UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

EQUAÇÃO DE KIRCHHOFF FRACAMENTE DISSIPATIVA: EXISTÊNCIA, UNICIDADE E DECAIMENTO EXPONENCIAL.

STANLEY SOUZA PROTÁZIO

SÃO LUÍS
2022

EQUAÇÃO DE KIRCHHOFF FRACAMENTE DISSIPATIVA: EXISTÊNCIA, UNICIDADE E DECAIMENTO EXPONENCIAL.

STANLEY SOUZA PROTÁZIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. **Marcos Antônio Ferreira de Araújo.**

SÃO LUÍS
2022

Souza Protázio, Stanley.
Equação de Kirchhoff fracamente dissipativa: existência, unicidade e decaimento exponencial. / Stanley Souza Protázio - 2021.
53.p

Orientador: Marcos Antônio Ferreira de Araújo.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática / CCET, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2021.
1. Análise Funcional. 2.Equação Diferencial Hiperbólica. 3. Método de Galerkin 4. Teoria das Distribuições.
CDU 100.00

EQUAÇÃO DE KIRCHHOFF FRACAMENTE DISSIPATIVA: EXISTÊNCIA, UNICIDADE E DECAIMENTO EXPONENCIAL.

STANLEY SOUZA PROTÁZIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Dissertação aprovada em 28 de Janeiro de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Marcos Antonio Ferreira de Araújo
Doutor em Matemática (UFMA)

Renata Limeira de Farias Carvalho
Doutora em Matemática (UFMA)

Flank David Morais Bezerra
Doutor em Matemática (UFPB)

.

O que eu estou procurando não é um caminho fácil,
mas uma forma de andar pelo difícil.

(Naruto Uzumaki)

AGRADECIMENTOS

Nesta etapa, quero agradecer primeiramente a meus amigos. Vocês não têm noção das diversas vezes que me salvaram com conversas aleatórias nesse período pandêmico. Em especial, agradecer a Diego Trinta, Victor Thiago, Gabrielle Ferreira, Mathias Souza, Paulo Muniz, Rannuf e entre tantos outros que salvaram, em geral, minhas noites tornando-as menos solitárias.

Por conseguinte, meus sinceros agradecimentos à FAPEMA (Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão) pelo apoio financeiro e que motivou fortemente na continuação deste trabalho.

Neste parágrafo, deixo meus sinceros agradecimentos a todos os professores da pós graduação em matemática da Universidade Federal do Maranhão.

Aqui, meu muitíssimo obrigado a Carolayne Muniz. É ela quem pega em minha mão e tenta me manter resiliente quando a vida aperta muito.

Por último, à toda minha família: obrigado!!!

É que eu adoro o que eu digo. É impressionante como eu me encanto com o que eu mesmo falo; é impressionante o quanto eu entendo quando eu mesmo explico. Porque tem gente que condena, as pessoas consideram isso arrogância. Mas pare pra pensar: se você vai ter que conviver com você mesmo até o fim, se você vai ter que se aguentar até o fim, se você vai ter que ser espectador de você mesmo até o fim; é melhor que se encante com o que você faz.

(Clovis de Barros Filho)

RESUMO

Neste trabalho provaremos a existência e unicidade da solução forte do problema de Cauchy em $L^2(\Omega)$ cuja equação diferencial parcial é modelada por

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{d^2u}{dt^2}(x,t) - M(\|\nabla u(x,t)\|^2)\Delta u(x,t) + \delta\dfrac{du}{dt}(x,t) = 0 \\ u(x,t) = 0 \quad \text{em } \Gamma \times [0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em } \Omega \\ \dfrac{du}{dt}(x,0) = u_1(x) \quad \text{em } \Omega \end{array}\right.$$

em que δ é uma constante positiva pequena, $M(s)$ é uma função de classe C^1, Ω é um aberto e limitado com fronteira Γ.

Além disso, demonstraremos o decaimento exponencial da solução do problema acima.

Palavras-chave: Análise Funcional; Equação Diferencial Hiperbólica; Método de Galerkin; Teoria das Distribuições.

ABSTRACT

This academic production we will prove the existence and uniqueness of the strong solution of the Cauchy problem in $L^2(\Omega)$ whose partial differential equation is given by

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{d^2u}{dt^2}(x,t) - M(\|\nabla u(x,t)\|^2)\Delta u(x,t) + \delta\dfrac{du}{dt}(x,t) = 0 \\ u(x,t) = 0 \quad \text{em } \Gamma \times [0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em } \Omega \\ \dfrac{du}{dt}(x,0) = u_1(x) \quad \text{em } \Omega \end{array}\right.$$

where δ is a small positive constant, $M(s)$ is a function of class C^1, Ω is an open bounded one with boundary Γ.

Furthermore, we will demonstrate the exponential decay of the solution to the above problem.

Keywords: Distribution Theory; Functional Analysis; Galerkin's Method; Hyperbolic Differential Equation;

Sumário

Introdução **8**

1 Noções Básicas **10**

1.1 Funções Testes 10

1.2 Distribuições 11

1.3 Os espaços L^p 12

1.4 Espaços de Sobolev 13

1.5 Espaços de Sobolev que envolvem tempo 15

1.6 Existência e Prolongamento de Soluções de EDO's 17

1.7 Resultados Básicos 18

2 Solução local da equação de Kirchhoff-Carrier **21**

3 Resultado Principal **34**

3.1 Existência, Unicidade e Decaimento Exponencial 34

4 Considerações finais **50**

Referências 53

Notações

$D^\alpha u$	:	derivada de ordem α de u;
$suppf$	:	suporte de f;
$C_c^\infty(\Omega) = D(\Omega)$	:	conjuntos das funções contínuas $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ com suporte compacto;
$D'(\Omega)$	:	conjunto dos funcionais lineares contínuos sobre $D(\Omega)$;
$\partial\Omega$	:	fronteira de Ω;
$L^1_{loc}(\Omega)$	:	conjunto das funções localmente integráveis;
$L^p(\Omega)$	:	conjunto das funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|u\|^p$ é integrável;
X'	:	dual de X;
$W^{m,p}$	:	espaço de Sobolev de ordem m;
$\|\cdot\|_X$	:	norma referente ao conjunto X;
$(\cdot,\cdot)_X$	:	produto interno referente ao conjunto X;
$\hookrightarrow$	:	imersão contínua;
$\overset{c}{\hookrightarrow}$	:	imersão compacta;
$L^p(0,T;X)$	:	conjunto das funções $u : [0,T] \longrightarrow X$ integráveis a Lebesgue;
$C^0(0,T;X)$	:	conjunto das funções contínuas $u : [0,T] \longrightarrow X$;
Δu	:	laplaciano de u;
∇u	:	graidente de u;
$\longrightarrow$	:	convergência forte;
$\rightharpoonup$	:	convergência fraca;
$\overset{*}{\rightharpoonup}$	:	convergência fraco estrela.

Introdução

As pequenas vibrações transversais de uma corda elástica esticada de comprimento L, fixada nas pontas, quando supomos que a tensão em cada ponto da corda é constante, é modelada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\tau_0}{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \tag{1}$$

onde τ_0 é a tensão, m é a massa da corda e $u(x,t)$ denota o deslocamento vertical do ponto x da corda no instante t. Esse modelo foi introduzido por J. d'Alembert em 1746 e foi a primeira equação diferencial parcial. A dedução da equação (1) pode ser encontrada em L. A. Medeiros e M. Milla Miranda em [1].

Um dos modelos não lineares para estudar o fenômeno acima é o seguinte

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \left[\frac{\tau_0}{m} + \frac{\sigma E}{2mL}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \tag{2}$$

onde E é o módulo de Young do material da corda e σ a área da seção transversal da corda na posição de repouso. A equação (2) foi introduzida por Kirchhoff [2].

Uma significativa generalização de 2 no caso n-dimensional é dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - M\left(\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right)\Delta u(x,t) = 0 \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \tag{3}$$

onde $M(\lambda)$ é uma função real não negativa e Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$. A fim de formular o problema misto para a equação (3) adicionamos as condições de contorno

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t > 0 \quad (\Gamma \text{ é a fronteira de } \Omega) \tag{4}$$

e as condições iniciais

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \tag{5}$$

A maior dificuldade do problema (3)–(5) é provar que ele possui solução global, ou seja, soluções definidas para todo $t \geq 0$. Soluções locais do problema (3)–(5) (por exemplo, soluções definidas em um intervalo finito) quando os valores iniciais u_0 e u_1 têm somente um número finito de derivadas (e pertencem ao espaço de Sobolev em Ω) podem ser encontradas em [3, 4, 5, 6, 7, 8]. Todos os resultados mencionados acima admitem um conjunto aberto limitado. No caso em que não é necessariamente limitado veja [9, 10]

É importante mencionar que a existência de soluções globais do problema (3)–(5) com u_0 e u_1 pertencentes aos espaços de Sobolev é um problema em aberto. Uma maneira para superar tal dificuldade é se perturbarmos a equação (3) com um termo de dissipação ou amortecimento (estabilização interna).

Neste trabalho iremos analisar a existência e unicidade de soluções fortes globais para a equação da onda com dissipação friccional

$$u''(t) - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u(t) + \delta u'(t) = 0 \tag{6}$$

com as condições de fronteira $u(0,t) = u(L,t) = 0$, $t \geq 0$ e com as condições iniciais $u(x,0) = u_0$ e $u'(x,0) = u_1(x)$, $0 \leq x \leq L$, onde $' = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $D = \dfrac{d}{dx} = \nabla$ e $D^2 = \Delta$. Além disso, $\delta > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e limitado possuindo fronteira suave $\partial\Omega = \Gamma$ e a função real $M(s)$ é de classe C^1 tal que para todo $s \geq 0$, $M(s) \geq \beta + ks$ com $\beta,\ k > 0$. Sempre que não houver ambiguidade, usaremos u ou $u(t)$ em vez de $u(x,t)$.

Baseamo-nos principalmente em [4] (MEDEIROS e MILLA MIRANDA), [11], [12], [13]. No capítulo 1 apresentamos as noções básicas sobre distribuições, espaços L^p e espaços de Sobolev. Noções estas que servirão de alicerce para o que se segue no texto. Além disso, dedicamos uma seção para resultados (principalmente desigualdades) de grande importância no desenvolvimento das contas. No capítulo 2 demonstramos existência e unicidade da solução forte local da equação de Kirchhoff. No capítulo 3 demonstramos a existência, unicidade e decaimento exporencial da equação de Kirchhiff fracamente dissipativa pelo método de Galerkin. No capítulo 4, deixamos um resultado sobre equação de Kirchoff com limite na fronteira que pode ser utilizado para pesquisas futuras.

Capítulo 1

Noções Básicas

Seja $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ uma n-upla de inteiros não negativos que chamaremos de multi-índice. Denotaremos por:

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \quad \text{e} \quad \alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$$

Denotaremos o operador derivação em $\mathbb{R}^n$ por::

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdot \partial^{\alpha_2} x_2 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

1.1 Funções Testes

Quando estudamos funções precisamos definir o domínio destas e é nesse sentido que trabalharemos com o espaço das funções testes.

Definição 1.1.1. Seja f uma função contínua definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. O suporte de $f(x)$, *suppf*, é o fecho em Ω do conjunto dos pontos $x \in \Omega$ tal que $f(x) \neq 0$, isto é,

$$supp f = \overline{\{x;\ f(x) \neq 0\}} \cap \Omega.$$

Definição 1.1.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Denotamos por $C_c^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções teste em Ω, ou seja, o conjunto das funções a valores complexos indefinidamente diferenciáveis e com suporte compacto em Ω.

Muitas referências adotam para o conjunto das funções indefinidamente diferenciáveis e com suporte compacto a notação $D(\Omega)$.

Definição 1.1.3. Uma sequência $\{\phi_j\}$ de funções em $C_c^\infty(\Omega)$ converge para zero em $C_c^\infty(\Omega)$ se

i) existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $supp\phi_j \subset K$, $j = 1,\ 2, \ldots$, e;

ii) para todo natural m, as derivadas m-ésimas das funções ϕ_j convergem para zero quando $j \to \infty$.

1.2 Distribuições

Definição 1.2.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Um funcional linear contínuo $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ é dito uma distribuição em Ω, ou seja, dados $\Phi_1,\ \Phi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\{\Phi_j\}$ uma sequência em $C_c^\infty(\Omega)$, se $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfaz

- $u(\Phi_1 + \lambda\Phi_2) = u(\Phi_1) + \lambda u(\Phi_2)$;
- se $\Phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, então $u(\Phi_j) \to u(0)$.

então u é uma distribuição. Denotaremos o espaço das distribuições em Ω por $D'(\Omega)$ e $u(\Phi) = \langle u,\ \Phi\rangle$.

Exemplo 1.2.2. Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então T_f definida por

$$\langle T_f,\ \Phi\rangle = \int_\Omega f(x)\Phi(x)\ dx,\ \forall\ x \in C_c^\infty(\Omega)$$

é uma distribuição.

Com efeito, T_f é linear. Dados $\Phi_1,\ \Phi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} \langle T_f,\ \Phi_1 + \lambda\Phi_2\rangle &= \int_\Omega f \cdot (\Phi_1 + \lambda\Phi_2)\ dx \\ &= \int_\Omega f\Phi_1\ dx + \lambda \int_\Omega f\Phi_2\ dx \\ &= \langle T_f,\ \Phi_1\rangle + \lambda\langle T_f,\ \Phi_2\rangle \end{aligned}$$

e T_f é contínua: se $\Phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, então

$$|\langle T_f,\ \Phi_j\rangle| = \left| \int_{supp\Phi_j} f(x)\Phi_j(x)\ dx \right| \le \sup_{x\in K} |\Phi_j(x)| \int_K |f(x)|\ dx \to 0$$

onde K é um compacto que contém o suporte de Φ_j, $j = 1,\ 2, \ldots$.

Teorema 1.2.3. *Se $f,\ g \in L^1_{loc}(\Omega)$ e são tais que*

$$\langle T_f,\ \Phi\rangle = \langle T_g,\ \Phi\rangle \qquad \forall\ \Phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

então $f = g$ q.t.p.

Demonstração. Vide [14]. □

Lema 1.2.4 (Du Bois Raymond)**.** Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então para todo $\Phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\int_\Omega u(x)\Phi(x)\ dx = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.

Demonstração. Vide [15]. $\square$

Definição 1.2.5. Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada $D^\alpha T$ (no sentido das distribuições) de ordem $|\alpha|$ de T é o funcional definido em $C_c^\infty(\Omega)$ por

$$\langle D^\alpha T,\ \Phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T,\ D^\alpha \Phi\rangle \qquad \forall\ \Phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

1.3 Os espaços L^p

Nesta seção e ao longo do texto estaremos fazendo uso de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ser um vetor de $\mathbb{R}^n$ e de Ω, um aberto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.3.1. Sejam $q \leq p \leq \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. O espaço $L^p(\Omega)$ é o conjunto das funções mensuráveis f em Ω tais que

$$\int_\Omega |f(x)|^p < \infty.$$

Sobre $L^p(\Omega)$ definimos a norma

$$\left| \begin{array}{ll} \|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\right)^{1/p}, & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \\ \|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\Omega} |f(x)| & \text{se } p = \infty \end{array} \right.$$

em que tal supremo é o supremo essencial.

A função $\|\cdot\|$ define uma norma em $L^p(\Omega)$ que o torna completo, isto é, $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach que é o resultado do teorema a seguir.

Teorema 1.3.2. *$L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Vide [14]. $\square$

É importante deixar claro que os elementos de $L^p(\Omega)$ são, na verdade, classe de equivalência pois a integral não se altera se mudarmos a função num conjunto de medida nula. Assim, quaisquer dois representantes de uma mesma classe coincidem q.t.p (para quase todo ponto).

Teorema 1.3.3. *Dados $1 \leq p < \infty$ e um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. O conjunto das funções contínuas em Ω é denso em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Vide [15] $\square$

Definição 1.3.4. Diremos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente integrável em $L^p(\Omega)$, denotaremos $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, se f for uma função mensurável e para qualquer compacto $K \subset \Omega$ tivermos

$$\int_K |f(x)|^p\ dx < \infty$$

Proposição 1.3.5. *Seja* $1 \leq p \leq \infty$. *Então* $L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$.

Demonstração. Vide [16] □

Teorema 1.3.6 (Convergência Dominada)**.** *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções mensuráveis em* Ω *tal que*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existe para todo $x \in \Omega$. *Se existe* $g \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|f_n(x)| \leq g(x)$, $n = 1,\ 2, \ldots$ *e* $x \in \Omega$, *então* $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\ dx = \int_\Omega f(x)\ dx$$

Demonstração. Vide [14]. □

Definição 1.3.7. Um espaço normado X que contém um subconjunto enumerável e denso é dito separável.

Definição 1.3.8. Um espaço normado X é dito reflexivo se a injeção canônica

$$J : X \to X''$$

for sobrejetora, ou seja, $J_X(X) = X''$. Neste caso, J_X é um isomorfismo.

Proposição 1.3.9. $L^p(\Omega)$ *é reflexivo para qualquer* p, $1 < p < \infty$.

Demonstração. Vide [16] □

Proposição 1.3.10. *Se* Ω *um espaço de medida separável. Então* $L^p(\Omega)$ *é separável para qualquer* $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. Vide [16] □

Proposição 1.3.11. *O espaço* $D(\Omega)$ *é denso em* $L^2(\Omega)$.

Demonstração. Vide [15] □

1.4 Espaços de Sobolev

Definição 1.4.1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e p um número real tal que $1 \leq p < \infty$. Dado um inteiro $m > 0$, chamamos de espaço de Sobolev de ordem m, denotamos por $W^{m,p}(\Omega)$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq m$, sendo $D^\alpha u$ a derivada de u no sentido das distribuições.

Simbolicamente temos:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ com } |\alpha| \leq m\}.$$

Em $W^{m,p}(\Omega)$ defini-se a norma de u por

$$\left|\begin{array}{l} \|u\|_{m,p}^p = \displaystyle\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx, \qquad 1 \leq p < \infty \\ \|u\|_{m,\infty} = \displaystyle\sum_{|\alpha|\leq m} \sup ess \, |D^\alpha u(x)|, \quad p = \infty \end{array}\right.$$

Proposição 1.4.2. *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Vide [14]. □

Dentre os espaços de Sobolev existe um que é especial. É o caso quando p=2. Este espaço $W^{m,2}(\Omega)$ recebe uma notação especial: $H^m(\Omega)$.

Verifica-se em [16] que $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert munido com o produto interno

$$((u, \ v))_{H^m(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x) \, dx + \sum_{|\alpha|=1}^{m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) \, dx$$

e com norma

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx + \sum_{|\alpha|=1}^{m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \, dx$$

Definição 1.4.3. Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $D(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Quando p=2, denotaremos por $H_0^m(\Omega)$ em vez de $W^{m,2}(\Omega)$.

Proposição 1.4.4. *$D(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Vide [14]. □

Definição 1.4.5. Seja $1 \leq p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representaremos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual de $H_0^m(\Omega)$ será denotado por $H^{-m}(\Omega)$.

Definição 1.4.6. Definimos por $H_0^1(\Omega)$ ao núcleo do traço da aplicação $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$, isto é, $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \ u(x) = 0, \ \forall \ x \in \Gamma\}$ onde Γ é a fronteira de Ω.

O espaço $H_0^1(\Omega)$ é Hilbert quando munido do produto interno

$$((u, \ v))_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$$

e tem norma induzida por

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx.$$

O dual de $H_0^1(\Omega)$ será denotado por $H^{-1}(\Omega)$.

Definição 1.4.7. Sejam $X, \ Y$ espaços de Banach com $X \subset Y$ e $i : X \rightarrow Y$ a injeção canônica de X em Y que faz $x \longmapsto i(x) = x$. Dizemos que a imersão de X em Y é contínua quando existe uma constante $C > 0$ tal que $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ para todo $x \in X$.

Definição 1.4.8. Sejam $X, \ Y$ espaços de Banach com $X \subset Y$. Dizemos que X está compactamente imerso em Y se as seguintes condições são satisfeitas:

i) Existe $C > 0$ constante tal que $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ para todo $x \in X$;

ii) qualquer sequência limitada em X é um pré-compacto em Y.

Denotaremos as imersões contínuas e compactas de X em Y por, respectivamente, $X \hookrightarrow Y$ e $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$.

Teorema 1.4.9 (Imersão de Sobolev). *Sejam Ω um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, Ω de classe C^m e $1 \leq p < \infty$. Então,*

a) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \dfrac{np}{n - mp}$ *se* $mp < n$;

b) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq < \infty$ *se* $mp = n$;

c) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ *se* $n = 1$ *e* $m \geq 1$.

Demonstração. Vide [14] ou [16]. □

Teorema 1.4.10 (Rellich - Kodrachov). *Sejam Ω um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$, de classe C^1 e $1 \leq p < \infty$. Então, as seguintes imersões são compactas:*

a) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \dfrac{np}{n-p}$ *se* $p < n$.

b) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$ *e* $p = n$.

c) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, *onde* $C(\overline{\Omega})$ *é o espaço das funções contínuas em* $\overline{\Omega}$.

Demonstração. Vide [14] ou [16]. □

1.5 Espaços de Sobolev que envolvem tempo

Definição 1.5.1. Seja X um espaço de Banach. Definimos $L^p(0,T;\ X)$ como sendo o espaço de todas as funções mensuráveis $u : [0,\ T] \to X$ tal que $\|u\|_X^p$ é integrável a Lebesgue em $[0,\ T]$ com

$$\left| \begin{array}{ll} \|u\|^p_{L^p(0,T;\ X)} = \int_0^T \|u\|_X^p \, dt < \infty & \text{para } 1 \leq p < \infty \\ \text{e} & \\ \|u\|_{L^p(0,T;\ X)} = \sup\limits_{0 \leq t \leq T} ess\ \|u(t)\| < \infty & \text{se } p = \infty \end{array} \right.$$

Definição 1.5.2. Definimos $C^0(0, T,\ X)$ como sendo o espaço de todas as funções contínuas $u : [0,\ T] \to X$ cuja norma é

$$\|u\|_{C^0(0,T;\ X)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| < \infty.$$

Teorema 1.5.3. *Sejam X e Y espaços de Hilbert tais que $X \hookrightarrow Y$ e $u \in L^p(0,T;\ X)$, $u' \in L^p(0,T;\ Y)$, $1 \leq p < \infty$. Então, $u \in C^0(0,T;\ Y)$.*

Demonstração. Vide [16]. □

Definição 1.5.4. Seja $u \in L^1(0,T;\ X)$. Dizemos que $v \in L^1(0,T;\ X)$ é a derivada fraca de u e escrevemos $u' = v$ se

$$\int_0^T \phi'(t)u(t)\ dt = -\int_0^T \phi(t)v(t)\ dt$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(0,T)$.

Definição 1.5.5. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(0,T;\ X)$ consiste de todos as funções $u \in L^p(0,T;\ X)$ tal que u' existe no sentindo fraco e pertence a $L^p(0,T;\ X)$. Além disso,

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;\ X)} = \left| \begin{array}{ll} \left(\int_0^T \|u(t)\|^p\ dt + \int_0^T \|u'(t)\|^p\ dt\right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \sup\limits_{0\leq t\leq T}\ ess\ (\|u(t)\| + \|u'(t)\|) & \text{se } p = \infty \end{array} \right.$$

Escrevemos $H^1(0,T;\ X) = W^{1,2}(0,T;\ X)$.

Teorema 1.5.6. *Se $u \in W^{1,p}(0,T;\ X)$ para algum $1 \leq p < \infty$, então*

i) $u \in C^0(0,T;\ X)$ *(depois de possivelmente redefinida em um conjunto de medida nula).*

ii) $u(t) = u(s) + \int_s^t u'(\tau)\ d\tau$ *para todo* $0 \leq s \leq T$.

iii) $\max \|u(t)\| \leq C\|u(t)\|_{W^{1,p}(0,T;\ X)}$.

Demonstração. Vide [17]. □

Teorema 1.5.7. *Suponha que $u \in L^2(0,T;\ H_0^1(\Omega))$ com $u' \in L^2(0,T;\ H^{-1}(\Omega))$. Então,*

i) $u \in C^0(0,T;\ L^2(\Omega))$ *(depois de possivelmente redefinida em um conjunto de medida nula).*

ii) O mapeamento $t \longmapsto \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$ *é absolutamente contínuo com*

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = 2\langle u'(t), u(t)\rangle$$

para quase todo $0 \leq t \leq T$.

iii) Temos a estimativa

$$\max \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|u\|_{L^2(0,T;\ H_0^1(\Omega))} + \|u'\|_{L^2(0,T;\ H^{-1}(\Omega))}\right)$$

com C constante dependendo apenas de T.

Demonstração. Vide [17]. □

Definição 1.5.8. Seja V um espaço de Banach e $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em V. Dizemos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge forte para u em V se existe $u \in V$ tal que $\|u_k - u\| \longrightarrow 0$. Nesse caso, denotaremos $u_k \longrightarrow u$.

Definição 1.5.9. Seja V um espaço de Banach e $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em V. Dizemos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fraco para em V se existe $u \in V$ tal que $\langle f, u_k\rangle \longrightarrow \langle f, u\rangle$ para toda $f \in V'$. Nesse caso, denotaremos $u_k \rightharpoonup u$.

Em nossos estudos $V = H_0^1(\Omega)$ e $V' = H^{-1}(\Omega)$.

Definição 1.5.10. Diremos que uma sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de V' converge fraco estrela para u em V', denotaremos por $u \overset{*}{\rightharpoonup} u$, se e somente se $\langle u_k, w\rangle \longrightarrow \langle u, w\rangle$ para todo $w \in V$.

Da definição anterior temos que $u \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;V)$ se e só se $\langle f, u_k\rangle \longrightarrow \langle f, u\rangle$ para todo $w \in L^1(0,T;V)$, isto é,

$$\int_0^T (w(t), u_k(t))\ dt \longrightarrow \int_0^T (w(t), u(t))\ dt$$

Teorema 1.5.11. *(Aubin-Lions) Sejam $B_0,\ B,\ B_1$ espaços de Banach, B_0 e B_1 reflexivos, a imersão de B_0 em B é compacta, B imerso continuamente B_1, $1 < p_0$ e $p_1 < \infty$ e W o espaço*

$$W = \{u \in L^{p_0}(0,T;B_0);\ u' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\}.$$

Então W é um espaço de Banach e a imersão de W e $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Demonstração. Vide [18] □

Observação (Consequência de Aubin-Lions): Se $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T;B_0)$ e $(u'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T;B_1)$, então $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em W. Daí, segue que existe uma subsequência $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ (que denotamos com o mesmo índice) tal que $u_m \longrightarrow u$ forte em $L^2(0,T;B)$.

1.6 Existência e Prolongamento de Soluções de EDO's

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto cujos elementos denotamos por (t,x), onde $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função.

Definição 1.6.1. Dizemos que uma função absolutamente contínua $x : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, definida no intervalo real I tal que $(t, x(t)) \in \Omega$, é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x(t) = f(t, x(t)) & (t,x) \in \Omega \\ x(t_0) = x_0 & t_0 \in I \end{cases}$$

se x satisfaz a equação acima com valor inicial.

Definição 1.6.2. Dizemos que uma função $f(t,x)$, como acima definida, satisfaz as condições de Caratheodory em Ω, se

i) $f(t,x)$ é mensurável na variável t, para todo x fixado;

ii) $f(t,x)$ é contínua na variável x, para todo t fixado;

iii) para todo compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real integrável $m_k(t)$ tal que

$$|f(t,x)| \leq m_k(t) \quad \text{para todo } (t,x) \in \Omega.$$

Teorema 1.6.3. *Sobre o retângulo* $R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t-t_0| < a;\ |x-x_0| < b\}$ *com* $a > 0,\ b > 0$*, consideremos* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *satisfazendo as condições de Caratheodory. Então, existe uma função* $x(t)$ *solução do problema de valor inicial acima definido em algum intervalo* $|t-t_0| < \beta$*,* $\beta > 0$.

Demonstração. Vide [19]. □

Corolário 1.6.3.1. *Se* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *é aberto e satisfaz as condições de Caratheodory em* Ω*, então o problema de valor inicial acima tem solução para todo* $(t_0, x_0) \in \Omega$.

Demonstração. Vide [19]. □

1.7 Resultados Básicos

Proposição 1.7.1. *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Seja* E *um espaço com produto interno e* $x,\ y \in E$*. Então*

$$|(x,y)| \leq |x||y|.$$

Demonstração. Vide [20]. □

Proposição 1.7.2 (Desigualdade de Young)**.** *Se* $a,\ b$ *são números reais não-negativos, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

sempre que $1 < p < \infty$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Demonstração. Vide [16]. □

Proposição 1.7.3 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $1 < p \leq \infty$ *e* q *o seu expoente conjugado, isto é,* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*. Se* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$*, então* $fg \in L^1(\Omega)$ *com*

$$\int_\Omega |fg|\ dx \leq \left(\int_\Omega |f|^p\ dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g|^q\ dx\right)^{1/q}$$

Demonstração. Vide [16] □

Proposição 1.7.4 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Se* $1 \leq p < \infty$ *e* $u,\ v \in L^p(\Omega)$*, então* $\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$.

Demonstração. Vide [14]. □

Teorema 1.7.5 (Representação de Riesz). *Sejam $1 < p < \infty$ satisfazendo $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $\phi \in (L^p(\Omega))'$. Então existe uma única função $u \in L^q(\Omega)$ tal que*

$$\langle \phi,\ u \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)\ dx \qquad \forall\ v \in L^p(\Omega).$$

Além disso,

$$\|u\|_q = \|\phi\|_{(L^p)'}.$$

Demonstração. Vide [16] □

Proposição 1.7.6. *(Desigualdade de Bessel) Seja X um espaço com produto interno e $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência ortonormal em X. Então para todo $x \in X$ tem-se*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(x, \omega_j)|^2 \leq \|x\|^2$$

Demonstração. Vide [21]. □

Teorema 1.7.7. *(Fubini) Seja $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então,*

i) para quase todo x a função $f_x(y)$ definida por $f_x(y) = f(x, y)$ é integrável sobre Ω_2, isto é, $f_x(y) \in L^1(\Omega_2)$;

ii) para quase todo y a função $f_y(x)$ definida por $f_y(x) = f(x, y)$ é integrável sobre Ω_1, isto é, $f_y(x) \in L^1(\Omega_1)$;

iii) $\int_{\Omega_2} f(x, y)\ d\nu(y)$ é integrável sobre Ω_1;

iv) $\int_{\Omega_1} f(x, y)\ d\mu(x)$ é integrável sobre Ω_2;

v) $\int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} f(x, y)\ d\nu(y)\right]\ d\mu(x) = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x, y)\ d(\mu\times\nu) = \int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} f(x, y)\ d\mu(x)\right]\ d\nu(y).$

Demonstração. Vide [20]. □

Teorema 1.7.8. *(Desigualdade de Poincaré) Seja Ω um conjunto limitado e $1 \leq p < \infty$. Então existe uma constante C (dependendo de Ω e p) tal que*

$$\|u\|_p \leq C\|\nabla u\|_p \quad \text{para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Demonstração. Vide [16]. □

Teorema 1.7.9. *(Fórmula de Green) Se $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$, então*

$$-\int_\Omega v(\Delta u)\ dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx - \int_{d\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu}\ d\Gamma$$

Demonstração. Vide [1]. □

Teorema 1.7.10. *(Desigualdade de Gronwall) Seja* $\varphi \in C^0(0,T;\mathbb{R})$, $\varphi(t) \geq 0$ *para todo* $t \in [0,T]$. *Se* φ *satisfaz a condição*

$$\varphi(t) \leq C + \int_0^t \varphi(s)\ ds$$

então

$$\varphi(t) \leq Ce^t \quad \textit{para todo } t \in [0,T]$$

Demonstração. Vide [1]. □

Lema 1.7.11. Se para $t_0 \leq t \leq t_1$, $\varphi(t) \geq 0$ e $\psi(t) \geq 0$ são funções contínuas tais que

$$\varphi(t) \leq C_1 + C_2 \int_{t_0}^t \psi(s)\varphi(s)\ ds$$

então

$$\varphi \leq C_1 \exp(C_2 \int_{t_0}^t \psi(s)\ ds)$$

Demonstração. Vide [1]. □

Capítulo 2

Solução local da equação de Kirchhoff-Carrier

Neste capítulo demonstraremos a existência e unicidade do problema hiperbólico não linear que é dado por

$$\begin{cases} u''(x,t) - M(\|\nabla u(x,t)\|^2, \|u'(x,t)\|^2)\Delta u(x,t) = f(x,t) \quad x \in \Omega\times]0,T[\\ u(x,0) = 0 \quad \text{sobre } \sum = \Gamma\times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{e} \quad u'(x,0) = u_1(x) \quad \text{em } \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e limitado, com fronteira Γ regular e $T > 0$. Além disso, supomos o seguinte:

$$M \in C^1([0,T_0[\times[0,T_0[;\mathbb{R}), \ T_0 > 0 \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Se $s_1 \leq s_2$ e $r_1 \leq r_2$ então

$$M(s_1, r_1) \leq M(s_2, r_2) \tag{2.3}$$

Teremos que $M(0,0) = 0$ e se $s > 0$ então $M(s,r) > 0$ para todo $r \geq 0$. Supomos também que $f \in L^\infty(0,T_0; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$, $u_0 \neq 0 \in D(\Delta^2)$ e $u_1 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

A seguir definiremos constantes que serão utilizadas ao longo da demonstração da existência e unicidade do problema (2.1).

$$\|v(t)\| \leq d_0\|\nabla v(t)\| \leq d_1\|\Delta v(t)\| \leq d_2\|\Delta^{3/2}v(t)\| \leq d_3\|\Delta^2 v(t)\| \tag{2.4}$$

$$2M_1 + 2M_2 = b \tag{2.5}$$

$$a_1 = M\left(\left[\frac{d_2}{d_0}\right]^2 \delta^2, d_1^2\delta^2\right) \tag{2.6}$$

Da continuidade de M, temos que $M(s,r) \longrightarrow 0$ sempre que $(s,r) \longrightarrow (0,0)$ e assim podemos escolher δ pequeno tal que

$$a_1^2 \leq \frac{d_1^2}{6} \tag{2.7}$$

Quando δ satisfizer a desigualdade acima, consideraremos

$$M_1 = \max M_s(s,r),\ 0 \leq s \leq \left(\frac{d_2}{d_0}\right)^2 \delta^2;\ 0 \leq r \leq d_1^2\delta^2; \tag{2.8}$$

$$M_2 = \max M_r(s,r),\ 0 \leq s \leq \left(\frac{d_2}{d_0}\right)^2 \delta^2;\ 0 \leq r \leq d_1^2\delta^2; \tag{2.9}$$

Para os dados iniciais $u_0 \neq 0$, u_1 e f convenientes considerados, temos:

$$\alpha\|\Delta u'(0)\|^2 + \beta \int_0^t \|\Delta f(s)\|^2 ds + \gamma a_1 \|\Delta^2 u(0)\|^2 = C_1 \tag{2.10}$$

onde $\alpha,\ \beta = max\left\{d_1^2, \left(\frac{d_1}{d_0}\right)^2, 1\right\}$ e $\gamma = max\left\{\left(\frac{d_3}{d_1}\right)^2, \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2, \left(\frac{d_3}{d_2}\right)^2\right\}$

Ainda da continuidade de M podemos definir $m_0 > 0$ de modo que $m_0 = M\left(\frac{\|\nabla u_0\|^2}{4}, 0\right)$ e podemos tomar

$$C_0 = \max\left(1, \frac{2b\delta^2}{m_0}\right) \tag{2.11}$$

$$K = \frac{\max\left\{\left(\frac{d_1}{d_0}\right)^2, \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\right\}}{\min\{1, m_0\}} \tag{2.12}$$

$$\overline{T} = \frac{\|\nabla u_0\|}{2\delta} \tag{2.13}$$

$$T_0 = \min\left\{\overline{T}, \frac{1}{b\delta^2}\right\} \tag{2.14}$$

Para o que se segue, definiremos G como sendo o seguinte conjunto

$$G = \{v \in L^\infty(0,T;D(\Delta^{3/2}));\ v' \in L^\infty(0,T;D(\Delta)),\ v'' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$
$$v(0) = u_0 \neq 0,\ v'(0) = u_1 \text{ e } \|v''\|^2 + \|\Delta v'\|^2 + \|\Delta^{3/2}v\|^2 \leq \delta^2 \text{ para todo } t \in [0,T_0]\}$$

Lema 2.0.1. Se $v \in G$ e $\varphi(t) = M(\|\nabla v(t)\|, \|v'(t)\|^2)$, então

i) $0 < m_0 \leq \varphi(t)$ para todo $t \in [0,T_0]$;

ii) $|\varphi'(t)| \leq b\delta^2$

Demonstração. Seja $v \in G$, então

$$\begin{aligned}
\|\nabla v(t)\| - \|\nabla v(0)\| &\leq \|\nabla v(t) - \nabla v(0)\| \\
&= \left| \int_0^t \nabla v'(s)\ ds \right| \\
&\overset{(2.4)}{\leq} \left| \int_0^t \Delta v'(s)\ ds \right| \\
&\leq t\|\Delta v'(t)\| \\
&\overset{v\in G}{\leq} t\delta
\end{aligned}$$

o que implica

$$\|\nabla v_0\| - \delta t \leq \|\nabla v(t)\| \qquad (I)$$

Daí,

$$\begin{aligned}
0 < \frac{\|\nabla v_0\|}{2} &= \|\nabla v_0\| - \frac{\|\nabla v_0\|}{2} \\
&\overset{(2.13)}{\leq} \|\nabla v_0\| - \overline{T}\delta \\
&\overset{t\in[0,\overline{T}]}{\leq} \|\nabla v_0\| - t\delta
\end{aligned}$$

donde por (I)

$$\|\nabla v(t)\|^2 \geq \frac{\|\nabla v_0\|^2}{4}$$

e, portanto,

$$\varphi(t) = M(\|\nabla v(t)\|^2, \|v'(t)\|^2) \geq M\left(\frac{\|\nabla v_0\|^2}{4}, 0\right) = m_0 > 0$$

que demonstra (i).

Estimaremos agora $\varphi'(t)$. Temos

$$\varphi'(t) = 2M_r(\|\nabla v(t)\|^2, \|v'(t)\|^2)(\nabla v(t), \nabla v'(t)) + 2M_s(\|\nabla v(t)\|^2, \|v'(t)\|^2)(v'(t), v''(t))$$

onde r e s representam as derivadas parciais com respeito a primeira e a segunda variável, respectivamente.

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|\varphi'(t)| &\leq |M_r(\|\nabla v\|^2, \|v'\|^2)(\nabla v, \nabla v')| + |M_s(\|\nabla v\|^2, \|v'\|^2)(v', v'')| \\
&\overset{Cauchy-Schwarz}{\leq} |M_r(\|\nabla v\|^2, \|v'\|^2)|\|\nabla v\|\|\nabla v'\| + |M_s(\|\nabla v\|^2, \|v'\|^2)|\|v'\|\|v''\| \\
&\overset{(2.4)}{\leq} |M_r(\|\nabla v\|^2, \|v'\|^2)|\|\Delta^{3/2} v\|\|\Delta v'\| + |M_s(\|\nabla v\|^2, \|v'\|^2)|\|\Delta v'\|\|v''\|
\end{aligned}$$

Donde por (2.5), (2.8), (2.9) e por $v \in G$, obtemos

$$|\varphi'(t)| \leq 2M_1\delta\delta + 2M_2\delta\delta = b\delta^2$$

demonstrando, assim, (ii). $\square$

Seja $v \in G$. Iremos demonstrar a existência e unicidade do seguinte problema

$$\begin{cases} u'' - M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2)\Delta u = f \\ u(0) = u_0 \quad \text{e} \quad u'(0) = u_1 \end{cases} \tag{2.15}$$

Teorema 2.0.2. *(Existência e Unicidade) Sejam $u_0 \neq 0 \in D(\Delta^2)$, $u_1 \in D(\Delta^{3/2})$ e $f \in L^\infty(0, T_0; D(\Delta^{3/2}))$ satisfazendo*

$$C_1 \leq \delta^2 C_2$$

onde

$$C_2 = \min\left\{\frac{1}{3ke}, \frac{1}{6d_1^2 d_2^2 c_4^2}\right\}$$

Então para todo $v \in G$, existe uma única solução $u \in G$ do problema (2.15) tal que

$$\left| \begin{array}{l} u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \\ u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ (u'', w) + M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2)(-\Delta u, w) = (f, w) \end{array} \right.$$

para todo $w \in L^2(0, T; D(\Delta^{3/2}))$.

Demonstração. Para estudar a existência da solução do problema (2.15) consideraremos o seguinte problema variacional associado definido sobre $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Queremos determinar u tal que para todo $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ se tenha

$$\left| \begin{array}{ll} (u'', v) + M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2)(-\Delta u, v) = (f, v) & t > 0 \\ u(0) = u_0(x) & x \in \Omega \\ u'(0) = u_1(x) & x \in \Omega \end{array} \right. \tag{2.16}$$

de modo que

$$\begin{array}{l} u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \\ u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \end{array}$$

Nesse caso, u é chamada de solução forte do sistema (2.16). Para determinar tal solução faremos uso do método de Faedo-Galerkin que consiste em aproximarmos o problema do teorema 2.0.2 por problemas equivalentes em dimensão finita, obtendo um problema mais simples que terá solução assegurada pelo Teorema de Caratheodory.

O teorema espectral para operadores autoadjuntos garante a existência de um sistema ortonormal completo $(\omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ em $L^2(\Omega)$ constituído por autovetores do operador $-\Delta$ que são soluções do problema de Dirichlet

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta \omega_j = \lambda_j \omega_j \\ \omega_j|_\Gamma = 0 \end{array} \right.$$

onde $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ são autovalores correspondentes aos autovetores de $-\Delta$ satisfazendo

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_j \leq \ldots$$

Além disso,

$\left(\dfrac{\omega_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ é um sistema ortonormal completo de $H_0^1(\Omega)$ e

$\left(\dfrac{\omega_j}{\lambda_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ é um sistema ortonormal completo de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Seja $V_m = [\omega_1, \ldots, \omega_m]$ o subespaço gerado pelos m primeiros autovetores do sistema $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Queremos determinar

$$\begin{array}{rcccl} u_m & : & [0, t_m] & \longrightarrow & V_m \\ & & t & \longmapsto & u_m(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\omega_j(x) \end{array}$$

onde g_{jm} são funções reais definidas em algum intervalo $[0, t_m]$ e que satisfazem as condições iniciais do problema aproximado

$$\left| \begin{array}{l} (u''_m(t), \omega_j) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2, \|u'_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t), \nabla\omega_j) = (f, \omega_j) \quad \text{para todo } \omega_j \in V_m \\ u_m(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ u'_m(0) = u_{1m} \longrightarrow u_1 \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \tag{2.17}$$

Por Caratheodory temos que existe uma solução definida em $[0, t_m[$, $0 < t_m < T$ e, portanto, u é solução do problema aproximado no intervalo $[0, t_m[$. Para estender tal solução a todo intervalo $[0, T]$, tomaremos estimativas a priori que demonstrarão a continuidade.

Estimativa I

Multiplicando (2.17) por $g'_{jm}(t)$ e somando de $j = 1$ até m, temos

$$(u''_m(t), \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\omega_j) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2, \|u'_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t), \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\omega_j) = (f, \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\omega_j)$$

$$(u''_m(t), u'_m(t)) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2, \|u'_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t), u'_m(t)) = (f, u'_m(t))$$

da fórmula de Green,

$$(u''_m(t), u'_m(t)) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2, \|u'_m(t)\|^2)(-\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) = (f, u'_m(t))$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u'_m\|^2) + \varphi(t)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla u_m\|^2) = (f, u'_m) \tag{2.18}$$

Como

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t)\|\nabla u_m\|^2) = \varphi'(t)\|\nabla u_m\|^2 + \varphi(t)\frac{d}{dt}(\|\nabla u_m\|^2), \tag{2.19}$$

substituindo (2.19) em (2.18), obtemos

$$\frac{d}{dt}(\|u_m'\|^2 + \varphi(t)\|\nabla u_m\|^2) = 2(f, u_m') + \varphi'(t)\|\nabla u_m\|^2$$

Donde por Cauchy-Schwarz e pela desigualdade $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\|u_m'\|^2 + \varphi(t)\|\nabla u_m\|^2) &\leq \|f\|^2 + \|u_m'\|^2 + 2\|\varphi'(t)\|\|\nabla u_m\|^2 \\ &\overset{(2.4),\ Lema\ (ii)}{\leq} d_1^2\|\Delta f\|^2 + \|u_m'\|^2 + 2b\delta^2\|\nabla u_m\|^2 \quad (2.20)\end{aligned}$$

Integrando (2.20) de 0 a t, temos:

$$\begin{aligned}\|u_m'\|^2 + \varphi(t)\|\nabla u_m\|^2 &\leq \|u_m'(0)\|^2 + \varphi(0)\|\nabla u_m(0)\|^2 + d_1^2\int_0^t \|\Delta f(s)\|^2 ds + \\ &+ \int_0^t (\|u_m'(s)\|^2 + 2b\delta^2\|\nabla u_m(s)\|^2) ds \\ &\overset{(2.4),\ (2.11)}{\leq} d_1^2\|\Delta u_m'(0)\|^2 + \varphi(0)\left(\frac{d_2}{d_0}\right)^2\|\Delta^{3/2}u_m(0)\|^2 + d_1^2\int_0^t \|\Delta f(s)\|^2 ds \\ &+ \max\left(1, \frac{2b\delta^2}{m_0}\right)\int_0^t (\|u_m'(s)\|^2 + m_0\|\nabla u_m(s)\|^2) ds \quad (2.21)\end{aligned}$$

donde por (2.10), da definição de C_0 em (2.11) e pelo item (i) do lema, obtemos

$$\|u_m'\|^2 + m_0\|\nabla u_m\|^2 \leq \|u_m'\|^2 + \varphi(t)\|\nabla u_m\|^2 \leq C_1 + C_0\int_0^t (\|u_m'(s)\|^2 + m_0\|\nabla u_m(s)\|^2) ds$$

e pelo lema de Gronwall, conseguimos

$$\|u_m'(t)\|^2 + m_0\|\nabla u_m(t)\|^2 \leq C_1 e^{C_0 t} \tag{2.22}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}&(u_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega)) \\ &(u_m') \text{ é limitada em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))\end{aligned} \tag{2.23}$$

Estimativas II

Multiplicando (2.17) por $-\Delta g_{jm}'(t)$ e somando de $j = 1$ até m, obtemos

$$(u_m'', -\Delta\sum_{j=1}^m g_{jm}'(t)\omega_j) + M(\|\nabla u_m\|^2, \|u_m'\|^2)(-\Delta u_m, -\Delta\sum_{j=1}^m g_{jm}'(t)\omega_j) = (f, -\Delta\sum_{j=1}^m g_{jm}'(t)\omega_j)$$

que é igual a

$$(u''_m(t), -\Delta u'_m(t)) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2, \|u'_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t), -\Delta u'_m(t)) = (f, -\Delta u'_m(t))$$

donde pela fórmula de Green e condições de fronteira, obtemos

$$(\nabla u''_m, \nabla u'_m) + \varphi(t)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\Delta u_m\|^2) = (f, -\Delta u'_m)$$

Como

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t)\|\Delta u_m\|^2) = \varphi'(t)\|\Delta u_m\|^2 + \varphi(t)\frac{d}{dt}(\|\Delta u_m\|^2)$$

segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla u'_m\|^2 + \varphi(t)\|\Delta u_m\|^2) = (\nabla f, \nabla u'_m) + \varphi'(t)\|\Delta u_m\|^2$$

e pelo uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz e, em seguida, $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$, obtemos

$$\frac{d}{dt}(\|\nabla u'_m\|^2 + \varphi(t)\|\Delta u_m\|^2) \leq \|\nabla f\|^2 + \|\nabla u'_m\| + 2|\varphi'(t)|\|\Delta u_m\|^2 \tag{2.24}$$

Utilizando o item (ii) do lema e integrando (2.24) de 0 a t , conseguimos

$$\begin{aligned}
\|\nabla u'_m\|^2 + \varphi(t)\|\Delta u_m\|^2 &= \|\nabla u'_m(0)\|^2 + \varphi(0)\|\Delta u_m(0)\|^2 + \int_0^t \|\nabla f(s)\|^2 ds + \\
&\quad + \int_0^t (\|\nabla u'_m(s)\|^2 + 2b\delta^2\|\Delta u_m(s)\|^2) \\
&\overset{(2.4)}{\leq} \left(\frac{d_1}{d_0}\right)^2 \|\Delta u'_m(0)\|^2 + \varphi(0)\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \|\Delta^{3/2} u_m(0)\|^2 + \\
&\quad + \left(\frac{d_1}{d_0}\right)^2 \int_0^t \|\nabla f(s)\|^2 ds + \int_0^t (\|\nabla u'_m(s)\|^2 + 2b\delta^2\|\Delta u_m(s)\|^2) ds
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Assim como fizemos na estimativa I, conseguimos de (2.10) e (2.11) em (2.25)

$$\|\nabla u'_m\|^2 + m_0\|\Delta u_m\|^2 \leq C_1 + C_0 \int_0^t (\|\nabla u'_m(s)\|^2 + m_0\|\Delta u_m(s)\|^2) ds$$

e pelo lema de Gronwall segue que

$$\|\nabla u'_m(t)\|^2 + m_0\|\Delta u_m(t)\|^2 \leq C_1 e^{C_0 t}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&(u_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T_0; H^2(\Omega)) \\
&(u'_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega))
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Estimativas III

Multiplicando (2.17) por $\Delta^2 g'_{jm}(t)$ e somando de $j=1$ até m, obtemos

$$(u''_m, \Delta^2 \sum_{j=1}^m g'_{jm}(t)\omega_j) + M(\|\nabla u_m\|^2, \|u'_m\|^2)(-\Delta u_m, \Delta^2 \sum_{j=1}^m g'_{jm}(t)\omega_j) = (f, \Delta^2 \sum_{j=1}^m g'_{jm}(t)\omega_j)$$

que é igual a

$$(u''_m(t), \Delta^2 u'_m(t)) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2, \|u'_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t), \Delta^2 u'_m(t)) = (f, \Delta^2 u'_m(t))$$

donde pela fórmula de Green, condições de fronteira e propriedades do operador Δ, conseguimos

$$(\Delta u''_m(t), \Delta u'_m(t)) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2, \|u'_m(t)\|^2)(\Delta^{1/2} u_m(t), \Delta^{1/2}(\Delta^2 u'_m(t))) = (\Delta f, \Delta u'_m(t))$$

isto é,

$$(\Delta u''_m(t), \Delta u'_m(t)) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2, \|u'_m(t)\|^2)(\Delta^{3/2} u_m(t), \Delta^{3/2} u'_m(t)) = (\Delta f, \Delta u'_m(t)) \tag{2.27}$$

Como

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t)\|\Delta^{3/2} u_m(t)\|^2) = \varphi(t)\frac{d}{dt}(\|\Delta^{3/2} u_m(t)\|^2) + \varphi'(t)\|\Delta^{3/2} u_m(t)\|^2 \tag{2.28}$$

De (2.27) e (2.28) segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\Delta u'_m\|^2 + \varphi(t)\|\Delta^{3/2} u_m\|^2) = \varphi(t)\frac{d}{dt}(\|\Delta^{3/2} u_m(t)\|^2) + \frac{1}{2}\varphi'(t)\|\Delta^{3/2} u_m(t)\|^2$$

e pelo uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz, em seguida, $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$, lema (ii) e integrando o resultado de 0 a t, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\Delta u'_m(t)\|^2 + \varphi(t)\|\Delta^{3/2} u_m(t)\|^2 \quad &\leq \quad \|\Delta u'_m(0)\|^2 + \varphi(0)\|\Delta^{3/2} u_m(0)\|^2 + \int_0^t \|\Delta f\|^2 ds + \\
&\quad + \int_0^t (\|\Delta u'_m(s)\|^2 + 2b\delta^2\|\Delta^{3/2} u_m(s)\|^2) ds \\
&\overset{(2.4),(2.11)}{\leq} \quad \|\Delta u'_m(0)\|^2 + \left(\frac{d_3}{d_2}\right)^2 \|\Delta^2 u(0)\|^2 + \int_0^t \|\Delta f\|^2 ds + \\
&\quad + C_0 \int_0^t (\|\Delta u'_m(s)\|^2 + m_0\|\Delta^{3/2} u_m(s)\|^2) ds \\
&\overset{(2.10)}{=} \quad C_1 + C_0 \int_0^t (\|\Delta u'_m(s)\|^2 + m_0\|\Delta^{3/2} u_m(s)\|^2) ds
\end{aligned}$$

De onde pelo item (i) do lema, segue

$$\|\Delta u'_m(t)\|^2 + m_0\|\Delta^{3/2} u_m(t)\|^2 \leq C_1 + C_0 \int_0^t (\|\Delta u'_m(s)\|^2 + m_0\|\Delta^{3/2} u_m(s)\|^2) ds$$

e pelo lema de Gronwall, conseguimos

$$\|\Delta u_m'(t)\|^2 + m_0\|\Delta^{3/2} u_m(t)\|^2 \leq C_1 e^{C_0 t}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &(u_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T_0; D(\Delta^{3/2})) \\ &(u_m') \text{ é limitada em } L^\infty(0,T_0; H^2(\Omega)) \end{aligned} \tag{2.29}$$

Estimativa IV

Iremos mostrar agora a limitação de u_m''. Para tal, definamos a projeção ortogonal $P : H \longrightarrow V_m$ dada por $P_m(u) = \sum_{j=1}^{m}(u,\omega_j)\omega_j = u$ para todo $u \in V_m$ e tal que $\|P\| \leq 1$.

Lembre que nosso problema aproximado é

$$(u_m''(t),\omega_j) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2, \|u_m'(t)\|^2)(-\Delta u_m(t),\omega_j) = (f,\omega_j)$$

Tomando $\omega_j = \Delta^{1/2}\omega_j$, multiplicando por ω_j e somando de $j=1$ até m, obtemos

$$\sum_{j=1}^{m}(\Delta^{1/2}u_m''(t),\omega_j)\omega_j + \varphi(t)\sum_{j=1}^{m}(-\Delta^{3/2}u_m(t),\omega_j)\omega_j = \sum_{j=1}^{m}(\Delta^{1/2}f,\omega_j)\omega_j$$

que é igual

$$P_m(\Delta^{1/2}u_m'') - \varphi(t)P_m(\Delta^{3/2}u_m) = P(\Delta^{1/2}f)$$

que é equivalente a

$$\Delta^{1/2}u_m'' - \varphi(t)\Delta^{3/2}u_m = P_m(\Delta^{1/2}f)$$

o que implica

$$\|\Delta^{1/2}u_m''\| = \|\nabla u_m''\| \leq \underbrace{|\varphi(t)|\|\Delta^{3/2}u_m\|}_{\text{limitada}} + \underbrace{\|P_m(\Delta^{1/2}f)\|}_{\leq 1}$$

donde a limitação segue de (2.6) e da definição do conjunto G. Assim, de (2.4) conseguimos uma constante conveniente B tal que

$$\|u_m''\| \leq B$$

Logo

$$(u_m'') \text{ é limitada em } L^\infty(0,T_0; H_0^1(\Omega)) \tag{2.30}$$

Passagem ao limite

Das estimativas I, II, III e IV, obtemos

$$\begin{aligned} &(u_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T_0; D(\Delta^{3/2}) \cap (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))) \\ &(u_m') \text{ é limitada em } L^\infty(0,T_0; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \\ &(u_m'') \text{ é limitada em } L^\infty(0,T_0; H_0^1(\Omega)) \end{aligned} \tag{2.31}$$

e pelas imersões compactas

$$D(\Delta^{3/2}) \overset{c}{\hookrightarrow} H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$$

existe $u \in L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega))$ tal que

$$\begin{aligned} u_m &\longrightarrow u \text{ forte em } C(0, T_0; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \\ u'_m &\longrightarrow u' \text{ forte em } C(0, T_0; H_0^1(\Omega)) \\ u''_m &\longrightarrow u'' \ \text{ forte em } C(0, T_0; L^2(\Omega)) \end{aligned} \tag{2.32}$$

Além disso, das convergências anteriores, temos

$$\begin{aligned} \|\Delta u_m\|^2 &\longrightarrow \|\Delta u\|^2 \text{ forte em } L^2(0, T_0) \\ \|\nabla u'_m\|^2 &\longrightarrow \|\nabla u'\|^2 \text{ forte em } L^2(0, T_0) \end{aligned} \tag{2.33}$$

Portanto, passando o limite em (2.17), segue que

$$(u''(t), \omega) + M(\|\nabla u(t)\|^2, \|u'(t)\|^2)(-\Delta u(t), \omega) = (f(t), \omega) \text{ para todo } \omega \in L^2(0, T; D(\Delta^{3/2})) \tag{2.34}$$

Condições Iniciais

Primeiramente mostraremos que $u(0) = u_0$. De (2.33), temos

$$u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))$$

isto é,

$$(u'_m, \omega) \longrightarrow (u', \omega) \quad \text{para todo } \omega \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$$

Tomando $\omega = v\theta(t),\ v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \overset{c}{\hookrightarrow} H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$ e $\theta \in L^1(0, T)$ de modo que $\theta(T) = 0$ e $\theta(0) = 1$, obtemos pela integração de 0 a T

$$\int_0^T (u'_m, v)\theta(t)\ dt \longrightarrow \int_0^T (u', v)\theta(t)\ dt \tag{2.35}$$

e integrando por partes, conseguimos

$$-(u_m(0), v) - \int_0^T (u_m, v)\theta'(t)\ dt \longrightarrow -(u(0), v) - \int_0^T (u, v)\theta'(t)\ dt \tag{2.36}$$

Ora, $u_m(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0$ em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, logo segue que

$$-(u_0, v) = -(u(0), v) \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

Assim concluímos que $u(0) = u_0$.

Por conseguinte, mostraremos que $u'(0) = u_1$. Seja $\theta \in C^1(0, T)$ tal que $\theta(T) = 0$ e $\theta(0) = 1$. Multiplicando a soma da equação aproximada (2.17) por θ e integrando em 0 a

T, temos

$$\int_0^T (u_m''(t),\omega)\theta(t)\ dt + \int_0^T M(\|\nabla u_m(t)\|^2, \|u_m'(t)\|^2)(\nabla u_m(t), \nabla\omega)\theta(t)\ dt = \int_0^T (f,\omega)\theta(t)\ dt$$

Integrando por partes, obtemos

$$-(u_m'(0),\omega) - \int_0^T (u_m'(t),\omega)\theta'(t)\ dt + \int_0^T M(\|\nabla u_m(t)\|^2, \|u_m'(t)\|^2)(\nabla u_m(t), \nabla\omega)\theta(t)\ dt =$$
$$= \int_0^T (f,\omega)\theta(t)\ dt$$

e fazendo $m \longrightarrow \infty$, temos

$$-(u'(0),\omega) - \int_0^T (u'(t),\omega)\theta'(t)\ dt + \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|^2, \|u'(t)\|^2)(\nabla u(t), \nabla\omega)\theta(t)\ dt =$$
$$= \int_0^T (f,\omega)\theta(t)\ dt \tag{2.37}$$

Por outro lado, multiplicando (2.34) por $\theta \in C^1(0,T)$ de modo que $\theta(T) = 0$ e $\theta(0) = 1$ e integrando de 0 a T, obtemos

$$\int_0^T (u''(t),\omega)\theta(t)\ dt + \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|^2, \|u'(t)\|^2)(-\Delta u(t), \omega)\theta(t)\ dt = \int_0^T (f(t),\omega)\theta(t)\ dt$$

Integrando, agora, por partes e fazendo uso da fórmula de Green, temos

$$-(u_1,\omega) - \int_0^T (u'(t),\omega)\theta'(t)\ dt + \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|^2, \|u'(t)\|^2)(\nabla u(t), \nabla\omega)\theta(t)\ dt =$$
$$= \int_0^T (f(t),\omega)\theta(t)\ dt \tag{2.38}$$

e de (2.37) e (2.38) segue que

$$(u'(0),\omega) = (u_1,\omega) \quad \text{para todo } \omega \in H_0^1(\Omega)$$

Logo, $u'(0) = u_1$.

Unicidade

Sejam u e $\overline{u}$ de (2.1), então

$$\left| \begin{array}{l} u'' - M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2)\Delta u = f(t) \\ \overline{u}'' - M(\|\nabla \overline{u}\|^2, \|\overline{u}'\|^2)\Delta \overline{u} = f(t) \end{array} \right.$$

Seja $\psi = u - \overline{u}$, então

$$\psi'' - M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2)\Delta u + M(\|\nabla \overline{u}\|^2, \|\overline{u}'\|^2)\Delta \overline{u} = 0$$

onde $\psi(0) = u(0) - \overline{u}(0) = u_0 - u_0 = 0$ e $\psi'(0) = u'(0) - \overline{u}'(0) = u_1 - u_1 = 0$. Então, somando e subtraindo o termo $M(\|\nabla \overline{u}\|^2, \|\overline{u}'\|^2)\Delta u$, obtemos

$$\psi'' + M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2)(-\Delta\psi) = \Delta u[M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2) - M(\|\nabla \overline{u}\|^2, \|\overline{u}'\|^2)]$$

Multiplicando acima por ψ', temos

$$(\psi'', \psi') + M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2)(-\Delta\psi, \psi') = (\Delta u, \psi')[M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2) - M(\|\nabla \overline{u}\|^2, \|\overline{u}'\|^2)]$$

e pela fórmula de Green e condições de fronteira, conseguimos

$$(\psi'', \psi') + M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2)(\nabla\psi, \nabla\psi') = (\Delta u, \psi')[M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2) - M(\|\nabla \overline{u}\|^2, \|\overline{u}'\|^2)]$$

que é igual a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\psi'\|^2) + M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla\psi\|^2) = (\Delta u, \psi')[M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2) - M(\|\nabla \overline{u}\|^2, \|\overline{u}'\|^2)]$$

Note que

$$\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2)\|\nabla\psi\|^2) = \|\nabla\psi\|^2\frac{d}{dt}[M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2)] + M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2)\frac{d}{dt}(\|\nabla\psi\|^2)$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\psi'\|^2 + M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2)\|\nabla\psi\|^2) &= (\Delta u, \psi')[M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2) - M(\|\nabla \overline{u}\|^2, \|\overline{u}'\|^2)] + \\ &+ \|\nabla\psi\|^2\frac{d}{dt}[M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2)]\end{aligned}$$

E pelo uso das desigualdades de Cauchy-Schwarz e $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$, e do item (ii) do lema conseguimos uma constante conveniente tal que

$$\frac{d}{dt}(\|\psi'\|^2 + M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2)\|\nabla\psi\|^2) \leq C_2\|\psi'\|^2 + 2b\delta^2\|\nabla\psi\|^2$$

por conseguinte, tomando $C_3 = \max\left\{C_2, \dfrac{2b\delta^2}{m_0}\right\}$, segue da integração em 0 a t que

$$\begin{aligned}\|\psi'(t)\|^2 + M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2)\|\nabla\psi(t)\|^2) &\leq \|\psi'(0)\|^2 + M(\|\nabla u(0)\|^2, \|u'(0)\|^2)\|\nabla\psi(0)\|^2) + \\ &+ C_3\int_0^t (\|\psi'(s)\|^2 + m_0\|\nabla\psi(s)\|^2)\, ds\end{aligned}$$

e pelo item (i) do lema aplicando a desigualdade acima, obtemos

$$\|\psi'(t)\|^2 + m_0\|\nabla\psi(t)\|^2) \leq 0 + C_3\int_0^t (\|\psi'(s)\|^2 + m_0\|\nabla\psi(s)\|^2)\, ds$$

Daí, pelo lema de Gronwall

$$\|\psi'(t)\|^2 + m_0\|\nabla\psi(t)\|^2 \leq 0e^{C_3 t} = 0$$

Logo, $u = \overline{u}$.

$\square$

Capítulo 3

Resultado Principal

3.1 Existência, Unicidade e Decaimento Exponencial

Neste capítulo mostraremos que existe uma solução $u(x,t)$ para a equação de onda não linear

$$u''(t) - M(\|\nabla u(t)\|^2)\Delta u(t) + \delta u'(t) = 0 \quad \text{em } Q = \Omega \times [0,t] \tag{3.1}$$

com condições de fronteira

$$u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma \times [0,\infty[\tag{3.2}$$

e condições iniciais

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{e} \quad u'(x,0) = u_1(x) \quad \text{em } \Omega \tag{3.3}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e limitado com fronteira Γ, δ é um número real positivo e $M(s)$ é uma função contínua em $[0,\infty[$ tal que

$$M(s) \geq \beta + ks \qquad \beta,\ k > 0 \tag{3.4}$$

$$M'(s) \geq 0 \tag{3.5}$$

Sejam $\overline{M}(\sigma)$ e $E(t)$ definidas da seguinte forma

$$\overline{M}(\sigma) = \int_0^\sigma M(s)\ ds \tag{3.6}$$

$$E(t) = \frac{1}{2}[\|u'(t)\|^2 + \overline{M}(\|\nabla u(t)\|^2)] \tag{3.7}$$

Se $s_0 = \dfrac{2E(0)}{\beta}$, ponhamos

$$B = \max_{0 \leq s \leq s_0} M'(s) \qquad \text{e} \qquad B_1 = \max_{0 \leq s \leq s_0} M(s) \tag{3.8}$$

Seja $v \in H_0^1(\Omega)$. Multiplicando (3.1) por v, integrando em Ω e usando a fórmula de Green junto das condições de fronteira, obtemos

$$(u''(t), v) + M(\|\nabla u(t)\|^2)(\nabla u(t), \nabla v) + \delta(u'(t), v) = 0 \tag{3.9}$$

Diante dessa forma variacional podemos definir o que é uma solução fraca para o problema (3.1)-(3.3).

Definição 3.1.1. (Solução fraca) Seja $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$. Dizemos que $u : \Omega \times [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ é solução fraca do problema (3.1)-(3.3) quando

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad u'' \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)) \tag{3.10}$$

satisfazendo a equação

$$\frac{d}{dt}(u'(t), v) + M(\|\nabla u(t)\|^2)(\nabla u(t), \nabla v) + \delta(u'(t), v) = 0 \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.11}$$

no sentido de $D'(0, T)$ e com condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x) \qquad e \qquad u'(x, 0) = u_1(x) \quad \text{em } \Omega \tag{3.12}$$

Além disso, conseguimos definir também solução forte para o problema (3.1)-(3.3). É o que segue:

Definição 3.1.2. (Solução forte) Seja $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ e

$$\frac{B}{\sqrt{k}} \left[\frac{\|\nabla u_1\|^2}{\beta} + \|\Delta u_0\|^2 \right]^{1/2} < \delta. \tag{3.13}$$

Dizemos que $u : \Omega \times [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ é solução forte do problema (3.1)-(3.3) quando

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \quad u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \tag{3.14}$$

satisfazendo a equação

$$u'' - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + \delta u' = 0 \tag{3.15}$$

e condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x) \qquad \text{e} \qquad u'(x, 0) = u_1(x) \quad \text{em } \Omega \tag{3.16}$$

Diante de todas as hipóteses acima podemos formular nosso resultado principal. É o que se segue:

Teorema 3.1.3. *(Existência, unicidade e decaimento exponencial) Dados $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, então existe uma solução fraca para o problema (3.1)-(3.3). Além disso, se*

$$\frac{B}{\sqrt{k}}\left[\frac{\|\nabla u_1\|^2}{\beta} + \|\Delta u_0\|^2\right]^{1/2} < \delta, \tag{3.17}$$

então existe uma única função u tal que para todo $T > 0$

a) $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$, $\quad u' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, $\quad u'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$;

b) u é solução em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ de

$$u''(t) - M(\|\nabla u(t)\|^2)\Delta u(t) + \delta u'(t) = 0 \tag{3.18}$$

c) u satisfaz as condições iniciais

$$u(0) = u_0 \quad ; \quad u'(0) = u_1 \tag{3.19}$$

d) u satisfaz as condições de energia

$$E(t) + 2\delta\int_0^t \|u(s)\|^2 ds = E(0) \quad \textit{para todo } t \geq 0 \tag{3.20}$$

e) $E(t)$ satisfaz

$$E(t) \leq NE(0)e^{-\mu t}. \tag{3.21}$$

Demonstração. Faremos uso do método de Faedo-Galerkin, ou seja, aproximaremos o problema do Teorema 2.1 por problemas equivalentes em dimensão finita.

Sabe-se que $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável. Então possui uma base de Hilbert enumerável, isto é, existe uma sequência de autovetores $(\omega_j) \in H_0^1(\Omega)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, cujos m primeiros autovetores são linearmente independente e as combinações lineares de ω_j são densas em $H_0^1(\Omega)$. Consideremos o conjunto das autofuções $\{\omega_1,\ \omega_2, \ldots,\ \omega_n, \ldots\}$ do operador $-\Delta$ que é uma base de $H_0^1(\Omega)$ nas condições anteriores.

Seja $V_m = [\omega_1,\ \omega_2, \ldots,\ \omega_m]$ o subespaço de $H_0^1(\Omega)$ gerado pelos primeiros autovetores do operador $-\Delta$ com autovalores λ_j associado ao vetor ω_j. Nosso problema aproximado é encontrar uma função

$$u_m(x,t) = \sum_{j=1}^m g_j(t)\omega_j(x) \quad \in \quad V_m$$

para todo $t \in [0, t_m]$, satisfazendo

$$(u_m''(t), v) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t), \nabla v) + \delta(u_m'(t), v) = 0 \tag{3.22}$$

$$u_m(x,0) = u_{0m}(x), \quad \text{onde} \quad u_{0m}(x) = \sum_{j=1}^m (u_0, \omega_j)\omega_j(x) \tag{3.23}$$

$$u'_m(x,0) = u_{1m}(x), \quad \text{onde} \quad u_{1m}(x) = \sum_{j=1}^{m}(u_1, \omega_j)\omega_j(x) \tag{3.24}$$

De (3.23) e (3.24) segue imediatamente que

$$u_m(x,0) \longrightarrow u_0(x) \quad \text{fortemente em} \quad H_0^1(\Omega) \tag{3.25}$$

$$u'_m(x,0) \longrightarrow u_1(x) \quad \text{fortemente em} \quad L^2(\Omega) \tag{3.26}$$

O sistema de equações diferenciais (3.22)–(3.24) possui uma solução definida sobre $[0, t_m[$. Tal solução é única no intervalo maximal $[0, T[$. Esse resultado encontra-se em [22].

Pelas estimativas a priori poderemos estender a solução aproximada para todo $t \geq 0$ e obteremos subsequências cujo limite é candidato a solução do nosso problema (3.1)–(3.3).

Estimativas I

Como o problema aproximado (3.22)–(3.24) vale para todo $v \in V_m$, tomemos $v = u'_m(t)$, pois

$$u'_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\omega_j(x) \quad \in \quad V_m$$

Daí, temos:

$$(u''_m(t), u'_m(t)) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) + \delta(u'_m(t), u'_m(t)) = 0. \tag{3.27}$$

Lembrando que $(u_m(t), u'_m(t)) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2$ e $(\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}(\|\nabla u_m(t)\|^2)$, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2 + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla u_m(t)\|^2) + \delta\|u'_m(t)\|^2 = 0. \tag{3.28}$$

Como $\overline{M}$ é a primitiva de M e a soma das derivadas é a derivada da soma, conseguimos

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2 + \frac{d}{dt}(\overline{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2))\right) + \delta\|u'_m(t)\|^2 = 0 \tag{3.29}$$

Seja

$$E_m(t) = \frac{1}{2}(\|u'_m(t)\|^2 + \overline{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2)) \tag{3.30}$$

Substituindo (3.30) em (3.29), temos

$$\frac{d}{dt}(E_m(t)) + \delta\|u'_m(t)\|^2 = 0 \tag{3.31}$$

donde por integração de 0 a t, $t \in [0, t_m[$, obtemos

$$E_m(t) + 2\delta\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds = 2E_m(0) \tag{3.32}$$

E como a energia inicial do sistema satisfaz $E_m(0) \leq E(0)$, segue que

$$E_m(t) + 2\delta \int_0^t \|u_m'(t)\|^2 dt \leq 2E(0) \quad \text{para todo } t \in [0, t_m[. \tag{3.33}$$

Da limitação anterior concluímos que $t_m = \infty$ donde fazemos uso das ideias de Sattinger e Payne em [23] e [24], respectivamente.

Estimativas II

Faremos uso da segunda estimativa para provar a existência da solução forte do problema (3.1)–(3.3). Seja $v = -\Delta u_m'(t)$. Então, substituindo em (3.22), temos

$$(u_m''(t), -\Delta u_m'(t)) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t), \nabla(-\Delta u_m'(t))) + \delta(u_m'(t), -\Delta u_m'(t)) = 0 \tag{3.34}$$

donde pela Fórmula de Green e as condições de fronteira

$$(\nabla u_m''(t), \nabla u_m'(t)) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\Delta u_m(t), \Delta u_m'(t)) + \delta(\nabla u_m'(t), \nabla u_m'(t)) \tag{3.35}$$

de onde segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla u_m'(t)\|^2) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\Delta u_m(t)\|^2) + \delta\|\nabla u_m'(t)\|^2 = 0. \tag{3.36}$$

Note que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(M(\|\nabla u_m\|^2)\|\Delta u_m\|^2\right) = \frac{1}{2}\|\Delta u_m\|^2\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u_m\|^2)) + \frac{1}{2}M(\|\nabla u_m\|^2)\frac{d}{dt}(\|\Delta u_m\|^2). \tag{3.37}$$

Adicionando e subtraindo o termo $\frac{1}{2}\|\Delta u_m\|^2\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u_m\|^2))$ em (3.36) e fazendo uso de (3.37), temos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u_m'\|^2 + M(\|\nabla u_m\|^2)\|\Delta u_m\|^2\right) + \delta\|\nabla u_m'\|^2 = \frac{1}{2}\|\Delta u_m\|^2\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u_m\|^2)) \tag{3.38}$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\|\nabla u_m'\|^2}{M(\|\nabla u_m\|^2)} + \|\Delta u_m\|^2\right)M(\|\nabla u_m\|^2)\right] + \delta\|\nabla u_m'\|^2 = \frac{1}{2}\|\Delta u_m\|^2\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u_m\|^2)). \tag{3.39}$$

Seja

$$y_m(t) = \frac{\|\nabla u_m'\|^2}{M(\|\nabla u_m\|^2)} + \|\Delta u_m\|^2 \tag{3.40}$$

e pela substituição de (3.40) em (3.39), conseguimos

$$\frac{d}{dt}(y_m M(\|\nabla u_m\|^2)) + 2\delta\|\nabla u_m'\|^2 = \|\Delta u_m\|^2\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u_m\|^2)). \tag{3.41}$$

Como

$$\frac{d}{dt}(y_m M(\|\nabla u_m\|^2)) = M(\|\nabla u_m\|^2)\frac{d}{dt}(y_m) + y_m\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u_m\|^2)) \tag{3.42}$$

então, substituindo (3.42) em (3.41), obtemos

$$M(\|\nabla u_m\|^2)\frac{d}{dt}(y_m) = -y_m\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u_m\|^2)) + \|\Delta u_m\|^2\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u_m\|^2)) - 2\delta\|\nabla u_m'\|^2 \tag{3.43}$$

e pela substituição de (3.40) em (3.43), segue que

$$M(\|\nabla u_m\|^2)\frac{d}{dt}(y_m) = -\frac{\|\nabla u_m'\|^2}{M(\|\nabla u_m\|^2)}\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u_m\|^2)) - 2\delta\|\nabla u_m'\|^2. \tag{3.44}$$

Fazendo

$$\gamma_m(t) = \frac{\left|\frac{d}{dt}M(\|\nabla u_m\|^2)\right|}{M(\|\nabla u_m\|^2)} \tag{3.45}$$

obtemos

$$\frac{d}{dt}(y_m(t)) \leq (\gamma_m - 2\delta)\frac{\|\nabla u_m'\|^2}{M(\|\nabla u_m\|^2)} \tag{3.46}$$

Agora iremos estimar $\gamma_m(t)$. Note que

$$(\|\nabla u_m\|^2)^{1/2} \leq \left(\frac{\beta}{k} + \frac{k}{k}\|\nabla u_m\|^2\right)^{1/2} \leq \left(\frac{M(\|\nabla u_m\|^2)}{k}\right)^{1/2}, \tag{3.47}$$

pois $\beta,\ k > 0$ e $M(s) \geq \beta + ks$ por hipótese. Além disso,

$$\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u_m\|^2)) = M'(\|\nabla u_m\|^2)2(\nabla u_m, \nabla u_m'). \tag{3.48}$$

Lembrando que $B = \max\limits_{0\leq s\leq s_0} M'(s)$ e da desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que

$$\left|\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u_m\|^2))\right| \leq 2B(\|\nabla u_m\|^2)^{1/2}(\|\nabla u_m'\|^2)^{1/2}. \tag{3.49}$$

De (3.47) e (3.49), obtemos que

$$\left|\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u_m\|^2))\right| \leq 2B\left(\frac{M(\|\nabla u_m\|^2)}{k}\right)^{1/2}(\|\nabla u_m'\|^2)^{1/2}. \tag{3.50}$$

Lembrando que $y_m(t) = \dfrac{\|\nabla u_m'\|^2}{M(\|\nabla u_m\|^2)} + \|\Delta u_m\|^2$, então

$$M(\|\nabla u_m\|^2)y_m(t) \geq \|\nabla u_m'\|^2 \tag{3.51}$$

e substituindo (3.51) em (3.50), obtemos

$$\left|\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u_m\|^2))\right| \leq 2B\left(\frac{M(\|\nabla u_m\|^2)}{k})^{1/2}\right)[M(\|\nabla u_m\|^2)y_m(t)]^{1/2}. \tag{3.52}$$

Agora multiplicando (3.52) por $\dfrac{1}{M(\|\nabla u_m\|^2)}$ e lembrando que $\gamma_m(t) = \dfrac{\left|\frac{d}{dt}M(\|\nabla u_m\|^2)\right|}{M(\|\nabla u_m\|^2)}$, obtemos

$$\gamma_m(t) \leq 2B\left(\frac{y_m(t)}{k}\right)^{1/2}. \tag{3.53}$$

Mostraremos agora que

$$\gamma_m(t) - 2\delta < 0 \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{3.54}$$

Quando $t = 0$, temos por (3.17), (3.23) e (3.24)

$$2B\left(\frac{y_m(0)}{k}\right)^{1/2} \leq \frac{2B}{\sqrt{k}}\left[\frac{\|\nabla u_1\|^2}{\beta} + \|\Delta u_0\|^2\right]^{1/2} < 2\delta \tag{3.55}$$

daí, temos

$$\gamma_m(0) \leq 2B\left(\frac{y_m(0)}{k}\right)^{1/2} < 2\delta. \tag{3.56}$$

Suponhamos, por absurdo, que (3.54) não é válida para todo $t \geq 0$. Então, por (3.56) e pela continuidade de $\gamma_m(t)$, existe $t_0 > 0$ tal que

$$\begin{cases} \gamma_m(t) \leq 2\delta & \text{para todo } 0 \leq t < t_0 \\ \gamma_m(t_0) = 2\delta. \end{cases} \tag{3.57}$$

De (3.46) e (3.57), obtemos que integrando em $[0, t_0]$

$$\int_0^{t_0} \frac{d}{ds}(y_m(s))\, ds = y_m(t_0) - y_m(0) \leq 0. \tag{3.58}$$

De (3.53) e (3.55), temos que

$$\gamma_m(t_0) \leq 2\delta \tag{3.59}$$

que é um absurdo por (3.57). Portanto, (3.54) é verdadeira.

Então de (3.46), (3.54) e (3.56) em (3.58), obtemos

$$y_m(t) \leq y_m(0) < \frac{\delta^2}{B^2}k \quad \text{para todo } \ t \geq 0 \tag{3.60}$$

ou seja,

$$\frac{\|\nabla u_m'\|^2}{M(\|\nabla u_m'\|^2)} + \|\Delta u_m\|^2 \leq k\left(\frac{\delta}{B}\right)^2. \tag{3.61}$$

Como $B_1 = \max\limits_{0 \leq s \leq s_0} M(s)$, segue que

$$M(\|\nabla u_m\|^2) \leq B_1 \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{3.62}$$

Então por (3.40), (3.60) e (3.62), temos:

$$\|\nabla u_m'\|^2 \leq B_1 k\left(\frac{\delta}{B}\right)^2 \tag{3.63}$$

e, também,

$$\|\Delta u_m\|^2 \leq k\left(\frac{\delta}{B}\right)^2. \tag{3.64}$$

Estimativas III

Multiplicando (3.22) por $v = u''_m(t)$, temos

$$(u''_m(t), u''_m(t)) - M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\Delta u_m(t), u''_m(t)) + \delta(u'_m(t), u''_m(t)) = 0 \tag{3.65}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}
\|u''_m(t)\|^2 &= (M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\Delta u_m(t) - \delta u'_m(t), u''_m(t)) \\
&\leq |(M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\Delta u_m(t) - \delta u'_m(t), u''_m(t))| \\
&\leq \|(M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\Delta u_m(t) - \delta u'_m(t)\|\|u''_m(t)\| \\
&\leq (\|(M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\Delta u_m(t)\| + \|\delta u'_m(t)\|)\|u''_m(t)\| \\
&\leq \frac{(\|(M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\Delta u_m(t)\| + \|\delta u'_m(t)\|)^2}{2} + \frac{\|u''_m(t)\|^2}{2} \qquad (3.66)
\end{aligned}$$

onde as desigualdades decorrem da triangular, de Cauchy-Schwarz e de $ab \leq \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$.

Daí, temos

$$\|u''_m(t)\| \leq \|M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\Delta u_m(t)\| + \delta\|u'_m(t)\|$$

e de (3.32), (3.62) e (3.64) segue que

$$\|u''_m(t)\| \leq \delta\sqrt{2E(0)} + B_1\left(\frac{\delta}{B}\right)\sqrt{k}. \tag{3.67}$$

Passagem ao Limite

Segue de (3.32), (3.63), (3.64) e (3.67) que (u_m) é limitada em $L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))$, (u'_m) é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e (u''_m) é limitada em $L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Então existem subsequências que denotaremos com o mesmo índice m tais que

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)) \tag{3.68}$$

$$u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} \chi \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.69}$$

$$u''_m \overset{*}{\rightharpoonup} u'' \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{3.70}$$

Vamos mostrar que $\chi = u'$. Com efeito, para todo $\varphi \in L^1(0,T;H^1_0(\Omega))$ e por (3.68), obtemos

$$\int_0^T (u_m, \varphi)\ dt \longrightarrow \int_0^T (u, \varphi)\ dt. \tag{3.71}$$

Então, tomando $\varphi = v\phi'(t)$ com $v \in H_0^1(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty(0,T)$, temos:

$$\int_0^T (u_m, v)\phi' \, dt \longrightarrow \int_0^T (u,v)\phi' \, dt. \tag{3.72}$$

Por outro lado, de (3.69), obtemos que

$$\int_0^T (u_m', \varphi) \, dt \longrightarrow \int_0^T (\chi, \varphi) \, dt \quad \text{para todo} \quad \varphi \in L^1(0,T; H_0^1(\Omega)) \tag{3.73}$$

e tomando $\varphi = v\phi$, $v \in H_0^1(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty(0,T)$, conseguimos

$$\int_0^T (u_m', v)\phi \, dt \longrightarrow \int_0^T (\chi, v)\phi \, dt \tag{3.74}$$

Tomando o limite quando $m \longrightarrow \infty$ e de (3.73) e (3.74),

$$\int_0^T (u,v)\phi' \, dt = -\int_0^T (\chi, v)\phi \, dt \tag{3.75}$$

ou seja,

$$\int_0^T (u\phi', v) \, dt = -\int_0^T (\chi\phi, v) \, dt \tag{3.76}$$

Pelo Teorema de Fubini, temos

$$\left(\int_0^T u\phi' \, dt, v\right) = \left(-\int_0^T \chi\phi \, dt, v\right) \quad \text{para todo} \quad \phi \in L^1(0,T; H_0^1(\Omega)) \tag{3.77}$$

Então pela densidade de $H_0^1(\Omega)$ sobre $L^2(\Omega)$, temos

$$\int_0^T u\varphi' \, dt = -\int_0^T \chi\varphi \, dt \tag{3.78}$$

e pela integração por partes na primeira parcela acima, obtemos

$$-\int_0^T u'\varphi \, dt = -\int_0^T \chi\varphi \, dt. \tag{3.79}$$

Portanto, $u' = \chi$.

Provaremos agora que u satisfaz

$$((u'(t), v)) + M(\|\nabla u(t)\|^2)(\nabla u(t), \nabla v) + \delta(u'(t), v) = 0 \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega)$$

isto é, u é solução fraca do problema (3.1)–(3.3). Da imersão compacta $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ temos que $u_m \longrightarrow u$ em $C(0,T; H_0^1(\Omega))$. Logo,

$$\|\nabla u_m(t)\|^2 \longrightarrow \|\nabla u(t)\|^2 \quad \text{em } C(0,T) \tag{3.80}$$

$$M(\|\nabla u_m(t)\|^2) \longrightarrow M(\|\nabla u(t)\|^2) \quad \text{em } C(0,T). \tag{3.81}$$

Por causa de (3.80) e (3.81), podemos passar o limite no termo não-linear obtendo assim

$$\int_0^T M(\|\nabla u_m\|^2)(\nabla u_m, \nabla v)\ dt \longrightarrow \int_0^T M(\|\nabla u\|^2)(\nabla u, \nabla v)\ dt \tag{3.82}$$

e (3.69) nos fornece

$$\delta \int_0^T (u_m', v)\ dt \longrightarrow \delta \int_0^T (u', v)\ dt \tag{3.83}$$

Lembre que (3.22) nos dava

$$(u_m''(t), v) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t), \nabla v) + \delta(u_m'(t), v) = 0 \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega)$$

Multiplicando acima por $\phi \in C_c^\infty(0,T)$ e integrando de 0 a T, temos que para todo $v \in V_m$ *e* $\phi \in D(0,T)$,

$$\int_0^T (u_m''(t), v)\phi\ dt + \int_0^T M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t), \nabla v)\phi\ dt + \delta \int_0^T (u_m'(t), v)\phi\ dt = 0. \tag{3.84}$$

Fazendo integração por partes na primeira parcela da equação integral acima, conseguimos

$$-\int_0^T (u_m'(t), v)\phi'\ dt + \int_0^T M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t), \nabla v)\phi\ dt + \delta \int_0^T (u_m'(t), v)\phi\ dt = 0 \tag{3.85}$$

Passando o limite quando $m \longrightarrow \infty$, obtemos de (3.82) e (3.83)

$$-\int_0^T (u'(t), v)\phi'\ dt + \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|^2)(\nabla u(t), \nabla v)\phi\ dt + \delta \int_0^T (u'(t), v)\phi\ dt = 0 \tag{3.86}$$

Retornando a integração por partes na primeira parcela da equação integral acima, temos:

$$\int_0^T [(u'(t), v) + M(\|\nabla u(t)\|^2)(\nabla u(t), \nabla v) + \delta(u'(t), v)]\phi\ dt = 0 \tag{3.87}$$

de onde segue nosso resultado

$$(u'(t), v) + M(\|\nabla u(t)\|^2)(\nabla u(t), \nabla v) + \delta(u'(t), v) = 0 \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.88}$$

Condições iniciais

Vamos mostrar primeiramente que $u(x,0) = u_0(x)$. Seja $\theta \in C^1(0,T;\mathbb{R})$ com $\theta(T) = 0$, $\theta(0) = 1$ e $v \in L^2(\Omega)$. Da convergência fraco estrela de (u_m') em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, obtemos

$$\int_0^T (u_m', v)\theta\ dt \longrightarrow \int_0^T (u', v)\theta\ dt \tag{3.89}$$

e integrando por partes obtemos

$$[(u_m, v)\theta]|_0^T - \int_0^T (u_m, v)\theta'\ dt \longrightarrow [(u, v)\theta]|_0^T - \int_0^T (u, v)\theta'\ dt. \tag{3.90}$$

Assim,

$$-(u_{0m},v)-\int_0^T(u_m,v)\theta'\,dt\longrightarrow-(u(0),v)-\int_0^T(u,v)\theta'\,dt. \tag{3.91}$$

Como $u_{0m}(x)\longrightarrow u_0(x)$ fortemente em $H_0^1(\Omega)$ (em particular converge fraco), segue que

$$-(u_{0m},v)-\int_0^T(u_m,v)\theta'\,dt\longrightarrow-(u_0,v)-\int_0^T(u,v)\theta'\,dt. \tag{3.92}$$

De (3.91) e (3.92), obtemos

$$(u(x,0),v)=(u_0(x),v)\quad v\in L^2(\Omega). \tag{3.93}$$

Logo, $u(x,0)=u_0(x)$.

Mostremos agora que $u'(x,0)=u_1(x)$. Seja $\theta\in C^1(0,T;\mathbb{R})$ tal que $\theta(T)=0$, $\theta(0)=1$. Multiplicando a equação aproximada (3.22) por θ e integrando de 0 a T, obtemos:

$$\int_0^T(u''_m(t),v)\theta\,dt+\int_0^T M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla v)\theta\,dt+\delta\int_0^T(u'_m(t),v)\theta\,dt=0 \tag{3.94}$$

integrando por partes, temos

$$-(u_{1m},v)-\int_0^T(u'_m,v)\theta'\,dt+\int_0^T M(\|\nabla u_m\|^2)(\nabla u_m,\nabla v)\theta\,dt+\delta\int_0^T(u'_m,v)\theta\,dt=0 \tag{3.95}$$

fazendo $m\longrightarrow\infty$, conseguimos

$$-(u_1(x),v)-\int_0^T(u',v)\theta'\,dt+\int_0^T M(\|\nabla u\|^2)(\nabla u,\nabla v)\theta\,dt+\delta\int_0^T(u',v)\theta\,dt=0. \tag{3.96}$$

Multiplicando (3.88) por θ, integrando de 0 a T e fazendo integração por partes na primeira parcela, obtemos

$$-(u'(x,0),v)-\int_0^T(u',v)\theta'\,dt+\int_0^T M(\|\nabla u\|^2)(\nabla u,\nabla v)\theta\,dt+\delta\int_0^T(u',v)\theta\,dt=0. \tag{3.97}$$

De (3.96) e (3.97) obtemos para todo $v\in H_0^1(\Omega)$,

$$(u'(0,x),v)=(u_1(x),v) \tag{3.98}$$

donde segue que $u'(x,0)=u_1(x)$.

Portanto, u é solução fraca (3.1)–(3.3).

Mostraremos, agora, que se $u\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, $u_1\in H_0^1(\Omega)$ e

$$\frac{B}{\sqrt{k}}\left[\frac{\|\nabla u_1\|^2}{\beta}+\|\Delta u_0\|^2\right]^{1/2}<\delta,$$

então u é solução forte.

A segunda estimativa garante que para todo $t\geq 0$, (u_m) é limitada em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ e (u'_m) é limitada em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$. Daí, existem subsequências que denotaremos com o mesmo índice m tais que

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \tag{3.99}$$

$$u_m' \overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{3.100}$$

Da estimativa III obtemos que existe uma subsequência (que denotamos com mesmo índice m) (u_m'') tal que $u_m'' \overset{*}{\rightharpoonup} u''$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Portanto, temos que u é solução forte do problema (3.1)–(3.3).

Unicidade

Sejam u e $\overline{u}$ soluções do problema (3.1)–(3.3). Então temos que u e $\overline{u}$ satisfazem

$$\left| \begin{array}{l} u''(t) - M(\|\nabla u(t)\|^2)\Delta u(t) + \delta u'(t) = 0 \\ \overline{u}''(t) - M(\|\nabla \overline{u}(t)\|^2)\Delta \overline{u}(t) + \delta \overline{u}'(t) = 0 \end{array} \right.$$

o que implica

$$(u'' - \overline{u}'') - M(\|\nabla u\|^2)(\Delta u - \Delta \overline{u}) + \delta(u' - \overline{u}') = \Delta \overline{u}(M(\|\nabla \overline{u}\|^2) - M(\|\nabla u\|^2))$$

ou seja, tomando $w = u - \overline{u}$,

$$w'' - M(\|\nabla u\|^2)\Delta w + \delta w' = \Delta \overline{u}((M(\|\nabla \overline{u}\|^2) - M(\|\nabla u\|^2)). \tag{3.101}$$

Como u e $\overline{u}$ possuem os mesmos valores iniciais, segue que $w(0) = w'(0) = 0$. Multiplicando (3.101) por w', temos:

$$(w'', w') - M(\|\nabla u\|^2)(\Delta w, w') + \delta(w', w') = (M(\|\nabla \overline{u}\|^2) - M(\|\nabla u\|^2))(\Delta \overline{u}, w') \tag{3.102}$$

e pela fórmula de Green e condições de fronteira, temos que

$$(w'', w') + M(\|\nabla u\|^2)(\nabla w, \nabla w') + \delta(w', w') = [M(\|\nabla \overline{u}\|^2) - M(\|\nabla u\|^2)](\Delta \overline{u}, w'). \tag{3.103}$$

Como $(w'', w') = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}(\|w'\|^2)$ e $(\nabla w, \nabla w') = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}(\|\nabla w\|^2)$, segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|w'\|^2) + M(\|\nabla u\|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla w\|^2) + \delta\|w'\|^2 = [M(\|\nabla \overline{u}\|^2) - M(\|\nabla u\|^2)](\Delta \overline{u}, w'). \tag{3.104}$$

Lembrando que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[M(\|\nabla u\|^2)\|\nabla w\|^2] = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u\|^2))\|\nabla w\|^2 + M(\|\nabla u\|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla w\|^2) \tag{3.105}$$

e substituindo (3.105) em (3.104), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|w'\|^2 + M(\|\nabla u\|^2)\|\nabla w\|^2) + \delta\|w'\|^2 &= [M(\|\nabla \overline{u}\|^2) - M(\|\nabla u\|^2)](\Delta\overline{u}, w') + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u\|^2))\|\nabla w\|^2 \qquad (3.106)\end{aligned}$$

donde por integração de 0 a t, utilizando também o fato de que $w'(0) = w(0) = 0$ e que $\|\nabla w(0)\|^2 = 0$. Além disso, lembrando que $M(s) \geq \beta + ks$, segue que pela escolha conveniente de uma constante C

$$\|w'(t)\|^2 + \beta\|\nabla w(t)\|^2 \leq C\int_0^T (\|w'(s)\|^2 + \beta\|\nabla w(s)\|^2)\, ds \qquad (3.107)$$

e pelo uso da desigualdade de Gronwall segue que

$$\|w'(t)\|^2 + \beta\|\nabla w(t)\|^2 \leq 0$$

e, portanto, $\|\nabla w(t)\|^2 \leq 0$. Implicando assim que $u = \overline{u}$.

Decaimento Exponencial

Lembremos que a energia associada ao sistema é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}[\|u'\|^2 + \overline{M}(\|\nabla\|^2)].$$

Diferenciando a expressão acima em relação a t, obtemos

$$\frac{d}{dt}[E(t)] = (u', u'') + \frac{1}{2}M(\|\nabla u\|^2)\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|^2)$$

e substituindo u'' dado por (3.1), temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[E(t)] &= (u', M(\|\nabla u\|^2)\Delta u - \delta u') + \frac{1}{2}M(\|\nabla u\|^2)\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|^2) \\ &= M(\|\nabla u\|^2)(\Delta u, u') - \delta(u', u') + \frac{1}{2}M(\|\nabla u\|^2)\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|^2). \qquad (3.108)\end{aligned}$$

Usando a fórmula de Green e as condições de fronteira, segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[E(t)] &= -M(\|\nabla u\|^2)(\nabla u', \nabla u) - \delta(u', u') + \frac{1}{2}M(\|\nabla u\|^2)\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|^2) \\ &= -M(\|\nabla u\|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|^2) - \delta\|u'\|^2 + \frac{1}{2}M(\|\nabla u\|^2)\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|^2) \qquad (3.109)\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt}[E(t)] = -\delta\|u'\|^2 \qquad (3.110)$$

Como o termo do segundo membro é negativo para todo t, segue que a energia $E(t)$ é uma função decrescente, ou seja,

$$E(t) \leq E(0) \quad \text{para todo } t \in [0, \infty[.$$

O teorema a seguir garante o decaimento exponencial da energia $E(t)$.

Teorema 3.1.4. *Seja u solução forte de (3.1)–(3.3). Então a energia* $E(t) = \frac{1}{2}[\|u'\|^2 + \overline{M}(\|\nabla\|^2)]$ *satisfaz*

$$E(t) \leq AE(0)e^{-\mu t} \tag{3.111}$$

onde A e μ são constantes positivas que dependem de δ.

Primeiramente introduzamos o seguinte Lema que ajudará na demonstração do teorema (2.1.4).

Lema 3.1.5. Para toda solução $u = u(x,t)$ do problema (3.1)–(3.3), definindo o funcional de energia $R(t)$ por

$$R(t) = (u, u') + \frac{\delta}{2}\|u\|^2 \tag{3.112}$$

temos

i) $\frac{d}{dt}(R(t)) \leq \|u'\|^2 - \frac{K_1}{K_2}\overline{M}(\|\nabla u\|^2)$ onde $K_1 = \min\limits_{s\in[0,T]} M(s)$ e $K_2 = \max\limits_{s\in[0,T]} M(s)$;

ii) $|R(t)| \leq C_0 E(t)$, para todo $t \geq 0$ e alguma constante positiva C_0.

Demonstração. (Lema) Diferenciando $R(t)$ em relação a t e substituindo u'' dado por (3.1), temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[R(t)] &= (u, M(\|u\|^2)\Delta u - \delta u') + (u', u') + \delta(u, u') \\
&= M(\|u\|^2)(\Delta u, u) - \delta(u, u') + (u', u') + \delta(u, u') \\
&= -M(\|u\|^2)\|\nabla u\|^2 + \|u'\|^2
\end{aligned} \tag{3.113}$$

onde a última igualdade decorre da fórmula de Green e das condições de fronteira.

Tomando $\|\nabla u\|^2 \leq T$, para todo $t \geq 0$, alguma constante T positiva e lembrando que $\overline{M}(s) = \int_0^s M(\sigma)\, d\sigma \leq \frac{K_2}{K_1} M(s) \cdot s$ para todo $s \in [0,T]$, segue que

$$\frac{d}{dt}[R(t)] \leq \|u'\|^2 - \frac{K_1}{K_2}\overline{M}(\|\nabla u\|^2). \tag{3.114}$$

Além disso, temos que

$$
\begin{aligned}
|R(t)| &= \left| \int_\Omega u(t)\cdot u'(t)\ dx + \frac{\delta}{2}\|u\|^2 \right| \\
&\overset{Triangular}{\leq} \left| \int_\Omega u(t)\cdot u'(t)\ dx \right| + \frac{\delta}{2}\|u\|^2 \\
&\overset{Holder}{\leq} \left(\int_\Omega [u(t)]^2\ dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega [u'(t)]^2\ dx \right)^{1/2} + \frac{\delta}{2}\|u\|^2 \\
&\overset{Young}{\leq} \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|u'\|^2 + \frac{\delta}{2}\|u\|^2 \\
&= \frac{1+\delta}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|u'\|^2 \\
&\leq C_\delta(\|u\|^2 + \|u'\|^2) \\
&\overset{Poincare}{\leq} C_\delta(k_0\|\nabla u\|^2 + \|u'\|^2). \qquad (3.115)
\end{aligned}
$$

Como $\overline{M}(\|\nabla u\|^2) \geq \beta\|\nabla u\|^2$ segue que

$$|R(t)| \leq C_\delta(\overline{M}(\|\nabla u\|^2) + \|u'\|^2) \leq C_\delta E(t) \qquad (3.116)$$

o que encerra a demonstração do lema. □

Voltemos a demonstração do teorema. Definamos o funcional de energia de Lyapunov $L(t)$ por

$$L(t) = E(t) + \varepsilon R(t)$$

para ε pequeno. Então $L(t)$ satisfaz

$$\frac{1}{2}E(t) \leq L(t) \leq \frac{3}{2}E(t) \qquad (3.117)$$

e

$$\frac{d}{dt}[L(t)] \leq -C_0 L(t)$$

Com efeito, de (3.116), multiplicando por ε e somando $E(t)$, conseguimos

$$(1 - C_0\varepsilon)E(t) \leq L(t) \leq (1 + C_0\varepsilon)E(t) \qquad (3.118)$$

Observe que, se fixarmos $\varepsilon \leq \dfrac{1}{2C_0}$, então

$$\frac{1}{2}E(t) \leq L(t) \leq \frac{3}{2}E(t)$$

provando (3.117).

Por outro lado, derivando $L(t)$ em relação a t, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[L(t)] &= \frac{d}{dt}[E(t)] + \frac{d}{dt}[\varepsilon R(t)] \\
&\overset{Lema\ e\ por\ (3.110)}{\leq} -\delta\|u'\|^2 + \varepsilon\|u'\| - \frac{K_1}{K_2}\varepsilon\overline{M}(\|\nabla u\|^2)
\end{aligned}
$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}[L(t)] \leq -(\delta - \varepsilon)\|u'\|^2 - \varepsilon \frac{K_1}{K_2}\overline{M}(\|\nabla u\|^2). \tag{3.119}$$

Então para $0 < \varepsilon \leq \dfrac{\delta}{2}$, obtemos

$$\frac{d}{dt}[L(t)] \leq -\frac{\delta}{2}\|u'\|^2 - \delta \frac{K_1}{K_2}\overline{M}(\|\nabla u\|^2). \tag{3.120}$$

Assim, tomando $C_1 = \min\left\{\dfrac{1}{2C_0}, \dfrac{\delta}{2}\right\}$, obtemos que

$$\frac{d}{dt}[L(t)] \leq -C_1 E(t). \tag{3.121}$$

Daí, por (3.117), obtemos

$$\frac{d}{dt}[L(t)] + 2C_1 L(t) \leq 0. \tag{3.122}$$

Tomando $\mu = 2C_1$ e multiplicando a desigualdade acima por $e^{\mu t}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}[e^{\mu t} L(t)] \leq 0 \tag{3.123}$$

de onde conseguimos por integração de 0 a t que

$$L(t)e^{\mu t} - L(0) \leq 0$$

isto é,

$$L(t) \leq L(0)e^{-\mu t} \tag{3.124}$$

e por (3.110), segue que

$$E(t) \leq 2L(t) \leq 2L(0)e^{-\mu t} \leq 3E(0)e^{-\mu t}$$

Portanto,

$$E(t) \leq AE(0)e^{-\mu t}. \tag{3.125}$$

Logo, introduzindo um termo de amortecimento $\delta u'$, onde as condições são pequenas e suaves, então existe uma solução forte global e a energia desta solução decai exponencialmente com o tempo. $\square$

Capítulo 4

Considerações finais

Neste capítulo introduziremos, para estudo futuro, outra maneira de obter solução global da equação

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - M\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right)\Delta u(x,t) = 0 \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{e} \quad \dfrac{du}{dt}(x,0) = u_1(x) \end{array}\right.$$

é introduzindo um mecanismo de amortecimento na fronteira Γ de Ω (estabilização da fronteira) cuja aquação diferencial é modelada por

$$\left|\begin{array}{l} u''(x,t) - M(t, \|\nabla u\|^2)\Delta u(x,t) = 0, \quad x \in \Omega \\ u(x,t) = 0 \quad x \in \Gamma \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = -\delta(x)\dfrac{du}{dt}(x,t) \quad x \in \Gamma_1,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{e} \quad u'(x,0) = u_1(x) \quad x \in \Omega \end{array}\right. \tag{4.1}$$

Aqui, $M(t,\lambda)$ e $\delta(x)$ são funções suaves sobre $[0,\infty[\times\mathbb{R}$ e Γ_1, respectivamente, satisfazendo

$$M(t,\lambda) \geq m_0 \quad \text{e} \quad \delta(x) \geq \delta_0 > 0$$

com m_0 e δ_0 constantes e $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ a derivada na direção normal ν.

Enuciaremos algumas hipóteses que servirão de base para o resultado que enunciaremos neste capítulo. Seja $V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\}$, subespaço de $H^1(\Omega)$,cuja norma

$$\|v\|^2 \int_\Omega |\nabla v|^2 dx$$

é equivalente à norma de $H^1(\Omega)$. Além disso, V é munido do produto escalar

$$((u,v)) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \; dx.$$

Seja a energia associada ao problema dada por

$$E(t) = \|u'(t)\|^2 + M(t, \|u(t)\|^2)|\Delta u(t)|^2 \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{4.2}$$

A fronteira Γ é classe C^3. Sobre a função $M(t,\lambda)$ assumimos

$$\left| \begin{array}{l} M \in W^{2,\infty}_{loc}(]0,\infty[\times]0,\infty[) \\ M(t,\lambda) \geq m_0 > 0 \quad m_0 \text{ constante.} \\ \dfrac{\partial M}{\partial t}(t,\lambda) \leq 0 \end{array} \right. \tag{4.3}$$

Além disso, existe uma constante $K > 0$ e $a > 0$ tais que

$$\left| \frac{\partial M}{\partial t}(t,\lambda) \right| \leq K, \ 0 \leq \lambda \leq a, \ t \geq 0. \tag{4.4}$$

Por conseguinte, sejam $\alpha_0, \ \alpha_1, \ \beta_0, \ \beta_1, \ k$ cosntantes positivas. Temos,

$$|v|^2 \leq \alpha_0 \quad \text{para todo } v \in V. \tag{4.5}$$

$$\|v\|^2 \leq \alpha_1 \|v\|^2_{V\cap H^2(\Omega)} \quad \text{para todo } v \in V \cap H^2(\Omega). \tag{4.6}$$

$$\int_{\Gamma_1} (m\nu) v^2 d\Gamma \leq \beta_0 \|v\|^2 \quad \text{para todo } v \in V. \tag{4.7}$$

Seja $L = \max\{M(0,\lambda); 0 \leq \lambda \leq m_0\}$, então

$$\|(m,\nu,v)\|^2 \leq \beta_1 \|v\|^2 \quad \text{para todo } v \in V \tag{4.8}$$

$$b_0 = \left\{ 2\max\left[\frac{2n}{m_0}, \ R^2(x_0) + (n-1)\alpha_0 \right] \right\}^{-1} \tag{4.9}$$

$$b_1 = 2\left\{ R^2(x_0) + \frac{2}{m_0} + \beta_0 \frac{n-1}{2} \right\}^{-1} \tag{4.10}$$

$$N = \min\{a^2 m_0, \ b_0, \ b_1\} \tag{4.11}$$

$$k_0 = \alpha_1 \frac{\max\{1, \ \beta_1\}}{\min\{m_0, \ 1\}}, \quad k_1 = 2\max\{Lk_0, \ \alpha_0\} \tag{4.12}$$

$$k_2 = \frac{k}{m_0} \max\left\{ \frac{\alpha_1}{m_0}, \ \alpha_1\beta_1 + 1 \right\}, \quad k = \max\{k_0, \ k_1, \ 6k_2\} \tag{4.13}$$

Agora estamos munidos para enunciar nosso resultado:

Teorema 4.0.1. *Assuma que as hipóteses (4.3)–(4.13) são satisfeitas. Seja* $u_0 \in V \cap H^2(\Omega)$ *e* $u_1 \in V$ *satisfazendo*

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} + (m\nu)u_1 = 0 \quad \textit{sobre } \Gamma_1$$

e

$$kE(0) < N.$$

Então existe uma e somente uma função $u : \Omega\times]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *na classe*

$$u \in C^0([0,\infty[; V \cap H^2(\Omega)) \cap C^0([0,\infty[; V) \cap C^0([0,\infty[; L^2(\Omega))$$

tal que u é solução da equação

$$u'' - M(t, \|u(t)\|^2)\Delta u = 0 \quad em\ C^0([0,\infty[; L^2(\Omega))$$

e satisfaz os valores iniciais

$$u_(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_1.$$

Além disso,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + (m\nu)u' = 0 \quad emC^0([0,\infty[; H^{1/2}(\Gamma_1))$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \nu} + \delta u'' = 0 \quad emL^2_{loc}([0,\infty[; L^2(\Gamma_1))$$

A solução u tem o seguinte comportamento assintótico

$$E(t) \leq 3E(0)e^{-\frac{1}{3}\eta t}$$

para todo $t \in [0,\infty[$, *onde* $\eta = N - kE(0)$.

Demonstração. Vide [25]. □

Diante dos resultados vistos percebemos que a solução global da equação de Kirchhoff depende de perturbações: amortecimento interno, limite na fronteira, entre outros. Além disso, a equação toma sentido real quando conseguimos provar também o decaimento exponencial.

Referências Bibliográficas

[1] MEDEIROS, L.A. and MIRANDA, M.M. *Introdução aos espaços de Sobolev e às equações diferenciais parciais.* Number 25. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1993.

[2] KIRCHHOFF, G. *Vorlesungen über mechanik.* Tauber Leipzig, 1883.

[3] EBIHARA, Y, MEDEIROS, L.A., and MIRANDA, M.M. Local solutions for a nonlinear degenerate hyperbolic equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 10(1):27–40, 1986.

[4] MEDEIROS, L.A. and MIRANDA, M.M. On a nonlinear wave equation with damping. *Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid*, 3(2-3):213–231, 1990.

[5] RIVERA RODRIGUEZT, P.H., HALE, J.K., and RIVERA, P.H. On local strong solutions of a nonlinear partial differential equation. *Applicable Analysis*, 10(2):93–104, 1980.

[6] CLARK, H.R. Global classical solutions to the cauchy problem for a nonlinear wave equation. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 21(3):533–548, 1998.

[7] CRIPPA, H.R. On local solutions of some mildly degenerate hyperbolic equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 21(8):565–574, 1993.

[8] YAMADA, Y. Some nonlinear degenerate wave equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 11(10):1155–1168, 1987.

[9] BISOGNIN, E. Hyperbolic parabolic equations with nonlinearity of kirchhoffl carrier type. 1995.

[10] MATOS, M.P. Mathematical analysis of the nonlinear model for the vibrations of a string. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 17(12):1125–1137, 1991.

[11] MEDEIROS, L.A. and MIRANDA, M.M. On a boundary value problem for wave equation: Existence uniqueness- asymptotic behavior. *Revista Matemática Aplicada da Universidade do Chile*, 17:47–76, 1996.

[12] DE BRITO, E.H. and HALE, J. The damped elastic stretched string equation generalized: existence, uniqueness, regularity and stability. *Applicable Analysis*, 13(3):219–233, 1982.

[13] YUSUF, O. On models of kirchhoff equations with damping terms: existence results and asymptotic behaviour of solutions. Master's thesis, University of Cape Town, 2018.

[14] ADAMS, R. A. and FOURNIER, J.J.F. *Sobolev spaces.* Elsevier, 2003.

[15] MEDEIROS, L.A and MIRANDA, M.M. *Espaços de Sobolev: iniciação aos problemas elíticos não homogêneos.* Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2000.

[16] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, volume 2. Springer, 2011.

[17] EVANS, L.C. Partial differential equations. *Graduate studies in mathematics*, 19(4):7, 1998.

[18] LIONS, J. L. Quelques méthodes de résolution de problemes aux limites non linéaires. 1969.

[19] CODINGTON, E. A. and LEVINSON, N. *Theory of Ordinary Diferential Equations.* MacGrawHill, 9th Reprinted, India, 1987.

[20] ROYDEN, H.L. and FITZPATRICK, P. Real analysis (4th edtion). *New Jersey: Printice-Hall Inc*, 2010.

[21] CAVALCANTI, M.M., CAVALCANTI, V.N.D., and KOMORNIK, V. Introdução a análise funcional. *Eduem, Maringá*, 2011.

[22] LINZ, P. *Analytical and numerical methods for Volterra equations.* SIAM, 1985.

[23] SATTINGER, D.H. On global solution of nonlinear hyperbolic equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 30(2):148–172, 1968.

[24] PAYNE, L. and SATTINGER, D.H. Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations. *Israel Journal of Mathematics*, 22(3):273–303, 1975.

[25] MILLA MIRANDA, M. and SAN GIL JUTUCA, l.P. Existence and boundary stabilization of solutions for the kirchhoff equation: Existence and boundary stabilization. *Communications in partial differential equations*, 24(9-10):1759–1800, 1999.