



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - CCET  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PPGMAT  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

BRUNO PEREIRA RODRIGUES

UMA CARACTERIZAÇÃO DO CATENOIDE CRÍTICO

São Luís - MA

2021

BRUNO PEREIRA RODRIGUES

UMA CARACTERIZAÇÃO DO CATENOIDE CRÍTICO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes

São Luís - MA

2021

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Rodrigues, Bruno Pereira.

Uma Caracterização do Catenóide Crítico / Bruno Pereira Rodrigues. - 2021.

72 p.

Orientador(a): Ivaldo Paz Nunes.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2021.

1. Catenóide Crítico. 2. Conjectura de Fraser e Li.  
3. Superfície mínima com bordo livre. I. Nunes, Ivaldo Paz. II. Título.

BRUNO PEREIRA RODRIGUES

**UMA CARACTERIZAÇÃO DO CATENOIDE CRÍTICO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes (Orientador)

Universidade Federal do Maranhão -UFMA

---

Profa. Dra. Maria de Andrade Costa e Silva (Avaliadora Externa)

Universidade Federal de Sergipe - UFS

---

Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz (Avaliador Externo)

Universidade Federal de Alagoas - UFAL

*Aos meus amigos e família por serem o impulso, base e suporte fundamentais.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela força, saúde e coragem para lutar diariamente por meus sonhos.

Aos meus pais, Reginaldo e Elisalva, por todo o amor, cumplicidade e incentivo a continuar persistindo na busca de um mundo melhor.

Aos meus padrinhos pelo suporte, carinho e dedicação em me ajudar no que necessitasse em São Luís.

À minha noiva Kerolen pelo apoio e incentivo diários e, principalmente, pelas palavras de carinho que me acompanharam durante todo o mestrado.

Aos amigos de pós-graduação pelas discussões enriquecedoras e motivantes.

Aos meus amigos de São Luís, pelo companheirismo, momentos de descontração e acolhida.

À Fundação de Amparo à Pesquisa e Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão, FAPEMA, pelo apoio financeiro.

Em especial, ao professor Ivaldo, orientador que tem uma paciência incrível, muito objetivo e sincero em suas orientações, sejam elas técnicas ou ensinamentos de vida.

À Universidade Federal do Maranhão pela estrutura disponibilizada necessárias a um bom desenvolvimento das atividades científicas.

*Educação não transforma o mundo.  
Educação muda as pessoas. Pessoas  
transformam o mundo.*

*(Paulo Freire)*

# RESUMO

As superfícies mínimas com bordo livre mergulhadas na bola unitária do espaço euclidiano tridimensional são pontos críticos do funcional área entre as superfícies mergulhadas em  $B^3$ . O presente trabalho concentra-se nos resultados apresentados no artigo *A Characterization of the Critical Catenoid* por Peter McGrath [14], onde ele caracteriza o catenoide crítico como o único anel mínimo com bordo livre mergulhado na bola unitária em  $\mathbb{R}^3$  invariante por reflexões com respeito a três planos ortogonais. Esse resultado fornece uma solução parcial a uma conjectura de Fraser e Li. Além disso, em [14], Peter McGrath também estuda o primeiro autovalor de Steklov de uma família de superfícies mínimas com bordo livre na bola unitária possuindo simetrias mais gerais.

**Palavras-chave:** Catenoide Crítico. Superfície Mínima com Bordo Livre. Conjectura de Fraser e Li.

# ABSTRACT

The free boundary minimal surfaces embedded surfaces in the unit ball of the three-dimensional euclidean space are critical points of the functional area among embedded surfaces in  $B^3$ . The present work focuses on the results provided in the article *A Characterization of the Critical Catenoid* by Peter McGrath [14], where he characterizes the critical catenoid as the only embedded free boundary minimal annulus in the unit ball at  $\mathbb{R}^3$  invariant by reflections with respect to three orthogonal planes. This result provides a partial solution to a Fraser and Li conjecture. Furthermore, in [14], Peter McGrath also studies the first Steklov eigenvalue of a family of free boundary minimal surfaces on the unit ball having more general symmetries.

**Keywords:** Critical Catenoid. Free Boundary Minimal Surface. Fraser and Li Conjecture.

# SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
<b>1 PRELIMINARES</b>	<b>16</b>
1.1 Variedades Diferenciáveis . . . . .	16
1.1.1 Superfícies Regulares . . . . .	19
1.1.2 Espaço Tangente . . . . .	20
1.1.3 Imersões e Mergulhos . . . . .	22
1.2 Variedade Riemanniana . . . . .	24
1.2.1 Métrica Riemanniana . . . . .	24
1.2.2 Conexões . . . . .	26
1.3 Geodésicas . . . . .	29
1.4 Curvatura; Segunda Forma Fundamental . . . . .	34
1.4.1 Curvaturas . . . . .	34
1.4.2 Segunda Forma Fundamental . . . . .	36
1.5 Variedades com Bordo . . . . .	42
1.6 Primeira Autofunção de Steklov . . . . .	43
1.7 Superfície Mínima com Bordo Livre . . . . .	47
1.7.1 Disco Equatorial Plano . . . . .	49
1.7.2 Catenoide Crítico . . . . .	50
<b>2 PRINCIPAIS RESULTADOS</b>	<b>55</b>
2.1 Superfícies com Simetrias Refletivas mais Gerais . . . . .	62
2.2 Problema em Aberto . . . . .	69
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>71</b>

# Lista de Figuras

1.1	Função Transição de $\varphi_\alpha$ para $\varphi_\beta$ . . . . .	17
1.2	Função Diferenciável. . . . .	19
1.3	Exemplos de Superfícies Regulares: Esfera(esquerda) e Toro(direita). . . . .	19
1.4	Espaço Tangente $T_pM$ . . . . .	20
1.5	Cúspide. . . . .	23
1.6	Imersão não injetiva. . . . .	23
1.7	Aplicação Exponencial. . . . .	32
1.8	Disco Equatorial Plano para $z = 0$ . . . . .	49
1.9	Catenoide. . . . .	50
1.10	Catenária . . . . .	51
1.11	Catenoide Crítico. . . . .	52
2.1	Curva Nodal. . . . .	60
2.2	Domínio Fundamental $\mathcal{D}$ . . . . .	61
2.3	$\mu$ termina em $\gamma$ . . . . .	61
2.4	$\mu$ termina em $\alpha_1$ . . . . .	61
2.5	$\mu$ termina em $\alpha_3$ . . . . .	62
2.6	Cunha tetraédrica em $B^3$ . . . . .	63
2.7	Segunda linha nodal $\mu'$ . . . . .	65
2.8	Superfície $S_n$ . . . . .	66
2.9	Superfície $\tilde{S}_n$ . . . . .	66
2.10	Reflexão de $p$ em relação ao plano $\Pi_{v_2}$ . . . . .	67
2.11	Reflexão de $r$ em relação ao plano $\Pi_{v_1}$ . . . . .	67
2.12	Domínio Fundamental de $\Sigma_n$ . . . . .	68
2.13	Domínio Fundamental de $\tilde{\Sigma}_n$ . . . . .	68
2.14	Possíveis Linhas Nodais em $\tilde{D}'_n$ . . . . .	68

# INTRODUÇÃO

Inicialmente, na década de 70, o matemático estadunidense Herbert Blaine Lawson Jr. provou que dado qualquer inteiro  $g$ , existem pelo menos uma superfície mínima compacta mergulhada em  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$  com gênero  $g$ . Caso  $g$  não seja um número primo, mostrou a existência de duas dessas superfícies. E a partir dessas conclusões lançou uma famosa conjectura "*O toro de Clifford é a única superfície mínima compacta mergulhada em  $S^3$  de gênero um*" que levou décadas para ser solucionada, acontecendo apenas em 2013 no trabalho realizado por Simon Brendle. As conjecturas são artifícios interessantes que "induzem" o crescimento e o aperfeiçoamento de uma área em matemática, pois os especialistas buscam e criam ferramentas com o intuito de confirmar a veracidade ou não das conjecturas.

Paralelo aos resultados anteriores, em 1985, um teorema clássico foi estabelecido pelo alemão Johannes C. C. Nitsche, uma caracterização de superfícies mínimas de gênero zero na bola unitária do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema 1** (Teorema de Nitsche). *Todo disco mínimo de bordo livre imerso na bola unitária são discos planos centrados na origem e a capa esférica é ortogonal a  $\partial B$ .*

Ao longo dos anos de 2010 a 2012, Ailana Fraser e Richard Schoen desenvolveram um método um pouco diferente dos já utilizados em outros trabalhos, relacionaram as superfícies mínimas de bordo livre em  $B^n$  com o problema dos autovalores de Steklov. Tal feito proporcionou um avanço significativo na caracterização das superfícies mínimas mergulhadas em  $B^3$ , dentre os resultados destaca-se o seguinte teorema:

**Teorema 2** (Teorema de Fraser-Schoen). *Se  $\Sigma$  é uma superfície mínima de bordo livre em  $B^n$ , homeomorfa a um anel, tal que as funções coordenadas são primeiras autofunções de Steklov, então  $n = 3$  e  $\Sigma$  é congruente ao catenoide crítico.*

Nesta dissertação estuda-se os resultados obtidos por Peter McGrath em seu artigo intitulado "*A Characterization of the Critical Catenoid*" publicado no Jornal de Matemática da Universidade de Indiana em 2018. Tendo como principais resultados a solução parcial da Conjectura de Fraser e Li (veja Conjectura 1) adicionando a hipótese de simetria em relação a reflexões com respeito a três planos ortogonais, além de uma investigação das superfícies mínimas de bordo livre mergulhadas em  $B^3$  com reflexões simétricas mais gerais e com  $n$  componentes de bordo.

**Conjectura 1** (Conjectura Fraser-Li). *A menos de congruências, o catenoide crítico é o único anel mínimo de bordo livre propriamente mergulhado em  $B^3$ .*

No Capítulo 1, discute-se as principais definições e teoremas que sustentam a ideia da prova dos resultados principais do artigo, além disso aborda as principais características do catenoide crítico. Já o Capítulo 2 apresenta a demonstração dos teoremas apresentados por Peter McGrath.

# Capítulo 1

## PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos definições, proposições, teoremas e exemplos da Geometria Riemanniana para melhor entender as características de uma superfície mínima com bordo livre imersa em uma bola unitária tridimensional, principal objeto de estudo deste trabalho. Vale ressaltar que ao mencionar funções diferenciáveis, significará funções de classe  $C^\infty$ . Para mais detalhes veja [2], [3] e [12].

### 1.1 Variedades Diferenciáveis

Em um primeiro contato com o cálculo diferenciável, as condições apresentadas de diferenciabilidade de uma função são geralmente identificadas com o espaço euclidiano tridimensional. Ao perceber que existem problemas que não se restringem ao espaço euclidiano, houve a necessidade de ampliar as ideias de diferenciabilidade já existentes. Dessa forma, o conceito de variedades diferenciáveis surgiu naturalmente.

Seja  $M$  um espaço topológico satisfazendo os seguintes axiomas:

- a) **Axioma de Hausdorff:** Para todos  $a, b \in M$  distintos, existem abertos  $U, V \subset M$ , com  $a \in U$  e  $b \in V$ , tais que  $U \cap V = \emptyset$ , em outras palavras, os pontos podem ser separados por conjuntos abertos;
- b) **Axioma da Base Enumerável:**  $M$  pode ser coberta por uma quantidade enumerável de conjuntos abertos.

**Definição 1.1.** Um *atlas de dimensão  $n$*  (ou *sistema de coordenadas*) para  $M$  é uma

coleção

$$\Phi = \{(V_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}},$$

onde  $V_\alpha$  é um aberto de  $M$  e  $\varphi_\alpha : V_\alpha \rightarrow \hat{V}_\alpha$  um homeomorfismo de  $V_\alpha$  em um aberto  $\hat{V}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ , satisfazendo as seguintes condições:

(i) Os abertos  $V_\alpha$  cobrem  $M$ , isto é,

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha = M$$

(ii) Para cada par de índices  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$  tais que  $V_{\alpha\beta} = V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ , as seguintes funções de transição

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(V_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_\beta(V_{\alpha\beta})$$

$$\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(V_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_\alpha(V_{\alpha\beta})$$

são de classe  $C^\infty$ .

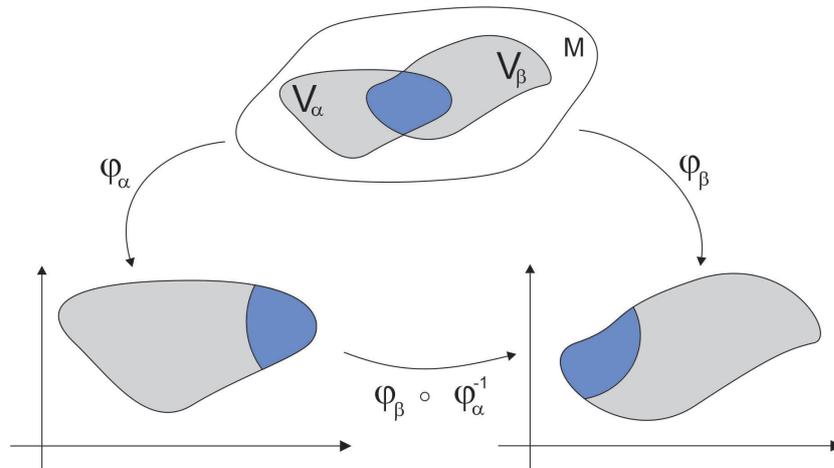


Figura 1.1: Função Transição de  $\varphi_\alpha$  para  $\varphi_\beta$ .

O par ordenado  $(\varphi_\alpha, V_\alpha)$  definido acima é denominado **carta** (ou **parametrização** ou **sistema de coordenadas locais**) para uma dada vizinhança pertencente à  $M$ . Além disso, temos o conjunto  $\hat{V}_\alpha = \varphi_\alpha(V_\alpha)$  denominado por **vizinhança coordenada** e se  $\varphi_\alpha(p) = (x_1, \dots, x_n)$ , com  $p \in V_\alpha$ , então  $x_1, \dots, x_n$  são chamados de **coordenadas locais**.

**Definição 1.2.** Seja  $\Phi$  um atlas, o denominamos **atlas maximal**, ou **estrutura diferenciável**, de  $M$  quando toda carta  $(V, \varphi)$  de  $M$  pertence à  $\Phi$ . Dizemos que o espaço

topológico  $M$  é uma **variedade diferenciável** de dimensão  $n$  quando é munido de uma estrutura diferenciável  $\Phi$ .

Um exemplo imediato de variedade diferenciável de dimensão  $n$  é o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  gerado pelo atlas  $\Phi = \{(B_t, id_t)\}_{t \in \mathbb{N}}$ , onde  $B_t = B(O, t)$  é a bola aberta de raio  $t$  centrada na origem e  $id_t$  é a restrição da função identidade de  $\mathbb{R}^n$  à  $B_t$ .

**Definição 1.3.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Diz-se que  $M$  é **orientável** se  $M$  admite uma estrutura diferenciável  $\{(V_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  tal que para todo par  $\alpha, \beta$ , com  $\varphi_\alpha(V_\alpha) \cap \varphi_\beta(V_\beta) = W \neq \emptyset$ , a diferencial de mudança de coordenadas  $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  tem determinante positivo.*

Caso contrário, diz-se que  $M$  é **não orientável**. Se  $M$  é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo a Definição 1.3 é chamada uma orientação de  $M$ , já  $M$  é conhecida por orientada. Duas estruturas que satisfazem a Definição 1.3 determinam a mesma orientação se a união delas satisfazem tal definição.

Para simplificar a notação utilizaremos  $M^n$  para denotar  $M$  como uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . Temos as seguintes definições de diferenciabilidade (ou suavidade), sendo que a primeira relaciona uma variedade diferenciável com o espaço euclidiano e a segunda relaciona duas variedades diferenciáveis.

**Definição 1.4.** *Sejam  $M^n$  uma variedade diferenciável,  $k \in \mathbb{N}$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  uma função qualquer. Dizemos que  $f$  é uma **função diferenciável** se, para todo  $p \in M$ , existe uma carta  $(U, \varphi)$  para  $M$ , com  $p \in U$ , tal que a composição  $f \circ \varphi^{-1}$  é suave no aberto  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ .*

**Definição 1.5.** *Sejam  $M_1^n$  e  $M_2^m$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  é **diferenciável (ou suave)** em  $p \in M_1$  existe uma carta  $(V, y)$  em  $\varphi(p)$  e existe uma carta  $(U, x)$  em  $p$  tal que  $\varphi(U) \subset V$  tal que a aplicação*

$$y \circ \varphi \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

*é diferenciável em  $x(p)$  (observe a Figura 1.2). Além disso,  $\varphi$  é diferenciável em um aberto de  $M_1$  se é diferenciável em todos os pontos deste aberto. A aplicação  $\hat{\varphi} = y \circ \varphi \circ x^{-1}$  é denominada **representação em coordenadas** de  $\varphi$ .*

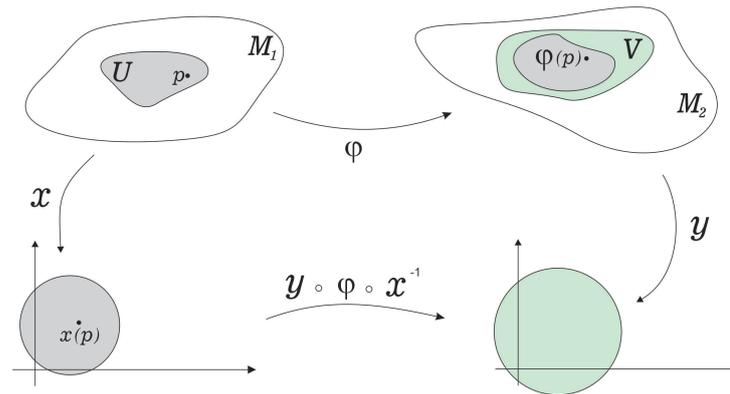


Figura 1.2: Função Diferenciável.

### 1.1.1 Superfícies Regulares

As superfícies regulares são bons exemplos de variedades diferenciáveis bastante exploradas no curso de Geometria Diferencial, além disso podem ser visualizadas facilmente pois "moram" no  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 1.6.** Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular se, para cada  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $\varphi : U \rightarrow V \cap S$  de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que

(1)  $\varphi$  é diferenciável. Isto significa que se escrevemos

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in U$$

as funções  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens;

(2)  $\varphi$  é um homeomorfismo. Como  $\varphi$  é contínua pela condição (1), isto significa que  $\varphi$  tem inversa  $\varphi^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  que é contínua.

(3) (condição de regularidade) Para todo  $q \in U$ , a diferencial  $d\varphi_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

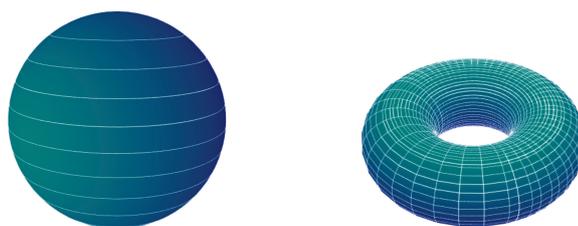


Figura 1.3: Exemplos de Superfícies Regulares: Esfera(esquerda) e Toro(direita).

### 1.1.2 Espaço Tangente

Inicialmente, precisamos estabelecer os "caminhos" que ligam dois pontos quaisquer e a ligação existente entre esse caminho e a derivada de um ponto de uma variedade diferenciável.

**Definição 1.7.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  é chamada uma **curva** (diferenciável) em  $M$ . Suponha que  $\alpha(0) = p \in M$ , e seja  $\mathcal{D}$  o conjunto das funções de  $M$  que são diferenciáveis em  $p$ , vide a Definição 1.4. O **vetor tangente** à curva em  $t = 0$  é a função  $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \quad \text{com } f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em  $p$  é o **vetor tangente** em  $t = 0$  de alguma curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ .

Pela definição, para cada curva em  $M$  que passa por  $p$  obtemos um vetor tangente, gerando um conjunto denominado **espaço tangente** e denotado por  $T_pM$ .

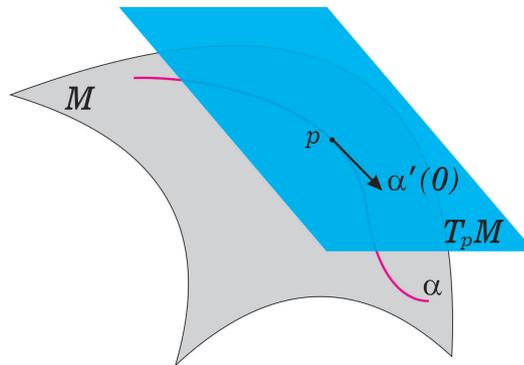


Figura 1.4: Espaço Tangente  $T_pM$ .

**Observação 1.1.** *Seja  $(U, \varphi)$  uma carta em  $M^n$ , com  $p \in U$ . Podemos exprimir a função  $f$  e a curva  $\alpha$  através desse sistema de coordenadas por  $f \circ \varphi^{-1}(q) = f(x_1, \dots, x_n)$ , onde  $q = (x_1, \dots, x_n) \in \hat{U}$ , e  $\varphi \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , respectivamente. Restringindo  $f$  a curva  $\alpha$ , temos*

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_0 = \left( \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) f \end{aligned}$$

Portanto, o vetor  $\alpha'(0)$  pode ser reescrito da seguinte maneira

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0.$$

A partir da Observação 1.1, tem-se uma base natural  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_0, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_0 \right\}$  do espaço vetorial  $T_p M$ . Vale ressaltar que o  $T_p M$  independe do sistema de coordenadas de adotado (Proposição 3.15 em [12]), em contrapartida, a base de vetores depende de tal sistema. Para concluir as definições iniciais pertinentes ao cálculo, temos a seguir a definição de diferencial de uma aplicação diferenciável entre variedades.

**Definição 1.8.** *Sejam  $M_1^n$  e  $M_2^m$  variedades diferenciáveis e  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  uma aplicação diferenciável. Para cada  $p \in M_1$  e cada  $v \in T_p M_1$ , escolha uma curva diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_1$  com  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v$ . Tomemos a curva  $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_2$  dada por  $\beta(t) = \varphi \circ \alpha(t)$ , observe que  $\beta(0) = \varphi(\alpha(0)) = \varphi(p)$ . A aplicação  $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ , dada por  $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ , denominada **diferencial** de  $\varphi$  em  $p$ , é uma transformação linear e não depende da escolha da curva  $\alpha$  (Proposição 2.7 em [2]).*

## Fibrado Tangente

Dado  $M^n$  uma variedade diferenciável, definimos o **fibrado tangente** de  $M$ , denotado por  $TM$ , como a união disjunta dos espaços tangentes de todos os pontos de  $M$ ,

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M,$$

onde cada elemento de  $TM$  é identificado pelo par ordenado  $(p, v)$ , com  $p \in M$  e  $v \in T_p M$ . O fibrado tangente é uma variedade diferenciável de dimensão  $2n$  e possui uma aplicação diferenciável natural que leva elementos de  $TM$  em  $M$ , a aplicação projeção  $\pi : TM \rightarrow M$  dada por  $\pi(p, v) = p$ .

**Definição 1.9.** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável,  $p \in M$ ,  $T_p M$  o espaço tangente em  $p$  e  $TM$  o fibrado tangente. Um **campo de vetores** tangentes a  $M$  é uma aplicação  $X : M \rightarrow TM$  tal que  $\pi(X(p)) = p, \forall p \in M$ , isto é,  $\pi \circ X = id_M$ . Para denominar um campo de vetores utilizamos a seguinte notação  $X(p) = (p, X_p)$ .*

Seja  $(U, \varphi)$  uma carta local em  $M$ , podemos utilizar tal sistema de coordenadas para determinar um campo de vetores. Pela Observação 1.1, para todo  $p \in U$  temos que

$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$  é uma base para  $T_p M$ . Logo,

$$X_p = X_1(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p + \dots + X_n(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p,$$

onde  $X_1, \dots, X_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  são as coordenadas de  $X$  com relação a parametrização definida acima. Dessa forma,  $X$  é suave se, e somente se,  $X_1, \dots, X_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  são suaves para toda carta  $(U, \varphi)$ .

### Colchete de Lie

Um campo de vetores também pode ser visto como uma aplicação de  $C^\infty(M)$  em si próprio. Dessa forma, os campos de vetores tornam-se operadores funcionais lineares e herdam as propriedades de derivação. Para cada  $f \in C^\infty(M)$  temos  $X(f) : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $X(f)(p) = X_p(f)$ , o que possibilita, utilizando um sistema de coordenadas, escrever

$$X(f) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Assim para cada  $p \in M$  temos que  $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  torna-se uma derivação  $X_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , permitindo a iteração entre campo de vetores.

**Definição 1.10.** *Sejam  $X, Y$  campos de vetores, a aplicação  $[X, Y] : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  definida por*

$$[X, Y]f = XYf - YXf$$

*é denominada **Colchete de Lie**.*

Uma consideração importante sobre o colchete de Lie é retratada no seguinte resultado.

**Lema 3.** *O Colchete de Lie entre qualquer par de campos de vetores diferenciáveis é um campo de vetores diferenciável.*

### 1.1.3 Imersões e Mergulhos

**Definição 1.11.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis e  $F : M \rightarrow N$ . Dizemos que  $F$  é uma **imersão** de  $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  é injetiva  $\forall p \in M$ . Consequentemente, tomando  $n := \dim N$  e  $m := \dim M$ , se  $F : M \rightarrow N$  é imersão, então  $m \leq n$ . A diferença  $n - m$  é chamada **codimensão** da imersão  $F$ .*

**Exemplo 1.1.** A curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (t^3, t^2)$  é uma aplicação diferenciável denominada *cúspide*, observe a Figura 1.5. Porém  $\alpha'(t)$  em  $t = 0$  não é injetiva, portanto  $\alpha$  não é imersão.

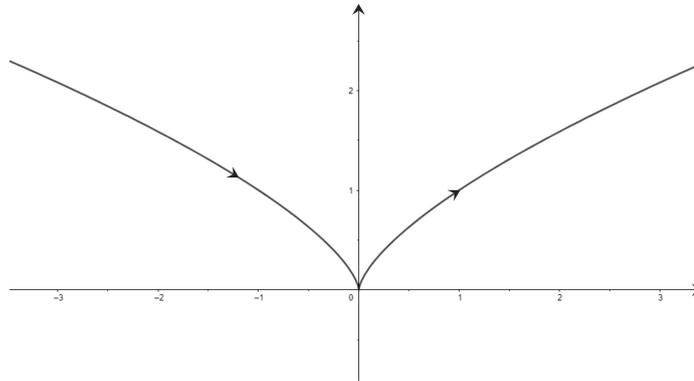


Figura 1.5: Cúspide.

**Definição 1.12.** Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis, dizemos que  $F : M \rightarrow N$  é um *mergulho* se satisfaz as seguintes propriedades:

- (1)  $F$  é imersão;
- (2)  $F$  é injetiva;
- (3)  $F : M \rightarrow F(M) \subset N$  é um homeomorfismo, onde  $F(M)$  possui a topologia induzida de  $N$ .

**Exemplo 1.2.** A curva diferenciável  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\gamma(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$  possui  $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ , o que implica  $\gamma$  ser uma imersão. Observe que  $\gamma(-2) = \gamma(2) = (0, 0)$ , o que implica  $\gamma$  não ser injetiva e, por consequência, não ser um mergulho. Logo,  $F$  ser imersão não implica  $F$  ser um mergulho.

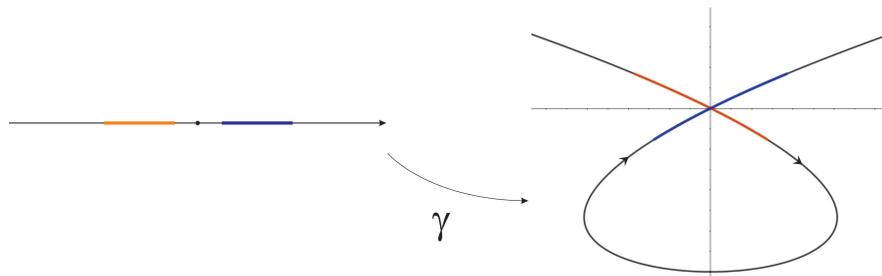


Figura 1.6: Imersão não injetiva.

## 1.2 Variedade Riemanniana

### 1.2.1 Métrica Riemanniana

Após compreender as características diferenciais naturais para uma variedade, um conceito muito importante em geometria é a métrica, pois possibilita fazer medições em uma variedade, por exemplo, calcular o comprimento de curvas, calcular área de regiões, ângulos entre vetores tangentes, etc.

**Definição 1.13.** *Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável, definimos métrica Riemanniana em  $M$  como sendo uma correspondência suave que associa a cada ponto  $p \in M$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ , ou simplesmente  $g_p$ , no espaço tangente  $T_pM$ . Logo  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ , isto é, a métrica toma dois vetores tangentes e retorna um número real. A métrica possui as seguintes características: bilinearidade, simetria e positivo definido.*

Dado um sistema de coordenadas  $\varphi : V \subset M \rightarrow \hat{V} \subset \mathbb{R}^n$ , tomemos  $q \in \varphi^{-1}(\hat{V})$ , assim  $q = \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)$ . Logo os vetores da base de  $T_qM$  são escritos da seguinte maneira

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_q = d\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)(e_i),$$

onde  $e_i$  é um vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . Isso implica que para todo  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  temos  $\left\langle \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_q, \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_q \right\rangle_{(x_1, \dots, x_n)}$  é uma métrica tal que  $\left\langle \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_q, \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_q \right\rangle : \hat{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , isto é, podemos relacionar uma métrica riemanniana com a métrica euclidiana. Dessa forma,  $g_q$  é suave se  $\left\langle \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_q, \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_q \right\rangle : \hat{V} \rightarrow \mathbb{R}$  são suaves  $\forall i, j$  e  $\forall (U, \varphi)$  cartas locais em  $M$ .

**Exemplo 1.3** (Métrica Euclidiana). *Seja  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $X(p) = p$ . Temos  $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p = e_i$ , isto é, os vetores da base de  $T_p\mathbb{R}^n$  coincidem com os vetores da base canônica ortogonal de  $\mathbb{R}^n$ . Simbolizamos a métrica euclidiana, também denominada como produto interno canônico, por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  e definimos tal métrica da seguinte maneira*

$$\langle v, w \rangle_p = \sum_{i=1}^n v^i \cdot w^i$$

onde  $v, w \in \mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 1.4** (Métrica Induzida). *Sejam  $M^n$  e  $N^k$  variedades diferenciáveis e  $F : M \rightarrow N$  uma imersão. Pela injetividade de  $F$ , segue que  $k \geq n$ . Logo  $k = n + (k - n)$ , tomando*

$r = k - n$  temos  $k = n + r$ , com  $r \geq 0$ . Daí,  $F : M^n \rightarrow N^{n+r}$ , onde  $r$  é a codimensão da imersão. Sejam  $v, w \in T_p M$ , se  $N$  possui uma métrica Riemanniana  $\bar{g}$ , podemos induzir através de  $F$  uma métrica Riemanniana  $g$  em  $M$  da seguinte maneira:

$$\langle v, w \rangle_p = \langle dF_p(v), dF_p(w) \rangle_{F(p)}.$$

Podemos simbolizar a métrica induzida por  $g = F^*\bar{g}$ .

Dizemos que  $(N, g)$  é uma variedade Riemanniana, quando  $N$  é uma variedade diferenciável e  $g_p : T_p N \times T_p N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma métrica Riemanniana. Um fato mais geral afirma que é possível a partir de uma variedade diferenciável definir uma métrica Riemanniana.

**Proposição 1.1.** *Toda variedade diferenciável admite uma métrica Riemanniana.*

*Demonstração.* Seja  $\{F_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}\}$  uma partição da unidade, isto é:

- (i)  $0 \leq F_\alpha \leq 1$ ;
- (ii)  $D = \{p \in M : F_\alpha(p) = q \in \mathbb{R}\} \subset V_\alpha = X_\alpha(U_\alpha)$ , onde  $X_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  é uma carta;
- (iii)  $\{V_\alpha\}$  cobertura aberta de  $M$  localmente finita, isto é, para todo  $p \in M$  existe  $A \subset M$  aberto, com  $p \in A$ , tal que  $A = (A \cap V_{\alpha_1}) \cup \dots \cup (A \cap V_{\alpha_n})$
- (iv)  $\sum_\alpha F_\alpha \equiv 1$ .

A existência de uma partição é dada com mais detalhes em [2]. Dados  $u, v \in T_p M$ , para algum  $p \in V_\alpha = X_\alpha(U_\alpha)$ , definamos

$$g_\alpha := \langle u, v \rangle_\alpha = \langle (dX_\alpha)^{-1}(u), (dX_\alpha)^{-1}(v) \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

sendo uma métrica Riemanniana em relação ao aberto  $V_\alpha$ . Utilizando a partição da unidade, definimos

$$(g_p)(u, v) = \sum_\alpha F_\alpha \cdot \langle u, v \rangle_\alpha$$

onde  $u, v \in T_p M$  são vetores quaisquer, definindo assim uma métrica Riemanniana para todo  $M$ . □

**Definição 1.14.** *Sejam  $(M, g)$  e  $(N, \bar{g})$  variedades Riemannianas. Dizemos que tais variedades são isométricas se existe um difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  tal que  $g = f^*\bar{g}$ , ou seja,*

$$g_p(v, w) = \bar{g}_{f(p)}(df_p(v), df_p(w))$$

para todo  $p \in M$  e para todo  $v, w \in T_p M$ .

## 1.2.2 Conexões

As conexões tornam-se importantes pois estabelecem as regras de derivação em uma variedade diferenciável ou Riemanniana. Denominaremos  $\mathfrak{X}(M)$  como o espaço dos campos de vetores diferenciáveis em  $C^\infty(M)$ .

### Conexão Afim

**Definição 1.15.** *Uma conexão afim é uma operação  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  com*

$$(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

*satisfazendo as seguintes propriedades:*

- a)  $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$
- b)  $\nabla_X(f \cdot Y) = X(f) \cdot Y + f \cdot \nabla_X Y, \forall f \in C^\infty(M)$
- c)  $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$
- d)  $\nabla_{f \cdot X} Y = f \cdot \nabla_X Y$

**Observação 1.2.** *A conexão afim é um conceito local. De fato, tomemos um sistema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  em torno de  $p$  e os campos de vetores*

$$X = \sum_i x_i \cdot X_i, Y = \sum_j y_j \cdot X_j$$

onde  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ , pela parte b) da Definição 1.15, temos

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_i x_i \nabla_{X_i} \left( \sum_j y_j X_j \right) \\ &= \sum_{ij} x_i \cdot y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} x_i \cdot X_i(y_j) X_j \end{aligned}$$

Fazendo  $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ , concluímos que  $\Gamma_{ij}^k$  são funções diferenciáveis e que

$$\nabla_X Y = \sum_k \left( \sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k$$

o que mostra que a conexão afim aplicada a um ponto  $p$  depende de  $x_i(p), y_k(p)$  e das derivadas  $X(y_k)(p)$  de  $y_k$  segundo  $X$ , tais informações são adquiridas localmente.

A conexão afim possibilita derivar campos de vetores em  $M$  e, em particular, campos que são definidos ao longo de uma curva. Para tal feito temos a derivada covariante, determinada na proposição seguinte.

**Proposição 1.2.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Então, existe uma única correspondência que associa a campo de vetores  $V$  tangentes a  $M$  ao longo da curva  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  um outro campo de vetores tangentes  $\frac{DV}{dt}$  a  $M$  ao longo de  $c$  tal que*

- 1)  $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$ , onde  $W$  é um campo de vetores ao longo de  $c$ ;
- 2)  $\frac{D}{dt}(f \cdot V) = \frac{df}{dt} \cdot V + f \cdot \frac{DV}{dt}$ , onde  $f$  é uma função diferenciável em  $I$ ;
- 3) Se  $V$  é induzido por um campo de vetores  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , isto é,  $V(t) = Y(c(t))$ , então  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{c'(t)}Y$ .

*Demonstração.* Vide Proposição 2.2 em [2]. □

O campo de vetores  $\frac{DV}{dt}$  é denominado **Derivada Covariante** de  $V$  ao longo da curva  $c$ .

As funções  $\Gamma_{ij}^k$ , utilizadas na Observação 1.2, são os coeficientes da conexão  $\nabla_X Y$  em  $U$ , também conhecidos por **Símbolos de Christoffel** da conexão. Veremos na Observação 1.4 que tais coeficientes podem ser obtidos a partir da métrica Riemanniana definida na variedade diferenciável e, conhecendo-os, é possível estabelecer uma expressão para a derivada covariante.

**Definição 1.16.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Um campo de vetores  $V$  ao longo da curva  $c : I \rightarrow M$  é chamado **paralelo** quando  $\frac{DV}{dt} = 0, \forall t \in I$ .*

### Conexão Riemanniana

**Definição 1.17.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$  e uma métrica Riemanniana  $\langle, \rangle$ . A conexão é dita **compatível** com a métrica se*

$$X(\langle Y, Z \rangle) = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (1.1)$$

Equivalentemente, sejam  $V$  e  $W$  campos de vetores ao longo da curva  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ , então

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, t \in I. \quad (1.2)$$

Equivalentemente, para qualquer curva suave  $c$  e qualquer par de campos paralelos  $P_1$  e  $P_2$  ao longo de  $c$ , então

$$\langle P_1, P_2 \rangle = \text{constante}. \quad (1.3)$$

A métrica compatível pode então ser identificada por qualquer uma das Equações (1.1), (1.2) ou (1.3). A demonstração das equivalências pode ser consultada em [2].

**Definição 1.18.** Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é dita **simétrica** se

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ para todos } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

**Observação 1.3.** Em um sistema de coordenadas  $(U, x)$ , o fato de ser  $\nabla$  simétrica implica que para todo  $i, j = 1, \dots, n$ ,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \quad (1.4)$$

onde  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ , justificando o nome que tal conexão recebe. Equivalentemente,  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ .

A seguir um teorema importante que relaciona a conexão afim com as Definições 1.17 e 1.18.

**Teorema 4 (Levi-Civita).** Dada uma variedade Riemanniana  $M$ , existe uma única conexão afim  $\nabla$  em  $M$  satisfazendo as condições:

- a)  $\nabla$  é simétrica;
- b)  $\nabla$  é compatível com a métrica Riemanniana.

*Demonstração.* A demonstração é obtida em [2]. □

A conexão dada no teorema acima é conhecida como **Conexão de Levi-Civita** ou **Conexão Riemanniana**. Sejam  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , vale destacar a Fórmula de Koszul utilizada na demonstração (vide Teorema 3.6 em [2]) do Teorema 4:

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla_Y X \rangle &= \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ &\quad - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \} \end{aligned} \quad (1.5)$$

**Observação 1.4.** A partir dos símbolos de Christoffel e pela Equação 1.5, temos

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\}$$

onde  $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ . Como a matriz  $(g_{km})$  admite uma inversa  $(g^{km})$ , teremos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}. \quad (1.6)$$

A equação (1.6) é a expressão clássica dos símbolos de Christoffel em termos da métrica. Além disso, para  $V = \sum_j v^j X_j$ , reescrevemos a derivada covariante através dos símbolos de Christoffel da seguinte maneira

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt} \right\} X_k \quad (1.7)$$

### 1.3 Geodésicas

Até o momento já identificamos as “rua” (curvas) que são percorridas para ligar dois pontos de uma variedade diferenciável, porém é interessante saber qual a curva mais curta que liga tais pontos, chegando assim nas geodésicas. Mas, antes precisamos construir condições para tal definição, começando com a primeira variação do comprimento. Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana, tomemos  $c : [a, b] \rightarrow M$  uma curva suave parametrizada pelo comprimento de arco (isto é,  $|c'(t)| = 1, \forall t \in [a, b]$ ) e  $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$  uma aplicação suave denominada variação de  $c$ . Cada curva gerada a partir de  $f$  será denotada por  $c_s$ , a curva  $c$  será “modificada” a partir do parâmetro  $s$ , dessa forma  $f(s, t) = c_s(t)$  e  $c(t) = c_0, \forall t \in [a, b]$ . Primeiramente, utilizaremos essas informações para calcular a primeira variação do comprimento  $\left. \frac{d}{ds} l(c_s) \right|_{s=0}$ , onde  $l(c_s)$  é o comprimento da curva  $c_s$ . Como  $|c'(t)| = 1$ , já que é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, segue que

$$\frac{d}{ds} l(c_s) = \int_a^b ((f_t, f_t))^{-1/2} \cdot \langle \nabla_{f_s} f_t, f_t \rangle dt = \int_a^b \langle \nabla_{f_s} f_t, f_t \rangle dt. \quad (1.8)$$

Pelo Teorema 4 temos que a conexão é simétrica, o que implica

$$\nabla_{f_s} f_t = \nabla_{f_t} f_s,$$

substituindo em (1.8) segue

$$\frac{d}{ds} l(c_s) = \int_a^b \langle \nabla_{f_t} f_s, f_t \rangle dt.$$

Por outro lado, observe que

$$\langle \nabla_{f_t} f_s, f_t \rangle = \frac{D}{dt} \langle f_s, f_t \rangle - \langle f_s, \nabla_{f_t} f_t \rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} l(c_s) &= \int_a^b \left[ \frac{D}{dt} (\langle f_s, f_t \rangle) - \langle f_s, \nabla_{f_t} f_t \rangle \right] dt \\ &= \langle f_s, f_t \rangle(b) - \langle f_s, f_t \rangle(a) - \int_a^b \langle f_s, \nabla_{f_t} f_t \rangle dt. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Tomando  $V(t) = f_s(0, t)$ , o campo variacional, e  $L(s) = l(c_s)$ , substituindo em 1.9, temos a primeira variação do comprimento dada por

$$L'(0) = \langle V(t), c'(t) \rangle_a^b - \int_a^b \langle V(t), \nabla_{c'(t)} c'(t) \rangle dt.$$

Para as curvas fechadas, isto é, curvas que possuem o mesmo extremo ( $c(a) = c(b)$ ), temos  $V(a) = V(b) = 0$ , denominada variação própria, logo

$$L'(0) = - \int_a^b \langle V(t), \nabla_{c'(t)} c'(t) \rangle dt. \tag{1.10}$$

**Definição 1.19.** Dizemos que a curva  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  é uma **geodésica** se  $\nabla_{c'(t)} c'(t) = 0, \forall t \in I$ . Além disso, devido à Equação (1.10), geodésicas são pontos críticos com relação às variações próprias do funcional comprimento no espaço das curvas que possuem as mesmas extremidades.

**Observação 1.5.** Se uma curva  $c$  é geodésica, então  $|c'(t)|$  é constante. De fato,

$$\frac{D}{dt} (\langle c'(t), c'(t) \rangle) = 2 \cdot \langle c'(t), \nabla_{c'(t)} c'(t) \rangle = 0, \forall t \in I.$$

**Observação 1.6.** Tomando um sistema de coordenadas qualquer encontramos uma condição para a existência de geodésicas. Escrevendo  $c(t) = X(x_1(t), \dots, x_n(t))$ , segue

$$\begin{aligned} \nabla_{c'(t)} c'(t) &= \nabla_{\left(\sum_i x'_i(t) X_i\right)} \left(\sum_j x'_j(t) X_j\right) \\ &= \sum_j x''_j(t) X_j + \sum_{ij} x'_i(t) \cdot x'_j(t) \nabla_{X_i} X_j \cdot \\ &= \sum_k x''_k(t) X_k + \sum_{ij} x'_i(t) \cdot x'_j(t) \Gamma_{ij}^k X_k \end{aligned}$$

Donde,

$$\therefore \nabla_{c'(t)} c'(t) = \sum_k \left( x_k''(t) + \sum_{ij} x_i'(t) \cdot x_j'(t) \Gamma_{ij}^k \right) X_k.$$

Logo  $c$  é geodésica se, e somente se,

$$x_k''(t) + \sum_{ij} x_i'(t) \cdot x_j'(t) \Gamma_{ij}^k(x(t)) = 0, \forall k = 1, \dots, n \quad (1.11)$$

As equações obtidas em (1.11) são conhecidas como as equações das geodésicas e formam um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem não linear. Tomando  $y_i(t) = x_i'(t)$ , temos

$$\begin{cases} y_i(t) = x_i'(t), \\ y_i'(t) = -\sum_{ij} y_i(t) \cdot y_j(t) \Gamma_{ij}^k(x) \end{cases} \quad (1.12)$$

Como consequência da Equação (1.12) e do Teorema de Existência e Unicidade de EDO's, temos a seguinte proposição.

**Proposição 1.3.** *Dado  $p \in M$ , existem um aberto  $V \subset M$ ,  $p \in V$ ,  $\delta > 0$  e  $\varepsilon_1 > 0$  e uma aplicação suave  $\gamma = \pi \circ \varphi$ , com  $(\varphi, V)$  uma carta suave em  $M$ , tal que*

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times U \rightarrow M$$

onde  $U = \{(q, v) \in TM; q \in V, v \in T_q M, |v| < \varepsilon_1\}$ , tal que a curva  $t \mapsto \gamma(t, q, v)$  é a única geodésica de  $M$  que no instante  $t = 0$  passa por  $q$  com velocidade  $v$ , para cada  $q \in V$  e cada  $v \in T_q M$  com  $|v| < \varepsilon_1$ .

A demonstração da proposição anterior é obtida em [2]. Observe que a Proposição 1.3 mostra a existência e unicidade de uma geodésica que possui  $|v| < \varepsilon_1$ , criando condições para aumentar a velocidade de uma geodésica diminuindo o intervalo de definição da mesma, ou vice-versa.

**Lema 5** (Homogeneidade das Geodésicas). *Se a geodésica  $\gamma(t, q, v)$  está definida no intervalo  $(-\delta, \delta)$ , então a geodésica  $\gamma(t, q, av)$ , com  $a \in \mathbb{R}^+$ , está definida no intervalo  $\left(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}\right)$  e*

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v).$$

A homogeneidade possibilita a expansão do intervalo de definição da geodésica que sofrerá ajustes no vetor velocidade, podendo aumentar ou diminuir.

**Definição 1.20.** *Seja  $p \in M$  e  $U \subset TM$  um aberto dado pela Proposição 1.3. Então a aplicação  $exp : U \rightarrow M$  dada por*

$$exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right)$$

com  $(q, v) \in U$ , é chamada a **aplicação exponencial** em  $U$ . A aplicação também pode ser denotada por  $exp_q(v)$ .

Geometricamente, a aplicação exponencial  $exp(q, v)$  é o ponto de  $M$  obtido percorrendo um comprimento igual a  $|v|$ , a partir de  $q$ , sobre a geodésica que passa por  $q$  com velocidade, ou derivada, igual a  $\frac{v}{|v|}$ , observe a Figura 1.7. Para fins de notação, utilizaremos  $B_\varepsilon(0)$  como a bola aberta de centro na origem  $0$  de  $T_qM$  e de raio  $\varepsilon$  e, conseqüentemente,  $\overline{B_\varepsilon(0)}$  a bola fechada.

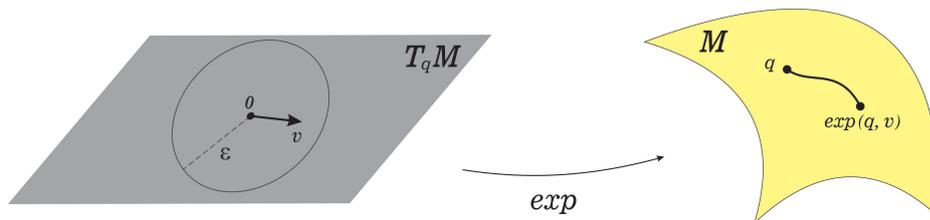


Figura 1.7: Aplicação Exponencial.

**Proposição 1.4.** *Dado  $q \in M$ , existe um  $\varepsilon > 0$  tal que  $exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \rightarrow M$  é um difeomorfismo de  $B_\varepsilon(0)$  sobre um aberto de  $M$ .*

Em particular, pela proposição acima, para todo ponto  $q \in M$  a aplicação exponencial  $exp_q$  fornece um sistema de coordenadas em torno desse ponto e, além disso, é uma isometria radial (ver 6 abaixo). Dizemos que  $W \subset M$  é **vizinhança normal** de  $q \in M$  se existe um aberto  $V \subset T_qM, 0 \in V$  tal que  $exp_q : V \rightarrow exp_q(V) = W$  é um difeomorfismo.

**Lema 6** (Lema de Gauss). *Sejam  $q \in M$  e  $v \in T_qM$  tal que  $exp(q, v)$  esteja definida. Seja  $w \in T_qM \approx T_v(T_qM)$ , então*

$$\langle d(exp_q)_v(v), d(exp_q)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [2]. □

A próxima proposição relaciona quais as condições que tornam a geodésica uma curva localmente minimizante entre dois pontos de uma variedade Riemanniana.

**Proposição 1.5.** *Dados  $q \in M, \varepsilon > 0, \overline{B_\varepsilon(0)} \subset T_q M$ ,  $U$  a vizinhança normal de  $q$  e  $\exp_q : V \subset T_q M \rightarrow U = \exp_q(V)$  um difeomorfismo. Tomemos  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  uma geodésica radial, com  $\gamma(0) = q$  e  $\gamma(1) = p \in \exp_q(B_\varepsilon(0))$  e  $c : [0, 1] \rightarrow M$  diferenciável por partes, com  $c(0) = q$  e  $c(1) = p$ , então  $l(\gamma) \leq l(c)$ . Se  $l(\gamma) = l(c)$ , então  $\gamma$  e  $c$  possuem o mesmo traço  $\gamma([0, 1]) = c([0, 1])$ .*

*Demonstração.* Definamos  $t_1 := \inf\{t \in [0, 1]; c(t) \in \exp_q(\partial B_\varepsilon(0))\}$ . Sejam  $\delta > 0$ , com  $\delta < \varepsilon$  e  $B_\delta(0) \subset T_q M$ , definamos  $t_0 := \sup\{t \in [0, t_1]; c(t) \in \exp_q(B_\delta(0))\}$ . Tomemos então uma curva  $\bar{c}(t) = c|_I : I \rightarrow M$ , com  $I = [t_0, t_1]$ , tal que  $\bar{c}(t) = \exp_q(r(t) \cdot v(t))$ , onde  $|v(t)| = 1$ . Tomando  $f(r, t) = \exp_q(r \cdot v(t))$ , temos  $\bar{c}(t) = f(r(t), t)$ . O que implica,

$$l(\bar{c}) = \int_{t_0}^{t_1} |\bar{c}'(t)| dt,$$

onde

$$\bar{c}'(t) = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{d(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Pelo Lema 6 temos  $\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0$ . Temos ainda  $\frac{\partial f}{\partial r} = d(\exp_q)_{rv(t)} \cdot v(t)$ , logo  $\left| \frac{\partial f}{\partial r} \right| = 1$ .

Daí

$$\begin{aligned} |\bar{c}'(t)|^2 &= |r'(t)|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|^2 \\ &\geq |r'(t)|^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} l(\bar{c}) = \int_{t_0}^{t_1} |\bar{c}'(t)| dt &\geq \int_{t_0}^{t_1} |r'(t)| dt \\ &\geq \left| \int_{t_0}^{t_1} r'(t) dt \right| \\ &= |r(t_1) - r(t_0)| \\ &= \varepsilon - \delta. \end{aligned}$$

Como  $l(c) \geq l(\bar{c})$ , segue  $l(c) \geq \varepsilon - \delta$ . Fazendo  $\delta \rightarrow 0$ , temos o seguinte resultado  $l(c) \geq \varepsilon$  e, portanto,  $l(c) \geq l(\gamma)$ .  $\square$

**Definição 1.21.** *Dado  $p \in M$ , existem  $\delta > 0$  e  $W \subset M$  vizinhança de  $p$  tais que  $\forall q \in W$  temos  $\exp_q : B_\delta(0) \subset T_q M \rightarrow \exp_q(B_\delta(0))$  é um difeomorfismo e  $W \subset \exp_q(B_\delta(0))$ . Denominamos  $W$  como **vizinhança totalmente normal** de  $p \in M$ .*

**Definição 1.22.** *Uma variedade Riemanniana  $M$  é dita geodesicamente completa se para todo  $p \in M$ , a aplicação exponencial está definida para todo  $v \in T_p M$ , isto é, se as geodésicas definidas iniciando  $p$  estão definidas para todos os valores do parâmetro  $t \in \mathbb{R}$ .*

Observe que a minimalidade de uma geodésica é garantida apenas localmente, isto significa que para pontos mais distantes, a geodésica não significa ser o menor caminho que os ligará. Portanto, ser uma variedade Riemanniana geodesicamente completa não significa que a geodésica entre dois pontos quaisquer dessa variedade é minimizante. Por exemplo, as geodésicas de uma esfera que partem de um ponto não são minimizantes depois que passam pelo antípoda de  $p$ .

## 1.4 Curvatura; Segunda Forma Fundamental

### 1.4.1 Curvaturas

**Definição 1.23.** *O tensor curvatura  $R$  de uma variedade Riemanniana  $M$  é uma correspondência que associa a cada par  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  uma aplicação  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z \quad (1.13)$$

com  $Z \in \mathfrak{X}(M)$ , onde  $\nabla$  é a conexão Riemanniana.

Intuitivamente, o tensor curvatura mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser Euclidiana. Para conseguir um número associado a essa diferença utilizamos o **tensor curvatura** denotado por  $(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle$ , onde  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Observação 1.7.** *A curvatura é trilinear com respeito à multiplicação por funções, isto é, as seguintes equações são satisfeitas*

$$R(fX_1 + gX_2, Y)Z = fR(X_1, Y)Z + gR(X_2, Y)Z \quad (1.14)$$

$$R(X, fY_1 + gY_2)Z = fR(X, Y_1)Z + gR(X, Y_2)Z \quad (1.15)$$

$$R(X, Y)(fZ_1 + gZ_2) = fR(X, Y)Z_1 + gR(X, Y)Z_2 \quad (1.16)$$

onde  $f, g \in C^\infty(M)$ . A demonstração dessa observação pode ser obtida em [2].

As propriedades do tensor curvatura estão listadas na seguinte proposição:

**Proposição 1.6.** *As propriedades do tensor curvatura são*

(a) *(Identidade de Bianchi)  $(X, Y, Z, W) + (Y, Z, X, W) + (Z, X, Y, W) = 0$*

$$(b) (X, Y, Z, W) = -(Y, X, Z, W)$$

$$(c) (X, Y, Z, W) = -(X, Y, W, Z)$$

$$(d) (X, Y, Z, W) = (Z, W, X, Y)$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser obtida em [2]. □

### Curvatura Seccional

Sejam  $(M^n, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$  uma variedade Riemanniana e  $\nabla$  uma conexão Riemanniana.

Dado  $p \in M$ , tomemos  $v, w \in T_p M$  tais que  $v$  e  $w$  são linearmente independentes.

A área do paralelogramo bidimensional formado por tais vetores é dada por

$$|v \wedge w| = \sqrt{|v|^2 \cdot |w|^2 - \langle v, w \rangle^2}$$

**Definição 1.24.** Dado um ponto  $p \in M$  e um subespaço bidimensional  $\sigma \subset T_p M$ , o número real dado por

$$K(\sigma) = K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}$$

é chamado **curvatura seccional** de  $\sigma$  em  $p$ , onde  $\{x, y\}$  é uma base de  $\sigma$ . A curvatura seccional independe da base tomada em  $\sigma$ .

**Observação 1.8.** Como  $K(\sigma)$  independe da base, podemos tomar  $\{x, y\}$  como uma base ortonormal, daí  $K(x, y) = (x, y, x, y)$ . Isto é, a curvatura seccional passa a ser calculado através do tensor curvatura.

### Curvatura de Ricci e Curvatura Escalar

**Definição 1.25.** Seja  $x = z_n$  um vetor unitário em  $T_p M$ . Tomemos uma base ortonormal  $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$  do hiperplano de  $T_p M$  ortogonal a  $x$ , as seguintes médias

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (x, z_i, x, z_i)$$

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Ric_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^{n-1} (z_i, z_j, z_i, z_j) \right),$$

são chamadas **curvatura de Ricci** e **curvatura escalar**, respectivamente. Estas curvaturas não dependem da escolha das correspondentes bases ortonormais, maiores detalhes em [2].

## 1.4.2 Segunda Forma Fundamental

Seja  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m=k}$  uma imersão. Temos que  $(\overline{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é uma variedade Riemanniana e a sua métrica induz uma métrica em  $M$  através da imersão  $f$ . Assim, denominamos  $f : (M, g_M) \rightarrow (\overline{M}, g_{\overline{M}})$  de **imersão isométrica** se

$$\langle u, v \rangle_M = \langle df(u), df(v) \rangle_{\overline{M}}$$

$\forall u, v \in T_p M$ , com  $p \in M$ .

Para cada  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $U \subset M$  de  $p$  tal que  $f(U) \subset \overline{M}$  é uma subvariedade de  $\overline{M}$ . Isto quer dizer que existem uma vizinhança  $\overline{U} \subset \overline{M}$  de  $f(p)$  e um difeomorfismo  $\varphi : \overline{U} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$  em um aberto  $V$  de  $\mathbb{R}^k$ , tais que  $\varphi$  aplica difeomorficamente  $f(U) \cap \overline{U}$  em um aberto do  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$ . Dessa forma, podemos utilizar  $f$  para identificar  $U$  com  $f(U)$ , o que acontece em  $M$  ou  $f(M)$  é bem semelhante, a tal ponto que podemos analisar a configuração de uma delas e ter conclusões em relação às duas. Com essas propriedades, podemos supor que  $M$  é uma subvariedade de  $\overline{M}$ .

Para simplificar a notação, identificaremos  $U$  com  $f(U)$  e cada vetor  $v \in T_p M$ ,  $p \in M$ , com  $df_p(v) \in T_{f(p)} \overline{M}$ . Para cada  $p \in M$ , o produto interno em  $T_p \overline{M}$ , o decompõe na seguinte soma direta

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

onde  $(T_p M)^\perp$  é o complemento ortogonal de  $T_p M$  em  $T_p \overline{M}$ . Para  $v \in T_p \overline{M}$ , podemos escrever

$$v = v^T + v^N, v^T \in T_p M, v^N \in (T_p M)^\perp.$$

Denominamos  $v^T$  como **componente tangencial** de  $v$  e  $v^N$  de **componente normal** de  $v$ .

**Proposição 1.7.** *Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ , com  $U \subset M$  aberto, e  $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(\overline{U})$  extensões locais,  $\overline{U} \subset \overline{M}$  aberto, tal que  $\overline{X}|_U = X$  e  $\overline{Y}|_U = Y$ . Se  $\nabla$  e  $\overline{\nabla}$  são as conexões de Levi-Civita de  $M$  e  $\overline{M}$ , respectivamente, então*

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T$$

*Demonstração.* Definamos  $\overline{\overline{\nabla}}_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T$ . Vamos mostrar que a conexão  $\overline{\overline{\nabla}}$  está bem definida, compatível e simétrica, podemos a partir disso concluir que  $\nabla = \overline{\overline{\nabla}}$ , pois, pelo Teorema 4, a conexão é única.

- a) (*Bem definida:*)  $\overline{\nabla}_X \overline{Y}$  em  $p \in U \subset M$  só depende de  $\overline{X}(p) = X(p)$  e dos valores de  $\overline{Y}$  ao longo de alguma curva tangente a  $\overline{X}(p) = X(p)$  (podemos tomar a curva contida em  $U \subset M$ , onde  $\overline{Y} = Y$ ). Ou seja, qualquer extensão local tomada não fará diferença. Portanto,  $\overline{\nabla}$  está bem definida.
- b) (*Compatível:*) A conexão  $\overline{\nabla}$  preserva as propriedades da conexão  $\overline{\nabla}$ , pois a operação transposta é linear. Sejam  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$ , com  $U \subset M$ , temos

$$\begin{aligned}
 X(\langle Y, Z \rangle) &= \overline{X}(\langle \overline{Y}, \overline{Z} \rangle) \\
 &= \langle \overline{\nabla}_X \overline{Y}, \overline{Z} \rangle + \langle \overline{Y}, \overline{\nabla}_X \overline{Z} \rangle \\
 &= \langle (\overline{\nabla}_X \overline{Y})^T, \overline{Z} \rangle + \langle \overline{Y}, (\overline{\nabla}_X \overline{Z})^T \rangle \\
 &= \langle \overline{\nabla}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \overline{\nabla}_X Z \rangle.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $\overline{\nabla}$  é compatível.

- c) (*Simétrica:*) Temos  $[\overline{X}, \overline{Y}]|_M = [X, Y]$ . Daí,

$$\begin{aligned}
 \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X &= (\overline{\nabla}_X \overline{Y})^T - (\overline{\nabla}_Y \overline{X})^T \\
 &= (\overline{\nabla}_X \overline{Y} - \overline{\nabla}_Y \overline{X})^T \\
 &= [\overline{X}, \overline{Y}]^T \\
 &= [\overline{X}, \overline{Y}]|_M \\
 &= [X, Y].
 \end{aligned}$$

Portanto,  $\overline{\nabla}$  é compatível. □

A Proposição 1.7 mostra que a conexão em  $M$  é simplesmente tomar a projeção tangente da conexão em  $\overline{M}$ . Isso proporciona a seguinte definição.

**Definição 1.26.** A Segunda Forma Fundamental de  $M^n$  em  $\overline{M}^{k=m+n}$  é a aplicação  $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^\perp(M)$  definida por

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_X \overline{Y} - \nabla_X Y,$$

onde  $\overline{X}$  e  $\overline{Y}$  são as extensões de  $X$  e  $Y$ , respectivamente, e  $\mathfrak{X}^\perp(M) = \{X : M \rightarrow T\overline{M} \text{ suave tal que } X(p) \in (T_p M)^\perp, \forall p \in M\}$  o conjunto de vetores normais a  $M$ .

**Observação 1.9.** A segunda forma fundamental  $B$  não depende das extensões  $\overline{X}$  e  $\overline{Y}$ .

**Proposição 1.8.** *A aplicação  $B$  definida em 1.26 é bilinear e simétrica.*

*Demonstração.* Como  $B$  é definida a partir de duas conexões, segue que  $B$  é linear na primeira entrada, isto é,  $B(f \cdot X, Y) = f \cdot B(X, Y), \forall f \in C^\infty(M)$ . Além disso,

$$\begin{aligned} B(X, f \cdot Y) &= \overline{\nabla}_X(\overline{f} \cdot \overline{Y}) - \nabla_X(f \cdot Y) \\ &= \overline{f} \overline{\nabla}_X \overline{Y} + \overline{X}(\overline{f}) \cdot \overline{Y} - f \cdot \nabla_X Y - X(f) \cdot Y \\ (\text{localmente } f = \overline{f}) &= f \cdot (\overline{\nabla}_X \overline{Y} - \nabla_X Y) \\ &= f \cdot B(X, Y) \end{aligned}$$

Concluindo que  $B$  é bilinear. Por outro lado, temos

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_X \overline{Y} - \nabla_X Y = \overline{\nabla}_Y \overline{X} + [\overline{X}, \overline{Y}] - \nabla_Y X - [X, Y],$$

pela Proposição 1.7 concluímos que  $B(X, Y) = B(Y, X)$ . Logo,  $B$  é simétrica.  $\square$

**Definição 1.27.** *Seja  $p \in M$  e  $\eta \in (T_p M)^\perp$ . A aplicação  $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle$ , é, pela Proposição 1.8, bilinear simétrica. A forma quadrática  $\mathbb{I}\!\!\!\text{I}\!\!\!\text{I}_\eta$  definida em  $T_p M$  por*

$$\mathbb{I}\!\!\!\text{I}\!\!\!\text{I}_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada a **segunda forma fundamental** de  $f$  em  $p$  segundo o vetor normal  $\eta$ .

A toda forma quadrática podemos associar uma aplicação linear auto-adjunta, nesse caso, fixando  $x \in T_p M$ , temos

$$\langle \mathcal{S}_\eta(x), y \rangle = \mathbb{I}\!\!\!\text{I}\!\!\!\text{I}_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle$$

onde  $\mathcal{S}_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$  é o operador linear simétrico denominado **shape operator**.

**Proposição 1.9.** *Sejam  $p \in M, x \in T_p M, \eta \in (T_p M)^\perp$  e  $N$  uma extensão local de  $\eta$  normal a  $M$ . Então*

$$\mathcal{S}_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

*Demonstração.* Sejam  $y \in T_p M$  e  $X, Y$  extensões locais de  $x, y$ , respectivamente, e tangentes a  $M$ . Como  $N \in (T_p M)^\perp$  temos  $\langle Y, N \rangle(p) = 0$ , daí

$$X(\langle Y, N \rangle)(p) = \langle \overline{\nabla}_X Y - (\nabla_X Y)^T, N \rangle(p) + \langle Y, \overline{\nabla}_X N \rangle(p) = 0.$$

Logo  $\langle \overline{\nabla}_X Y - (\nabla_X Y)^T, N \rangle(p) = -\langle Y, \overline{\nabla}_X N \rangle(p)$ . Chegando a conclusão que  $\langle B(X, Y), N \rangle(p) = \langle Y, -\overline{\nabla}_X N \rangle(p)$  e aplicando ao ponto  $p$  segue que

$$\langle B(x, y), \eta \rangle = \langle -(\overline{\nabla}_x N)^T, y \rangle.$$

Portanto,  $\mathcal{S}_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T$  para todo  $y \in T_p M$ .  $\square$

Sejam  $p \in M$  e  $\eta \in (T_p M)^\perp$ , com  $|\eta| = 1$ . Como  $\mathcal{S}_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$  é simétrica, existe uma base ortonormal de autovetores  $\{e_1, \dots, e_n\} \subset T_p M$  tal que

$$\mathcal{S}_\eta(e_i) = \lambda_i \cdot e_i,$$

com  $1 \leq i \leq n$ , onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são autovalores associados aos autovetores  $e_i$ . Os autovalores são denominados **curvaturas principais** de  $M$  em  $p$ , com  $\lambda_i = k_i$ , e os autovetores  $e_1, \dots, e_n$  são as **direções principais**.

**Observação 1.10.** *As funções simétricas de  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são invariantes da imersão. Por exemplo,*

- a) *Curvatura de Gauss-Kronecker:*  $\det(\mathcal{S}_\eta) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$
- b) *Curvatura Escalar ou Média:*  $K(f) = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$

Um caso importante ocorre quando  $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ . Sejam  $N$  uma extensão local de  $\eta$ , unitária e normal a  $M$ ,  $S_1^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; |x| = 1\}$  a esfera unitária de  $\mathbb{R}^{n+1}$  e defina a aplicação normal de Gauss,  $h : M^n \rightarrow S_1^n$  dada por  $h(q) = N(q)$ , tal aplicação translada a origem do campo  $N$  para a origem do  $\mathbb{R}^{n+1}$  e faz

$$h(q) = \text{ponto final do translado de } N(q).$$

Tomando  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ , com  $c(0) = q$  e  $c'(0) = x \in T_q M$ , segue

$$dh_q(x) = \frac{d}{dt}(N \circ c(t))_{t=0} = \overline{\nabla}_x N = (\overline{\nabla}_x N)^T = -\mathcal{S}_\eta(x) \quad (1.17)$$

De fato,  $\overline{\nabla}_x N = (\overline{\nabla}_x N)^T$ , pois  $\langle N, N \rangle = 1$  temos  $x(\langle N, N \rangle) = x(1)$ , então

$$\langle \overline{\nabla}_x N, N \rangle = 0.$$

Da equação 1.17, a Segunda Forma Fundamental também é obtida a partir da Aplicação Normal de Gauss, resultado análogo ao obtido em superfícies regulares.

**Proposição 1.10.** *Sejam  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $M \subset \overline{M}$ , então*

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \overline{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle - \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle \quad (1.18)$$

onde  $R$  e  $\overline{R}$  são as curvaturas de  $M$  e  $\overline{M}$ , respectivamente. A equação acima é denominada **Equação de Gauss**.

*Demonstração.* Ver demonstração em [2] □

O seguinte corolário relaciona as curvaturas de  $M$  e  $\overline{M}$  com as segundas formas fundamentais.

**Corolário 7.** *Se  $X = W = x$  e  $Y = Z = y$ , onde  $\{x, y\} \subset T_p M$  é uma base ortonormal de um subespaço bidimensional  $\sigma$ , então*

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2$$

onde  $K(x, y)$  e  $\overline{K}(x, y)$  são as curvaturas seccionais de  $M$  e  $\overline{M}$ , respectivamente.

*Demonstração.* Observe que

$$\langle R(x, y)x, y \rangle = K(x, y) \text{ e } \langle \overline{R}(x, y)x, y \rangle = \overline{K}(x, y),$$

pois  $x$  e  $y$  são vetores normais e unitários, ou seja,  $|x \wedge y|^2 = 1$ . Aplicando a Proposição 1.10, com  $X = W = x$  e  $Y = Z = y$ , temos

$$\langle R(x, y)x, y \rangle = \langle \overline{R}(x, y)x, y \rangle + \langle B(y, y), B(x, x) \rangle - \langle B(x, y), B(x, y) \rangle.$$

Logo,

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2.$$

□

**Exemplo 1.5** (Curvatura de  $S_r^n(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ). *Seja  $S_r^n(0)$  a esfera de raio  $r$  centrada na origem. Tomemos  $h : S_r^n(0) \rightarrow S_1^n(0)$  como a aplicação normal de Gauss dada por  $h(p) = \frac{p}{r}$ , implicando em*

$$dh_p(v) = \frac{v}{r},$$

assim todo  $v \in T_p S_r^n(0)$  é direção principal com autovalor  $\frac{1}{r}$ . Isso implica que a curvatura seccional de  $T_p S_r^n(0)$  é dada por

$$K(\sigma) = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2}.$$

**Definição 1.28.** *Seja  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^k$  uma imersão, dizemos que  $f$  é geodésica em  $p \in M$  se  $B(x, y) = 0, \forall x, y \in T_p M$ . Dizemos ainda que  $f$  é **totalmente geodésica** se é geodésica em todo  $p \in M$ .*

**Proposição 1.11.** *Uma imersão  $f : M \rightarrow \overline{M}$  é geodésica em  $p \in M$  se, e somente se, toda geodésica  $\gamma$  de  $M$  partindo de  $p$  é geodésica de  $\overline{M}$  em  $p$ .*

*Demonstração.* Por hipótese, temos  $B(x, y) = 0, \forall x, y \in T_p M$ . Tomemos  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  uma geodésica em  $M$  com  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) \in T_p M$ . Daí,

$$\begin{aligned} 0 &= B(\gamma'(0), \gamma'(0)) \\ &= \overline{\nabla}_{\gamma'} \gamma'(p) - \nabla_{\gamma'} \gamma'(p) \\ &= \overline{\nabla}_{\gamma'} \gamma'(p). \end{aligned}$$

Logo,  $\gamma$  é geodésica em  $\overline{M}$ . Reciprocamente, seja  $v \in T_p M$  qualquer e tomemos  $\gamma_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  geodésica de  $M$  com  $\gamma_v(0) = p$  e  $\gamma'_v(0) = v$ . Daí,

$$B(v, v) = \overline{\nabla}_{\gamma'_v} \gamma'_v - \nabla_{\gamma'_v} \gamma'_v = 0, \forall v \in T_p M.$$

Pela bilinearidade da segunda forma fundamental  $B$ , temos

$$B(v, w) = \frac{1}{2} [B(v + w, v + w) - B(v, v) - B(w, w)] = 0.$$

Portanto  $f$  é geodésica em  $p \in M$ . □

**Definição 1.29.** *Uma imersão  $f : M \rightarrow \overline{M}$  é **mínima** se, para todo  $p \in M$  e todo  $\eta \in (T_p M)^\perp$ , tem-se que o traço de  $\mathcal{S}_\eta$  é nulo.*

**Observação 1.11.** *Escolhendo uma base ortonormal  $E_1, \dots, E_n$  de vetores em  $(\mathfrak{X}(U))^\perp$ , onde  $U$  é uma vizinhança de  $p$  na qual  $f$  é um mergulho, podemos escrever, em  $p$ ,*

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^m H_i(x, y) E_i, x, y \in T_p M \quad (1.19)$$

onde  $H_i = H_{E_i}$ . O vetor normal dado por

$$H = \sum_{j=1}^n B(E_j, E_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (\text{traço } \mathcal{S}_{E_i}) E_i$$

não depende do referencial  $E_i$  escolhido. Tal vetor é denominado **vetor curvatura média** de  $f$ .

A razão da palavra mínima neste contexto é que tais imersões minimizam localmente o volume da métrica induzida do mesmo modo que as geodésicas minimizam o comprimento de arco.

## 1.5 Variedades com Bordo

Consideremos o semiespaço fechado em  $\mathbb{R}^n$  definido por

$$\mathbb{H}_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq 0\}.$$

Podemos destacar dois conjuntos importantes, são eles

$$\text{int}(\mathbb{H}_1) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 < 0\}, \quad (1.20)$$

$$\partial\mathbb{H}_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}, \quad (1.21)$$

onde 1.20 é o **conjunto interior** do semiespaço  $\mathbb{H}_1$  e 1.21 é o **bordo** de  $\mathbb{H}_1$ .

**Observação 1.12.** *Sejam  $U \subset \mathbb{H}_1$  aberto em  $\mathbb{H}_1$ , mas não em  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^1$  e  $F : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma extensão de classe  $C^1$  de  $f$ , onde  $V \subset \mathbb{R}^n$  é aberto. Para  $x \in U$ , a derivada  $F'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  só depende de  $f$ , e independe da extensão  $F$ . Para mais detalhes, veja [15].*

**Proposição 1.12.** *Sejam  $U$  e  $V$  abertos do semiespaço  $\mathbb{H}_1$  e  $f : U \rightarrow V$  um difeomorfismo de classe  $C^1$ . Então  $f$  leva pontos interiores em pontos interiores e pontos do bordo em pontos do bordo.*

*Demonstração.* Ver [15]. □

A próxima definição identificará um sistema de coordenadas que formará a estrutura diferenciável importante para a definição de variedades com bordo.

**Definição 1.30.** *Seja  $M$  um espaço topológico. Uma **carta** de dimensão  $n$  em  $M$  é um homeomorfismo  $x : U \rightarrow \mathbb{H}_1$  de um aberto  $U \subset M$  sobre um aberto  $x(U)$  do semiespaço  $\mathbb{H}_1 \subset \mathbb{R}^n$ . Um **atlas** de dimensão  $n$  e classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , é um conjunto  $\mathcal{A}$  de cartas  $x : U \rightarrow \mathbb{H}_1$ , cujos domínios cobrem  $M$  e cujas mudanças de coordenadas são de classe  $C^k$ .*

**Definição 1.31.** *Uma **variedade diferenciável com bordo**, de dimensão  $n$  e classe  $C^k$ , é um espaço de Hausdorff, com base enumerável de abertos, dotado de um atlas maximal (estrutura diferenciável) de classe  $C^k$ . Um ponto  $p \in M$  é um **ponto interior** (respectivamente **ponto do bordo**) se, em alguma carta  $x : U \rightarrow \mathbb{H}_1$ ,  $x(p) \in \text{int}(\mathbb{H}_1)$  (respectivamente,  $x(p) \in \partial\mathbb{H}_1$ ). O conjunto dos pontos do bordo de  $M$  é denotado por  $\partial M$ .*

**Observação 1.13.** Vale observar que bordo e fronteira são conceitos diferentes. Por exemplo, se  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ , então  $Fr(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ , já o bordo é identificado por  $\partial A = \emptyset$ . Se  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ , então  $Fr(B) = \partial B = S^1$ .

**Proposição 1.13.** Se  $M^n$  é uma variedade com bordo, então seu bordo  $\partial M$  é uma variedade (sem bordo) de dimensão  $n - 1$  e classe  $C^k$ . Além disso, se  $M$  é orientável, toda orientação de  $M$  induz uma orientação em  $\partial M$  de maneira natural.

*Demonstração.* Ver demonstração em [12]. □

Pela Proposição 1.13, podemos considerar para cada ponto  $p \in \partial M$  o espaço tangente  $T_p(\partial M)$ . A partir das definições conhecidas,  $T_p(\partial M)$  é um subespaço vetorial de  $T_p M$ . Dizemos que um vetor  $X_p \in T_p M$  **aponta para dentro** se  $X_p \notin T_p(\partial M)$  e existem  $\varepsilon > 0$  e uma curva  $\alpha : [0, \varepsilon) \rightarrow M$  tal que  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha([0, \varepsilon)) \subset \text{int}(M)$  e  $\alpha'(0) = X_p$ . Além disso, dizemos que um vetor  $X_p \in T_p M$  **aponta para fora** se  $-X_p$  aponta para dentro. Considerando o subespaço de  $T_p M$  formado pelo conjunto dos vetores normais a  $\partial M$ , destacamos o **vetor conormal**, definido como o vetor normal unitário a  $T_p(\partial M)$  que aponta para fora de  $M$ , para um dado  $p \in M$ .

## 1.6 Primeira Autofunção de Steklov

Nesta seção, apresentamos definições e teoremas importantes utilizados para compreender o método utilizado para encontrar superfícies mínimas a partir do Problema dos Autovalores de Steklov. Para fins de notação, utilizaremos  $\Sigma$ , ao invés de  $M$ , para denotar uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional com bordo.

**Definição 1.32.** Sejam  $\Sigma$  uma variedade Riemanniana,  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  e  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Temos as seguintes definições:

(a) O **gradiente** de  $f$ , denotado por  $\nabla_\Sigma f$ , é o campo vetorial dado por

$$\langle \nabla_\Sigma f, v \rangle = df_p(v),$$

onde  $p \in M$  e  $v \in T_p M$ .

(b) O **divergente** de  $X$  em  $\Sigma$ , denotado por  $\text{div} X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ , é definido por  $\text{div} X(p) = \text{traço da aplicação linear } Y(p) \mapsto \nabla_Y X(p)$ , com  $p \in \Sigma$ .

(c) O **Laplaciano** de  $f$  é a função  $\Delta f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

(d) A função  $f$  é dita **harmônica** se  $\Delta f \equiv 0$ .

A seguir observamos dois resultados importantes utilizando funções harmônicas, o Princípio do Máximo (Teorema 8) e o Princípio da Continuidade Única (Teorema 9). O primeiro identifica o comportamento de uma função harmônica em relação aos seus extremos. Já o outro estabelece que as características de uma função harmônica restrita a um subconjunto aberto de  $\Sigma$  são generalizadas para a variedade  $\Sigma$  como um todo, para mais detalhes veja [4] e [8].

**Teorema 8** (Princípio do Máximo para Funções Harmônicas). *Sejam  $\Omega \subset \Sigma$  um aberto limitado da variedade Riemanniana  $\Sigma$  e  $u$  uma função harmônica. Então  $u$  assume o seu máximo e mínimo apenas em  $\partial\Omega$ , a menos que  $u$  seja constante.*

**Teorema 9** (Princípio da Continuação Única). *Seja  $\Omega \subset \Sigma$  um subconjunto aberto. Temos as seguintes conclusões:*

(i) *Tomando  $u_1$  e  $u_2$  funções harmônicas de  $\Sigma$  tal que  $u_1 = u_2$  em  $\Omega$ , então  $u_1 \equiv u_2$  em  $\Sigma$ ;*

(ii) *Tomando  $u$  uma função harmônica em  $\Sigma$  tal que  $u = 0$  em  $\Omega$ , então  $u \equiv 0$  em  $\Sigma$ .*

Sejam  $\Sigma$  uma variedade Riemanniana com bordo e  $\eta$  um vetor conormal a  $\partial\Sigma$ . O **Problema dos Autovalores de Steklov** é definido da seguinte maneira

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \sigma u & \text{em } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (1.22)$$

onde  $\sigma \in \mathbb{R}$  e a função  $u$ , satisfazendo as condições apresentadas em (1.22), é denominada **autofunção de Steklov**. Os autovalores encontrados em (1.22) fazem parte do espectro da aplicação de Dirichlet-Neumann  $\mathcal{L} : C^\infty(\partial\Sigma) \rightarrow C^\infty(\partial\Sigma)$  dada por

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta},$$

onde  $\hat{u} \in C^\infty(\partial\Sigma)$  é a extensão harmônica de  $u$  em  $\Sigma$ , ou seja,  $\hat{u}$  é harmônica em  $\Sigma$  ( $\Delta \hat{u} = 0$  em  $\Sigma$ ) e  $\hat{u} = u$  em  $\partial\Sigma$ . Como  $\mathcal{L}$  é uma aplicação auto-adjunta, seu espectro é discreto, isto é,

$$0 = \sigma_0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \nearrow \infty.$$

Dessa forma, o primeiro autovalor diferente de zero é  $\sigma_1$ , definido da seguinte maneira,

$$\sigma_1 = \inf_{u \in \mathcal{C}} \frac{\int_{\Sigma} |\nabla u|^2}{\int_{\partial\Sigma} u^2}, \quad (1.23)$$

onde

$$\mathcal{C} = \left\{ u \in C^0(\Sigma) \mid u \not\equiv 0, \int_{\partial\Sigma} u = 0, u \text{ é } C^1 \text{ por partes} \right\}. \quad (1.24)$$

A equação 1.23 é conhecida como quociente de Rayleigh. Além disso, a autofunção  $u$  é associada ao autovalor  $\sigma_1$  quando alcança a igualdade em 1.23 e denominaremos tal função por **primeira autofunção de Steklov**.

**Definição 1.33.** *Seja  $u$  uma autofunção de Steklov. Definimos o seguinte conjunto*

$$\mathcal{N} = \{p \in \Sigma \mid u(p) = 0\},$$

denominado **conjunto nodal**. Dizemos que  $\mathcal{D}$  é um **domínio nodal** se é uma componente conexa de  $\Sigma \setminus \mathcal{N}$ . Já as curvas diferenciáveis por partes definidas por  $\mathcal{N}$  são denominadas de **linhas nodais**.

A seguir apresentamos um importante resultado relacionando à primeira autofunção de Steklov com o seu conjunto nodal.

**Proposição 1.14.** *Se  $u$  é uma primeira autofunção de Steklov, então  $u$  tem exatamente dois domínios nodais.*

*Demonstração.* Por hipótese, temos que  $u \in \mathcal{C}$ , o conjunto definido em (1.24), logo

$$\int_{\partial\Sigma} u = 0$$

e  $u$  não é identicamente nula em toda superfície  $\Sigma$ . Considere  $\mathcal{D}$  como o conjunto dos domínios nodais de  $u$ , como tal função não é zero em todos os pontos de  $\partial\Sigma$ , temos que  $\#\mathcal{D} \geq 2$ .

Suponhamos, por contradição, que existam  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \in \mathcal{D}$  domínios nodais não-vazios. Afirmamos que  $\partial\Sigma \cap \partial\Omega_i \neq \emptyset$  para  $i = 1, 2, 3$ . Caso contrário, existiria um  $i$  tal que  $\partial\Sigma \cap \partial\Omega_i = \emptyset$ , logo o Teorema 8 implicaria que  $u \equiv 0$  no domínio nodal  $\Omega_i$ . E, por

consequência, pelo Teorema 9 teríamos  $\mathbf{u} \equiv 0$  em  $\Sigma$ , contrariando a hipótese de que  $\mathbf{u}$  não é identicamente nula.

Portanto, existem  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  não-nulos de tal maneira que a seguinte função  $\nu$  é dada por

$$\nu = \begin{cases} \lambda_1 \cdot \mathbf{u}, & \text{em } \Omega_1, \\ \lambda_2 \cdot \mathbf{u}, & \text{em } \Omega_2, \\ 0, & \text{em } \Sigma \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2), \end{cases} \quad (1.25)$$

Pelo que foi mostrado acima, a função  $\nu$  satisfaz

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} \nu &= \int_{\partial\Sigma \cap \partial\Omega_1} \lambda_1 \mathbf{u} + \int_{\partial\Sigma \cap \partial\Omega_2} \lambda_2 \mathbf{u} + \int_{\partial\Sigma \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)} \nu \\ &= \lambda_1 \int_{\partial\Sigma \cap \partial\Omega_1} \mathbf{u} + \lambda_2 \int_{\partial\Sigma \cap \partial\Omega_2} \mathbf{u} + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Além disso, temos  $\frac{\partial\nu}{\partial\eta} = \frac{\partial(\lambda_1 \cdot \mathbf{u})}{\partial\eta} = \sigma_1 \cdot \lambda_1 \mathbf{u} = \sigma_1 \cdot \nu$ , em  $\partial\Omega_1$ , e  $\frac{\partial\nu}{\partial\eta} = \frac{\partial(\lambda_2 \cdot \mathbf{u})}{\partial\eta} = \sigma_1 \cdot \lambda_2 \mathbf{u} = \sigma_1 \cdot \nu$ , em  $\partial\Omega_2$ , portanto  $\frac{\partial\nu}{\partial\eta} = \sigma_1 \cdot \nu$  em  $\partial\Sigma$ . Para concluir que  $\nu \in \mathcal{C}$ , temos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} \sigma_1 \cdot \nu^2 &= \int_{\partial\Sigma} \nu \cdot \sigma_1 \nu \\ &= \int_{\partial\Sigma} \nu \cdot \frac{\partial\nu}{\partial\eta} \\ &= \int_{\partial\Sigma \cap \partial\Omega_1} \lambda_1 \mathbf{u} \cdot \lambda_1 \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\eta} + \int_{\partial\Sigma \cap \partial\Omega_2} \lambda_2 \mathbf{u} \cdot \lambda_2 \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\eta} \\ &= \lambda_1^2 \cdot \int_{\partial\Sigma \cap \partial\Omega_1} \mathbf{u} \cdot \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\eta} + \lambda_2^2 \cdot \int_{\partial\Sigma \cap \partial\Omega_2} \mathbf{u} \cdot \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\eta} \\ &= \int_{\Sigma \cap \Omega_1} \lambda_1^2 \cdot |\nabla \mathbf{u}|^2 + \int_{\Sigma \cap \Omega_2} \lambda_2^2 \cdot |\nabla \mathbf{u}|^2 \\ &= \int_{\Sigma \cap \Omega_1} |\nabla \nu|^2 + \int_{\Sigma \cap \Omega_2} |\nabla \nu|^2 \\ &= \int_{\Sigma} |\nabla \nu|^2. \end{aligned}$$

Logo  $\nu \in \mathcal{C}$  e é uma autofunção com autovalor igual a  $\sigma_1$ , portanto  $\nu$  é uma primeira autofunção de Steklov. Em particular, temos  $\Delta\nu = 0$  em  $\Sigma$ .

Por outro lado, observe em (1.25) que  $\nu = 0$  em  $\Sigma \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ . Como o domínio nodal  $\Omega_3$  é subconjunto de  $\Sigma \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ , segue imediatamente que  $\nu = 0$  em  $\Omega_3$ , logo pelo Princípio da Continuidade Analítica temos  $\nu \equiv 0$  em  $\Sigma$ , o que contradiz a definição do conjunto  $\mathcal{C}$ . Concluindo que há apenas dois domínios nodais.  $\square$

## 1.7 Superfície Mínima com Bordo Livre

Seja  $\overline{M}$  uma  $m$ -variedade riemanniana com bordo  $\partial\overline{M} \neq \emptyset$ . Dizemos que uma variedade riemanniana  $\Sigma$  com bordo  $\partial\Sigma \neq \emptyset$ , com  $n \leq m$ , isometricamente imersa em  $\overline{M}$  é *mínima com bordo livre* se:

- (i)  $\Sigma$  é mínima, ou seja,  $\vec{H}(p) \equiv 0$  para todo  $p \in \Sigma$ , onde  $\vec{H}$  é o vetor curvatura média de  $\Sigma$ ;
- (ii)  $\partial\Sigma \subset \partial\overline{M}$  e  $\Sigma$  intersecta ortogonalmente  $\partial\overline{M}$  ao longo de  $\partial\Sigma$ .

Além disso, dizemos que uma superfície  $\Sigma$  é propriamente imersa  $\overline{M}$  se satisfaz a seguinte condição:  $\Sigma \cap \overline{M} = \partial\Sigma$ .

Seja  $\Sigma \subset \overline{M}$  uma subvariedade compacta com bordo  $\partial\Sigma \subset \partial\overline{M}$  propriamente imersa. Considere uma família suave  $\{\Sigma_t\}_{t \in (-\epsilon, \epsilon)}$  de subvariedades propriamente imersas em  $\overline{M}$  para algum  $\epsilon > 0$  com  $\Sigma_0 = \Sigma$ . Ao calcular a área de tais subvariedades e denotá-las por  $area(\Sigma_t)$ , verifica-se que a primeira variação da área em  $t = 0$  é dada por

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} area(\Sigma_t) = - \int_{\Sigma} \langle \vec{H}, X \rangle da + \int_{\partial\Sigma} \langle X, \nu \rangle ds,$$

onde  $\langle, \rangle$  é a métrica da variedade  $\overline{M}$ ,  $\nu$  é o vetor conormal que aponta para fora de  $\partial\Sigma$  em  $\Sigma$ ,  $\vec{H}$  é o vetor curvatura média de  $\Sigma$  em  $\overline{M}$  e  $X$  é o campo variacional associado à família  $\{\Sigma_t\}_{t \in (-\epsilon, \epsilon)}$ . Observe que  $\partial\Sigma_t \subset \partial\overline{M}$  para todo  $t$  implica que o campo variacional  $X$  é tangente à  $\partial\overline{M}$  ao longo de  $\partial\Sigma$ . A partir da primeira variação da área, podemos concluir que  $\Sigma$  é um ponto crítico do funcional área se, e somente se,  $\Sigma$  é mínima ( $\vec{H} \equiv 0$ ) e  $\Sigma$  intersecta  $\partial$  ortogonalmente ao longo de  $\partial\Sigma(\nu \perp \partial\overline{M})$ .

O problema que estudaremos neste trabalho trata do caso em que  $\Sigma$  é uma superfície mínima propriamente imersa com bordo livre na bola unitária do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .

A propriedade a seguir identifica uma das características que relacionam tais superfícies com as autofunções de Steklov.

**Proposição 1.15.** *Seja  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  uma superfície mínima imersa em  $B^n$ . Então  $\Sigma$  é uma superfície mínima de bordo livre se, e somente se, as funções coordenadas são autofunções de Steklov com autovalor igual 1.*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{F} : \Sigma \rightarrow B^n$  uma imersão mínima, podemos reescrever da seguinte maneira,

$$\mathcal{F}(p) = \sum_{i=1}^n f_i(p)e_i, \forall p \in \Sigma,$$

onde  $f_1, \dots, f_n$  são as funções coordenadas e  $e_1, \dots, e_n$  os vetores da base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . Por hipótese, temos  $\Sigma$  uma superfície mínima de bordo livre. Vamos mostrar que  $\Delta f_i = 0$  e  $\frac{\partial f_i}{\partial \nu} = f_i, \forall i = 1, \dots, n$ , onde  $\nu$  é o vetor conormal de  $\partial\Sigma$ . Considerando um referencial ortonormal  $\{Y_1, \dots, Y_n\}$  de  $\Sigma$ , temos

$$\begin{aligned} \Delta f_i &= \operatorname{div}(\nabla f_i) \\ &= \sum_j \langle \nabla_{Y_j} \nabla f_i, Y_j \rangle \\ &= \sum_j \langle \nabla_{Y_j} (e_i - e_i^\perp), Y_j \rangle \\ &= \sum_j \langle \bar{\nabla}_{Y_j} (e_i - e_i^\perp) - \bar{\nabla}_{Y_j}^\perp (e_i - e_i^\perp), Y_j \rangle \\ &= \sum_j \langle \bar{\nabla}_{Y_j} (e_i - e_i^\perp), Y_j \rangle \\ &= \sum_j \langle \bar{\nabla}_{Y_j} e_i - \bar{\nabla}_{Y_j} e_i^\perp, Y_j \rangle \\ &= \sum_j \langle -\bar{\nabla}_{Y_j} e_i^\perp, Y_j \rangle. \end{aligned}$$

Como a intersecção entre  $\partial\Sigma$  e  $\partial B^n$  é ortogonal, isto é,  $\langle e_i^\perp, Y_j \rangle = 0$ , temos

$$0 = Y_j \langle e_i^\perp, Y_j \rangle = \langle \bar{\nabla}_{Y_j} e_i^\perp, Y_j \rangle + \langle e_i^\perp, \bar{\nabla}_{Y_j} Y_j \rangle,$$

logo

$$\langle e_i^\perp, \bar{\nabla}_{Y_j} Y_j \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{Y_j} e_i^\perp, Y_j \rangle. \quad (1.26)$$

Implicando em

$$\begin{aligned} \Delta f_i &= \sum_j \langle e_i^\perp, \bar{\nabla}_{Y_j} Y_j \rangle \\ &= \sum_j \langle e_i^\perp, \bar{\nabla}_{Y_j} Y_j \rangle \\ &= \langle e_i^\perp, \sum_j \bar{\nabla}_{Y_j} Y_j \rangle \\ &= \langle e_i, H \rangle \\ &= H_i = 0, \end{aligned}$$

onde  $H_i$  são as coordenadas do vetor curvatura média e, por hipótese,  $H = 0$ . Portanto,  $\Delta f_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$ . Seja  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ , temos

$$\frac{\partial f_i}{\partial \nu} = \langle \nabla_\Sigma f_i, \nu \rangle = \langle (e_i)^T, \nu \rangle = \nu_i = f_i$$

Assim  $\frac{\partial f_i}{\partial \nu} = f_i$ . Portanto  $f_i$  é uma autofunção de Steklov associada ao autovalor 1,  $\forall i = 1, \dots, n$ .  $\square$

### 1.7.1 Disco Equatorial Plano

O **disco equatorial plano** é a intersecção entre a bola unitária  $B^3$  com um dos planos que contêm a origem em  $\mathbb{R}^3$ . Vamos mostrar que o disco gerado a partir da intersecção com o plano  $z = 0$  é uma superfície mínima de bordo livre.

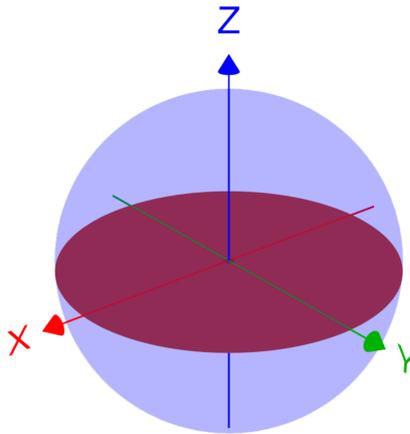


Figura 1.8: Disco Equatorial Plano para  $z = 0$

Em relação ao eixo  $z$ , a aplicação  $X : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$X(u, v) = (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), 0),$$

gera o disco equatorial plano. Facilmente conseguimos identificar os coeficientes necessários para a obtenção da matriz  $M$  da segunda forma fundamental, temos então a seguinte relação.

$$M = \frac{1}{EG - F^2} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix},$$

onde  $E, F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental. Por sua vez  $e, f$  e  $g$  denotam os coeficientes da segunda forma fundamental. Calculando as derivadas parciais da aplicação  $X$  em relação as variáveis  $u$  e  $v$ , temos

$$X_u = (\cos(v), \sin(v), 0) \tag{1.27}$$

$$X_v = (-u \cdot \sin(v), u \cdot \cos(v), 0). \tag{1.28}$$

Determinando a Aplicação Normal de Gauss, temos

$$N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = \frac{(0, 0, u)}{u},$$

onde obtemos  $N(u, v) = (0, 0, 1)$ .

Vale ressaltar que a aplicação normal de Gauss é constante, onde as duas primeiras coordenadas são nulas. Como os coeficientes da segunda forma fundamental dependem das derivadas de (1.27) e (1.28), bem como da aplicação Normal, observamos que ambos são constantes e iguais à zero, o que implica dizer que o vetor curvatura média é nulo em todos os pontos do disco. Concluímos então que o disco equatorial plano é uma imersão mínima e com bordo livre.

### 1.7.2 Catenoide Crítico

O catenoide, de um modo geral, é a superfície gerada a partir da revolução da catenária  $z = \lambda \cdot \cosh(x)$  em torno do eixo  $z$ , onde  $\lambda$  é uma constante real positiva.

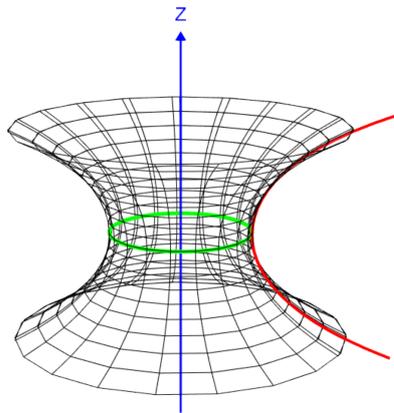


Figura 1.9: Catenoide.

Utilizando um parâmetro  $t \in \mathbb{R}$ , podemos reescrever a curva catenária da seguinte maneira, levando em consideração o plano formado pelos eixos  $x$  e  $z$ ,

$$\mathcal{C}_\lambda(t) = (\lambda \cdot \cosh(t), \lambda \cdot t). \quad (1.29)$$

Como o objetivo é identificar uma catenária que torne o catenoide uma superfície mínima de bordo livre imersa na bola unitária tridimensional, como descrito na Definição ??, precisamos estabelecer  $\lambda$  de tal modo que exista um ponto  $p = \mathcal{C}_\lambda(t_0)$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ , tal que  $\|\mathcal{C}_\lambda(t_0)\| = 1$  e o vetor tangente  $\mathcal{C}'_\lambda(t_0)$  é ortogonal à circunferência unitária centrada na

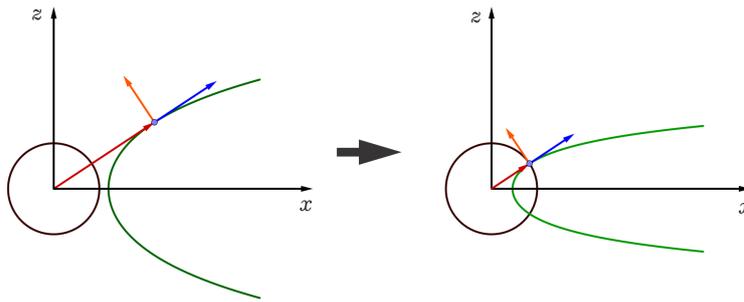


Figura 1.10: Catenária

origem. Isto é, existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $\lambda > 0$  tal que  $\mathcal{C}'_\lambda(t_0) // \mathcal{C}_\lambda(t_0)$  e  $\|\mathcal{C}_\lambda(t_0)\| = 1$ , veja a Figura 1.10.

Pela Equação (1.29), temos  $\mathcal{C}'_\lambda(t) = (\lambda \cdot \sinh(t), \lambda)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Aplicando ao  $t_0 \in \mathbb{R}$ , temos  $(\lambda \cdot \sinh(t_0), \lambda) // \mathcal{C}_\lambda(t_0) = (\lambda \cdot \cosh(t_0), \lambda \cdot t_0)$ , o que é equivalente a  $(\lambda \cdot \sinh(t_0), \lambda) \perp \omega = (-t_0, \sinh(t_0))$ . Logo

$$\langle \mathcal{C}'_\lambda(t_0), \omega \rangle = 0,$$

e, portanto,

$$t_0 = \frac{\cosh(t_0)}{\sinh(t_0)}.$$

Implicando em,

$$t_0 = \coth(t_0), \quad (1.30)$$

isto é,  $t_0$  é a raiz positiva da equação  $t = \coth(t)$ , numericamente  $t_0 \simeq 1.19968$ . Por outro lado, como  $\|\mathcal{C}_\lambda(t_0)\| = 1$ , segue que  $\lambda^2 \cdot \cosh^2(t_0) + \lambda^2 \cdot t_0^2 = 1$  e, pela Equação (1.30), temos  $\lambda^2 \cdot \cosh^2(t_0) + \lambda^2 \cdot \frac{\cosh^2(t_0)}{\sinh^2(t_0)} = 1$ . Observe que

$$\begin{aligned} \lambda^2 \cdot \cosh^2(t_0) + \lambda^2 \cdot \frac{\cosh^2(t_0)}{\sinh^2(t_0)} &= \lambda^2 \cdot \cosh^2(t_0) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sinh^2(t_0)}\right) \\ &= \lambda^2 \cdot \cosh^2(t_0) \cdot \left(\frac{\cosh^2(t_0) + 1}{\sinh^2(t_0)}\right). \end{aligned}$$

Como  $\sinh^2(t_0) + 1 = \cosh^2(t_0)$ , temos  $\lambda^2 \cdot \cosh^2(t_0) \cdot \frac{\cosh^2(t_0)}{\sinh^2(t_0)} = 1$ . A partir da equação (1.30), concluímos que

$$\lambda^2 \cdot \cosh^2(t_0) \cdot t_0 = 1,$$

portanto

$$\lambda = \frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)}.$$

A partir da discussão acima, definimos a aplicação  $\mathcal{F} : [-t_0, t_0] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\mathcal{F}(u, v) = \frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)} (\cosh(u) \cdot \cos(v), \cosh(u) \sin(v), u), \quad (1.31)$$

gerando a superfície  $\Sigma$  denominada **catenoide crítico**, um catenoide contido na bola unitária  $B^3$  tal que  $\partial\Sigma \subset \partial B^3$  (Figura (1.11)).

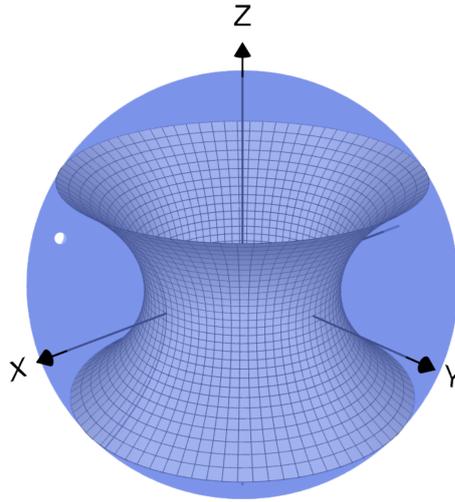


Figura 1.11: Catenoide Crítico.

Por construção, temos que a interseção entre  $\Sigma$  e  $\partial B^3$  é ortogonal. Vamos mostrar que  $\Sigma$  é uma superfície mínima de bordo livre, para tal resta verificar que a aplicação  $\mathcal{F}$  é uma imersão mínima, ou seja,  $\mathcal{F}$  é uma imersão e curvatura média é igual a zero, pela Definição 1.29. Considere  $\mathbb{T} = [-t_0, t_0] \times [0, 2\pi]$ , calculando as derivadas parciais de  $\mathcal{F}$  em relação a  $u$  e  $v$ , temos,

$$\mathcal{F}_u = \frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)} (\sinh(u) \cdot \cos(v), \sinh(u) \cdot \sin(v), 1) \quad (1.32)$$

$$\mathcal{F}_v = \frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)} (-\cosh(u) \cdot \sin(v), \cosh(u) \cdot \cos(v), 0) \quad (1.33)$$

Observe que  $\mathcal{F}_u$  e  $\mathcal{F}_v$  são injetivas para todo  $(u, v) \in \mathbb{T}$ , logo  $\mathcal{F}$  é uma imersão pela Definição 1.11. Para determinar a Segunda Forma Fundamental de  $\mathcal{F}$ , precisamos identificar a Aplicação Normal de Gauss, os coeficientes  $E, F$  e  $G$  da Primeira Forma Fundamental e as derivadas sucessivas de  $\mathcal{F}_u$  e  $\mathcal{F}_v$  em relação a  $u$  e  $v$ .

A aplicação normal de Gauss  $N : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{S}^2$  é dada por

$$N(u, v) = -\frac{\mathcal{F}_u \wedge \mathcal{F}_v}{\|\mathcal{F}_u \wedge \mathcal{F}_v\|}.$$

Como

$$\mathcal{F}_u \wedge \mathcal{F}_v = \left( \frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)} \right)^2 \cdot (-\cosh(u) \cdot \cos(v), -\cosh(u) \cdot \sen(v), \sinh(u) \cdot \cosh(u)),$$

temos,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_u \wedge \mathcal{F}_v\| &= \left( \frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)} \right)^2 \cdot \sqrt{\cosh^2(u) \cdot \cos^2(v) + \cosh^2(u) \cdot \sen^2(v) + \sinh^2(u) \cdot \cosh^2(u)} \\ &= \left( \frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)} \right)^2 \cdot \sqrt{\cosh^2(u) + \sinh^2(u) \cdot \cosh^2(u)} \\ &= \left( \frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)} \right)^2 \cdot \sqrt{\cosh^2(u) \cdot (1 + \sinh^2(u))} \\ \|\mathcal{F}_u \wedge \mathcal{F}_v\| &= \left( \frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)} \right)^2 \cdot \sqrt{\cosh^2(u) \cdot \cosh^2(u)} \\ &= \left( \frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)} \right)^2 \cdot \cosh^2(u) \end{aligned}$$

Portanto,

$$N(u, v) = \left( \frac{\cos(v)}{\cosh(u)}, \frac{\sen(v)}{\cosh(u)}, \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)} \right) \quad (1.34)$$

Calculando os coeficientes da primeira forma fundamental  $E$ ,  $F$  e  $G$  que são dados em termos das derivadas (1.32) e (1.33), temos

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathcal{F}_u, \mathcal{F}_u \rangle \\ &= \left( \frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)} \right)^2 \cdot (\sinh^2(u) \cdot \cos^2(v) + \sinh^2(u) \cdot \sen^2(v) + 1) \\ &= \left( \frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)} \right)^2 \cdot (\sinh^2(u) + 1) \\ &= \left( \frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)} \right)^2 \cdot \cosh^2(u), \\ F &= \langle \mathcal{F}_u, \mathcal{F}_v \rangle \\ &= \left( \frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)} \right)^2 \cdot (-\cosh(u)\sinh(u) \cos(v)\sen(v) + \cosh(u)\sinh(u) \cos(v)\sen(v)) \\ &= 0, \\ G &= \langle \mathcal{F}_v, \mathcal{F}_v \rangle \\ &= \left( \frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)} \right)^2 \cdot \cosh^2(u) \cdot \sen^2(v), \cosh^2(u) \cdot \cos^2(v) \\ &= \left( \frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)} \right)^2 \cdot \cosh^2(u). \end{aligned}$$

Logo,

$$F = 0, E = G = \left( \frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)} \right)^2 \cdot \cosh^2(u). \quad (1.35)$$

Em seguida, calculamos as derivadas parciais em (1.32) e (1.33) em relação às variáveis  $u$  e  $v$  temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{uu} &= \frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)} \cdot (\cosh(u) \cdot \cos(v), \cosh(u) \cdot \sen(v), 0), \\ \mathcal{F}_{uv} &= \frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)} \cdot (-\sinh(u) \cdot \sen(v), \sinh(u) \cdot \cos(v), 0), \\ \mathcal{F}_{vv} &= -\frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)} \cdot (\cosh(u) \cdot \cos(v), \cosh(u) \cdot \sen(v), 0).\end{aligned}$$

Agora, com as informações obtidas, passamos a determinar os coeficientes  $e$ ,  $f$  e  $g$  da segunda forma fundamental. Assim,

$$\begin{aligned}e &= \langle \mathcal{F}_{uu}, N \rangle \\ &= \frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)} \cdot \left( \cosh(u) \cdot \cos(v) \frac{\cos(v)}{\cosh(u)} + \cosh(u) \cdot \sen(v) \cdot \frac{\sen(v)}{\cosh(u)} \right) \\ &= \frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f &= \langle \mathcal{F}_{uv}, N \rangle \\ &= \frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)} \cdot \left( -\frac{\sinh(u)}{\cosh(u)} \cdot \sen(v) \cdot \cos(v) + \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)} \cdot \sen(v) \cdot \cos(v) \right) \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g &= \langle \mathcal{F}_{vv}, N \rangle \\ &= -\frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)} \cdot \left( \cosh(u) \cdot \cos(v) \frac{\cos(v)}{\cosh(u)} + \cosh(u) \cdot \sen(v) \cdot \frac{\sen(v)}{\cosh(u)} \right) \\ &= -\frac{1}{t_0 \cdot \cosh(t_0)}.\end{aligned}$$

A matriz  $M$  da Segunda Forma Fundamental é encontrada a partir da seguinte relação

$$M = \frac{1}{EG - F^2} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$M = \begin{bmatrix} \frac{t_0 \cdot \cosh(t_0)}{\cosh^2(u)} & 0 \\ 0 & -\frac{t_0 \cdot \cosh(t_0)}{\cosh^2(u)} \end{bmatrix}$$

Observe que o traço da matriz  $M$  é igual a zero, isto é, o vetor curvatura média é nulo em todos os pontos de  $\mathbb{T}$ . Concluindo que  $\mathcal{F}$  é uma imersão mínima e, por consequência,  $\Sigma$  é uma superfície mínima de bordo livre.

# Capítulo 2

## PRINCIPAIS RESULTADOS

Após Nitsche enunciar e demonstrar o Teorema 1 acerca do disco unitário, muito tem sido o esforço em encontrar algo similar para o catenoide crítico. Alguns resultados importantes foram surgindo no intuito de identificar características que sustentam a ideia de que o catenoide crítico é o único anel mínimo mergulhado na bola unitária  $B^3$ . Neste sentido, Fraser e Schoen [6] chegaram ao Teorema 2, aumentando as expectativas para um resultado mais próximo do almejado. Inspirado por Fraser e Schoen, o McGrath [14] obteve o seguinte o teorema.

**Teorema 10** (Teorema Principal). *Seja  $\Sigma \subset B^n$ , com  $n \geq 3$ , um anel mínimo mergulhado de bordo livre. Suponha que  $\Sigma$  é invariante por reflexões através de três hiperplanos ortogonais  $\Pi_i, i = 1, 2, 3$  e  $\partial\Sigma \cap (B^n \setminus \bigcup_{i=1}^3 \Pi_i) \neq \emptyset$ . Então,  $\Sigma$  é congruente ao catenoide crítico.*

Primeiramente, há a necessidade de apresentar resultados base para a demonstração do Teorema 10, onde a ideia principal é bastante similar à utilizada por Fraser e Schoen na prova do Teorema 2, compreendendo em analisar as funções coordenadas através do Problema dos Autovalores de Steklov.

Consideremos um hiperplano  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ , definamos  $\mathcal{R}_\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  como a reflexão ortogonal em relação ao plano  $\Pi$ . Dizemos que a superfície  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  é  $\mathcal{R}_\Pi$ -invariante quando  $\mathcal{R}_\Pi(\Sigma) = \Sigma$ . Usando a  $\mathcal{R}_\Pi$ -invariância podemos definir duas novas funções, uma simétrica e outra antissimétrica, a partir da primeira autofunção de Steklov.

**Definição 2.1.** *Seja  $\Sigma$  uma superfície  $\mathcal{R}_\Pi$ -invariante. Definimos os operadores  $\mathcal{A}_\Pi, \mathcal{S}_\Pi :$*

$C^\infty(\Sigma) \rightarrow C^\infty(\Sigma)$  dados por

$$\mathcal{A}_\Pi \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{u} \circ \mathcal{R}_\Pi), \mathcal{S}_\Pi \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{u} \circ \mathcal{R}_\Pi). \quad (2.1)$$

Dada uma função  $\mathbf{u} \in C^\infty(\Sigma)$ , assim  $\mathcal{A}_\Pi \mathbf{u}$  e  $\mathcal{S}_\Pi \mathbf{u}$  são chamadas as partes Antissimétrica e Simétrica, respectivamente, de  $\mathbf{u}$  em relação ao hiperplano  $\Pi$ . Além disso, observe que  $\mathbf{u} = \mathcal{A}_\Pi \mathbf{u} + \mathcal{S}_\Pi \mathbf{u}$ .

A Definição 2.1 leva a crer que ao tomar uma primeira autofunção de Steklov  $\mathbf{u}$  temos, por consequência, que as partes Antissimétrica e Simétrica de  $\mathbf{u}$  também são primeiras autofunções de Steklov. Tal resultado está provado na proposição a seguir.

**Proposição 2.1.** *Seja  $\mathbf{u}$  uma primeira autofunção de Steklov. Então, as funções  $\mathcal{A}_\Pi \mathbf{u}$  e  $\mathcal{S}_\Pi \mathbf{u}$  são primeiras autofunções de Steklov, a menos que  $\mathcal{A}_\Pi \equiv 0$  ou  $\mathcal{S}_\Pi \equiv 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $\mathbf{u} \in C^\infty(\Sigma)$  uma primeira autofunção de Steklov. Logo,

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} = 0, & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} = \sigma_1 \cdot \mathbf{u}, & \text{em } \partial \Sigma, \end{cases}$$

onde  $\sigma_1$  é o primeiro autovalor de Steklov associado à autofunção  $\mathbf{u}$ . Dada  $\mathcal{A}_\Pi \mathbf{u}$  a parte antissimétrica definida aos moldes da Definição 2.1, temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{A}_\Pi \mathbf{u}}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\mathbf{u} - \mathbf{u} \circ \mathcal{R}_\pi) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} (\mathbf{u}(\mathcal{R}_\pi)) \right) \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_1 \cdot \mathbf{u} - \sigma_1 \cdot \mathbf{u}(\mathcal{R}_\pi)) \\ &= \sigma_1 \left( \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathcal{R}_\pi))}{2} \right) \\ &= \sigma_1 \cdot \mathcal{A}_\Pi \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Além disso, vamos mostrar que  $\Delta(\mathcal{A}_\Pi \mathbf{u}) = 0$ . De fato,

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{A}_\Pi \mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \Delta(\mathbf{u} - \mathbf{u} \circ \mathcal{R}_\pi) \\ &= \frac{1}{2} [\Delta(\mathbf{u}) - \Delta(\mathbf{u} \circ \mathcal{R}_\pi)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto,  $\mathcal{A}_\Pi \mathbf{u}$  é uma primeira autofunção de Steklov. De maneira análoga, concluímos também que  $\mathcal{S}_\Pi \mathbf{u}$  é uma primeira autofunção de Steklov.  $\square$

Antes da prova do Teorema 10, temos o seguinte lema relacionando a primeira autofunção de Steklov  $\mathbf{u}$  e o seu primeiro autovalor diferente de zero com a parte antissimétrica de  $\mathbf{u}$  em relação ao hiperplano  $\Pi$ .

**Lema 11.** *Se  $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^n$  é  $R_\Pi$ -invariante,  $\sigma_1 < 1$  e  $\mathbf{u}$  é uma primeira autofunção de Steklov, então  $\mathbf{u} = \mathcal{S}_\Pi \mathbf{u}$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\mathcal{A}_\Pi \mathbf{u}$  e  $\mathcal{S}_\Pi \mathbf{u}$  as partes antissimétrica e simétrica de  $\mathbf{u}$  em relação ao plano  $\Pi$ , respectivamente. Suponhamos, por contradição, que  $\mathcal{A}_\Pi \mathbf{u}$  não é identicamente nula. Assim, pela Proposição 2.1 e Lema 1.14, segue que  $\mathcal{A}_\Pi \mathbf{u}$  é uma primeira autofunção de Steklov e têm exatamente dois domínios nodais. Tomemos  $\Omega$  um domínio nodal onde  $\mathbf{u} > 0$ . Pela propriedade antissimétrica de  $\mathcal{A}_\Pi \mathbf{u}$ , seu conjunto nodal  $\mathcal{N}$  contém  $\Sigma \cap \Pi$  e seu segundo domínio nodal é definido por  $\mathcal{R}_\Pi(\Omega)$ . Além disso, como o plano  $\Pi$  divide a superfície  $\Sigma$  em duas partes segue que  $\Omega$  está localizado em um desses lados, pois é conexo.

Definamos então a seguinte função  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\varphi(X) = \langle X, \omega \rangle,$$

onde  $X \in \mathbb{R}^n$  é o campo de vetores posição e  $\omega \in \mathbb{R}^n$  é um vetor normal à  $\Pi$ . Tal função é definida de modo que  $\Omega \subset \{\varphi > 0\}$ , ou seja,  $\omega$  está apontando para o lado que  $\Omega$  está localizado. Daí, como  $\mathcal{A}_\Pi \mathbf{u}$  não é identicamente nula e  $\mathbf{u} > 0$  em  $\Omega$ , temos

$$\int_{\Omega} \varphi \cdot \mathcal{A}_\Pi \mathbf{u} > 0. \quad (2.2)$$

Observe que  $\mathcal{A}_\Pi \varphi = \varphi$ , pois

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\Pi \varphi(X) &= \frac{1}{2}(\varphi(X) - \varphi(\mathcal{R}_\Pi(X))) \\ &= \frac{1}{2}(\varphi(X) - (-\varphi(X))) \\ &= \varphi(X).\end{aligned}$$

Dai,

$$\int_{\partial\Sigma} \varphi \cdot \mathcal{A}_\Pi \mathbf{u} = \int_{\partial\Sigma \cap \Omega} \varphi \cdot \mathcal{A}_\Pi \mathbf{u} + \int_{\partial\Sigma \cap \mathcal{R}_\Pi(\Omega)} \varphi \cdot \mathcal{A}_\Pi \mathbf{u}. \quad (2.3)$$

Vale ressaltar que  $\varphi > 0$  em  $\Omega$ , pela definição da função  $\varphi$ , e, por consequência, temos  $\varphi < 0$  em  $\mathcal{R}_\pi(\Omega)$ , isto é,

$$\varphi(\mathcal{R}_\pi(\Omega)) = -\varphi(\Omega). \quad (2.4)$$

Como mostrado anteriormente, temos  $\mathcal{A}_\Pi \varphi = \varphi$ . Tal fato implica em  $\varphi \cdot \mathcal{A}_\Pi \mathbf{u}(\partial\Sigma \cap \Omega) = \varphi \cdot \mathcal{A}_\Pi \mathbf{u}(\partial\Sigma \cap \mathcal{R}_\Pi(\Omega))$ . Com efeito,

$$\begin{aligned}(\varphi \cdot \mathcal{A}_\Pi \mathbf{u})(\mathcal{R}_\pi(\Omega)) &= (\mathcal{A}_\Pi \varphi \cdot \mathcal{A}_\Pi \mathbf{u})(\mathcal{R}_\pi(\Omega)) \\ &= \mathcal{A}_\pi \varphi(\mathcal{R}_\pi(\Omega)) \cdot \mathcal{A}_\pi \mathbf{u}(\mathcal{R}_\pi(\Omega)) \\ &= \frac{1}{2} [\varphi(\mathcal{R}_\pi(\Omega)) - \varphi(\mathcal{R}_\pi(\mathcal{R}_\pi(\Omega)))] \cdot \frac{1}{2} [\mathbf{u}(\mathcal{R}_\pi(\Omega)) - \mathbf{u}(\mathcal{R}_\pi(\mathcal{R}_\pi(\Omega)))] \\ &= (-1) \cdot \frac{1}{2} [\varphi(\Omega) - \varphi(\mathcal{R}_\pi(\Omega))] \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} [\mathbf{u}(\Omega) - \mathbf{u}(\mathcal{R}_\pi(\Omega))] \\ &= \mathcal{A}_\pi \varphi(\Omega) \cdot \mathcal{A}_\pi \mathbf{u}(\Omega) \\ &= (\varphi \cdot \mathcal{A}_\pi \mathbf{u})(\Omega)\end{aligned}$$

Com esse resultado em mãos, temos a seguinte conclusão

$$\int_{\partial\Sigma \cap \Omega} \varphi \cdot \mathcal{A}_\Pi \mathbf{u} = \int_{\partial\Sigma \cap \mathcal{R}_\Pi(\Omega)} \varphi \cdot \mathcal{A}_\Pi \mathbf{u} \quad (2.5)$$

Logo, substituindo a equação (2.5) na equação (2.3) temos

$$\int_{\partial\Sigma} \varphi \cdot \mathcal{A}_\Pi = \int_{\partial\Sigma \cap \Omega} \varphi \cdot \mathcal{A}_\Pi + \int_{\partial\Sigma \cap \mathcal{R}_\Pi(\Omega)} \varphi \cdot \mathcal{A}_\Pi = 2 \cdot \int_{\partial\Sigma \cap \Omega} \varphi \cdot \mathcal{A}_\Pi.$$

Portanto, pela Equação (2.2), concluímos que

$$\int_{\partial\Sigma} \varphi \cdot \mathcal{A}_\Pi > 0. \quad (2.6)$$

Por outro lado, a função  $\varphi$  é uma combinação linear das funções coordenadas, o que implica, pela Proposição 1.15,  $\varphi$  ser uma autofunção de Steklov com autovalor igual a 1. Além disso, como a aplicação de Dirichlet-Neumann  $\mathcal{L}$  é autoadjunto e  $\sigma_1 < 1$ , concluímos que  $\varphi \cdot \mathcal{A}_\Pi \in \mathcal{C}$ , conforme (1.24), ou seja,

$$\int_{\partial\Sigma} \varphi \cdot \mathcal{A}_\Pi = 0,$$

o que contradiz a Equação (2.6).  $\square$

**Demonstração do Teorema Principal.** Seja  $\Sigma^2 \subset B^n$  um anel mergulhado com bordo livre  $\mathcal{G}$ -invariante, onde  $\mathcal{G} = \langle \mathcal{R}_{\Pi_1}, \mathcal{R}_{\Pi_2}, \mathcal{R}_{\Pi_3} \rangle$  e  $\mathcal{R}_{\Pi_i}$  é a reflexão em relação ao plano  $\Pi_i$  para  $i = 1, 2, 3$ . Sem perda de generalidade, podemos assumir os hiperplanos  $\Pi_i$ 's como sendo os primeiros três planos coordenados. Pelo Teorema 2 e Proposição 1.15, precisamos mostrar que o primeiro autovalor de Steklov é igual a um.

Suponhamos, por contradição, que  $\sigma_1(\Sigma) < 1$  e seja  $\mathbf{u}$  uma primeira autofunção de Steklov. Segue pelo Lema 11 que  $\mathbf{u}$  é simétrica. Por hipótese, temos que  $\partial\Sigma \cap (B^n \setminus \bigcup_{i=1}^3 \Pi_i) \neq \emptyset$ . Logo a partir das propriedades de simetria do anel segue que

$$\partial\Sigma \cap \text{int}(O) \neq \emptyset,$$

onde  $O = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$ . Definamos também  $\Gamma \subset \partial B^n$  uma componente de fronteira de  $\partial\Sigma$ . Como  $\Sigma$  é mergulhada e, em particular, uma imersão, pela Definição ??, a intersecção de suas componentes de fronteira com  $\partial B^n$  é ortogonal, dessa forma qualquer intersecção de  $\Gamma$  com qualquer um dos planos  $\Pi_i$  é ortogonal. Além disso, por  $\Sigma$  ser um anel, as simetrias garantem a existência de pelo menos uma dessas intersecções.

Consideremos a curva  $\gamma := \Gamma \cap O$ . Como  $\Gamma \subset \partial\Sigma$  é um círculo  $\mathcal{G}$ -invariante, temos que  $\gamma$  é conexa e intersecta exatamente dois planos coordenados  $\Pi_i, i = 1, 2, 3$ . Claramente esses planos são distintos, pois  $\Sigma$  é um anel. Vejamos, por exemplo, para o caso em que  $n = 3$ .

A curva em amarelo representa  $\gamma$  e tem exatamente duas intersecções, uma com o plano  $\Pi_1$  e a outra com  $\Pi_2$ .

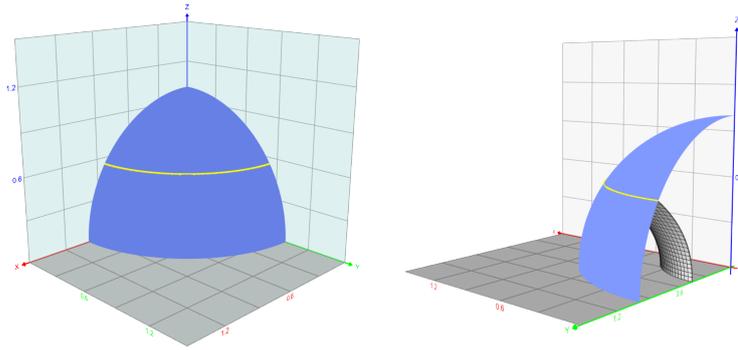


Figura 2.1: Curva Nodal.

Dessa forma parametrizamos a curva  $\gamma$  no intervalo  $[0, 1]$ . Suponhamos, sem perda de generalidade,  $\gamma(0) \in \Pi_1$  e  $\gamma(1) \in \Pi_2$ .

Por outro lado, já que  $\Sigma$  é um anel e simétrica em relação aos três planos coordenados, temos as seguintes conclusões:

- (1) A outra componente de fronteira é a reflexão de  $\Gamma$  em relação ao plano  $\Pi_3$ , isto é,  $\partial\Sigma = \Gamma \cup \mathcal{R}_{\Pi_3}(\Gamma)$ ;
- (2)  $\Sigma \cap \Pi_3$  é um círculo;
- (3)  $\mathcal{D} := \Sigma \cap O$  é limitado por  $\gamma, \alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3$  com  $\alpha_i := \Sigma \cap O \cap \Pi_i$  para  $i = 1, 2, 3$ . Tal conjunto é um Domínio Fundamental para  $\Sigma$ .

Seja  $\mathcal{N} = \{p \in \Sigma \mid u(p) = 0\}$  o conjunto nodal de  $u$ . Afirmamos que existe  $t_0 \in (0, 1)$  tal que  $\gamma(t_0) \in \mathcal{N}$ . De fato, suponhamos por contradição que não existe  $t_0 \in (0, 1)$  tal que  $\gamma(t_0) \in \mathcal{N}$ . Logo,  $u$  não teria mudança de sinal no interior de  $\gamma$ , isto é,  $u(\gamma(t)) > 0$  ou  $u(\gamma(t)) < 0, \forall t \in (0, 1)$ . Como  $u$  é suave  $\mathcal{G}$ -invariante e  $\mathcal{D}$  é domínio fundamental, segue que

$$\int_{\partial\Sigma} u \neq 0,$$

o que é uma contradição.

Portanto,  $\mathcal{N}$  contém uma linha nodal  $\mu$  que intercepta  $\gamma$  em um ponto interior. Como  $\mathcal{D}$  é limitado por quatro arcos, vide Figura 2.2, temos quatro possíveis casos para a segunda intersecção de  $\mu$  com  $\partial\mathcal{D}$ , são eles:

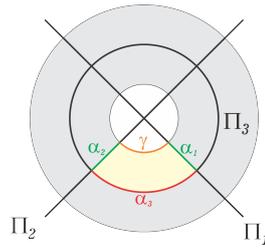


Figura 2.2: Domínio Fundamental  $\mathcal{D}$ .

- (i) Se  $\mu$  termina em  $\gamma$ , aplicando as reflexões do grupo  $\mathcal{G}$  na curva  $\mu$  observamos que  $u$  tem pelo menos 9 domínios nodais, veja a Figura 2.3;

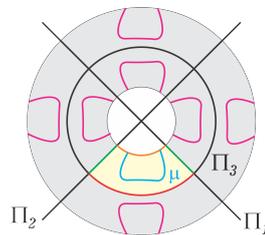


Figura 2.3:  $\mu$  termina em  $\gamma$ .

- (ii) Se  $\mu$  termina em  $\alpha_1$ , aplicando novamente as reflexões do grupo  $\mathcal{G}$  em  $\mu$  temos que  $u$  tem pelo menos 5 domínios nodais, veja a Figura 2.4;

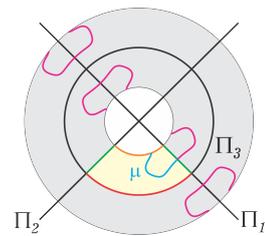


Figura 2.4:  $\mu$  termina em  $\alpha_1$ .

- (iii) Se  $\mu$  termina em  $\alpha_2$ , analogamente ao caso anterior, temos que  $u$  tem pelo menos 5 domínios nodais;
- (iv) Se  $\mu$  termina em  $\alpha_3$ , aplicando as reflexões do grupo  $\mathcal{G}$  em  $\mu$  temos que  $u$  tem pelo menos 4 domínios nodais, veja a Figura 2.5.

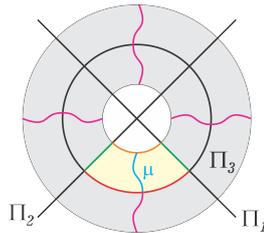


Figura 2.5:  $\mu$  termina em  $\alpha_3$ .

Gerando assim uma contradição, pois todos os casos contradizem a Proposição 1.14. Portanto  $\sigma_1 = 1$ .  $\square$

O corolário a seguir é uma consequência imediata do resultado obtido no Teorema 10, confirmando a Conjectura de Fraser e Li com uma hipótese adicional, a invariância por reflexões em torno dos três planos coordenados.

**Corolário 12.** *Seja  $\Sigma \subset B^3$  um anel mínimo mergulhado com bordo livre, simétrico com respeito aos planos coordenados. Então,  $\Sigma$  é congruente ao catenoide crítico.*

## 2.1 Superfícies com Simetrias Refletivas mais Gerais

O resultado anterior teve como centro de estudo mostrar que todo anel mínimo com bordo livre mergulhado em uma bola unitária, simétrico com relação a reflexões aos três planos ortogonais, é congruente ao catenoide crítico. A prova foi baseada no fato de que as condições de simetria acima implicam que o primeiro autovalor de Steklov do anel é igual a 1.

Nesta seção, a partir dos resultados obtidos em [5] e [14], iremos ver condições mais gerais de simetrias que garantem que o primeiro autovalor de uma superfície mínima com bordo livre mergulhada na bola unitária é igual a 1. Para tal, supomos que  $\Sigma \subset B^3$  é uma superfície mínima com bordo livre mergulhada e invariante por um grupo finito de reflexões, denominado  $\mathcal{G}$ . A simetria dá indícios de que existe um subconjunto de  $\Sigma$ , onde é possível identificar características que valem para toda a superfície, tal subconjunto recebe o nome de domínio fundamental. Em outras palavras,  $D \subset \Sigma$  é um domínio fundamental de  $\Sigma$  com relação ao grupo de reflexões  $\mathcal{G}$ , se, para todo  $x \in \Sigma$ , existem únicos  $y \in D$  e  $\mathcal{R}_{\Pi_i} \in \mathcal{G}$  tal que  $x = \mathcal{R}_{\Pi_i}(y)$ . Temos que o par  $(\Sigma, \mathcal{G})$  satisfaz as seguintes condições:

( $C_1$ ) : O domínio fundamental  $\mathcal{W}$  para  $\mathcal{G}$  em  $B^3$  é uma cunha tetraédrica limitada pelos planos  $\Pi_i, i = 1, 2, 3$  e  $\partial B^3$  (Figura 2.6);

( $C_2$ ) : O domínio fundamental  $D := \mathcal{W} \cap \Sigma$  para  $\Sigma$ , intersecta  $\partial\Sigma$  em uma única curva conexa  $\gamma$ .

Além disso, assumiremos que as reflexões em torno dos planos  $\Pi_i, i = 1, 2, 3$ , pertencem ao grupo  $\mathcal{G}$ .

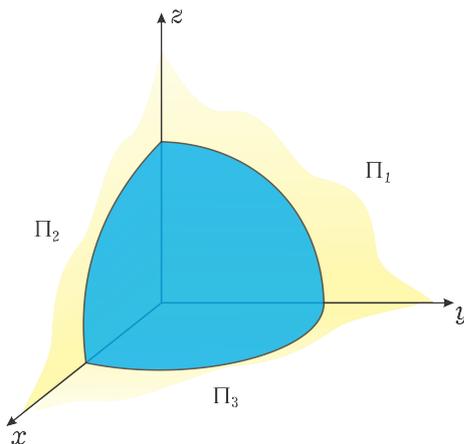


Figura 2.6: Cunha tetraédrica em  $B^3$ .

**Definição 2.2.** Se  $U \subset D$  é uma componente conexa de  $\tilde{U}$ , onde  $\tilde{U}$  é um domínio nodal, dizemos que  $U$  é um domínio nodal em  $D$ .

**Lema 13.** Seja  $\Sigma \subset B^3$  uma superfície mínima com bordo livre  $\mathcal{G}$ -invariante satisfazendo as condições ( $C_1$ ) e ( $C_2$ ). Suponhamos que o primeiro autovalor de Steklov de  $\Sigma$  seja menor que um, ou seja,  $\sigma_1(\Sigma) < 1$ . Então,  $D$  possui exatamente dois domínios nodais  $U$  e  $V$ , onde  $\partial U$  e  $\partial V$  possuem intersecção não vazia com  $\partial B^3$  e  $\Pi_i$  para  $i = 1, 2, 3$ .

*Demonstração.* Seja  $u$  a primeira autofunção de Steklov, pela Proposição 1.14, existem exatamente dois domínios nodais para  $u$  em  $\Sigma$ , os quais serão denotados por  $\tilde{U}, \tilde{V}$ . Pela definição de  $u$  temos

$$\int_{\partial\Sigma} u = 0.$$

Além disso, pela condição ( $C_2$ ),  $D$  é um domínio fundamental para  $\Sigma$  e  $D \cap \partial\Sigma = \gamma$  é uma curva conexa, tais fatos implicam que  $u$  muda de sinal em  $\gamma$ . Conseqüentemente,  $u$  tem pelo menos dois domínios nodais em  $D$ .

Sejam  $U_1, U_2 \subset D$  abertos relativos em  $D$  tais que  $U_1 \cup U_2 = \tilde{U} \cap D$ . Pela conexidade de  $\tilde{U}$  existe um caminho  $\bar{\beta} : [0, 1] \rightarrow \tilde{U}$  totalmente contido em  $\tilde{U}$  tal que  $\bar{\beta}(0) \in U_1$  e  $\bar{\beta}(1) \in U_2$ . Utilizando, se necessário, reflexões convenientes do grupo  $\mathcal{G}$  sobre partes de  $\bar{\beta}$ , podemos construir um caminho  $\beta : [0, 1] \rightarrow D$  totalmente contido em  $\tilde{U} \cap D$  tal que  $\beta(0) \in U_1$  e  $\beta(1) \in U_2$ . Portanto, concluímos que  $U := \tilde{U} \cap D$  é conexo. De maneira análoga, temos que  $V := D \cap \tilde{V}$  é conexo. Pela Definição 2.2,  $U$  e  $V$  são domínios nodais em  $D$ .

Precisamos mostrar agora que  $\partial U \cap \Pi_i \neq \emptyset, \forall i = 1, 2, 3$ . Suponhamos, por contradição, que  $\partial U \cap \Pi_i = \emptyset$  para algum  $i = 1, 2, 3$ . Como  $\Sigma$  é  $\mathcal{R}_{\Pi_i}$ -invariante e  $\sigma_1(\Sigma) < 1$  temos, pelo Lema 11 (i.e.  $\mathbf{u} = \mathcal{S}_{\Pi_i} \mathbf{u}$ ), que  $\mathcal{R}_{\Pi_i}(\tilde{U})$  é um domínio nodal e o sinal de  $\mathbf{u}$  em  $\tilde{U}$  é o mesmo em  $\mathcal{R}_{\Pi_i}(\tilde{U})$ . Como os únicos domínios nodais de  $\mathbf{u}$  são  $\tilde{U}$  e  $\tilde{V}$  e os sinais de  $\mathbf{u}$  nesses conjuntos são distintos, concluímos que  $\tilde{U} = \mathcal{R}_{\Pi_i}(\tilde{U})$ . Tomando  $p \in \tilde{U}$ , existe uma curva contínua  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \tilde{U}$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha(1) = \mathcal{R}_{\Pi_i}(p)$ . Seja  $H$  o subgrupo normal de  $\mathcal{G}$ , de índice 2, identificado naturalmente com o quociente  $\mathcal{G}/\mathcal{R}_{\Pi_i}$ . Em particular,  $D \cup \mathcal{R}_{\Pi_i}(D)$  é um domínio fundamental para  $H$ . Refletindo partes da curva  $\alpha$  por elementos de  $H$ , se necessário, podemos supor que  $\alpha(t) \in \overline{U \cup \mathcal{R}_{\Pi_i}(U)}$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Porém, o plano  $\Pi_i$  desconecta o conjunto  $\overline{U \cup \mathcal{R}_{\Pi_i}(U)}$ , isto implica que existe  $t_0 \in (0, 1)$  tal que  $\alpha(t_0) \in \Sigma \cap \Pi_i \subset V$ . O que é uma contradição.  $\square$

**Teorema 14.** *Seja  $\Sigma^2 \subset B^3$  uma superfície mínima de bordo livre  $\mathcal{G}$ -invariante satisfazendo as condições  $(C_1)$  e  $(C_2)$ . Se  $D$  é simplesmente conexo e  $\partial D$  consiste em no máximo cinco arestas, então  $\sigma_1(\Sigma) = 1$ .*

*Demonstração.* Suponhamos, por contradição,  $\sigma_1(\Sigma) < 1$ . Seja  $\Sigma$  uma superfície satisfazendo todas as condições estabelecidas na hipótese. Logo  $\partial D$  se decompõe em uma curva  $\gamma$  ao longo de  $\partial B^3$  e em uma sequência de não mais que quatro arestas  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  e  $\alpha_4$ , onde cada uma está contida em um dos planos  $\Pi_i$ . Similarmente ao que foi feito na demonstração do Teorema 10,  $D$  contém uma linha nodal  $\mu$  que intersecta um ponto interior de  $\gamma$ . Por hipótese,  $D$  é simplesmente conexo, logo  $\mu$  divide  $D$ .

*Afirmção 14.1.* O conjunto nodal  $\mathcal{N}$  de  $D$  é igual a linha nodal  $\mu$ , em símbolos,  $\mathcal{N} = \mu$ .

Caso contrário,  $\mathcal{N}$  contém uma segunda linha nodal  $\mu'$  e uma das seguintes propriedades é satisfeita:

1.  $\mu'$  é uma curva fechada em  $D$ ;

2.  $\mu'$  intersecta  $\partial D$  duas vezes e é disjunto de  $\mu$ ;
3.  $\mu'$  intersecta  $\mu$ .

Sabendo que  $D$  é simplesmente conexa, cada um dos casos acima implicam que  $D$  possui pelo menos três domínios nodais, veja a Figura 2.7, o que contradiz o Lema 13. Portanto,  $\mu = \mathcal{N}$ .

Pela Afirmação 14.1, segue que  $\mu$  divide  $D$  em exatamente dois domínios nodais  $U$  e  $V$ . Como  $\partial D$  consiste em no máximo quatro arestas além de  $\gamma$ , temos que  $U$  ou  $V$  é limitada por arestas intersectando no máximo dois dos três planos  $\Pi_i$ , contradizendo o Lema 13.  $\square$

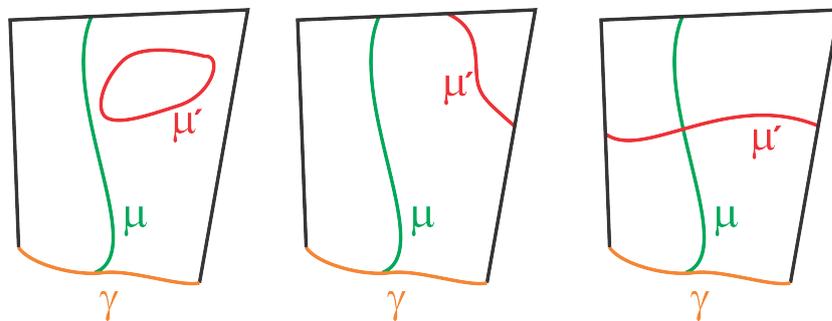


Figura 2.7: Segunda linha nodal  $\mu'$ .

Em [5], há dois tipos de famílias de superfícies mínimas com bordo livre mergulhadas em  $B^3$  com  $n$  componentes de bordo, uma de gênero zero e a outra de gênero um, obtidas a partir de pequenas perturbações normais nas superfícies aproximadas  $S_n$  e  $\tilde{S}_n$ . Primeiramente, trataremos das de gênero zero, denotadas por  $\Sigma_n$  e construída a partir da superfície aproximada  $S_n$ . Considere o polígono regular com  $n$  lados  $P_n$ , contido no plano  $xy$ , cujos vértices são determinados pela seguinte relação

$$\left( \cos \left( \frac{2\pi j}{n} \right), \sin \left( \frac{2\pi j}{n} \right), 0 \right) \in \mathbb{R}^3, \quad (2.7)$$

para  $j = 1, \dots, n$ . Identificamos  $S_n$  como dois discos paralelos equidistantes ao plano  $xy$  contidos em  $B^3$  e colados por “pontes catenoidais” centradas em cada vértice do polígono  $P_n$ , veja a Figura 2.8.

Já as superfícies de gênero um são denotadas por  $\tilde{\Sigma}_n$  e construídas a partir da superfície aproximada  $\tilde{S}_n$ . Similarmente à anterior,  $\tilde{S}_n$  possui “pontes catenoidais” centradas nos vértices do polígono  $P_n$ , a diferença está no centro deste polígono, onde há um “pescoço catenoidal” ligando os dois planos paralelos, conforme a Figura 2.9.

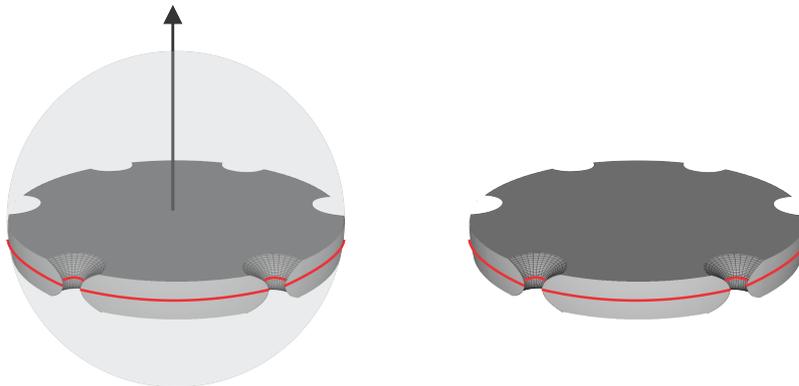


Figura 2.8: Superfície  $S_n$ .

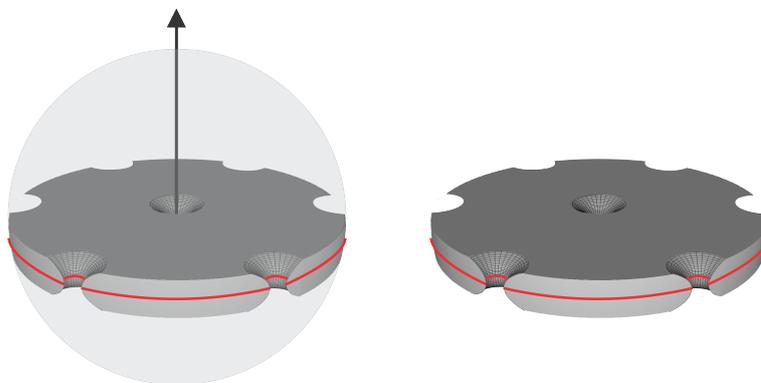


Figura 2.9: Superfície  $\tilde{S}_n$ .

Vale ressaltar que as superfícies acima descritas são invariantes por um grupo de isometrias  $\mathfrak{S}_n \subset O(3)$  gerados pela simetria ortogonal com respeito ao plano  $xy$ , a simetria ortogonal com respeito ao plano  $xz$  e as rotações por ângulos  $\frac{2\pi j}{n}$ , com  $j = 1, \dots, n$ , ao redor do eixo vertical  $Ox_3$ . Além disso, as condições de minimalidade e ortogonalidade são satisfeitas para  $n$  suficientemente grande, já que tais superfícies tendem ao disco unitário centrado na origem. Em posse dessas informações, o corolário abaixo mostra que as superfícies  $\Sigma_n$  e  $\tilde{\Sigma}_n$  possuem o primeiro autovalor de Steklov igual a 1.

**Corolário 15.** *As superfícies  $\Sigma_n$  e  $\tilde{\Sigma}_n$  descritas em [5] possuem primeiro autovalor de Steklov igual a um.*

*Demonstração.* Seja  $\{e_1, e_2, e_3\}$  a base canônica ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . Definamos

$$v_1 = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot e_1 + \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot e_2,$$

$$v_2 = e_2,$$

$$v_3 = e_3$$

e  $\mathcal{G}_n = \langle \mathcal{R}_{\Pi_{v_1}}, \mathcal{R}_{\Pi_{v_2}}, \mathcal{R}_{\Pi_{v_3}} \rangle$ . Observe que  $v_2 = e_2$  e  $v_3 = e_3$ , isto implica que  $\mathcal{R}_{\Pi_{v_2}} = \mathcal{R}_{\Pi_2}$  e  $\mathcal{R}_{\Pi_{v_3}} = \mathcal{R}_{\Pi_3}$ . Note que  $\mathcal{G}_n$  coincide com o grupo  $\mathfrak{S}_n$  definido em [5]. Vamos mostrar que a rotação por um ângulo  $\frac{2\pi}{n}$  em relação ao eixo  $z$  é igual a  $\mathcal{R}_{\Pi_{v_1}} \circ \mathcal{R}_{\Pi_{v_2}}$ . De fato, sejam  $p \in \mathbb{R}^3$  e  $\alpha$  o ângulo formado entre  $p$  e o plano  $\Pi_{v_2}$ . Aplicando  $\mathcal{R}_{\Pi_{v_2}}$  em  $p$  obtemos o ponto  $r$  conforme a Figura 2.10.

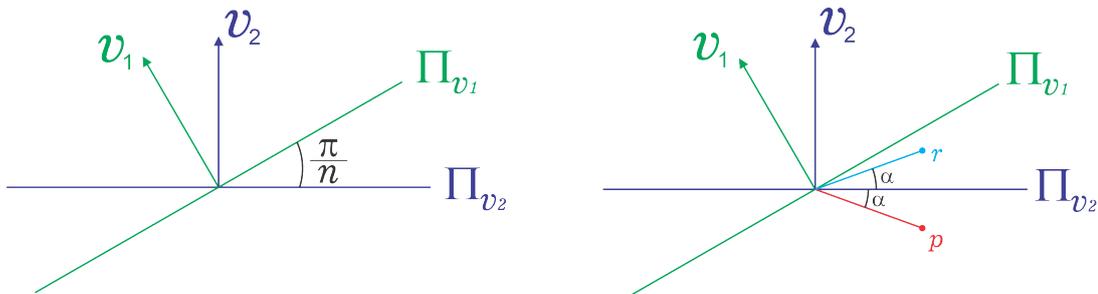


Figura 2.10: Reflexão de  $p$  em relação ao plano  $\Pi_{v_2}$ .

Considere  $\beta$  o ângulo formado entre  $r$  e o plano  $\Pi_{v_1}$ , observe que  $\beta = \frac{\pi}{n} - \alpha$ . Em seguida, aplicamos  $\mathcal{R}_{\Pi_{v_1}}$  ao ponto  $r$ , obtendo o ponto  $s$ , veja a Figura 2.11.

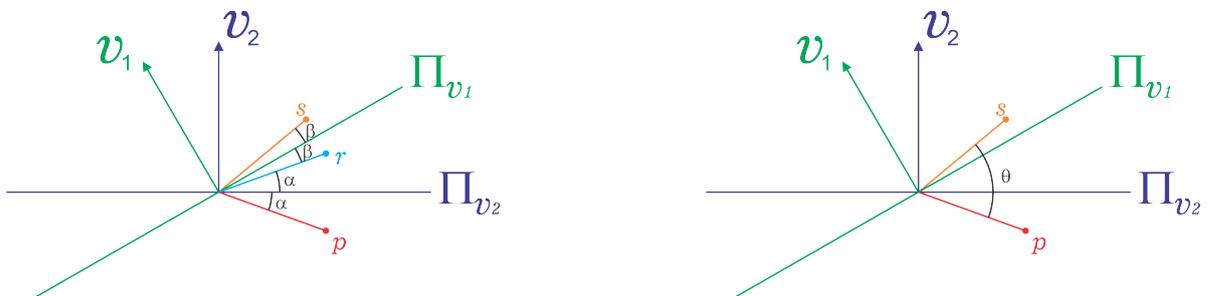


Figura 2.11: Reflexão de  $r$  em relação ao plano  $\Pi_{v_1}$ .

Observe que  $\theta = 2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta = \frac{2\pi}{n}$  e, portanto,

$$(\mathcal{R}_{\Pi_{v_1}} \circ \mathcal{R}_{\Pi_{v_2}})(p) = s = R_{\frac{2\pi}{n}}(p).$$

Em particular, o domínio fundamental  $D_n := \mathcal{W} \cap S_n$  é simplesmente conexo e consiste de cinco arestas  $\gamma \in \partial B^3$ ,  $\alpha_1, \alpha_4 \in \Pi_{v_1}$ ,  $\alpha_2 \in \Pi_{v_2}$  e  $\alpha_3 \in \Pi_{v_3}$ . O domínio fundamental  $D'_n := \mathcal{W} \cap \Sigma_n$  é uma pequena perturbação normal de  $D_n$  e, conseqüentemente,  $\partial D'_n$  consiste de cinco arestas  $\gamma' \in \partial B^3$ ,  $\alpha'_1, \alpha'_4 \in \Pi_{v_3}$ ,  $\alpha'_2 \in \Pi_{v_2}$  e  $\alpha'_3 \in \Pi_{v_1}$ . Portanto, o Teorema 14 implica que  $\sigma_1(\Sigma_n) = 1$ .

Aplicamos um argumento análogo para a superfície  $\tilde{\Sigma}_n$ , exceto que o pescoço catenoidal centrado na origem significa que o domínio fundamental  $\tilde{D}'_n := \tilde{\Sigma}_n \cap \mathcal{W}$  consiste

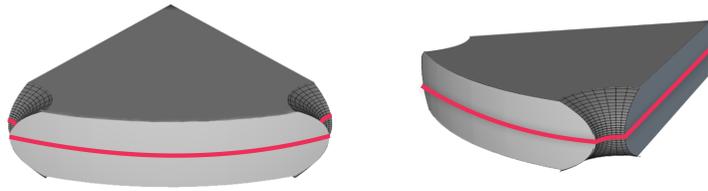


Figura 2.12: Domínio Fundamental de  $\Sigma_n$ .

de seis arestas  $\gamma \in \partial B^3$ ,  $\alpha'_1, \alpha'_3, \alpha'_5 \in \Pi_{v_3}$ ,  $\alpha'_2 \in \Pi_{v_2}$  e  $\alpha'_4 \in \Pi_{v_1}$ .

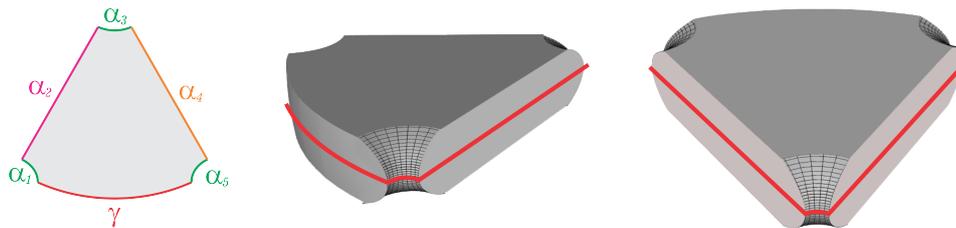


Figura 2.13: Domínio Fundamental de  $\tilde{\Sigma}_n$ .

Suponhamos, por contradição, que  $\sigma_1(\Sigma_n) < 1$ . Similarmente ao que foi feito na demonstração do Teorema 10,  $\tilde{D}'_n$  contém uma linha nodal  $\mu$  que intersecta um ponto interior de  $\gamma$  e o divide em dois conjuntos nodais.

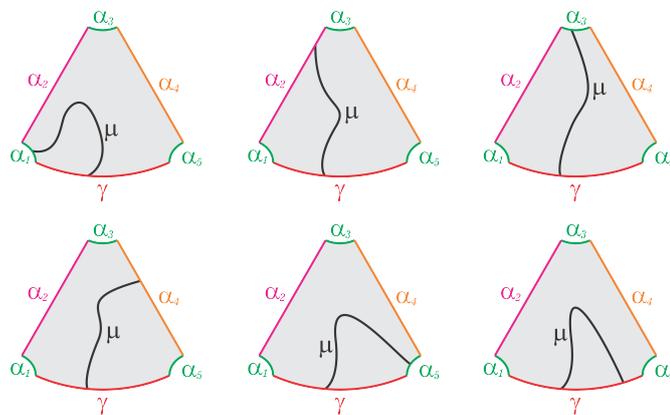


Figura 2.14: Possíveis Linhas Nodais em  $\tilde{D}'_n$ .

Observe a Figura 2.14, a outra extremidade da linha nodal  $\mu$  possui as seguintes possibilidades:

1.  $\mu$  intersecta  $\alpha_1$ ;
2.  $\mu$  intersecta  $\alpha_2$ ;
3.  $\mu$  intersecta  $\alpha_3$ ;

4.  $\mu$  intersecta  $\alpha_4$ ;
5.  $\mu$  intersecta  $\alpha_5$ .

Em qualquer uma das possibilidades, pelo menos um dos domínios nodais não intersecta todos os planos  $\Pi_{v_i}$ , com  $i = 1, 2, 3$ , contradizendo o Lema 13. Portanto  $\sigma_1(\tilde{\Sigma}_n) = 1$ .  $\square$

## 2.2 Problema em Aberto

Na Seção 1.7 foram destacados dois exemplos de superfícies mínimas com bordo livre mergulhados em  $B^3$ , uma com a topologia de um disco e a outra com a topologia de um anel. Uma pergunta natural surge, existem outros tipos de topologias que satisfazem as condições de minimalidade com bordo livre em  $B^3$ ? Este é um dos problemas em aberto que é apresentado em [7].

**Problema.** *Dada uma superfície orientada com bordo, quais as topologias que podem ser utilizadas como uma superfície mínima propriamente mergulhada na bola unitária  $B^3$  com bordo livre?*

Resultados de existência foram obtidos como resposta parcial para o problema acima, destacamos alguns a seguir.

- Em [6] há dois exemplos, o disco equatorial plano e o catenoide crítico, ambos com gênero zero e  $k \geq 1$  componentes de fronteira;
- Em [5] há a construção de exemplos que possuem gênero zero e um com a quantidade de componentes de fronteira  $k$  suficientemente grande;
- Em [9] há o desenvolvimento de um método para identificar superfícies mínimas com bordo livre mergulhadas em  $B^3$  com gênero suficientemente grande e com exatamente três componentes de fronteira;
- Em [11] identifica-se as mesmas superfície obtidas em [9], porém com métodos diferentes;
- Em [10] há a construção de superfícies mínimas de gênero suficientemente grande e com uma componente de fronteira através da técnica de perturbação;

- Em [1] há a utilização de grupos diedrais para identificar superfícies mínimas com gênero maior ou igual a um e com apenas uma componente de fronteira.

# REFERÊNCIAS

- [1] CARLOTTO, Alessandro. FRANZ, Giada. SCHULZ, Mario B. **Free Boundary Minimal Surfaces with Connected Boundary and Arbitrary Genus**, arXiv preprint 2020, arXiv:2001.04920, 16pp.
- [2] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Riemanniana**. Projeto Euclides. 3ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- [3] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**, Textos Universitários. 2ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- [4] EVANS, Lawrence C. **Partial Differential Equations**. Graduate studies in mathematics. 2. ed. , vol. 19. [S.l.]: Providence, RI : American Mathematical Society, 2010.
- [5] FOLHA, Abigail. PACARD, Frank. ZOLOTAREVA, Tatiana. **Free boundary minimal surfaces in the unit 3-ball**. Manuscripta Math. 154 (2017), no. 3-4, 359-409. <https://doi.org/10.1007/s00229-017-0924-9>.
- [6] FRASER, Ailana. SCHOEN, Richard. **Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball**. Invent. Math. 203(2016), no. 3, 823-890.
- [7] FRASER, Ailana. LI, Martin Man-chun. **Compactness of the space of embedded minimal surfaces with free boundary in three-manifolds with nonnegative Ricci curvature and convex boundary**. Journal Differential Geometry. 96 (2014), no. 2, 183-200.
- [8] GRANLUND, Seppo. MAROLA, Niko. **On the problem of unique continuation for the p-Laplace equation**. Nonlinear Anal. 101 (2014), 89-97.

- [9] KAPOULEAS, Nicos. LI, Martin Man-chun. **Free boundary minimal surfaces in the unit three-ball via desingularization of the critical catenoid and the equatorial disk**, preprint (arXiv:1709.08556).
- [10] KAPOULEAS, Nicos. WIYGUL, David. **Free-boundary Minimal Surfaces with Connected Boundary in the 3-ball by Tripling the Equatorial Disc**, preprint (arXiv:1711.00818).
- [11] KETOVER, Daniel. **Free Boundary Minimal Surfaces of Unbounded Genus**, preprint (arXiv: 1612.08691).
- [12] LEE, John M. **Introduction to Smooth Manifolds**. Graduate Texts in Mathematics 218. New York: Springer Science, 2013.
- [13] LI, Martin. **A General Existence Theorem for Embedded Minimal Surfaces with Free Boundary**. Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 68, no. 2(2015). p. 286-331.
- [14] MCGRATH, Peter. **A Characterization of the Critical Catenoid**. Indiana University Mathematics Journal, vol. 67, no. 2(2018). p. 889 - 897.
- [15] MENDES, Roberto de Maria Nunes. **Cálculo, Variedades e Formas Diferenciais**. Belo Horizonte, 2017.