

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



TESE DE DOUTORADO

Defeitos topológicos e uma solução tipo-Schwarzschild num modelo bumblebee de gravitação

André Cavalcante Santos

ORIENTADOR:
Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes

SÃO LUÍS, MA
JANEIRO DE 2019

André Cavalcante Santos



Defeitos topológicos e uma solução tipo-Schwarzschild num modelo bumblebee de gravitação

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes

São Luís, MA
Janeiro de 2019

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Biblioteca Setorial - CCET/UFMA

Santos, André Cavalcante.

**Defeitos topológicos e uma solução tipo-Schwarzschild
num modelo bumblebee de gravitação.**

André Cavalcante Santos - São Luís-MA, 2019.

105.p

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes

Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal do Maranhão,
Programa de Pós-Graduação em Física de Física, 2019.

1. Dinâmica generalizada; 2. Skyrmions; 3. Modelo Padrão estendido

CDU 532.527

André Cavalcante Santos



Defeitos topológicos e uma solução tipo-Schwarzschild num modelo bumblebee de gravitação

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Área de concentração: Física de Partículas Elementares e Campos

Banca Examinadora

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes - UFMA

Prof. Dr. José Abdalla Helayel Neto - CBPF

Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Júnior - UFMA

Prof. Dr. Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho - UFMA

Prof. Dr. Carlos Eduardo da Hora Santos - UFMA

São Luís, MA
Janeiro de 2019

À minha família.

Agradecimentos

À todas as pessoas que fizeram parte da minha jornada até aqui, pelo apoio e colaboração durante todos esses anos.

À competente orientação do Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes, além da sua amizade sincera e grande contribuição na minha formação acadêmica.

À todos os colegas e professores do Grupo de Física Teórica de Partículas e Campos - GFTPC/UFMA, os quais contribuíram tanto pela amizade quanto pelas discussões enriquecedoras.

À CAPES pelo suporte financeiro.



“O grande desafio não é apenas ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê.”

Arthur Schopenhauer

Resumo

A tese está dividida em duas partes. Na primeira delas, mostramos a existência de soluções auto-duais obtidas em dois contextos distintos: vórtices BPS em novos cenários de Maxwell-Higgs com dinâmica k -generalizada e Skyrmons BPS eletricamente carregados. Em ambos os casos, implementamos consistentemente o formalismo BPS, obtendo as respectivas equações auto-duais que descrevem as estruturas topológicas em cada contexto. Os vórtices BPS gerados no modelo k -generalizado são eletricamente neutros, possuindo energia total proporcional ao fluxo magnético; as soluções numéricas mostram que a generalização modifica o tamanho dos vórtices, as amplitudes do campo magnético e massa bosônica, mantendo a energia total proporcional ao fluxo magnético topologicamente quantizado. Já os Skyrmons BPS são obtidos a partir do modelo planar Skyrme-Maxwell com um termo Chern-Simons que descreve configurações de sólitons auto-duais, ou seja, é o conhecido modelo *baby Skyrme* cuja dinâmica agora é governada pelos termos de Maxwell e Chern-Simons; a presença do termo Chern-Simons permite a existência de sólitons auto-duais eletricamente possuindo uma carga elétrica total não nula e portadores de fluxo magnético. As soluções numéricas dos Skyrmons BPS mostram que a escolha do superpotencial tem efeito diretamente no comportamento dessas estruturas, podendo ter um decaimento exponencial ou como uma lei de potência. Na segunda parte deste trabalho, obtemos uma solução exata tipo-Schwarzschild em um modelo bumblebee de gravitação que está inserido no Modelo Padrão estendido mínimo. O modelo teórico assume um acoplamento do campo bumblebee a um espaço-tempo riemanianno, sendo este campo o responsável pelos efeitos da quebra espontânea da simetria de Lorentz. A solução é obtida em um cenário estático e esfericamente simétrico, estabelecendo assim o que podemos chamar de solução de buraco negro modificada ou solução tipo-Schwarzschild. Os efeitos de violação de Lorentz são investigados para alguns testes clássicos da Relatividade Geral, onde usamos os respectivos dados experimentais para obter limites superiores para os coeficientes de violação de Lorentz; entre esses testes restringimos nossa atenção ao avanço do periélio de planetas, a curvatura da luz e o atraso temporal. Entre dados efetivamente observados, as estimativas encontradas para o parâmetro de violação de Lorentz atingem a ordem 10^{-15} . Entre experimentos desenvolvidos com algumas projeções futuras de resultados, é possível obter uma sensibilidade de VL da ordem de 10^{-19} .

Palavras-chave: Dinâmica k -generalizada, Skyrmons, Modelo Padrão estendido.

Abstract

The Thesis is divided in two parts. In the first one, we show the existence of self-dual solutions obtained in two distinct contexts: BPS vortices in new Maxwell-Higgs scenarios with k -generalized dynamic and electrically charged Skyrmons BPS. In both cases, we implement consistently the BPS formalism, obtaining the respective self-dual equations which describe the topological structures in each context. The BPS vortices engendered in the k -generalized models are electrically neutral, possessing total energy proportional to the magnetic flux; the numerical solutions show that the generalization modifies the vortex core size, the magnetic field amplitudes and the bosonic mass, holding the total energy proportional to the topologically quantized magnetic flux. The Skyrmons BPS are obtained from the well-known gauged baby Skyrme model whose gauge field now is also governed by the Chern-Simons term; the presence of the Chern-Simons action allows the existence of electrically charged self-dual solitons possessing magnetic flux, too. The numerical solutions of the Skyrmons BPS show that the choice of the superpotential has a direct effect on the behavior of these structures, being able to have an exponential decay or a power-law decay. In the second part of this work, we get an exact Schwarzschild-like solution in a bumblebee gravity model which is contained in the minimal standard-model extension. The theoretical model assumes a coupling of the bumblebee field to a Riemannian space-time, this field being responsible by the effects of the spontaneous Lorentz symmetry breaking. The solution is obtained in a static and spherically symmetric scenario, thus establishing what we can call of modified black hole solution or Schwarzschild-like solution. We have investigated upper-bounds for Lorentz violation from the experimental data obtained for some classic tests of General Relativity; between these tests we restrict our attention to the advance of perihelion of inner planets, the bending of light and the time delay effect. Among actual observed data, the estimates found for the Lorentz violating parameter has achieved 10^{-15} level. Among experiments developed with some future projections of results, it is possible to obtain a sensitivity reaching the 10^{-19} level.

Key-words: k -generalized dynamic, Skyrmons, Standard-Model extension.

Publicações

► R. Casana, **A. Cavalcante**, F. P. Poulis and E. B. Santos, *Exact Schwarzschild-like solution in a bumblebee gravity model*, Phys. Rev. D **97**, 104001 (2018). [1].

► R. Casana, **A. Cavalcante**, E. da Hora, *Self-dual configurations in Abelian Higgs models with k -generalized gauge field dynamics*, J. High Energy Phys. **1612**, (2016) 051. [2].

► R. Casana, **A. Cavalcante**, Claudio F. Farias and A. L. Mota, *Gauged BPS baby Skyrme model with a Chern-Simons term*. (em fase final de redação).

Lista de Figuras

2.1	Campo de Higgs $g(r)$ e campo de <i>gauge</i> $a(r)$ para alguns valores N	p.24
2.2	Campo magnético $B(r)$ e densidade de energia (à direita) para alguns valores N . Convenções conforme Fig. 2.1.	p.25
2.3	Campo de Higgs $g(r)$ e campo de <i>gauge</i> $a(r)$ para alguns valores N	p.30
2.4	Campo magnético e campo elétrico. Convenções conforme Fig. 2.3.	p.30
2.5	Densidade de energia. Convenções conforme Fig. 2.3.	p.30
3.1	Campo de Higgs $g(r)$ e campo de <i>gauge</i> $a(r)$ assumindo o potencial auto-dual (3.33) com $F_{(4)}$ dado por (3.47).	p.41
3.2	Campo magnético e densidade de energia BPS. Convenções conforme Fig. 3.1. . . .	p.41
3.3	Campo de Higgs $g(r)$ e campo de <i>gauge</i> $a(r)$ assumindo o potencial auto-dual (3.40). . .	p.43
3.4	Campo magnético e densidade de energia BPS. Convenções conforme Fig. 3.3. . . .	p.43
3.5	Campo de Higgs $g(r)$ e campo de <i>gauge</i> $a(r)$ assumindo o potencial auto-dual (3.83). . .	p.45
3.6	Campo magnético e densidade de energia BPS. Convenções conforme Fig. 3.5. . . .	p.45
4.1	Campo Skyrme $h(r)$ e campo de <i>gauge</i> $a(r)$ para vários valores de g	p.54
4.2	Campo magnético e densidade de energia BPS para vários valores de g . Identifica- ção conforme Fig. 4.1.	p.55
4.3	Fluxo magnético em função de g	p.55
4.4	Campo Skyrme $h(r)$ e o campo de <i>gauge</i> $a(r)$	p.56
4.5	Campo magnético e densidade de energia BPS para alguns valores de g	p.56
4.6	Campo Skyrme (a) e campo de <i>gauge</i> (b) de casos não-compactons para $g = 2$	p.57
5.1	Perfis do campo Skyrme (a), campo de <i>gauge</i> (b) e potencial elétrico (c) para alguns valores de g	p.65
5.2	Campo magnético (à esquerda) e densidade de energia (à direita).	p.66
5.3	Visualização tridimensional da compactação dos perfis da densidade de energia para alguns valores de g	p.66
5.4	Perfis do campo elétrico para alguns valores de g	p.66

5.5	Carga elétrica como função dos acoplamento eletromagnético g (à esquerda) e CS (à direita).	p.67
5.6	Fluxo magnético como função de g	p.67
5.7	Perfis do campo Skyrme (a), campo de <i>gauge</i> (b) e potencial elétrico (c) para o acoplamento eletromagnético fixado em $g = 1$	p.68
5.8	Campo magnético (à esquerda) e densidade de energia (à direita) com $g = 1$	p.69
5.9	Campo elétrico com $g = 1$	p.69
6.1	Deformação do espaço-tempo por um objeto massivo e esfericamente simétrico. . .	p.74
7.1	Ilustração do avanço do periélio de um planeta em torno do Sol.	p.89
7.2	Ilustração do experimento de atraso temporal para a viagem de um sinal luminoso, passando próximo ao Sol, entre um satélite e a Terra.	p.92

Sumário

1	Introdução	p. 13
	Parte I - Defeitos Topológicos	p. 17
2	Vórtices auto-duais em alguns modelos de Higgs abelianos	p. 18
2.1	Vórtices auto-duais no modelo de Maxwell-Higgs	p. 18
2.1.1	Energia e equações auto-duais	p. 19
2.1.2	Soluções BPS: Vórtices eletricamente neutros	p. 21
2.2	Vórtices auto-duais no modelo de Chern-Simons-Higgs	p. 25
2.2.1	Energia e equações auto-duais	p. 27
2.2.2	Soluções BPS: Vórtices eletricamente carregados	p. 28
3	Vórtices auto-duais em modelos de Maxwell-Higgs abelianos com setor de gauge k-generalizado	p. 31
3.1	Alguns modelos de Maxwell-Higgs generalizados	p. 31
3.2	Modelo de Maxwell-Higgs abeliano com o setor de gauge k -generalizado	p. 32
3.3	Formalismo BPS	p. 34
3.4	Configurações BPS na ausência de um potencial explícito	p. 35
3.5	Modelos auto-duais tipo-gêmeos	p. 36
3.5.1	Modelos auto-duais tipo-gêmeos $ \phi ^4$	p. 36
3.5.2	Modelos auto-duais tipo-gêmeos $ \phi ^6$	p. 37
3.6	Alguns novos modelos k -generalizados	p. 37
3.6.1	Modelo simples	p. 38
3.6.2	Modelos k -generalizados na ausência de um potencial explícito	p. 39
3.7	Soluções numéricas	p. 39
3.7.1	Vórtices em modelos $ \phi ^4$	p. 40
3.7.2	Vórtices em modelos $ \phi ^6$	p. 42

3.7.3	Vórtices BPS não-localizados	p.44
4	Sólitons BPS no modelo baby Skyrme-Maxwell	p.46
4.1	O modelo	p.46
4.2	O modelo baby Skyrme-Maxwell	p.47
4.2.1	Energia e equações BPS	p.48
4.2.2	Soluções BPS	p.50
4.2.3	Fluxo magnético	p.52
4.3	Soluções numéricas das equações BPS	p.53
4.3.1	Sólitons <i>compactons</i>	p.54
4.3.2	Sólitons não- <i>compactons</i>	p.56
5	Sólitons BPS no modelo baby Skyrme-Maxwell-Chern-Simons	p.58
5.1	O modelo baby Skyrme-Maxwell-Chern-Simons	p.58
5.2	Energia e equações BPS	p.60
5.2.1	Soluções BPS	p.62
5.3	Soluções Numéricas	p.64
5.3.1	Sólitons para o caso $\sigma = 2$	p.65
5.3.2	Sólitons para os casos $\sigma > 2$	p.68
	Parte II - Modelo padrão estendido	p.70
6	Alguns aspectos da Relatividade Geral	p.71
6.1	Geometria	p.71
6.1.1	Equação da geodésica	p.73
6.2	A solução de Schwarzschild	p.74
6.3	Formalismo PPN	p.75
7	Solução exata tipo-Schwarzschild num modelo bumblebee de gravitação	p.77
7.1	Modelo teórico	p.78
	Equações de campo	p.80
7.2	Solução esfericamente simétrica num cenário com VL	p.81
7.3	Alguns testes clássicos e estimativas experimentais	p.86

7.3.1	Avanço do periélio	p.86
7.3.2	Desvio da Luz	p.89
7.3.3	Atraso temporal da luz	p.90
8	Conclusões e perspectivas	p.94
	Referências Bibliográficas	p.96

1 Introdução

Para uma melhor compreensão de defeitos topológicos, começamos com o trabalho de Zabusky e Krustal [3] que introduziram a palavra *sóliton* para caracterizar concentrações de energia em movimento que não se dispersavam e que preservavam sua forma após colisões com outras de mesma propriedade. Devido a essas características, *sólitons* apresentam uma boa estrutura matemática para a descrição de partículas clássicas. As soluções tipo-partícula, por sua vez, advindas de equações de campos clássicos, complementam a descrição teórica das partículas elementares por possuírem natureza não linear. Além disso, essas soluções tipo-partículas são inseridas no contexto das interações elementares a partir da quantização dos *sólitons*, onde as configurações dos campos referentes aos *sólitons* apresentam propriedades topológicas não triviais. Em geral, essa caracterização topológica do campo é dada pela chamada carga topológica [4], a qual está associada a um número inteiro. No contexto das teorias clássicas de campos, defeitos topológicos são configurações que podem ser descritas a partir das soluções de equações diferenciais não-lineares [4]. Contudo, sabemos que os sistemas físicos que apresentam uma não linearidade intrínseca podem perder a propriedade de se obter soluções completas. No entanto, vem sendo possível simplificar e obter resultados confiáveis para alguns sistemas físicos por meio de aproximações, teorias efetivas e modelos fenomenológicos. Particularmente, importantes sistemas descritos pela teoria quântica de campos são intrinsecamente não lineares, bem como o Modelo Padrão e a QCD (*quantum chromodynamics*) que se apresentam como bons exemplos. Explorando com certa profundidade tais sistemas ou ainda modelos não lineares, percebemos uma importância significativa das soluções solitônicas, apropriadas por apresentarem importantes características como, por exemplo, o comportamento topológico, energia finita e localizada, além de uma extensa variedade de aplicações [5-8]. O caráter topológico dessas configurações de campos pode ser obtido por métodos relativamente simples, mostrando-se adequado para o tratamento de alguns modelos teóricos, bem como no contexto das teorias de unificação como supercordas.

Do ponto de vista matemático, defeitos topológicos são descritos por equações diferenciais de segunda ordem (equações de Euler-Lagrange) e resultantes de uma teoria caracterizada pela quebra espontânea de simetria contínua. Assim como a água transforma-se em gelo quando a temperatura diminui, transição de fase, levando o sistema físico a outro estado, o mesmo acontece com as interações fundamentais entre partículas. Os defeitos podem surgir exatamente da quebra de simetria, que nos conduzem a uma transição de fase do sistema. Podemos começar citando, por exemplo, cordas e monopólos, que quebram as simetrias $U(1)$ e $SU(2)$, respectivamente. Esses defeitos são vistos como um conjunto de soluções das equações de movimento que conectam os estados de vácuo (mínimos do potencial) do campo em estudo. Os defeitos podem ainda ser classificados como topológicos e não-topológicos. Os defeitos topológicos, possuidores de carga topológica não-nula, são aqueles que conectam diferentes estados de mínima energia da teoria, definidos em regiões assintóticas. Os defeitos não-topológicos, possuidores de carga topológica nula, conectam os estados de

vácuo a ele mesmo, nas duas regiões assintóticas. Dessa maneira, o estudo de defeitos passa pela investigação dos limites assintóticos dos campos (estados de vácuo), ou seja, seus comportamentos no infinito e como esta propriedade pode influenciar o sistema físico. No trabalho a ser desenvolvido, abordamos apenas configurações de defeitos topológicos. Alguns exemplos de defeitos topológicos são kinks [9], monopólos magnéticos [10,11], paredes de domínio, vórtices [12], *Skyrmions* [13] etc. Dentre estes, nesta Tese abordaremos vórtices e *Skyrmions*.

Os vórtices são soluções construídas no âmbito de teorias de *gauge* abelianas definidas em um espaço-tempo $(1 + 2)$ -dimensional, caracterizadas pela presença de um campo de *gauge* e de um campo escalar complexo. Em particular, vórtices são estruturas estáticas, dotadas de simetria rotacional, construídas no âmbito de teorias de *gauge* abelianas $(1 + 2)$ -dimensionais [6]. Neste contexto, vórtices topológicos emergem a partir da violação espontânea da invariância de *gauge* local $U(1)$ [14,15]. Em casos muito específicos, tais estruturas, ao invés de obtidas via as equações de Euler-Lagrange, podem ser obtidas a partir da resolução de um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, denominadas equações de Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfeld (BPS) [16,17]. Nestes casos, as configurações resultantes, denominadas estados BPS ou auto-duais, possuem a mínima energia possível, sendo esta proporcional a sua carga topológica. Por outro lado, quando tais configurações são obtidas a partir das equações de Euler-Lagrange, pouco podemos afirmar sobre suas energias. Como exemplos de teorias de *gauge* usuais nos quais vórtices são construídos, podemos citar: a eletrodinâmica de Maxwell-Higgs [18], de Chern-Simons-Higgs [19–21] e de Maxwell-Chern-Simons-Higgs [22,23]. Nos últimos anos, modelos generalizados, denominados de teorias k -generalizadas [24–30], tem atraído muita atenção da comunidade científica. Essas teorias são amplamente utilizadas como modelos efetivos, principalmente em Cosmologia, onde as teorias $f(R)$ [31,32] buscam, por exemplo, compreender a atual fase de expansão acelerada do Universo [33]. Ainda em Cosmologia, outras frentes de trabalho envolvem o uso de teorias generalizadas no estudo de ondas gravitacionais fortes [34], matéria escura [35], matéria taquiônica [36] e outros fenômenos. Nesta linha, esta Tese aborda o estudo de vórtices topológicos construídos no âmbito de teorias k -generalizadas, caracterizando os resultados obtidos pelo efeito destas generalizações. Veremos que todas as configurações obtidas através da generalização proposta neste trabalho, proporcionaram vórtices auto-duais (BPS).

As estruturas denominadas *Skyrminos* surgem a partir de uma proposta alternativa de teoria efetiva [13] de baixas energias possuindo campos fundamentais a fim de obter soluções de propriedades físicas básicas de hádrons e núcleos de uma teoria mais geral de interações fortes, mais precisamente a QCD. Os campos fundamentais descritos por modelos *Skyrmions* possuem graus de liberdade relevantes em altas energias que podem ser substituídos por outros capazes de descrever a física de interação forte de forma mais prática. Uma versão $(2 + 1)$ -dimensional do modelo Skyrme foi introduzida em [37–39] e mais tarde a partir dos trabalhos desenvolvidos em [40,41] passou a ser conhecido como “Baby *Skyrmion*”. Este modelo em particular, possui algumas aplicações físicas independentes, como em sistemas de matéria condensada [42–44], ou ainda em cosmologia de branas onde os sólitons do modelo induzem codimensão de duas branas [45,46]. Soluções de um modelo baby Skyrme-Maxwell, isto é, um modelo Skyrme-Maxwell em $1 + 2$ dimensões cuja dinâmica do campo de *gauge* é governada pelo termo de Maxwell, foram investigadas em [47]. Posteriormente, *Skyrmions* BPS foram estudados em [48], onde obtiveram configurações de sólitons auto-duais, ou

seja, soluções de sólitons topologicamente estáveis saturando num limite BPS (de mínima energia). As soluções de sólitons encontradas nesses casos mencionados, são eletricamente neutras. No entanto, sólitons possuidores de carga elétrica também podem ser encontrados [49–51]. Neste caso, é introduzido um termo Chern-Simons (CS) na Lagrangiana do modelo. Porém, configurações de sólitons BPS eletricamente carregados ainda não foram estabelecidas, sendo este o principal objetivo no estudo sobre Skyrmons nesta tese.

Esta tese é compreendida por duas partes. A primeira aborda estruturas denominadas de defeitos topológicos, os quais discutimos brevemente acima. Na segunda parte do trabalho estudamos uma solução exata tipo buraco negro obtida a partir das equações de Einstein modificadas no contexto de uma teoria de campos além do Modelo Padrão (MP); a seguir discutimos alguns aspectos importantes do contexto no qual o objeto de estudo está inserido.

A teoria da Relatividade Geral (RG) de Einstein, a qual descreve os fenômenos gravitacionais clássicos conhecidos, e o MP fornecem uma descrição de forma notável, compreensível e bem sucedida da natureza. No entanto, continua o desafio de encontrar uma teoria quântica de gravidade que seja consistente com uma teoria fundamental emergente na escala de Planck, $m_p \sim 10^{19}$ GeV. Nesse regime de energia, o espaço-tempo sofre inúmeras flutuações em pequenas escalas [52], o que sugere a quebra da simetria de Lorentz. Uma vez que medições diretas na escala de Planck são inviáveis, a abordagem prática é buscar propriedades de tal teoria fundamental que sejam a manifestações de uma nova Física e cujos efeitos sejam detectáveis em experimentos a escalas de energias atingíveis [53]. Assim, uma grande motivação no estudo de teorias com violação de Lorentz (VL) é a possibilidade de detecção de efeitos relevantes da quebra desta simetria a partir de medidas experimentais no regime de baixas energias [54]. Dessa forma, as restrições físicas aos parâmetros dessas teorias podem servir como guia para a construção de modelos teóricos válidos no regime de altas energias. Entre os modelos/teorias nos quais os efeitos de VL são estudados temos, por exemplo, a teoria de cordas [55], a gravitação quântica em laços (loop) [56], as teorias de campo não-comutativas [57], campos variando o espaço-tempo [58], entre outros. Devido à falta de uma teoria fundamental onde os possíveis efeitos de VL seriam estudados consistentemente, uma teoria de campo efetiva surge como uma ferramenta útil para descrever e/ou estudar os sinais de VL [52]. A ideia foi estabelecer um modelo efetivo capaz de incorporar de maneira consistente a física conhecida da RG e MP que também inclua todos os possíveis termos que violam a simetria de Lorentz. Um marco teórico com essas características existe e é conhecido como Modelo Padrão Estendido (MPE) [52]. Nesse modelo estendido, obtemos uma solução tipo-Schwarzschild, que pode ser considerada uma solução levemente modificada da caso usual correspondente presente no contexto da RG.

A tese é organizada como segue. No capítulo 2 fazemos uma revisão sobre a obtenção de vórtices estáticos descarregados (campo elétrico nulo) no âmbito da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs usual e vórtices BPS estáticos eletricamente carregados, agora na eletrodinâmica de Chen-Simons-Higgs. Em seguida, no capítulo 3, iniciamos o estudo original de um modelo k -generalizado. Introduzimos uma eletrodinâmica generalizada, construída a partir da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs usual. No capítulo 4 apresentamos uma revisão do modelo BPS Skyrme-Maxwell, que estabelece sólitons eletricamente neutros e topologicamente estáveis possuidores de configurações com mínima energia. Já no capítulo 5, apresentamos nossa proposta de obtenção de Skyrmons topologicamente

estáveis através de um modelo BPS Skyrme-Maxwell com um termo Chern-Simons; os sólitons obtidos são topologicamente estáveis e eletricamente carregados. No capítulo 6 é apresentada uma revisão sobre alguns aspectos da RG e algumas propriedades da solução Schwarzschild. Por fim, no capítulo 7 apresentamos uma solução tipo-Schwarzschild, que carrega efeitos de violação de Lorentz.

Ao longo de toda a tese adotamos algumas convenções. Os índices gregos denotam as coordenadas do espaço-tempo, enquanto os índices latinos denotam as coordenadas espaciais. Além disso, é adotado o sistema de unidades geometrizadas, $c = \hbar = 1$.

Parte I - Defeitos Topológicos

Vórtices BPS k -generalizados e
Skyrmions BPS eletricamente
carregados

2 Vórtices auto-duais em alguns modelos de Higgs abelianos

As primeiras configurações de vórtices foram estudadas por Abrikosov [59] a partir de uma teoria efetiva para a supercondutividade proposta por Ginzburg e Landau [60]. Neste contexto, Abrikosov obteve soluções não-relativísticas com simetria rotacional, ou seja, ele percebeu que o funcional da energia livre de Ginzburg-Landau gerava sólitons topológicos, que neste caso são vórtices portadores de fluxo magnético quantizado. Posteriormente, Nielsen e Olesen [12] obtiveram soluções estáveis similares às aquelas encontrados por Abrikosov num modelo onde os campos de Maxwell e de Higgs estavam acoplados minimamente. Logo depois, Schaposnik e de Vega [18] obtiveram as mesmas soluções de Nielsen e Olesen, mas agora resolvendo equações diferenciais de primeira ordem (ao invés das equações de Euler-Lagrange) chamadas de equações auto-duais ou BPS, que são obtidas num contexto denominado limite de Bogomol'nyi [17]. As estruturas encontradas por este método são denominadas de vórtices auto-duais, que são soluções fundamentais possuidoras de energia mínima.

Neste capítulo, apresentamos uma revisão sobre a obtenção de vórtices auto-duais dos modelos de Maxwell-Higgs (MH) [18] e Chern-Simons-Higgs (CSH) [19–21]. No modelo MH temos soluções de vórtices puramente magnéticos, ou seja, sem carga elétrica. Por outro lado, no modelo CSH as soluções representam vórtices eletricamente carregados. Outro caso presente na literatura, mas que não será revisado neste trabalho, são vórtices carregados obtidos no contexto da eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons-Higgs [22,23].

2.1 Vórtices auto-duais no modelo de Maxwell-Higgs

O modelo MH Abeliano é descrito pela seguinte densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |\mathcal{D}_\mu\phi|^2 - V(|\phi|), \quad (2.1)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor do campo eletromagnético, sendo A_μ o campo de *gauge*. A derivada covariante do campo de Higgs $\phi(x^\mu)$ (escalar complexo) é dado por

$$\mathcal{D}_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi, \quad (2.2)$$

sendo e uma constante de acoplamento. O potencial $V(|\phi|)$ é dado pela seguinte relação

$$V(|\phi|) = \frac{\lambda^2}{2}(|\phi|^2 - v^2)^2, \quad (2.3)$$

o qual descreve a auto-interação do campo $\phi(x^\mu)$ e fornece o estado de vácuo do modelo. O parâmetro λ é uma constante de acoplamento real e positiva, e v é o valor esperado no vácuo (também

real e positivo) do campo escalar de Higgs.

As equações de movimento, a partir de (2.1) via equações de Euler-Lagrange (EL), são

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \phi = \lambda^2 (|\phi|^2 - v^2) \phi, \quad (2.4)$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = e J^\mu, \quad (2.5)$$

onde

$$J^\mu = i [\phi (\mathcal{D}^\mu \phi)^* - \phi^* \mathcal{D}^\mu \phi], \quad (2.6)$$

é a densidade de corrente conservada do modelo. Assumindo configurações estáticas¹ (campos independentes do tempo), obtemos a Lei de Gauss

$$\nabla^2 A_0 = 2e^2 A_0 |\phi|^2, \quad (2.7)$$

Notamos que a escolha do *gauge* $A_0 = 0$ satisfaz trivialmente a própria Lei de Gauss. Isso implica que devemos ter soluções estáticas sem carga elétrica, isto é, soluções carregando somente fluxo magnético. A Lei de Ampère é

$$\epsilon_{jk} \partial_k B = e J_j, \quad (2.8)$$

e a equação do campo de Higgs

$$\nabla^2 \phi - 2ie A_k \partial_k \phi - e^2 (A_k)^2 \phi = \lambda^2 (|\phi|^2 - v^2) \phi, \quad (2.9)$$

onde consideramos $A_0 = 0$ e $\partial_k A_k = 0$ (*gauge* de Coulomb).

2.1.1 Energia e equações auto-duais

A densidade de energia pode ser obtida a partir da hamiltoniana canônica

$$\mathcal{H} = \pi^\mu \dot{A}_\mu + \pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* - \mathcal{L}, \quad (2.10)$$

onde os momentos canônicos são dados por²

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu}, \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}, \quad \pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*}. \quad (2.11)$$

As configurações estáticas dos campos fornecem $\dot{A}_\mu = \dot{\phi} = \dot{\phi}^* = 0$, de modo que obtemos a densidade de energia estática será

$$\epsilon \equiv \mathcal{H} = -\mathcal{L} = \frac{1}{2} B^2 + |\mathcal{D}_k \phi|^2 + \frac{\lambda^2}{2} (v^2 - |\phi|^2)^2, \quad (2.12)$$

com a energia total estática sendo

$$E = \int \epsilon d^2 x = \int d^2 x \left[\frac{1}{2} B^2 + |\mathcal{D}_k \phi|^2 + \frac{\lambda^2}{2} (v^2 - |\phi|^2)^2 \right], \quad (2.13)$$

¹Em todos os casos envolvendo defeitos topológicos apresentados nesta tese (incluindo revisão da literatura e propostas originais), estamos interessados apenas em soluções estáticas, onde os campos são independentes do tempo.

²O ponto sobre os campos indica uma derivada temporal.

onde usamos $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2B^2$ e $|\mathcal{D}_\mu\phi|^2 = -|\mathcal{D}_k\phi|^2$. Considere agora a identidade

$$|\mathcal{D}_k\phi|^2 = |\mathcal{D}_\pm\phi|^2 \pm eB|\phi|^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon_{jk}\partial_j J_k, \quad (2.14)$$

onde $\mathcal{D}_\pm\phi = \mathcal{D}_1\phi \pm i\mathcal{D}_2\phi$ e J_k representa as componentes espaciais da densidade de corrente (2.6). Vamos agora implementar o formalismo BPS, que consiste em escrever os termos da energia numa forma quadrática bem definida. Usando a (2.14) em (2.13) e escrevendo em termos quadráticos, obtemos

$$E = \int d^2x \left\{ |\mathcal{D}_\pm\phi|^2 + \frac{1}{2} \left[B \mp \lambda(v^2 - |\phi|^2) \right]^2 \pm B\lambda(v^2 - |\phi|^2) \pm eB|\phi|^2 \pm \epsilon_{ij}\partial_i J_j \right\}. \quad (2.15)$$

Para completar o formalismo, assumimos o denominado limite Bogomol'nyi que, neste caso, é atingido quando $\lambda = e$. Dessa forma, a energia total é reduzida à

$$E = \int d^2x \left\{ |\mathcal{D}_\pm\phi|^2 + \frac{1}{2} \left[B \mp e(v^2 - |\phi|^2) \right]^2 \pm Bev^2 \pm \epsilon_{ij}\partial_i J_j \right\}. \quad (2.16)$$

Sob condições de contorno adequadas, o termo de derivada total não deve contribuir para a energia total. Sendo assim, podemos escrever

$$E = E' + E_{\text{BPS}}, \quad (2.17)$$

onde

$$E' = \int d^2x \left\{ |\mathcal{D}_\pm\phi|^2 + \frac{1}{2} \left[B \mp e(v^2 - |\phi|^2) \right]^2 \right\}, \quad E_{\text{BPS}} = \pm ev^2 \int d^2x B. \quad (2.18)$$

Logo, as configurações de mínima energia devem satisfazer a inequação

$$E \geq E_{\text{BPS}}, \quad (2.19)$$

sendo alcançada quando os campos saturam no chamado limite BPS, satisfazendo as relações

$$|\mathcal{D}_\pm\phi|^2 = 0, \quad (2.20)$$

$$B = \pm e(v^2 - |\phi|^2). \quad (2.21)$$

Estas são as chamadas equações auto-duais (ou BPS) para o modelo MH, cujo potencial auto-dual correspondente é

$$V_{\text{MH}} = \frac{e^2}{2}(v^2 - |\phi|^2)^2. \quad (2.22)$$

Pela Eq. (2.12), é podemos agora escrever a densidade de energia como

$$\epsilon_{\text{BPS}} = B^2 + |\mathcal{D}_k\phi|^2. \quad (2.23)$$

Além disso, a energia (2.19) pode ainda ser escrita como

$$E \geq E_{\text{BPS}} = \pm ev^2 \Phi, \quad (2.24)$$

com

$$\Phi = \int d^2x B, \quad (2.25)$$

sendo Φ o fluxo magnético.

2.1.2 Soluções BPS: Vórtices eletricamente neutros

Soluções de vórtices fornecem configurações estáticas possuidoras de simetria rotacional. Logo, a fim de uma melhor compreensão do comportamento dos campos e posteriormente estudar as soluções numéricas (ver Sec. 2.1.2), podemos escrever tais configurações adotando o *Ansatz* usual

$$\phi(r, \theta) = v g(r) e^{iN\theta}, \quad (2.26)$$

$$A_j(r, \theta) = \epsilon_{jk} \hat{x}_k \frac{a(r) - N}{er}, \quad (2.27)$$

onde $N \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ é o chamado *winding number*, associado ao caráter topológico das configurações, r e θ coordenadas polares, e $g(r)$, $a(r)$ são funções bem comportadas em todo o eixo radial. Esse *Ansatz* satisfaz automaticamente o *gauge* de Coulomb, $\partial_k A_k = 0$, e é similar ao proposto por Abrikosov na obtenção de vórtices em supercondutores [59]. O caráter inteiro de N está diretamente associado a um campo de Higgs definido univocamente no plano complexo:

$$\phi(r, \theta) \rightarrow \phi(r, \theta) = \phi(r, \theta + 2\pi N) \quad (2.28)$$

$$1 = e^{i2\pi N}, \quad (2.29)$$

sendo satisfeita para $N = \pm 1, \pm 2, \dots$. Quando $N = 0$ temos configurações com topologia trivial.

Implementando (2.26) e (2.27) nas equações EL (2.8)-(2.9), obtemos

$$a'' - \frac{a'}{r} = 2e^2 v^2 g^2 a, \quad (2.30)$$

$$g'' + \frac{g'}{r} - \frac{a^2 g}{r^2} = e^2 v^2 g (g^2 - 1), \quad (2.31)$$

onde usamos o campo magnético é expresso como

$$B(r) = -\frac{a'}{er}. \quad (2.32)$$

O símbolo " ' " indica a derivada da função em relação a r . Já para as equações auto-duais (2.20) e (2.21), resulta

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (2.33)$$

$$\frac{a'}{r} = \pm e^2 v^2 (g^2 - 1), \quad (2.34)$$

respectivamente. O potencial auto-dual nesse *Ansatz* é

$$V_{\text{MH}} = \frac{e^2 v^4}{2} (g^2 - 1)^2. \quad (2.35)$$

2.1.2.1 Verificação das equações auto-duais

Conforme já mencionado, as soluções de vórtices podem ser descritas por equações diferenciais de primeira ordem, neste caso (2.33) e (2.34), ao invés das equações EL, (2.30) e (2.31). Em outras palavras, pode-se mostrar que as Eqs. (2.33) e (2.34) são soluções das equações EL (2.30) e (2.31).

Para isso, partimos da Eq. (2.33), tomando a derivada em relação r e usando ambas as equações auto-duais, obtendo

$$\begin{aligned} g'' &= \pm \frac{a'g}{r} \pm \frac{ag'}{r} \mp \frac{ag}{r^2} \\ g'' &= \pm \left[\pm e^2 v^2 (g^2 - 1) \right] g \pm \frac{a}{r} \left(\pm \frac{ag}{r} \right) \mp \frac{1}{r} (\pm g') \\ g'' &= \left[e^2 v^2 (g^2 - 1) \right] g + \frac{a}{r} \left(\frac{ag}{r} \right) - \frac{1}{r} (g'), \end{aligned} \quad (2.36)$$

resultando em

$$g'' + \frac{g'}{r} - \frac{a^2 g}{r^2} = e^2 v^2 g (g^2 - 1), \quad (2.37)$$

sendo esta exatamente a Eq. (2.31). De modo análogo, partindo agora da (2.34) teremos

$$\begin{aligned} \frac{a''}{r} - \frac{a'}{r^2} &= \pm 2e^2 v^2 g (g') \\ \frac{a''}{r} - \frac{a'}{r^2} &= \pm 2e^2 v^2 g \left(\pm \frac{ag}{r} \right), \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$a'' - \frac{a'}{r} = 2e^2 v^2 a g^2, \quad (2.39)$$

verificando a Eq. (2.30). Logo, esses resultados mostram que as Eqs. (2.33) e (2.34) são, de fato, soluções das equações EL (2.30) e (2.31). Portanto, as equações BPS fornecem soluções legítimas para o modelo (2.1).

2.1.2.2 Comportamento dos campos

Veremos aqui as condições de contorno válidas para os campos $g(r)$ e $a(r)$, assim como os respectivos comportamentos assintóticos desses campos. As condições de contorno devem evitar configurações possuidoras de quaisquer divergências. Na origem, $r \rightarrow 0$, essas condições devem estar em conformidade com o *Ansatz* dado por (2.26) e (2.27), isto é, o campo de Higgs deve ser unívoco na origem e a componente angular de A_k não deve divergir. Logo, devemos ter

$$a(0) = N, \quad g(0) = 0. \quad (2.40)$$

No limite $r \rightarrow \infty$ devemos assegurar configurações possuidoras energia total finita, o que implica numa densidade de energia localizada, isto é, $\epsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. Escrevendo a Eq. (2.13) usando o *Ansatz*, obtemos

$$E = \int d^2r \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a'}{er} \right)^2 + v^2 \left(g'^2 + \frac{a^2 g^2}{r^2} \right) + \frac{e^2 v^4}{2} (g^2 - 1)^2 \right], \quad (2.41)$$

onde usamos

$$|\mathcal{D}_k \phi|^2 = v^2 g'^2 + v^2 \frac{a^2 g^2}{r^2}. \quad (2.42)$$

Logo, as funções $a(r)$ e $g(r)$ devem satisfazer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 1. \quad (2.43)$$

Ainda usando o *Ansatz* e as condições de contorno apresentadas acima, podemos escrever a energia BPS (2.19) como

$$E \geq E_{\text{BPS}} = \pm ev^2 \int_0^\infty d^2r \left(-\frac{a'}{er} \right) = \mp 2\pi v^2 \int_0^\infty da = \mp 2\pi v^2 [a(\infty) - a(0)] = \pm 2\pi v^2 N, \quad (2.44)$$

$$E \geq E_{\text{BPS}} = \pm ev^2 \Phi = 2\pi v^2 |N|, \quad (2.45)$$

e conseqüentemente

$$\Phi = \frac{2\pi N}{e}. \quad (2.46)$$

Isto é, notamos que a energia total e fluxo magnético são quantizados topologicamente conforme N .

Antes de prosseguir para as soluções numéricas, vamos apresentar o comportamento dos campos quando $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$. Na origem, o comportamento pode ser determinado via resolução das equações BPS pelo método de séries de potências. Assim, para os campos $a(r)$ e $g(r)$ obtemos

$$g(r) = G_N r^{|N|} - \frac{e^2 v^2 G_N}{4} r^{|N|+2} + \mathcal{O}(r^{|N|+4}), \quad (2.47)$$

$$a(r) = N - \frac{e^2 v^2}{2} r^2 + \frac{e^2 v^2 (G_N)^2}{2(|N|+1)} r^{2|N|+2} + \mathcal{O}(r^{2|N|+4}), \quad (2.48)$$

com G_N sendo uma constante que pode ser determinada numericamente. Essas condições de contorno são compatíveis com (2.40), como devem ser. Por outro lado, o comportamento assintótico dos campos, $r \rightarrow \infty$, fornece

$$g(r) \sim 1 - K_0(\sqrt{2}evr) \sim 1 - \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-\sqrt{2}evr}, \quad (2.49)$$

$$a(r) \sim rK_1(\sqrt{2}evr) \sim \sqrt{r} e^{-\sqrt{2}evr}, \quad (2.50)$$

onde K_0 e K_1 são as funções modificadas de Bessel de segunda classe. As relações (2.47), (2.48), (2.49) e (2.50) caracterizam o comportamento típico de vórtices do modelo MH, no sentido de que os campos tendem exponencialmente para seus valores assintóticos, com comprimento característico que depende da escala de massa da teoria [61]. O modelo descrito por (2.1) tem uma fase de Higgs com um campo de *gauge* de massa $m_M = \sqrt{2}ev$, com um campo escalar real (Higgs) de massa $m_H = \sqrt{2}\lambda v$. De modo geral, estas duas escalas de massas são independentes, de modo que o modelo de MH apresenta um comportamento que depende relativamente da magnitude destas duas escalas de massas [62]. No limite de Bogomol'nyi em que $\lambda = e$, podemos definir a quantidade $m_{\text{MH}} = \sqrt{2}ev$ (presente no argumento das funções de Bessel), pois representa a escala de massa do modelo MH. Assim, teremos

$$m_M = m_H = m_{\text{MH}} = \sqrt{2}ev, \quad (2.51)$$

mostrando a equivalência entre as massas do campo de *gauge* e de Higgs (campo escalar). Essa equivalência entre as massas, $m_M = m_H$, corresponde exatamente à fronteira entre a supercondutividade tipo-I e tipo-II no modelo de Ginzburg-Landau. Em geral, em modelos que proporcionam uma equação auto-dual similar à (2.34), podemos escrever

$$\frac{a'}{r} = \pm \frac{1}{2} m_{\text{MH}}^2 (g^2 - 1), \quad (2.52)$$

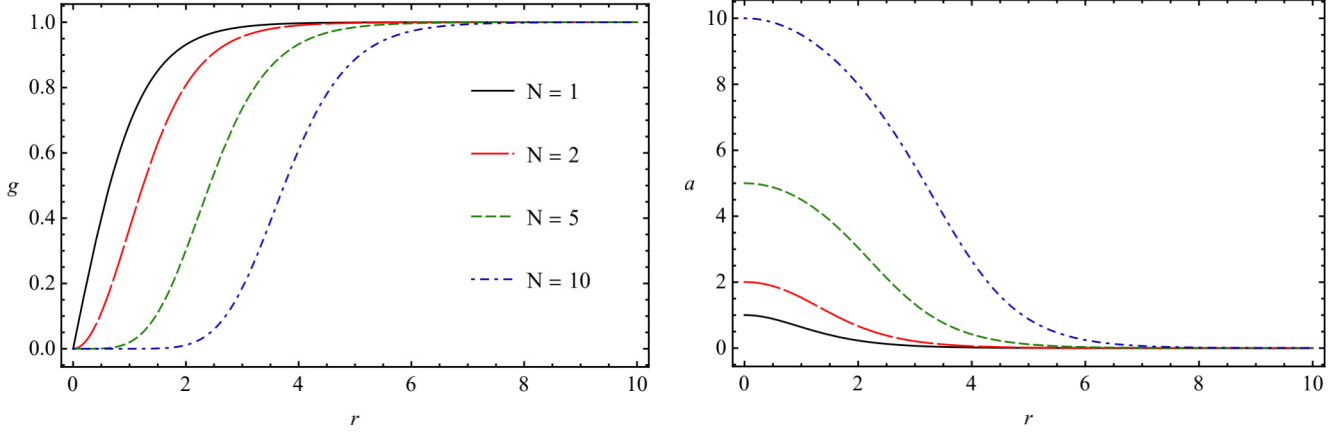


Figura 2.1: Campo de Higgs $g(r)$ e campo de *gauge* $a(r)$ para alguns valores N .

onde $m_{\text{MH}} \equiv \sqrt{2}ev$ é a escala de massa do modelo (2.1).

2.1.2.3 Soluções numéricas

Em geral, poderíamos buscar uma solução analítica para equações EL do modelo. Porém, essa alternativa pode tornar-se uma tarefa extremamente árdua e trabalhosa em alguns casos, pois as Eqs. (2.30) e (2.31) são não-lineares. Portanto, assim como para o modelo proposto neste trabalho no próximo capítulo, vamos fazer aqui um tratamento numérico das soluções a serem obtidas, podendo assim compará-las com novos resultados. No entanto, as configurações de vórtices estáticos obtidas via resolução numérica a partir das equações EL (2.30) e (2.31) podem ainda ser determinados mais facilmente através de uma abordagem alternativa e mais simples, onde resolvemos apenas equações diferenciais de primeira ordem (2.33) e (2.34).

A análise numérica é realizada via Eqs. (2.33) e (2.34). Para a densidade de energia BPS, usamos uma relação obtida a partir de (2.23), fazendo uso também das equações BPS (2.33) e (2.34), resultando em

$$\epsilon_{\text{BPS}} = B^2 + 2 \left(\frac{ag}{r} \right)^2, \quad (2.53)$$

onde o campo magnético $B(r)$ é dado pela (2.32). Nos resultados numéricos mostrados a seguir, adotamos por simplicidade $e = v = 1$.

A Fig. 2.1 mostra os perfis para $g(r)$ e $a(r)$. As soluções para o campo $g(r)$ mostram que os valores máximos e mínimos deste campo independem da vorticidade N , pois partindo da origem, crescem gradualmente a um mesmo valor máximo, conforme (2.40). Em termos do campo escalar ϕ , o gráfico mostra que esse campo tende para seu estado de vácuo à medida que nos afastamos do centro do vórtice. Notamos ainda que ϕ é nulo na origem e à medida que N aumenta, o campo ϕ afasta-se gradativamente da origem e converge de forma acentuada para o valor de vácuo. Já o campo de *gauge* $a(r)$ faz o caminho inverso, ou seja, atinge seu máximo (igual à N) na origem e torna-se nulo no limite $r \rightarrow \infty$, conforme (2.43).

Nas soluções para o campo $B(r)$, temos as mesmas configurações gerais descritas acima, possuindo um decaimento (a partir de seu máximo) gradativo e tornando-se nulo no limite $r \rightarrow \infty$. O campo $B(r)$ atinge seu valor máximo na origem, independentemente do valor de N . Observamos

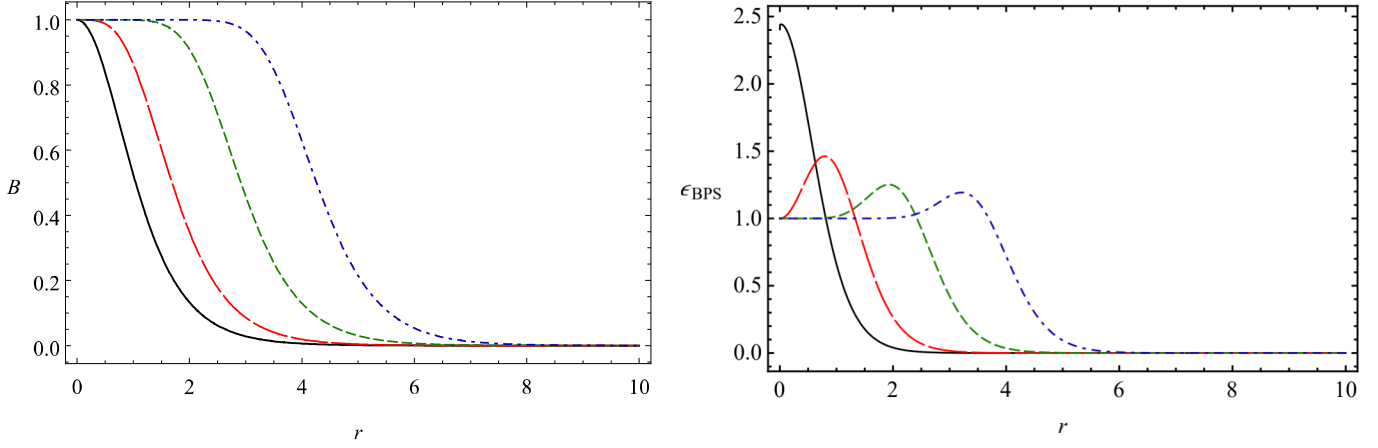


Figura 2.2: Campo magnético $B(r)$ e densidade de energia (à direita) para alguns valores N . Convenções conforme Fig. 2.1.

ainda que, à medida que N cresce, $B(r)$ abrange uma área maior, aumentando seu fluxo magnético; ver Fig. 2.2. Ainda na Fig. 2.2, temos as soluções da densidade de energia $\epsilon_{\text{BPS}}(r)$, onde vemos que somente para o caso de $N = 1$ teremos uma densidade de energia localizada na origem. Para soluções, com $N > 1$, ϵ_{BPS} possui estruturas bem localizadas tipo anel, convergindo para um mesmo valor na origem. Conforme o valor de N aumenta, a energia total vai sendo incrementada em múltiplos de 2π .

2.2 Vórtices auto-duais no modelo de Chern-Simons-Higgs

A teoria de Ginzburg-Landau, primeiro modelo efetivo a descrever a supercondutividade, é análoga à eletrodinâmica de MH. Ambas as teorias suportam configurações de vórtices portadores de fluxo magnético, mas eletricamente neutros. Uma alternativa natural para obter vórtices portadores de fluxo magnético e de carga elétrica consiste em modificar a eletrodinâmica de MH adicionando o termo de Chern-Simons (CS). As primeiras soluções de vórtices auto-duais nesse contexto foram apresentadas nas Refs. [19–21], onde a dinâmica do campo de *gauge* é governada pelo termo CS.

O modelo abeliano de Chern-Simons-Higgs (CSH) é uma teoria planar, $(1+2)$ -dimensões, definido pela densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\mu\nu\alpha} F_{\mu\nu} A_\alpha + |\mathcal{D}_\mu \phi|^2 - V_{\text{CS}}(|\phi|), \quad (2.54)$$

onde a derivada covariante do campo de Higgs $\mathcal{D}_\mu \phi$ é a mesma definida anteriormente na Eq. (2.2) e κ é uma constante de acoplamento. O potencial é

$$V_{\text{CS}}(|\phi|) = \frac{\lambda^2}{4} |\phi|^2 (|\phi|^2 - v^2)^2, \quad (2.55)$$

onde λ é uma constante. Observe que esse modelo tem dois estados de vácuo distintos: um simétrico, $|\phi| = 0$, e um assimétrico, $|\phi| = v$. Consequentemente, o modelo admite dois tipos de configurações: vórtices não-topológicos associados ao vácuo simétrico e vórtices topológicos associados ao vácuo assimétrico. Sendo assim, nosso interesse está apenas no estudo vórtices topológicos, possuidores de carga topológica não nula.

As equações de EL correspondentes ao modelo (2.54) são

$$\frac{\kappa}{2}\epsilon^{\rho\mu\nu}F_{\mu\nu} = J^\rho, \quad (2.56)$$

$$\mathcal{D}^\mu \mathcal{D}_\mu \phi + \frac{\partial V_{\text{CS}}}{\partial \phi^*} = 0, \quad (2.57)$$

onde J^ρ é a densidade de corrente dada em (2.6). A componente $\rho = 0$ em (2.56) fornece a Lei de Gauss, podendo ser escrita como

$$\kappa B = -J_0, \quad (2.58)$$

estabelecendo uma relação direta entre o setor elétrico e magnético do campo de *gauge*. Outra relação interessante obtida a partir da expressão acima via integração direta é

$$\kappa \Phi = -\bar{Q}_e, \quad (2.59)$$

onde

$$\Phi = \int d^2x B, \quad \bar{Q}_e = \int d^2x J_0, \quad (2.60)$$

sendo \bar{Q} é a carga elétrica total. A Eq. (2.59) mostra que os vórtices eletricamente carregados também possuem fluxo magnético.

Escrevendo as equações de movimento no regime estacionário, temos:

$$\kappa B = 2e^2 A_0 |\phi|^2, \quad (2.61)$$

$$\kappa \epsilon_{jk} E_j = J_k, \quad (2.62)$$

$$\nabla^2 \phi - 2ieA_k \partial_k \phi + e^2 A_0^2 \phi - e^2 A_k^2 \phi = \frac{\partial V_{\text{CS}}}{\partial \phi^*}, \quad (2.63)$$

onde $E_j = F_{0j} = -\partial_j A_0$ na Eq. (2.62) é o campo elétrico. Note que, diferentemente do caso MH, a escolha do *gauge* $A_0 = 0$ não pode ser realizada, pois a relação (2.61) não é satisfeita identicamente. Então, concluímos que o setor elétrico é mantido, possibilitando a existência de soluções de vórtices eletricamente carregados.

2.2.1 Energia e equações auto-duais

A densidade de energia estática correspondente ao modelo (2.54) é dada pela seguinte expressão

$$\epsilon = |\mathcal{D}_0\phi|^2 + |\mathcal{D}_k\phi|^2 + V_{\text{CS}}(|\phi|). \quad (2.64)$$

A energia total será então

$$E = \int d^2x \left[\frac{\kappa^2 B^2}{4e^2 |\phi|^2} + |\mathcal{D}_k\phi|^2 + \frac{\lambda^2}{4} |\phi|^2 (|\phi|^2 - v^2)^2 \right], \quad (2.65)$$

onde usamos o potencial (2.55) e a relação

$$|\mathcal{D}_0\phi|^2 = \frac{\kappa^2 B^2}{4e^2 |\phi|^2}. \quad (2.66)$$

Neste ponto, devemos fazer uma importante observação no primeiro termo da Eq. (2.65). Note que o campo magnético deve ir à zero mais rapidamente que $|\phi|$ quando $\phi \rightarrow 0$, sendo necessário para assegurar uma energia finita.

Retornando à Eq. (2.65), usamos a identidade (2.14) e após algumas manipulações, podemos escrever

$$E = \int d^2x \left[|\mathcal{D}_\pm\phi|^2 \pm eB |\phi|^2 + \frac{1}{4} \left[\frac{\kappa B}{e|\phi|} \mp \lambda |\phi| (v^2 - |\phi|^2) \right]^2 \pm \frac{\kappa B \lambda}{2e} (v^2 - |\phi|^2) \pm \frac{1}{2} \epsilon_{jk} \partial_j J_k \right]. \quad (2.67)$$

Assim como no caso do modelo MH, o formalismo BPS é implementado de modo que a energia total seja bem definida em termos do fluxo magnético. Logo, o procedimento pode ser finalizado assumindo o limite Bogomol'nyi, que agora é atingido para $\lambda = 2e^2/\kappa$. Com isso, teremos

$$E = \int d^2x \left\{ |\mathcal{D}_\pm\phi|^2 + \frac{1}{4} \left[\frac{\kappa B}{e|\phi|} \mp \frac{2e^2}{\kappa} |\phi| (v^2 - |\phi|^2) \right]^2 \pm Bev^2 \pm \frac{1}{2} \epsilon_{jk} \partial_j J_k \right\}. \quad (2.68)$$

Novamente, sob condições de contorno adequadas dos campos, o termo de derivada total não contribui para energia total. A energia total então ser escrita como

$$E = E' + E_{\text{BPS}}, \quad (2.69)$$

onde

$$E' = \int d^2x \left\{ |\mathcal{D}_\pm\phi|^2 + \frac{1}{4} \left[\frac{\kappa B}{e|\phi|} \mp \frac{2e^2}{\kappa} |\phi| (v^2 - |\phi|^2) \right]^2 \right\}, \quad E_{\text{BPS}} = \pm ev^2 \int d^2x B. \quad (2.70)$$

Dessa forma, as configurações de mínima energia satisfazem a inequação

$$E \geq E_{\text{BPS}}, \quad (2.71)$$

de modo que os campos saturando no limite BPS, devem obedecer as seguintes relações

$$|\mathcal{D}_\pm\phi|^2 = 0, \quad (2.72)$$

$$B = \pm \frac{2e^3}{\kappa^2} |\phi|^2 (v^2 - |\phi|^2), \quad (2.73)$$

sendo estas as equações auto-duais correspondentes ao modelo CSH (2.54). O potencial auto-dual associado as configurações BPS é dado por

$$V_{\text{CSH}}(|\phi|) = \frac{e^4}{\kappa^2} |\phi|^2 (v^2 - |\phi|^2)^2. \quad (2.74)$$

De posse das equações auto-duais, a partir de (2.64), a densidade de energia BPS pode ser escrita como

$$\epsilon_{\text{BPS}} = 2V_{\text{CSH}}(|\phi|) + |\mathcal{D}_k \phi|^2. \quad (2.75)$$

Já para a energia, podemos escrevê-la em termos do fluxo magnético, assumindo a mesma forma do caso MH:

$$E \geq E_{\text{BPS}} = \pm e v^2 \Phi. \quad (2.76)$$

A diferença agora é que o fluxo magnético está diretamente relacionado com a carga elétrica total dos vórtices. Assim, usando (2.59), podemos escrever a energia total em termos da carga elétrica como

$$E \geq \pm e v^2 \Phi = \frac{e v^2}{\kappa} |\bar{Q}_e|. \quad (2.77)$$

2.2.2 Soluções BPS: Vórtices eletricamente carregados

Seguindo o que foi apresentado no contexto de MH, vamos implementar também o *Ansatz* dado pelas Eqs. (2.26) e (2.27). Adicionalmente, adotamos $A_0 = \bar{\omega}(r)$. As equações EL, (2.61), (2.62) e (2.63), escritas nesse *Ansatz* são dadas por

$$\kappa B = 2e^2 v^2 g^2 \bar{\omega}, \quad (2.78)$$

$$\kappa \bar{\omega}' = 2e v^2 \frac{g^2 a}{r}, \quad (2.79)$$

$$g'' + \frac{g'}{r} - \frac{a^2 g}{r} + e^2 \bar{\omega}^2 g = \frac{1}{2v^2} \frac{dV_{\text{CSH}}}{dg}, \quad (2.80)$$

respectivamente. O campo magnético resulta

$$B(r) = -\frac{a'}{er}, \quad (2.81)$$

enquanto o potencial (2.74) é

$$V_{\text{CSH}}(g) = \frac{e^4 v^6}{\kappa^2} g^2 (g^2 - 1)^2. \quad (2.82)$$

Para as equações BPS (2.72) e (2.73) obtemos

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (2.83)$$

$$\frac{a'}{r} = \pm \frac{2e^4 v^4}{\kappa^2} g^2 (g^2 - 1). \quad (2.84)$$

As soluções de vórtices BPS estáticos obtidos por essas duas equações de primeira ordem também são soluções das equações EL do modelo (2.54). Similar à Eq. (2.52), podemos identificar também a

escala de massa do modelo, dada por

$$m_{\text{CSH}} = \frac{2e^2 v^2}{\kappa}, \quad (2.85)$$

e reescrever (2.84) na forma

$$\frac{a'}{r} = \pm \frac{1}{2} m_{\text{CSH}}^2 g^2 (g^2 - 1). \quad (2.86)$$

A energia das configurações BPS, usando (2.77), é dada por

$$E \geq 2\pi v^2 |N|, \quad (2.87)$$

com o fluxo magnético

$$\Phi = -\frac{|\bar{Q}_e|}{\kappa} = \frac{2\pi |N|}{e}. \quad (2.88)$$

Portanto, nesse contexto também temos uma energia mínima topologicamente quantizada. Observe que temos ainda tanto o fluxo magnético quanto a carga elétrica total quantizados.

2.2.2.1 Comportamento dos campos

Os campos $g(r)$ e $a(r)$ obedecem as mesmas condições de contorno do modelo MH, ou seja,

$$g(0) = 0, \quad a(0) = N, \quad (2.89)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 1. \quad (2.90)$$

Na origem, $r \rightarrow 0$, assumimos uma expansão em série de potências e obtemos os seguintes comportamentos:

$$g(r) \sim G_N (m_{\text{CSH}} r)^N + \dots \quad (2.91)$$

$$a(r) \sim N - \frac{G_N^2}{4(N+1)} (m_{\text{CSH}} r)^{2N+2} + \dots \quad (2.92)$$

O comportamento assintótico dos campos, $r \rightarrow \infty$, fornece

$$g(r) \sim 1 - G_\infty K_0(m_{\text{CSH}} r) + \dots \sim 1 - \frac{G_\infty}{\sqrt{r}} e^{-m_{\text{CSH}} r} \quad (2.93)$$

$$a(r) \sim G_\infty m_{\text{CSH}} r K_1(m_{\text{CSH}} r) + \dots \sim G_\infty \sqrt{r} e^{-m_{\text{CSH}} r}. \quad (2.94)$$

As constantes G_N e G_∞ podem ser determinadas numericamente.

2.2.2.2 Soluções numéricas

As soluções numéricas a seguir foram obtidas via Eqs. (2.83) e (2.84). Resolvido essas equações, podemos encontrar ainda os perfis para o campo elétrico $E_r = -\omega'(r)$ a partir da Eq. (2.79). Por simplicidade, adotamos $e = v = 1$ e ainda $\kappa = 1$.

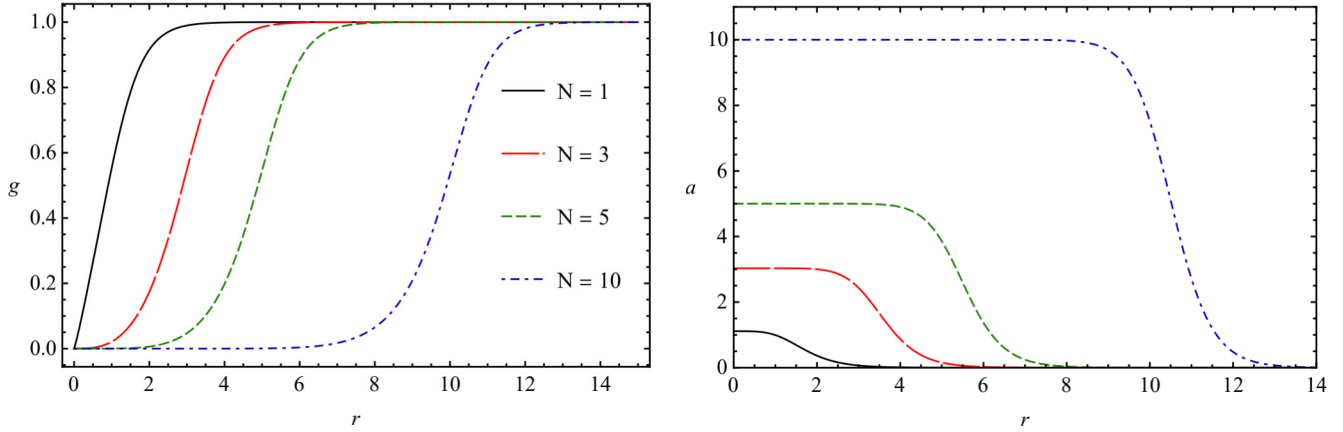


Figura 2.3: Campo de Higgs $g(r)$ e campo de gauge $a(r)$ para alguns valores N .

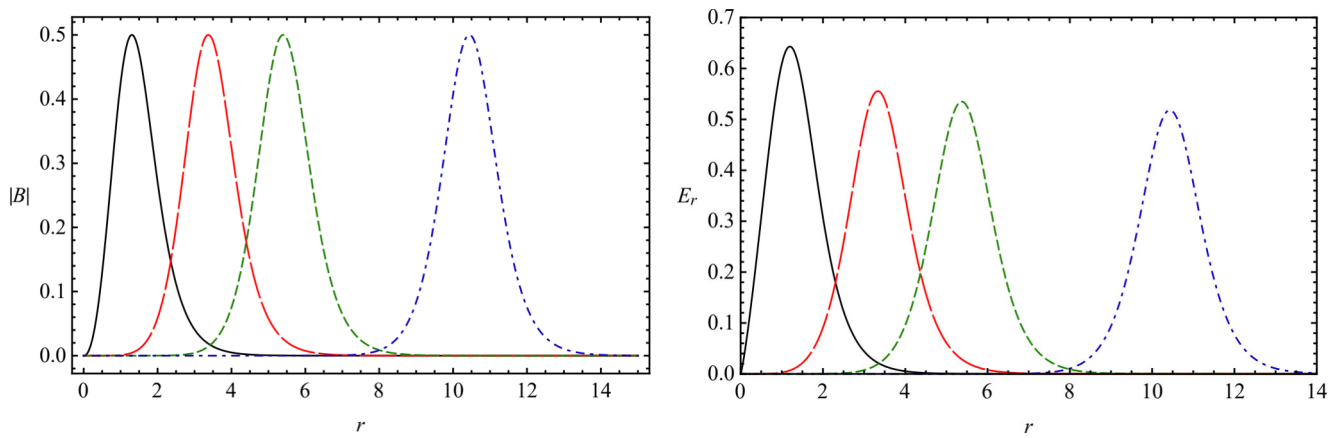


Figura 2.4: Campo magnético e campo elétrico. Convenções conforme Fig. 2.3.

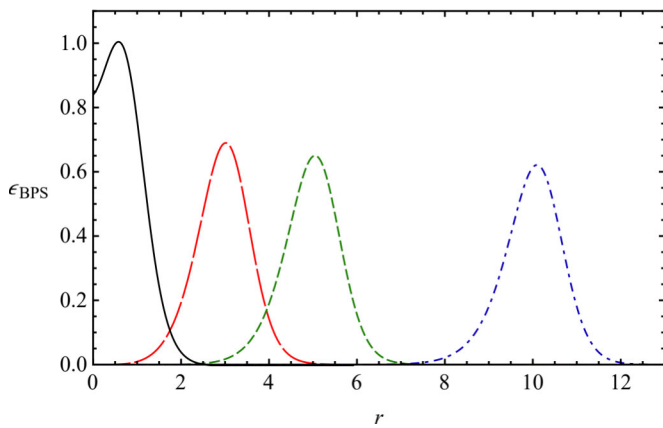


Figura 2.5: Densidade de energia. Convenções conforme Fig. 2.3.

A Fig. 2.3 mostra os perfis para $g(r)$ e $a(r)$. Similar ao modelo MH, o campo $g(r)$ atinge seus valores máximos e mínimos que independem de N . Conforme seu comportamento (2.91), o campo cresce de forma monótona a partir da origem até atingir seu valor máximo. O campo $a(r)$ tem seu máximo na origem igual à N , decrescendo monotonicamente e tornando-se nula no limite $r \rightarrow \infty$.

A Fig. 2.4 mostra os perfis do campo magnético $B(r)$ e campo elétrico $E_r(r)$. Essencialmente, o campo $B(r)$ atinge um máximo num valor finito, sendo este o raio da solução, formando anéis. Observe que o raio aumenta conforme N cresce, mas os valores máximos dos perfis, aparentemente, não dependem de N . Um comportamento análogo acontece para os perfis do campo elétrico $E_r(r)$, mas neste caso os valores máximos parecem depender de N .

A Fig. 2.5 mostra os perfis para a densidade de energia $\epsilon_{\text{BPS}}(r)$. Para $N = 1$, notamos um valor não nulo na origem, atingindo um máximo num raio finito. Para $N > 1$ o comportamento é similar àqueles já descritos, possuindo maior raio conforme N cresce.

3 *Vórtices auto-duais em modelos de Maxwell-Higgs abelianos com setor de gauge k -generalizado*

Neste capítulo apresentamos uma versão do modelo de Maxwell-Higgs generalizado onde somente a parte cinética do campo de *gauge* sofre a k -generalização, que em princípio, poder ser visto como uma versão mais ampla do modelo de Born-Infeld-Higgs [63,64]. Ainda com essa modificação, conseguimos obter equações BPS e, portanto, estados auto-duais k -generalizados. As configurações generalizadas ou estados auto-duais generalizados podem apresentar características análogas às já observadas no contexto da eletrodinâmica de MH usual. Observamos ainda que, escolhendo de maneira adequada o conjunto de funções generalizadoras, conseguimos reproduzir também outras versões generalizadas já presentes na literatura [26,28,65], algumas, por exemplo, com importantes aplicações na descrição da interação entre quarks e glúons [66–68]. Dessa forma, esta nova versão de teoria k -generalizada pode ser a mais abrangente já desenvolvida, podendo também ser estudada em diversos cenários como localização de partículas/campos em um mundo brana 6-D [69], gravitação generalizada, entre outros. Os resultados apresentados neste capítulo estão publicados na revista *Journal of High Energy Physics* [2].

3.1 Alguns modelos de Maxwell-Higgs generalizados

Nesta seção vamos apresentar alguns trabalhos desenvolvidos no âmbito de teorias k -generalizadas usando modelo de Maxwell-Higgs. Na Ref. [26] é investigado um modelo generalizado dado pela seguinte densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + K(X) - V(|\phi|), \quad (3.1)$$

onde $K(X)$ é uma função arbitrária de $X = |\mathcal{D}_\mu\phi|^2$ e o potencial $V(|\phi|)$ também é suposto arbitrário. Neste modelo, porém, não foram encontradas configurações BPS. Ainda assim, encontraram soluções de vórtices estáticos via resolução numérica.

Outro interessante modelo foi estudado na Ref. [28]. Neste, a modificação imposta sobre eletrodinâmica de Maxwell-Higgs é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{h(|\phi|)}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + w(|\phi|)|\mathcal{D}_\mu\phi|^2 - V(|\phi|), \quad (3.2)$$

onde $h(|\phi|)$ e $w(|\phi|)$ são funções arbitrárias que generalizam o modelo. Novamente, o potencial $V(|\phi|)$ é suposto arbitrário. Diferente do primeiro caso, Eq. (3.1), esse modelo generalizado permite a existência de configurações BPS generalizadas. Além das características gerais já observadas

no contexto de MH, esse modelo também pode exibir estruturas similares às aquelas observadas no contexto de CSH.

Um outro cenário de destaque envolvendo teorias generalizadas, é obtido a partir da conhecida eletrodinâmica de Born-Infeld. Esse modelo foi originalmente introduzido para remover a divergência da auto-energia do elétron inserindo uma forma de raiz quadrada, substituindo a densidade Lagrangiana-Maxwell usual [70,71]. Dessa forma, as componentes do tensor de Maxwell ($F_{\mu\nu}$) permanecem limitadas e a energia associada a uma carga pontual torna-se finita. Esta teoria destaca-se da família da eletrodinâmica não-linear por apresentar três importantes propriedades: (i) mantém a teoria de Maxwell no limite de campo fraco, (ii) mostra a dualidade elétrico-magnético [72] e (iii) temos a ausência de ondas de choque e fenômenos de birrefringência referente à propagação de ondas, que pertence à classe de teorias denominadas "completamente excepcional" [73,74].

Dentre alguns trabalhos presentes na literatura, apresentamos em particular um modelo de Born-Infeld-Higgs (BIH), cuja densidade Lagrangiana [63] é dada por

$$\mathcal{L} = \beta^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{2\beta^2}} \right) + |\mathcal{D}_\mu\phi|^2 - V(|\phi|), \quad (3.3)$$

onde β é o parâmetro de Born-Infeld, o qual proporciona modificações tanto no campo escalar quanto no campo de *gauge*, enriquecendo a família de possíveis modelos a serem estudados. Neste caso, temos um termo cinético altamente não-linear controlando a dinâmica do campo de *gauge* de tal modo que o modelo pode ser considerado uma k -generalização do caso usual. Além disso, tal como acontece para o modelo usual de Maxwell-Higgs, uma extensão ou generalização do modelo BIH pode surgir naturalmente pelo acoplamento deste com a gravitação. Uma outra possibilidade de generalização do modelo BIH foi introduzida na Ref. [64], cuja densidade Lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \beta^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{H(|\phi|)}{2\beta^2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}} \right) + w(|\phi|) |\mathcal{D}_\mu\phi|^2 - U(|\phi|), \quad (3.4)$$

onde $H(|\phi|)$ é uma função que generaliza o modelo, $U(|\phi|) = \beta^2[1 - V(|\phi|)]$ é o potencial generalizado, cuja estrutura advém do potencial $V(|\phi|)$, que é restrito à condição $0 < V(|\phi|) \leq 1$, e portanto $U(|\phi|) > 0$ é uma função positiva.

3.2 Modelo de Maxwell-Higgs abeliano com o setor de gauge k -generalizado

Nossa proposta consiste em uma k -generalização da parte cinética do campo de *gauge*, que em princípio, poder ser visto como uma versão mais ampla do modelo de Born-Infeld. Essa nova família de modelos são descritas pela densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = h(|\phi|)K(Y) + w(|\phi|) |\mathcal{D}_\mu\phi|^2 - V(|\phi|), \quad (3.5)$$

onde introduzimos uma função arbitrária $K(Y)$, cujo funcional definimos como

$$Y \equiv -\frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{4\mathcal{U}(|\phi|)}. \quad (3.6)$$

A derivada covariante $\mathcal{D}_\mu\phi$ continua sendo a mesma apresentada no contexto de MH, Eq. (2.2). Além da própria função $K(Y)$, as funções $h(|\phi|)$, $\mathcal{U}(|\phi|)$ e $w(|\phi|)$ também são funções arbitrárias que generalizam o modelo. O potencial $V(|\phi|)$, além de descrever a auto-interação do campo $\phi(x^\mu)$, fornece informações acerca do mínimo absoluto da teoria, isto é, o estado de vácuo do sistema. Em geral, estamos interessados em soluções de mínimos não triviais, $|\phi_{\min}| \neq 0$, o que é obtido, por exemplo, através da quebra espontânea de simetria em potenciais do tipo $|\phi|^4$ ou $|\phi|^6$.

Antes de prosseguir com desenvolvimento do nosso modelo, podemos verificar de imediato a grande abrangência que o mesmo possui. Primeiramente, observe se assumimos as funções na seguinte forma

$$K(Y) \equiv Y = -\frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{4\mathcal{U}(|\phi|)}, \quad (3.7)$$

com

$$\mathcal{U}(|\phi|) = 1, \quad (3.8)$$

conseguimos recuperar o modelo introduzido em [28], dado pela Eq. (3.2); obviamente, se consideramos também $h(|\phi|) = 1$ teremos o modelo usual MH, Eq. (2.1). Como um segundo caso, podemos considerar

$$K(Y) = \beta^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2Y}{\beta^2}} \right), \quad h(|\phi|) = 1 \quad (3.9)$$

com

$$\mathcal{U}(|\phi|) = 1/H(|\phi|). \quad (3.10)$$

o qual fornece o modelo generalizado de Born-Infeld-Higgs investigado em [64], dado na Eq. (3.4). Ainda com a escolha da Eq. (3.9), podemos fazer $w(|\phi|) = 1$ e recuperar o modelo introduzido em [63], Eq. (3.3). Assim, percebemos que os modelos estudados em [63] e [64], bem como aquele apresentado em [28], surgem como casos particulares do nosso modelo k -generalizado (3.5).

Vamos agora explorar e analisar nosso modelo mais detalhadamente. A equação do campo *gauge*, via Eq. (3.5), resulta

$$\partial_\nu \left(\frac{h}{\mathcal{U}} K_Y F^{\nu\mu} \right) = ewJ^\mu, \quad (3.11)$$

onde J^μ é a mesma densidade de corrente conservada dada em (2.6). Por simplicidade, daqui em diante vamos adotar a seguinte notação $K_Y \equiv dK/dY$, indicando a derivada da função $K(Y)$ em relação ao seu argumento Y . Para o campo de Higgs $\phi(x^\mu)$ temos

$$w\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu\phi + (\partial_\mu w)\mathcal{D}^\mu\phi - K\frac{\partial h}{\partial\phi^*} + \frac{h}{\mathcal{U}}YK_Y\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\phi^*} - \frac{\partial w}{\partial\phi^*}|\mathcal{D}_\mu\phi|^2 + \frac{\partial V}{\partial\phi^*} = 0. \quad (3.12)$$

Assumindo o regime estacionário (campos estáticos), obtemos a lei de Gauss generalizada do modelo a partir de (3.11) fazendo $\mu = 0$,

$$\partial_j \left(\frac{h}{\mathcal{U}} K_Y \partial_j A_0 \right) = 2e^2 w A_0 |\phi|^2. \quad (3.13)$$

Aqui também podemos assumir o *gauge* temporal $A_0 = 0$ e, assim como no caso usual da eletrodinâmica planar de MH, temos ausência de campo elétrico, isto é, as soluções estáticas resultam em configurações generalizadas representativas de vórtices não carregados, puramente magnéticos.

Para a lei de Ampère, fazemos $\mu = i$ em (3.11) e obtemos

$$\epsilon_{ij}\partial_j\left(\frac{h}{\mathcal{U}}K_Y B\right) = ewJ_i, \quad (3.14)$$

onde o campo magnético é dado por $B = \epsilon_{ij}\partial_i A_j$.

A equação do campo de Higgs (3.12), no regime estacionário, pode ser escrita na forma

$$w\mathcal{D}_k\mathcal{D}_k\phi + (\partial_j w)\mathcal{D}_j\phi + K\frac{\partial h}{\partial\phi^*} - \frac{h}{\mathcal{U}}YK_Y\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\phi^*} - \frac{\partial w}{\partial\phi^*}|\mathcal{D}_j\phi|^2 - \frac{\partial V}{\partial\phi^*} = 0, \quad (3.15)$$

onde usamos também $A_0 = 0$.

Nas seções seguintes deste capítulo, todo o nosso estudo será realizado com a função $w(|\phi|) = 1$.

3.3 Formalismo BPS

A densidade de energia estática generalizada resulta ser

$$\epsilon = -hK + |\mathcal{D}_k\phi|^2 + V, \quad (3.16)$$

onde a função $h(|\phi|)$ é definida positiva e $K(Y)$ é uma função não-positiva. Para implementar o formalismo BPS, introduzimos uma função $W = W(|\phi|)$ em (3.16). Após algumas manipulações algébricas, escrevemos

$$\begin{aligned} \epsilon &= |\mathcal{D}_\pm\phi|^2 + \frac{\mathcal{U}}{2hK_Y}\left(\frac{h}{\mathcal{U}}K_Y B \mp \sqrt{W}\right)^2 + B\left(\sqrt{W} + e|\phi|^2\right)^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i J_j \\ &\quad - \frac{\mathcal{U}}{2hK_Y}W - \frac{h}{2\mathcal{U}}K_Y B^2 - hK + V, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde usamos mais uma vez a Eq. (2.14). Agora, devemos lembrar que o formalismo BPS consiste em expressar a densidade de energia como uma soma de termos quadráticos, um termo proporcional ao campo magnético e uma derivada total. Em nosso caso, implementamos isso em duas etapas. Primeiro, escolhemos uma função $W(|\phi|)$ como

$$W(|\phi|) = e^2(v^2 - |\phi|^2)^2, \quad (3.18)$$

e, segundo, assumimos

$$V = \frac{\mathcal{U}}{2hK_Y}W + \frac{h}{2\mathcal{U}}K_Y B^2 + hK, \quad (3.19)$$

o que estabelece um vínculo entre o potencial e todas as outras funções que definem o modelo generalizado. Ressaltamos que esta relação para o potencial não é necessariamente arbitrária. No limite BPS, tal relação corresponde exatamente à condição entre componentes do tensor energia-momento $T_{11} + T_{22} = 0$, estabelecidas no formalismo proposto por Shaponisk e Vega [75].

Considerando as Eqs. (3.18) e (3.19), e usando (3.17), a energia total pode ser escrita como

$$E = \int d^2x \epsilon = E' + E_{\text{BPS}}, \quad (3.20)$$

onde

$$E' = \int d^2x \left\{ |D_{\pm}\phi|^2 + \frac{\mathcal{U}}{2hK_Y} \left[\frac{h}{\mathcal{U}} K_Y B \mp e (v^2 - |\phi|^2) \right]^2 \right\}, \quad (3.21)$$

e

$$E_{\text{BPS}} = \pm \int d^2x \left(ev^2 B + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i J_j \right). \quad (3.22)$$

Logo, notamos que as configurações de mínima energia são atingidas no limite

$$E \geq E_{\text{BPS}} = \pm ev^2 \Phi, \quad (3.23)$$

onde identificamos o fluxo magnético

$$\Phi = \int dx^2 B. \quad (3.24)$$

O termo de derivada total na Eq. (3.22) não contribui para a energia total, pois este é nulo sob condições de contorno adequadas do campos. Neste limite de energia mínima (3.23) é alcançado quando os campos saturam no chamado limite BPS, satisfazendo agora as equações auto-duais

$$\mathcal{D}_{\pm}\phi = 0, \quad (3.25)$$

$$\frac{h}{\mathcal{U}} K_Y B = \pm e (v^2 - |\phi|^2). \quad (3.26)$$

Além disso, o potencial (3.19) no limite BPS resulta

$$V_{\text{BPS}} = \frac{h}{\mathcal{U}} K_Y B^2 + hK, \quad (3.27)$$

que deve sempre ser $V \geq 0$. Podemos ainda escrever uma importante relação para densidade de energia a partir de (3.16) como

$$\epsilon_{\text{BPS}} = \frac{h}{\mathcal{U}} K_Y B^2 + |\mathcal{D}_k \phi|^2, \quad (3.28)$$

que, de fato, é positivo-definida uma vez que as funções $h(|\phi|)$, $\mathcal{U}(|\phi|)$ e $K_Y(Y)$ também são.

Assim como acontece no contexto do modelo de MH usual, verificamos que as equações BPS (3.25) e (3.26) também são soluções das equações de EL, correspondente ao modelo (3.5).

3.4 Configurações BPS na ausência de um potencial explícito

Os resultados obtidos para o modelo k -generalizado (3.5) podem ser usados para analisar um interessante caso onde não temos um termo explícito do potencial $V(|\phi|)$. Esta situação é estabelecida se escolhermos $V(|\phi|) = 0$ e $h(|\phi|) = \mathcal{U}(|\phi|)$. Agora, a densidade Lagrangiana do modelo assume a forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{U}(|\phi|) K(Y) + |\mathcal{D}_{\mu}\phi|^2, \quad (3.29)$$

Obviamente, as equações de movimento do modelo são modificadas, mas continuamos a ter soluções eletricamente neutras. Para as configurações BPS, a relação da energia total é exatamente a mesma (3.22). A equação BPS (3.25) permanece a mesma, enquanto a segunda relação é dada por

$$K_Y B = \pm e (v^2 - |\phi|^2). \quad (3.30)$$

A Eq. (3.27) é então reduzida

$$K_Y B^2 + K \mathcal{U}_{\text{BPS}} = 0, \quad (3.31)$$

onde $\mathcal{U}_{\text{BPS}}(|\phi|)$ denota a forma auto-dual da função $\mathcal{U}(|\phi|)$, dada explicitamente por

$$\mathcal{U}_{\text{BPS}}(|\phi|) = -\frac{2U_{\text{MH}}(|\phi|)}{K(Y)K_Y(Y)}, \quad (3.32)$$

onde a função $U_{\text{MH}}(|\phi|)$ corresponde ao potencial auto-dual do modelo MH, Eq. (2.22), dado por

$$U_{\text{MH}}(|\phi|) = \frac{e^2}{2}(v^2 - |\phi|^2)^2. \quad (3.33)$$

Observe na Eq. (3.32) que a função $\mathcal{U}_{\text{BPS}}(|\phi|)$ pode desempenhar o papel de um potencial auto-dual no modelo k -generalizado (3.29).

3.5 Modelos auto-duais tipo-gêmeos

Teorias definidas por densidades Lagrangianas diferentes e exibindo exatamente as mesmas soluções, com as mesmas densidades de energia e mesma energia total são denominados modelos "gêmeos" (*twins*) [76]. Veremos que nossa densidade Lagrangiana (3.5) permite descrever diferentes modelos com as mesmas configurações auto-duais (possuem exatamente as mesmas equações BPS), incluindo suas densidades de energia e energia total, sendo então denominados de modelos BPS tipo-gêmeos (*twinlike*) [77–80].

3.5.1 Modelos auto-duais tipo-gêmeos $|\phi|^4$

Podemos obter modelos tipo-gêmeos auto-duais correspondentes ao modelo MH se garantimos a existência da seguinte equação BPS

$$B = \pm e(v^2 - |\phi|^2). \quad (3.34)$$

Obviamente, a equação BPS (3.25) é a mesma obtida no contexto usual de MH. Logo, o modelo descrito por (3.5) proporciona a Eq. (3.34) se impomos o seguinte vínculo na equação BPS (3.26),

$$hK_Y = \mathcal{U}. \quad (3.35)$$

Assim, o potencial auto-dual (3.27) será reduzido à forma

$$V_{\text{BPS}} = 2U_{\text{MH}} + hK, \quad (3.36)$$

e a densidade de energia BPS generalizada (3.28),

$$\epsilon_{\text{BPS}} = B^2 + |\mathcal{D}_k \phi|^2, \quad (3.37)$$

correspondendo exatamente à densidade de energia (2.23) do modelo MH usual. Note que a energia total em ambos os modelos também serão as mesmas, sendo dadas por (2.45) e (3.23). Observe que as equações BPS (3.25) e (3.26) não dependem explicitamente das funções $h(|\phi|)$, $\mathcal{U}(|\phi|)$ e $K_Y(Y)$. Então, podemos concluir que existem infinitos modelos tipo-gêmeos à MH, cada um podendo ser

escolhido de forma que tais funções generalizadoras obedeçam a condição (3.35).

3.5.2 Modelos auto-duais tipo-gêmeos $|\phi|^6$

Mostraremos que a densidade Lagrangiana (3.5) também suporta modelos tipo-gêmeos possuindo soluções auto-duais eletricamente neutras, cujas equações BPS são exatamente as mesmas descritas no contexto de modelos CSH. Neste caso, a equação BPS (3.26) deve satisfazer o vínculo

$$hK_Y = \frac{\kappa^2}{2e^2} \frac{\mathcal{U}}{|\phi|^2}, \quad (3.38)$$

sendo agora escrita como

$$B = \pm \frac{2e^3}{\kappa^2} |\phi|^2 (v^2 - |\phi|^2), \quad (3.39)$$

sendo exatamente àquela encontrada no contexto do modelo de CSH. Para o potencial auto-dual, temos

$$V_{\text{BPS}} = 2U_{\text{CSH}} + hK,$$

onde U_{CSH} representa o potencial auto-dual do modelo de CSH, Eq. (2.74), dado por

$$U_{\text{CSH}} = \frac{e^4}{\kappa^2} |\phi|^2 (v^2 - |\phi|^2)^2. \quad (3.40)$$

Finalmente, a densidade de energia será

$$\epsilon_{\text{BPS}} = 2U_{\text{CSH}} + |\mathcal{D}_k \phi|^2, \quad (3.41)$$

que também é exatamente a mesma do modelo de CSH, Eq. (2.75). Assim como o caso da seção anterior, aqui também existem incontáveis modelos possuindo as mesmas configurações BPS àqueles descritas no contexto da eletrodinâmica CSH mas, no atual contexto, tais configurações são eletricamente neutras. Novamente, existe um modelo para cada conjunto de funções satisfazendo a Eq. (3.38).

3.6 Alguns novos modelos k -generalizados

Mostraremos a existência de modelos k -generalizados descritos pela densidade Lagrangiana (3.5), cujas equações BPS (3.25) e (3.26) tornam-se linear no campo magnético, assim como acontece nos contextos de modelos MH e CSH. De modo geral, podemos escrever

$$\mathcal{D}_\pm \phi = 0, \quad (3.42)$$

$$B = \pm \mathcal{V}, \quad (3.43)$$

onde $\mathcal{V} = \mathcal{V}(V_{\text{BPS}}, h, \mathcal{U})$ é uma função do potencial auto-dual e demais funções generalizadoras. Entre esses modelos vamos incluir também os casos tipo-gêmeos apresentados na seção anterior.

3.6.1 Modelo simples

Vamos mostrar dois exemplos de modelos simples que podemos abordar no atual contexto de teoria k -generalizada. O primeiro deles, é um modelo capaz de engendrar soluções BPS definido por

$$K(Y) = -\alpha(-Y)^\beta, \quad (3.44)$$

com $\alpha, \beta > 0$ são parâmetros arbitrários. Lembrando que a primeira equação BPS (3.42) não é alterada, mas a relação (3.26) fornece agora

$$B = \pm \frac{2\beta}{2\beta - 1} \frac{V_{\text{BPS}}}{\sqrt{2U_{\text{MH}}}}, \quad (3.45)$$

onde $\beta > 1/2$ e o potencial auto-dual será

$$V_{\text{BPS}} = \left[\frac{(2\beta - 1)^{2\beta - 1}}{\alpha \beta^{2\beta}} \right]^{1/(2\beta - 1)} \left(\frac{\mathcal{U}U_{\text{MH}}}{h^{1/\beta}} \right)^{\beta/(2\beta - 1)}, \quad (3.46)$$

sendo então expresso em termos das funções arbitrárias $h(|\phi|)$ e $\mathcal{U}(|\phi|)$. Logo, as equações BPS podem ser fixadas se conhecemos as funções $h(|\phi|)$ e $\mathcal{U}(|\phi|)$ ou escolhendo um potencial auto-dual V_{BPS} . Por exemplo, se consideramos $V_{\text{BPS}} = U_{\text{MH}}$, um potencial $|\phi|^4$, a Eq. (3.45) será

$$B = \pm \frac{\beta}{2\beta - 1} e \left(v^2 - |\phi|^2 \right), \quad (3.47)$$

sendo, claramente, uma versão generalizada para (3.34). Analogamente, escolhendo $V_{\text{BPS}} = U_{\text{CSH}}$, um potencial $|\phi|^6$, teremos

$$B = \pm \frac{2\beta}{2\beta - 1} \frac{e^3}{\kappa^2} |\phi|^2 \left(v^2 - |\phi|^2 \right), \quad (3.48)$$

uma versão generalizada para (3.39).

Um segundo modelo bem simples pode ser obtido se consideramos a seguinte condição

$$\frac{B^2}{2\mathcal{U}_{\text{BPS}}} = \Delta, \quad (3.49)$$

onde $\Delta > 0$ é uma constante. Neste caso, devemos considerar $Y = -\Delta$ e, conseqüentemente, $K(\Delta)$ e $K_Y(\Delta)$ serão também constantes bem definidas. Com essa condição, a equação BPS (3.26) fornece

$$h = \frac{\sqrt{\Delta \mathcal{U} U_{\text{MH}}}}{\Delta K_Y(\Delta)}. \quad (3.50)$$

Usando essas Eqs. (3.49) e (3.50), podemos simplificar a relação do potencial auto-dual, sendo agora dada por

$$V_{\text{BPS}} = \frac{2\Delta K_Y(\Delta) + K(\Delta)}{\Delta K_Y(\Delta)} \sqrt{\Delta \mathcal{U} U_{\text{MH}}}, \quad (3.51)$$

Esta relação será sempre não-negativa desde que a condição $2\Delta K_Y(\Delta) + K(\Delta) > 0$ seja satisfeita. A equação BPS (3.26), sob a condição (3.49), pode ainda ser expressa em termos do potencial (3.51) como

$$B = \pm \frac{2\Delta K_Y(\Delta)}{2\Delta K_Y(\Delta) + K(\Delta)} \frac{V_{\text{BPS}}}{\sqrt{2U_{\text{MH}}}}. \quad (3.52)$$

Podemos concluir que a condição (3.49), além de determinar completamente estruturas BPS,

também engendra uma família infinita de soluções configurações auto-duais sendo descritas pela escolha de uma função $\mathcal{U}(|\phi|)$ e diferentes valores de Δ . De forma alternativa, a Eq. (3.51) permite fixar uma função $\mathcal{U}(|\phi|)$ escolhendo-se o potencial auto-dual V_{BPS} desejado. Se escolhermos, por exemplo, um potencial tipo $|\phi|^4$, $V_{\text{BPS}} = U_{\text{MH}}$, a equação BPS (3.52) fornece

$$B = \pm \frac{\Delta K_Y(\Delta)}{2\Delta K_Y(\Delta) + K(\Delta)} e \left(v^2 - |\phi|^2 \right). \quad (3.53)$$

Por outro lado, podemos também escolher um potencial tipo $|\phi|^6$, $V_{\text{BPS}} = U_{\text{CSH}}$, e assim a equação BPS (3.52) será

$$B = \pm \frac{2\Delta K_Y(\Delta)}{2\Delta K_Y(\Delta) + K(\Delta)} \frac{e^3}{\kappa^2} |\phi|^2 \left(v^2 - |\phi|^2 \right). \quad (3.54)$$

3.6.2 Modelos k -generalizados na ausência de um potencial explícito

Conforme já mencionado na Sec. 3.4, também podemos obter configurações BPS na ausência de um potencial V_{BPS} . Vamos estudar tais modelos impondo a seguinte condição

$$\frac{B^2}{2\mathcal{U}_{\text{BPS}}} = \Delta, \quad (3.55)$$

com $\Delta > 0$ é uma constante e \mathcal{U}_{BPS} representando o potencial auto-dual dado por (3.32). A partir da relação (3.31), podemos escrever

$$K(\Delta) = -2\Delta K_Y(\Delta), \quad (3.56)$$

onde $K(\Delta)$ e $K_Y(\Delta)$ são agora funções de Δ nesta relação. Esta condição permite encontrar todos os possíveis valores de Δ para um dado modelo definido pela função $K(Y)$. A segunda equação BPS (3.30) e o respectivo potencial auto-dual (3.32), com K e K_Y no funcional Δ , são dados por

$$B = \pm \frac{e}{K_Y(\Delta)} \left(v^2 - |\phi|^2 \right), \quad (3.57)$$

$$\mathcal{U}_{\text{BPS}}(|\phi|) = \frac{1}{\Delta K_Y^2(\Delta)} \frac{e^2}{2} \left(v^2 - |\phi|^2 \right)^2, \quad (3.58)$$

sendo expressões matematicamente similares àquelas encontradas no contexto MH.

Devemos ressaltar que a condição (3.55) pode fornecer somente modelos que admitem potenciais tipo $|\phi|^4$.

3.7 Soluções numéricas

Nesta seção, vamos implementar o *Ansatz* usual dado pelas Eqs. (2.26) e (2.27). Assim como no modelo MH, os campos $g(r)$ e $a(r)$ são funções regulares bem comportadas, possuindo configurações de energia finita e satisfazendo também as condições de contorno (2.40) e (2.43). O campo magnético continua sendo dado pela relação (2.32), enquanto a densidade de energia (3.28) nesse *Ansatz* resulta

$$\epsilon_{\text{BPS}} = \frac{h}{\mathcal{U}} K_Y B^2 + 2v^2 \left(\frac{ag}{r^2} \right)^2. \quad (3.59)$$

A energia total BPS (3.23) é dada por

$$E_{\text{BPS}} = 2\pi v^2 |N|, \quad (3.60)$$

possuindo também a mesma forma daquela obtida no modelo MH, Eq. (2.45).

3.7.1 Vórtices em modelos $|\phi|^4$

Como já enfatizado antes, a primeira equação BPS (3.25) não sofre qualquer modificação como efeito da generalização obtida a partir da densidade Lagrangiana (3.5). Temos visto, porém, que a segunda BPS é modificada, dependendo diretamente do potencial auto-dual escolhido. Vamos resumir em uma mesma expressão as configurações BPS para potenciais tipo $|\phi|^4$ estudadas até o momento. Tais estados BPS podem então ser descritos pelo conjunto de equações BPS

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (3.61)$$

$$B = -\frac{a'}{er} = \pm F_{(4)} e v^2 (1 - g^2), \quad (3.62)$$

onde $F_{(4)} > 0$ (sendo uma função de β ou Δ) é dado por

$$F_{(4)} = \begin{cases} \frac{\beta}{2\beta - 1}, & \text{Eq. (3.47),} \\ \frac{\Delta K_Y(\Delta)}{2\Delta K_Y(\Delta) + K(\Delta)}, & \text{Eq. (3.53),} \\ \frac{1}{K_Y(\Delta)}, & \text{Eq. (3.57).} \end{cases} \quad (3.63)$$

A densidade de energia BPS também pode ser expressa em termos de $F_{(4)}$, assumindo a forma geral

$$\epsilon_{\text{BPS}} = 2F_{(4)} U_{\text{MH}} + 2v^2 \left(\frac{ag}{r^2}\right)^2. \quad (3.64)$$

O comportamento dos campos é determinado resolvendo o conjunto de equações BPS (3.61) e (3.62), satisfazendo as condições de contorno (2.40) e (2.43). Logo, em torno da origem $r \rightarrow 0$, os campos obedecem o seguinte comportamento geral:

$$g(r) \sim G_N^{(F_{(4)})} r^{|N|} + \dots, \quad (3.65)$$

$$a(r) \sim N \mp \frac{e^2 v^2}{2} F_{(4)} r^2 + \dots. \quad (3.66)$$

Para o comportamento assintótico, $r \rightarrow \infty$, temos

$$g(r) \sim 1 - G_\infty^{(F_{(4)})} \frac{e^{-m_4 r}}{\sqrt{r}} + \dots, \quad (3.67)$$

$$a(r) \sim m_4 G_\infty^{(F_{(4)})} \sqrt{r} e^{-m_4 r} + \dots. \quad (3.68)$$

As constantes $G_N^{(F_{(4)})} > 0$ e $G_\infty^{(F_{(4)})}$ podem ser determinadas numericamente. O termo de massa

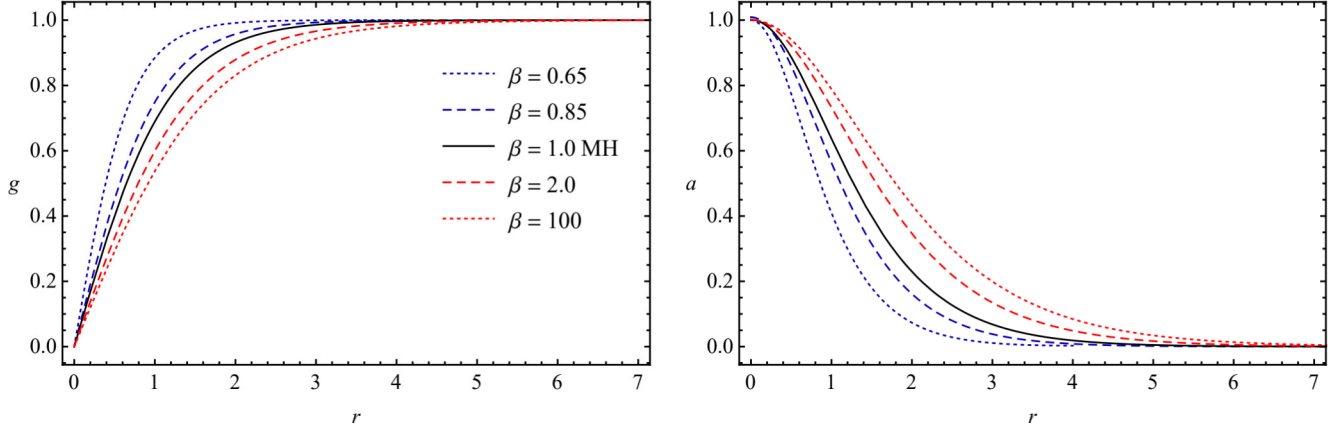


Figura 3.1: Campo de Higgs $g(r)$ e campo de gauge $a(r)$ assumindo o potencial auto-dual (3.33) com $F_{(4)}$ dado por (3.47).

generalizado m_4 é dado por

$$m_4 = m_{\text{MH}} \sqrt{F_{(4)}}, \quad (3.69)$$

onde $m_{\text{MH}} = \sqrt{2}ev$, relação já apresentada em (2.51).

Para apresentar as soluções numéricas analisando modelos com potencial tipo $|\phi|^4$, vamos adotar a função $F_{(4)} = F_{(4)}^{(\beta)}$ dada por (3.47), onde $\beta > 1/2$. Por simplicidade, adotamos ainda $e = v = 1$ e configurações BPS com o *winding number* $N = 1$.

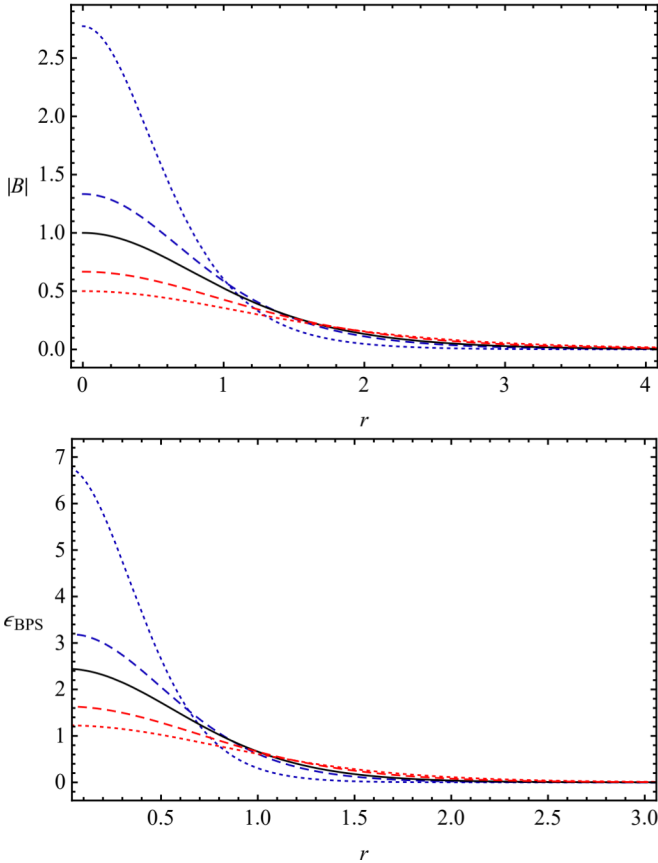


Figura 3.2: Campo magnético e densidade de energia BPS. Convenções conforme Fig. 3.1.

Uma breve análise sobre a relação (3.69) mostra que no intervalo $1/2 < \beta < 1$, a massa m_4 cresce até $\beta \rightarrow 1/2$, enquanto $m_4 \rightarrow m_{\text{MH}}$ para $\beta \rightarrow 1$. Por outro lado, para $\beta > 1$, a massa m_4 diminui continuamente atingindo seu mínimo no limite $\beta \rightarrow \infty$. Esses efeitos podem ser percebidos pelos perfis dos campos $g(r)$ e $a(r)$, onde a variação de β reflete o tamanho do núcleo do vórtice e, conseqüentemente sua massa. A Fig. 3.1 mostra os perfis do campo de Higgs $g(r)$ e campo de gauge $a(r)$.

A Fig. 3.2 mostra os perfis para o campo magnético e densidade de energia. Para ambas as funções, temos amplitudes máximas na origem crescendo no limite $\beta \rightarrow 1/2$. Explicitamente, o comportamento na origem é dado por

$$B(0) = ev^2 F_{(4)}^{(\beta)}, \quad (3.70)$$

$$\epsilon_{\text{BPS}}(0) = e^2 v^4 F_{(4)}^{(\beta)} + 2v^2 \left[G_1^{(F_{(4)})} \right]^2. \quad (3.71)$$

Analisando a função $F_{(4)}^{(\beta)} = \beta / (2\beta - 1)$ conforme assumimos diferentes valores de β , fica claro porque observamos diferentes amplitudes. No intervalo $1/2 < \beta < 1$ as amplitudes são maiores, pois $F_{(4)}^{(\beta)}$ cresce quando $\beta \rightarrow 1/2$; quando $\beta > 1$, $F_{(4)}^{(\beta)} \rightarrow 1/2$ e as amplitudes devem diminuir até atingir um mínimo. Vemos, por exemplo, claramente o campo magnético atingindo o limite $B(0) \rightarrow 1/2$ para $\beta \rightarrow \infty$.

3.7.2 Vórtices em modelos $|\phi|^6$

Seguindo o mesmo procedimento apresentado acima, os modelos que admitem potenciais auto-duais tipo $|\phi|^6$ estudados até aqui, podem ser resumidos pelas equações BPS generalizadas escritas como

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (3.72)$$

$$B = -\frac{a'}{er} = \pm F_{(6)} \frac{2e^3 v^4}{\kappa^2} g^2 (1 - g^2), \quad (3.73)$$

onde $F_{(6)} > 0$ (sendo uma função de β ou Δ) é dado por

$$F_{(6)} = \begin{cases} \frac{\beta}{2\beta - 1}, & \text{Eq. (3.48),} \\ \frac{\Delta K_Y(\Delta)}{2\Delta K_Y(\Delta) + K(\Delta)}, & \text{Eq. (3.54).} \end{cases} \quad (3.74)$$

A densidade de energia em termos de $F_{(6)}$ é dada por

$$\epsilon_{\text{BPS}} = 2F_{(6)} U_{\text{CSH}} + 2v^2 \left(\frac{ag}{r^2} \right)^2. \quad (3.75)$$

O comportamento dos campos para $r \rightarrow 0$ é

$$g(r) \sim G_N^{(F_{(6)})} r^{|N|} + \dots, \quad (3.76)$$

$$a(r) \sim N \mp F_{(6)} \frac{e^4 v^4}{\kappa^2} \frac{G_N^{(F_{(6)})}}{|N| + 1} r^{2|N|+2} + \dots. \quad (3.77)$$

O comportamento assintótico, $r \rightarrow \infty$, é dado por

$$g(r) \sim 1 - G_\infty^{(F_{(6)})} \frac{e^{-m_6 r}}{\sqrt{r}} + \dots, \quad (3.78)$$

$$a(r) \sim \frac{G_\infty^{(F_{(6)})}}{m_6} \sqrt{r} e^{-m_6 r} + \dots. \quad (3.79)$$

As constantes $G_N^{(F_{(6)})} > 0$ e $G_\infty^{(F_{(6)})}$ também podem ser determinadas numericamente. A massa auto-dual generalizada m_6 é dada por

$$m_6 = m_{\text{CSH}} \sqrt{F_{(6)}}, \quad (3.80)$$

com $m_{\text{CSH}} = 2e^2 v^2 / \kappa$ sendo a massa auto-dual usual do contexto de modelos BPS CSH, Eq. (2.85). Assim como no caso anterior, para potenciais auto-duais do tipo $|\phi|^4$, vamos considerar $F_{(6)}^{(\beta)} = \beta / (2\beta - 1)$ em nossa análise numérica nesta seção. Adotamos $e = v = \kappa = N = 1$.

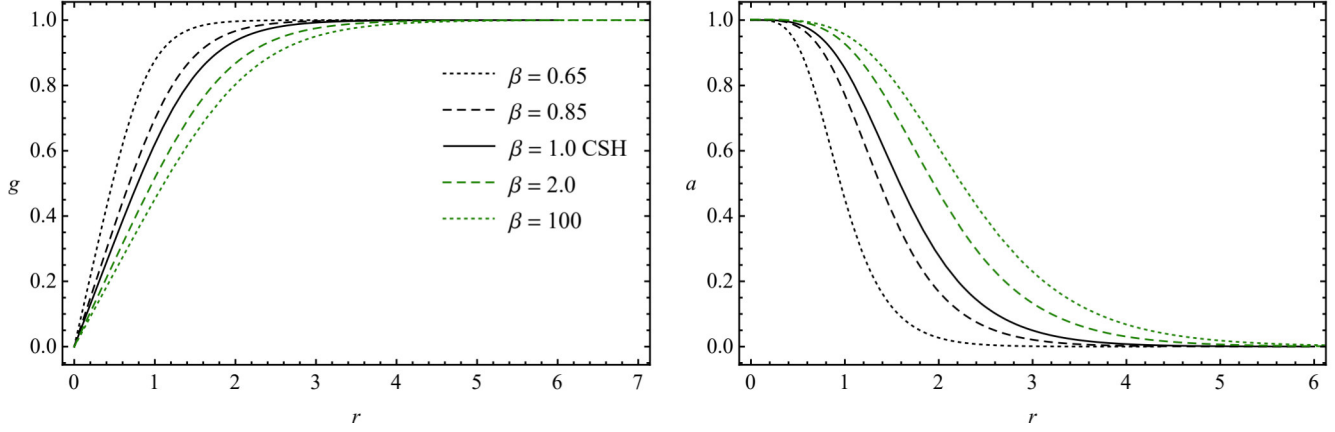
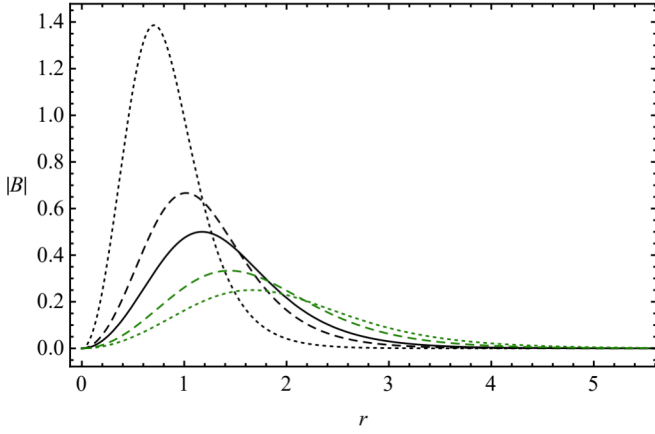
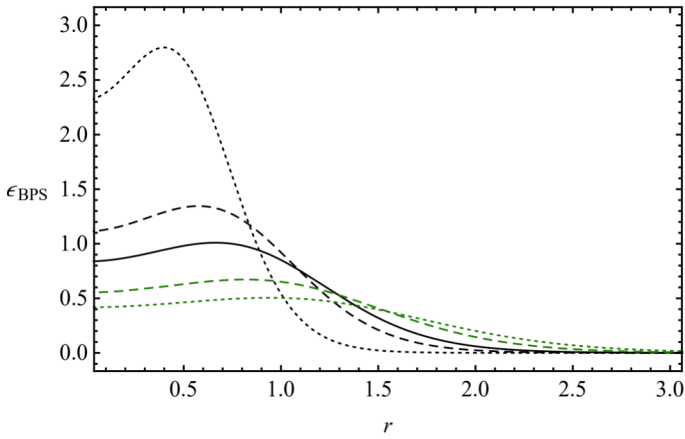


Figura 3.3: Campo de Higgs $g(r)$ e campo de gauge $a(r)$ assumindo o potencial auto-dual (3.40).



(a) Campo magnético $B(r)$.



(b) Densidade de energia $\epsilon_{\text{BPS}}(r)$.

Figura 3.4: Campo magnético e densidade de energia BPS. Convenções conforme Fig. 3.3.

A Fig. 3.3 mostra os perfis para os campos $g(r)$ e $a(r)$. As características gerais de tal comportamento são as mesmas já discutidas na seção anterior para o caso de modelos com potenciais auto-duais do tipo $|\phi|^4$. A diferença é que a massa bosônica em questão é agora governada pela (3.80).

Para o campo magnético e densidade de energia BPS temos algumas mudanças significativas no comportamento, ver Fig. 3.4. Em ambos os casos, as soluções formam anéis em torno da origem com um “raio” finito, cuja amplitude máxima afasta-se da origem com o crescimento de $\beta > 1/2$. Explicitamente, a amplitude máxima para $B(r)$ é dada por

$$B_{\text{max}}(r^*) = \frac{e^3 v^4}{2\kappa^2} \frac{\beta}{2\beta - 1}, \quad (3.81)$$

para um r^* tal que $g(r^*) = \sqrt{2}/2$. A densidade de energia na origem possui valores finitos, obedecendo a relação

$$\epsilon_{\text{BPS}}(0) = 2v^2 \left[G_1^{(F_{(6)})} \right]^2, \quad (3.82)$$

tornando-se menores à medida que β cresce para valores $\beta > 1/2$.

3.7.3 Vórtices BPS não-localizados

Nos exemplos anteriores, apresentamos soluções de vórtices BPS cujo comportamento dos campos no limite assintótico, $r \rightarrow \infty$, possuem um decaimento tipo exponencial. Vamos agora mostrar que nosso modelo k -generalizado definido pela densidade Lagrangiana (3.5) pode engendrar também os chamados vórtices não-localizados, isto é, soluções obedecendo um decaimento tipo potência no limite $r \rightarrow \infty$. Essas soluções podem ser descritas pela escolha do modelo particular (3.44), cuja segunda BPS é dada por (3.45). Uma versão de soluções não-localizadas pode ser obtida escolhendo-se o potencial auto-dual V_{BPS} como

$$V_{\text{BPS}} = \frac{e^2 v^4}{2} (1 - g^2)^{2+2/\gamma}, \quad (3.83)$$

que pode ser obtido através de escolhas adequadas das funções $h(g)$ e $\mathcal{U}(g)$ em (3.46). O parâmetro $\gamma > 0$ é quem define o decaimento tipo potência ($r^{-\gamma}$) no limite $r \rightarrow \infty$. As configurações auto-duais são descritas pelas equações BPS

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (3.84)$$

$$B = \pm \frac{\beta}{2\beta - 1} e v^2 (1 - g^2)^{1+2/\gamma}, \quad (3.85)$$

onde é possível notar que no limite $\gamma \rightarrow \infty$ e $\beta \rightarrow 1$, recuperamos o modelo MH usual. A densidade de energia é dada por

$$\epsilon_{\text{BPS}} = \frac{2\beta}{2\beta - 1} V_{\text{BPS}} + 2v^2 \left(\frac{ag}{r^2} \right)^2. \quad (3.86)$$

O comportamento das funções $g(r)$ e $a(r)$ em torno da origem

$$g(r) \sim G_N^{(\gamma)} r^{|N|} + \dots, \quad (3.87)$$

$$a(r) \sim N \mp e^2 v^2 \frac{\beta}{2(2\beta - 1)} r^2 + \dots. \quad (3.88)$$

No limite $r \rightarrow \infty$, obtemos

$$g(r) \sim 1 - C_\infty \frac{1}{r^\gamma} + \dots, \quad (3.89)$$

$$a(r) \sim \gamma C_\infty \frac{1}{r^\gamma} + \dots, \quad (3.90)$$

onde definimos a constante

$$C_\infty = \frac{1}{2e^\gamma v^\gamma} \left[\frac{\gamma^2 (2\beta - 1)}{2\beta} \right]^{\gamma/2}. \quad (3.91)$$

É bem conhecido na literatura que o chamado limite de *London* [81] proporciona um comportamento dos campos de um vórtice no modelo completo de Ginzburg-Landau, que prevê corretamente um campo magnético variando monotonicamente com decaimento exponencialmente localizado para $r \rightarrow \infty$. No entanto, temos também vórtices com campo magnético não-localizado, cujo perfil decai lentamente. Esses vórtices não-localizados com um decaimento tipo potência tem sido obtido no estudo de campos magnéticos não-localizados em supercondutores [82]. Mais recentemente, tais comportamentos também foram investigados no contexto de vórtice diamagnéticos gerados por uma teoria Chern-Simons [83].

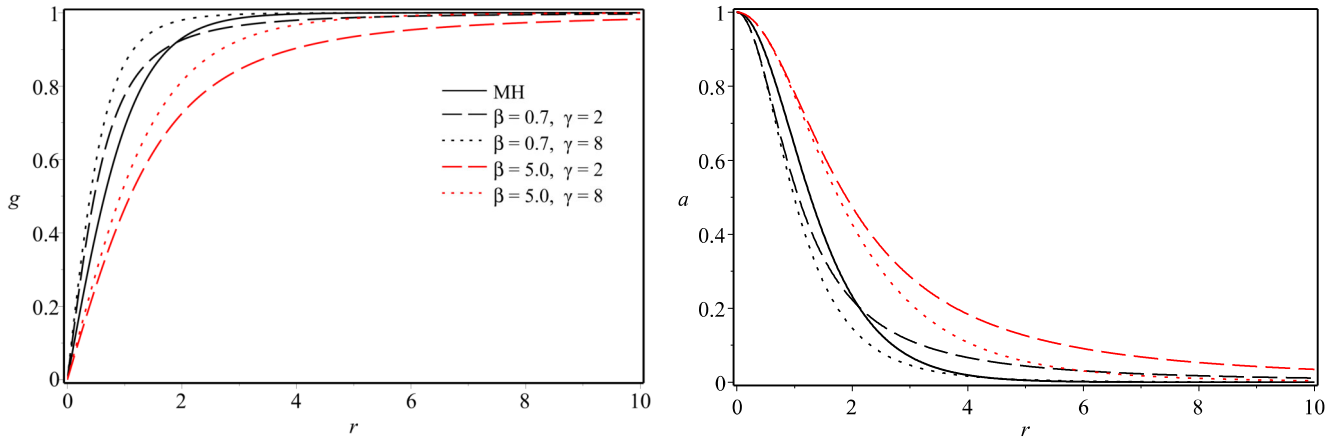
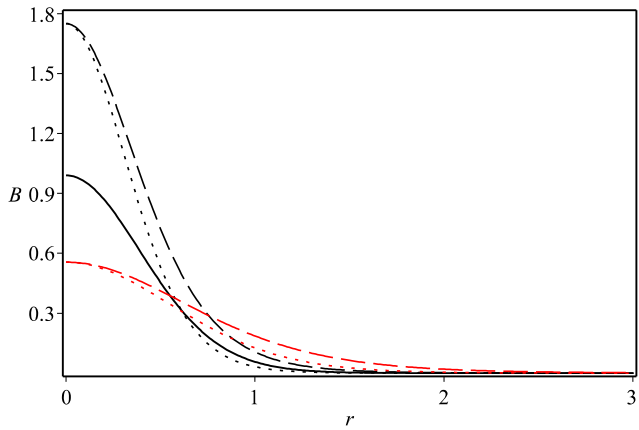
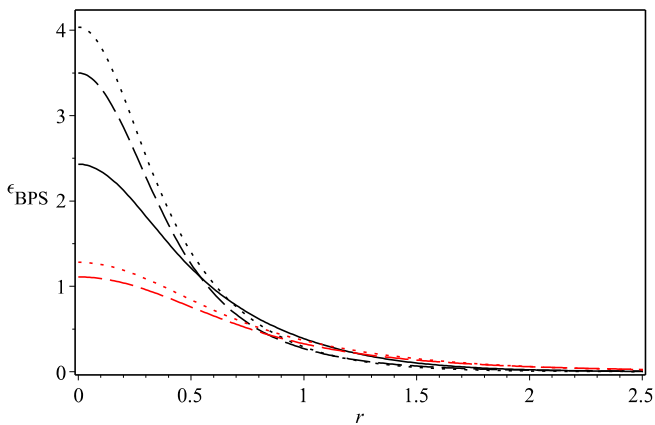


Figura 3.5: Campo de Higgs $g(r)$ e campo de gauge $a(r)$ assumindo o potencial auto-dual (3.83).



(a) Campo magnético $B(r)$.



(b) Densidade de energia $\epsilon_{\text{BPS}}(r)$.

Figura 3.6: Campo magnético e densidade de energia BPS. Convenções conforme Fig. 3.5.

As soluções numéricas correspondentes as equações BPS (3.84) e (3.85) são mostradas nas Figs. 3.5 e 3.6. Em todos os casos, fixamos $e = v = N = 1$. Como temos dois parâmetros livres, β e γ , mostramos os efeitos de um pequeno e um grande valor β para diferentes valores de γ , comparando com o caso usual MH que é atingindo no limite $\gamma \rightarrow \infty$ e $\beta \rightarrow 1$.

Analisando os campos $g(r)$ e $a(r)$, observamos no intervalo $1/2 < \beta < 1$ os campos aproximando-se cada vez mais da origem com o crescimento de γ . Por outro lado, para um valor fixo com $\beta > 1$, os campos aproximam-se do comportamento descrito pelo modelo usual MH (linha preta sólida) para grandes valores de γ .

Para o campo magnético $B(r)$ observamos que o valor β estabelece um valor finito na origem maior para $1/2 < \beta < 1$ e menor quando $\beta > 1$, quando comparado com o caso usual MH. Diferentes valores do parâmetro γ têm o efeito de aproximar (γ grande) ou afastar (γ pequeno) os perfis em relação à origem.

A densidade de energia BPS, por sua vez, tem um comportamento similar à esse descrito para o campo magnético. A diferença é que as soluções atingem diferentes valores máximos na origem para um mesmo β . Desta forma, concluímos que γ controla a amplitude máxima na origem para um β fixo.

4 Sólitos BPS no modelo baby Skyrme-Maxwell

O modelo Skyrme [84] é uma versão generalizada do modelo- σ (*sigma-model*) não linear em $(3+1)$ -dimensões. Particularmente, existe uma versão $(2+1)$ -dimensional do modelo de Skyrme que foi considerado inicialmente em [37–39] e depois investigada em [40, 41], onde atribuiu-se o termo “Baby Skyrmion” para descrever a versão planar do modelo Skyrme original.

Neste capítulo apresentamos uma breve revisão do modelo baby Skyrme-Maxwell [48], isto é, o modelo baby Skyrme acoplado minimamente a um campo de *gauge* abeliano cuja dinâmica é governada pelo termo de Maxwell. Esse modelo admite configurações de sólitos topológicos auto-duais, ou seja, soluções estáveis saturando um limite BPS (de mínima energia). Ressaltamos a importância de apresentar esse modelo porque em nossa proposta (ver Cap. 5) investigamos configurações BPS numa versão estendida incluindo o termo Chern-Simons que permite, entre outros efeitos, descrever skyrmions eletricamente carregados.

4.1 O modelo

Uma versão do modelo baby Skyrme-Maxwell [47, 48] é dada pela seguinte densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{v_0}{2}(D_\mu\vec{\phi})^2 - \frac{\lambda^2}{4}(D_\mu\vec{\phi} \times D_\nu\vec{\phi})^2 - V, \quad (4.1)$$

onde todos os campos estão definidos no espaço de Minkowski $(2+1)$ -dimensional. O primeiro termo é a contribuição de Maxwell usual. A quantidade $D_\mu\vec{\phi}$ representa a derivada covariante do campo $\vec{\phi}$ e, assim, o segundo termo representa a contribuição do modelo- σ . O terceiro componente é o termo de Skyrme e o último o potencial. O campo de Skyrme $\vec{\phi}$ é um tripleto de campos escalares reais $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ satisfazendo a restrição $|\vec{\phi}|^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 1$, ou seja, no espaço interno descrevem uma esfera de raio unitário. O potencial V é sempre uma função real e não negativa da quantidade $\phi_n = \vec{n} \cdot \vec{\phi}$, ou seja, $V = V(\phi_n)$, onde \vec{n} é um vetor unitário no espaço interno.

Os termos σ e de Skyrme são invariantes sob a simetria global $SO(3)$ enquanto o potencial escolhido usualmente quebra parte desta simetria. Especificamente, estamos interessados em potenciais que preservem o subgrupo $U(1)$ e tenha um único vácuo. A saber, desejamos configurações no qual $V(\phi_n) \rightarrow 0$ quando $\phi_n \rightarrow 1$, seu valor no vácuo. Logo, a existência de um subgrupo $U(1)$ invariante permite implementar uma simetria de *gauge* local e a introdução de um campo de *gauge* abeliano cuja dinâmica é governada pelo termo usual de Maxwell.

Seguindo a prescrição em [47,48], podemos extrair uma escala de energia comum E_0 a partir de todos os termos de (4.1) e então escrever

$$L = -E_0 \int d^2x \left[\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\nu_0}{2} (D_\mu \vec{\phi})^2 + \frac{\lambda^2}{4} (D_\mu \vec{\phi} \times D_\nu \vec{\phi})^2 + V(\phi_n) \right], \quad (4.2)$$

onde a derivada covariante agora é dada por

$$D_\mu \vec{\phi} = \partial_\mu \vec{\phi} + A_\mu \vec{n} \times \vec{\phi}, \quad (4.3)$$

definindo o acoplamento entre os campos de *gauge* A_μ e Skyrme $\vec{\phi}$. Note que na Eq. (4.2) fizemos $A_\mu \rightarrow gA_\mu$, o que nos leva a $F_{\mu\nu}^2 \rightarrow F_{\mu\nu}^2/g^2$; isso facilita o tratamento e análise das equações no atual contexto. A quantidade E_0 tem dimensão de energia e estabelece a escala de energia do modelo. Para nosso propósito, poderemos assumir a escala do modelo como unitária, $E_0 = 1$.

Um importante aspecto sobre as configurações de energia finita é seu caráter topológico. Tais configurações exigem uma restrição topológica no campo $\vec{\phi}$, isto é, este deve aproximar-se de seu valor de vácuo no limite espacial. Assim, assumiremos o vetor unitário constante é $\vec{n} = (0,0,1)$ de modo que o valor de vácuo de ϕ_n é dado por $\phi_3 = \phi_{3,\text{vac}} = 1$. Usaremos expressões com a forma geral do vetor unitário \vec{n} até o momento que for conveniente. Ainda, temos que tal restrição topológica permite interpretar as configurações de energia finita do modelo como um mapeamento $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ caracterizado pelo invariante definida como

$$\text{deg}[\vec{\phi}] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \vec{\phi} \cdot (\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi}) = N, \quad (4.4)$$

onde $N \in \mathbb{Z}$ representa o *winding number* ou carga topológica da configuração.

4.2 O modelo baby Skyrme-Maxwell

O caso particular em que $\nu_0 = 1$ foi estudado no original modelo baby Skyrme-Maxwell em [47]. Aqui vamos tratar do caso em que $\nu_0 = 0$, investigado em [48]. A densidade Lagrangiana é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda^2}{4} (D_\mu \vec{\phi} \times D_\nu \vec{\phi})^2 - V(\phi_n). \quad (4.5)$$

As equações campo são dadas por

$$D_\mu \vec{J}^\mu = -\frac{\partial V}{\partial \phi_n} \vec{n} \times \vec{\phi}, \quad (4.6)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = g^2 \vec{n} \cdot \vec{J}^\nu, \quad (4.7)$$

onde

$$\vec{J}^\mu = \lambda^2 D_\mu \vec{\phi} [\vec{\phi} \cdot (D_\mu \vec{\phi} \times D_\nu \vec{\phi})], \quad (4.8)$$

é a densidade de corrente conservada.

Assim como nos demais modelos já estudados nesta tese, estamos interessados principalmente em soluções estáticas. A lei de Gauss, obtida a partir da componente $\nu = 0$ em (4.7), fornece

$$\partial_i A_0 = \lambda^2 A_0 (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\phi})^2. \quad (4.9)$$

Logo, notamos ser possível a escolha do *gauge* $A_0 = 0$, a qual satisfaz a própria lei de Gauss. Assim, as soluções estáticas encontradas aqui serão caracterizadas por carregar fluxo magnético e serem eletricamente neutras.

4.2.1 Energia e equações BPS

A densidade de energia estática (assumindo $E_0 = 1$) do modelo (4.5) pode ser escrita na forma

$$\epsilon = \frac{1}{2g^2} B^2 + \frac{\lambda^2}{2} Q^2 + V, \quad (4.10)$$

onde usamos a identidade

$$Q = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \vec{\phi} \cdot (D_i \vec{\phi} \times D_j \vec{\phi}). \quad (4.11)$$

A fim de implementar o formalismo BPS, introduzimos duas funções auxiliares $w(\phi_n)$ e $b(\phi_n)$, que serão determinadas mais adiante. Reescrevemos (4.10) na seguinte forma:

$$\epsilon = \frac{1}{2g^2} (B \pm b)^2 \mp \frac{1}{g^2} Bb - \frac{b^2}{2g^2} + \frac{\lambda^2}{2} (Q \mp w)^2 \pm \lambda^2 Qw - \frac{\lambda^2}{2} w^2 + V, \quad (4.12)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{1}{2g^2} (B \pm b)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \mp w)^2 \mp \frac{1}{g^2} Bb - \frac{b^2}{2g^2} - \frac{\lambda^2}{2} w^2 + V \\ & \pm \lambda^2 w \vec{\phi} \cdot (\partial_i \vec{\phi} \times \partial_j \vec{\phi}) \pm \lambda^2 w \epsilon_{ij} A_i (\vec{n} \cdot \partial_j \vec{\phi}), \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde usamos a relação (4.11) escrita na forma

$$Q = \vec{\phi} \cdot (\partial_i \vec{\phi} \times \partial_j \vec{\phi}) + \epsilon_{ij} A_i (\vec{n} \cdot \partial_j \vec{\phi}). \quad (4.14)$$

Podemos escrever o último termo da segunda linha de (4.13) como uma derivada total. Para isso, definimos

$$w(\vec{n} \cdot \partial_j \vec{\phi}) = \partial_j W, \quad (4.15)$$

onde $W = W(\phi_n)$. Logo, a função $w(\phi_n)$ assume a forma simplificada

$$w(\vec{n} \cdot \partial_j \vec{\phi}) = \frac{\partial W}{\partial \phi_n} (\vec{n} \cdot \partial_j \vec{\phi}) \rightarrow w = \frac{\partial W}{\partial \phi_n} \equiv W_{\phi_n}. \quad (4.16)$$

Isso nos permite reescrever (4.13) como

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{1}{2g^2} (B \pm b)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \mp W_{\phi_n})^2 \mp \frac{1}{g^2} Bb - \frac{b^2}{2g^2} - \frac{\lambda^2}{2} W_{\phi_n}^2 + V \\ & \pm \lambda^2 W_{\phi_n} \vec{\phi} \cdot (\partial_i \vec{\phi} \times \partial_j \vec{\phi}) \pm \lambda^2 \epsilon_{ij} [\partial_j (A_i W) - W \partial_j A_i]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Usando $B = \epsilon_{ij} \partial_i A_j$ e reagrupando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{1}{2g^2} (B \pm b)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \mp W_{\phi_n})^2 \pm \lambda^2 W_{\phi_n} \vec{\phi} \cdot (\partial_i \vec{\phi} \times \partial_j \vec{\phi}) \pm \lambda^2 \epsilon_{ij} \partial_j (A_i W) \\ & \mp \frac{1}{g^2} Bb \pm \lambda^2 WB - \frac{b^2}{2g^2} - \frac{\lambda^2}{2} W_{\phi_n}^2 + V. \end{aligned} \quad (4.18)$$

A energia total deve ser bem definida em termos da carga topológica e por isso não desejamos contribuições de quantidades adicionais. Logo, para os termos da segunda linha da equação acima, fazemos

$$\mp \frac{1}{g^2} Bb \pm \lambda^2 WB = 0, \quad (4.19)$$

e

$$-\frac{b^2}{2g^2} - \frac{\lambda^2}{2} W_{\phi_n}^2 + V = 0. \quad (4.20)$$

A Eq. (4.19) fornece imediatamente

$$b = g^2 \lambda^2 W. \quad (4.21)$$

Assim, a partir da (4.20), obtemos o potencial auto-dual capaz de fornecer as configurações BPS satisfazendo o seguinte vínculo:

$$V = \frac{\lambda^2}{2} W_{\phi_n}^2 + \frac{\lambda^4 g^2}{2} W^2. \quad (4.22)$$

A função $W(\phi_n)$ é construída (ou proposta) de tal forma que a condição de vácuo do potencial $V(\phi_n)$ seja satisfeita, $V(\phi_n) \rightarrow 0$ quando $\phi_n \rightarrow 1$. Assim, por construção, devemos assegurar que as condições

$$W(\phi_{n,\text{vac}} = 1) = 0, \quad (4.23)$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \phi_n} \right|_{\phi_{n,\text{vac}}=1} = 0, \quad (4.24)$$

sejam satisfeitas. Com isso, a contribuição à energia do termo escrito como uma derivada total é nula, ou seja,

$$\int d^2x \epsilon_{ij} \partial_j (A_i W) = 0. \quad (4.25)$$

Note que a relação (4.22) pode ser considerada uma “equação de superpotencial”. De fato, sua estrutura é análoga àquela encontrada, por exemplo, em modelos de paredes de domínio auto-gravitantes [85–87] ou de inflação de campos escalares [88–91], os quais permitem determinar um superpotencial $W(\phi)$ em termos de um potencial $V(\phi)$ para um campo escalar real ϕ . Daqui em diante, vamos nos referir à função $W(\phi_n)$ como superpotencial e, conseqüentemente, a relação (4.22) será chamada de equação do superpotencial.

Retornando à densidade de energia (4.18), e implementando os últimos resultados obtidos acima, a energia total pode ser escrita como

$$E = \int d^2x \epsilon = E' + E_{\text{BPS}}, \quad (4.26)$$

onde

$$E' = \int d^2x \left[\frac{1}{2g^2} (B \pm \lambda^2 g^2 W)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \mp W_{\phi_n})^2 \right], \quad (4.27)$$

e

$$E_{\text{BPS}} = \pm \int d^2x \lambda^2 W_{\phi_n} \vec{\phi} \cdot (\partial_i \vec{\phi} \times \partial_j \vec{\phi}). \quad (4.28)$$

Lembrando que o campo Skyrme $\vec{\phi}$ é um mapeamento $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ com raio unitário no espaço interno, é mostrado em [92] que a medida angular da superfície esférica $dS^{(\text{int})}$ é análoga ao integrando da

relação acima, podendo este ser reduzido a forma

$$E_{\text{BPS}} = 4\pi\lambda^2 |N| \langle W_{\phi_n} \rangle_{S^2}, \quad (4.29)$$

onde $\langle W_{\phi_n} \rangle_{S^2}$ é dado por

$$\langle W_{\phi_n} \rangle_{S^2} = \frac{1}{4\pi} \int dS^{(\text{int})} W_{\phi_n}. \quad (4.30)$$

A energia (4.26) é sempre satisfeita pela inequação

$$E \geq E_{\text{BPS}}, \quad (4.31)$$

sendo esta uma energia fundamental topológica para as configurações estáticas que é atingida quando os campos são saturados no limite BPS. Em outras palavras, todas as soluções de energia finita estática são sólitons BPS satisfazendo as seguintes equações,

$$B = \mp \lambda^2 g^2 W \quad (4.32)$$

$$Q = \pm W_{\phi_n}, \quad (4.33)$$

que são as equações auto-duais do modelo. No tratamento de nossas soluções, adotaremos o sinal superior. Assim como acontece no contexto de vórtices em modelos de Maxwell-Higgs, é verificado que essas equações BPS também satisfazem as equações de Euler-Lagrange apresentadas nas relações (4.6) e (4.7) [48].

4.2.2 Soluções BPS

Aqui, investigamos as soluções de sólitons estáticas no limite BPS e suas propriedades obtidas a partir do modelo (4.1). Adotamos o *Ansatz* usual [47],

$$\vec{\phi}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \sin f(r) \cos N\theta \\ \sin f(r) \sin N\theta \\ \cos f(r) \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

onde r e θ são as coordenadas polares no plano, N é o *winding number* dado em (4.4) e $f(r)$ é uma função arbitrária que deve satisfazer certas condições de contorno a serem determinadas. O *Ansatz* (4.34) é a versão planar rotacionalmente simétrica do *Ansatz hedgehog* usado no modelo de Skyrme 3-dimensional [93, 94]. Além disso, assumimos $\vec{n} = (0, 0, 1)$ tal que $\phi_n = \phi_3$. Para o campo de *gauge* A_μ consideremos

$$A_0 = 0, \quad A_i = -\epsilon_{ij} \hat{x}_j \frac{Na(r)}{r}, \quad (4.35)$$

onde $\hat{x}_i = (\cos \theta, \sin \theta)$ é o vetor unitário no plano. Aparentemente essa forma escolhida em (4.35) pode ser diferente, mas se adotássemos a forma escolhida no contexto de Maxwell-Higgs (2.27) as soluções seriam análogas. Logo, trata-se de uma escolha feita aqui por conveniência.

Na origem, $r \rightarrow 0$, a regularidade dos campos é garantida pelas seguintes condições:

$$f(0) = \pi, \quad a(0) = 0, \quad W(0) = W_0, \quad (4.36)$$

onde W_0 é uma constante arbitrária. Com o intuito de facilitar a obtenção das soluções numéricas,

seguimos [48] e introduzimos uma redefinição para o campo Skyrme na forma

$$\phi_3 = \cos f \equiv 1 - 2h, \quad (4.37)$$

com $h = h(r)$ obedecendo

$$h(0) = 1 \rightarrow f(0) = \pi. \quad (4.38)$$

Para o campo magnético nesse Ansatz pode-se mostrar facilmente que

$$B = \frac{Na'}{r}. \quad (4.39)$$

A energia (4.31) fornece um limite BPS desde que as quantidades W_{ϕ_3} ou $\langle W_{\phi_n} \rangle_{S^2}$ sejam unicamente determinadas. Isso é garantido se assumimos a existência de uma solução local consistente com a (4.22) cujo solução única pode ser estendida à todo o intervalo $\phi_3 \in [-1, 1]$, isto é, $h \in [0, 1]$ [48]. Desta maneira, a energia BPS computada nesse Ansatz fornece

$$E \geq E_{\text{BPS}} = 2\pi\lambda^2 |N| |W(0)|. \quad (4.40)$$

Ressaltamos que o resultado (4.40) tem sido confirmado por nossas soluções numéricas. A equação do superpotencial (4.22) nesse Ansatz é

$$8V = \lambda^2 W_h^2 + 4\lambda^4 g^2 W^2, \quad (4.41)$$

onde agora temos $V = V(h)$ e $W_h = dW/dh$. Como já mencionado acima, as soluções de (4.41) devem ser válidas em todo o intervalo $\phi_3 \in [-1, 1]$ e, portanto, satisfazer as condições $W(1) = 0$, $W'(1) = 0$ no vácuo $\phi_{3,\text{vac}} = 1$. Ou seja, o superpotencial deve satisfazer as seguintes condições assintóticas

$$W(\phi_{3,\text{vac}} = 1) \equiv W(h = 0) = 0, \quad (4.42)$$

o que está de acordo com nossa premissa inicial,

$$V(\phi_{3,\text{vac}} = 1) \equiv V(\infty) = 0. \quad (4.43)$$

A densidade de energia (4.10) no limite BPS, escrevemos

$$\epsilon_{\text{BPS}} = \frac{1}{g^2} B^2 + \frac{\lambda^2}{4} W_h^2, \quad (4.44)$$

onde usamos as equações BPS, (4.32) e (4.33). Portanto, no vácuo $r \rightarrow \infty$, as condições de contorno que asseguram regularidade das funções e configurações de energia finita são:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} h'(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} a'(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} W(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} W'(r) = 0, \quad (4.45)$$

sendo, obviamente, compatíveis com a condição (4.43). Já as equações BPS, nesse Ansatz, podem ser escritas como

$$\frac{Na'}{r} + \lambda^2 g^2 W = 0, \quad (4.46)$$

$$\frac{4N}{r} (1+a) h' + W_h = 0. \quad (4.47)$$

Antes de prosseguirmos, vamos fazer uma breve discussão sobre a equação do superpotencial.

É bem conhecido na literatura que as soluções de modelos Skyrme em $1 + 2$ dimensões dependem da forma particular do potencial $V(h)$, o qual deve satisfazer a Eq. (4.41) no limite BPS. O modelo (4.5) abordado neste capítulo, engendra tanto soluções caracterizadas por serem *compactons* quanto *não-compactons*. Soluções genuinamente de sólitons *compactons* são definidas como aquelas nos quais o seu valor de vácuo é atingido em um raio finito $r = r_0$, permanecendo nesse valor mesmo para $r > r_0$ (r_0 é algum valor constante no qual os campos atingem seu valor de vácuo). Por outro lado, soluções de sólitons *não-compactons* atingem seu valor de vácuo no limite $r \rightarrow \infty$. Ambos os tipos de soluções são estudadas em [48].

4.2.3 Fluxo magnético

O fluxo magnético é facilmente determinado por

$$\Phi = 2\pi \int_0^\infty r dr B = 2\pi N \int_0^\infty da' = 2\pi N [a(\infty) - a(0)] = 2\pi N a_\infty, \quad (4.48)$$

onde $a_\infty = a(\infty)$ é um valor constante, obedecendo $\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = a_\infty$. Aqui usamos o campo magnético (4.39) e as condições de contorno adequadas da função $a(r)$. Note que para o fluxo magnético (4.48) não existe *a priori* quaisquer restrições nos valores da constante a_∞ e, portanto, trata-se de um fluxo magnético que é, em princípio, não quantizado topologicamente¹. No entanto, veremos a seguir que para um forte acoplamento eletromagnético g , este fluxo torna-se “quantizado”. Considerando as equações BPS (4.46) e (4.47), e dividindo a primeira pela segunda, obtemos

$$\frac{a'}{1+a} = 4\lambda^2 g^2 \frac{W}{W_h} h'. \quad (4.49)$$

Agora, considere

$$F_h = 4 \frac{W}{W_h}, \quad (4.50)$$

de modo que,

$$\partial_r \ln(1+a) = \lambda^2 g^2 F'. \quad (4.51)$$

Integrando ambos aos lados desta relação, resulta

$$\ln C(1+a) = \lambda^2 g^2 F(h), \quad (4.52)$$

onde C é uma constante de integração e $F(h)$ será dado por

$$F(h) = 4 \int_0^h d\bar{h} \frac{W(\bar{h})}{W_h(\bar{h})}. \quad (4.53)$$

Naturalmente, para garantir a existência da função $F(h)$ finita em todo o intervalo $h \in [0, 1]$, devemos assumir $W_h \neq 0$. Usando as condições $h(0) = 1$ e $a(0) = 0$, teremos

$$\ln C = \lambda^2 g^2 F(1) \rightarrow C = e^{\lambda^2 g^2 F(1)}, \quad (4.54)$$

de modo que $F(h=1)$ é finito, permitindo escrever a partir da (4.52) a expressão assintótica

$$a_\infty = -1 + e^{-\lambda^2 g^2 F(1)}, \quad (4.55)$$

¹Recentes investigações tem mostrado ser possível, sob condições específicas para determinados tipos de defeitos topológicos, obter fluxo magnético quantizado no contexto de Skyrmions [95–97].

onde usamos também as condições $h(\infty) = 0$ e $F(h=0) = 0$. Assim, o fluxo magnético torna-se

$$\Phi = -2\pi N[1 - e^{-\lambda^2 g^2 F(1)}]. \quad (4.56)$$

Tomando o limite para pequenos e grandes valores da constante de acoplamento g , temos

$$\Phi \sim -2\pi N \lambda^2 g^2 F(1), \quad g \ll 1 \quad (4.57)$$

$$\Phi \sim -2\pi N, \quad g \gg 1.$$

respectivamente. Logo, podemos dizer que um forte acoplamento eletromagnético g torna o fluxo magnético efetivamente quantizado.

4.3 Soluções numéricas das equações BPS

Como já mencionado, a relação (4.41) pode fornecer um superpotencial $W(\phi_3)$ para um dado potencial $V(\phi_3)$. O caso contrário também pode acontecer, ou seja, podemos escolher uma forma adequada para $W(\phi_3)$ que fornece um $V(\phi_3)$ específico capaz de engendrar as configurações BPS.

A partir das equações BPS, (4.46) e (4.47), fazemos uma expansão em série em torno da origem, $r \rightarrow 0$, impondo as condições

$$h(0) = 1, \quad a(0) = 0, \quad W(0) = W_0, \quad (4.58)$$

com $W(h)$ sendo considerada uma função bem comportada e W_0 uma constante arbitrária. Assim, obtemos

$$h(r) = 1 - \frac{(W_h)_{h=0}}{8N} r^2 - \frac{(W_h)_{h=0} (W_{hh})_{h=0}}{128N^2} r^4 + \mathcal{O}(r^6), \quad (4.59)$$

$$a(r) = -\frac{g^2 \lambda^2 W_0}{2N} r^2 - \frac{g^2 \lambda^2 (W_h)_{h=0}^2}{32N^2} r^4 + \mathcal{O}(r^6), \quad (4.60)$$

onde W_{hh} representa a segunda derivada de $W(h)$ em relação a h .

A análise do comportamento das funções quando atingem seu valor de vácuo é realizada assumindo as condições de contorno

$$h(r_0) = 0, \quad a(r_0) = a_{r_0}, \quad W(r_0) = 0, \quad (4.61)$$

onde $r_0 > 0$ e a_{r_0} é uma constante. Se r_0 é finito, este define um raio máximo do defeito topológico denominado *sóliton compacton*. Caso tenhamos o valor de vácuo atingido no limite $r_0 \rightarrow \infty$, temos um defeito topológico característico de *sólitons não-compactons*. Para tais análises, vamos fazer uma escolha específica para o superpotencial $W(\phi_3) = W(h)$ na forma [48]

$$W(h) = \frac{h^\sigma}{\lambda^2}, \quad (4.62)$$

para $\sigma > 1$. As equações BPS serão então dadas por

$$\frac{Na'}{r} + g^2 h^\sigma = 0, \quad (4.63)$$

$$\frac{4N\lambda^2}{r} (1+a) h' + \sigma h^{\sigma-1} = 0, \quad (4.64)$$

e para o potencial (4.41) teremos

$$V(h) = \frac{1}{2\lambda^2} h^{2(\sigma-1)} \left(\frac{\sigma^2}{4} + g^2 \lambda^2 h^2 \right), \quad (4.65)$$

onde diferentes valores de σ produzem diferentes estruturas de sólitons. Particularmente, temos aqui três diferentes tipos de sólitons: para $1 < \sigma < 2$ temos sólitons *compactons*, para $\sigma = 2$ temos com decaimento tipo $e^{-\alpha r^2}$ e para $\sigma > 2$ temos sólitons com decaimento tipo potência $r^{-2/(\sigma-2)}$; nesses dois últimos as funções atingem seu valor de vácuo no limite $r \rightarrow \infty$ e portanto são sólitons não-*compactons*.

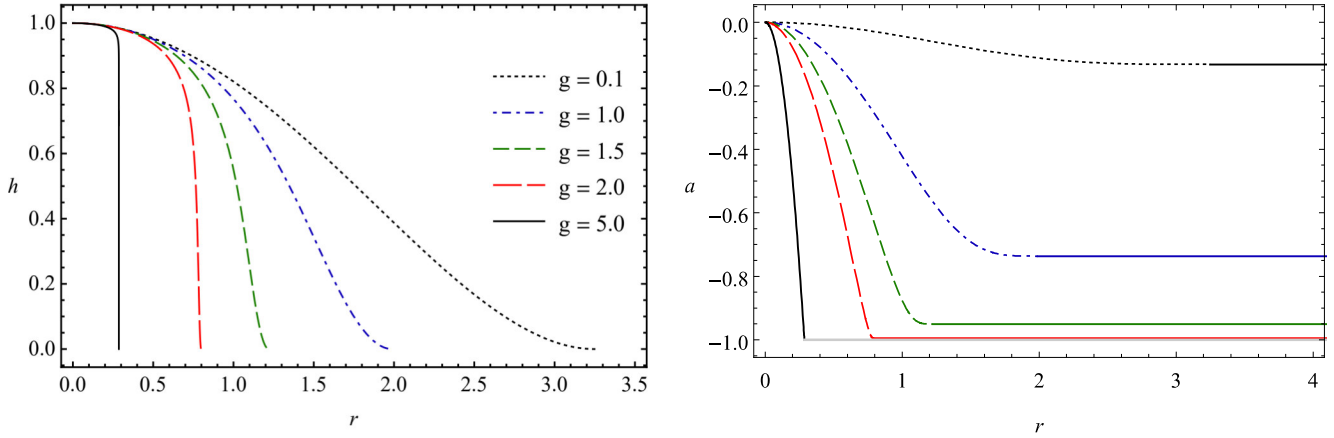


Figura 4.1: Campo Skyrme $h(r)$ e campo de gauge $a(r)$ para vários valores de g .

4.3.1 Sólitons *compactons*

Apresentamos aqui um exemplo de solução numérica válida para $1 < \sigma < 2$. Para esse intervalo, usamos as equações BPS (4.63) e (4.64), obtendo a seguinte expansão em série de potência em torno da borda do *compacton*:

$$h(r) \sim (C_0)^{1/(2-\sigma)} (r_0 - r)^{1/(2-\sigma)} + \dots, \quad (4.66)$$

$$a(r) \sim \frac{r_0(2-\sigma)g^2}{2N} (C_0)^{\sigma/(2-\sigma)} (r_0 - r)^{2/(2-\sigma)} + \dots, \quad (4.67)$$

onde

$$C_0 = \frac{1}{4} \frac{r_0(2-\sigma)\sigma}{\lambda^2 N (a_{r_0} + 1)}. \quad (4.68)$$

Para uma visualização dos perfis dos campos, vamos adotar como exemplo o caso $\sigma = 3/2$. Neste caso, para o superpotencial (4.62) obtemos

$$W(h) = \frac{h^{3/2}}{\lambda^2}. \quad (4.69)$$

Para todas as soluções numéricas estudadas nesta seção, implementamos $N = 1, \lambda = 1$. Fizemos os gráficos para vários valores da constante de acoplamento eletromagnética g . A Fig. 4.1 mostra os

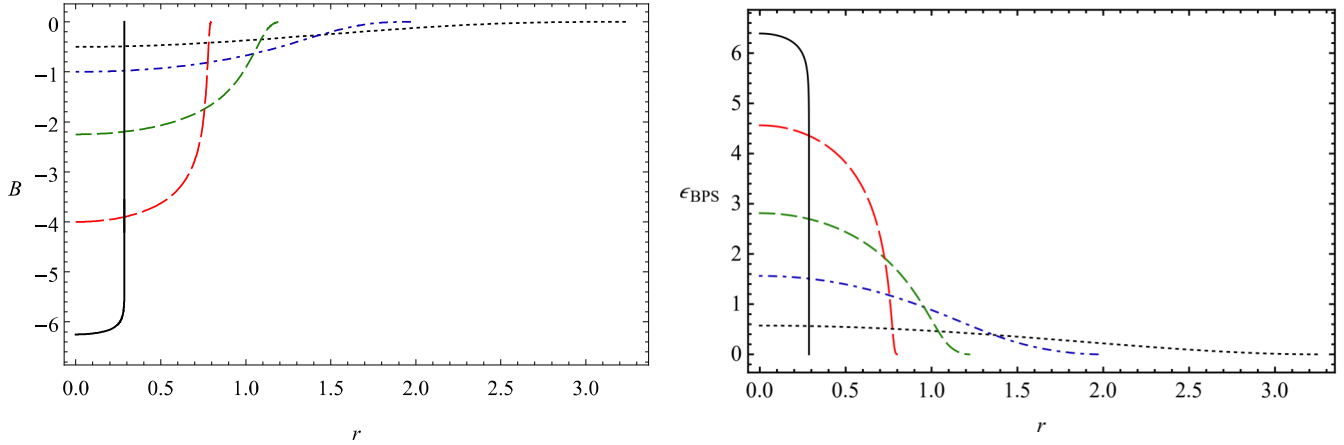


Figura 4.2: Campo magnético e densidade de energia BPS para vários valores de g . Identificação conforme Fig. 4.1.

perfis dos campos para $g = 0.1, 1, 1.5, 2, 5$ para o intervalo $0 < r \leq r_0$. Temos o perfil do campo Skyrme $h(r)$ atingindo seu respectivo valor de vácuo, $h(r_0) = 0$, em um valor finito.

Ainda na Fig. 4.1, temos os perfis para o campo $a(r)$ com as respectivas linhas sólidas representando o valor de vácuo, $a(r_0) = a_{r_0}$, para $r_0 < r < \infty$. Note que temos apenas $g = 0.1$ como um pequeno valor do acoplamento; fizemos apenas para esse valor porque com $g = 0.001, 0.01$ teríamos um comportamento muito similar, diferenciando-se apenas pela escala de seus valores. Na Fig. 4.1, por exemplo, foi necessário um multiplicador (10^1) para permitir uma visualização do perfil de $a(r)$ para $g = 0.1$ no mesmo gráfico de escala dos demais valores de g . Podemos observar ainda que em ambos os casos, perfis de $h(r)$ e $a(r)$, o raio do *compacton* r_0 diminui com aumento de g ; isto é, quanto maior o acoplamento eletromagnético g , os sólitons tornam-se mais “compactados”.

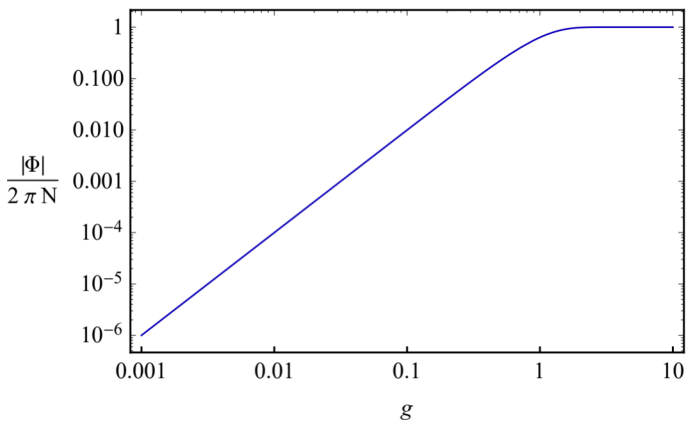


Figura 4.3: Fluxo magnético em função de g .

diminuem com o aumento de g . O perfil da densidade de energia BPS para $g = 5$ foi reescalado por um fator $1/4$ a fim de evidenciar seus efeitos próximo aos demais perfis.

Faremos agora uma breve discussão sobre o fluxo magnético. Usando o superpotencial (4.69) nas Eqs. (4.53) e (4.56), obtemos a solução exata

$$\Phi = -2\pi N(1 - e^{-4\lambda^2 g^2/3}). \quad (4.70)$$

A Fig. 4.2 mostra o campo magnético $B(r)$ e densidade de energia BPS para os valores de $g = 1, 1.5, 2$. Apresentamos apenas esses valores de g em particular porque seus efeitos já fornecem uma boa visualização do comportamento de $B(r)$. O campo magnético assume diferentes valores na origem, pois este cresce com $B(0) \sim g^2$. Temos ainda que seu respectivo valor na fronteira do *compacton* é atingido mais rapidamente quanto maior o valor de g . Assim como acontece para o campo magnético, para a densidade de energia BPS temos diferentes valores na origem, mas aqui eles aumentam conforme g cresce. Os respectivos raios dos *compactons* também

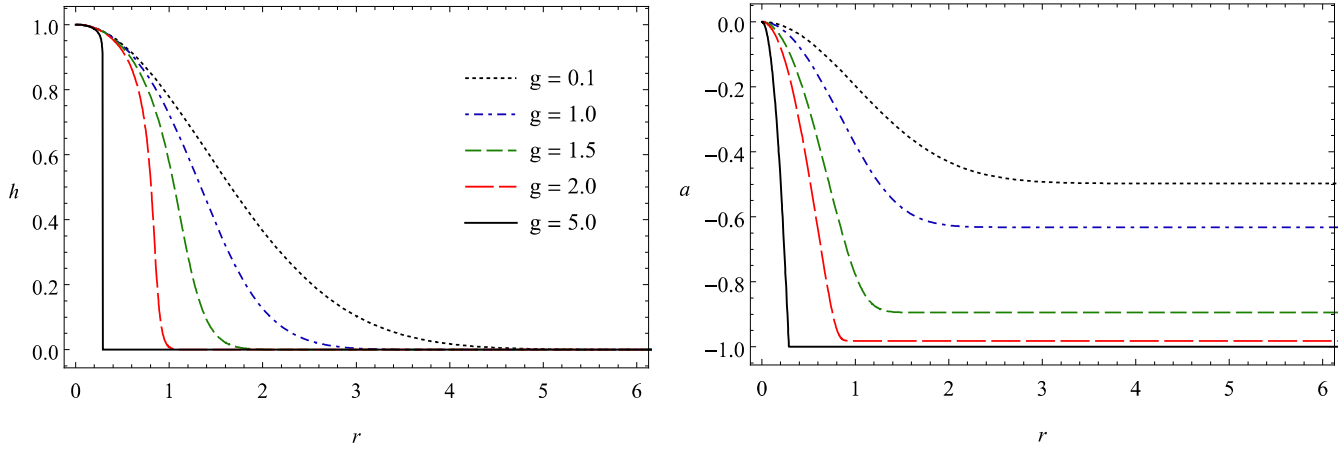


Figura 4.4: Campo Skyrme $h(r)$ e o campo de gauge $a(r)$.

Esta relação mostra que o fluxo magnético cresce conforme $|\Phi| \sim 4\lambda^2 g^2/3$ para pequenos valores de g . Por outro lado, para grandes valores de g , a solução aproxima-se de uma valor constante $|\Phi| \sim 2\pi N$. Este último, por sua vez, é uma expressão análoga àquela encontrada no contexto de modelos de Maxwell-Higgs. Portanto, no atual contexto, observamos uma “quantização efetiva” do fluxo magnético (4.70) no limite de um forte acoplamento [47]. A Fig. 4.3 mostra tal comportamento.

4.3.2 Sólitons não-compactons

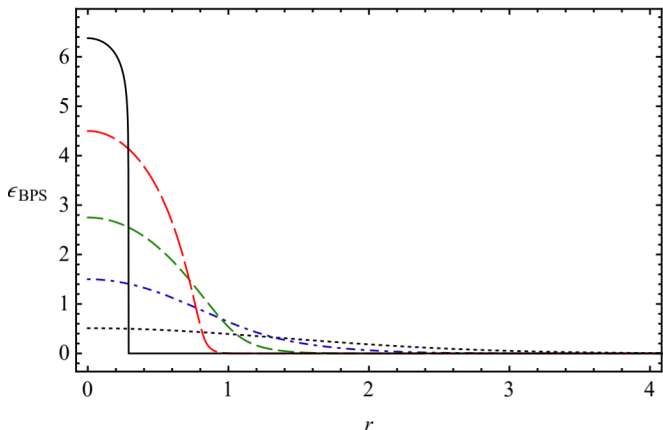
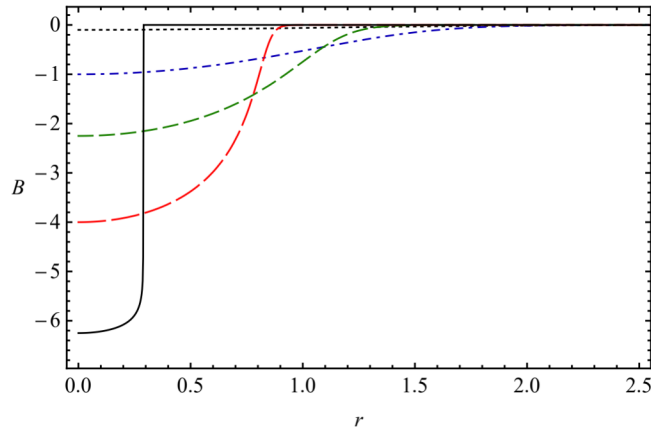


Figura 4.5: Campo magnético e densidade de energia BPS para alguns valores de g .

Conforme já mencionado, sólitons não-compactons atingem seu valor de vácuo no limite $r \rightarrow \infty$ e podem ser analisados no intervalo $\sigma \geq 2$. Vamos analisar alguns aspectos separadamente para $\sigma = 2$ e $\sigma > 2$, pois é verificado que temos tipos diferentes de comportamentos dos campos em tais situações.

Para o caso $\sigma = 2$ o comportamento assintótico dos campos é dado por

$$h(r) \sim C_2 e^{-\xi r^2}, \quad (4.71)$$

$$a(r) \sim a_\infty + \lambda^2 (1 + a_\infty) g^2 (C_2)^2 e^{-2\xi r^2}, \quad (4.72)$$

onde C_2 é uma constante arbitrária com ξ sendo

$$\xi = \frac{1}{N\lambda^2 (1 + a_\infty)}. \quad (4.73)$$

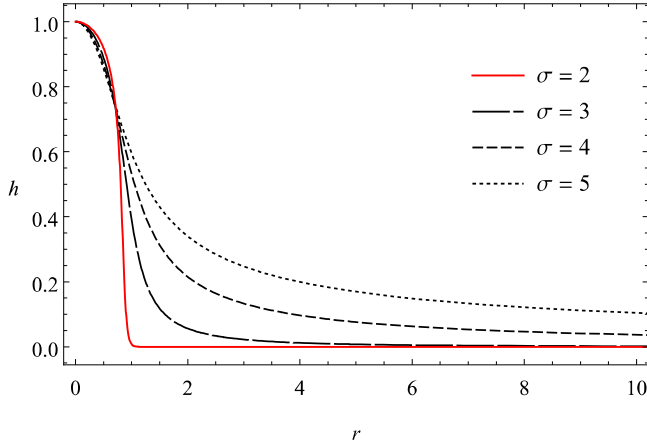
O resultado das soluções numéricas correspondentes aos campos $h(r)$ e $a(r)$ são mostrados na Fig. 4.4. Notadamente, para $g = 0.1, 1, 1.5$ percebemos um comportamento tipo exponencial, as funções descrevem monotonicamente até atingir seu va-

lor de vácuo. Por outro lado, a partir de $g = 2$ a aproximação do vácuo é muito similar àquelas de sólitons *compactons*. De fato, os comportamentos (4.71) e (4.72) revelam que essas soluções tipo *compacton* apresentam-se desta forma devido a um decaimento exponencial muito rápido, pois um forte acoplamento g leva a $a_\infty \rightarrow -1$ e consequentemente $\xi \rightarrow \infty$, proporcionando um rápido decaimento.

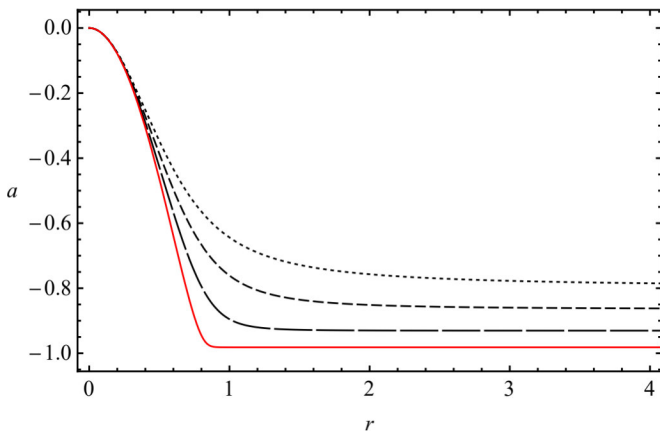
A Fig. 4.5 mostra os perfis do campo magnético e densidade de energia BPS para $\sigma = 2$. De modo geral, temos as mesmas características já discutidas para a Fig. 4.4. Sobre o fluxo magnético para este caso, o superpotencial $W = h^2/\lambda^2$ fornece

$$\Phi = -2\pi N(1 - e^{-\lambda^2 g^2}), \quad (4.74)$$

possuindo as mesmas características gerais apresentadas no plot da Fig. 4.3, cuja diferença é basicamente por um fator constante para pequenos valores de g ; aqui o fluxo magnético cresce obedecendo a relação $|\Phi| \sim \lambda^2 g^2$ até torna-se constante com $|\Phi| \rightarrow 2\pi N$.



(a) Campo Skyrme $h(r)$.



(b) Campo de gauge $a(r)$.

Figura 4.6: Campo Skyrme (a) e campo de gauge (b) de casos não-compactons para $g = 2$.

Para os casos em que temos $\sigma > 2$, o comportamento dos campos obedecem as seguintes séries de potência:

$$h(r) \sim \left(\frac{C_\infty}{r^2}\right)^{1/(\sigma-2)} + \dots, \quad (4.75)$$

$$a(r) \sim a_\infty + \frac{(\sigma-2)g^2}{4N} \left(\frac{C_\infty}{r^4}\right)^{1/(\sigma-2)} + \dots, \quad (4.76)$$

onde definimos

$$C_\infty = \frac{8\lambda^2 N (a_\infty + 1)}{\sigma(\sigma-2)}. \quad (4.77)$$

A Fig. 4.6 mostra os perfis dos comportamentos dos campos para um acoplamento eletromagnético fixado em $g = 2$ e diferentes valores de σ . Notamos que para um mesmo valor de g fica evidente a diferença de decaimento dos campos à seu respectivo valor de vácuo quando temos $\sigma = 2$ (tipo exponencial) e $\sigma > 2$ (tipo potência). Ou seja, para $\sigma = 2$ (curva vermelha sólida) o campo atinge seu valor de vácuo mais rapidamente que $\sigma > 2$ (curvas pretas), onde os campos tendem à atingir seu valor de vácuo mais lentamente à medida que σ cresce.

5 Sólitos BPS no modelo baby Skyrme-Maxwell-Chern-Simons

Sabemos que o modelo planar baby Skyrme-Maxwell (SM), revisado no capítulo anterior, engendra sólitos eletricamente neutros. Com o objetivo de construir um modelo baby Skyrme que forneça configurações de sólitos eletricamente carregados, é incluído o termo de Chern-Simons (CS) na Lagrangiana do modelo [49–51], o qual pode ser denominado como modelo baby Skyrme-Maxwell-Chern-Simons (SMCS). Assim, o acoplamento do termo CS, além de tornar o campo de *gauge* topologicamente massivo, permite a existência de sólitos portadores de carga elétrica total não nula e também fluxo magnético.

Neste capítulo apresentamos nossa contribuição original para um modelo BPS baby Skyrme-Maxwell-Chern-Simons. Aqui, obtemos também soluções de sólitos topológicos saturando um limite BPS. Além disso, analisamos numericamente a dependência das estruturas dos sólitos, as energias, potenciais elétricos e os campos elétrico e magnético das configurações para diferentes valores das constantes de acoplamento g e κ .

5.1 O modelo baby Skyrme-Maxwell-Chern-Simons

Seguindo a prescrição apresentada no capítulo anterior, considere agora a seguinte densidade Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\kappa}{4g^2}\epsilon^{\rho\mu\nu}A_\rho F_{\mu\nu} - \frac{\lambda^2}{4}(D_\mu\vec{\phi} \times D_\nu\vec{\phi})^2 - V(\phi_n), \quad (5.1)$$

onde também foi adotado $\nu_0 = 0$, isto é, ausência do termo- σ linear. As correspondentes equações Euler-Lagrange (EL) são

$$D_\mu\vec{j}^\mu + \frac{\partial V}{\partial\phi_n}\vec{n} \times \vec{\phi} = 0, \quad (5.2)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{\kappa}{4}\epsilon^{\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = g^2\vec{n} \cdot \vec{j}^\nu, \quad (5.3)$$

onde

$$\vec{j}^\mu = \lambda^2 D_\nu\vec{\phi}[\vec{\phi} \cdot (D^\mu\vec{\phi} \times D^\nu\vec{\phi})]. \quad (5.4)$$

A densidade de corrente conservada é definida como $j^\mu = \vec{n} \cdot \vec{j}^\mu$, sendo a fonte do campo eletromagnético. Novamente, estamos interessados em soluções estáticas e, então, a lei de Gauss é dada por

$$\partial_i E_i - \kappa B = g^2 j_0, \quad (5.5)$$

com $j_0 = -\lambda^2 A_0(\vec{n} \cdot \partial_i\vec{\phi})^2$ no caso estático. Usamos as componentes do campo elétrico, em 1 + 2 dimensões $E_i = F_{0i} = -\partial_i A_0$, enquanto para o campo magnético temos $B = F_{12} = \epsilon_{ij}\partial_i A_j$. Como

esperado, o limite $\kappa = 0$ implica que as soluções estáticas devem ter $A_0 = 0$ e, portanto, $E_i = 0$.

Observe que a Eq. (5.5) indica que as configurações de campo com fluxo magnético Φ não nulo carrega uma carga elétrica total Q_e também não nula. De fato, existe uma interessante relação entre Φ e Q_e obtida pela integração de ambos os lados de (5.5), resultando em

$$Q_e = -\frac{\kappa}{g^2}\Phi, \quad (5.6)$$

onde

$$Q_e = \int d^2x j_0, \quad \Phi = \int d^2x B. \quad (5.7)$$

Logo, o acoplamento CS tem o efeito de induzir uma carga elétrica nos sólitons. Para a lei de Ampère temos

$$\partial_i B - \kappa E_i + \lambda^2 g^2 (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\phi}) Q = 0, \quad (5.8)$$

onde Q é dada pela (4.11). A equação do campo Skyrme é

$$\lambda^2 \epsilon_{ij} D_i (Q D_j \vec{\phi}) + \lambda^2 \partial_j [A_0^2 (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\phi})] (\vec{n} \times \vec{\phi}) + \frac{\partial V}{\partial \phi_n} \vec{n} \times \vec{\phi} = 0. \quad (5.9)$$

No entanto, soluções a partir da densidade Lagrangiana na forma (5.1) ainda não tem permitido engendrar sólitons topologicamente estáveis, isto é, configurações auto-duais nos quais sólitons topológicos saturam num limite BPS. Sendo assim, a fim de obter tais estruturas BPS, propomos uma versão modificada do modelo (5.1) de modo que as equações de movimento do campo de *gauge* permaneçam inalteradas. Nossa versão modificada é escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2g^2} \partial_\mu \Psi \partial^\mu \Psi - \frac{\kappa}{4g^2} \epsilon^{\rho\mu\nu} A_\rho F_{\mu\nu} - \frac{\lambda^2}{4} (D_\mu \vec{\phi} \times D_\nu \vec{\phi})^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 (\vec{n} \cdot D_\mu \vec{\phi})^2 \Psi^2 - V, \quad (5.10)$$

onde introduzimos um campo escalar neutro $\Psi (x^\mu)$. O potencial V não é mais apenas uma função do campo escalar $\vec{\phi}$, em vez disso é uma função do campo neutro também, $V \equiv V(\vec{\phi}, \Psi)$. Com isso, temos uma equação de movimento adicional devido a presença do campo neutro,

$$\partial_\mu \partial^\mu \Psi - \lambda^2 g^2 (\vec{n} \cdot D_\mu \vec{\phi})^2 \Psi + g^2 \frac{\partial V}{\partial \Psi} = 0. \quad (5.11)$$

Como já observado, as equações EL para o campo de *gauge* permanecem as mesmas, dadas por (5.3) e (5.4). No entanto, a equação para o campo Skyrme (5.2) é alterada, sendo dada por

$$D_\mu \vec{J}^\mu = \left\{ \lambda^2 \partial_\mu [(\vec{n} \cdot D_\mu \vec{\phi}) \Psi^2] + \frac{\partial V}{\partial \phi_n} \right\} \vec{n} \times \vec{\phi}, \quad (5.12)$$

cuja respectiva relação para o caso estático assume a forma

$$\lambda^2 \epsilon_{ij} D_i (Q D_j \vec{\phi}) + \lambda^2 \partial_j [A_0^2 (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\phi})] (\vec{n} \times \vec{\phi}) - \lambda^2 \partial_i [(\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\phi}) \Psi^2] (\vec{n} \times \vec{\phi}) + \frac{\partial V}{\partial \phi_n} \vec{n} \times \vec{\phi} = 0. \quad (5.13)$$

Na próxima seção, vamos mostrar como o formalismo BPS é implementado neste caso, determinando a relação do potencial $V(\vec{\phi}, \Psi)$ que permite obter o limite de mínima energia e as equações auto-duais correspondentes.

5.2 Energia e equações BPS

Para densidade de energia estática do modelo (5.10) obtemos

$$\epsilon = \frac{1}{2g^2} B^2 + \frac{1}{2g^2} (\partial_i A_0)^2 + \frac{1}{2g^2} (\partial_i \Psi)^2 + \frac{\lambda^2}{2} Q^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 A_0^2 (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\phi})^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 \Psi^2 (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\phi})^2 + V, \quad (5.14)$$

que é, claramente, uma quantidade não-negativa, como esperado. Novamente, assim como fizemos no caso BPS SM, para tornar possível a implementação do formalismo BPS, vamos introduzir duas funções auxiliares.

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{2g^2} (B \pm \bar{b})^2 \mp \frac{1}{g^2} B \bar{b} - \frac{1}{2g^2} \bar{b}^2 + \frac{1}{2g^2} (\partial_i A_0 \mp \partial_i \Psi)^2 \pm \frac{1}{g^2} \partial_i A_0 \partial_i \Psi \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{2} (Q \mp \bar{w})^2 \pm \lambda^2 Q \bar{w} - \frac{\lambda^2}{2} \bar{w}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda^2 (A_0 \mp \Psi)^2 (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\phi})^2 \pm \lambda^2 A_0 \Psi (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\phi})^2 + V, \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde $b \equiv b(\phi_n, \Psi)$ e $\bar{w} \equiv \bar{w}(\phi_n)$. Usando agora a Eq. (4.14), obtemos

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{2g^2} (B \pm \bar{b})^2 \mp \frac{1}{g^2} B \bar{b} - \frac{1}{2g^2} \bar{b}^2 + \frac{1}{2g^2} (\partial_i A_0 \mp \partial_i \Psi)^2 \pm \frac{1}{g^2} \partial_i A_0 \partial_i \Psi \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{2} (Q \mp \bar{w})^2 \pm \lambda^2 \bar{w} \vec{\phi} \cdot (\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi}) \pm \lambda^2 \bar{w} \epsilon_{ij} A_i (\vec{n} \cdot \partial_j \vec{\phi}) - \frac{\lambda^2}{2} \bar{w}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda^2 (A_0 \mp \Psi)^2 (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\phi})^2 \pm \lambda^2 A_0 \Psi (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\phi})^2 + V. \end{aligned} \quad (5.16)$$

A partir da lei de Gauss (5.5), multiplicamos ambos os lados por Ψ e escrevemos,

$$\Psi \partial_i \partial_i A_0 + \kappa \Psi B = g^2 \lambda^2 \Psi A_0 (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\phi})^2. \quad (5.17)$$

Usando esse resultado na última linha de (5.16), rearranjando os termos

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{2g^2} (B \pm \bar{b})^2 + \frac{1}{2g^2} (\partial_i A_0 \mp \partial_i \Psi)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \mp \bar{w})^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 (A_0 \mp \Psi)^2 (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\phi})^2 \\ &\quad \mp \frac{1}{g^2} B \bar{b} \pm \frac{\kappa}{g^2} \Psi B \pm \lambda^2 \bar{w} \vec{\phi} \cdot (\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi}) - \frac{1}{2g^2} \bar{b}^2 - \frac{\lambda^2}{2} \bar{w}^2 + V \\ &\quad \pm \frac{1}{g^2} \partial_i (\Psi \partial_i A_0) \pm \lambda^2 \bar{w} \epsilon_{ij} A_i (\vec{n} \cdot \partial_j \vec{\phi}). \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde também foi usado $\partial_i (\Psi \partial_i A_0) = \partial_i \Psi \partial_i A_0 + \Psi \partial_i \partial_i A_0$. Vamos usar agora uma definição análoga à Eq. (4.15),

$$\bar{w} (\vec{n} \cdot \partial_j \vec{\phi}) = \partial_j W, \quad (5.19)$$

de modo que também devemos ter $\bar{w} = W_{\phi_n}$. Logo, teremos um termo de derivada total na última linha de (5.18) sendo

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{2g^2} (B \pm \bar{b})^2 + \frac{1}{2g^2} (\partial_i A_0 \mp \partial_i \Psi)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \mp W_{\phi_n})^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 (A_0 \mp \Psi)^2 (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\phi})^2 \\ &\quad \pm \frac{1}{g^2} \partial_i (\Psi \partial_i A_0) \pm \lambda^2 \epsilon_{ij} \partial_j (A_i W) \pm \lambda^2 W_{\phi_n} \vec{\phi} \cdot (\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi}) \\ &\quad \mp \frac{1}{g^2} B \bar{b} \pm \frac{\kappa}{g^2} \Psi B \pm \lambda^2 B W - \frac{1}{2g^2} \bar{b}^2 - \frac{\lambda^2}{2} W_{\phi_n}^2 + V. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Logo, a fim de obter configurações de energia bem definidas, devemos impor

$$\mp \frac{1}{g^2} B \bar{b} \pm \frac{\kappa}{g^2} \Psi B \pm \lambda^2 B W = 0, \quad (5.21)$$

e

$$-\frac{1}{2g^2} \bar{b}^2 - \frac{\lambda^2}{2} W_{\phi_n}^2 + V = 0. \quad (5.22)$$

A relação (5.21) fornece

$$\bar{b} = \kappa \Psi + \lambda^2 g^2 W, \quad (5.23)$$

e com isso, a relação (5.22) fornece o potencial auto-dual capaz de engendrar os sólitons auto-duais satisfazendo o vínculo

$$V = \frac{\lambda^2}{2} W_{\phi_n}^2 + \frac{\lambda^4 g^2}{2} \left(W + \frac{\kappa}{\lambda^2 g^2} \Psi \right)^2, \quad (5.24)$$

Para que a condição de vácuo do potencial $V(\phi_n)$ seja satisfeita, $V(\phi_n) \rightarrow 0$ quando $\phi_n \rightarrow 1$, por construção, devemos assegurar que as condições

$$W(\phi_{n,\text{vac}} = 1) = 0, \quad (5.25)$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \phi_n} \right|_{\phi_{n,\text{vac}}=1} = 0, \quad (5.26)$$

$$\lim_{\phi_{n,\text{vac}} \rightarrow 1} \Psi = 0, \quad (5.27)$$

sejam satisfeitas simultaneamente. Com isso, os termos de derivada total na segunda linha da Eq. (5.20) não contribuem para a energia total, ou seja, devemos ter

$$\int d^2 x \partial_j (A_i W) = 0, \quad \int d^2 x \partial_i (\Psi \partial_i A_0) = 0. \quad (5.28)$$

Assim, a energia total pode ser escrita como

$$E = \int d^2 x \epsilon = E' + E_{\text{BPS}}, \quad (5.29)$$

onde

$$E' = \int d^2 x \left[\frac{1}{2g^2} (B \pm \bar{b})^2 + \frac{1}{2g^2} (\partial_i A_0 \mp \partial_i \Psi)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \mp W_{\phi_n})^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 (A_0 \mp \Psi)^2 (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\phi})^2 \right], \quad (5.30)$$

com $\bar{b}(\phi_n, \Psi)$ dada pela relação (5.23) e para o limite de mínima energia temos

$$E_{\text{BPS}} = \pm \lambda^2 \int d^2x W_{\phi_n} \vec{\phi} \cdot (\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi}). \quad (5.31)$$

Aqui, obtemos também a mesma estrutura da Eq. (4.29) do capítulo anterior,

$$E_{\text{BPS}} = 4\pi\lambda^2 |N| \langle W_{\phi_n} \rangle_{S^2}, \quad (5.32)$$

onde N é o *winding number* e a quantidade $\langle W_{\phi_n} \rangle_{S^2}$ é dada pela relação (4.30). Novamente, a relação

$$E \geq E_{\text{BPS}}, \quad (5.33)$$

é satisfeita uma vez que os campos saturam num limite de mínima energia topológica, limite BPS. Então, as soluções de sólitons BPS possuem configurações de energia estática finita e obedecem um conjunto de quatro equações:

$$B = \mp(\lambda^2 g^2 W + \kappa \Psi), \quad Q = \pm W_{\phi_n} \quad (5.34)$$

$$\partial_i A_0 = \pm \partial_i \Psi, \quad A_0 = \pm \Psi, \quad (5.35)$$

que são as equações BPS do modelo. Diferente do modelo SM apresentado no capítulo anterior, é importante enfatizar que a presença do termo CS possibilita a obtenção de sólitons BPS eletricamente carregados. Assim, as configurações BPS devem ser consistentes com as equações BPS (5.34) e (5.35), equação do superpotencial (5.24) e ainda com a lei de Gauss (5.5). Além disso, verificamos que as equações BPS são soluções das equações EL do modelo (5.10), como esperado.

5.2.1 Soluções BPS

Nesta seção, vamos implementar o *Ansatz* usual para o campo Skyrme (4.34) com a redefinição (4.37) e considerando ainda o campo de *gauge* na forma (4.35). Juntamente com essas considerações, adotaremos ainda

$$A_0 = \omega(r), \quad (5.36)$$

para o potencial elétrico nesse *Ansatz*. O campo magnético mantém sua forma, sendo dado por

$$B = \frac{Na'}{r}. \quad (5.37)$$

As equações BPS podem ser reduzidas à duas relações apenas, sendo dadas por

$$\frac{Na'}{r} + \lambda^2 g^2 W + \kappa \omega = 0, \quad (5.38)$$

$$\frac{4N}{r} (1+a) h' + W_h = 0, \quad (5.39)$$

e a lei de Gauss,

$$\omega'' + \frac{1}{r} \omega' + \frac{\kappa N}{r} a' = 4\lambda^2 g^2 \omega h'^2. \quad (5.40)$$

Para a equação superpotencial (5.24), obtemos

$$8V = \lambda^2 W_h^2 + 4\lambda^4 g^2 \left(W + \frac{\kappa}{\lambda^2 g^2} \omega \right)^2, \quad (5.41)$$

onde $V = V(h, \omega)$. Sobre o comportamento das funções na origem, $r \rightarrow 0$, a regularidade das funções pode ser assegurada desde que as condições abaixo sejam satisfeitas. São elas,

$$h(0) = 1, \quad a(0) = 0, \quad \omega = \omega_0, \quad W(0) = W_0, \quad (5.42)$$

onde ω_0 e W_0 são constantes arbitrárias que podem ser determinadas numericamente. Inserindo o *Ansatz* na densidade de energia (5.14), juntamente com as equações BPS, resulta

$$\epsilon_{\text{BPS}} = \frac{1}{g^2} B^2 + \frac{1}{g^2} \omega'^2 + 4\lambda^2 \omega^2 h'^2 + \frac{\lambda^2}{4} W_h^2. \quad (5.43)$$

Logo, o comportamento assintótico dos campos para garantir soluções estáticas de energia finita com regularidade das funções no limite $r \rightarrow \infty$, devem obedecer as seguintes condições de contorno:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} h'(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} a'(r) = 0 \quad (5.44)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \omega(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \omega'(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} W'(r) = 0.$$

A relação análoga à (4.40) para a energia BPS no contexto do modelo SM mantém sua estrutura aqui, sendo

$$E \geq E_{\text{BPS}} = 2\pi\lambda^2 |N| |W(0)|. \quad (5.45)$$

Conforme já adiantamos na relação (5.6), no contexto de modelos CS a carga elétrica é proporcional ao fluxo magnético, $Q_e \propto \Phi$. Como o campo magnético tem a mesma forma daquele obtido no contexto SM do capítulo anterior, naturalmente a forma do fluxo magnético aqui também permanece sendo

$$\Phi = 2\pi N a_\infty. \quad (5.46)$$

Dessa forma, podemos escrever uma forma explícita também para a carga elétrica total como

$$Q_e = -\frac{\kappa}{g^2} \Phi = -\frac{2\pi N \kappa}{g^2} a_\infty, \quad (5.47)$$

implicando que *a priori*, assim como o fluxo magnético, a carga elétrica total também não é topologicamente quantizada. Isto é, diferente de modelos de Higgs Abelianos com termo Chern-Simons [18, 98], o fluxo magnético de soluções Skyrmons são em geral topologicamente não-quantizados. No entanto, veremos que para o atual modelo acontece algo similar ao modelo SM abordado no capítulo anterior, ou seja, no regime de um forte acoplamento g o fluxo magnético torna-se quantizado. Logo, essa quantização efetiva do fluxo magnético implica que a carga elétrica total Q_e também torna-se-á quantizada.

5.3 Soluções Numéricas

Seguiremos o mesmo roteiro adotado no capítulo anterior, Sec. 4.3. Na solução numérica para todos os casos nesta seção foi implementado $N = \lambda = \kappa = 1$.

Assumimos uma função superpotencial bem comportada na origem, de tal forma que o conjunto de quatro equações a serem satisfeitas, Eqs. (5.38), (5.39), (5.40) e (5.41), é reduzido agora para três. Fazemos uma expansão em série em torno da origem, $r \rightarrow 0$, considerando as condições (5.42) e usando as equações BPS (5.38) e (5.39) em conjunto com a lei de Gauss (5.40). Assim, obtemos:

$$h(r) = 1 - \frac{(W_h)_{h=0}}{8N} r^2 - \frac{(W_h)_{h=0} (W_{hh})_{h=0}}{128N^2} r^4 + \mathcal{O}(r^6), \quad (5.48)$$

$$a(r) = -\frac{g^2 \lambda^2 W_0 + \kappa \omega_0}{2N} r^2 - \frac{g^2 \lambda^2 (W_h)_{h=0}^2 + 2Ng^2 \lambda^2 \kappa^2 W_0 + 2N\kappa^3 \omega_0}{32N^2} r^4 + \mathcal{O}(r^6), \quad (5.49)$$

$$\omega(r) = -\frac{g^2 \lambda^2 W_0 \kappa + \kappa^2 \omega_0}{4N} r^2 - \frac{2Ng^2 \lambda^2 \kappa^2 W_0 + g^2 \lambda^2 \kappa (W_h)_{h=0}^2 + 2N\kappa^4 \omega_0}{128N} r^4 + \mathcal{O}(r^6). \quad (5.50)$$

Por outro lado, a análise do comportamento dos campos quando atingem seu valor de vácuo devem satisfazer as condições de contorno (5.44). Diferente do modelo BPS SM, aqui no modelo BPS SMCS ainda não foi possível encontrar soluções de sólitons *compactons*. Abordaremos, portanto, as soluções de sólitons não-*compactons*. Como antes, vamos considerar a mesma forma para o superpotencial adotada na Sec. 4.3,

$$W(h) = \frac{h^\sigma}{\lambda^2}, \quad (5.51)$$

válida para $\sigma \geq 2$. Assim, as configurações BPS devem satisfazer as seguintes equações:

$$\frac{Na'}{r} + g^2 h^\sigma + \kappa \omega = 0, \quad (5.52)$$

$$\frac{4N\lambda^2}{r} (1+a) h' + \sigma h^{\sigma-1} = 0, \quad (5.53)$$

$$\omega'' + \frac{1}{r} \omega' + \frac{\kappa N}{r} a' = 4\lambda^2 g^2 \omega h'^2, \quad (5.54)$$

cujo potencial $V(h, \omega)$ é dado por

$$V(h, \omega) = \frac{\sigma^2}{4\lambda^2} h^{2(\sigma-1)} + g^2 \left(h^\sigma + \frac{\kappa \omega}{g^2} \right)^2, \quad (5.55)$$

onde temos duas diferentes estruturas de sólitons. Para $\sigma = 2$, verificamos o comportamento dos campos com decaimento tipo exponencial, enquanto para valores de $\sigma > 2$ os campos atingem seu valor de vácuo de maneiras distintas: o campo Skyrme decai como uma lei de potência $r^{-\gamma}$, $\gamma > 0$ ao mesmo tempo que as funções $a(r)$ e $\omega(r)$ tem um decaimento tipo exponencial.

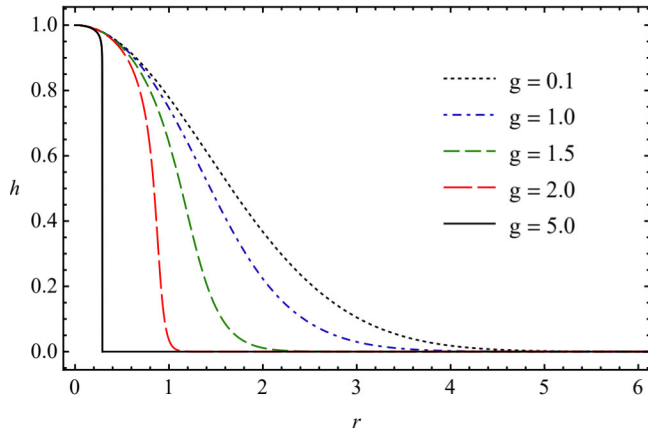
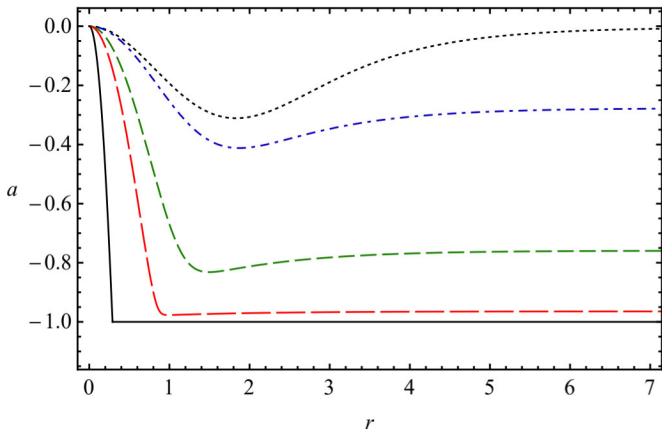
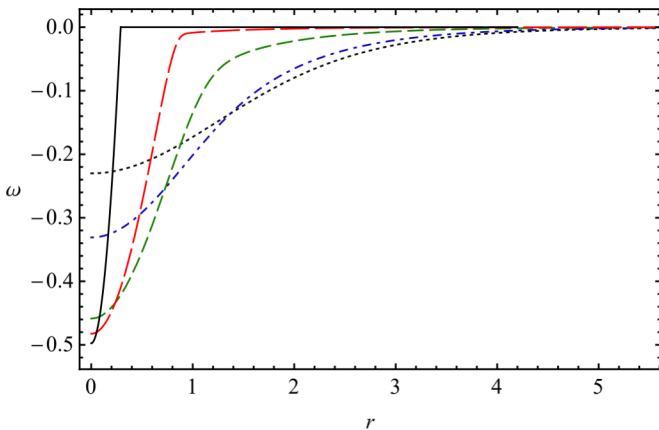
5.3.1 Sólitons para o caso $\sigma = 2$ (a) Campo Skyrme $h(r)$.(b) Campo de gauge $a(r)$.(c) Potencial elétrico $\omega(r)$.

Figura 5.1: Perfis do campo Skyrme (a), campo de gauge (b) e potencial elétrico (c) para alguns valores de g .

para grandes valores de g e todas satisfazem a condição $\omega(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, Fig. 5.1c.

Para o caso $\sigma = 2$, obtemos os seguintes comportamentos assintóticos:

$$h(r) \sim Ce^{-\xi r^2} + \dots, \quad (5.56)$$

$$a(r) \sim a_\infty + \frac{C_2}{N} e^{-kr} \sqrt{r} + \dots, \quad (5.57)$$

$$\omega(r) \sim C_2 \frac{e^{-kr}}{\sqrt{r}} + \dots, \quad (5.58)$$

onde $\xi = [4N\lambda^2(1+a_\infty)]^{-1}$ e C, C_2 sendo constantes arbitrárias.

É interessante ressaltar o comportamento das funções $a(r)$ e $\omega(r)$. Observamos que tais comportamentos são muito similares àqueles descritos por vórtices no contexto de modelos Higgs Abeliano, veja por exemplo as Eqs. (2.49) e (2.50), onde pode ocorrer um análogo regime de transição entre atrativo e repulsivo de acordo com a escolha do potencial. Esta característica é usada para descrever fases de transições de temperatura entre supercondutores do tipo-I e tipo-II [59,60,99].

Os perfis das soluções numéricas para os campos Skyrme $h(r)$, campo de gauge $a(r)$ e potencial elétrico $\omega(r)$ são mostrados na Fig. 5.1. As curvas para $h(r)$ e $a(r)$ são similares àquelas apresentadas no modelo BPS SM (ver Sec. 4.3.2), no sentido de que em ambos os casos temos um comportamento característico tipo-compacton para um forte acoplamento eletromagnético g . Por outro lado, os efeitos do termo CS sobre o campo de gauge fica mais evidente para valores $g < 2$; as curvas atingem um mínimo antes de atingir seu valor constante no vácuo, Fig. 5.1b. O potencial elétrico $\omega(r)$ assume valores finitos na origem, sendo maiores conforme g cresce; aqui também temos soluções tipo-compacton para grandes valores de g e todas satisfazem a condição $\omega(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, Fig. 5.1c.

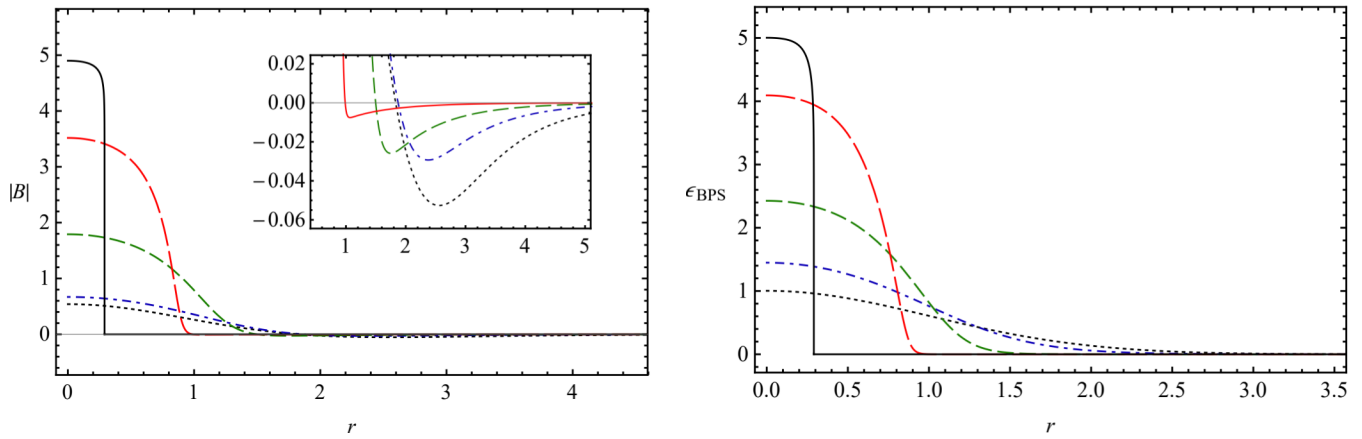


Figura 5.2: Campo magnético (à esquerda) e densidade de energia (à direita).

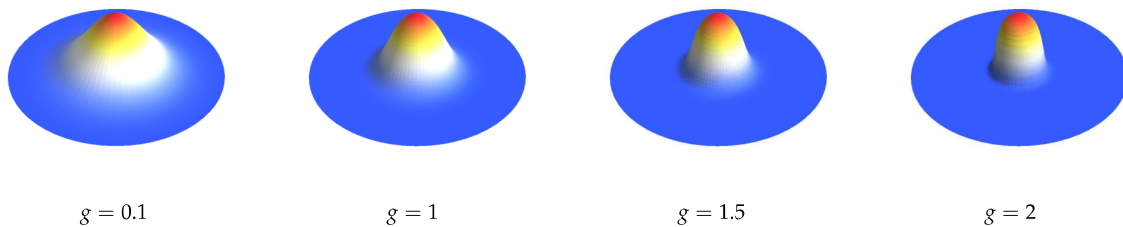


Figura 5.3: Visualização tridimensional da compactação dos perfis da densidade de energia para alguns valores de g .

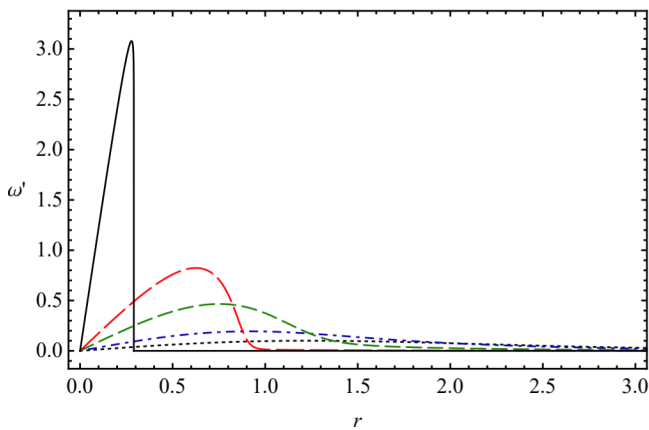


Figura 5.4: Perfis do campo elétrico para alguns valores de g .

A Fig. 5.2 mostra os perfis do campo magnético $B(r)$ e densidade de energia $\epsilon_{\text{BPS}}(r)$. O campo magnético apresenta algumas características gerais já discutidas, como uma maior compactação das soluções à medida que os valores g cresce. Em outras palavras, com o crescimento dos valores de g , as amplitudes das soluções aumentam e tornam-se mais localizadas (isto é, menos espalhadas) e centradas na origem. Além disso, devemos ressaltar um efeito interessante presente aqui, resultado direto da presença do termo CS. Notamos que há um determinado intervalo em r onde ocorre uma inversão do campo magnético para cada g (veja inserção na Fig. 5.2 à esquerda), o que implica diretamente em uma reversão localizada do fluxo magnético. Percebemos ainda que a amplitude de tais efeitos de reversão diminuem com o crescimento de g e no limite $r \rightarrow \infty$. Para a densidade de energia $\epsilon_{\text{BPS}}(r)$, por sua vez, também temos soluções bem localizadas em torno da origem, semelhante ao comportamento de $B(r)$, porém, sem qualquer tipo reversão como deve ser. A Fig. 5.3 exibe uma melhor visualização de como os sólitons BPS tornam-se compactados (localizados) em torno da origem à medida que o valor g cresce.

Para o campo elétrico radial $\omega'(r)$ observamos que diferentes valores de g fornecem estruturas que atingem um valor máximo num r finito, “raio” da solução, cuja amplitude aproxima-se (afasta-se) da origem para um forte (fraco) acoplamento g , tornando-se mais (menos) localizadas.

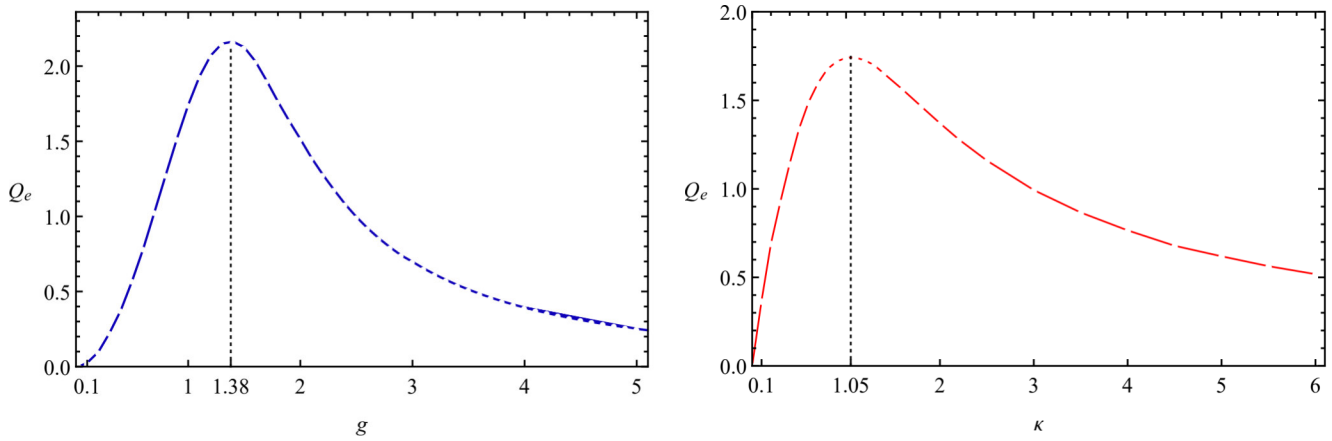


Figura 5.5: Carga elétrica como função dos acoplamento eletromagnético g (à esquerda) e CS (à direita).

Claramente, tais estruturas satisfazem $E_r(0) = 0$ e $E_r(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, Fig. 5.4.

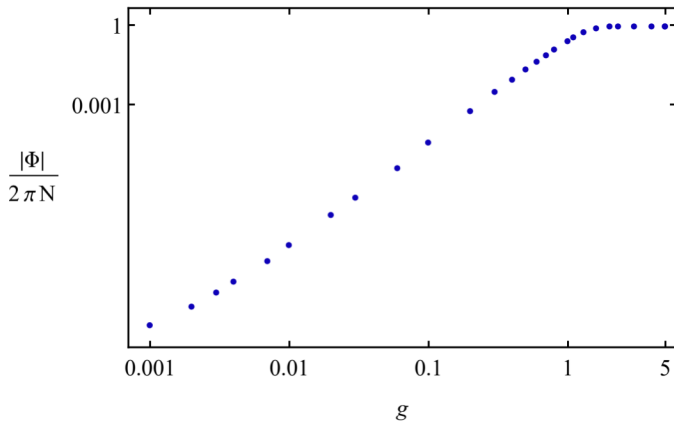


Figura 5.6: Fluxo magnético como função de g .

Na Fig. 5.5 temos a carga elétrica $Q_e(g)$ e $Q_e(\kappa)$ dos Skyrmions revelando alguns aspectos interessantes. Em ambos os casos, a carga elétrica aumenta à medida que o valor da respectiva constante de acoplamento cresce até atingir um valor máximo, Q_{\max} . Para a quantidade $Q_e(g)$, onde fixamos $\kappa = 1$, observamos que um crescimento do acoplamento eletromagnético a partir do seu máximo (g_{\max}) reduz gradualmente a carga elétrica de modo que $Q_e(g) \rightarrow 0$ no limite $g \rightarrow \infty$; este comportamento está em conformidade com a Eq. (5.47). De forma análoga, a carga elétrica $Q_e(\kappa)$, agora fixando $g = 1$, atinge um valor máximo em κ_{\max} e começa decrescer monotonicamente a partir desse valor à medida que κ cresce. Em outras palavras, sempre teremos uma carga elétrica total máxima Q_{\max} fixando um valor de κ (variando g) ou fixando g (variando κ) tal que essa carga decresce a partir desse máximo com o aumento das respectivas constantes de acoplamento. Numericamente, os valores máximos $Q_{\max}(g_{\max})$ e $Q_{\max}(\kappa_{\max})$ são alcançados em $g_{\max} \simeq 1.38$ e $\kappa_{\max} \simeq 1.05$.

O fluxo magnético correspondente ao superpotencial (5.51) com $\sigma = 2$ é mostrado na Fig. 5.6. Observamos um comportamento similar àquele mostrado no contexto do modelo BPS SM, ver Fig. 4.3. Neste caso, é importante notar que o fluxo magnético também tende à um valor constante aqui, $|\Phi| \rightarrow 2\pi N$, tornando-se quantizado topologicamente. A relação (5.47) revela ainda que essa quantização efetiva implica numa carga elétrica total também quantizada topologicamente.

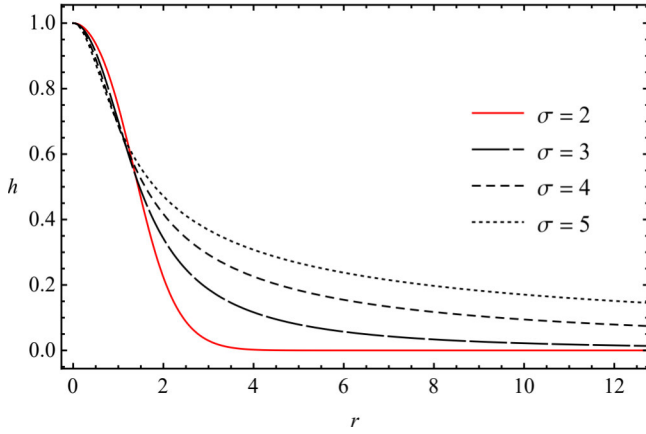
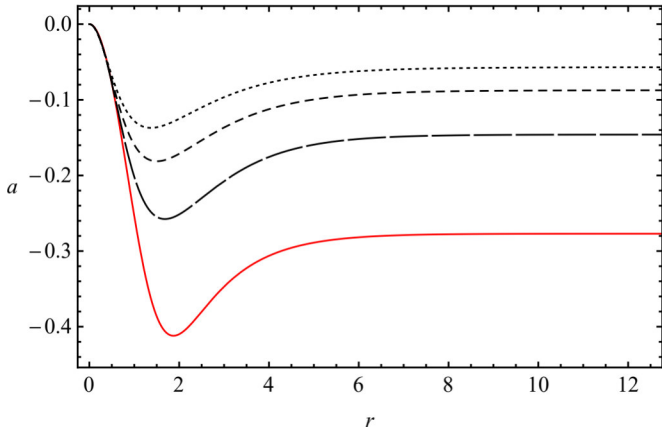
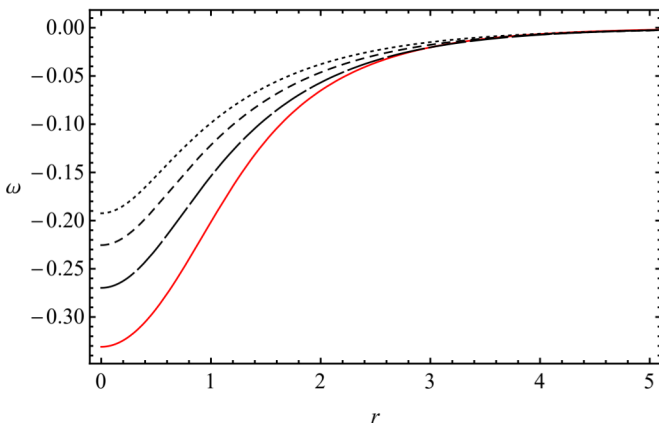
5.3.2 Sólitons para os casos $\sigma > 2$ (a) Campo Skyrme $h(r)$.(b) Campo de gauge $a(r)$.(c) Potencial elétrico $\omega(r)$.

Figura 5.7: Perfis do campo Skyrme (a), campo de gauge (b) e potencial elétrico (c) para o acoplamento eletromagnético fixado em $g = 1$.

cada vez mais da origem à medida que assumimos valores $\sigma > 2$, Fig. 5.9.

Para os casos $\sigma > 2$, obtemos os seguintes comportamentos assintóticos dos campos:

$$h(r) \sim \left(\frac{C_\infty}{r^2}\right)^{1/(\sigma-2)} + \dots, \quad (5.59)$$

$$a(r) \sim a_\infty + \frac{C}{N} e^{-\kappa r} \sqrt{r} + \dots, \quad (5.60)$$

$$\omega(r) \sim C \frac{e^{-\kappa r}}{\sqrt{r}} + \dots, \quad (5.61)$$

onde C é uma constante arbitrária e

$$C_\infty = \frac{8N(a_\infty + 1)}{\sigma(\sigma - 2)}. \quad (5.62)$$

Note que temos dois tipos de comportamento assintótico para os campos, diferentemente do que acontece no modelo SM onde todas as funções para os casos $\sigma > 2$ obedecem um decaimento tipo potência.

As Figs. 5.7, 5.8 e 5.9 mostram os perfis de nossas soluções considerando um valor fixo $g = 1$ e assumindo diferentes valores de σ . Como esperado, o comportamento de $h(r)$ sendo tipo potência mostra um decaimento mais lento no limite $r \rightarrow \infty$ para valores $\sigma > 2$, Fig. 5.7a. Apesar das funções $a(r)$ e $\omega(r)$ manterem um decaimento tipo exponencial, as estruturas dos perfis também são modificadas para $\sigma > 2$; Fig. 5.7b e Fig. 5.7c.

O campo magnético e densidade de energia são mostrados na Fig. 5.8. O efeito do termo CS que causa inversão do campo magnético para $\sigma = 2$ (linha sólida vermelha) é reduzido à medida que σ assume valores $\sigma > 2$. Já na densidade de energia, notamos que seus valores na origem $\epsilon_{\text{BPS}}(0)$ aumentam conforme σ assume valores para $\sigma > 2$.

Por fim, no campo elétrico $\omega'(r)$ obtemos menores amplitudes dos perfis, as quais aproximam-se

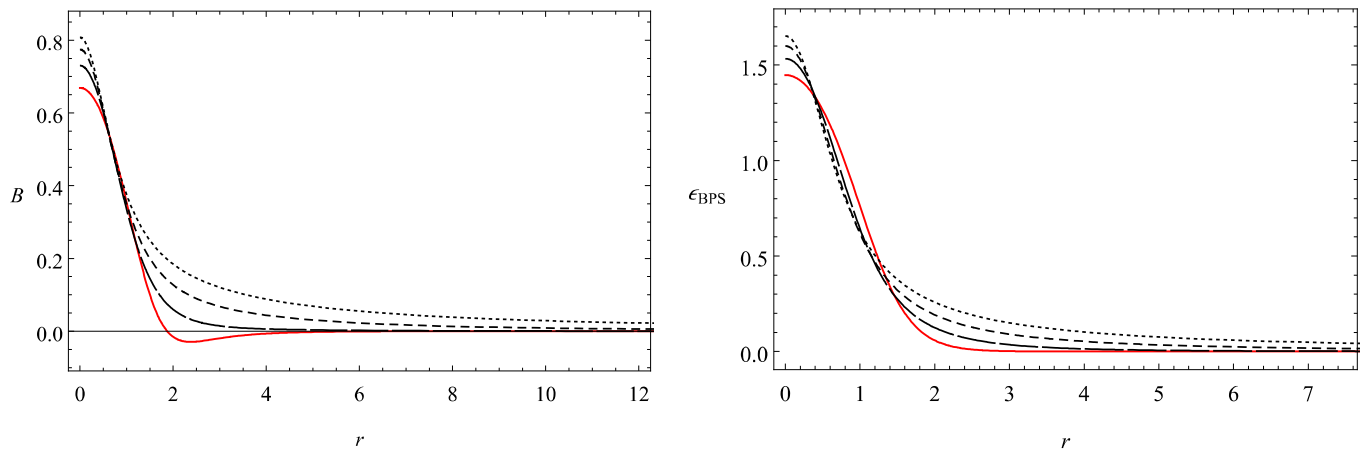


Figura 5.8: Campo magnético (à esquerda) e densidade de energia (à direita) com $g = 1$.

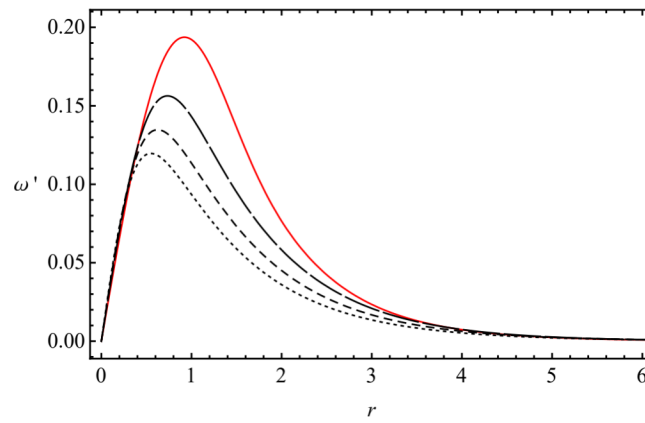


Figura 5.9: Campo elétrico com $g = 1$.

Parte II - Modelo padrão estendido

Solução exata tipo-Schwarzschild
num modelo bumblebee de
gravitação.

6 Alguns aspectos da Relatividade Geral

Neste capítulo, vamos fazer uma breve revisão sobre alguns aspectos relevantes da Relatividade Geral (RG). Apresentaremos elementos gerais da teoria, passando pelas as equações de campo de Einstein até chegar na conhecida solução de buraco negro descrita pela métrica Schwarzschild.

6.1 Geometria

O espaço-tempo na RG usual é representado por uma variedade (*manifold*) Riemanniana em $4D$, cujo elemento invariante de distância no espaço-temporal é dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (6.1)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é função das coordenadas espaço-temporais. A assinatura que adotaremos daqui em diante será $(-+++)$. No contexto da geometria riemanniana, no qual é formulada a RG, temos uma quantidade descrevendo o curvatura do espaço-tempo, chamada tensor de Riemann, a qual escreve-se como

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}, \quad (6.2)$$

onde $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ é a conexão métrica, cujas componentes são também conhecidas como símbolos de Christoffel, dada como

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}), \quad (6.3)$$

onde $\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}$. No caso de uma geometria não-riemanniana, a quantidade $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ não é simétrica, definindo o tensor

$$S^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu}, \quad (6.4)$$

conhecido como torção. A conexão métrica $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ obedece uma lei de transformação não-homogênea, isto é, não é um tensor. No entanto, a diferença entre eles dada em (6.4) é um tensor [100].

O tensor de Riemann (6.2) possui as seguintes propriedades:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (6.5)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\mu\sigma\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}, \quad (6.6)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0. \quad (6.7)$$

É possível ainda mostrar a chamada identidade de Bianchi:

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\rho\sigma\lambda\mu} + \nabla_\mu R_{\rho\sigma\nu\lambda} = 0, \quad (6.8)$$

onde ∇_μ denota a derivada covariante de um tensor na RG, definida como

$$\nabla_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu A^\sigma, \quad \nabla_\mu B_\nu = \partial_\mu B_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma B_\sigma, \quad (6.9)$$

válidas para tensores contravariante e covariantes, respectivamente. Ainda com o tensor de Riemann, podemos obter outras quantidades importantes. Temos o chamado tensor de Ricci, definido por

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\rho{}_{\mu\rho\nu}, \quad (6.10)$$

cujo escalar correspondente

$$R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (6.11)$$

conhecido como escalar de Ricci.

Na RG temos que a geometria riemanniana está relacionada com a matéria através da chamada equação de Einstein [100],

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}^M, \quad (6.12)$$

onde $\kappa = 8\pi G_N/c^4$, sendo G_N a constante de Newton da gravitação. A quantidade $T_{\mu\nu}^M$ é o tensor energia-momento associado a matéria e $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein. Este último possui divergência nula, isto é, $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$; essa propriedade assegura a consistência da relação (6.12), implicando na lei de conservação do tensor energia-momento $\nabla^\mu T_{\mu\nu}^M = 0$. Uma forma alternativa de apresentar a Eq. (6.12) é tomando-se o traço desta relação,

$$R = -\kappa T^M, \quad (6.13)$$

o que permite reescrever a (6.12) como

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu}^M - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^M \right), \quad (6.14)$$

onde $T^M = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}^M$. No caso particular em que desejamos descrever o espaço-tempo na ausência de matéria $T_{\mu\nu}^M = 0$ (a região exterior à uma estrela, por exemplo), temos a chamada equação de Einstein para vácuo dada por

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (6.15)$$

No caso newtoniano, este caso equivale a tomar a equação de Laplace $\nabla^2 U = 0$, ao invés da equação de Poisson $\nabla^2 U = 4\pi G\rho$, onde U é o potencial gravitacional. A equação tensorial (6.12) fornece um sistema de equações diferenciais não-lineares para $g_{\mu\nu}$ com dez componentes independentes. Posteriormente à formulação da Eq. (6.12), Einstein modificou sua equação introduzindo a chamada constante cosmológica Λ com a finalidade de adequar sua teoria para a descrição de um universo estático em grande escala. Então, a Eq. (6.12) tornou-se

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}^M. \quad (6.16)$$

A equação de campo de Einstein (6.16) pode ser obtida sem a necessidade de uma ação na formulação da RG, ou seja, podemos simplesmente determinar as equações de campo na RG sem uma formulação Lagrangiana. No entanto, na investigação de diferentes teorias de gravidade, é mais conveniente abordar um tratamento por meio de uma ação específica. Dessa forma, a compreensão

física de campos extras quando acoplados à métrica fica mais clara. Considere a seguinte ação [100]:

$$S = S_{\text{EH}} + S_{\text{M}}, \quad (6.17)$$

onde

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} d^4x (R - 2\Lambda), \quad (6.18)$$

é conhecida como ação de Einstein-Hilbert. A constante $g = \det g_{\mu\nu}$ é o determinante da métrica e S_{M} é a ação de matéria. Tomando a variação da ação (6.17) em relação à métrica, obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2\kappa} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{M}}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (6.19)$$

Usando a definição do tensor energia-momento definido por

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{M}}}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (6.20)$$

encontramos, a partir da Eq. (6.19), exatamente a mesma expressão dada em Eq. (6.16).

6.1.1 Equação da geodésica

No movimento de uma partícula livre sujeita à geometria do espaço-tempo, a substituição da métrica plana da relatividade especial pela riemanniana, resulta numa trajetória em que a integral do intervalo (6.1) é um extremo. Consideremos então,

$$\tau = \int \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda, \quad (6.21)$$

onde λ é um parâmetro arbitrário. Por simplicidade, podemos assumir $\lambda = \tau$ de modo que

$$\mathcal{U}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (6.22)$$

é a quadri-velocidade. Considere ainda que as partículas teste tenham massa unitária e assim, podemos fixar

$$f = g_{\mu\nu} \mathcal{U}^\mu \mathcal{U}^\nu = -1. \quad (6.23)$$

A relação (6.21) é do tipo

$$\delta\tau = \int \sqrt{-f} d\tau = -\frac{1}{2} \int (-f)^{-1/2} \delta f d\tau = \frac{1}{2} \int \delta f d\tau \equiv \delta I, \quad (6.24)$$

ou ainda,

$$I = \frac{1}{2} \int g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau. \quad (6.25)$$

Considerando variações infinitesimais no espaço-tempo curvo,

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu \quad (6.26)$$

$$g^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} + (\partial_\sigma g_{\mu\nu}) \delta x^\sigma, \quad (6.27)$$

e assumindo termos de primeira ordem em δx^μ , obtemos (após algumas manipulações):

$$\delta I = - \int \left[g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] \delta x^\sigma d\tau = 0. \quad (6.28)$$

Logo, para qualquer variação δx^σ , devemos ter

$$g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0,$$

ou, usando a Eq. (6.3),

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (6.29)$$

Esta é equação da geodésica, que descreve as trajetórias de partículas livres no espaço-tempo curvo.

6.2 A solução de Schwarzschild

A solução mais simples possível para as equações de Einstein descreve o espaço-tempo exterior a uma distribuição de massa esfericamente simétrica, neutra e estática, veja Fig. 6.1 como exemplo. Esta é a conhecida solução de Schwarzschild [101]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (6.30)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. A constante M , conhecida como *massa geométrica*, é a fonte do campo gravitacional, isto é, designa o corpo massivo que causa a curvatura do espaço-tempo; explicitamente é dada por $M = G_N m$, onde m é massa do corpo. Como trata-se de uma solução exterior a um corpo massivo, é considerada uma solução de vácuo, ou seja, é uma métrica obtida a partir da equação de Einstein no vácuo (6.15).

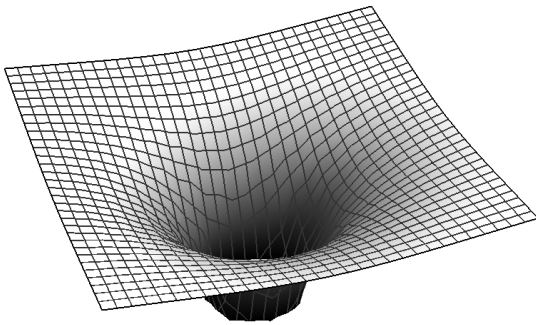


Figura 6.1: Deformação do espaço-tempo por um objeto massivo e esfericamente simétrico.

Observe que no limite $r \rightarrow \infty$ temos um espaço-tempo de Minkowski. Por outro lado, no limite em que há uma aproximação do objeto central, responsável pela curvatura do espaço-tempo, notamos divergências em relação à gravitação Newtoniana. Além das diferentes trajetórias de partículas ao redor da massa central, nota-se a existência de *a priori* duas singularidades, $r = 0$ e $r = r_s = 2M$, este último denominado raio de Schwarzschild. A trajetórias de partículas nesse espaço-tempo que atravessam a fronteira $r = 2M$ são levadas até a singularidade $r \rightarrow 0$, isto é, jamais conseguirão retornar (independente de sua velocidade) à região exterior desse corpo. Devido a essa propriedade, o objeto central é chamado de *buraco negro* e a fronteira r_s é chamada de *horizonte de eventos*, pois demarca duas regiões do espaço-tempo desconectadas causalmente

uma da outra [102]. Ainda sobre as singularidades, temos uma forma de verificar se a(s) singularidade(s) presentes na métrica são físicas ou não-físicas. Uma singularidade física não pode ser removida da métrica por qualquer que seja a transformação de coordenadas. Por outro lado, uma singularidade não-física é aquela que pode ser removida da métrica através de uma transformação de coordenadas adequada. A forma de verificação é calcular o invariante de Riemann (ou escalar

Kretschmann). No caso da métrica (6.30), o cálculo dessa quantidade resulta

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{48M^2}{r^6}. \quad (6.31)$$

Quando a possível singularidade é substituída nesta relação e a mesma continua sendo finita, fica caracterizada uma *singularidade removível* (não-física). Caso contrário, se usamos a singularidade na (6.31) e esta leva à divergência do invariante de Riemann, temos uma *singularidade física*. Logo, a solução de Schwarzschild tem apenas uma singularidade física dada por $r = 0$. A aparente singularidade $r = 2M$, pode ser removida, por exemplo, usando quando escrevemos a métrica nas *coordenadas de Eddington-Finkelstein* [100].

Uma forma alternativa, e em alguns casos mais conveniente, de apresentar a métrica (6.30), é escrevê-la em um sistema de coordenadas de modo a torná-la isotrópica, isto é, um sistema em que o coeficiente para as componentes espaciais é o mesmo. Fazemos isso introduzindo uma nova coordenada radial,

$$r = \bar{r} \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}} \right)^2, \quad (6.32)$$

o que nos leva à seguinte métrica

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - M/2\bar{r}}{1 + M/2\bar{r}} \right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}} \right)^4 (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2). \quad (6.33)$$

Esta é a métrica de Schwarzschild escrita no chamado sistema de coordenadas isotrópicas [103].

6.3 Formalismo PPN

Apresentaremos nesta seção uma breve abordagem das ideias básicas sobre o Formalismo Pós-Newtoniano Parametrizado (*Parametrized Post-Newtonian - PPN*). O desenvolvimento de tal formalismo foi baseado na ideias iniciais de Eddington [104], sendo posteriormente apresentado em sua forma mais completa em [105, 106]. Usando esse formalismo é possível analisar diversas teorias métricas para a gravitação, permitindo que elas sejam confrontadas com os resultados de diversos testes observacionais. Através de parâmetros provenientes do formalismo, pode-se analisar várias informações sobre a teoria em estudo, como: conservação de energia, de momento linear e angular, suas previsões para fenômenos como deflexão da luz, precessão do periélio, quebra do princípio de equivalência, dentre outros.

Conforme já mencionado, o formalismo PPN é utilizada na comparação de diferentes teorias métricas. Essencialmente, os campos contidos numa teoria métrica de gravitação contribuem na curvatura do espaço-tempo associada a essa métrica. Assim, a métrica e as equações de movimento para matéria tornam-se entidades primárias quando se deseja calcular efeitos observáveis. Fundamentalmente, o que distingue uma teoria métrica de outra é a maneira como a matéria e possivelmente outros campos gravitacionais geram a métrica. A comparação de teorias métricas de gravidade entre si e com experimentos torna-se particularmente simples quando consideramos o limite de campo gravitacional fraco e baixas velocidades (comparado a c). Essa aproximação, conhecida como o limite pós-Newtoniano é suficientemente precisa na abrangência de testes experimentais realizados (e também previstos) atualmente no Sistema Solar. Nesse limite, a métrica prevista atualmente por

quase todas as teorias métricas possuem a mesma estrutura; podem ser escritas como uma expansão sobre a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ em termos de potenciais gravitacionais adimensionais. Dessa forma, é possível obter parâmetros que podem ser usados para comparar diferentes teorias métricas através da interpretação física dos mesmos. Tal procedimento é denominado de formalismo PPN. O desenvolvimento desse formalismo não será abordado aqui. Uma abordagem didática pode ser encontrada na Ref. [107] e uma versão mais recente e completa com os parâmetros PPN pode ser encontrada também em [108].

Apenas para uma rápida compreensão, vamos apresentar os primeiros termos obtidos com o formalismo PPN em sua versão inicial. Antes, porém, é importante lembrar que a teoria da gravitação de Newton pode explicar os efeitos da gravidade no Sistema Solar com boa precisão. Isso é possível principalmente devido a gravidade no nosso Sistema Solar ser relativamente fraca, o suficiente para atender as exigências do regime de validade da teoria newtoniana. Neste sentido, o formalismo PPN pode ser implementado numa determinada métrica a fim de tomar a expansão da mesma no limite de campos fracos e baixas velocidades. Uma versão inicial da métrica, mostrando apenas 2 dos parâmetros PPN, é dada por

$$g_{00} = -1 + 2U - 2\beta U^2 + \dots, \quad (6.34)$$

$$g_{ij} = (1 + 2\gamma U) \delta_{ij} + \dots, \quad (6.35)$$

e g_{0i} também pode depender de alguns parâmetros, mas podemos assumir $g_{0i} = 0$. A quantidade $U \sim M/r$ é o potencial gravitacional, enquanto γ e β são parâmetros PPN. Podemos, portanto, usar a solução (6.33) e determinar o valor desses parâmetros. Para isso, expandimos as componentes da métrica (6.33) em termos do potencial gravitacional $\bar{U} \sim M/\bar{r}$, assumindo $M/\bar{r} \ll 1$. Obtemos então,

$$\bar{g}_{00} = -1 + 2\bar{U} - 2\bar{U}^2 + \dots, \quad (6.36)$$

$$\bar{g}_{ij} = \left(1 + 2\bar{U} + \frac{3}{2}\bar{U}^2\right) \delta_{ij} + \dots, \quad (6.37)$$

com $\bar{g}_{0i} = 0$. Logo, a comparação da expansão da métrica de Schwarzschild, (6.36) e (6.37), com (6.34) e (6.35), revela os valores dos parâmetros PPN γ e β para a RG dados por

$$\gamma = \beta = 1. \quad (6.38)$$

Essa análise se faz necessária, pois usaremos tais conceitos na análise da nova solução a ser estudada no próximo capítulo.

7 Solução exata tipo-Schwarzschild num modelo bumblebee de gravitação

Neste capítulo vamos tratar da obtenção de uma solução exata tipo-Schwarzschild no contexto de uma teoria de campo além do Modelo Padrão (MP) [1]; conforme já mencionado trata-se do modelo teórico denominado de Modelo Padrão Estendido (MPE). O MPE contém, além das interações que definem o atual MP, termos que fornecem interações que violam as simetrias de Lorentz e CPT, controladas por coeficientes gerados via quebra espontânea da simetria de Lorentz numa teoria quântica mais fundamental definida na escala de Planck. É importante ressaltar que a violação da simetria CPT é sempre acompanhada pela quebra da simetria de Lorentz [109] e, portanto, incorpora o MPE. Contudo, a violação dessas simetrias no espaço-tempo envolve um processo que pode ser explícito ou espontâneo [110]. A quebra de simetria é explícita quando os campos de fundo (*background fields*) fixos, que não possuem dinâmica e não sofrem variação de campo, aparecem diretamente na Lagrangiana acoplados com campos físicos, isto é, são introduzidos à mão no MPE não-gravitacional. No MPE, os operadores que violam a simetria de Lorentz são classificados de acordo com sua dimensão de massa. O subconjunto da teoria que tem um número finito de operadores com dimensão de massa três ou quatro, contendo os termos dominantes de violação de Lorentz, é o chamado MPE mínimo [111]. O restante dos operadores com dimensão de massa superior estão contidos no MPE não-mínimo [112–116]. Naturalmente, o MPE não-mínimo é uma generalização da versão mínima e torna-se relevante em escalas de altas energias [117].

No atual cenário em que o MP é considerada uma teoria efetiva (a baixas energias), o MPE pode ser compreendido como uma correção natural ao MP. A ação completa do MPE, incorporando o MPE mínimo e não-mínimo (incluindo também o setor gravitacional) num espaço-tempo Riemann-Cartan (torção não nula) pode ser expressa como a soma parcial

$$S_{\text{MPE}} = S_{\text{MP}} + S_{\text{L}} + S_{\text{Gravidade}} + \dots, \quad (7.1)$$

onde S_{MP} é a ação do MP, modificada pela adição de acoplamentos gravitacionais para um espaço-tempo Riemann-Cartan. O termo S_{L} contém todos os termos que carregam violação de Lorentz e CPT e envolvem campos do MP dominantes em baixas energias, incluindo acoplamentos gravitacionais mínimos. O termo $S_{\text{Gravidade}}$ representa o setor de gravidade, incorporando possível violação de Lorentz e CPT. Contribuições de mais termos na ação 7.1 são de alta ordem em baixas energias, também com possível violação da simetria de Lorentz. A correspondente densidade Lagrangiana da ação S_{MP} pode ser decomposta como segue:

$$\mathcal{L}_{\text{MP}} = \mathcal{L}_{\text{lepton}} + \mathcal{L}_{\text{quark}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}}. \quad (7.2)$$

Uma descrição mais detalhada sobre cada termo de (7.2) pode ser encontrada em [118]. Para o setor

gravitacional puro do MPE, temos

$$\mathcal{L}_{\text{Gravidade}} = \mathcal{L}_{\text{LI}} + \mathcal{L}_{\text{LV}}. \quad (7.3)$$

Todos os termos dessa densidade Lagrangiana são invariantes sob transformações de observador, na qual todos os campos e *backgrounds* (campos de fundo) se transformam. Estas incluem transformações de Lorentz locais de observadores e transformações de coordenadas gerais ou difeomorfismos de observador. A parte \mathcal{L}_{LI} também permanece invariante sob transformações de partícula, na qual se transformam partículas e campos localizados, mas os campos de fundo permanecem fixos; estas incluem transformações de Lorentz locais de partícula e difeomorfismos de partícula. No entanto, na ausência de flutuações dos coeficientes de violação de Lorentz (VL), a parte \mathcal{L}_{LV} muda sob transformações de partícula e assim quebra a invariância de Lorentz [119].

A parte invariante de Lorentz \mathcal{L}_{LI} é composta por quantidades como o tensor de Riemann $R_{\mu\nu\alpha\beta}$, a torção e outros possíveis campos dinâmicos determinando as propriedades do setor de gravitação da teoria. Em geral, os principais termos de \mathcal{L}_{LI} são o termo usual de Einstein-Hilbert e termos cosmológicos no espaço-tempo de Riemann-Cartan. A parte de violação de Lorentz \mathcal{L}_{LV} é construída combinando coeficientes de VL com operadores de campos gravitacionais para produzir termos individuais que são invariantes sob transformações de Lorentz local de observador e difeomorfismos de observador. Ressaltamos, porém, que nosso trabalho está inserido apenas no contexto do setor gravitacional puro do MPE mínimo, no qual o espaço-tempo é Riemanniano, isto é, a torção é nula.

A ação efetiva do MPE mínimo pode ser dada por

$$S = S_{\text{EH}} + S_{\text{VL}} + S^{\text{M}}, \quad (7.4)$$

onde S_{EH} é ação usual de Einstein-Hilbert (6.18) e S^{M} é ação de matéria geral, podendo incluir contribuições de VL. No presente trabalho, os efeitos da constante cosmológica podem ser desprezados, de modo que podemos fazer $\Lambda = 0$. Para o segundo termo, S_{VL} , consideramos os principais acoplamentos gravitacionais, com a ação sendo [118]

$$S_{\text{VL}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left(-uR + s^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + t^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} \right), \quad (7.5)$$

com os coeficientes $s^{\mu\nu}$ e $t^{\mu\nu\alpha\beta}$ possuindo as mesmas simetrias dos tensores aos quais estão acoplados, além de terem traços nulos. A violação de Lorentz explícita é incompatível com o espaço-tempo de Riemann [118]. Portanto, neste trabalho, restringimos nossa atenção na quebra espontânea da simetria de Lorentz no espaço-tempo de Riemann, onde os coeficientes de violação de Lorentz u , $s^{\mu\nu}$, $t^{\mu\nu\alpha\beta}$ são campos dinâmicos. Uma vez que a violação de Lorentz local de partícula é sempre acompanhada pela violação de difeomorfismo de partícula [120], os coeficientes de VL também controlam a violação de difeomorfismo da teoria. Além disso, as quantidades u , $s^{\mu\nu}$, $t^{\mu\nu\alpha\beta}$ podem ser compostas de campos de uma teoria mais fundamental. Veremos um exemplo desta situação em detalhes na seção a seguir.

7.1 Modelo teórico

O objetivo do nosso trabalho é o estudo de uma solução de vácuo esfericamente simétrica no contexto de um modelo gravitacional que inclui termos de violação de Lorentz. Assim, a fim de

investigar os possíveis efeitos da VL no setor gravitacional, vamos considerar uma classe especial de teorias na qual a VL surge a partir da dinâmica de um vetor que adquire um valor esperado de vácuo (VEV) não nulo. Essas teorias são conhecidas como modelos *bumblebee* e estão entre os exemplos mais simples de teorias de campo com quebra espontânea da simetria de Lorentz. Especificamente, é um modelo gravitacional que estende o formalismo usual da RG. Através da escolha de um potencial adequado, o campo bumblebee B_μ adquire VEV não nulo, induzindo uma quebra espontânea da simetria de Lorentz. Em outras palavras, a VL é atingida por meio de um potencial cuja forma do funcional possui um mínimo que assegura a quebra da simetria $U(1)$. Em geral, a ação para um campo bumblebee B_μ acoplado à gravidade e matéria pode ser escrita como

$$S_B = \int d^4x \mathcal{L}_B, \quad (7.6)$$

onde

$$\mathcal{L}_B = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{gB} + \mathcal{L}_K + \mathcal{L}_V + \mathcal{L}_M. \quad (7.7)$$

No espaço-tempo Riemanianno, \mathcal{L}_g é o termo da gravitação puro da RG (incluindo a constante cosmológica), \mathcal{L}_{gB} descreve o acoplamento gravidade-bumblebee, \mathcal{L}_K contém os termos cinético e de auto-interação do campo bumblebee, \mathcal{L}_V corresponde a contribuição do potencial que inclui termos proporcionando a VL, e \mathcal{L}_M define o setor de matéria e outros campos com seus acoplamentos ao campo bumblebee. Restringindo-nos ao caso de um espaço-tempo com constante cosmológica nula ($\Lambda = 0$), vamos considerar a seguinte densidade Lagrangiana [120]:

$$\mathcal{L}_B = \frac{\epsilon}{2\kappa} R + \frac{\epsilon}{2\kappa} \xi B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \epsilon B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \epsilon V(B^\mu) + \mathcal{L}_M, \quad (7.8)$$

onde¹ $\kappa = 8\pi G_N/c^4$, $\epsilon \equiv \sqrt{-g}$ com g sendo o determinante da métrica e ξ é uma constante de acoplamento real que controla a interação gravidade-bumblebee não-mínima. O campo $B_{\mu\nu}$ é definido por

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (7.9)$$

Para nossos propósitos, a forma específica do potencial em (7.8) é irrelevante, mas é importante enfatizar que este deve ser formado a partir de uma combinação escalar do campo bumblebee e a métrica $g_{\mu\nu}$. Em geral, um potencial V que fornece um VEV não nulo para B_μ tem o seguinte funcional:

$$V = V(B^\mu B_\mu \pm b^2), \quad (7.10)$$

onde b^2 é uma constante real e positiva. Assim, o VEV do campo bumblebee é determinado quando $V(B^\mu B_\mu \pm b^2) = 0$, implicando que a condição

$$B^\mu B_\mu \pm b^2 = 0, \quad (7.11)$$

deve ser satisfeita. Logo, o campo B^μ adquire um VEV não nulo dado por

$$\langle B^\mu \rangle = b^\mu, \quad (7.12)$$

onde b^μ é uma função das coordenadas do espaço-tempo tal que $b^\mu b_\mu = \mp b^2 = \text{cte}$. Logo, o vetor b^μ , também chamado de campo de fundo quebra a simetria de Lorentz espontaneamente. Note que

¹Como estamos adotando o sistema de unidades geometrizadas que assume $c = 1$, a constante c aparecerá apenas quando for conveniente.

os sinais \pm no potencial (7.10) determina se o campo b^μ será tipo-tempo ou tipo-espaço.

Por outro lado, as principais contribuições de VL no setor gravitacional fornecidas pelo setor do MPE mínimo são dadas pela ação (7.4), assumindo ausência do setor de matéria $S^M = 0$,

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \epsilon \left[(1-u) R + s^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + t^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} \right], \quad (7.13)$$

onde u , $s^{\mu\nu}$ e $t^{\mu\nu\alpha\beta}$ são tensores reais e adimensionais que carregam a informação sobre a VL. Podemos então estabelecer uma correspondência entre a ação bumblebee (7.6) e ação VL (7.13) considerando a seguinte parametrização [118]

$$u = -\frac{1}{4} \zeta B^\mu B_\mu, \quad s^{\mu\nu} = \zeta \left(B^\mu B^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} B^\alpha B_\alpha \right), \quad t^{\mu\nu\alpha\beta} = 0, \quad (7.14)$$

onde $s^{\mu\nu}$ tem traço nulo. Usando (7.14) em (7.13), obtemos

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \epsilon \left[R + \zeta B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} \right]. \quad (7.15)$$

Assim, notamos que os coeficientes u e $s_{\mu\nu}$, dados em (7.14), são escolhidos de modo que a ação resultante forneça, além do termo usual, o acoplamento entre campo bumblebee B_μ com a gravitação (via $R_{\mu\nu}$). Em geral, se de fato tivermos alguma manifestação da violação de Lorentz na natureza, é esperado que apenas coeficientes do tipo $s^{\mu\nu}$ ou $t^{\mu\nu\alpha\beta}$ possam emergir como resultado da quebra espontânea de simetria de Lorentz na escala de Planck. Sendo assim, a parametrização (7.14) é uma escolha consistente.

Equações de campo

A variação da ação (7.6) em relação à métrica $g_{\mu\nu}$, fornece a equação de campo correspondente equação de Einstein estendida

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (7.16)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento total composto pelo setor de matéria $T_{\mu\nu}^M$ e contribuições do campo bumblebee $T_{\mu\nu}^B$, isto é,

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^M + T_{\mu\nu}^B, \quad (7.17)$$

com

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^B = & -B_{\mu\alpha} B^\alpha_\nu - \frac{1}{4} B_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - V g_{\mu\nu} + 2V' B_\mu B_\nu + \frac{\zeta}{\kappa} \left[\frac{1}{2} B^\alpha B^\beta R_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - B_\mu B^\alpha R_{\alpha\nu} - B_\nu B^\alpha R_{\alpha\mu} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\mu (B^\alpha B_\nu) + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\nu (B^\alpha B_\mu) - \frac{1}{2} \nabla^2 (B_\mu B_\nu) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta (B^\alpha B^\beta) \right]. \end{aligned} \quad (7.18)$$

O símbolo “ ’ ” no potencial indica a derivada deste em relação ao seu argumento.

A equação de movimento para o campo bumblebee resulta

$$\nabla^\mu B_{\mu\nu} = J_\nu, \quad (7.19)$$

com $J_\nu = J_\nu^M + J_\nu^B$, onde J_ν^M está associado com setor de matéria (agindo como uma fonte para o

campo bumblebee) e J_ν^B é a corrente parcial devido a auto-interação bumblebee dada por

$$J_\nu^B = 2V'B_\nu - \frac{\tilde{\xi}}{\kappa} B^\mu R_{\mu\nu}. \quad (7.20)$$

Tomando a derivada covariante na Eq. (7.16), e usando o fato de que $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$, obtemos a condição

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (7.21)$$

que mostra a lei de conservação covariante para o tensor energia-momento total.

O traço da Eq. (7.16) é

$$R = -\kappa T^M + 4\kappa V - 2\kappa V' B_\mu B^\mu + \xi \left[\frac{1}{2} \nabla^2 (B_\mu B^\mu) + \nabla_\alpha \nabla_\beta (B^\alpha B^\beta) \right], \quad (7.22)$$

onde $T^M \equiv g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^M$, e retornando com este resultado em (7.16) a versão do traço-reverso para a equação de Einstein estendida

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} = & \kappa \left(T_{\mu\nu}^M - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^M \right) + \kappa T_{\mu\nu}^B + 2\kappa g_{\mu\nu} V - \kappa B_\alpha B^\alpha g_{\mu\nu} V' + \frac{\tilde{\xi}}{4} g_{\mu\nu} \nabla^2 (B_\alpha B^\alpha) \\ & + \frac{\tilde{\xi}}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta (B^\alpha B^\beta). \end{aligned} \quad (7.23)$$

Note que se as contribuições do campo bumblebee B_μ e potencial $V(B_\mu)$ são nulas, a Eq. (7.23) recupera a equação usual de Einstein para o vácuo (6.14), como esperado.

7.2 Solução esfericamente simétrica num cenário com VL

Nesta seção, obtemos uma solução de vácuo esfericamente simétrica (que descreve a região exterior a um corpo massivo no espaço-tempo) impondo $T_{\mu\nu}^M = 0$. Além disso, o potencial $V(B_\mu)$ é escolhido de tal forma que a Eq. (7.12) seja satisfeita e, portanto, $V = 0$. Particularmente, estamos interessados em uma solução de vácuo induzida por uma quebra espontânea da simetria de Lorentz quando o campo bumblebee B_μ permanece "congelado" em seu VEV². Assim, podemos fixar o campo bumblebee como sendo

$$B_\mu \equiv \langle B_\mu \rangle = b_\mu, \quad (7.24)$$

onde b_μ é o VEV dado em (7.12) e, obviamente, teremos $V = 0$ e $V' = 0$. Logo, assumindo as condições descritas acima, reescrevemos a equação de Einstein modificada Eq. (7.23) da seguinte maneira,

$$\bar{R}_{\mu\nu} = 0, \quad (7.25)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\mu\nu} = & R_{\mu\nu} + \kappa b_{\mu\alpha} b^\alpha{}_\nu + \frac{\kappa}{4} b_{\alpha\beta} b^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + \tilde{\xi} b_\mu b^\alpha R_{\alpha\nu} + \tilde{\xi} b_\nu b^\alpha R_{\alpha\mu} - \frac{\tilde{\xi}}{2} b^\alpha b^\beta R_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - \frac{\tilde{\xi}}{2} \nabla_\alpha \nabla_\mu (b^\alpha b_\nu) \\ & - \frac{\tilde{\xi}}{2} \nabla_\alpha \nabla_\nu (b^\alpha b_\mu) + \frac{\tilde{\xi}}{2} \nabla^2 (b_\mu b_\nu), \end{aligned} \quad (7.26)$$

²Uma hipótese similar também foi utilizada em [121].

usando também a Eq. (7.18). Enquanto isso, a relação para campo bumblebee (7.19) torna-se

$$\nabla^\mu b_{\mu\nu} = -\frac{\xi}{\kappa} b^\mu R_{\mu\nu}, \quad (7.27)$$

sendo agora $b_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu b_\nu - \partial_\nu b_\mu$.

Na busca por uma solução de vácuo estática e esfericamente simétrica das equações de Einstein estendidas, consideramos um espaço-tempo regido por uma métrica *Birkhoff*

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-e^{2\gamma}, e^{2\rho}, r^2, r^2 \sin^2 \theta), \quad (7.28)$$

com $\gamma = \gamma(r)$ e $\rho = \rho(r)$. A restrição sobre as componentes do campo de fundo é definida como

$$b_\mu = (0, b_r(r), 0, 0), \quad (7.29)$$

sendo do tipo-espaço. Com essa escolha, percebe-se que devemos ter agora $b_{\mu\nu} = 0$. Usando a condição $b^\mu b_\mu = \mp b^2 = \text{cte}$, determinamos explicitamente a forma do campo de fundo radial

$$b_r(r) = |b| e^\rho. \quad (7.30)$$

Pode-se verificar facilmente que essa parametrização do campo de fundo não satisfaz $\nabla_\mu b_\nu = 0$. Isso estabelece a diferença entre nossa solução e àquela investigada em [121], na qual é considerado-se $\nabla_\mu b_\nu = 0$.

Devemos agora resolver para as funções $\gamma(r)$ e $\rho(r)$. As componentes não nulas para as equações de Einstein estendidas (7.26) com o Ansatz (7.28) são

$$\bar{R}_{tt} = \left(1 + \frac{\ell}{2}\right) R_{tt} + \frac{\ell}{r} (\partial_r \gamma + \partial_r \rho) e^{2(\gamma-\rho)}, \quad (7.31)$$

$$\bar{R}_{rr} = \left(1 + \frac{3\ell}{2}\right) R_{rr}, \quad (7.32)$$

$$\bar{R}_{\theta\theta} = (1 + \ell) R_{\theta\theta} - \ell \left(\frac{1}{2} r^2 e^{-2\rho} R_{rr} + 1\right), \quad (7.33)$$

$$\bar{R}_{\phi\phi} = \bar{R}_{\theta\theta} \sin^2 \theta, \quad (7.34)$$

onde definimos o parâmetro VL como $\ell = \xi b^2$. As componentes do tensor Ricci nas relações acima são dadas por

$$R_{tt} = e^{2(\gamma-\rho)} \left[\partial_r^2 \gamma + (\partial_r \gamma)^2 - \partial_r \gamma \partial_r \rho + \frac{2}{r} \partial_r \gamma \right], \quad (7.35)$$

$$R_{rr} = -\partial_r^2 \gamma - (\partial_r \gamma)^2 + \partial_r \gamma \partial_r \rho + \frac{2}{r} \partial_r \rho, \quad (7.36)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\rho} [r (\partial_r \rho - \partial_r \gamma) - 1] + 1. \quad (7.37)$$

Assim como acontece no contexto da RG usual, temos apenas três componentes independentes para o tensor $\bar{R}_{\mu\nu}$.

Cada uma das Eqs. (7.31)-(7.34) deve satisfazer a Eq. (7.25), implicando que cada uma delas

deve ser nula independentemente. Logo, para a Eq. (7.32), temos $\bar{R}_{rr} = 0$ e resulta imediatamente

$$R_{rr} = 0. \quad (7.38)$$

Neste ponto da nossa resolução, devemos notar que a equação de movimento do campo bumblebee para o vácuo (7.27) é identicamente satisfeita com a parametrização (7.29), uma vez que $b_{\mu\nu} = 0$ e pela relação (7.38) temos $b^\mu R_{\mu\nu} = 0$.

Continuando resolvendo as equações de campo, veja que a relação (7.38) juntamente com a (7.36) permite obter

$$\partial_r^2 \gamma + (\partial_r \gamma)^2 - \partial_r \gamma \partial_r \rho = \frac{2}{r} \partial_r \rho. \quad (7.39)$$

Usando a Eq. (7.39), podemos reescrever a Eq. (7.35) como

$$R_{tt} = \frac{2}{r} (\partial_r \rho + \partial_r \gamma) e^{2(\gamma-\rho)}, \quad (7.40)$$

e usando ainda a (7.38) nas Eqs. (7.31) e (7.33), teremos

$$\bar{R}_{tt} = \frac{2(1+\ell)}{r} (\partial_r \rho + \partial_r \gamma) e^{2(\gamma-\rho)}, \quad (7.41)$$

$$\bar{R}_{\theta\theta} = (1+\ell) R_{\theta\theta} - \ell. \quad (7.42)$$

Fazemos agora a seguinte combinação,

$$r^2 e^{-2\gamma} \bar{R}_{tt} + 2\bar{R}_{\theta\theta} = 0, \quad (7.43)$$

que fornece uma equação diferencial para $\rho(r)$,

$$(1+\ell) \partial_r (r e^{-2\rho}) = 1, \quad (7.44)$$

cuja solução é

$$e^{2\rho} = (1+\ell) \left(1 - \frac{\rho_0}{r}\right)^{-1}, \quad (7.45)$$

onde ρ_0 é uma constante arbitrária, *a priori*.

Para calcular a função $\gamma(r)$, consideremos uma outra possível combinação

$$\ell r^2 e^{-2\gamma} \bar{R}_{tt} - (2+\ell) \bar{R}_{\theta\theta} = 0, \quad (7.46)$$

que fornece

$$\begin{aligned} 0 &= (2+3\ell)(1+\ell) r \partial_r \gamma + (1+\ell)(2+\ell) \\ &\quad + (\ell+1)(\ell-2) r \partial_r \rho - (2+\ell) e^{2\rho}. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Usando o resultado da Eq. (7.45) obtemos uma equação diferencial para $\gamma(r)$,

$$(\rho_0 - r) \partial_r \gamma + \frac{\rho_0}{2r} = 0,$$

com sua solução sendo escrita convenientemente na forma

$$e^{2\gamma} = e^{-2\gamma_0} \left(1 - \frac{\rho_0}{r}\right), \quad (7.48)$$

onde $e^{-2\gamma_0}$ é uma constante que pode ser removida pela simples transformação $t \rightarrow e^{\gamma_0}t$. De fato, é verificado que as soluções (7.45) and (7.48) satisfazem o conjunto das Eqs. (7.31)-(7.34).

Finalmente, escrevemos a solução esfericamente simétrica de vácuo com VL

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + (1 + \ell) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (7.49)$$

onde identificamos convenientemente a constante $\rho_0 \equiv 2M$ ($M = G_N m$ é a massa geométrica usual), de tal modo que no limite $\ell \rightarrow 0$ recuperamos exatamente a solução de Schwarzschild (6.30). Usando o resultado (7.45), escrevemos explicitamente a solução para o campo de fundo (7.30),

$$b_r(r) = |b| \sqrt{1 + \ell} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}. \quad (7.50)$$

Vemos que no limite $r \rightarrow \infty$, a componente $b_r \rightarrow cte = |b| \sqrt{1 + \ell}$.

A métrica (7.49) representa uma solução puramente radial com violação de Lorentz que descreve o espaço-tempo fora de um corpo esférico, caracterizando assim uma solução de buraco negro modificada. Além disso, calculamos ainda o escalar de *Kretschmann*

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{4(12M^2 + 4\ell Mr + \ell^2 r^2)}{r^6 (\ell + 1)^2}, \quad (7.51)$$

que, obviamente, é diferente do respectivo invariante da solução Schwarzschild *Kretschmann*, que é recuperado quando ℓ é nulo, ver Eq. (6.31). O resultado em (7.51) garante que a métrica (7.49) é uma solução genuína contendo correções de VL, isto é, não existe uma transformação de coordenadas conectando a solução (7.49) com àquela de Schwarzschild (6.30); caso contrário, o escalar (7.51) seria o mesmo para ambas as soluções, o que não é verdade. Observe ainda que em $r = 2M$, o invariante *Kretschmann* (7.51) é finito, indicando que tal singularidade pode ser removida (por alguma escolha adequada de transformação de coordenadas). No entanto, quando $r \rightarrow 0$ temos a chamada singularidade física (ou não removível), pois neste limite a relação (7.51) diverge. Com isso, enfatizamos que a natureza das singularidades $r = 0$ e $r = 2M$ (horizonte de eventos) permanecem inalteradas.

Uma vez que a solução (7.49) foi obtida, o passo seguinte e imediato é buscar assinaturas experimentais ou vínculos para o parâmetro ℓ . Podemos fazer isso através da análise de resultados para testes experimentais já conhecidos da RG. Neste caso, podemos buscar por correções de VL ambientadas no nosso Sistema Solar. Um tratamento alternativo para obtenção de tais correções poderia ser feito a partir do formalismo PPN (ver Sec. 6.3), o qual permite uma comparação direta entre métricas de diferentes teorias de gravitação no limite de campos fracos e baixas velocidades. Sendo assim, vamos investigar a possibilidade de correspondência entre uma aproximação de limite para campos fracos de nossa solução e a equivalente métrica pós-Newtoniana. Uma abordagem no setor do MPE mínimo nesse limite de campos fracos e baixas velocidades foi investigada em [119] e por isso as análises a serem realizadas a seguir tornam-se interessantes. Devemos sempre ter em mente que a solução (7.49) é exata, diferentemente da maioria das soluções com VL obtidas no contexto do MPE presentes na literatura.

Seguindo a ideia apresentada na Sec. 6.3 com a solução Schwarzschild para a obtenção da métrica expandida em termos do potencial gravitacional, devemos primeiramente reescrever a solução

(7.49) em coordenadas isotrópicas. Isso pode ser feito assumindo a seguinte transformação

$$r = \bar{r} \left(\frac{M}{2\bar{r}} \right)^{1-1/\sqrt{1+\ell}} \left[1 + \left(\frac{M}{2\bar{r}} \right)^{1/\sqrt{1+\ell}} \right]^2. \quad (7.52)$$

Com isso, obtemos as componentes da métrica na sua forma isótrópica dada por

$$\bar{g}_{00}(\bar{r}) = - \frac{\left[1 - \left(\frac{M}{2\bar{r}} \right)^{1/\sqrt{1+\ell}} \right]^2}{\left[1 + \left(\frac{M}{2\bar{r}} \right)^{1/\sqrt{1+\ell}} \right]^2}, \quad \bar{g}_{ij}(\bar{r}) = [f(\bar{r})]^2 \delta_{ij}, \quad \bar{g}_{0i}(\bar{r}) = 0, \quad (7.53)$$

onde

$$f(\bar{r}) = \left(\frac{M}{2\bar{r}} \right)^{1-1/\sqrt{1+\ell}} \left[1 + \left(\frac{M}{2\bar{r}} \right)^{1/\sqrt{1+\ell}} \right]^2. \quad (7.54)$$

Podemos ainda usar esse resultado e expressar o tensor $s^{\mu\nu}$, definido em (7.14), nessas coordenadas. As componentes não nulas são dadas por

$$\bar{s}^{00} = \frac{\ell}{4} \frac{\left[1 + \left(\frac{M}{2\bar{r}} \right)^{1/\sqrt{1+\ell}} \right]^2}{\left[1 - \left(\frac{M}{2\bar{r}} \right)^{1/\sqrt{1+\ell}} \right]^2}, \quad (7.55)$$

$$\bar{s}^{ij} = \frac{\ell}{[f(\bar{r})]^2} \left(\frac{\bar{x}^i \bar{x}^j}{\bar{r}^2} - \frac{1}{4} \delta^{ij} \right). \quad (7.56)$$

Vejamos então qual a possível correspondência do parâmetro ℓ diretamente com o setor do MPE mínimo. Para isso, tomamos o limite de campos fracos $M/\bar{r} \ll 1$ e $\ell \ll 1$ e obtemos

$$\langle \bar{s}^{\mu\nu} \rangle_{\Omega} = \bar{s}^{00} = \frac{\ell}{4} + \dots, \quad (7.57)$$

$$\langle \bar{s}^{ii} \rangle_{\Omega} = \frac{\ell}{12} + \dots, \quad (7.58)$$

$$\langle \bar{s}^{ij} \rangle_{\Omega} = 0, \quad (7.59)$$

onde $\langle \cdot \rangle_{\Omega}$ indica o média sobre a esfera. A propriedade de traço nulo do tensor $\langle \bar{s}^{\mu\nu} \rangle_{\Omega}$ é mantida e, além disso, essas componentes encontradas para os coeficientes do MPE são compatíveis com os resultados obtidos na Ref. [119]. Assim, é razoável concluir que estimativas de sensibilidade experimental para VL associadas com as componentes não nulas de $\langle \bar{s}^{\mu\nu} \rangle_{\Omega}$ que vierem a ser determinadas, serão aproximadamente da mesma ordem de magnitude que o parâmetro ℓ .

Na tentativa de encontrar alguma correspondência direta com parâmetros PPN, expandimos cada uma das componentes da métrica (7.53) em séries de $U = M/\bar{r} \ll 1$ e $\ell \ll 1$.

$$\bar{g}_{00}(\bar{r}) \sim -1 + 2U - 2U^2 + \dots - \ell \left[U - 2U^2 + \dots \right] \ln \left(\frac{U}{2} \right) + \dots, \quad (7.60)$$

$$\bar{g}_{ij}(\bar{r}) \sim \delta_{ij} \left[1 + 2U + \frac{3}{2}U^2 + \dots + \ell (1 + U + \dots) \ln \left(\frac{U}{2} \right) + \dots \right]. \quad (7.61)$$

Este resultado revela que nossa solução exata (7.49) não admite uma expansão PPN adequada, isto é, não é possível expandir somente em termos do potencial $U(\bar{r})$, pois surgem contribuições de termos logarítmicos na métrica. Consequentemente, a conclusão imediata é que a parametrização (7.29) não permite obter uma versão pós-Newtoniana da métrica com VL dada pela Eq. (7.49). Portanto, este não é um bom caminho a ser seguido na busca por estimativas experimentais (mais precisamente limites superiores - *upper bounds*) para o parâmetro ℓ .

Na próxima seção, usaremos nossa solução exata a fim de obter estimativas da sensibilidade do coeficiente ℓ a partir de alguns testes experimentais usuais da RG. Neste caso, toda a análise será feita sem a necessidade de fazer qualquer tratamento de flutuação da métrica de Minkowski.

7.3 Alguns testes clássicos e estimativas experimentais

Nesta seção, vamos buscar estimativas experimentais dominantes de LV a partir do movimento de partículas no espaço-tempo descrito pela solução (7.49). Para isso, vamos considerar particularmente três testes clássicos da RG: precessão do periélio de planetas (no Sistema Solar), a curvatura da luz e o efeito de atraso temporal.

Conforme apresentado na Sec. 6.1, o movimento de partículas teste no espaço-tempo é descrito pela relação

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad (7.62)$$

onde λ é um parâmetro afim. Podemos ainda reescrever essa relação introduzindo uma constante de movimento χ , definindo

$$\chi = -g_{\mu\nu} \mathcal{U}^\mu \mathcal{U}^\nu, \quad (7.63)$$

onde \mathcal{U}^μ é a quadri-velocidade definida como

$$\mathcal{U}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \equiv \dot{x}^\mu. \quad (7.64)$$

O ponto indica a derivada em relação ao parâmetro afim. Para partículas massivas, λ é escolhido como sendo $\lambda = \tau$ e $\chi = +1$, caracterizando geodésicas tipo-tempo. Por outro lado, se tratamos de partículas sem massa, devemos ter $\chi = 0$ e λ não é mais fixado, o que caracteriza geodésicas nulas.

7.3.1 Avanço do periélio

A partir da equação geodésica (7.62), obtemos as equações descrevendo a trajetória de uma partícula teste massiva no espaço-tempo descrita pela métrica (7.49).

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t} \right] = 0, \quad (7.65)$$

$$\ddot{r} + \frac{M(r-2M)}{r^3(\ell+1)} \dot{t}^2 - \frac{M}{r(r-2M)} \dot{r}^2 - \frac{r-2M}{\ell+1} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) = 0, \quad (7.66)$$

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta}) - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0, \quad (7.67)$$

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0. \quad (7.68)$$

Assumindo que um tempo próprio inicial $\tau = \tau_0$ temos $\theta(\tau_0) = \pi/2$ and $\dot{\theta}(\tau_0) = 0$, a Eq. (7.67) revela que $\ddot{\theta}(\tau)$ e qualquer outra ordem superior de derivadas será nulo, de modo que a partícula está confinada no plano $\theta = \pi/2$. Portanto, teremos um espaço-tempo com dois vetores de Killing correspondendo a energia conservada E e momento angular conservado L . O vetor de Killing tipo-tempo $K^\mu = (\partial_t)^\mu$ está relacionado com a energia conservada da partícula, dado por

$$E = -g_{\mu\nu} K^\mu \mathcal{U}^\nu = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}. \quad (7.69)$$

O vetor rotacional de Killing $\psi^\mu = (\partial_\phi)^\mu$, fornece o momento angular conservado da partícula:

$$L = g_{\mu\nu} \psi^\mu \mathcal{U}^\nu = r^2 \dot{\phi}. \quad (7.70)$$

Claramente, as Eqs. (7.69) e (7.70) são consistentes com as Eqs. (7.65) e (7.68), respectivamente. Assim, usando (7.63) para geodésicas tipo-tempo, obtemos

$$(1 + \ell) \dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + 1\right) = E^2. \quad (7.71)$$

Em seguida, introduzimos a variável $u = r^{-1}$, tal que

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} = -L \frac{du}{d\phi}. \quad (7.72)$$

Após algumas manipulações algébricas, pode-se mostrar

$$(1 + \ell) \frac{d^2 u}{d\phi^2} + u - \frac{M}{L^2} - 3Mu^2 = 0. \quad (7.73)$$

Esta relação pode ser resolvida pelo método perturbativo. Assumindo $\ell \ll 1$, pode-se mostrar que a solução perturbativa válida para pequenos valores de $\epsilon = 3M^2/L^2 \ll 1$ pode ser escrita na forma

$$u \simeq u^{(0)} + \epsilon u^{(1)}, \quad (7.74)$$

onde $u^{(0)}$ está associado a equação de ordem zero dada, sendo

$$u^{(0)} = \frac{M}{L^2} \left[1 + e \cos\left(\frac{\phi}{\sqrt{1+\ell}}\right)\right], \quad (7.75)$$

e $u^{(1)}$ é obtida na forma

$$u^{(1)} \simeq \frac{M}{L^2} e \frac{\phi}{\sqrt{1+\ell}} \sin\left(\frac{\phi}{\sqrt{1+\ell}}\right) + \frac{M}{L^2} \left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) - \frac{e^2}{6} \cos\left(\frac{2\phi}{\sqrt{1+\ell}}\right)\right]. \quad (7.76)$$

Assim, tomando apenas contribuições relevantes, a solução (7.74) pode ser escrita como

$$u \simeq \frac{M}{L^2} \left[1 + e \cos\left(\frac{\phi}{\sqrt{1+\ell}}\right) + \epsilon e \frac{\phi}{\sqrt{1+\ell}} \sin\left(\frac{\phi}{\sqrt{1+\ell}}\right)\right]. \quad (7.77)$$

Tabela 7.1: Dados teóricos e experimentais do avanço do periélio em segundo de arco por século ($''C^{-1}$).

Planetas	Previsão RG	Observado	Incerteza
Mercúrio	42.981	42.979 ± 0.0030	-0.0020 ± 0.0030
Vênus	8.6247	8.6273 ± 0.0016	-0.00026 ± 0.00016
Terra	3.83877	3.83896 ± 0.00019	-0.000019 ± 0.000019
Marte	1.350938	1.350918 ± 0.000037	-0.000020 ± 0.000037
Júpiter	0.0623	0.1210 ± 0.0283	0.0587 ± 0.0283
Saturno	0.01370	0.01338 ± 0.00047	-0.00032 ± 0.00047
Icarus	10.1	9.8 ± 0.8	-0.3 ± 0.8

No limite $\epsilon \ll 1$, podemos escrever (7.77) na forma da equação de uma elipse, dada por

$$u \simeq \frac{M}{L^2} \left[1 + e \cos \left(\frac{\phi(1-\epsilon)}{\sqrt{1+\ell}} \right) \right]. \quad (7.78)$$

Apesar da presença de VL, as órbitas devem permanecer periódicas com um período Φ ,

$$\Phi = \frac{2\pi\sqrt{1+\ell}}{1-\epsilon} \approx 2\pi + \Delta\Phi. \quad (7.79)$$

O avanço do periélio $\Delta\Phi$ é obtido considerando-se a expansão em baixa ordem para ϵ e ℓ , resultando em

$$\Delta\Phi = 2\pi\epsilon + \pi\ell = \Delta\Phi_{\text{GR}} + \delta\Phi_{\text{VL}}. \quad (7.80)$$

O termo $\Delta\Phi_{\text{GR}}$ é a quantidade prevista pela RG dada por

$$\Delta\Phi_{\text{GR}} = 2\pi\epsilon = \frac{6\pi G_N m}{c^2(1-e^2)a'}, \quad (7.81)$$

sendo m a massa do corpo que gera a curvatura do espaço-tempo em questão, e a excentricidade orbital e a é o semi-eixo maior da elipse orbital. O termo $\delta\Phi_{\text{VL}}$ é a contribuição por período devido a VL

$$\delta\Phi_{\text{VL}} = \pi\ell. \quad (7.82)$$

Claramente, a expressão (7.80) mostra que os efeitos de VL surgem como uma correção ao resultado usual da RG.

Tabela 7.2: Estimativa de upper-bounds para ℓ do avanço do periélio de alguns planetas.

Parâmetro VL	Upper-bound	Ref.
ℓ_{Mer}	1.1×10^{-12}	[122]
ℓ_{Ven}	2.9×10^{-12}	[122]
ℓ_{Ter}	1.1×10^{-11}	[122]
ℓ_{Mar}	1.5×10^{-11}	[122]
ℓ_{Jup}	2.1×10^{-10}	[122]
ℓ_{Sat}	5.2×10^{-9}	[122]
ℓ_{Ica}	1.3×10^{-8}	[123]

Os dados experimentais do avanço do periélio, veja a ilustração na Fig. 7.1, de alguns planetas podem ser encontrados em [122, 124]. A Tabela 7.1 mostra alguns valores para o avanço do periélio de alguns planetas (incluindo o asteroide Icarus) do Sistema Solar. Vamos analisar, como exemplo,

o movimento de Mercúrio em torno do Sol. Temos uma margem de erro observacional fornecendo $0.003''C^{-1}$ (ou 72×10^{-7} segundos de arco por órbita). Assim, devemos impor que a contribuição do termo $\delta\Phi_{VL}$ é menor do que tal erro experimental. Tal procedimento permite estimar um limite superior para o parâmetro VL sendo $\ell_{Mer} < 1.1 \times 10^{-11}$. Seguindo essa mesma ideia de análise para todos os outros corpos apresentados na Tabela 7.1, obtemos o conjunto de *upper-bounds* mostrados na Tabela 7.2. Note, portanto, que obtemos estimativas até a ordem de $\sim 10^{-12}$.

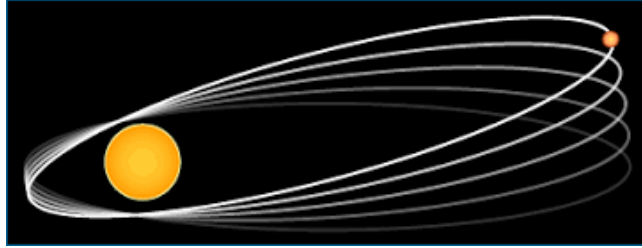


Figura 7.1: Ilustração do avanço do periélio de um planeta em torno do Sol.

7.3.2 Desvio da Luz

Este é um teste do desvio sofrido por um raio luminoso em sua trajetória por influência de um campo gravitacional. Esse desvio na trajetória é visto de forma bem natural do ponto de vista da RG, uma vez que corpos massivos (no presente caso o Sol) deformam o espaço-tempo ao seu redor e, portanto, influenciam nas trajetórias de quaisquer corpos/partículas, massivos ou não.

Diferente do caso anterior, teremos agora partículas sem massa cujas trajetórias correspondem à geodésicas nulas. Isso implica assumir $\chi = 0$ na Eq. (7.63) e obter

$$(1 + \ell) \dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{L^2}{r^2} = E^2. \quad (7.83)$$

Novamente, fazemos a mudança de variável $u = r^{-1}$ com $r \equiv r(\phi)$ resultando em

$$(1 + \ell) \frac{d^2u}{d\phi^2} + u - 3Mu^2 = 0. \quad (7.84)$$

Neste caso, na solução perturbativa consideramos $Mu \ll 1$ de modo que

$$u \simeq u^{(0)} + 3Mu^{(1)}, \quad (7.85)$$

onde $u^{(0)}$ é obtido como sendo

$$u^{(0)} = \frac{1}{d} \sin\left(\frac{\phi}{\sqrt{1+\ell}}\right), \quad (7.86)$$

e

$$u^{(1)} = \frac{1}{3d^2} \left[1 + A \sin\left(\frac{\phi}{\sqrt{1+\ell}}\right) + \cos^2\left(\frac{\phi}{\sqrt{1+\ell}}\right)\right], \quad (7.87)$$

com d e A sendo constantes. Logo, para a solução geral teremos

$$u \simeq \frac{1}{d} \sin\left(\frac{\phi}{\sqrt{1+\ell}}\right) + \frac{M}{d^2} \left[1 + A \cos\left(\frac{\phi}{\sqrt{1+\ell}}\right) + \cos^2\left(\frac{\phi}{\sqrt{1+\ell}}\right)\right]. \quad (7.88)$$

Uma vez que estamos interessado nos ângulos de deflexão para um raio luminoso, as condições

de contorno são determinadas assumindo: (i) A fonte localizada em $r \rightarrow \infty$ tal que $u(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ e $\phi = -\delta_1$; (ii) o observador está situado em $r \rightarrow \infty$ tal que $u(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ e $\phi = +\delta_2$; então o ângulo total de deflexão da luz será $\delta = \delta_1 + \delta_2$. Usando essas condições na Eq. (7.88) e assumindo ainda $\ell \ll 1$ e $\delta_1, \delta_2 \ll 1$, encontramos

$$\delta_1 = \frac{M}{d} (2 + A), \quad (7.89)$$

$$\delta_2 = \frac{M}{d} (2 - A) + \frac{\pi\ell}{2}. \quad (7.90)$$

Logo, a desvio de um raio luminoso na métrica (7.49) é dado por

$$\delta = \delta_{\text{GR}} + \delta_{\text{LV}} = \frac{4G_N m}{c^2 d} + \frac{\pi\ell}{2}, \quad (7.91)$$

onde m é massa do corpo que causa o efeito de desvio da luz e d é o chamado parâmetro de impacto (definido como a distância mais próximo do raio luminoso ao centro de massa do corpo que provoca a curvatura). O primeiro termo δ_{GR} é resultado usual da GR,

$$\delta_{\text{GR}} = \frac{4G_N m}{c^2 d}. \quad (7.92)$$

O segundo termo δ_{LV} ,

$$\delta_{\text{LV}} = \frac{\pi\ell}{2}, \quad (7.93)$$

é a correção advinda dos efeitos de VL.

Tabela 7.3: Estimativa de *upper-bounds* para ℓ baseados em alguns experimentos de medição do desvio da luz pelo Sol.

Experimento	Upper-bounds	Ref.
LATOR	7.3×10^{-15}	[125]
GAIA	8.1×10^{-13}	[126]
VLBI	3.2×10^{-10}	[127]
Hipparcos	8.1×10^{-9}	[128]
Optical	5.9×10^{-7}	[129]

Análises observacionais disponíveis a partir de recentes observações do VLBI (very-long-baseline radio interferometry) [127] para o desvio da luz fornece uma concordância com RG à 0.1%. Assumindo essa precisão, por exemplo, estabelecemos um vínculo da ordem $\ell < 3.2 \times 10^{-10}$. Usando de outros diferentes experimentos, conseguimos obter outras estimativas interessantes, ver Tabela 7.3, onde alcançamos valores de ℓ da ordem de $\sim 10^{-15}$.

7.3.3 Atraso temporal da luz

Um outro teste experimental muito explorado é atraso temporal da luz devido a curvatura do espaço-tempo [130]. Precisamente, estamos interessados na expressão que forneça uma descrição da viagem de ida e volta de um raio luminoso que sofre influência gravitacional causada pela curvatura do espaço-tempo de um corpo massivo como o Sol. Os testes feitos no Sistema Solar envolvendo este efeito podem fornecer *upper-bounds* interessantes para o parâmetro ℓ .

Como estamos assumindo movimento do raio luminoso no plano equatorial ($\theta = \pi/2$), via-

jando ao longo de geodésicas nulas no espaço-tempo, a condição $ds^2 = 0$ deve ser satisfeita. Temos então,

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + (1 + \ell) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 = 0. \quad (7.94)$$

Na Sec. 7.3.2 também tratamos do movimento de um raio luminoso e, portanto, podemos considerar aqui a solução de ordem zero (7.86),

$$d = r \sin\left(\frac{\phi}{\sqrt{1 + \ell}}\right). \quad (7.95)$$

Usando esta relação, encontramos

$$r^2 d\phi^2 = (1 + \ell) \left(\frac{d^2}{r^2 - d^2}\right) dr^2. \quad (7.96)$$

Assim, a Eq. (7.94) pode ser escrita como

$$dt^2 = \frac{1 + \ell}{1 - 2M/r} \left(\frac{1}{1 - 2M/r} + \frac{d^2}{r^2 - d^2}\right) dr^2. \quad (7.97)$$

Expandindo em termos de M/r e tomando as contribuições de primeira ordem, teremos

$$dt \simeq \pm \frac{\sqrt{1 + \ell}}{\sqrt{r^2 - d^2}} \left(1 + \frac{2M}{r} - \frac{Md^2}{r^3}\right) r dr. \quad (7.98)$$

As configurações do efeito de atraso temporal envolvem, em geral, duas estações situadas à grandes distâncias orientadas de tal forma que o raio luminoso passe na vizinhança de uma fonte massiva (fonte de curvatura). Assumindo que o raio de luz (ou sinal de radar) emitido a partir de uma fonte localizada em r_E viajando até um receptor em r_R , o tempo de viagem será dado por

$$t = \sqrt{1 + \ell} \left\{ t_0 + 2M \ln \left[\frac{r_E + (r_E^2 - d^2)^{1/2}}{d} \right] + 2M \ln \left[\frac{r_R + (r_R^2 - d^2)^{1/2}}{d} \right] - M \frac{(r_R^2 - d^2)^{1/2}}{r_R} - M \frac{(r_E^2 - d^2)^{1/2}}{r_E} \right\}, \quad (7.99)$$

onde t_0 representa a viagem no espaço na ausência de curvatura,

$$t_0 = \left(r_R^2 - d^2\right)^{1/2} + \left(r_E^2 - d^2\right)^{1/2}. \quad (7.100)$$

Na ausência do parâmetro VL, temos exatamente a expressão prevista na RG. Para $\ell \neq 0$, observamos na Eq. (7.99) que mesmo na ausência de uma fonte de curvatura ($M = 0$), o primeiro termo $t_0 \sqrt{1 + \ell}$ mostra que raios de luz sofrem efeitos da VL, revelando que também temos correções no espaço-tempo de Minkowski. Os demais termos representam os efeitos da curvatura em conjunto com a VL. Portanto, o resultado (7.99) pode ser interpretado como um aumento efetivo da distância entre emissor e receptor de sinal luminoso.

Para uma melhor compreensão do resultado obtido em (7.99), vamos considerar a viagem de sinal luminoso com ida e volta, sob influência da curvatura de um corpo massivo (o Sol, por exemplo), emitido a partir de uma fonte (a Terra, por exemplo) até ser refletido por um receptor (satélite ou algum tipo de sonda espacial, por exemplo), retornando à fonte. Vamos então considerar o espaço-tempo na vizinha do Sol ($m = M_\odot$) e sinal luminoso emitido a partir da Terra localizado em

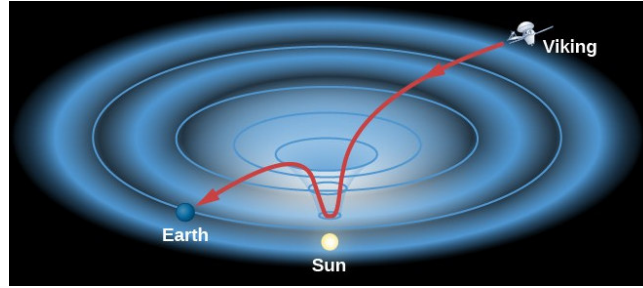


Figura 7.2: Ilustração do experimento de atraso temporal para a viagem de um sinal luminoso, passando próximo ao Sol, entre um satélite e a Terra.

r_E viajando até um satélite receptor em r_R ; ambas as distâncias são medidas a partir do Sol, ver Fig. 7.2. O efeito do atraso temporal é máximo quando o satélite está na conjunção superior³ e o sinal passando próximo a superfície do Sol de modo que o parâmetro de impacto pode ser aproximado $d \propto R_\odot$, satisfazendo a condição $d \ll r_E, r_R$. Assim, a partir da Eq. (7.99), o tempo total (ida e volta) de viagem do sinal luminoso desde a emissão até seu retorno é dado pela expressão

$$T \approx \sqrt{1 + \ell} \left\{ T_0 + \frac{4G_N M_\odot}{c^3} \left[\ln \left(\frac{4r_E r_R}{d^2} \right) - 1 \right] \right\}, \quad (7.101)$$

onde T_0 é dado por

$$T_0 = \frac{2}{c} (r_R^2 - d^2)^{1/2} + \frac{2}{c} (r_E^2 - d^2)^{1/2}. \quad (7.102)$$

Assumindo a primeira ordem em $\ell \ll 1$, o atraso temporal total é definido por

$$\delta T = T - T_0 = \delta T_{GR} + \delta T_{VL}, \quad (7.103)$$

A quantidade δT_{GR} é a expressão da GR,

$$\delta T_{GR} = \frac{4G_N M_\odot}{c^3} \left[\ln \left(\frac{4r_E r_R}{d^2} \right) - 1 \right], \quad (7.104)$$

enquanto o termo δT_{VL} representa a correção do termo de VL dada por

$$\delta T_{VL} = \frac{\ell}{2} (\delta T_{GR} + T_0) \approx \frac{\ell}{2} T_0. \quad (7.105)$$

Esta é a relação que pode ser usada para a obtenção das estimativas experimentais. Experimentos realizados alguns planetas, especificamente Mercúrio e Vênus, forneceram bons resultados [131]. Usando, por exemplo, a superfície de Vênus como receptor, a margem de erro encontrada foi de 2% quando comparada com o resultado teórico da RG. Com este resultado, conseguimos obter uma estimativa de *upper-bound* para o parâmetro VL na ordem de $\sim 10^{-9}$.

Estimativas usando satélites e sondas espaciais também fornecem valores satisfatórios. Na Tabela 7.4 apresentamos as estimativas encontradas para ℓ com diferentes experimentos que mediram o atraso temporal da luz. Entre as medições já realizadas para observação do efeito de atraso temporal através de um raio luminoso, os dados mais precisos obtidos atualmente foram fornecidos pela sonda espacial *Cassini* durante sua viagem ao planeta Saturno [134]. A margem de erro dos dados obtidos está na margem de 0.0012%. Com esse resultado, nossa estimativa atinge a sensibilidade de $\ell_{Cassini} < 5.9 \times 10^{-13}$.

³Seria o melhor alinhamento possível entre a Terra, Sol e o satélite.

Tabela 7.4: Estimativa de *upper-bounds* para ℓ baseados em alguns experimentos de medição do atraso temporal de um raio luminoso.

Experimento	<i>Upper-bounds</i>	Ref.
BEACON	3.0×10^{-19}	[132]
ASTROD	3.8×10^{-15}	[133]
Cassini	5.9×10^{-13}	[134]
Viking Mars	3.2×10^{-10}	[135]
Mariner 6	2.2×10^{-9}	[136]
Mariner 7	1.6×10^{-9}	[136]
Vênus	5.0×10^{-9}	[129]

Temos ainda uma outra classe de experimentos que podem fornecer dados interessantes e são também comumente utilizados na literatura. Esses experimentos são propostas de medições futuras de alta precisão que já tem algumas estimativas previstas como resultados. Entre tais propostas, temos as missões ASTROD (*Astrodynamical Space Test of Relativity using Optical Devices*) e BEACON (*Beyond Einstein Advanced Coherent Optical Network*) que devem permitir buscar uma nova Física além da RG através de medições da curvatura do espaço-tempo. Um interessante exemplo, é o caso da sonda BEACON, que deve medir o atraso temporal de um raio luminoso devido a curvatura no espaço-tempo causado pela Terra; a estimativa do resultado é de uma precisão da ordem de 10^{-9} em concordância com a RG. Se esse resultado for confirmado, a sensibilidade dos efeitos de VL atingem a ordem de $\sim 10^{-19}$.

8 Conclusões e perspectivas

Na primeira parte deste trabalho, temos no capítulo 3 nossa primeira contribuição original. Apresentamos um estudo sobre vórtices auto-duais obtidos no contexto de novos modelos generalizados (ou efetivos) da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs. As configurações auto-duais obtidas no âmbito desses novos modelos são vórtices puramente magnéticos similares aqueles obtidos por Abrikosov-Nielsen-Olesen [12, 59], isto é, vórtices eletricamente neutros. Uma vez que implementamos de forma consistente o formalismo BPS, obtivemos equações auto-duais altamente não-lineares cuja soluções são vórtices topológicos eletricamente neutros e energeticamente estáveis, caracterizadas por ter fluxo magnético topologicamente quantizado. Sendo a energia total proporcional ao fluxo magnético, esta também é topologicamente quantizada. Nosso modelo k -generalizado estabelece a existência de um conjunto infinito de famílias de modelos possíveis, dentre os quais encontramos modelos onde suas equações BPS tem sua forma matemática similar aquelas encontradas no contexto no contexto de modelos de Maxwell-Higgs e Chern-Simons-Higgs. Além disso, vimos que o modelo proposto permitiu descrever configurações tanto com potenciais tipo $|\phi|^4$ e/ou potenciais tipo $|\phi|^6$. Vimos ainda que a classe de modelos denominada de “modelos gêmeos” também pode ser descrita aqui, suportando ambos os tipos de potenciais, $|\phi|^4$ e $|\phi|^6$. Observamos que escolha específica do potencial pode influenciar diretamente no comportamento da soluções; especificamente, conseguimos mostrar que o modelo k -generalizado é capaz de engendrar sólitons com decaimento tipo exponencial (como Abrikosov-Nielsen-Olesen) ou ter um decaimento tipo potência, onde este último caracteriza os chamados vórtices não-localizados. Em todos casos, percebemos pela análise numérica que a generalização modifica o tamanho do vórtice, as amplitudes do campo magnético e massa bosônica, mas mantém a forma da energia total proporcional ao fluxo magnético.

Ainda na primeira parte do trabalho, temos no capítulo 5 outra contribuição original. Apresentamos o modelo BPS baby Skyrme gauged com termo Chern-Simons. Implementamos consistentemente o formalismo BPS e como resultado, obtivemos o conjunto de equações auto-duais que descrevem sólitons (Skyrmions) auto-duais estáveis saturando no limite BPS. Os sólitons são eletricamente carregados, efeito da presença do termo Chern-Simons que induz uma carga elétrica total nos sólitons. Com isso, vimos que essa carga elétrica total é proporcional ao fluxo magnético, que a priori é uma quantidade topologicamente não-quantizada. No entanto, as soluções numéricas mostram que no limite onde temos um forte acoplamento eletromagnético g , o fluxo torna-se quantizado e essa quantização efetiva também torna a carga elétrica total quantizada. Vimos que as soluções numéricas mostram que a carga elétrica total $Q_e(g)$ como função de g atinge um valor máximo para um acoplamento κ fixo; ao mesmo tempo, acontece algo similar para a carga elétrica total $Q_e(\kappa)$ como função de κ e um g fixo. Mostramos dois tipos de soluções que são definidas pela escolha do superpotencial $W(h) \propto h^\sigma$. Para a escolha $\sigma = 2$, obtemos sólitons com decaimento tipo exponencial, similar aos vórtices estudados no contexto de Maxwell-Higgs; para uma escolha de valores $\sigma > 2$, encontramos dois tipos de comportamentos: o campo Skyrme possui um decaimento tipo potência,

enquanto o campo de *gauge* e o potencial elétrico possuem um decaimento tipo exponencial.

Na segunda parte do trabalho, apresentamos no capítulo 7 um resultado original de uma solução exata tipo-Schwarzschild em um modelo de gravidade bumblebee. Esta solução está inserida no contexto do Modelo Padrão estendido mínimo, o qual permite fazer um acoplamento do campo bumblebee no sector de gravidade proporcionando a quebra espontânea da simetria de Lorentz. A métrica obtida é uma solução de vácuo estática e esfericamente simétrica carregando efeitos de violação de Lorentz. Ainda assim, como é uma solução genuína levemente modificada (análoga à solução de Schwarzschild da Relatividade Geral), podemos classificá-la como uma nova solução de buraco negro tipo-Schwarzschild. Para estudar os possíveis efeitos da violação de Lorentz, investigamos alguns testes clássicos da RG bem conhecidos e explorados, o que nos proporciona uma vasta quantidade de dados observacionais que possibilitam a obtenção de *upper-bounds* para nosso parâmetro de violação ℓ . Entre os testes clássicos, concentramos nossa análise na avanço do periélio de planetas, a curvatura da luz e o atraso temporal. As estimativas encontradas para ℓ entre dados efetivamente observados atingem a ordem $\sim 10^{-15}$. Entre os experimentos desenvolvidos já com algumas projeções de resultados futuros, temos uma sensibilidade para ℓ da ordem de 10^{-19} .

Como perspectivas, temos como frente de investigação a possível obtenção de vórtices, monopólos magnéticos e dyons no contexto de modelos de Yang-Mills-Higgs generalizados. No contexto de Skyrmons, conforme mencionado na Sec. 5.3, já verificamos que o comportamento dos campos não impedem a existência de sólitons BPS *compactons*. No entanto, tais estruturas ainda não se confirmaram numericamente, pois as condições de contorno não estão sendo completamente satisfeitas; investigações buscando solucionar esse problema estão em adiantamento. Além disso, a busca de sólitons BPS em modelos planares de Skyrmons considerando o termo do modelo- σ $O(3)$ não nulo na Lagrangiana é o próximo passo imediato. No contexto de gravitação inserida no MPE, já temos iniciado estudos explorando outras possíveis configurações de vácuo para uma nova escolha do *background* b_μ . Em paralelo, temos também a possibilidade de estudar os efeitos do campo bumblebee em analogia às outras soluções de buracos negros conhecidas na literatura, como àqueles carregados (buraco negro de *Reissner-Nordström*) e dotados de momento angular (buraco negro de *Kerr*)¹.

¹Já temos calculado um resultado analítico da versão de uma solução do buraco negro de *Kerr* modificada; restando analisar cuidadosamente a consistência desse resultado.

Referências Bibliográficas

- [1] R. CASANA, A. CAVALCANTE AND F. P. POULIS AND E. B. SANTOS. Exact Schwarzschild-like solution in a bumblebee gravity model. *Phys. Rev. D*, **97**:104001, 2018.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.97.104001>.
- [2] R. CASANA, A. CAVALCANTE AND E. DA HORA. Self-dual configurations in Abelian Higgs models with k -generalized gauge field dynamics. *JHEP*, **12**:051, 2016.
[http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12\(2016\)051](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12(2016)051).
- [3] N. J. ZABUSKY AND M. D. KRUSKAL. Interaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States. *Phys. Rev. Lett.*, **15**:240–243, 1965.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.15.240>.
- [4] N. MANTON AND P. SUTCLIFFE. *Topological Solitons*. Cambridge University Press, New York, 2007.
- [5] R. RAJARAMAN. *Solitons and Instantons*. North-Holand, Amsterdam, 1982.
- [6] A. VILENKIN AND E. P. S. SHELLARD. *Cosmic Strings and Other Topological Defects*. Cambridge University Press, New York, 2000.
- [7] T. VACHASPATI. *Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons*. Cambridge University Press, New York, 2006.
- [8] D. WALGRAEF. *Spatio-Temporal Pattern Formation*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [9] D. FINKELSTEIN. Kinks. *J. Math. Phys.*, **7**:1218–1225, 1966.
<http://dx.doi.org/10.1063/1.1705025>.
- [10] G.'T HOOFT. Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories. *Nucl. Phys. B*, **79**:276–284, 1974.
[http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(74\)90486-6](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(74)90486-6).
- [11] A. M. POLYAKOV. Particle Spectrum in the Quantum Field Theory. *JETP Lett.*, **20**:194–195, 1974.
<http://www.jetpletters.ac.ru/ps/1789/article.27297.shtml>.
- [12] H.B. NIELSEN AND P. OLESEN. Vortex-line Models for Dual Strings. *Nucl. Phys. B*, **61**:45–61, 1973. [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(73\)90350-7](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(73)90350-7).
- [13] T. H. R. SKYRME AND B. F. JAMIESON SCHONLAND. A non-linear field theory. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **260**(1300):127–138, 1961 <https://doi.org/10.1098/rspa.1961.0018>.
- [14] Y. NAMBU. Axial Vector Current Conservation in Weak Interactions. *Phys. Rev. Lett.*, **4**:380, Apr 1960. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.4.380>.
- [15] J. GOLDSTONE, A. SALAM AND S. WEINBERG. Broken Symmetries. *Phys. Rev.*, **127**:965–970, Aug 1962. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.127.965>.
- [16] M. K. PRASAD AND C. M. SOMMERFIELD. Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon. *Phys. Rev. Lett.*, **35**:760, Sep 1975.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.35.760>.
- [17] E. B. BOGOMOL'NY. Stability of Classical Solutions. *Sov. J. Nucl. Phys.*, **24**:449, 1976.
<http://inspirehep.net/record/101280> PRINT-76-0543(LANDAU-INST.).

- [18] H. J. DE VEGA AND F. A. SCHAPOSNIK. Electrically Charged Vortices in Non-Abelian Gauge Theories with Chern-Simons Term. *Phys. Rev. Lett.*, **56**:2564, Jun 1986. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.56.2564>.
- [19] R. JACKIW AND E. J. WEINBERG. Self-dual Chern-Simons Vortices. *Phys. Rev. Lett.*, **64**:2234, May 1990. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.2234>.
- [20] R. JACKIW, K. LEE AND E. J. WEINBERG. Self-dual Chern-Simons solitons. *Phys. Rev. D*, **42**:3488–3499, Nov 1990. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.42.3488>.
- [21] J. HONG, Y. KIM AND P. Y. PAC. Multivortex Solutions of the Abelian Chern-Simons-Higgs Theory. *Phys. Rev. Lett.*, **64**:2230, May 1990. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.2230>.
- [22] S. K. PAUL AND A. KHARE. Charged Vortices in an Abelian Higgs Model with Chern-Simons Term. *Phys. Lett. B*, **174**:420, 1986. [http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693\(86\)91028-2](http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693(86)91028-2).
- [23] C. LEE, K. LEE AND H. MIN. Self-Dual Maxwell-Chern-Simons Solitons. *Phys. Lett. B*, **252**:79, 1990. [http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693\(90\)91084-0](http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693(90)91084-0).
- [24] X. JIN AND X. LI AND D. LIU. A Gravitating Global k -monopole. *Class. Quant. Grav.*, **24**:2773, 2007. <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/24/11/001>.
- [25] C. ADAM, J. SANCHEZ-GUILLEN AND A. WERESZCZYNSKI. k -defects as compactons. *J. Phys. A*, **42**:089801, 2009. <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/40/45/009>
<http://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/42/8/089801>.
- [26] D. BAZEIA, E. DA HORA, R. MENEZES, H. P. DE OLIVEIRA AND C. DOS SANTOS. Compactlike Kinks and Vortices in Generalized Models. *Phys. Rev. D*, **81**:125016, Jun 2010. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.81.125016>.
- [27] D. BAZEIA, E. DA HORA, R. MENEZES AND C. DOS SANTOS. Generalized Self-dual Chern-Simons Vortices. *Phys. Rev. D*, **81**:125014, Jun 2010. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.81.125014>.
- [28] D. BAZEIA, E. DA HORA, R. MENEZES, H. P. DE OLIVEIRA AND C. DOS SANTOS. BPS Solutions to a Generalized Maxwell-Higgs Model. *Eur. Phys. J. C*, **71**:1833, 2011. <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-011-1833-9>.
- [29] C. DOS SANTOS AND E. DA HORA. Domain Walls in a Generalized Chern-Simons Model. *Eur. Phys. J. C*, **70**:1145, 2010. <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-010-1490-4>.
- [30] C. DOS SANTOS. Compact Solitons in a Abelian-Higgs Chern-Simons Model. *Phys. Rev. D*, **82**:125009, Dec 2010. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.82.125009>.
- [31] E. BABICHEV, V. MUKHANOV AND A. VIKMAN. k -Essence, Superluminal Propagation, Causality and Emergent Geometry. *JHEP*, **0802**:101, 2008. <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2008/02/101>.
- [32] T. CHIBA, T. OKABE AND M. YAMAGUCHI. Kinetically Driven Quintessence. *Phys. Rev. D*, **62**:023511, Jun 2000. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.62.023511>.
- [33] C. ARMENDARIZ-PICON, T. DAMOUR AND V. MUKHANOV. k -Inflation. *Phys. Lett. B*, **458**:209, 1999. [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693\(99\)00603-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693(99)00603-6).
- [34] V. MUKHANOV AND A. VICKMAN. Enhancing the Tensor-to-scalar Ratio in Simple Inflation. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, **02**:004, 2006. <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2006/02/004>.
- [35] C. ARMENDARIZ-PICON AND E. A. LIM. Haloes of k -Essence. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, **08**:007, 2005. <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2005/08/007>.
- [36] ASHOKE SEN. Tachyon Matter. *JHEP*, **0207**:065, 2002. <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2002/07/065>.

- [37] A. A. BOGOLUBSKAYA AND I. L. BOGOLUBSKY. Stationary Topological Solitons in the Two-dimensional Anisotropic Heisenberg Model With a Skyrme Term. *Phys. Lett. A*, **136**:485–488, 1989. [https://dx.doi.org/10.1016/0375-9601\(89\)90301-0](https://dx.doi.org/10.1016/0375-9601(89)90301-0).
- [38] A. A. BOGOLUBSKAYA AND I. L. BOGOLUBSKY. On stationary topological solitons in two-dimensional anisotropic Heisenberg model. *Lett. Math. Phys.*, **19**:171–177, 1990. <https://dx.doi.org/10.1007/BF01045888>.
- [39] Robert A. Leese, Michel Peyrard, and Wojciech J. Zakrzewski. Soliton Scatterings in Some Relativistic Models in (2+1)-dimensions. *Nonlinearity*, **3**:773–808, 1990.
- [40] B. M. A. G. Piette, W. J. Zakrzewski, H. J. W. Mueller-Kirsten, and D. H. Tchrakian. A Modified Mottola-Wipf model with sphaleron and instanton fields. *Phys. Lett.*, **B320**:294–298, 1994.
- [41] B. M. A. G. Piette, B. J. Schroers, and W. J. Zakrzewski. Multi - solitons in a two-dimensional Skyrme model. *Z. Phys.*, **C65**:165–174, 1995.
- [42] S. L. Sondhi, A. Karlhede, S. A. Kivelson, and E. H. Rezayi. Skyrmions and the crossover from the integer to fractional quantum hall effect at small zeeman energies. *Phys. Rev. B*, **47**:16419–16426, Jun 1993.
- [43] Oliver Schwindt and Niels R. Walet. Towards a phase diagram of the 2-D Skyrme model. *Europhys. Lett.*, **55**:633–639, 2001.
- [44] Terence Delsate and Nobuyuki Sawado. Localizing modes of massive fermions and a U(1) gauge field in the inflating baby-skyrmion branes. *Phys. Rev.*, **D85**:065025, 2012.
- [45] Yuta Kodama, Kento Kokubu, and Nobuyuki Sawado. Localization of massive fermions on the baby-skyrmion branes in 6 dimensions. *Phys. Rev.*, **D79**:065024, 2009.
- [46] Yves Brihaye, Terence Delsate, Nobuyuki Sawado, and Yuta Kodama. Inflating baby-Skyrme branes in six dimensions. *Phys. Rev.*, **D82**:106002, 2010.
- [47] J. Gladikowski, B. M. A. G. Piette, and B. J. Schroers. Skyrme-Maxwell solitons in (2+1)-dimensions. *Phys. Rev.*, **D53**:844–851, 1996.
- [48] C. Adam, C. Naya, J. Sanchez-Guillen, and A. Wereszczynski. The gauged BPS baby Skyrme model. *Phys. Rev.*, **D86**:045010, 2012.
- [49] C. Adam, C. Naya, J. Sanchez-Guillen, and A. Wereszczynski. Lifshitz field theories with SDiff symmetries. *JHEP*, **03**:012, 2013.
- [50] A. Yu. Loginov. Rotating skyrmions of the (2 + 1)-dimensional Skyrme gauge model with a Chern-Simons term. *J. Exp. Theor. Phys.*, **118**:217–226, 2014. [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.*145,250(2014)].
- [51] A. Samoilenka and Ya. Shnir. Gauged baby Skyrme model with a Chern-Simons term. *Phys. Rev.*, **D95**(4):045002, 2017.
- [52] Sabine Hossenfelder. Theory and Phenomenology of Spacetime Defects. *Adv. High Energy Phys.*, **2014**:950672, 2014.
- [53] Robert Bluhm. Overview of the SME: Implications and phenomenology of Lorentz violation. *Lect. Notes Phys.*, **702**:191–226, 2006. [*191*(2005)].
- [54] John Collins, Alejandro Perez, Daniel Sudarsky, Luis Urrutia, and Hector Vucetich. Lorentz invariance and quantum gravity: an additional fine-tuning problem? *Phys. Rev. Lett.*, **93**:191301, 2004.
- [55] V. Alan Kostelecky and Stuart Samuel. Phenomenological Gravitational Constraints on Strings and Higher Dimensional Theories. *Phys. Rev. Lett.*, **63**:224, 1989.
- [56] Martin Bojowald, Hugo A. Morales-Tecotl, and Hanno Sahlmann. On loop quantum gravity phenomenology and the issue of Lorentz invariance. *Phys. Rev.*, **D71**:084012, 2005.
- [57] A. F. Ferrari, M. Gomes, J. R. Nascimento, E. Passos, A. Yu. Petrov, and A. J. da Silva. Lorentz violation in the linearized gravity. *Phys. Lett.*, **B652**:174–180, 2007.

- [58] Nima Arkani-Hamed, Hsin-Chia Cheng, Markus A. Luty, and Shinji Mukohyama. Ghost condensation and a consistent infrared modification of gravity. *JHEP*, 05:074, 2004.
- [59] A. A. ABRIKOSOV. On the magnetic properties of superconductors of the second group. *Sov. Phy. JETP*, 5:1174, 1957.
<http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/e/index/e/5/6/p1174?a=list>.
- [60] V. L. GINZBURG AND L. D. LANDAU. On the Theory of Superconductivity. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 20:1064–1082, 1950. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02731579> (version english).
- [61] V. RUBAKOV. *Classical Theory of Gauge Fields*. Princeton Univ. Press, 2002.
- [62] G. V. DUNNE. *Aspects Of Chern-Simons Theory*. Springer Berlin Heidelberg, 1999.
- [63] K. SHIRAIISHI AND S. HIRENZAKI. Bogomol’nyi Equations for Vortices in Born-Infeld Higgs Systems. *Int. J. Mod. Phys. A*, 06:2635–2647, Jun 1991.
<http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X9100126X>.
- [64] R. CASANA, E. HORA, D. RUBIERA-GARCIA AND C. SANTOS. Topological vortices in generalized born infeld higgs electrodynamics. *Eur. Phys. J. C*, 75:380, 2015.
<http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3596-1>.
- [65] D. BAZEIA. Vortices in a Generalized Higgs Model. *Phys. Rev. D*, 46:1879, Aug 1992.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.46.1879>.
- [66] R. FRIEDBERG AND T. D. LEE. Fermion-field nontopological solitons. 1. *Phys. Rev. D*, 15:1694, Mar 1977. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.15.1694>.
- [67] R. FRIEDBERG AND T. D. LEE. Fermion-Field Nontopological Solitons. 2. Models for Hadrons. *Phys. Rev. D*, 16:1096, Aug 1977. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.16.1096>.
- [68] R. FRIEDBERG AND T. D. LEE. Quantum Chromodynamics and the Soliton Model of Hadrons. *Phys. Rev. D*, 18:2623, 1978. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.18.2623>.
- [69] M. GIOVANNINI. Gauge field localization on Abelian vortices in six dimensions. *Phys. Rev. D*, 66:044016, Aug 2002. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.66.044016>.
- [70] M. BORN, M. AND L. INFELD. Foundations of the New Field Theory. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 144:425–451, 1934. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1934.0059>.
- [71] P. A. M. DIRAC. An Extensible Model of the Electron. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 268:57–67, 1962. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1962.0124>.
- [72] G. W. GIBBONS AND D. A. RASHEED. Electric-magnetic duality rotations in non-linear electrodynamics. *Nucl. Phys. B*, 454:185–206, 1995.
[http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(95\)00409-L](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(95)00409-L).
- [73] G. BOILLAT. Nonlinear Electrodynamics: Lagrangians and Equations of Motion. *J. Math. Phys.*, 11:941, 1970. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1665231>.
- [74] G. W. GIBBONS. Born-Infeld particles and Dirichlet p-branes. *Nucl. Phys. B*, 514:603–639, 1998. [http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213\(97\)00795-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213(97)00795-5).
- [75] F. A. Schaposnik and H. J. de Vega. *Classical vortex solution of the Abelian Higgs model*. *Phys. Rev. D*, 14:1100–1106, Aug 1976.
- [76] Melinda Andrews, MATT Lewandowski, Mark Trodden, and Daniel WESLEY. Distinguishing k -DEFECTS from their canonical twins. *Phys.Rev.*, D82:105006, 2010.
- [77] D. Bazeia, J. D. Dantas, A. R. Gomes, L. Losano, and R. Menezes. Twinlike Models in Scalar Field Theories. *Phys. Rev.*, D84:045010, 2011.
- [78] C. Adam and J. M. Queiruga. An algebraic construction of twin-like models. *Phys. Rev.*, D84:105028, 2011.
- [79] D. Bazeia and R. Menezes. New results on twinlike models. *Phys. Rev.*, D84:125018, 2011.

- [80] D. Bazeia, M. A. Marques, and R. Menezes. Twinlike Models for Kinks, Vortices and Monopoles. *Phys. Rev.*, D96(2):025010, 2017.
- [81] Egor Babaev. Vortices carrying an arbitrary fraction of magnetic flux quantum in two gap superconductors. *Phys. Rev. Lett.*, 89:067001, 2002.
- [82] Egor Babaev, Juha Jaykka, and Martin Speight. Magnetic field delocalization and flux inversion in fractional vortices in two-component superconductors. *Phys. Rev. Lett.*, 103:237002, Dec 2009.
- [83] Mohamed M. Anber, Yannis Burnier, Eray Sabancilar, and Mikhail Shaposhnikov. Diamagnetic vortices in chern-simons theory. *Phys. Rev. D.*, 92:085049, Oct 2015.
- [84] T. H. R. Skyrme. A Nonlinear field theory. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A260:127–138, 1961.
- [85] Kostas Skenderis and Paul K. Townsend. Gravitational stability and renormalization group flow. *Phys. Lett.*, B468:46–51, 1999.
- [86] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser, and A. Karch. Modeling the fifth-dimension with scalars and gravity. *Phys. Rev.*, D62:046008, 2000.
- [87] Mario Trigiante, Thomas Van Riet, and Bert Vercoocke. Fake supersymmetry versus Hamilton-Jacobi. *JHEP*, 05:078, 2012.
- [88] Kostas Skenderis and Paul K. Townsend. Hidden supersymmetry of domain walls and cosmologies. *Phys. Rev. Lett.*, 96:191301, 2006.
- [89] Arjun Berera, Joel Mabillard, Mauro Pieroni, and Rudnei O. Ramos. Identifying Universality in Warm Inflation. *JCAP*, 1807(07):021, 2018.
- [90] Eugenio Megias, Germano Nardini, and Mariano Quiros. Cosmological Phase Transitions in Warped Space: Gravitational Waves and Collider Signatures. *JHEP*, 09:095, 2018.
- [91] Francesco Cicciarella, Joel Mabillard, and Mauro Pieroni. New perspectives on constant-roll inflation. *JCAP*, 1801(01):024, 2018.
- [92] R. Rajaraman. *An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*. North-Holland, 1982.
- [93] H. Weigel, B. Schwesinger, and G. Holzwarth. Exotic Baryon Number $B = 2$ States in the SU(2) Skyrme Model. *Phys. Lett.*, 168B:321–325, 1986.
- [94] J. J. M. Verbaarschot, T. S. Walhout, J. Wambach, and H. W. Wyld. Symmetry and Quantization of the Two Skyrmion System: The Case of the Deuteron. *Nucl. Phys.*, A468:520–538, 1987.
- [95] C. Adam and A. Wereszczynski. Gauged BPS baby Skyrmons with quantized magnetic flux. *Phys. Rev.*, D95(11):116006, 2017.
- [96] A. Samoilenka and Ya. Shnir. Gauged merons. *Phys. Rev.*, D97(4):045004, 2018.
- [97] A. Samoilenka and Ya. Shnir. Magnetic Hopfions in the Faddeev-Skyrme-Maxwell model. *Phys. Rev.*, D97(12):125014, 2018.
- [98] Samir K. Paul and Avinash Khare. Charged Vortices in Abelian Higgs Model with Chern-Simons Term. *Phys. Lett.*, B174:420–422, 1986.
- [99] J. BARDEEN, N. L. COOPER AND J. R. SCHRIEFFER. Theory of Superconductivity. *Phys. Rev.*, 108:1175, 1957. <http://dx.doi.org/10.1013/PhysRev.108.1175>.
- [100] S. M. CARROL. *An Introduction to General Relativity Spacetime and Geometry*. Addilson Wesley, New York, 2004.
- [101] Karl Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1916:189–196, 1916.
- [102] CLIFFORD M. WILL. *Gravitation and Cosmoly: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley Sons, New York, 1972.

- [103] R. A. D' INVERNOL. *Introducing Einstein's relativity*. Oxford, New York, 1992.
- [104] A. A. EDDINGTON. *The mathematical theory of relativity*. New York, 1922.
- [105] K. Nordtvedt. Equivalence Principle for Massive Bodies Including Rotational Energy and Radiation Pressure. *Phys. Rev.*, 180:1293–1298, 1969.
- [106] Clifford M. Will. Relativistic Gravity in the Solar System. 111. Experimental Disproof of a Class of Linear Theories of Gravitation. *Astrophys. J.*, 185:31–42, 1973.
- [107] CLIFFORD M. WILL. *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge University Press, New York, 1993.
- [108] Clifford M. Will. The Confrontation between General Relativity and Experiment. *Living Rev. Rel.*, 17:4, 2014.
- [109] O. W. Greenberg. CPT violation implies violation of Lorentz invariance. *Phys. Rev. Lett.*, 89:231602, 2002.
- [110] Robert Bluhm. Explicit versus Spontaneous Diffeomorphism Breaking in Gravity. *Phys. Rev.*, D91(6):065034, 2015.
- [111] Don Colladay and V. Alan Kostelecky. Lorentz violating extension of the standard model. *Phys. Rev.*, D58:116002, 1998.
- [112] V. Alan Kostelecky and Matthew Mewes. Electrodynamics with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension. *Phys. Rev.*, D80:015020, 2009.
- [113] Alan Kostelecky and Matthew Mewes. Neutrinos with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension. *Phys. Rev.*, D85:096005, 2012.
- [114] Alan Kostelecky and Matthew Mewes. Fermions with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension. *Phys. Rev.*, D88(9):096006, 2013.
- [115] V. Alan Kostelecky and Matthew Mewes. Testing local Lorentz invariance with gravitational waves. *Phys. Lett.*, B757:510–514, 2016.
- [116] Quentin G. Bailey, Alan Kostelecky, and Rui Xu. Short-range gravity and Lorentz violation. *Phys. Rev.*, D91(2):022006, 2015.
- [117] Sean M. Carroll, Jeffrey A. Harvey, V. Alan Kostelecky, Charles D. Lane, and Takemi Okamoto. Noncommutative field theory and Lorentz violation. *Phys. Rev. Lett.*, 87:141601, 2001.
- [118] V. Alan Kostelecky. Gravity, Lorentz violation, and the standard model. *Phys. Rev.*, D69:105009, 2004.
- [119] Quentin G. Bailey and V. Alan Kostelecky. Signals for Lorentz violation in post-Newtonian gravity. *Phys. Rev.*, D74:045001, 2006.
- [120] Robert Bluhm and V. Alan Kostelecky. Spontaneous Lorentz violation, Nambu-Goldstone modes, and gravity. *Phys. Rev.*, D71:065008, 2005.
- [121] O. Bertolami and J. Paramos. The Flight of the bumblebee: Vacuum solutions of a gravity model with vector-induced spontaneous Lorentz symmetry breaking. *Phys. Rev.*, D72:044001, 2005.
- [122] N. P. Pitjev and E. V. Pitjeva. Constraints on dark matter in the solar system. *Astron. Lett.*, 39:141–149, 2013. [*Astron. Zh.*39,163(2013)].
- [123] Irwin I. Shapiro, Michael E. Ash, and William B. Smith. Icarus: Further confirmation of the relativistic perihelion precession. *Phys. Rev. Lett.*, 20:1517–1518, Jun 1968.
- [124] E. V. Pitjeva and N. P. Pitjev. Relativistic effects and dark matter in the Solar system from observations of planets and spacecraft. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 432:3431, 2013.

- [125] Joseph E. Plowman and Ronald W. Hellings. LATOR covariance analysis. *Class. Quant. Grav.*, 23:309–318, 2006.
- [126] Alberto Vecchiato, Mario G. Lattanzi, Beatrice Bucciarelli, Maria Teresa Crosta, Fernando de Felice, and Mario Gai. Testing general relativity by micro-arcsecond global astrometry. *Astron. Astrophys.*, 399:337–342, 2003.
- [127] Lambert, S. B. and Le Poncin-Lafitte, C. Improved determination of vlbi. *A&A*, 529:A70, 2011.
- [128] M. FROESCHLE, F. MIGNARD, AND F. ARENOUL. in *Proceedings of Hipparcos-Venice 97 Symposium*. Italy, 1997.
- [129] R. Allen Brune, Jr. et al. Gravitational deflection of light: Solar eclipse of 30 June 1973 I. Description of procedures and final results. *Astron. J.*, 81:452–454, 1976.
- [130] Irwin I. Shapiro. Fourth Test of General Relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 13:789–791, 1964.
- [131] I. I. Shapiro, M. E. Ash, R. P. Ingalls, W. B. Smith, D. B. Campbell, R. B. Dyce, R. F. Jurgens, and G. H. Pettengill. Fourth test of general relativity - new radar result. *Phys. Rev. Lett.*, 26:1132–1135, 1971.
- [132] Slava G. Turyshev, Benjamin Lane, Michael Shao, and Andre Giererd. A Search for New Physics with the BEACON Mission. *Int. J. Mod. Phys.*, D18:1025–1038, 2009.
- [133] Thierry Appourchaux et al. Astrodynamical Space Test of Relativity using Optical Devices I (ASTROD I) - A class-M fundamental physics mission proposal for Cosmic Vision 2015-2025. *Exper. Astron.*, 23:491–527, 2009.
- [134] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora. A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. *Nature*, 425:374–376, 2003.
- [135] R. D. Reasenberg, I. I. Shapiro, P. E. MacNeil, R. B. Goldstein, J. C. Breidenthal, J. P. Brenkle, D. L. Cain, T. M. Kaufman, T. A. Komarek, and A. I. Zygielbaum. Viking relativity experiment: Verification of signal retardation by solar gravity. *Astrophys. J.*, 234:L219–L221, 1979.
- [136] W. Martin C. L. Thornton J. D. Anderson, P. B. Esposito and D. O. Muhleman. Experimental test of general relativity using time-delay data from Mariner 6 and Mariner 7. *Astrophys. J.*, 200:L221–L233, 1975.