

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Elvis Johel Aquino Curi

**Oscilações não radiais e propriedades
estelares globais de estrelas compactas
anisotrópicas usando equações de estado
realísticas**

São Luís
2022

Elvis Johel Aquino Curi

Oscilações não radiais e propriedades estelares globais de estrelas compactas anisotrópicas usando equações de estado realísticas

Tese apresentada ao programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Luis Rafael Benito Castro.

Coorientador: Prof. Dr. César Oswaldo Vásquez Flores.

São Luís

2022

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a)
autor(a).

Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Aquino Curi, Elvis Johel.

Oscilações não radiais e propriedades estelares globais de estrelas compactas anisotrópicas usando equações de estado realísticas / Elvis Johel Aquino Curi - 2022
92 f.

Orientador: Luis Rafael Benito Castro

Dissertação (Doutorado) - Programa de Pós Graduação em Física / ccet,
Universidade Federal do Maranhão, UFMA, 2022.

1. Anisotropia. 2. Estrelas de nêutrons. 3. Aproximação de Cowling.
4. Oscilações nao radiais. 5. Ondas gravitacionais. I. Benito Castro,
Luis Rafael. II. Título.

Oscilações não radiais e propriedades estelares globais de estrelas compactas anisotrópicas usando equações de estado realísticas

Elvis Johel Aquino Curi

Aprovado em de 2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Luis Rafael Benito Castro (Presidente)

Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão

Prof. César Oswaldo Vásquez Flores

Doutor em Física - Universidade Estadual da Região Tocantina do MA

Profa. Laura Paulucci Marinho

Doutora em Física - Universidade Federal do ABC (UFABC)

Prof. César Henrique Lenzi

Doutor em Física - Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)

Prof. Manuel Máximo Bastos Malheiro de Oliveira

Doutor em Física - Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)

Esta dissertação está dedicada à minha família pelo sua grande apoio.

Agradecimentos

Enquanto estudava no programa de doutorado, eu tive grande sorte de conhecer grandes pessoas que indiretamente contribuíram na minha formação e que portanto, termina com a apresentação desta tese. Assim, é o meu grande prazer de aproveitar esta oportunidade de agradecê-los.

Agradeço a meu orientador (e amigo) o Prof. Dr. Luis Benito por sugerir-me este problema, por me ajudar com este trabalho ao longo dos últimos anos. Estou agradecido por seu apoio constante, orientação, paciência e dedicação.

Estou profundamente agradecido a esta universidade por me dar a chance de entrar para o programa de doutorado.

Estou especialmente grato ao prof. Dr. Rodolfo Casana por todo seu apoio. Agradeço por me ensinar a matéria de Eletrodinâmica e pelas discussões sobre a quebra de Lorentz na relatividade geral.

Sou grato aos professores que conheci do Departamento de Física da UFMA, em especial ao Prof. Dr. Edilberto Oliveira por suas aulas agradáveis de Física Estatística e ao professor Marco Schreck pelas aulas interessantes aulas sobre quântica de campos.

Gratidão à todos bons colegas de pós-graduação pelas conversas sobre física e também sou grato pela sua paciência por entender meu mau português. Em particular, a Marcos Lima pelas discussões sobre investimento e poupança. Também a Josberg por mostrar me o boate crystal.

Sou grato aos funcionários do curso de pós-graduação pela assistência.

Eu acredito que eu preciso agradecer a este interessante país, especialmente ao estado do Maranhão por me receber. Mesmo que o sol brilhe sempre, eu aprendi a lidar com ele nesta colorida cidade.

Agradeço ao Dr. Luis E. Arroyo, que considero um irmão e amigo. Agradeço pelas discussões sobre física e o tempo que passamos andando pelas ruas a noite na cidade do Maranhão.

Aproveito em agradecer ao meus pais Cerefino Aquino e Norma Curi e aos meus irmãos Boris e John por seu amor e me ajudar a terminar minha carreira de física. E a minha

esposa Mary por deixar me terminar meus estudos da física.

Finalmente agradeço à CAPES pelo indispensável apoio financeiro.

Gracias totales!

Não se preocupe com falhas, se preocupar com as chances de você perder quando você nem sequer tentar

(Jack Canfield)

Resumo

Neste trabalho, fizemos um estudo sistemático de como a frequência da onda gravitacional do modo fundamental de estrelas compactas é afetada por pressões anisotrópicas usando equações de estado realísticas. Nosso estudo é uma extensão do trabalho realizado por Doneva [Phys. Rev. D 85 (2012) 124023], onde foi utilizada uma equação de estado politrópica. Para atingir nosso objetivo, consideramos estrelas compactas que são construídas usando equações de estado no contexto da teoria de campo médio relativística para o caso de estrelas hadrônicas, e no contexto do modelo MIT para o caso de estrelas de quarks. A fim de obter alguma informação que nos permita detectar anisotropia em estrelas compactas, também estudamos e analisamos o comportamento de várias grandezas estelares, por exemplo, o desvio para o vermelho gravitacional, a massa estelar, o raio, entre outras. Adicionalmente, discutimos estrelas híbridas anisotrópicas sem fase mista que são construídas usando equações de estado no contexto da teoria de campo médio relativística (fase hadrônica) e equações de estado no contexto do modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) (fase de quarks). Neste caso, estudamos o comportamento das grandezas macroscópicas de massa e raio. Concluímos que os efeitos anisotrópicos podem ter consequências importantes, que estão fortemente relacionadas ao parâmetro anisotrópico e à equação de estado da matéria. Adicionalmente, realizamos uma comparação com dados observacionais e mostramos que o parâmetro anisotrópico λ pode ser usado como parâmetro de ajuste para reproduzir dados observacionais de massa e raio para estrelas de nêutrons.

Abstract

In this work, we have made a systematic study of how the gravitational wave frequency of the fundamental mode from compact stars is affected by anisotropic effects using realistic equations of state. Our study is an extension of the seminal research performed by Doneva [Phys. Rev. D 85 (2012) 124023], where a polytropic equation of state was used. To reach this objective, we considered compact stars which were built by using equations of state in the framework of a relativistic mean field theory for the case of hadronic stars and in the framework of the MIT model for the case of quark stars. In order to obtain some pertinent information that could give us the possibility to detect the anisotropy in compact stars, we also studied and analyzed the behaviour of various global stellar quantities, e.g., gravitational redshift, stellar mass, radius, among others. Additionally, we discuss anisotropic hybrid stars without mixed phase that are constructed using equations of state in the context of relativistic mean field theory (hadronic phase) and equations of state in the context of the Nambu-Jona-Lasinio (NJL) model (quarkionic phase). In this case, we study the behavior of the macroscopic quantities of mass and radius. We concluded that the anisotropic effects can have important consequences, which are strongly related to the anisotropic parameter and the equation of state of high density matter. Additionally, a comparison with observational data has been made and we have shown that the anisotropic parameter λ can be used as a tuning parameter to reproduce mass and radius observational data of neutron stars.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Esta figura mostra um cenário básico da cadeia de reações entre prótons (fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:FusionintheSun.svg).	21
Figura 2 – O ciclo de vida das estrelas (fonte: www.alevelphysicsnotes.com).	24
Figura 3 – Representação esquemática da estrutura para uma estrela de nêutrons. Fonte: (HAENSEL; POTEKHIN; YAKOVLEV, 2007).	26
Figura 4 – Distribuição de massa para estrelas de nêutrons. Os nomes em cor vermelho são dados para estrelas de nêutrons já confirmadas. Os nomes em azul indicam a possibilidade da companheira ser uma estrela de nêutrons ou uma enorme anã branca. A letra C entre parênteses indica um companheiro para o pulsar. Fonte: https://www3.mpifr-bonn.mpg.de/staff/pfreire/ .	31
Figura 5 – A frequência f em função da massa M com a constante de sacola $B = 60 \text{ MeVfm}^{-3}$ (painel esquerdo). O mesmo diagrama, mas com $B = 90 \text{ MeVfm}^{-3}$ no painel direito. Os resultados são apresentados para valores distintos do parâmetro λ .	54
Figura 6 – A massa para estrelas de quarks em função do raio com $B = 60 \text{ MeVfm}^{-3}$ (painel esquerdo) e $B = 90 \text{ MeVfm}^{-3}$ (painel direito) para diferentes valores do parâmetro λ .	55
Figura 7 – Estrelas de quarks construídas com $B = 60 \text{ MeVfm}^{-3}$ (esquerda) e $B = 90 \text{ MeVfm}^{-3}$ (direita), a frequência do modo f é mostrada como uma função da raiz quadrada da densidade média $\sqrt{M/R^3}$ para alguns valores de λ .	55
Figura 8 – Relação entre massa total e densidade de energia central com $B = 60 \text{ MeVfm}^{-3}$ (painel esquerdo) e $B = 90 \text{ MeVfm}^{-3}$ (painel direito) para vários valores do parâmetro λ .	56
Figura 9 – Relação entre a frequência normalizada e a massa M para estrelas de quarks. Os parâmetros MIT usados são $B = 60 \text{ MeVfm}^{-3}$ (painel esquerdo) e $B = 90 \text{ MeVfm}^{-3}$ (painel direito) para diferentes valores do parâmetro λ .	57
Figura 10 – Dependência da massa total M em função do desvio para o vermelho gravitacional $Z(R) = e^{-\Phi(R)/2} - 1$ na superfície da estrela estranha para diferentes valores de λ . Usamos $B = 60 \text{ MeVfm}^{-3}$ (painel esquerdo) e $B = 90 \text{ MeVfm}^{-3}$ (painel direito).	57

Figura 11 – A frequência normalizada ω em função da massa hadrônica M para o modo f . As figuras são representadas para alguns valores de λ sob a parametrização GM1 (painel esquerdo) e parametrização NL3 (painel direito).	58
Figura 12 – Construção do diagrama da massa total em função da densidade de energia central usando a parametrização hadrônica GM1 e NL3. Os diagramas são mostrados para alguns valores de λ	58
Figura 13 – Diagrama da frequência modal f como uma função da raiz quadrada da densidade média $\sqrt{M/R^3}$ com cinco valores do parâmetro λ	59
Figura 14 – Relação massa-raio para alguns valores de λ descritos na parametrização GM1 e NL3.	60
Figura 15 – Relação esquemática de frequência-massa do modo f para estrelas hadrônicas. As duas figuras são representados com o uso da parametrização GM1 e NL3 para alguns valores de λ	60
Figura 16 – A massa M de estrelas hadrônicas em função do desvio para o vermelho gravitacional da superfície é apresentada para o modo f	61
Figura 17 – Comparação de curvas de raio de massa para estrelas hadrônicas anisotrópicas com dados observacionais usando as parametrizações GM1 (painel esquerdo) e NL3 (painel direito) para diferentes valores do parâmetro λ . As linhas pretas ($\lambda = 0$) correspondem a estrelas hadrônicas isotrópicas.	63
Figura 18 – Comparação de curvas de raio de massa para estrelas de quarks anisotrópicas com dados observacionais usando a constante $B = 60 \text{ MeVfm}^{-3}$ (painel esquerdo) e 90 MeVfm^{-3} (painel direito) para diferentes valores do parâmetro λ	63
Figura 19 – Equação de estado para estrelas híbridas sem fase mista.	69
Figura 20 – As massas gravitacionais de estrelas híbridas sem fase mista em função do raio. No painel esquerdo, a figura foi construída com a parametrização GM1 e SU(3) RKH, e a figura do painel direito foi obtida com a parametrização GM1 e SU(3) HK.	71
Figura 21 – Figura tomada de (KONG; SIAUW; BAYEN, 2020).	94

Lista de símbolos

Γ	Letra grega Gama representa o símbolo de Christoffel
Λ	Lambda representa a função da métrica no espaço-tempo
ζ	representa qualquer variável no Hamiltoniano de Dirac H_D
ε	indica a densidade de energia

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
2	ESTRELAS DE NÊUTRONS	20
2.1	Formação estelar	20
2.2	Formação das estrelas de nêutrons	24
2.3	Estrutura das estrelas de nêutrons	26
2.4	Estrelas de Quarks	28
2.5	Estrelas hadrônicas	29
2.6	Observáveis da estrela de nêutrons	29
2.6.1	Massa	30
2.6.2	Raio	32
2.6.3	Temperatura	33
2.7	Explosões de raios-X	33
3	EQUAÇÕES DE ESTADO DA MATÉRIA ESTELAR	35
3.1	Teoria Relativística de Campo Médio	35
3.1.1	A densidade lagrangiana para matéria hadrônica	36
3.1.2	Equações de movimento	38
3.1.3	Parâmetros	39
3.2	O modelo de sacola do MIT	40
3.2.1	Parâmetros	42
4	OSCILAÇÕES NÃO RADIAIS ANISOTRÓPICAS	43
4.1	Modos de fluido	44
4.2	Oscilações nas estrelas	45
4.3	Aproximação de Cowling	46
4.4	Equações perturbadas na aproximação de Cowling	48
4.5	Métodos numéricos	53
4.6	Resultados	53
4.6.1	Estrelas de quarks	53
4.6.2	Estrelas hadrônicas	57
4.6.3	Comparação entre a teoria e as observações	62
5	ESTUDO PRELIMINAR DE ESTRELAS HÍBRIDAS ANISOTRÓPICAS	64
5.1	O modelo de Nambu-Jona-Lasinio	64

5.2	Formalismo	64
5.2.1	A Lagrangiana do modelo de NJL SU(3)	65
5.2.2	Equações de movimento	66
5.3	Equações de estado	66
5.3.1	Parâmetros	67
5.4	Matéria de quarks	67
5.4.1	Equilíbrio químico	67
5.4.2	Neutralidade de cargas elétricas	68
5.4.3	EoS da matéria de quarks	68
5.5	Estrelas híbridas sem fase mista	68
5.6	Resultados	69
	 Considerações Finais	 73
	 REFERÊNCIAS	 74
	 APÊNDICES	 83
	APÊNDICE A – SISTEMA DE UNIDADES	84
	APÊNDICE B – APROXIMAÇÃO RELATIVÍSTICA DE CAMPO MÉDIO (RMF)	86
	APÊNDICE C – APLICAÇÃO DO MODELO DE SACOLA DO MIT	91
	APÊNDICE D – SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL	93
	APÊNDICE E – O MÉTODO LINEAR DE SHOOTING	94

1 Introdução

Quando olhamos para o céu, podemos ver objetos estelares brilhando regularmente com o tempo. A ciência que interpreta e observa os espectros de frequências estelares é chamada de asterosismologia. O estudo das pulsações emitidas por objetos tão distantes em relação ao nosso planeta, é importante porque nos permite investigar sua estrutura interna, ou seja, nos permite examinar os processos físicos internos da estrela e estudar teoricamente sua evolução. Portanto, o estudo das oscilações em estrelas pulsantes nos dá a possibilidade de comparar as observações com modelos matemáticos teóricos. Encontrar as frequências dos modos de oscilação de uma estrela não é uma tarefa fácil, já que esses parâmetros podem depender da massa, temperatura, nível de rotação e magnetismo; quer dizer que os modos de oscilações podem variar significativamente de uma estrela para outra a medida que a estrela evolui. Uma forma de entender as oscilações estelares é pensar que as estrelas são como cavidades ressonantes onde o movimento do gás (dentro dos objetos estelares) gera ondas sonoras. Muitas dessas ondas sonoras podem tender a desaparecer, mas por meio de algum mecanismo¹ se mantém. Quando essas ondas chegam na superfície da estrela podem-se deformar, produzindo diferentes modos de oscilação; assim os efeitos das oscilações podem ser observados como pequenas mudanças de temperatura e brilho na estrela.

A partir de nosso conhecimento sobre as oscilações numa corda, podemos descrever diferentes sobretons de uma onda estacionária usando o número quântico n . O modo fundamental é representado para $n = 1$, neste caso todo o material da corda se move para cima e para baixo. O primeiro harmônico, $n = 2$, tem um nó, onde nenhum material se move, no meio da corda e assim por diante. De forma análoga as oscilações que se produzem em instrumentos musicais de corda ou de vento, as estrelas, como tais, são capazes de oscilar em um espaço 3D (SHIBAHASHI, 2005). Matematicamente cada modo pode ser representado por um harmônico esférico de grau l e ordem azimutal m . Em particular, podemos observar em estrelas distantes, típicas oscilações radiais com $l = 0$, onde a estrela se expande e contrai; quando $l = 1$ temos os modos de oscilação dipolo, com um nó ao longo do equador. Por exemplo, esses modos foram observados em estrelas em rotação (BIGOT; KURTZ, 2011). Quando $l = 2$ temos oscilações de quadripolo, com dois nós que vão ao redor da estrela. Cada um desses tipos de oscilação apresentam diferentes frequências em cada sobreton, fazendo-os visíveis durante prolongados períodos.

Em 1596, o astrônomo David Fabricius observou pela primeira vez uma das primeiras estrelas oscilantes. Alguns anos depois, o astrônomo Johannes Hevelius nomeou essa estrela

¹ Por exemplo, o mecanismo κ se refere a obstrução da radiação dentro das camadas mais internas da estrela.

como *Mira Ceti* (estrela maravilhosa). *Mira Ceti* é um sistema binário que consiste em uma estrela gigante vermelha junto com uma anã branca. Na astrofísica, *Mira* mantém um lugar importante como estrela, devido ao fato que ela pode brilhar por um período de 332 dias. Durante esse intervalo de tempo o brilho da estrela gradualmente diminui até desaparecer do céu (HOGG, 1933). A estrela *P Cygni*, descoberta logo depois em 1600 por Johann Bayer, muda de brilho com um período de anos até décadas. As primeiras cefeidas, δ cefeí e η aquilae, foram descobertas em 1784. E outra estrela pulsante bem conhecida é *RR Lyrae*², a qual foi descoberta em 1899.

Para o desenvolvimento desta tese, vamos nos concentrar no estudo dos modos de oscilação que resultam de pulsações radiais e não radiais. Esses tipos de oscilações são importantes na teoria das oscilações estelares pois elas permitem obter informações sobre a estrutura, estabilidade, massa, raio, etc., do objeto estelar. Enquanto a pulsação radial é a oscilação mais simples que envolve o movimento da matéria estelar na direção radial, a oscilação não radial é mais complicada pois envolve o movimento da matéria estelar na direção tangencial.

Por outro lado, estrelas compactas são conhecidas por serem objetos astrofísicos nos quais a matéria pode ser encontrada em condições extremas, como por exemplo: altas densidades, campos gravitacionais intensos, campos magnéticos fortes e rotação rápida. A alta densidade de matéria em estrelas de nêutrons pode ser estudada usando uma equação de estado (EoS), que é usada como o principal ingrediente para a integração numérica das equações de estrutura estelar, as chamadas equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). Usando este sistema de equações, teoricamente podem ser obtidas importantes quantidades, por exemplo, a massa e o raio de uma estrela compacta, a compactidade, o desvio para o vermelho gravitacional, entre outros. Recentemente, esforços têm sido feitos para obter melhores restrições observacionais sobre o raio e a massa das estrelas compactas e, como consequência, temos visto uma melhoria em nossa compreensão da matéria em altas densidades dentro de estrelas compactas.

Todas as características acima mencionadas sobre estrelas compactas são frequentemente estudadas para o caso de um fluido isotrópico perfeito, mas ao mesmo tempo, também é bem sabido que o conhecimento da EoS no núcleo interno das estrelas de nêutrons é muito evasivo. Essa dificuldade tem sua origem na incerteza da EoS nuclear em densidades extremamente altas, razão pela qual alguns autores propuseram que dentro das estrelas de nêutrons poderia existir matéria de quarks desconfinados e outros autores propuseram a existência de efeitos anisotrópicos. A existência de anisotropia pode ser justificada por vários motivos, entre eles temos a possibilidade de um núcleo sólido ou a presença de campos magnéticos fortes (HERRERA; SANTOS, 1997), e por este motivo

² A importância das estrelas *RR Lyrae* é que elas podem ser usadas para medir distâncias a aglomerados estelares.

a possibilidade de anisotropia dentro de estrelas de nêutrons tem sido objeto de estudo recente, por exemplo, (SAWYER, 1972; HEISELBERG; HJORTH-JENSEN, 2000). Recentemente, as condições para a estabilidade/instabilidade da pressão isotrópica para um fluido dissipativo³ com distribuição esférica foram investigadas em (HERRERA, 2020). Neste trabalho seminal, o autor conclui que fluxos dissipativos, e/ou densidades de energia heterogêneas, e/ou o aparecimento de cisalhamento no escoamento do fluido, forçam o abandono da configuração isotrópica inicial, gerando portanto uma pressão anisotrópica, ou seja, uma configuração do fluido com pressão isotrópica tenderia a desenvolver uma pressão anisotrópica à medida que evolui, sob condições esperadas na evolução estelar. Portanto, somos forçados a considerar a pressão anisotrópica sempre que lidemos com fluidos relativísticos.

É bem conhecido que o uso de EoS politrópicas reduzem os cálculos numéricos e descrevem consistentemente muitas propriedades globais de objetos compactos (TOOPER, 1964), portanto EoS politrópicas podem servir como uma extensão para produzir EoS realísticas (CHATZHOANNOU; YAGI; YUNES, 2014). Por exemplo, podemos usar um índice politrópico de $N = 0,5$ para obter estrela de nêutrons com massas acima de $2 M_{\odot}$ solares e raio na faixa das observações do NICER (GENDREAU; ARZUMANIAN; OKAJIMA, 2012). Além disso, várias equações politrópicas podem ser usadas para modelar diferentes densidades dentro de estrelas de nêutrons, este método é chamado de aproximação politrópica por partes. Na referência (DONEVA; YAZADJIEV, 2012), os autores usaram uma EoS politrópica para estudar as oscilações não radiais (em aproximação de Cowling) de estrelas de nêutrons na presença de uma pressão anisotrópica. Nosso objetivo aqui é complementar esse trabalho, usando equações de estado realísticas. Para atingir este objetivo, usamos EoS no contexto da teoria de campo médio relativística (SEROT; WALECKA, 1986) para estrelas hadrônicas e no contexto do modelo de sacola de MIT (CHODOS et al., 1974; FARHI; JAFFE, 1984) para estrelas de quarks. Também, consideramos estrelas híbridas anisotrópicas sem fase mista construídas usando EoS no contexto da teoria de campo médio relativística (fase hadrônica) e EoS no contexto do modelo de Nambu-Jona-Lasinio (fase de quarks).

Esta tese é estruturada da seguinte forma: O capítulo 2 é dedicado a uma revisão geral da formação de estrelas de nêutrons. Também veremos a estrutura de uma típica estrela de nêutrons. A seguir, mencionamos as diferentes categorias de estrelas de acordo com sua composição interna. E destacamos alguns observáveis das estrelas de nêutrons.

No capítulo 3, inicialmente apresentamos as principais características da teoria relativística de campo médio. Isto nos levará a construir a equação de estado para estrelas compostas de matéria hadrônica. Depois, descrevemos o modelo de sacola do MIT para construir a EoS para estrelas compostas de quarks.

³ O termo fluido dissipativo se refere a presença de viscosidade ou fluxo de calor em um fluido.

No capítulo 4, determinaremos as equações de oscilação perturbadas com anisotropia. A integração numérica das equações nos permite encontrar as frequências de modo f e outras variáveis estelares. A seguir, mostramos nossos resultados tanto para estrelas hadrônicas como para estrelas de quarks com anisotropia. Também realizamos uma comparação dos nossos resultados com dados observacionais. A contribuição deste trabalho baseia-se no uso de equações de estado “mais realísticas” em comparação a outros trabalhos que utilizam equações politrópicas para estrelas de nêutrons. Por outro lado, resultados sobre oscilações não radiais de estrelas de quarks anisotrópicas são mostrados pela primeira vez.

No capítulo 5, apresentamos o modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) para estudar a matéria de quarks com densidade finita. Para estudar estrelas híbridas anisotrópicas sem fase mista (construção de Maxwell) as equações de estado são construídas considerando equações de estado para matéria hadrônica (desenvolvidas no capítulo 3) e equações de estado para a matéria de quarks (modelo de NJL). Mostramos nossos resultados para massa e raio e comparamos com dados observacionais. Por último, terminamos a tese com as conclusões.

Nos apêndices, apresentamos alguns cálculos que servem de suporte para os capítulos 3 e 4.

2 Estrelas de nêutrons

As estrelas de nêutrons são objetos verdadeiramente fascinantes, cuja matéria suporta condições especiais como, por exemplo, temperaturas extremas, altas densidades e campos magnéticos intensos. Como o espaço-tempo ao seu redor é altamente curvo, espera-se que haja efeitos de desvio gravitacional para o vermelho, e de dobramento da luz. As estrelas de nêutrons são os objetos estelares mais densos conhecidos no Universo, com uma densidade que provavelmente excede os 10^{15} g/cm³ e pode chegar até 10^{16} g/cm³. Isto é, a densidade de uma estrela de nêutrons pode ser 100 vezes maior que a densidade de um núcleo atômico. Além disso, as estrelas de nêutrons possuem um raio de cerca de 12 km (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008) e possuem uma massa de aproximadamente 1,4 massa solar¹ (denotado por M_{\odot}). Isso significa que a massa de uma estrela de nêutrons está embalada em uma esfera de 20 a 30 km de diâmetro. De fato, as estrelas de nêutrons são considerados como laboratórios cosmológicos de partículas, fornecendo um lugar apropriado para estudar problemas interessantes como: a influência dos campos magnéticos nas propriedades da matéria dentro das estrelas (CHEN; ZHANG; LIU, 2007), a formação de estados de superfluidez² (BAYM; PETHICK; PINES, 1969) e supercondutividade³, o comportamento da força nuclear em densidades extremamente altas (GADE, 2020), possíveis transições de fase para matéria exótica e física gravitacional em um regime de campo forte. Por isso este capítulo nos servirá para revisar os conceitos básicos sobre a evolução das estrelas de nêutrons, sua estrutura, estrelas com matéria estranha, e como elas são observadas.

2.1 Formação estelar

A história da evolução de uma estrela começa com a formação de nuvens tênues e opticamente invisíveis compostas essencialmente de gás hidrogênio e poeira cósmica, essas formações são chamadas também de *nuvens moleculares*. Como exemplo desse conglomerado temos a *nebulosa cabeça de cavalo*⁴ que é composta por poeira e gases. O tamanho da nuvem pode variar de um ano-luz a centenas de anos-luz de diâmetro, e sua massa pode variar desde 10 a $10^7 M_{\odot}$. As regiões mais frias da nuvem apresentam temperaturas muito baixas, da ordem de 10 K, enquanto as regiões mais quentes podem

¹ A massa do sol é $\approx 2 \times 10^{33}$ g.

² A superfluidez é um estado de natureza quântica. Quando a temperatura de uma substância (por exemplo, Hélio líquido) é muito baixa, o líquido comporta-se como se não tivesse viscosidade. Em poucas palavras a superfluidez é a capacidade de um líquido para fluir.

³ A supercondutividade é a superfluidez sucedendo em um sistema eletricamente carregado.

⁴ Essa nebulosa cria uma região na qual novas estrelas estão se formando, especialmente nas regiões mais densas que formam o 'pescoço' da cabeça do cavalo.

alcançar temperaturas de 2000 K. A densidade média da nuvem é de aproximadamente, 10^2 partículas por centímetro cúbico.

A formação estelar ocorre devido a diversos fatores, tais como: composição química, rotação, campos magnéticos, gravidade, pressão do gás, radiação de estrelas vizinhas, colisão de nuvens interestelares, etc (MESTEL; JR, 1956). Na formação estelar a poeira cósmica é vista como um escudo que protege as regiões mais internas da nuvem dos raios de luz. Com o passar do tempo, as regiões mais internas da nuvem começam a esfriar, e a pressão na região central interna diminui. Isto implica que a pressão dentro da nuvem não poderá se contrapor à atração gravitacional da sua própria matéria. Desta forma, as regiões mais densas sofrem atração para o centro da nuvem interestelar. Por cerca de um milhão de anos, a região mais interna (ou núcleo) da nuvem acumulará mais massa em seu centro de massa, formando uma *protoestrela* (ou nuvem protoestelar). Enquanto isso, uma parte da matéria (envolvente a estrela) colapsa com uma certa quantidade de momento angular e se estabelece em um disco que orbita a protoestrela. Portanto, tanto o disco como a protoestrela estão girando. À medida que a protoestrela gira, ela gera um forte campo magnético. Este campo magnético gera um vento estelar que ejeta matéria (que envolve a protoestrela) para o espaço, e assim a protoestrela pode ser vista.

Com o colapso das regiões mais externas da nuvem, o tamanho da protoestrela diminui e seu centro se aquece. Uma vez que a camada central da protoestrela alcança uma temperatura de 10^7 K, os processos de fusão termonuclear começam a ocorrer. Essa primeira etapa no núcleo da protoestrela, conhecida como etapa de aquecimento do hidrogênio, acontece quando núcleos de hidrogênio atingem o ponto de fusão e começam a se fundir, produzindo núcleos pesados de hélio, como pode ser visto na figura (1). Este processo

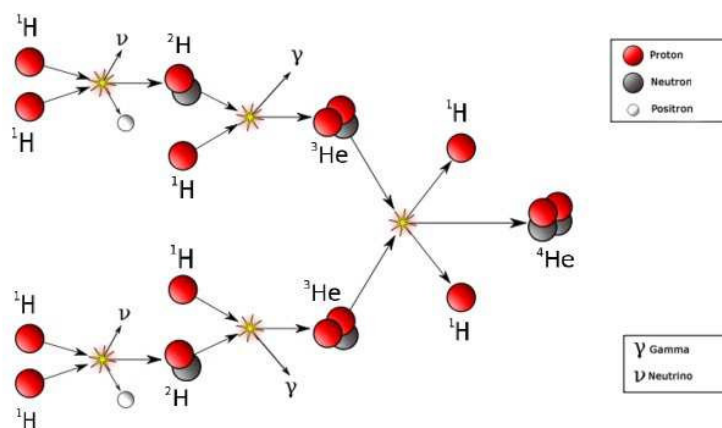


Figura 1 – Esta figura mostra um cenário básico da cadeia de reações entre prótons (fonte: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:FusionintheSun.svg>).

nuclear, que marca o nascimento de uma estrela, consiste de três passos:

1. Dois núcleos de hidrogênio (dois prótons) se fundem para formar um núcleo de hélio-2. O resultado desta combinação não é estável e um dos prótons decairá para se

tornar um núcleo estável de deutério (um próton e um nêutron). O processo também cria um pósitron⁵ e um neutrino⁶:



A carga positiva perdida (no lado esquerdo da reação acima) é carregada por um pósitron. O pósitron não vai durar muito, porque logo encontrará um elétron comum, resultando na criação de duas partículas de raios gama através da aniquilação de matéria e antimatéria. Esta etapa deve ocorrer duas vezes na reação geral, já que a reação requer um total de quatro prótons. Por exemplo, no Sol, a etapa 1 ocorre com muita frequência (cerca de 10^{38} vezes por segundo), pois há muitos núcleos de deutério e prótons e outros núcleos no centro do núcleo solar.

2. A etapa 2 ocorre quando um desses núcleos de deutério da etapa 1 colide e se funde com um próton. O resultado é um núcleo de hélio-3⁷ junto com a produção de um fóton de raios gama. Esta etapa também ocorre duas vezes na reação geral:



3. A última etapa da cadeia próton-próton requer a adição de outro nêutron ao núcleo de hélio-3, formando assim um núcleo de hélio-4. Essa etapa final pode ocorrer de várias maneiras diferentes, mas a mais comum é através da colisão de dois núcleos de hélio-3:



Note que cada um desses núcleos de hélio-3 resultou de uma ocorrência anterior e separada da etapa 2 em algum lugar do núcleo da estrela. O resultado final é um núcleo normal de hélio-4 e dois prótons. Este processo de fusão é a forma mais comum de criar hélio dentro das estrelas, mas não é a única alternativa; existem variações desse processo que envolvem outros elementos químicos, como por exemplo, o ciclo CNO (carbono, nitrogênio, oxigênio).

Com o passar do tempo, o combustível de hidrogênio se esgota, o núcleo da estrela encolhe, e tanto a temperatura quanto a pressão no núcleo aumentam, evitando o colapso da estrela, pois a energia termonuclear produzida pela fusão do hélio é suficiente para equilibrar a força da gravidade. Assim, se tem hélio queimando no centro da estrela, enquanto os processos de fusão do hidrogênio ocorrem em uma fina camada acima do núcleo. A energia gerada por este processo é transmitida para o resto da estrela, fazendo com que as camadas externas da estrela se afastem do núcleo, com o qual a estrela (como um todo) ficará maior. Portanto, à medida que a estrela aumenta de tamanho, sua

⁵ O pósitron é uma partícula com a mesma massa do elétron e carga oposta.

⁶ O neutrino é uma partícula subatômica com massa muito pequena que é difícil de detectar.

⁷ O hélio-3 é uma forma rara do isótopo de hélio, que é composto por dois prótons e um nêutron.

luminosidade também aumenta substancialmente, e a estrela lentamente se torna uma *gigante vermelha* (FRAKNOI; MORRISON; WOLFF, 2016).

Eventualmente, um novo processo de colapso iniciará quando a estrela fique sem hélio. Isso implica que a temperatura aumenta, e uma nova fase de fusão é originada no centro da estrela. Nesta etapa, o núcleo alcança a temperatura de 100 milhões Kelvin para fundir todos os átomos de hélio e criar átomos de carbono no centro da estrela. Esse caroço de carbono fornecerá energia apenas por alguns milhares de anos, que é um período incrivelmente curto para a vida da estrela. Processos adicionais de fusão podem ocorrer para produzir elementos como o cobalto, o níquel e o ferro. Os elementos mais pesados permanecem no caroço da estrela, enquanto os elementos químicos mais leves se depositam em camadas circundantes ao redor da região central da estrela. Dependendo da quantidade de massa estelar inicial, diferentes processos de fusão continuam ao longo das diversas camadas concêntricas. Cada faixa funde um elemento diferente, por exemplo, na camada mais externa estará fundido-se o hidrogênio, na seguinte camada estará fundindo o hélio e assim sucessivamente. Para estrelas com massas iniciais maiores a $8 M_{\odot}$, o fim da etapa de fusão ocorre quando o núcleo começa a produzir o elemento ferro. Dado que os núcleos de ferro são bastantes pesados e possuem a maior energia de ligação em relação a outros núcleos, nenhum outro processo adicional de fusão termonuclear exotérmico é possível. Isso significa que não é possível extrair energia térmica do processo de fusão do ferro para manter a estabilidade da estrela. Neste caso, a pressão dos elétrons degenerados⁸ no núcleo da estrela é responsável por manter a estabilidade.

O tamanho da estrela é determinado pelo equilíbrio entre a força gravitacional que puxa a estrela para manter-se junta, e a energia liberada pela fusão do hidrogênio que empurra a estrela para fora, evitando que ela entre em colapso sob sua própria gravidade. Ou seja, a estrela atinge uma configuração chamada de *equilíbrio hidrostático*⁹. Esse processo de equilíbrio ocorrerá ao longo de milhares de anos, isto quer dizer que a maior parte do interior da estrela sofrerá modificações na sua composição química, e que grandezas como temperatura, raio, massa e luminosidade mudarão ao longo da vida da estrela. Isso faz com que a estrela esteja em uma fase na *sequência principal*¹⁰ parecida com o nosso Sol (GLENDENNING, 2012). Estrelas com massas muito grandes (pequenas) passam um curto (longo) período de tempo na sequência principal porque seu combustível queima rápido (lento).

⁸ Os elétrons são não degenerados quando a distância média entre eles é muito maior que o comprimento de onda de De Broglie. Quando a distância média entre os elétrons se aproxima do comprimento de onda de De Broglie, eles são chamados de degenerados.

⁹ Um objeto astronômico se encontra em um estado de equilíbrio hidrostático quando sua própria força gravitacional equilibra sua pressão interna; desse modo o corpo não se expande nem se contrai.

¹⁰ A sequência principal é um diagrama dos astrônomos Ejnar Hertzsprung e Henry Norris Russell. Neste diagrama, a grande maioria das estrelas está concentrada ao longo de uma faixa diagonal (sequência principal), indicando que as estrelas passam a maior parte da suas vidas nessa faixa. Em palavras simples, este gráfico mostra uma relação entre o brilho da estrela e sua temperatura (ou cor).

No entanto, existem casos em que as estrelas não estão na banda da *sequência principal*. Por exemplo, se o caroço da estrela for bastante massivo, ele se contrairá e desencadeará mais reações termonucleares, até que o núcleo estelar se torne carbono. Esses tipos de estrelas são encontrados na parte superior direita do diagrama de sequência principal e são chamadas de gigantes vermelhas. Por outro lado, se o núcleo da estrela não for massivo, ele continuará a se contrair por mais tempo sem atingir a condição de fusão nuclear do hidrogênio. Com o tempo, a estrela esfriará e se tornará um objeto chamado anã marrom.

A evolução de uma estrela é determinada principalmente pela sua massa, composição química, temperatura, e luminosidade. As estrelas mais leves, aquelas com massas inferiores a $8 M_{\odot}$, terminam suas vidas como anãs brancas. Enquanto estrelas com pelo menos $8 M_{\odot}$ terminam seu ciclo de vida através de uma estrela de nêutrons ou um buraco negro. Em outros termos, no estágio final da estrela existem vários cenários possíveis (veja a figura 2) que dependerão da massa da estrela progenitora.

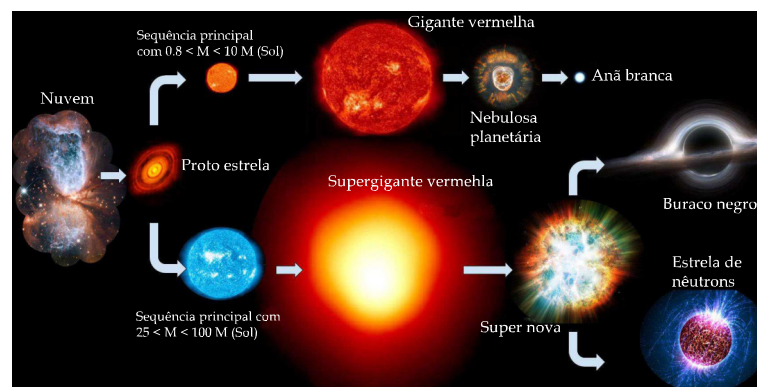


Figura 2 – O ciclo de vida das estrelas (fonte: www.alevelphysicsnotes.com).

2.2 Formação das estrelas de nêutrons

No final da queima hidrostática no centro da estrela, ainda existem camadas concêntricas ao redor do núcleo que continuam em combustão de elementos como o hidrogênio, hélio, carbono, neon, oxigênio, e silício (JANKA et al., 2007). Conseqüentemente nenhum elemento mais pesado que o ferro pode ser fundido pois a produção de elementos mais pesados a partir do ferro requer mais energia. No centro da estrela há um caroço de ferro que é rodeado por uma casca de silício que continua queimando-se na fronteira e servirá de alimento para o caroço de ferro. Em outras palavras, nesta etapa, a massa do caroço de ferro seguirá aumentando sem superar a massa de Chandrasekhar¹¹, e será capaz de equilibrar o colapso gravitacional devido ao fato de que no centro da estrela a temperatura

¹¹ O Limite Chandrasekhar é a massa máxima teórica ($\approx 1,44 M_{\odot}$) que uma anã branca pode ter e ainda permanecer como uma anã branca. O limite é nomeado em homenagem ao ganhador do prêmio Nobel, Subrahmanyan Chandrasekhar que propôs a ideia pela primeira vez em 1931.

umenta e cria uma pressão de elétrons degenerados (JANKA et al., 2007). À medida que a massa do núcleo central excede o limite de Chandrasekhar, o equilíbrio hidrostático é perdido, pois a pressão de degenerescência não consegue mais estabilizar o peso do núcleo e o peso das camadas externas. Esse processo implica que a gravidade força os elétrons a se combinarem com os prótons; formando nêutrons e liberando neutrinos. Assim, esta fase começa com uma produção abundante de neutrinos, que ficarão temporariamente presos no núcleo estelar. Enquanto isso, as camadas externas da estrela estão colapsando em velocidades supersônicas em direção ao centro da estrela. Conseqüentemente, a matéria em colapso ricocheteia a 10 km do núcleo estelar. Como resultado dessa colisão elástica (BETHE, 1990), existirá uma competição entre a onda de choque que sai em direção radial e a matéria das capas externas que cai. Eventualmente, a onda de choque sobrevivente atingirá a superfície da estrela e emitirá radiação eletromagnética em todos os comprimentos de onda com uma intensidade de mais de cem vezes o que o Sol irradiaria durante toda a sua vida (WOOSLEY; WEAVER, 1989). Este tipo de fenômeno, chamado de explosão supernova, levará a uma enorme expulsão de energia (10^{46} J) de neutrinos para o meio interestelar e, conseqüentemente, as camadas mais externas da estrela progenitora serão expelidas. O remanescente da explosão é uma nébula, no meio da qual está o resto do caroço da estrela, o que é simplesmente uma estrela de nêutrons ou um buraco negro. No início desta nova fase a temperatura é bastante alta (10^{11} K), depois de transcorrer alguns dias, ela vai esfriar pela emissão de neutrinos, com o qual sua temperatura chegará a $\approx 10^{10}$ K, e depois de mais de um mês a temperatura cairá até aproximadamente 10^8 K. A estrela de nêutrons esfriará por milhões de anos até que sua temperatura atinja um valor aproximado de 10^6 K produto da emissão de fótons. Estrelas de nêutrons podem ser descritas por equações de estado a temperatura zero, pois sua temperatura é bastante pequena quando comparada à energia (30 MeV) da matéria nuclear.

Por outro lado, o processo de nascimento da estrela de nêutrons descrito linhas acima não é o único caminho. Outro tipo de formação pode ocorrer quando os elétrons são esmagados com seus núcleos atômicos de neônio e magnésio em um processo chamado de captura eletrônica. Esse processo produz uma diminuição na pressão do núcleo estelar, fazendo com que as regiões internas da estrela entrem em colapso, enquanto as regiões externas explodem, resultando em uma explosão de supernova (NOMOTO, 1986).

A composição nuclear das estrelas de nêutrons é dominada principalmente por partículas de nêutrons ($\sim 90\%$), existem também prótons e léptons. A massa varia entre $1,0 - 2,0 M_{\odot}$, com raios de ~ 10 km. Se o potencial químico dos elétrons for maior que a massa em repouso do káon, pode ocorrer a condensação dos káons, desta maneira o káon toma o lugar dos elétrons para que a carga fique neutra. Se a densidade incrementa, os potenciais químicos dos nêutrons e prótons podem ser maiores que a massa em repouso dos híperons, então partículas $\Sigma^{+,-,0}$, Λ , Ξ^{-} podem aparecer. Além disso, algumas estrelas de nêutrons podem conter *strange quark matter*.

2.3 Estrutura das estrelas de nêutrons

A estrutura básica de uma estrela de nêutrons pode ser dividida em uma capa de atmosfera e quatro regiões internas (ver figura 3):

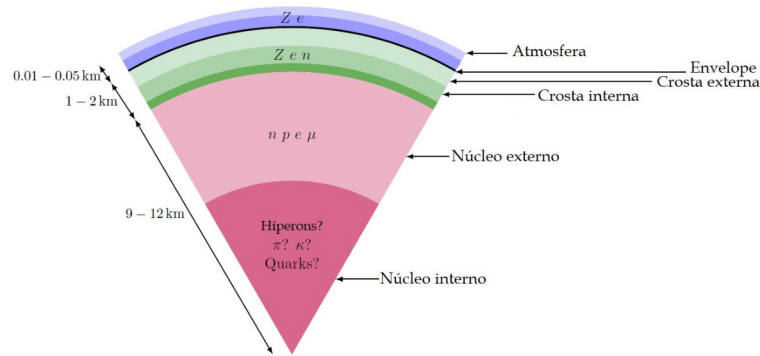


Figura 3 – Representação esquemática da estrutura para uma estrela de nêutrons. Fonte: (HAENSEL; POTEKHIN; YAKOVLEV, 2007).

Atmosfera: A atmosfera é a camada mais externa da estrela de nêutrons. Essa região pode variar desde alguns milímetros se a estrela está fria (com uma temperatura superficial de $3 \times 10^5 \text{K}$), ou pode alcançar vários centímetros (se a temperatura na superfície for aproximadamente $3 \times 10^6 \text{K}$). O espectro de radiação formado na atmosfera contém informações relevantes sobre a temperatura da superfície na estrela e sua composição química. Propriedades macroscópicas como massa e raio, também podem ser obtidas deste espectro eletromagnético (HAENSEL; POTEKHIN; YAKOVLEV, 2007).

Envelope (crosta externa): O envelope é uma camada que contém uma pequena quantidade de massa comparada com a massa total da estrela mesma. A faixa do envelope tem uma largura (de aproximadamente 100 m) que abarca desde a parte inferior da atmosfera (iniciando com uma densidade aproximada de 10^4g/cm^3) e continua até que sua densidade consiga atingir um valor de $\rho_{ND} = 4 \times 10^{11} \text{g/cm}^3$.¹² Este ponto chamado de gotejamento de nêutrons marca o fim do envelope. A crosta externa está composta de núcleos atômicos ricos em nêutrons, dispostos em uma estrutura cúbica centrada (bcc)¹³ em equilíbrio β e encaixados em um mar de elétrons que se tornam relativísticos, com uma densidade de $\sim 10^7 \text{g/cm}^3$. Dependendo do cenário da formação, a crosta externa poderá ser muito diferente em sua composição e estrutura, como pode ver-se em (CHAMEL; HAENSEL, 2008), onde a estrela de nêutrons adquire uma série de cascas compostas de hidrogênio queimando hélio.

¹² Onde ρ_{ND} é o valor da densidade de gotejamento de nêutrons (*neutron drip*). À medida que a densidade aumenta, os núcleos atômicos recebem mais quantidades de nêutrons, produzindo assim um novo núcleo. Se este novo núcleo receber mais partículas de nêutrons, ele perderá sua estabilidade, portanto, o núcleo decai e partículas nêutrons começam-se a desligar (a pingar) do núcleo. Por isso, chama-se ponto de gotejamento dos nêutrons ou *neutron drip point*.

¹³ Esta rede hexagonal é formada pela repulsão de íons.

Crosta (crosta interna): Esta região abarca uma largura de cerca 1 km e é muito mais densa que a crosta externa. A densidade ρ desta estrutura pode variar desde $4,3 \times 10^{11}$ até 2×10^{14} g/cm³. Quanto mais próximo estamos do núcleo da estrela, maior será a densidade e o número de nêutrons livres. Nas camadas mais internas da crosta, a matéria é composta por uma rede de núcleos abundantes em nêutrons que estão imersos em um mar de nêutrons não ligados (REZZOLLA et al., 2018). Quando esses aglomerados de matéria alcançam uma densidade de saturação $\rho_0 = 2,8 \times 10^{14}$ g/cm³, estas se mantêm juntas formando um único fluido de prótons, elétrons e nêutrons. Quando a densidade encontra-se no intervalo entre $\rho_0 < \rho < 0,35\rho_0$, a matéria (abundante em prótons) é rearranjada em estruturas semelhantes a esferas e cercada por um gás de elétrons e nêutrons (DOUCHIN; HAENSEL, 2000). Para densidades mais altas, a separação entre as esferas diminui, podendo atingir uma compactação tal que, a forma esférica deixa de ser favorável, surgindo outras fases não-homogêneas. No intervalo de densidades entre $0,35\rho_0 < \rho < 0,5\rho_0$ as esferas se fundem em estruturas do tipo barra, e para $0,5\rho_0 < \rho < 0,56\rho_0$ as estruturas tipo barra formam estruturas tipo placa (LORENZ; RAVENHALL; PETHICK, 1993). Estas últimas formas exóticas representam uma transição da matéria nuclear e são importantes porque podem ter influência na dinâmica e evolução da estrela de nêutrons.

Núcleo externo: Tanto o núcleo externo quanto o interno são os componentes mais importantes para a determinação da massa da estrela, pois estas camadas contêm quase toda a massa da estrela de nêutrons. Sua extensão abarca vários km (podendo chegar a 9 km) e o valor da densidade vai desde $0,5\rho_0$ até $2\rho_0$. Para manter esta região em equilíbrio β , a matéria do núcleo externo possui uma composição $npe\mu$, ou seja, as componentes que se encontram no núcleo externo estão dadas por partículas e, p, n e possivelmente de múons μ . Consequentemente, o estado para esta matéria será eletricamente neutro. Os elétrons e múons formam um gás ideal de Fermi. Tanto os nêutrons como os prótons, que interagem por meio de forças nucleares, podem estar em um estado de super-fluididez ou de supercondutividade.

Como a matéria é altamente pressurizada nesta camada, é matematicamente difícil descrever a matéria (do núcleo interno) em uma única equação de estado, ou seja, existem diferentes modelos para descrever a matéria dentro do núcleo interno e externo, como podemos ver na publicação de (DEGENAAR; SULEIMANOV, 2018).

Núcleo interno: É a região mais interna da estrela de nêutrons. Teoricamente, a densidade pode ser maior que $2\rho_0$ e o raio desta região pode alcançar alguns quilômetros. Como nesta camada a densidade supera a *densidade nuclear de saturação*, a estrutura e composição da estrela de nêutrons é incerta. Logo, diversas fases exóticas vem sendo sugeridas. Como, por exemplo: condensados de píons ou káons, matéria de quarks compostos principalmente de quark *up* (u), quark *down* (d) e quark *strange* (s).

2.4 Estrelas de Quarks

A natureza nos oferece uma formidável variedade de objetos estelares. Estes objetos podem ser estrelas comuns, anãs brancas, buracos negros e, possivelmente, estrelas de quark (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008).

Dependendo dos detalhes da transição de fase da matéria nuclear, as estrelas de quarks vêm em algumas categorias:

- Estrelas puras de quarks: Teoricamente, quando a matéria no centro da estrela de nêutrons sofre uma exorbitante pressão devido a sua própria gravidade, as partículas de nêutrons se compõem em quarks *up* e *down*. Essa estrela é conhecida como uma estrela de quarks. Os quarks se movem livremente, formando um mar de Fermi¹⁴ no centro da estrela sem estar sujeitos a outras interações com exceção da interação forte. Se a massa da estrela for maior a $1,44 M_{\odot}$, alguns desses quarks *up* e *down* também podem se transformar em quarks *strange*, tornando a estrela numa estrela estranha (*strange star*). Um dos primeiros trabalhos levantando esta hipótese foi apresentada por (WITTEN, 1984). Ele sugeriu que a matéria estranha é o limite final para a matéria hadrônica, isto é, o verdadeiro estado fundamental das interações fortes é um estado de quarks não massivos e sem interagir. Uma característica distintiva da estrela de quarks é que seu raio é menor em comparação com uma estrela de nêutrons. Para modelar as estruturas internas relativísticas das estrelas de nêutrons, devemos considerar equações de estado compreendendo densidades de matéria da ordem 10^{15}g/cm^3 . Dentre os diversos modelos existentes na literatura para abordar estrelas de quarks, destaca-se o modelo de sacola do MIT (CHODOS et al., 1974), que considera as partículas de quarks confinadas em uma sacola. Estudos recentes mostram que a aplicação do modelo de sacola pode ser importante no cálculo de observáveis (raio e massa) para objetos estelares; como por exemplo, os resultados teóricos apresentados em (KOPP et al., 2018), estão em conformidade com observações recentes para o pulsar PSJ1614-2230. Outros resultados relevantes foram encontrados para o pulsar SAX J1808.4-3658 (LINK; EPSTEIN; LATTIMER, 1999) e o pulsar RX J1856-1754 (PONS; WALTER; LATTIMER, 2002), que usando o modelo de sacola encontrou-se que esses pulsares seriam compostos de estrelas estranhas em vez de estrelas de nêutrons.
- Estrelas híbridas possuem um núcleo interno composto de matéria de quarks que se encontra coberto por uma crosta hadrônica. Uma característica deste tipo de estrela é que há uma transição de fase entre a camada hadrônica e de quarks.

¹⁴ Quando um sistema fermiônico é submetido a baixas temperaturas, as partículas deste sistema adquirem uma configuração de mínima energia.

- Estrelas mistas têm uma fase mista de matéria nuclear e matéria de quarks em uma faixa de densidade interna da estrela. A fase mista aparece em sistemas com componentes: nêutrons e prótons ou quarks *up* e *down*. Entretanto, é necessário que a tensão da interface seja suficientemente pequena para que as energias de superfície e de Coulomb das estruturas associadas sejam pequenas. Do contrário, o resultado será uma estrela híbrida.

2.5 Estrelas hadrônicas

A denominação “estrela de nêutrons” apesar de ser atraente, pode ser enganosa, já que acredita-se haver mais ingredientes em sua composição. Em outras palavras, as estrelas de nêutrons são formadas basicamente por hádrons, os quais interagem por meio da força nuclear forte. Portanto o caroço de uma estrela de nêutrons pode conter bárions, prótons, mésons, híperons, kaons e também matéria exótica, como por exemplo partículas tipo tetraquarks¹⁵. De outro lado, para obter as características macroscópicas (raio, massa e densidade) das estrelas de neutrôns, utilizaremos o modelo hadrônico que consiste em considerar as estrelas de neutrôns como um gás de Fermi com interação hadrônica. Este tipo de tratamento será estudado em detalhe no capítulo 3 por meio do modelo quântico relativístico de Walecka.

2.6 Observáveis da estrela de nêutrons

Com a ajuda de observatórios instalados em diferentes partes do mundo, os cientistas conseguem detectar a radiação eletromagnética¹⁶ que sai das estrelas. Assim, o amplo espectro eletromagnético pode nos permitir obter informações sobre propriedades estelares, como massa, raio, temperatura na superfície, etc. As medições de massa e raio podem ser detectadas individualmente ou simultaneamente. Portanto, para medir individualmente a massa de um sistema estelar, os astrônomos precisam observar ondas de rádio de pulsares binários (veja (TAYLOR, 1992; ZHANG et al., 2011)). Além disso, para medir com precisão o raio estelar, podemos observar a radiação de raios-X que sai de pulsares binários (veja (GUILLOT; RUTLEDGE, 2014)). Recentemente, a missão NICER¹⁷ da NASA forneceu medições simultâneas de massa e do raio obtidos pela observação do pulsar PSR J0030+0451 (MILLER et al., 2019). Consequentemente, medições precisas e confiáveis da massa gravitacional M e do raio R de várias estrelas de nêutrons (com massas diferentes) podem fornecer informações valiosas para melhorar os modelos que descrevem estrelas. O conhecimento dos raios estelares é especialmente valioso, porque os modelos atuais de

¹⁵ Este tipo de partícula é composto por um grupo de quatro quarks.

¹⁶ Observacionalmente, as estrelas de nêutrons podem ser observadas nas seguintes faixas energéticas: rádio, luz visível, infravermelho, ultravioleta, raios-X e raios γ (VIDAÑA, 2020).

¹⁷ Esse nome vem do inglês *Neutron Star Interior Composition Explorer*.

estrelas com massa $1,5M_{\odot}$ prevêm valores para o raio estelar desde ≈ 10 km até ≈ 15 km. Nesta seção revisaremos alguns fatos sobre a massa e o raio para as estrelas de nêutrons.

2.6.1 Massa

Conforme discutido na seção 2.1, as massas das estrelas de nêutrons devem estar dentro de um certo intervalo, ou seja, se elas forem demasiado massivas, entrarão em colapso e terminarão como um buraco negro. Pelo contrário, se a estrela progenitora não for demasiado massiva, ela terminará como uma anã branca. O intervalo teórico será determinado pelo modelo que podemos usar para descrever a estrela de nêutrons, e que será depois comparado com os resultados observacionais. Observacionalmente, houve progresso na medição da massa de estrelas de nêutrons com a detecção de ondas gravitacionais emitidas por um sistema binário em 2017. Esse evento trouxe novos dados sobre a massa que corroboraram observações anteriores (ABBOTT et al., 2018).

Uma boa forma para encontrar a massa de uma estrela de nêutrons é monitorar o efeito da sua gravidade sobre outros objetos que encontram-se ao seu redor. Assim, a massa gravitacional pode ser inferida a partir de observações, como por exemplo de: sistemas binários de raios-X¹⁸, pulsares binários¹⁹ (LATTIMER; PRAKASH, 2007), e possivelmente de explosões de supernova (WEBER, 1999). Os valores observados das massas das estrelas de nêutrons fornecem um teste único das previsões teóricas da matéria nuclear e da relatividade geral. Além do mais, as massas observadas fornecem informações sobre os estágios finais da evolução estelar. Determinar as massas de estrelas emissoras de raios-X nos permite aprender algo sobre os núcleos de estrelas que passarão pelos estágios finais da evolução estelar quando estrelas de nêutrons e buracos negros forem formados; no entanto, esse método não é muito preciso.

Até hoje, existe mais de 2800 pulsares conhecidos na Galáxia, a maioria dos quais são detectáveis como pulsares tipo rádio, mas também alguns são observados no espectro de raios-X e um número cada vez maior são detectados no espectro de raios gama (ÖZEL; FREIRE, 2016). Cerca de 90% dos pulsares do tipo rádio são isolados, é por isso que suas massas não podem ser medidas, pois os métodos atuais dependem de um rastreamento preciso dos movimentos orbitais através dos tempos de chegada das pulsações observadas. Os pulsares restantes estão localizados em sistemas binários. Mostramos na figura 4 algumas medições observacionais sobre a distribuição da massa para diversas estrelas de nêutrons.

A figura 4 nos sugere que o valor de massa mais provável para estrelas de nêutrons

¹⁸ Este sistema estelar consiste em duas estrelas que orbitam em torno de seu centro de massa. A estrela mais luminosa é chamada de estrela primária, enquanto a estrela menos luminosa é chamada de estrela secundária. Os raios-X são produzidos quando matéria da estrela secundária (estrela doadora) cai sobre a estrela primária porque o campo gravitacional da estrela primária é bastante forte.

¹⁹ Um pulsar binário é um pulsar que possui um companheiro binário, sendo esse companheiro um pulsar, uma anã branca ou uma estrela de nêutrons.

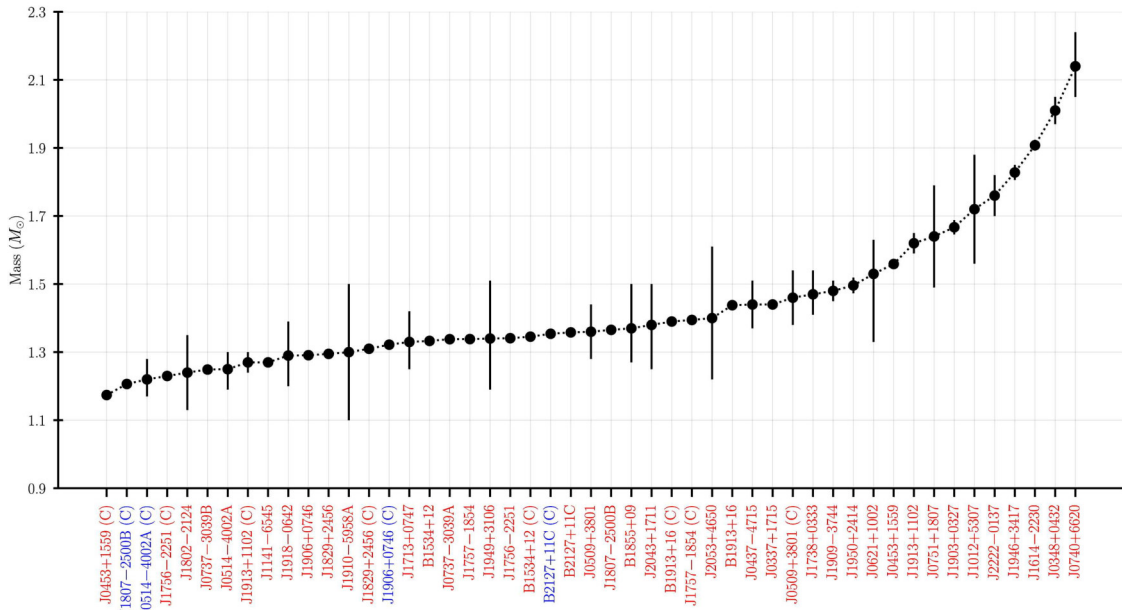


Figura 4 – Distribuição de massa para estrelas de nêutrons. Os nomes em cor vermelho são dados para estrelas de nêutrons já confirmadas. Os nomes em azul indicam a possibilidade da companheira ser uma estrela de nêutrons ou uma enorme anã branca. A letra C entre parênteses indica um companheiro para o pulsar. Fonte: <https://www3.mpifr-bonn.mpg.de/staff/pfreire/>.

é próximo a $1,4M_{\odot}$, e as massas das estrelas de nêutrons estão na faixa de $1,2 \leq M/M_{\odot} \leq 2,3$. Devemos indicar que pulsares como B1913+16, B1534+12, B2127+11C são estrelas de nêutrons binárias. Em cada uma destas estrelas, usando técnicas de pulso temporal (MANCHESTER; TAYLOR, 1977) se conseguiu obter uma boa estimativa da massa total do sistema. Ademais, utilizando medições que combinam o efeito Doppler transversal e o desvio gravitacional para o vermelho se logrou encontrar a massa do pulsar e a massa da sua companheira. É importante mencionar sobre a alta precisão das observações para a massa do pulsar binário PSR B1613+16 (Hulse-Taylor)²⁰, dando o valor de $(1,44 \pm 0,003)M_{\odot}$. Igualmente, novas observações para o pulsar tipo rádio²¹ PSR J1829+2456 (HANIEWICZ et al., 2020) permitiram determinar com bastante precisão tanto as componentes das massas do sistema como o próprio movimento.

Por outro lado, vale ressaltar que, até hoje, as equações de Einstein foram submetidas a diversos testes, que vão desde estudos detalhados em laboratórios até observações de planetas em nosso sistema solar. Porém novas teorias alternativas prevêm que objetos compactos com gravidade extremamente forte, como estrelas de nêutrons, caem de forma um pouco diferente do que objetos de menor massa. Essa diferença seria devido à chamada energia gravitacional do objeto compacto estelar. Em 2011, astrônomos descobriram um

²⁰ Este pulsar foi descoberto por Russell Alan Hulse e Joseph Taylor. A descoberta lhes mereceram o prêmio Nobel em física de 1993.

²¹ Os pulsares tipo rádio (*pulsating radio source*) são geralmente estrelas altamente magnetizadas, e que rotacionam rapidamente.

laboratório natural para testar a teoria de Einstein em condições extremas. Este sistema estelar único, chamado PSR J0337+1715, é um sistema de três estrelas que consiste de um binário (composto por um pulsar tipo rádio de milissegundo e uma anã branca *interna*) com outra anã branca *externa*. Em 2018, um grupo de pesquisadores por meio de observações e cálculos cuidadosos foram capazes de testar a gravidade do sistema usando apenas os pulsos da estrela de nêutrons. Eles descobriram que qualquer diferença de aceleração entre a estrela de nêutrons e a anã branca interna é pequena para ser detectada (ARCHIBALD et al., 2018). Depois de dois anos, utilizando técnicas de pulsos temporais de rádio (*pulse timing*²²) se conseguiu melhorar tanto a precisão e a confiabilidade do teste (VOISIN et al., 2020). Assim o pulsar J0337+1715 joga um papel importante na confirmação da validade do princípio de equivalência descrito pela teoria da relatividade geral.

2.6.2 Raio

Embora mais de 2000 estrelas de nêutrons tenham sido descobertas, há relativamente pouca informação detalhada sobre seus raios e a física dentro delas. As medições do raio de estrelas de nêutrons se desenvolveram significativamente na última década e várias técnicas diferentes foram utilizadas. O raio das estrelas de nêutrons é enormemente difícil de medir, já que este deve ser medido desde distâncias astronômicas. Além disso, como as estrelas de nêutrons são pequenas em tamanho, é bastante difícil observá-las diretamente e medir seu raio. A determinação do raio e da massa da estrela fornecem informações importantes sobre o estado da matéria em altas densidades nucleares. Diferentes modelos teóricos para uma dada equação de estado predizem que para uma massa de $1,4M_{\odot}$, o raio é cerca de 7 – 16 km. No entanto, não existe um método exato para medir o raio da estrela. Observacionalmente, existem duas formas de determinar o raio da estrela de nêutrons. A primeira refere-se ao *desvio gravitacional* para o vermelho (*gravitational redshift*²³), que é uma tarefa extremamente difícil, pois os astrofísicos precisam medir os sinais que saem da superfície estelar (MILLER, 2002). Esse desvio para o vermelho depende da relação massa-raio da estrela, portanto, medir o desvio nas linhas espectrais fornece informações indiretas sobre o raio da estrela de nêutrons. Em particular, para a estrela binária EXO 0748-676, o desvio gravitacional para o vermelho encontrado foi de $\simeq 0,345$ (COTTAM; PAERELS; MENDEZ, 2002). Outro método confiável de medir o raio estelar que é consistente com as observações recentes é através das emissões térmicas da superfície da estrela (LATTIMER; PRAKASH, 2004; GONZÁLEZ-CANIULEF; GUILLOT; REISENEGGER, 2019), permitindo assim medir o tamanho angular ou detectar os efeitos espaço-temporais

²² Essa técnica consiste em fazer medições precisas dos tempos de chegada do pulso.

²³ Os efeitos da gravidade fazem com que as energias observadas das linhas espectrais (da estrela) sejam deslocadas para valores mais baixos, por um fator de $1/(1+z)$, onde z é chamado de desvio para o vermelho da linha de emissão e é definida como $z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0}$, onde λ_0 é o comprimento de onda emitido no sistema de repouso do átomo e λ é o comprimento de onda medido desde um observador localizado longe da fonte.

(da estrela de nêutrons) sob a emissão térmica para extrair a informação do raio. Estas aproximações podem ser divididas em medições espectroscópicas ou medições temporais (ÖZEL; FREIRE, 2016).

2.6.3 Temperatura

Outro observável importante para estrelas de nêutrons é sua temperatura. Quando a estrela de nêutrons é inicialmente formada, sua temperatura é estimada em 10^{11}K (KIRK et al., 2009) que equivale à temperatura dos núcleons²⁴ que a compõem e cuja energia é de aproximadamente 10 MeV por nêutron. Após esta fase, os prótons (no núcleo interno da estrela) absorvem elétrons e produzem neutrinos. Conseqüentemente, a estrela perde energia e se esfria rapidamente porque um grande número de neutrinos carregam energia à medida que escapam dela. Por causa disso, após um dia a temperatura da estrela cai aproximadamente $10^9 - 10^{10}\text{K}$ e continuará a cair rapidamente. Após um período de 10 – 100 anos, a temperatura terá caído até $1,5 - 3 \times 10^6\text{K}$, o que equivale a uma energia de 0,1 keV por nêutron, e o núcleo da estrela estará em um estado isotérmico (KIRK et al., 2009). A estrela de nêutrons permanecerá a uma temperatura da ordem de $10^5 - 10^6\text{K}$ pelos próximos 10^7 anos enquanto esfria lentamente. A temperatura de uma estrela de nêutrons pode ser considerada como zero porque não é alta em comparação com a temperatura da matéria nuclear.

2.7 Explosões de raios-X

Um dos fenômenos mais fascinantes que ocorrem em nossa galáxia são as explosões de raios-X. A primeira vez que essas explosões foram descobertas foi em 1976 (GRINDLAY et al., 1976). Explosões de raios-X são produzidas em sistemas estelares binários. Essas explosões de raios-X se manifestam como rajadas intensas que podem durar de segundos até minutos; e também podem variar de horas até dias. As rajadas de raios-X são classificadas em explosões do tipo I e explosões do tipo II. A diferença entre esses tipos de explosões se deve ao tipo de espectro que emitem. Enquanto o tipo I mostra um espectro de pulsos suaves, o tipo II mostra pulsos abruptos (PARIKH et al., 2013). Devido à proximidade entre as estrelas do sistema binário, o campo gravitacional de uma das estrelas (receptora) captura átomos de hidrogênio da outra estrela (doadora). Este material capturado é acumulado na superfície da estrela receptora. À medida que a matéria de hidrogênio aumenta na estrela receptora, a pressão aumenta na crosta mais interna da estrela, causando instabilidades térmicas que desencadeiam reações adicionais nos processos de fusão termonuclear. Dentre esses processos temos (KEEK et al., 2009): o processo triplo alfa que consiste na transformação de partículas alfa em um núcleo de carbono, e o processo

²⁴ núcleon: nome atribuído aos prótons e nêutrons.

rp que consiste na captura de prótons por núcleos atômicos e convertê-los em elementos mais pesados. Assim, os elementos de hidrogênio são convertidos em hélio por reações nucleares, criando uma fina camada de hélio na superfície da estrela receptora. Quando essa camada de hélio atinge uma massa crítica, ocorrerá uma explosão de raios-X. A energia dissipada da superfície estelar por esse processo varia desde aproximadamente 10^{36} a 10^{38} erg s^{-1} (BERTULANI; KAJINO, 2016).

Existe uma conexão delicada entre as propriedades das explosões de raios-X e o fluxo de acreção. Por um lado, a taxa na qual a massa da estrela de nêutrons aumenta determina a duração, o tempo de recorrência e a energia irradiada das explosões de raios-X, enquanto a geometria de acreção pode influenciar fortemente as propriedades observáveis. Por outro lado, foi proposto que explosões de raios-X potentes podem influenciar o fluxo de acreção. Por exemplo, o pulsar IGR J17062-6143 é uma fonte de raios-X que foi descoberta em 2006, mas permaneceu não classificada até que um telescópio a bordo do satélite *Swift* detectou uma explosão de raios-X em 2012. O objeto IGR J17062-6143 foi identificado inequivocamente como uma estrela binária de nêutrons de baixa massa emitindo raios-X. Novas observações recentes sugerem que são explosões de longa duração (STROHMAYER; KEEK, 2017) e provavelmente foram causadas pela queima de hélio dentro de alguma camada profunda da estrela. As propriedades dessas explosões de raios-X termonucleares de longa duração (dezenas de minutos) são consistentes com o acúmulo de material rico em hélio na superfície da estrela de nêutrons, que poderia ser acomodado pelo acréscimo de uma anã de hélio em um sistema ultracompacto.

3 Equações de estado da matéria estelar

Para representar a matéria dentro de objetos estelares, o conhecimento da equação de estado é importante já que nos permite descrever matematicamente as propriedades da matéria nuclear tanto para regiões com densidade normal (densidade de saturação nuclear¹) como para regiões com densidade alta (densidade maior que a densidade normal). Portanto, para modelar a estrutura das estrelas de nêutrons, precisamos de uma equação de estado que estabeleça uma relação entre a pressão e a densidade da estrela. Neste capítulo, apresentamos duas teorias que servem para descrever a equação de estado tanto para uma estrela composta de matéria hadrônica quanto para uma estrela composta de matéria de quarks. No que se refere a estrela hadrônica, utilizamos a teoria relativística de campo médio. Para o caso de uma estrela de quarks, o modelo de sacola do MIT é mostrado.

3.1 Teoria Relativística de Campo Médio

A teoria relativística de campo médio é uma descrição fenomenológica do núcleo, introduzida por Walecka e também por (BOGUTA; BODMER, 1977). O sucesso dessa teoria se deve ao uso de poucos graus de liberdade (prótons, nêutrons e mésons) para descrever as propriedades tanto de núcleos finitos quanto de matéria nuclear altamente densa. De acordo com essa teoria, os núcleons são tratados como partículas pontuais descritas por espinores de Dirac que interagem através do intercâmbio de partículas chamadas mésons. Isso significa que os núcleons são representados por espinores de Dirac movendo-se em campos de mésons clássicos. Em uma teoria fenomenológica como a teoria do campo médio, o valor das massas, as constantes de acoplamento, e os números quânticos² dos mésons (e núcleons) são fixados para que os dados experimentais da matéria nuclear possam ser determinados (ARIAS; LOZANO, 2008).

Modelos relativísticos de campo médio (RMF) são baseados em interações entre núcleons, onde os campos mesônicos são usados como graus de liberdade, o que permite uma boa descrição da matéria nuclear e núcleos finitos (RING, 1996). Por exemplo, o modelo Walecka-I (WALECKA, 1974), também conhecido como modelo $\sigma - \omega$, modela a força nuclear (campo espinor ψ) trocando mésons sigma escalares neutros (isoescalar σ) e mésons ômega vetoriais neutros (isovetor ω). O méson escalar dá origem a uma força atrativa forte

¹ É o estado que se apresenta nos núcleos atômicos quando sua densidade é constante. Isso, implica que se adicionarmos mais núcleons (prótons e nêutrons) ao núcleo atômico, a densidade dentro do núcleo atômico permanecerá constante, pois a força forte que atua entre os núcleons não permite que os núcleons fiquem muito próximos um do outro.

² Números quânticos como o spin (J), paridade (P) e isospin(T).

(central) e a uma força de spin-órbita na interação núcleon-núcleon, enquanto o méson vetor é responsável por descrever a origem da força repulsiva forte (central) (MACHLEIDT, 1986). Assim, a interação núcleon-núcleon é descrita pelos campos bariônicos, o méson escalar e o méson vetorial. O modelo Walecka-II é uma extensão do Walecka-I com a inclusão do méson (isovetor) ρ . Como prótons e nêutrons diferem praticamente apenas na projeção do isospin, os mésons ρ são incluídos para distinguir entre os diferentes bárions e para dar uma melhor explicação da energia de simetria³. Portanto, os mésons ρ introduzem uma energia adicional que favorece a simetria isospin da matéria nuclear **assimétrica**⁴. Embora os modelos Walecka-I e II possam explicar o mecanismo de saturação da matéria nuclear infinita e prever a interação spin-órbita de forma natural, eles proporcionam um módulo de compressão muito grande na densidade de saturação levando a previsões diferentes daquelas previstas por experimentos. Posteriormente, interações não-lineares meson-meson foram introduzidas por Boguta-Bodmer a fim de superar a deficiência dos modelos Walecka-I e II.

3.1.1 A densidade lagrangiana para matéria hadrônica

Para estudar as propriedades da matéria nuclear com densidade e temperatura finitas, a equação de movimento do sistema nuclear deve ser covariante⁵. Para conseguir isso, a densidade Lagrangiana⁶ deve ser um escalar Lorentziano, pois é construída a partir de funções escalares dos campos e suas derivadas. Portanto, o primeiro passo para calcular qualquer quantidade em RMF é construir a densidade Lagrangiana que resume a dinâmica do sistema, e a partir da qual as equações de movimento podem ser calculadas. Para fazer isso, devemos definir precisamente os tipos de núcleons para os quais desejamos calcular suas propriedades. Para descrever os núcleos atômicos com altos valores de momento, é necessário descrevê-los dentro do domínio da relatividade restrita e que mantenha consistência com a mecânica quântica, pois o modelo deve lidar com distâncias menores que 1fm (fm= 10^{-13} cm).

No modelo de Walecka não-linear I, que é uma teoria quântica de campo relativística renormalizável, a interação forte responsável pelo acoplamento entre núcleons é descrita usando campos de Lorentz para quatro tipos de partículas: os núcleons (próton e nêutron) e dois mésons; um méson σ escalar-isoescalar e um méson ω vetorial-isoescalar. Neste modelo, também usamos termos de auto interação cúbico e quártico. Observa-se que as forças nucleares são repulsivas a curtas distâncias (≈ 0.3 fm) e atrativas a grandes

³ Na física nuclear a energia de simetria mede a variação da energia de ligação quando a proporção de nêutrons para prótons em um sistema nuclear é variada.

⁴ Matéria assimétrica significa que os números de nêutros, prótons e outros bárions são diferentes dentro da matéria nuclear. Assim, uma estrela de nêutrons, que é ocupada principalmente por partículas de nêutrons, é um sistema com matéria nuclear assimétrica.

⁵ Isso quer dizer que a equação deve manter a mesma forma em qualquer sistema de referência inercial.

⁶ Aqui, a densidade Lagrangiana tem a dimensão do comprimento fm⁻⁴.

distancias (até ≈ 1.5 fm).

A ideia básica da aproximação RMF é reduzir as interações quânticas relativísticas ao problema de uma única partícula se movendo dentro de um potencial efetivo gerado por todas as outras partículas. Ou seja, na teoria RMF os bárions são considerados como partículas fermiônicas movendo-se em campos clássicos mesônicos. Os bárions no modelo de Walecka não linear I consistem basicamente em prótons p e nêutrons n . Portanto, para representar a cinemática dos bárions na densidade Lagrangiana, devemos usar campos espinorias ψ como seu campo que possuem uma massa m . O méson σ é representado pela densidade Lagrangiana de Klein-Gordon com massa m_σ . O méson ω pode ser representado pela densidade Lagrangiana de Proca com massa m_ω . O méson vetorial-isovetorial é simbolizado pelo campo ρ .

A inclusão de léptons é importante no estudo da matéria nuclear já que fornece a condição de neutralidade de carga para uma estrela de nêutrons. Assim, vamos considerar que a densidade da matéria hadrônica \mathcal{L}_h será composta pela densidade lagrangiana de Walecka não-linear (incluindo termos de auto-interação escalar e vetorial não linear) e a densidade das partículas leptônicas,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h = & \sum_{i=1}^2 \bar{\psi}_i [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_{\omega i} \omega^\mu - g_{\rho i} \vec{\tau}_i \cdot \vec{\rho}^\mu) - (m_i - g_{\sigma i} \sigma)] \psi_i + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) \\ & - \frac{1}{3!} b (g_\sigma \sigma)^3 - \frac{1}{4!} c (g_\sigma \sigma)^4 - \frac{1}{4} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu - \frac{1}{4} \mathbf{P}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{P}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu \\ & + \sum_l \bar{\psi}_l (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_l) \psi_l, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

onde γ_μ denota as matrizes de Dirac, as constantes b e c parametrizam a forma do potencial de auto-interação para o campo σ . A soma com subíndice l corresponde aos leptóns (eletrón e múon). Enquanto, a soma com subíndice i corresponde à soma sobre os bárions ($i = p, n$) acoplado a três mésons (σ, ω, ρ) com constantes de acoplamento⁷ de Yukawa: $g_{\sigma i}$, $g_{\omega i}$, e $g_{\rho i}$ para um bárion dado de espécie i . Essas constantes são ajustadas para reproduzir dados experimentais para os núcleos atômicos da tabela periódica, e também para gerar propriedades de saturação da matéria nuclear. Assim todos os campos e os acoplamentos (mínimos) da equação (3.1.1) proporcionam interações nucleares apropriadas para descrever a matéria nuclear. A principal característica da densidade Lagrangiana (3.1.1) é que ela reproduz a densidade de saturação e a energia de ligação em saturação. O operador de isospin $\vec{\tau}_i$ é representado pelas matrizes de Pauli que atuam no núcleon i . Os campos tensoriais para os mésons vetoriais que são mostrados na densidade Lagrangiana (3.1.1)

⁷ Estas constantes de acoplamento adimensionais determinam a intensidade do acoplamento méson-núcleon.

são definidos como

$$\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu, \quad (3.1.2)$$

$$\mathbf{P}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu - \sum_i g_{\rho i} (\vec{\rho}_\mu \times \vec{\rho}_\nu). \quad (3.1.3)$$

As setas indicam vetores no espaço isospin e o texto em **negrito** sugere vetor espacial. Os índices gregos μ e ν assumem valores de 0, 1, 2, 3 ou t, x, y, z . Assim, no espaço-tempo, o méson $\vec{\rho}^\mu$ é um quadrivetor e é um vetor no espaço de isospin.

3.1.2 Equações de movimento

Das equações de movimento de Euler-Lagrange (MANDL; SHAW, 2010)

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha q_\beta)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\beta} = 0, \quad (3.1.4)$$

podemos obter as seguintes equações de movimento para todos os campos considerados $q_\beta = \psi_i, \sigma, \omega, \rho$ e leptons (e^-, μ^-).

Em particular, a equação de Dirac para os núcleons é

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_{\omega i} \omega^\mu - g_{\rho i} \vec{\tau}_i \cdot \vec{\rho}^\mu) - m_i^*] \psi_i = 0, \quad (3.1.5)$$

onde o termo $m_i^* = m_i - g_{\sigma i} \sigma$ representa a massa efetiva do bárioon i devido a interação atrativa do campo mesônico σ . Veja que a equação (3.1.5) descreve uma partícula fermiônica, onde sua massa é alterada pelo campo escalar e o quadri-momento é modificado pela presença dos campos vetoriais.

A equação de movimento do tipo Klein-Gordon para o méson σ é dada por

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2) \sigma + \frac{b}{2} (g_\sigma \sigma)^2 + \frac{c}{6} (g_\sigma \sigma)^3 - \sum_i g_{\sigma i} \bar{\psi}_i \psi_i = 0, \quad (3.1.6)$$

e as equações de movimento do tipo Proca massiva para os campos vetoriais são expressas como

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\omega^2) \omega^\nu - \sum_i g_{\omega i} \bar{\psi}_i \gamma^\nu \psi_i = 0, \quad (3.1.7)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\rho^2) \vec{\rho}^\nu - \sum_i g_{\rho i} \bar{\psi}_i \gamma^\nu \vec{\tau}_i \psi_i = 0, \quad (3.1.8)$$

onde o termo $\bar{\psi}_i \psi_i$ na equação (3.1.6) representa a fonte do méson escalar σ . Também, vemos que o méson vetorial ω (equação 3.1.7) apresenta como termo de fonte a corrente bariônica $\bar{\psi}_i \gamma^\nu \psi_i$, e o méson isovetor tem como fonte a corrente isovetorial $\bar{\psi}_i \gamma^\nu \vec{\tau}_i \psi_i$. Finalmente, temos a equação de movimento para os léptons

$$\gamma_\mu (i\partial^\mu - m_l) \psi_l = 0. \quad (3.1.9)$$

As equações de movimento (3.1.5)-(3.1.8) são equações acopladas não lineares difíceis de resolver. Uma teoria que nos permite solucionar este problema é a aproximação de campo médio relativística. Essa teoria nos diz que quando um sistema que é composto de muitos núcleons não interagindo na presença de mésons, as flutuações quânticas dos campos mesônicos podem ser eliminadas, isto significa que os campos mesônicos são tratados como campos clássicos. Do ponto de vista matemático, isso implica que os operadores dos campos mesônicos são substituídos por seus valores esperados no estado fundamental (GLENDENNING, 2012).

Dada a densidade Lagrangiana (3.1.1), as equações de estado para um sistema composto por um fluido isotrópico são descritas pelas seguintes equações (veja apêndice B para mais detalhes)

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{\gamma}{2\pi^2} \sum_i \int_0^{k_{Fi}} k^2 dk \sqrt{k^2 + m_i^{*2}} + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{3!} b (g_\sigma \sigma_0)^3 + \frac{1}{4!} c (g_\sigma \sigma_0)^4 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 \\ + \frac{1}{\pi^2} \sum_l \int_0^{k_{Fl}} k^2 dk \sqrt{k^2 + m_l^{*2}}, \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

$$\begin{aligned} P = \frac{\gamma}{3(2\pi^2)} \sum_i \int \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + m_i^{*2}}} - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{3!} b (g_\sigma \sigma_0)^3 - \frac{1}{4!} c (g_\sigma \sigma_0)^4 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 \\ + \frac{1}{3\pi^2} \sum_l \int_0^{k_{Fl}} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + m_l^{*2}}}. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

3.1.3 Parâmetros

O modelo de Walecka não linear estará completo quando encontrarmos as constantes de acoplamento g_σ , g_ω e g_ρ , e os coeficientes b e c que medem os auto-acoplamentos não lineares. Para determinar essas constantes podem-se utilizar dados experimentais de grandezas, tais como a densidade de saturação⁸, o módulo de compressibilidade⁹, a massa efetiva¹⁰ do núcleo e também a energia de ligação¹¹. Em outros termos, as constantes de acoplamento são fixadas de tal modo que o modelo descreva as propriedades da matéria nuclear em equilíbrio termodinâmico (mais detalhes pode-se encontrar em (POCHA et al., 2002)).

Em nosso trabalho, os parâmetros que utilizamos pertencem a dois tipos de modelos, um do tipo conhecido como GM1 que é tomado do artigo (TODD-RUTEL; PIEKA-

⁸ A densidade de saturação refere-se a densidade típica de núcleons dentro de núcleos (atômicos) médios e pesados.

⁹ Na física nuclear, o módulo de compressibilidade controla as pequenas flutuações da densidade nuclear em torno do ponto de equilíbrio, em outras palavras o módulo de compressibilidade fornece a medição da curvatura de energia (da matéria nuclear) ao redor da densidade de saturação.

¹⁰ É a soma das massas formadas por várias partículas.

¹¹ É a menor quantidade de energia necessária para remover uma partícula de um sistema de partículas

REWICZ, 2005), e um do tipo chamado NL3 cuja parametrização é tomada do trabalho (LALAZISSIS; KÖNIG; RING, 1997). Para estudar a frequência de oscilações não radiais em objetos compactos, escolhemos os modelos GM1 e NL3 porque: 1) são usados atualmente, veja por exemplo (LI et al., 2019; WATANABE; YANASE; YOSHINAGA, 2020). 2) reproduzem bem as propriedades da matéria nuclear e fornecem algumas informações sobre a estrutura da estrela. Portanto, os modelos GM1 e NL3 permitem verificar os parâmetros macroscópicos empíricos (massa e raio). Na tabela 1 apresentamos os valores das constantes de acoplamento para estudar estrelas compostas por matéria hadrônica.

O conjunto de parâmetros NL3 produz EoS mais duras em comparação com outros conjuntos de parâmetros. Do ponto de vista experimental, é visto que o modelo NL3 dá excelentes resultados para (LALAZISSIS; KÖNIG; RING, 1997): 1) estudar as propriedades do estado fundamental de núcleos de terras raras e actinídeos; 2) reproduzir experimentalmente massas com uma precisão de alguns centésimos de keV; 3) verificar experimentalmente raios de carga (charge radii) de núcleos superpesados (JAIN; KUMAR; BHUYAN, 2022) (VRIES; JAGER; VRIES, 1987); 4) confirmar as propriedades de deformação com respeito aos valores empíricos (LALAZISSIS; SHARMA; RING, 1996).

Por outro lado a parametrização GM1 descreve bastante bem as propriedades de saturação da matéria nuclear sujeitas às restrições de massa-raio para as estrelas de nêutrons. Ou seja, a parametrização GM1 pode dar bom valores para vínculos (como a pressão, incompressibilidade), enquanto a parametrização NL3 pode falhar sob esses vínculos.

	GM1	NL3
m_σ [Mev]	512	508,194
m_ω [Mev]	783	782,501
m_ρ [Mev]	770	763
g_σ	8,91	10,217
g_ω	10,61	12,868
g_ρ	8,196	8,948
b	0,002947	0,002055
c	-0,001070	-0,002651

Tabela 1 – Constantes de acoplamento para as parametrizações GM1 e NL3 para equações de estado hadrônico.

3.2 O modelo de sacola do MIT

Em 1964, o físico (GELL-MANN, 1964), e o físico (ZWEIG, 1964) do Caltech introduziram o modelo de quarks para partículas hadrônicas quando estudaram padrões de simetria para vários tipos de partículas instáveis produzidas em colisões de alta energia. O trabalho feito por Gell-Mann para explicar as propriedades magnéticas de prótons e

nêutrons exigia a existência de novas partículas chamadas *quarks*. As partículas elementares dos quarks, cujo tamanho é menor que 10^{-7} fm, foram consideradas como uma construção teórica simples, que trouxe ordem ao enorme número de partículas hadrônicas. No final da década de 1960, experimentos realizados sobre espalhamento inelástico confirmou a existência de quarks dentro dos prótons (KENDALL, 1991). Desde então, a física de partículas tem sido intensamente explorada para explicar não apenas as interações entre os núcleons, mas também para explicar as propriedades dos hádrons¹² e prever novas partículas hadrônicas.

Como um próton é composto de dois quarks *up* e um quark *down*, os físicos pensavam que quando os aceleradores de partículas atingem altas energias, os quarks podem se libertar. Como isso não aconteceu, a crença atual é que os quarks devem estar confinados permanentemente dentro dos hádrons. Durante muitos anos após a proposta por Gell-Mann e Zweig sobre quarks, houve muitas propostas para seu confinamento, em particular um modelo bem sucedido que explica essa propriedade foi o chamado modelo de sacola ou modelo de bolha (CHODOS et al., 1974).

Em 1974, o grupo do MIT¹³, logo após a formulação do QCD¹⁴, apresentou um novo modelo de hádrons que descrevia um sistema composto por quarks e glúons¹⁵ que se movem livremente dentro de uma cavidade (chamado sacola) esférica, e estática. De acordo com o modelo, os quarks são forçados pela pressão externa a se mover somente dentro de uma região do espaço. Dentro desta sacola, os quarks ocupam, similar aos núcleons no modelo nuclear das camadas, orbitais eletrônicos. E assim, a forma da sacola é uma cavidade esférica no estado fundamental. Se considerarmos excitações mais elevadas, formas não esféricas devem ser consideradas, no entanto, isso pode carregar problemas técnicos adicionais.

O modelo de sacola é definido basicamente segundo as seguintes suposições:

- Os hádrons são compostos de campos de quarks e campos de glúons, que estão confinados a uma região finita do espaço sem poder sair.
- A sacola tem uma energia potencial constante B , independente do tempo e da direção. Isso significa que a constante da sacola contribui positivamente para a densidade de energia dentro do sistema de quarks.
- A ação S que caracteriza o sistema da sacola é estacionária com respeito às variações dos campos de quarks e glúons.

¹² Essa palavra vem do grego hadros que significa forte.

¹³ MIT se refere ao Instituto de Tecnologia de Massachusetts.

¹⁴ QCD (Quantum Chromodynamics) é uma teoria de interações fortes, descrita pela simetria SU(3) de cor.

¹⁵ Os glúons são objetos sem massa e sem carga, carregando unicamente carga de cor. Eles são mediadores da interação forte.

- A ação S deve ser estacionária em relação às variações independentes da posição na superfície da sacola, isso evita que os fluxos do campos de cores saiam da região de confinamento.
- Uma pressão constante externa B exercida radialmente equilibra a energia cinética dos quarks dentro da sacola, ou seja, a constante B contribui negativamente para a pressão. A constante da sacola B é tratada como um parâmetro livre do modelo, que pode ser ajustado, por exemplo, ao espectro de hádrons. A partir daqui, pode-se estimar que $B^{\frac{1}{4}} \approx 100 - 200 \text{ MeV}$ para temperaturas críticas $T_c \approx 170 - 200 \text{ MeV}$.
- O modelo da sacola inclui duas propriedades importantes da cromodinâmica quântica (QCD): Dentro da sacola, sempre que os quarks não se aproximem das paredes da sacola, eles podem ser tratados como campos livres, ou seja, os quarks apresentam a propriedade da liberdade assintótica. No entanto, quando os quarks se aproximam da superfície da sacola, eles são refletidos de volta para o interior da sacola e, portanto, ficam confinados dentro da sacola, daí temos a propriedade de confinamento.
- Na ausência de outros campos, por exemplo o campo de glúon, a função de onda espacial do quark obedece à equação de Dirac dentro da sacola.
- A EoS para a sacola do MIT é dada por uma relação linear entre pressão e densidade de energia, ou seja, $\varepsilon = 3p + 4B$.

No apêndice C mostramos uma aplicação da equação de estado da sacola do MIT.

3.2.1 Parâmetros

Para determinar a EoS no caso da sacola do MIT, no artigo (FARHI; JAFFE, 1984), os físicos teóricos descobriram que existe um intervalo possível nos valores de B , que dependem da massa da matéria quark (estranha). Neste intervalo (janela de estabilidade), a matéria estranha é absolutamente estável de acordo com a proposta de (WITTEN, 1984). Para encontrar o limite superior da sacola, a matéria estranha é comparada com o valor da energia de ligação do Fe; ou seja, a matéria estranha deve ser menor que a energia de ligação do Fe. Enquanto o limite inferior é estabelecido comparando a energia dos quarks u e d com relação à energia de ligação do Fe (GONCALVES; LAZZARI, 2020). Por exemplo, no caso de quarks (sem interagir) tem-se $B \simeq 57 - 91 \text{ MeV}$ para $m_s = 0$, e $B \simeq 57 - 75 \text{ MeV}$ para $m_s = 150 \text{ MeV}$. Nesta tese, vamos utilizar os valores para a constante de sacola de 60 MeV fm^{-3} e 90 MeV fm^{-3} . Esses valores de referência se encontram dentro do intervalo no qual o valor da matéria estranha é estável (HAENSEL; POTEKHIN; YAKOVLEV, 2007).

4 Oscilações não radiais anisotrópicas

Em astrofísica, a investigação de estrelas compactas é importante porque são consideradas um excelente laboratório para estudar as propriedades da matéria nuclear altamente densa sob condições extremas. Esses objetos também são de fundamental importância na procura de ondas gravitacionais relacionadas com a estrutura interna das estrelas. Para estudar as propriedades e entender o comportamento de um objeto estelar em altas densidades e altas pressões, devemos realizar certas suposições sobre as propriedades da matéria dentro da estrela. Uma suposição muito usada é que a pressão dentro da estrela deve ser considerada isotrópica. Entretanto, no regime de alta densidade, onde as interações nucleares devem ser tratadas relativisticamente, alguns autores sugerem que a pressão poderia ser anisotrópica porque as pressões radiais e tangenciais são diferentes (TANGPHATI *et al.*, 2021). Dentro de uma estrela de nêutrons, a anisotropia pode ser causada por diversos fatores: (1) transições de fase (SOKOLOV *et al.*, 1980), (2) presença de campos magnéticos (YAZADJIEV, 2012; FOLOMEEV; DZHUNUSHALIEV, 2015), (3) condensação de píons (SAWYER, 1972), (4) rotação lenta de fluidos (HERRERA; SANTOS, 1997; SILVA *et al.*, 2015), (5) mistura de um fluido perfeito e um fluido nulo (LETELIER, 1980), (6) sistemas compostos por campos escalares (GLEISER, 1988), etc.

Uma maneira de obter informações sobre o interior de estrelas compactas é estudando as frequências de oscilação. A detecção de ondas provenientes desses modos de oscilação, nos permitirá identificar com que tipo de objeto estelar estamos lidando. Os primeiros estudos sobre este tema datam da década de 1960 com o trabalho do físico Thorne e seus colaboradores, que foram os primeiros a desenvolver um tratamento para estudar oscilações não radiais de uma estrela com simetria esférica na relatividade geral (THORNE; CAMPOLATTARO, 1967), estabelecendo assim as equações que governam as perturbações de estrelas compactas. Posteriormente, os cientistas (LINDBLOM; DETWEILER, 1983) e (DETWELER; LINDBLOM, 1985) introduziram uma maneira conveniente de integrar numericamente as equações das oscilações. A partir daí, surgiu um grande número de trabalhos teóricos abordando as oscilações de objetos estelares.

Neste capítulo, apresentamos as equações de pulsação não radial utilizando a aproximação de Cowling, e discutimos o método que é usado para resolver numericamente o problema. Em particular, nos concentramos em obter as propriedades globais de estrelas hadrônicas e estranhas, deduzindo as equações não radiais na presença de um fluido anisotrópico.

4.1 Modos de fluido

Os modos de oscilação emitidos por objetos compactos relativísticos representam uma assinatura característica do tipo de frequência estelar. Portanto, suas detecções fornecem informações importantes sobre a existência desses objetos. A avaliação dos modos de oscilação é uma forma de obter informações sobre a estrutura interna de estrelas compactas. Em geral, uma estrela de nêutrons oscilará em diferentes modos e com diferentes periodicidades. Deste modo, esperamos que as estrelas de nêutrons tenham um conjunto de modos associados a perturbações da matéria dentro da estrela.

Quando uma estrela é perturbada, há uma variedade de modos de fluido. Do ponto de vista físico, as oscilações para uma estrela sem rotação e constituída por um fluido ideal, tem os seguintes modos relevantes (SOTANI, 2004):

- O modo fundamental ou também conhecido como modo f , consiste em ondas superficiais não radiais. A força restauradora é o campo gravitacional. Para cada valor assumido pelo índice l da função dos harmônicos esféricos Y_m^l , existe apenas um modo f . De acordo com (COWLING, 1941), as auto-funções do modo f não possuem nodos dentro da estrela.
- Os modos de pressão ou simplesmente chamados modos p , podem ser de tipo radial ($l = 0$) ou não radial, onde a principal força restauradora é fornecida pela pressão. Esses modos são muito semelhantes às ondas sonoras no ar e suas amplitudes são maiores nas regiões próximas à superfície da estrela, enquanto na região central as amplitudes são menores. Os modos p são nomeados da menor para a maior frequência de oscilação, isto é, são p_1, p_2, \dots . Normalmente, o modo p mais baixo assume um valor de alguns kHz. Em geral, as amplitudes das frequências do modo p são maiores que as amplitudes das frequências do modo f .
- Os modos g estão associados à flutuabilidade (ou impulsão)¹ em um campo de gravidade, isto quer dizer que os modos g são restaurados pela gravidade. Estes modos aparecem devido à descontinuidade da densidade ou gradientes de temperatura, mudanças na composição química e outros fatores (FINN, 1987). Os modos g de oscilação são produzidos por um movimento oscilatório transversal e são nomeados da frequência mais alta até a frequência mais baixa, isto é, g_1, g_2, \dots . As amplitudes das frequências do modo g são menores que as amplitudes do modo f .
- Os modos w ou chamados modos gravitacionais (ou modos espaço-temporais) foram determinados pela primeira vez por (KOKKOTAS; SCHUTZ, 1992). Esses modos estão relacionados com as perturbações da métrica do espaço-tempo. Fisicamente,

¹ A impulsão é a força hidrostática exercida por um fluido sob condições hidrostáticas em um corpo que está total ou parcialmente imerso em um fluido.

os modos w surgem diretamente do acoplamento das oscilações do fluido da estrela com as oscilações das ondas gravitacionais da métrica do espaço-tempo. A principal característica dos modos w é o rápido amortecimento das oscilações. Ou seja, a parte imaginária da frequência do modo w é tão grande quanto a frequência da parte real.

4.2 Oscilações nas estrelas

Existe uma grande variedade de modos normais em que as estrelas podem pulsar. Os modos mais simples são os *modos radiais*. Neste tipo de modo, a estrela se expande e contrai radialmente, e a simetria esférica é preservada durante o ciclo de oscilação. Ou seja, a estrela mantém uma forma esférica o tempo todo, mas seu raio muda. No centro da estrela há um nodo e na superfície há um anti-nodo. A descrição matemática do deslocamento realizado pelo fluido dentro da estrela resulta em equações diferenciais do tipo Sturm-Liouville que produzem autosoluções discretas. Assim, obtemos um conjunto discreto de frequências próprias, cada uma associada a um modelo próprio que descreve a distribuição de perturbações dentro da estrela. Além dos movimentos radiais, podem ocorrer movimentos transversais, neste caso falamos de oscilações não radiais. As pulsações em *modos não radiais* causam desvios na simetria esférica, ou seja, pulsações não radiais originam distorções na superfície da estrela. Matematicamente, os modos não radiais não resultam em um problema de autovalor do tipo Sturm-Liouville e por conseguinte surge um grande número de modos de oscilação. Para descrever os modos de oscilação em objetos com simetria esférica, precisamos usar a função matemática dos harmônicos esféricos que são:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad (4.2.1)$$

onde θ é o ângulo polar medido desde o eixo de simetria, ϕ é a longitude, P_l^m é o polinômio associado de Legendre, gerados por

$$P_l^m(\cos\theta) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1 - \cos^2\theta)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d(\cos^m\theta)} (P_l(\cos\theta)), \quad (4.2.2)$$

onde l e m são chamados de grau esférico e número azimutal da oscilação, respectivamente (DEUBNER; GOUGH, 1984) e P_l é o polinômio de Legendre. Como as estrelas são objetos tridimensionais, seus modos de oscilações naturais devem ter nodos em três direções ortogonais. Esses modos são encontrados em camadas radiais concêntricas com r constante, linhas de latitude θ e linhas longitudinais ϕ .

Do ponto de vista matemático, para especificar os modos existem três números quânticos:

- A ordem radial n que representa o número de nodos no interior da estrela que estão ao longo do raio. O primeiro modo $n = 0$ que não possui um nó é chamado de *modo*

fundamental. Um modo com um nó interno, para $n = 1$, é chamado de *primeiro sobretom*, os modos com dois nós internos são chamados de *segundo sobretom*, etc.

- O número quântico l (um número não negativo) representa o número total de linhas nodais localizadas na superfície da esfera. Assim, os modos com $l = 0$ são modos radiais, enquanto aqueles para $l \geq 1$ são chamados modos não radiais. Em particular $l = 1$ são chamados modos dipolos. Para o modo ($l = 1, m = 0$), a estrela é dividida por um nó que encontra-se no equador, com o qual a estrela ficará com um hemisfério em expansão enquanto o outro hemisfério ficará em contração. Aqueles com $l = 2$ são modos que possui dois nós na superfície da estrela e eles são chamados de modos de quadrupolo; neste caso os polos se expandem enquanto o equador se contrai. Os modos com $l = 3$ são chamados modos octupolos, etc.
- A ordem azimutal m do modo, especifica o número de nodos (na superfície da estrela) que se cruzam ao viajar ao redor do equador da estrela². Este número m toma valores desde $-l$ até $+l$ incluindo o valor zero. Valores positivos e negativos correspondem a ondas retrógradas e progressivas³, respectivamente. Quando a ordem azimutal é $m = 0$, as linhas nodais são pequenos círculos em torno do polo; este modo é chamado modo axissimétrico.

4.3 Aproximação de Cowling

Se a massa de uma estrela de nêutrons estiver concentrada perto da região central, então, pequenas variações em sua densidade central não produzirão grandes variações no potencial gravitacional nas regiões externas da estrela. Como consequência, podemos definir que as perturbações nas funções da métrica são iguais a zero. Este método chamado de aproximação newtoniana de Cowling permite separar o espectro das oscilações entre frequências altas e frequências baixas (COWLING, 1941). Embora a aproximação de Cowling apresente desvios na frequência de oscilação bastante altos com respeito a valores de frequência calculados pela relatividade geral, podemos dizer que a aproximação de Cowling dá bons resultados no cálculo dos diferentes modos de oscilação para objetos estelares relativísticos. Por exemplo, no artigo (YOSHIDA; KOJIMA, 1997) se encontrou que a frequência fundamental do modo f pode ter desvios aproximados de 5% para estrelas bastante compactas quando $l = 4$.

Nesta seção, deve ser mencionado que grande parte da retórica empregada no desenvolvimento do formalismo para encontrar as equações de pulsação não radiais relati-

² Fisicamente m denota o número de linhas que passam pelo eixo de rotação da estrela.

³ Onda progressiva é aquela onda que se viaja continuamente em um meio na mesma direção sem a mudança em sua amplitude, ela é chamada também de onda viajante, por exemplo, as ondas transversais e longitudinais são ondas progressivas. Uma onda retrógrada é uma onda que se move na direção oposta ao fluxo no qual a onda está inserida.

vísticas dentro da aproximação de Cowling, valeu-se de um recente trabalho (DONEVA; YAZADJIEV, 2012). Para obter essas equações, as perturbações do fluido são decompostas em harmônicos esféricos e com uma dependência do tempo $e^{i\omega t}$.

Um fluido anisotrópico se refere quando a pressão transversal q (nas direções θ e ϕ) é diferente da pressão radial p . A diferença entre estas pressões é conhecida como anisotropia. Vamos considerar que o núcleo de um objeto estelar está composto por um fluido anisotrópico. A influência da anisotropia é dada através do tensor energia-momentum (HERRERA; BARRETO, 2013). Assim,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + q)u_\mu u_\nu + (p - q)\kappa_\mu \kappa_\nu + qg_{\mu\nu}, \quad (4.3.1)$$

onde u_μ é a quadri-velocidade do fluido, ρ representa a densidade de energia do fluido, e κ_μ é um vetor unitário na direção radial que é ortogonal a u_μ . Essas quantidades devem cumprir as condições seguintes

$$u_\mu u^\mu = -1, \quad \kappa_\mu \kappa^\mu = 1, \quad u^\mu \kappa_\mu = 0. \quad (4.3.2)$$

O campo gravitacional para uma estrela com uma simetria esférica estática na relatividade geral é representada pela seguinte métrica

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4.3.3)$$

As equações de campo de Einstein para esta métrica na presença de matéria são um conjunto de equações diferenciais ordinárias dadas por (TOLMAN, 1939)

$$\left(\frac{2\Lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right)e^{-2\Lambda} + \frac{1}{r^2} = 8\pi\rho, \quad (4.3.4)$$

$$\left(\frac{2\Phi'}{r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{-2\Lambda} - \frac{1}{r^2} = 8\pi p, \quad (4.3.5)$$

$$\left(\Phi'' + \Phi'^2 - \Phi'\Lambda' + \frac{\Phi'}{r} - \frac{\Lambda'}{r}\right)e^{-\Lambda} = 8\pi q. \quad (4.3.6)$$

onde o símbolo " ' " denota diferenciação com respeito a r . Uma combinação adequada das equações (4.3.4)-(4.3.6), nos fornece a seguinte expressão (veja (RYDER, 1996))

$$p' = -(\rho + p)\Phi' - \frac{2\sigma}{r}, \quad (4.3.7)$$

onde $\sigma = p - q$ é chamado fator anisotrópico. Uma integração da equação (4.3.4) nos proporciona $m(r) = \frac{r}{2}(1 - e^{-2\Lambda})$. Substituindo este resultado para $e^{-2\Lambda}$ na equação (4.3.5) encontramos $\Phi' = (m(r) + 4\pi pr^3)/r(r - 2m(r))$. Sendo $m(r)$ a massa que se encontra dentro uma esfera de radio r , isto é

$$m' = 4\pi\rho r^2. \quad (4.3.8)$$

A equação (4.3.7) representa a equação modificada do equilíbrio hidrostático. Esta equação torna-se a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) para um fluido isotrópico

quando $\sigma = 0$. Note que o termo $2\sigma/r$ em (4.3.7) representa uma força adicional devido à pressão anisotrópica, que estará dirigida para fora se $\sigma < 0$, e ela estará dirigida para dentro quando $\sigma > 0$.

Para estudar a estrutura da estrela, vemos que nosso sistema está formado pelas equações (4.3.7)-(4.3.8) com quatro funções (ρ, m, p, σ) que precisam ser determinadas. Para fechar nosso sistema de equações devemos especificar uma equação de estado tanto para a variável p como para a variável σ . Como equação de estado para uma estrela hadrônica utilizaremos a equação de estado descrita na seção 3.1. Entanto, como equação de estado para uma estrela de quarks, vamos considerar a equação de sacola do MIT (ver seção 3.2)

$$\rho = 3p + 4B, \quad (4.3.9)$$

onde B representa a constante de sacola. Além disso, como equação de estado para a anisotropia, vamos considerar (HORVAT; ILJIĆ; MARUNOVIĆ, 2010)

$$\sigma = \mu\lambda p, \quad (4.3.10)$$

onde λ é um parâmetro que controla a intensidade da anisotropia, e $\mu = \frac{2m(r)}{r}$ é a compacidade. Seguindo o trabalho feito por Doneva, vamos considerar que o alcance do parâmetro anisotrópico será $-2 \leq \lambda \leq 2$. O intervalo do parâmetro λ não se baseia em nenhuma razão física fundamental. No entanto, podemos dizer que nosso único objetivo na escolha desses valores é gerar a função anisotrópica que nos permita obter curvas M-R aceitáveis para que possam ser comparadas com observações. Por exemplo, no artigo (PRETEL, 2020), o autor usou $-1 \leq \lambda \leq 1$ para estudar a estabilidade da perturbação radial em estrelas de nêutrons. Outra publicação interessante é encontrada em (NELMES; PIETTE, 2012), onde os autores usaram o cristal Skyrme deformando anisotropicamente para descrever o interior de uma estrela de nêutrons, usando $\lambda = -2$. Para poder resolver as equações (4.3.7)-(4.3.8) devemos impor adequadas condições de contorno no centro da estrela $\rho(r=0) = \rho_0$ e $e^{\Lambda(r=0)} = 1$. Enquanto na superfície da estrela temos que $p(r=R) = 0$.

4.4 Equações perturbadas na aproximação de Cowling

Nesta seção vamos encontrar as equações de perturbação usando a aproximação de Cowling (MCDERMOTT; HORN; SCHOLL, 1983) para estrelas que possuam um fluido anisotrópico. Nesta aproximação as funções da métrica (4.3.3) são mantidas constantes; isto significa que as pequenas perturbações na métrica devem ser iguais a zero. É fundamental dizer que este formalismo reproduz com muita precisão as frequências de oscilação das estrelas.

O sistema que estamos interessados em analisar é uma estrela composta por um fluido anisotrópico. Para estudar as oscilações devemos realizar perturbações nos

elementos que definem dito fluido. Assim, assumimos pequenas perturbações nas seguintes quantidades:

$$\rho \rightarrow \rho + \delta\rho, \quad u^\lambda \rightarrow u^\lambda + \delta u^\lambda, \quad p \rightarrow p + \delta p, \quad q \rightarrow q + \delta q, \quad k^\lambda \rightarrow k^\lambda + \delta k^\lambda. \quad (4.4.1)$$

Inserindo a equação (4.4.1) na equação (4.3.1), obtemos a o tensor de energia momento perturbado

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\mu\nu} = & u_\mu \delta\rho u_\nu + \delta u_\mu \delta\rho u_\nu + u_\mu \rho u_\nu + \delta u_\mu \rho u_\nu + u_\mu \delta\rho \delta u_\nu + u_\mu \rho \delta u_\nu + \kappa_\mu p \kappa_\nu + p \delta\kappa_\mu \kappa_\nu \\ & + \kappa_\mu \delta p \kappa_\nu + \delta\kappa_\mu \delta p \kappa_\nu + \kappa_\mu p \delta\kappa_\nu + \kappa_\mu \delta p \delta\kappa_\nu + q g_{\mu\nu} + \delta q g_{\mu\nu} + q u_\mu u_\nu + u_\mu \delta q u_\nu + q \delta u_\mu u_\nu \\ & + \delta q \delta u_\mu u_\nu + q u_\mu \delta u_\nu + u_\mu \delta q \delta u_\nu - \kappa_\mu q \kappa_\nu - q \delta\kappa_\mu \kappa_\nu - \kappa_\mu \delta q \kappa_\nu - \delta\kappa_\mu \delta q \kappa_\nu - \kappa_\mu q \delta\kappa_\nu \\ & - \kappa_\mu \delta q \delta\kappa_\nu. \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Suprimindo termos de segunda ordem nas perturbações, temos

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\mu\nu} = & u_\mu \delta\rho u_\nu + u_\mu \rho u_\nu + \delta u_\mu \rho u_\nu + u_\mu \rho \delta u_\nu + \kappa_\mu p \kappa_\nu + p \delta\kappa_\mu \kappa_\nu + \kappa_\mu \delta p \kappa_\nu + \kappa_\mu p \delta\kappa_\nu \\ & + q g_{\mu\nu} + \delta q g_{\mu\nu} + q u_\mu u_\nu + u_\mu \delta q u_\nu + q \delta u_\mu u_\nu + q u_\mu \delta u_\nu - \kappa_\mu q \kappa_\nu - q \delta\kappa_\mu \kappa_\nu \\ & - \kappa_\mu \delta q \kappa_\nu - \kappa_\mu q \delta\kappa_\nu. \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

A diferença entre a variação do tensor energia momento perturbado $\tilde{T}_{\mu\nu}$ e o tensor energia momento sem perturbar $T_{\mu\nu}$ nos permite definir a variação do tensor energia momento $\delta T_{\mu\nu}$. Assim,

$$\begin{aligned} \delta T_{\mu\nu} = & (\delta\rho + \delta q) u_\mu u_\nu + (\rho + q)(u_\mu \delta u_\nu + \delta u_\mu u_\nu) + \delta q g_{\mu\nu} + \delta\sigma \delta\kappa_\nu \kappa_\mu \\ & + \sigma \delta\kappa_\nu \kappa_\mu + \sigma \kappa_\nu \delta\kappa_\mu. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

De imediato invocamos a conservação para a variação do tensor energia momento,

$$\begin{aligned} \nabla^\mu (\delta T_{\mu\nu}) = & u_\mu u_\nu \nabla^\mu (\delta\rho + \delta q) + (\delta\rho + \delta q) \nabla^\mu (u_\mu u_\nu) + (u_\mu \delta u_\nu + u_\nu \delta u_\mu) \nabla^\mu (\rho + q) \\ & + (\rho + q) \nabla^\mu (u_\nu \delta u_\mu + \delta u_\nu u_\mu) + g_{\mu\nu} \nabla^\mu (\delta q) + \nabla^\mu (\delta(\sigma \kappa_\mu \kappa_\nu)) = 0. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Segundo a relatividade geral, a componente temporal da equação (4.4.5) nos deve levar a obter a lei de conservação da energia. Para cumprir essa tarefa, podemos usar a técnica de projeção (ANDERSSON; COMER, 2007). Esse procedimento consiste em multiplicar a expressão (4.4.5) pela quadri-velocidade u^ν :

$$\begin{aligned} u^\nu \nabla^\mu (\delta T_{\mu\nu}) = & u^\nu u_\mu u_\nu \nabla^\mu (\delta\rho + \delta q) + u^\nu (\delta\rho + \delta q) \nabla^\mu (u_\mu u_\nu) + u^\nu (u_\mu \delta u_\nu + u_\nu \delta u_\mu) \nabla^\mu (\rho + q) \\ & + u^\nu (\rho + q) \nabla^\mu (u_\nu \delta u_\mu + \delta u_\nu u_\mu) + u^\nu g_{\mu\nu} \nabla^\mu (\delta q) + u^\nu \nabla^\mu (\delta(\sigma \kappa_\mu \kappa_\nu)). \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Expandindo os termos desta última equação, obtemos

$$\begin{aligned} & - u_0 \nabla^0 (\delta\rho) - u_i \nabla^i (\delta\rho) + u^\nu (\delta\rho + \delta q) \nabla^0 (u_\nu u_0) + u^\nu (\delta\rho + \delta q) \nabla^i (u_\nu u_i) \\ & + (u^\nu u_0 \delta u_\nu - \delta u_0) \nabla^0 (\rho + q) + (u^\nu u_i \delta u_\nu - \delta u_i) \nabla^i (\rho + q) - (\rho + q) \nabla^0 (\delta u_0) \\ & - (\rho + q) \nabla^i (\delta u_i) + (\rho + q) u_\mu \nabla^\mu u_0 \delta u^0 + (\rho + q) u_\mu \nabla^\mu u_i \delta u^i - \nabla_i (\sigma \delta u^i) = 0. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Utilizando $u_i = 0$, e a definição da derivada covariante $\nabla_\mu a^\nu = \partial_\mu a^\nu + \Gamma_{\alpha\mu}^\nu a^\alpha$, a equação (4.4.7) torna-se

$$-u^0 \partial_0 \delta\rho - \delta u^i \partial_i (\rho + q) (\partial_i \delta u^i + \Gamma_{i\alpha}^i \delta u^\alpha) - (\rho + q) \Phi' \delta u^1 - \nabla_i (\sigma \delta u^i) = 0, \quad (4.4.8)$$

onde $\Gamma_{i\alpha}^i$ representam os símbolos de Christoffel⁴. Considerando que o deslocamento ξ^i para um elemento de fluido é definido como

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial t} = \frac{\delta u^i}{u^0}, \quad (4.4.9)$$

onde o índice $i = 1, 2, 3 = r, \theta, \phi$. Substituindo a equação (4.4.9) na equação (4.4.8), encontramos

$$\begin{aligned} \delta\rho = & -\xi^i \partial_i (\rho + q) - (\rho + q) \frac{1}{u^0} \partial_i (\xi^i u^0) - (\rho + q) \frac{\partial_i (\sqrt{-g})}{\sqrt{-g}} \xi^i - (\rho + q) \Phi' \xi^1 - \partial_i (\sigma \xi^i) \\ & - \sigma \xi^i \frac{1}{u^0} \partial_i (u^0) - \sigma \xi^i \frac{\partial_i \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}. \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Quando uma estrela com simetria esférica é perturbada, cada elemento sofre um deslocamento com respeito a sua posição de equilíbrio. As amplitudes destes deslocamentos ($\xi_r, \xi_\theta, \xi_\phi$) em coordenadas esféricas⁵, são representados por (JACKSON, 1999)

$$\xi^r = e^{-\Lambda} \frac{A(r, t)}{r^2} Y_{lm}, \quad (4.4.11)$$

$$\xi^\theta = -\frac{B(r, t)}{r^2} \partial_\theta Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (4.4.12)$$

$$\xi^\phi = -\frac{B(r, t)}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (4.4.13)$$

onde $Y_l^m(\theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos definidos na equação (4.2.1). As funções $A(r)$ e $B(r)$ são amplitudes das componentes de deslocamento radial e transversal do elemento de fluido, respectivamente. Além disso, podemos considerar que as funções $A(r, t)$ e $B(r, t)$ tem uma dependência temporal harmônica, isto quer dizer que podemos escrever $A(r, t) = A(r) e^{i\omega t}$ e $B(r, t) = B(r) e^{i\omega t}$, sendo ω a frequência de oscilação da estrela. Substituindo as equações de deslocamentos (4.4.11), (4.4.12) e (4.4.13) na equação da variação da densidade de energia (4.4.10), temos que

$$\begin{aligned} \delta\rho = & -(\rho + q) e^{-\Lambda} Y_{lm} \frac{A'}{r^2} - e^{-\Lambda} \frac{A}{r^2} (\rho' + q') - e^{-\Lambda} \frac{A}{r^2} Y_{lm} \sigma' - \sigma e^{-\Lambda} Y_{lm} \frac{A'}{r^2} \\ & - (\rho + q) \frac{e^{-\Lambda}}{r^2} A Y_{lm} \Phi' + (\sigma - \rho - p) \frac{l(l+1)}{r^2} B Y_{lm}. \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

⁴ Ver apêndice D.

⁵ Para considerar cenários mais realistas, precisamos usar uma forma generalizada para o vetor deslocamento como mostrado em (HERBRIK; KOKKOTAS, 2017). Por exemplo, em (ASAI; LEE; YOSHIDA, 2016), para estudar estrelas de nêutrons magnetizadas, os autores usaram tipos de deslocamentos diferentes dos usados neste capítulo.

Imediatamente precisamos encontrar a variação da pressão, para tal fim devemos utilizar a equação de estado

$$\delta p = \frac{dp}{d\rho} \delta \rho. \quad (4.4.15)$$

Inserindo a expressão dada por (4.4.14) na equação (4.4.15), facilmente obtemos

$$\begin{aligned} \delta p = \frac{dp}{d\rho} \left(-(\rho + q + \sigma) e^{-\Lambda} Y_{lm} \frac{A'}{r^2} - e^{-\Lambda} \frac{A}{r^2} (\rho' + q' + \sigma') - (\rho + p) \frac{e^{-\Lambda}}{r^2} A Y_{lm} \Phi' \right. \\ \left. + (\sigma - \rho - p) \frac{l(l+1)}{r^2} B Y_{lm} \right). \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

Em seguida necessitamos encontrar as equações dinâmicas das variáveis A e B . Para esse fim, podemos aproveitar o resultado da equação (4.4.16) para reescrevê-la da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\rho} (\rho + q + \sigma) e^{-\Lambda} \frac{A'}{r^2} = -\frac{\delta p}{Y_{lm}} - \frac{dp}{d\rho} e^{-\Lambda} \frac{A}{r^2} (\rho' + q' + \sigma') - \frac{dp}{d\rho} (\rho + p) \frac{e^{-\Lambda}}{r^2} A \Phi' \\ - \frac{dp}{d\rho} (\rho + p - \sigma) \frac{l(l+1)}{r^2} B. \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

Com auxílio da equação (4.3.7), a equação (4.4.17) resulta em

$$A' = -\frac{\delta p}{Y_{lm}} \frac{r^2}{\rho + q + \sigma} \frac{d\rho}{dp} e^{\Lambda} + A \Phi' \frac{\rho'}{p'} + 2A \frac{\sigma}{r(\rho + p)} \left(1 + \frac{\rho'}{p'}\right) - \frac{\rho + p - \sigma}{\rho + p} l(l+1) e^{\Lambda} B. \quad (4.4.18)$$

Agora devemos encontrar a equação de perturbação para a função B , para isto, devemos projetar a variação do tensor de conservação energia momento na direção ortogonal da quadri-velocidade, isto é, a equação (4.4.5) deve ser multiplicada pelo operador de projeção $\mathcal{P}_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu + u^\nu u_\mu$. Matematicamente essa projeção implica contrair um índice da variação do tensor (4.4.5). Portanto, encontramos

$$\begin{aligned} (\delta_\mu^\nu + u^\nu u_\mu) u_\lambda u_\nu \nabla^\lambda (\delta \rho + \delta q) + (\delta_\mu^\nu + u^\nu u_\mu) (\delta \rho + \delta q) \nabla^\lambda (u_\lambda u_\nu) + (\delta_\mu^\nu + u^\nu u_\mu) (u_\lambda \delta u_\nu + u_\nu \delta u_\lambda) \times \\ \nabla^\lambda (\rho + q) + (\delta_\mu^\nu + u^\nu u_\mu) (\rho + q) \nabla^\lambda (u_\nu \delta u_\lambda + \delta u_\nu u_\lambda) + (\delta_\mu^\nu + u^\nu u_\mu) g_{\lambda\nu} \nabla^\lambda (\delta q) \\ + (\delta_\mu^\nu + u^\nu u_\mu) \nabla^\lambda (\delta(\sigma \kappa_\lambda \kappa_\nu)) = 0. \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

A equação acima representa a conservação da variação do momento. Simplificando alguns termos, encontramos

$$\begin{aligned} (\delta \rho + \delta q) u_\nu \nabla^\nu (u_\mu) + (\rho + q) u^\nu (\nabla_\nu (\delta u_\mu) - \nabla_\mu (\delta u_\nu)) + \nabla_\mu \delta q + u_\mu u^\nu \nabla_\nu (\delta q) + \mathcal{P}_\mu^\nu (\partial_\alpha \delta \sigma \kappa^\alpha \kappa_\nu) \\ + \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha \delta \sigma \kappa^\nu \kappa_\mu - \Gamma_{\alpha\mu}^\nu \delta \sigma \kappa^\alpha \kappa_\nu + \partial_\alpha (\sigma \delta \kappa^\alpha \kappa_\mu) + \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha \sigma \delta \kappa^\nu \kappa_\mu - \Gamma_{\alpha\mu}^\nu \sigma \delta \kappa^\alpha \kappa_\nu + \partial_\alpha (\sigma^\alpha \delta \kappa_\mu) \\ + \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha \sigma \kappa^\nu \delta \kappa_\mu - \Gamma_{\alpha\mu}^\nu \sigma \kappa^\alpha \delta \kappa_\nu = 0. \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

Considerando a convenção de soma de Einstein para os índices ν e α na equação acima, temos μ como índice livre. Quando fazemos $\mu = 0$, a equação (4.4.20) é trivialmente

satisfeita. Para $\mu = 1$, a equação (4.4.20) resulta em

$$\begin{aligned} (\delta\rho + \delta p)\Phi' + (\rho + p)\frac{e^{\Lambda-2\Phi}}{r^2}\partial_t^2 A(r, t)Y_{lm} + \partial_r(\delta p) + \frac{2}{r}\delta\sigma &= 0 \\ \frac{1}{Y_{lm}}(\delta\rho + \delta p)\Phi' - (\rho + p)\frac{e^{\Lambda-2\Phi}}{r^2}\omega^2 A e^{i\omega t} + \frac{1}{Y_{lm}}\partial_r(\delta p) + \frac{2}{r}\frac{1}{Y_{lm}}\delta\sigma &= 0. \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

Fazendo $\mu = 2$ na equação (4.4.20), obtemos

$$(\rho + p - \sigma)Y_{lm}e^{-2\Phi}\omega^2 B e^{i\omega t} - \delta p + \delta\sigma = 0. \quad (4.4.22)$$

Diferenciando a equação (4.4.22) com respeito à variável r e somando-a com a equação (4.4.19), encontramos que

$$\begin{aligned} (\rho' + (\rho + p)\Phi' + \frac{2\sigma}{r} + \sigma' + 2(\rho + p - \sigma)\Phi')e^{-2\Phi}\omega^2 B e^{i\omega t} - \omega^2(\rho + p - \sigma)e^{-2\Phi}B'e^{i\omega t} \\ - \frac{\partial_r\delta\sigma}{Y_{lm}} + \frac{2}{r}\frac{1}{Y_{lm}}\delta\sigma = 0 \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

Arranjando termos e utilizando a equação da pressão com anisotropia (4.3.7), obtemos

$$\begin{aligned} B' = 2B\Phi' - \frac{1}{\omega^2(\rho + p - \sigma)e^{-2\Phi}e^{i\omega t}}\partial_r\left(\frac{1}{Y_{lm}}\frac{\partial\sigma}{\partial p}\delta p\right) - \frac{\rho + p}{\rho + p - \sigma}\frac{e^\Lambda}{r^2}A + \frac{(\delta\rho + \delta p)\Phi'}{\omega^2(\rho + p - \sigma)e^{-2\Phi}e^{i\omega t}Y_{lm}} \\ + \frac{2}{r\omega^2(\rho + p - \sigma)e^{-2\Phi}e^{i\omega t}}\frac{1}{Y_{lm}}\delta\sigma + \left[\frac{\sigma' - \rho' + (\rho + p)\Phi'}{\rho + p - \sigma} + \frac{1}{\rho + p - \sigma}\frac{2\sigma}{r}\right]B. \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

Substituindo a equação (4.4.22), conseguimos encontrar a equação dinâmica para a função B dada por

$$\begin{aligned} B' = 2B\Phi' + \frac{\rho + p}{\rho + p - \sigma}\left(1 - \frac{\partial\sigma}{\partial p}\right)\frac{e^\Lambda}{r^2}A + \frac{(\delta\rho + \delta p)\Phi' + \frac{2}{r}\delta\sigma}{\omega^2(\rho + p - \sigma)e^{-2\Phi}e^{i\omega t}Y_{lm}}\frac{1}{Y_{lm}}\left(1 - \frac{\partial\sigma}{\partial p}\right) \\ + \left[\frac{\sigma' - \rho' + (\rho + p)\Phi' + \frac{2\sigma}{r}}{\rho + p - \sigma} + \left(1 - \frac{\partial\sigma}{\partial p}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial p^2}p' + \frac{\partial^2\sigma}{\partial p\partial\mu}\mu'\right)\right]B \\ = 2B\Phi' + \frac{\rho + p}{\rho + p - \sigma}\left(1 - \frac{\partial\sigma}{\partial p}\right)\frac{e^\Lambda}{r^2}A - \left(\left(\frac{d\rho}{dp} + 1\right)\Phi' + \frac{2}{r}\frac{\partial\sigma}{\partial p}\right)B \\ + \left[\frac{\sigma' - \rho' + (\rho + p)\Phi' + \frac{2\sigma}{r}}{\rho + p - \sigma} + \left(1 - \frac{\partial\sigma}{\partial p}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial p^2}p' + \frac{\partial^2\sigma}{\partial p\partial\mu}\mu'\right)\right]B. \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

Para encontrar uma expressão mais compacta para a equação dinâmica (4.4.17), podemos utilizar a equação (4.4.22). Logo

$$A' = \frac{d\rho}{dp}\left(1 - \frac{\partial\sigma}{\partial p}\right)\frac{\rho + p - \sigma}{\rho + p}\omega^2 r^2 e^{\Lambda-2\Phi}B + A\Phi'\frac{\rho'}{p'} + 2A\frac{\sigma}{r(\rho + p)}\left(1 + \frac{\rho'}{p'}\right) - \frac{\rho + p - \sigma}{\rho + p}l(l+1)e^{-\Phi}B. \quad (4.4.26)$$

As equações (4.4.25) e (4.4.26) representam um sistema de equações diferenciais de primeira ordem para as variáveis B e A , respectivamente. Estas equações fornecem uma descrição completa do problema de perturbação de uma estrela cuja matéria está formada por

um fluido anisotrópico. É importante destacar que quando $\sigma = 0$, as equações (4.4.25) e (4.4.26) tornam-se as equações de oscilação de um fluido isotrópico (SOTANI et al., 2011). Portanto, as equações perturbadas para A e B constituem um sistema de equações modificadas de Sotani devido ao fator anisotrópico. A integração das equações (4.4.25) e (4.4.26) deve ser feita de $r = 0$ até a superfície da estrela $r = R$. Quando $r \rightarrow 0$, temos que $A(r) = Cr^{l+1}$ e $B(r) = -Cr^l/l$, onde C é uma constante. Além disso, a condição de contorno na superfície da estrela ($\delta p = 0$), nos leva a obter

$$\frac{\rho + p - \sigma}{\rho + p} \left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial p}\right)^{-1} \omega^2 r^2 e^{\Lambda - 2\Phi} B + \left(\Phi' + \frac{2}{r} \frac{\sigma}{\rho + p}\right) A = 0. \quad (4.4.27)$$

4.5 Métodos numéricos

Com o propósito de resolver numericamente as equações de oscilação, procedemos a integrar numericamente as equações da estrutura estelar (4.3.7) e (4.3.8) usando como *input* a equação de estado. Como passo seguinte, obtemos os coeficientes das equações de oscilação para uma dada pressão central. Em seguida, devemos utilizar o método *shooting* (ver apêndice E para mais detalhes). Um algoritmo sobre esse método é encontrado no livro (PRESS et al., 1996). O primeiro passo é integrar numericamente a equação (4.4.24) para um valor de teste inicial ω^2 . Depois devemos impor condições de contorno no centro da estrela para as funções $A(r = 0)$ e $B(r = 0)$. Isto permitirá integrar as equações desde o centro da estrela até ajustar a condição de contorno na superfície da estrela. Após cada integração, o valor de teste de ω^2 é corrigido por meio do método iterativo de Newton-Raphson a fim de melhorar a correspondência da condição de contorno da superfície até que a precisão desejada seja alcançada. Os valores discretos de ω^2 para o qual equação (4.4.24) é satisfeita (na superfície) são as frequências próprias da estrela. Nosso código foi capaz de reproduzir os resultados de (DONEVA; YAZADJIEV, 2012).

4.6 Resultados

Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos com o nosso código, onde para o estudo da matéria hadrônica, usamos o modelo de Walecka (ver seção 3.1) e para a matéria de quark usamos o modelo MIT (ver seção 3.2). Por razões de comparação também mostramos nas figuras o caso das estrelas isotrópicas, que correspondem às linhas pretas cheias ($\lambda = 0$).

4.6.1 Estrelas de quarks

O perfil da frequência do modo fundamental f em função da massa estelar M é mostrado na figura 5. Notamos que quando o valor absoluto do parâmetro λ muda, há um efeito considerável em estrelas anisotrópicas quando comparado com as curvas

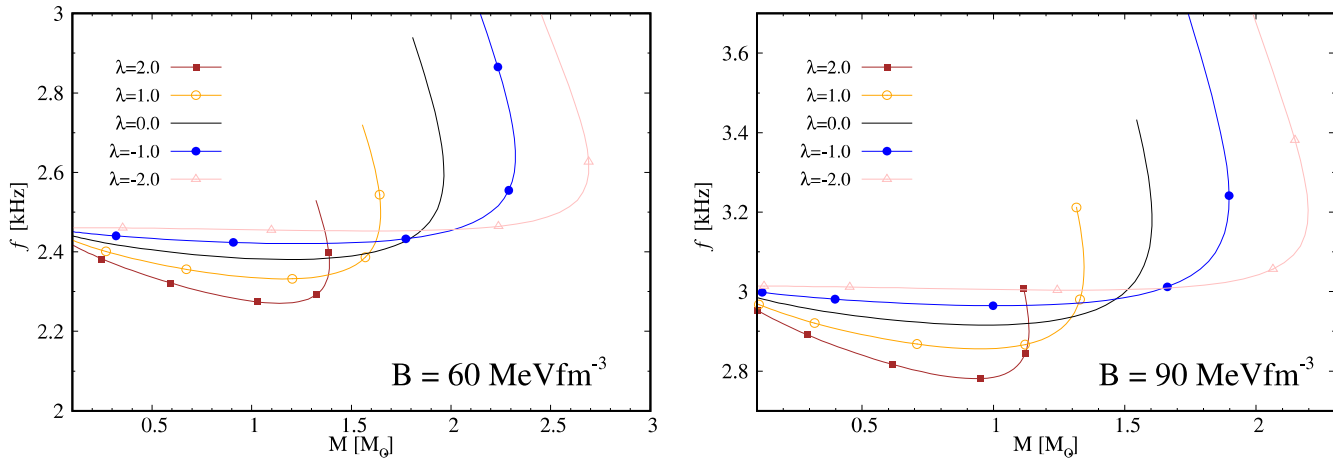


Figura 5 – A frequência f em função da massa M com a constante de sacola $B = 60 \text{ MeVfm}^{-3}$ (painel esquerdo). O mesmo diagrama, mas com $B = 90 \text{ MeVfm}^{-3}$ no painel direito. Os resultados são apresentados para valores distintos do parâmetro λ .

correspondentes a estrelas isotrópicas (ou seja $\lambda = 0$). Assim, as frequências podem ser maiores ou menores do que no caso das estrelas estranhas isotrópicas se λ for negativo ou positivo. Por exemplo, para a constante de sacola $B = 60 \text{ MeVfm}^{-3}$, vemos que as frequências do modo fundamental f variam de 2,3-3,0 kHz. Para o caso de valores positivos do parâmetro λ , estrelas estranhas anisotrópicas possuem baixas frequências que diminuem com a massa até atingir um valor mínimo. Para o caso de valores negativos do parâmetro $\lambda = -1, -2$, as frequências se comportam quase constantes para massas menores a $1,6 M_{\odot}$ e $2,2 M_{\odot}$ respectivamente. Embora as frequências anisotrópicas sofram grandes mudanças devido ao parâmetro λ , as frequências são inferiores a 3,6 kHz.

Na figura 6 ilustramos a relação massa-raio para estrelas anisotrópicas usando o modelo de sacola do MIT. Para elaborar nossos resultados, empregamos dois valores diferentes para a constante de sacola: $B = 60 \text{ MeVfm}^{-3}$ (painel esquerdo) e $B = 90 \text{ MeVfm}^{-3}$ (painel direito). A partir da figura, podemos apreciar como o perfil de equilíbrio de estrelas estranhas é afetado devido à anisotropia. Por exemplo, quando $B = 60 \text{ MeVfm}^{-3}$, a anisotropia tem um efeito muito maior para massas acima de $1,0 M_{\odot}$. Percebemos que quando o parâmetro λ muda, os valores para a massa máxima mudam perceptivelmente. Resultados semelhantes podem ser observados para o caso $B = 90 \text{ MeVfm}^{-3}$.

As frequências de oscilação do modo fundamental f em função da raiz quadrada da densidade média são ilustradas na figura 7 para alguns valores do parâmetro λ . No painel esquerdo, a figura mostra que para valores pequenos na densidade média, existem pequenas mudanças nas frequências das estrelas estranhas quando λ assume valores negativos em comparação com as frequências para estrelas estranhas isotrópicas ($\lambda = 0$). Também podemos ver que existem mudanças significativas nas frequências das estrelas estranhas quando λ assume valores positivos em comparação com as frequências para $\lambda = 0$. No entanto, o efeito da anisotropia na frequência torna-se perceptível para qualquer valor

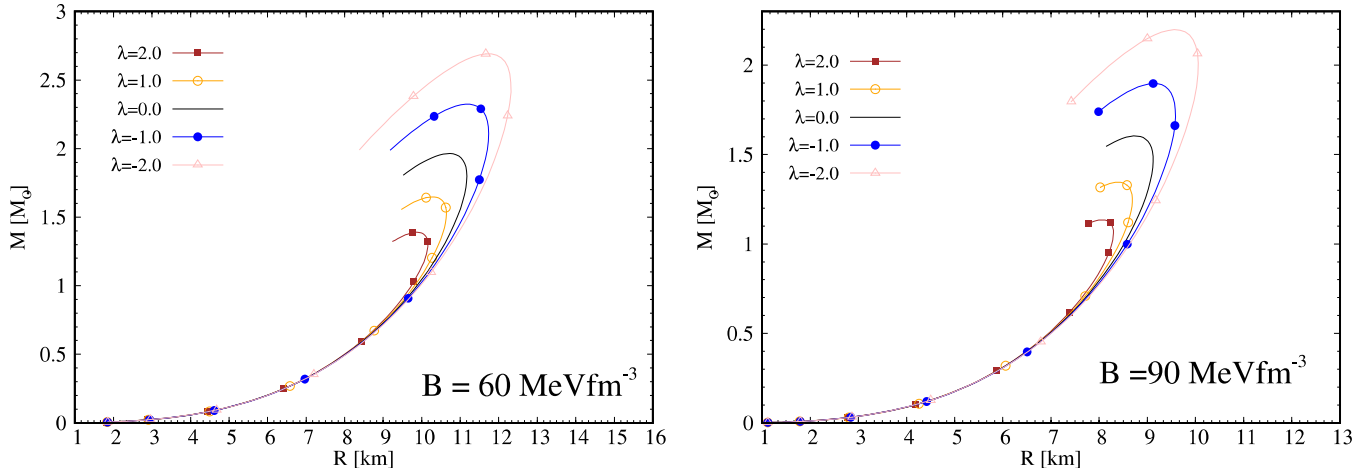


Figura 6 – A massa para estrelas de quarks em função do raio com $B = 60 \text{ MeVfm}^{-3}$ (painel esquerdo) e $B = 90 \text{ MeVfm}^{-3}$ (painel direito) para diferentes valores do parâmetro λ .

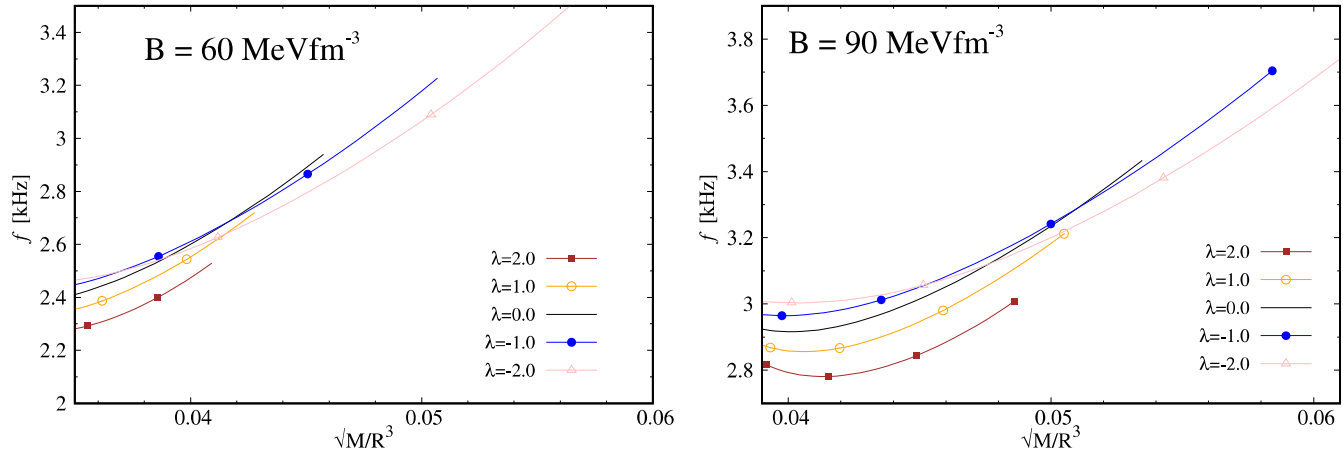


Figura 7 – Estrelas de quarks construídas com $B = 60 \text{ MeVfm}^{-3}$ (esquerda) e $B = 90 \text{ MeVfm}^{-3}$ (direita), a frequência do modo f é mostrada como uma função da raiz quadrada da densidade média $\sqrt{M/R^3}$ para alguns valores de λ .

grande da densidade média e para qualquer valor negativo de λ . No painel direito, a situação do desvio das frequências do modo fundamental da curva de frequência da estrela estranha isotrópica é melhor visualizada quando a constante de sacola é aumentada, para qualquer valor do parâmetro λ e para qualquer intervalo da densidade média.

Na figura 8, a massa M das estrelas de quarks anisotrópicas é representada como uma função da densidade de energia central ρ_c para valores diferentes do parâmetro λ . Por exemplo, para a constante de sacola $B = 60 \text{ MeVfm}^{-3}$, as massas das estrelas de quarks anisotrópicas não mudam consideravelmente quando λ é alterado para densidades de energia central abaixo de 300 MeVfm^{-3} . A massa estelar muda significativamente para densidades de energia central acima de $\approx 300 \text{ MeVfm}^{-3}$ para qualquer λ . Resultados similares são observados para a constante $B = 90 \text{ MeVfm}^{-3}$.

A frequência normalizada do modo fundamental $\omega\sqrt{R^3/M}$ em função da massa

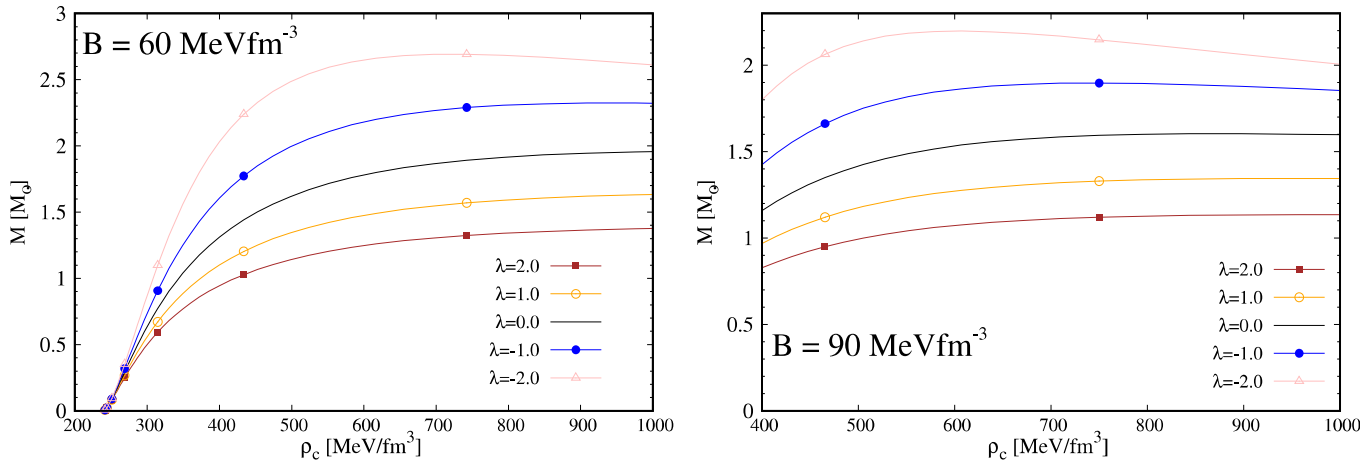


Figura 8 – Relação entre massa total e densidade de energia central com $B = 60 \text{ MeVfm}^{-3}$ (painel esquerdo) e $B = 90 \text{ MeVfm}^{-3}$ (painel direito) para vários valores do parâmetro λ .

estelar é mostrada na figura 9, onde notamos que as frequências mudam consideravelmente quando aumentamos o valor absoluto de λ . Além disso, podemos dizer que para um valor fixo de λ e considerando massas maiores, qualquer curva anisotrópica é muito diferente do caso isotrópico. Conseqüentemente, as frequências de oscilação para estrelas massivas podem se desviar muito do caso da estrela estranha isotrópica sempre que $|\lambda|$ assuma grandes valores. Por outro lado, comparando a frequência e a frequência normalizada, podemos notar que o valor da frequência máxima é $\approx 3,6 \text{ kHz}$, enquanto a frequência máxima normalizada é $\omega \approx 1,4 \text{ kHz}$. Além disso, tanto a frequência fundamental do modo f quanto a frequência normalizada diminuem à medida que a massa total aumenta para qualquer valor de λ . Em seguida, elas atingem um ponto mínimo e a estrela se torna instável. Enquanto as frequências anisotrópicas tem uma ligeira inclinação, as frequências normalizadas anisotrópicas tem uma inclinação acentuada para qualquer λ . Outra observação interessante é que aqui as curvas não se sobrepõem.

Na relatividade geral, uma grandeza importante que deve ser analisada é o desvio para o vermelho gravitacional da superfície de uma estrela massiva. O desvio gravitacional para o vermelho, previsto pela relatividade geral de Einstein, expressa que a luz emitida por um objeto seja deslocada para comprimentos de onda mais longos do espectro eletromagnético. Mostramos na figura 10 para diferentes valores de λ , o comportamento do desvio para o vermelho gravitacional em função da massa total M . A partir do painel esquerdo, para $B = 60 \text{ MeVfm}^{-3}$, observamos que o desvio gravitacional para o vermelho aumenta linearmente para massas menores que $\approx 1,4 M_{\odot}$, isso significa que para configurações com massas menores, os valores do desvio gravitacional para o vermelho tornam-se independentes do parâmetro λ . Para estrelas com massas maiores que $1,4 M_{\odot}$, a anisotropia produz mudanças significativas para qualquer valor de λ . No painel direito da figura, $B = 90 \text{ MeVfm}^{-3}$, observamos que o desvio para o vermelho gravitacional aumenta linearmente

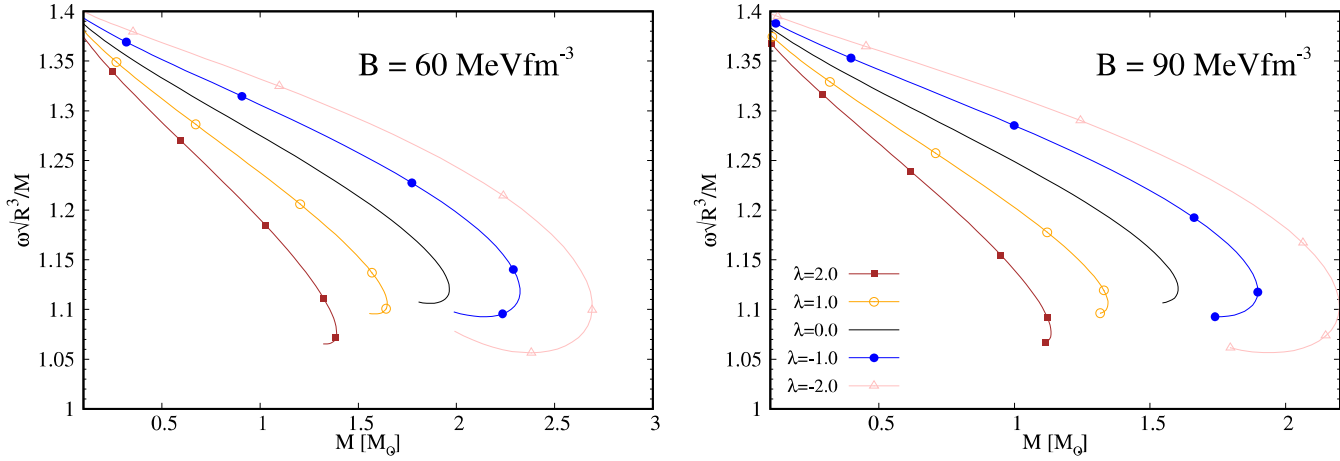


Figura 9 – Relação entre a frequência normalizada e a massa M para estrelas de quarks. Os parâmetros MIT usados são $B = 60 \text{ MeVfm}^{-3}$ (painel esquerdo) e $B = 90 \text{ MeVfm}^{-3}$ (painel direito) para diferentes valores do parâmetro λ .

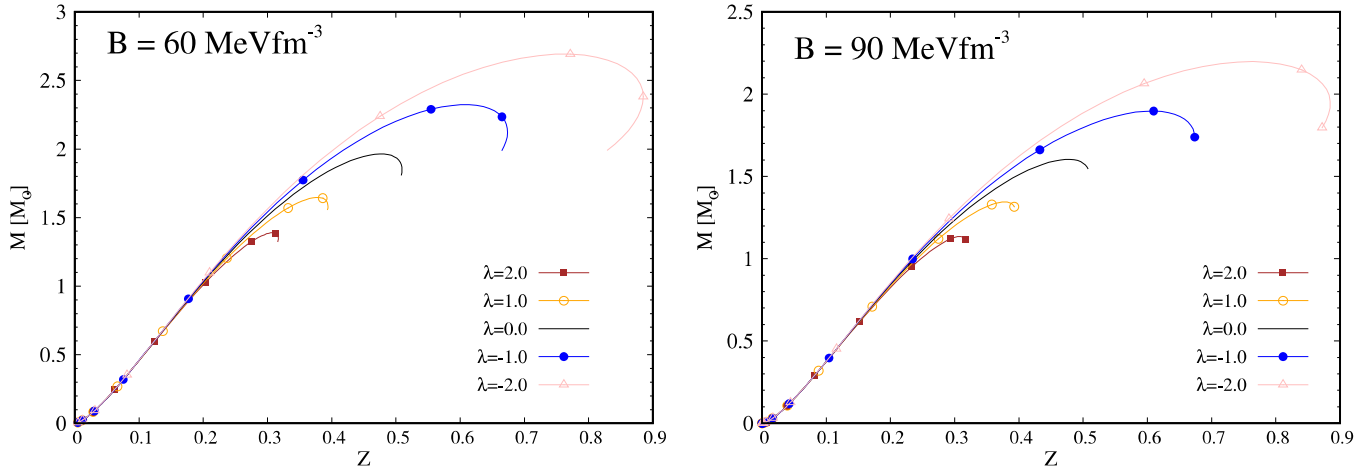


Figura 10 – Dependência da massa total M em função do desvio para o vermelho gravitacional $Z(R) = e^{-\Phi(R)/2} - 1$ na superfície da estrela estranha para diferentes valores de λ . Usamos $B = 60 \text{ MeVfm}^{-3}$ (painel esquerdo) e $B = 90 \text{ MeVfm}^{-3}$ (painel direito).

para massas menores que $\approx 1,1 M_{\odot}$, isso significa que para configurações com massas menores, os valores do desvio para o vermelho gravitacional tornam-se independentes do parâmetro λ . Para estrelas com massas maiores que $1,1 M_{\odot}$, a anisotropia produz mudanças significativas para qualquer λ . Além disso, é claro que valores mais negativos de λ dão valores mais altos no desvio para o vermelho gravitacional.

4.6.2 Estrelas hadrônicas

Na figura 11 descrevemos a frequência normalizada $\omega\sqrt{R^3/M}$ como uma função da massa hadrônica obtida para a parametrização GM1 (esquerda) e NL3 (direita). Em ambas figuras, notamos que as frequências normalizadas podem ser maiores (menores) quando o parâmetro λ é negativo (positivo). Consequentemente, para grandes valores de $|\lambda|$ e grandes massas, as frequências de oscilação diferem significativamente do caso das

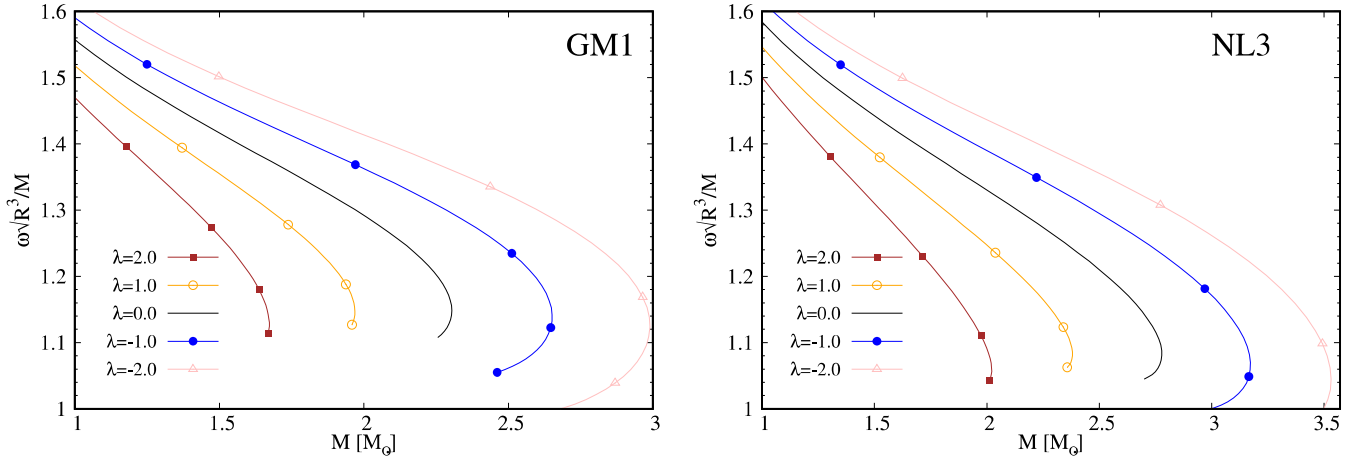


Figura 11 – A frequência normalizada ω em função da massa hadrônica M para o modo f . As figuras são representadas para alguns valores de λ sob a parametrização GM1 (painel esquerdo) e parametrização NL3 (painel direito).

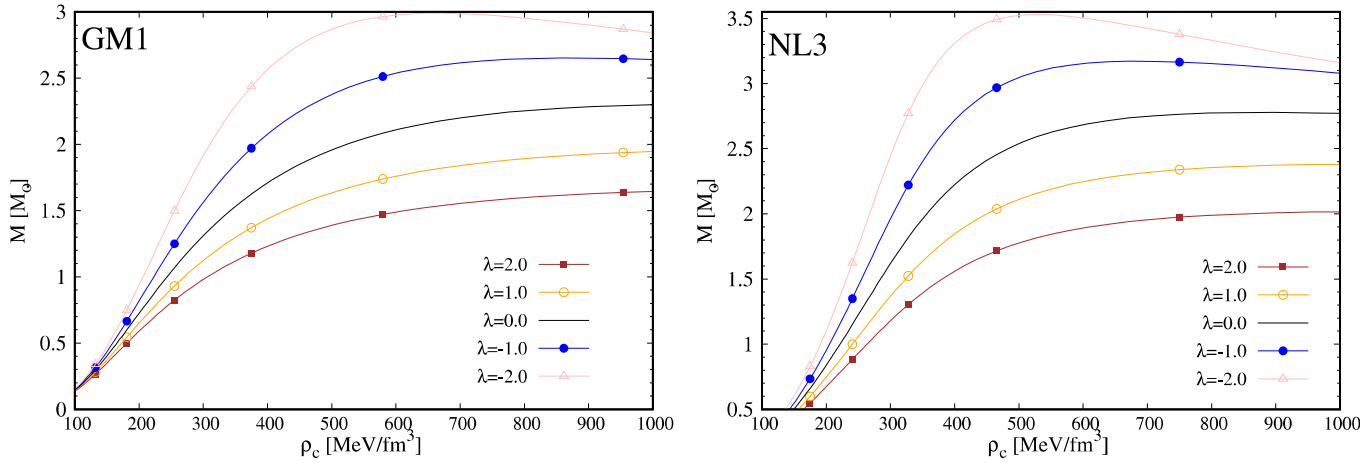


Figura 12 – Construção do diagrama da massa total em função da densidade de energia central usando a parametrização hadrônica GM1 e NL3. Os diagramas são mostrados para alguns valores de λ .

estrelas hadrônicas isotrópicas ($\lambda = 0$). Esse resultado é observado tanto para o modelo GM1 quanto para o modelo NL3.

Na figura 12, a massa M das estrelas hadrônicas anisotrópicas é mostrada em função da densidade de energia central ρ_c . Observamos que tanto para o modelo GM1 quanto para o modelo NL3, as propriedades das estrelas hadrônicas variam significativamente à medida que alteramos o parâmetro λ . Para densidades centrais menores que 200 MeV/fm^3 , as massas de estrelas anisotrópicas não mudam significativamente. Por outro lado, para valores acima de 200 MeV/fm^3 , as massas estelares mudam consideravelmente.

As frequências de oscilação do modo f em função da raiz quadrada da densidade média são mostradas: no painel esquerdo (direito) da figura 13 usamos a parametrização GM1 (NL3) para vários valores do parâmetro λ . A figura mostra que a frequência não muda significativamente para valores menores que $0,02 \text{ km}^{-1}$ na densidade média, ou seja, nessa

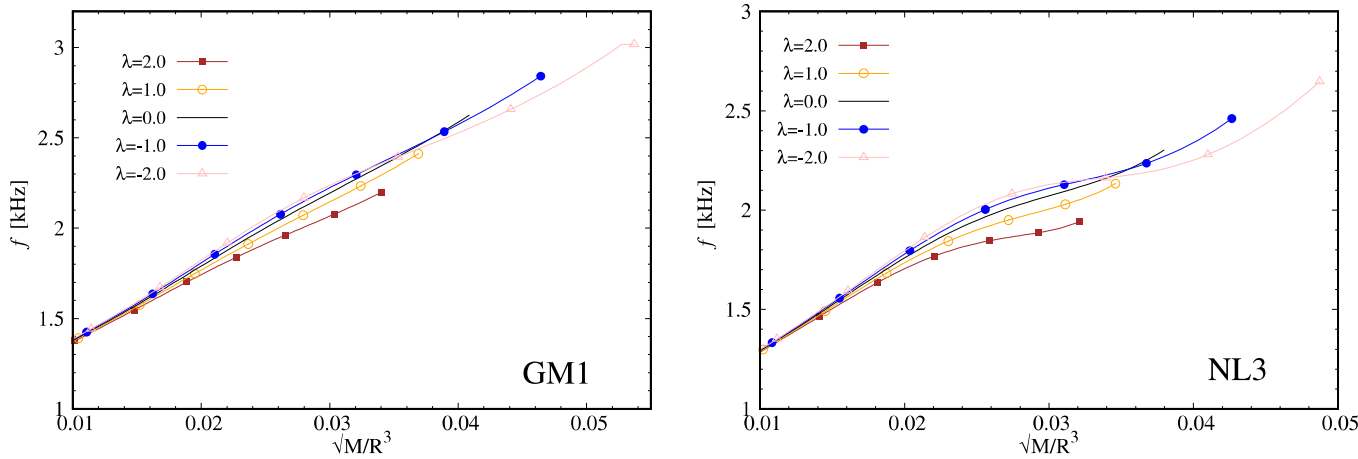


Figura 13 – Diagrama da frequência modal f como uma função da raiz quadrada da densidade média $\sqrt{M/R^3}$ com cinco valores do parâmetro λ .

região não é possível discriminar entre estrelas hadrônicas isotrópicas e anisotrópicas usando frequências de modo fundamental. Com relação à figura no painel esquerdo, percebemos que para valores de densidade média acima de $0,02 \text{ km}^{-1}$ e para grandes valores positivos de λ , o desvio das curvas anisotrópicas da curva isotrópica (hadrônica) torna-se mais significativo. Da mesma forma, para o modelo NL3, conforme a raiz quadrada da densidade média estelar cresce para grandes valores positivos de λ , os desvios das frequências do modo f tornam-se perceptíveis. É interessante ver que para valores negativos de λ , a frequência do modo fundamental f das estrelas hadrônicas anisotrópicas não exibe um desvio apreciável em relação à frequência das estrelas isotrópicas, quando $0,01 < \sqrt{M/R^3} < 0,035$.

Na figura 14 apresentamos as relações M-R que são obtidas usando duas parametrizações hadrônicas. A partir das figuras, observamos como o parâmetro λ afeta notavelmente as propriedades estelares (massa e raio) da estrela hadrônica isotrópica. Notamos que valores menores de λ negativos favorecem a pressão do fluido para suportar estrelas com massas maiores e, ao contrário, um valor grande de λ positivo produz configurações estelares com massas menores. Quando utilizado o modelo GM1, observa-se que para massas hadrônicas menores que $0,3 M_{\odot}$ e raios maiores que $13,2 \text{ km}$, a anisotropia não tem efeito significativo. Uma situação semelhante pode ser observada para o modelo NL3, este comportamento pode ser observado para estrelas com massas menores que $0,3 M_{\odot}$ e raios maiores que $14,5 \text{ km}$. Em conclusão, estrelas hadrônicas com massas pequenas não são influenciadas pela anisotropia quando são descritas pelo modelo GM1 ou NL3. Portanto, se quisermos detectar efeitos anisotrópicos, temos que focar nossa atenção na região de estrelas massivas.

O modo de frequência f em função da massa M é representado para os modelos GM1 e NL3 na figura 15. De acordo com a parametrização GM1, podemos ver que para massas hadrônicas abaixo de $1,5 M_{\odot}$ as frequências de modo fundamental de estrelas hadrônicas anisotrópicas não diferem muito quando comparadas às frequências de estrelas

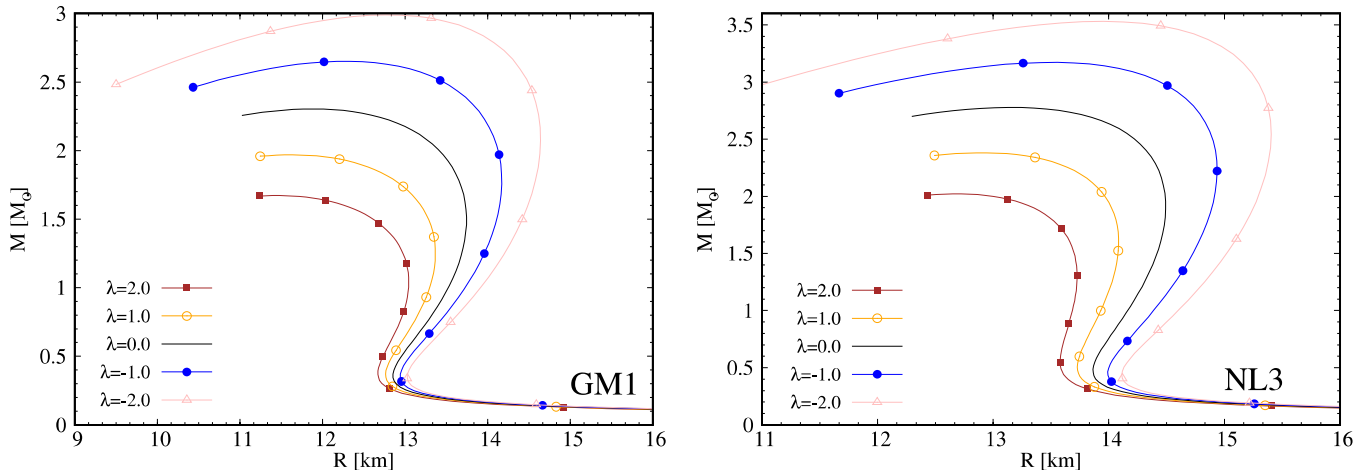


Figura 14 – Relação massa-raio para alguns valores de λ descritos na parametrização GM1 e NL3.

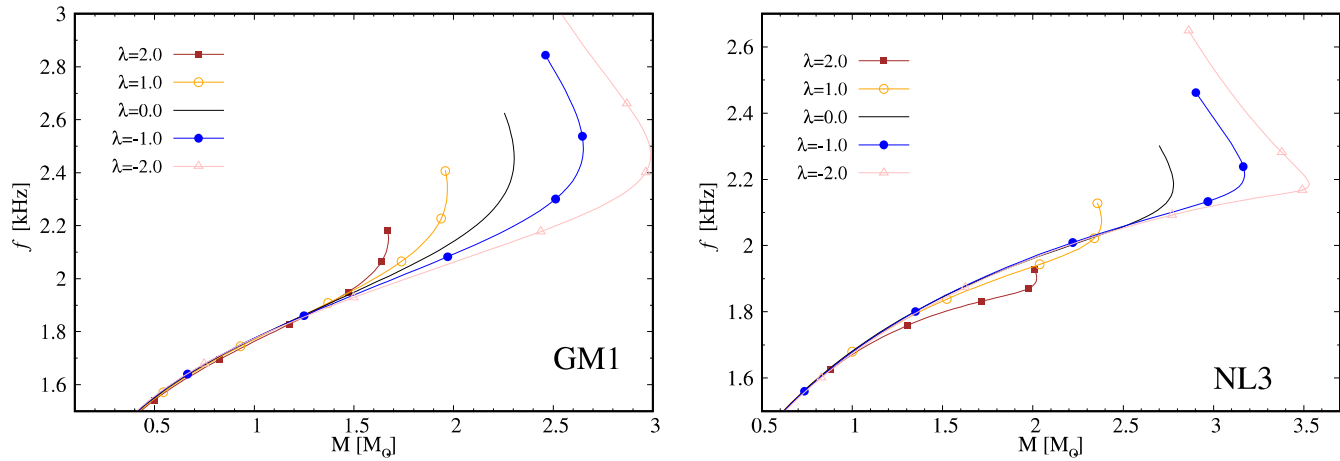


Figura 15 – Relação esquemática de frequência-massa do modo f para estrelas hadrônicas. As duas figuras são representados com o uso da parametrização GM1 e NL3 para alguns valores de λ .

hadrônicas isotrópicas ($\lambda = 0$). Para massas acima de $1,5 M_{\odot}$, fica claro que à medida que $|\lambda|$ aumenta, as frequências mudam drasticamente. O mesmo comportamento pode ser observado para estrelas hadrônicas construídas com a parametrização NL3, como pode ser visto no painel direito. Podemos concluir que o modelo GM1 apresenta frequências maiores em relação ao modelo NL3.

O comportamento do desvio gravitacional na superfície de uma estrela hadrônica com parametrização GM1 (NL3), em função da massa total, é analisado no painel esquerdo (direito) da figura 16 para diferentes valores de λ . A partir das figuras, observamos que o desvio para o vermelho gravitacional aumenta linearmente para massas menores que $\approx 1,5 M_{\odot}$, isso significa que para configurações com massas menores, os valores do desvio para o vermelho gravitacional tornam-se independentes do parâmetro λ . Para estrelas com massas maiores que $1,5 M_{\odot}$, a anisotropia produz mudanças significativas para qualquer λ . É claro que valores positivos mais baixos de λ dão valores mais altos no desvio para o

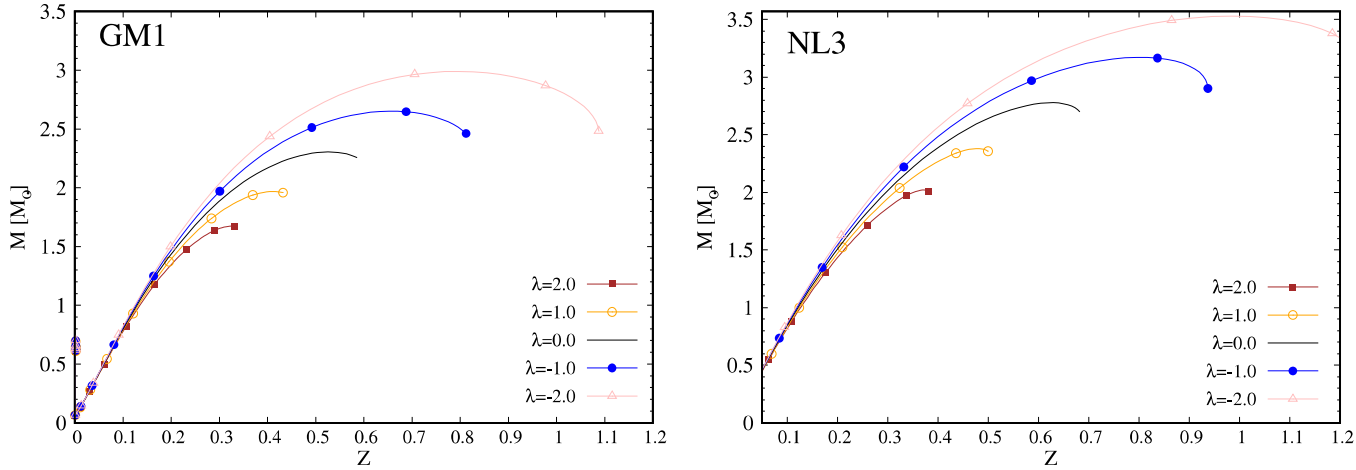


Figura 16 – A massa M de estrelas hadrônicas em função do desvio para o vermelho gravitacional da superfície é apresentada para o modo f .

vermelho gravitacional.

Nossos principais resultados para cada uma das EoS utilizadas estão resumidos na tabela 4.

EoS	λ	$M(M_{\odot})$	R (km)	f (kHz)	Z	$\rho_c(\text{MeVfm}^{-3})$	$\sqrt{M/R^3}$
MIT60	2	1,38	9,88	2,37	0,3079	1316,929	0,037
MIT60	0	1,96	10,65	2,61	0,4814	1219,027	0,043
MIT60	-2	2,69	11,66	2,62	0,7715	742,395	0,041
MIT90	2	1,13	8,03	2,91	0,3096	1022,144	0,046
MIT90	0	1,60	8,71	3,19	0,4795	897,558	0,049
MIT90	-2	2,19	9,56	3,20	0,7647	666,990	0,051
GM1	2	1,67	11,46	2,17	0,3256	1497,773	0,033
GM1	0	2,30	11,80	2,47	0,5360	1187,773	0,037
GM1	-2	2,98	12,78	2,46	0,7973	668,297	0,037
NL3	2	2,02	12,78	1,91	0,3693	1094,099	0,031
NL3	0	2,77	13,16	2,18	0,6292	897,558	0,034
NL3	-2	3,53	13,97	2,18	0,9844	527,829	0,035

Tabela 2 – Principais propriedades das estrelas de nêutrons para cada uma das EoS usadas neste trabalho.

4.6.3 Comparação entre a teoria e as observações

Comparar as previsões dada pela teoria com os dados observacionais é um teste interessante para validar se uma EoS é adequada ou não para descrever uma estrela de nêutrons realística. A partir das figuras 17 e 18, comparamos nossos resultados com as observações do NICER obtidas dos pulsares PSRJ0030+0451 (RILEY et al., 2019; MILLER et al., 2019) e PSRJ0740+6620 (RILEY et al., 2021; MILLER et al., 2021) para estrelas hadrônicas e de quarks, respectivamente. Mostramos também as bandas corres-

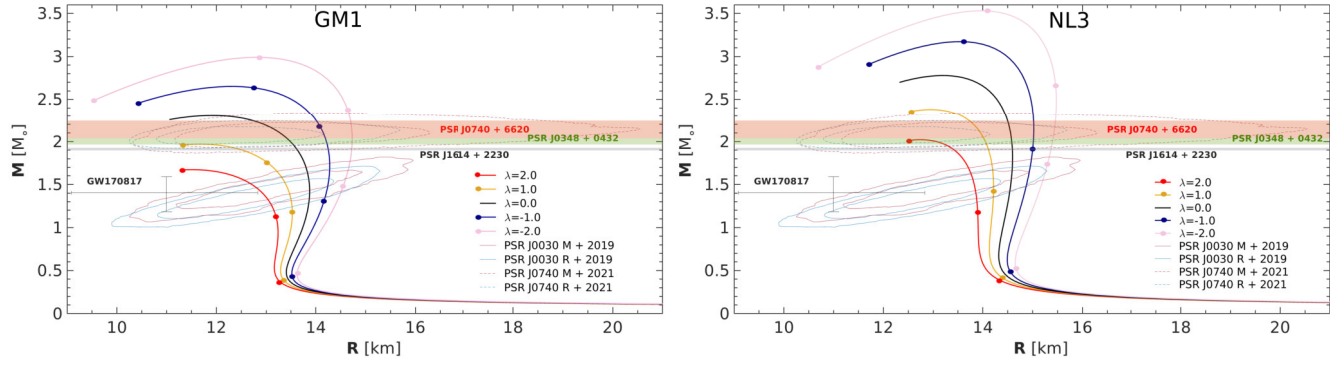


Figura 17 – Comparação de curvas de raio de massa para estrelas hadrônicas anisotrópicas com dados observacionais usando as parametrizações GM1 (painel esquerdo) e NL3 (painel direito) para diferentes valores do parâmetro λ . As linhas pretas ($\lambda = 0$) correspondem a estrelas hadrônicas isotrópicas.

pondentes dos pulsares PSRJ0740+6620 (CROMARTIE et al., 2020), PSRJ0348+0432 (ANTONIADIS et al., 2013) e PSRJ1614+2230 (DEMAREST et al., 2010) e as barras de erro correspondem ao sistema binário GW170817 (ABBOTT et al., 2018). Para estrelas hadrônicas dentro do modelo NL3 (veja o painel direito da figura 17), a curva relacionada ao fator anisotrópico $\lambda = 1,0$ é a única que satisfaz as restrições obtidas a partir das observações. Além disso, podemos destacar que a diminuição do fator anisotrópico produz um aumento no raio para a mesma massa estelar. O mesmo efeito pode ser observado para o modelo GM1, mas neste caso as restrições acima mencionadas podem ser cumpridas com um fator anisotrópico igual a zero (veja o painel esquerdo da figura 17). Em relação ao modelo de sacola MIT com parametrização $B = 60 \text{ MeVfm}^{-3}$ (ver painel esquerdo da figura 18), notamos que à medida que λ diminui, o modelo de sacola do MIT tenderá a se ajustar a todos os observáveis. Pode-se ver que alguns de nossos resultados relacionados a estrelas hadrônicas são mais precisos e mais próximos da evidência empírica para estrelas de nêutrons e, portanto, dada a perspectiva do parâmetro de anisotropia, essas EoS surgem como boas candidatas para a descrição de estrelas de nêutrons à luz dessas observações. Nesta fase, um aspecto interessante relacionado aos nossos resultados é o fato de que o parâmetro anisotrópico λ controla os valores das massas estelares máximas e os raios correspondentes. Isso nos leva a concluir que o parâmetro λ pode ser usado como um parâmetro de ajuste para reproduzir dados observacionais de estrelas de nêutrons para magnitudes como massa e raio.

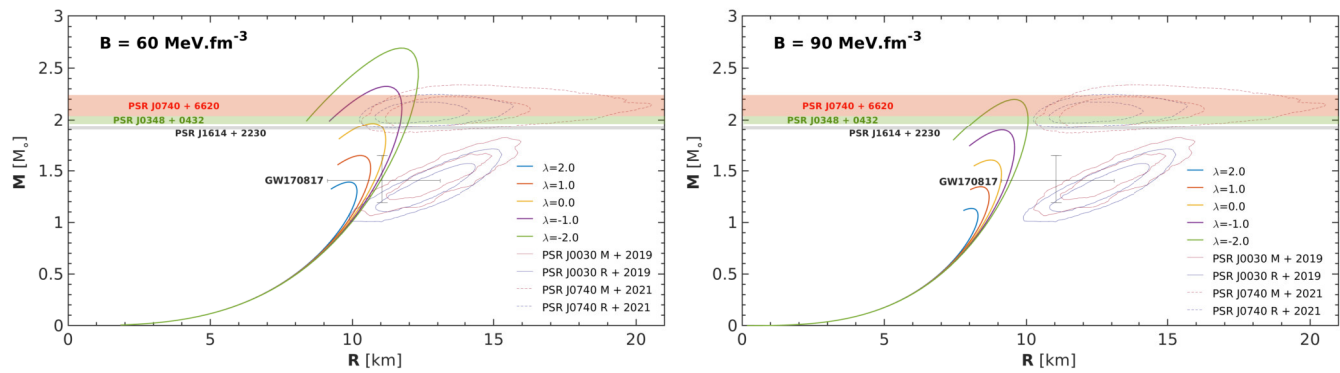


Figura 18 – Comparação de curvas de raio de massa para estrelas de quarks anisotrópicas com dados observacionais usando a constante $B = 60 \text{ MeV}\cdot\text{fm}^{-3}$ (painel esquerdo) e $90 \text{ MeV}\cdot\text{fm}^{-3}$ (painel direito) para diferentes valores do parâmetro λ .

5 Estudo preliminar de estrelas híbridas anisotrópicas

5.1 O modelo de Nambu-Jona-Lasinio

Em 1961, Nambu e Jona-Lasinio propuseram uma teoria que descrevia a geração de massa de nucleons a partir de propriedades de simetria de isospin (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961a; NAMBU; JONA-LASINIO, 1961b). O modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) tem sido amplamente utilizado para descrever transições de fase na matéria densa (LUTZ; KLIMT; WEISE, 1992; MASAYUKI; KOICHI, 1989), as propriedades dos hádrons (GASTINEAU; AICHELIN, 2002; VOGL; WEISE, 1991), e também para descrever estrelas de quarks (GOCKE et al., 2001).

Atualmente a cromodinâmica quântica (QCD) é uma teoria que descreve como quarks e glúons interagem para formar estados ligados de matéria hadrônica. Embora a QCD seja uma teoria muito bem sucedida, ela apresenta complicações quando a distância (e momento transferido pequeno) entre quarks aumenta. Ou seja, em escalas de energias inferiores a 1 GeV, não é possível usar nenhum método perturbativo na QCD, pois a constante de acoplamento da QCD se torna muito grande, o que dificulta realizar os cálculos matemáticos na faixa de baixas energias. Para superar essa desvantagem, o modelo NJL é usado para modelar a interação entre quarks. A principal utilidade desse modelo reside no fato de incorporar as simetrias globais da teoria QCD. Além disso, permite estudar a quebra espontânea de simetria quiral¹ e a geração dinâmica de massa de quarks.

5.2 Formalismo

Neste capítulo, apresentamos o formalismo de NJL para estudar a matéria de quarks com densidade finita. Isto implica que a densidade Lagrangiana NJL deve reproduzir características essenciais da QCD. O modelo NJL deve satisfazer a simetria de cor SU(3), ou seja, a densidade Lagrangiana NJL será representada como um campo de quarks com 3 sabores (u, d, s). Uma suposição importante, no limite de baixas energias, é que os campos de glúons são absorvidos na interação entre os quarks.

¹ A simetria quiral é a simetria que permite que a parte esquerda e direita do campo fermiônico se transformem independentemente.

5.2.1 A Lagrangiana do modelo de NJL SU(3)

Nesta seção, usaremos uma densidade Lagrangiana mais geral do que o modelo NJL original desenvolvido em vários artigos científicos (ver (KUNIHIO; HATSUDA, 1988; REINHARDT; ALKOFER, 1988)). A densidade Lagrangiana estendida NJL é dada por

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6, \quad (5.2.1)$$

onde o espinor de Dirac $\Psi = (u, d, s)^T$ denota o campo de quarks. A densidade Lagrangiana (5.2.1) contém como matriz de massa dos quarks $m = \text{diag}_f(m_u, m_d, m_s)$. O primeiro termo do lado direito da equação (5.2.1) descreve a propagação de quarks livres, portanto este termo representa a densidade Lagrangiana do campo livre de Dirac. A densidade de interação \mathcal{L}_4 que possui uma componente de quatro férmions é definida como (HATSUDA; KUNIHIO, 1994)

$$\mathcal{L}_4 = g_S \sum_{a=0}^8 [(\bar{\Psi}\lambda^a\Psi)^2 + (\bar{\Psi}i\gamma_5\lambda^a\Psi)^2], \quad (5.2.2)$$

onde a constante de acoplamento g_S descreve a interação escalar e λ^a , com $a = 1, \dots, 8$ representam as matrizes de Gell-Mann do grupo de sabor SU(3). O termo de interação de 't Hooft \mathcal{L}_6 que possui seis campos fermiônicos e produz a quebra de simetria axial U(1), é escrito como (HATSUDA; KUNIHIO, 1991)

$$\mathcal{L}_6 = -g_D \{ \det_f [\bar{\Psi}(1 + \gamma_5)\Psi] + \det_f [\bar{\Psi}(1 - \gamma_5)\Psi] \}, \quad (5.2.3)$$

onde a constante g_D descreve a intensidade da interação dos seis férmions e \det_f denota o determinante em relação ao índice de sabor f . Um fato interessante sobre a densidade Lagrangiana \mathcal{L}_6 é que existe uma mistura de diferentes sabores, como por exemplo $(\bar{u}u)(\bar{d}d)(\bar{s}s)$. No espaço dos sabores \mathcal{L}_6 pode ser reescrita na seguinte forma (BUBALLA, 2005)

$$\det_f(\bar{\Psi}\mathcal{O}\Psi) = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{i,j,k} (\bar{\Psi}_u\mathcal{O}\Psi_i)(\bar{\Psi}_d\mathcal{O}\Psi_j)(\bar{\Psi}_s\mathcal{O}\Psi_k), \quad (5.2.4)$$

onde i, j, k são os índices de sabor.

Quando o acoplamento é forte, podemos utilizar a aproximação de Hartree que consiste em substituir os termos $(\bar{\Psi}\Gamma\Psi)^2$ por $2\bar{\Psi}\Gamma\Psi\langle\bar{\Psi}\Gamma\Psi\rangle$ na densidade Lagrangiana. O termo $\langle\bar{\Psi}\Gamma\Psi\rangle$ é o valor esperado no vácuo do $\bar{\Psi}\Gamma\Psi$, onde Γ representa qualquer operador que aparece na densidade Lagrangiana. O modelo NJL deve manter as simetrias que a teoria QCD mantém, por exemplo, o vácuo deve ser um invariante de Lorentz e deve preservar a paridade. Isso nos leva ao fato de que o único termo diferente de zero é o condensado quark-antiquark. Assim, a equação (5.2.1) resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NJL}} = \sum_f \bar{\Psi}_f [i\gamma^\mu\partial_\mu - (m_f - 4g_S\langle\bar{\Psi}_f\Psi_f\rangle + 2g_D\langle\bar{\Psi}_{f+1}\Psi_{f+1}\rangle\langle\bar{\Psi}_{f+2}\Psi_{f+2}\rangle)] \Psi_f \\ - 2g_S \sum_f \langle\bar{\Psi}_f\Psi_f\rangle^2 + 4g_D \langle\bar{\Psi}_u\Psi_u\rangle\langle\bar{\Psi}_d\Psi_d\rangle\langle\bar{\Psi}_s\Psi_s\rangle. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

5.2.2 Equações de movimento

Calculando a equação de movimento para o campo Ψ_f , encontramos

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - (m_f - 4g_S \langle \bar{\Psi}_f \Psi_f \rangle + 2g_D \langle \bar{\Psi}_{f+1} \Psi_{f+1} \rangle \langle \bar{\Psi}_{f+2} \Psi_{f+2} \rangle)] \Psi_f = 0. \quad (5.2.6)$$

A equação acima, pode reescrever-se como

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f^*) \Psi_f = 0, \quad (5.2.7)$$

onde $m_f^* = m_f - 4g_S \langle \bar{\Psi}_f \Psi_f \rangle + 2g_D \langle \bar{\Psi}_{f+1} \Psi_{f+1} \rangle \langle \bar{\Psi}_{f+2} \Psi_{f+2} \rangle$ é a massa efetiva e m é a massa corrente dos quarks. Para encontrar a energia de Fermi dos quarks (ou potencial químico μ_f), podemos utilizar o procedimento realizado por (GLENDENNING, 2012). Assim temos que o potencial químico do quark é

$$\mu_f = \sqrt{p_{Ff}^2 + m_f^{*2}}, \quad (5.2.8)$$

onde p_{Ff} indica o momento de Fermi do quark de sabor f . Para $T = 0$, o condensado de quarks $\langle \bar{\Psi}_f \Psi_f \rangle$ resulta em

$$\langle \bar{\Psi}_f \Psi_f \rangle = -\frac{3m_f^*}{\pi^2} \int_0^{p_{Ff}} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_f^{*2}}} dp \theta(\Lambda - p_{Ff}), \quad (5.2.9)$$

onde θ representa a função degrau, e Λ é o parâmetro de *cutoff*². A densidade do número de quarks será dada por

$$n_f = \langle \Psi_f^\dagger \Psi_f \rangle = \frac{3}{\pi^2} \int_0^{p_{Ff}} p^2 dp \theta(\Lambda - p_{Ff}). \quad (5.2.10)$$

5.3 Equações de estado

Da densidade Lagrangiana (5.2.5), o tensor de energia momento é dada por

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \left[-2g_S \sum_f \langle \bar{\Psi} \Psi_f \rangle^2 + 4g_D \langle \bar{\Psi}_u \Psi_u \rangle \langle \bar{\Psi}_d \Psi_d \rangle \langle \bar{\Psi}_s \Psi_s \rangle \right] + \sum_f \bar{\Psi}_f i\gamma_\mu \partial_\nu \Psi_f. \quad (5.3.1)$$

Desta última expressão, podemos obter as seguintes equações de estado:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{NJL}} = & - \sum_f \frac{3}{\pi^2} \int_0^{p_{Ff}} p^2 dp \sqrt{p^2 + m_f^{*2}} \theta(\Lambda - p_{Ff}) + 2g_S \sum_f \langle \bar{\Psi} \Psi_f \rangle^2 \\ & - 4g_D \langle \bar{\Psi}_u \Psi_u \rangle \langle \bar{\Psi}_d \Psi_d \rangle \langle \bar{\Psi}_s \Psi_s \rangle - \varepsilon_{\text{vácuo}}, \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

$$P_{\text{NJL}} = -\varepsilon_{\text{NJL}} + \sum_f \mu_f n_f. \quad (5.3.3)$$

² Este parâmetro representa a escala na qual a constante de acoplamento diverge.

5.3.1 Parâmetros

Na tabela 3 mostramos dois conjuntos de parâmetros. Esses parâmetros são escolhidos para ajustar os valores empíricos das densidades de condensados quirais tais como $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle = - (240,8 \text{ MeV})^3$. Esses valores permitem ajustar a massa das partículas mesônicas e as massas dos quarks (ver tabela). Por exemplo, de acordo com (KUNIHIRO; HATSUDA, 1988), se encontrou que $g_S = 1,83/\Lambda^2$, $g_D = 9,29/\Lambda^5$. Neste capítulo, na tabela 3 mostramos dois conjuntos de parâmetros. O primeiro conjunto chamado SU(3)RKH corresponde aos autores (REHBERG; KLEVANSKY; HÜFNER, 1996; BUBALLA, 2005). Enquanto, o conjunto de parâmetros chamado SU(3)HK corresponde aos autores (HATSUDA; KUNIHIRO, 1994; BUBALLA, 2005).

Parametrização	$\Lambda[\text{Mev}]$	$g_S\Lambda^2$	$g_D\Lambda^5$	$m_{u,d}[\text{Mev}]$	$m_s[\text{Mev}]$
SU(3) RKH	602,3	1,835	12,36	5,5	140,7
SU(3) HK	631,4	1,835	9,29	5,5	135,7

Tabela 3 – Constantes de acoplamento para o modelo NJL SU(3).

5.4 Matéria de quarks

Para formular as EoS para a matéria de quarks devemos impor as condições de estabilidade β e neutralidade de carga.

5.4.1 Equilíbrio químico

O equilíbrio β é estabelecido por interações fracas que pode alterar os sabores de quarks e léptons. As reações responsáveis pelo equilíbrio beta são o processo de decaimento β e seu decaimento inverso. Assim, uma reação química importante para a matéria de quarks é

$$n \leftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (5.4.1)$$

A expressão acima pode ser definida por meio de seus componentes de quarks:

$$udd \leftrightarrow uud + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (5.4.2)$$

Em simples palavras, o processo de equilíbrio químico implica que a partícula de nêutron decai em um próton e um elétron. Além disso, vamos considerar que o potencial químico dos neutrinos $\bar{\nu}_e = 0$. Assim, a relação matemática dos potenciais químicos é (veja equação (5.4.2))

$$\mu_d \leftrightarrow \mu_u + \mu_{e^-}. \quad (5.4.3)$$

Para encontrar uma relação entre os potenciais químicos s e d , podemos utilizar a seguinte reação química

$$n + n \leftrightarrow n + \Lambda + K^0, \quad (5.4.4)$$

onde o Λ é um bárion e K^0 é um méson. Escrevendo esta última expressão em termos de seus constituintes, temos

$$udd \leftrightarrow uds. \quad (5.4.5)$$

Então, podemos dizer que

$$\mu_s = \mu_d. \quad (5.4.6)$$

Das equações (5.4.3) e (5.4.6), notamos que

$$\mu_s = \mu_d = \mu_u + \mu_{e^-}. \quad (5.4.7)$$

Outra reação química que acontece no interior das estrelas é

$$e^- \leftrightarrow \mu^- + \nu_e + \bar{\nu}_\mu. \quad (5.4.8)$$

Dado que estamos considerando que o potencial químico dos neutrinos é igual a zero, então a expressão (5.4.8) torna-se

$$\mu_{e^-} = \mu_{\mu^-}. \quad (5.4.9)$$

5.4.2 Neutralidade de cargas elétricas

A neutralidade de carga entre os quarks e léptons é

$$n_{e^-} + n_{\mu^-} = \frac{1}{3}(2n_u - n_d - n_s), \quad (5.4.10)$$

onde n_u, n_d e n_s indicam as densidades numéricas dos quarks u, d e s , respectivamente; n_e é a densidade dos elétrons e n_μ é a densidade dos múons.

5.4.3 EoS da matéria de quarks

Ao somarmos a densidade Lagrangiana dos léptons na equação (5.2.1), teremos que as equações de estado totais para a matéria de quarks (MQ) são

$$\varepsilon_{\text{MQ}} = \varepsilon_{\text{NJL}} + \varepsilon_l, \quad (5.4.11)$$

$$P_{\text{MQ}} = P_{\text{NJL}} + P_l, \quad (5.4.12)$$

onde ε_l e P_l podem ser encontradas no apêndice C (veja equação B.0.47).

5.5 Estrelas híbridas sem fase mista

Para descrever matematicamente a matéria dentro de uma estrela híbrida, devemos utilizar as equações de estado hadrônica (ver seção 3.1) e de matéria de quarks (ver seção 5.3). Existem duas maneiras de construir uma EoS para estrelas híbridas, uma com fase mista e outra sem fase mista (as fases da matéria de hádrons e da matéria de quarks

estão em contato direto). No primeiro caso, temos a condição de Gibbs (GLENDENNING, 2012): onde considera-se que os potenciais químicos de nêutrons e elétrons são contínuos em toda a matéria estelar, de acordo com as regras da termodinâmica padrão para a coexistência de fases. O segundo caso é conhecido como a condição de Maxwell: onde o potencial químico do nêutron é considerado contínuo, enquanto o potencial químico do elétron sofre uma descontinuidade. Esta condição enfatiza o fato de que apenas um único potencial químico é comum às duas fases. Existem pesquisas onde as condições de Gibbs e Maxwell foram estudadas e confrontadas (PAOLI; MENEZES, 2010; MARUYAMA et al., 2007). Nestes artigos, os autores concluíram que não há grandes diferenças nas quantidades macroscópicas (o raio e a massa) para estrelas híbridas com e sem fase mista. Portanto, nesta tese, vamos considerar a construção de Maxwell. Para o caso de estrelas híbridas sem fase mista, as EoS devem satisfazer a seguinte condição

$$\mu_n^H = \mu_n^Q \quad e \quad P_n^H = P_n^Q, \quad (5.5.1)$$

onde o sobrescrito H (Q) representa a fase hadrônica (fase de quarks). Desta forma, vamos considerar duas EoS para estrelas híbridas construídas com as parametrizações GM1 (fase hadrônica) e SU(3) RKH (fase de quarks), e GM1 (fase hadrônica) e SU(3) HK (fase de quarks).

5.6 Resultados

A figura 19 mostra as EoS para estrelas híbridas sem fase mista, construídas com as parametrizações GM1 e SU(3) RKH, e GM1 e SU(3) HK. A partir da figura pode-se observar que o plateau mostra a transição de fase entre a matéria hadrônica e a matéria de quarks.

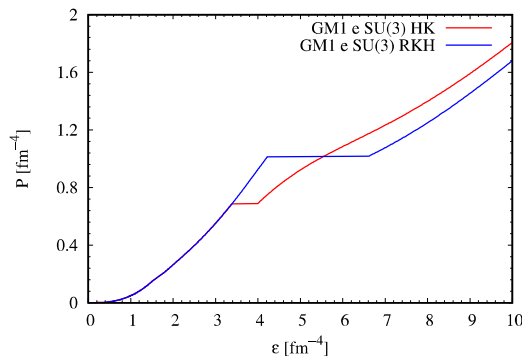


Figura 19 – Equação de estado para estrelas híbridas sem fase mista.

Na figura 20, apresentamos os resultados da relação entre a massa e o raio de uma estrela formada de hádrons e quarks sem fase mista. Os limites de massa dos pulsares PSR J1614+230, PSRJ0348+0432, e PSR J0740+6620 são diagramados para comparação. As curvas fechadas com linhas sólidas (linhas tracejadas) representam a relação entre a massa

e o raio extraídos do pulsar PSRJ0030+2019 (PSRJ0030+2021) de acordo com medições do telescópio NICER. Podemos verificar que as massas máximas dos modelos GM1 e SU(3) HK e GM1 e SU(3) RKH são diferentes para cada valor do parâmetro λ . Notamos que valores menores de λ negativos favorecem a pressão do fluido para suportar estrelas com massas maiores e, em contraposição, um valor grande de λ positivo produz configurações estelares com massas menores. Devemos destacar que o ponto sólido representa a massa máxima da estrela. Assim, os pontos que se encontram à esquerda da cúspide representam estrelas híbridas; e os pontos que se encontram à direita da cúspide representam estrelas hadrônicas. Por tanto, toda a análise realizada para estrelas hadrônicas no capítulo 4 serve para explicar o lado direito da curvas tanto para o modelo GM1 e SU(3) RKH quanto para o modelo GM1 e SU(3) HK. Em relação ao lado esquerdo após a cúspide, somente podemos afirmar sobre a estabilidade ou não das estrelas, por meio do cálculo das frequência de oscilações radiais, como realizado em (PARISI et al., 2021). Se considerarmos somente a condição $\partial M/\partial \rho > 0$, a afirmação seria de que não existem estrelas híbridas estáveis junto a este modelo. Contudo, futuramente, devemos criar um código para análise de oscilações radiais em estrelas anisotrópicas.

Observamos que para estrelas construídas dentro do modelo GM1 e SU(3) HK (veja o lado direito da figura 20), a curva relacionada ao fator anisotrópico $\lambda = -1, 0$ é a única que satisfaz todas as restrições obtidas a partir das observações de pulsares. Além disso, podemos destacar que a diminuição do fator anisotrópico produz um aumento do raio para a mesma massa estelar, esse comportamento desloca o modelo GM1 e SU(3) RKH e GM1 e SU(3) HK das regiões mais centrais. Podemos ver que nossos resultados associados à parametrização GM1 e SU(3) HK são mais precisos e mais próximos da evidência empírica para estrelas de nêutrons. Portanto, as EoSs com parametrizações GM1 e SU(3) RKH e GM1 e SU(3) HK reproduzem as regiões observacionais recentes para as estrelas de nêutrons.

Na tabela 4, mostramos como M_{max} e R dependem do parâmetro λ com parametrizações GM1 e SU(3) HK, e GM1 e SU(3) RKH.

	λ	-2	-1	0	1	2
GM1 e SU(3) HK	$M_{max}(M_{\odot})$	2,78	2,27	1,90	1,59	1,35
	R[km]	12,90	13,03	12,81	12,60	12,39
GM1 e SU(3) RKH	$M_{max}(M_{\odot})$	2,68	2,33	1,96	1,65	1,40
	R[km]	12,65	12,48	12,53	12,42	12,23

Tabela 4 – Os valores de M_{max} e R com parametrizações GM1 e SU(3) HK, e GM1 e SU(3) RKH.

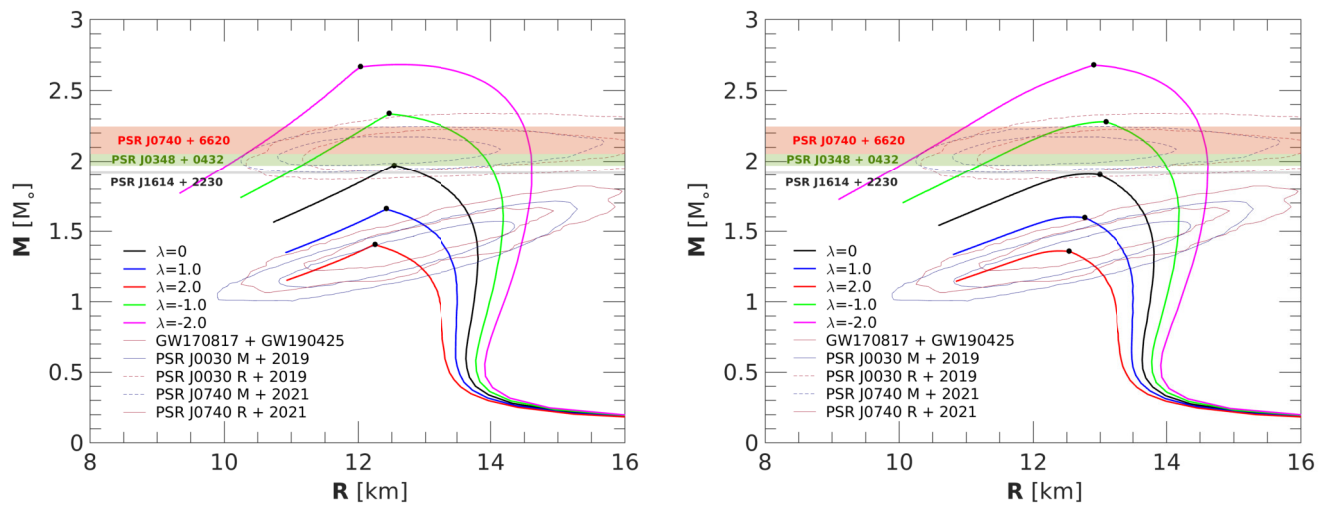


Figura 20 – As massas gravitacionais de estrelas híbridas sem fase mista em função do raio. No painel esquerdo, a figura foi construída com a parametrização GM1 e SU(3) RKH, e a figura do painel direito foi obtida com a parametrização GM1 e SU(3) HK.

Considerações Finais

Neste trabalho, examinamos de que maneira as oscilações não radiais de estrelas hadrônicas e de quarks são afetadas quando consideramos uma pressão anisotrópica dentro delas. Para lidar com estrelas hadrônicas, implementamos duas parametrizações diferentes (GM1 e NL3) que fazem parte do modelo de campo médio relativístico. Em contraste, para lidar com respeito a matéria de quarks, empregamos o modelo de sacola do MIT. Para simplificar nossa análise, estabelecemos que as perturbações métricas devem ser fixadas enquanto os parâmetros que definem o fluido para as estrelas compactas (hadrônicas e de quarks) são perturbadas (aproximação de Cowling). Como resultado disso, fomos capazes de integrar numericamente as equações não radiais para obter a frequência da oscilação fundamental do modo f . Informações adicionais são obtidas combinando os resultados da oscilação com outras propriedades físicas, conforme mostrado nesta tese.

No que diz respeito às estrelas hadrônicas e de quarks, descobrimos que a anisotropia altera as seguintes propriedades estelares: a frequência de oscilação fundamental do modo f , a massa total, o raio total, a raiz quadrada da densidade média, a densidade central, o frequência normalizada e o desvio para o vermelho gravitacional da superfície. Dependendo do tipo de estrela a ser usada, a influência dos resultados da anisotropia é mais óbvia em alguns casos do que em outros, por exemplo, para estrelas hadrônicas com pequenas densidades médias, suas frequências fundamentais do modo f divergem ligeiramente. O mesmo pequeno efeito é observado no desvio para o vermelho gravitacional para massas de estrelas estranhas e hadrônicas abaixo de $1,5 M_{\odot}$; ou seja, as EoS que utilizamos neste trabalho não dá para distinguir se temos uma estrela hadrônica ou estrela de quarks por meio da figura do desvio para o vermelho gravitacional. A mesma situação acontece para estrelas de quarks com pequena massa em função do raio total. Porém, um grande impacto da anisotropia é claramente visualizado em outras relações, tais como, a frequência fundamental do modo f em função da massa total é modificada significativamente para as estrelas de quarks. Outro grande impacto existe para a frequência normalizada em função da massa estelar como resultado da anisotropia, como podemos observar nas figuras 9 y 11. Além disso, encontramos efeitos perceptíveis da anisotropia para estrelas hadrônicas com massas superiores a $0,3 M_{\odot}$ e raio menor de 14 km no modelo GM1 e um raio menor de 15 km no modelo NL3. Uma situação semelhante é percebida para a massa total em função da densidade central. As EoS utilizadas neste trabalho nos permite dizer que as estrelas de quarks emitem ondas gravitacionais mais altas do que as estrelas hadrônicas, ou seja, a anisotropia aumenta a frequência de estrelas de quarks para valores mais altos da frequência do modo f do que a frequência hadrônica.

Em relação às estrelas híbridas, devemos destacar que mais uma vez o parâmetro

λ desempenha um papel importante na determinação das massas máximas, tanto para o modelo GM1 e SU(3) HK quanto para o modelo GM1 e SU(3) RKH. Assim, vemos que a anisotropia afeta notavelmente as quantidades macroscópicas de massa e raio. Notamos que não existe uma grande diferença nos resultados dos observáveis (massa e raio) entre as parametrizações GM1 e SU(3) RKH, e GM1 e SU(3) HK, isso pode ser visto na tabela 4 que mostra os resultados para diferentes valores de λ .

Em conclusão, todas as características mencionadas nas linhas acima sugerem que o parâmetro anisotrópico λ controla todas as propriedades estelares das estrelas compactas e pode ser usado como parâmetro de ajuste para reproduzir dados observacionais de massa e raio. A partir da comparação de nossos resultados com dados observacionais recentes, pode-se ver que alguns de nossos resultados teóricos concordam com a evidência empírica para estrelas de nêutrons, ou seja, algumas equações de estado usadas nesta tese são ótimas candidatas para descrever estrelas de nêutrons realísticas.

Os resultados obtidos nesta tese podem ser úteis para estudar o efeito do parâmetro λ nas oscilações não radiais considerando estrelas híbridas anisotrópicas. Também, pode-se estudar os efeitos nas oscilações não radiais considerando estrelas híbridas com e sem fase mista. De fato, esta análise está atualmente em desenvolvimento e será mostrada em trabalhos futuros.

Referências

- ABBOTT, B. P. et al. Gw170817: Measurements of neutron star radii and equation of state. *Physical review letters*, APS, v. 121, n. 16, p. 161101, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 62.
- ANDERSSON, N.; COMER, G. L. Relativistic fluid dynamics: Physics for many different scales. *Living Reviews in Relativity*, Springer, v. 10, n. 1, p. 1–83, 2007. Citado na página 49.
- ANTONIADIS, J. et al. A massive pulsar in a compact relativistic binary. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 340, n. 6131, 2013. Citado na página 62.
- ARCHIBALD, A. M. et al. Universality of free fall from the orbital motion of a pulsar in a stellar triple system. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 559, n. 7712, p. 73–76, 2018. Citado na página 32.
- ARIAS, J. M.; LOZANO, M. *An advanced course in modern nuclear physics*. [S.l.]: Springer, 2008. v. 581. Citado na página 35.
- ASAI, H.; LEE, U.; YOSHIDA, S. Non-axisymmetric magnetic modes of neutron stars with purely poloidal magnetic fields. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 455, n. 2, p. 2228–2241, 2016. Citado na página 50.
- BAYM, G.; PETHICK, C.; PINES, D. Superfluidity in neutron stars. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 224, n. 5220, p. 673–674, 1969. Citado na página 20.
- BERTULANI, C.; KAJINO, T. Frontiers in nuclear astrophysics. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, Elsevier, v. 89, p. 56–100, 2016. Citado na página 34.
- BETHE, H. A. Supernova mechanisms. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 62, n. 4, p. 801, 1990. Citado na página 25.
- BIGOT, L.; KURTZ, D. Theoretical light curves of dipole oscillations in roap stars. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 536, p. A73, 2011. Citado na página 16.
- BOGUTA, J.; BODMER, A. Relativistic calculation of nuclear matter and the nuclear surface. *Nuclear Physics A*, Elsevier, v. 292, n. 3, p. 413–428, 1977. Citado na página 35.
- BUBALLA, M. Njl-model analysis of dense quark matter. *Physics Reports*, Elsevier, v. 407, n. 4-6, p. 205–376, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 67.
- CHAMEL, N.; HAENSEL, P. Physics of neutron star crusts. *Living Reviews in relativity*, Springer, v. 11, n. 1, p. 10, 2008. Citado na página 26.
- CHATZIOANNOU, K.; YAGI, K.; YUNES, N. Toward realistic and practical no-hair relations for neutron stars in the nonrelativistic limit. *Physical Review D*, APS, v. 90, n. 6, p. 064030, 2014. Citado na página 18.

- CHEN, W.; ZHANG, P.-Q.; LIU, L.-G. The influence of the magnetic field on the properties of neutron star matter. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 22, n. 07n10, p. 623–629, 2007. Citado na página 20.
- CHODOS, A. et al. New extended model of hadrons. *Physical Review D*, APS, v. 9, n. 12, p. 3471, 1974. Citado 3 vezes nas páginas 18, 28 e 41.
- COTTAM, J.; PAERELS, F.; MENDEZ, M. Gravitationally redshifted absorption lines in the x-ray burst spectra of a neutron star. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 420, n. 6911, p. 51–54, 2002. Citado na página 32.
- COWLING, T. G. The non-radial oscillations of polytropic stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 101, p. 367, 1941. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 46.
- CROMARTIE, H. T. et al. Relativistic shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar. *Nature Astronomy*, Nature Publishing Group, v. 4, n. 1, p. 72–76, 2020. Citado na página 62.
- DEGENAAR, N.; SULEIMANOV, V. F. Testing the equation of state with electromagnetic observations. In: *The Physics and Astrophysics of Neutron Stars*. [S.l.]: Springer, 2018. p. 185–253. Citado na página 27.
- DEMOREST, P. B. et al. A two-solar-mass neutron star measured using shapiro delay. *nature*, Nature Publishing Group, v. 467, n. 7319, p. 1081–1083, 2010. Citado na página 62.
- DETWEILER, S.; LINDBLOM, L. On the nonradial pulsations of general relativistic stellar models. *The Astrophysical Journal*, v. 292, p. 12–15, 1985. Citado na página 43.
- DEUBNER, F.-L.; GOUGH, D. Helioseismology: Oscillations as a diagnostic of the solar interior. *Annual review of astronomy and astrophysics*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 22, n. 1, p. 593–619, 1984. Citado na página 45.
- DONEVA, D. D.; YAZADJIEV, S. S. Nonradial oscillations of anisotropic neutron stars in the cowling approximation. *Physical Review D*, APS, v. 85, n. 12, p. 124023, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 18, 47 e 53.
- DOUCHIN, F.; HAENSEL, P. Inner edge of neutron-star crust with sly effective nucleon-nucleon interactions. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 485, n. 1-3, p. 107–114, 2000. Citado na página 27.
- FARHI, E.; JAFFE, R. L. Strange matter. *Physical Review D*, APS, v. 30, n. 11, p. 2379, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 42.
- FINN, L. S. G-modes in zero-temperature neutron stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press Oxford, UK, v. 227, n. 2, p. 265–293, 1987. Citado na página 44.
- FOLOMEEV, V.; DZHUNUSHALIEV, V. Magnetic fields in anisotropic relativistic stars. *Physical Review D*, APS, v. 91, n. 4, p. 044040, 2015. Citado na página 43.
- FRAKNOI, A.; MORRISON, D.; WOLFF, S. Astronomy (the textbook). *Houston: Open-Stax*, 2016. Citado na página 23.

- GADE, A. Nuclear force probed at short distances. *Nature*, Macmillan Publishers Ltd., London, England, v. 578, n. 7796, p. 524–525, 2020. Citado na página 20.
- GASTINEAU, F.; AICHELIN, J. Strange baryons in a hot and dense medium within the nambu–jona–lasinio model. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, IOP Publishing, v. 28, n. 7, p. 2017, 2002. Citado na página 64.
- GELL-MANN, M. A schematic model of baryons and mesons. *Phys. Letters*, California Inst. of Tech., Pasadena, v. 8, 1964. Citado na página 40.
- GENDREAU, K. C.; ARZOUMANIAN, Z.; OKAJIMA, T. The neutron star interior composition explorer (nicer): an explorer mission of opportunity for soft x-ray timing spectroscopy. In: INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICS AND PHOTONICS. *Space Telescopes and Instrumentation 2012: Ultraviolet to Gamma Ray*. [S.l.], 2012. v. 8443, p. 844313. Citado na página 18.
- GLEISER, M. Stability of boson stars. *Physical Review D*, APS, v. 38, n. 8, p. 2376, 1988. Citado na página 43.
- GLENDENNING, N. K. *Compact stars: Nuclear physics, particle physics and general relativity*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 23, 39, 66, 69 e 88.
- GOCKE, C. et al. Equation of state for strange quark matter in a separable model. *arXiv preprint hep-ph/0104183*, 2001. Citado na página 64.
- GONCALVES, V. P.; LAZZARI, L. d. S. Uma introdução às estrelas estranhas. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 42, 2020. Citado na página 42.
- GONZÁLEZ-CANIULEF, D.; GUILLOT, S.; REISENEGGER, A. Neutron star radius measurement from the ultraviolet and soft x-ray thermal emission of psr j0437- 4715. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 490, n. 4, p. 5848–5859, 2019. Citado na página 32.
- GRINDLAY, J. et al. Discovery of intense x-ray bursts from the globular cluster ngc 6624. *The Astrophysical Journal*, v. 205, p. L127–L130, 1976. Citado na página 33.
- GUILLOT, S.; RUTLEDGE, R. E. Rejecting proposed dense matter equations of state with quiescent low-mass x-ray binaries. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 796, n. 1, p. L3, 2014. Citado na página 29.
- HAENSEL, P.; POTEKHIN, A. Y.; YAKOVLEV, D. G. *Neutron stars 1: Equation of state and structure*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007. v. 326. Citado 3 vezes nas páginas 11, 26 e 42.
- HANIEWICZ, H. T. et al. Precise mass measurements for the double neutron star system j1829+ 2456. *arXiv preprint arXiv:2007.07565*, 2020. Citado na página 31.
- HATSUDA, T.; KUNIHIRO, T. Flavor mixing in the low energy hadron dynamics: Interplay of the $f(3)$ breaking and the $a(1)$ anomaly. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, Springer, v. 51, n. 1, p. 49–68, 1991. Citado na página 65.

- HATSUDA, T.; KUNIHIRO, T. Qcd phenomenology based on a chiral effective lagrangian. *Physics Reports*, Elsevier, v. 247, n. 5-6, p. 221–367, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 67.
- HEISELBERG, H.; HJORTH-JENSEN, M. Phases of dense matter in neutron stars. *Physics Reports*, Elsevier, v. 328, n. 5-6, p. 237–327, 2000. Citado na página 18.
- HERBRIK, M.; KOKKOTAS, K. D. Stability analysis of magnetized neutron stars—a semi-analytic approach. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 466, n. 2, p. 1330–1347, 2017. Citado na página 50.
- HERRERA, L. Stability of the isotropic pressure condition. *Physical Review D*, APS, v. 101, n. 10, p. 104024, 2020. Citado na página 18.
- HERRERA, L.; BARRETO, W. General relativistic polytropes for anisotropic matter: The general formalism and applications. *Physical Review D*, APS, v. 88, n. 8, p. 084022, 2013. Citado na página 47.
- HERRERA, L.; SANTOS, N. O. Local anisotropy in self-gravitating systems. *Physics Reports*, Elsevier, v. 286, n. 2, p. 53–130, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 43.
- HOGG, E. Mira ceti, the "wonderful star". *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*, v. 27, p. 75, 1933. Citado na página 17.
- HORVAT, D.; ILIJIĆ, S.; MARUNOVIĆ, A. Radial pulsations and stability of anisotropic stars with a quasi-local equation of state. *Classical and quantum gravity*, IOP Publishing, v. 28, n. 2, p. 025009, 2010. Citado na página 48.
- JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1999. Citado na página 50.
- JAIN, N.; KUMAR, R.; BHUYAN, M. Exploring the ground state bulk and decay properties of the nuclei in superheavy island. *Nuclear Physics A*, Elsevier, p. 122379, 2022. Citado na página 40.
- JANKA, H.-T. et al. Theory of core-collapse supernovae. *Physics Reports*, Elsevier, v. 442, n. 1-6, p. 38–74, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- KEEK, L. et al. Long tails on thermonuclear x-ray bursts from neutron stars: a signature of inward heating? *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 497, n. 2, p. 469–480, 2009. Citado na página 33.
- KENDALL, H. W. Deep inelastic scattering: Experiments on the proton and the observation of scaling. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 63, n. 3, p. 597, 1991. Citado na página 41.
- KIRK, J. et al. Neutron stars and pulsars. *Astrophysics and Space Science Library*, v. 357, p. 421, 2009. Citado na página 33.
- KOKKOTAS, K. D.; SCHUTZ, B. F. W-modes: a new family of normal modes of pulsating relativistic stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, The Royal Astronomical Society, v. 255, n. 1, p. 119–128, 1992. Citado na página 44.

- KONG, Q.; SIAUW, T.; BAYEN, A. *Python Programming and Numerical Methods: A Guide for Engineers and Scientists*. [S.l.]: Academic Press, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 94.
- KOPP, F. et al. A comparative study of compact objects using 3 models: Walecka model, pal model, and mit bag model. *arXiv preprint arXiv:1804.08785*, 2018. Citado na página 28.
- KUNIHITO, T.; HATSUDA, T. Effects of flavour mixing induced by axial anomaly on the quark condensates and meson spectra. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 206, n. 3, p. 385–390, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 67.
- LALAZISSIS, G.; KÖNIG, J.; RING, P. New parametrization for the lagrangian density of relativistic mean field theory. *Physical Review C*, APS, v. 55, n. 1, p. 540, 1997. Citado na página 40.
- LALAZISSIS, G. A.; SHARMA, M. M.; RING, P. Rare-earth nuclei: Radii, isotope-shifts and deformation properties in the relativistic mean-field theory. *Nuclear Physics A*, Elsevier, v. 597, n. 1, p. 35–65, 1996. Citado na página 40.
- LATTIMER, J. M.; PRAKASH, M. The physics of neutron stars. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 304, n. 5670, p. 536–542, 2004. Citado na página 32.
- LATTIMER, J. M.; PRAKASH, M. Neutron star observations: Prognosis for equation of state constraints. *Physics reports*, Elsevier, v. 442, n. 1-6, p. 109–165, 2007. Citado na página 30.
- LETELIER, P. S. Anisotropic fluids with two-perfect-fluid components. *Physical Review D*, APS, v. 22, n. 4, p. 807, 1980. Citado na página 43.
- LI, Z. et al. Neutron stars within a relativistic mean field theory compatible with nucleon-nucleon short-range correlations. *Nuclear Physics A*, Elsevier, v. 990, p. 118–136, 2019. Citado na página 40.
- LINDBLOM, L.; DETWEILER, S. L. The quadrupole oscillations of neutron stars. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 53, p. 73–92, 1983. Citado na página 43.
- LINK, B.; EPSTEIN, R. I.; LATTIMER, J. M. Pulsar constraints on neutron star structure and equation of state. *Physical Review Letters*, APS, v. 83, n. 17, p. 3362, 1999. Citado na página 28.
- LORENZ, C.; RAVENHALL, D.; PETHICK, C. Neutron star crusts. *Physical Review Letters*, APS, v. 70, n. 4, p. 379, 1993. Citado na página 27.
- LUTZ, M.; KLIMT, S.; WEISE, W. Meson properties at finite temperature and baryon density. *Nuclear Physics A*, Elsevier, v. 542, n. 4, p. 521–558, 1992. Citado na página 64.
- MACHLEIDT, R. Relativistic dynamics and quark-nuclear physics. *edited by MB Johnson and A. Picklesimer, John Wiley & Sons*, 1986. Citado na página 36.
- MANCHESTER, R. N.; TAYLOR, J. H. Pulsars. 1977. Citado na página 31.

- MANDL, F.; SHAW, G. *Quantum field theory*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010. Citado na página 38.
- MARUYAMA, T. et al. Hadron-quark mixed phase in hyperon stars. *Physical Review D*, APS, v. 76, n. 12, p. 123015, 2007. Citado na página 69.
- MASAYUKI, A.; KOICHI, Y. Chiral restoration at finite density and temperature. *Nuclear Physics A*, Elsevier, v. 504, n. 4, p. 668–684, 1989. Citado na página 64.
- MCDERMOTT, P.; HORN, H. M. V.; SCHOLL, J. Nonradial g-mode oscillations of warm neutron stars. *The Astrophysical Journal*, v. 268, p. 837–848, 1983. Citado na página 48.
- MESTEL, L.; JR, L. S. Star formation in magnetic dust clouds. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 116, n. 5, p. 503–514, 1956. Citado na página 21.
- MILLER, C. Twinkle, twinkle, neutron star. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 420, n. 6911, p. 31–33, 2002. Citado na página 32.
- MILLER, M. et al. The radius of psr j0740+ 6620 from nicer and xmm-newton data. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 918, n. 2, p. L28, 2021. Citado na página 62.
- MILLER, M. et al. Psr j0030+ 0451 mass and radius from nicer data and implications for the properties of neutron star matter. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 887, n. 1, p. L24, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 62.
- NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. i. *Physical review*, APS, v. 122, n. 1, p. 345, 1961. Citado na página 64.
- NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. ii. *Physical review*, APS, v. 124, n. 1, p. 246, 1961. Citado na página 64.
- NELMES, S.; PIETTE, B. M. Phase transition and anisotropic deformations of neutron star matter. *Physical Review D*, APS, v. 85, n. 12, p. 123004, 2012. Citado na página 48.
- NOMOTO, K. The fate of accreting white dwarfs: Type i supernovae vs. collapse. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, Elsevier, v. 17, p. 249–266, 1986. Citado na página 25.
- ÖZEL, F.; FREIRE, P. Masses, radii, and the equation of state of neutron stars. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Annual Reviews, v. 54, p. 401–440, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 33.
- PAOLI, M.; MENEZES, D. The importance of the mixed phase in hybrid stars built with the nambu-jona-lasinio model. *The European Physical Journal A*, Springer, v. 46, n. 3, p. 413–420, 2010. Citado na página 69.
- PARIKH, A. et al. Nucleosynthesis in type i x-ray bursts. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, Elsevier, v. 69, p. 225–253, 2013. Citado na página 33.
- PARISI, A. et al. Hybrid stars in the light of the merging event gw170817. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2021, n. 06, p. 042, 2021. Citado na página 70.

- POCHA, S. et al. The role of self-couplings of scalar mesons in neutron star matter. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 17, n. 21, p. 1335–1344, 2002. Citado na página 39.
- PONS, J.; WALTER, F.; LATTIMER, J. Prakash., m. & neuhaüser, r., and an. *ApJ*, v. 564, p. 981, 2002. Citado na página 28.
- PRESS, W. H. et al. *Numerical Recipes in Fortran 90: Numerical recipes in Fortran 77V. 2. Numerical recipes in Fortran 90*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996. Citado na página 53.
- PRETEL, J. M. Equilibrium, radial stability and non-adiabatic gravitational collapse of anisotropic neutron stars. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 80, n. 8, p. 1–16, 2020. Citado na página 48.
- REHBERG, P.; KLEVANSKY, S.; HÜFNER, J. Hadronization in the su (3) nambu–jona-lasinio model. *Physical Review C*, APS, v. 53, n. 1, p. 410, 1996. Citado na página 67.
- REINHARDT, H.; ALKOFER, R. Instanton-induced flavour mixing in mesons. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 207, n. 4, p. 482–488, 1988. Citado na página 65.
- REZZOLLA, L. et al. *The physics and astrophysics of neutron stars*. [S.l.]: Springer, 2018. Citado na página 27.
- RILEY, T. E. et al. A nicer view of psr j0030+ 0451: Millisecond pulsar parameter estimation. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 887, n. 1, p. L21, 2019. Citado na página 62.
- RILEY, T. E. et al. A nicer view of the massive pulsar psr j0740+ 6620 informed by radio timing and xmm-newton spectroscopy. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 918, n. 2, p. L27, 2021. Citado na página 62.
- RING, P. Relativistic mean field theory in finite nuclei. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, Elsevier, v. 37, p. 193–263, 1996. Citado na página 35.
- RYDER, L. H. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 1996. Citado na página 47.
- SAWYER, R. F. Condensed π - phase in neutron-star matter. *Physical Review Letters*, APS, v. 29, n. 6, p. 382, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 43.
- SEROT, B.; WALECKA, J. *Advances in Nuclear Physics, edited by JW Negele and E. Vogt*. [S.l.]: Plenum, New York, 1986. Citado na página 18.
- SHAPIRO, S. L.; TEUKOLSKY, S. A. *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 28.
- SHIBAHASHI, H. Theory of asteroseismology. *Journal of Astrophysics and Astronomy*, Springer, v. 26, n. 2-3, p. 139–160, 2005. Citado na página 16.
- SILVA, H. O. et al. Slowly rotating anisotropic neutron stars in general relativity and scalar–tensor theory. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 32, n. 14, p. 145008, 2015. Citado na página 43.

- SOKOLOV, A. et al. Phase transitions in a superfluid neutron liquid. *Sov. Phys. JETP*, v. 52, n. 4, p. 575, 1980. Citado na página 43.
- SOTANI. *Analysis of interior structure of relativistic objects by gravitational waves*. Tese (Doutorado) — Waseda University, 2004. Citado na página 44.
- SOTANI, H. et al. Signatures of hadron-quark mixed phase in gravitational waves. *Physical Review D*, APS, v. 83, n. 2, p. 024014, 2011. Citado na página 53.
- STROHMAYER, T.; KEEK, L. Igr j17062–6143 is an accreting millisecond x-ray pulsar. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 836, n. 2, p. L23, 2017. Citado na página 34.
- TANGPHATI, T. et al. Anisotropic quark stars in einstein-gauss-bonnet theory. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 819, p. 136423, 2021. Citado na página 43.
- TAYLOR, J. H. Pulsar timing and relativistic gravity. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society London, v. 341, n. 1660, p. 117–134, 1992. Citado na página 29.
- THORNE, K. S.; CAMPOLATTARO, A. Non-radial pulsation of general-relativistic stellar models. i. analytic analysis for $l \geq 2$. *The astrophysical journal*, v. 149, p. 591, 1967. Citado na página 43.
- TODD-RUTEL, B.; PIEKAREWICZ, J. Neutron-rich nuclei and neutron stars: A new accurately calibrated interaction for the study of neutron-rich matter. *Physical review letters*, APS, v. 95, n. 12, p. 122501, 2005. Citado na página 40.
- TOLMAN, R. C. Static solutions of einstein's field equations for spheres of fluid. *Physical Review*, APS, v. 55, n. 4, p. 364, 1939. Citado na página 47.
- TOOPER, R. F. General relativistic polytropic fluid spheres. *The Astrophysical Journal*, v. 140, p. 434, 1964. Citado na página 18.
- VIDAÑA, I. Short introduction to the physics of neutron stars. In: EDP SCIENCES. *EPJ Web of Conferences*. [S.l.], 2020. v. 227, p. 01018. Citado na página 29.
- VOGL, U.; WEISE, W. The nambu and jona-lasinio model: its implications for hadrons and nuclei. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, Elsevier, v. 27, p. 195–272, 1991. Citado na página 64.
- VOISIN, G. et al. An improved test of the strong equivalence principle with the pulsar in a triple star system. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 638, p. A24, 2020. Citado na página 32.
- VRIES, H. D.; JAGER, C. D.; VRIES, C. D. Nuclear charge-density-distribution parameters from elastic electron scattering. *Atomic data and nuclear data tables*, Elsevier, v. 36, n. 3, p. 495–536, 1987. Citado na página 40.
- WALECKA, J. A theory of highly condensed matter. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 83, n. 2, p. 491–529, 1974. Citado na página 35.

- WATANABE, C.; YANASE, K.; YOSHINAGA, N. Searching optimum equations of state of neutron star matter in strong magnetic fields with rotation. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Oxford University Press, v. 2020, n. 10, p. 103E04, 2020. Citado na página 40.
- WEBER, F. *Pulsars as astrophysical laboratories for nuclear and particle physics*. [S.l.]: CRC press, 1999. Citado na página 30.
- WITTEN, E. Cosmic separation of phases. *Physical Review D*, APS, v. 30, n. 2, p. 272, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 42.
- WOOSLEY, S.; WEAVER, T. The great supernova of 1987. *Scientific American*, JSTOR, v. 261, n. 2, p. 32–41, 1989. Citado na página 25.
- YAZADJIEV, S. S. Relativistic models of magnetars: Nonperturbative analytical approach. *Physical Review D*, APS, v. 85, n. 4, p. 044030, 2012. Citado na página 43.
- YOSHIDA, S.; KOJIMA, Y. Accuracy of the relativistic cowling approximation in slowly rotating stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, The Royal Astronomical Society, v. 289, n. 1, p. 117–122, 1997. Citado na página 46.
- ZHANG, C. et al. Study of measured pulsar masses and their possible conclusions. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 527, p. A83, 2011. Citado na página 29.
- ZWEIG, G. *An SU_3 model for strong interaction symmetry and its breaking*. [S.l.], 1964. Citado na página 40.

Apêndices

APÊNDICE A – Sistema de unidades

É conveniente utilizar como convenção $G = c = k = 1$

$$\begin{aligned} 1 &= c = 2.9979 \times 10^{10} \text{cm/s}, \\ 1 &= G = 6.6720 \times 10^{-8} \text{cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}, \\ 1 &= k = 1.3807 \times 10^{-16} \text{erg/K}. \end{aligned} \tag{A.0.1}$$

Essas definições podem ser tratadas como equações. Por exemplo, temos

$$1s = 2.9979 \times 10^{10} \text{cm}, \tag{A.0.2}$$

$$1g = 7.4237 \times 10^{-23} \text{cm}, \tag{A.0.3}$$

$$1k = 1.3807 \times 10^{-16} \text{erg}, \tag{A.0.4}$$

$$1s^{-2} = 1.4988 \times 10^7, \tag{A.0.5}$$

$$1erg = 1g \text{ cm}^2 \text{s}^{-2} = 8.2601 \times 10^{-50} \text{cm}, \tag{A.0.6}$$

$$1\text{dyne/cm}^2 = 8.2601 \times 10^{-40} \text{km}^{-2}, \tag{A.0.7}$$

$$1g/\text{cm}^3 = 7.4237 \times 10^{-19} \text{km}^{-2}. \tag{A.0.8}$$

Uma unidade de energia conveniente em física nuclear e física de partículas é um milhão de elétron-volts ou MeV, sua conversão é dada por

$$1\text{MeV} = 1.6022 \times 10^{-6} \text{erg} = 1.3234 \times 10^{-55} \text{cm}, \tag{A.0.9}$$

$$= 1.787 \times 10^{-27} \text{erg} = 1.1604 \times 10^{10} k. \tag{A.0.10}$$

O alcance da força nuclear é definida como um fermi

$$1\text{fm} = 10^{-13} \text{cm}. \tag{A.0.11}$$

O conversão do valor da constante de Planck $h = 2\pi\hbar$ é possível a traves da seguinte relação

$$\hbar c = 197.33 \text{MeV fm}. \tag{A.0.12}$$

Dado que estamos trabalhando em unidades naturais, das expressões acima podemos obter

$$1/\text{fm}^4 = 197.33 \text{MeV fm}^3. \tag{A.0.13}$$

Podemos encontrar a densidade de energia

$$1\text{MeV} / \text{fm}^3 = 1.7827 \times 10^{12} \text{g/cm}^3, \tag{A.0.14}$$

$$= 1.6022 \times 10^{33} \text{dyne/cm}^2. \tag{A.0.15}$$

Outros fatores

$$1\text{MeV}/\text{fm}^3 = 1.3234 \times 10^{-6}/\text{km}, \quad (\text{A.0.16})$$

$$1/\text{fm}^4 = 197.33\text{Mev fm}^3, \quad (\text{A.0.17})$$

$$1M_{\odot} = 1.4766\text{km}. \quad (\text{A.0.18})$$

APÊNDICE B – Aproximação relativística de campo médio (RMF)

Antes de encontrar as equações de estado, mostramos a continuação o aparato matemático da teoria de campo médio relativístico. Primeiramente, vamos tratar os campos bariônicos e mésons sem léptons. Depois, encontraremos as equações de estado para os campos leptônicos.

Os operadores dos campos mesônicos¹ são substituídos por seu valor esperado no estado fundamental, da seguinte maneira

$$\sigma \longrightarrow \langle \sigma \rangle = \sigma_0 \quad (\text{B.0.1})$$

$$\omega^\mu \longrightarrow \langle \omega^\mu \rangle = \delta_{\mu 0} \omega_0 \quad (\text{B.0.2})$$

$$\vec{\rho}^\mu \longrightarrow \langle \rho_3^0 \rangle = \delta_{\mu 0} \delta^{i3} \rho_{03}. \quad (\text{B.0.3})$$

Se considerarmos que os campos mesônicos são assumidos independentes do tempo, ou seja

$$\begin{aligned} \partial_0 \sigma &= 0, \\ \partial_0 \omega_\mu &= 0, \\ \partial_0 \vec{\rho}_\mu &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.0.4})$$

Considerando que o espaço é isotrópico (não há uma direção preferencial) para a matéria bariônica, temos que

$$\langle \vec{\omega} \rangle = 0, \quad (\text{B.0.5})$$

$$\langle \rho_j^\mu \rangle = 0, \quad (\text{B.0.6})$$

onde $j = 1, 2, 3$ são as componentes espaciais. As componentes espaciais dos campos dos mésons vetoriais desaparecem sob simetria rotacional. Somente o terceiro componente de isospin do campo méson ρ_μ tem um valor diferente de zero, por causa da conservação de carga. Assim

$$\langle \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^\mu \rangle = \langle \tau_1 \rho_1^\mu + \tau_2 \rho_2^\mu + \tau_3 \rho_3^\mu \rangle = \tau_3 \rho_3^0 = \tau_3 \rho_{03}, \quad (\text{B.0.7})$$

onde ρ_{03} corresponde a terceira componente de isospin. Portanto as equações para os

¹ veja as equações (3.1.6)-(3.1.8).

núcleons e mésons são

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - g_{\omega i} \gamma^0 \omega_0 - g_{\rho i} \gamma^0 \tau_{3i} \rho_{03} - m_i + g_{\sigma i} \sigma_0) \psi_i = 0, \quad (\text{B.0.8})$$

$$\sigma_0 = -\frac{b}{2m_\sigma^2} (g_\sigma \sigma_0)^2 - \frac{c}{6m_\sigma^2} (g_\sigma \sigma_0)^3 + \sum_i \frac{g_{\sigma i}}{m_\sigma^2} \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle, \quad (\text{B.0.9})$$

$$\omega_0 = \sum_i \frac{g_{\omega i}}{m_\omega^2} \langle \bar{\psi}_i \gamma^0 \psi_i \rangle, \quad (\text{B.0.10})$$

$$\rho_{03} = \sum_i \frac{g_{\rho i}}{m_\rho^2} \tau_{3i} \langle \bar{\psi}_i \gamma^0 \psi_i \rangle. \quad (\text{B.0.11})$$

Redefinindo as constantes de acoplamento para os campos mesônicos da seguinte forma

$$g_{\sigma i} = x_\sigma g_\sigma, \quad (\text{B.0.12})$$

$$g_{\omega i} = x_\omega g_\omega, \quad (\text{B.0.13})$$

$$g_{\rho i} = x_\rho g_\rho. \quad (\text{B.0.14})$$

A densidade escalar do bárion n_{si} e a densidade do número de bárions n_i para uma espécie i estão definidas como

$$n_{si} = \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle = \frac{\gamma m_i^*}{2\pi^2} \int_0^{k_{Fi}} \frac{k^2 dk}{\sqrt{k^2 + m_i^{*2}}}, \quad (\text{B.0.15})$$

$$n_i = \langle \bar{\psi}_i \gamma^0 \psi_i \rangle = \gamma \int_0^{k_{Fi}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \frac{\gamma}{6\pi^2} \mathbf{k}_{Fi}^3, \quad (\text{B.0.16})$$

onde γ é o fator de degenerescência (de spin), k_{Fi} indica o momento de Fermi para um bárion i , e \mathbf{k} representa o momento vetorial da partícula bariônica. Inserindo estas últimas relações nas equações (B.0.8) até (B.0.11), obtemos

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - x_\omega g_\omega \gamma^0 \omega_0 - x_\rho g_\rho \gamma^0 \tau_{3i} \rho_{03} - m_i + x_\sigma g_\sigma \sigma_0) \psi_i = 0, \quad (\text{B.0.17})$$

$$\sigma_0 = -\frac{b}{2m_\sigma^2} (g_\sigma \sigma_0)^2 - \frac{c}{6m_\sigma^2} (g_\sigma \sigma_0)^3 + \sum_i \frac{x_\sigma g_\sigma}{m_\sigma^2} n_{si}, \quad (\text{B.0.18})$$

$$\omega_0 = \sum_i \frac{x_\omega g_\omega}{m_\omega^2} n_i, \quad (\text{B.0.19})$$

$$\rho_{03} = \sum_i \frac{x_\rho g_\rho}{m_\rho^2} \tau_{3i} n_i. \quad (\text{B.0.20})$$

Similar a solução para a partícula livre de Dirac, assumiremos que a solução para os campos dos núcleons (B.0.17) é dada por funções de ondas planas do tipo

$$\psi(x) = \psi(k) e^{-ik \cdot x}, \quad (\text{B.0.21})$$

onde k é o momento da partícula; $\psi(k)$ representa um espinor com quatro componentes, e ademais temos que $k \cdot x \equiv k_\mu x^\mu$. Após de substituir (B.0.21) em (B.0.17); e omitindo os campos vetoriais, a equação (B.0.17) pode escrever-se como

$$[\gamma_\mu k^\mu - m^*] \psi(k) = 0, \quad (\text{B.0.22})$$

onde $m^* = m - g_\sigma \sigma_0$. Multiplicando pela esquerda por $\gamma_\nu k^\nu + m^*$, e usando as propriedades das matrizes gamma, encontramos que

$$(k_\mu k^\mu - m^{*2})\psi(k) = 0. \quad (\text{B.0.23})$$

A energia do núcleon está dada por

$$e(\mathbf{k}) \equiv k_0 = \sqrt{k^2 + m^{*2}}. \quad (\text{B.0.24})$$

Para avaliar os valores esperados (B.0.15) e (B.0.16), vamos recorrer a técnica utilizada em (GLENDENNING, 2012). Assim, o valor esperado de um operador no estado fundamental é definido da seguinte maneira

$$(\bar{\psi}\Gamma\psi)_{k,s}, \quad (\text{B.0.25})$$

onde, k denota o momento e s o espin para uma partícula. O valor esperado para um sistema com vários núcleons é expresso como

$$\langle \bar{\psi}\Gamma\psi \rangle = \sum_s \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} (\bar{\psi}\Gamma\psi)_{k,s} \Theta[\mu - e(\mathbf{k})], \quad (\text{B.0.26})$$

onde $e(\mathbf{k})$ é a energia positiva das partículas, a variável μ é o potencial químico. A soma em s da equação acima é sobre todos os estados de espin dos estados ocupados e $\Theta(x)$ é a função degrau que tem valor unitário para $x \geq 0$ e valor igual a zero para outro caso. O Hamiltoniano de Dirac é

$$H_D = \gamma_0[\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} + m^*]. \quad (\text{B.0.27})$$

Calculando o valor esperado para uma partícula i do núcleon (vamos omitir o índice i), temos

$$(\psi^\dagger H_D \psi)_{k,s} = e(\mathbf{k})(\psi^\dagger \psi)_{k,s} = e(\mathbf{k}), \quad (\text{B.0.28})$$

onde foi utilizada a condição de normalização $(\psi^\dagger \psi)_{k,s} = 1$. Tomando a derivada do lado esquerdo da equação (B.0.28) com respeito a ζ , obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} (\psi^\dagger H_D \psi)_{k,s} = \left(\psi^\dagger \frac{\partial H_D}{\partial \zeta} \psi \right)_{k,s} = \frac{\partial e(\mathbf{k})}{\partial \zeta}, \quad (\text{B.0.29})$$

onde ζ pode ser qualquer variável do Hamiltoniano H_D . Por exemplo, assumindo $\zeta = m$, obtemos

$$(\bar{\psi}\psi)_{k,s} = \frac{\partial e(\mathbf{k})}{\partial m} = \frac{m^*}{\sqrt{k^2 + m^{*2}}}. \quad (\text{B.0.30})$$

Portanto, o valor esperado para o termo $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ é

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \gamma \int_0^{k_F} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{m^*}{\sqrt{k^2 + m^{*2}}} = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \frac{k^2 m^*}{\sqrt{k^2 + m^{*2}}}. \quad (\text{B.0.31})$$

A densidade bariônica chega a ser

$$\rho = \langle \psi^\dagger \psi \rangle = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk k^2 = \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3. \quad (\text{B.0.32})$$

Também podemos encontrar o valor médio da seguinte expressão

$$\langle \bar{\psi}(\alpha \cdot \mathbf{k} + \beta m^*)\psi \rangle = \gamma \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m_i^{*2}}, \quad (\text{B.0.33})$$

onde $\alpha_i = \gamma_0 \gamma_i$. Aproveitando a definição dada pela equação (B.0.29), encontramos

$$\langle \psi^\dagger(\vec{\alpha} \cdot \vec{k})\psi \rangle = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m^{*2}}}. \quad (\text{B.0.34})$$

Para encontrar as equações de estado para um fluido isotrópico, vamos utilizar a expressão canônica para o tensor energia momento

$$T_{\mu\nu} = \partial_\nu q \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu q)} \right) - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (\text{B.0.35})$$

Inserindo a densidade lagrangiana (3.1.1) em (B.0.35), obtemos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & \sum_i \bar{\psi}_i \gamma_\mu \partial_\nu \psi_i + \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma + \Omega_{\alpha\mu} \partial_\nu \omega^\alpha + \vec{P}_{\alpha\mu} \partial_\nu \vec{\rho}^\alpha + g_{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} \partial^\alpha \sigma \partial_\alpha \sigma + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{3!} b (g_\sigma \sigma)^3 + \frac{1}{4!} c (g_\sigma \sigma)^4 + \frac{1}{4} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu + \frac{1}{4} \mathbf{P}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{P}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.0.36})$$

Aplicando a aproximação RMF ao tensor energia momento (B.0.36), temos a seguinte expressão

$$T_{\mu\nu} = \sum_i \bar{\psi}_i \gamma_\mu \partial_\nu \psi_i + g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{3!} b (g_\sigma \sigma_0)^3 + \frac{1}{4!} c (g_\sigma \sigma_0)^4 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 - \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 \right]. \quad (\text{B.0.37})$$

Os valores esperados da densidade de energia e a pressão no estado fundamental são dados por

$$\varepsilon = \langle T_{00} \rangle, \quad (\text{B.0.38})$$

$$P = \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{B.0.39})$$

Avaliando a densidade de energia da equação (B.0.37)

$$T_{00} = \sum_i \bar{\psi}_i \gamma_0 \partial_0 \psi_i + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{3!} b m (g_\sigma \sigma_0)^3 + \frac{1}{4!} c (g_\sigma \sigma_0)^4 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2. \quad (\text{B.0.40})$$

Com auxílio das equações (B.0.17), (B.0.19), (B.0.20) e (B.0.33), encontramos que

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2\pi^2} \sum_i \int_0^{k_{Fi}} k^2 dk \sqrt{k^2 + m_i^{*2}} + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{3!} b (g_\sigma \sigma_0)^3 + \frac{1}{4!} c (g_\sigma \sigma_0)^4 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2. \quad (\text{B.0.41})$$

A equação de estado da pressão é dada por

$$P = \frac{1}{3} T_{jj} = \frac{1}{3} \sum_i \bar{\psi}_i i \gamma_j \partial_j \psi_i - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{3!} b (g_\sigma \sigma_0)^3 - \frac{1}{4!} c (g_\sigma \sigma_0)^4 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2, \quad (\text{B.0.42})$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação acima pode ser reescrito como

$$\bar{\psi}_i i\gamma_j \partial_j \psi_i = \psi_i^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} \psi_i, \quad (\text{B.0.43})$$

portanto, temos que

$$P = \frac{\gamma}{3(2\pi^2)} \sum_i \int \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + m_i^{*2}}} - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{3!} b (g_\sigma \sigma_0)^3 - \frac{1}{4!} c (g_\sigma \sigma_0)^4 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2. \quad (\text{B.0.44})$$

De outro lado, a densidade lagrangiana para os léptons é

$$\mathcal{L}_l = \sum_l \bar{\psi}_l (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_l) \psi_l, \quad (\text{B.0.45})$$

onde $l \in e^-, \mu^-$. Logo, O tensor energia momento será dada por

$$T_{\mu\nu} = \sum_l i\bar{\psi}_l \gamma_\mu \partial_\nu \psi_l. \quad (\text{B.0.46})$$

Considerando a aproximação do campo médio, obtemos as seguintes expressões

$$\begin{aligned} \varepsilon_l &= \frac{1}{\pi^2} \sum_l \int_0^{k_{Fl}} k^2 dk \sqrt{k^2 + m_l^2} \\ P_l &= \frac{1}{3\pi^2} \sum_l \int_0^{k_{Fl}} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + m_l^2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.0.47})$$

Assim, a densidade de energia e a pressão total são dados por

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\gamma}{2\pi^2} \sum_i \int_0^{k_{Fi}} k^2 dk \sqrt{k^2 + m_i^{*2}} + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{3!} b (g_\sigma \sigma_0)^3 + \frac{1}{4!} c (g_\sigma \sigma_0)^4 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 \\ &\quad + \frac{1}{\pi^2} \sum_l \int_0^{k_{Fl}} k^2 dk \sqrt{k^2 + m_l^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.0.48})$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{\gamma}{3(2\pi^2)} \sum_i \int \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + m_i^{*2}}} - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{3!} b (g_\sigma \sigma_0)^3 - \frac{1}{4!} c (g_\sigma \sigma_0)^4 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 \\ &\quad + \frac{1}{3\pi^2} \sum_l \int_0^{k_{Fl}} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + m_l^2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.0.49})$$

APÊNDICE C – Aplicação do modelo de sacola do MIT

Consideremos que temos um gás de férmions contido dentro uma cavidade esférica. Dado que somente temos partículas férmionicas, a equação de estado poderá ser calculada de forma análoga ao procedimento feito na seção (3.1). Dessa maneira, a densidade de energia será

$$\epsilon = \frac{\gamma}{2\pi^2} \left\{ \frac{1}{4} \left[\kappa(\kappa^2 + m^2)^{3/2} - \frac{1}{2}m^2\kappa\sqrt{\kappa^2 + m^2} - \frac{1}{2}m^4 \ln\left(\frac{\sqrt{\kappa^2 + m^2} + \kappa}{m}\right) \right] \right\}. \quad (\text{C.0.1})$$

O potencial químico é definido como

$$\mu = \sqrt{\kappa^2 + m^2}. \quad (\text{C.0.2})$$

Se considerarmos a degenerescência de spin $\gamma = 2$, a expressão fica como

$$\epsilon = \frac{1}{4\pi^2} \left[\mu\kappa \left(\mu^2 - \frac{1}{2}m^2 \right) - \frac{1}{2}m^4 \ln \left(\frac{\mu + \kappa}{m} \right) \right]. \quad (\text{C.0.3})$$

A pressão de um gás de férmions será dada pela equação achada no apêndice (B)

$$p = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left\{ \frac{1}{4} \left[\kappa^3\sqrt{\kappa^2 + m^2} - \frac{3}{2}m^2\kappa\kappa^2 + m^2 + \frac{3}{2}m^4 \ln \left(\frac{\sqrt{\kappa^2 + m^2}}{m} \right) \right] \right\}, \quad (\text{C.0.4})$$

reescrevendo a última equação em função do potencial químico, encontramos que

$$p = \frac{1}{12\pi^2} \left[\mu\kappa \left(\mu^2 - \frac{5}{2}m^2 + \frac{3}{2}m^4 \ln \frac{\mu + \kappa}{m} \right) \right]. \quad (\text{C.0.5})$$

As expressões acima devem ser multiplicadas por um fator 3 dado que os quarks possuem três diferentes cores. Além disso, devemos ter em conta que os quarks contêm diferentes sabores. Se aplicarmos o modelo de sacola, na densidade de energia, teremos que adicionar um fator B a qual representará a energia da sacola; e para a pressão, precisaremos restar um fator B , a qual representara a pressão da sacola. Com tudo, as expressões para ϵ e p ficaram como

$$\epsilon = \sum_f \frac{3}{4\pi^2} \left[\mu_f \kappa_f \left(\mu_f^2 - \frac{1}{2}m_f^2 \right) - \frac{1}{2}m_f^4 \ln \left(\frac{\mu_f + \kappa_f}{m_f} \right) \right] + B, \quad (\text{C.0.6})$$

$$p = \sum_f \frac{3}{4\pi^2} \left[\mu_f \kappa_f \left(\mu_f^2 - \frac{5}{2}m_f^2 \right) + \frac{3}{2}m_f^4 \ln \left(\frac{\mu_f + \kappa_f}{m_f} \right) \right] - B, \quad (\text{C.0.7})$$

onde f indica a soma sobre os diferentes sabores de quarks. Para um certo sabor f de quark sem massa, a densidade bariônica é dada por

$$\rho_f = \frac{\mu_f^3}{\pi^2}. \quad (\text{C.0.8})$$

A densidade de energia e a pressão são escritas como

$$\epsilon_f = \frac{3\mu_f^4}{4\pi^2}, \quad (\text{C.0.9})$$

$$p_f = \frac{\mu_f^4}{4\pi^2}. \quad (\text{C.0.10})$$

A soma das pressões para cada sabor de quark deve ser balanceada pela pressão da sacola, de modo que

$$\sum p_f = B, \quad (\text{C.0.11})$$

e a densidade de energia total é

$$\epsilon = \sum_f \epsilon_f + B = 3 \sum_f p_f + B = 4B. \quad (\text{C.0.12})$$

Se considerarmos que temos um gás de quarks u e d , a neutralidade de carga exige que a relação entre as densidades seja $\rho_d = 2\rho_u$. Assim, utilizando a eq. (C.0.8), encontraremos que

$$\mu_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\mu_d, \quad (\text{C.0.13})$$

onde $\mu \equiv \mu_u$. A correspondente pressão é dada por

$$p_2 \equiv p_\mu + p_d = (1 + \sqrt[3]{16}) \frac{(\mu_2)^4}{4\pi^2} = B, \quad (\text{C.0.14})$$

dessa forma temos que a energia total e a densidade bariônica é

$$\epsilon_2 = 3p_2 + B = 4B, \quad (\text{C.0.15})$$

$$\rho_{B2} = \frac{1}{3} \left(\frac{\rho_u}{\rho_d} \right) = \frac{\mu_2^3}{\pi^2}. \quad (\text{C.0.16})$$

A densidade de energia por bárion é obtida dividendo as equações (C.0.15) e (C.0.16). Além disso, devemos utilizar a equação (C.0.14) o qual resulta na seguinte expressão

$$\frac{\epsilon_2}{\rho_{B2}} = (1 + 2^{4/3})^{3/4} (4\pi^2)^{1/4} B^{1/4} = 6.441 B^{1/4}. \quad (\text{C.0.17})$$

A energia por bárion em um gás de nêutrons livres é a própria massa do nêutron, a qual é de 939.6 MeV. Então para uma matéria composta por quark u e d , o valor do $B^{1/4}$ deve ser superior a 145.9 MeV. Agora, uma matéria composta por três quarks possui uma densidade de energia menor que uma matéria composta por quarks u e d . Além disso, a energia do núcleo estável para esse tipo de matéria é tal que $5.714 B^{1/4} < 930$ MeV. Dados estes valores, vemos que a constante da sacola compreende

$$145 \text{Mev} < B^{1/4} < 163 \text{Mev}. \quad (\text{C.0.18})$$

APÊNDICE D – Símbolos de Christoffel

A métrica para uma massa gravitacional estática e que possui simetria esférica é escrita como

$$ds^2 = e^\Phi dt^2 - e^\Lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (\text{D.0.1})$$

As componentes do tensor métrico estão dados por

$$g_{00} = e^\Phi, \quad g_{11} = -e^\Lambda, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta, \\ g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{para } \mu \neq \nu. \quad (\text{D.0.2})$$

As componentes do tensor contravariante $g^{\mu\nu}$ são

$$g^{00} = e^{-\Phi}, \quad g^{11} = -e^{-\Lambda}, \quad g^{22} = \frac{-1}{r^2}, \quad g^{33} = \frac{-1}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (\text{D.0.3})$$

Para calcular os símbolos de Christoffel, utilizamos a seguinte equação

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} (g_{\nu\alpha,\mu} + g_{\mu\alpha,\nu} - g_{\mu\nu,\alpha}). \quad (\text{D.0.4})$$

Os símbolos de Christoffel diferentes de zero são dados por

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \Lambda', \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} e^{\Phi-\Lambda} \Phi', \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{22}^1 = -r e^{-\Lambda}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \\ \Gamma_{33}^1 = -r e^{-\Lambda} \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} \Phi', \quad (\text{D.0.5})$$

onde o símbolo linha representa a derivada parcial com respeito a r .

APÊNDICE E – O método linear de shooting

Um método numérico para resolver um problema de valor de contorno (PVC) é o método chamado *shooting method*. Este método consiste em tratar o problema como um problema de valor inicial (PVI), isto é, as condições de contorno serão especificadas no ponto inicial. Ou seja no *shooting method* nós atiramos trajetórias em direções diferentes até que encontrarmos uma trajetória que tenha o valor do contorno desejado. O nome do método shooting é derivado da analogia com o tiro ao alvo (veja figura): atiramos no alvo e observamos onde ele atinge o alvo, com base nos erros, podemos ajustar nosso objetivo e atirar novamente com a esperança que atingirá perto do alvo.

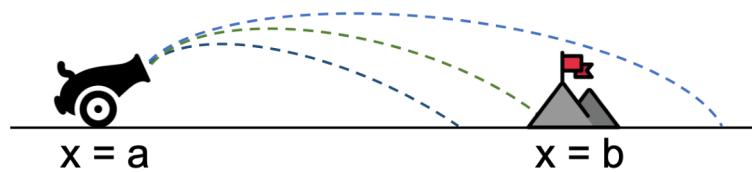


Figura 21 – Figura tomada de (KONG; SIAUW; BAYEN, 2020).

Para ilustrar este método, consideremos um problema general de contorno para uma equação diferencial linear do segunda ordem

$$y''(x) = p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) + r(x) \quad (\text{E.0.1})$$

onde $p(x), q(x)$ são funções arbitrárias e $r(x)$ pode ser considerado como um termo fonte. Os valores de contorno podem ser prescritos como

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (\text{E.0.2})$$

A equação diferencial de segunda ordem pode ser reduzida para um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem, as quais podem ser resolvidos por métodos numéricos. Assim temos

$$\begin{aligned} y'(x) &= g(x) \\ g'(x) &= p(x) \cdot g(x) + q(x) \cdot y(x) + r(x) \end{aligned} \quad (\text{E.0.3})$$

e as condições de contorno dadas por (E.0.2).

O método *shooting* começa, escolhendo um valor de contorno específico para $y(a) = \alpha$ como uma condição inicial. Outro valor que precisamos como condição inicial é $y'(a) \equiv g(x)$ para resolver E.0.3, então temos que supor um valor inicial para que o valor do contorno $y(b) = \beta$ seja satisfeito. Para este método é suficiente supor dois valores

para $s = g(\alpha) \equiv y'(a)$. Assim, para encontrar o valor correto s que dá a solução $y(b) = \beta$, pode ser encontrado por meio de interpolação linear. Note que a função $y(x)$ é sempre proporcional a s quando a equação diferencial é linear. Para quantificar a qualidade do valor resultante para nossa suposição inicial $s = g(a) \equiv y'(a)$, podemos introduzir uma função de error ϕ :

$$\phi(s) = y(b; s) - \beta \quad (\text{E.0.4})$$

A função suposição inicial $s = s^*$ é encontrada quando o valor da função error é

$$\phi(s^*) = 0 \quad (\text{E.0.5})$$