimenta o gráfico no sentido horizontal sem que este sofra distorção. Além disso, percebe-se uma relação entre o sinal do coeficiente e a direção do deslocamento da curva. O sinal "+" indica um deslocamento para a esquerda de medida igual o coeficiente e o sinal "$-$" indica um deslocamento para a direita de medida igual ao coeficiente.

Assim, a curva da função $y_1 = senx + \frac{\pi}{2}$ se comparado a função base está se deslocando $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda. Da mesma forma, a curva da função $y_2 = senx + \pi$ está se deslocando π para a direita em comparação a curva base.

Por fim, consideramos a função do tipo $y = \pm a + senx; a \in \mathbb{R}$. Para melhor visualizarmos, vamos exemplificar tomando $a = 1$, esboçando a curva para o sinal positivo e negativo e comparemos com a curva da função base.

Dessa forma, teremos $f = senx$ como a função base e as funções $g = 1 + senx$ e $h = -1 + senx$. A figura a seguir compara as curvas dessas funções:

Gráfico 10 - Esboço das curvas $\boldsymbol{f(x) = senx}, \boldsymbol{g(x) = 1 + senx}$ e $\boldsymbol{h(x) = -1 + senx}$



Fonte: Elaborado pela autora

Observando o gráfico acima se percebe que o coeficiente a movimenta a curva para cima ou para baixo, ou seja, desloca-a verticalmente. Se $a > 0$ a curva se deslocará para cima do eixo x, no exemplo houve um deslocamento de 1 unidade para cima. Se $a < 0$ a curva se deslocará para baixo do eixo x, no gráfico a curva se deslocou 1 unidade abaixo do eixo.

Ademais, a curva se deslocando verticalmente implica uma mudança também na imagem na função. Algebricamente, temos que a imagem da curva deslocada será $[-1 \pm a, 1 \pm a]$. Para $y_1 = 1 + senx$, o intervalo imagem dessa curva será $[-1 + 1, 1 + 1]$, isto é, $[0,2]$. Por outro lado, para $y_2 = -1 + senx$, o intervalo imagem será $[-1 - 1, 1 - 1]$, ou seja, $[-2, 0]$.

Ainda, o coeficiente a indica onde a curva da função cortará no eixo y. Analisando o gráfico anterior, para $y = 1 + senx$, a curva cortará o eixo das ordenadas em $y = 1$ e para $y = -1 + senx$, a curva cortará em $y = -1$.

Em síntese, a função $y = \pm a \pm b.sen(mx + n)$ foi dividida em cinco casos[1] a fim de aplicar modificações em cada coeficiente e verificar se implicaria mudanças no registro gráfico, se sim, que mudanças seriam essas.

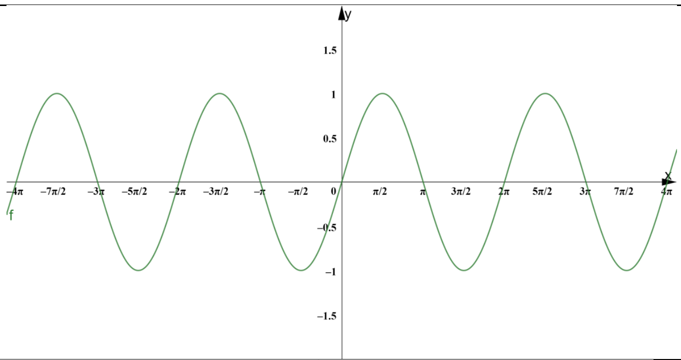
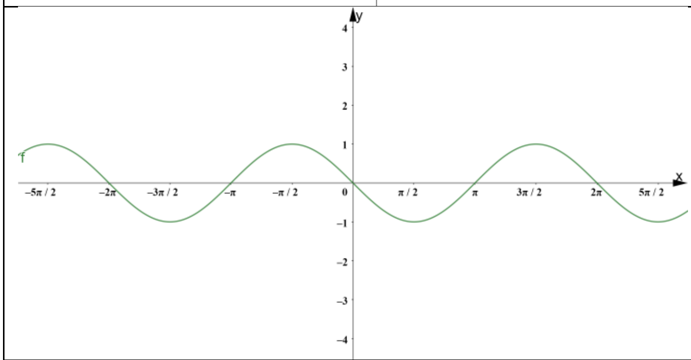
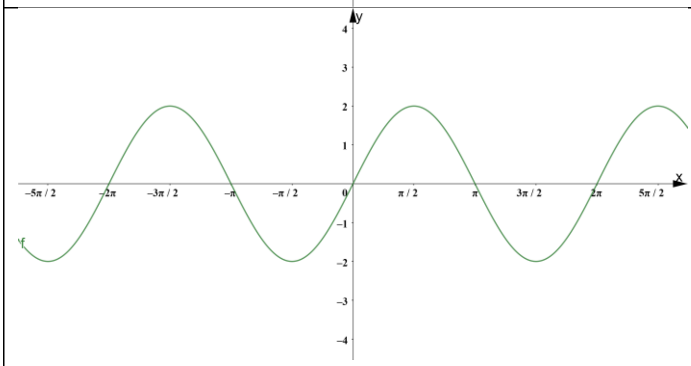
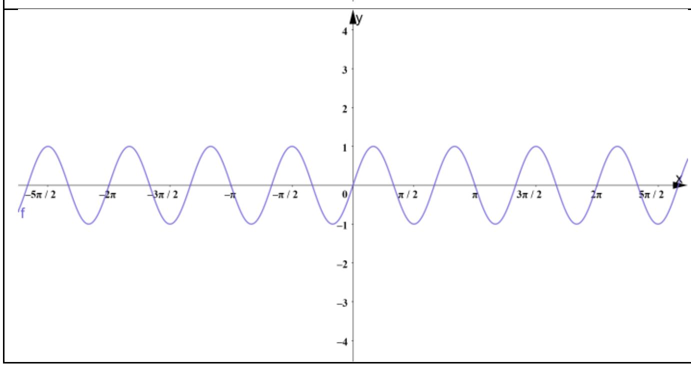
Apesar de ter-se utilizado a função trigonométrica seno, os mesmos procedimentos aplicados a ela valem para a função cosseno. “Destacamos apenas o fato da função cosseno ser par e por isso ter uma curva simétrica em relação ao eixo Y e não em relação à origem como ocorre com a função seno, por ser uma função ímpar” (SILVA, 2008, p.97).

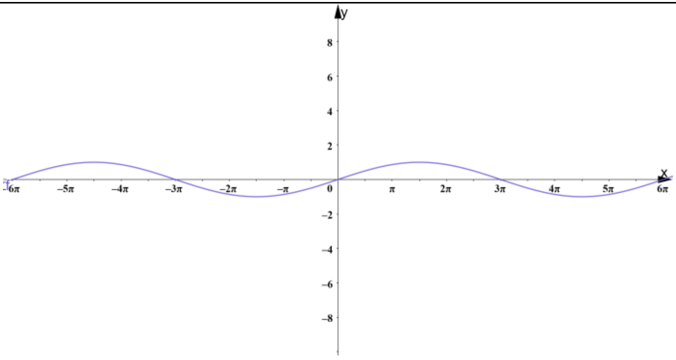
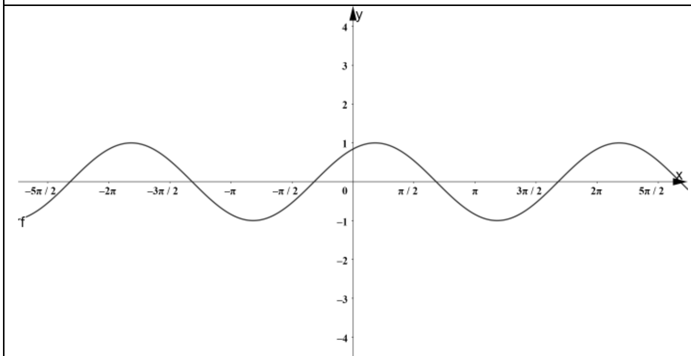
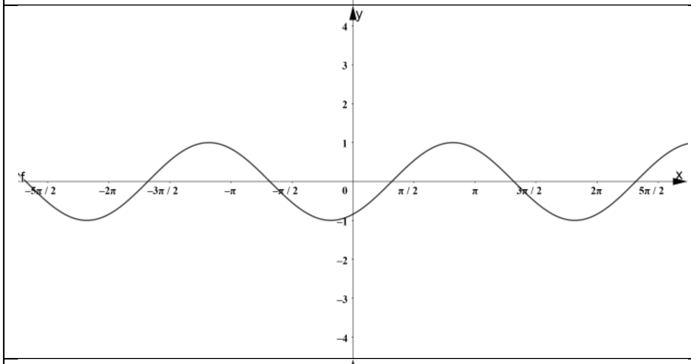
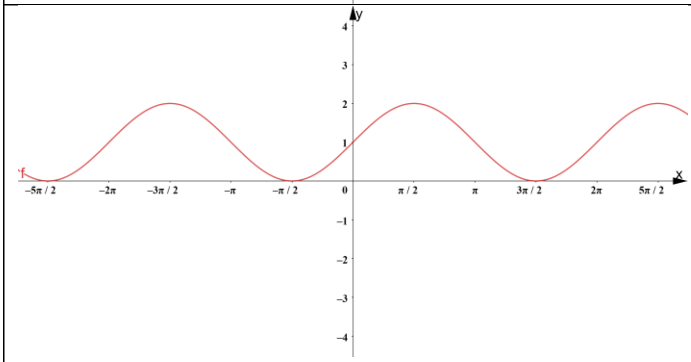
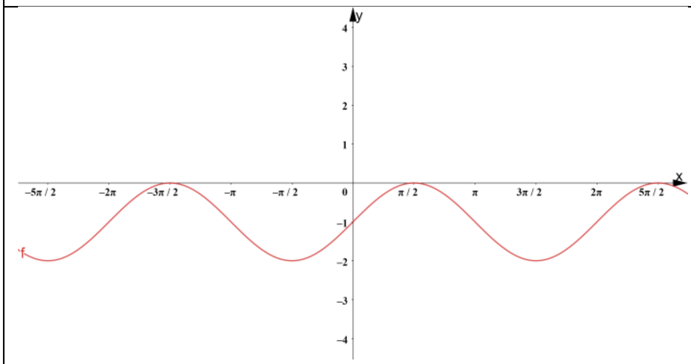
---

[1] **1º caso**: $y = senx; b \in \mathbb{R}, b = 1$; **2º caso**: $y = b.senx; b \in \mathbb{R}, b \neq 1$; **3º caso**: $y = sen(mx); m \in \mathbb{R}^*$; **4º caso**: $y = sen(x \pm n); n \in \mathbb{R}^*$; **5º caso**: $y = \pm a \pm senx; a \in \mathbb{R}^*$

Considerando o estudo realizado a respeito das variáveis visuais, dos registros simbólicos e suas unidades simbólicas correspondentes, o quadro seguinte traz de forma mais separada e incluindo todas as possibilidades de articulação entre os registros gráficos, língua natural e simbólicos.

Quadro 5 - Correspondentes registros para os casos de curvas senoides

R. Gráfico	R. em Língua Natural	R. Simbólico
	Curva senoide base	$y = senx, b \in \mathbb{R}^*, b = 1$
	Curva simétrica ao esboço da curva base em relação ao eixo x devido $b = -1$	$y = -senx, b \in \mathbb{R}^*, b = -1$
	A curva tem por imagem os valores de y pertencente ao intervalo $[-2,2]$	$y = 2.senx, b \in \mathbb{R}^*, b \neq 1$
	O período de repetição da curva foi reduzido à metade se comparado à curva base	$y = sen(3x), m \in \mathbb{R}^*$

	O período de repetição da curva dobra se comparado à curva base	$y = sen\left(\frac{1}{3}x\right)$, $m \in \mathbb{R}^*$
	Curva sofre uma translação horizontal para a esquerda	$y = sen(x+1)$; $n \in \mathbb{R}^*, n > 0$
	Curva sofre uma translação horizontal para a direita	$y = sen(x-1)$; $n \in \mathbb{R}^*, n < 0$
	Curva sofre uma translação vertical acima do eixo x	$y = 1 + senx$; $a \in \mathbb{R}^*, a > 0$
	Curva sofre uma translação vertical abaixo do eixo x	$y = -1 + senx$; $a \in \mathbb{R}^*, a < 0$

Fonte: Elaborado pela autora

Para Duval (2011a, p.100), “a descriminação das propriedades figurais de uma representação gráfica é, em contrapartida, menos evidente”, entretanto, através de uma abordagem experimental, onde uma unidade significante da expressão algébrica variava enquanto as demais se mantinham constantes, foi possível identificar as variáveis visuais.

O quadro seguinte foi adaptado de Duval (2011a) em que o pesquisador utilizou para apresentar as variáveis visuais particulares para o caso em que o gráfico é uma reta, ou seja, $y = ax \pm b$. Segundo o francês, essa mesma linha de raciocínio pode ser aplicada para o caso da parábola. Por ser um quadro de fácil leitura e compreensão visto que deixa claro quais são variáveis do objeto estudado, optou-se por estender seu uso para as funções trigonométricas seno e cosseno.

Cada variável visual assume determinados valores, onde esse valor remete ao comportamento da curva no plano cartesiano. A cada uma dessas variáveis visuais corresponde uma unidade significante na expressão algébrica: $y = \pm a \pm b.sen(mx + n)$ ou $y = \pm a \pm b.cos(mx + n)$. Observe o quadro seguinte:

Quadro 6 - Valores e variáveis visuais para esboço gráfico de funções seno e cossenos no plano cartesiano

Variável Visual	Valores das variáveis visuais	Unidades significantes simbólicas correspondentes	
Amplitude	A curva fica menos volumosa e os pontos mínimos e máximos dela estão próximo ao eixo das abscissas A curva fica mais volumosa e os pontos mínimo e máximo dela estão distantes do eixo das abscissas	$b < 1$; $b = 1$ $b > 1$	Há coefic. escrito O coefic. não aparece Há coefic. escrito
Intervalo de Imagem	A curva fica menos volumosa e os pontos mínimos e máximos dela estão próximo ao eixo das abscissas A curva fica mais volumosa e os pontos mínimo e máximo dela estão distantes do eixo das abscissas	$[b, -b]$; $\forall\ b < 1$ $[-1,1]; \forall\ b = 1$ $[-b, b]\ \forall\ b > 1$	Há coefic. escrito O coefic. não aparece Há coefic. escrito
Periodicidade	Período igual 2π Para o período menor que 2π maior será a repetição da curva no então período	$m = 1$ $m > 1$	O coeficiente não aparece há coefic. escrito

	Para o período maior que 2π a repetição da curva será menor no então período	$m < 1$	há coefic. escrito
Translações no eixo x	A curva se desloca para a esquerda A curva se desloca para a direita	$n > 0$ $n < 0$	sinal + sinal -
Translações no eixo y	A curva se desloca para cima A curva se desloca para baixo	$a > 0$ $a < 0$	ausência de sinal presença do sinal $-$
Simetria	A curva é simétrica em relação à origem do plano cartesiano Curva é simétrica em relação ao eixo x àquela que apresenta $b > 0$ Curva é simétrica em relação ao eixo x àquela que apresenta $m > 0$	$a = 0;$ $n = 0$ $b \neq 1;$ $b < 0$ $m \neq 1;$ $m < 0$	Não há coefic. escrito Presença do sinal – Há coefic. escrito Presença do sinal – Há coefic. escrito
Posição do traçado em relação à origem do plano cartesiano	A curva base começa crescente Curvas em geral começam crescente A curva começa decrescente	$b > 0$ $b > 0$ $b < 0$	Ausência do sinal Presença do sinal + Presença do sinal $-$

Fonte: Elaborado pela autora

A leitura deste quadro levanta as seguintes observações:

- Há congruência semântica entre o coeficiente b da expressão algébrica e a amplitude da curva, propriedade figural associada a ele (SILVA, 2008)
- Não há relação direta entre o sinal do coeficiente e o sentido de deslocamento da curva $y = senx$ para a obtenção da curva $y = sen(x \pm n)$, dessa forma, a transformação da representação algébrica para a representação gráfica requer maiores cuidados no sentido de se diminuir os problemas de congruência semântica.
- A discriminação das variáveis visuais e a sua vinculação com as unidades simbólicas correspondentes facilita a passagem da representação gráfica para a expressão algébrica, pois o foco não está mais em valores particulares e sim em um conjunto de propriedades.

A esse tipo de abordagem, Duval (2011a) chamou-a de Interpretação Global de Propriedades Figurais, onde esta é a abordagem eficaz quando se deseja, por exemplo, partir de uma representação gráfica para a representação algébrica. Para ele o uso correto de representações gráficas cartesianas não é possível sem uma distinção clara entre variáveis visuais relevantes e sem estabelecer sistematicamente correspondências entre os valores dessas variáveis e unidades importantes de expressões algébricas. Ignorando a especificidade e a importância dos métodos de interpretação global, os professores não conseguem atingir seu objetivo de usar gráficos cartesianos corretamente para a maioria dos alunos do primeiro ano do ensino médio.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo é apresentada a trilha metodológica adotada para análise dos livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD de 2021, bem como os critérios para a seleção desses livros.

A pesquisa se classifica como descritiva do tipo exploratória com abordagem qualitativa, visto que não requer o emprego de métodos e técnicas estatísticas (PRODANOV; FREITAS, 2013). Quanto aos procedimentos técnicos, adotou-se o procedimento de uma pesquisa bibliográfica, pois é elaborada a partir de material já publicado como, por exemplo, livros, revistas, materiais impressos, teses, dissertações entre outros. Em outras palavras, materiais elaborados pelos autores com propósito específico para ser lido por um público específico (GIL, 2019). Gil acrescenta que pesquisas que buscam analisar posições diferentes quanto a um mesmo conteúdo também se enquadra como pesquisa bibliográfica.

Adotou-se análise de conteúdo de Bardin (2011) como método de análise, que se divide em três polos cronológicos: pré-análise; exploração do material; tratamento dos resultados, inferência e interpretação. Os passos metodológicos estão descritos na sequência.

3.1 Análise de conteúdo de Bardin

A análise de conteúdo é definida como um método empírico, que reúne um conjunto de técnicas de análise das comunicações. De um modo geral, o funcionamento e objetivo desse método pode ser designado como

> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos) sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens) indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 2011, p.48).

O objetivo da análise de conteúdo é inferir conhecimento relacionado às condições de produção (ou, em última análise, de recepção), inferência[2] usando indicadores (quantitativos ou não quantitativos) (BARDIN, 2011).

A análise se organiza em torno de três polos cronológicos: pré-análise; exploração do material; e tratamento dos resultados, inferência e interpretação.

Na fase inicial, **pré-análise**, é a fase da organização propriamente dita. Geralmente, se divide em três missões: 1) escolha dos documentos, isto é, constituição do *corpus* de

[2] Bardin (2011, p.45) conceitua inferência como sendo uma "operação lógica, pela qual se admite uma proposição em virtude da 'sua ligação com outras proposições já aceites como verdadeiras."

documentos a serem analisados na etapa seguinte; 2) formulação das hipóteses e objetivos; 3) elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final.

A constituição do *corpus* implica em seleções de regras, segundo Bardin (2011) as principais regras são: a) regra da exaustividade, o nde é preciso ter em conta todos os elementos desse *corpus;* b) regra da representatividade, garante que a análise pode ser realizada em uma amostra desde que essa amostra tenha uma parte representativa do universo inicial; c) regra da homogeneidade diz que documentos repetidos devem seguir um critério preciso de escolha; d) regra de pertinência fala que, como fonte de informação, documentos duplicados devem ser suficientes para atender aos objetivos da análise proposta.

Os indicadores podem ser construídos em função das hipóteses ou as hipóteses podem ser construídas na presença de certos índices. Lobo (2017), por exemplo, elaborou os indicadores da sua pesquisa de acordo com seus referenciais teórico-metodológico.

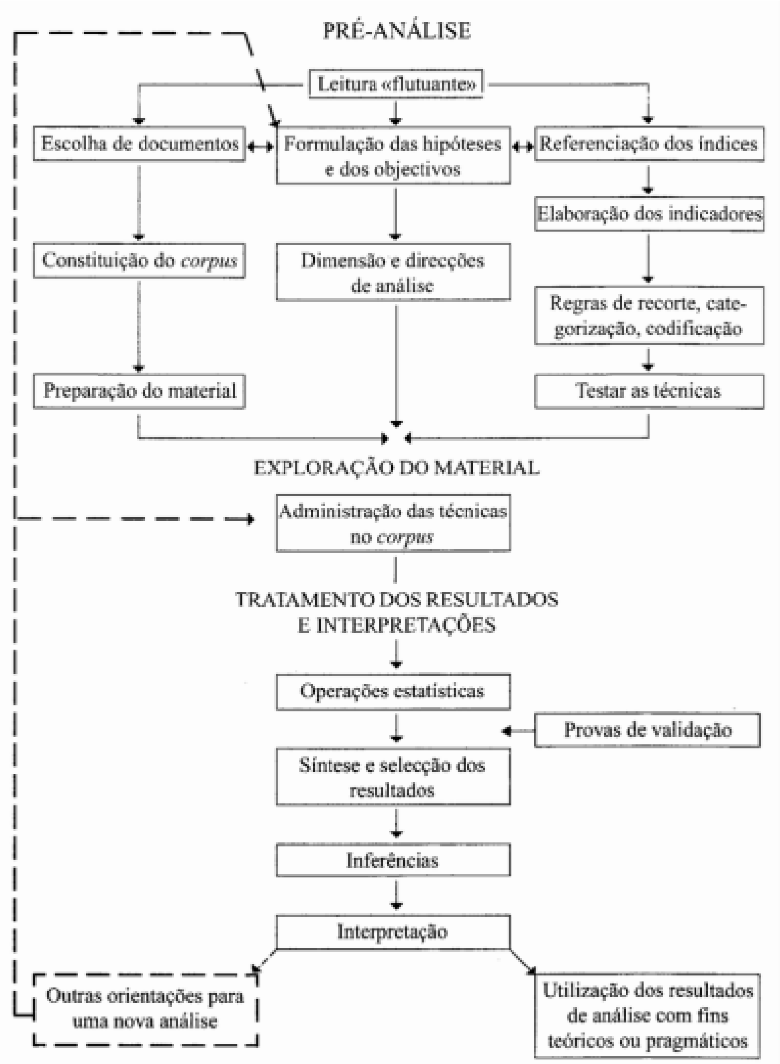
A segunda fase, **exploração do material**, é descrita por Bardin (2011) como uma fase longa e fastidiosa, pois consiste nas operações de codificação, desconto ou enumeração, em função de regras estabelecidas previamente. De modo geral, nessa fase o texto deve ser lido novamente de modo a realizar recorte das partes consideradas mais importantes pelo pesquisador e posteriormente elaborar as categorias. Kluppel (2012) elencou as categorias a partir dos pontos principais da TRRS no tocante à Geometria, seu objeto de pesquisa estudado.

No processo de escolha de categorias se pode adotar os critérios semântico (temas), sintático (verbos, adjetivos e pronomes), léxico (sentido e significado das palavras – antônimo ou sinônimo) e expressivo (variações na linguagem e na escrita).

Na última fase, **tratamento dos resultados, inferência e interpretação**, é realizada a análise conjunta dos dados e apresentadas as conclusões sobre as informações acerca dos dados, isto é, “os resultados brutos são tratados de maneira a serem significativos [...] e válidos” (BARDIN, 2011, p.131).

Os três polos cronológicos estão descritos detalhadamente na Figura **4** a seguir.

Figura 4 - Desenvolvimento de uma análise de conteúdo



Fonte: Bardin (2011)

3.2 Critério de escolha dos livros didáticos

A escolha dos livros didáticos corresponde a fase inicial da análise de conteúdo de Bardin (2011). Os livros escolhidos para análise foram aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2021, portanto as regras de exaustividade, representatividade, homogeneidade e pertinência já estão atendidas.

Os livros aprovados pelo PNLD 2021 começaram a ser utilizados em sala de aula no início do ano letivo de 2022, por isso, o critério de escolha de livros mais usados se tornou inviável. Dessa forma, buscou-se no PNLD 2018, que também visava o Ensino Médio, os autores cujos livros mais tiveram investimento e, assim, buscar os livros desses autores no PNLD 2021.

O PNLD 2018 aprovou oito coleções, e segundo os dados estatísticos disponilizados pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – FNDE, as três coleções com mais investimentos foram: Matemática – Ciência e Aplicações; Matemática – Contexto & Aplicações; #Contato Matemática. A Tabela 2 a seguir apresenta as coleções seguida de seus autores e investimentos, respectivamente.

Tabela 2 - Três coleções com maiores investimentos aprovadas pelo PNLD - 2018

Coleção	Matemática - Ciência e Aplicações	Matemática – Contexto & Aplicações	#Contato Matemática
Autor (es)	David Degenszajn; Gelson Iezzi; Nilze de Almeida; Osvaldo Dolce; Roberto Périgo	Luiz Roberto Dante	Joamir Souza, Jacqueline Garcia
Investimento	R$ 16.960.110,55	R$ 14.225.634,41	12.727.908,18

Fonte: Elaborado pela autora com base no FNDE

Nenhuma coleção do PNLD 2021 tem por autor(es) David Degenszajn, Gelson Iezzi, Nilze de Almeida Osvaldo Dolce e Roberto Périgo. Diante disso, optamos por escolher a quarta coleção com maior investimento no PNLD – 2018 que é a coleção Conexões com a Matemática, cujo autor é Fabio Martin de Leonardo. Onde no PNLD 2021 teve a coleção Conexões aprovada.

Luiz Roberto Dante, junto com Fernando Viana, é autor da coleção Matemática em Contextos e Joamir Souza é autor da coleção Multiversos, ambas coleções aprovadas pelo PNLD 2021.

Dessa forma, reunimos duas coleções de livros didáticos de Matemática aprovados pelo PNLD 2021. A Tabela 3 a seguir mostra os dados das coleções aprovadas e o volume que será analisado. Observe:

Tabela 3 - Livros didáticos de Matemática do Ensino Médio adotados para análise

Código Coleção	Título Coleção	Código Volume	Título Volume	Editora
0193P21202	Conexões	0193P21202136	Trigonometria	Moderna
0159P21202	Matemática em Contextos	0159P21202136	Trigonometria e Sistemas Lineares	Ática

Fonte: Elaborado pela autora

Assim, define-se que o objeto de investigação é o conteúdo das funções trigonométricas seno e cosseno, presente nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovados pelo PNLD – 2021. Depois de definido os LD para análise, passamos a definir os conteúdos destes a serem analisados.

3.3 Critérios para análise dos livros

Para analisar os dados coletados fundamentamos na TRRS. Segundo Bardin (2011), os indicadores definidos na pré-análise auxiliam na interpretação final dos dados tornando os resultados significativos. Assim, os indicadores, definidos a priori, são fundamentados nos principais pontos da TRRS. Os indicadores são:

a. Diversidade de registros
b. Distinção entre representante e representado
c. Tratamento
d. Conversão

Na fase de exploração do material, após mais uma leitura, foram realizados recortes das partes consideradas mais importantes a serem submetidas a análise fundamentada na TRRS. Definições, demonstrações, exercícios resolvidos e propostos foram relidos até ser possível verificar aproximações e distanciamentos com a teoria.

As categorias para análise do conteúdo dos livros foram definidas a priori e extraídas do referencial teórico, da BNCC e estrutura/formato do LD. O Quadro 7 apresenta as categorias seguidas de uma breve descrição.

Quadro 7 - Categorias da análise

Categorias	**Descrição**
Definição	Se a definição é apresentada pelos autores de modo dinâmico em contraste com a concepção estática, além disso, se deixam explícitos as noções de dependência entre as variáveis envolvidas, bem como nossas de regularidade e generalidade
Uso de tecnologias digitais	A BNCC aponta que os alunos devem desenvolver habilidades com ou sem apoio de tecnologias digitais
Procedimento de construção de gráfico	Para o procedimento de construção do gráfico o livro adota a abordagem ponto a ponto, de extensão do traçado ou de interpretação global das propriedades figurais?
Resolução de exercícios	Verificar como os autores apresentam os enunciados e resoluções dos exemplos e exercícios, pois estes guiarão os alunos quanto às demais atividades

Flexibilidade e fluidez entre diferentes registros de representação (congruência semântica)	Está é uma competência a ser desenvolvida pelos estudantes que, em nossa visão, se aproxima do fenômeno de congruência semântica da TRRS. Entretanto, a forma como é apresentada na BNCC não condiz exatamente com um trabalho adequado nos moldes da teoria. Portanto, será observada tanto do ponto de vista da BNCC como no da TRRS.

Fonte: Elaborado pela autora

As categorias de Definição e Resolução de exercícios derivam da própria estrutura dos livros didáticos. O procedimento de construção do gráfico decorre do aporte teórico, visto que Raymond Duval classifica três formas que o gráfico de uma função pode ser construído. A Flexibilidade e fluidez entre diferentes registros de representação é uma categoria proveniente tanto da BNCC como do aporte teórico. Por fim, o uso de tecnologias digitais advém também da BNCC.

A análise dos conteúdos dos LD foi realizada aplicando a cada uma das categorias do Quadro 8 os indicadores a, b, c, d descritos no início dessa subseção.

O capítulo seguinte apresenta uma breve descrição do livro de cada coleção adotada juntamente com a análise.

4 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

O PNLD 2021 aprovou dez coleções de livros didáticos para alunos do Ensino Médio, onde destas selecionamos dois livros, cada um de uma coleção, para serem submetidos à análise sob a ótica da TRRS. As duas coleções selecionadas foram: Conexões e Matemática em Contextos. A seguir é mostrado uma breve descrição de cada coleção e volume utilizado na análise.

A coleção Conexões é uma obra organizada pela editora Moderna cujo editor responsável é Fabio Martins de Leonardo. A obra é composta pelo Livro do Estudante (LE), Manual do Professor (MP), cada um contendo seis volumes, e Material Digital do Professor (MDP) com seis videotutoriais. O LE está organizado em seis volumes. O volume 1 aborda grandezas e medidas, conjuntos, funções, algoritmos e introdução à programação. O segundo trabalha com a função afim, função quadrática, função exponencial, função logarítmica, sequências e matemática financeira. O terceiro volume aborda o tratamento da informação, análise combinatória e probabilidade. O quarto volume propõe o estudo de semelhança de triângulos, trigonometria e funções trigonométricas. O quinto aborda geometria plana e espacial e, por fim, o sexto volume apresenta temáticas como matrizes, determinantes, sistemas lineares, geometria analítica e transformações geométricas.

O quarto volume - estudo de semelhança de triângulos, trigonometria e funções trigonométricas – foi o escolhido para a análise.

O LE ainda traz tópicos referentes aos conteúdos exercícios de aplicação, aprofundamento e desafios; boxes com atividades relacionadas ao pensamento computacional e as seções “Compreensão de texto”, “Pesquisa e ação” e “Educação Financeira”.

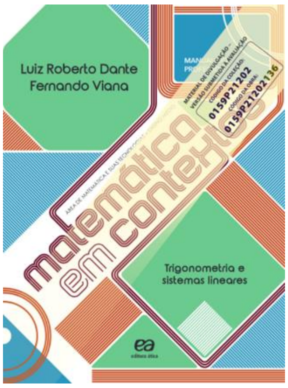
A coleção Matemática em Contextos é uma obra organizada pela editora Ática, cujos autores são Luiz Roberto Dante e Fernando Viana. A obra é composta pelo Livro do Estudante (LE), Manual do Professor (MP), cada um contendo seis volumes, e Material Digital do Professor (MDP), com seis videotutoriais. O LE está organizado em seis volumes, que são: função exponencial, função logarítmica e sequências; função afim e função quadrática; geometria plana e geometria espacial; trigonometria e sistemas lineares; análise combinatória, probabilidade e computação; estatística e matemática financeira.

O volume referente ao estudo trigonometria e sistemas lineares foi o selecionado para a análise.

Os capítulos dos livros estão estruturados em seções de “Explore para descobrir”, “Atividades resolvidas”, “Tecnologias Digitais”, “Conexões, Leitura e Compreensão”, “Além da sala de aula”, “Vestibulares e ENEM”.

Desta forma, reunimos dois livros didáticos de Matemática aprovados pelo PNLD 2021. O Quadro 9 a seguir apresenta quais capítulos dos livros serão analisados:

Quadro 8- Livros didáticos do Ensino Médio adotados para análise dos dados

<table>
<tr><th>Livro Didático</th><th>Capítulo</th></tr>
<tr><td>
</td><td>CAPÍTULO 4 – Funções trigonométricas
1.Funções periódicas
2.Ciclo trigonométrico
2.1.A função de Euler
3.A função seno
4.A função cosseno
7.Construção de gráficos
Exercícios complementares</td></tr>
<tr><td>
</td><td>CAPITULO 1 – Trigonometria
Funções trigonométricas
A função seno
A função cosseno
As senoides e os fenômenos periódicos
Tecnologias digitais</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora

O Quadro 9 traz detalhadamente o capítulo e seus respectivos tópicos adotados para análise. Ressalta-se que nem todos os tópicos dos capítulos foram escolhidos para análise, o quadro apresenta somente aqueles que fazem referência com o objeto matemático dessa pesquisa – funções trigonométricas seno e cosseno.

A análise dos livros foi dividida em dois tópicos, cada um para um livro. Os LD são diferenciados pelo título da coleção, assim, Livro 1 refere-se ao livro da coleção Conexões e o Livro 2, ao livro da coleção Matemática em Contextos.

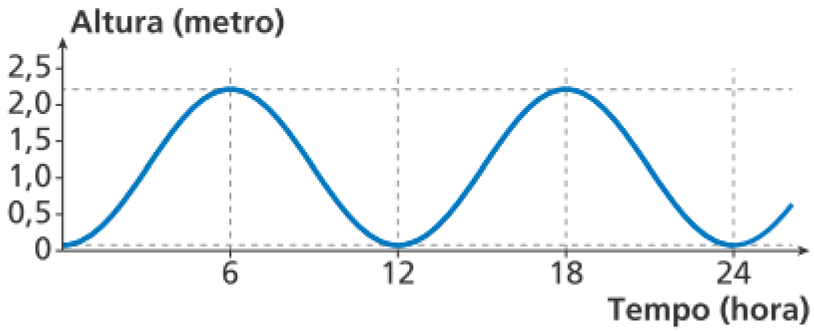
4.1 Livro 1 – Coleção Conexões - Trigonometria

Este tópico apresenta a análise e discussão dos elementos expostos no LD em sua completude, articulando-o com os pressupostos teóricos da TRRS, tanto quando o livro expõe suas definições e explicações ao conteúdo de funções trigonométricas seno e cosseno, como nas atividades propostas por este, sendo elas resolvidas no capítulo ou colocada para a resolução.

O autor começa o capítulo apresentado as funções periódicas que muitas vezes se fazem presente em fenômenos naturais, físicos e sociais; para isso traz o exemplo do movimento de subida e descida da maré que ocorre devido à força gravitacional exercida pela lua e pelo sol na terra. O contexto utilizado se enquadra na **categoria de Definição**, já que o fenômeno da maré é utilizado pelo autor para auxiliar na compreensão de uma função periódica. O exemplo se refere a uma cidade litorânea do Brasil da região nordeste, em que em uma época do ano, a maré baixa ocorre nos horários de 12h e 24h e a maré alta ocorre às 6h e 18h. Esse autor afirma que a altura h (em metro) atingida pela maré pode ser calculada pela função trigonométrica $h(t) = 1{,}15 - 1{,}05 \,.\cos(t\,.\,\frac{\pi}{6})$.

A partir de um contexto, o autor partiu de um registro algébrico para o registro gráfico, conforme a Figura 5:

Figura 5 - Registro gráfico sobre o comportamento periódico da maré



Fonte: Leonardo (2020, p. 79)

Observando-se o gráfico da Figura 5, pode-se perceber o horário da maré alta e baixa, além da altura máxima atingida, e ainda a periodicidade da maré que ocorre a cada 12h. Esses dados não podem ser observados facilmente na função $h(t)$ dada. Desse modo, fica descaracterizada utilização da teoria de Duval (2009), pois apesar de estar sendo mobilizado dois registros de representação, não é possível fazer correspondências entre as unidades significantes de cada registro.

O ideal seria que o autor apresentasse como ocorreu a construção da função h(t), nesse processo seria possível apresentar as unidades significantes do registro algébrico. Deste modo, qualquer mudança no registro algébrico acarretaria uma mudança no registro gráfico, favorecendo a identificação das variáveis visuais do registro gráfico.

Outra forma encontrada pelo autor de chegar as mesmas conclusões apresentadas pelo gráfico foi do registro algébrico como mostra a Figura 6:

Figura 6 - Tratamento algébrico referente ao exemplo da maré

$$h(0) = 1{,}15 - 1{,}05 \cdot \cos\left(0 \cdot \frac{\pi}{6}\right)$$
$$h(0) = 1{,}15 - 1{,}05 \cdot \cos(0)$$
$$h(0) = 1{,}15 - 1{,}05 \cdot (1)$$
$$h(0) = 0{,}1$$

$$h(6) = 1{,}15 - 1{,}05 \cdot \cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{6}\right)$$
$$h(6) = 1{,}15 - 1{,}05 \cdot \cos(\pi)$$
$$h(6) = 1{,}15 - 1{,}05 \cdot (-1)$$
$$h(6) = 2{,}2$$

Fonte: Leonardo (2020, p. 79)

Para chegar as mesmas conclusões do registro gráfico, foi atribuído à variável t da função valores que variam entre 0 e 24, simbolizando a quantidade de horas no dia. A Figura **6** mostra dois cálculos: o primeiro para o tempo $t = 0$, a maré é baixa e atinge uma altura de 0,1 metros, e o segundo no tempo $t = 6$h, quando a maré atinge 2,2 metros de altura (maré alta).

O exemplo do fenômeno da maré foi utilizado para ajudar na construção da definição de uma função periódica. Quanto a esse exemplo, podemos notar a presença dos registros algébrico e gráfico, quantidade suficiente de registros para que o objeto estudado não seja confundido com sua representação.

Pode-se notar também a presença da atividade semiótica de tratamento dentro do registro algébrico (Figura 6). Entretanto, apesar do registro gráfico e algébrico trazerem o mesmo resultado, o autor não estabelece uma ligação entre as representações, o que pode comprometer a compreensão do objeto matemático estudado, pois, apesar da diversidade de registros ser importante, para não haver confusão entre representante e representado, é primordial a articulação entre os registros para que o objeto seja compreendido em sua totalidade.

Após contextualizar uma função periódica, o autor traz sua definição formal, que pertence à **categoria de Definição**. Na Figura 7 apresenta-se a referida definição:

Figura 7 - Definição de uma função periódica

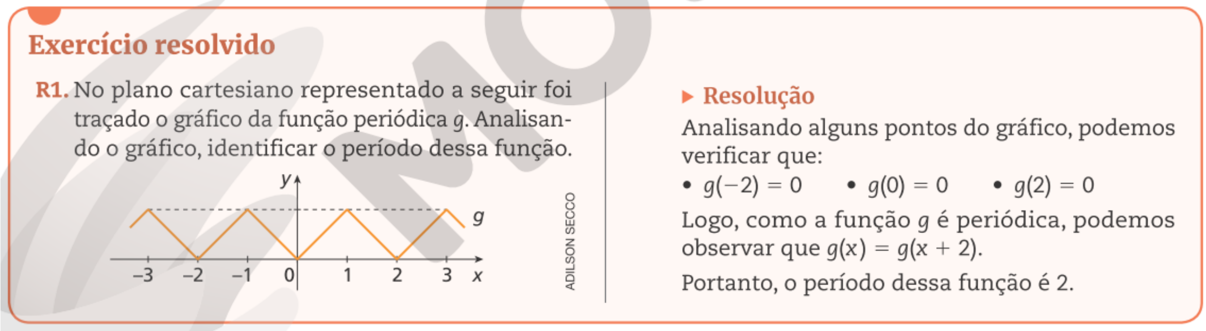
Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de **função periódica** quando existe um número real positivo p tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x + p)$.

Fonte: Leonardo (2020, p. 79)

A definição é expressa somente em registro em língua natural, onde compreende-se que p corresponde ao período da função. Nada mais é acrescentado pelo autor quanto à definição, supõe-se que para ele, o exemplo do fenômeno da maré tenha sido o suficiente para o leitor entender a ideia de uma função periódica e de período.

Para fixar a definição, o livro traz logo em seguida um exercício resolvido, pertencente à **categoria de Resolução de Exercícios**. Observe a Figura 8 abaixo:

Figura 8- Exercício resolvido de função periódica


Exercício resolvido

R1. No plano cartesiano representado a seguir foi traçado o gráfico da função periódica g. Analisando o gráfico, identificar o período dessa função.

▶ **Resolução**

Analisando alguns pontos do gráfico, podemos verificar que:

- $g(-2) = 0$
- $g(0) = 0$
- $g(2) = 0$

Logo, como a função g é periódica, podemos observar que $g(x) = g(x + 2)$.

Portanto, o período dessa função é 2.

Fonte: Leonardo (2020, p. 79)

Conforme mostra a Figura 8, dado o gráfico da função g, é solicitado o período da função. Temos uma atividade semiótica de conversão do registro gráfico para o registro algébrico, pois através da análise do gráfico se chegará a um valor numérico que indica o período. Entretanto, nesse exercício está sendo privilegiado apenas um sentido da conversão (registro gráfico → registro algébrico).

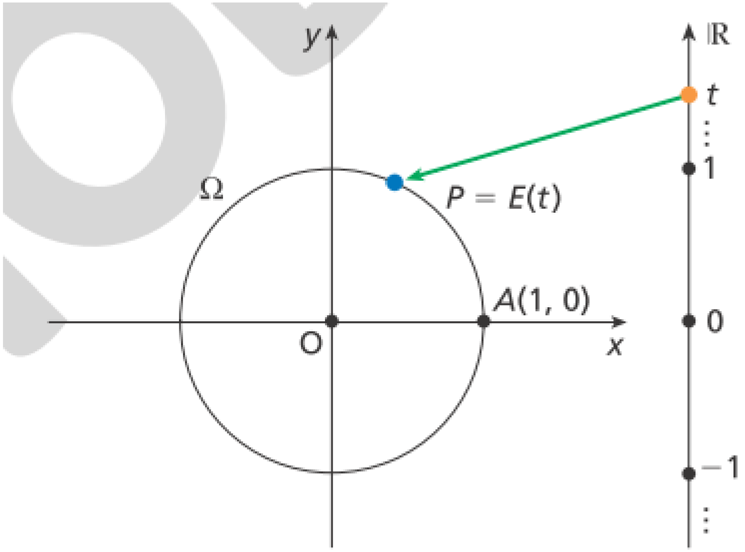
Ainda, na resolução do exercício podemos perceber que o autor transita do gráfico (registro gráfico) para a função $g(x + 2)$ (registro algébrico) para então definir o período (registro numérico). Apesar do duplo sentido da conversão não existir, levantamos aqui a hipótese de que o autor preferiu utilizar um exercício que privilegia a conversão do registro gráfico para o registro algébrico por essa passagem entre os registros ser a mais problemática por ser preciso estabelecer correspondências entre as unidades significantes de cada registro de representação (DUVAL, 2011a).

Podemos notar que o exercício da Figura 8 estabelece uma correspondência entre as unidades significantes do gráfico e a expressão algébrica $g(x + 2)$, visto que a expressão algébrica deriva da fórmula geral $f(x + p)$, onde p é o período da função, logo modificando o período da função g haveria uma mudança na expressão algébrica da função e vice-versa.

Um erro comum presente nos livros didáticos é enfatizar apenas uma passagem da conversão, nesse caso, o autor trouxe somente um exercício resolvido utilizando a passagem do registro gráfico para o algébrico. O ideal seria trazer outros exercícios de conversão de outros registros.

Em seguida, o autor recapitula o conceito de ciclo trigonométrico e traz a função de Euler definindo-a como uma "função $E: \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ que associa a cada número real t um único ponto P localizado na circunferência Ω", ilustrando-a, conforme mostra a Figura 9.

Figura 9 - Registro gráfico-geométrico da função Euler



Fonte: Leonardo (2020, p. 80)

Feijó (2018) aponta que alguns alunos possuem dificuldades na conexão entre o ciclo trigonométrico e as funções trigonométricas. A função de Euler é apresentada com uma forma de conectar o ciclo trigonométrico com essas funções, o que justifica o porquê de o autor trazer essa função antes de concentrar-se nas funções seno e cosseno.

Observando a Figura 9, podemos conjecturar que a função de Euler se resume em circundar a circunferência Ω com a reta real (ℝ) de maneira que a origem da reta coincida com o ponto $A(1,0)$, assim a parte positiva da reta corresponde ao sentido anti-horário da circunferência. Logo,

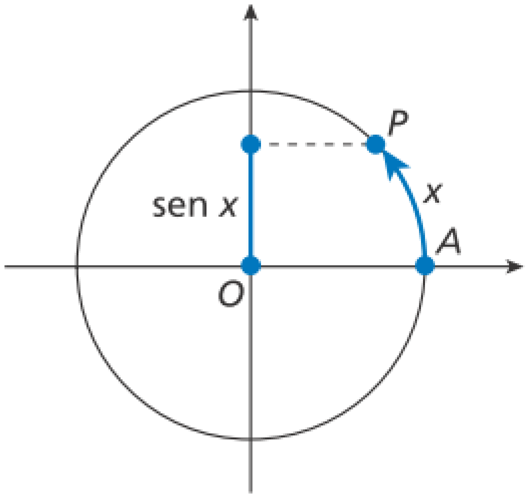
- Para $t = 0$, temos que P e A são coincidentes, ou seja, $P \equiv A$.
- Para $t > 0$, o ciclo é percorrido no sentido anti-horário a partir do ponto A e se marca nele o ponto P de comprimento t, gerando o arco $\widehat{AP}$.
- Para $t < 0$, o ciclo é percorrido no sentido horário a partir do ponto A e se marca nele o ponto P de comprimento $|t|$, gerando o arco $\widehat{AP}$.

A função de Euler tem o período de 2π, logo é uma função periódica, e é representada simbolicamente como $E(t) = E(t + 2k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Tendo em vista que a função de Euler foi tratada no livro para facilitar a conexão do ciclo trigonométrico com as funções trigonométricas, e que esta pesquisa tem foco nas funções seno e cosseno, portanto, a função de Euler não será analisada do ponto de vista da teoria de Raymond Duval.

O autor utiliza a função de Euler para introduzir a função seno, especificamente. Inicialmente, apresenta o registro gráfico-geométrico, conforme mostra a Figura 10:

Figura 10 - Registro gráfico-geométrico da função seno



Fonte: Leonardo (2020, p. 83)

Como definido na função de Euler, o ponto P é a extremidade do arco $\widehat{AP}$ no ciclo trigonométrico correspondente ao número real x, realizando a projeção ortogonal de P no eixo vertical, o seno será a ordenada do ponto P do arco de medida x.

Após o registro gráfico-geométrico, o autor define formalmente a função seno, como mostra a Figura 11:

Figura 11 - Definição da função seno

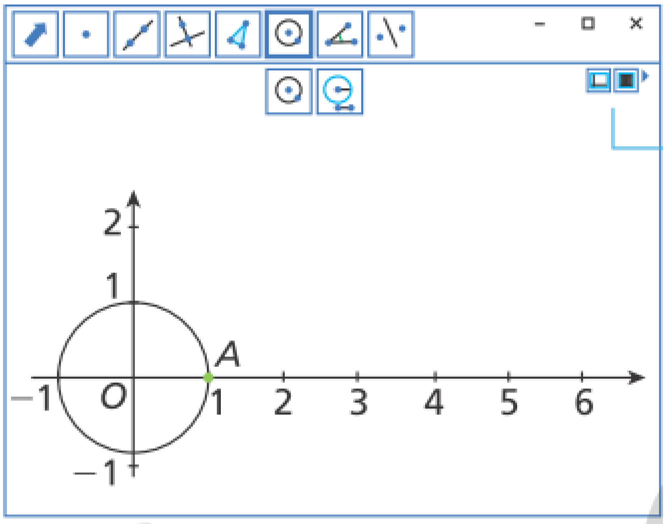
A função **seno** é a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real sen x, ou seja, $f(x) = \text{sen } x$.

Fonte: Leonardo (2020, p. 83)

O registro gráfico-geométrico da função seno (Figura 10) auxilia na construção da definição da função seno (Figura 11) que se encontra no registro linguístico, portanto, adequam-se à **categoria de Definição**. Apesar de dois registros serem utilizados para a compreensão da função seno, nota-se que não há uma conversão espontânea de um registro para o outro.

Por meio de um software de geometria dinâmica, o autor mostra a construção da curva da função seno a partir do ciclo trigonométrico. O uso do software para esboço da curva insere-se na **categoria de Uso de Tecnologias**. A Figura 12 a seguir mostra o primeiro passo da construção:

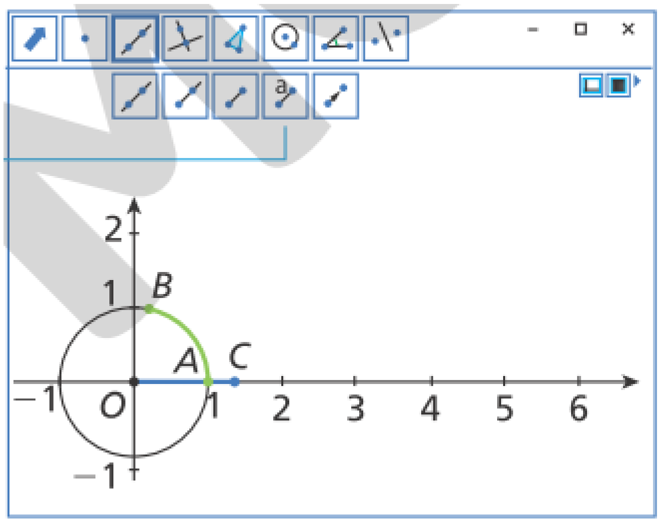
Figura 12 – Construção da curva da função seno



Fonte: Leonardo (2020, p. 83)

A Figura 12 retrata que no software deve-se construir sob o plano cartesiano um ciclo trigonométrico de raio 1 ($r = 1$). O ponto A de coordenadas $(1,0)$ é a origem do ciclo trigonométrico. O próximo passo é mostrado na Figura 13:

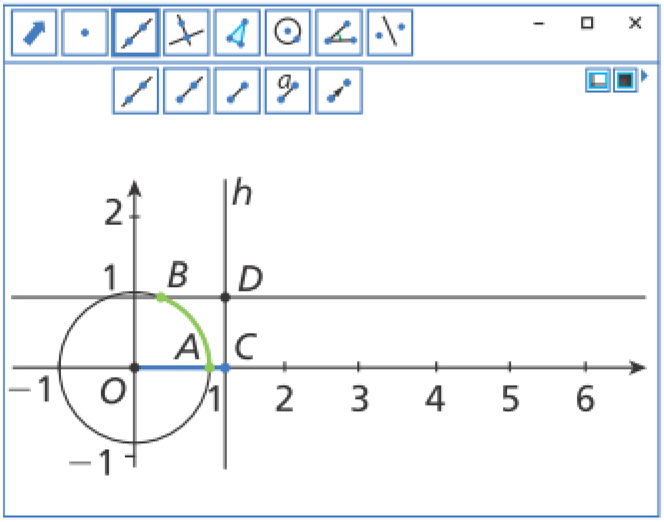
Figura 13 – Construção da curva da função seno



Fonte: Leonardo (2020, p. 83)

A Figura 13 revela que um arco $\widehat{AB}$ qualquer é construído sobre essa circunferência e a medida desse arco é conduzida para o eixo das abscissas, dando origem ao segmento de reta $\overline{OC}$. A Figura 14 traz o próximo passo da construção da função seno:

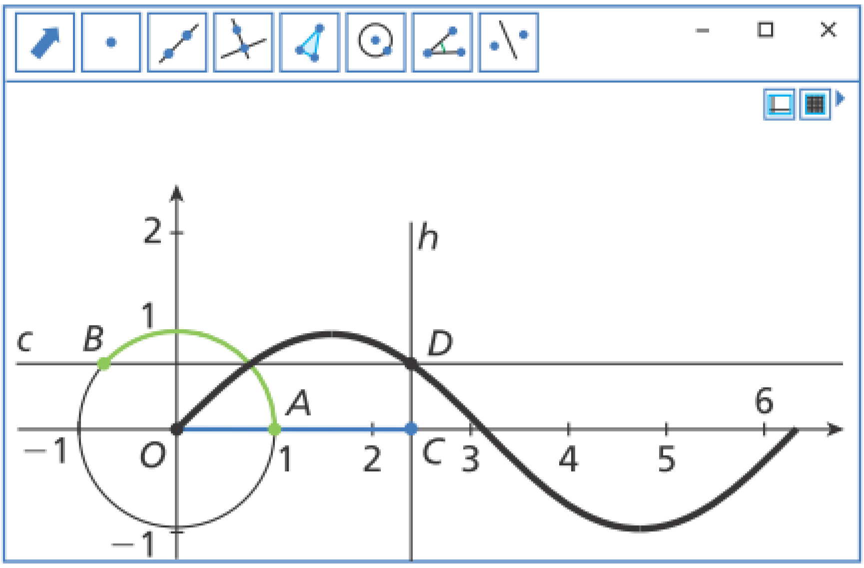
Figura 14 – Construção da curva da função seno



Fonte: Leonardo (2020, p. 83)

A Figura 14 demonstra que uma reta h, paralela ao eixo das ordenadas, é traçada passando pelo ponto C e outra reta passa pela projeção ortogonal do ponto B. A interseção das duas retas dá origem ao ponto D. Movendo o ponto B ao redor da circunferência, podemos rastrear o movimento do ponto D, verificando o caminho percorrido, como pode ser visto na Figura 15.

Figura 15 – Construção da curva da função seno



Fonte: Leonardo (2020, p. 84)

A curva da Figura 15 representa a curva da função seno. De modo geral, o uso do computador no processo de ensino-aprendizagem se apresenta como uma ferramenta potente e lúdica. O computador e seus softwares exibem em seu monitor representações tão rápidas quanto à produção mental e com uma potência de tratamento ilimitada. O que poderia ser obtido à mão livre após dias pode ser obtido imediatamente. Por isso, é tido como um modo fenomenológico de produção radicalmente novo, pois privilegia a aceleração dos tratamentos, mas não se constitui um novo registro de representação, pois as representações exibidas na tela do computador são as mesmas produzidas graficamente no papel (DUVAL, 2011b).

Por outro lado, os softwares não favorecem a conversão devido ao menu de comando privilegiar um registro de representação (registro algébrico) para chegar à representação correspondente em outro registro (registro gráfico). Uma vez que o software permite a entrada somente de uma representação, a compreensão do objeto matemático fica comprometido, pois não haverá coordenação entre os registros de representação. Não havendo coordenação, não há congruência semântica entre os registros (**categoria de Flexibilidade e Fluidez entre diferentes registros de representação**).

Logo em seguida, a forma usual de construção de uma função também é apresentada, que se enquadra na **categoria de Procedimento de Construção de Gráfico**. Na forma usual é utilizada uma tabela e escolhidos valores de x e aplicados na função para encontrar os valores de y. Nesse caso, como se trata de uma função periódica, os valores de x são ângulos de 1ª volta do ciclo trigonométrico, como é exibido na Figura 16 para uma função seno:

Figura 16 - Registro tabular para $\mathbf{0 < x < 2\pi}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Fonte: Leonardo (2020, p. 84)

O autor também monta uma tabela para quando x for maior que 2π. Observe a Figura 17:

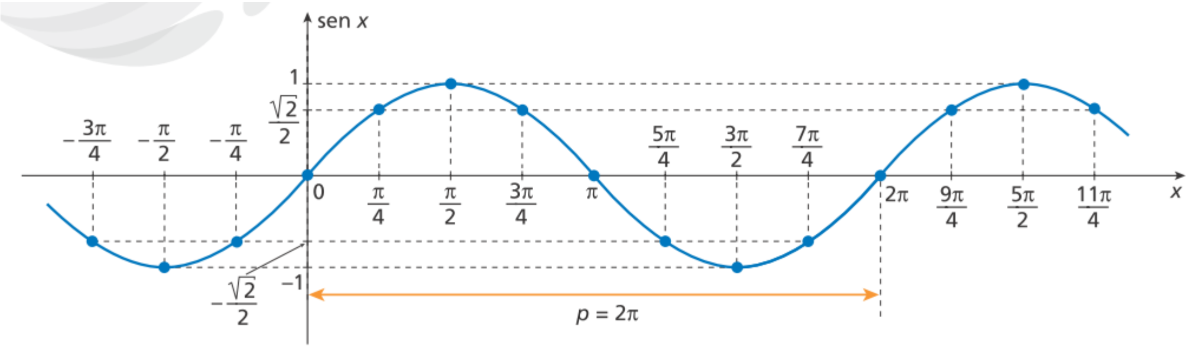
Figura 17 - Registro tabular para $\mathbf{x > 2\pi}$

x	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$
sen x	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Fonte: Leonardo (2020, p. 84)

Os dados das tabelas da Figura 16 e da Figura 17 são transportados para o plano cartesiano e ao se ligar um ponto ao outro, obtém-se a curva da função seno, como pode ser visto na Figura 18:

Figura 18 - Registro gráfico da função seno



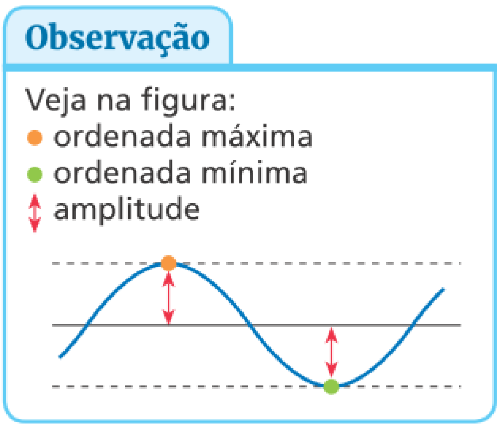
Fonte: Leonardo (2020, p. 84)

Analisando a forma de construção do gráfico da função seno utilizada pelo autor, constatamos que é empregado a abordagem definida por Duval (2011a) como abordagem ponto a ponto, que se limita a traçar o gráfico correspondente de uma expressão a partir de alguns valores particulares e pontos marcados no plano referencial.

Apresentada a construção do gráfico, o livro traz três características da função seno: 1) a curva se repete a cada intervalo de 2π, logo é uma função periódica de período 2π; 2) os valores de $senx$ estão limitados ao intervalo $[-1{,}1]$, logo o conjunto imagem é Im = $[-1{,}1]$; 3) a amplitude (metade da diferença entre as ordenadas máxima e mínima) é igual a 1.

Para melhor compreensão da última caraterística, o livro apresenta a Figura 19. Observe:

Figura 19 – Registro gráfico da definição de amplitude



Fonte: Leonardo (2020, p. 85)

Em nossas análises, podemos perceber que essas três características não são constantes, pois essas estão ligadas à expressão algébrica do tipo $f(x) = senx$. Uma vez que essa função fique mais complexa ou o gráfico não se pareça mais com o da Figura 18, essas características podem sofrer mudanças, já que elas são unidades significantes do registro algébrico, entretanto, tais mudanças ficam difíceis de serem observadas quando a construção do gráfico se limita a abordagem ponto a ponto.

Ainda sobre a construção do gráfico da função seno, nota-se que o meio informático (software de geometria dinâmica) facilitou a transição do registro gráfico-geométrico para o registro gráfico. A outra maneira utilizada para a construção do gráfico da função seno foi utilizando o registro simbólico-algébrico, que funcionou como registro de partida, o registro tabular, que serviu como registro auxiliar de uma representação à outra, e o registro gráfico, como registro de chegada.

A transição do registro algébrico para o registro gráfico é considerada uma conversão, todavia, não houve coordenação entre os registros já que privilegiou apenas um sentido da conversão (registro algébrico → registro gráfico), faltando fazer a passagem inversa (registro gráfico → registro algébrico), passagem que apresenta mais dificuldades para os alunos, pois o custo cognitivo não é o mesmo. Ainda, a abordagem utilizada não identifica as unidades significantes de nenhum dos registros, sendo as unidades significantes do registro simbólico-algébrico apresentadas como características da função seno.

Após citado as características da função seno, dois exercícios resolvidos são apresentados, que podem ser vistos na Figura 20 a seguir:

Figura 20 – Exercícios resolvidos sobre função seno

computacional: o **reconhecimento de padrões**. Pedir a eles que avaliem e descubram, por meio de um software de desenho de gráficos de funções, quando a população de zebras foi máxima e de quanto em quanto tempo isso acontece.

Exercícios resolvidos

R4. Determinar os valores reais de m para os quais existe x tal que $\text{sen } x = 3m - 2$.

▸ **Resolução**

Sabemos que os valores da função $f(x) = \text{sen } x$ variam no intervalo $[-1, 1]$.

Assim:

$$-1 \leq \text{sen } x \leq 1 \quad \text{substituindo sen } x \text{ por } 3m - 2$$

$$-1 \leq 3m - 2 \leq 1 \quad \text{adicionando 2 em todos os membros}$$

$$1 \leq 3m \leq 3 \quad \text{dividindo todos os membros por 3}$$

$$\frac{1}{3} \leq m \leq 1$$

Então, m assume valores em $\mathbb{R}$ tais que $\frac{1}{3} \leq m \leq 1$.

R5. Em um sistema predador-presa, o número de predadores e de presas tende a variar periodicamente com o tempo. Considere que em determinada região, onde leões são os predadores e zebras são as presas, a população de zebras tenha variado de acordo com a função dada por: $Z(t) = 850 + 400 \cdot \text{sen } \frac{\pi t}{4}$, em que o tempo t é medido, em ano, a partir de janeiro de 2000 ($t = 0$).

Fotografia mostrando uma leoa caçando uma zebra. Foto de 2005.

Com base no texto, responder às questões.

a) Quantas zebras havia em janeiro de 2020?

b) Qual foi a população mínima de zebras atingida nessa região?

c) De acordo com a função dada, quando foi a primeira vez que a população de zebras foi mínima?

d) De quanto em quanto tempo a população de zebras se repete?

▸ **Resolução**

a) Em janeiro de 2020, temos $t = 20$. Substituindo t por 20 na equação dada, obtemos:

$$Z(20) = 850 + 400 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi \cdot 20}{4}\right)$$

$$Z(20) = 850 + 400 \cdot \text{sen } (5\pi)$$

$$Z(20) = 850 + 400 \cdot 0 = 850$$

Logo, em janeiro de 2020 havia 850 zebras.

b) A população mínima ocorre quando $\text{sen } \frac{\pi t}{4}$ atinge seu valor mínimo, ou seja, quando $\text{sen } \frac{\pi t}{4} = -1$. Então, para esse valor, temos:

$$Z(t) = 850 + 400 \cdot (-1) = 450$$

Logo, a população mínima foi de 450 zebras.

c) Na 1ª volta do ciclo trigonométrico, sen x atinge seu valor mínimo (-1) para $x = \frac{3\pi}{2}$. Então, a função dada será mínima para:

$$\frac{\pi t}{4} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{t}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow t = \frac{3 \cdot 4}{2} \Rightarrow t = 6$$

Portanto, a população de zebras atingiu seu valor mínimo, pela primeira vez, 6 anos após janeiro de 2000, ou seja, em janeiro de 2006.

d) A função seno tem período 2π. Assim:

$$\frac{\pi t}{4} = 2\pi \Rightarrow \frac{t}{4} = 2 \Rightarrow t = 8$$

Logo, a população de zebras se repete de 8 em 8 anos.

a) $850 + 400 \cdot 1 = 1.250$
Logo, a população máxima foi de 1.250 zebras.

Reflita

a) Qual foi a população máxima de zebras?
b) Quando isso ocorreu pela primeira vez?

$\frac{\pi t}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 2$
Logo, a população máxima foi atingida pela primeira vez em 2002.

Fonte: Leonardo (2020, p. 85)

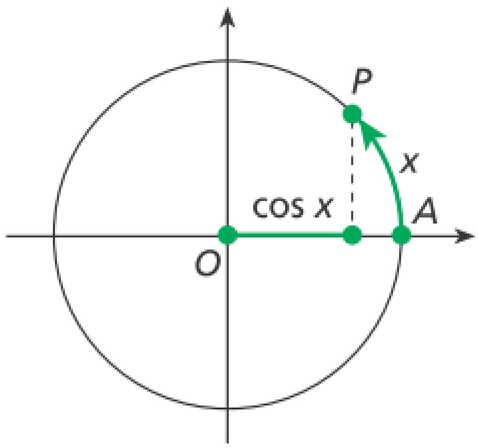
Os exercícios da Figura 20 pertencem à **categoria de Resolução de Exercícios**. O exercício $R4$ indaga para quais valores de m existe um x tal que $senx = 3m - 2$. Trata-se de um exercício de aplicação, em que o estudante aplicará os conceitos matemáticos aprendidos. Percebe-se que o exercício se desenvolve no registro algébrico, logo, enquadra-se como uma atividade semiótica de tratamento.

Já o exercício $R5$ é um exercício contextualizado referindo-se, de modo geral, a população de animais e requer um nível maior de interpretação do leitor para compreender cada resposta matemática alcançada. Entretanto, apesar de ser um exercício contextualizado com quatro alternativas, que requerem maior interpretação, também se desenvolve todo no registro algébrico, ou seja, outra atividade semiótica de tratamento.

Exercícios que envolvem a atividade de tratamento, isto é, utilizam apenas um registro de representação, possuem sua importância no processo de aprendizagem, uma vez que permitem ao estudante conhecer e explorar o objeto matemático estudado dentro do registro que foi representado. Todavia, a ausência de um exercício resolvido que privilegie a conversão prejudica a aprendizagem, pois, se o livro não apresenta como transitar de uma representação a outra, dificilmente o aluno conseguirá realizar sozinho.

A função cosseno é apresentada logo em seguida e é conceituada da mesma forma que a função seno. O autor, por meio da função de Euler, retrata o registro gráfico-geométrico da função cosseno. Observe a Figura 21:

Figura 21 - Registro gráfico-geométrico da função cosseno



Fonte: Leonardo (2020, p. 87)

Como definido na função de Euler, o ponto P é a extremidade do arco $\widehat{AP}$ no ciclo trigonométrico correspondente ao número real x, realizando a projeção ortogonal de P no eixo horizontal, o cosseno será a abscissa do ponto P do arco de medida x.

Após o registro gráfico-geométrico, o autor define formalmente a função cosseno, como mostra a Figura 22:

Figura 22 - Definição da função cosseno

A função **cosseno** é a função $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real $\cos x$, ou seja, $f(x) = \cos x$.

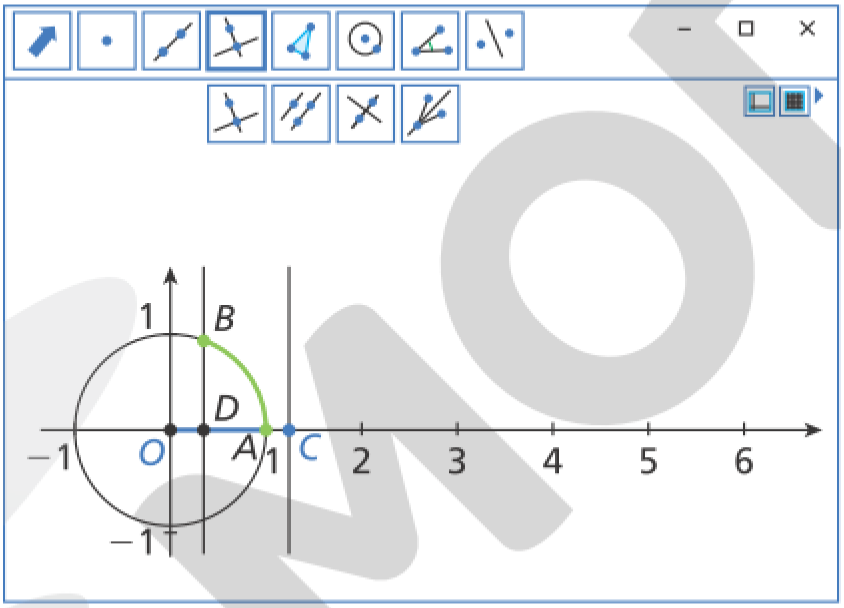
Fonte: Leonardo (2020, p. 87)

Assim como na função seno, o registro gráfico-geométrico da função cosseno (Figura 21) auxilia na construção da definição da função cosseno (Figura 22) que se encontra no registro em língua natural, pertencem à **categoria de Definição**. Apesar de dois registros serem utilizados para a compreensão da função cosseno, nota-se que não há uma conversão espontânea de um registro para o outro.

A **categoria de Uso de Tecnologias** se faz presente novamente quando o autor utiliza um software de geometria dinâmica para construir a curva da função cosseno, partindo do ciclo trigonométrico, ou seja, há uma conversão do registro gráfico-geométrico (Figura 21) para o registro gráfico.

A Figura 23 a seguir mostra a primeira etapa de construção da curva do cosseno no software:

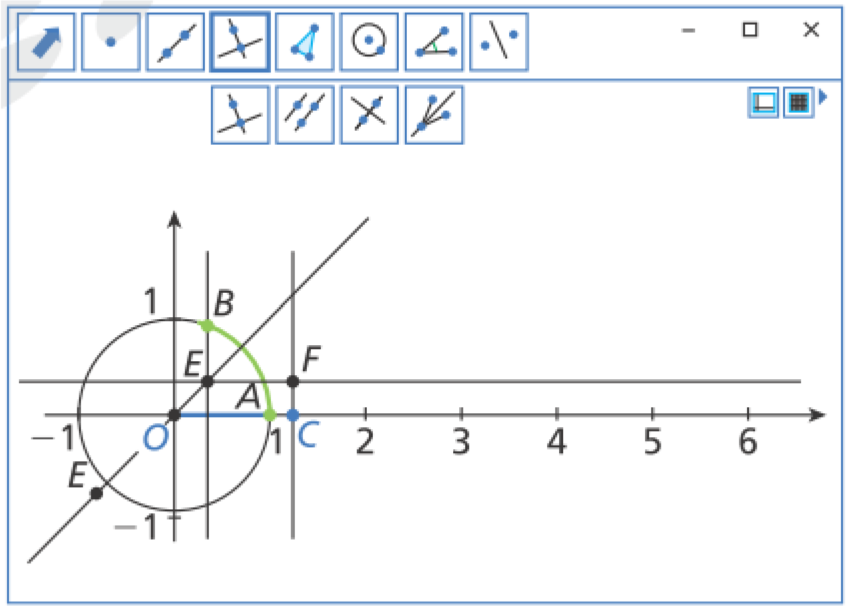
Figura 23 – Construção da curva da função cosseno



Fonte: Leonardo (2020, p. 87)

A Figura 23 exibe que após criado o ciclo trigonométrico de raio unitário, constrói-se um arco $\widehat{AB}$ qualquer sob a circunferência e a medida desse arco é transportada para o eixo das abscissas, originando o segmento de reta $\overline{OC}$. Logo após, traça-se a projeção ortogonal do ponto B no eixo das abscissas, marcando o ponto D. O segmento $\overline{OD}$ corresponde ao cosseno de $\widehat{AB}$. A Figura 24 mostra a segunda etapa de construção.

Figura 24 – Construção da curva da função cosseno

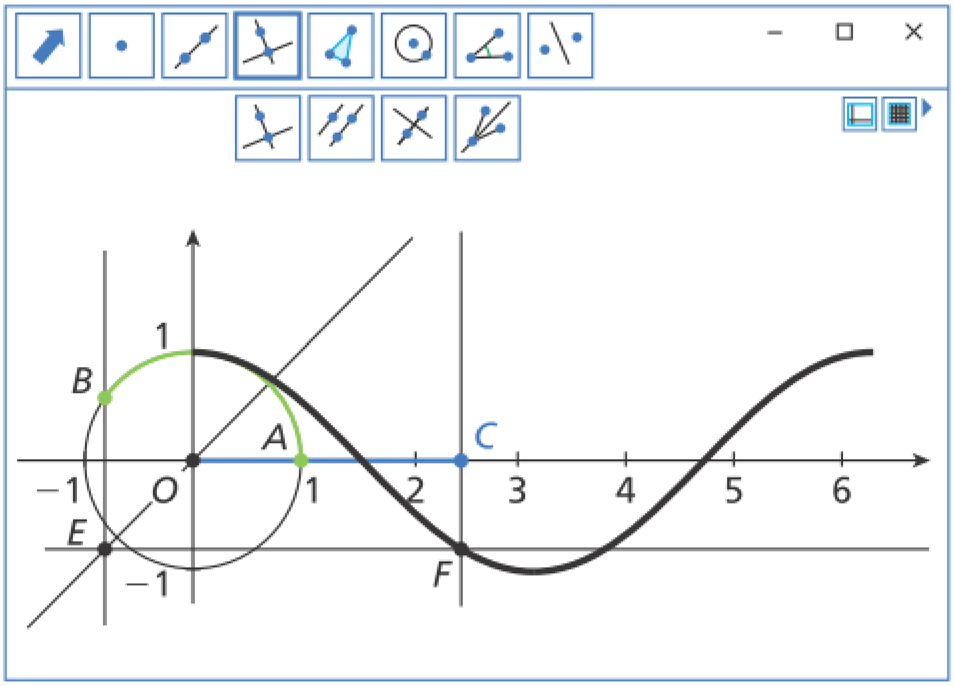


Fonte: Leonardo (2020, p. 87)

Conforme mostra a Figura 24, para obter os pontos em que a função cosseno será plotada, é necessário transferir a medida de $\overline{OD}$ para o eixo das ordenadas. Para isso, é construído a bissetriz do 1º e 3º quadrantes do plano cartesiano, marcando o ponto E, a interseção desta bissetriz com a reta $\overleftrightarrow{BD}$, e projeta-se o ponto E no eixo das ordenadas. Em seguida, se marca o ponto F, a interseção da linha que contém a projeção ortográfica e a linha que passa pelo ponto C. O ponto F traçará a curva dessa função.

Por fim, ao movimentar a extremidade B do arco $\widehat{AB}$ ao redor do ciclo trigonométrico, pode-se rastrear o movimento do ponto F e observar o desenho da curva da função cosseno, como mostra a Figura 25:

Figura 25 – Construção da curva da função cosseno



Fonte: Leonardo (2020, p. 88)

Uma vez demonstrado como construir a curva da função cosseno no software, o autor mostra como construir o gráfico da função sem apoio de tecnologias, que se adequa à **categoria de Procedimento de Construção de Gráfico**. Para isso, utiliza novamente a abordagem ponto a ponto, em que utiliza uma tabela (registro tabular) como auxílio. A Figura 26 considera os valores de x para os valores da 1ª volta do ciclo, ou seja, $0 < x < 2\pi$; já a Figura 27 considera valores de x maiores que 2π ou menores que zero. Observe:

Figura 26 - Registro tabular para $\mathbf{0 < x < 2\pi}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Fonte: Leonardo (2020, p. 88)

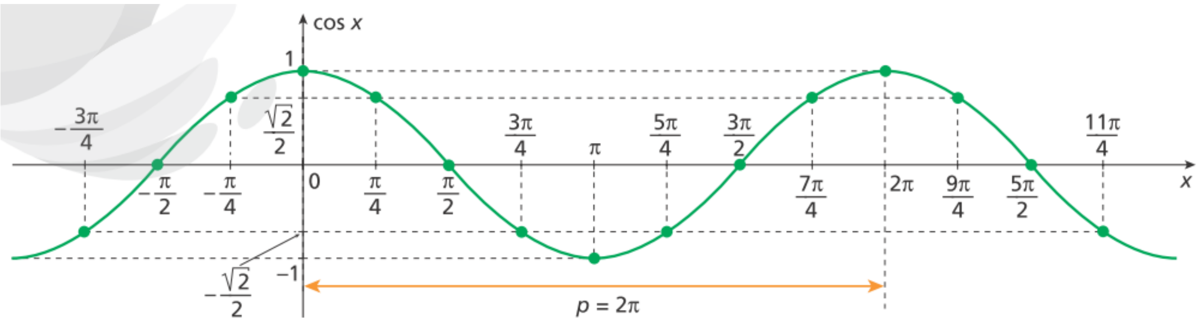
Figura 27 - Registro tabular para $x > 2\pi$

x	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Fonte: Leonardo (2020, p. 88)

Os dados das tabelas da Figura 26 e Figura 27 são transportados para o plano cartesiano e ao se ligar um ponto ao outro, obtém-se a curva da função cosseno, como pode ser visto na Figura 28:

Figura 28 - Registro gráfico da função cosseno



Fonte: Leonardo (2020, p. 88)

O autor ainda observa que o gráfico da função cosseno é um deslocamento horizontal para esquerda de $\frac{\pi}{2}$ rad da curva da função seno.

Assim como na função seno, é relatado três características da função cosseno, sendo elas: 1) a curva se repete a cada intervalo de 2π, logo, é uma função periódica de período 2π; 2) os valores de $senx$ estão limitados ao intervalo $[-1,1]$, logo o conjunto imagem é Im = $[-1,1]$; 3) a amplitude (metade da diferença entre as ordenadas máxima e mínima) é igual a 1.

A construção do gráfico da função cosseno ocorre de duas formas: 1) através do meio informático, onde se utilizou o software de geometria dinâmica 2) foi utilizado o registro simbólico-algébrico, que funcionou como registro de partida, o registro tabular, que serviu como registro auxiliar de uma representação à outra, e o registro gráfico, como registro de chegada.

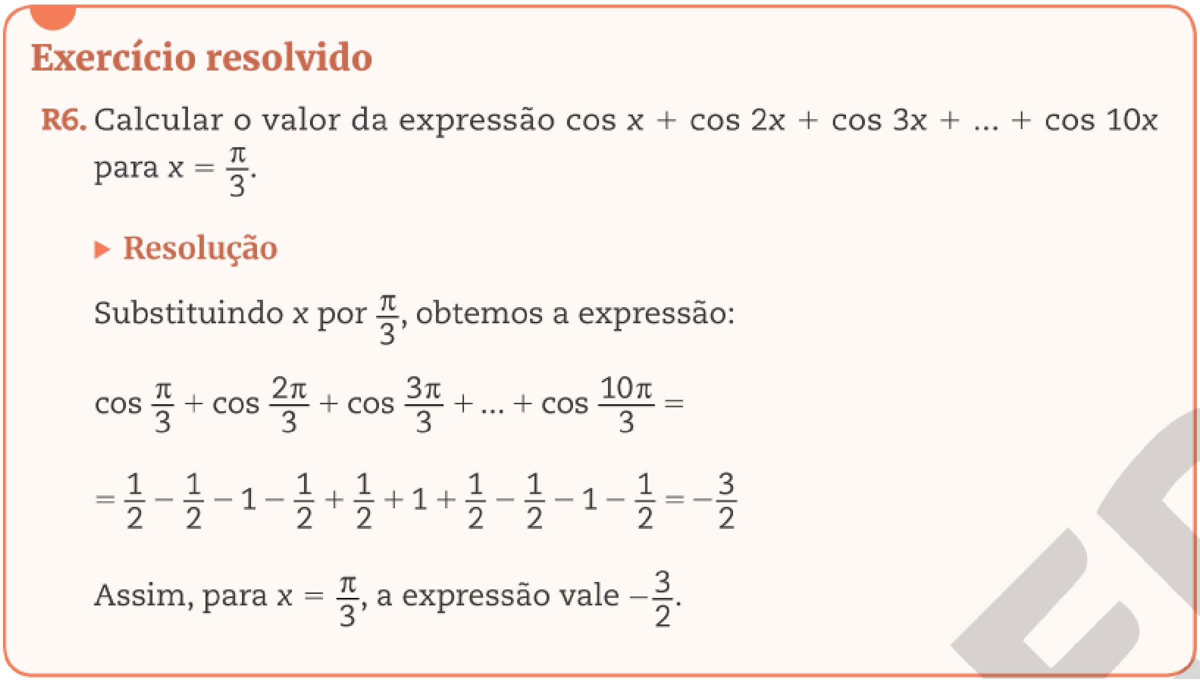
Visto que a apresentação da função cosseno se assemelha ao da função seno, então, levantamos as mesmas críticas, que são:

- Na transição do registro algébrico para o registro gráfico é considerada uma conversão, todavia, não houve coordenação entre os registros já que privilegiou apenas um sentido da conversão (registro algébrico → registro gráfico), faltando fazer a passagem inversa (registro gráfico → registro algébrico), passagem que apresenta mais dificuldades para os alunos, pois o custo cognitivo não é o mesmo;

- A abordagem utilizada não identifica as unidades significantes de nenhum dos registros, sendo as unidades significantes do registro simbólico-algébrico apresentadas como características da função cosseno.

Logo após, o livro apresenta um exercício resolvido. Veja a Figura 29:

Figura 29 – Exercício resolvido sobre função cosseno



Exercício resolvido

R6. Calcular o valor da expressão cos x + cos 2x + cos 3x + ... + cos 10x para $x = \frac{\pi}{3}$.

▶ **Resolução**

Substituindo x por $\frac{\pi}{3}$, obtemos a expressão:

$$\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{3\pi}{3} + \ldots + \cos\frac{10\pi}{3} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

Assim, para $x = \frac{\pi}{3}$, a expressão vale $-\frac{3}{2}$.

Fonte: Leonardo (2020, p. 89)

O exercício $R6$ se enquadra na **categoria de Resolução de Exercícios**, contemplando somente o critério de atividade cognitiva de tratamento, visto que a resolução do exercício se desenvolve apenas no registro algébrico.

Depois de externada as funções seno e cosseno, o capitulo analisado destina um tópico somente para a construção de gráfico, que busca auxiliar o estudante na construção de gráficos de funções mais complexas sem utilizar a tabela (registro tabular). Esse tópico se enquadra na **categoria de Procedimento de Construção de Gráfico**.

Para essa forma, o livro considera as funções $g(x) = senx$ ou $g(x) = cosx$ como funções fundamentais, assim como suas curvas, e são usadas para efeito comparativo com funções mais complexas. Esclarecemos que as funções complexas seno ou cosseno são representadas simbolicamente por $f(x) = \pm a \pm b.sen(mx + n)$ ou $f(x) = \pm a \pm b.cos(mx + n)$.

A partir de transformações no gráfico das funções fundamentais seno e cosseno, o autor constrói o gráfico solicitado. As transformações apontadas no livro são: translação do gráfico (vertical e horizontal), alteração da amplitude e alteração do período.

A primeira transformação apresentada é a translação vertical. O objetivo é encontrar o gráfico da função $f(x) = 2 + senx$ e a função fundamental $g(x) = senx$ é utilizada como auxílio. As duas funções são colocadas em uma tabela e atribui-se valores para x, conforme mostra a Figura 30:

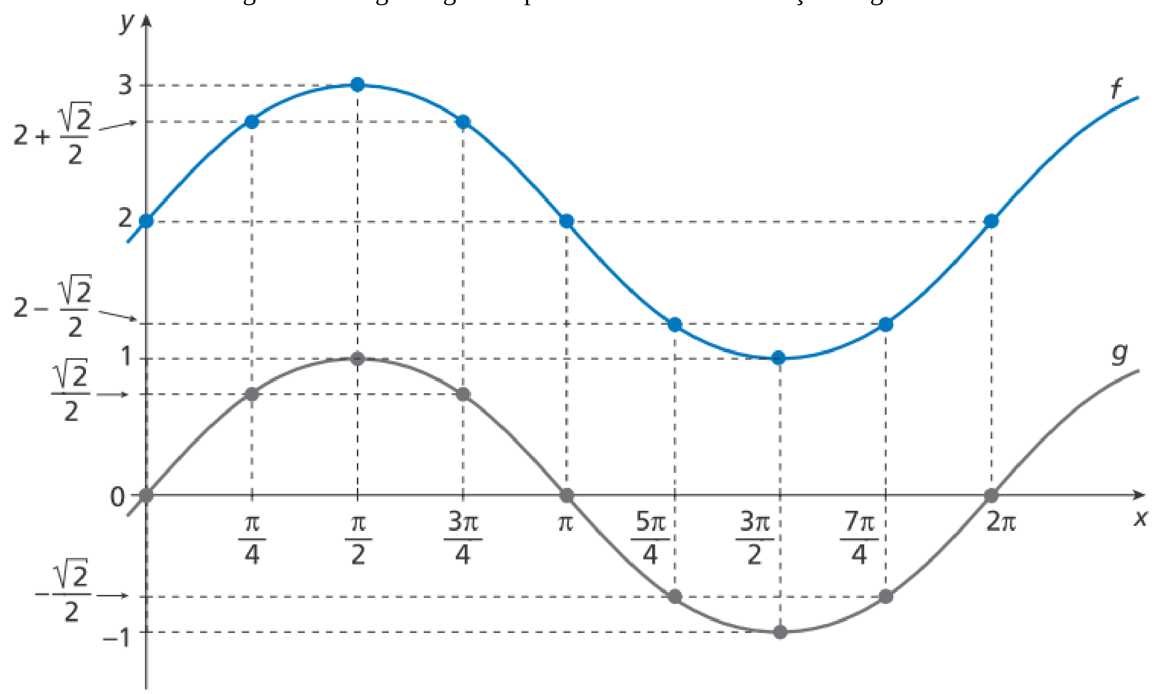
Figura 30 - Registro tabular

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
2 + sen x	2	$2+\frac{\sqrt{2}}{2}$	3	$2+\frac{\sqrt{2}}{2}$	2	$2-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$2-\frac{\sqrt{2}}{2}$	2

Fonte: Leonardo (2020, p. 96)

Os pontos encontrados na tabela são transportados para o plano cartesiano. Como mostra a Figura 31 abaixo:

Figura 31 - Registro gráfico para demonstrar a translação do gráfico



Fonte: Leonardo (2020, p. 97)

Como mostra a Figura **31**, a curva cinza é referente a função $g(x) = senx$ e a curva azul, à função $f(x) = 2 + senx$. O autor conclui que o valor numérico “2” na função f(x) implica uma translação vertical (no eixo das ordenadas) da função $g(x)$ de duas unidades para cima.

Observa ainda que essa translação modifica o conjunto imagem, que antes era [-1,1] para a função $g(x)$ e agora passa a ser [1,3] para a função $f(x)$. Apesar dessa mudança, o domínio, período e amplitude não foram alterados.

Dito isso, o autor generaliza para caso semelhantes, como mostra a Figura 32:

Figura 32 – Construção de gráficos de funções trigonométricas através da translação vertical de sua curva fundamental

Os gráficos de funções trigonométricas do tipo $y = c + \text{sen } x$ são obtidos a partir de uma translação de $|c|$ unidades em relação ao gráfico $y = \text{sen } x$ da seguinte forma:

- se $c > 0$, a translação é para cima;
- se $c < 0$, a translação é para baixo.

O mesmo vale para funções do tipo $y = c + \cos x$ e $y = c + \text{tg } x$.

Fonte: Leonardo (2020, p. 97)

Após o texto da figura, fica claro que o valor numérico “2” é um coeficiente para quando a função for expressa algebricamente por $f(x) = c + senx$. Ressaltamos que o sinal que acompanha a variável c também é uma unidade significante. Logo,

$$c > 0 \rightarrow +c, \text{ desloca-se para cima}$$

$$c < 0 \rightarrow -c, \text{ desloca-se para baixo}$$

O autor explora apenas o caso em que $c > 0$. O ideal seria que ambos os casos fossem explorados para um melhor desempenho no processo de aprendizagem dos alunos ou mesmo que fosse proposto ao aluno investigar o que aconteceria para $c < 0$, para então generalizar para casos semelhantes.

Na Figura 33 o autor apresenta um fluxograma que trabalha com o coeficiente c, que representa a unidade significante relacionada a variável visual da translação vertical da curva da função fundamental.

Figura 33 – Pensamento computacional para transladar verticalmente o gráfico de funções trigonométricas

Pensamento computacional

algoritmo em linguagem corrente e em um fluxograma.

Algoritmo

A situação do desenho e da translação vertical do gráfico das funções trigonométricas dos tipos $y = c + \text{sen}\, x$, $y = c + \cos x$ ou $y = c + \text{tg}\, x$ pode ser representada por meio de um algoritmo. Veja o exemplo a seguir, em linguagem corrente, para funções do tipo $y = c + \text{tg}\, x$.

Passo 1. Desenha-se o gráfico de $y = \text{tg}\, x$.

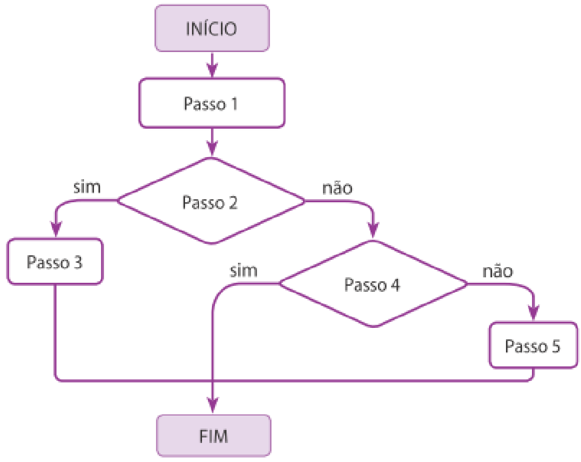
Passo 2. Verifica-se o valor de c. Se $c > 0$, vá para o passo 3. Se não, vá para o passo 4.

Passo 3. Como $c > 0$, então o gráfico é transladado de c unidades para cima. Termina-se o algoritmo.

Passo 4. Verifica-se o valor de c. Se $c = 0$, o gráfico não muda e termina-se o algoritmo. Se não, vá para o passo 5.

Passo 5. Como $c < 0$, então o gráfico é transladado de c unidades para baixo e termina-se o algoritmo.

Esse algoritmo também pode ser representado por meio de um fluxograma. Veja ao lado.



Nesse fluxograma, há duas estruturas de decisão que estão encadeadas. Em geral, uma estrutura de decisão permite dois caminhos: um em caso afirmativo e outro em caso contrário. Para que haja mais de dois caminhos, é preciso encadear estruturas de decisão, como foi feito com os passos 2 e 4. O passo 2 verifica se o valor de c é maior que 0; caso contrário, segue para o passo 4, em que se verifica se c é igual a 0; se não, c é menor que 0.

Fonte: Leonardo (2020, p. 97)

O algoritmo da Figura 33 é válido, pois auxilia o leitor a construir o gráfico de uma função a partir do valor numérico de c. O algoritmo exercita no leitor a percepção de que uma mudança do coeficiente c, no registro simbólico, acarreta uma mudança na variável visual do registro gráfico.

A próxima transformação apontada pelo livro é a transformação horizontal, onde é solicitado a construção do gráfico $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$. Nesse exemplo a função fundamental utilizada é $f(x) = cosx$. As duas funções são colocadas em uma tabela e atribui-se valores para x, conforme mostra a Figura 34:

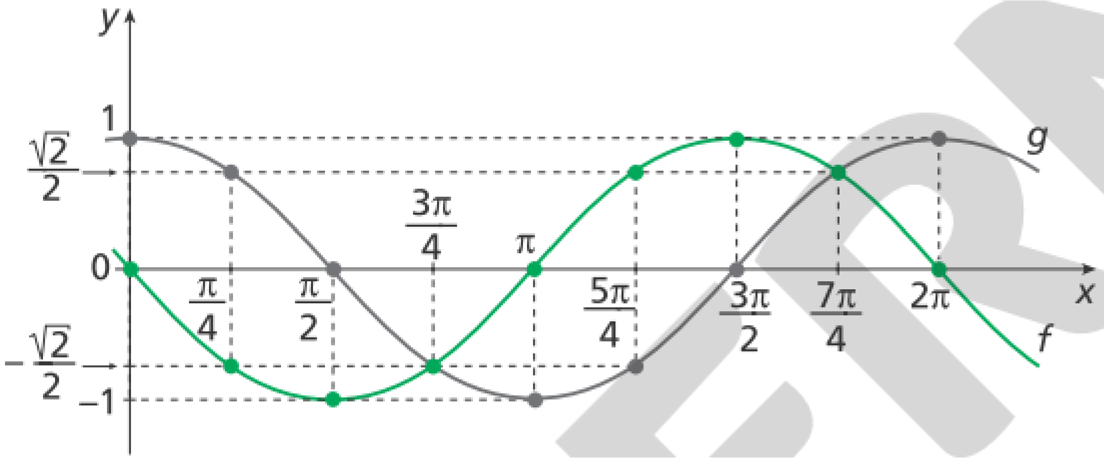
Figura 34 – Registro tabular como apoio para a translação horizontal a partir da função fundamental

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$x + \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$
$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Fonte: Leonardo (2020, p. 98)

Em seguida, os pontos da tabela da Figura 34 são utilizados para construir as duas funções no plano cartesiano. Observe a Figura 35:

Figura 35 – Registro gráfico para visualizar a translação horizontal a partir da função fundamental



Fonte: Leonardo (2020, p. 98)

Como mostra a Figura 35, a curva cinza é referente a função $g(x) = cosx$ e a curva azul, à função $f(x) \ = \cos(x + \frac{\pi}{2})$. O autor conclui que o valor numérico "$\frac{\pi}{2}$" na função $f(x)$ implica uma translação horizontal para esquerda (no eixo das abscissas) da função $g(x)$. Todavia, essa transformação não implica mudança no domínio, conjunto imagem, período e amplitude.

Dito isso, o autor generaliza para caso semelhantes, como mostra a Figura 36:

Figura 36 - Construção de gráficos de funções trigonométricas através da translação horizontal de sua curva fundamental

Os gráficos de funções do tipo $y = \cos(x + b)$ são obtidos a partir de uma translação de $|b|$ unidades em relação ao gráfico $y = \cos x$ de tal modo que:

- se $b > 0$, a translação é para a esquerda;
- se $b < 0$, a translação é para a direita.

O mesmo pode ser verificado para funções dos tipos $y = \text{sen}(x + b)$ ou $y = \text{tg}(x + b)$.

Fonte: Leonardo (2020, p. 98)

Nesse caso, $\frac{\pi}{2}$ é outro coeficiente denominado de b para quando a função for do tipo $f(x) = cos(x + b)$. O procedimento de translação horizontal do gráfico foi semelhante à translação vertical, logo estende-se a mesma crítica. Em outras palavras, o estudo realizado considera apenas o cenário de $b > 0$ para generalizar logo em seguida.

A alteração da amplitude é a próxima transformação citada pelo livro, que define essa mudança como "esticar" ou "achatar"[3] verticalmente os gráficos das funções fundamentais. Para essa alteração, é utilizado a função fundamental $g(x) = cosx$ para chegar à função $f(x) = 3 \cdot cosx$, em que ambas as funções são colocadas primeiro na tabela e atribui-se valores para x, como é visto na Figura 37 a seguir:

[3] Os termos esticar ou achatar estão escritos entre aspas, pois é citado dessa forma no livro didático analisado.

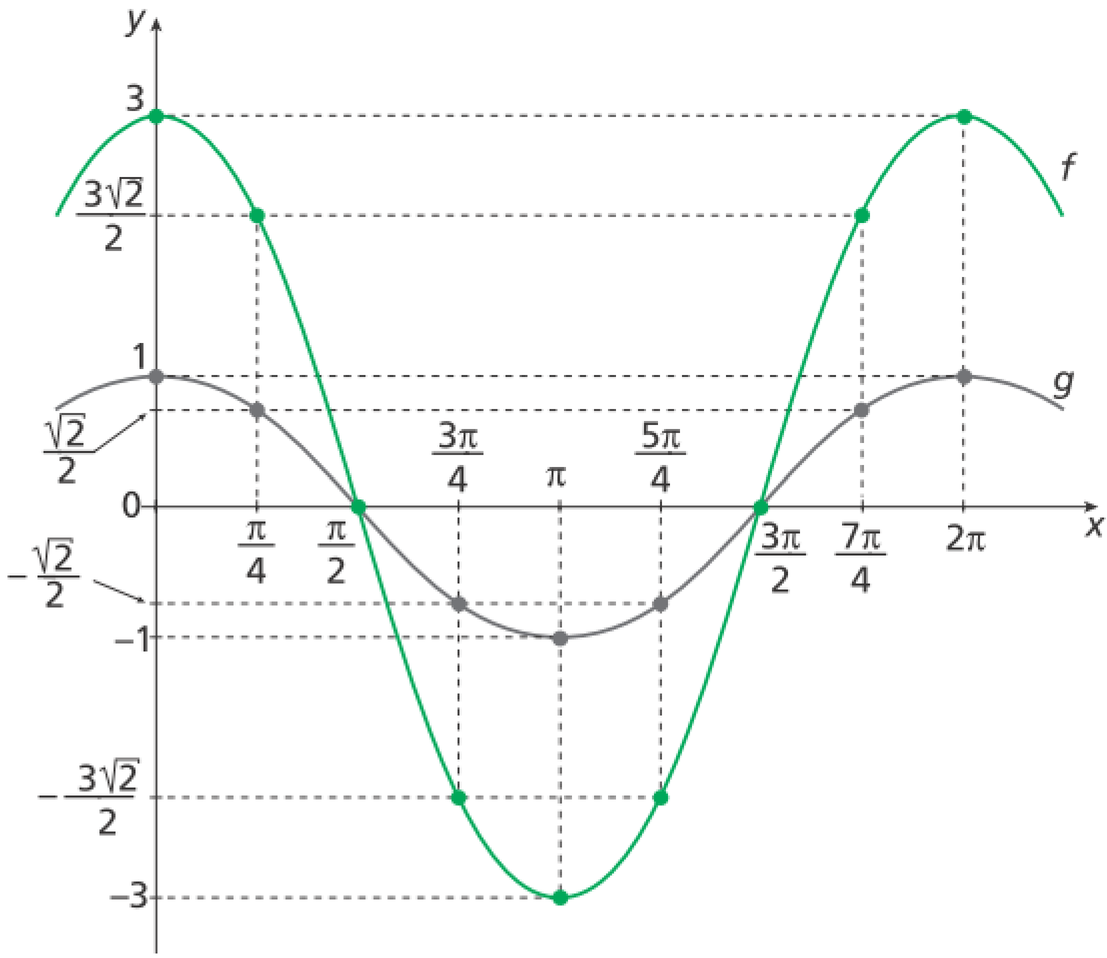
Figura 37 - Registro tabular enfatizando a alteração de amplitude

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$3 \cdot \cos x$	3	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	-3	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	3

Fonte: Leonardo (2020, p. 98)

A Figura 38 exibe o gráfico de ambas funções. Observe:

Figura 38 - Registro gráfico para visualizar a alteração de amplitude a partir da função fundamental



Fonte: Leonardo (2020, p. 99)

Observando o gráfico da Figura **38**, notamos que o valor numérico “3” da função $f(x) = 3.cosx$ “estica” verticalmente o gráfico da função $g(x) = cosx$, fazendo a ordenada y oscilar entre -3 e 3, logo, o conjunto imagem de $f(x)$ será $[-3{,}3]$, ou seja, a amplitude de $f(x)$ é 3. Note que o domínio e o período continuam inalterados.

Para casos semelhantes, o autor generaliza, conforme é visto na Figura 39:

Figura 39 - Construção de gráficos de funções trigonométricas através da alteração da amplitude de sua curva fundamental

Gráficos de funções trigonométricas do tipo $y = d \cdot \cos x$ têm amplitude $|d|$.
O mesmo ocorre para funções do tipo $y = d \cdot \text{sen } x$.

Fonte: Leonardo (2020, p. 99)

O exemplo explora apenas para o caso em que $d > 0$, que faz o gráfico se esticar, entretanto, para os casos $d < 0$ ou d fracionário o livro não aponta o comportamento da curva, sendo apresentado apenas um box com esses questionamentos. Nessa situação, caberá ao professor explorar esses casos ou solicitar aos alunos que façam os gráficos e os compare com a função fundamental e o caso em que $d > 0$.

Posteriormente, são apresentados dois exercícios resolvidos, pertencentes à **categoria Resolução de Exercícios**. A Figura 40 apresenta o primeiro desses exercícios. Observe:

Figura 40 – Exercício resolvido

Exercícios resolvidos

R11. Determinar o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude da função dada por $f(x) = 2 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

▶ **Resolução**

Vamos considerar a função h dada por $h(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

O gráfico de h é obtido por meio de uma translação do gráfico da função g, dada por $g(x) = \cos x$, de $\frac{\pi}{4}$ para a direita.

Como a amplitude da função h é 1, igual à amplitude de g, e $f(x) = 2 \cdot h(x)$, então a amplitude de f é 2.

Como o conjunto imagem da função h é $[-1, 1]$, igual ao da função g, e $f(x) = 2 \cdot h(x)$, podemos obter o conjunto imagem da função f multiplicando por 2 os extremos do intervalo $[-1, 1]$.

Logo, $\text{Im}(f) = [-2, 2]$.

O domínio e o período de f são os mesmos de g: $D(f) = \mathbb{R}$ e $p = 2\pi$.

Fonte: Leonardo (2020, p. 99)

O exercício $R11$ favorece o critério da atividade semiótica de tratamento, pois a resolução da atividade parte do registro simbólico para o registro simbólico. Ademais, permite que o estudante coloque em prática os conhecimentos que adquiriu no estudo dos coeficientes

b, c e d relacionados, respectivamente, a translação horizontal, translação vertical e alteração de amplitude.

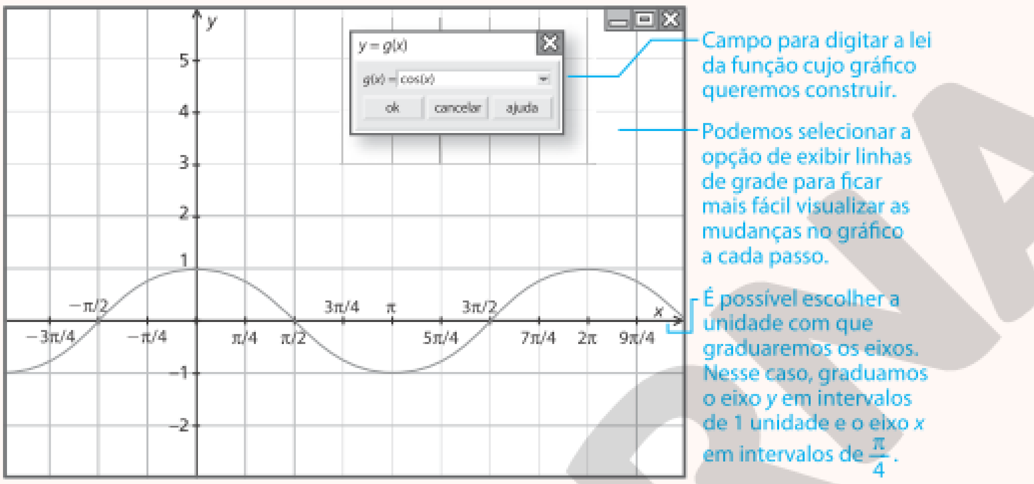
O segundo exercício resolvido, $R12$, se assemelha ao exercício anterior, requerendo apenas o uso de um software para a construção de gráficos. Observe a Figura 41:

Figura 41 – Exercício Resolvido

R12. Com o auxílio de um *software* de construção de gráficos, a partir do gráfico de uma das funções trigonométricas fundamentais, construir passo a passo o gráfico de f, tal que $f(x) = 2 + 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, e analisar o que ocorre com o gráfico a cada passo. Indicar o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude de f.

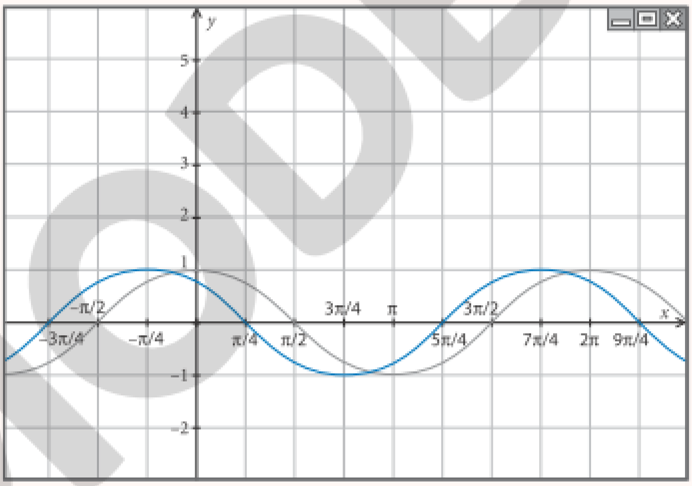
▶ **Resolução**

Primeiro, vamos traçar o gráfico da função trigonométrica dada por $g(x) = \cos x$.



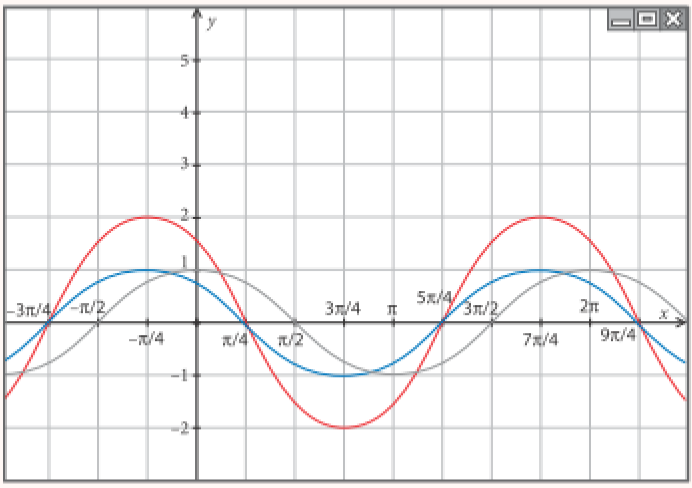
Acompanhe os passos descritos a seguir.

- 1º passo: $\cos x \rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



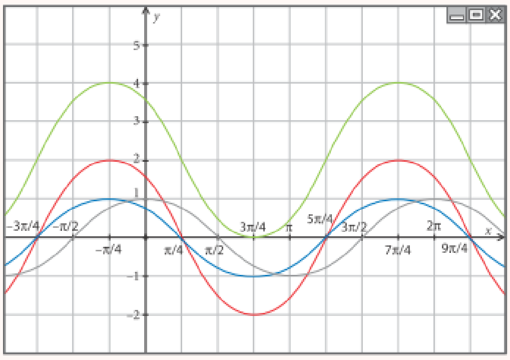
O gráfico de g sofreu uma translação de $\frac{\pi}{4}$ para a esquerda.

- 2º passo: $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



O gráfico da função tem nova amplitude, igual a 2.

- 3º passo: $2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \to 2 + 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



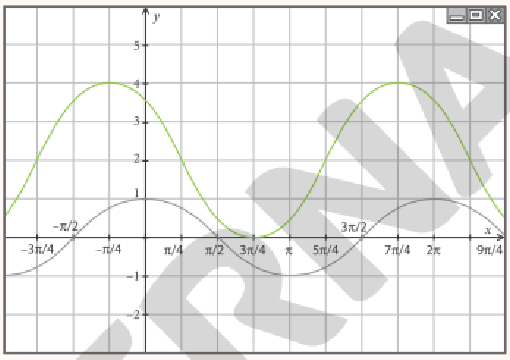
O gráfico sofreu uma translação de duas unidades para cima.

O conjunto imagem da função dada por $g(x) = \cos x$ é $[-1, 1]$. Após o 1º passo, adicionando $\frac{\pi}{4}$ a x, o conjunto imagem da nova função continua sendo $[-1, 1]$. Após o 2º e o 3º passos, o conjunto imagem se modificou. Quando a função é multiplicada por 2, o conjunto imagem passa a ser $[-2, 2]$. Adicionando-se 2, o conjunto imagem da nova função passa a ser $[0, 4]$.

Portanto, $Im(f) = [0, 4]$. A amplitude de g é 1 e não se modifica após o 1º passo; porém, no 2º passo, a função passa a ter amplitude 2 e permanece assim após o 3º passo.

O domínio e o período de f são os mesmos de g: $D(f) = \mathbb{R}$ e $p = 2\pi$.

Veja a seguir os gráficos das funções f e g.



Fonte: Leonardo (2020, p. 100-101)

A alteração do período é a última transformação apresentada no livro. Perceba que nas transformações anteriores o período se conservava.

Para o estudo da alteração do período, comparou-se a função $f(x) = sen\, 2x$ com a função fundamental $g(x) = senx$. O registro tabular é utilizada como apoio para encontrar pontos da curva das duas funções. Observe a Figura 42:

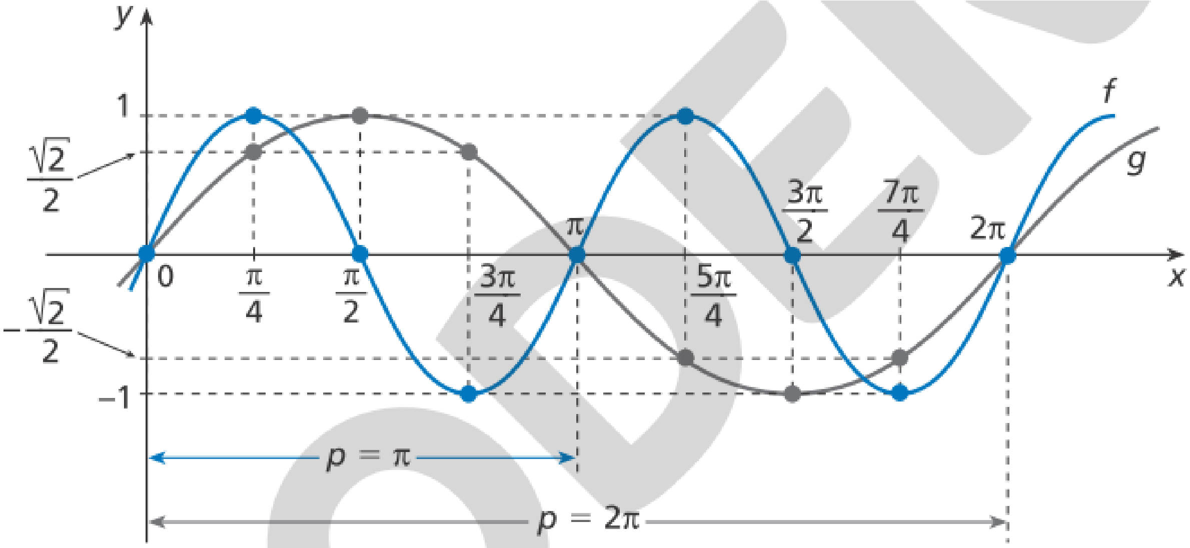
Figura 42 – Registro tabular enfatizando a alteração de período

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
2x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
sen 2x	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Fonte: Leonardo (2020, p. 102)

Uma vez que os pontos das funções $g(x)$ e $f(x)$ foram tabelados, esses são usados para construir a curva das funções, como pode ser visto na Figura 43:

Figura 43 - Registro gráfico para visualizar a alteração de período da função fundamental



Fonte: Leonardo (2020, p. 102)

Analisando a Figura 43, é possível ver que as funções $g(x)$ e $f(x)$ possuem o mesmo domínio, conjunto imagem e amplitude, entretanto, a função $f(x)$ tem período igual a π, isto é, metade do período da função $g(x)$.

O livro generaliza para casos semelhantes, como mostra a Figura 44:

Figura 44 - Construção de gráficos de funções trigonométricas através da alteração de período de sua curva fundamental

As funções trigonométricas dos tipos $y = \text{sen}\,(ax)$ ou $y = \cos\,(ax)$ têm período $\frac{2\pi}{|a|}$.

Fonte: Leonardo (2020, p. 102)

O livro explora apenas o caso em que $a > 0$. Não aponta nenhuma leitura ou informação para o caso $a < 0$ e a fracionário.

Analisando de modo geral o tópico de construção de gráfico, percebe-se que apesar do livro recorrer à tabela para auxiliar na construção do gráfico das duas funções, entendemos que o foco está na leitura e interpretação dos gráficos, pois busca mostrar ao estudante que o gráfico de uma função seno ou cosseno pode ser construído sem precisar recorrer ao uso de tabelas, bastando apenas partir das funções fundamentais.

Em outras palavras, ao trabalhar a construção de gráficos enfatizando a translação (horizontal e vertical) alteração de amplitude e alteração de período, o autor está fazendo uso da abordagem de interpretação global de propriedades figurais, embora que o registro tabular se faça presente.

A partir da abordagem utilizada pelo livro para a construção de gráficos mais complexos podemos montar o Quadro 9 a seguir.

Quadro 9 – Valores e variáveis visuais para $\boldsymbol{f(x) = c + d \cdot sen(ax + b)}$

Variáveis visuais	Valores	Unidade significante simbólica correspondentes
Translação vertical	Para cima	$c > 0$
	Para baixo	$c < 0$
Translação horizontal	Para esquerda	$b > 0$
	Para direita	$b < 0$
Alteração de amplitude	Im = $[-d, d]$	$\lvert d \rvert$
Alteração de período	$\frac{2\pi}{\lvert a \rvert}$	$\lvert a \rvert$

Fonte: Elaborado pela autora com base no livro analisado

A função geral seria:

$$y = c + d \cdot sen(ax + b)$$

Entretanto, não fica explícito que esta é a forma geral de uma função seno, o mesmo acontece para a função cosseno.

Além disso, nessa abordagem o livro deixa, parcialmente, claro a relação das variáveis (a, b, c, d) com os dados visuais. Em outras palavras, uma alteração na variável c faz com que a curva da função se desloque para cima ou para baixo, dependendo do sinal $(+\ ou-)$ que a acompanhe. Uma alteração na variável b faz a curva "andar" para a esquerda ou para a direita, também dependendo do sinal $(+\ ou-)$ que a acompanhe. A curva pode se achatar ou esticar dependo do valor da variável d. E o período da curva está diretamente ligado ao valor da variável a.

Conforme Duval (2009), toda atividade de conversão pressupõe a discriminação das unidades significantes, sendo uma condição necessária para a conversão e coordenação. Contudo, "é necessário possibilitar a exploração de todas as variáveis possíveis de uma representação num registro fazendo prever, ou observar, as variações concomitantes de representação em outro registro" (DUVAL, 2009, p.101).

Além disso, apesar da discriminação das unidades significantes, não ocorre, de fato, uma conversão e coordenação entre os registros simbólico-algébrico e o registro gráfico, pois não existe heterogeneidade nos dois sentidos. Na explicação da construção de gráficos, os exemplos favorecem apenas a transição do registro algébrico para o registro gráfico, sendo ignorado a volta, a transição do registro gráfico para o registro algébrico.

Notamos então que o autor apresenta duas formas de construção de gráfico. A primeira é citada logo após a definição da função seno e da função cosseno, onde o autor utiliza a tabela como apoio, a essa forma de construção identificamos que se trata da abordagem ponto a ponto. A segunda forma é apresentada no tópico de construção de gráfico, onde é realizado por meio de transformações e utilizadas as funções $g(x) = senx$ e $g(x) = cosx$ como funções fundamentais, forma de construção que contempla a abordagem de interpretação global de propriedades figurais.

Em ambas as abordagens são utilizados os mesmos registros de representação: registro algébrico, registro tabular e registro gráfico. Entendemos que para chegar à abordagem de interpretação global de propriedades figurais, o autor se apoiou na abordagem do ponto a ponto, não sendo necessário o estudante fazer o mesmo, visto que o objetivo é fazer com que o aluno não se limite ao uso de tabela.

Quanto aos exercícios propostos, após cada definição e exercício resolvido, o livro traz os exercícios propostos para que o aluno exercite seus conhecimentos. Esses exercícios se enquadram na **categoria de Resolução de Exercícios** e optamos por analisar eles de forma conjunta. O Quadro 10 a seguir apresenta cada um dos exercícios propostos, indicando a qual conteúdo pertence, o número do exercício, o registro de partida, registro de chegada e, por fim, se a passagem é um tratamento ou conversão.

Quadro 10 – Tratamentos e conversões observados nos exercícios propostos do livro

Conteúdo	**Nº Exercício**	**Registro de Partida**	**Registro de chegada**	**Atividade semiótica**
Função Periódica	1	Gráfico	Numérico	Conversão
	2	Gráfico	Numérico	Conversão
Função Seno	7	Algébrico	Numérico	Tratamento
	8	Algébrico	Gráfico	Conversão
	9	a) Gráfico	Língua natural	Conversão
		b) Gráfico	Numérico	Conversão
		c) Gráfico	Numérico	Conversão
		d) Gráfico	Língua natural	Conversão
	10	Algébrico	Numérico	Tratamento
	11	a) Algébrico	Numérico	Tratamento
		b) Algébrico	Gráfico	Conversão
		c) Algébrico	Numérico	Tratamento
		d) Algébrico	Numérico	Tratamento
	12	a) Algébrico	Tabular	Conversão
		b) Algébrico	Gráfico	Conversão
		c) Algébrico	Gráfico	Conversão
		d) Gráfico	Língua natural	Conversão
		e) Algébrico	Língua natural	Conversão
Função Cosseno	13	Algébrico	Numérico	Tratamento
	14	Algébrico	Gráfico	Conversão
	15	a) Gráfico	Numérico	Conversão
		b) Gráfico	Numérico	Conversão
		c) Gráfico	Numérico	Conversão
		d) Gráfico	Língua natural	Conversão

	16	Algébrico	Gráfico	Conversão
	17	Algébrico	Numérico	Tratamento
Construção de Gráficos	28	Gráfico	Algébrico	Conversão
	29	Gráfico	Gráfico	Tratamento
		Gráfico	Numérico	Conversão
	30	Gráfico	Numérico	Conversão
	31	Algébrico	Gráfico	Conversão
		Gráfico	Gráfico	Tratamento
	32	Algébrico	Numérico	Tratamento
	33	Algébrico	Gráfico	Conversão

Fonte: Elaborado pela autora com base no livro analisado

Notamos que para o estudo de função periódica, função seno, função cosseno e construção de gráficos o livro traz um total de 34 exercícios propostos, onde 24 exercícios promovem a conversão, que representam 70% dos exercícios, enquanto que 10 exercícios mobilizam a atividade semiótica de tratamento, representando 30% dos exercícios. Acreditamos ser aceitável a porcentagem de exercícios que promovem a conversão, visto que essa é a atividade semiótica principal para apreensão conceitual do objeto matemático estudado.

Listamos abaixo as representações e o sentido que ocorre o tratamento e a conversão e quantos exercícios abrangem essas atividades semióticas. Os tratamentos ocorrem no sentido:

- Registro Algébrico → Registro Numérico: oito exercícios propostos;
- Registro Gráfico → Registro Gráfico: dois exercícios propostos;

Já as conversões ocorrem no sentido:

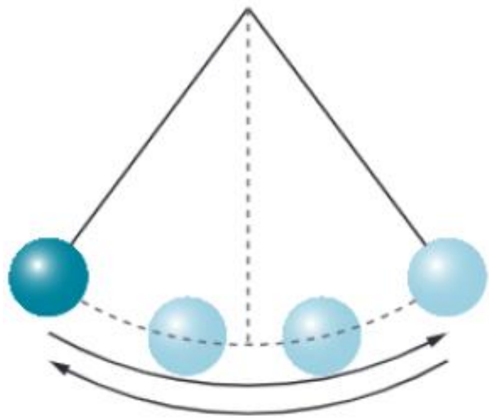
- Registro Gráfico → Registro Numérico: nove exercícios propostos;
- Registro Algébrico → Registro Gráfico: oito exercícios propostos;
- Registro Gráfico → Registro Algébrico: um exercício;
- Registro Gráfico → Registro em língua natural: quatro exercícios propostos;
- Registro Algébrico → Registro Tabular: um exercício;
- Registro Algébrico → Registro em língua natural: um exercício;

Apesar da diversidade de registros, na conversão nota-se pouca coordenação entre as representações aparecendo somente entre o registro simbólico-algébrico e registro gráfico. Chama atenção ainda o fato de apenas um exercício trabalhar a passagem do registro gráfico para o algébrico. Uma vez que o livro trabalha com a abordagem de interpretação global de propriedades figurais e a passagem Registro Gráfico → Registro Algébrico é a mais problemática, o ideal seria mais exercícios que enfatizassem tal conversão.

4.2 Livro 2 – Coleção Matemática em Contextos – Trigonometria e Sistemas Lineares

Os autores apresentam as funções trigonométricas a partir de duas situações: 1) Relógio de pêndulo e 2) Marés. O exemplo do relógio de pêndulo é utilizado, pois a medida de intervalo necessário para que o pêndulo complete uma oscilação inteira em um relógio é chamada de período esse movimento pode ser estudado através das funções trigonométricas seno e cosseno. Para entender o movimento do pêndulo, é exibido uma representação esquemática[4] de um pêndulo simples, conforme mostra a Figura 45.

Figura 45 – Representação esquemática de um pêndulo simples



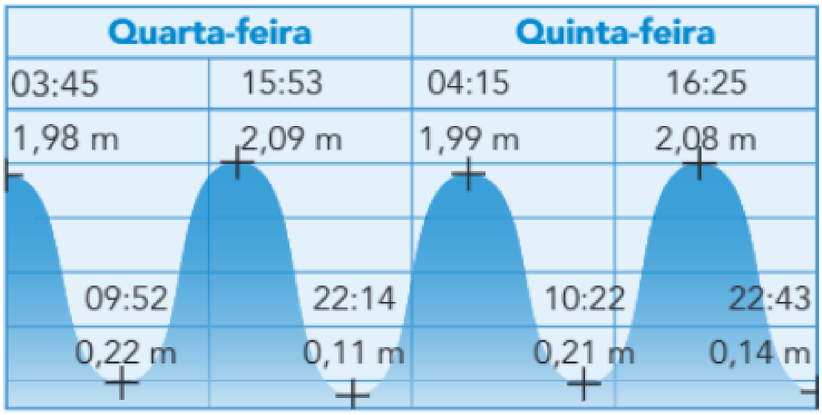
Fonte: Dante e Viana (2020, p.38)

A Figura 45 exemplifica que quando o pêndulo se encontra na amplitude máxima, a oscilação será completa quando ele voltar à mesma posição.

A segunda situação se refere ao fenômeno das marés, onde menciona que a consulta do nível de marés é, normalmente, realizada através de uma tábua. Daí, um exemplo utilizado tábua de marés é apresentado, em que o nível de maré foi observado em dois dias consecutivos, posteriormente os dados são apresentados em uma representação gráfica e tabular, como pode ser viso na Figura 46.

[4] O termo “representação sistemática” é utilizada pelo autor no livro.

Figura 46 – Representação gráfica e tabular e uma tábua de marés em dois dias consecutivos



Quarta-feira

Horário	Nível do mar
03:45	↑ 1,98 m
09:52	↓ 0,22 m
15:53	↑ 2,09 m
22:14	↓ 0,11 m

Quinta-feira

Horário	Nível do mar
04:15	↑ 1,99 m
10:22	↓ 0,21 m
16:25	↑ 2,08 m
22:43	↓ 0,14 m

Fonte: Dante e Viana (2020, p. 38)

Como as características da variação do nível do mar se repetem, aproximadamente, após o mesmo intervalo de tempo, logo, o fenômeno da maré pode ser definido como um fenômeno periódico e ser modelado por uma função trigonométrica.

As duas situações utilizadas para introdução das funções trigonométricas se enquadram na **categoria de Definição,** já que os dois contextos ajudam na construção da definição de uma função trigonométrica.

No exemplo do pêndulo, notamos que uma representação figural foi utilizada para fazer entender o período, conceito presente no estudo dessas funções. Além da representação figural, notamos a presença da representação em língua natural, utilizada para narrar o exemplo. No segundo exemplo, temos a presença da representação em língua natural, dessa vez seguida da representação gráfica e representação tabular.

Em ambos exemplos, notamos que o livro não utilizou uma expressão algébrica para modelar as situações. Através de questionamentos presentes em cada um dos exemplos, o leitor é apresentado à conceitos como período e amplitude.

Mais adiante, os autores apresentam as funções trigonométricas. A Figura 47 traz a definição da função seno.

Figura 47 – Definição da função trigonométrica seno

A **função trigonométrica seno** é a função real de variável real que associa, a cada número real x, o valor real **sen x**.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \text{sen } x$$

Fonte: Dante e Viana (2020, p. 62)

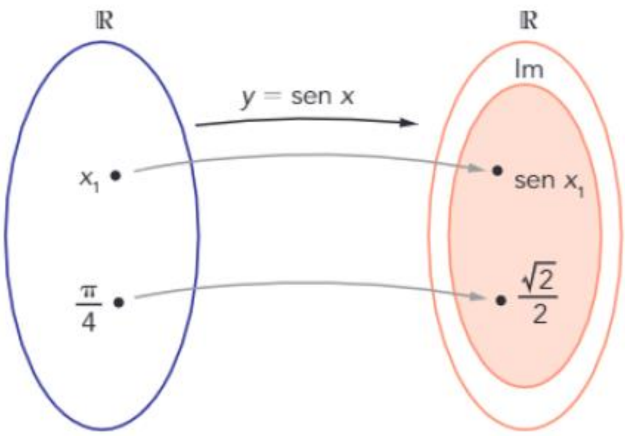
A Figura 47 apresenta a definição da função seno através das representações em língua natural e representação simbólica. O enxerto

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to f(x) = senx$$

É a linguagem simbólica da definição. Visto que uma função é uma relação entre dois conjuntos, os autores utilizam o diagrama de flechas para melhor compreensão da definição, como mostra a Figura 48.

Figura 48 – Registro figural da definição da função seno



Fonte: Dante e Viana (2020, p. 62)

A Figura 48 mostra que um ponto x_1 do conjunto ℝ é levado ao conjunto ℝ por meio da função $y = senx$ e se relaciona ao ponto $senx_1$, que será sua imagem. Logo, o domínio da função y será o conjunto dos reais e o contradomínio será os reais, ao ponto que x_1 se relaciona será o conjunto imagem. O conjunto imagem está dentro dos reais, logo, a imagem também será os reais.

A primeira flecha do diagrama, $x_1 \to senx_1$, é uma explicação genérica da definição. Os autores utilizam um ponto específico, $\frac{\pi}{4} \to \frac{\sqrt{2}}{2}$. Acreditamos ser um exemplo necessário para o leitor perceber que, por se tratar de função trigonométrica, os pontos do domínio devem estar em radianos.

A definição da função seno adequa-se à **categoria de Definição**, os registros de representação utilizados são a representação em língua natural, representação algébrica e representação figural. Há uma conversão da representação em língua natural para a representação algébrica e, posteriormente, para a representação gráfica. Entretanto, não há coordenação entre as representações, pois não é discriminado e explicitado uma articulação as unidades significantes desses registros.

Logo em seguida, é apresentado o gráfico da função seno que se insere na **categoria de Procedimento de construção de gráfico.** Sabendo que o gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), para $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ com $y = f(x)$, o autor utiliza uma tabela para marcar os pontos da função seno e auxiliar na passagem da expressão algébrica para o gráfico. Para a construção do gráfico, escolheu-se primeiro valores para x pertencente ao intervalo $0 < x < 2\pi$. A Figura 49 apresenta valores para $0 < x < \pi$.

Figura 49 – Valores para $\boldsymbol{x}$ no intervalo $\boldsymbol{0 < x < \pi}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sen x	0	0,5	0,7	0,9	1	0,9	0,7	0,5	0

Fonte: Dante e Viana (2020, p. 62)

A Figura 50 apresenta valores para $\pi < x < 2\pi$.

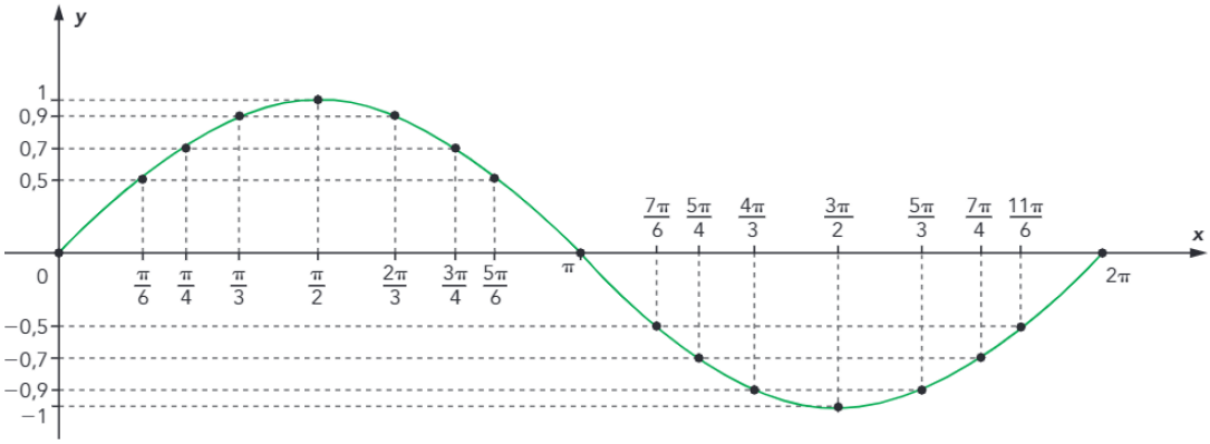
Figura 50 – Valores para x no intervalo $\boldsymbol{\pi < x < 2\pi}$

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
sen x	−0,5	−0,7	−0,9	−1	−0,9	−0,7	−0,5	0

Fonte: Dante e Viana (2020, p. 62)

Encontrados os pontos, esses são marcados em um plano cartesiano e traça-se a curva da função. O Figura 51 apresenta a curva da função $f(x) = senx$ para $x \in [0, 2\pi]$.

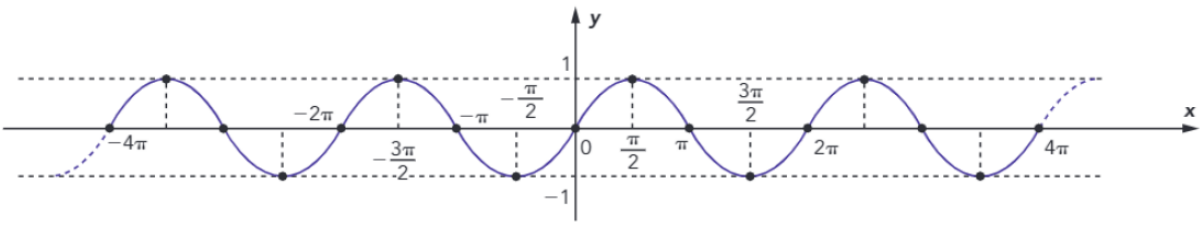
Figura 51 – Gráfico da função seno para $\boldsymbol{x} \in [\mathbf{0}, \boldsymbol{2\pi}]$



Fonte: Dante e Viana (2020, p. 63)

O livro deixa explícito que o gráfico da função seno exibido na Figura 51 corresponde para valores de x maiores que zero e até 2π. Como a função seno é definida para todo o conjunto dos números reais, (isto é, $D(f) = \mathbb{R}$), a curva pode ser estendida para valores menores do que zero e para valores maiores que 2π. A curva estendida da função é mostrada na Figura 52.

Figura 52 – Curva da função $\boldsymbol{f(x) = senx}$



Fonte: Dante e Viana (2020, p. 63)

Os autores ainda apontam que o gráfico da função seno é simétrico em relação à origem do plano cartesiano.

Observa-se que a abordagem ponto a ponto é utilizada para a construção do gráfico da função $f(x) = senx$. A simetria dessa função em relação à origem do plano cartesiano é uma variável visual da representação gráfica, entretanto, não é possível ver uma articulação entre essa variável visual e a unidade significante da representação algébrica.

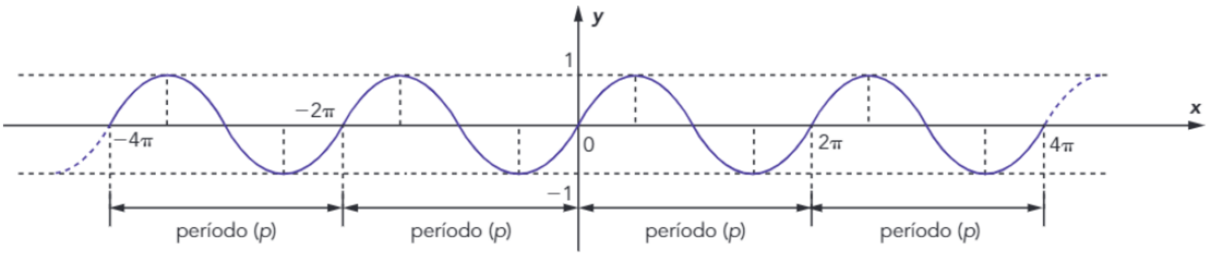
Logo após, o livro aborda sobre a periodicidade da função seno. Antes disso, recapitula a definição de uma função periódica quando diz que

> uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada periódica quando existe um número $p \neq 0$ tal que $f(t+p) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Quando isso ocorre, temos $f(t+kp) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$. O menor número $p > 0$ tal que $f(t+p) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ é chamado período da função f (DANTE; VIANA, 2020, p. 63).

O período de uma função periódica pode ser encontrado a partir de um deslocamento horizontal do gráfico da função e observar para que valores o gráfico começa a se repetir.

Na Figura 53 exibe o gráfico da função seno, onde podemos observar a repetição dos valores dessa função.

Figura 53 – Periodicidade da função seno



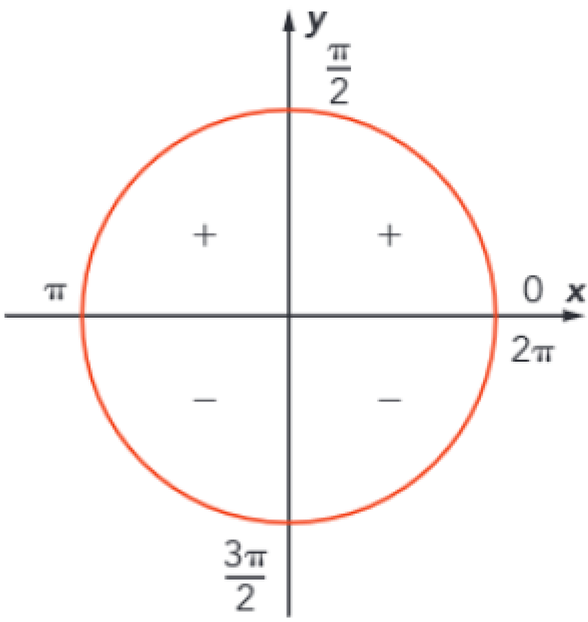
Fonte: Dante e Viana (2020, p. 63)

Observando a Figura 53, notamos que os valores da função se repetem a cada intervalo de 2π e indicamos por $p = 2\pi$. Logo, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $senx = sen(x + 2\pi) = sen(x + 4\pi) = sen(x + 6\pi)$ e assim por diante.

Sabemos que a periodicidade de uma função seno ou cosseno é uma variável visual, pois modificando o período de uma função no seu gráfico irá acarretar uma mudança na expressão algébrica (representação algébrica). Para ficar explícito qual coeficiente da expressão algébrica está ligado ao período, o recomendável seria que os autores já tivessem apresentada a expressão algébrica completa, que só será abordada mais adiante na forma $f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)$.

O ciclo trigonométrico é retomado para o estudo do sinal dos valores da função seno. A Figura 54 traz o exemplo apresentado no livro.

Figura 54 – Representação gráfico-geométrica para estudo do sinal dos valores da função seno



Fonte: Dante e Viana (2020, p. 64)

A partir da Figura 54, o autor conclui que para o 1º e 2º quadrantes a função seno terá valor positivo enquanto que para o 3º e 4º quadrantes a função seno terá valor negativo.

Para estudar o sinal dos valores da função seno, a representação gráfico-geométrica e a representação simbólica trabalham conjuntamente. Notamos que há congruência semântica, especificamente, de univocidade semântica terminal entre os dois registros, pois a função seno é positiva nos 1º e 2º quadrantes, isto é, $y > 0$, e negativa nos 3º e 4º quadrantes quando $y > 0$. Entretanto, na leitura do ciclo trigonométrico esse mesmo critério se faz ausente devido os arcos positivos estarem no sentido anti-horário.

Para concluir o estudo da função seno, os autores trazem algumas características quando a função for definida por $f(x) = senx$, conforme mostra a Figura 55.

Figura 55 - Características da função seno quando definida por $\boldsymbol{f(x) = senx}$

- A função seno tem domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e conjunto imagem $Im(f) = [-1, 1]$, ou seja, todos os números reais que estão entre -1 e 1, incluindo esses números.
- Essa função assume valor máximo 1 e valor mínimo -1, ou seja, o maior valor que ela assume é 1 e o menor é -1. Além disso, essa função tem **amplitude** (diferença entre os valores máximo e mínimo) igual a 2.
- A função seno é periódica, de período $p = 2\pi$.
- Na função seno, temos $\text{sen}(-x) = -\text{sen}\, x$, para todo x real. Então, dizemos que ela é uma função ímpar.
- A função seno pode assumir valores nulos, positivos ou negativos.
  - $\text{sen}\, x = 0$, para $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  - $\text{sen}\, x > 0$, para x do 1º e 2º quadrantes e para $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  - $\text{sen}\, x < 0$, para x do 3º e 4º quadrantes e para $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Fonte: Dante e Viana (2020, p. 64)

As características apresentadas na Figura 55 são unidades significantes da representação simbólica e a amplitude é uma variável visual da representação gráfica. Todavia, os autores apresentam essas características apenas para a função seno expressada algebricamente por $f(x) = senx$.

O ideal seria que essas características fossem apresentadas e até mesmo expandidas após a apresentação da senoide $f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)$, pois assim, o leitor entenderia a importância de cada coeficiente da função para a construção do gráfico e perceberia que a função $f(x) = senx$ se assemelha à função $f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)$, com $a = d = 0$ e $b = c = 1$.

Seguidamente, o livro aborda a função cosseno da mesma forma que a função seno. A Figura 56 traz a definição da função cosseno apresentada no livro.

Figura 56 – Definição da função trigonométrica cosseno

A **função trigonométrica cosseno** é a função real de variável real que associa, a cada número real x, o valor real **cos x**.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \cos x$$

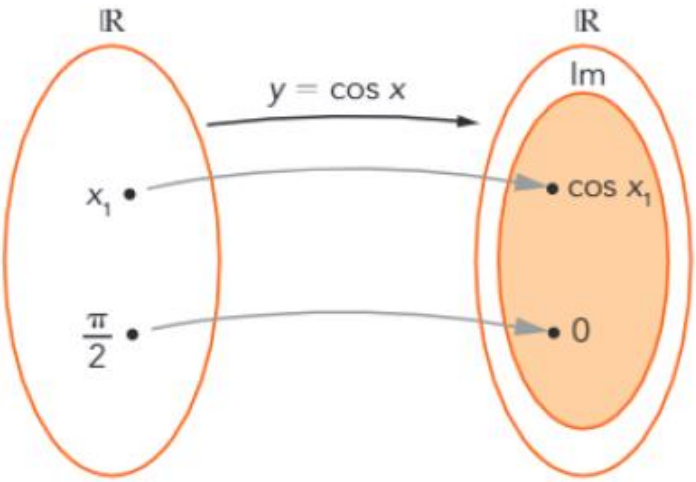
Fonte: Dante e Viana (2020, p. 64)

A Figura 56 apresenta a definição da função cosseno através das representações em língua natural e representação simbólica. O enxerto

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = cosx$$

É a linguagem simbólica da definição. Visto que uma função é uma relação entre dois conjuntos, os autores utilizam novamente o diagrama de flechas para melhor compreensão da definição, como mostra a Figura 57.

Figura 57 - Registro figural da definição da função cosseno



Fonte: Dante e Viana (2020, p. 64)

A Figura 57 mostra que um ponto x_1 do conjunto ℝ é levado ao conjunto ℝ por meio da função $y = cosx$ e se relaciona ao ponto $cosx_1$, que será sua imagem. Logo, o domínio da função y será o conjunto dos reais e o contradomínio será os reais, ao ponto que x_1 se relaciona será o conjunto imagem. O conjunto imagem está dentro dos reais, logo, a imagem também será os reais.

A primeira flecha do diagrama, $x_1 \to cosx_1$, é uma explicação genérica da definição. Os autores utilizam um ponto específico, $\frac{\pi}{2} \to 0$. Acreditamos ser um exemplo necessário para o leitor perceber que, por se tratar de função trigonométrica, os pontos do domínio devem estar em radianos.

A definição da função cosseno adequa-se à **categoria de Definição**, os registros de representação utilizados são a representação em língua natural, representação algébrica e representação figural. Há uma conversão da representação em língua natural para a representação algébrica e, posteriormente, para a representação gráfica. Entretanto, não há coordenação entre as representações, pois não é discriminado e explicitado uma articulação as unidades significantes desses registros.

Após o diagrama de flechas, o livro aborda o gráfico da função cosseno, que se insere na **categoria de Procedimento de construção de gráfico.** Os autores utilizam uma tabela para marcar os pontos da função cosseno e auxiliar na passagem da expressão algébrica para o gráfico. Para a construção do gráfico, escolheu-se primeiro valores para x pertencente ao intervalo $0 < x < 2\pi$. A Figura 58 apresenta valores para $0 < x < \pi$.

Figura 58 - Valores para $\boldsymbol{x}$ no intervalo $\mathbf{0} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{\pi}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
cos x	1	0,9	0,7	0,5	0	−0,5	−0,7	−0,9	−1

Fonte: Dante e Viana (2020, p. 65)

A Figura 59 apresenta valores para $\pi < x < 2\pi$.

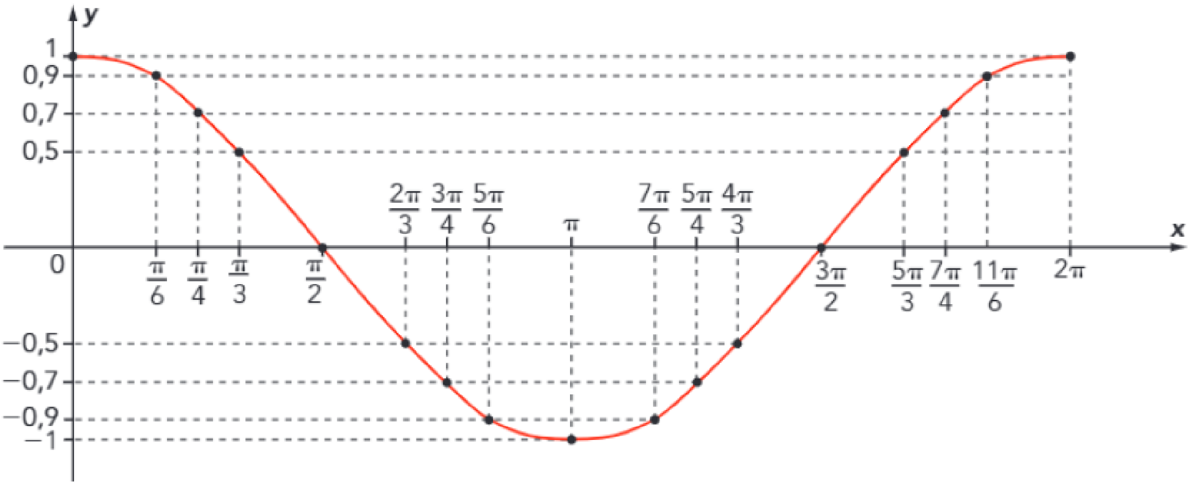
Figura 59 - Valores para x no intervalo $\boldsymbol{\pi} < \boldsymbol{x} < \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}$

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
cos x	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	−0,9	−0,7	−0,5	0	0,5	0,7	0,9	1

Fonte: Dante e Viana (2020, p. 65)

Encontrado os pontos, esses são marcados em um plano cartesiano e traça-se a curva da função. O Figura 60 apresenta a curva da função $f(x) = cosx$ para $x \in [0, 2\pi]$.

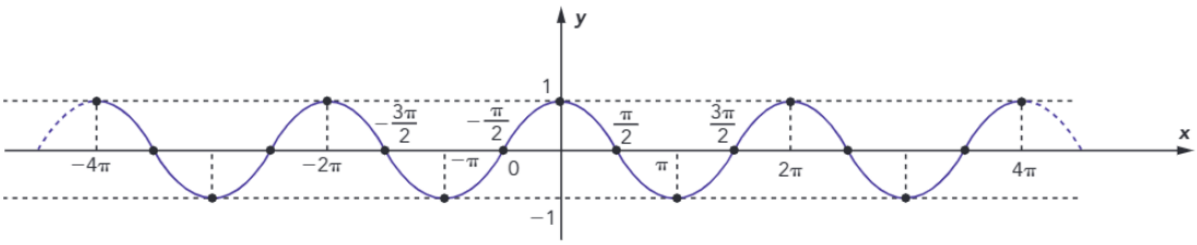
Figura 60 - Gráfico da função cosseno para $\boldsymbol{x} \in [\mathbf{0}, \mathbf{2\pi}]$



Fonte: Dante e Viana (2020, p. 65)

Mais uma vez, o livro deixa explícito que o gráfico da função cosseno exibido na Figura 60 corresponde para valores de x maiores que zero e até 2π. Como a função cosseno é definida para todo o conjunto dos números reais, (isto é, $D(f) = \mathbb{R}$), a curva pode ser estendida para valores menores do que zero e para valores maiores que 2π. A curva estendida da função é mostrada na Figura 61.

Figura 61 – Periodicidade da função cosseno



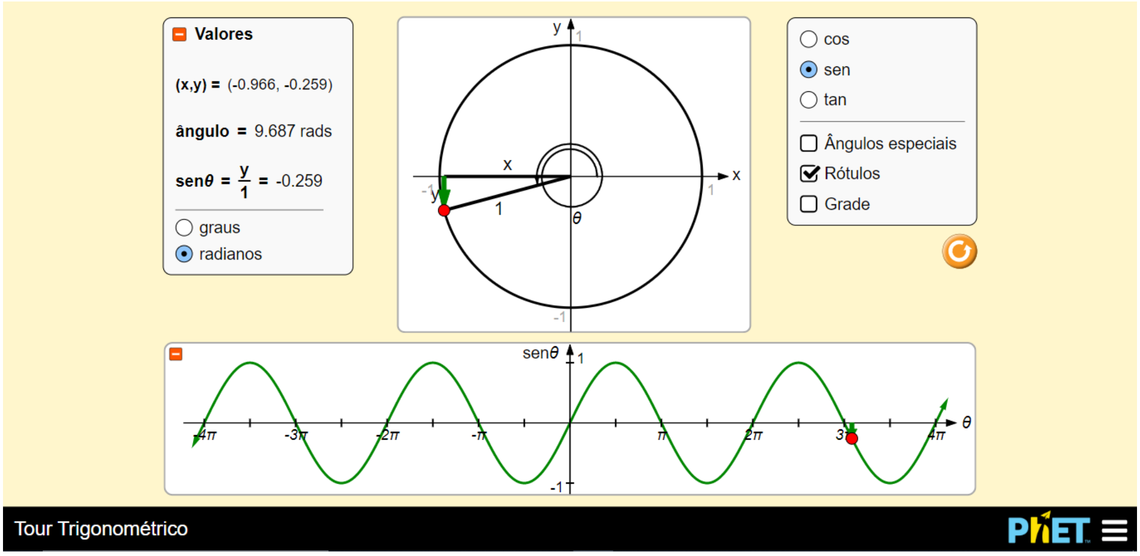
Fonte: Dante e Viana (2020, p. 65)

Assim como os autores apontaram que o gráfico da função seno é simétrico em relação à origem do plano cartesiano, eles mencionam que o gráfico da função cosseno é simétrico em relação ao eixo y.

Mais uma vez a abordagem ponto a ponto é utilizada para a construção do gráfico da função $f(x) = cosx$. A simetria dessa função em relação ao eixo y é uma variável visual da representação gráfica, entretanto, não é possível ver uma articulação entre essa variável visual e a unidade significante da representação algébrica.

Em um box, o livro sugere o uso do site PhET Simulações Interativas, para que o leitor consiga visualizar a relação entre cada ponto $P(t)$ do ciclo trigonométrico associado a um número real t. No simulado, após escolher a função seno ou cosseno, o leitor ao modificar a posição do ponto no ciclo trigonométrico poderá ver a mudança na senoide e vice-versa. O livro disponibiliza o link para acesso à simulação. A Figura 62 apresenta a tela da simulação.

Figura 62 – Tela da simulação do PhET Simulações Interativas

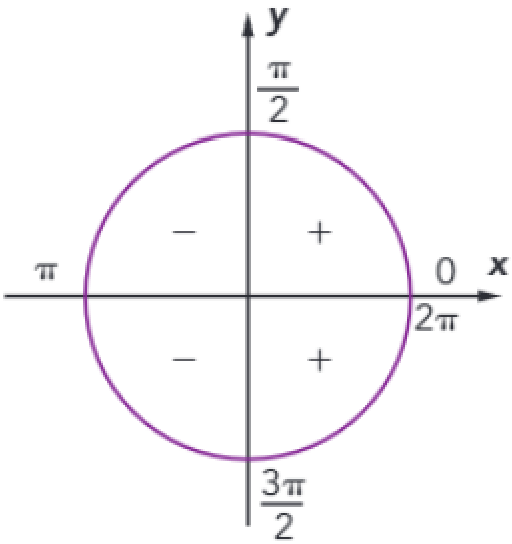


Fonte: PhET Simulações Interativas

A sugestão do uso do site adequa-se à **categoria de Uso de Tecnologias Digitais**. Conforme mostra a Figura 62, o ponto (em vermelho) pode ser alterado no ciclo trigonométrico (registro gráfico-geométrico) que implicará uma mudança na posição do ponto na curva da senoide (registro gráfico) e vice-versa. Tal passagem se configura como uma conversão devido se tratar de dois registros diferentes, pois o ciclo trigonométrico pertence simultaneamente aos registros gráfico e geométrico enquanto que a curva da função pertence somente ao registro gráfico, logo por cada registro mobilizar aspectos diferentes de um mesmo objeto, a transição é uma conversão.

O ciclo trigonométrico é retomado para o estudo do sinal dos valores da função cosseno. A Figura 63 traz o exemplo apresentado no livro.

Figura 63- Sinal dos valores da função cosseno



Fonte: Dante e Viana (2020, p. 66)

A partir da Figura 63, os autores concluem que para o 1º e 4º quadrantes a função cosseno terá valor positivo enquanto que para o 2º e 3º quadrantes a função cosseno terá valor negativo.

Para estudar o sinal dos valores da função seno, a representação gráfico-geométrica e a representação simbólica trabalham conjuntamente. Notamos que não há congruência semântica, especificamente, de univocidade semântica terminal entre os dois registros, pois a função cosseno é positiva nos 1º e 4º quadrantes, isto é, $y > 0$ e $y < 0$ respectivamente, e negativa nos 2º e 3º quadrantes quando $y > 0$ e $y < 0$ respectivamente. Entretanto, na leitura do ciclo trigonométrico esse mesmo critério se faz ausente devido os arcos positivos estarem no sentido anti-horário.

Para concluir o estudo da função cosseno, os autores trazem algumas características quando a função for definida por $f(x) = cosx$, conforme mostra a Figura 64.

Figura 64 - Características da função cosseno quando definida por $\boldsymbol{f(x) = cosx}$

- O domínio da função cosseno também é $D(f) = \mathbb{R}$ e o conjunto imagem também é $Im(f) = [-1, 1]$.
- Essa função também assume valor máximo 1 e valor mínimo -1 e tem amplitude igual a 2.
- O período da função cosseno é o mesmo da função seno: a função cosseno é periódica, de período $p = 2\pi$.
- Na função cosseno, temos $\cos(-x) = \cos x$, para todo x real. Então, dizemos que a função cosseno é par, diferentemente da função seno, que é ímpar.
- A função cosseno pode assumir valores nulos, positivos ou negativos.
  - $\cos x = 0$, para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  - $\cos x > 0$, para x do 1º e 4º quadrantes e para $x = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  - $\cos x < 0$, para x do 2º e 3º quadrantes e para $x = \pi + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Fonte: Dante e Viana (2020, p. 66)

As características apresentadas na Figura 64 são unidades significantes da representação simbólica. Todavia, o autor apresenta essas características apenas para a função cosseno expressada algebricamente por $f(x) = cosx$.

O ideal seria que essas características fossem apresentadas e até mesmo expandidas após a apresentação da senoide $f(x) = a + b \cdot cos(cx + d)$, pois assim, o leitor entenderia a importância de cada coeficiente da função para a construção do gráfico e perceberia que a função $f(x) = cosx$ se assemelha à função $f(x) = a + b \cdot cos(cx + d)$, com $a = d = 0$ e $b = c = 1$.

Apresentadas funções seno e cosseno, do tipo $f(x) = senx$ e $f(x) = cosx$, o livro traz uma seção intitulada **As senoides e os fenômenos periódicos**, em que apresenta outros tipos de senoides que se ajustam de maneira razoável a um fenômeno periódico real, essas funções são expressas algebricamente por $f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)$ ou $f(x) = a + b \cdot$

$cos(cx + d)$, com $b \neq 0$ e $c \neq 0$. Tal seção enquadra-se na **categoria de Procedimento de construção do gráfico**.

Antes de apresentar o gráfico para essas funções mais complexas, o autor menciona a importância de cada coeficiente da expressão algébrica. Sendo:

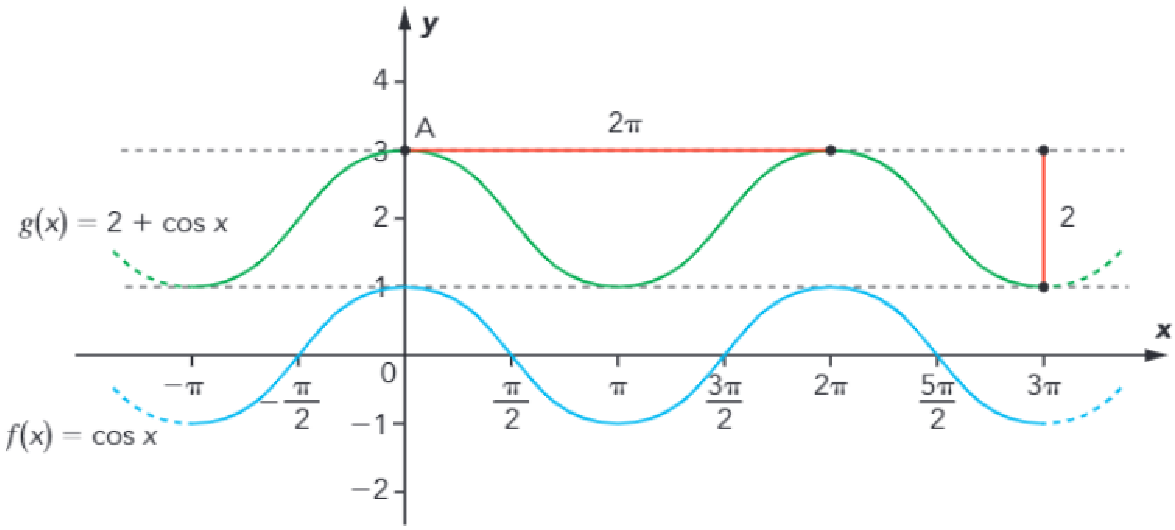
- Período: depende do coeficiente c, de modo que $p = \frac{2\pi}{|c|}$
- Conjunto imagem da função: $[a - b;\ a + b]$
- Amplitude: $2b$

O período, conjunto imagem e amplitude são variáveis visuais. O texto do livro deixa explícito a ligação de cada coeficiente da expressão algébrica com o comportamento. O período da função está ligado ao coeficiente c, uma modificação nesse coeficiente implicará uma mudança na curva da função. O conjunto imagem dependerá dos valores dos coeficientes a e b e a amplitude está associada ao coeficiente b. Os coeficientes a que as variáveis estão associadas são chamadas de unidades significantes do registro simbólico.

A partir daí, a função $f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)$ ou $f(x) = a + b \cdot cos(cx + d)$ são divididas em três partes, de modo que contemple os coeficientes a, b, c e d e permita um estudo do comportamento delas no gráfico quando comparadas com as curvas mais simples $[f(x) = senx\ ou\ f(x) = cosx]$.

A Figura 65 apresenta o primeiro exemplo do livro que estuda a função e seu gráfico quando g for do tipo $g(x) = a + cosx$, especificamente, $g(x) = 2 + cosx$, e toma $f(x) = cosx$ como função base para efeito comparativo.

Figura 65 – Estudo das senoides para funções do tipo $\boldsymbol{f(x) = a + cosx}$



Fonte: Dante e Viana (2020, p. 67)

Comparando as duas curvas da Figura 65, percebemos que para $g(x)$ o conjunto imagem será [1,3], pois $\mathrm{Im}(g) = [2-1, 2+1] = [1,3]$. Como o coeficiente $c = 1$, logo o período é $p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ e a amplitude é $2b = 2 \cdot 1 = 2$.

Entretanto, apesar de se estabelecer uma relação entre a representação algébrica e gráfica, percebe-se que há uma desvalorização da representação gráfica, visto que se recorre à representação algébrica para definir o período, conjunto imagem e amplitude mesmo quando é possível tirar essas informações do gráfico.

Apesar do autor não deixar explícito que a função $f(x) = cosx$ é para comparar com a nova função, entende-se que esse é o objetivo, visto que as duas curvas são esboçadas no mesmo plano cartesiano. Acredita-se que a intenção seria de verificar que mudança o coeficiente a traria para o gráfico da função do tipo $g(x) = a + cosx$ quando comparada com a curva de $f(x) = cosx$.

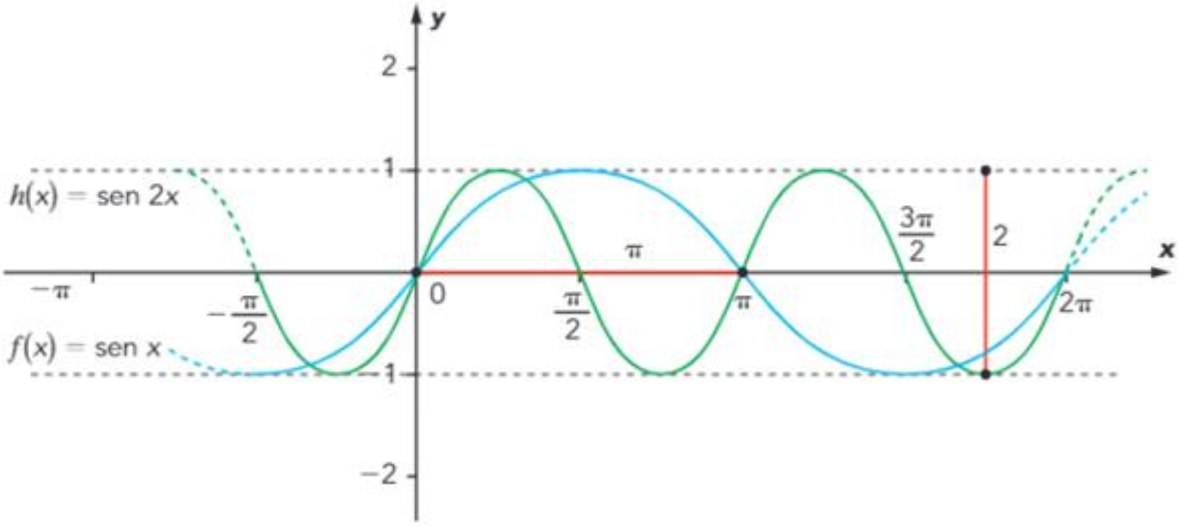
Partindo dessa hipótese, as curvas de ambas funções deveriam ser comparadas, ou seja, o gráfico de $g(x) = 2 + cosx$ se assemelha ao gráfico de $f(x) = cosx$, entretanto, a primeira está duas unidades $(+2)$ acima de $f(x) = cosx$ devido ao valor numérico de a $(a = 2)$. Logo, se $a > 0$ a curva, quando comparada à curva base, se deslocará verticalmente para cima. Um outro exemplo deveria ser trabalhado para quando a fosse negativo $(a < 0)$ e observar que a curva se deslocará verticalmente para baixo.

Seria concluído que o coeficiente implica um deslocamento vertical da curva base: quando $a > 0$, o deslocamento seria para cima e $a < 0$, o deslocamento seria para baixo. Por fim, os cálculos, como é abordado no livro, poderiam ser realizados para verificar a veracidade dessas informações.

Dessa forma, ambas as representações seriam valorizadas e poder-se-ia visualizar, de fato, a associação entre a unidade significante do coeficiente a e a variável visual na representação gráfica.

O segundo exemplo enfatiza o tipo $f(x) = sen(cx)$ quando $c > 1$, a função estudada é $h(x) = sen\, 2x$ e tomou-se a curva $f(x) = senx$ para comparação. Observe a Figura 66.

Figura 66 – Estudo das senoides para funções do tipo $\boldsymbol{f(x) = sen(cx)}$



Fonte: Dante e Viana (2020, p. 67)

Dada a função $h(x) = sen\,2x$, notamos que $a = 0, b = 1$ $c = 2$ e $d = 0$, logo o conjunto imagem $\text{Im}(h) = [0 - 1, 0 + 1] = [-1,1]$. Sendo $c = 2$, o período é $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ e amplitude é $2b = 2 \cdot 1 = 2$.

Novamente, percebe-se que a representação simbólica é mais enfatizada que a representação gráfica, dado que se recorre aos cálculos algébricos para identificar definir o período, conjunto imagem e amplitude da curva $h(x) = sen\,2x$ mesmo sendo possível retirar essas informações do gráfico.

Entendemos que as curvas das funções $f(x) = senx$ e $h(x) = sen\,2x$ são esboçadas no mesmo plano cartesiano para que sejam comparadas, em que $f(x) = senx$ serve como curva base para estudar o coeficiente c da função do tipo $h(x) = sen\,cx$ e verificar que mudança essa variável acarretaria no gráfico.

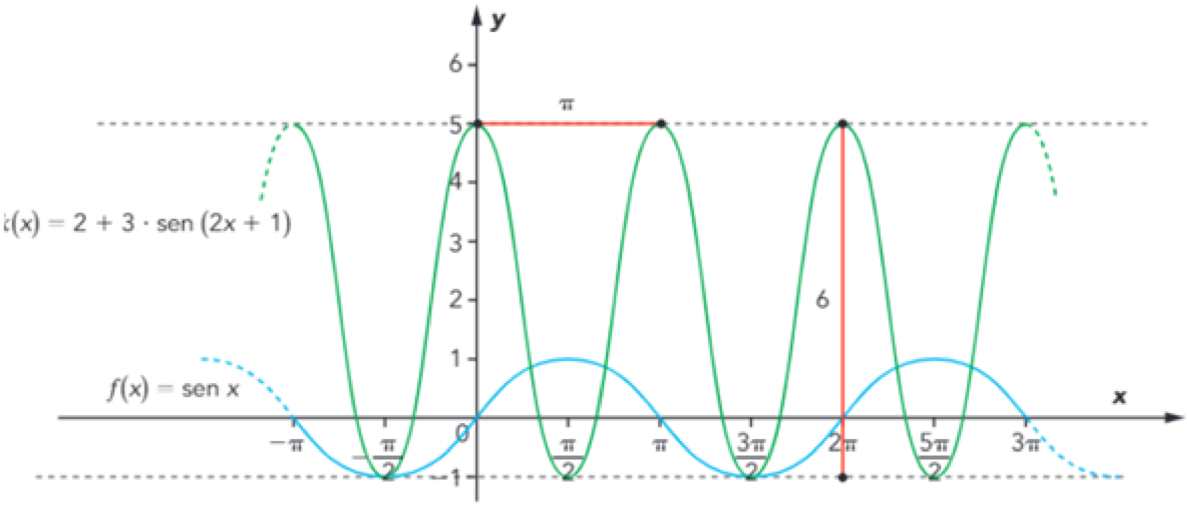
Partindo dessa hipótese, as curvas de ambas funções deveriam ser comparadas, ou seja, observando que há uma mudança no período. Quando comparada a curva de $h(x)$ com $f(x)$, dever-se-ia concluir que $h(x)$ tem o período menor que $f(x)$ e essa mudança ocorre devido ao coeficiente c, pois a amplitude e conjunto imagem das funções continuam inalterados. Um outro exemplo deveria ser trabalhado para quando c fosse negativo $(c < 0)$ e observar o comportamento da curva.

Seria concluído que o coeficiente c implica uma alteração do período da curva base: quanto maior o valor de c mais o gráfico fica "encolhido", em outras palavras, menor será seu período; e quanto menor o valor de c, maior será seu período. Se c for negativo $(c < 0)$, curva será simétrica em relação ao eixo x.

Os cálculos, como é abordado no livro, poderiam ser realizados para verificar a veracidade dessas informações. Dessa forma, ambas as representações seriam valorizadas e poder-se-ia visualizar, de fato, a associação entre a unidade significante do coeficiente c e a variável visual na representação gráfica.

O último exemplo estuda o comportamento da função $k(x) = 2 + 3 \cdot sen(2x + 1)$ e a curva da função $f(x) = senx$ é usada para comparação. A Figura 67 apresenta o gráfico de ambas funções.

Figura 67 – Estudo das senoides para funções do tipo $\boldsymbol{f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)}$



Fonte: Dante e Viana (2020, p. 67)

A função $k(x)$ do exemplo da Figura 67 aborda todos os coeficientes (a, b, c, d) e esboça seu gráfico com a curva $f(x) = senx$. A partir de $k(x)$, temos $a = 2, b = 3, c = 2$ e $d = 1$, onde a, b, c são foram estudados. Sabemos que o coeficiente d está ligado a deslocamento horizontal do gráfico, entretanto, não é possível observar esse deslocamento. Um outro exemplo deveria ser abordado, estudando o coeficiente d, isto é, um estudo para a senoide do tipo $f(x) = sen(x + d)$, para ser possível visualizar a variável visual associada a essa unidade significante. Só então, se estudaria a função completa $f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)$.

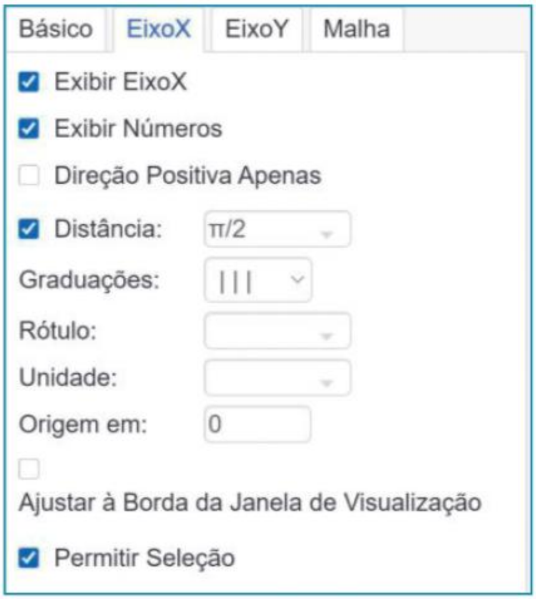
Retomando, nessa seção, o livro primeiramente apresentou as características das senóides (período, conjunto imagem e amplitude) e associou cada característica a um coeficiente da expressão algébrica e, posteriormente, trouxe os exemplos da Figura 65, Figura 66 e Figura 67 para visualizar essas características. Essas características identificamos como as variáveis visuais e os coeficientes associados são as unidades significantes.

Portanto, acredita-se que os autores identificaram as unidades significantes do registro gráfico e do registro algébrico, mas nem todas foram identificadas, visto que o deslocamento horizontal associado ao coeficiente d não foi identificado, assim como a variável visual simétrica. Percebe-se ainda que não foram empregadas todas as modificações possíveis nas unidades significantes, conforme sugere Duval (2011a).

Uma seção do capítulo é destinada para o uso de tecnologias digitais que se enquadra na **categoria de Uso de Tecnologias**. Os autores fizeram uso dessa seção para mostrar como construir o gráfico das funções seno e cosseno a partir do software educacional Geogebra.

Inicialmente, é ensinado a construir o gráfico das funções $f(x) = senx$ e $g(x) = cosx$. Por ser funções trigonométricas, o primeiro passo é configurar a escala do eixo x para radianos e colocar a distância de $\frac{\pi}{2}$, como mostra a Figura 68.

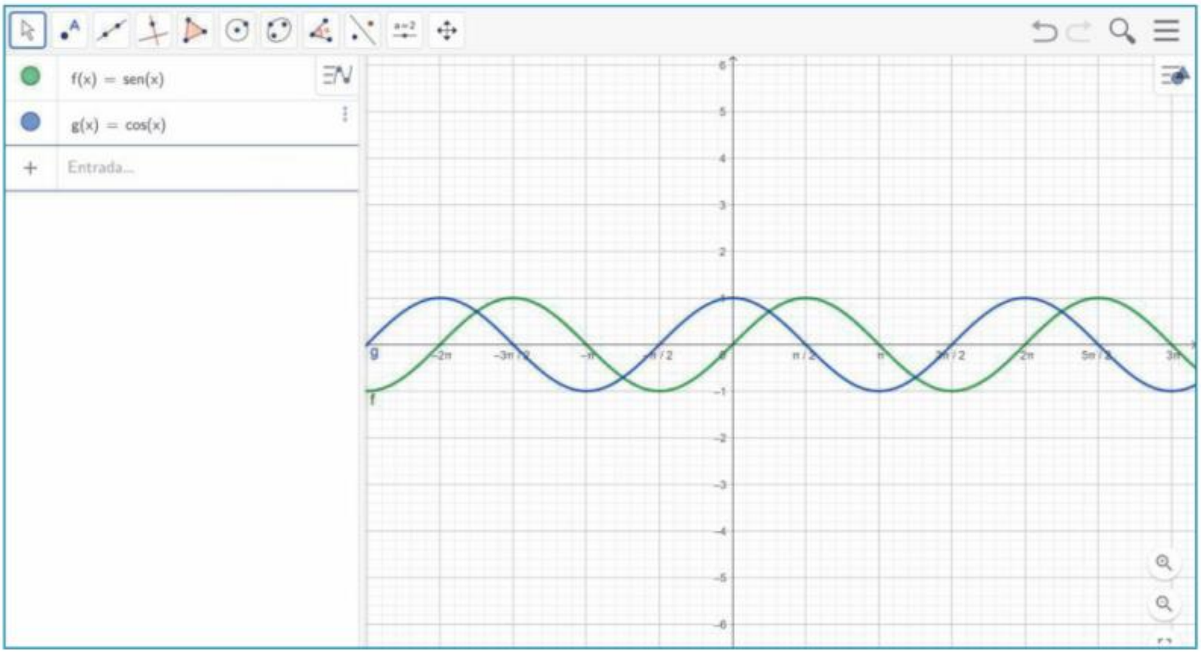
Figura 68 – Tela do Geogebra o 1º passo



Fonte: Dante e Viana (2020, p. 68)

No segundo passo, deve-se adicionar a entrada de comanda a função $f(x) = senx$ e teclar "Enter", depois adicionar a função $g(x) = cosx$ na entrada de comanda e teclar "Enter". Deve-se obter uma imagem conforme o da Figura 69.

Figura 69 – Tela do Geogebra do 2º passo



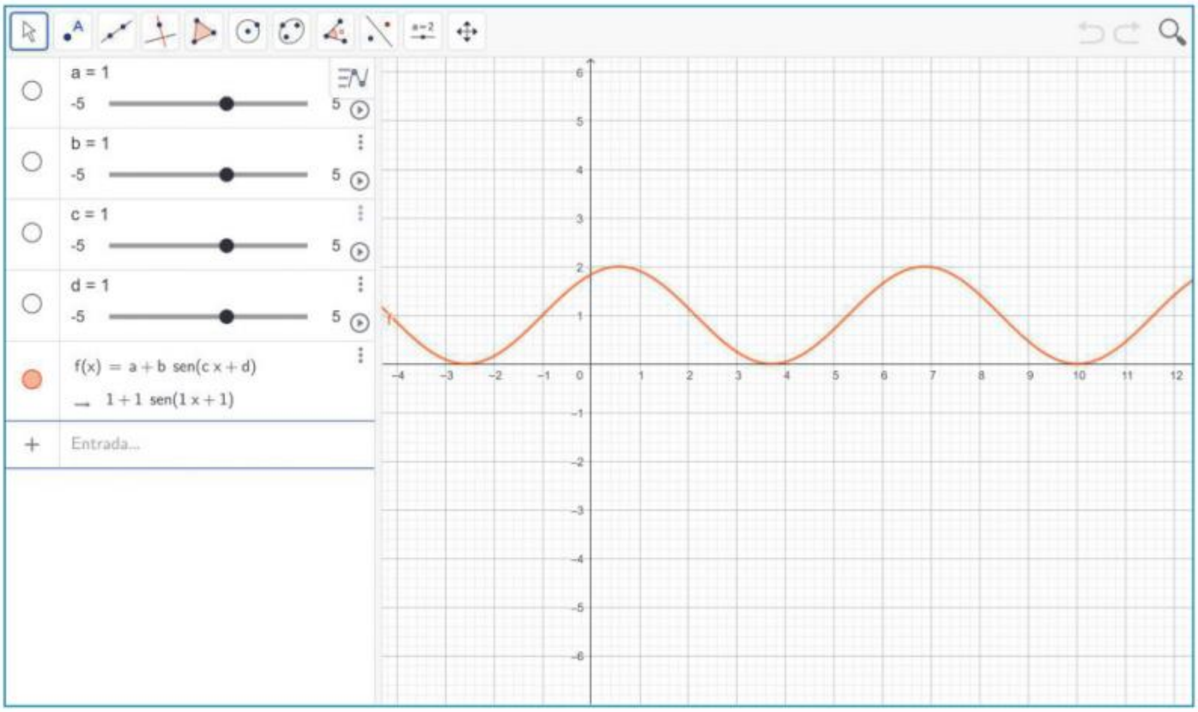
Fonte: Dante e Viana (2020, p. 68)

Nesse primeiro exercício com o Geogebra, pode-se fazer um estudo comparativo com as curvas das funções $f(x) = senx$ e $g(x) = senx$. Podemos afirmar que houve uma passagem da representação algébrica para a representação gráfica, que exige a conversão.

Nota-se uma conversão da representação algébrica para a representação gráfica, entretanto o software não permite a passagem da representação gráfica para a representação algébrica. Como apontado por Duval (2011b), o menu de comando favorece um registro de representação para se chegar a outro. Dessa forma, não há coordenação de registros, pois a fase de aprendizagem exige que a passagem inversa seja realizada.

Para o estudo da curva da função curva da função $f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)$, com $b \neq 0$ e $c \neq 0$, deve-se abrir um novo documento no Geogebra que esteja configurado a escala do eixo x para radianos. Em seguida, deve-se inserir no campo de entrada de comando a função $f(x) = a + b * sen(c * x + d)$ e teclar "Enter". Inserido a função, o software mostrará no comando controles deslizantes para os coeficientes a, b, c e d, conforme mostra a Figura 70.

Figura 70 – Tela do Geogebra para o estudo da função $\boldsymbol{f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)}$



Fonte: Dante e Viana (2020, p. 69)

Alterando todos os valores dos coeficientes, é possível ver a influência de cada um dos coeficientes para a construção do gráfico das senóides.

Mais uma vez, temos uma conversão da representação algébrica para a representação gráfica. O uso de softwares na construção de gráficos de funções matemáticas traz inúmeras vantagens, tais como, uma rápida visualização da curva e rapidez na mudança de parâmetros, coeficientes; entretanto, essa forma de construção privilegia a abordagem ponto a ponto, nesse caso, apenas mais ponto são obtidos e unidos para formar a curva da função (MORETTI; LUIZ, 2014).

Entretanto, a partir da Figura 70 consideramos que os autores do livro fazem uso da abordagem informático de interpretação global, visto que a abordagem de interpretação global de propriedades figurais é contemplada através do meio informático do software Geogebra. Contudo, o livro não conclui a importância de cada coeficiente, pelo contrário, através de perguntas induz o leitor a chegar às suas próprias conclusões. Os questionamentos realizados podem ser vistos na Figura 71 abaixo.

Figura 71 – Exercício referente ao estudo da função $\boldsymbol{f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)}$

2. Altere lentamente o valor de um coeficiente por vez, mantendo os demais, e observe o que acontece com o gráfico da função.

a) Qual é o efeito do coeficiente *a* no gráfico da função?

b) Qual é o efeito do coeficiente *b*, com $b \neq 0$, no gráfico da função?

c) Qual é o efeito do coeficiente *c*, com $c \neq 0$, no gráfico da função?

d) Qual é o efeito do coeficiente *d* no gráfico da função?

3. Alterando os controles deslizantes para $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 1{,}6$, você terá aproximadamente o gráfico da função dada por $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Essa função é equivalente a qual função que você estudou? Justifique por que elas são equivalentes.

Fonte: Dante e Viana (2020, p. 69)

O Exercício 2 da Figura 71 busca identificar as modificações conjuntas da expressão algébrico e do gráfico da função. Observamos que se trata de uma abordagem experimental, onde se varia o coeficiente da função mantendo-se as demais constantes e verifica-se o que acontece na curva da função. O coeficiente será a unidade significante do registro simbólico e as mudanças no gráfico será a variável visual. Essa abordagem experimental é sugerida por Duval (2011a) e significa proceder a uma análise de congruência semântica entre os dois registos de representação do objeto estudado.

O terceiro exercício da Figura 71 exige que ao construir o gráfico da função $f(x) = sen\ (x + \frac{\pi}{2})$, o leitor reconheça que a curva dessa função é semelhante à curva da função $f(x) = cosx$.

Após a seção de tecnologias digitais, o livro passa para as atividades resolvidas, que se enquadra na **categoria de Resolução de Exercícios**. No total são apresentados quatro exercícios resolvidos. A primeira atividade resolvida é apresentada na Figura 72.

Figura 72 – Exercício resolvido

14. Determine o valor máximo da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 + 3 \cdot \text{sen}\ x$.

Resolução

O valor máximo que sen *x* assume é 1. Então, a função *f* terá valor máximo quando sen $x = 1$:

$f(x) = 2 + 3 \cdot 1 = 5$

Logo, o valor máximo é $f(x) = 5$.

Fonte: Dante e Viana (2020, p. 70)

Trata-se de uma atividade de aplicação, que parte do registro simbólico-algébrico para o registro simbólico-numérico, portanto, se tem uma atividade semio-cognitiva de tratamento.

A Figura 73 apresenta a segunda atividade resolvida trabalhada no conteúdo estudado.

Figura 73 – Exercício resolvido

15. (UCS-RS) A pressão arterial P (em mmHg) de uma pessoa varia, com o tempo t (em segundos), de acordo com a função definida por $P(t) = 100 + 20\cos(6t + \pi)$, em que cada ciclo completo (período) equivale a um batimento cardíaco.

Considerando que $19\pi \simeq 60$, quais são, de acordo com a função, respectivamente, a pressão mínima, a pressão máxima e a frequência de batimentos cardíacos por minuto dessa pessoa?

a) 80, 120 e 57.
b) 80, 120 e 60.
c) 80, 100 e 19.
d) 100, 120 e 19.
e) 100, 120 e 60.

Resolução

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

São dadas a lei da função que define a pressão arterial, em função da medida de intervalo de tempo, e uma aproximação $\pi \simeq \frac{60}{19}$.

b) O que se pede?

Pedem-se a pressão máxima, a pressão mínima e a frequência de batimentos cardíacos por minuto.

2. Planejando a solução

A pressão máxima é obtida quando $\cos(6t + \pi)$ é igual a $+1$ e é mínima quando é igual a -1. Para calcular a frequência de batimentos cardíacos por minuto, basta multiplicarmos a frequência de batimentos por segundo por 60, a qual é obtida pelo inverso do período da função.

3. Executando o que foi planejado

Pressão mínima (em mmHg):

$P(t) = 100 + 20 \cdot \cos(6t + \pi) = 100 + 20 \cdot (-1) = 80$

Pressão máxima (em mmHg):

$P(t) = 100 + 20 \cdot \cos(6t + \pi) = 100 + 20 \cdot (+1) = 120$

Usamos a aproximação $\pi \simeq \frac{60}{19}$ para calcular o período da função:

$$p = \frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \simeq \frac{\frac{60}{19}}{3} = \frac{60}{19} \cdot \frac{1}{3} = \frac{20}{19}$$

Então, calculamos a frequência de batimentos cardíacos por minuto (em bpm):

$$\frac{1}{p} \cdot 60 = \frac{1}{\frac{20}{19}} \cdot 60 = \frac{19}{20} \cdot 60 = 57$$

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **a**.

5. Ampliando o problema

$\frac{10}{19}$ segundos. $\frac{20}{19}$ segundos.

a) De quanto em quanto tempo são atingidas as pressões máximas? E as pressões mínimas?

b) Converse com os colegas sobre a prevalência de doenças cardiovasculares na atualidade e sobre quais seriam os principais motivos que as ocasionam e quais hábitos devem ser seguidos para reduzir a possibilidade de ser acometido por enfermidades desse tipo. Depois da conversa, faça uma análise dos próprios hábitos e, se necessário, pense em atitudes para melhorá-los. Respostas pessoais.

Fonte: Dante e Viana (2020, p. 70)

O exercício da Figura 73 pode ser classificada como uma atividade contextualizada. O registro de partida é registro simbólico-algébrico e o de chegada é registro simbólico-numérico, logo, é uma atividade de tratamento também.

A terceira atividade resolvida é mostrada na Figura 74.

Figura 74 – Exercício resolvido

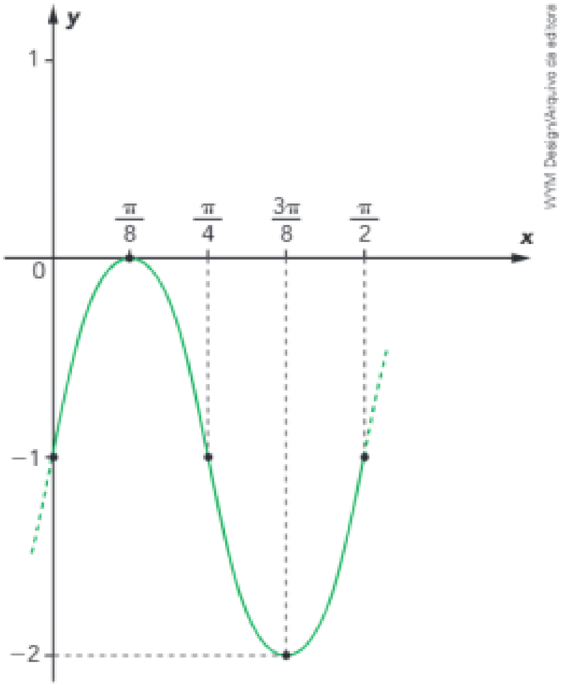
16. Construa o gráfico da função periódica $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -1 + \text{sen } 4x$ e explicite o domínio, o conjunto imagem e o período da função.

Resolução

Quando construímos o gráfico da função seno, escolhemos alguns valores para x, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, e calculamos os respectivos valores da função. Para a função dada, podemos atribuir a uma variável t alguns valores convenientes, com $t = 4x$ e $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, e então calcular os respectivos valores da função.

$t = 4x$	x	$f(x) = -1 + \text{sen } 4x$
0	0	$f(x) = -1 + \text{sen } 0 =$ $= -1 + 0 = -1$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	$f(x) = -1 + \text{sen } \frac{\pi}{2} =$ $= -1 + 1 = 0$
π	$\frac{\pi}{4}$	$f(x) = -1 + \text{sen } \pi =$ $=\varepsilon -1 + 0 = -1$
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{8}$	$f(x) = -1 + \text{sen } \frac{3\pi}{2} =$ $= -1 + (-1) = -2$
2π	$\frac{\pi}{2}$	$f(x) = -1 + \text{sen } 2\pi =$ $= -1 + 0 = -1$

Representando esses valores em um plano cartesiano, traçamos um período completo do gráfico da função dada.



O domínio é $D(f) = \mathbb{R}$.

O conjunto imagem é $\text{Im}(f) = [-1 + 1, -1 - 1] = [0, -2]$.

O período é $p = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

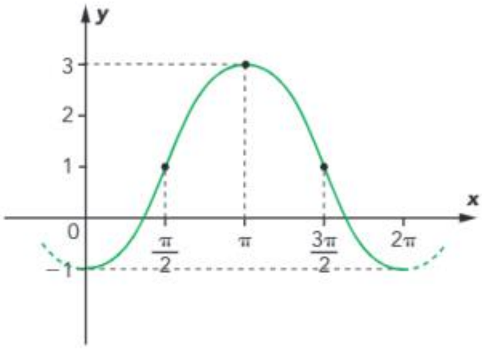
Fonte: Dante e Viana (2020, p. 71)

Conforme é mostrada na Figura 74, o exercício resolvido pode ser dividido em duas perguntas: a primeira é construir o gráfico da função dada, temos então uma passagem do registro simbólico-algébrico para o registro gráfico, ou seja, uma conversão; a segunda pergunta solicita o domínio, conjunto imagem e período da função, que corresponde uma passagem do registro simbólico-algébrico para o simbólico numérico, ou seja, um tratamento.

O último exercício resolvido é apresentado na Figura 75 abaixo.

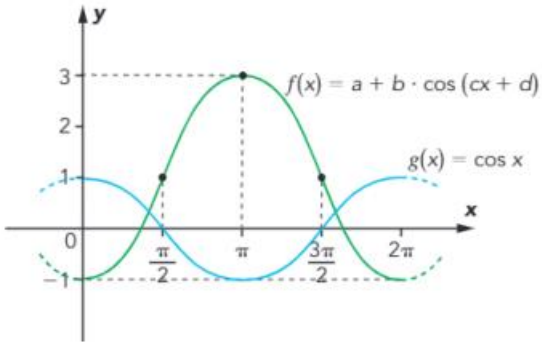
Figura 75 – Exercício resolvido

17. O gráfico no plano cartesiano a seguir representa uma função periódica $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $f(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$. Determine os valores de a, b, c e d.



Resolução

Representando o gráfico da função cosseno no mesmo plano cartesiano e observando as senoides, podemos perceber algumas características das funções.



- A amplitude de f é o dobro da amplitude da função cosseno: $3 - (-1) = 4$. Então, $b = 2$.
- O conjunto imagem de f é $\text{Im}(f) = [-1, 3]$ e, então, $a = 1$.
- O período de f é $p = 2\pi$, o mesmo da função cosseno. Então, $c = 1$.
- Temos que $f(0) = -1$, então:

  $f(0) = 1 + 2 \cdot \cos(1 \cdot 0 + d) \Rightarrow -1 = 1 + 2 \cdot \cos d \Rightarrow 2 \cdot \cos d = -2 \Rightarrow \cos d = -1 \Rightarrow d = \pi + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

  Como a função é periódica, de período 2π, qualquer deslocamento horizontal da forma $2k\pi$ resultará no mesmo gráfico. Então, considerando $k = 0$, obtemos $d = \pi$.

Portanto, a lei dessa função é:
$f(x) = 1 + 2 \cdot \cos(x + \pi)$.

Fique atento

A lei da função também poderia ser $f(x) = 1 + 2 \cdot \cos(x + 3\pi)$, $f(x) = 1 + 2 \cdot \cos(x + 5\pi)$, $f(x) = 1 + 2 \cdot \cos(x - \pi)$, ..., atribuindo outros números inteiros para k.

Fonte: Dante e Viana (2020, p. 71)

Dado o gráfico, é solicitado que se encontre a expressão algébrica de sua curva, ou seja, trata-se de uma passagem do registro gráfico para o registro simbólico algébrico, logo, configura-se como uma atividade cognitiva de conversão.

O Quadro 11 identifica o número do exercício resolvido, os registros de representação mobilizados e a atividade semiótica empregada.

Quadro 11 – Síntese das transformações realizadas nos exercícios resolvidos

Nº Exercício	Registro de Partida	Registro de chegada	Atividade semiótica
14	Algébrico	Numérico	Tratamento
15	Algébrico	Numérico	Tratamento
16	Algébrico	Gráfico	Conversão
	Algébrico	Numérico	Tratamento
17	Gráfico	Algébrico	Conversão

Fonte: Elaborado pela autora com base no livro

Percebe-se uma presença maior da atividade de tratamento, principalmente entre as representações algébricas e numéricas. Apenas dois exercícios focam na conversão entre as representações, por outro lado, é possível ver uma coordenação nesses dois exercícios, visto que o Exercício 16 trabalha a conversão no sentido de algébrico para gráfico enquanto que o Exercício 17 trabalha a conversão na passagem inversa, isto é, gráfico para o algébrico.

As atividades destinadas para o aluno/leitor vêm logo após as atividades resolvidas. Esses exercícios também se enquadram na **categoria de Resolução de Exercícios**. O Quadro 12 a seguir apresenta cada um dos exercícios propostos, indicando a qual conteúdo pertence, o número do exercício, o registro de partida, registro de chegada e, por fim, se a passagem é um tratamento ou conversão.

Quadro 12 - Tratamentos e conversões observados nos exercícios propostos do livro

Nº Exercício	Registro de Partida	Registro de chegada	Atividade semiótica
83	Algébrico	Gráfico	Conversão
	Gráfico	Simbólico-Numérico	
84	a) Gráfico	Gráfico	Tratamento
	b) Gráfico	Gráfico	
	c) Gráfico	Gráfico	
85	Algébrico	Numérico	Tratamento
86			Tratamento
87	Gráfico	Gráfico	Tratamento
88	Gráfico	Simbólico-Numérico	Conversão
89	Tabular	Gráfico	Conversão
90	Algébrico	Numérico	Tratamento
91	a) Algébrico	Numérico	Tratamento
	b) Algébrico	Gráfico	Conversão
92	Algébrico	Numérico	Tratamento
93			
94			
95			
96			
97			
98			
99	Gráfico	Algébrico	Conversão
100	Algébrico	Algébrico	Tratamento
101	Algébrico	Numérico	Tratamento
102	Algébrico	Língua natural	Conversão
103	Algébrico	Algébrico	Tratamento
104	Algébrico	Numérico	Tratamento
105	Língua natural	Língua natural	Tratamento

Fonte: Elaborado pelo autor com base no livro

Ao todo, vinte e três exercícios são propostos para o leitor. Alguns exercícios possuem alternativas, em que algumas são desempenhas atividades semióticas diferentes, dessa forma, consideramos essas alternativas como exercícios independentes. Logo, dezoito exercícios privilegiam a atividade de tratamento, que corresponde a 25% dos exercícios, enquanto apenas seis favorecem a conversão, que equivale a 75% dos exercícios.

Listamos abaixo as representações e o sentido que ocorre o tratamento e a conversão e quantos exercícios abrangem essas atividades semióticas. Os tratamentos ocorrem no sentido:

- Registro Algébrico → Registro Numérico: treze exercícios propostos;
- Registro Gráfico → Registro Gráfico: dois exercícios propostos;
- Registro em Língua Natural → Registro em Língua Natural: um exercício proposto;
- Registro Algébrico → Registro Algébrico: dois exercícios;

Já as conversões ocorrem no sentido:

- Registro Gráfico → Registro Numérico: dois exercícios propostos;
- Registro Algébrico → Registro Gráfico: dois exercícios propostos;
- Registro Gráfico → Registro Algébrico: um exercício;
- Registro Tabular → Registro Gráfico: um exercício proposto;
- Registro Algébrico → Registro em Língua Natural: um exercício proposto;

Apesar da diversidade de registros, na conversão nota-se pouca coordenação entre as representações aparecendo somente entre o registro algébrico e registro gráfico. Chama atenção ainda o fato de apenas um exercício trabalhar a passagem do registro gráfico para o algébrico. Uma vez que o livro trabalha com a abordagem informático de interpretação global, e a passagem Registro Gráfico → Registro Algébrico é a mais problemática, o ideal seria haver mais exercícios que enfatizassem tal conversão.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No ano de 2019, ainda na graduação, conheci a TRRS e me interessei por ela, devido a isso decidi escrever a monografia cujo o título foi Estado da arte da Teoria Dos Registros De Representação Semiótica no Ensino-Aprendizagem de Derivadas de Funções, onde no processo de categorização, onde a análise de livros foi um dos tópicos categorizados. Neste sentido, adentrei no mestrado com o projeto nessa temática.

A experiência no mestrado foi relevante para o desenvolvimento desta pesquisa, o contato com professores pesquisadores e discussões com colegas ajudaram a desenvolver um olhar crítico quanto às teorias educacionais de ensino e aprendizagem da Matemática, especialmente a disciplina de Análise Crítica de Recursos Didáticos para o Ensino de Ciências, que aperfeiçoou essa pesquisa de mestrado quanto à análise de livros didáticos.

Ao realizarmos o levantamento bibliográfico buscando pesquisas fundamentadas na teoria de Duval que analisaram livros didáticos, especificamente, as funções trigonométricas seno e cosseno, constatou-se que essa temática ainda não havia sido contemplada entre os anos 2016-2020. Ainda que tenha alguma pesquisa anterior a esse mapeamento quanto à temática estudada, nosso diferencial se encontra na análise de livros didáticos pós-BNCC.

A relevância da Trigonometria para a formação básica, associada aos registros de representação, amparou o desenvolvimento desta pesquisa. Em razão da dimensionalidade desse campo da Matemática e orientação da BNCC, esta investigação se limitou a explorar as funções trigonométricas seno e cosseno, considerando a questão: a forma de abordagem do conteúdo ciclo trigonométrico, especificamente as funções seno e cosseno, contempla aspectos da teoria dos registros de representação semiótica segundo Raymond Duval?

A escolha pelo LD partiu de sua importância para o processo de ensino e aprendizagem, sendo muitas vezes o único material disponível para esse processo. Ao ser utilizado pelo estudante, o LD permite a aquisição de conhecimentos (que só é possível se houver aprendizagem) e para o professor serve também como orientação para o planejamento e gestão das aulas, de modo geral.

Visto que para ocorrer a aquisição de conhecimento é necessário haver aprendizagem, acreditamos que o estudante é capaz de aprender de maneira independente desde que tenha o material necessário para sua aprendizagem e este seja elaborado de forma a permitir o desenvolvimento de competências cognitivas. Dessa forma, viu-se na teoria de Duval, uma teoria de aprendizagem, um modo de averiguar os conhecimentos viabilizados por livros didáticos de Matemática.

Para cumprir os objetivos supracitados, analisamos o livro Trigonometria, da Coleção Conexões, e o livro Trigonometria e Sistemas Lineares, da Coleção Matemática em Contextos, os quais chamamos de L1 e L2, respectivamente.

Considerações do livro Trigonometria:

Quanto à abordagem conceitual sobre as funções trigonométricas, especificamente a categoria de Definição, se analisou as definições da função periódica e das funções trigonométricas seno e cosseno.

Para a definição da função periódica, o autor utilizou somente o registro em língua natural, entretanto, anteriormente foi apresentado o contexto da maré para auxiliar na compreensão da função periódica. Nesse contexto, foram utilizados o registro simbólico e o registro gráfico, a quantidade de registros mobilizados é suficiente para evitar uma confusão entre o objeto estudado e sua representação, todavia, não é possível visualizar uma correspondência entre os dois registros, o que compromete a compreensão do objeto estudado.

Ainda, no exemplo da maré, é possível ver a atividade de tratamento no registro simbólico. Os dois registros utilizados trazem a mesma informação, faltando apenas o autor apresentar a articulação entre eles e entre a função trigonométrica apresentada. O ideal seria mostrar como ocorreu a construção da função $h(t)$ dada.

A atividade de conversão também se faz presente quando ocorre a passagem do registro algébrico para o registro gráfico. Todavia, não é mostrado como foi construído a curva da função. Por ser um exemplo introdutório, acredita-se que o autor não achou necessário adentrar nessa parte do conteúdo. Uma alternativa seria, após trabalhadas as funções trigonométricas, retornar ao exemplo da maré e mostrar como se construir a função $h(t)$ e articular um registro de representação com outro, de modo que fique fácil realizar a passagem.

As definições da função seno e cosseno são abordadas da mesma forma: primeiro apresenta-se o registro gráfico-geométrico da função para, em seguida, defini-la formalmente utilizando o registro em língua natural. Podemos afirmar, então, que há uma conversão do registro gráfico-geométrico para o registro em língua natural.

O registro gráfico-geométrico é utilizado a fim de que o leitor consiga relacionar a função trigonométrica com o ciclo trigonométrico. Todavia, o livro abordou a passagem somente do registro gráfico-geométrico para o registro em língua natural, faltando a passagem inversa, isto é, do registro em língua natural para o registro gráfico-geométrico. Ressaltamos aqui que ambas as passagens devem ser realizadas, pois o custo cognitivo exigido por uma pode não ser a mesma exigido pela outra.

Referente à categoria de Uso de Tecnologias, a BNCC orienta que os registros de representação computacional devem favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático, mas o estudante deve desenvolver certas habilidades com ou sem apoio de tecnologias digitais. O livro contempla essa categoria apenas quando utiliza um software de geometria dinâmica para esboçar as curvas das funções seno e cosseno.

Mais claramente, o software é utilizado para visualizar melhor como ocorre a transição da função do ciclo trigonométrico para o gráfico da função, isto é, um tratamento do registro gráfico-geométrico para o registro gráfico.

Duval denominou a inserção de softwares em sala de aula como o novo Eldorado para o ensino-aprendizagem da Matemática, todavia, é necessário lembrar que jamais deve ser o objetivo em si. A tecnologia não deve ser evitada nem idolatrada, o processo de ensino-aprendizagem não deve ser atrelado a seus recursos. Dessa forma, é recomendável que essa articulação da curva da função com o ciclo trigonométrico fosse também realizada sem uso de softwares.

Ainda, uma sugestão seria fazer uso do software para mostrar a articulação entre as unidades significantes do registro gráfico e do registro algébrico, através do comando deslizante na entrada de comando.

Quanto à categoria de Construção de Gráfico, observou que duas das categorias definidas por Raymond Duval são contempladas no livro: A primeira apresenta é a abordagem ponto a ponto, em que na conversão do registro algébrico para o registro gráfico é utilizado o registro tabular como representação auxiliar para encontrar os pontos da função a serem traçados. O mesmo procedimento é realizado para a função seno e, posteriormente, para a função cosseno.

Essa abordagem é criticada por apresentar limitações principalmente quando se deseja realizar a conversão do registro gráfico para o registro algébrico. Ainda, após a apresentação de cada função, o autor apresenta três características, definidas para as funções básicas do tipo $f(x) = senx$ ou $f(x) = cosx$, que são: periodicidade, imagem e amplitude. Essas características são denominadas de variáveis visuais, conforme o aporte teórico, e estão associadas à cada coeficiente da expressão algébrica, onde os coeficientes são chamados de unidades significantes. Entretanto, na abordagem ponto a ponto não fica explícita a articulação entre a variável visual e a unidade significante, o que prejudica a conversão com coordenação.

A segunda abordagem tratada é a Abordagem de Interpretação Global de propriedades Figurais, onde o autor destina um tópico somente para abordar as funções denominadas por ele como funções complexas. Nessa abordagem, o autor trabalha com as transformações horizontal e vertical, alteração da amplitude e alteração do período, onde cada uma dessas transformação são associadas a um coeficiente da função. Dessa forma, entende-se que foi realizado a discriminação das unidades significantes de cada registro de representação. Esse modo permite que o leitor perceba a influência que cada símbolo presente na função tem no gráfico e vice-versa.

Por outro lado, não se realizou todas as modificações possíveis em um registro para verificar que mudanças ocorreriam no outro registro. Assim, acreditamos que o livro deixa parcialmente claro a relação dos coeficientes da representação algébrica com os dados visuais da representação gráfica, pois nem todos os coeficientes foram explorados.

Os registros utilizados na abordagem de interpretação global foram o registro simbólico-algébrico, registro tabular e registro gráfico, mesmos registros utilizados na primeira abordagem. A abordagem de interpretação global permite a passagem da representação algébrica para a gráfica sem o auxílio da representação tabular, contudo, percebemos que o autor se apoiou na abordagem ponto a ponto para transmitir a ideia principal da abordagem de interpretação global.

A alternativa para evitar o uso da tabela seria o autor utilizar o software educacional Geogebra que, dentre outras coisas, permite o estudo de gráficos e através do controle deslizante é possível visualizar as modificações de um registro de representação no outro.

A categoria de Resolução de Exercícios se divide em exercícios resolvidos pelo livro e exercícios a serem resolvido pelo leitor. No total, seis exercícios são resolvidos pelo livro, onde cinco exercícios privilegiam a atividade de tratamento enquanto apenas um exercício enfatiza a conversão. O tratamento sempre ocorre no registro simbólico e um requer o uso de software de construção de gráficos. Quanto à conversão, o exercício requer a passagem do registro gráfico para o registro simbólico, todavia, não há coordenação já que a conversão ocorre somente em um sentido.

Já nos exercícios propostos ao leitor, a quantidade de exercícios enfatizando a atividade de conversão supera a de tratamento, sendo 25 exercícios promovem a conversão, que representa 73,5% dos exercícios, enquanto que 9 exercícios mobilizam a atividade semiótica de tratamento, representando 26,5% dos exercícios. Acreditamos ser aceitável a porcentagem de exercícios que promovem a conversão, visto que essa é a atividade semiótica principal para apreensão conceitual do objeto matemático estudado.

No tratamento, nota-se uma presença maior no registro simbólico e uma conversão maior do registro gráfico para o registro simbólico. Ainda, há pouca coordenação entre as conversões, aparecendo somente entre o registro simbólico-algébrico e registro gráfico.

A categoria de Flexibilidade e Fluidez entre diferentes registros de representação, interpretada nessa pesquisa como Congruência Semântica, se faz presente apenas no tópico de construção de gráficos quando o autor articula cada coeficiente da representação algébrica com uma variável visual gráfico. Essa associação permite que ocorra uma coordenação entre o registro de representação algébrica e o registro de representação gráfica, isto é, ocorra nos dois sentidos de forma direta e sem grandes dificuldades. Entretanto, faltou o autor trabalhar essa associação entre as unidades significantes no sentido da representação gráfica para a representação algébrica.

Considerações do livro Trigonometria e Sistemas Lineares:

Quanto à abordagem conceitual, o autor utilizou dois exemplos para construir o conceito de uma função trigonométrica. O primeiro exemplo, relógio de pêndulo, utilizou o registro em língua natural e registro figural, e o segundo exemplo, da maré, além do registro e língua natural foi utilizado o registro gráfico e tabular. Entretanto, em ambos os exemplos os registros de representação são usados para dar prosseguimento a uma ideia, isto é, sem que haja qualquer atividade semiótica de um registro para outro.

Partindo para a categoria de definição, o autor utiliza o registro de representação em língua natural, registro simbólico e registro figural para definir as funções seno e cosseno, onde ocorre uma conversão no sentido registro em língua natural para registro simbólico e do registro simbólico para o registro figural. A conversão entre os registros ocorre apenas em um sentido, desta forma, não há coordenação entre as representações.

Na categoria de procedimento de construção de gráfico, o livro utiliza primeiramente a abordagem ponto a ponto, tanto para a função seno como para o cosseno, onde utiliza a representação tabular como auxílio para realizar a conversão da representação algébrica para a representação gráfica. Na função seno, o autor aponta que o gráfico da função seno é simétrico em relação à origem do plano cartesiano e na função cosseno, o gráfico da função é simétrico em relação ao eixo y. Sabemos que essas características são variáveis visuais das funções e estão associadas à um coeficiente da expressão algébrica, entretanto, como na abordagem ponto a ponto não é trabalhada a articulação entre essas unidades significantes, fica difícil visualizar a que coeficiente está ligada essas variáveis visuais.

A segunda abordagem é a interpretação global de propriedades figurais, onde funções mais complexas do tipo $f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)$ ou $f(x) = a + b \cdot cos(cx + d)$, com $b \neq 0$ e $c \neq 0$ são trabalhadas. O autor associa o período ao coeficiente c, o conjunto imagem aos coeficientes a e b e a amplitude, ao coeficiente b. As características descritas como período, conjunto imagem e amplitude são, o que chamamos segundo a teoria de Duval, de varáveis visuais e os coeficientes a que estão associados são as unidades significantes.

Dessa forma, acreditamos que houve discriminação das unidades significantes dos registros simbólicos e algébricos, mas nem todas as unidades foram identificadas, visto que o deslocamento horizontal associado ao coeficiente d não foi identificado, assim como a variável visual simétrica. Percebe-se ainda que não foram empregadas todas as modificações possíveis nas unidades significantes.

A terceira abordagem é o procedimento informático de interpretação global, em que através do controle deslizante do Geogebra é possível visualizar a influência de cada coeficiente no comportamento do gráfico e através de perguntas bem direcionadas apresentada no livro, o leitor consegue articular cada coeficiente com uma variável visual do gráfico. Essa abordagem permite que a discriminação de todas as unidades significantes assim como todas as modificações possíveis.

O procedimento informático de interpretação global também se enquadra na categoria de uso de tecnologias, visto que é utilizado o software Geogebra. Outro momento que essa categoria se faz presente é na sugestão do site PhET Simulações Interativas. A atividade sugerida para ser realizada no site se configura como uma atividade de conversão entre o registro gráfico-geométrico e o registro gráfico.

Quanto à categoria de resolução de exercícios, notamos uma presença maior de tratamento nos exercícios resolvidos, sendo três atividades relacionadas à tratamento, todas no registro simbólico e duas atividades enfatizando a conversão, onde a primeira atividade trabalha a conversão no sentido da representação algébrica para a representação gráfica e a segunda atividade trabalha a conversão no sentido da representação gráfica para a representação algébrica. Percebe-se que essas atividades de conversão promovem a coordenação entre o registro gráfico e o registro algébrico. Já quanto aos exercícios propostos para o leitor, dezoito exercícios privilegiam a atividade de tratamento, que corresponde a 75% dos exercícios, enquanto apenas seis favorecem a conversão, que equivale a 25% dos exercícios. Nos exercícios de conversão nota-se pouca coordenação entre as representações aparecendo somente entre o registro simbólico-algébrico e registro gráfico.

Quanto à Flexibilidade e Fluidez entre diferentes registros de representação, percebe-se que ocorre somente entre os registros de representação algébrico e representação gráfica, uma que a associação entre as unidades significantes é comentada apenas na construção de gráficos.

Em ambos os livros analisados observou-se que os autores seguiram a orientação da BNCC de mobilizar diversos registros de representação matemáticos, porém, somente essa mobilização não caracteriza a utilização da teoria de Duval. Além disso, não basta apenas colecionar registros, seria preciso articular as unidades significantes de cada registro entre si de modo que o leitor tenha uma visão global do objeto matemático.

Os autores tentaram fazer essa articulação entre os registros de representação algébrico e representação gráfica, todavia, a associação entre as unidades significantes desses registros não se deu de forma completa. Acredita-se que devido ao limite de página para os livros didáticos, não fosse viável atingir essa completude.

Outros trabalhos a serem desenvolvidos decorrentes dessa pesquisa podem vir aprofundar o estudo da congruência semântica nas conversões.

Por fim, a vivência no mestrado foi importante para o aprofundamento no estudo da teoria de Duval, bem como o desenvolvimento como pesquisadora. Espera-se que essa pesquisa venha contribuir para o desenvolvimento da teoria no Brasil, pois ainda carece de muito estudo.

REFERÊNCIAS

AGRICCO JUNIOR, Renato Cezar. **Números complexos e grandezas elétricas**: análise de livros didáticos apoiada na teoria dos registros de representações semióticas. 2017. 215 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.

ALENCAR, Adalberto Cândido Sousa. **A teoria dos registros de representações semióticas e o estudo de funções**. 2017. 51 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2017.

ALMEIDA, Andressa Araújo de. As principais dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio no ensino das funções trigonométricas seno e cosseno. In: congresso nacional de educação, 6., 2019, Campina Grande. **Anais VI CONEDU.** Campina Grande: Realize Editora, 2019. p. 1-6. Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/59269. Acesso em: 02 fev. 2022.

ANDRADE, Jefferson Jacques. **Registro De Representação Semiótica**: conceitualização dos diversos tipos de soluções de sistemas lineares usando o software Geogebra. 2018. 191 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2018.

ANDREOTTI, Celso Luiz. **Vetores e suas representações em livros didáticos de Engenharia**. 2017. 229 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.

ANJOS, Daiana Zanelato dos. **Da Tinta ao Braille**: estudo de diferenças semióticas e didáticas dessa transformação no âmbito do código matemático unificado para a língua portuguesa ⠳ cmu e do livro didático em braille. 2015. 161 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2015.

ANJOS, Daiana Zanelato dos. **O que se revela quando o olhar não alcança? Em busca do acesso semio-cognitivo aos objetos do saber matemático por uma estudante cega**. 2019. 390 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós- Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2019.

ARCEGO, Priscila. **Representações semióticas mobilizadas no estudo da área do círculo no ensino fundamental**. 2017. 155 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2017.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011. Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro.

BARROS, Michele Carvalho de. **Equações diferenciais ordinárias no contexto dos registros de representação semiótica e da modelagem matemática**. 2017. 259 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Para A Ciência e A Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2017.

BATTAGLIOLI, Carla dos Santos Moreno. **Sistemas lineares na segunda série do ensino médio**: um olhar sobre os livros didáticos. São Paulo: PUC/SP, 2008. (Dissertação de mestrado).

BICA, Luis Manuel Peliz Marques. **Funções em livros didáticos**: relações entre aspectos visuais e textuais. PUC SP, 2009. (Dissertação de mestrado).

BRANDT, Celia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu. O cenário da pesquisa no campo da educação matemática à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 7, n. 13, 2014.

BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu; BASSOI, Tânia Stella. Estudo das funções do discurso na resolução de problemas matemáticos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 2, p. 479-503, 2014. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/19476. Acesso em: 23 out. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a base. Brasília, 2018.

BRASIL. Programa Nacional do Livro e do Material Didático. PNLD 2021. Brasília, 2019.

BROWN, Susan A. The Trigonometric connection: students' understanding of sine and cosine. 2006. **Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, p. 228, 2006.

CAMPOS, Ronaldo Pereira. **A abordagem do Teorema Fundamental do Cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica**. 2007. 202 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

CATTO, Gloria Garrido. **Registros de representação e o número racional: uma abordagem em livros didáticos**. 2000. 168 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

CHIGONGA, Benard. Learners' errors when solving trigonometric equations and suggested interventions from grade 12 mathematics teachers, **Unisa Press**, 2016.

COLOMBO, Janecler Ap. Amorin; FLORES, Claudia R.; MORETTI, Méricles T.. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. **Zetetiké**, [*s. l*], v. 16, n. 29, p. 41-72, jan./jun. 2008.

CORRÊA, Madeline Odete Silva; MORETTI, Méricles Thadeu. Esboçando curvas de funções a partir de suas propriedades figurais: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica. In: BRANDT, Celia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu. **As contribuições da teoria dos registros das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática**. Ijuí: Unijuí, 2014. p. 256.

COSTA, Bruno de Paula; PEQUENO, Pedro Igor Evangelista; PEREIRA, Cícero da Silva. Dificuldades de aprendizagem da trigonometria. In: congresso nacional de educação, 6., 2019, Campina Grande. **Anais VI CONEDU.** Campina Grande: Realize Editora, 2019. p. 1-12. Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/59909. Acesso em: 02 fev. 2022.

COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da. A História da Trigonometria. **Educação Matemática em Revista**, [S.I], n. 13, p.60-69, mar. 2003. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/1657/1150>. Acesso em: 05 fev. 2022.

D'AMORE, Bruno; PINILLA, Martha Isabel Fandiño; IORI, Maura. **Primeiros elementos de semiótica**: sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática. São Paulo: Editora da Livraria da Física, 2015.

DAMM, Regina Flemming. Registros de representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: Educ, 2016. p. 254.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em Contexto**: trigonometria e sistemas lineares. São Paulo: Ática, 2020. 268 p.

DEMIR, Ozcan; HECK, André. A new learning trajectory for trigonometric functions. **Proceedings of the 11th International Conference on Technology in Mathematics Teaching**, p. 119-124, 2013.

DIONIZIO, Fátima Queiroz; BRANDT, Célia Finck. Análise das dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio em trigonometria. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO - EDUCERE, 10., 2011, Curitiba. **Anais X EDUCERE.** Curitiba: PUC/PR, 2011. p. 4408-4421.

DIONIZIO, Fátima Queiroz; BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu. Emprego das funções discursivas da linguagem na compreensão de erros de alunos em uma atividade que envolve noções de trigonometria. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 7, n. temático, p. 513-536, 2014.

DOMINGOS, Cynthia Militão. **Ensino e aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio**: uma experiência com coordenadas e cálculo de distâncias no plano e no espaço. 2017. 194 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali: Peter Lang, 2004.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução Lênio Fernandes Levy, Marisa Rosâni Abreu da Silveira. 1. Ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. Fascículo I.

DUVAL, Raymond. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011a. Trad. Méricles Thadeu Moretti. http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2011v6n2p96

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011b. Organização Tânia M. M. Campos.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat**: **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, [S.I.], v. 7, n. 2, p. 266-297, 13 dez. 2012a. Trad. Méricles Thadeu Moretti. http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266.

DUVAL, Raymond. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. **Revemat**: **Revista eletrônica de educação matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 97-117, jul. 2012b. Trad. Méricles Thadeu Moretti. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p97.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. 8. ed. Campinas: Papirus, 2013. p. 11-33.

DUVAL, Raymond. Como analisar a questão crucial da compreensão em Matemática? **Revemat**: **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 2, n. 13, p.1-27, 2018. Trad. Méricles Thadeu Moretti.

FEIJÓ, Rachel Saffir Araújo Alves. **Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria**: um estudo com alunos do ensino médio do distrito federal. 2018. 108 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Brasília, Brasília, 2018.

FERREIRA, Maridete Brito Cunha. **Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas**. 2016. 342 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

FERREIRA, Norma Sandra de Almeida. As pesquisas denominadas "estado da arte". **Educação & sociedade**, v. 23, n. 79, p. 257-272, 2002.

FISCHER, Daiana dos Santos Oliveira. **Investigando o ensino e a aprendizagem de multiplicação de frações**: um estudo com alunos do 6º ano. 2020. 350 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática Mestrado em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020.

FREITAS, José Luiz Magalhães de; REZENDE, Veridiana. A teoria dos registros de representação semiótica. Entrevistado: Raymond Duval. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 2, n. 3, p. 10-34, dez. 2013. Disponível em: http://rpem.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/963. Acesso em: 23 out. 2021.

FREITAS, Raquel Silva. de et al. As dificuldades apresentadas por professores e alunos no ensino da Trigonometria. In: Congresso Nacional de educação-CONEDU, 3., 2016, Natal. **Anais eletrônicos** […] Campina Grande-PB: Realize Eventos e Editora, 2016.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisas**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2019.

GINEZ, Patricia Costa. **Fenômeno de congruência e não congruência sobre a função exponencial em materiais didáticos s**. 2020. 107 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2020.

GRANDE, André Lúcio. **O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de Álgebra Linear**. PUC SP, 2006. (Dissertação de Mestrado).

HAUSER, Leonardo Antonio de Carvalho. **A teoria dos registros de representação semiótica aplicada ao conceito de escala em livros didáticos de geografia**. 2018. 99 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Geografia, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2018.

HENRIQUES, Afonso; ALMOULOUD, Saddo Ag. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na educação matemática no ensino superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software maple. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, jun. 2016. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1516-731320160020012. Disponível em: https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1516-73132016000200465&script=sci_arttext&tlng=pt. Acesso em: 23 out. 2021.

IMAFUKU, Danila Brígida Santana. **O ensino de área de figuras planas nos livros didáticos na transição dos anos iniciais para os anos finais do ensino fundamental**. 2019. 174 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2019.

JACOMELLI, Karina Zolia. **A linguagem natural e a linguagem algébrica**: nos livros didáticos e em uma classe de 7ª série do ensino fundamental. Florianópolis: UFSC, 2006. (Dissertação de Mestrado).

KARRER, Monica. **Articulação entre Álgebra Linear e Geometria**: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica. PUC/SP, 2006. (Tese de Doutorado em Matemática).

KLUPPEL, Gabriela Teixeira. **Reflexões sobre o ensino da geometria em livros didáticos à luz da teoria de representações semióticas segundo Raymond Duval**. 2012. 110 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2012.

LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões**: trigonometria. São Paulo: Moderna, 2020. 204 p.

LOBO, Rogério dos Santos. **A abordagem dada à taxa de variação no livro didático do ensino médio e a sua relação com o conceito da derivada no livro didático do ensino**

superior. 2017. 253 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.

LONDERO, Nandyne. **Explorando recursos do geogebrabook no estudo de quádricas a partir de diferentes representações**. 2017. 156 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2017.

MACHADO, Hugo Alves. **Um Estudo Da Semelhança De Figuras Envolvendo As Representações Semióticas Presentes Nos Livros Didáticos Do 9º Ano Do Ensino Fundamental**. 2019. 204 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2019.

MATEUS, Pedro. **Cálculo diferencial e integral nos livros didáticos**: uma análise do ponto de vista da organização praxeológica. PUC/SP, 2007. (Dissertação de Mestrado). **Mathematics Teacher**, p. 25-33, 2015.

MAY, Valerie; COURTNEY, Scott. Developing Meaning in Trigonometry. **Illinois**
MENONCINI, Lucia. **O jogo das operações semióticas na aprendizagem da integral definida no cálculo de área**. 2018. Tese (Doutorado em Educação Científica e tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2018.

MENONCINI, Lucia. **O jogo das operações semióticas na aprendizagem da integral definida no cálculo de área**. 2018. 228 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2018.

MIRANDA, Josias Barbosa de. **Registros de Representação Semiótica de Funções Quadráticas**: análise de um livro didático. 2018. 102 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2018.

MORETTI, Méricles Thadeu. O papel dos registros de representação na ação na aprendiza aprendizagem de matemática temática. **Contrapontos**, Itajaí, v. 2, n. 6, p. 423-437, set./dez. 2002.

MORETTI, Méricles Thadeu; LUIZ, Learcino dos Santos. Esboçando curvas de funções a partir de suas propriedades figurais: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica. In: BRANDT, Celia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu. **As contribuições da teoria dos registros das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática**. Ijuí: Unijuí, 2014. p. 256.

OLIVEIRA, Francisco Canindé de. **Dificuldades no processo de ensino aprendizagem de trigonometria por meio de atividades**. 2006. 74 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

ORHUN, Nevin. Students’ mistakes and misconceptions on teaching of trigonometry. **Journal of Curriculum Studies**, p. 797-820, 2004.

ORHUN, Nevin. The gap between Real numbers and trigonometric relations. **Quaderni di Ricerca in Didattica**, p. 175-184, 2010.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

PONTES, Helaine Maria de Souza; BRANDT, Celia Finck; NUNES, Ana Luiza Ruschel. O estado da arte da teoria dos registros de representação semiótica na educação matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 19, n. 1, p. 297-325, 2017.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do trabalho científico**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

SANTOS, Ueslei Galvão do Rosário. **O estudo de relações entre os conceitos derivada e declive da reta tangente envolvendo licenciandos em matemática**. 2017. 339 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2017.

SENA FILHO, Nilo da Silva. **Os sistemas de equações em livros didáticos do 7º ano do ensino fundamental sob a perspectiva da teoria dos registros de representações semióticas**. 2019. 50 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2019.

SIERPINSKA, Anna. On understanding the notion of function. **The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy**, p.23-58, 1992.

SILVA, Amanda Barbosa da. **Triângulos nos livros didáticos de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental: um estudo sob a luz da teoria dos registros de representação semiótica**. 2014. 118 f. Dissertação (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014.

SILVA, Andreza Santana da. **Registros De Representação Semiótica E Função Quadrática**: um olhar sobre o ensino e a abordagem no livro didático. 2020. 160 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020.

SILVA, Antonio Alexandre Aparecido da. **Possibilidades de apreensões identificadas em representações figurais presentes em problemas de geometria**. 2019. 101 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2019.

SILVA, Carlos Antônio da. **A noção de integral em livros didáticos e os registros de representação semiótica**. 2004. 157 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

SILVA, Helder Lima. **Estudo de funções trigonométricas em dois ambientes de aprendizagem no ensino médio**. 2017. 247 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2017.

SILVA, Ligia Maria da. **O tratamento dado ao conceito de função em livros didáticos da educação básica**. 2010. 125 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SILVA, Madeline Odete. **Esboço de curvas**: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica, 2008, 143 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianopólis, 2008.

SILVA, Sérgio Florentino da. **Ensino e aprendizagem das superfícies quádricas no ensino superior**: uma análise baseada na teoria dos registros de representações semióticas com o uso do Geogebra. 2018. 555 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós- Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2018.

SILVA, Umberto Almeida. **Análise da abordagem de função adotada em livros didáticos de matemática da Educação Básica**. (Dissertação de Mestrado). 2007

SOARES, Maria Arlita da Silveira. **Proporcionalidade um conceito formador e unificador da matemática**: uma análise de materiais que expressam fases do currículo da educação básica. 2016. 250 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação nas Ciências, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2016.

SOPPELSA, Janete Jacinta Carrer. **Divisão Euclidiana**: um olhar para o resto. 2016. 157 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

TERRA NETO, Platão Gonçalves. **Possibilidades na conversão entre registros de geometria plana**. 2016. 139 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

THIEL, Afrânio Austregésilo. **Práticas matemáticas no plano cartesiano**: um estudo da coordenação de registros de representação. 2013. 235 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

WEBER, Keith. Students’ Understanding of Trigonometric Functions. **Mathematics Education Research Journal**, Springer, p. 91-112, 2005.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998. Tradução de: Ernani F. da F. Rosa.