



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Marcos Lima Dias

Vórtices BPSs Topológicos e Não Topológicos em Teorias de Calibre Abelianas

São Luís - MA, Brasil

Setembro de 2021

Marcos Lima Dias

Vórtices BPSs Topológicos e Não Topológicos em Teorias de Calibre Abelianas

Tese apresentada ao Programa de Pós - graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção grau de Doutor em Física.

Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Programa de Pós - graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes

São Luís - MA, Brasil

Setembro de 2021

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a). Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Lima Dias, Marcos.

Vórtices BPSs Topológicos e Não Topológicos em Teorias de Calibre Abelianas/
Marcos Lima Dias. – São Luís - MA, Brasil, Setembro de 2021.
187p.

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Maranhão - UFMA
Programa de Pós - graduação em Física
São Luís - MA, Brasil, Setembro de 2021.

1. Formalismo BPS. 2. Teorias de calibre. 2. Vórtices topológicos e não topológicos.
I. Alván Casana Sifuentes, Rodolfo. II. Universidade Federal do Maranhão. IV. Título.

Marcos Lima Dias

Vórtices BPSs Topológicos e Não Topológicos em Teorias de Calibre Abelianas

Tese apresentada ao Programa de Pós - graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção grau de Doutor em Física.

São Luís - MA, Brasil, Setembro de 2021:

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes - UFMA (Orientador)

Prof. Dr. Edilberto Oliveira Silva - UFMA

Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Júnior - UFMA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida - UFC

Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho - UFPB

Com amor e carinho, à minha família.

Agradecimentos

A Deus, por ter me ajudado a vencer mais uma batalha importante em minha vida e por estar sempre comigo.

Ao meu pai, Antônio, e à minha mãe, Maria, pelo amor e por cuidarem de mim.

Ao meu irmão Marcelo, pelo apoio.

À minha tia Simone e ao meu tio Adgelson, pelo carinho e consideração que têm por mim e pela hospitalidade durante a minha graduação.

Ao João Alfíeres e à sua mãe, Dona Ana, por terem me dado a honra de se tornarem meus grandes amigos ao longo do curso e pelas ajudas de extrema importância que me deram.

Ao Pe. Marcelo Pépin e à Espírito Santo, ambos da Missão de Nicolet, por me ampararem quando precisei durante a minha graduação.

Ao meu primo Zaqueu Júnior, pela amizade.

Aos demais familiares que torceram por mim.

Aos amigos adquiridos durante o curso, em especial ao Josberg Rodrigues.

Ao Prof. Rodolfo Casana, por ter tido paciência e dedicação em me orientar.

Ao Prof. E. da Hora e ao André C. Santos, pelas colaborações.

Ao Hordoney Martins e ao Júlio Aldo, pela importância que tiveram em me auxiliar no ingresso da minha vida acadêmica.

À Universidade Federal do Maranhão, pelo espaço cedido e pela oportunidade oferecida.

Ao povo brasileiro que, por intermédio da FAPEMA, CAPES e CNPQ, financiou a minha formação e a elaboração desta obra.

*(...) A vida é combate,
Que os fracos abate,
Que os fortes, os bravos
Só pode exaltar. (...)*

(Canção do Tamoio, Antônio Gonçalves Dias)

Resumo

A teoria de Maxwell-Higgs indica que vórtices magnéticos BPSs (autoduais) são configurações estáveis encontradas no limite da transição de fase entre os supercondutores tipo I e tipo II. Tais sólitons possuindo também campo elétrico foram estudados inicialmente por meio da Eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs, cuja aplicação tange a física de ânions e do Efeito Hall Quântico. Nesta tese, investigamos novas estruturas de vórtices autoduais em modelos alternativos. Apontamos a existência de soluções topológicas em um cenário onde um campo complexo projetivo $CP(2)$ é acoplado ao campo de calibre abeliano; em adição, mostramos que esta última teoria é capaz de suportar configurações BPSs não topológicas quando uma função dielétrica dependente do campo complexo é considerada, ou quando a dinâmica do campo de calibre é regida pela ação de Chern-Simons. Além disso, sugerimos a formação de novos vórtices autoduais com e sem campo elétrico no modelo sigma $O(3)$ calibrado e na presença de meios dielétricos, introduzindo um campo escalar real responsável por descrever os efeitos das estruturas internas.

Palavras-chave: Vórtices topológicos e não topológicos; Formalismo BPS; Teorias de calibre.

Abstract

The Maxwell-Higgs theory indicates BPS (self-dual) magnetic vortices are stable configurations found at the phase transition limit between the type I and type II superconductors. On the other hand, magnetic vortices possessing an electric field are described by the Chern-Simons-Higgs Electrodynamics, with applications in the physics of anions and Quantum Hall Effect. In this thesis, we investigate new structures of self-dual vortices in alternative models. We find out topological solutions in a scenario where a complex projective field $CP(2)$ interacts with an Abelian gauge field. Besides, we show this last model can also support nontopological vortex either in the presence of a dielectric function depending on the complex field or when the Chern-Simons action controls the gauge field dynamics. Moreover, we suggest the formation of new topological vortices with and without electric field, which are described by the gauged $O(3)$ sigma model in the presence of dielectric media engendered by introducing a real scalar field responsible for generating the effects of the internal structures.

Keywords: Topological and nontopological vortices; BPS formalism; Gauge theories.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Classe de homotopia. Fonte [43].	30
Figura 2 – Deformação de caminho formando uma classe de homotopia. Figura adaptada de [46].	31
Figura 3 – Exemplo de homotopia equivalente entre uma caneca e uma rosca. Adaptação de [47].	32
Figura 4 – Operação de caminho.	34
Figura 5 – Intrepertação do <i>winding number</i> . Fonte [50].	36
Figura 6 – Em (a), a curva preta corresponde à fase normal, fixando-se $\alpha = 1$ ($T > T_C$), por conveniência; a curva vermelha está associada ao estado supercondutor e para esboçá-la usamos $\alpha = -1$ ($T < T_C$); em ambos os perfis, adotamos $\beta = 1$, sem perda de generalidade. Em (b), apresentamos como $V(\phi)$ pode ser visto em três dimensões na fase supercondutora; o formato é conhecido como <i>chapéu mexicano</i>	38
Figura 7 – A posição $x = 0$ designa a região intermediária da interface do material. Figura readaptada da referência [52].	39
Figura 8 – Diagrama de fase genérico do campo crítico H_C versus temperatura T	40
Figura 9 – Soluções numéricas do sistema BPS (3.56) e (3.57) satisfazendo as condições de contorno (3.42) e (3.43). As conveções adotadas para as linhas são: sólida preta ($n = 1$), tracejada vermelha ($n = 2$), ponto-tracejada azul ($n = 3$) e longo-tracejada laranja ($n = 4$). Em todos os perfis, adotamos $g = v = 1$ por razões práticas.	49
Figura 10 – Perfis numéricos do campo magnético associado ao potencial vetor da Fig. 9b e da densidade de energia BPS (3.68). Usamos as mesmas conveções da Fig. 9.	50
Figura 11 – Potencial ϕ^6 . Para o esboço, adotamos $\lambda = \kappa = v = 1$ por convenção. Temos a fase normal em $ \phi = 0$ e a supercondutora em $ \phi = 1$	53
Figura 12 – Perfis numéricos das soluções das equações (3.110) (Fig. 12a) e (3.108) (Fig. 12b). Adotamos as seguintes conveções para as linhas: sólida preta ($n = 1$), tracejada vermelha ($n = 2$), ponto-tracejada azul ($n = 3$) e longo-tracejada laranja ($n = 4$), considerando $g = v = \kappa = 1$ por simplicidade.	58
Figura 13 – Soluções numéricas para o potencial vetor $a(r)$ oriundo da equação (3.109) (Fig. 13a) e para o campo magnético correspondente $B(r) = -a'/gr$ (Fig. 13b). Usamos as mesmas conveções da Fig. 12.	59

Figura 14 – Gráficos numéricos do campo elétrico (Fig. 14a) associado ao potencial da Fig. 12b e da densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ (3.124) para o caso topológico (Fig. 14b). Usamos também as convenções da Fig. 12.	59
Figura 15 – Soluções numéricas das equações (3.110) (Fig. 15a) e (3.108) (Fig. 15b), sob as condições de contorno (3.88), (3.90) e (3.92). Utilizamos as seguintes convenções para as curvas: sólida preta ($n = 1$), tracejada vermelha ($n = 2$), ponto-tracejada azul ($n = 3$) e longo-tracejada laranja ($n = 4$), adotando $g = v = \kappa = 1$ por mera praticidade.	61
Figura 16 – Perfis numéricos do potencial vetor $a(r)$ (Fig. 16a) e do campo magnético $B(r) = -a'(r)/gr$ associado (Fig. 16b). Usamos as convenções adotadas na Fig. 15.	62
Figura 17 – Perfis numéricos do campo elétrico $E(r) = -A'_0$ (Fig. 17a) e da densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ (3.124) para o não caso topológico (Fig. 17b). Adotamos as convenções da Fig. 15.	63
Figura 18 – Soluções numéricas para o campo de Higgs (Fig. 18a) e para o potencial elétrico (Fig. 18b). Adotamos as seguintes convenções: linha sólida preta ($n = 1$), linha tracejada vermelha ($n = 2$), linha ponto-tracejada azul ($n = 3$) e linha longo-tracejada laranja ($n = 4$). Em todos os casos, escolhemos $g = v = 1$ por praticidade.	68
Figura 19 – Perfis numéricos do potencial vetor (Fig. 19a) e do campo magnético associado (Fig. 19b). Consideramos as mesmas convenções da Fig. 18.	69
Figura 20 – Gráficos numéricos do campo elétrico (Fig. 20a) e da densidade de energia BPS (Fig. 20b). Adotamos as mesmas convenções da Fig. 18.	69
Figura 21 – Soluções numéricas para o campo escalar $\alpha(r)$ em preto ($n = 1$) e vermelho ($n = 2$) e para o campo de calibre $A(r)$ em azul ($n = 1$) e laranja ($n = 2$). Em todos os esboços, fixamos $g = h = 1$ por simplicidade.	84
Figura 22 – Perfis numéricos do campo magnético $B(r) = -A'(r)/gr$ (Fig. 22a) e da densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ (4.74) (Fig. 22b). Usamos as seguintes convenções: $n=1$ (linha sólida preta), $n = 2$ (curva longo-tracejada laranja), $n = 3$ (linha ponto-tracejada azul) e $n = 7$ (curva vermelha tracejada). Em todos os casos, usamos $g = h = 1$ por praticidade.	84
Figura 23 – Soluções numéricas e analíticas para o campo $\alpha(r)$ (Fig. 23a) e para o campo de calibre $A(r)$ (Fig. 23b). As linhas tracejadas correspondem às soluções numéricas do sistema BPS (5.29) e (5.30), sob as condições de contorno (5.5)-(5.8). As linhas pontilhadas e ponto-tracejadas dizem respeito às soluções analíticas aproximadas do sistema BPS (5.43) e (5.44). Em todos os perfis, utilizamos $M = n = g = h = 1$, variando o fator λr_0 . Escolhemos as cores azul para $\lambda r_0 = 15$, vermelha para $\lambda r_0 = 20$ e preta para $\lambda r_0 = 30$	94

Figura 24 – Gráficos numéricos do campo magnético $B(r) = -A'(r)/gr$ (Fig. 23b) e da densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(r)/(gh)^2$ (Fig. 24b). Adotamos as mesmas convenções da Fig. 23.	94
Figura 25 – Gráficos numéricos do campo escalar $\alpha(r)$ (Fig. 25a) e do campo de calibre $A(r)$ (Fig. 25b). As linhas sólidas vermelhas referem-se a $n = 1$, as tracejadas pretas, a $n = 2$, as linhas ponto-tracejadas verdes competem a $n = 3$ e a linha pontilhada azul, a ($n = 4$). Em todos os casos, usamos $M = g = h = \lambda r_0 = 1$	95
Figura 26 – Perfis numéricos do campo magnético $B(r) = -A'(r)/gr$ (Fig. 26a) e da densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(r)/(gh)^2$ (Fig. 26b). Consideramos as mesmas convenções da Fig. 25.	96
Figura 27 – Gráficos numéricos e analíticos para o campo $\alpha(r)$ (Fig. 27a) e para o potencial vetor $A(r)$ (Fig. 27b). As linhas sólidas pretas ($\lambda r_0 = 10$), tracejadas azuis ($\lambda r_0 = 15$) e ponto-tracejadas vermelhas ($\lambda r_0 = 20$) referem-se às soluções numéricas do sistema BPS (6.31) e (6.32), obedecendo às condições de contorno (6.5)-(6.8), (6.16) e (6.17). As linhas pontilhadas correspondem às soluções analíticas aproximadas das equações BPSs (6.43) e (6.44), para $r_0 = 10$. Em todos os casos, fixamos os valores $n = g = h = \kappa = 1$ por questão de simplicidade.	105
Figura 28 – Comparação entre os perfis numéricos e analíticos do campo magético (Fig. 28a) e da densidade de energia (Fig. 28b). A convenções são as mesmas da Fig. 27.	106
Figura 29 – Comparação entre os gráficos numéricos e analíticos do potencial $A^0(r)$ (Fig. 29a) e do campo $E(r) = -(A^0)'$ (Fig. 29b) elétricos. Usamos as convenções da Fig. 27.	106
Figura 30 – Soluções numéricas do sistema BPS (6.31) e (6.32), sob as condições de contorno (6.5)-(6.8), (6.16) e (6.17). Usamos as seguintes convenções: $n = 1$ para as linhas contínuas pretas, $n = 2$ para os perfis tracejados azuis, $n = 3$ para as curvas ponto-tracejadas vermelhas e $n = 4$ para a linha pontilhada laranja. Em todos os casos, consideramos $g = h = \kappa = 1$. por mera praticidade.	107
Figura 31 – Soluções numéricas para campo magnético $B(r) = -A'(r)/gr$ (Fig. 31a) e para a densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ (Fig. 31b). As convenções são as mesmas da Fig. 30.	108
Figura 32 – Gráficos numéricos do potencial $A^0(r)$ (Fig. 32a) e do campo $E(r) = -(A^0)'$ (Fig. 32b) elétricos. Adotamos as mesmas convenções da Fig. 30.	108
Figura 33 – Campo escalar $\chi(r)$ tipo - kink. Escolhemos o centro da parede de domínio em $r_0 = 1$. Adotamos a cor preta para $\sigma = 1$, a cor vermelha para $\sigma = 2$ e a cor azul para $\sigma = 5$	121

Figura 34 – Todas as curvas referem-se a $n = 1$. A linha contínua corresponde a $r_0 = 1$, enquanto a traceja, a $r_0 = 5$	123
Figura 35 – Gráficos do campo magnético $B(r)$. São mostrados perfis tanto na presença (linhas coloridas), quanto na ausência (linhas pretas) do meio dielétrico. À esquerda, nós adotamos $r_0 = 1$, $n = 1$ (linha contínua), $n = 2$ (linha tracejada), $n = 8$ (linha ponto-tracejada) e $n = 15$ (linha longo-tracejada). À direita, escolhemos $n = 1$, $r_0 = 1$ (linha ponto-tracejada), $r_0 = 2$ (linha contínua), $r_0 = 3$ (linha pontilhada). . .	124
Figura 36 – Gráfico de cores representando a intensidade do campo magnético. Em ambas as figuras, adotamos $n = 1$, com $r_0 = 1$ (i) e $r_0 = 2$ (ii).	124
Figura 37 – Esboço da densidade de energia $\mathcal{E}_\Sigma(r)$. Mostramos perfis obtidos na presença (linhas coloridas), bem como na ausência do meio dielétrico (linhas pretas). Na Figura 37a, as convenções são as mesmas da Figura 35a. Quanto à Figura 37b, esta apresenta a curva de $\mathcal{E}_\Sigma(0)$ v.s. r_0 , ao passo que a inserção, de $\ln \mathcal{E}_\Sigma(0)$ v.s. $\ln r_0$	125
Figura 38 – Perfis de $f(r)$ (a) e $a(r)$ (b) para $n = 1$ e $\sigma = 1$, sendo $r_0 = 1$ (linha contínua) e $r_0 = 2$ (linha tracejada).	127
Figura 39 – Perfis do campo magnético na presença (linha colorida) e na ausência (linha preta) do meio dielétrico (7.103), todos com $n = 1$. Para o caso com meio dielétrico, adotamos $r_0 = 0.5$ (a) e $r_0 = 1$ (b), sendo $\sigma = 1$ (linha contínua) e $\sigma = 2$ (linha tracejada).	128
Figura 40 – Gráfico de cores do campo magnético $B(r)$, com $r_0 = 0.5$, $\sigma = 1$ (i) e $\sigma = 2$ (ii); e com $r_0 = 1$, $\sigma = 1$ (iii) e $\sigma = 2$ (iv).	128
Figura 41 – Perfis da densidade de energia $\mathcal{E}_\Sigma(r)$ na presença (linha colorida), fixando $\sigma = 1$, e na ausência (linha preta) do meio dielétrico (7.103). A Figura 41a foi construída usando $n = 1$, $r_0 = 1$ (linha contínua) e $r_0 = 3$ (linha tracejada); na inserção, fizemos o gráfico de $\mathcal{E}_\Sigma(0)$ vs. r_0 com $n = 1$. A Figura 41b exhibe os perfis para $r_0 = 1$, com $n = 2$ (linha contínua), $n = 5$ (linha tracejada), $n = 20$ (linha longo-tracejada) e $n = 30$ (linha ponto-tracejada).	129
Figura 42 – Gráficos do campo sigma $f(r)$ para $n = 1$ e $\lambda = 0$. Na Fig. 42a, usamos $\sigma = 1$ e $m = 1$, sendo $r_0 = 1$ (linha contínua) e $r_0 = 5$ (linha tracejada). Já na Fig. 42b, adotamos $r_0 = 1$ e $m = 2$, sendo $\sigma = 1$ (linha sólida) e $\sigma = 2$ (linha tracejada).	130
Figura 43 – Perfis do campo de calibre $a(r)$ com os valores fixos $n = 1$ e $\lambda = 0$. Na Fig. 43a, escolhemos $\sigma = 1$ e $m = 1$, sendo $r_0 = 1$ (linha contínua) e $r_0 = 2$ (linha tracejada). Na Fig. 43b, as curvas foram obtidas com os valores $r_0 = 1$ e $m = 2$, sendo $\sigma = 1$ (linha contínua) e $\sigma = 3$ (linha tracejada).	131

Figura 44 – Perfis do campo magnético na presença (linha colorida) e na ausência (linha preta) do meio dielétrico (7.115). Nós usamos $\lambda = 0$, $n = 1$ e $r_0 = 1$, sendo $\sigma = 1$ ((a) e (b)), $\sigma = 2$ ((c) e (d)), $m = 1$ ((a) e (c)) e $m = 2$ ((b) e (d)).	131
Figura 45 – Gráfico de cores do campo magnético, com $n = 1$ e $\lambda = 0$. Para $m = 1$, consideramos: $r_0 = 1$, sendo $\sigma = 1$ (i) e $\sigma = 2$ (ii), e $r_0 = 2$, sendo $\sigma = 2$ (iii); e para $m = 2$ usamos: $r_0 = 1$, sendo $\sigma = 1$ (iv) e $\sigma = 2$ (v), e $r_0 = 2$, sendo $\sigma = 2$ (vi).	132
Figura 46 – Perfis da densidade de energia $\mathcal{E}_\Sigma(r)$ na presença (linha colorida) e na ausência (linha preta) do meio dielétrico (7.115), adotando $\lambda = 0$, $\sigma = 1$ e $r_0 = 1$. Na Figura 46a, usamos ainda $m = 1$, $n = 1$ (linha contínua) e $n = 2$ (linha tracejada). Já na Figura 46a, escolhemos $m = 2$, $n = 5$ (linha contínua), $n = 20$ (linha longo-tracejada) e $n = 40$ (linha ponto tracejada).	132
Figura 47 – Todas as linhas referem-se a $n = 1$. Em particular, a curva preta corresponde ao modelo sigma usual. Nós fixamos $\sigma = 1$, $r_0 = 1$ e $m = 1$ para $\lambda = 0.2$ (linha colorida contínua), $\lambda = 0.8$ (linha tracejada) e $\lambda = 1.5$ (linha longo-tracejada).	133
Figura 48 – Gráfico de cores do campo magnético na presença (colorido) e na ausência (em preto) do meio dielétrico (7.115). As convenções são as mesmas da Figura 47, sendo $\lambda = 0.2$ (i), $\lambda = 0.8$ (ii) $\lambda = 1.5$ (iii) e o modelo sigma usual (iv).	134
Figura 49 – Perfis numéricos do campo sigma $f(r)$ (Fig. 49a) e do potencial vetor $a(r)/n$ (Fig. 49b). Usamos as cores para as linhas: preta ($n = 1$) e vermelha ($n = 3$); e os estilos de linha: tracejado ($r_0 = 1$) e ponto-tracejado ($r_0 = 5$). As linhas sólidas referem-se ao modelo sigma usual na ausência de um meio dielétrico. Em todos os casos, consideramos $\kappa = \sigma = 1$	142
Figura 50 – Potencial $A_0(r)$ (Fig. 50a) e campo $E(r)$ (Fig. 50b) elétricos para $\kappa = \sigma = 1$ e alguns valores de n e r_0 . As linhas sólidas correspondem ao modelo MCSS $O(3)$ sem um meio dielétrico. A Fig. 50a segue as convenções da Fig. 50b.	142
Figura 51 – Apresentamos os perfis do campo magnético $B(r) = -a'(r)/r$ (Fig. 51a) e da densidade de energia $\mathcal{E}_\Sigma(r)$ (Fig. 51b) para diferentes valores de n e r_0 . Adotamos as mesmas convenções da Fig. 50.	143

- Figura 52 – Na Fig. 52a, potencial escalar na origem ($A_0(0) = \omega_0$, verde) e máximos dos campos elétrico (E_{\max} , preto) e magnético (B_{\max} , azul) e da densidade de energia ($\mathcal{E}_{\Sigma, \max}$, vermelho) como funções de n . Na Fig. 52b, posições radiais de E_{\max} (r_E , preto), B_{\max} (r_B , azul) e $\mathcal{E}_{\Sigma, \max}$ (r_ε , vermelho) v.s. n . Em ambas as figuras, fixamos $\kappa = r_0 = \sigma = 1$ e os símbolos bola (diamante) concernem ao modelo com (sem) meio dielétrico. 144
- Figura 53 – Potential escalar ($A_0(0) = \omega_0$, verde) e densidade de energia ($\mathcal{E}_\Sigma(0)$, vermelho) na origem e máximos dos campos elétrico (E_{\max} , preto) e magnético (B_{\max} , azul) juntos com suas respectivas posições radiais r_E (laranja) e r_B (marrom) como funções de r_0 . Adotamos a escala logarítmica e $\kappa = n = \sigma = 1$ 144
- Figura 54 – Perfis numéricos do campo sigma $f(r)$ no primeiro e terceiro setores topológicos para alguns valores de r_0 , $\sigma = 1$ (Fig. 54a) e $\sigma = 3$ (Fig. 54b). As linhas sólidas referem-se ao modelo usual no qual $G = 1$. Em ambas as Figs., adotamos $\kappa = 1$ 147
- Figura 55 – Soluções numéricas para o potencial vetor $a(r)/n$ no primeiro e terceiro setores topológicos para alguns r_0 , $\sigma = 1$ (Fig. 55a) e $\sigma = 3$ (Fig. 55b). A Fig. 55a (55b) segue as mesmas convenções da Fig. 54a (54b). 147
- Figura 56 – Perfis numéricos do potencial $A_0(r)$ (Fig. 56a) e do campo $E(r) = -A'_0(r)$ (Fig. 56b) elétricos para alguns setores topológicos. Nos dois gráficos, assumimos as mesmas convenções da Fig. 50. 148
- Figura 57 – Perfis numéricos do potencial $A_0(r)$ (Fig. 57a) e do campo $E(r) = -A'_0(r)$ (Fig. 57b) elétricos no primeiro setor topológico para $r_0 = 1$ e alguns valores de σ 149
- Figura 58 – Soluções numéricas para o campo magnético $B(r) = -a'(r)/r$ (Fig. 58a) e a densidade de energia $\mathcal{E}_\Sigma(r)$ (Fig. 58b) em alguns setores topológicos. As duas Figs. obedecem às convenções da Fig. 50. 150
- Figura 59 – Perfis numéricos do campo magnético $B(r) = -a'(r)/r$ (Fig. 59a) e da densidade de energia $\mathcal{E}_\Sigma(r)$ (Fig. 59b) no primeiro setor topológico para $r_0 = 1$ e alguns valores de σ . Ambas as Figs. seguem as convenções da Fig. 57. 150
- Figura 60 – Na Fig. 60a, potencial elétrico na origem ($A_0(0) = \omega_0$, verde) e máximos dos campos elétrico (E_{\max} , preto) e magnético (B_{\max} , azul) e da densidade de energia ($\mathcal{E}_{\Sigma, \max}$, vermelho) em função de n . Na Fig. 60b, posições radiais de E_{\max} (r_E , preto), B_{\max} (r_B , azul) e $\mathcal{E}_{\Sigma, \max}$ (r_ε , vermelho) como funções de n . Nas duas Figs., consideramos $\kappa = r_0 = \sigma = 1$. Os símbolos bola e caixa (diamante) referem-se ao modelo com (sem) um meio dielétrico. Em particular, o símbolo bola (caixa) corresponde ao máximo externo (interno). 151

Figura 61 – Potencial elétrico $A_0(0) = \omega_0$ e densidade de energia $\mathcal{E}_\Sigma(0)$ em $r = 0$ e extremos dos campos elétrico e magnético com suas respectivas posições radiais em função de r_0 com $n = \sigma = \kappa = 1$ (Fig. 61a) e de σ com $n = r_0 = \kappa = 1$ (Fig. 61b). As duas Figs. estão em escala logarítmica. . 152

Sumário

1	INTRODUÇÃO	20
2	RUDIMENTOS DE TOPOLOGIA E TEORIA GRUPOS	24
2.1	Espaço Topológico	24
2.2	Variedades Reais	26
2.2.1	Espaço Projetivo Real	27
2.3	Variedades Complexas	28
2.3.1	Espaço Projetivo Complexo	29
2.4	Homotopia	30
2.4.1	Homotopia de Caminho	31
2.4.2	Mapeamento Homotópico	32
2.4.3	Grupo	32
2.4.3.1	Classe Lateral	33
2.4.3.2	Grupo Fundamental e Grupos Superiores	34
3	VÓRTICES AUTODUAIS NA TEORIA DE CALIBRE $U(1)$	37
3.1	Teoria de Ginzburg-Landau	37
3.2	Modelo de Maxwell-Higgs	42
3.2.1	A Carga Topológica do ANO Vórtice	43
3.2.2	O <i>Ansatz</i> para o ANO Vórtice	45
3.2.3	Formalismo BPS	46
3.2.4	Perfis Assintóticos dos Campos	48
3.2.5	Gráficos das Soluções Numéricas	49
3.3	Modelo de Chern-Simons-Higgs	51
3.3.1	O <i>Ansatz</i> para o Vórtice de Chern-Simons	53
3.3.2	Formalismo BPS	55
3.3.3	O Caso Topológico	56
3.3.3.1	Perfis Assintóticos dos Campos	56
3.3.3.2	Gráficos das Soluções Numéricas	58
3.3.4	O Caso Não Topológico	60
3.3.4.1	Perfis Assintóticos dos Campos	60
3.3.4.2	Gráficos das Soluções Numéricas	61
3.4	Modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs	64
3.5	O <i>Ansatz</i> para o Vórtice de Maxwell-Chern-Simons-Higgs	65
3.6	Formalismo BPS	66
3.7	Perfis Assintóticos dos Campos	67

3.7.1	Gráficos das Soluções Numéricas	68
4	VÓRTICES TOPOLÓGICOS AUTODUAIS EM UM MODELO $CP(2)$ CALIBRADO	71
4.1	Modelo $CP(N-1)$	71
4.1.1	A Carga Topológica do Modelo $CP(N-1)$	73
4.2	Modelo $CP(N-1)$ Calibrado	73
4.3	Modelo $CP(2)$ Calibrado	75
4.4	O Ansatz para o Vórtice $CP(2)$	76
4.5	Formalismo BPS: O Caso $Q = G_3$	79
4.5.1	Perfis Assintóticos dos Campos : O Caso $\beta = \beta_1$	81
4.5.2	Perfis Assintóticos dos Campos : O Caso $\beta = \beta_2$	82
4.6	Gráficos das Soluções Numéricas	83
5	VÓRTICES NÃO-TOPOLÓGICOS AUTODUAIS EM UM MODELO $CP(2)$ CALIBRADO E COM UMA FUNÇÃO DIELÉTRICA	86
5.1	Modelo $CP(2)$ Calibrado e com uma Função Dielétrica	86
5.2	O Ansatz para o Vórtice $CP(2)$ Calibrado não Topológico	87
5.3	Formalismo BPS: O Caso $Q = G_3$	88
5.3.1	Perfis Assintóticos dos Campos: O Caso $\beta = \beta_1$	89
5.3.2	Perfis Assintóticos dos Campos: O Caso $\beta = \beta_2$	91
5.4	Gráficos das Soluções Analíticas Aproximadas	92
5.5	Gráficos das Soluções Numéricas	95
6	VÓRTICES NÃO-TOPOLÓGICOS AUTODUAIS EM UM MODELO $CP(2)$ CALIBRADO E COM A AÇÃO CHERN-SIMONS	97
6.1	Modelo $CP(2)$ Calibrado com a Ação de Chern-Simons	97
6.2	O Ansatz para o Vórtice Carregado no Modelo $CP(2)$ Calibrado	98
6.3	Formalismo BPS: O Caso $Q = G_3$	99
6.3.1	O Caso $\beta = \beta_1$	100
6.3.2	O Caso $\beta = \beta_2$	101
6.4	Gráficos das Soluções Analíticas Aproximadas	102
6.5	Gráficos das Soluções Numéricas	107
7	SÓLITONS AUTODUAIS COM ESTRUTURA INTERNA NO MODELO SIGMA	109
	$O(3)$	109
7.1	Modelo Sigma não Linear	109
7.1.1	Modelo Sigma $O(N)$ não Linear	110
7.1.1.1	Modelo Sigma $O(3)$ não Linear em (2+1)-D	110
7.1.1.2	Modelo Sigma $O(3)$ não Linear Calibrado em (2+1)-D	113

7.1.1.3	Formalismo BPS	115
7.2	Modelo Sigma $O(3)$ não Linear Calibrado e com Função Dielétrica	116
7.2.1	O <i>Ansatz</i> para o Vórtice no Modelo Sigma $O(3)$ Calibrado	117
7.2.2	Formalismo BPS	118
7.2.3	Soluções Autoduais	120
7.2.3.1	Primeiro Cenário	121
7.2.3.2	Perfis Assintóticos dos Campos	122
7.2.3.3	Gráfico das Soluções Numéricas	123
7.2.4	Segundo Cenário	125
7.2.4.1	Perfis Assintóticos dos Campos	126
7.2.4.2	Gráfico das Soluções Numéricas	127
7.2.5	Terceiro Cenário	129
7.2.5.1	Perfis Assintóticos dos Campos	129
7.2.5.2	Gráfico das Soluções Numéricas	130
7.2.5.2.1	O caso mais simples: $\lambda = 0$	130
7.2.5.2.2	O caso geral: $\lambda \neq 0$	133
8	SÓLITONS AUTODUAIS TIPO VÓRTICES COM ESTRUTURA INTERNA NO MODELO MAXWELL-CHERN-SIMONS-SIGMA $O(3)$	135
8.1	Modelo Maxwell-Chern-Simons-Sigma $O(3)$	135
8.2	O <i>Ansatz</i> para o Vórtice Carregado no Modelo Maxwell-Chern-Simons-Sigma $O(3)$	136
8.3	Formalismo BPS	137
8.4	Soluções de Primeira Ordem	139
8.4.1	Primeiro Cenário	139
8.4.1.1	Perfis Assintóticos dos Campos	140
8.4.1.2	Gráfico das Soluções Numéricas	141
8.4.2	Segundo Cenário	144
8.4.2.1	Perfis Assintóticos dos Campos	145
8.4.2.2	Gráfico das Soluções Numéricas	146
9	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	153
9.1	CONCLUSÕES	153
9.2	PERSPECTIVAS	156
	REFERÊNCIAS	158

APÊNDICES

167

	APÊNDICE A – EQUIVALÊNCIA ENTRE AS EQUAÇÕES AUTO- DUAIS E DE EULER - LAGRANGE	168
A.1	Capítulo 4	169
A.1.1	Lei de Ampère	169
A.1.2	Equação de Movimento para o Campo Escalar $\alpha(r)$	170
A.2	Capítulo 5	171
A.2.1	Lei de Ampère	171
A.2.2	Equação de Movimento para o Campo Escalar $\alpha(r)$	172
A.3	Capítulo 6	173
A.3.1	Lei de Gauss	173
A.3.2	Lei de Ampère	173
A.3.3	Equação de Movimento para o Campo Escalar $\alpha(r)$	174
A.4	Capítulo 7	176
A.4.1	Lei Ampère	176
A.4.2	Equação de Movimento para o Campo Escalar Sigma $f(r)$	177
A.4.3	Equação de Movimento para o Campo Escalar $\chi(r)$	177
A.5	Capítulo 8	179
A.5.1	Lei de Gauss e Equação de Movimento para o Campo Escalar $\Psi(r)$	179
A.5.2	Lei Ampère	180
A.5.3	Equação de Movimento para o Campo Escalar Sigma $f(r)$	180
A.5.4	Equação de Movimento para o Campo Escalar $\chi(r)$	181
	APÊNDICE B – TERMOS COMPLEMENTARES DAS TRÊS OR- DENS MAIS BAIXAS	182
B.1	Primeiro Meio Dielétrico do Capítulo 8	183
B.2	Segundo Meio Dielétrico do Capítulo 8	184
	APÊNDICE C – CONVENÇÕES E UNIDADES	186

1 INTRODUÇÃO

O grande marco histórico que abriu caminho para o estudo de vórtices magnéticos ocorreu em 1911 com a publicação do trabalho de H. K. Onnes [1] sobre condução elétrica a baixíssimas temperaturas. Analisando uma amostra de mercúrio, Onnes pôde perceber que, abaixo de uma temperatura crítica¹ $T_C \simeq 4,2 K$, a resistividade desse metal caía abruptamente para zero. Ele associou então essa interessante propriedade a um novo estado da matéria: o estado supercondutor. Outra contribuição notória dada à teoria da supercondutividade foi realizada somente em 1933 por K. W. Meissner e R. Ochsenfeld com a descoberta experimental de uma espécie de diamagnetismo perfeito, que ficou conhecido como Efeito Meissner-Ochsenfeld [2]. Uma descrição fenomenológica de tal efeito foi proposta dois anos mais tarde pelos irmãos London [3]. Ambos consideraram a densidade eletrônica total N como sendo dividida em duas partes homogêneas, $N = N_S + N_N$; a primeira contribuição N_S , nula acima de T_C , refere-se aos elétrons supercondutores e a segunda N_N , aos elétrons no estado de condução normal. O modelo de dois fluidos eletrônicos é bastante rudimentar, pois não leva em conta a variação espacial da distribuição eletrônica no metal. Contudo, baseada no processo termodinâmico de transição de fase de segunda ordem, uma teoria local viria a ser desenvolvida em meados dos anos 50 por V. L. Ginzburg e L. Landau [4, 5], na qual eles introduziram o parâmetro de ordem, uma função de onda efetiva para representar a densidade dos superelétrons $N_S = |\phi(\vec{r})|^2$. Essa teoria permitiu a A. A. Abrikosov classificar os supercondutores em tipo I e tipo II em 1957 [6]. Os estados supercondutores são mantidos desde que não só a temperatura T , mas também os módulos do campo magnético externo H e da densidade de corrente elétrica J aplicados estejam abaixo de intensidades críticas H_C e J_C , respectivamente. Em especial, um supercondutor tipo II possui dois campos magnéticos críticos, tais que $H_{C1} < H < H_{C2}$. Nesse intervalo, H consegue penetrar o material formando uma rede cristalina triangular de vórtices magnéticos com fluxos quantizados. Uma das primeiras observações experimentais das redes de Abrikosov foi feita em 1967 por U. Essmann e H. Träuble [7]. A explicação microscópica do fenômeno da supercondutividade foi dada ainda em 1957 a partir do desenvolvimento da teoria BCS por Bardeen, L. N. Cooper e J. R. Schrieffer [8]. Eles creditaram a ausência da resistividade à bosonização de dois elétrons em um par de Cooper de spin nulo, que se propaga por entre os vórtices sem dissipar energia.

No âmbito da Teoria Clássica de Campos, o tratamento de vórtices surgiu inicialmente com H. B. Nielsen e P. Olesen em 1973 como uma proposta para descrever cordas duais [9], por meio da ação de Maxwell-Higgs. No limite não relativístico, o referente funcional de energia coincide com a energia de livre de Helmholtz introduzida no modelo

¹ Pode variar de um material para outro.

de Ginzburg-Landau, pela identificação do campo de Higgs como o parâmetro de ordem. Em tal correspondência, o processo de transição da fase normal para a supercondutora de um metal está relacionado ao mecanismo de Higgs. A interpretação dos vórtices relativísticos como sólitons – ou defeitos – topológicos surgiu após o trabalho de E. B. Bogomol’nyi publicado em 1976 [10], no qual ele investiga a estabilidade de paredes de domínios, vórtices, monopolos magnéticos e dyons. O método de estabilidade utilizado por Bogomol’nyi também fora usado para o estudo do monopolo de ’t Hooft-Polyakov e do dyon de Julia-Zee por M. K. Prasad e C. M. Sommerfield dois anos antes [11] e, por isso, é conhecido hoje como formalismo BPS. Um defeito tem forma e energia bem definidas e surge como solução clássica, estável, estacionária e localizada de um sistema físico não linear. Já um sólito é um defeito viajante com velocidade bem definida, que pode até mesmo interagir com outro sólito sem sofrer deformação. Esses objetos se dividem de maneira básica em duas categorias: os topológicos e os não topológicos. A estabilidade deles está intimamente ligada a uma lei de conservação. Enquanto os topológicos decorrem da carga topológica conservada (a exemplo daqueles previstos por Bogomol’nyi), a existência dos não topológicos advém da conservação da carga de Noether, ou ainda de ambas as cargas, como é o caso dos Q-balls e Q-lumps [12], em ordem. Vale dizer que a carga topológica é quantizada em termos do *winding number* (do inglês, *número de enrolamento*) n , um número inteiro associado à relação de homotopia entre os manifolds dos espaços físico e interno. Isso reflete também diretamente na quantização do fluxo magnético do vórtice, cuja topologia é classificada segundo o grupo fundamental de Poincaré $\pi_1(S^1)$.

Vórtices relativísticos autoduais – BPSs – topológicos e não topológicos possuindo carga elétrica foram inicialmente abordados dentro das Eletrodinâmicas de Chern-Simons-Higgs [13–15] e de Maxwell-Chern-Simons-Higgs [16] nos anos 90. A investigação de tais defeitos começou a partir do estudo do Efeito Hall Quântico [17–19] e da teoria dos ânions [20]. Esses vórtices, diferentemente dos de Abrikosov, exibem ainda momento angular e momento de dipolo magnético. O fluxo magnético e estas duas últimas grandezas são quantizadas em cada setor topológico não trivial ($n \neq 0$); porém, eles não são quantizados no caso não topológico, no qual a simetria de *gauge* (do inglês, *calibre*) $U(1)$ não é espontaneamente quebrada. Apesar de a teoria de Maxwell-Higgs usual não suportar vórtices BPSs não topológicos, experimentos têm mostrado a ocorrência de fluxo magnético não quantizado em supercondutores devido a efeitos de bordas [21], conforme previsto por J. Bardeen em 1961 [22]. Além disso, em anos recentes, modelos generalizados por termos cinéticos não canônicos têm apontado a existência de vórtices não topológicos, a exemplo do trabalho de D. Bazeia *et al.* divulgado em 2005 [23].

Motivados por essas ideias, nós investigamos a existência de novas estruturas de vórtices topológicos e não topológicos. Para isso, apresentamos no capítulo 2 os principais conceitos relacionados a Topologia e Teoria de Grupo, os quais servirão de auxílio para melhor compreensão desta tese. No capítulo 3, falamos brevemente sobre os aspectos

básicos da teoria de Ginzburg-Landau, bem como revisamos o formalismo BPS aplicando-o aos modelos de Maxwell-Higgs, de Chern-Simons-Higgs e de Maxwell-Chern-Simons-Higgs.

No capítulo 4, introduzimos a ação de campos complexos projetivos $CP(N - 1)$ calibrada, com a qual A. Yu. Loginov indicou em 2016 a formação de vórtices abelianos de segunda ordem² tanto com fluxo magnético quantizado quanto não quantizado, para $N = 3$, em duas circunstâncias distintas. Mostramos ainda que os estados BPSs dos vórtices de Loginov equiparam as duas diferentes configurações por uma simples renormalização. Esse é o conteúdo do nosso primeiro artigo, publicado na revista *Physics Letters B* [24]. Ademais, extensões generalizadas e com a ação de Chern-Simons do modelo $CP(2)$ que temos investigado são discutidas nos capítulos 5 e 6, em sequência, e indicam o surgimento de vórtices de primeira ordem não topológicos (um fato interessante descoberto foi a obtenção de fluxos magnéticos quantizados para certos valores do *winding number*, mesmo com os campos escalares atingindo estados de mínimo simétrico). Em particular, veremos que os novos vórtices carregados exibem um efeito de inversão de campo elétrico. Os capítulos 5 e 6 são temas dos nossos segundo [25] e terceiro [26] artigos, respectivamente, ambos publicados na revista *Physical Review D*.

Além disso, a possibilidade de se introduzir um campo de *gauge* na subálgebra de $O(3)$, devido ao isomorfismo entre $O(2)$ e $U(1)$, permitiu a busca por outras estruturas desses defeitos por meio do modelo sigma $O(3)$ não linear, cuja explanação é feita no capítulo 7. Uma característica peculiar dessa teoria, mostrada por B. J. Schroers em 1995 [27], é o surgimento de dois tipos de mínimo. O primeiro deles não quebra a subsimetria $O(2)$ e as configurações revelam degenerescência em cada setor topológico, classificado conforme o segundo grupo de homotopia $\pi_2(S^2)$. Em contrapartida, P. Mukherejee mostrou dois anos mais tarde que a escolha do segundo mínimo – assimétrico – quebra tal degenerescência, pois o grupo de homotopia associado passa a ser o fundamental $\pi_1(S^1)$ [28, 29]. Baseados nestes dois últimos trabalhos, averiguamos no capítulo 7 uma extensão do modelo sigma, compondo o subgrupo $O(2) \times Z_2$ pela introdução de uma função dielétrica generalizada dependente de um campo escalar real extra, tendo em vista a previsão da existência de vórtices autoduais em meios dielétricos por meio das composições $U(1) \times Z_2$ [30], $CP(2) \times Z_2$ [31], cujas aplicações remetem à física de metamateriais [32–34]. Este capítulo rendeu o nosso quarto artigo, que foi publicado também na revista *Physical Review D* [35]. Seguindo a mesma linha de raciocínio, no capítulo 8, adicionamos a dinâmica de Chern-Simons à de Maxwell no modelo anterior, com o objetivo de descrever novos defeitos tipo vórtices BPSs carregados imersos em meios dielétricos. Para esse fim, mostramos como introduzir um campo escalar auxiliar na nova teoria, evitando que o potencial autodual viole a simetria de calibre. Os resultados deste último modelo estão em fase de publicação.

² Chamaremos assim os vórtices obtidos via equações de Euler-Lagrange que não são equivalentes a equações autoduais.

Finalmente, relatamos as nossas conclusões e perspectivas no capítulo 9. No apêndice A, mostramos a correspondência entre as equações BPSs e as de Euler-Lagrange dos modelos considerados. No apêndice B, apresentamos os termos complementares das soluções autoduais em série associados ao modelo do capítulo 8. No apêndice C, definimos as nossas convenções e unidades.

2 RUDIMENTOS DE TOPOLOGIA E TEORIA GRUPOS

Dividimos o estudo da Topologia em quatro grandes campos: a *Topologia Geral* [36,37], que estuda as propriedades dos espaços topológicos usando como base a Teoria dos Conjuntos; a *Topologia Combinatória* [38], cujo interesse é investigar tipos especiais de espaços topológicos denominados de poliedros ou simplexos; a *Topologia Algébrica* [39–41], a qual conecta as características dos espaços topológicos com propriedades de grupos (como grupos de *homotopia*); e finalmente a *Topologia Diferencial* [42], que estuda as variedades diferenciáveis, por meio de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral e da Topologia Algébrica.

Este capítulo trata de discutir algumas ideias fundamentais acerca de *Topologia e Homotopia* que contribuirão para uma melhor compreensão desta obra.

2.1 Espaço Topológico

Nesta seção, introduzimos o conceito de espaço topológico. Considere que U seja um conjunto qualquer e representamos por $T = \{T_1, T_2, \dots, T_k\}$ uma coleção de subconjuntos abertos de U , tal que T contém:

1. O conjunto U e o conjunto vazio \emptyset ;
2. A união de quaisquer subconjuntos (finitos ou infinitos) abertos de T ;
3. A intersecção de qualquer número finito de subconjuntos abertos de T .

O par (T, U) denomina-se *espaço topológico* e diz-se que T define uma topologia em U [39,43–45]. Alguns autores denotam (T, U) simplesmente por U e usaremos aqui também essa convenção por praticidade. Se T for uma coleção de todos os subconjuntos de U , temos então uma *topologia discreta*. Designamos *topologia trivial* T em U , se $T = \{\emptyset\}$.

Veja como exemplo o conjunto discreto $T = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, U = \{1, 2, 3\}\}$. Ele é um espaço topológico composto por finitos subconjuntos. Um contraexemplo imediato é o conjunto $T = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, U = \{1, 2, 3\}\}$. Este último não forma um espaço topológico, pois $\{1\} \cup \{3\} = \{1, 3\} \notin T$, violando a definição 2.

Outro exemplo que pode ser destacado é o espaço \mathbb{R}^n – representando o conjunto U – com a topologia T dada por discos abertos, em que cada k -ésimo disco possui seu centro em um k -ésimo ponto $P_k \in \mathbb{R}^n$. Geometricamente, esses discos D_{r_k} de raio r_k podem

ser vistos como um conjunto de pontos $Q_k \in \mathbb{R}^n$, tal que $|P_k - Q_k| < r_k$. Perceba que a condição 1 é trivialmente satisfeita para $r_k = 0$; isso corresponde a um disco D_0 de raio nulo, ou simplesmente nenhum disco. As propriedades 2 e 3 são verificadas, pois $D_{r_j} \cup D_{r_k}$ e $D_{r_j} \cap D_{r_k} \in T$ para quaisquer j e k . Desse modo, o conjunto \mathbb{R}^n tem uma topologia discreta T dada por infinitos subconjuntos formados pelos discos D_{r_k} .

A *vizinhança aberta (fechada)* de um ponto P_U pertencente a um espaço topológico U é definida como qualquer conjunto aberto (fechado) A contido em U que contém P_U . Ou seja, se $U \supset A$ e $A \supset P_U$, então A é vizinhança aberta (fechada) de P_U . Quando dois pontos arbitrários têm a intersecção de suas vizinhanças vazia, chamamos o espaço topológico de *espaço de Hausdorff*.

Sejam U e V dois espaços topológicos. Se tivermos uma transformação bijetiva H que mapeie cada ponto $P_U \in U$ a um, e somente um, ponto $P_V \in V$ ($H : P_U \rightarrow P_V$) e, além disso, se a transformação e, logicamente, sua inversa ($H^{-1} : P_V \rightarrow P_U$) forem contínuas¹, então H é chamada de *homeomorfismo* e os dois espaços são ditos *topologicamente equivalentes*.

Não obstante, o conceito de equivalência não está ligado necessariamente à existência de um mapeamento. É interessante aqui apresentar a definição formal: seja T um conjunto qualquer e t_a, t_b, t_c quaisquer elementos de T . Definimos *relação de equivalência* (símbolo \sim) uma relação que satisfaça:

1. **A simetria**, $t_a \sim t_b \Rightarrow t_b \sim t_a$;
2. **A transitividade**, $t_a \sim t_b$ e $t_b \sim t_c \Rightarrow t_a \sim t_c$;
3. **E a reflexividade**, $t_a \sim t_a$.

Com base nisso, o subconjunto formado por todos os elementos $t \in T$, tal que $t \sim t_a$ define uma *classe de equivalência* e a representamos por:

$$[t_a] = \{t \in T | t \sim t_a\}. \quad (2.1)$$

Considere o mapeamento $g : U^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $(u, v) \in U^2$, satisfazendo as seguintes condições:

1. $g(u, v) = g(v, u)$;
2. $g(u, v) + g(v, w) \geq g(u, w)$;
3. $g(u, v) \geq 0$ and $g(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$.

¹ O nome contínua se refere ao fato de que pontos vizinhos de P_1 são levados a pontos vizinhos de P_2 em uma correspondência de um para um.

A função g é conhecida como *métrica* e o espaço topológico onde se tem uma métrica positiva definida é nomeado *espaço métrico*.

Por fim, enfatizamos que, diferentemente dos espaços métricos, onde a noção de distância entre dois pontos é definida, a Topologia Geral vai além disso e o conceito de vizinhança é introduzido sem fazer referência a um número real, como é o caso do disco aberto D_{r_j} em que os pontos Q_j formam a vizinhança de um dado ponto P_j . Portanto, podemos entender a topologia como a descrição de propriedades que permanecem invariantes perante homeomorfismos, sem lidar necessariamente com propriedades métricas ou numéricas. Dessa forma, dizemos, por exemplo, que uma esfera é equivalente a um elipsóide no sentido topológico.

2.2 Variedades Reais

Quando olhamos para a superfície da Terra, temos a percepção de que ela é plana, apesar de sabermos que ela tem uma forma quase esférica. Tal sensação equivocada ocorre posto que olhamos a superfície terrestre apenas localmente. O manifold (ou variedade) é uma generalização do conceito de superfície, a qual localmente poder ser considerada plana, como a do nosso planeta.

Para determinar um ponto em uma superfície esférica, podemos levar em conta essa superfície imersa – “dentro” – do espaço tridimensional \mathbb{R}^3 e adotar os dois ângulos usuais (θ, ϕ) [43]. Todavia, nem sempre é apropriado proceder assim. No caso da Terra, os pontos geográficos podem ser projetados em uma superfície plana e descritos pelas suas longitudes e latitudes, de acordo com o mapa-múndi. A introdução da ideia de manifold visa generalizar a representação de qualquer superfície sem a necessidade de imersão em outro espaço [45]. Faz-se necessário então introduzir a definição rigorosa de manifold: dizemos que \mathcal{M} é um *manifold* n -dimensional e diferenciável, se, dadas duas coleções de subconjuntos abertos $T = \{T_1, T_2, \dots, T_k\}$ e $T' = \{T'_1, T'_2, \dots, T'_k\}$, tais que $T_k \in \mathcal{M}$ e $T'_k \in \mathbb{R}^n$, e dado um homeomorfismo $h_k : T_k \rightarrow T'_k$, as seguintes condições são verificadas:

1. \mathcal{M} é dado com um conjunto de pares $\{T_k, h_k\}$;
2. \mathcal{M} é um espaço topológico;
3. A união de todos os $T_{k'}$ s equivale a \mathcal{M} , ou seja, $\cup_k T_k = \mathcal{M}$;
4. $T_j \cap T_k \neq \emptyset$ e o mapa $H_{jk} = h_j \circ h_k^{-1}$, correspondendo a $H_{jk} : h_k(T_j \cap T_k) \rightarrow h_j(T_j \cap T_k)$, é diferenciável infinitas vezes.

Assim, vemos que um manifold é um espaço topológico de Hausdorff, no qual cada ponto e sua vizinhança são homeomórficos a \mathbb{R}^n . Um k -ésimo par $\{T_k, h_k\}$ denominamos *carta*

e o conjunto de cartas, *atlas*. Chamamos T_k de *vizinhança coordenada*, ao passo que h_k , de *função coordenada* ou apenas de *coordenada*.

Seja então P um ponto abstrato² de $T_j \in \mathcal{M}$. O homeomorfismo h_j é descrito portanto por $h_j : P \rightarrow Q = \{x_1(P), x_2(P), \dots, x_n(P)\}$, tal que o ponto Q pertencente a um disco aberto de raio r (D_r) esteja contido em \mathbb{R}^n . Se usarmos outra representação para P , digamos, $h_k : P \rightarrow Q' = \{y_1(P), y_2(P), \dots, y_n(P)\}$, de modo que $P \in T_k$, $Q' \in \mathbb{R}^n$ e, obviamente, $T_j \cap T_k \neq \emptyset$, então o mapa $H_{jk} = h_j \circ h_k^{-1}$ é visto como $x_n = x_n(y_n)$, correspondendo a uma mudança de coordenadas.

Quando temos dois atlas, sejam eles $\{T_k^1, h_k^1\}$ e $\{T_k^2, h_k^2\}$, de modo que $\{T_k^1, h_k^1\} \cup \{T_k^2, h_k^2\} = \{T_k^3, h_k^3\}$ também é um atlas, chamamos $\{T_k^1, h_k^1\}$ e $\{T_k^2, h_k^2\}$ de *compatíveis* e eles definem uma classe de equivalência chamada de *estrutura diferenciável*, significando que esses atlas possuem a mesma estrutura diferencial em \mathcal{M} .

2.2.1 Espaço Projetivo Real

Considere, por exemplo, o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^{n-1}$ descrito como o conjunto de retas $\vec{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq \vec{0}$ que passam através da origem em \mathbb{R}^n . Podemos ainda ver $\mathbb{R}P^{n-1}$ como o conjunto da classe de equivalência definida no espaço quociente $\mathbb{R}^n - \{0\} \setminus \sim$ por $\vec{r} \sim \vec{r}'$, se, e somente se, existir um $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $\vec{r}' = \alpha\vec{r}$. Essa classe é denotada por

$$[\vec{r}] = \{\alpha\vec{r} \mid \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}\}. \quad (2.2)$$

As componentes de \vec{r} , x_1, x_2, \dots, x_n , são conhecidas como *coordenadas homogêneas*. A princípio, elas não determinam um bom sistema de coordenadas, haja vista que elas descrevem um espaço n -dimensional, enquanto o manifold $\mathbb{R}P^{n-1}$ possui dimensão $n - 1$. Para levar em conta essa dimensão reduzida, é conveniente considerar a vizinhança coordenada T_k , sendo representada pelo conjunto de retas nas quais $x_k \neq 0$, e introduzir as chamadas *coordenadas inomogêneas* em T_k , a saber

$$\vec{X}_k = (X_k^1, X_k^2, \dots, X_k^{k-1}, X_k^{k+1}, \dots, X_k^{n-1}), \quad (2.3)$$

em que temos utilizado

$$X_k^j = \frac{x_j}{x_k}. \quad (2.4)$$

Perceba como essa escolha independe da representação explícita do sistema de coordenadas, tendo em vista a igualdade

$$(X_k^j)' = \frac{x_j'}{x_k'} = \frac{\alpha x_j}{\alpha x_k} = \frac{x_j}{x_k} = X_k^j, \quad (2.5)$$

² No sentido de que a representação de P independe de qualquer representação explícita em um sistema de coordenada.

que surge como consequência da classe de equivalência $\vec{r} \sim \vec{r}'$. Além disso, duas funções coordenadas h_j e h_k dadas respectivamente por

$$\begin{cases} h_j : \vec{r} \rightarrow \vec{X}_j, \vec{r} \in T_j, \\ h_k : \vec{r} \rightarrow \vec{X}_k, \vec{r} \in T_k, \end{cases} \quad (2.6)$$

com $\vec{r} \in T_j \cap T_k \neq \emptyset$, determinam o mapa $H_{jk} = h_j \circ h_k^{-1} = h_k(T_j \cap T_k) \rightarrow h_j(T_j \cap T_k)$, equivalente à mudança de coordenadas

$$\vec{X}_k \rightarrow \vec{X}_j, \quad (2.7)$$

ou em termos das componentes,

$$X_k^i \rightarrow X_j^i. \quad (2.8)$$

Sabemos ainda de (2.4) que $X_j^i = \frac{x_i}{x_j}$ e $X_k^i = \frac{x_i}{x_k}$, implicando em

$$H_{jk} : X_j^i = \frac{x_k}{x_j} X_k^i. \quad (2.9)$$

Note que em (2.3) não contamos $X_k^k = 1$, o que reduz a dimensão de n para $n - 1$. Para compreender melhor essa redução dimensional, considere por exemplo um ponto $(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$. Em coordenadas homogêneas, uma possível representação é dada por $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, se assumirmos $X_k = \frac{x_k}{x_3}$ ($k = 1, 2, 3$), o que equivale ao mapa de projeção $P : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (X_1, X_2) = \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right)$.

2.3 Variedades Complexas

Para introduzir o conceito de manifold complexo, é necessário apresentar previamente a definição de função *holomórfica* ou *analítica*. Seja uma aplicação escalar $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que $f = f(z)$ é analítica em um disco aberto D_r de raio r , se, para todo $z = x + yi \in D_r$, a função $f = u(x, y) + v(x, y)i$ satisfizer as equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.10b)$$

ou de forma equivalente, definindo o operador de Cauchy-Riemann $\partial_+ = \partial_x + i\partial_y$,

$$\partial_+ f(z) = 0. \quad (2.11)$$

Em geral, se tivermos uma aplicação vetorial $\vec{f} : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$, tal que $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, sendo $\vec{f} = \vec{f}(\vec{z})$ e $\vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m)$, ela é dita holomórfica se cada $f_n(\vec{z})$ assim o for. Estamos pronto agora para definir o manifold complexo em direta analogia ao caso real.

Dizemos que \mathcal{M} é um *manifold n -complexo-dimensional* e diferenciável, se, dadas duas coleções de subconjuntos abertos $T = \{T_1, T_2, \dots, T_k\}$ e $T' = \{T'_1, T'_2, \dots, T'_k\}$, tais que $T_k \in \mathcal{M}$ e $T'_k \in \mathbb{C}^n$, e dado um homeomorfismo $h_k : T_k \rightarrow T'_k$, as seguintes condições são satisfeitas:

1. \mathcal{M} é dado com um conjunto de pares $\{T_k, h_k\}$;
2. \mathcal{M} é um espaço topológico;
3. A união de todos os $T_{k'}$ s equivale a \mathcal{M} , isto é, $\cup_k T_k = \mathcal{M}$;
4. $T_j \cap T_k \neq \emptyset$ e o mapa $H_{jk} = h_j \circ h_k^{-1}$, correspondendo a $H_{jk} : h_k(T_j \cap T_k) \rightarrow h_j(T_j \cap T_k)$, é holomórfico.

Vale lembrar que a noção de holomorfismo não se limita somente às funções (ou campos) complexas que obedecem às equações de Cauchy-Riemann definidas em termos do operador $\partial_+ = \partial_x + i\partial_y$. De fato, em Teoria de Campos, a forma do operador de Cauchy-Riemann está diretamente ligada à dinâmica do campo escalar. Como exemplo, veja a equação de Cauchy-Riemann generalizada (3.54) para o campo de Higgs, a qual corresponde a uma das equações autoduais para o vórtice do modelo de Maxwell-Higgs.

2.3.1 Espaço Projetivo Complexo

Analogamente à subseção anterior, considere como exemplo o *espaço projetivo complexo* $\mathbb{C}P^{n-1}$, representado como o conjunto de linhas $\vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \neq \vec{0}$ que passam através da origem em \mathbb{C}^n . É possível ainda ver $\mathbb{C}P^{n-1}$ como o conjunto da classe de equivalência definida no espaço quociente $\mathbb{C}^n - \{0\} \setminus \sim$ por $\vec{z} \sim \vec{z}'$, se, e somente se, existir um $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $\vec{z}' = \alpha\vec{z}$. Denotamos essa classe por

$$[\vec{z}] = \{\alpha\vec{z} \mid \alpha \in \mathbb{C} - \{0\}\}. \quad (2.12)$$

As componentes z_1, z_2, \dots, z_n de \vec{z} também são chamadas de *coordenadas homogêneas*. Como elas descrevem um espaço n -complexo-dimensional, enquanto o manifold $\mathbb{C}P^{n-1}$ possui dimensão complexa $n-1$, é necessário considerar outra vez a vizinhança coordenada T_k (sendo denotada pelo conjunto de linhas nas quais $z_k \neq 0$) e introduzir as chamadas *coordenadas inomogêneas* em T_k , ou seja:

$$\vec{Z}_k = (Z_k^1, Z_k^2, \dots, Z_k^{k-1}, Z_k^{k+1}, \dots, Z_k^{n-1}), \quad (2.13)$$

em que usamos

$$Z_k^j = \frac{z_j}{z_k}. \quad (2.14)$$

Assim, o mapa H_{jk} fica dado por

$$H_{jk} : Z_j^i = \frac{z_k}{z_j} Z_k^i, \quad (2.15)$$

cujo holomorfismo é garantido pelo fato de $z_j \neq 0$.

O conceito de espaço projetivo complexo introduzido aqui é de suma importância para entendermos o modelo $CP(2)$ discutido no capítulo 4. Nesse modelo, o campo $CP(2)$ está definido no espaço CP^2 e obedece a uma condição de holomorfismo imposta pelo operador de Cauchy-Riemann dado em termos do operador diferencial (4.15). Naturalmente, o operador de Cauchy-Riemann é estendido para a teoria calibrada.

2.4 Homotopia

Para introduzir o conceito de homotopia, inicialmente vamos analisar um diagrama prático. Considere dois espaços topológicos X e Y , conforme apresentado na Figura 1 [43]. Na Figura 1a, é possível deformar o caminho fechado β de maneira contínua até torná-lo um ponto. Um procedimento similar não podemos fazer com o caminho α , em virtude da existência de um buraco no seu interior. Por outro lado, na Figura 1b qualquer circuito α , β ou γ pode ser reduzido continuamente a um ponto. Assim, os caminhos em Y são ditos *homotópicos* a um ponto e formam uma classe de equivalência denominada *classe de homotopia*. Especialmente na Figura 1b, a curva fechada β pode deformar-se de modo contínuo até se sobrepor em α . Dizemos que α e β também são homotópicos, tendo em vista que estabelecem entre si uma relação de *homotopia*.

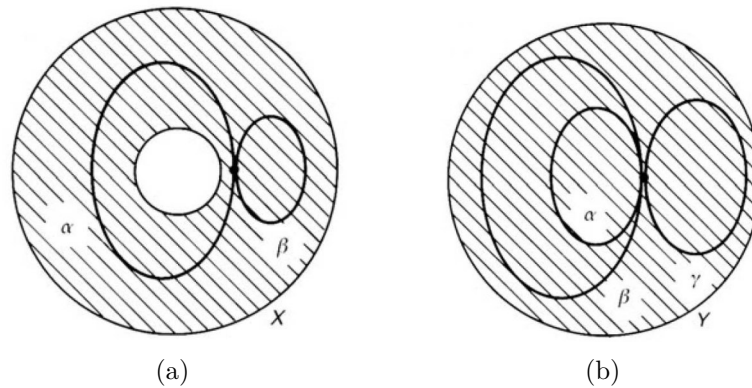


Figura 1 – Classe de homotopia. Fonte [43].

O processo de deformação contínua pode ser melhor entendido se imaginarmos que ele seja descrito por um conjunto de funções $f(t)$, sendo t um parâmetro contínuo, digamos $t \in \tau = [0, 1]$. A título de exemplo, tais funções $f(t)$ poderiam representar um ponto $y \in Y$ na Figura 1b, tendo em mente que $f(0) = y_0$ pertence ao caminho β e que $f(1) = y_1$, ao circuito α .

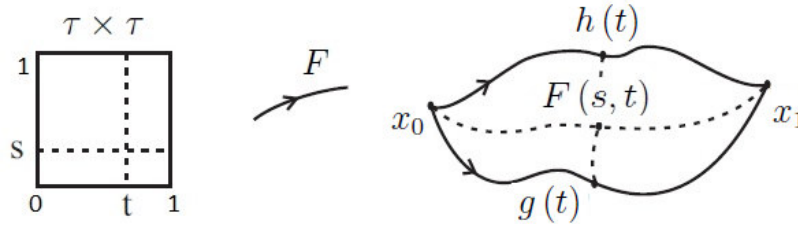


Figura 2 – Deformação de caminho formando uma classe de homotopia. Figura adaptada de [46].

2.4.1 Homotopia de Caminho

Consideramos agora um espaço topológico X e um parâmetro t que pertence ao intervalo fechado $\tau = [0, 1]$. Uma função contínua $f(t) : \tau \rightarrow X$ é denominada *caminho em X* ou *homotopia de caminho* com ponto inicial x_0 e ponto final x_1 , caso $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$. Nessas circunstâncias, X é dito *conexo por caminhos*. Se tivermos um caminho fechado, isto é, $f(0) = f(1) = x_0$, o mesmo é chamado de *loop*, com x_0 sendo conhecido como *ponto base*. De modo particular, caso $x \in X$ e I for o mapa identidade, então temos o caminho constante definido por $I : \tau \rightarrow X$, de maneira tal que $I(t) = x$ para qualquer $t \in \tau = [0, 1]$. Segue de imediato que I compõe trivialmente um loop com ponto base x qualquer, ou seja, $I(0) = I(1) = x$. Ademais, dados dois caminhos quaisquer $g(t), h(t) : \tau \rightarrow X$ possuindo os mesmos pontos inicial e final ($g(0) = h(0) = x_0$ e $g(1) = h(1) = x_1$, respectivamente) de maneira que $g(t)$ possa ser deformado continuamente em $h(t)$ e vice-versa, então X é denotado de *simplesmente conexo* [39, 40, 45]. Essa deformação pode ser caracterizada por uma função contínua $F(s, t) : \tau \times \tau \rightarrow X$ (com $s \in [0, 1]$) satisfazendo as condições:

$$\begin{cases} F(0, t) = g(t), \\ F(1, t) = h(t) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} F(s, 0) = g(0) = h(0) = x_0, \\ F(s, 1) = g(1) = h(1) = x_1. \end{cases} \quad (2.16)$$

Sob esses requerimentos, as funções $g(t)$ e $h(t)$ são classificadas como homotópicas e os caminhos são ditos *homotopicamente equivalentes* (veja a ilustração na Figura 2 [46]). Perceba que s é o parâmetro de deformação contínua de $g(t)$ sobre $h(t)$.

Considerando os mesmos critérios propostos em (2.16), porém com $x_1 = x_0$, os caminhos $g(t)$ e $h(t)$ viram loops com ponto base x_0 e as novas condições agora são:

$$\begin{cases} F(0, t) = g(t), \\ F(1, t) = h(t) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} F(s, 0) = g(0) = h(0) = x_0, \\ F(s, 1) = g(1) = h(1) = x_0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Observe na Figura 1b que, se imaginarmos $g(t)$ e $h(t)$ como sendo os loops β e α , em ordem, $F(s, t)$ também representa a função de deformação contínua de $g(t)$ sobre $h(t)$. Nesse caso, $g(t)$ e $h(t)$ formam um classe de homotopia de loops. Em resumo, a classe de todos os caminhos que conectam x_0 a x_1 (ou ao próprio x_0 no caso do loop) é homotópica a um caminho específico (digamos $c(t)$) que também liga os pontos x_0 a x_1 , na hipótese

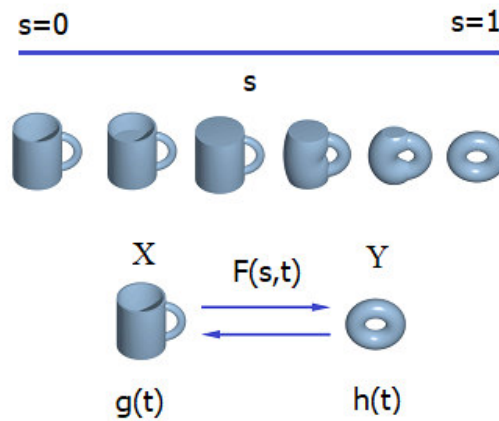


Figura 3 – Exemplo de homotopia equivalente entre uma caneca e uma rosca. Adaptação de [47].

desses segmentos poderem ser deformados continuamente sobre $c(t)$. Especialmente, a classe de homotopia dos loops formam uma estrutura de grupo que será discutida na subseção 2.4.3.

2.4.2 Mapeamento Homotópico

Estudamos na seção precedente o conceito de homotopia de caminhos, levando em conta apenas mapeamentos em um único espaço topológico X . Contudo, esse estudo pode ser estendido para mapas entre dois espaços topológicos X e Y de modo semelhante. Sejam então $g(t), h(t) : X \rightarrow Y$ aplicações de X em Y . Se existir uma função contínua $F(s, t) : X \times \varsigma \rightarrow Y$, sendo $t \in \tau = [0, 1]$ e $s \in \varsigma = [0, 1]$, com $F(0, t) = g(t)$ e $F(1, t) = h(t)$, então $g(t)$ é chamada de *homotópica* a $h(t)$ e designamos por $g(t) \sim h(t)$. Denominamos *homotopia* o mapeamento $F(s, t)$ entre $g(t)$ e $h(t)$. Se houver duas aplicações contínuas $g(t) : X \rightarrow Y$ e $h(t) : Y \rightarrow X$, tal que a $g(t) \circ h(t) \sim I$ e $h(t) \circ g(t) \sim I$, sendo I o mapa identidade, dizemos que os espaços topológicos X e Y possuem o mesmo *tipo de homotopia* e denotamos por $X \simeq Y$. Enquanto o mapa $g(t)$ é chamado de *homotopia equivalente* de $h(t)$, o mapa $h(t)$ é denominado *homotopia inversa* de $g(t)$ (veja um exemplo na Figura 3 [47]).

Em suma, vemos que a homotopia pode ser compreendida como uma relação de equivalência entre um conjunto de funções contínuas – caminhos – ou entre dois espaços topológicos, cujos mapas entre essas funções ou entre os espaços topológicos são regulados por um parâmetro de deformação.

2.4.3 Grupo

Nas seções 2.4.1 e 2.4.2, aprendemos sobre as relações fundamentais de equivalência entre caminhos e espaços topológicos e destacamos que a classe de loops forma um grupo.

Chamamos de grupo um conjunto G no qual é definido uma operação de multiplicação³ e as seguintes propriedades são verificadas [48]:

1. **Associativa.** Para quaisquer elementos g_1, g_2 e $g_3 \in G$, temos: $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$;
2. **Elemento identidade.** Existe um elemento identidade $I \in G$, tal que $gI = Ig = g$, para todo $g \in G$;
3. **Elemento inverso.** Há um elemento inverso $g^{-1} \in G$, de maneira que $gg^{-1} = g^{-1}g = I$, para todo $g \in G$.

2.4.3.1 Classe Lateral

É útil comentar sobre o conceito de classe lateral (ou coset). Considere um subgrupo $H \subset G$ e um elemento qualquer $g \in G$, com $g \notin H$. O produto Hg (gH) é denominado *classe lateral à direita (esquerda)*, ou também *right (left) coset*. Perceba que uma classe lateral não forma necessariamente um grupo. Se existir um elemento $g_1 \in G$, tal que, dados dois elementos quaisquer g_2 e $g_3 \in G$, tivermos $g_3 = g_1g_2(g_1)^{-1} \Leftrightarrow (g_1)^{-1}g_3g_1 = g_2$, então chamamos g_3 de *conjugado* ou *equivalente* de g_2 , pois eles estabelecem entre si uma relação de equivalência, $g_2 \sim g_3$. Tal relação determina uma *classe* de G . Em particular, o subgrupo H é nomeado *normal* ou *invariante*, se, dados $h \in H$ e $g \in G$, estabelecer-se $h = ghg^{-1} \forall h$ e g . Nesse caso, H contém todos os elementos da classe de G , ou ainda nenhum deles. Além disso, como os cosets direito e esquerdo de H são iguais, todos os elementos de H comutam com todos os de G , isto é: $hg = gh$. Obviamente, qualquer grupo tem seus subgrupos normais triviais $G = H$ e $H = I$. O grupo composto pelo subgrupo invariante H e pelas suas classes laterais forma o *grupo fator* F de G , representado por G/H . Sejam, por exemplo, um vetor $\vec{u} \in \mathbb{R}^{n-1}$ descrito como $\vec{u} = \sum_{i=1, i \neq j}^n u_i \hat{x}_i$ e um outro vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^1$ representado por $\vec{v} = v_j \hat{x}_j$, sendo \hat{x}_j uma j -ésima direção fixa. O conjunto de vetores resultantes $\vec{u} + \vec{v} = \sum_{i=1}^n u_i \hat{x}_i$ estabelece um coset de \mathbb{R}^n , designado por todos os vetores \vec{u} , os quais podem estar nos infinitos hiperplanos de dimensão \mathbb{R}^{n-1} ortogonais ao eixo- j . Nesse caso, o grupo fator é caracterizado por todos aqueles vetores $\vec{v} = \sum_{i=1}^n u_i \hat{x}_i - \vec{u}$ ao longo da direção \hat{x}_j . Portanto, a dimensão desse grupo fator F será determinada por $\dim F = \dim \mathbb{R}^n - \dim \mathbb{R}^{n-1} = 1$. Em geral, um grupo G é dito *contínuo de n -parâmetros* quando seus elementos dependem dos parâmetros contínuos (t_1, t_2, \dots, t_n) , com $t_n \in \mathbb{R}$, ou seja, $g = g(t_1, t_2, \dots, t_n)$. Esse grupo é denominado *Grupo de Lie*, se g for uma função de classe C^∞ em t_n . Se todos os t_n 's forem independentes, dizemos que $\dim G = n$. A superfície abstrata $g = g(\vec{t})$ descreve um manifold que localmente (em torno da unidade) determina um espaço vetorial n -dimensional chamado de *Álgebra de Lie do Grupo (AG)*.

³ Tal operação não se resume somente à multiplicação ordinária, podendo depender da natureza dos elementos que formam o grupo. No caso de um grupo de vetores, por exemplo, a operação de multiplicação se torna soma vetorial usual.

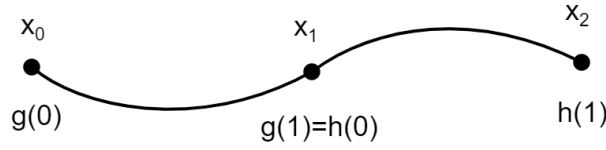


Figura 4 – Operação de caminho.

Notamos então que o espaço projetivo supracitado $\mathbb{R}P^{n-1}$ ($\mathbb{C}P^{n-1}$) pode ser entendido ainda como um espaço vetorial real (complexo), onde os $\vec{X}_{k's}$ ($\vec{Z}_{k's}$) tomam valores na AG do grupo fator $SO(n)/O(n-1)$ ($SU(n)/U(n-1)$).

2.4.3.2 Grupo Fundamental e Grupos Superiores

Vamos agora entender as características dos grupos de loops. Para isso, introduzimos a operação de caminhos [39–44]. Considere que X seja um espaço topológico, onde esteja definido os mapas $g(t), h(t) : \tau \rightarrow X$, com $t \in \tau = [0, 1]$, formando um caminho tal que $g(0) = h(1)$. O produto entre $g(t)$ e $h(t)$ é denotado por $(g * h)(t)$ e definido como:

$$p(t) \equiv (g * h)(t) = \begin{cases} g(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ h(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (2.18)$$

A Figura 4 ilustra que o produto $(g * h)(t)$ corresponde à primeira metade do caminho representado por $g(t)$, no intervalo de x_0 a x_1 ; a segunda metade, no intervalo de x_1 a x_2 , sendo designada por $h(t)$. Definimos o elemento inverso de $g(t)$ como $g^{-1}(t) = g(1 - t)$, o qual se refere a um caminho inverso de $g(t)$, partindo de x_1 até x_0 . A propriedade (1) é satisfeita, pois, dados $p(t), g(t)$ e $h(t) \in G$, obtemos:

$$[p(t) g(t)] h(t) = p(t) [g(t) h(t)]. \quad (2.19)$$

Aprendemos que o elemento identidade formado pelo mapa $I : \tau \rightarrow X$, em que $I(t) = x$ para todo $t \in \tau = [0, 1]$ e para algum $x \in X$, determina um caminho constante. Contudo, a identidade não satisfaz esse critério no exemplo anterior, pois

$$g^{-1}(t) = g(1) \equiv [g^{-1}(t)]|_0, \text{ em } t = 0 (x = x_0), \quad (2.20a)$$

$$g^{-1}(t) = g\left(\frac{1}{2}\right) \equiv [g^{-1}(t)]|_1, \text{ em } t = \frac{1}{2} (x = x_1). \quad (2.20b)$$

As relações acima implicam na existência de dois elementos inversos, tais que:

$$g(t) [g^{-1}(t)]|_0 \equiv I_0, \text{ em } t = 0 (x = x_0), \quad (2.21a)$$

$$g(t) [g^{-1}(t)]|_1 \equiv I_1, \text{ em } t = \frac{1}{2} (x = x_1). \quad (2.21b)$$

É fácil perceber em (2.21) que o elemento identidade possui dois valores distintos, um em cada extremidade do intervalo $[t_0, t_1]$. Portanto, as propriedades (2) e (3) são violadas, fazendo com que classes de caminhos abertos não componham um grupo. Entretanto,

se considerarmos os caminhos fechados, tal como aqueles loops mostrados na Figura 1, temos uma classe de homotopia de loops que formam um grupo, sendo a identidade unicamente definida. Dado um ponto base x_0 , a classe de loops que podem ser deformados continuamente a esse ponto é nomeada *grupo fundamental* do espaço topológico X com ponto base x_0 , *primeiro grupo de homotopia* ou também *grupo de Poincaré* (por ter sido o primeiro a investigá-lo). Nós representamos tal grupo por $\pi_1(X, x_0)$. Os loops estabelecem um relação de homotopia com um círculo⁴ S^1 . Já os loops que possuem um buraco no seu interior, conforme os mostrados na Figura 1a, não podem ser deformados a um ponto. Por isso, eles não são homotópicos ao referido ponto, como é o caso do mapa $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Os grupos de loops que circundam a origem são classificados segundo um número inteiro \mathbb{Z} chamado de *winding number*. Esse parâmetro descreve a quantidade de vezes que a origem é englobada. Se ele for positivo (negativo), o loop circula a origem no sentido horário (anti-horário), por convenção.

Por exemplo, podemos destacar a aplicação desses conceitos no estudo do defeito topológico tipo-vórtice [6, 9, 49], descrito na teoria de Maxwell-Higgs em (2+1)-D. A formação desse defeito ocorre por meio de um processo de quebra espontânea de simetria $U(1)$. Em configurações estacionárias e estáveis, um manifold \mathcal{M} (representado por um círculo cujo raio tende ao infinito) pertencente a um espaço topológico X (o espaço físico bidimensional) é mapeado homotopicamente a outro manifold \mathcal{N} (um círculo de raio finito) formando o círculo de mínimo⁵ em um espaço topológico Y , que é o próprio espaço interno dos campos escalares. Na prática, dados um campo escalar complexo $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ no espaço interno e um vetor posição $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$ no espaço físico, a formação do vórtice ocorre quando:

$$|\phi|^2 \rightarrow 0, \text{ se } |\vec{r}|^2 \rightarrow 0, \tag{2.22a}$$

$$|\phi|^2 \rightarrow v^2 = \text{constante}, \text{ se } |\vec{r}|^2 \rightarrow \infty. \tag{2.22b}$$

A relação (2.22a) nos diz que o círculo formado por $|\phi|^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2 = v^2 (S_\phi^1)$ tem um buraco na origem, enquanto a condição (2.22b) informa-nos que o círculo no espaço físico $|\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 = r^2|_{r \rightarrow \infty}$ (de raio tendendo ao infinito, (S_r^1)) é mapeado no círculo do espaço interno. A existência desse buraco é fundamental para que S_ϕ^1 não seja homotópico a um ponto, fato que levaria ao que chamamos de *topologia trivial* ($n = 0$). O campo ϕ formando o círculo de mínimo pode ser representado na seguinte forma polar,⁶

$$\phi = v e^{in\theta}. \tag{2.23}$$

O *winding number* possuindo os valores $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ exprime o número de vezes que S_r^1 envolve S_ϕ^1 , ou ainda podemos interpretar tal parâmetro como o número voltas que o

⁴ S^1 denota um círculo em \mathbb{R}^2 , S^2 descreve uma esfera em \mathbb{R}^3 e etc.

⁵ O nome mínimo é dado às configurações dos campos no infinito que estabelecem a energia finita e mínima.

⁶ Como explicitamos os ramos (n) da fase, devemos ter aqui $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

campo φ completa sobre S_ϕ^1 , quando a ponta do vetor \vec{r} completa sobre S_r^1 no sentido horário (-) ou anti-horário (+). Veja a Figura 5 adiante [50]. Ele também pode ser definido

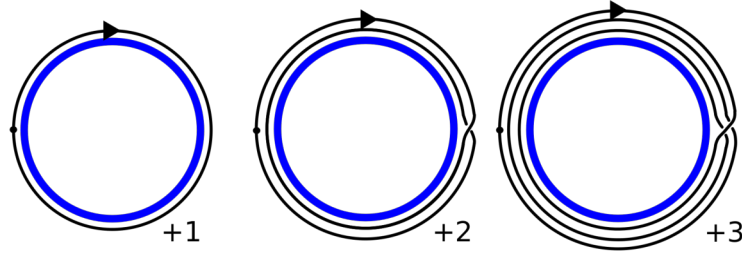


Figura 5 – Intepretação do *winding number*. Fonte [50].

como a integral de movimento [49]:

$$n = \frac{1}{2\pi i v^2} \oint dx^i \phi^* \partial_i \phi. \quad (2.24)$$

Há ainda outras classes de grupos que estão conectados ao mapeamento entre esferas ou hiperesferas. Elas são denotadas por $\pi_m(X, x_0)$. Teoremas [39, 40, 43] garantem que os grupos com $m > 1$ são abelianos e não dependem da escolha do ponto base x_0 . Em virtude disso, esses grupos são representados somente por $\pi_m(X)$. Garantem ainda que os grupos fundamentais são não abelianos, salvo quando são grupos fundamentais de Lie [48]. O mapeamento $f : S^m \rightarrow S^m$ entre duas hiperesferas corresponde ao grupo de homotopia designado por $\pi_m(S^m)$, sendo isomorfo ao conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} [39–41, 43, 44, 49], ou seja,

$$\pi_m(S^m) \cong n \in \mathbb{Z}. \quad (2.25)$$

Geralmente, grupos de homotopia do tipo $\pi_m(S^{m'})$ possuem uma estreita ligação com a formação de diferentes defeitos topológicos. Na descrição de monopolos e dyons [11, 51], por exemplo, as configurações estáveis estão associadas ao grupo $\pi_2(S^2)$. Quando $m' > m$, o grupo de homotopia é dito *trivial*, pois $\pi_m(S^{m'}) \cong 0$, refletindo o fato de que há pelo menos um ponto sobre S^m que não é levado a nenhum ponto sobre $S^{m'}$. Além disso, o *winding number* é invariante sob pequenas deformações nos campos em configurações nas quais a energia é finita. Essas deformações mantêm o mapeamento $f : S_r^m \rightarrow S_\phi^m$ na mesma classe de homotopia. Por conseguinte, o *winding number* é um número topológico caracterizando diferentes configurações de campo com mesmo valor de energia finita. Cada valor desse número define um *setor topológico* diferente. Sólitons topológicos com energia mínima são dados no setor $n = 1$, ao passo que $n = 0$ corresponde a uma energia nula [12, 49].

3 VÓRTICES AUTODUAIS NA TEORIA DE CALIBRE $U(1)$

Neste capítulo, fazemos uma breve revisão sobre os vórtices, desde seus surgimentos na Teoria da Supercondutividade de Ginzburg-Landau [4,5] até suas descrições em Teorias de Calibre.

3.1 Teoria de Ginzburg-Landau

A Teoria de Ginzburg-Landau foi desenvolvida com base na Mecânica Quântica e na Termodinâmica de Transições de Fase de Segunda Ordem. O ponto crucial dessa abordagem é a introdução de uma função de onda efetiva $\phi = \phi(\vec{r}, T)$, mais conhecida como *parâmetro de ordem*, para descrever a densidade $N_S = |\phi(\vec{r}, T)|^2$ dos superelétrons¹ de condução na fase supercondutora do metal. A função $\phi(\vec{r}, T)$ depende da temperatura absoluta T obedecendo às condições: $\phi(\vec{r}, T) = 0$ ($\neq 0$), para $T > T_C$ ($T < T_C$), sendo T_C uma *temperatura crítica* abaixo da qual o metal transita do estado normal ($N_S = 0$) para o estado supercondutor ($N_S \neq 0$). Quando $T < T_C$, esse material apresenta uma interessante propriedade, o *Efeito Meissner-Ochsenfeld* [2], segundo o qual um campo magnético² externo $H(r) \propto e^{-\lambda_L r}$ aplicado ao supercondutor o penetra apenas até uma certa distância característica λ_L , conhecida como *comprimento de penetração de London* [3]. Todavia, se a intensidade H for muito maior do que um certo valor crítico H_C , a supercondutividade é perdida. A teoria de Ginzburg-Landau estabelece que a energia livre de Helmholtz na transição de fase ($T \approx T_C$ e $H_C \approx 0$) tem a seguinte forma [4,5]:

$$F_S - F_N = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} |\vec{H}(\vec{r})|^2 + \frac{1}{2m} |(\vec{\nabla} - ig \vec{A}(\vec{r})) \phi|^2 + V(|\phi|) \right\}, \quad (3.1)$$

com F_S e F_N correspondendo às energias livres nas fases supercondutora e normal, respectivamente; as quantidades $m = 2m_e$ e $g = 2e$ compõem a massa e a carga dos superelétrons, em ordem, sendo e a carga elétrica elementar e m_e a massa do elétron; o vetor \vec{H} descreve um campo magnético no interior do material, enquanto \vec{A} é o potencial vetor associado; o último termo pode ser interpretado como um potencial, cuja forma explícita consiste em um polinômio de segundo grau em $|\phi|^2$, isto é,

$$V(|\phi|) = \alpha |\phi|^2 + \frac{\beta}{2} |\phi|^4, \quad (3.2)$$

¹ Que conhecemos hoje da teoria BCS como pares de Cooper.

² Vamos chamar o campo H simplesmente de campo magnético, embora o leitor deva lembrar de que $H = \frac{B}{\mu}$, com B e μ sendo o campo (de fato) e a permeabilidade magnéticos.

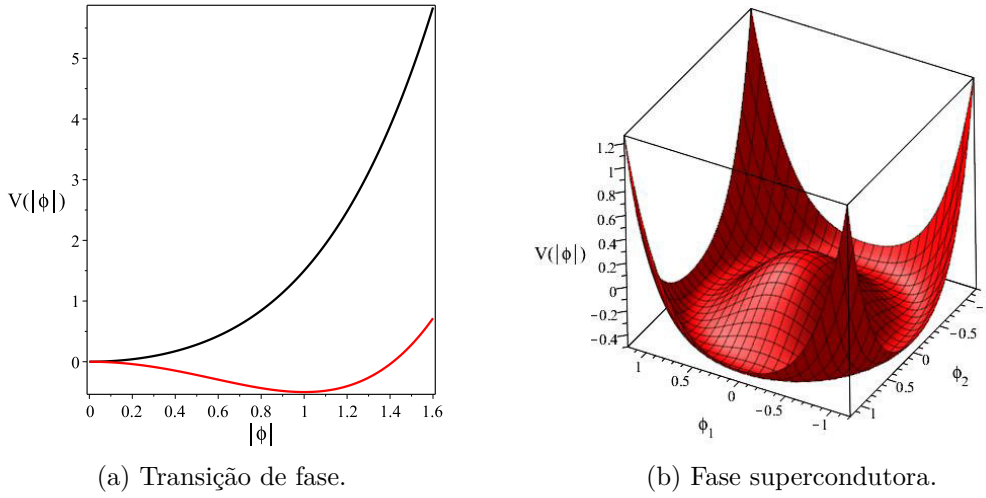


Figura 6 – Em (a), a curva preta corresponde à fase normal, fixando-se $\alpha = 1$ ($T > T_C$), por conveniência; a curva vermelha está associada ao estado supercondutor e para esboçá-la usamos $\alpha = -1$ ($T < T_C$); em ambos os perfis, adotamos $\beta = 1$, sem perda de generalidade. Em (b), apresentamos como $V(|\phi|)$ pode ser visto em três dimensões na fase supercondutora; o formato é conhecido como *chapéu mexicano*.

para que o calor específico seja descontínuo na transição de fase. Os coeficientes reais não nulos α e β podem ser determinados experimentalmente. Em particular, não se pode ter $\beta < 0$ (para que haja pontos de mínimo) e $\beta \gg \alpha$ (para que exista fase supercondutora).

Esse potencial possui dois extremos locais: $|\phi| = 0$ e $|\phi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$; o primeiro refere-se ao estado normal, ao passo que o segundo, à fase supercondutora. Como devemos ter $|\phi| = 0$ quando $T = T_C$, além de $|\phi|^2 > 0$ para $T < T_C$, então α possui um comportamento típico como $\alpha \propto (T - T_C)$, com β constante. A Figura 6 mostra o perfil genérico de $V(|\phi|)$. Quando o sistema atinge um dos mínimos do chapéu mexicano (Fig. 6b), outro mínimo ao longo do círculo não pode ser alcançado por uma transformação de rotação $U(1)$, pois isso levaria um custo infinito de energia [49]. Dessa forma, a transição de fase é vista como um mecanismo de quebra espontânea de simetria.

Além de λ_L , existe um outro parâmetro característico chamado de *comprimento de coerência de Ginzburg-Landau*, ξ . Para entender significado físico de ξ , vamos considerar a equação Euler-Lagrange para ϕ advinda do funcional (3.1),

$$-\frac{1}{2m} (\vec{\nabla} - ig\vec{A})^2 \phi + \alpha\phi + \beta|\phi|^2\phi = 0 \quad (3.3)$$

e a respectiva condição de contorno na superfície do material (\hat{n} é um vetor normal à superfície),

$$\hat{n} \cdot (\vec{\nabla} - ig\vec{A}) \phi = 0, \quad (3.4)$$

as quais são obtidas extremizando a energia livre com respeito a ϕ^* [52].

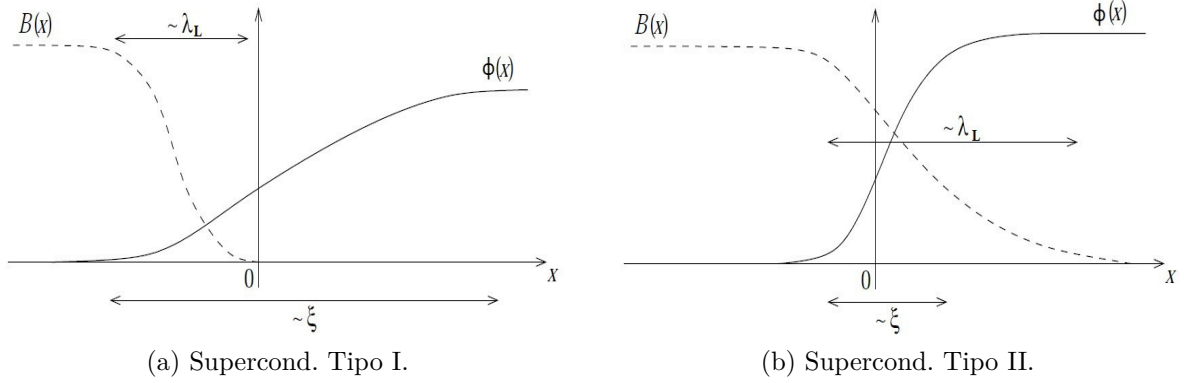


Figura 7 – A posição $x = 0$ designa a região intermediária da interface do material. Figura readaptada da referência [52].

Sem perda de generalidade, analisamos (3.3) para o caso no qual $\vec{A} = \vec{0}$ e admitimos somente uma dimensão, digamos x :

$$-\frac{1}{2m}\phi'' + \alpha\phi + \beta|\phi|^2\phi = 0. \quad (3.5)$$

Como devemos ter $\lim_{x \rightarrow \infty} |\phi| = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$ na fase supercondutora, podemos propor uma função $f = f(x)$ em (3.5), de modo que $\phi = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}f(x)$, com $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$. Assim, encontramos a equação

$$\xi^2 f'' + f - f^3 = 0, \quad (3.6)$$

cujas soluções é dada por

$$f = \tanh[k(\xi)x], \text{ com } k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}\xi} \text{ e } \xi^2 = -\frac{1}{2m\alpha} > 0. \quad (3.7)$$

Assim, vemos que ξ é um coeficiente regulador da variação espacial do parâmetro de ordem.

O parâmetro ξ tal como definido (a campo magnético nulo) desempenha um papel importante na caracterização dos supercondutores. A partir dos comprimentos de penetração de London e de coerência de Ginzburg-Landau, A. A. Abrikosov introduziu em 1957 o chamado *parâmetro de Ginzburg-Landau* [6]

$$\kappa = \frac{\lambda_L}{\xi}, \quad (3.8)$$

permitindo a classificação dos supercondutores em dois grupos distintos: **tipo I** ($\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$) e **tipo II** ($\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$). Sob condições de contorno adequadas, os comportamentos característicos do campo magnético $B(x)$ e do parâmetro de ordem $\phi(x)$, soluções de (3.3) (considerando apenas a dimensão x), são esboçados na Figura 7 [52]. Observamos que na interface do supercondutor tipo I (Fig. 7a) o campo magnético penetra somente até um certo valor $\lambda_L < \xi$, enquanto o número de superelétrons de condução cresce lentamente no intervalo de ξ . Por outro lado, a Figura 7b mostra que $B(x)$ consegue penetrar uma distância

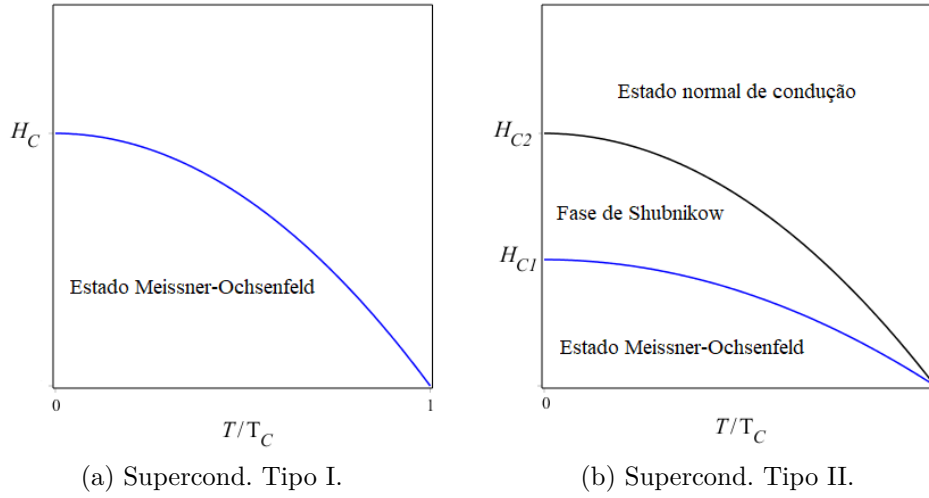


Figura 8 – Diagrama de fase genérico do campo crítico H_C versus temperatura T .

maior $\lambda_L > \xi$, mesmo com o parâmetro de ordem atingido seu valor máximo em um curto intervalo ξ . Essas propriedades refletem diretamente em como tais materiais se comportam quanto ao Efeito Meissner, pois a ocorrência desse fenômeno dar-se apenas até H atingir o seu valor crítico H_C . Para supercondutores tipo I, o campo crítico H_C tem um perfil aproximado por (perto do zero absoluto)

$$H_C \approx H_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^2 \right], \quad (3.9)$$

sendo H_0 um campo crítico para a temperatura absoluta $T = 0$. Já os supercondutores tipo II apresentam dois campos críticos H_{C1} e H_{C2} , com $H_{C1} < H_{C2}$. Veja as ilustrações na Figura 8. O campo crítico menos intenso é um limite inferior acima do qual o Efeito Meissner deixa de existir, porém o material continua no estado de supercondutividade. No intervalo entre H_{C1} e H_{C2} , conhecido como *estado misto* ou *fase de Shubnikow* [53], ainda permanecem fluxos de campo magnético dentro do supercondutor e as chamadas *correntes persistentes* formam vórtices magnéticos tubulares (ou planares, no caso de um material laminar). As linhas de campo magnético são paralelas aos eixos de simetria desses vórtices e os respectivos fluxos magnéticos passam a ser quantizados em termos do *winding number*, com um flúxon tendo o valor de $\Phi = 2,0678 \times 10^{-15} \text{Wb}$. Abrikosov propôs inicialmente que esses vórtices se distribuiriam em uma rede quadrada ao longo do material, dividindo-o em duas regiões: as normais centradas nos vórtices, onde B seria máximo e $\phi \approx 0$, com alcances da ordem de $2\lambda_L$ e 2ξ respectivamente; e as regiões supercondutoras intermediárias, nas quais $B \approx 0$ e ϕ é próximo do seu valor máximo. Posteriormente, foi mostrado por W. H. Kleiner, L. M. Roth e S. H. Autler [54] que as famosas redes de Abrikosov deveriam formar na verdade uma rede triangular, a fim de minimizar o funcional (3.1). A descrição de Abrikosov permitiria uma melhor compreensão dos experimentos com ligas metálicas de Pb, Tl e Bi – à temperatura de $T = 2,11\text{K}$ – que

houveram sido feito quase uma década antes por J. Rjabinin e L. W. Shumbnikow [53], os primeiros a indicar a existência do estado misto.

Embora a teoria de Ginzburg-Landau tenha um caráter mais fenomenológico, ela serviu de base para a busca de um entendimento mais aprofundado sobre natureza microscópica da supercondutividade. Nessa direção, foram os pesquisadores J. Bardeen, L. N. Cooper e J. R. Schrieffer quem propuseram a consagrada teoria BCS [8], segunda a qual os superelétrons são na verdade um estado ligado entre dois elétrons de condução com spins antiparalelos, formando assim um estado bosônico com spin nulo. Esse estado ficou conhecido como par de Cooper e a interação entre os elétrons é mediada pelos fônons da rede cristalina, de tal modo que a força de atração eletrônica compensa a repulsão eletrostática. Dessa forma, o par de Cooper consegue viajar ao longo do supercondutor sem sofrer praticamente qualquer resistência.

3.2 Modelo de Maxwell-Higgs

O tratamento de vórtices em Teoria de Campos foi feito somente em 1973 com o trabalho de H. B. Nielsen e P. Olesen [9]. Eles propuseram um modelo de linha vórtices para descrever cordas duais. Essa teoria possui características interessantes, tais como: apresenta um campo de *gauge* abeliano acoplado minimamente a um campo escalar de Higgs carregado, associando a transição de fase ao mecanismo de Higgs; fornece o mesmo funcional da energia livre (3.1) no limite não relativístico, com a estimativa do valor crítico $\kappa \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$ para o parâmetro de Ginzburg-Landau e estabelece ainda a quantização do fluxo magnético em termos do *winding number*, evidenciando a natureza topológica das soluções estáveis. Por tais motivos, esses defeitos também são chamados de ANO (Abrikosov-Nielsen-Olesen) vórtices.

Levando em conta os setores de *gauge* e de Higgs abelianos, respectivamente,

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (D_\mu\phi)^* D^\mu\phi - V(|\phi|), \quad (3.11)$$

a densidade lagrangeana dessa teoria de Maxwell-Higgs, como ficou conhecida no contexto de vórtices, em (2+1)-dimensões, é dada por:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{Higgs}, \quad (3.12)$$

em que $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e g são a derivada covariante, o tensor eletromagnético e a constante de acoplamento mínimo, em sequência; o potencial $V(|\phi|)$ é do tipo ϕ^4 , a saber

$$V(|\phi|) = \frac{\lambda^2}{2} (|\phi|^2 - v^2)^2, \quad (3.13)$$

sendo λ uma constante e v o valor esperado do campo de Higgs no vácuo. Perceba que, ao reescrevermos $V(|\phi|)$ na forma

$$V(|\phi|) = \frac{1}{2}\lambda^2 |\phi|^4 - \lambda^2 v^2 |\phi|^2 + \frac{1}{2}\lambda^2 v^4, \quad (3.14)$$

os potenciais (3.2) e (3.14) se tornam exatamente equivalentes (salvo pela redefinição do mínimo de (3.14) em $V_{\min} = 0$), se α e β forem iguais a

$$\alpha = -\lambda^2 v^2, \quad \beta = \lambda^2. \quad (3.15)$$

É interessante ressaltar a invariância de (3.12) perante a simetria de calibre

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi e^{i\theta}, \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta. \quad (3.16)$$

As equações de Euler-Lagrange provenientes de (3.12) são expressas como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (3.17)$$

$$D_\mu D^\mu\phi = -\lambda^2 (|\phi|^2 - v^2)\phi, \quad (3.18)$$

tendo em vista que J^ν representa a densidade de corrente,

$$J^\nu = ig [\phi (D^\nu \phi)^* - \phi^* (D^\nu \phi)]. \quad (3.19)$$

Obtemos a lei de Gauss fixando $\nu = 0$ em (3.17). Nesse caso, para soluções estacionárias (independentes do tempo), a equação (3.17) torna-se

$$\partial_i \partial^i A^0 = gi [\phi (igA^0 \phi)^* - \phi^* (igA^0 \phi)]. \quad (3.20)$$

Logo, frente à validade do *gauge* temporal $A^0 = 0$ em (3.20), as configurações estacionárias não suportam vórtices carregados.

Vale a pena dizer que o mecanismo de Higgs desse modelo apresenta um bóson vetorial com massa $m_V = \sqrt{2}gv$ e um escalar real com $m_S = \sqrt{2}\lambda v$ [49]. Soluções numéricas têm mostrado a atração entre vórtices para $m_V < m_S$ e a repulsão para $m_V > m_S$ [12]. Atentaremos para a situação na qual $m_V = m_S$, conhecida como *limite de Bogomol'nyi* [10]. Nessa circunstância, as forças entre os vórtices se anulam e é possível encontrar configurações estáveis de multivórtices. Ademais, tal limite corresponde justamente a $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$ na teoria de Landau-Ginzburg (3.8), caracterizando-o, portanto, como o ponto crítico da transição de fase entre os supercondutores do tipo I e do tipo II.

Outro aspecto importante decorrente do limite $m_V = m_S$ é a viabilidade de implementar o formalismo de *Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS)* com o intuito de obter as soluções estáveis do sistema de equações (3.17) e (3.18), conforme é apresentado na subseção 3.2.3.

3.2.1 A Carga Topológica do ANO Vórtice

Para definir o conceito de carga topológica e mostrar que ela é uma quantidade conservada, como motivação, vamos preliminarmente levar em conta a densidade de energia oriunda de (3.12) no regime estacionário e no *gauge* temporal [49],

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (F_{ij})^2 + (D_i \phi)^* D_i \phi + V. \quad (3.21)$$

As configurações de vórtices com energia finita e localizada exigem os comportamentos assintóticos

$$F_{ij} \rightarrow 0, \quad (3.22)$$

$$D_i \phi \rightarrow 0, \quad (3.23)$$

$$V \rightarrow 0, \quad (3.24)$$

para raio r tendendo ao infinito³, $r \rightarrow \infty$. Isso equivale a dizer que o vácuo da teoria é alcançado no *gauge* puro

$$(A_i)_{\text{vácuo}} = \frac{1}{g} \partial_i \theta \quad (3.25)$$

³ Infinito aqui se refere a uma distância apreciavelmente maior do que os comprimentos de penetração de London (λ_L) e de coerência de Ginzburg-Landau (ξ).

e quando ϕ satisfizer um círculo de mínimos⁴,

$$\partial_i \phi = i(\partial_i \theta) \phi \Rightarrow \phi_{\text{v\u00e1cuo}} = v e^{i\theta}, \quad (3.26)$$

diante da substitui\u00e7\u00e3o de (3.25) em (3.23). Para mudan\u00e7as c\u00edclicas na fase de (3.26), devemos ter

$$\phi_{\text{v\u00e1cuo}} = v e^{i(\theta + \Delta\theta)} = v e^{i\theta} \Rightarrow \Delta\theta = 2\pi n, \quad (3.27)$$

com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, em virtude de $\phi_{\text{v\u00e1cuo}}$ ser uma fun\u00e7\u00e3o univalente.

Vamos avaliar a circula\u00e7\u00e3o de $g(A_i)_{\text{v\u00e1cuo}}$ ao longo de um caminho C fechado de raio⁵ r

$$g \oint_C (A_i)_{\text{v\u00e1cuo}} dx^i = \oint \partial_i \theta dx^i = \Delta\theta = 2\pi n. \quad (3.28)$$

Observe em (3.28) que n pode ser interpretado como o n\u00famero de vezes que circulamos C ao longo de uma volta inteira $\Delta\theta = \pm 2\pi$, ou seja, ao longo do c\u00edrculo de m\u00ednimos formado por (3.26). O sinal positivo (negativo) de n refere-se ao sentido anti-hor\u00e1rio (hor\u00e1rio) de circula\u00e7\u00e3o. Representamos essa rela\u00e7\u00e3o por meio do mapa

$$f : S_{r \rightarrow \infty}^1 \rightarrow S_\phi^1, \quad (3.29)$$

correspondendo ao grupo de homotopia

$$\pi_1(S^1) \cong n \in \mathbb{Z}, \quad (3.30)$$

conforme estudamos na se\u00e7\u00e3o (2.4.3).

Considere agora uma \u00e1rea S delimitada por um caminho C , onde aplicamos o teorema de Green ao potencial vetor A_i ,

$$\frac{g}{2\pi} \oint_C A_i dx^i = \frac{g}{2\pi} \int_S (\partial_x A_y - \partial_y A_x) dx dy = \int_S \left(\frac{g}{2\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_i A_j \right) d^2 x. \quad (3.31)$$

Identificamos o integrando do segundo membro de (3.31) como a componente temporal de uma densidade

$$\mathcal{J}^0 = \frac{g}{2\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_i A_j, \quad (3.32)$$

cuja carga associada corresponde a

$$Q_{\text{top}} = \int_S \mathcal{J}_{\text{top}}^0 d^2 x. \quad (3.33)$$

Generalizando ainda os \u00edndices de Lorentz em (3.32), encontramos:

$$\mathcal{J}_{\text{top}}^\mu = \frac{g}{2\pi} \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta. \quad (3.34)$$

⁴ Quando n\u00e3o explicitamos os ramos (n) da fase, devemos ter $0 \leq \theta \leq 2\pi n$.

⁵ Essa integra\u00e7\u00e3o independe do raio, pois o elemento de caminho cresce como r enquanto A_i decai como r^{-1} . Consequentemente, temos a conserva\u00e7\u00e3o da carga topol\u00f3gica.

O fator $g/2\pi$ foi introduzido de forma conveniente. Enquanto g torna a carga topológica adimensional e independente das constantes da teoria, o fator $1/2\pi$ normaliza número do voltas em cada setor topológico com base no primeiro setor.

As quantidades (3.33) e (3.34) definem a carga e a densidade de corrente topológicas da teoria de vórtices abelianos, respectivamente. É fácil verificar a conservação de \mathcal{J}_{top}^μ imediatamente,

$$\partial_\mu \mathcal{J}_{top}^\mu = \frac{g}{2\pi} \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\alpha A_\beta = 0. \quad (3.35)$$

A partir de (3.31), notamos que a carga topológica está relacionada ao fluxo Φ do pseudo-vetor campo magnético $B\hat{z}$ através da superfície planar S , a saber:

$$\int_S (\partial_x A_y - \partial_y A_x) d^2x = \int_S B d^2x = \frac{2\pi}{g} \int_S \mathcal{J}_{top}^0 d^2x = \Phi = \frac{2\pi}{g} Q_{top}. \quad (3.36)$$

Adicionalmente, podemos estender a integração (3.33) para o infinito, em razão de a carga topológica ser uma grandeza conservada, obtendo a quantização desta e, por conseguinte, a do fluxo magnético em termos do *winding number*:

$$Q_{top} = n, \quad (3.37)$$

$$\Phi = \frac{2\pi}{g} n. \quad (3.38)$$

É notório o fato de a simetria de calibre determinar a carga topológica quer seja em função da topologia do campo A_μ (Eq. (3.33)), quer seja em função da topologia do campo escalar. Deveras, temos a partir de (3.37) e (2.24)

$$Q_{top} = \frac{1}{2\pi i v^2} \oint dx^i \phi^* \partial_i \phi. \quad (3.39)$$

3.2.2 O Ansatz para o ANO Vórtice

Para resolver as equações de movimento, faz-se necessário introduzir uma forma funcional adequada para os campos. Assim, ante às suas simetrias rotacionais, as soluções estacionárias para vórtices sem carga elétrica podem ser computadas em coordenadas polares (r, θ) no *ansatz* [9, 49]

$$A_0 = A_r = 0, A_\theta = -\frac{a(r) - n}{gr}, \quad (3.40)$$

$$\phi = v f(r) e^{in\theta}. \quad (3.41)$$

Em configurações com energia positiva, definida e localizada, as funções regulares $f(r)$ e $a(r)$ devem obedecer às seguintes condições de contorno:

$$f(0) = 0, f(r \rightarrow \infty) = 1, \quad (3.42)$$

$$a(0) = n, a(r \rightarrow \infty) = 0. \quad (3.43)$$

A condição de contorno para $f(r)$ na origem garante que ϕ não seja uma função complexa multivalorada. Já a condição de contorno para $a(r)$ em $r = 0$ impede que A_θ divirja nesse ponto. Por outro lado, os valores de $f(r)$ e $a(r)$ no infinito verificam prontamente os comportamentos assintóticos (3.22), (3.23) e (3.28).

3.2.3 Formalismo BPS

Em 1976, Bolgomol'nyi propôs uma técnica para encontrar soluções clássicas estáveis [10], a qual tem por base reexpressar o funcional da energia como somas de quadrados perfeitos. Esses termos então são anulados com o propósito de minimizar a energia do sistema, fornecendo-nos equações diferenciais de primeira ordem, que não apenas são mais simples de resolver, mas também reproduzem as equações de Euler-Lagrange, determinando assim as soluções legítimas do sistema. Outro ponto importante nesse método é a possibilidade de se determinar a energia mínima somente com o conhecimento das condições de contorno e sem, todavia, saber quais são as soluções explícitas. A energia mínima é proporcional à carga topológica e ao fluxo magnético (no caso do vórtice) quantizados. Em seu trabalho, Bolgomol'nyi examina a estabilidade das soluções topológicas tipo parede de domínios, linhas de vórtices, monopolos magnéticos e também dyons. Por coincidência, antes de Bolgomol'nyi, Prasad e Sommerfield [11] já tinham publicado em 1975 o cálculo das soluções estáveis do monopolo de 't Hooft-Polyakov e do dyon de Julia-Zee no limite em que o potencial torna-se nulo, usando o mesmo procedimento. O método ficou conhecido então como *formalismo BPS* e o limite de mínima energia, como limite de *Bolgomol'nyi-Prasad -Sommerfield (BPS)*, em homenagem aos três cientistas.

Expomos aqui o formalismo BPS para o caso do vórtice abeliano de Maxwell-Higgs. Para isso, partimos de (3.21) e escrevemos o funcional de energia na forma

$$\mathbb{E} = \int d^2x \mathcal{E} = \int d^2x \left(\frac{1}{2} B^2 + |D_i \phi|^2 + V \right), \quad (3.44)$$

em que $B = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$ é a pseudo-componente z do campo magnético e $|D_i \phi|^2 = (D_i \phi)^* D_i \phi$. No intento de formar quadrados perfeitos, vamos considerar a famosa identidade

$$|D_i \phi|^2 = |D_\pm \phi|^2 \pm gB |\phi|^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \partial_i J_k, \quad (3.45)$$

sendo

$$D_\pm = D_1 \pm iD_2 \quad (3.46)$$

o operador de Cauchy-Riemann. Substituindo (3.45) em (3.44), achamos

$$\mathbb{E} = \int d^2x \left(\frac{1}{2} B^2 + V + |D_\pm \phi|^2 \pm gB |\phi|^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \partial_i J_k \right). \quad (3.47)$$

Introduzindo um campo escalar neutro auxiliar Ψ de maneira conveniente, podemos reorganizar (3.47) do modo subsequente:

$$\mathbb{E} = \int d^2x \left[\frac{1}{2} (B \mp \Psi)^2 + |D_{\pm}\phi|^2 \pm (\Psi + g|\phi|^2) B - \frac{1}{2}\Psi^2 + V + \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i J_k \right]. \quad (3.48)$$

Porquanto a energia é proporcional ao fluxo magnético, são válidas as escolhas

$$(\Psi + g|\phi|^2) = gv^2, \quad V = \frac{1}{2}\Psi^2, \quad (3.49)$$

a partir das quais o potencial fica dado como

$$V = \frac{g^2}{2} (v^2 - |\phi|^2)^2. \quad (3.50)$$

Convém salientar que, embora a princípio o potencial (3.50) tenha sido deixado arbitrário em (3.44), o formalismo BPS estabelece a igualdade entre (3.13) e (3.50) quando $\lambda = g$, ou seja, $m_V = m_S$. Assim, ao inserir (3.49) em (3.48), temos:

$$\mathbb{E} = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} [B \mp g(v^2 - |\phi|^2)]^2 + |D_{\pm}\phi|^2 \right\} \pm gv^2 \int d^2x B + \frac{1}{2} \int d^2x \varepsilon_{ij} \partial_i J_k. \quad (3.51)$$

O penúltimo termo em (3.51) corresponde a (3.36), a menos do fator gv^2 . Já o último termo é de superfície e se anula sob as condições de contorno (3.42) e (3.43). Fisicamente, isso acontece porque a soma das correntes persistentes na rede de Abrikosov gera uma corrente líquida que se localiza somente nas bordas do supercondutor, ou seja, fora da região onde os vórtices se formam. Esse efeito é semelhante ao da circulação no teorema de Green. Como consequência, a energia (3.51) resume-se a

$$\mathbb{E} = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} [B \mp g(v^2 - |\phi|^2)]^2 + |D_{\pm}\phi|^2 \right\} \pm gv^2 \Phi \geq \pm gv^2 \Phi. \quad (3.52)$$

Se zerarmos os termos quadrados entre chaves acima, encontramos as equações BPSs do sistema

$$B = \pm g(v^2 - |\phi|^2), \quad (3.53)$$

$$D_{\pm}\phi = 0 \quad (3.54)$$

e atingimos o limite inferior de energia

$$\mathbb{E}_{BPS} = \pm gv^2 \Phi = \pm 2\pi v^2 Q_{top} = \pm 2\pi v^2 n. \quad (3.55)$$

O sinal superior (inferior) diz respeito ao vórtice (antivórtice). Veja que (3.54) é uma condição de holomorfismo generalizada para o campo complexo.

3.2.4 Perfis Assintóticos dos Campos

Para analisar os comportamentos assintóticos das soluções, vamos considerar primeiramente as equações autoduais (3.53) e (3.54) no *ansatz* (3.40) e (3.41), respectivamente:

$$\frac{a'}{\rho} = \mp (1 - f), \quad (3.56)$$

$$f' = \pm \frac{af}{\rho}, \quad (3.57)$$

em que introduzimos a variável adimensional $\rho = gvr$, bem como a linha para indicar a derivada com respeito a ρ .

Próximo da origem ($\rho \rightarrow 0$), podemos encontrar soluções do sistema acima em série de Maclaurin,

$$a(\rho) \approx n - \frac{\rho^2}{2} + \frac{f_n^2}{2(n^2 + 1)} \rho^{2(|n|+1)} + \dots, \quad (3.58)$$

$$f(\rho) \approx f_n \rho^{|n|} - \frac{f_n}{4} \rho^{|n|+2} + \dots. \quad (3.59)$$

O valor da constante f_n depende obviamente de n e pode ser fixado com uma boa precisão averiguando-se os comportamentos de a e f no infinito, assim como admitindo-se que f_n seja o ponto de separação, nesse limite assintótico, entre $a', f' > 0$ e $a', f' < 0$. Isso restringe a e f a não serem tão diferentes de n e 1, respectivamente, no limite $\rho \rightarrow \infty$. Veja uma discussão semelhante em [13].

Quando $\rho \rightarrow \infty$, temos $a \ll 1$ e $f \rightarrow 1$. Neste regime, são válidas as proposições

$$a \approx \pm \delta a \ll 1, \quad (3.60)$$

$$f \approx 1 - \delta f, \text{ com } \delta f \ll 1, \quad (3.61)$$

por meio das quais as equações (3.56) e (3.57) desacoplam, resultando em

$$(\delta a)'' - \frac{(\delta a)'}{\rho} - 2\delta a = 0, \quad (3.62)$$

$$(\delta f)'' + \frac{(\delta f)'}{\rho} - 2\delta f = 0. \quad (3.63)$$

As soluções de (3.62) e (3.63) são combinações lineares das funções de Bessel modificadas de ordem um e zero, respectivamente. Como as funções de primeira espécie de ordem um $I_1(\sqrt{2}\rho)$ e zero $I_0(\sqrt{2}\rho)$ são divergentes no infinito, as soluções fisicamente aceitáveis são as de segunda espécie de ordem um $K_1(\sqrt{2}\rho)$ e zero $K_0(\sqrt{2}\rho)$, ou seja,

$$\delta a(\rho) \propto \rho K_1(\sqrt{2}\rho) \approx \sqrt{\rho} \exp(-\sqrt{2}\rho), \quad (3.64)$$

$$\delta f(\rho) \propto K_0(\sqrt{2}\rho) \approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} \exp(-\sqrt{2}\rho). \quad (3.65)$$

Perceba que os vórtices se estendem apreciavelmente até um raio efetivo

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow r_{\text{ef}} = \frac{1}{\sqrt{2}gv}, \quad (3.66)$$

correspondendo à escala de massa

$$\frac{1}{r_{\text{ef}}} = \sqrt{2}gv = m_V = m_S. \quad (3.67)$$

Por último, cabe também apresentar a densidade de energia BPS avaliada no *ansatz* (3.40) e (3.41). Isso pode facilmente ser feito a partir de (3.44). O resultado nos leva a

$$\mathcal{E}_{BPS}(\rho) = g^2 v^4 \left[\left(\frac{a'}{\rho} \right)^2 + 2(f')^2 \right] = g^2 v^4 \left[(1-f)^2 + 2 \left(\frac{af}{\rho} \right)^2 \right], \quad (3.68)$$

em que usamos as equações BPSs (3.56) e (3.57) na última igualdade.

3.2.5 Gráficos das Soluções Numéricas

Nesta subseção, fazemos os esboços das soluções numéricas das equações de primeira ordem (3.56) e (3.57), do campo magnético $B(r)$ e da densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ associados, sob as condições de contorno (3.42) e (3.43).

A Figura 9a mostra o comportamento do campo de Higgs. As curvas indicam que quanto maior o valor de n , mais suavemente o campo escalar tende ao seu valor de mínimo, onde há máxima concentração de pares de Cooper. De maneira equivalente, isso significa dizer que o parâmetro de ordem passa a ter um alcance cada vez maior, a partir

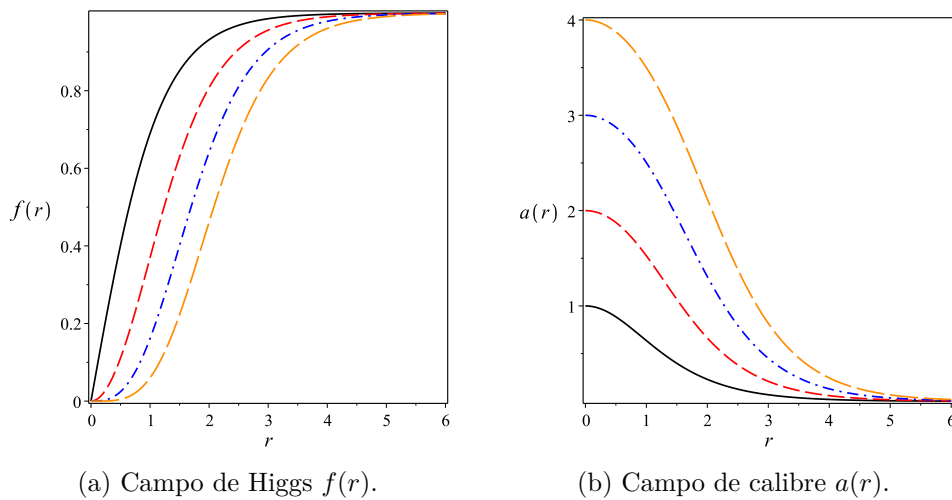
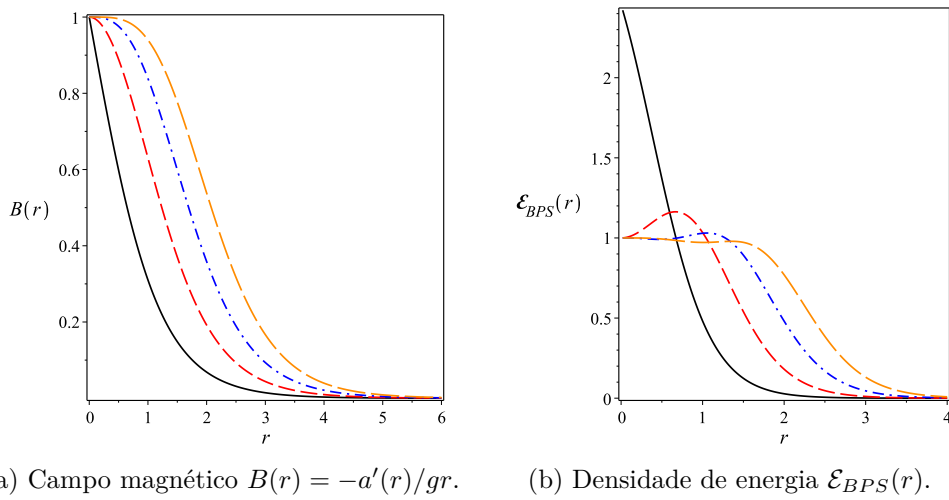


Figura 9 – Soluções numéricas do sistema BPS (3.56) e (3.57) satisfazendo as condições de contorno (3.42) e (3.43). As convenções adotadas para as linhas são: sólida preta ($n = 1$), tracejada vermelha ($n = 2$), ponto-tracejada azul ($n = 3$) e longo-tracejada laranja ($n = 4$). Em todos os perfis, adotamos $g = v = 1$ por razões práticas.

do centro do vórtice. Por outro lado, no centro do defeito, onde há predominância de fluxo magnético, temos $f(r) = 0$ (indicando a ausência de pares de Cooper). Obviamente, os perfis com $n > 1$ representam vórtices mais energéticos, os quais podem decair em vórtices com menor energia, desde que carga topológica seja conservada. Traçamos na Figura 9b o perfil do campo de calibre. Analogamente ao campo de Higgs, as curvas de $a(r)$ ficam menos localizadas e atingem o valor de mínimo de maneira mais e mais tênue, à proporção que o *winding number* aumenta. Isso reflete o fato de as linhas de vórtice irem se tornando mais distribuídas ao redor do seu centro. Note que na origem $a(r)$ é máximo e determina exatamente o valor de n .



(a) Campo magnético $B(r) = -a'(r)/gr$. (b) Densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$.

Figura 10 – Perfis numéricos do campo magnético associado ao potencial vetor da Fig. 9b e da densidade de energia BPS (3.68). Usamos as mesmas convenções da Fig. 9.

Na Figura 10a, exibimos o gráfico do campo magnético. À medida que n cresce, percebemos também claramente um aumento da distribuição de $B(r)$ com respeito ao centro do vórtice. Na origem, onde o campo escalar se anula, o fluxo magnético torna-se máximo, fato que pode ser previsto por uma simples análise de (3.53). A Figura 10b apresenta as curvas da densidade de energia BPS (3.68). Com $n = 1$ (cor preta) o defeito topológico é totalmente concentrado da origem. Quando n aumenta, a distribuição energética diz que os vórtices formam uma região com maior densidade de energia deslocada da origem. À exceção do perfil com $n = 1$, todas as curvas convergem para o mesmo valor no centro do defeito.

3.3 Modelo de Chern-Simons-Higgs

Nas descrições anteriores, vimos que a teoria planar de Maxwell-Higgs, como uma generalização relativística do modelo de Ginzburg-Landau, suporta estruturas de vórtices apenas com campo magnético, pois o calibre temporal satisfaz trivialmente a Lei de Gauss. Não obstante, existe ainda uma teoria de calibre alternativa capaz de originar configurações de vórtices eletricamente carregados em (2+1)-dimensões. Nesse modelo, a dinâmica do campo de calibre é regida pelo chamado termo de Chern-Simons, conforme a seguir:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{CS} + A_\mu J^\mu, \quad (3.69)$$

$$\mathcal{L}_{CS} = -\frac{\kappa}{4}\varepsilon^{\alpha\mu\nu} A_\alpha F_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2}\varepsilon^{\alpha\mu\nu} A_\alpha \partial_\mu A_\nu, \quad (3.70)$$

sendo κ o parâmetro de Chern-Simons adimensional, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ o tensor eletromagnético associado ao campo de calibre A_μ , $\varepsilon^{\alpha\mu\nu}$ o tensor de Levi-Civita com três índices e $J^\mu = (\rho, \vec{J})$ uma fonte externa de corrente.

As equações de Euler-Lagrange são dadas por

$$\frac{\kappa}{2}\varepsilon^{\alpha\mu\nu} F_{\mu\nu} = J^\alpha, \text{ ou } \kappa F_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha} J^\alpha. \quad (3.71)$$

Um aspecto interessante a observar em (3.71) é que, diferentemente da teoria de Maxwell, as derivadas de A_μ são de primeira ordem. Assim, uma teoria de Chern-Simons não fornece modos propagantes tipo ondas planas, se $J^\alpha = 0$. Nesse caso A_μ é um calibre puro. Além disso, sempre é viável construir um termo similar a $\varepsilon^{\alpha\mu\nu} A_\alpha \partial_\mu A_\nu$ não apenas em (2+1)-dimensões, mas também em qualquer espaço-tempo de dimensão ímpar. Em dimensão par, não possível formar um invariante de Lorentz com essa estrutura.

A partir de (3.71), podemos obter as leis de Gauss e de Ampère, fixando $\alpha = 0$ e $\alpha = k$, respectivamente,

$$\kappa B = \rho, \quad (3.72)$$

$$\kappa E_j = -\varepsilon_{jk} J_k. \quad (3.73)$$

Note que a equação (3.73) coincide com a lei de Hall [17, 55], para a condutividade Hall definida como $\sigma_H = \kappa$. Por isso, o termo de Chern-Simons desempenha um papel muito importante na descrição dos Efeitos Hall Quânticos Inteiro e Fracionário [18]. Um trabalho teórico pioneiro sobre a fenomenologia do Efeito Hall Fracionário foi desenvolvido por R. B. Laughlin [19], utilizando um modelo de quasipartículas e quaseburacos, os quais se comportam como vórtices possuindo tanto campo elétrico como magnético.

Ao atentar para (3.72), percebemos que em cada ponto do espaço existe uma densidade de carga atrelada a um campo magnético. Em particular, se considerarmos a densidade de carga para uma única partícula com carga g , temos

$$B(\vec{r}) = \frac{g}{\kappa} \delta^2(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (3.74)$$

cujo potencial vetor associado é

$$A_i = \frac{g}{2\pi\kappa} \varepsilon_{ij} \frac{x_j - x'_j}{|\vec{r}' - \vec{r}'|^2}, \quad (3.75)$$

ou ainda reexpresso como um calibre puro

$$A_i = \frac{g}{2\pi\kappa} \partial_i \theta, \quad \text{com } \tan \theta = \frac{x_2 - x'_2}{x_1 - x'_1}, \quad (3.76)$$

assumindo $\vec{r} = (x_1, x_2)$ e $\vec{r}' = (x'_1, x'_2)$. Note que (3.76) confirma o fato de se ter $B = 0$ em qualquer lugar, exceto no ponto onde se encontra a carga, em direta analogia ao caso de um solenoide, no qual o campo magnético é não nulo somente na região interior.

Se assumirmos uma outra partícula (com momento p_i e descrita por uma função de onda ϕ) movendo-se adiabaticamente ao redor da primeira, aquela experimentalmente o potencial vetor desta via o acoplamento mínimo

$$D_i \phi = (p_i - g A_i) \phi. \quad (3.77)$$

É sabido do Efeito Aharonov-Bhom [56, 57] que tal interação pode ser suprimida no hamiltoniano pela redefinição da função de onda:

$$\phi' = \exp\left(ig \oint A_i dx^i\right) \phi = \exp\left(i \frac{g^2}{\kappa}\right) \phi. \quad (3.78)$$

De outra perspectiva, se considerarmos essas duas partículas – nas posições \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , em ordem – descritas por $\phi = \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ e as girarmos de forma adiabática em torno do centro de massa por uma volta de $\pi/2$, então a nova função de onda ganhará uma fase de Pancharatnam-Berry, a saber

$$\phi'(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = \exp\left(i \frac{g^2}{2\kappa}\right) \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2). \quad (3.79)$$

Como consequência, a teoria de Chern-Simons é útil para descrever ânions, recaindo à estatística dos férmions ou bósons, a depender da escolha apropriada do parâmetro κ . Por meio de (3.74), podemos inferir que, para todo ânion com carga elétrica g , existe um campo (ou fluxo) magnético atrelado. É importante lembrar que essa fase tem natureza topológica, no sentido de que ela decorre de (3.70) e, portanto, independe da métrica do espaço-tempo.

Vórtices relativísticos carregados foram estudados primeiramente de forma independente nos artigos de J. Hong, Y. Kim e P. Y. Pac [14] e de R. Jackiw, K. Lee e E. J. Weinberg [13, 15]. Nesses modelos, a densidade lagrangeana tem a forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{CS} + \mathcal{L}_{Higgs} = -\frac{\kappa}{4} \varepsilon^{\alpha\mu\nu} A_\alpha F_{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - V(|\phi|) \quad (3.80)$$

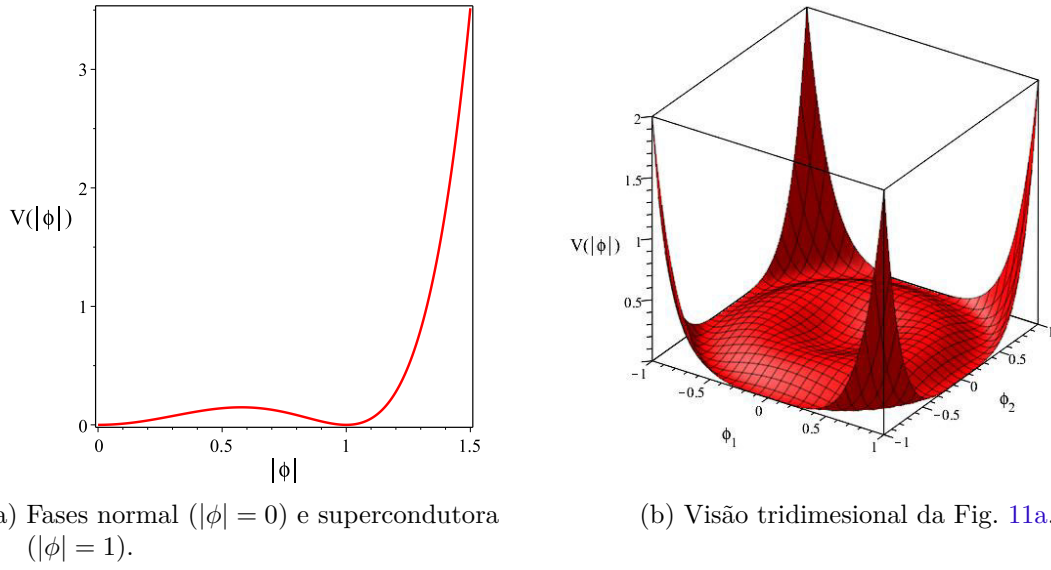


Figura 11 – Potencial ϕ^6 . Para o esboço, adotamos $\lambda = \kappa = v = 1$ por convenção. Temos a fase normal em $|\phi| = 0$ e a supercondutora em $|\phi| = 1$.

e o potencial proposto é do tipo ϕ^6 ,

$$V(|\phi|) = \frac{\lambda^2}{\kappa^2} |\phi|^2 (v^2 - |\phi|^2)^2, \quad (3.81)$$

para suportar estados BPSs. O parâmetro λ consiste em uma constante dimensional. Esse potencial exibe dois valores de mínimo (Fig. 11): um simétrico em $|\phi| = 0$, com campo vetorial de massa $m_V = 0$ e campo escalar, $m_S = \lambda v^2/\kappa$; e outro assimétrico $|\phi| = v$, em que $m_V = \sqrt{2}gv$ e $m_S = \sqrt{2}\lambda v^2/\kappa$. À vista disso, é permitida a formação tanto de vórtices não topológicos (mínimo simétrico) quanto topológicos (mínimo assimétrico).

As equações de Euler-Lagrange são computadas como

$$\frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\alpha\mu\nu} F_{\mu\nu} = J^\alpha, \text{ ou } \kappa F_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha} J^\alpha, \quad (3.82)$$

$$D_\mu D^\mu \phi = -\frac{\lambda^2}{\kappa^2} (v^2 - |\phi|^2) (v^2 - 3|\phi|^2) \phi, \quad (3.83)$$

com J^α definido em (3.19). Veja que (3.82) tem precisamente a mesma forma de (3.71). Usando $\alpha = 0$ em (3.82), encontramos a lei de Gauss no regime estacionário

$$\kappa B = J^0 = gi \left[\phi (igA^0 \phi)^* - \phi^* (igA^0) \right] = 2g^2 |\phi|^2 A^0, \quad (3.84)$$

a qual mostra que o calibre temporal não é mais válido. Como consequência, as configurações de vórtices são carregadas.

3.3.1 O Ansatz para o Vórtice de Chern-Simons

Novamente, sublinhamos que é imprescindível propor um devido perfil funcional para os campos, a fim de solucionar as equações de movimento. Dessa maneira, ainda

podemos empregar o *ansatz* (3.40) e (3.41), porém o potencial elétrico A_0 deve ser agora uma função de r . Assim, temos:

$$A_0 = A_0(r), A_r = 0, A_\theta = -\frac{a(r) - n}{gr}, \quad (3.85)$$

$$\phi = v f(r) e^{in\theta}. \quad (3.86)$$

Além disso, as configurações com energia positiva, finita e localizada requerem as condições de contorno

$$\begin{cases} f(0) = 0, & f(r \rightarrow \infty) = 1, \\ a(0) = n, & a(r \rightarrow \infty) = 0, \end{cases} \quad (3.87)$$

$$\begin{cases} f(0) = 0, & f(r \rightarrow \infty) = 0, \\ a(0) = n, & a(r \rightarrow \infty) = a_\infty, \end{cases} \quad (3.88)$$

para os vórtices topológico (T) [13, 14] e não topológico (NT) [15], respectivamente. A constante real a_∞ assume um valor numérico diferente em cada setor topológico.

Já as condições de contorno impostas sobre $A_0(r)$ não são as mais fortes, pois o potencial elétrico poder ser substituído na densidade de energia por meio da Lei de Gauss (3.84) (veja a subseção (3.3.2)). Aliás, já antecipando o resultado mostrado em (3.108), vemos que

$$A_0(r) = \pm \frac{gv^2}{\kappa} (1 - f^2). \quad (3.89)$$

Essa equação nos mostra que devemos ter na origem

$$A_0(0) = \pm \frac{gv^2}{\kappa}, \quad (3.90)$$

para ambos os tipos de vórtice. Por outro lado, para o vórtice topológico, o potencial elétrico no infinito deve obedecer à condição

$$A_0(r \rightarrow \infty) = 0, \quad (3.91)$$

enquanto para o vórtice não topológico,

$$A_0(r \rightarrow \infty) = \pm \frac{gv^2}{\kappa}. \quad (3.92)$$

É importante esclarecer que o fluxo magnético definido em (3.36) não é mais necessariamente quantizado sob as condições de contorno (3.88), a saber

$$\Phi_{CS}^{NT} = \int d^2x B = 2\pi \int_0^\infty dr r \left(-\frac{1}{gr} \frac{da}{dr} \right) = \frac{2\pi}{g} [a(0) - a(\infty)] = \frac{2\pi}{g} (n - a_\infty), \quad (3.93)$$

uma vez que $a(\infty) = a_\infty$ é uma constante arbitrária, a ser determinada numericamente. Vale ressaltar ainda que, diferentemente da equivalência mostrada em (3.36), não podemos dizer que o fluxo magnético está diretamente relacionado à carga topológica, em decorrência

de esta nova configuração ser dita não topológica. De fato, agora não faz sentido afirmar que existe uma relação de homotopia entre $S_{r \rightarrow \infty}^1$ e S_ϕ^1 .

Para critério de comparação entre (3.93) e (3.38), podemos escrever também

$$\Phi_{CS}^{NT} = \Phi - \frac{2\pi}{g} a_\infty = \frac{2\pi}{g} Q_{top} - \frac{2\pi}{g} a_\infty = \frac{2\pi}{g} n - \frac{2\pi}{g} a_\infty. \quad (3.94)$$

Entretanto, sob as condições de contorno (3.87), o fluxo magnético é sempre quantizado e a relação (3.36) é válida novamente, ou seja,

$$\Phi_{CS}^T = \Phi = \frac{2\pi}{g} Q_{top} = \frac{2\pi}{g} n. \quad (3.95)$$

3.3.2 Formalismo BPS

Vamos agora introduzir o formalismo BPS na teoria de Chern-Simons-Higgs. Começamos pelo funcional de energia no regime estacionário derivado de (3.80), dado por

$$\mathbb{E} = \int d^2x \left(|D_0\phi|^2 + |D_i\phi|^2 + V \right). \quad (3.96)$$

Perceba que podemos explicitar $|D_0\phi|^2$ em função do campo magnético com a ajuda de (3.84):

$$|D_0\phi|^2 = g^2 A_0^2 |\phi|^2 = \frac{\kappa^2}{4g^2 |\phi|^2} B^2. \quad (3.97)$$

Usando a identidade (3.45) juntamente com (3.97), a energia (3.96) fica reescrita como

$$\mathbb{E} = \int d^2x \left(\frac{\kappa^2}{4g^2 |\phi|^2} B^2 + |(D_\pm\phi)|^2 \pm gB |\phi|^2 + V + \frac{1}{2g} \varepsilon_{ij} \partial_i J_k \right). \quad (3.98)$$

Neste estágio, inserimos um campo escalar neutro auxiliar Ψ de maneira adequada, objetivando quadrar a densidade de energia do seguinte modo:

$$\mathbb{E} = \int d^2x \left[\frac{\kappa^2}{4g^2 |\phi|^2} (B \mp \Psi)^2 + |(D_\pm\phi)|^2 \pm \left(g |\phi|^2 + \frac{\kappa^2}{2g^2 |\phi|^2} \Psi \right) B + V - \frac{\kappa^2}{4g^2 |\phi|^2} \Psi^2 \right], \quad (3.99)$$

em que já temos descartado o último termo de (3.98), pois ele se anula sob as condições de contorno. Em virtude de as configurações de vórtices possuírem energia proporcional ao fluxo magnético, impomos as igualdades

$$\left(g |\phi|^2 + \frac{\kappa^2}{2g^2 |\phi|^2} \Psi \right) = gv^2, \quad V = \frac{\kappa^2}{4g^2 |\phi|^2} \Psi^2, \quad (3.100)$$

com base nas quais determinamos o potencial

$$V = \frac{g^4}{\kappa^2} |\phi|^2 \left(v^2 - |\phi|^2 \right)^2, \quad (3.101)$$

sendo similar a (3.81) na hipótese de $\lambda = g^2$. Esta relação infere que a massa m_S associada ao mínimo não trivial seja $m_S = \sqrt{2}g^2v^2/\kappa$. Diferentemente do que ocorre no cenário de Maxwell-Higgs, a massa m_S se torna igual a $m_V = \sqrt{2}gv$ somente quando $\kappa = gv$.

Diante dessas considerações, podemos substituir (3.100) em (3.99), obtendo

$$\mathbb{E} = \int d^2x \left\{ \frac{\kappa^2}{4g^2|\phi|^2} \left[B \mp \frac{2g^3}{\kappa^2} |\phi|^2 (v^2 - |\phi|^2) \right]^2 + |D_{\pm}\phi|^2 \right\} \pm gv^2 \int d^2xB. \quad (3.102)$$

Identificando a última integral como o fluxo magnético, rearranjamos (3.102) na forma abaixo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= \int d^2x \left\{ \frac{\kappa^2}{4g^2|\phi|^2} \left[B \mp \frac{2g^3}{\kappa^2} |\phi|^2 (v^2 - |\phi|^2) \right]^2 + |D_{\pm}\phi|^2 \right\} \\ &\pm gv^2 \Phi_{CS} \geq \pm gv^2 \Phi_{CS}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Ao anular os termos quadrados, determinamos as equações autoduais

$$B = \pm \frac{2g^3}{\kappa^2} |\phi|^2 (v^2 - |\phi|^2), \quad (3.104)$$

$$D_{\pm}\phi = 0, \quad (3.105)$$

assim como o limite BPS da energia

$$\mathbb{E}_{BPS}^{NT} = \pm ev^2 \Phi_{CS} = \pm 2\pi v^2 (Q_{top} - a_{\infty}) = \pm 2\pi v^2 (n - a_{\infty}), \quad (3.106)$$

para vórtices não topológicos, ou ainda

$$\mathbb{E}_{BPS}^T = \pm 2\pi v^2 Q_{top} = \pm 2\pi v^2 n, \quad (3.107)$$

para vórtices topológicos ($a_{\infty} = 0$). O sinal positivo pertence ao vórtice e o negativo, ao antivórtice. É interessante reparar que (3.107) é justamente a mesma energia (3.55) do modelo de Maxwell-Higgs. Ademais, estudos numéricos mostram que $a_{\infty} < 0$ [15], levando a $\mathbb{E}_{BPS}^{NT} > \mathbb{E}_{BPS}^T$ e, portanto, à possibilidade de decaimento do defeito não topológico no defeito topológico por um mecanismo de transição de fase.

3.3.3 O Caso Topológico

3.3.3.1 Perfis Assintóticos dos Campos

A fim de fazer as análises assintóticas das soluções, avaliamos no *ansatz* (3.85) e (3.86) a lei de Gauss (3.84) e as equações BPSs (3.104) e (3.105), respectivamente, como

$$A_0 = \pm \frac{1}{4} \frac{\eta^2 \kappa}{g} (1 - f^2), \quad (3.108)$$

$$\frac{a'}{\rho} = \mp \frac{1}{2} \eta^2 f^2 (1 - f^2), \quad (3.109)$$

$$f' = \pm \frac{af}{\rho}, \quad (3.110)$$

sendo $\rho = gvr$ e $\eta = 2gv/\kappa$ e a linha indicando a derivada em relação à ρ .

Perto da origem, $\rho \rightarrow 0$, é possível encontrar soluções do sistema anterior em série de Maclaurin (daqui em diante, vamos tratar somente do vórtice topológico e considerar apenas o caso no qual $n > 0$ (sinal superior), uma vez que para $n < 0$ (sinal inferior), basta fazer $A_0 \rightarrow -A_0, a \rightarrow -a$ e $f \rightarrow f$):

$$A_0(r) \approx \frac{1}{4} \frac{\eta^2 \kappa}{e} \left[1 - f_n^2 (\eta\rho)^{2n} + \frac{f_n^4}{(n+1)^2} (\eta\rho)^{2(2n+1)} + \dots \right], \quad (3.111)$$

$$a(\rho) \approx n - \frac{f_n^2}{(n+1)} (\eta\rho)^{2(n+1)} + \dots, \quad (3.112)$$

$$f(\rho) \approx f_n (\eta\rho)^n - \frac{f_n^3}{2(n+1)^2} (\eta\rho)^{3n+2} + \dots, \quad (3.113)$$

em que f_n é uma constante dependente de n .

À medida que $\rho \rightarrow \infty$, notamos os comportamentos assintóticos $a \ll 1$ e $f \rightarrow 1$ pelas condições de contorno (3.87). Neste limite, são pertinentes as escolhas

$$a \approx \pm \delta a \ll 1, \quad (3.114)$$

$$f \approx 1 - \delta f, \text{ com } \delta f \ll 1, \quad (3.115)$$

por meio das quais as equações (3.108), (3.109) e (3.110) resultam em

$$A_0 - \frac{1}{2} \frac{\eta^2 \kappa}{g} \delta f = 0, \quad (3.116)$$

$$(\delta a)'' - \frac{(\delta a)'}{\rho} - \eta^2 \delta a = 0, \quad (3.117)$$

$$(\delta f)'' + \frac{(\delta f)'}{\rho} - \eta^2 \delta f = 0, \quad (3.118)$$

admitindo apenas a primeira ordem em δa e δf . Conforme já sabemos da subseção 3.2.4, as soluções de equações tipo (3.117) e (3.118) são as funções de Bessel modificadas de segunda espécie de ordem um e zero, respectivamente. Portanto, temos:

$$A_0(r) \propto \frac{1}{2} \frac{\eta^2 \kappa}{e} K_0(\eta\rho) \approx \frac{1}{2} \frac{\eta^2 \kappa}{e} \frac{1}{\sqrt{\eta\rho}} \exp(-\eta\rho), \quad (3.119)$$

$$\delta a(\rho) \propto \eta\rho K_1(\eta\rho) \approx \sqrt{\eta\rho} \exp(-\eta\rho), \quad (3.120)$$

$$\delta f(\rho) \propto K_0(\eta\rho) \approx \frac{1}{\sqrt{\eta\rho}} \exp(-\eta\rho). \quad (3.121)$$

Veja que os vórtices se estendem consideravelmente até um raio efetivo dado por

$$\rho = \frac{1}{\eta} \Rightarrow r = \frac{1}{\eta g v} = \frac{\kappa}{2g^2 v^2}. \quad (3.122)$$

O recíproco desse raio corresponde à escala de massa de Chern-Simons

$$m_{CS} = \frac{1}{r} = \frac{2g^2 v^2}{\kappa}. \quad (3.123)$$

Por fim, é útil também escrever a densidade de energia BPS oriunda de (3.96) no *ansatz* (3.85) e (3.86),

$$\mathcal{E}_{BPS}(\rho) = g^2 v^4 \left[\left(\frac{a'}{\rho} \right)^2 + 2(f')^2 \right] = g^2 v^4 \left[\frac{\eta^4 \kappa^2}{8g^2 v^2} f^2 (1 - f^2)^2 + 2 \left(\frac{af}{\rho} \right)^2 \right], \quad (3.124)$$

em que usamos a lei de Gauss (3.108) na primeira igualdade e consideramos as equações BPSs (3.109) e (3.110) na segunda.

3.3.3.2 Gráficos das Soluções Numéricas

Nesta subseção, esboçamos as soluções numéricas do sistema de equações (3.108), (3.109) e (3.110), os campos elétrico $E(r)$ e magnético $B(r)$ e a densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ correspondentes, perante as condições de contorno (3.87) e (3.90) e (3.91).

A Figura 12a revela o comportamento do campo escalar. Observamos que, quanto maior for n , mais devagar o campo de Higgs alcança o seu valor de mínimo, em perfeita similaridade ao que acontece na teoria de Maxwell-Higgs. Novamente, temos aqui $f(r) = 0$ no centro de simetria do vórtice. Apresentamos na Figura 12b o gráfico do potencial elétrico. Em virtude de (3.108), os perfis de $A_0(r)$ se comportam como a imagem especular de $[f(r)]^2$, de maneira tal que $A_0(r) + [f(r)]^2 = 1$.

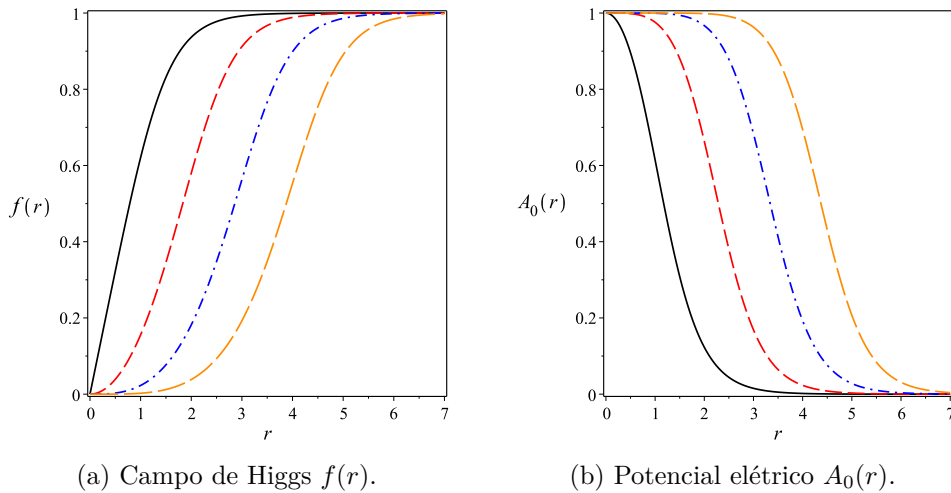


Figura 12 – Perfis numéricos das soluções das equações (3.110) (Fig. 12a) e (3.108) (Fig. 12b). Adotamos as seguintes convenções para as linhas: sólida preta ($n = 1$), tracejada vermelha ($n = 2$), ponto-tracejada azul ($n = 3$) e longo-tracejada laranja ($n = 4$), considerando $g = v = \kappa = 1$ por simplicidade.

Na Figura 13a, mostramos o gráfico do potencial vetor $a(r)$. À proporção que n cresce, notamos nitidamente o aumento da distribuição de $a(r)$ com referência ao centro do defeito. Na origem, onde campo de Higgs é zero, $a(r)$ determina o valor de n . A Figura 13b exibe o gráfico do campo magnético. Diferentemente do que ocorre na teoria de

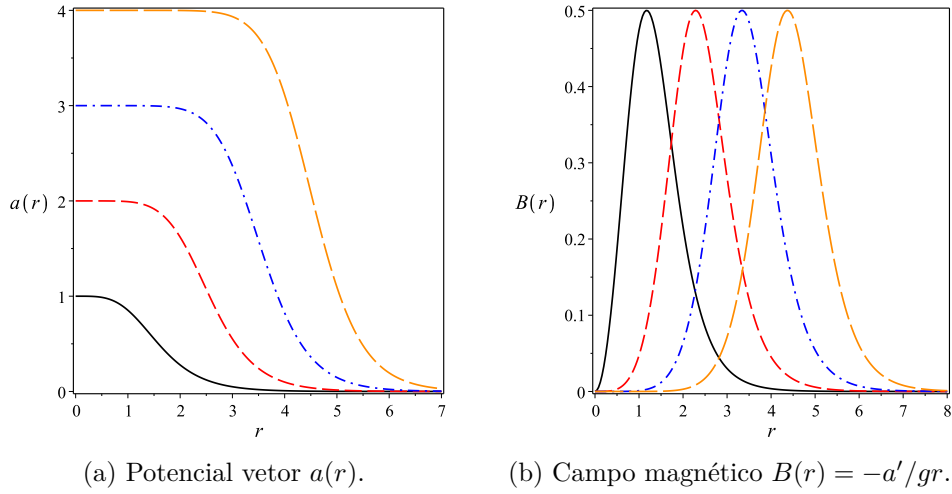


Figura 13 – Soluções numéricas para o potencial vetor $a(r)$ oriundo da equação (3.109) (Fig. 13a) e para o campo magnético correspondente $B(r) = -a'/gr$ (Fig. 13b). Usamos as mesmas convenções da Fig. 12.

Maxwell-Higgs, os valores máximos de $B(r)$ independem de n e aparecem deslocados da origem em posições radiais onde $f(r) = \sqrt{2}/2$. Isso pode ser deduzido diretamente de (3.104). Perceba que os máximos do campo magnético são tanto mais afastados do centro do vórtice quanto maior for n .

Descrevemos na Figura 14a o perfil do campo elétrico. Veja que ele possui um comportamento semelhante ao campo magnético da Figura 13b, porém a intensidade máxima de $E(r)$ diminui com o crescimento de n . Essa diminuição está atrelada ao fato de o campo escalar $f(r)$ ser uma função crescente de r , conforme pode ser inferido a partir da

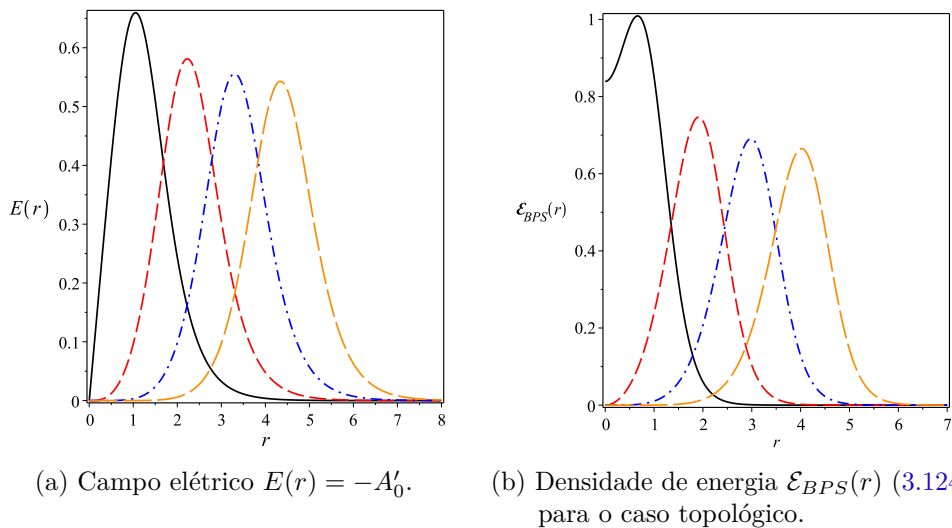


Figura 14 – Gráficos numéricos do campo elétrico (Fig. 14a) associado ao potencial da Fig. 12b e da densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ (3.124) para o caso topológico (Fig. 14b). Usamos também as convenções da Fig. 12.

Lei de Gauss (3.84). Na Figura 14b, fazemos o esboço densidade de energia BPS (3.124) para estas configurações. Assim como as distribuições dos campos elétrico e magnético, as distribuições energéticas para diferentes valores de n formam regiões anelares de maior intensidade⁶. Os anéis formados são centrados na origem e têm maiores raios para maiores valores do *winding number*. Embora a configuração com maior n possua mais energia, como mostra a equação (3.106), percebe-se que o máximo da densidade de energia diminui com aumento do *winding number*. Em compensação, os perímetros dos anéis tornam-se mais largos. Um último aspecto importante a mencionar é que todos os perfis de $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ são nulos na origem, exceto aquele para $n = 1$.

3.3.4 O Caso Não Topológico

3.3.4.1 Perfis Assintóticos dos Campos

Conforme podemos ver em (3.87) e (3.88), as condições de contorno na origem para os vórtices carregados topológico e não topológico são as mesmas. Consequentemente, os comportamentos dos campos em torno de $r = 0$ são análogos àqueles mostrados em (3.111), (3.112) e (3.113). Por outro lado, no limite em que $r \rightarrow \infty$, podemos assumir

$$a \approx \delta a \ll 1, \quad (3.125)$$

$$f \approx \delta f \ll 1, \quad (3.126)$$

conduzindo (3.109) e (3.110) à equação de Liouville para δf (até a segunda ordem em δf)

$$\left[\ln(\delta f)^2 \right]'' + \frac{1}{\rho} \left[\ln(\delta f)^2 \right]' + \eta^2 (\delta f)^2 = 0, \quad (3.127)$$

cuja solução fisicamente aceitável é

$$f(\rho) \approx \delta f = \frac{2\sqrt{2}C}{\eta\rho_0} \frac{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{C-1}}{1 + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2C}}, \quad (3.128)$$

sendo $C > 1$ uma constante dependente de n . Levando (3.128) à equação (3.109) e resolvendo-a para $a(\rho)$, temos

$$a(\rho) \approx \delta a = -\frac{C\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2C} - C + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2C} + 1}{1 + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2C}}. \quad (3.129)$$

Veja que as soluções aproximadas acima também fitam bem os comportamentos quando $r \rightarrow 0$. Diante disso, podemos fixar C como segue

$$a(0) = C - 1 = n \Rightarrow C = n + 1, \quad (3.130)$$

⁶ Os anéis podem ser visto ao se rotacionar a Figura 14b em torno do eixo das ordenadas por um ângulo de 2π radianos, já que as soluções têm simetria rotacional.

o que resulta nos seguintes comportamentos no infinito:

$$A_0(\rho) \approx \frac{1}{4} \frac{\eta^2 k}{g} - \frac{2k(n+1)^2}{g\rho_0^2} \frac{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2n}}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2(n+1)}\right]^2}, \quad (3.131)$$

$$f(\rho) \approx 2\sqrt{2} \frac{(n+1)}{\eta\rho_0} \frac{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n}{1 + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2(n+1)}}, \quad (3.132)$$

$$a(\rho) \approx \frac{n - (n+2) \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2(n+1)}}{1 + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2(n+1)}}, \quad (3.133)$$

donde podemos inferir imediatamente o limite $a(r \rightarrow \infty) = a_\infty \approx -(n+2) < 0$, mostrando que os vórtices não topológicos possuem energia maior do que os topológicos (veja a equação (3.106)).

3.3.4.2 Gráficos das Soluções Numéricas

Para o caso não topológico, nós também computamos as soluções numéricas do sistema de equações (3.108), (3.109) e (3.110), os campos elétrico $E(r)$ e magnético $B(r)$ e a densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ associados, sob as condições de contorno (3.88), (3.90) e (3.92).

Veja na Figura 15a que o campo de Higgs se anula tanto no centro de simetria do vórtice quanto no infinito, para todos os valores do *winding number*. Note também que o máximo de $f(r)$ aumenta e se afasta da origem à proporção que n cresce. Ilustramos na

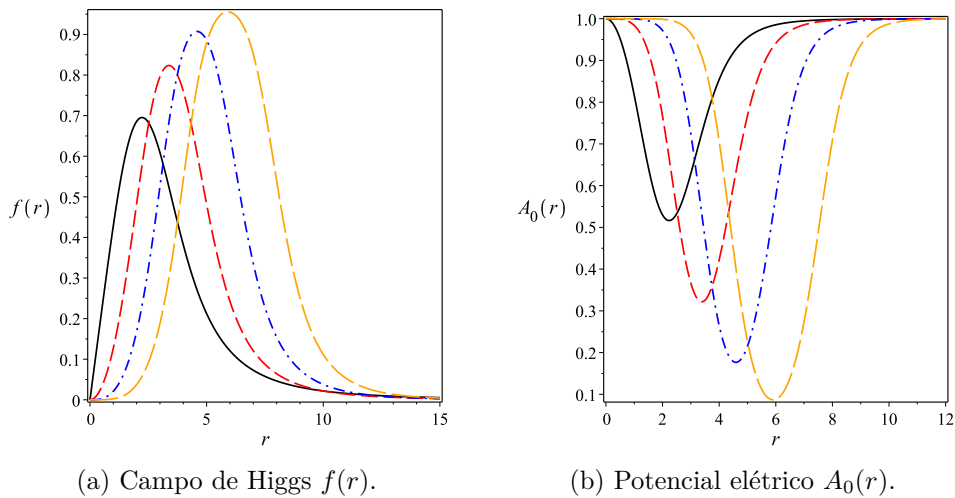


Figura 15 – Soluções numéricas das equações (3.110) (Fig. 15a) e (3.108) (Fig. 15b), sob as condições de contorno (3.88), (3.90) e (3.92). Utilizamos as seguintes conveções para as curvas: sólida preta ($n = 1$), tracejada vermelha ($n = 2$), ponto-tracejada azul ($n = 3$) e longo-tracejada laranja ($n = 4$), adotando $g = v = \kappa = 1$ por mera praticidade.

Figura 15b o perfil do potencial elétrico. Apesar da mudança nas condições de contorno em relação ao caso topológico, os comportamentos de $A_0(r)$ ainda são complementares de $[f(r)]^2$, no sentido de que ainda vale a relação $A_0(r) + [f(r)]^2 = 1$, por causa de (3.108).

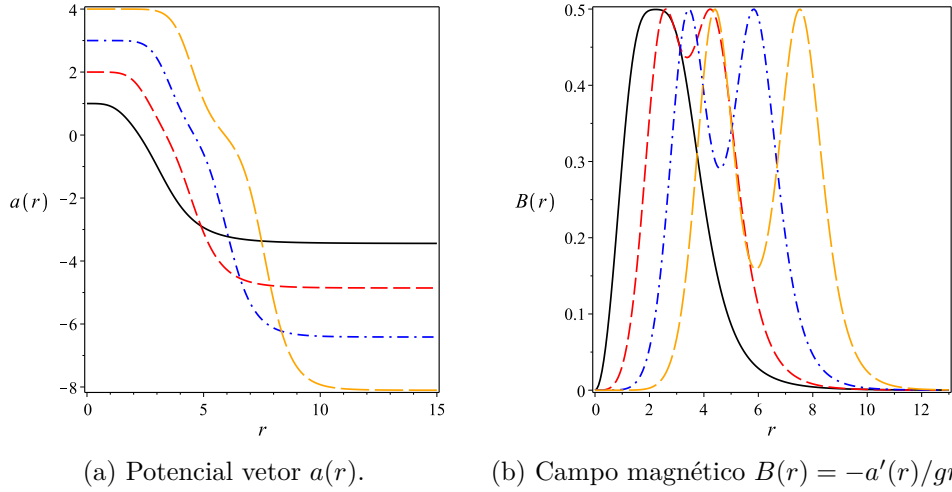
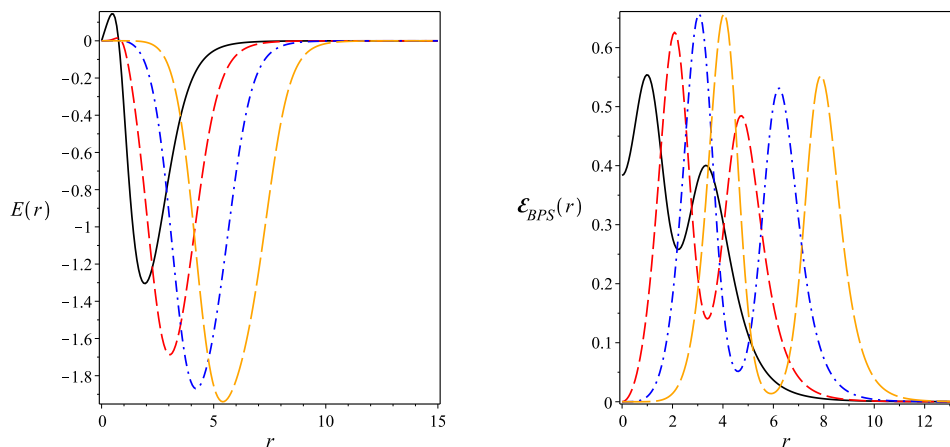


Figura 16 – Perfis numéricos do potencial vetor $a(r)$ (Fig. 16a) e do campo magnético $B(r) = -a'(r)/gr$ associado (Fig. 16b). Usamos as convenções adotadas na Fig. 15.

A Figura 16a retrata as curvas do potencial vetor $a(r)$. Observe outra vez que $a(r)$ é igual ao *winding number* na origem. Diferentemente do que ocorre no caso topológico, o campo $a(r)$ possui um valor negativo no infinito para cada valor de n . Por exemplo, para $n = 1$, $a_\infty \approx -3.443431$; para $n = 2$, $a_\infty \approx -4.856922$; para $n = 3$, $a_\infty \approx -6.413573$ e, para $n = 4$, $a_\infty \approx -8.102216$. Obviamente, os valores reais de a_∞ diferem apreciavelmente dos valores aproximados $a_\infty \approx -(n+2) < 0$ preditos por (3.133). Na Figura 16b, apresentamos o comportamento do campo magnético. Exceto para $n = 1$ (linha preta), perceba que $B(r)$ exibe dois máximos. Novamente, destacamos que os máximos do campo magnético sempre ocorrem em posições radiais onde $f(r) = \sqrt{2}/2$. O aparecimento desses dois máximos resultam na formação de duplos anéis.

Mostramos na Figura 17a o esboço do campo elétrico. Observe que ele possui um efeito de inversão, o qual é mais evidente para menores valores da *winding number*. Além disso, é nítido que os valores mínimos dos perfis de $E(r)$ aumentam com o crescimento de n . Finalmente, na Figura 17b, ilustramos a densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(r)$. Repare que também há formação de duplos anéis, os quais são mais afastados da origem quanto maior for o *winding number*. Exceto para $n = 1$, todos os perfis são nulos na origem.



(a) Campo elétrico $E(r) = -A'_0$.

(b) Densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ (3.124) para o caso não topológico.

Figura 17 – Perfis numéricos do campo elétrico $E(r) = -A'_0$ (Fig. 17a) e da densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ (3.124) para o não caso topológico (Fig. 17b). Adotamos as conveções da Fig. 15.

3.4 Modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs

O termo de Chern-Simons tem sido explorado também em teorias de calibre topologicamente massivas, nas quais a dinâmica do campo de *gauge* é controlada adicionalmente pelo termo Maxwell, ou seja,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{CS} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\kappa}{4}\varepsilon^{\alpha\mu\nu}A_\alpha F_{\mu\nu}. \quad (3.134)$$

Lagrangeanas dessa natureza têm sido consideradas ainda no contexto de teorias de calibre não abelianas [20, 58, 59]. A grande novidade do modelo (3.134) em (2+1)-dimensões é que ele se manifesta como uma nova forma de teoria de *gauge* massiva, em que a massa não é oriunda de um mecanismo de Higgs, mas do termo de Chern-Simons, isto é, a massa é de natureza puramente topológica. Para entender melhor essa questão, vamos olhar para a correspondente equação de movimento

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} - \frac{\kappa}{2}\varepsilon_{\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.135)$$

Reescrevendo (3.135) em termos do pseudo-quadrivetor dual,

$$F_\mu^* = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad (3.136)$$

temos

$$(\partial_\nu\partial^\nu + \kappa^2)F_\mu^* = 0. \quad (3.137)$$

Como vemos, o parâmetro de Chern-Simons está relacionado à massa do campo F_μ^* , o qual além de preservar a simetria de *gauge*, claro, obedece ao calibre de Lorentz. Assim, essa teoria suporta um modo propagante massivo transverso.

É possível também descrever um mecanismo de Higgs, acoplando o campo de calibre com um campo escalar carregado, a saber

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{CS} + \mathcal{L}_{Higgs} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\kappa}{4}\varepsilon^{\alpha\mu\nu}A_\alpha F_{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*D^\mu\phi - V(|\phi|), \end{aligned} \quad (3.138)$$

em que seguimos com as definições para a derivada covariante $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - igA_\mu\phi$ covariante e para o tensor eletromagnético $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. A função $V(|\phi|)$ é algum potencial que pode quebrar minimamente a simetria $U(1)$. Na fase simétrica $|\phi| = 0$, o campo de *gauge* apresenta um grau de liberdade topologicamente massivo e o campo escalar complexo (ou dois reais) é massivo. Por outro lado, na fase assimétrica $|\phi| = v$, a teoria fornece um campo de *gauge* com dois graus de liberdade massivos e um bóson de Higgs. Além disso, o modo de Goldstone é absorvido pelo modo longitudinal do campo de *gauge*. Os referidos graus de liberdades vetoriais exibem massas dadas por

$$m_\pm = \frac{1}{2} \left(\sqrt{8g^2v^2 + \kappa^2} \pm |\kappa| \right). \quad (3.139)$$

Veja que, no limite $\kappa \rightarrow 0$, recuperamos o modelo de Maxwell-Higgs e $m_{\pm} = m_V = \sqrt{2}gv$ (seção 3.2). Em contrapartida, para $\kappa \gg 1$, podemos descartar o termo Maxwell, recaindo no modelo de Chern-Simons (seção 3.3).

A princípio, sabemos que a equação BPS para o setor de Higgs advém da equação de Cauchy-Riemann generalizada (3.54). Um fato interessante é que podemos utilizar essa equação para tornar a lei de Ampère proveniente de (3.138) integrável, reduzindo-a a uma segunda equação BPS. Entretanto, conforme mostrado de maneira detalhada em Ref. [60], o potencial BPS viola a simetria de calibre. Para contornar esse problema, foi proposto inicialmente em Ref. [16] que é necessário modificar a teoria (3.138) introduzindo um campo escalar auxiliar neutro da seguinte maneira:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\kappa}{4}\varepsilon^{\alpha\mu\nu}A_{\alpha}F_{\mu\nu} + (D_{\mu}\phi)^*D^{\mu}\phi + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\Psi\partial^{\mu}\Psi - V(|\phi|, \Psi), \quad (3.140)$$

em que $V(|\phi|, \Psi)$ é o autopotencial definido por

$$V(|\phi|, \Psi) = g^2\Psi^2|\phi|^2 + \frac{1}{2}(gv^2 - g|\phi|^2 + \kappa\Psi)^2. \quad (3.141)$$

Apesar de o campo Ψ ser visto a priori como um novo grau de liberdade, veremos que o estado BPS irá fixá-lo como a componente temporal do campo de calibre. O novo modelo (3.140) leva às seguintes equações de movimento:

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\kappa\varepsilon^{\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + J^{\nu}, \quad (3.142)$$

$$D_{\mu}D^{\mu}\phi = -g^2\Psi^2\phi - g(gv^2 - g|\phi|^2 + \kappa\Psi)\phi, \quad (3.143)$$

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}\Psi = -2g^2\Psi|\phi|^2 - \kappa(gv^2 - g|\phi|^2 + \kappa\Psi), \quad (3.144)$$

em que a quadricorrente J^{ν} é dada em (3.19). Em particular, fazendo $\nu = 0$ em (3.142) e definindo os campos elétrico E e magnético B

$$E^i = \partial^i A_0, \quad B = F_{12}, \quad (3.145)$$

determinamos a lei de Gauss estacionária

$$\partial_i E^i - \kappa B = 2e^2 |\phi|^2 A^0, \quad (3.146)$$

a partir da qual notamos a invalidade do calibre temporal $A_0 = 0$ devido ao termo de Chern-Simons. Assim, vemos que essa é uma teoria mais geral para descrever configurações de vórtices carregados.

3.5 O Ansatz para o Vórtice de Maxwell-Chern-Simons-Higgs

Para obter as soluções BPSs numéricas do modelo (3.140), vamos utilizar novamente o ansatz (3.85) e (3.86). Contudo, as funções regulares $A_0(r)$, $a(r)$ e $f(r)$ passam a obedecer às condições de contorno

$$A_0(0) = \omega_0, \quad a(0) = n, \quad f(0) = 0 \quad (3.147)$$

na origem e

$$A'_0(r \rightarrow \infty) = 0, \quad a(r \rightarrow \infty) = n, \quad f(r \rightarrow \infty) = 1 \quad (3.148)$$

no infinito, para configurações topológicas com energia localizada, positiva e finita. Em (3.147), o parâmetro ω_0 é uma constante que depende de n .

Como revisão bibliográfica, vamos discutir nesse modelo somente o caso do vórtice carregado topológico (fase assimétrica), pois é o que servirá de base para o capítulo 8.

3.6 Formalismo BPS

Para aplicar o formalismo BPS e encontrar as configurações estáveis, vamos considerar o funcional de energia no regime estacionário associado à densidade lagrangeana (3.140)

$$\mathbb{E} = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} [(\partial_i A_0)^2 + (\partial_i \Psi)^2] + \frac{1}{2} B^2 + g^2 (A_0^2 + \Psi^2) |\phi|^2 + |D_i \phi|^2 + V \right\}. \quad (3.149)$$

Com o auxílio da lei de Gauss (3.146) e da identidade (3.45), podemos reescrever (3.149) como

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_i A_0 \mp \partial_i \Psi)^2 + g^2 (A_0 \mp \Psi)^2 |\phi|^2 + [B \mp (gv^2 - g|\phi|^2 + \kappa\Psi)]^2 \right. \\ &\quad \left. + |D_{\pm} \phi|^2 \pm gv^2 B + \partial_i \left(\pm \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} J_k + A_0 \partial_i A_0 \right) \right\} \\ &\geq \pm gv^2 \int d^2x B = \pm gv^2 \Phi. \end{aligned} \quad (3.150)$$

Os dois primeiros termos em (3.150) nos fornecem as equações BPSs para o setor elétrico. Somente com a ajuda dessas equações é possível absorver o termo remanescente $A_0 \partial_i A_0$ no último termo de superfície, o qual se anula sob as condições de contorno [16, 60]. Consequentemente, quando as equações BPSs

$$\partial_i A_0 = \pm \partial_i \Psi, \quad A_0 = \pm \Psi, \quad (3.151)$$

$$B = \pm (gv^2 - g|\phi|^2 + \kappa\Psi), \quad (3.152)$$

$$D_{\pm} \phi = 0 \quad (3.153)$$

são verificadas, o sistema atinge a mínima energia

$$\mathbb{E}_{BPS} = \pm gv^2 \Phi = \pm 2\pi v^2 Q_{top} = \pm 2\pi v^2 n, \quad (3.154)$$

quantizada em função do *winding number*. O sinal superior corresponde ao vórtice, enquanto o inferior ao antivórtice.

A equação BPS (3.151) nos mostra que o campo Ψ é dado em função de A_0 . Assim, para resolver o sistema autodual anterior, precisamos solucionar também da lei de Gauss (3.146).

3.7 Perfis Assintóticos dos Campos

Nesta seção, nós avaliamos a lei de Gauss (3.146) e as equações BPSs (3.152) e (3.153) no ansatz (3.85) e (3.86) e calculamos as soluções aproximadas nas fronteiras, perante as condições de contorno (3.147) e (3.148). Após algumas simplificações algébricas, as referidas lei de Gauss e equações BPSs ficam, respectivamente, como

$$A_0'' + \frac{A_0'}{r} - \kappa \frac{a'}{gr} = 2g^2 v^2 f^2 A_0, \quad (3.155)$$

$$\frac{a'}{r} = \mp g^2 v^2 (1 - f^2) + g\kappa A_0, \quad (3.156)$$

$$f' = \pm \frac{af}{r}. \quad (3.157)$$

Seguindo os mesmos procedimentos da seção 3.2.4, encontramos os comportamentos aproximados para as soluções de (3.155)-(3.157) perto da origem, a saber

$$A_0(r) \approx \omega_0 + \frac{1}{4}\kappa B_0 r^2 + \frac{1}{64}\kappa^3 B_0 r^4 + \dots, \quad (3.158)$$

$$a(r) \approx n - \frac{1}{2}g B_0 r^2 - \frac{1}{16}g\kappa^2 B_0 r^4 + \dots, \quad (3.159)$$

$$f(r) \approx f_n r^n + \dots, \quad (3.160)$$

em que $B_0 = B(0) = (gv^2 - \kappa\omega_0)$ é o campo magnético em $r = 0$ (veja Eq. (3.152)) e f_n é uma constante que depende de n . Por outro lado, essas funções se comportam no infinito como

$$A_0(r) \propto C_\infty \frac{2gv}{(m + |\kappa|)} K_0(mr) \approx C_\infty \frac{2gv}{(m + |\kappa|)\sqrt{mr}} \exp(-mr), \quad (3.161)$$

$$a(r) \propto C_\infty \frac{2g^2 v^2}{(m + |\kappa|)} r K_1(mr) \approx C_\infty \frac{2g^2 v^2}{(m + |\kappa|)} r \sqrt{mr} \exp(-mr), \quad (3.162)$$

$$f(r) \propto 1 - C_\infty K_0(mr) \approx 1 - C_\infty \frac{1}{\sqrt{mr}} \exp(-mr), \quad (3.163)$$

em que

$$m = m_- = \frac{1}{2} \left(\sqrt{8(gv)^2 + \kappa^2} - |\kappa| \right) \quad (3.164)$$

é a massa associada a um grau de liberdade vetorial definida em (3.139) e C_∞ é uma constante positiva. Essas soluções são válidas somente para o vórtice ($n > 0$ e sinal superior). As soluções para o antivórtice ($n < 0$ e sinal inferior) são obtidas facilmente pelos mapas $A_0 \rightarrow -A_0$, $a \rightarrow -a$ e $f \rightarrow f$.

Para fins de esboço numérico, nós avaliamos também no *ansatz* a densidade de energia BPS relativa a (3.149), obtendo

$$\mathcal{E}_{BPS}(r) = \frac{1}{2}(A_0')^2 + \frac{(a')^2}{2g^2 r^2} + v^2 g^2 f^2 A_0^2 + v^2 (f')^2 + v^2 \frac{a^2 f^2}{r^2} + \frac{1}{2}(\Psi')^2 + V, \quad (3.165)$$

em que o autopotencial V é dado por

$$V = \frac{1}{2}(gv^2 - gv^2f^2 + \kappa\Psi)^2 + v^2g^2\Psi^2f^2. \quad (3.166)$$

Ou podemos reescrever (3.165) ainda como

$$\mathcal{E}_{BPS}(r) = (A'_0)^2 + (gv^2 - gv^2f^2 + \kappa A_0)^2 + 2v^2g^2f^2A_0^2 + 2v^2\frac{a^2f^2}{r^2}, \quad (3.167)$$

utilizando as equações BPSs (3.156)-(3.157).

3.7.1 Gráficos das Soluções Numéricas

Nós calculamos numericamente as soluções da lei de Gauss (3.155) e do sistema de equações autoduais (3.156)-(3.157), os campos elétrico $E(r)$ e magnético $B(r)$ e a densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ associados, assumindo as condições de contorno (3.147) e (3.148).

Na Figura 18a, ilustramos o perfil do campo de Higgs. Observe que as linhas ficam menos localizadas à proporção que n aumenta, indicando maior distribuição de pares de Cooper. Esse efeito é parecido com o que acontece com o ANO vórtice (Fig. 9a). A Figura 18b mostra o comportamento do potencial elétrico $A_0(r)$. Note que os perfis ficam menos localizados à medida que n incrementa. Diferentemente dos potenciais elétricos das Figs. (12b) e (15b), vemos que o valor de $A_0(r)$ na origem cresce com n .

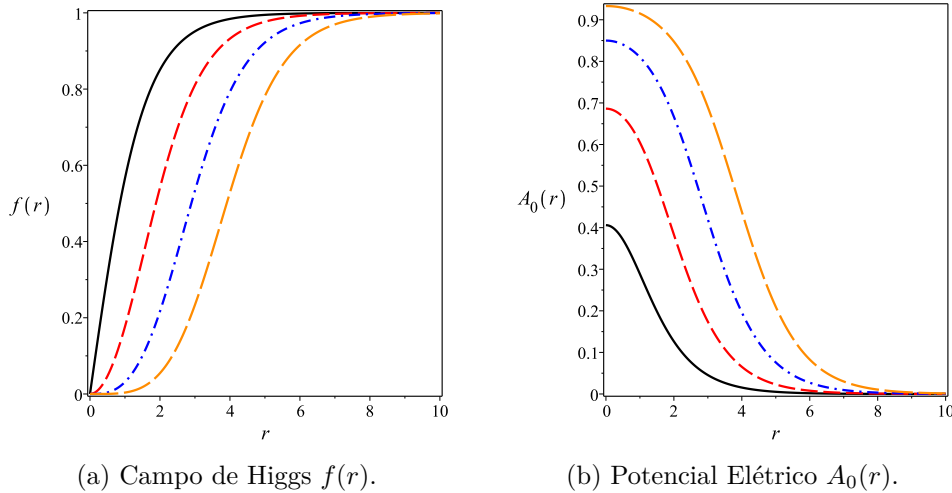


Figura 18 – Soluções numéricas para o campo de Higgs (Fig. 18a) e para o potencial elétrico (Fig. 18b). Adotamos as seguintes convenções: linha sólida preta ($n = 1$), linha tracejada vermelha ($n = 2$), linha ponto-tracejada azul ($n = 3$) e linha longo-tracejada laranja ($n = 4$). Em todos os casos, escolhemos $g = v = 1$ por praticidade.

Na Figura 19a, esboçamos o gráfico do potencial vetor $a(r)$. É possível perceber que as linhas ficam mais distribuídas quando n aumenta. Esses perfis são similares àqueles

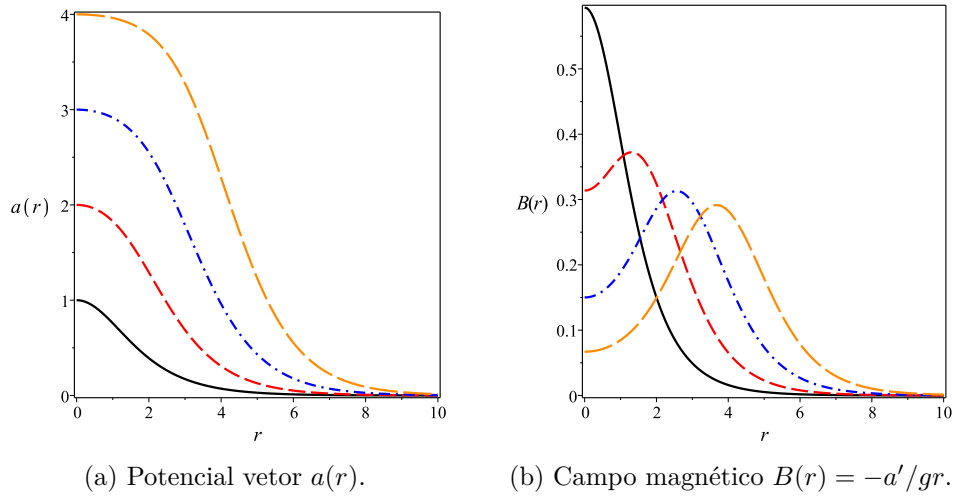


Figura 19 – Perfis numéricos do potencial vetor (Fig. 19a) e do campo magnético associado (Fig. 19b). Consideramos as mesmas convenções da Fig. 18.

exibidos pelo ANO vórtice (Fig. 9b) e pelo CS vórtice topológico (Fig. 13a). Todavia, os comportamentos mostrados na Figura 19a mudam consideravelmente em relação àqueles do CS vórtice não topológico (Fig. 16a). Ilustramos na Figura 19b a distribuição do campo magnético $B(r)$ para alguns valores de n . Para $n = 1$ (linha preta), $B(r)$ possui valor máximo na origem e o vórtice é como um disco de campo magnético. Entretanto, para $n > 1$ crescente, os perfis tendem a adquirir uma forma anelar em torno da origem. Assim, ao contrário dos ANO (Fig. 10a) e CS (Figs. 13b e 16b) vórtices, o campo magnético na origem depende de n .

Finalmente, representamos na Figura 20 a forma do campo elétrico $E(r)$ e da densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ em alguns setores topológicos. A Figura 20a destaca que

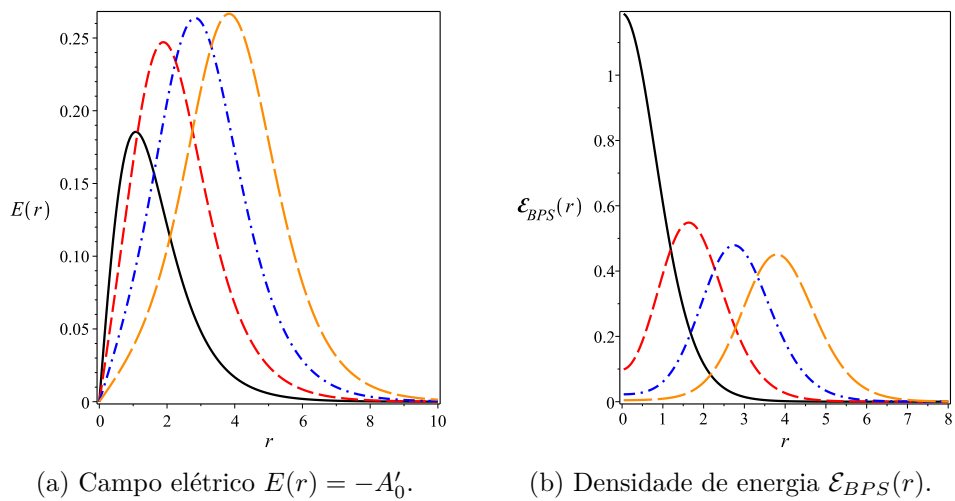


Figura 20 – Gráficos numéricos do campo elétrico (Fig. 20a) e da densidade de energia BPS (Fig. 20b). Adotamos as mesmas convenções da Fig. 18.

$E(r)$ se distribui como um anel centrado na origem, em analogia aos CS vórtices topológico (Fig. 14a) e não topológico (Fig. 17a para n grande). Por outro lado, a Figura 20b revela que $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ se comporta como o campo magnético $B(r)$ (Fig. 19b), enfatizando que o defeito é se torna menos localizado quando n cresce.

4 VÓRTICES TOPOLÓGICOS AUTODU- AIS EM UM MODELO $CP(2)$ CALI- BRADO

Neste capítulo, vamos inicialmente apresentar alguns aspectos gerais do modelo $CP(N - 1)$. Em seguida, descrevemos a formação de vórtices BPSs carregados e descarregados no modelo $CP(2)$ calibrado. Configurações de vórtices de segunda ordem descritas por tal teoria foram inicialmente encontradas em 2016 por A. Yu. Loginov [61]. Em seu trabalho, Loginov previu a existência de dois novos tipos de vórtices topológicos: o primeiro possuindo fluxo magnético quantizado, com o potencial vetor satisfazendo uma condição de contorno de Dirichlet no infinito; e o segundo, curiosamente, tendo fluxo magnético contínuo, em vista do campo de calibre obedecer a uma condição de Neumann, também no infinito. Indo adiante, investigamos a formação de estados BPSs dos vórtices de Loginov, lançando mão de um vínculo sobre o potencial. Mostramos que, além de ser fundamental para determinar o potencial BPS, tal vínculo transforma o problema de Neumann em um de Dirichlet, tornando as duas estruturas de Loginov equivalentes, a menos de uma redefinição dos campos.

Os novos resultados apresentados neste capítulo renderam a nossa primeira publicação, na revista *Physics Letters B* [24].

4.1 Modelo $CP(N - 1)$

Seja G um grupo qualquer e H o seu subgrupo invariante, tal que eles formam o grupo fator G/H . O modelo $CP(N - 1)$ em $(2+1)$ -dimensões é uma teoria renormalizável que possui ϕ_a – com $a = 1, 2, 3, \dots, N$ – campos escalares carregados tomando valores na álgebra de Lie do grupo fator G/H , sendo $G = SU(N)$ e $H = U(1) \times SU(N-1) \simeq U(N-1)$. Aliás, a nomenclatura CP refere-se ao espaço projetivo complexo, que estudamos na subseção 2.3.1. Desde de seu surgimento no final anos 70 [62–65], o modelo $CP(N - 1)$ tem mostrado uma ampla aplicabilidade devido à sua forte correspondência com teorias de Yang-Mills [66–68]. Especialmente, o modelo $CP(1)$ pode ser mapeado no σ - $O(3)$ [63, 64, 69], ambos suportando soluções topológicas tipo instantons. Para $N > 2$, o mapeamento não existe e, além disso, enquanto o modelo $O(N)$ possui topologia trivial, o $CP(N - 1)$ mantém a sua topologia não trivial.

Como estamos tratando de um modelo em $(2+1)$ -dimensões, no regime estacionário, os problemas se reduzem a um espaço euclidiano bidimensional. Neste caso, apesar de

a topologia dos campos $CP(N-1)$ poder ser classificada com base no segundo grupo de homotopia $\pi_2(G/H)$, representando o mapeamento entre uma esfera compactificada $S^2_{r \rightarrow \infty}$ e uma esfera no espaço interno S^2_ϕ , um teorema discutido em [49, 70, 71] garante a redução de $\pi_2(G/H)$ ao grupo fundamental de Poincaré,

$$\pi_2(G/H) = \pi_1(H). \quad (4.1)$$

Para $G = SU(N)$ e $H = U(1) \otimes SU(N-1)$, podemos decompor localmente tais grupos em produtos diretos de hipersferas S^N , a saber

$$G \sim \prod_{k=2}^N S^{2k-1}, H \sim U(1) \otimes \prod_{k=2}^{N-1} S^{2k-1}, \quad (4.2)$$

uma vez que os números das dimensões

$$\dim(G) = \sum_{k=2}^N (2k-1) = N^2 - 1 \text{ e } \dim(H) = \sum_{k=1}^{N-1} (2k-1) = (N-1)^2 \quad (4.3)$$

correspondem às quantidades de geradores de G e H , respectivamente. Ademais, como já sabemos da subseção 2.4.3, $\dim(G/H) = \dim(CP(N-1)) = \dim(G) - \dim(H) = 2N - 2$. Com isso, é fácil perceber então a relação de equivalência

$$CP(N-1) \sim S^{2N-1}/S^1, \quad (4.4)$$

a partir da qual, utilizando o teorema (4.1) em (4.4), chegamos a

$$\pi_2[CP(N-1)] = \pi_2(S^{2N-1}/S^1) = \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}. \quad (4.5)$$

Assim, vemos de maneira clara que a topologia não trivial do modelo $CP(N-1)$ depende, no final das contas, somente da relação de homotopia do grupo fundamental e, portanto, independe de N .

A densidade lagrangiana dessa teoria é dada por [61]

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi_a)^* \partial^\mu \phi_a - h^{-1} \phi_a (\partial_\mu \phi_a)^* \phi_b^* \partial^\mu \phi_b, \quad (4.6)$$

com o campo ϕ tendo a norma constante em todo o espaço-tempo,

$$\phi_a^* \phi_a = h. \quad (4.7)$$

Podemos ainda reescrever (4.6) na forma

$$\mathcal{L} = (P_{ab} \partial_\mu \phi_b)^* P_{ac} \partial_\mu \phi_c, \quad (4.8)$$

em que temos considerado o operador hermitiano de projeção

$$P_{ab} = \delta_{ab} - h^{-1} \phi_a \phi_b^*. \quad (4.9)$$

Esse modelo é invariante perante a transformação global $SU(N)$

$$\phi'_a \rightarrow SU(N)_{ab} \phi_b \quad (4.10)$$

e sob a transformação local $U(1)$

$$\phi'_a \rightarrow e^{i\theta(x)} \phi_a. \quad (4.11)$$

Observe em (4.11) que os campos ϕ_a definem, obviamente, uma classe de equivalência $[\phi_a]$, segundo mostrado em (2.12).

4.1.1 A Carga Topológica do Modelo $CP(N-1)$

Veja que a invariância local (4.11) nos sugere que o termo dinâmico $CP(N-1)$ em (4.8) pode ser reescrito em função de um campo de calibre. Com efeito, podemos introduzir o campo de calibre auxiliar

$$\mathcal{A}_\mu = -i\hbar^{-1} \phi^\dagger \partial_\mu \phi = -\frac{i\hbar^{-1}}{2} \left[\phi^\dagger \partial_\mu \phi - (\partial_\mu \phi^\dagger) \phi \right], \quad (4.12)$$

tal que

$$\mathcal{A}_\mu^* = \mathcal{A}_\mu. \quad (4.13)$$

Notemos que o campo auxiliar não representa um grau de liberdade extra e é puramente real devido à condição (4.7). Assim, a densidade lagrangeana (4.8) pode ser dada também como

$$\mathcal{L} = (P_{ab} \partial_\mu \phi_b)^* P_{ac} \partial^\mu \phi_c = (\mathcal{D}_\mu \phi_a)^* \mathcal{D}^\mu \phi_a = (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi, \quad (4.14)$$

sendo a derivada covariante definida por

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi - i\mathcal{A}_\mu \phi. \quad (4.15)$$

Em analogia à equação (3.34), estamos aptos a introduzir a quadricorrente topológica conservada

$$\mathcal{J}_{top}^\mu = \frac{1}{2\pi} \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha \mathcal{A}_\beta, \quad (4.16)$$

cujas carga relativa é

$$Q_{top} = \int_S \mathcal{J}_{top}^0 d^2x. \quad (4.17)$$

4.2 Modelo $CP(N-1)$ Calibrado

Nesta subseção, vamos abordar a teoria $CP(N-1)$ local, em que os campos ϕ_a interagem com um campo de *gauge* $U(1)$ via um acoplamento mínimo não canônico, primeiramente considerada por A. Yu. Loginov [61] para descrever configurações tipo vórtices com $N=3$. A densidade lagrangiana desse modelo é expressa como:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{CP(N-1)}, \quad (4.18)$$

com¹

$$\mathcal{L}_{CP(N-1)} = (P_{ab}D_\mu\phi_b)^* P_{ac}D^\mu\phi_c - V(\phi), \quad (4.19)$$

sendo

$$D_\mu\phi_a = \partial_\mu\phi_a - giA_\mu Q_{ab}\phi_b \quad (4.20)$$

a derivada covariante não usual e $V(\phi)$ o potencial. A matriz de carga Q é real e diagonal, $Q_{ab} = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_N)$, e os $q_{N's}$ são os autovalores. É interessante observar a invariância de (4.18) perante a transformação de *gauge* $U(1)$ (ou $SU(N)$ diagonal)

$$\phi'_a = e^{iq_a\theta}\phi_a, \quad A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta. \quad (4.21)$$

Note ainda que (4.20) recupera a dinâmica $CP(N-1)$ regida por (4.8) no limite em que constante de acoplamento g tende a zero. Além disso, se tivermos $Q \propto \mathbb{1}_{N \times N}$, o campo A_μ desacopla do campo escalar pela transformação de calibre (4.21). Seja, por exemplo, $Q = \mathbb{1}_{N \times N}$. Logo, a equação (4.20) torna-se:

$$D_\mu\phi_a = \partial_\mu\phi_a - giA_\mu\phi_a. \quad (4.22)$$

Fazendo escolha de calibre

$$A_\mu = -i(hg)^{-1}\phi_b^*\partial_\mu\phi_b, \quad (4.23)$$

percebemos que (4.22) reproduz (4.8). Isso acontece naturalmente em virtude de o modelo $CP(N-1)$ puro ser invariante $U(1)$ local. Dessa maneira, uma proposta para evitar o desacoplamento entre A_μ e ϕ_a é escolher

$$\text{Tr}(Q) = 0. \quad (4.24)$$

As equações de Euler-Lagrange decorrentes de (4.18) são dadas por

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (4.25)$$

$$P_{ab} \left[2P_{bc}D_\mu(P_{cd}D^\mu\phi_d) - D_\mu D^\mu\phi_b + \frac{\partial V}{\partial\phi_b^*} \right] = 0, \quad (4.26)$$

com a densidade de corrente J^ν sendo definida agora como

$$J^\nu = ig[(P_{ab}D^\nu\phi_b)^* P_{ac}Q_{cd}\phi_d - P_{ab}D^\nu\phi_b(P_{ac}Q_{cd}\phi_d)^*]. \quad (4.27)$$

A corrente topológica é definida como

$$\mathcal{J}_{top} = \frac{1}{2\pi i\hbar}\varepsilon_{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha(\phi^\dagger\partial_\beta\phi) - \frac{g}{2\pi\hbar}\varepsilon_{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha(A_\beta\phi^\dagger Q\phi), \quad (4.28)$$

cuja carga associada corresponde a

$$Q_{top} = \int_S \mathcal{J}_{top}^0 d^2x. \quad (4.29)$$

¹ O potencial não pode depender de $|\phi|$, pois esse módulo é constante em qualquer ponto do espaço-tempo. A dependência explícita será fixada pelo estado BPS.

4.3 Modelo $CP(2)$ Calibrado

Nesta seção, vamos considerar a densidade lagrangiana (4.18) para $N = 3$,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (P_{ab}D_\mu\phi_b)^* P_{ac}D_\mu\phi_c - V(\phi). \quad (4.30)$$

Nesse caso, obviamente, temos um tripleto de campo escalar complexo acoplado ao campo de *gauge*, com $a, b, c = 1, 2, 3$. Portanto, como essa teoria é invariante sob $SU(3)$ diagonal, a matriz de carga Q deve ser um dos oito geradores de $SU(3)$. Na representação das matrizes de Gell-Mann,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

dentre os geradores $G_i = \frac{1}{2}\lambda_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, 8$) de $SU(3)$, notamos que apenas G_3 e G_8 verificam as propriedades de Q (consoante à discussão feita na seção 4.2). Logo, neste cenário, as configurações de vórtices devem surgir quando

$$Q = G_3 = \frac{1}{2}\lambda_3, \quad \text{ou} \quad (4.32)$$

$$Q = G_8 = \frac{1}{2}\lambda_8. \quad (4.33)$$

Outro ponto importante é considerar a lei de Gauss independente do tempo (advinda de (4.25) fixando $\nu = 0$)

$$\partial_i \partial^i A^0 = J^0 = ig \left[(P_{ab}D^0\phi_b)^* P_{ac}Q_{cd}\phi_d - P_{ab}D^0\phi_b (P_{ac}Q_{cd}\phi_d)^* \right], \quad (4.34)$$

em que $D^0\phi_b = -igQ_{bc}\phi_c A^0$. Nela, notamos que validade do calibre temporal $A^0 = 0$ nos permite encontrar soluções estacionárias contendo somente campo magnético.

4.4 O Ansatz para o Vórtice $CP(2)$

O *ansatz* a ser usado agora tem a seguinte estrutura [61]:

$$A_0 = 0, \quad A_i = -\frac{1}{gr} \varepsilon^{ij} \hat{x}^j A(r), \quad (4.35)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = h^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} e^{in_1\theta} \sin \alpha(r) \cos \beta(r) \\ e^{in_2\theta} \sin \alpha(r) \sin \beta(r) \\ e^{in_3\theta} \cos \alpha(r) \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

sendo ε^{ij} e símbolo de Levi-Civita bidimensional \hat{x}^j um vetor unitário dado em termos do ângulo polar θ : $\hat{x}^j = (\cos \theta, \sin \theta)$; os parâmetros n_1, n_2 e $n_3 \in \mathbb{Z}$ são os *winding numbers* relativos aos campos ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 . O *ansatz* (4.35) e (4.36) é axialmente simétrico perante rotações espaciais $SO(2)$, bem como sob as transformações (4.10) e (4.11).

Da condição de regularidade dos campos na origem, as funções $A(r)$ e $\alpha(r)$ devem obedecer a

$$A(0) = 0, \quad (4.37)$$

$$\alpha(0) = 0, \quad (4.38)$$

implicando ainda em $n_3 = 0$, pois o campo $CP(2)$ não pode ser multivalorado.

A equação de movimento para $\beta(r)$ é dada por (usando² (4.32) e $n_1 = -n_2 = n$)

$$\beta'' + \left(\frac{1}{r} + 2\alpha' \cot \alpha \right) \beta' - \frac{\sin^2 \alpha \sin(4\beta)}{r^2} \left(n - \frac{A}{2} \right)^2 = 0. \quad (4.39)$$

A linha indica a derivada em relação à coordenada radial r . As soluções compatíveis com o estado BPS são

$$\beta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad \beta_2 = \frac{\pi}{2}k, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}, \quad (4.40)$$

desde que assumamos um potencial independente do campo β , ou seja, $\partial_\beta V = 0$.

A densidade de energia referente a (4.30), no calibre temporal e no regime estacionário, é dada por:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (F_{ij})^2 + (P_{ab} D_i \phi_b)^* P_{ac} D_i \phi_c + V. \quad (4.41)$$

Para configurações com energia positiva e definida, devemos ter no infinito ($r \rightarrow \infty$) os seguintes comportamentos

$$F_{ij} \rightarrow 0, \quad (4.42)$$

$$P_{ab} D_i \phi_b \rightarrow 0, \quad (4.43)$$

$$V \rightarrow 0. \quad (4.44)$$

² Esta escolha será esclarecida adiante.

Assim, o campo A_μ tende a um calibre puro. Analisando ainda (4.43) no *ansatz*, para $\beta = \beta_1$ (sem perda generalidade, adotamos $k = 0$), temos:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = h^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} e^{in_1\theta} \sin \alpha \\ \frac{\sqrt{2}}{2} e^{in_2\theta} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Dessa forma, para $i = r$, podemos assumir

$$\begin{aligned} \phi_a = \phi_a(\alpha, \theta) &\Rightarrow D_r \phi_b = \partial_r \phi_b \propto \alpha' \partial_\alpha \phi_b \Rightarrow \\ P_{ab} D_r \phi_b \propto \alpha' &\Rightarrow \alpha'(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha(r \rightarrow \infty) = \text{constante}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Já para $i = \theta$, obtemos

$$P_{ab} D_\theta \phi_b = P_{ab} (\partial_\theta \phi_b - i A_{q_b} \phi_b) = i P_{ab} (n_b - A_{q_b}) \phi_b.$$

- Para $a = 1$

$$\begin{aligned} P_{1b} D_\theta \phi_b &= i P_{11} (n_1 - A_{q_1}) \phi_1 + i P_{12} (n_2 - A_{q_2}) \phi_2 - i P_{13} A_{q_3} \phi_3 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} i h^{\frac{1}{2}} e^{in_1\theta} \left[(n_1 - A_{q_1}) \sin \alpha - \frac{1}{2} (n_{12} - A_{q_{12}}) \sin^3 \alpha \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_{q_3}}{\sqrt{2}} \sin \alpha \cos^2 \alpha \right]; \end{aligned} \quad (4.47)$$

- Para $a = 2$

$$\begin{aligned} P_{2b} D_\theta \phi_b &= i P_{21} (n_1 - A_{q_1}) \phi_1 + i P_{22} (n_2 - A_{q_2}) \phi_2 - i P_{23} A_{q_3} \phi_3 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} i h^{\frac{1}{2}} e^{in_2\theta} \left[(n_2 - A_{q_2}) \sin \alpha - \frac{1}{2} (n_{12} - A_{q_{12}}) \sin^3 \alpha \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_{q_3}}{\sqrt{2}} \sin \alpha \cos^2 \alpha \right]; \end{aligned} \quad (4.48)$$

- Para $a = 3$

$$\begin{aligned} P_{3b} D_\theta \phi_b &= i P_{31} (n_1 - A_{q_1}) \phi_1 + i P_{32} (n_2 - A_{q_2}) \phi_2 - i P_{33} A_{q_3} \phi_3 \\ &= i h^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{2} (n_{12} - A_{q_{12}}) \cos \alpha \sin^2 \alpha - A_{q_3} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \right]; \end{aligned} \quad (4.49)$$

em que temos definido

$$n_{12} = n_1 + n_2, \quad q_{12} = q_1 + q_2. \quad (4.50)$$

Se escolhermos $Q = G_3 = \frac{1}{2}\lambda_3$, temos $q_{12} = 0$ e $q_3 = 0$. Nesse caso, (4.47), (4.48) e (4.49) resultam sequencialmente em:

$$P_{1b}D_\theta\phi_b = \frac{\sqrt{2}}{2}ih^{\frac{1}{2}}e^{in_1\theta} \left[\left(n_1 - \frac{A}{2} \right) \sin \alpha - \frac{1}{2}n_{12} \sin^3 \alpha \right], \quad (4.51)$$

$$P_{2b}D_\theta\phi_b = \frac{\sqrt{2}}{2}ih^{\frac{1}{2}}e^{in_2\theta} \left[\left(n_2 + \frac{A}{2} \right) \sin \alpha - \frac{1}{2}n_{12} \sin^3 \alpha \right], \quad (4.52)$$

$$P_{3b}D_\theta\phi_b = -\frac{1}{2}ih^{\frac{1}{2}}n_{12} \cos \alpha \sin^2 \alpha. \quad (4.53)$$

Além disso, vamos assumir neste trabalho $n_{12} = 0$, ou seja, $n_1 = -n_2 = n$, o que nos leva a escrever (4.51), (4.52) e (4.53) como

$$P_{1b}D_\theta\phi_b = \frac{\sqrt{2}}{2}ih^{\frac{1}{2}}e^{in\theta} \left(n - \frac{A}{2} \right) \sin \alpha, \quad (4.54)$$

$$P_{2b}D_\theta\phi_b = \frac{\sqrt{2}}{2}ih^{\frac{1}{2}}e^{-in\theta} \left(-n + \frac{A}{2} \right) \sin \alpha, \quad (4.55)$$

$$P_{3b}D_\theta\phi_b = 0, \quad (4.56)$$

respectivamente. O resultado acima nos faz concluir que no infinito devemos ter

$$A(r \rightarrow \infty) = 2n. \quad (4.57)$$

Essa condição de contorno de Dirichlet em termos do *winding number* é necessária e suficiente e determina a quantização do fluxo magnético e, portanto, da energia BPS, se

$$\alpha(r \rightarrow \infty) = \frac{\pi}{2}. \quad (4.58)$$

De outro modo, para $\beta = \beta_2$ (sem perda de generalidade, usamos $k = 1$), temos:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = h^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{in_2\theta} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

Dessarte, a análise feita em (4.46) ainda é válida considerando-se (4.59). De maneira similar ao que obtivemos em (4.47), (4.48) e (4.49), podemos encontrar agora

$$P_{1b}D_\theta\phi_b = 0, \quad (4.60)$$

$$P_{2b}D_\theta\phi_b = \frac{1}{2}ih^{\frac{1}{2}}e^{in_2\theta} \sin(2\alpha) \cos \alpha [n_2 + (q_3 - q_2) A], \quad (4.61)$$

$$P_{3b}D_\theta\phi_b = -\frac{1}{2}ih^{\frac{1}{2}} \sin(2\alpha) \sin \alpha [n_2 + (q_3 - q_2) A]. \quad (4.62)$$

Novamente, se adotarmos $Q = G_3 = \frac{1}{2}\lambda_3$ e $n_1 = -n_2 = n$, as expressões (4.61) e (4.62) ficam, em ordem, como:

$$P_{2b}D_\theta\phi_b = \frac{1}{2}ih^{\frac{1}{2}}e^{-in\theta} \sin(2\alpha) \cos \alpha \left(-n + \frac{A}{2} \right), \quad (4.63)$$

$$P_{3b}D_\theta\phi_b = -\frac{1}{2}ih^{\frac{1}{2}} \sin(2\alpha) \sin \alpha \left(-n + \frac{A}{2} \right), \quad (4.64)$$

permitindo-nos concluir outra vez que podemos ter

$$A(r \rightarrow \infty) = 2n. \quad (4.65)$$

Neste caso, a condição (4.65) é suficiente, mas não necessária, quer se trate de um defeito topológico com (4.58) sendo válida, quer se trate de um não topológico, ou seja,

$$\alpha(r \rightarrow \infty) = 0. \quad (4.66)$$

Na verdade, tendo em mente a validade de (4.58), a condição de contorno mais geral para $A(r)$ é a de Neumann

$$A'(r \rightarrow \infty) = 0. \quad (4.67)$$

Com efeito, a existência destes sólitons topológicos (de segunda ordem) com fluxo magnético não quantizado foi apontada por Loginov [61]. Esse novo fenômeno aparece devido a anulação da derivada covariante transversa no infinito ser menos restritiva do que a anulação da própria derivada covariante. Contudo, a condição de contorno (4.65) torna-se necessária e suficiente, caso

$$\alpha(r \rightarrow \infty) = \frac{\pi}{4}, \quad (4.68)$$

gerando, portanto, configurações tipo vórtices topológicos com fluxo magnético quantizado. Veremos na subseção 4.5.2 que a condição de contorno (4.68) é fundamental para se estabelecer os estados BPSs dos vórtices de Loginov com $\beta = \beta_2$, equiparando-os àqueles com $\beta = \beta_1$. Por outro lado, para as escolhas $Q = G_8 = \frac{1}{2}\lambda_8$ e $n_1 = n_2 = n$, isto é, $n_{12} = 2n$ e $q_{12} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (sendo agora $\beta = \beta_0 = \text{constante}$), é mostrado em [61] que este caso e aquele no qual $Q = G_3 = \frac{1}{2}\lambda_3$ (sendo ainda $\beta = \beta_2$) são equivalentes, a menos de uma simples redefinição dos campos. Por essa razão, vamos considerar apenas $Q = G_3 = \frac{1}{2}\lambda_3$ nas discussões seguintes.

4.5 Formalismo BPS: O Caso $Q = G_3$

Agora, com o intento de implementar o formalismo BPS, vamos partir do funcional de energia oriundo de (4.41) projetado no *ansatz* (4.35) e (4.36), assumindo $Q = G_3$ e $n_1 = -n_2 = n$:

$$\mathbb{E} = \int d^2x \mathcal{E} = 2\pi \int dr r \left\{ \frac{B^2}{2} + h \left[\left(\frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{W}{r^2} \left(\frac{A}{2} - n \right)^2 \sin^2 \alpha \right] + V \right\}, \quad (4.69)$$

com $B = -\frac{A'}{gr}$ e $W = W(\alpha, \beta) = 1 - \sin^2 \alpha \cos^2(2\beta)$. Começamos de antemão com a energia projetada em razão da dificuldade técnica que tivemos em propor uma identidade para o setor escalar tal qual aquela utilizada em (3.45). Podemos então reescrever (4.69)

no seguinte modo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} = 2\pi \int dr r \left\{ \frac{1}{2} (B \mp \sqrt{2V})^2 + h \left[\frac{d\alpha}{dr} \mp \frac{\sqrt{W}}{r} \left(\frac{A}{2} - n \right) \sin \alpha \right]^2 \right\} \\ \mp \int dr \left[\frac{d(A-2n)}{dr} \frac{\sqrt{2V}}{g} + (A-2n) h \sqrt{W} \frac{d(\cos \alpha)}{dr} \right]. \end{aligned} \quad (4.70)$$

É possível converter o integrando na última linha acima em uma derivada total, se o potencial obedecer ao vínculo

$$\frac{1}{g} \frac{d}{dr} (\sqrt{2V}) = h \sqrt{W} \frac{d(\cos \alpha)}{dr}. \quad (4.71)$$

Assim, a energia (4.70) passa a ser dada na forma

$$\begin{aligned} \mathbb{E} = \mathbb{E}_{BPS} + \int dr r \left\{ \frac{1}{2} (B \mp \sqrt{2V})^2 + h \left[\frac{d\alpha}{dr} \mp \frac{\sqrt{W}}{r} \left(\frac{A}{2} - n \right) \sin \alpha \right]^2 \right\} \\ \geq \mathbb{E}_{BPS}, \end{aligned} \quad (4.72)$$

em que temos definido

$$\mathbb{E}_{BPS} = 2\pi \int dr r \mathcal{E}_{BPS}, \quad (4.73)$$

com

$$\mathcal{E}_{BPS} = \mp \frac{1}{g} \frac{d}{dr} [(A-2n) \sqrt{2V}]. \quad (4.74)$$

A energia BPS (4.73) é positiva e definida e seu valor corresponde a

$$\mathbb{E}_{BPS} = \mp \frac{2\pi}{g} \left[(A_\infty - 2n) \sqrt{2V_\infty} - (A_0 - 2n) \sqrt{2V_0} \right] = \mp \frac{4\pi n}{g} \sqrt{2V_0}, \quad (4.75)$$

em que temos assumido $A_\infty = A(r \rightarrow \infty)$ e $A_0 = A(0)$. Já o fluxo magnético quantizado é dado por³

$$\Phi = 2\pi \int dr r B(r) = -\frac{2\pi}{g} A_\infty = -\frac{4\pi}{g} n. \quad (4.76)$$

Na saturação da energia no limite BPS (4.75), pela anulação dos termos quadrados em (4.72), encontramos as equações de primeira ordem

$$B = \pm \sqrt{2V}, \quad (4.77)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{\sqrt{W}}{r} \left(\frac{A}{2} - n \right) \sin \alpha. \quad (4.78)$$

³ Por causa da estrutura do novo *ansatz*, o fluxo magnético é agora convenicionado negativo (positivo) no setor topológico com $n > 0$ ($n < 0$). É fácil ver que a taxa total de variação de $A(r)$ é contrária àquela de $a(r)$ no contexto de vórtices $U(1)$.

4.5.1 Perfis Assintóticos dos Campos : O Caso $\beta=\beta_1$

Quando $\beta = \beta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, obtemos $W = 1$ e a restrição (4.71) torna-se

$$\frac{d}{dr} (\sqrt{2V}) = gh \frac{d(\cos \alpha)}{dr}, \quad (4.79)$$

cuja solução nos dá

$$V = \frac{g^2 h^2}{2} \cos^2 \alpha, \quad (4.80)$$

ou ainda em termos de ϕ_3 (usando o *ansatz* (4.36))

$$V = \frac{g^2 h}{2} |\phi_3|^2, \quad (4.81)$$

levando em conta a constante de integração igual a zero, convenientemente. Repare a quebra espontânea de simetria de $SU(3)$ para $SU(2)$ manifestada em (4.81), remanescendo assim apenas dois campos escalares complexos (ou quatro reais) independentes,

$$|\phi_3|^2 = h - (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2). \quad (4.82)$$

Além disso, as fixações de β e dos *winding numbers* reduzem mais dois campos escalares reais, quebrando a simetria mais uma vez, de $SU(2)$ para $U(1)$. Finalmente, quando o mínimo é atingido,

$$\alpha(r \rightarrow \infty) = \frac{\pi}{2}, \quad (4.83)$$

a simetria $U(1)$ é quebrada devido ao mínimo assimétrico,

$$|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 = h, \quad \phi_1 = \phi_2^*, \quad |\phi_3|^2 = 0, \quad (4.84)$$

e o defeito surge. Observe que neste modelo $CP(2)$ podemos interpretar a densidade de superelétrons da teoria de Ginzburg-Landau como sendo

$$N_S = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2. \quad (4.85)$$

A partir de (4.80) e (4.83), notamos também que devemos ter no infinito $V_0 = \frac{g^2 h^2}{2}$. Este último resultado substituído em (4.75) nos leva a

$$\mathbb{E}_{BPS} = \pm 4\pi h n. \quad (4.86)$$

Além disso, as equações BPSs (4.77) e (4.78) tomam a forma

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp g^2 h \cos \alpha, \quad (4.87)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{\sin \alpha}{r} \left(\frac{A}{2} - n \right), \quad (4.88)$$

as quais possuem soluções com os seguintes comportamentos próximo à origem (à frente vamos tratar somente do vórtice, ou seja, $n > 0$ e sinais inferiores),

$$A(r) \approx \lambda r^2, \quad (4.89)$$

$$\alpha(r) \approx C_1 r^n, \quad (4.90)$$

e no limite assintótico $r \rightarrow \infty$,

$$A(r) \approx 2n - 2C_2 M_A r \exp(-M_A r), \quad (4.91)$$

$$\alpha(r) \approx \frac{\pi}{2} - C_2 \exp(-M_\alpha r), \quad (4.92)$$

com $\lambda = g^2 h/2$, sendo C_1 e C_2 constantes reais e $M_\alpha = M_A = \sqrt{\lambda}$ as massas dos correspondentes bósons. Perceba que essa igualdade entre as massas manifesta a característica peculiar dos vórtices BPSs descarregados.

É pertinente ainda considerarmos a densidade de energia BPS, ao substituir (4.87) e (4.88) em (4.69), a saber

$$\mathcal{E}_{BPS}(r) = \left(\frac{A'}{gr}\right)^2 + 2h(\alpha')^2 = g^2 h^2 \cos^2 \alpha + \frac{2h \sin^2 \alpha}{r^2} \left(\frac{A}{2} - n\right)^2, \quad (4.93)$$

para fins de esboço numérico.

4.5.2 Perfis Assintóticos dos Campos : O Caso $\beta = \beta_2$

Para a situação na qual $\beta = \beta_2 = \frac{\pi}{2}k$, encontramos $W = \cos^2 \alpha$ e o vínculo (4.71) resulta em

$$\frac{d}{dr}(\sqrt{2V}) = \frac{gh}{2} \frac{d(\cos^2 \alpha)}{dr}, \quad (4.94)$$

tendo como solução

$$V = \frac{g^2 h^2}{32} \cos^2(2\alpha), \quad (4.95)$$

assumindo agora a constante de integração igual a $C = -gh/4$, de maneira adequada. Olhando para (4.95), percebemos que devemos ter a seguinte condição de contorno no infinito:

$$\alpha(r \rightarrow \infty) = \frac{\pi}{4}, \quad (4.96)$$

e também $V_0 = \frac{g^2 h^2}{32}$. Este último resultado aplicado em (4.75) nos fornece

$$\mathbb{E}_{BPS} = \pm \pi h n. \quad (4.97)$$

Adicionalmente, as equações BPSs (4.77) e (4.78) assumem agora a forma

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp \frac{g^2 h}{4} \cos(2\alpha), \quad (4.98)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{\sin(2\alpha)}{2r} \left(\frac{A}{2} - n\right), \quad (4.99)$$

cujas soluções têm os seguintes comportamentos perto da origem (consideramos apenas o vórtice, isto é, $n > 0$ e sinais inferiores),

$$A(r) \approx \frac{\lambda}{4} r^2, \quad (4.100)$$

$$\alpha(r) \approx \mathcal{C}_1 r^n, \quad (4.101)$$

e no infinito,

$$A(r) \approx 2n - 2\mathcal{C}_2 M_A r \exp(-\mathcal{M}_A r), \quad (4.102)$$

$$\alpha(r) \approx \frac{\pi}{4} - \mathcal{C}_2 \exp(-\mathcal{M}_\alpha r), \quad (4.103)$$

em que $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}_A = \sqrt{\lambda}$ são as massas dos respectivos bósons e \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 são constantes reais.

É interessante observar que o potencial (4.80) pode ser mapeado no potencial (4.95), usando as redefinições

$$\alpha \rightarrow 2\alpha, \quad \lambda \rightarrow \lambda/4, \quad h \rightarrow h/4. \quad (4.104)$$

Posto isso, também os sistemas BPSs para $\beta = \beta_1$ e $\beta = \beta_2$ podem ser mapeados um no outro, implicando ainda na mesma equivalência a nível das equações de Euler-Lagrange. Por conseguinte, vemos que ambos os cenários são fenomenologicamente compatíveis. Na prática, a carga topológica (bem como a energia) do caso $\beta = \beta_1$ corresponde a quatro vezes a do caso $\beta = \beta_2$, em decorrência de o primeiro mapa de homotopia cobrir quatro vezes o segundo. Notemos ainda que os perfis assintóticos são típicos dos vórtices descritos pelo modelo de Maxwell-Higgs.

4.6 Gráficos das Soluções Numéricas

Nesta seção, apresentamos os gráficos das soluções numéricas do vórtice descrito pelo sistema equações de diferenciais (4.87) e (4.88) (caso $\beta = \beta_1$), sob as condições de contorno (4.37), (4.38), (4.57) e (4.58).

Na Figura 21, ilustramos os comportamentos do campo escalar $\alpha(r)$ e do potencial vetor $A(r)$. Note que tanto $\alpha(r)$ quanto $A(r)$ se anulam na origem para qualquer valor do *winding number*. Também vemos que, enquanto $A(r \rightarrow \infty) \rightarrow 2n$ no infinito, obtemos $\alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow \pi/2$ independentemente de n . Se compararmos a Figura 21 com as Figuras 9a e 9b, constatamos que neste cenário o campo escalar se comporta da mesma forma: tendendo ao valor de mínimo cada vez mais suavemente com o crescimento de n . Por outro lado, o perfil de $A(r)$ é “espelhado” com respeito a $a(r)$, em virtude apenas da própria estrutura do *ansatz*.

Mostramos na Figura 22a o perfil da intensidade do campo magnético $B(r)$. Vemos que todas as curvas descrevem *lumps* (do inglês, *caroços*) centrados na origem, para

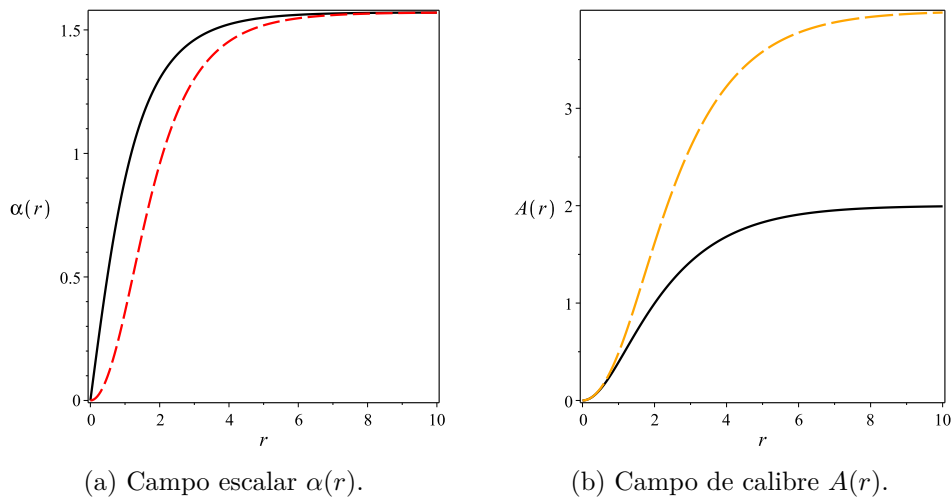


Figura 21 – Soluções numéricas para o campo escalar $\alpha(r)$ em preto ($n = 1$) e vermelho ($n = 2$) e para o campo de calibre $A(r)$ em azul ($n = 1$) e laranja ($n = 2$). Em todos os esboços, fixamos $g = h = 1$ por simplicidade.

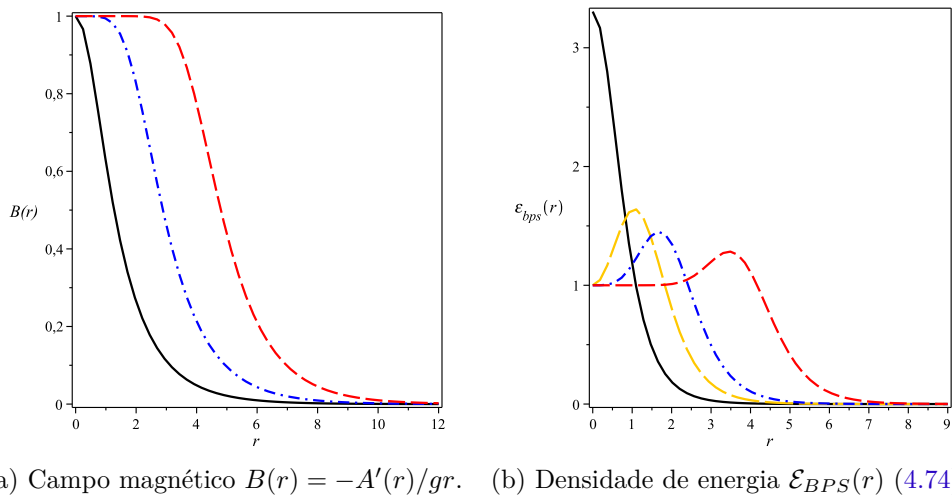


Figura 22 – Perfis numéricos do campo magnético $B(r) = -A'(r)/gr$ (Fig. 22a) e da densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ (4.74) (Fig. 22b). Usamos as seguintes convenções: $n=1$ (linha sólida preta), $n = 2$ (curva longo-tracejada laranja), $n = 3$ (linha ponto-tracejada azul) e $n = 7$ (curva vermelha tracejada). Em todos os casos, usamos $g = h = 1$ por praticidade.

quaisquer valores do *winding number*, em perfeita analogia ao vórtice de Nielsen-Olesen (Fig. 10a). Inclusive, à medida que n aumenta, o campo magnético também se distribui em uma área cada vez maior. Já na Figura 22b, descrevemos o gráfico da densidade de energia BPS (4.93). Em particular, para $n = 1$ a solução também é um *lump* com centro na origem. Por outro lado, os demais perfis predizem que as distribuições energéticas geram anéis, cujas intensidades máximas ocorrem em distâncias finitas da origem. Tais distâncias determinam os raios dos anéis. É interessante perceber ainda o decrescimento das amplitudes máximas com o aumento do *winding number*, em estreita concordância com

a Figura 10b. Deveras, os estados BPSs dos vórtices de Loginov preveem características semelhantes àquelas previstas por Nielsen-Olesen.

5 VÓRTICES NÃO-TOPOLÓGICOS AUTO-DUAIS EM UM MODELO $CP(2)$ CALIBRADO E COM UMA FUNÇÃO DIELÉTRICA

A teoria de calibre abeliana usual sem o termo de Chern-Simons não prediz a existência de estados BPSs de vórtices não topológicos. O mesmo acontece com o modelo $CP(2)$ calibrado. Entretanto, a fim de descrever tais defeitos, podemos introduzir uma função dielétrica generalizada $G(\phi)$ que altera a dinâmica do campo de *gauge*, ou seja: $\mathcal{L}_{gauge} \rightarrow G(\phi)\mathcal{L}_{gauge}$. Portanto, neste capítulo, vamos averiguar no modelo de Loginov [61] a existência de estados BPSs dos vórtices $CP(2)$ não topológicos em um meio dielétrico. Veremos que, mesmo neste cenário, para $\alpha(r)$ (e também N_S) $\ll 1$ ainda é possível encontrar estados não topológicos com fluxo magnético quantizado para valores restritos do *winding number*.

Esses estudos levaram à publicação do nosso segundo artigo, na revista *Physical Review D* [25].

5.1 Modelo $CP(2)$ Calibrado e com uma Função Dielétrica

Historicamente o uso de uma função dielétrica generalizada dependente de um campo escalar advém da teoria de Friedberg-Lee [72] com a introdução de uma álgebra de Lie não compacta $SU(3)$, cujo objetivo seria tentar explicar o problema do confinamento dos quarks via um “Efeito Meissner” para o campo elétrico de cor. Nesse modelo, os hádrõns se manifestam como um sólon não topológico. Em anos recentes, mais precisamente a partir de 2010, essa ideia tem sido estendida para o estudo dos chamados vórtices generalizados, os quais são descritos por setores de *gauge* e de Higgs não canônicos, como é o caso dos vórtices carregados $U(1)$ [73] e $CP(1)$ [74] e descarregados topológico [75] e não topológico [23]. Já vimos que este último tipo de configuração possui fluxo magnético não quantizado, muito embora a discretização seja uma característica marcante da supercondutividade tipo II. Curiosamente, em 1961, J. Bardeen indicara a existência de um fluxo não quantizado menor de que um flúxon em um supercondutor com simetria cilíndrica [22], devido a “efeitos de tamanho” (ou de borda). No ano de 2000, em uma amostra supercondutora de filme fino, foi detectada experimentalmente por A. K. Geim e outros [21] uma penetração de fluxo magnético em um fração de 10^{-3} de um flúxon, evidenciando os efeitos que Bardeen

apontara. Aqui, contudo, mostramos a possibilidade da existência de vórtices descarregados e com fluxo não quantizado, apesar de efeitos de borda não serem considerados, conforme previsto primeira e teoricamente por D. Bazeia *et al.* [23] em 2015.

Partimos agora da densidade lagrangiana (4.30) modificada pela função dielétrica,¹:

$$\mathcal{L} = -\frac{G(\phi)}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (P_{ab} D_\mu \phi_b)^* P_{ac} D^\mu \phi_c - V(\phi). \quad (5.1)$$

As equações de Euler-Lagrange provenientes de (5.1) são

$$\partial_\mu (GF^{\mu\nu}) = J^\nu, \quad (5.2)$$

$$P_{ab} \left[2P_{bc} D_\mu (P_{cd} D^\mu \phi_d) - D_\mu D^\mu \phi_b + \frac{\partial V}{\partial \phi_b^*} + \frac{1}{4} \frac{\partial G}{\partial \phi_b^*} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] = 0, \quad (5.3)$$

em que J^ν é a densidade de corrente dada em (4.27).

Vamos admitir a lei de Gauss estacionária (decorrente de (5.2) com $\nu = 0$):

$$\partial_i (G \partial^i A^0) = J^0 = ig \left[(P_{ab} D^0 \phi_b)^* P_{ac} Q_{cd} \phi_d - P_{ab} D^0 \phi_b (P_{ac} Q_{cd} \phi_d)^* \right], \quad (5.4)$$

tendo em vista $D^0 \phi_b = -ig Q_{bc} \phi_c A^0$. Veja que a validade do calibre temporal $A^0 = 0$ nos possibilita prever também vórtices não topológicos independentes do tempo possuindo somente campo magnético.

5.2 O Ansatz para o Vórtice $CP(2)$ Calibrado não Topológico

Novamente, vamos utilizar o *ansatz* (4.35) e (4.36). Consoante já vimos, para a condição de regularidade dos campos na origem, devemos ter

$$A(0) = 0, \quad (5.5)$$

$$\alpha(0) = 0, \quad (5.6)$$

fixando $n_3 = 0$, pois o campo $CP(2)$ não pode ser multivalorado. Por outro lado, haja vista que buscamos soluções não topológicas, devemos impor no infinito a condição de contorno de Neumann para A ,

$$A'(r \rightarrow \infty) = 0, \quad (5.7)$$

pois o fluxo magnético não será mais necessariamente quantizado; e ainda uma de Dirichlet para α :

$$\alpha(r \rightarrow \infty) = 0, \quad (5.8)$$

já que o campo escalar deve possuir valores iguais nas fronteiras.

¹ Enfatizamos novamente aqui a não dependência de G e V com $|\phi|$, posto que este módulo é constante em todo ponto do espaço tempo. A dependência explícita será estabelecida pelo estado BPS.

É interessante ressaltar aqui que, apesar de não termos modificado a dinâmica do setor escalar, não podemos inferir previamente qual será o valor de $A(r \rightarrow \infty)$, segundo o tratamento feito na subseção 4.4. Isso acontece em virtude de a função dielétrica introduzir uma forte restrição sobre $A(r)$ via equações BPSs (e sobre o autopotencial), conforme veremos na próxima seção.

5.3 Formalismo BPS: O Caso $Q = G_3$

Nesta seção, vamos aplicar o algoritmo BPS, assumindo o caso no qual $Q = G_3$. Sob esta e as asserções precedentes, o funcional de energia decorrente de (5.1) avaliado no *ansatz* (4.35) e (4.36) (com $n_1 = -n_2 = n$), no regime estacionário e no *gauge* temporal fica dado por:

$$\mathbb{E} = \int d^2x \mathcal{E} = 2\pi \int dr r \left\{ \frac{GB^2}{2} + h \left[\left(\frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{W}{r^2} \left(\frac{A}{2} - n \right)^2 \sin^2 \alpha \right] + V \right\}, \quad (5.9)$$

sendo $B = -\frac{A'}{gr}$, $G = G(\alpha, \beta)$ e $W = W(\alpha, \beta) = 1 - \sin^2 \alpha \cos^2(2\beta)$. Vamos reexpressir (5.9) na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} = 2\pi \int dr r \left\{ \frac{G}{2} \left(B \mp \sqrt{\frac{2V}{G}} \right)^2 + h \left[\frac{d\alpha}{dr} \mp \frac{\sqrt{W}}{r} \left(\frac{A}{2} - n \right) \sin \alpha \right]^2 \right\} \\ \mp \int dr \left[\frac{d(A - 2n)}{dr} \frac{\sqrt{2GV}}{g} + (A - 2n) h \sqrt{W} \frac{d(\cos \alpha)}{dr} \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Para transformar o integrando da última linha anterior em uma derivada total, é cabível introduzir um vínculo, a saber:

$$\frac{1}{g} \frac{d}{dr} (\sqrt{2GV}) = h \sqrt{W} \frac{d(\cos \alpha)}{dr}. \quad (5.11)$$

Logo, frente a (5.11), a energia (5.10) fica reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbb{E} = \mathbb{E}_{BPS} + \int dr r \left\{ \frac{G}{2} \left(B \mp \sqrt{\frac{2V}{G}} \right)^2 + h \left[\frac{d\alpha}{dr} \mp \frac{\sqrt{W}}{r} \left(\frac{A}{2} - n \right) \sin \alpha \right]^2 \right\} \\ \geq \mathbb{E}_{BPS}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

em que temos designado a energia \mathbb{E}_{BPS} por

$$\mathbb{E}_{BPS} = 2\pi \int dr r \mathcal{E}_{BPS}, \quad (5.13)$$

sendo \mathcal{E}_{BPS} a densidade

$$\mathcal{E}_{BPS} = \mp \frac{1}{gr} \frac{d}{dr} [(A - 2n) \sqrt{2GV}]. \quad (5.14)$$

A energia BPS (5.13) exhibe um valor positivo definido e este é determinado por

$$\mathbb{E}_{BPS} = \mp \frac{2\pi}{g} \left[(A_\infty - 2n) \sqrt{2G_\infty V_\infty} + 2n \sqrt{2G_0 V_0} \right], \quad (5.15)$$

em que temos rotulado $G_{\infty,0} = G(r \rightarrow \infty, r = 0)$ e $V_{\infty,0} = V(r \rightarrow \infty, r = 0)$. Sem perda de generalidade, vamos considerar o caso no qual $G_0 V_0 = G_\infty V_\infty$, que leva a equação (5.15) a

$$\mathbb{E}_{BPS} = \mp \frac{2\pi}{g} A_\infty \sqrt{2G_\infty V_\infty}. \quad (5.16)$$

Porquanto o fluxo magnético é dado por

$$\Phi = 2\pi \int dr r B(r) = -\frac{2\pi}{e} A_\infty, \quad (5.17)$$

podemos reexpressar (5.16) na forma abaixo:

$$\mathbb{E}_{BPS} = \pm \Phi \sqrt{2G_\infty V_\infty}. \quad (5.18)$$

Ao atingir o limite inferior de energia (5.18), a configuração do vórtice deve satisfazer às equações BPSs

$$B = \pm \sqrt{\frac{2V}{G}}, \quad (5.19)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{\sqrt{W}}{r} \left(\frac{A}{2} - n \right) \sin \alpha, \quad (5.20)$$

zerando os termos quadrados em (5.12).

5.3.1 Perfis Assintóticos dos Campos: O Caso $\beta = \beta_1$

Em analogia ao capítulo precedente, vamos tratar aqui também os dois casos: $\beta = \beta_1$ e $\beta = \beta_2$ (válidos se assumirmos $\partial_\beta G = \partial_\beta V = 0$). Assim, para $\beta = \beta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, encontramos $W = 1$ e o vínculo (5.11) reduz-se a

$$\frac{1}{g} \frac{d}{dr} (\sqrt{2GV}) = h \frac{d(\cos \alpha)}{dr}, \quad (5.21)$$

fornecendo-nos o subsequente autopotencial

$$V(\alpha) = \frac{g^2 h^2}{2G} \cos^2 \alpha, \quad (5.22)$$

com a constante de integração sendo tomada nula ($C = 0$), de modo apropriado. Repare em (5.22) que recuperamos o potencial (4.80), cujo mínimo é assimétrico, se $G = 1$. Todavia, é factível engendrar um potencial com uma estrutura de mínimo simétrica (suportando, por conseguinte, vórtices não topológicos), se G for não trivial. Nesse sentido, propomos uma função dielétrica da forma

$$G(\alpha) = \frac{(\cos \alpha)^{2-2M}}{1 - \cos \alpha} = \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} \frac{|\phi_3|^{2-2M}}{(h^{\frac{1}{2}} - |\phi_3|)} = G(|\phi_3|), \quad (5.23)$$

tal que $M = 1, 2, 3, \dots$, com a qual o autopotencial (5.22) torna-se

$$V(\alpha) = \frac{g^2 h^2}{2} (\cos \alpha)^{2M} (1 - \cos \alpha), \quad (5.24)$$

ou ainda reescrito em função de $|\phi_3| = h^{\frac{1}{2}} \cos \alpha$

$$V(|\phi_3|) = \frac{e^2 h^{\frac{3}{2}-M}}{2} |\phi_3|^{2M} \left(h^{\frac{1}{2}} - |\phi_3| \right). \quad (5.25)$$

O potencial supracitado é sempre positivo definido para todos os valores de M , justificando o fato de que $M \in \mathbb{N}^*$. Também notamos a quebra espontânea de simetria de $SU(3)$ para $SU(2)$. Ele exibe ainda um mínimo simétrico,

$$|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 = 0, \quad |\phi_3|^2 = h, \quad (5.26)$$

o qual não quebra simetria residual $SU(2)$ para $U(1)$ e outro assimétrico que quebra, dado por

$$|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 = h, \quad |\phi_3|^2 = 0, \quad (5.27)$$

à semelhança do potencial ϕ^6 de Chern-Simons. Veja novamente por meio de (4.82) e (4.85) como podemos mapear as dependências funcionais de $V(|\phi_3|)$ e $G(|\phi_3|)$ com o parâmetro de ordem. Além disso, temos $V(\alpha(r \rightarrow \infty)) \rightarrow 0$, quando $\alpha(r \rightarrow \infty) = 0$, verificando a condição de contorno (5.8) esperada (mínimo simétrico). Embora V se anule no infinito, encontramos a quantidade finita e diferente de zero $\sqrt{2G_\infty V_\infty} = gh$ (por causa de (5.22)), estabelecendo o valor não nulo para energia BPS (5.18)

$$E_{BPS} = \pm gh\Phi. \quad (5.28)$$

Curiosamente, o resultado acima mostra que a energia BPS do vórtice em um meio dielétrico é similar² à energia na ausência de um dielétrico (4.86), ou seja, proporcional ao fluxo magnético. Essa correspondência independe da forma funcional de $G(\alpha)$. Veja que a função dielétrica foi capaz introduzir a condição de contorno $A'_\infty = 0$, se $\alpha(r \rightarrow \infty) = 0$, implicando em uma energia não quantizada.

Perante todas essas asserções, as equações autoduais (5.19) e (5.20) resultam em

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \pm \lambda^2 (\cos \alpha)^{2M-1} (\cos \alpha - 1), \quad (5.29)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{\sin \alpha}{r} \left(\frac{A}{2} - n \right), \quad (5.30)$$

respectivamente, sendo $\lambda = \sqrt{g^2 h}$. Vale destacar aqui que o sistema anterior suporta soluções bem comportadas (com valores fixos de λ e M) para qualquer valor de n somente se $0 \leq \alpha < \pi/2$. Perto da origem as soluções são (para o vórtice, sinais inferiores)

$$A(r) \approx \frac{C_n^2}{4(n+1)} (\lambda r)^{2n+2} - \frac{C_n^4 (12M-5)}{48(2n+1)} (\lambda r)^{4n+2} + \dots, \quad (5.31)$$

$$\alpha(r) \approx C_n (\lambda r)^n - \frac{C_n^3}{16(n+1)^2} (\lambda r)^{3n+2} + \dots, \quad (5.32)$$

² Porém maior. Reveja uma discussão semelhante na subseção 3.3.1.

ao que passo para $r \rightarrow \infty$,

$$A(r) \approx A_\infty - \frac{C^2}{4(\delta_n - 11)} \frac{1}{(\lambda r)^{2\delta_n - 2}} + \dots, \quad (5.33)$$

$$\alpha(r) \approx \frac{C}{(\lambda r)^{\delta_n}} + \dots, \quad (5.34)$$

Os parâmetros C_n , C e δ_n são constantes³ e $A_\infty = A(r \rightarrow \infty) = 2n + 2\delta_n$. Esses decaimentos não exponenciais no infinito são típicos de mínimos simétricos.

É oportuno ainda apresentarmos a densidade de energia BPS, fazendo a substituição de (5.19) e (5.20) em (5.9),

$$\mathcal{E}_{BPS}(r) = \frac{G(\alpha)}{g^2} \left(\frac{A'}{r} \right)^2 + 2h(\alpha')^2 = g^2 h^2 (1 - \cos \alpha)^{2M} + 2h \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} \left(\frac{A}{2} - n \right)^2, \quad (5.35)$$

para critério de análise gráfica.

5.3.2 Perfis Assintóticos dos Campos: O Caso $\beta = \beta_2$

Na circunstância em que $\beta = \beta_2 = \frac{\pi}{2}k$, obtemos $W = \cos^2 \alpha$ e o vínculo (5.11) converte-se em

$$\frac{d}{dr} (\sqrt{2GV}) = \frac{gh}{2} \frac{d(\cos^2 \alpha)}{dr}, \quad (5.36)$$

cujas solução é

$$V(\alpha) = \frac{g^2 h^2}{32G(\alpha)} \cos^2(2\alpha); \quad (5.37)$$

adotamos agora a constante de integração $C = -gh/4$, de modo apropriado. Procedendo similarmente como no caso $\beta = \beta_1$, podemos propor a seguinte forma para a função dielétrica

$$G(\alpha) = \frac{[\cos(2\alpha)]^{2-2M}}{1 - \cos(2\alpha)}, \quad (5.38)$$

inferindo no autopotencial

$$V(\alpha) = \frac{g^2 h^2}{32} [\cos(2\alpha)]^{2M} [1 - \cos(2\alpha)]. \quad (5.39)$$

De (5.37), também conseguimos inferir que $\sqrt{2G_\infty V_\infty} = eh/4$. Esta última relação levada a (5.18) nos concede a correspondente energia BPS

$$\mathbb{E}_{BPS} = \pm \frac{eh}{4} \Phi, \quad (5.40)$$

em completa semelhança com o valor energético (4.97) do caso $\beta = \beta_2$ na ausência de um meio dielétrico, no sentido de que a energia é reduzida por um fator de 1/4. Novamente, ressaltamos que o resultado (5.40) também independe de G .

³ Fixadas conforme os mesmos requisitos discutidos na subseção 3.2.4.

Em adição, as equações diferenciais de primeira ordem (5.19) e (5.20) passam a ser escritas conforme

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp \frac{g^2 h}{4} [\cos(2\alpha)]^{2M-1} [\cos(2\alpha) - 1], \quad (5.41)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{\sin(2\alpha)}{2r} \left(\frac{A}{2} - n \right). \quad (5.42)$$

Analogamente às análises assintóticas feitas na subseção 4.5.2, podemos verificar a partir do sistema acima que os cenários físicos com $\beta = \beta_1$ e $\beta = \beta_2$ são homólogos. Logo, frente ao mapeamento (4.104), as soluções aproximadas de (5.41) e (5.42) têm os mesmos perfis de (5.31) e (5.32), na origem, e de (5.33) e (5.34), no infinito, em ordem.

5.4 Gráficos das Soluções Analíticas Aproximadas

Vamos abordar agora uma situação muito interessante considerando $\beta = \beta_1$, na qual $\alpha \ll 1$ (significa baixa densidade de superelétrons). Em tal circunstância, o sistema BPS (5.29) e (5.30) fica simplificado como

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp \frac{\lambda^2}{2} \alpha^2, \quad (5.43)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{\alpha}{r} \left(\frac{A}{2} - 2 \right). \quad (5.44)$$

A combinação dessas duas equações nos origina uma equação de Liouville para o campo escalar, a notar

$$\frac{d^2 \ln \alpha^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \ln \alpha^2}{dr} + \frac{\lambda^2}{2} \alpha^2 = 0, \quad (5.45)$$

cujas soluções gerais nos fornece

$$\alpha(r) = \frac{4C}{\lambda r_0} \frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{C-1}}{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2C}}, \quad (5.46)$$

significando r_0 e C constantes de integração. Complementarmente, o resultado (5.46) inserido em (5.45) nos proporciona (supondo $n > 0$, sinal inferior)

$$A(r) = 2(n+1) - 2C + \frac{4C \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2C}}{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2C}}. \quad (5.47)$$

A resposta (5.47) cumpre a condição de contorno $A(0) = 0$, se $C = n + 1$. Por conseguinte, as soluções analíticas aproximadas (5.46) e (5.47) são computadas segundo

$$A_n(r) = 4(n+1) \frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n+2}}{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n+2}}, \quad (5.48)$$

$$\alpha_n(r) = \frac{4(n+1)}{\lambda r_0} \frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^n}{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n+2}}, \quad (5.49)$$

as quais originam as expressões para o campo magnético⁴

$$B_n(r) = -\frac{gh}{2}\alpha_n^2(r) \quad (5.50)$$

e para a densidade de energia

$$\mathcal{E}_{BPS,n}(r) = \frac{g^2h}{2}\alpha_n^2(r) + 2h\frac{\alpha_n^2(r)}{r^2}\left(\frac{A_n}{2} - n\right)^2. \quad (5.51)$$

De (5.48), perceba que

$$A_\infty = A_n(r \rightarrow 0) = 4(n+1). \quad (5.52)$$

Logo, o fluxo magnético e a energia BPS (5.28) são quantizados,

$$\Phi = -\frac{8\pi}{e}(n+1), \quad (5.53)$$

$$E_{BPS} = -eh\Phi = 8\pi h(n+1), \quad (5.54)$$

refletindo obviamente a dependência de (5.50) e (5.51) com n .

Vale a pena observar que a função (5.49) atinge o valor máximo em

$$r_{\text{máx}} = r_0 \left(\frac{n}{n+2}\right)^{\frac{1}{2(n+1)}}, \quad (5.55)$$

correspondendo a

$$\alpha_n(r_{\text{máx}}) = \frac{2(n+2)}{\lambda r_0} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{\frac{n}{2(n+1)}}, \quad (5.56)$$

com (5.55) indo a r_0 para n grande. Entretanto, por estarmos considerando $\alpha \ll 1$, há uma forte restrição sobre os prováveis valores de n , ou seja, n deve atender à condição:

$$\alpha(r_{\text{máx}}) \ll 1 \Rightarrow \lambda r_0 \gg 2(n+2) \left(\frac{n}{n+2}\right)^{\frac{n}{2(n+1)}}. \quad (5.57)$$

Adiante traçamos os gráficos das soluções numéricas do sistema BPS (5.29) e (5.30), bem como do campo magnético e da densidade de energia associados, perante as condições de contorno (5.5)-(5.8).

Nas Figuras 23 e 24, comparamos os perfis das soluções analíticas aproximadas do sistema BPS (5.43) e (5.44) com as soluções numéricas das equações autoduais (5.29) e (5.30), considerando o primeiro setor topológico e diferentes valores do fator λr_0 . Perceba que as soluções analíticas aproximadas se confundem com as soluções numéricas para grandes valores de λr_0 . Na Figura 23a mostramos o comportamento de $\alpha(r)$. Os traços caracterizam anéis centrados na origem, cuja (o) amplitude (raio) decresce (cresce) conforme o parâmetro λr_0 aumenta. Tal comportamento era esperado, pois fita bem à condição do caso analítico: $\alpha(r) \ll 1$ para todo λr . Na Figura 23b, exibimos as soluções para o campo

⁴ O sinal negativo relembra-nos do fato de estarmos utilizando a convecção contrária de sinal para o fluxo magético no setor toplógico com $n > 0$.

$A(r)$. Vemos que todos os perfis sempre se aproximam monotonicamente da condição de contorno $A_n(r \rightarrow \infty) = 4(n + 1)$ com o crescimento de λr_0 . Em particular, temos obtido os valores numéricos $A_1(r \rightarrow \infty) \approx 8.07855$ para $\lambda r_0 = 15$, $A_1(r \rightarrow \infty) \approx 8.04565$ para $\lambda r_0 = 20$ e $A_1(r \rightarrow \infty) \approx 8.02063$ para $\lambda r_0 = 30$.

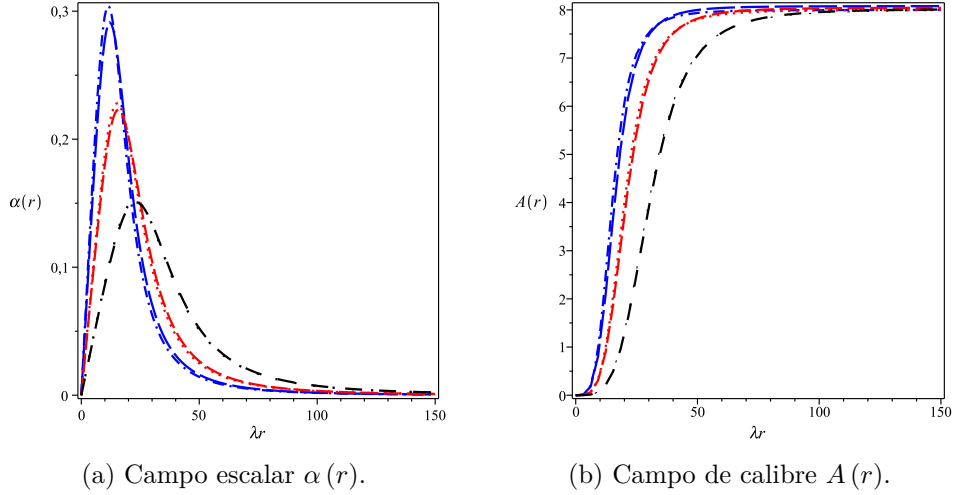


Figura 23 – Soluções numéricas e analíticas para o campo $\alpha(r)$ (Fig. 23a) e para o campo de calibre $A(r)$ (Fig. 23b). As linhas tracejadas correspondem às soluções numéricas do sistema BPS (5.29) e (5.30), sob as condições de contorno (5.5)-(5.8). As linhas pontilhadas e ponto-tracejadas dizem respeito às soluções analíticas aproximadas do sistema BPS (5.43) e (5.44). Em todos os perfis, utilizamos $M = n = g = h = 1$, variando o fator λr_0 . Escolhemos as cores azul para $\lambda r_0 = 15$, vermelha para $\lambda r_0 = 20$ e preta para $\lambda r_0 = 30$.

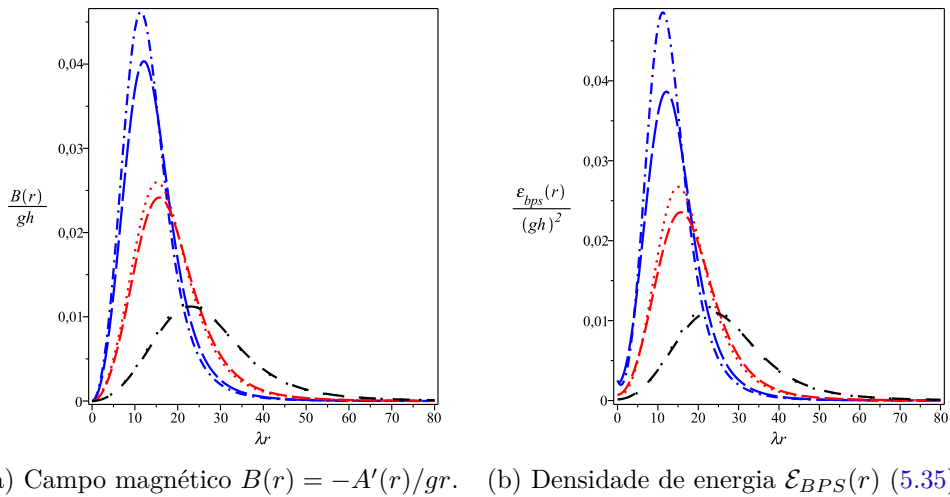


Figura 24 – Gráficos numéricos do campo magnético $B(r) = -A'(r)/gr$ (Fig. 23b) e da densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(r)/(gh)^2$ (Fig. 24b). Adotamos as mesmas convenções da Fig. 23.

Representamos na Figura 24a o campo magético $B(r)$ aproximado, em unidades

de gh . Todas as curvas se comportam de maneira similar a $\alpha(r)$: a (o) amplitude (raio) diminui (aumenta) quando o fator λr_0 cresce, algo já esperado por causa de (5.50). Além disso, no limite assintótico o campo magnético se anula, a fim de manter a finitude da energia, ou seja, $\mathcal{E}_{BPS}(r \rightarrow \infty) = 0$. Na Figura 24b, expomos os perfis da densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ em unidades de $(gh)^2$, mostrando que as configurações não topológicas também são localizadas no espaço. O valor de $\mathcal{E}_{BPS}(0)$ depende da quantidade λr_0 e incrementa à taxa que λr_0 decrementa.

É interessante ainda comentar acerca da existência de outra classe de soluções, sobre as quais não impomos a restrição $\alpha(r) \ll 1$ para todo λr . Deixamos essa discussão para a seção subsequente.

5.5 Gráficos das Soluções Numéricas

Agora fazemos as análises gráficas das soluções numéricas das equações (5.29) e (5.30), assim como dos relativos campo magnético e energia BPS (dada em (5.35)), sob as condições de contorno apresentadas na seção 5.2. Os gráficos são computados com respeito à variável adimensional λr .

Esboçamos na Figura 25a o campo escalar $\alpha(r)$, cujo comportamento assemelha-se àquele discutido na Figura 23a. Os perfis formam anéis centrados na origem, de modo tal que as amplitudes e os raios crescem com o incremento do *winding number*. A Figura 25b ilustra os resultados para $A(r)$, levando em conta adicionalmente a linha pontilhada azul ($n = 4$). Aqui é interessante notar pequenas ondulações nos perfis, para

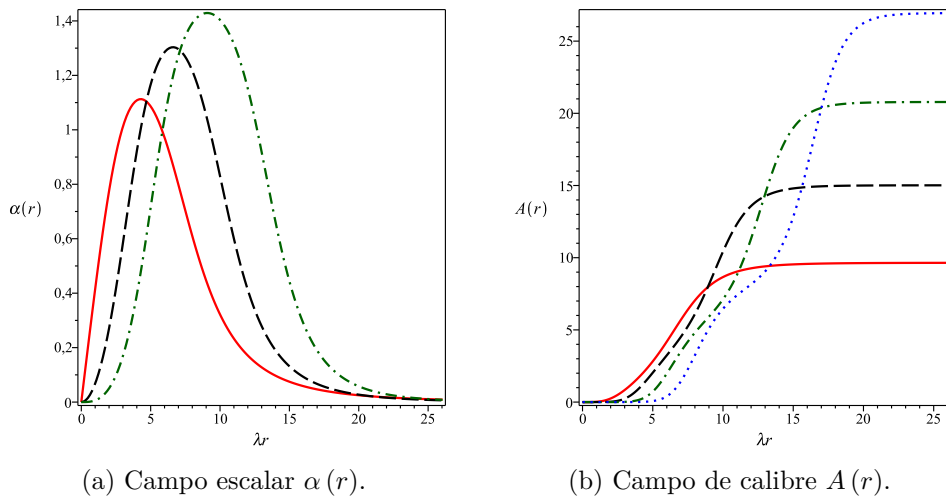
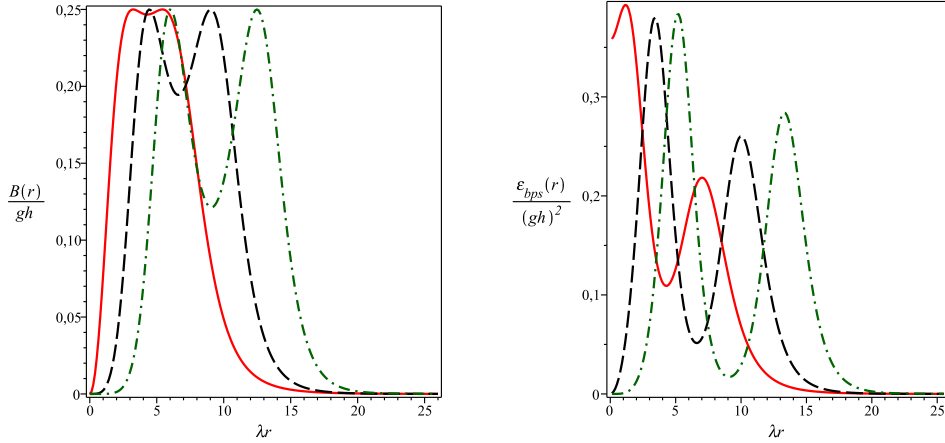


Figura 25 – Gráficos numéricos do campo escalar $\alpha(r)$ (Fig. 25a) e do campo de calibre $A(r)$ (Fig. 25b). As linhas sólidas vermelhas referem-se a $n = 1$, as tracejadas pretas, a $n = 2$, as linhas ponto-tracejadas verdes competem a $n = 3$ e a linha pontilhada azul, a ($n = 4$). Em todos os casos, usamos $M = g = h = \lambda r_0 = 1$.

valores intermediários de λr , as quais surgem como consequência de uma estrutura interna introduzida pela função dielétrica G . Vale a pena destacar ainda que $A(r)$ não mais obedece à condição de contorno (5.52); os novos valores são agora dados por $A_1(r \rightarrow \infty) \approx 9.64900$, $A_2(r \rightarrow \infty) \approx 15.01548$, $A_3(r \rightarrow \infty) \approx 20.78517$ e $A_4(r \rightarrow \infty) \approx 26.98683$.



(a) Campo magnético $B(r) = -A'(r)/gr$. (b) Densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ (5.35).

Figura 26 – Perfis numéricos do campo magnético $B(r) = -A'(r)/gr$ (Fig. 26a) e da densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(r)/(gh)^2$ (Fig. 26b). Consideramos as mesmas convenções da Fig. 25.

Os perfis numéricos para o campo magnético $B(r)$ são expressos na Figura 26a, em unidades de gh , a partir dos quais vemos que essas soluções são drasticamente diferentes daquelas mostradas na Figura 24a. Estas novas configurações formam “duplos anéis” com centros em $r = 0$ e com o limite assintótico nulo $B(r \rightarrow \infty) = 0$. Finalmente, a Figura 26b descreve a densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ em unidades de $(gh)^2$, evidenciando a geração dos “duplos anéis” que apareceram na Figura 26a. Contudo, os anéis energéticos internos apresentam sempre maiores amplitudes do que os externos.

6 VÓRTICES NÃO-TOPOLÓGICOS AUTO-DUAIS EM UM MODELO $CP(2)$ CALIBRADO E COM A AÇÃO CHERN-SIMONS

De acordo com o que estudamos na seção 3.3, é possível prever a existência de vórtices carregados em uma teoria de campos local na qual a dinâmica do campo de calibre é controlada pelo termo de Chern-Simons \mathcal{L}_{CS} . Naquele cenário, vimos que o potencial ϕ^6 sustenta estados BPSs de vórtices tanto topológicos, quanto não topológicos. No primeiro tipo de estrutura, o fluxo magnético é quantizado, enquanto no segundo tipo, em geral, não é quantizado. Neste capítulo, vamos investigar a formação de vórtices BPSs não topológicos no âmbito da teoria $CP(2)$ calibrada, com o setor de *gauge* regido por \mathcal{L}_{CS} . Neste contexto, descobrimos que presença do setor elétrico introduz um efeito característico de uma estrutura interna. Além disso, para $\alpha(r) \ll 1$ é possível também encontrar estados BPSs não topológicos com fluxo magnético quantizado.

Essas discussões fazem parte do nosso terceiro artigo, publicado na revista *Physical Review D* [26].

6.1 Modelo $CP(2)$ Calibrado com a Ação de Chern-Simons

Os vórtices a serem tratados agora são descritos pela seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4}\varepsilon^{\lambda\mu\nu}A_\lambda F_{\mu\nu} + (P_{ab}D_\mu\phi_b)^* P_{ac}D^\mu\phi_c - V(\phi). \quad (6.1)$$

As equações de Euler-Lagrange derivadas de (6.1) são dadas por

$$\frac{\kappa}{2}\varepsilon^{\lambda\mu\nu} = J^\lambda, \quad (6.2)$$

$$P_{ab} \left[2P_{bc}D_\mu(P_{cd}D^\mu\phi_d) - D_\mu D^\mu\phi_b + \frac{\partial V}{\partial\phi_b^*} \right] = 0, \quad (6.3)$$

sendo J^λ a densidade de corrente definida em (4.27).

Vamos considerar a lei de Gauss estacionária (obtida a partir de (6.2) fazendo $\lambda = 0$)

$$\kappa B = J^0 = ie \left[(P_{ab}D^0\phi_b)^* P_{ac}Q_{cd}\phi_d - P_{ab}D^0\phi_b (P_{ac}Q_{cd}\phi_d)^* \right], \quad (6.4)$$

em que $D^0\phi_b = -ieQ_{bc}\phi_c A^0$. Consoante acontece na teoria de Chern-Simons-Higgs, veja novamente que o calibre temporal $A^0 = 0$ não é mais possível. Dessa forma, podemos

predizer também o surgimento de uma nova classe de vórtices não topológicos contendo campos elétricos e magnéticos.

6.2 O *Ansatz* para o Vórtice Carregado no Modelo $CP(2)$ Calibrado

Para computar as nossas soluções, vamos usar o *ansatz* (4.35) e (4.36). Conforme já vimos, pela condição de regularidade dos campos na origem, temos

$$A(0) = 0, \quad (6.5)$$

$$\alpha(0) = 0, \quad (6.6)$$

o que nos leva a $n_3 = 0$, pois o campo $CP(2)$ não deve ser multivalorado. Além disso, uma vez que neste cenário procuramos soluções não topológicas, devemos propor no infinito uma condição de contorno de Neumann para a função A , ou seja,

$$A'(r \rightarrow \infty) = 0, \quad (6.7)$$

posto que o fluxo magnético não será mais quantizado. Já no infinito, também devemos ter uma condição de contorno de Dirichlet para $\alpha(r)$, a saber

$$\alpha(r \rightarrow \infty) = 0, \quad (6.8)$$

pois o campo escalar deve ter valores iguais nas fronteiras para o vórtice não topológico (configuração de mínimo simétrico (5.26)). Para o setor elétrico, podemos utilizar o *ansatz* simetricamente rotacional,

$$A_0 = A_0(r), \quad (6.9)$$

cujas condições de contorno são restritas pela lei de Gauss (6.4), em analogia ao que ocorreu em (3.89). Essa lei projetada no *ansatz* supracitado resulta em (para $Q = G_3$ e $n_1 = -n_2 = n$)

$$A_0(r) = -\frac{2\kappa B(r)}{g^2 h W} = \frac{2\kappa}{g^3 h W} \frac{A'(r)}{r}, \quad (6.10)$$

com a função auxiliar W sendo

$$W = W(\alpha, \beta) = [1 - \sin^2 \alpha \cos^2(2\beta)] \sin^2 \alpha. \quad (6.11)$$

Já a equação de movimento para β , proveniente de (6.3), no regime estacionário é computada como

$$\beta'' + \left(\frac{1}{r} + 2\alpha' \cot \alpha \right) \beta' = H \sin^2 \alpha \sin(4\beta), \quad (6.12)$$

em que temos assumido um potencial independente de β ($\partial_\beta V = 0$) e introduzido outra função auxiliar

$$H(r) = \frac{1}{r^2} \left(n - \frac{A}{2} \right)^2 - \frac{g(A_0)^2}{4} \sin^2 \alpha. \quad (6.13)$$

A solução de (6.12) é dada novamente por $\beta = \beta_1$ e $\beta = \beta_2$ (veja (4.40)).

Além disso, as condições de contorno satisfeitas por $A_0(r)$ não são independentes, haja vista que $A_0(r)$ é absorvido na densidade de energia por meio da Lei de Gauss (6.10) (veja a subseção (6.3)). Inclusive, já utilizando o resultado (6.31) na equação (6.10), obtemos

$$A_0(r) = -\frac{2\kappa B(r)}{g^2 h W} = \pm \frac{gh}{\kappa} \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2(2\beta)}. \quad (6.14)$$

Portanto, se $\beta = \beta_1$, temos

$$A_0(r) = \pm \frac{gh}{\kappa} \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2(2\beta_1)} = \pm \frac{gh}{\kappa} \cos \alpha, \quad (6.15)$$

implicando nos comportamentos na origem

$$A_0(0) = \pm \frac{gh}{\kappa} \quad (6.16)$$

e também no infinito

$$A_0(r \rightarrow \infty) = \pm \frac{gh}{\kappa}. \quad (6.17)$$

Por outro lado, se $\beta = \beta_2$, encontramos

$$A_0(r) = \pm \frac{gh}{\kappa} \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2(2\beta_2)} = \pm \frac{gh}{\kappa} \sec \alpha,$$

originando os mesmos valores de (6.16) e (6.17) em $r = 0$ e no infinito, sequencialmente.

6.3 Formalismo BPS: O Caso $Q = G_3$

Vamos aplicar agora a técnica BPS, considerando novamente o contexto em que $Q = G_3$. Frente a esta escolha e às premissas anteriores, o funcional de energia originário de (6.1) descrito no *ansatz* (4.35), (4.36) e (6.9) (fixando $n_1 = -n_2 = n$), no regime estacionário, é escrito como

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= \int d^2x \mathcal{E} \\ &= 2\pi \int dr r \left\{ \kappa A_0 B - \frac{1}{4} g^2 h W A_0^2 + h \left[\left(\frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{W}{r^2} \left(\frac{A}{2} - n \right)^2 \right] + V \right\}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

ou ainda de outra maneira usando a lei de Gauss (6.10),

$$\mathbb{E} = 2\pi \int dr r \left\{ \frac{\kappa^2 B^2}{g^2 h W} + h \left[\left(\frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{W}{r^2} \left(\frac{A}{2} - n \right)^2 \right] + V \right\}. \quad (6.19)$$

Reexpressindo (6.19) em forma de quadrados perfeitos, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= 2\pi \int dr r \left\{ \left(\frac{\kappa}{g\sqrt{h}} \frac{B}{\sqrt{W}} \mp \sqrt{V} \right)^2 + h \left[\frac{d\alpha}{dr} \mp \frac{\sqrt{W}}{r} \left(\frac{A}{2} - n \right) \right]^2 \right\} \\ &\mp \int dr \left[\frac{2\kappa}{g^2 \sqrt{h}} \frac{d(A - 2n)}{dr} \sqrt{\frac{V}{W}} - (A - 2n) h \sqrt{W} \frac{d\alpha}{dr} \right]. \end{aligned} \quad (6.20)$$

A partir deste estágio, vamos considerar os casos $\beta = \beta_1$ e $\beta = \beta_2$ separadamente, pois não é possível a priori introduzir um vínculo na última linha de (6.20) e transformar o integrando em uma derivada total.

6.3.1 O Caso $\beta = \beta_1$

Para $\beta = \beta_1$, vemos em (6.11) que $W = \sin^2 \alpha$. Logo, o funcional (6.20) se reduz a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} = 2\pi \int dr r \left\{ \left(\frac{\kappa}{g\sqrt{h}} \frac{B}{\sin \alpha} \mp \sqrt{V} \right)^2 + h \left[\frac{d\alpha}{dr} \mp \frac{\sin \alpha}{r} \left(\frac{A}{2} - n \right) \right]^2 \right\} \\ \mp \int dr \left[\frac{2\kappa}{g^2\sqrt{h}} \frac{d(A-2n)}{dr} \frac{\sqrt{V}}{\sin \alpha} + (A-2n) h \frac{d(\cos \alpha)}{dr} \right]. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Podemos estabelecer agora a restrição

$$\frac{2\kappa}{g^2\sqrt{h}} \frac{d}{dr} \left(\frac{\sqrt{V}}{\sin \alpha} \right) = h \frac{d(\cos \alpha)}{dr}, \quad (6.22)$$

cuja solução para o potencial adequado nos fornece

$$V = \frac{g^4 h^3}{16\kappa^2} \sin^2(2\alpha). \quad (6.23)$$

Utilizando a relação trigonométrica $\sin^2(2\alpha) = 4\cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)$ e olhando para o *ansatz* do campo escalar, é possível rerepresentar (6.23) na forma

$$V = \frac{g^4 h}{4\kappa^2} |\phi_3|^2 (h - |\phi_3|^2). \quad (6.24)$$

Veja que este potencial é semelhante ao do modelo de Chern-Simons-Higgs (3.81) quanto à estrutura de mínimo: um simétrico e outro assimétrico. Contudo, o potencial (6.24) é de quarta ordem em ϕ_3 , enquanto o potencial de Chern-Simons-Higgs é de sexta ordem em ϕ . Observe também em (6.24) a quebra espontânea de simetria de $SU(3)$ para $SU(2)$.

Reescrevendo o integrando na segunda linha de (6.21) em termos de uma derivada total, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} = \mathbb{E}_{BPS} + 2\pi \int dr r \left\{ \left(\frac{\kappa}{g\sqrt{h}} \frac{B}{\sin \alpha} \mp \sqrt{V} \right)^2 + h \left[\frac{d\alpha}{dr} \mp \frac{\sin \alpha}{r} \left(\frac{A}{2} - n \right) \right]^2 \right\} \\ \geq E_{BPS}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

em que temos definido a energia BPS

$$\mathbb{E}_{BPS} = 2\pi \int dr r \mathcal{E}_{BPS} \quad (6.26)$$

e denotado \mathcal{E}_{BPS} como a referente densidade

$$\mathcal{E}_{BPS} = \mp \frac{h}{r} \frac{d}{dr} [(A-2n) \cos \alpha]. \quad (6.27)$$

Como esperado, a energia BPS (6.26) possui um valor positivo definido dado por

$$\mathbb{E}_{BPS} = \mp 2\pi h A_\infty, \quad (6.28)$$

designando $A_\infty = A(r \rightarrow \infty)$. Conforme já vimos, em razão de termos o fluxo magnético

$$\Phi = -\frac{2\pi}{g} A_\infty, \quad (6.29)$$

podemos computar (6.28) consoante a

$$\mathbb{E}_{BPS} = \pm gh\Phi. \quad (6.30)$$

Alcançando o limite inferior de energia em (6.25), as configurações estáveis dos vórtices devem obedecer às seguintes equações BPSs:

$$B = \pm \frac{g\sqrt{h}}{\kappa} \sin \alpha \sqrt{V} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp \frac{g^4 h^2}{4\kappa^2} \sin \alpha \sin(2\alpha), \quad (6.31)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{\sin \alpha}{r} \left(\frac{A}{2} - n \right), \quad (6.32)$$

face à anulação dos termos quadrados em (6.25). Utilizando ainda (6.31) e (6.32) em (6.18), podemos escrever a densidade de energia BPS como

$$\mathcal{E}_{BPS}(r) = \frac{2\kappa^2}{g^2 h \sin^2 \alpha} \left(\frac{A'}{r} \right)^2 + 2h(\alpha')^2 = \frac{g^4 h^3}{8\kappa^2} \sin^2(2\alpha) + 2h \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} \left(\frac{A}{2} - n \right)^2. \quad (6.33)$$

A primeira contribuição energética advém do setor de calibre e a segunda do setor $CP(2)$.

6.3.2 O Caso $\beta = \beta_2$

Para a circunstância em que $\beta = \beta_2$, $W = \frac{1}{4} \sin^2(2\alpha)$ e o funcional (6.20) fica

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= 2\pi \int dr r \left\{ \left(\frac{4\kappa}{g\sqrt{h}} \frac{B}{\sin(2\alpha)} \mp \sqrt{V} \right)^2 + h \left[\frac{d\alpha}{dr} \mp \frac{\sin(2\alpha)}{2r} \left(\frac{A}{2} - n \right) \right]^2 \right\} \\ &\mp \int dr \left[\frac{4\kappa}{g^2 \sqrt{h}} \frac{d(A-2n)}{dr} \frac{\sqrt{V}}{\sin(2\alpha)} + (A-2n) \frac{h}{4} \frac{d(\cos(2\alpha))}{dr} \right]. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Introduzindo o vínculo

$$\frac{4\kappa}{g^2 \sqrt{h}} \frac{d}{dr} \left(\frac{\sqrt{V}}{\sin(2\alpha)} \right) = \frac{h}{4} \frac{d(\cos(2\alpha))}{dr}, \quad (6.35)$$

cuja solução nos fornece o potencial BPS conveniente

$$V = \frac{g^4 h^3}{1024 \kappa^2} \sin^2(4\alpha), \quad (6.36)$$

e reexpressando o integrando da última linha de (6.34) em função de uma derivada total, encontramos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= \mathbb{E}_{BPS} + 2\pi \int dr r \left\{ \left(\frac{4\kappa}{g\sqrt{h}} \frac{B}{\sin(2\alpha)} \mp \sqrt{V} \right)^2 + h \left[\frac{d\alpha}{dr} \mp \frac{\sin(2\alpha)}{2r} \left(\frac{A}{2} - n \right) \right]^2 \right\} \\ &\geq \mathbb{E}_{BPS}, \end{aligned} \quad (6.37)$$

em que a energia BPS é definida em (6.26), porém com a densidade \mathcal{E}_{BPS} sendo dada agora por

$$\mathcal{E}_{BPS} = \mp \frac{h}{4r} \frac{d}{dr} [(A - 2n) (\cos(2\alpha))]. \quad (6.38)$$

A energia \mathbb{E}_{BPS} tem o subsequente valor positivo definido

$$\mathbb{E}_{BPS} = \mp \frac{\pi h}{2} A_\infty, \quad (6.39)$$

ou ainda em função do fluxo magnético,

$$\mathbb{E}_{BPS} = \pm \frac{gh}{4} \Phi. \quad (6.40)$$

O sistema satura no limite inferior de energia (6.40) quando os termos quadrados em (6.37) se anulam e as equações autoduais

$$B = \pm \frac{g\sqrt{h}}{4\kappa} \sin \alpha \sqrt{V} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp \frac{g^4 h^2}{64\kappa^2} \sin(2\alpha) \sin(4\alpha), \quad (6.41)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{\sin(2\alpha)}{2r} \left(\frac{A}{2} - n \right) \quad (6.42)$$

são verificadas. Como podemos notar, os sistemas BPSs para $\beta = \beta_1$ e $\beta = \beta_2$ são equivalentes perante o mapa (4.104). Por conseguinte, iremos investigar apenas o caso $\beta = \beta_1$.

6.4 Gráficos das Soluções Analíticas Aproximadas

Nesta seção, averiguamos o interessante cenário no qual $\beta = \beta_1$ e $\alpha(r) \ll 1$. Em tal limite, o sistema BPS (6.31) e (6.32) simplificado fica

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp \frac{\lambda^2}{2} \alpha^2, \quad (6.43)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{\alpha}{r} \left(\frac{A}{2} - n \right), \quad (6.44)$$

sendo $\lambda^2 = g^4 h^2 / \kappa^2$. Combinando as duas expressões acima, chegamos à equação de Liouville para $\alpha(r)$

$$\frac{d^2 \ln \alpha^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \ln \alpha^2}{dr} + \frac{\lambda^2}{2} \alpha^2 = 0, \quad (6.45)$$

cuja solução geral é dada por

$$\alpha(r) = \frac{4C}{\lambda r_0} \frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{C-1}}{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2C}}, \quad (6.46)$$

em que r_0 e C são constantes de integração. Adicionalmente, levando (6.46) à (6.43) encontramos (admitindo $n > 0$, sinal inferior)

$$A(r) = 2(n+1) - 2C + \frac{4C \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2C}}{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2C}}. \quad (6.47)$$

A função $A(r)$ dada em (6.47) verifica a condição de contorno $A(0) = 0$ quando $C = n + 1$. Portanto, as soluções analíticas aproximadas (6.46) e (6.47) são obtidas conforme

$$A_n(r) = 4(n+1) \frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n+2}}{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n+2}}, \quad (6.48)$$

$$\alpha_n(r) = \frac{4(n+1)}{\lambda r_0} \frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^n}{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n+2}}. \quad (6.49)$$

Essas soluções determinam os seguintes resultados para o campo magnético¹:

$$B_n(r) = -\frac{eh}{2} \alpha_n^2(r), \quad (6.50)$$

para o potencial elétrico:

$$A_n^0(r) = -\frac{gh}{\kappa} \left(1 - \frac{1}{2} \alpha_n^2\right), \quad (6.51)$$

para o campo elétrico:

$$E_n(r) = \frac{dA_n^0}{dr} = \frac{gh}{\kappa} \frac{\alpha_n^2}{r} \left(\frac{A_n}{2} - n\right) \quad (6.52)$$

e ainda para a densidade de energia (6.33):

$$\mathcal{E}_{BPS,n}(r) = \frac{\lambda^2 h}{2} \alpha_n^2(r) + 2h \frac{\alpha_n^2(r)}{r^2} \left(\frac{A_n}{2} - n\right)^2. \quad (6.53)$$

A partir de (6.48), note que

$$A_\infty = A_n(r \rightarrow 0) = 4(n+1). \quad (6.54)$$

Assim, o fluxo magnético, bem como a energia BPS (6.30) são quantizados por meio das relações

$$\Phi = -\frac{8\pi}{e} (n+1), \quad (6.55)$$

$$\mathbb{E}_{BPS} = -eh\Phi = 8\pi h (n+1). \quad (6.56)$$

É interessante perceber que a função (6.49) alcança o seu valor máximo em

$$r_{\text{máx}} = r_0 \left(\frac{n}{n+2}\right)^{\frac{1}{2(n+1)}}, \quad (6.57)$$

dado por

$$\alpha_n(r = r_{\text{máx}}) = \frac{2(n+2)}{\lambda r_0} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{\frac{n}{2(n+1)}}, \quad (6.58)$$

¹ Novamente, o sinal negativo aparece porque estamos usando a convenção oposta de sinal para o fluxo magnético no setor topológico com $n > 0$.

com (6.57) tendendo a r_0 para grandes valores de n . Por outro lado, o fato de termos tomado $\alpha \ll 1$ estabelece uma forte restrição sobre os valores permitidos de n , isto é, n deve satisfazer o critério

$$\alpha(r_{\text{máx}}) \ll 1 \Rightarrow \lambda r_0 \gg 2(n+2) \left(\frac{n}{n+2} \right)^{\frac{n}{2(n+1)}}. \quad (6.59)$$

O correspondente valor de $B(r)$ em $r_{\text{máx}}$ é dado por

$$B_n(r_{\text{máx}}) = -\frac{2g^3 h^2 (n+2)^2}{(\lambda r_0)^2 \kappa^2} \left(\frac{n}{n+2} \right)^{\frac{n}{n+1}}, \quad (6.60)$$

cujos decréscimo é notado com o aumento de r_0 . Já a amplitude de $A_n^0(r)$ em $r_{\text{máx}}$ fica

$$A_n^0(r_{\text{máx}}) = -\frac{gh}{\kappa} \left(1 - \frac{2(n+2)^2}{(\lambda r_0)^2} \left(\frac{n}{n+2} \right)^{\frac{n}{n+1}} \right), \quad (6.61)$$

saturando em (6.16), quando $r_0 \rightarrow \infty$. Além disso, o referente valor da densidade de energia em $r_{\text{máx}}$ é

$$\mathcal{E}_{BPS,n}(r_{\text{máx}}) = \frac{2h(n+2)^2}{r_0^2} \left(\frac{n}{n+2} \right)^{\frac{n}{n+1}}, \quad (6.62)$$

enquanto que em $r = 0$ corresponde a

$$\mathcal{E}_{BPS,n}(0) = \begin{cases} \frac{128n^2 \kappa^2}{g^4 h r_0^4}, & \text{se } n = 1, \\ 0, & \text{se } n > 1. \end{cases} \quad (6.63)$$

Repare também a diminuição de $\mathcal{E}_{BPS,n}(r_{\text{máx}})$ e $\mathcal{E}_{BPS,1}(0)$ com o crescimento de r_0 .

Os valores extremos de $E_n(r)$ ocorrem quando

$$\frac{dE_n}{dr} = \frac{d^2 A_n^0}{dr^2} = -\frac{gh}{\kappa} \left[\left(\frac{d\alpha_n}{dr} \right)^2 + \alpha_n \frac{d^2 \alpha_n}{dr^2} \right] = 0, \quad (6.64)$$

implicando em

$$\left(\frac{d\alpha_n}{dr} \right)^2 = -\alpha_n \frac{d^2 \alpha_n}{dr^2}, \quad (6.65)$$

cujas soluções para r nos fornece

$$r_{n,\pm} = r_0 (R_{n,\pm})^{\frac{1}{2(n+1)}}, \quad \text{com } R_{n,\pm} = \frac{a_n \pm b_n}{c_n}, \quad (6.66)$$

em que

$$a_n = 4n^2 + 8n + 1, \quad (6.67)$$

$$b_n = \sqrt{12n^4 + 48n^3 + 61n^2 + 26n + 1}, \quad (6.68)$$

$$c_n = 2n^2 + 9n + 10. \quad (6.69)$$

Assim, encontramos os dois extremos

$$E_n(r_{\pm}) = \frac{16(n+1)^2 gh}{\lambda^2 \kappa r_0} \Sigma_{n,\pm}, \quad (6.70)$$

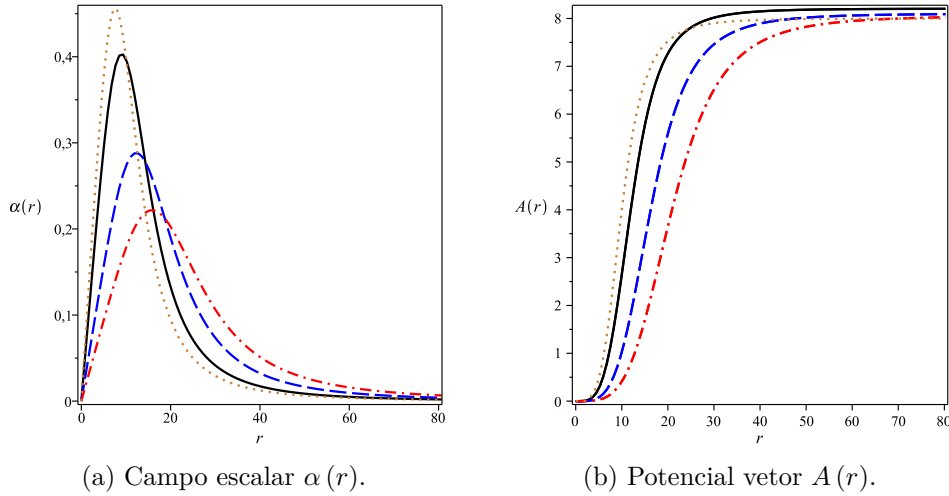


Figura 27 – Gráficos numéricos e analíticos para o campo $\alpha(r)$ (Fig. 27a) e para o potencial vetor $A(r)$ (Fig. 27b). As linhas sólidas pretas ($\lambda r_0 = 10$), tracejadas azuis ($\lambda r_0 = 15$) e ponto-tracejadas vermelhas ($\lambda r_0 = 20$) referem-se às soluções numéricas do sistema BPS (6.31) e (6.32), obedecendo às condições de contorno (6.5)-(6.8), (6.16) e (6.17). As linhas pontilhadas correspondem às soluções analíticas aproximadas das equações BPSs (6.43) e (6.44), para $r_0 = 10$. Em todos os casos, fixamos os valores $n = g = h = \kappa = 1$ por questão de simplicidade.

levando em conta a definição

$$\Sigma_{n,\pm} = \frac{(R_{\pm})^{\frac{2n-1}{2(n+1)}}}{(1 + R_{\pm})^3} [n - (n + 2) R_{\pm}]. \quad (6.71)$$

Na Figura 27, apresentamos os comportamentos das soluções numéricas do sistema BPS (6.31) e (6.32), considerando o primeiro setor topológico e as condições de contorno (6.5)-(6.8), (6.16) e (6.17). Para comparação, também mostramos as soluções analíticas aproximadas das equações BPSs (6.43) e (6.44). A Figura 27a indica que a função $\alpha(r)$ descreve anéis centrados em $r = 0$, com seus raios e amplitudes dados aproximadamente por (6.57) e (6.58), respectivamente; tais raios (amplitudes) aumentam (diminuem) com o incremento do fator λr_0 . Note que $\alpha(r)$ se anula na origem e no infinito, evidenciando o caráter não topológico da configuração. Os perfis para o potencial vetor $A(r)$ são esboçados na figura 27b, em que vemos todos os limites assintóticos se aproximarem de maneira suave do valor $A_n(r \rightarrow \infty) = 4(n + 1)$. Alíás, temos determinado os valores numéricos $A_1(r \rightarrow \infty) \approx 8.20526$ para $\lambda r_0 = 10$, $A_1(r \rightarrow \infty) \approx 8.10268$ para $\lambda r_0 = 15$ e $A_1(r \rightarrow \infty) \approx 8.06025$ para $\lambda r_0 = 20$.

Exibimos na Figura 28a o campo magnético $B(r)$. Perceba que os perfis se comportam analogamente a $\alpha^2(r)$, fato previsto por (6.50). Os valores máximos de $B(r)$ são bem aproximados de (6.60) somente se λr_0 for pequeno. Além disso, $B(r)$ tem amplitudes decrescentes como $(\lambda r_0)^{-2}$. Na Figura 28b são expostas as curvas da densidade de energia. Observamos que, apesar de a distribuição energética ser localizada, os valores máximos

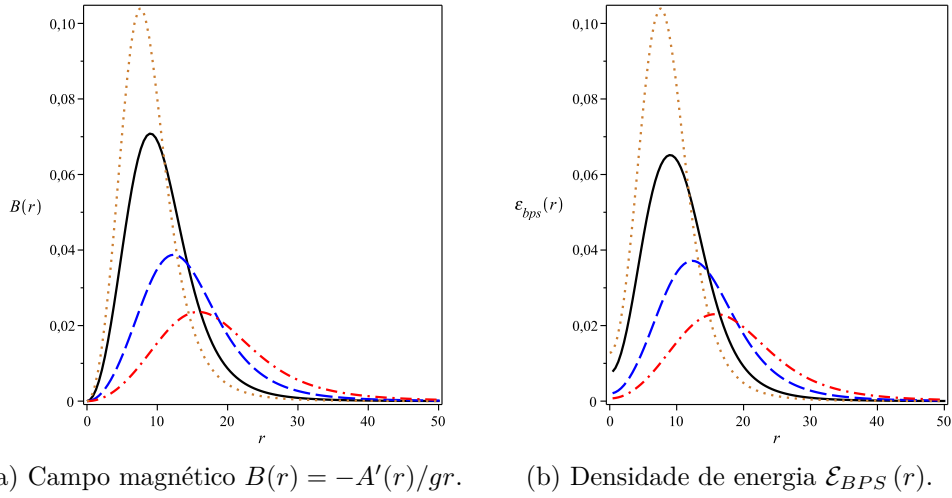


Figura 28 – Comparação entre os perfis numéricos e analíticos do campo magético (Fig. 28a) e da densidade de energia (Fig. 28b). A convenções são as mesmas da Fig. 27.

também ocorrem descolados da origem, com estes diminuindo à medida que λr_0 cresce. Na origem, temos $\mathcal{E}_{BPS,1}(0) \propto (\lambda r_0)^{-4}$ e $\mathcal{E}_{BPS,n>1}(0) = 0$, acordando com o resultado prévio de (6.63).

A Figura 29a mostra o potencial elétrico $A^0(r)$. Note que as condições de contorno (6.16) e (6.17) são perfeitamente obedecidas, independentemente do valor de n . Além disso, os extremos de $A_0(r)$ são dados de modo aproximado por (6.61), porém o erro com respeito à solução numérica aumenta para grandes valores de λr_0 . Em particular, para $n = g = h = \kappa = 1$ e $r_0 = 10$ (linha preta), achamos $A_{n=1}^0(r_{\text{máx}}) \approx 0.89608$. Na Figura 29b, $r_{n,-}$ e $r_{n,+}$ são os extremos analíticos do campo elétrico $E(r)$. Em relação às soluções

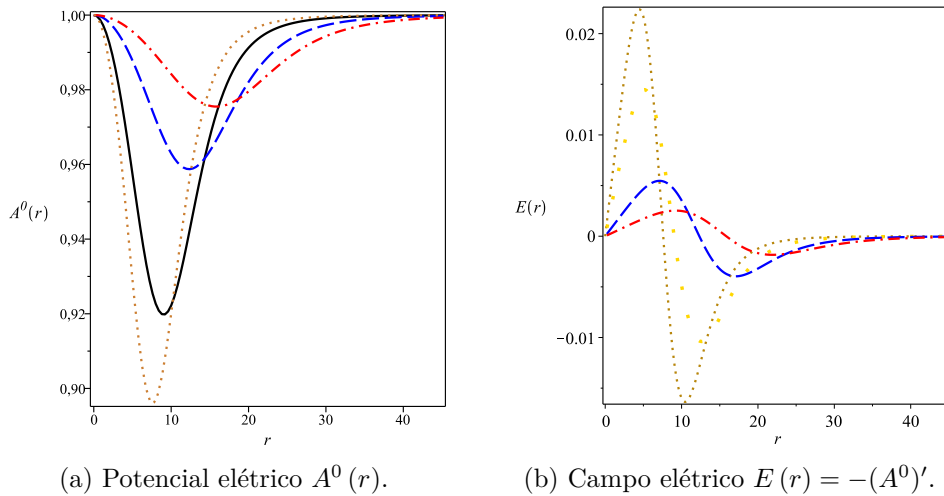


Figura 29 – Comparação entre os gráficos numéricos e analíticos do potencial $A^0(r)$ (Fig. 29a) e do campo $E(r) = -(A^0)'$ (Fig. 29b) elétricos. Usamos as convenções da Fig. 27.

numéricas, os extremos se aproximam somente para pequenos valores de λr_0 . Veja que tanto na origem quanto no infinito o campo elétrico se anula. Para $n = g = h = \kappa = 1$ e $r_0 = 10$ (linha preta), por exemplo, encontramos $r_{n=1,-} \approx 4.46485$ e $r_{n=1,+} \approx 10.46277$, com $E_{n=1}(r = r_{n=1,-}) \approx 0.02239$ e $E_{n=1}(r = r_{n=1,+}) \approx -0.01636$. Por fim, vale a pena destacar o efeito de inversão do campo elétrico.

6.5 Gráficos das Soluções Numéricas

Agora, vamos realizar as análises gráficas do segundo tipo de soluções, sobre as quais não impomos mais a restrição $\alpha \ll 1$. Para isso, resolvemos numericamente o sistema BPS (6.31) e (6.32), perante as condições de contorno discutidas na seção 6.2.

Ilustramos na Figura 30a o campo escalar $\alpha(r)$, o qual possui comportamento análogo àquele mostrado na Figura 27a. As curvas descrevem anéis centrados na origem, cujas amplitudes e raios aumentam com o incremento do *winding number*. A Figura 30b mostra os perfis de $A(r)$, onde inserimos a linha extra pontilhada laranja ($n = 4$). Nesta linha, é interessante destacar as pequenas oscilações (como efeito de uma estrutura interna) inerente à contribuição do setor elétrico. Note também que $A(r)$ não satisfaz mais a condição de contorno do caso a analítico, $A(r \rightarrow \infty) = 4(n + 1)$.

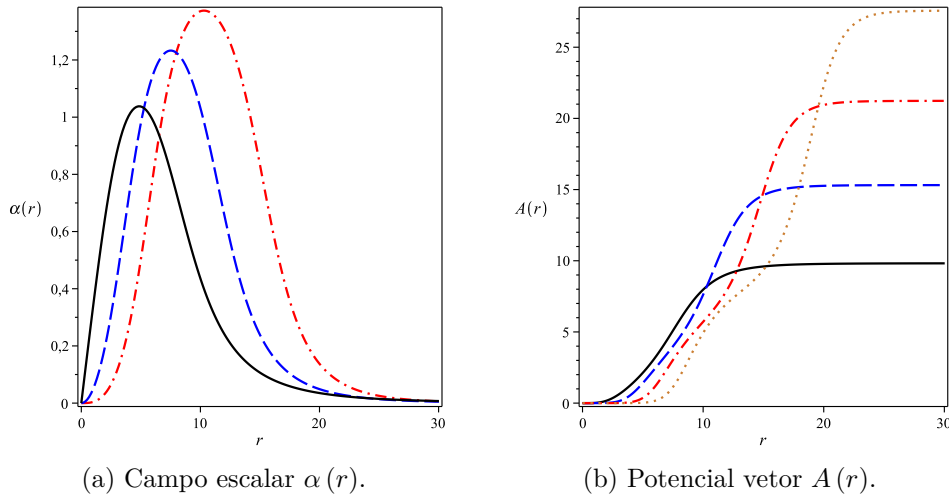
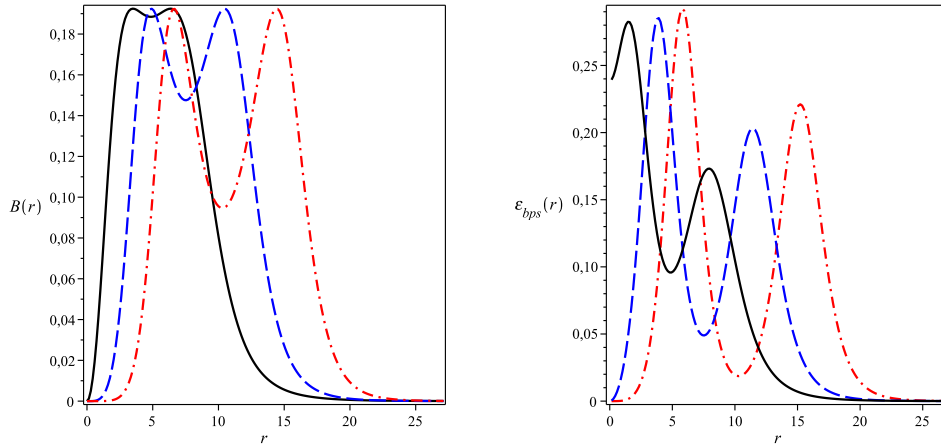


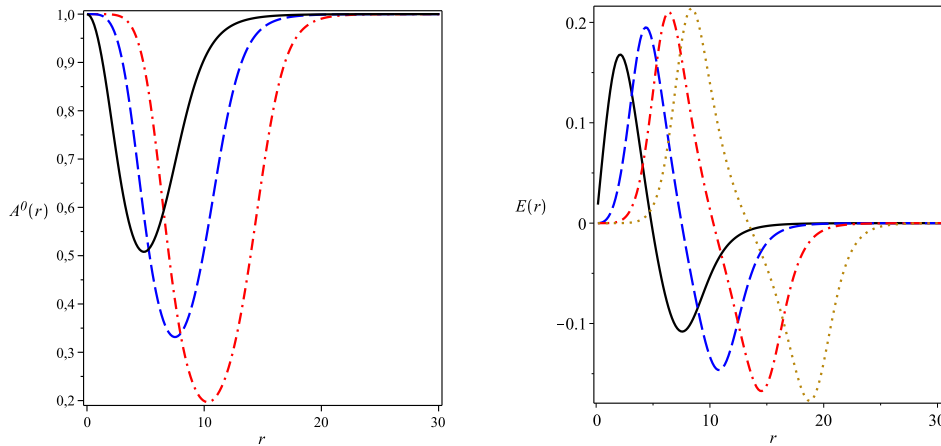
Figura 30 – Soluções numéricas do sistema BPS (6.31) e (6.32), sob as condições de contorno (6.5)-(6.8), (6.16) e (6.17). Usamos as seguintes convenções: $n = 1$ para as linhas contínuas pretas, $n = 2$ para os perfis tracejados azuis, $n = 3$ para as curvas ponto-tracejadas vermelhas e $n = 4$ para a linha pontilhada laranja. Em todos os casos, consideramos $g = h = \kappa = 1$, por mera praticidade.

As soluções numéricas para o campo magnético $B(r)$ e para densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ aparecem nas Figuras 31a e 31b, sequencialmente, ambas representando “anéis duplos” centrados em $r = 0$. Em particular, o campo magnético satisfaz $B(r = 0) =$



(a) Campo magnético $B(r) = -A'(r)/gr$. (b) Densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$.

Figura 31 – Soluções numéricas para campo magnético $B(r) = -A'(r)/gr$ (Fig. 31a) e para a densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ (Fig. 31b). As convenções são as mesmas da Fig. 30.



(a) Potencial elétrico $A^0(r)$. (b) Campo elétrico $E(r) = -(A^0)'$.

Figura 32 – Gráficos numéricos do potencial $A^0(r)$ (Fig. 32a) e do campo $E(r) = -(A^0)'$ (Fig. 32b) elétricos. Adotamos as mesmas convenções da Fig. 30.

$B(r \rightarrow \infty) = 0$. Contudo, a densidade $\mathcal{E}_{BPS}(r = 0)$ é nula somente se $n \neq 1$, enquanto $\mathcal{E}_{BPS}(r \rightarrow \infty) = 0$ para qualquer valor do *winding number*.

Finalmente, as Figuras 32a e 32b mostram os perfis numéricos do potencial e do campo elétricos os quais manifestam os mesmos comportamentos exibidos nas Figuras 29a e 29b, respectivamente. Observe que o gráfico do campo elétrico revela pequenas ondulações nos perfis para n grande, indicando um efeito típico de uma estrutura interna (linha laranja pontilhada).

7 SÓLITONS AUTODUAIS COM ESTRUTURA INTERNA NO MODELO SIGMA $O(3)$

Neste capítulo, fazemos uma descrição de algumas propriedades da teoria sigma não linear. Mostramos como o modelo sigma $O(3)$ pode ser calibrado com um campo de *gauge* abeliano, suportando vórtices autoduais. Também investigamos a formação de sólitons BPSs tipo-vórtices descritos pela teoria sigma $O(3)$ não linear, em que seu subgrupo $O(2)$ é composto como: $O(2) \times Z_2$. Essa composição é feita pela introdução de um campo escalar neutro extra (responsável por descrever efeitos de estrutura interna) acoplado ao campo de *gauge*, por meio de uma função dielétrica generalizada. Veremos que o novo campo escalar pode ser visto como uma “fonte” de geração de diferentes tipos de estruturas de vórtices. Além disso, descobrimos que o potencial de autointeração encontrado quebra a simetria $O(2)$ minimamente, implicando em configurações topológicas não degeneradas.

Este capítulo é tema do nosso quarto artigo, o qual foi publicado na revista *Physical Review D* [35].

7.1 Modelo Sigma não Linear

A teoria sigma não linear trata-se de um modelo possuindo N campos escalares reais $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_a, \dots, \phi_N)$, os quais representam um difeomorfismo entre o espaço tempo de Minkowski $(D + 1)$ -dimensional¹ $(\mathbb{R}^D \times \mathbb{C})$ e um *target manifold* (\mathcal{M}_T) , onde jazem tais campos. Representamos esse mapa por $\vec{\phi} : \mathbb{R}^D \times \mathbb{C} \mapsto \mathcal{M}_T$. O *target manifold* é dotado de uma métrica (interna) $g_{ab} = g_{ab}(\vec{\phi})$ e a densidade lagrangiana de tal teoria é escrita como [76]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ab} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^b. \quad (7.1)$$

Devemos sempre ter g_{ab} positiva definida para evitar estados com norma negativa.

Considere uma transformação infinitesimal da forma

$$\phi'_a = \phi_a + \varepsilon \xi_a(\vec{\phi}), \text{ com } \varepsilon \ll 1. \quad (7.2)$$

Dizemos que duas teorias do tipo (7.1) são equivalentes, se a relação de isometria for satisfeita:

$$g_{ab}(\vec{\phi}) = \frac{\partial \phi'^u}{\partial \phi^a} \frac{\partial \phi'^v}{\partial \phi^b} g_{uv}(\vec{\phi}'), \quad (7.3)$$

¹ A notação \mathbb{C} refere-se ao eixo temporal (imaginário).

ou seja, a derivada de Lie da métrica deve ser nula

$$\mathcal{L}_\xi (g_{ab}) = \xi^a \partial_c g_{ab} + g_{cb} \partial_a \xi^c + g_{ac} \partial_b \xi^c = 0 \quad (7.4)$$

e ξ_a é identificado como o vetor de Killing do espaço interno. Além disso, se o tensor de curvatura de Riemann for nulo, esse vetor pode ser expresso como

$$\xi_a = T_a + R_a{}^b \phi_b,$$

tal que $R_{ab} = -R_{ba}$, sendo T_a e R_{ab} constantes. É possível ainda escrever ξ_a em na base coordenada $\{\partial_a\}$, a saber

$$\xi = \xi^a \partial_a = T^a \partial_a + R^{ab} \phi_b \partial_a = T + R, \quad (7.5)$$

em que $T = T^a \partial_a$ e $R = R^a \partial_a = R^{ab} \phi_b \partial_a$ são os operadores de translação e rotação, respectivamente.

7.1.1 Modelo Sigma $O(N)$ não Linear

O modelo sigma $O(N)$ não linear é um caso particular da teoria (7.1), em que o difeomorfismo passa a ser dado pelo mapa $\vec{\phi} : \mathbb{R}^D \times \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}^N$. Note que o homeomorfismo entre o manifold \mathcal{M}_T e o espaço vetorial \mathbb{R}^N é trivial, ou seja, \mathcal{M}_T é o próprio \mathbb{R}^N , tal que $g_{ab} \propto \delta_{ab}$. No regime estacionário, as configurações topológicas são classificadas de acordo com o grupo de homotopia $\pi_{D-1}(S^{N-1})$, possuindo topologia trivial

$$\pi_{D-1}(S^{N-1}) \cong 0, \text{ se } D > N. \quad (7.6)$$

Uma possível representação para essa teoria é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \delta_{ab} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^b = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi}, \quad (7.7)$$

em que

$$|\vec{\phi}|^2 = \sum_{a=1}^N \phi_a^2 = 1 \quad (7.8)$$

define uma hipersfera S^{N-1} de raio unitário. Vemos que esse modelo é invariante perante o grupo de simetria $O(N)$, com seus geradores de rotação R_a satisfazendo a álgebra do momento angular $[R_a, R_b] = \varepsilon_{abc} R_c$.

7.1.1.1 Modelo Sigma $O(3)$ não Linear em (2+1)-D

No espaço-tempo de Minkowski $(2+1) - D$, particularizando $N = 3$, temos o modelo sigma $O(3)$ não linear com

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 1 \quad (7.9)$$

e a densidade de energia no regime estacionário

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \partial_i \vec{\phi} \cdot \partial_i \vec{\phi}. \quad (7.10)$$

Esse modelo surge em vários cenários da matéria condensada [66, 77, 78], principalmente pelo fato de a densidade de energia (7.10) ser vista como o limite contínuo do hamiltoniano de uma cadeia de spins em materiais ferromagnéticos.

Destacamos também que a teoria $CP(1)$ (4.6) pode ser mapeada na sigma $O(3)$ (7.7) por meio da transformação [63, 64, 69]

$$\vec{\phi}_{O(3)} = \phi_{CP(1)}^\dagger \vec{\sigma} \phi_{CP(1)}, \quad (7.11)$$

sendo $\vec{\sigma}$ um vetor cujas componentes são as matrizes de Pauli: $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

No limite $r \rightarrow \infty$, o vácuo dessa teoria pode ser avaliado nas seguintes maneiras

$$\phi_1 = \phi_2 = 0 \text{ e } \phi_3 = \pm 1, \quad (7.12)$$

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = 1 \text{ e } \phi_3 = 0. \quad (7.13)$$

O primeiro deles (7.12) não quebra espontaneamente a simetria de *gauge* $SO(2)$ ($U(1)$) e vamos chamá-lo de *mínimo simétrico*, consoante sugerido por [28]; no espaço físico $\mathbb{R}^2(x \times y)$, a compactificação da dimensão z pela adição do ponto no infinito $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ permite o estabelecimento da seguinte relação de homotopia $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \mapsto S^2$, com S^2 sendo uma esfera no espaço interno. A topologia do campo $\vec{\phi}$ é então classificada de acordo com o segundo grupo de homotopia

$$\pi_2(S^2) \cong n \in \mathbb{Z}. \quad (7.14)$$

Já o segundo vácuo (7.13) quebra espontaneamente a simetria de *gauge* $SO(2)$ ($U(1)$) e vamos denominá-lo *mínimo de simetria quebrada*, conforme denotado também em [28]; no espaço físico \mathbb{R}^2 , um círculo de raio r é mapeado homotopicamente ao círculo de raio unitário. Agora a topologia do campo $\vec{\phi}$ é classificada conforme o grupo de homotopia

$$\pi_1(S^1) \cong n \in \mathbb{Z}. \quad (7.15)$$

Podemos ainda reescrever (7.10) na forma abaixo

$$\mathbb{E} = \int d^2x \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int d^2x \left(\partial_1 \vec{\phi} \pm \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi} \right)^2 \pm 4\pi Q_{top} \geq \pm 4\pi Q_{top}, \quad (7.16)$$

sendo Q_{top} a carga topológica

$$Q_{top} = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \vec{\phi} \cdot \left(\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi} \right). \quad (7.17)$$

Note que é possível reexpressar (7.17) como

$$Q_{top} = \int d^2x \mathcal{J}^0, \quad (7.18)$$

em que

$$\mathcal{J}^0 = \frac{1}{4\pi} \vec{\phi} \cdot (\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi}) = \frac{1}{4\pi} \varepsilon^{012} \vec{\phi} \cdot (\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi}) \quad (7.19)$$

pode ser vista como a densidade de carga topológica. Além disso, generalizando os índices, obtemos a densidade de corrente topológica desta teoria,

$$\mathcal{J}^\mu = \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \vec{\phi} \cdot (\partial_\alpha \vec{\phi} \times \partial_\beta \vec{\phi}), \quad (7.20)$$

a qual obedece à lei de conservação

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0. \quad (7.21)$$

O limite BPS em (7.16) é atingido quando a equação de primeira ordem é averiguada

$$\partial_1 \vec{\phi} = \mp \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi}, \quad (7.22)$$

com o sinal superior (inferior) correspondendo ao (antis)óliton.

Considerando o chamado *hedgehog ansatz* para $\vec{\phi}$, escrito em termos das coordenadas polares (r, θ) [27],

$$\vec{\phi}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \sin f(r) \cos(n\theta) \\ \sin f(r) \sin(n\theta) \\ \cos f(r) \end{pmatrix}, \quad (7.23)$$

em que o parâmetro n diz respeito ao *winding number*, podemos ainda avaliar a carga topológica (7.17) como

$$Q_{top} = -\frac{n}{2} [\cos f(r) - \cos f(0)] = -\frac{n}{2} [\cos f(r) - 1]. \quad (7.24)$$

Para a topologia (7.14), ou seja, quando $f(r \rightarrow \infty) = \pi$ e o mínimo for o polo sul

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

da esfera no espaço interno, a carga topológica (7.24) equivale a

$$Q_{top} = n. \quad (7.26)$$

Nesse caso, todos os círculos S_r^1 no espaço físico são mapeados homotopicamente em círculos sobre esfera do espaço interno, incluindo o círculo de raio infinito S_∞^1 , que é mapeado no polo sul (7.25) da esfera. Já para a topologia (7.15), isto é, para a condição de contorno $f(r \rightarrow \infty) = \frac{\pi}{2}$, a carga topológica (7.24) torna-se

$$Q_{top} = \frac{n}{2}. \quad (7.27)$$

O surgimento do fator $1/2$ em (7.27) indica que o mapa de homotopia (7.15) cobre apenas um hemisfério da esfera no espaço interno. No caso da configuração de mínimo (7.25), o cobrimento é feito apenas sobre o hemisfério sul.

Existe ainda uma solução “espelhada”, na qual os setores topológicos trocam de sinal ($n \rightarrow -n$). Nessa nova configuração, o mínimo associado à topologia (7.14) passa a ser o polo norte

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.28)$$

e o mapa de homotopia (7.15) cobre somente o hemisfério norte. As configurações norte e sul podem ser mapeadas uma na outra pela relação

$$f_{sul}(r) = \pi - f_{norte}(r), \quad (7.29)$$

incluindo, logicamente, as condições de contorno.

7.1.1.2 Modelo Sigma $O(3)$ não Linear Calibrado em (2+1)-D

Sabemos que o grupo de simetria $O(3)$ possui o subgrupo $O(2)$ isomorfo a $U(1)$. Por esse motivo, é possível introduzir um campo de *gauge* abeliano no modelo anterior da seguinte forma

$$D_\mu \vec{\phi} = \partial_\mu \vec{\phi} - A_\mu \hat{n}_3 \times \vec{\phi}, \quad (7.30)$$

sendo $\vec{\phi} = \phi^1 \hat{n}_1 + \phi^2 \hat{n}_2 + \phi^3 \hat{n}_3$ o campo sigma decomposto na base canônica $\{\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3\}$ do espaço interno. Com efeito, a derivada covariante acima é invariante perante a simetria rotacional em torno do eixo- \hat{n}_3 . Para perceber isso, vamos considerar as componentes

$$D_\mu \phi^1 = \partial_\mu \phi^1 - \phi^2 A_\mu, \quad (7.31)$$

$$D_\mu \phi^2 = \partial_\mu \phi^2 + \phi^1 A_\mu, \quad (7.32)$$

$$D_\mu \phi^3 = \partial_\mu \phi^3. \quad (7.33)$$

Notamos que somente as componentes (7.31) e (7.32) são calibradas e ambas equivalem a

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + i A_\mu \psi, \quad (7.34)$$

se definirmos o campo complexo

$$\psi = \phi^1 + i\phi^2. \quad (7.35)$$

Concluimos que (7.30) já leva em conta a quebra de simetria local $O(3)$, porém permanece invariante perante a transformação local $O(2)$ ($U(1)$).

Embora a equação auto-dual (7.22) seja integrável, os sólitons descritos por ela são invariantes de escala, sendo impossível interpretar esses objetos como partículas via Teoria Quântica de Campos [79]. Uma proposta para quebrar essa invariância foi feita por

B.J. Schroers em 1995 [27], com a introdução de um campo de *gauge* por meio de (7.30). Schroers mostrou que, se a dinâmica do campo vetorial for governada pelo termo usual de Maxwell, a nova teoria calibrada

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu\vec{\phi} \cdot D^\mu\vec{\phi} - V(\vec{\phi}) \quad (7.36)$$

poderia sustentar novas estruturas de vórtices autoduais com o potencial

$$V(\vec{\phi}) = \frac{1}{2}(1 - \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi})^2. \quad (7.37)$$

Essa descoberta abriu caminho para o estudo desses novos tipos de sólitons. Dentre eles, podemos destacar os vórtices de Ghosh eletricamente carregados, sendo topológicos ou não topológicos [80]. Ambos os vórtices carregados e não carregados foram classificados de acordo com o segundo grupo homotopia (7.14), ou seja, possuem a configuração de mínimo (7.25). Foi mostrado que esses objetos, apesar de ter suas energias quantizadas em termos no *winding number* n , exibem degenerescências no fluxo magnético em cada setor topológico. No caso dos carregados, as degenerescências se manifestam também na carga elétrica e no momento angular. Em particular, o fluxo magnético encontrado tem o seguinte valor genérico

$$\Phi = 2\pi n\alpha, \quad (7.38)$$

sendo α um parâmetro contínuo limitado por n e associado ao valor do potencial vetor no infinito.

A princípio parece que a invariância de escala do modelo sigma $O(3)$ puro ainda permanece na forma “degenerada”, no sentido de que poderíamos variar continuamente o parâmetro α . Não obstante, a variação contínua de Φ exigiria um custo infinito de energia. A exemplo, se considerarmos a lei de indução de Faraday

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (7.39)$$

com a integração feita ao longo de um contorno de raio infinito, temos $\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$ somente se $|\vec{E}|$ não decrescer mais rápido do que $1/r$. Ou seja, contrariando a hipótese de que a energia elétrica $\mathbb{E}_{el\acute{e}}$ seja finita:

$$\mathbb{E}_{el\acute{e}} = 2\pi \int dr r^2 \left(\frac{1}{2} |\vec{E}|^2 \right) < \infty. \quad (7.40)$$

No final dos anos 90, P. Mukherjee previu que os estados degenerados supracitados estão diretamente ligados à escolha do mínimo [28, 29]. Dessa forma, para caracterizar esses objetos em cada setor topológico de modo completo (segundo aqueles de Nielsen-Olesen) quebrando as degenerescências, Mukherjee propôs a segunda configuração (7.13), na qual a topologia passou a ser classificada de acordo com o grupo fundamental de Poincaré (7.15). Neste caso, o fluxo magnético discreto assume os valores

$$\Phi = 2\pi n, \quad (7.41)$$

similares aos vórtices da rede de Abrikosov.

7.1.1.3 Formalismo BPS

O funcional de energia correspondente a (7.36) no regime estacionário e no *gauge* temporal pode ser quadrado consoante a

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ \left[B \mp (1 - \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) \right]^2 + (D_1 \vec{\phi} \pm \vec{\phi} \times D_2 \vec{\phi})^2 \right\} \pm 4\pi Q_{top} \geq \pm 4\pi Q_{top}, \quad (7.42)$$

em que carga topológica Q_{top} é definida como

$$Q_{top} = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left[\vec{\phi} \cdot (D_1 \vec{\phi} \times D_2 \vec{\phi}) + F_{12} (1 - \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) \right]. \quad (7.43)$$

Repare que podemos escrever ainda

$$Q_{top} = \int d^2x \mathcal{J}^0, \quad (7.44)$$

sendo \mathcal{J}^0 componente temporal da densidade de corrente topológica

$$\mathcal{J}^\mu = \frac{1}{8} \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \left[\vec{\phi} \cdot (D_\alpha \vec{\phi} \times D_\beta \vec{\phi}) + F_{\alpha\beta} (1 - \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) \right]. \quad (7.45)$$

O limite de Bogomol'nyi

$$\mathbb{E}_{BPS} = \pm 4\pi Q_{top} \quad (7.46)$$

é saturado em (7.42), quando os campos satisfazem as equações BPSs

$$B = \pm (1 - \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}), \quad (7.47)$$

$$D_1 \vec{\phi} = \mp \vec{\phi} \times D_2 \vec{\phi}. \quad (7.48)$$

A carga topológica (7.43) pode ser simplificada ainda na forma

$$Q_{top} = \frac{1}{4\pi} \int d^2x [\phi \cdot (\partial_1 \phi \times \partial_2 \phi)] + \frac{1}{4\pi} \int_{fronteira} (\phi_3 - 1) r A_\theta d\theta, \quad (7.49)$$

em que A_θ é a componente polar angular do potencial vetor \vec{A} . No mínimo assimétrico escolhido por Schroers, o termo de fronteira se anula e (7.49) resulta simplesmente em (7.27).

7.2 Modelo Sigma $O(3)$ não Linear Calibrado e com Função Dielétrica

Em anos recentes, foram investigados a formação de sólitons em cenários nos quais um campo de calibre é acoplado não minimamente ao campo sigma $O(3)$ [81, 82], assim como envolvendo a violação da simetria de Lorentz [83]. Além disso, extensões do modelo de Maxwell-Higgs tem sido estudadas pela composição do grupo de simetria $U(1)$ [84, 85]. A título de exemplo, este grupo foi composto como $U(1) \times Z_2$ por meio da introdução de um campo escalar neutro [30], indicando a existência de vórtices autoduais em um meio dielétrico. Nesta direção, foi predito em [31] a possível formação desses sólitons em um modelo $CP(2) \times Z_2$ calibrado. Tais objetos podem exercer grandes utilidades na Física de metamateriais [32–34], como é o caso de meios dielétricos apresentando índices de refração menor do que um.

Motivados por essas discussões, o nosso ponto de partida para investigar novas configurações de vórtices BPSs é o modelo em um espaço tempo plano (2+1)-D, inicialmente estudado em [27], no qual nós temos tomado em conta efeitos de estrutura interna devido a presença de um meio de elétrico,

$$\mathcal{L} = -\frac{G(\chi)}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} D_\mu \vec{\phi} \cdot D^\mu \vec{\phi} + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}, \chi), \quad (7.50)$$

em que $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ é um tripleto de campo escalar descrevendo um vetor unitário no espaço interno, $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$ e, portanto, corresponde ao campo sigma não linear $O(3)$. Esses campos são acoplados minimamente ao quadrivetor de Maxwell A_μ . Notamos que χ descreve um campo escalar neutro, $G(\chi)$ é uma função dielétrica positiva definida e $V(\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}, \chi)$, algum potencial de autointeração capaz de suportar vórtices autoduais.

O acoplamento mínimo entre o tripleto e o campo de calibre é governado pela derivada covariante (7.30), ou seja,

$$D_\mu \vec{\phi} = \partial_\mu \vec{\phi} - A_\mu \hat{n}_3 \times \vec{\phi}. \quad (7.51)$$

Para uma configuração de mínimo assimétrico, a corrente topológica do setor sigma calibrado é definida similarmente como em (7.45), a saber

$$\mathcal{J}_\mu^{(\Sigma)} = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{\mu\alpha\beta} [\phi \cdot D^\alpha \phi \times D^\beta \phi - \phi_3 F^{\alpha\beta}]. \quad (7.52)$$

Já para o setor χ , o tensor tipo-corrente é dado por [86]

$$\mathcal{J}_{\mu\nu}^{(\chi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon_{\mu\nu\alpha} \partial^\alpha \chi. \quad (7.53)$$

Portanto, a carga topológica total da configuração corresponde a

$$Q_{top} = Q_{top}^{(\Sigma)} + Q_{top}^{(\chi)}, \quad (7.54)$$

em que a primeira parcela é a carga topológica do setor sigma calibrado,

$$Q_{top}^{(\Sigma)} = \int d^2x \mathcal{J}_0^{(\sigma)} = \frac{1}{4\pi} \int d^2x [\phi \cdot (\partial_1 \phi \times \partial_2 \phi)] + \frac{1}{4\pi} \int_{fronteira} \phi_3 r A_\theta d\theta, \quad (7.55)$$

com $A_\theta = \hat{e}_\theta \cdot \vec{A}$, enquanto a segunda parcela é a carga topológica do setor χ ,

$$Q_{top}^{(\chi)} = \int d^2x \mathcal{J}_{0i}^{(\chi)} (\mathcal{J}^{(\chi)})^{0i} = \int r dr (\chi')^2, \quad (7.56)$$

tendo em mente a simetria polar. O símbolo linha denota a derivada com respeito a r .

7.2.1 O Ansatz para o Vórtice no Modelo Sigma $O(3)$ Calibrado

Para investigar a existência de soluções topológicas em nossa pesquisa, vamos lançar mão do *ansatz* axialmente simétrico para o potencial vetor e para o campo χ

$$A_r = 0, A_\theta = -\frac{n}{r} [a(r) - n], \chi = \chi(r), \quad (7.57)$$

bem como o chamado *hedgehog ansatz* para $\vec{\phi}$, escrito em termos das coordenadas polares

$$\vec{\phi}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \sin f(r) \cos(n\theta) \\ \sin f(r) \sin(n\theta) \\ \cos f(r) \end{pmatrix}, \quad (7.58)$$

ambos análogos ao utilizado por Schroers [27]; o parâmetro n diz respeito ao *winding number*. Vale a pena discutir que o *ansatz* de Schroers para o campo de calibre tem a forma

$$A_\theta = na(r), \quad (7.59)$$

o qual satisfaz as condições de contorno compatíveis com o *mínimo simétrico*

$$f(0) = \pi, f(r \rightarrow \infty) = 0, \quad (7.60)$$

$$a(0) = 0, a'(r \rightarrow \infty) = 0 \quad (a = \alpha). \quad (7.61)$$

Note que a condição contorno de Neumann no infinito desempenha um papel substancial no surgimento das degenerescências mencionadas no capítulo precedente. No intento de evitar tais degenerescências sobre configurações de campos regulares com energia positiva definida, impomos as condições de contorno abaixo

$$f(0) = 0, f(r \rightarrow \infty) = \frac{\pi}{2}, \quad (7.62)$$

$$a(0) = n, a(r \rightarrow \infty) = 0, \quad (7.63)$$

correspondendo, portanto, ao *mínimo de simetria quebrada*. Já o comportamento de χ nas fronteiras dependerá do potencial autodual, conforme testificaremos em breve.

Vale lembrar que as condições de contorno (7.62) e (7.63) referem-se ao mapa de homotopia (7.15) cobrindo apenas o hemisfério norte da esfera no espaço interno. Entretanto, as relações

$$f_{sul}(r) = \pi - f_{norte}(r), \quad (7.64)$$

$$a_{sul}(r) = -a_{norte}(r) \quad (7.65)$$

forneem as soluções “espelhadas” cobrindo o hemisfério sul.

7.2.2 Formalismo BPS

Como estamos interessados em procurar configurações estacionárias, a densidade lagrangiana avaliada no *ansatz* supracitado torna-se

$$\mathcal{L} = \frac{G}{2} [(A'_0)^2 - B^2] + \frac{1}{2} A_0^2 \sin^2 f - \frac{1}{2} (f')^2 - \frac{a^2}{2r^2} \sin^2 f - \frac{1}{2} (\chi')^2 - V(\phi_3, \chi), \quad (7.66)$$

em que o campo magnético é determinado por

$$B = -\frac{a'}{r}. \quad (7.67)$$

A lei de Gauss decorrente de (7.66) é computada como

$$\frac{1}{r} (rGA'_0)' = A_0 \sin^2 f. \quad (7.68)$$

Vale a pena notar que o calibre temporal $A_0 = 0$ satisfaz identicamente a equação (7.68). Por causa desse fato, teremos soluções contendo apenas campos magnéticos. Com essa escolha calibre, o funcional de energia associado a (7.66) resulta em

$$\mathbb{E} = 2\pi \int r dr \mathcal{E} = 2\pi \int r dr \left[\frac{GB^2}{2} + \frac{1}{2} (f')^2 + \frac{a^2}{2r^2} \sin^2 f + \frac{1}{2} (\chi')^2 + V \right]. \quad (7.69)$$

Para implementar o algoritmo BPS, neste estágio, é cabível introduzir os potenciais auxiliares $U = U(g)$ e $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\chi)$, conforme podemos ver à abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} = 2\pi \int r dr & \left[\frac{G}{2} \left(B \mp \sqrt{\frac{2U}{G}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(f' \mp \frac{a}{r} \sin f \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\chi' \mp \frac{\mathcal{W}_\chi}{r} \right)^2 \right. \\ & \left. \pm \left(B\sqrt{2UG} + \frac{a}{r} f' \sin f + \frac{\mathcal{W}_\chi \chi'}{r} \right) + V - U - \frac{\mathcal{W}_\chi^2}{2r^2} \right], \end{aligned} \quad (7.70)$$

sendo $\mathcal{W}_\chi = \partial_\chi \mathcal{W}$. Observe em (7.70) que o quarto termo entre parênteses pode ser reescrito na forma

$$\pm \left(B\sqrt{2UG} + \frac{a}{r} f' \sin f + \frac{\mathcal{W}_\chi \chi'}{r} \right) = \mp \frac{1}{r} \left(a' \sqrt{2UG} + a (\cos f)' - \mathcal{W}' \right). \quad (7.71)$$

Além disso, introduzindo a relação

$$\left(\sqrt{2UG}\right)' = (\cos f)', \quad (7.72)$$

a partir da qual estabelecemos o potencial auxiliar

$$U = \frac{\cos^2 f}{2G}, \quad (7.73)$$

em que temos fixado a constante de integração igual a zero por conveção, a expressão (7.71) é reduzida simplesmente a uma derivada total,

$$\pm B\sqrt{2UG} \pm \frac{a}{r}f' \sin f \pm \frac{\mathcal{W}_\chi \chi'}{r} = \mp \frac{1}{r}(a \cos f - \mathcal{W})'. \quad (7.74)$$

Adicionalmente, podemos cancelar os três últimos termos em (7.70), obtendo o potencial autodual

$$V = U + \frac{\mathcal{W}_\chi^2}{2r^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos^2 f}{G} + \frac{\mathcal{W}_\chi^2}{r^2} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{(\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi})^2}{G} + \frac{\mathcal{W}_\chi^2}{r^2} \right]. \quad (7.75)$$

Dessa maneira, o funcional de energia (7.70) é conduzido a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= \mathbb{E}_{BPS} + \pi \int r dr \left[G \left(B \mp \sqrt{\frac{2U}{G}} \right)^2 + \left(f' \mp \frac{a}{r} \sin f \right)^2 + \left(\chi' \mp \frac{\mathcal{W}_\chi}{r} \right)^2 \right] \\ &\geq \mathbb{E}_{BPS}, \end{aligned} \quad (7.76)$$

em que definimos a energia BPS

$$\mathbb{E}_{BPS} = 2\pi \int r dr \mathcal{E}_{BPS}, \quad (7.77)$$

com a densidade

$$\mathcal{E}_{BPS} = \mathcal{E}_\Sigma + \mathcal{E}_\chi \quad (7.78)$$

dada em termos das contribuições do setor sigma calibrado e do setor escalar χ , respectivamente,

$$\mathcal{E}_\Sigma = \mp \frac{1}{r}(a \cos f)', \quad \mathcal{E}_\chi = \pm \frac{1}{r}\mathcal{W}'. \quad (7.79)$$

O limite inferior de energia é atingido quando as equações de primeira ordem

$$B = \pm \sqrt{\frac{2U}{G}} = \pm \frac{\cos f}{G}, \quad (7.80)$$

$$f' = \pm \frac{a}{r} \sin f, \quad (7.81)$$

$$\chi' = \pm \frac{\mathcal{W}_\chi}{r} \quad (7.82)$$

são verificadas. O sinal superior (inferior) refere-se ao vórtice (antivórtice).

É importante mencionar que a contribuição cinética do campo escalar χ em (7.50) demanda um termo extra no potencial, o qual passa a depender explicitamente da

coordenada radial, segundo mostrado em (7.75). De fato, isso é necessário para fechar o formalismo BPS (de acordo mostrado em [86]) e recuperar o teorema de Derrick-Hobart [87, 88]. Ademais, a equação BPS (7.82) não envolve os outros campos. Por tal razão, o superpotencial \mathcal{W} pode ser selecionado para fitar vários cenários de interesse físico. A mesma coisa acontece com a função dielétrica em (7.80), uma vez que nós ainda não fixamos nenhuma forma explícita para ela. Portanto, a energia BPS total é dada por

$$\mathbb{E}_{BPS} = 2\pi \int_0^{2\pi} r dr \mathcal{E}_{BPS} = \pm 2\pi (n + \Delta\mathcal{W}), \quad (7.83)$$

com $\Delta\mathcal{W} = \mathcal{W}(r \rightarrow \infty) - \mathcal{W}(0)$. Em particular, a última contribuição clarifica a definição (7.56) uma vez que a carga topológica Q_{top}^χ irá depender somente das condições de contorno.

Mesmo que não tenhamos escolhido ainda as formas explícitas para \mathcal{W} e G , enfatizamos que a energia acima depende apenas das condições de contorno impostas sobre \mathcal{W} , além do *winding number*, obviamente. A seguir, vamos discutir um interessante caso para o superpotencial \mathcal{W} , considerando em sequência três diferentes tipos de meios dielétricos como exemplos.

7.2.3 Soluções Autoduais

Nesta seção, nós vamos considerar novamente o sistema BPS precedente, levando em conta o superpotencial \mathcal{W} que suporta solução tipo kink no setor escalar χ ,

$$\mathcal{W}(\chi) = \sigma\chi - \frac{\sigma}{3}\chi^3, \quad (7.84)$$

sendo σ um parâmetro positivo que controla a largura do kink. Essa proposição tem sido investigada em vários contextos. Em particular, para $\sigma = 1$, configurações tipo skyrmions foram tratadas em [89, 90], férmions de Dirac sem massa foram estudados em [91] e vórtices com estrutura interna também foram discutidos em [30, 31]. Além disso, para valores arbitrários de σ , configurações de vórtices multianelares foram abordadas em [92]. Com a escolha (7.84), a equação de primeira ordem (7.82) toma a forma

$$\chi' = \pm \frac{\sigma}{r} (1 - \chi^2), \quad (7.85)$$

fornecendo a solução analítica (consoante ilustrado na Figura 33)

$$\chi(r) = \pm \frac{r^{2\sigma} - r_0^{2\sigma}}{r^{2\sigma} + r_0^{2\sigma}}, \quad (7.86)$$

em que r_0 é uma constante de integração identificada como uma distância característica onde $\chi(r_0) = 0$. Perceba que agora estamos hábeis para dizer quais são as condições de contorno para χ , ou seja, $\chi(0) = \mp 1$ e $\chi(r \rightarrow \infty) = \pm 1$. Além disso, a Figura 33 mostra que o kink se torna menos localizado quando σ cresce. Vale a pena mencionar que a escolha (7.86) é pertinente, pelo menos para a maioria dos sistemas obedecendo ao modelo de

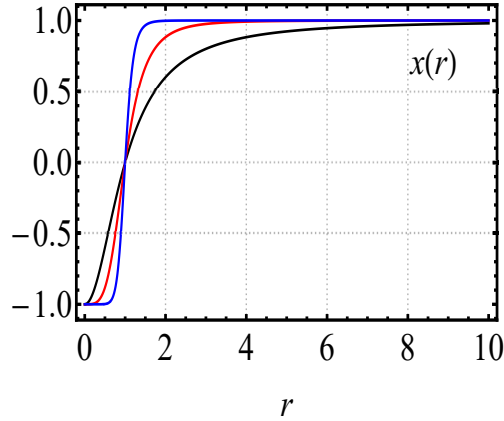


Figura 33 – Campo escalar $\chi(r)$ tipo - kink. Escolhemos o centro da parede de domínio em $r_0 = 1$. Adotamos a cor preta para $\sigma = 1$, a cor vermelha para $\sigma = 2$ e a cor azul para $\sigma = 5$.

Ising, no qual o campo χ pode ser interpretado como o campo médio de magnetização [93]. Sob tais considerações, encontramos a energia BPS total a partir de (7.83), a saber

$$E_{BPS} = 2\pi \left(|n| + \frac{4}{3}\sigma \right), \quad (7.87)$$

com a primeira parcela surgindo do setor sigma calibrado e associada ao fluxo magnético quantizado,

$$\Phi = \int d^2x B = 2\pi |n|, \quad (7.88)$$

e a segunda decorrendo do campo escalar neutro χ . Podemos ainda relacionar os dois termos em (7.87) com as cargas topológicas dos respectivos setores de sigma calibrado e χ . De fato, para o mínimo assimétrico, (7.55) nos dá

$$Q_{top}^{(\Sigma)} = n. \quad (7.89)$$

Ademais, substituindo a equação BPS (7.82) em (7.56) chegamos a

$$Q_{top}^{(\chi)} = \frac{4}{3}\sigma, \quad (7.90)$$

como tinha que ser.

Adiante, iremos analisar o primeiro meio dielétrico que selecionamos.

7.2.3.1 Primeiro Cenário

Vamos focar agora a nossa atenção para tratar da seguinte função dielétrica:

$$G(\chi) = \frac{1}{1 - \chi^2} = \frac{(r^{2\sigma} + r_0^{2\sigma})^2}{4r^{2\sigma}r_0^{2\sigma}}, \quad (7.91)$$

em que já assumimos o campo fonte (7.86). Veja que quando $r \rightarrow \infty$, χ^2 tende a unidade, gerando uma divergência em $G(\chi)$. Porém, a forma do campo magnético sana essa

dificuldade, haja vista que ele se anula no infinito, mantendo o primeiro termo em (7.69) sempre regular.

Dentro deste cenário, analisamos apenas o caso no qual $\sigma = 1$, posto que para $\sigma \geq 2$ não encontramos soluções fisicamente aceitáveis satisfazendo as condições de contorno. Dessa forma, a função dielétrica (7.91) torna-se

$$G(\chi) = \frac{(r^2 + r_0^2)^2}{4r^2 r_0^2}, \quad (7.92)$$

permitindo-nos reapresentar as equações de primeira ordem (7.80) e (7.81) como

$$\frac{a'}{r} = \mp \frac{4r^2 r_0^2}{(r^2 + r_0^2)^2} \cos f, \quad (7.93)$$

$$f' = \pm \frac{a}{r} \sin f, \quad (7.94)$$

respectivamente.

7.2.3.2 Perfis Assintóticos dos Campos

É interessante exibir os comportamentos das soluções das equações BPSs (7.93) e (7.94) nas vizinhanças das fronteiras. Perto da origem, temos as séries (doravante usaremos somente o sinal superior, $n > 0$)

$$\begin{aligned} a(r) \approx & n - \frac{r^4}{r_0^2} + \frac{4r^6}{3r_0^4} - \frac{3r^8}{2r_0^6} + \frac{(f_n)^2 r^{2n+4}}{(n+2)r_0^2} - \frac{2(f_n)^2 r^{2n+6}}{(n+3)r_0^4} + \\ & - \frac{(f_n)^4 r^{4n+4}}{8(n+1)r_0^2} + \dots, \end{aligned} \quad (7.95)$$

$$\begin{aligned} f(r) \approx & f_n r^n - \frac{f_n r^{n+4}}{4r_0^2} + \frac{2f_n r^{n+6}}{9r_0^4} - \frac{(f_n)^3 r^{3n}}{12} + \\ & + \frac{(n^2 + 4n + 12)(f_n)^3 r^{3n+4}}{16(n+2)^2 r_0^2} + \frac{(f_n)^5 r^{5n}}{80} - \frac{(f_n)^7 r^{7n}}{448} + \dots, \end{aligned} \quad (7.96)$$

em que f_n é um parâmetro positivo a ser determinado numericamente. Podemos ainda mostrar os comportamentos dos correspondentes campo magnético e densidade de energia

$$\begin{aligned} B(r) \approx & \frac{4r^2}{r_0^2} - \frac{8r^4}{r_0^4} + \frac{12r^6}{r_0^6} - \frac{2(f_n)^2 r^{2n+2}}{r_0^2} + \frac{4(f_n)^2 r^{2n+4}}{r_0^4} + \\ & + \frac{(f_n)^4 r^{4n+2}}{2r_0^2} + \dots, \end{aligned} \quad (7.97)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\Sigma(r) \approx & n^2 (f_n)^2 r^{2n-2} + \frac{4r^2}{r_0^2} - \frac{8r^4}{r_0^4} - \frac{n^2 (f_n)^4 r^{4n-2}}{2} + \frac{3n^2 (f_n)^6 r^{6n-2}}{16} + \\ & - \frac{(n^2 + 4n + 8)(f_n)^2 r^{2n+2}}{2r_0^2} + \dots \end{aligned} \quad (7.98)$$

Note que o campo magnético tende zero no centro do defeito, tal como ocorre com os vórtices eletricamente carregados [13]. Já para o infinito, temos os seguintes comportamentos

$$a(r) \approx 2r_0 C_\infty r^{-2r_0}, \quad (7.99)$$

$$f(r) \approx \frac{\pi}{2} - C_\infty r^{-2r_0}, \quad (7.100)$$

sendo C_∞ uma constante positiva, cujos valores dependem do *winding number*. Lembremos que o perfil assintótico do campo de calibre no modelo sigma original [29] segue a lei de decaimento exponencial, analogamente aos vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen [6, 9]. Todavia, neste caso, vemos que o meio dielétrico tem mudado esse típico comportamento. O campo magnético, por sua vez, obedece a uma lei de potência da forma

$$B(r) \approx \frac{4C_\infty r_0^2}{r^{2+2r_0}}, \quad (7.101)$$

ao passo que a densidade de energia ε_Σ se comporta consoante a

$$\mathcal{E}_\Sigma(r) \approx \frac{8(C_\infty)^2 r_0^2}{r^{2+4r_0}}, \quad (7.102)$$

para qualquer valor de n .

7.2.3.3 Gráfico das Soluções Numéricas

Nesta subseção, esboçamos as soluções numéricas do sistema BPS (7.93) e (7.94), obedecendo às condições de contorno (7.62) e (7.63) para alguns valores de n e r_0 .

É ilustrado na Figura 34a o comportamento do campo sigma $f(r)$, ao passo que a 34b mostra a forma campo de calibre $a(r)$. Notemos que ambos os perfis são bem comportados, à exemplo do modelo sigma original [29], salvo pelo fato de que agora o campo de calibre apresenta a formação de *plateaus* (do inglês, *platôs*) estendendo-se a partir da origem, cujos comprimentos aumentam à proporção que r_0 cresce. Isso, obviamente,

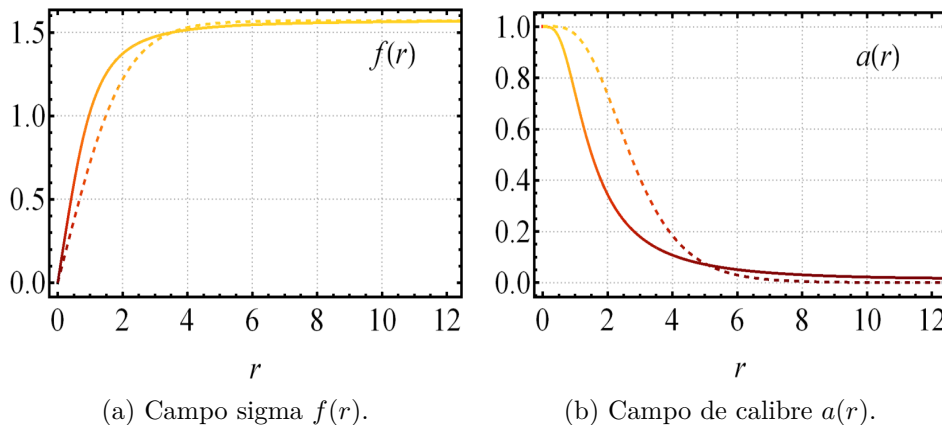


Figura 34 – Todas as curvas referem-se a $n = 1$. A linha contínua corresponde a $r_0 = 1$, enquanto a traceja, a $r_0 = 5$.

têm influência direta nas mudanças dos perfis do campo magnético, conforme apresentado na figura 35.

A Figura 35 nos mostra o comportamento do campo magnético. Diferentemente do caso original na ausência do meio dielétrico [29], o campo magnético é nulo em $r = 0$ e o perfil ganha o formato de um anel centrado na origem. Considerando um dado valor fixo r_0 , existe um *winding number* associado $n_0^{(B)}$ (por exemplo, $n_0^{(B)} = 8$ na figura 35a) permitindo-nos caracterizar os comportamentos dos perfis. Para $n \leq n_0^{(B)}$, a máxima amplitude, localizada em $r = r^* \leq r_0$, aumenta e, ao mesmo tempo, afasta-se da origem à medida que n cresce, atingindo seu valor máximo igual à unidade em $n = n_0^{(B)}$ e em $r = r_0$. Por outro lado, para n fixo e r_0 variando, o máximo do anel decresce com o aumento de r_0 , consoante ilustra a Figura 35b. Para melhor visualização, a Figura 36 ilustra um gráfico de cores indicando a distribuição anelar do campo magnético.

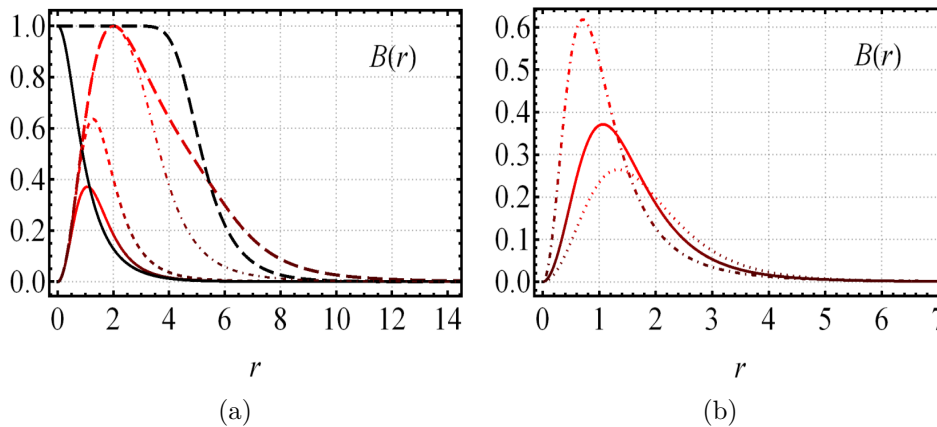


Figura 35 – Gráficos do campo magnético $B(r)$. São mostrados perfis tanto na presença (linhas coloridas), quanto na ausência (linhas pretas) do meio dielétrico. À esquerda, nós adotamos $r_0 = 1$, $n = 1$ (linha contínua), $n = 2$ (linha tracejada), $n = 8$ (linha ponto-tracejada) e $n = 15$ (linha longo-tracejada). À direita, escolhemos $n = 1$, $r_0 = 1$ (linha ponto-tracejada), $r_0 = 2$ (linha contínua), $r_0 = 3$ (linha pontilhada).



Figura 36 – Gráfico de cores representando a intensidade do campo magnético. Em ambas as figuras, adotamos $n = 1$, com $r_0 = 1$ (i) e $r_0 = 2$ (ii).

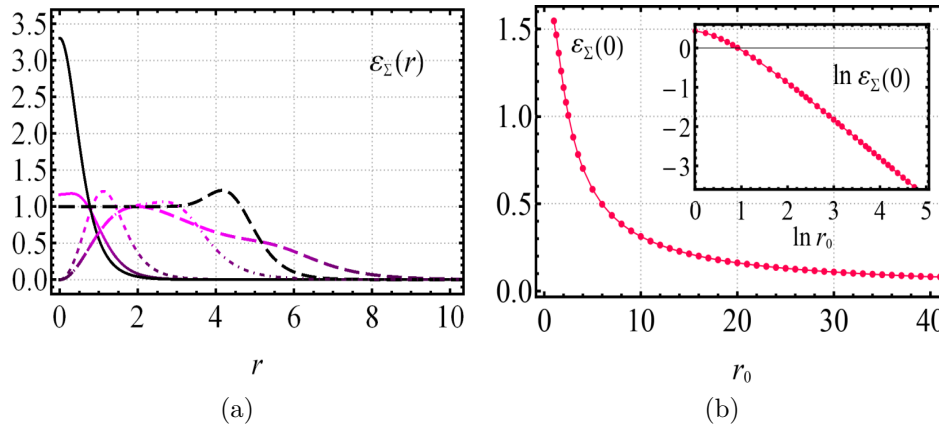


Figura 37 – Esboço da densidade de energia $\mathcal{E}_\Sigma(r)$. Mostramos perfis obtidos na presença (linhas coloridas), bem como na ausência do meio dielétrico (linhas pretas). Na Figura 37a, as convenções são as mesmas da Figura 35a. Quanto à Figura 37b, esta apresenta a curva de $\mathcal{E}_\Sigma(0)$ v.s. r_0 , ao passo que a inserção, de $\ln \mathcal{E}_\Sigma(0)$ v.s. $\ln r_0$.

Esboçamos ainda na Figura 37 a densidade de energia $\mathcal{E}_\Sigma(r)$. Em particular, a Figura 37a mostra que o perfil de $\mathcal{E}_\Sigma(r)$ é não nulo na origem para r_0 fixo e $n = 1$, possuindo um formato tipo *lump* com centro ligeiramente descolado de $r = 0$. Entretanto, para r_0 ainda fixo e $n \geq 2$, todas as curvas são nulas em $r = 0$ e adquirem formatos de anéis. Ademais, na Figura 37b, podemos observar que, para $n = 1$, os valores de $\mathcal{E}_\Sigma(0) = f_1^2$ diminuem conforme r_0 aumenta, de tal modo que, para valores suficientemente grandes de r_0 , $\mathcal{E}_\Sigma(0)$ decai como r_0^{-1} (veja a inserção).

7.2.4 Segundo Cenário

Nesta subseção, iremos investigar um segundo tipo de meio dielétrico, o qual é mapeado pela função

$$G(\chi) = \frac{1}{\chi^2} = \frac{(r^{2\sigma} + r_0^{2\sigma})^2}{(r^{2\sigma} - r_0^{2\sigma})^2}, \quad (7.103)$$

de maneira que o kink $\chi(r)$ é dado em (7.86). Diferentemente do caso anterior, a divergência ocorre em $r = r_0$, pois é onde o campo escalar χ se anula. Entretanto, para evitar tal singularidade no primeiro termo de (7.69), o campo magnético deve ser necessariamente zero nesse ponto, revelando uma forte influência da estrutura interna sobre os perfis das soluções. É fácil perceber isso previamente se considerarmos a equação (7.103) avaliada em (7.80), a saber

$$B(r) = \pm \frac{(r^{2\sigma} - r_0^{2\sigma})^2}{(r^{2\sigma} + r_0^{2\sigma})^2} \cos f, \quad (7.104)$$

donde segue prontamente $B(r_0) = 0$. O sistema de equações BPSs que descreve esses novos sólitons é dado por

$$\frac{a'}{r} = \mp \frac{(r^{2\sigma} - r_0^{2\sigma})^2}{(r^{2\sigma} + r_0^{2\sigma})^2} \cos f, \quad (7.105)$$

$$f' = \pm \frac{a}{r} \sin f, \quad (7.106)$$

decorrendo de (7.81) e (7.104).

7.2.4.1 Perfis Assintóticos dos Campos

Vale a pena considerar os comportamentos dos campos oriundos de (7.105) e (7.106) nas proximidades das fronteiras. Para $r \rightarrow 0$, temos as séries para potencial vetor e para o campo sigma, respectivamente (sinal superior, $n > 0$),

$$\begin{aligned} a(r) \approx & n - \frac{r^2}{2} + \frac{(f_n)^2 r^{2n+2}}{4(n+1)} - \frac{(f_n)^2 r^{2n+4}}{8(n+2)} + \frac{2r^{2\sigma+2}}{(\sigma+1)r_0^{2\sigma}} - \frac{4r^{4\sigma+2}}{(2\sigma+1)r_0^{4\sigma}} + \\ & - \frac{(f_n)^2 r^{2n+2\sigma+2}}{(n+\sigma+1)r_0^{2\sigma}} - \frac{(f_n)^4 r^{4n+2}}{16(2n+1)} + \dots, \end{aligned} \quad (7.107)$$

$$\begin{aligned} f(r) \approx & f_n r^n - \frac{f_n r^{n+2}}{4} + \frac{f_n r^{n+4}}{32} - \frac{(f_n)^3 r^{3n}}{12} + \frac{(n^2 + 2n + 3)(f_n)^3 r^{3n+2}}{16(n+1)^2} + \\ & + \frac{(f_n)^5 r^{5n}}{80} + \frac{f_n r^{n+2\sigma+2}}{(\sigma+1)^2 r_0^{2\sigma}} + \dots, \end{aligned} \quad (7.108)$$

sendo f_n uma constante positiva. Além disso, os respectivos campo magnético e densidade de energia são dados como

$$\begin{aligned} B(r) \approx & 1 - \frac{(f_n)^2 r^{2n}}{2} + \frac{(f_n)^2 r^{2n+2}}{4} - \frac{4r^{2\sigma}}{r_0^{2\sigma}} + \frac{8r^{4\sigma}}{r_0^{4\sigma}} + \frac{2(f_n)^2 r^{2n+2\sigma}}{r_0^{2\sigma}} + \\ & + \frac{(f_n)^4 r^{4n}}{8} + \dots, \end{aligned} \quad (7.109)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\Sigma(r) \approx & 1 + n^2 (f_n)^2 r^{2n-2} - \frac{(n^2 + 2n + 2)(f_n)^2 r^{2n}}{2} \frac{4r^{2\sigma}}{r_0^{2\sigma}} - \frac{n^2 (f_n)^4 r^{4n-2}}{2} + \\ & + \frac{16\sigma^2 r^{4\sigma-2}}{r_0^{4\sigma}} + \dots, \end{aligned} \quad (7.110)$$

Por outro lado, temos os seguintes comportamentos no infinito para os campos de calibre $a(r)$ e sigma $f(r)$,

$$a(r) \approx \mathcal{C}_\infty r^{1/2} e^{-r}, \quad (7.111)$$

$$f(r) \approx \frac{\pi}{2} - \mathcal{C}_\infty r^{-1/2} e^{-r}, \quad (7.112)$$

em que \mathcal{C}_∞ é uma constante positiva. É interessante sublinhar aqui que os comportamentos assintóticos de (7.111) e (7.112) são parecidos com aqueles de Abrikosov-Nielsen-Olesen [6,9].

Em outras palavras, a presença deste meio dielétrico não afeta o decaimento exponencial do modelo sigma original [29]. Adicionalmente, computamos ainda os comportamentos no infinito tanto do campo magnético, quanto da densidade de energia $\mathcal{E}_\Sigma(r)$, ou seja,

$$B(r) \approx C_\infty r^{-1/2} e^{-r}, \quad (7.113)$$

$$\mathcal{E}_\Sigma(r) \approx 2(C_\infty)^2 r^{-1} e^{-2r}. \quad (7.114)$$

7.2.4.2 Gráfico das Soluções Numéricas

Nós calculamos ainda as soluções numéricas do sistema autodual (7.105) e (7.106), sob as condições de contorno (7.62) e (7.63), e as esboçamos graficamente.

A Figura 38a mostra o comportamento do campo sigma, enquanto a Figura 38b, do campo de calibre. Em ambos os perfis, a escolha $\sigma = 1$ é suficiente para notar as principais características. No gráfico do potencial vetor, é possível verificar a formação de pequenos *plateaus* localizados nas proximidades de r_0 , o que implica em significativas mudanças no comportamento do campo magnético.

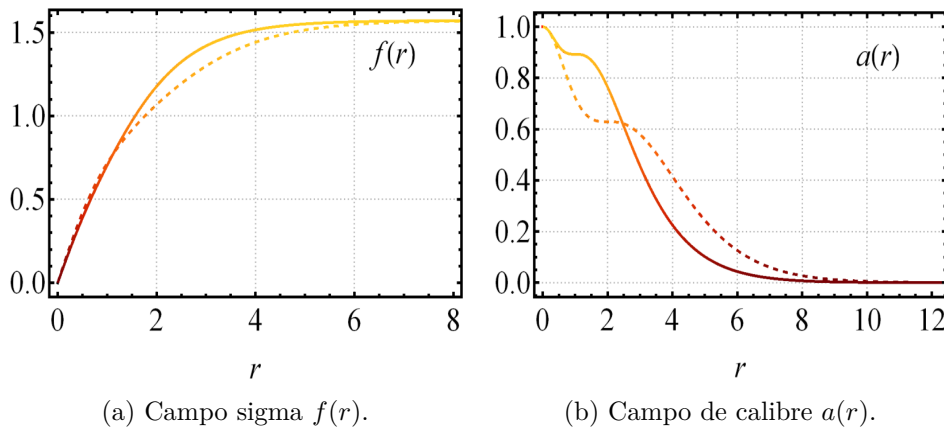


Figura 38 – Perfis de $f(r)$ (a) e $a(r)$ (b) para $n = 1$ e $\sigma = 1$, sendo $r_0 = 1$ (linha contínua) e $r_0 = 2$ (linha tracejada).

O campo magnético é exibido na Figura 39 para diferentes valores de r_0 e σ . Ao contrário do cenário anterior, vemos que o meio dielétrico causa um segundo máximo em $r^* > r_0$, cuja amplitude é menor do que aquela localizada na origem. Os perfis encontrados são similares aos de Abrikosov-Nielsen-Olesen [6, 9] no intervalo $0 \leq r \leq r_0$ e aos de Chern-Simons-Higgs [13, 15] para $r > r_0$. Alternativamente, a Figura 40 mostra um gráfico de cores destacando os efeitos dos parâmetros r_0 e σ na distribuição do campo magnético. Perceba que r_0 controla o tamanho interno das estruturas, enquanto σ regula o tamanho do núcleo e o máximo do anel externo circundando-o.

Na Figura 41, apresentamos os gráficos da densidade de energia $\mathcal{E}_\Sigma(r)$. A Figura 41a indica que para $n = 1$ os perfis são *lumps* centrados na origem, cuja amplitude

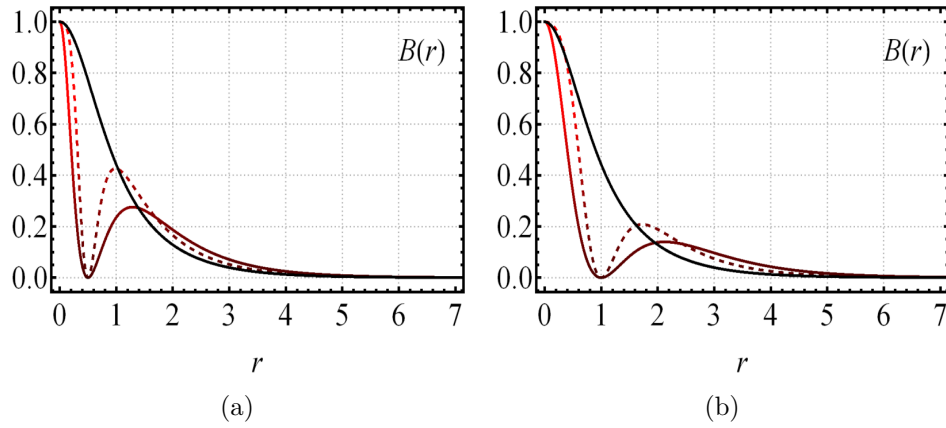


Figura 39 – Perfis do campo magnético na presença (linha colorida) e na ausência (linha preta) do meio dielétrico (7.103), todos com $n = 1$. Para o caso com meio dielétrico, adotamos $r_0 = 0.5$ (a) e $r_0 = 1$ (b), sendo $\sigma = 1$ (linha contínua) e $\sigma = 2$ (linha tracejada).

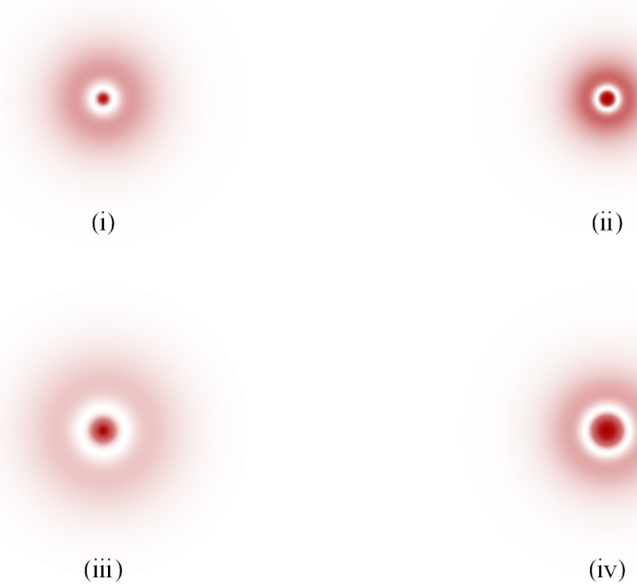


Figura 40 – Gráfico de cores do campo magnético $B(r)$, com $r_0 = 0.5$, $\sigma = 1$ (i) e $\sigma = 2$ (ii); e com $r_0 = 1$, $\sigma = 1$ (iii) e $\sigma = 2$ (iv).

$\mathcal{E}_\Sigma(0) = 1 + (f_1)^2$ aumenta à taxa que r_0 cresce, até que, para valores suficientemente grandes de r_0 (veja a inserção), a amplitude satura atingindo o correspondente valor do modelo sigma original [29] (linha preta). Contudo, para $n \geq 2$, sempre teremos $\mathcal{E}_\Sigma(0) = 1$, segundo ilustrado na Figura 41b. Para um r_0 fixo e crescentes valores de n , notamos que as curvas adquirem um mínimo local em $r^* < r_0$, o qual torna-se nulo e permanece localizado em $r^* = r_0$ para todo $n \geq n^*$ (por exemplo, $n^* = 5$ na Figura 41b).

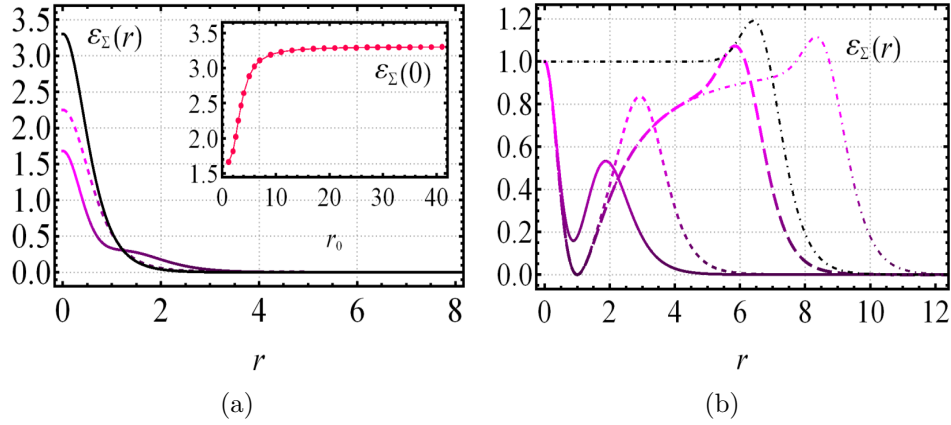


Figura 41 – Perfis da densidade de energia $\mathcal{E}_\Sigma(r)$ na presença (linha colorida), fixando $\sigma = 1$, e na ausência (linha preta) do meio dielétrico (7.103). A Figura 41a foi construída usando $n = 1$, $r_0 = 1$ (linha contínua) e $r_0 = 3$ (linha tracejada); na inserção, fizemos o gráfico de $\mathcal{E}_\Sigma(0)$ vs. r_0 com $n = 1$. A Figura 41b exibe os perfis para $r_0 = 1$, com $n = 2$ (linha contínua), $n = 5$ (linha tracejada), $n = 20$ (linha longo-tracejada) e $n = 30$ (linha ponto-tracejada).

7.2.5 Terceiro Cenário

Motivados pela referência [92], agora nós consideramos a seguinte função dielétrica

$$G(\chi) = \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2 + \cos^2(m\pi\chi)}, \quad (7.115)$$

em que $m \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Notemos que para grandes valores de λ , a função dielétrica tende a um, $G(\chi) \rightarrow 1$, o que significa recuperar o modelo sigma usual.

Similarmente aos dois casos prévios, podemos reescrever o sistema de equações BPs (7.80) e (7.81), levando em conta (7.115), respectivamente,

$$\frac{a'}{r} = \mp \frac{\lambda^2 + \cos^2\left(m\pi \frac{r^{2\sigma} - r_0^{2\sigma}}{r^{2\sigma} + r_0^{2\sigma}}\right)}{1 + \lambda^2} \cos f, \quad (7.116)$$

$$f' = \pm \frac{a}{r} \sin f, \quad (7.117)$$

cujas soluções perante às condições de contorno (7.62) e (7.63) nos fornecem os sólitons do corrente cenário.

7.2.5.1 Perfis Assintóticos dos Campos

Faz-se útil considerar as análises assintóticas das soluções. Perto da origem, os campos de calibre e sigma se comportam como (para $n > 1$, sem perda de generalidade)

$$a(r) \approx n - \frac{r^2}{2} + \frac{(f_n)^2 r^{2n+2}}{4(n+1)} + \frac{2m^2 \pi^2 r^{4\sigma+2}}{(2\sigma+1)(\lambda^2+1)r_0^{4\sigma}} + \dots, \quad (7.118)$$

$$f(r) \approx f_n r^n - \frac{f_n r^{n+2}}{4} - \frac{(f_n)^3 r^{3n}}{12} + \frac{m^2 \pi^2 f_n r^{n+4\sigma+2}}{(2\sigma+1)^2 (\lambda^2+1) r_0^{4\sigma}} + \dots, \quad (7.119)$$

em que f_n é um número real positivo. Além disso, os comportamentos dos relativos campo magnético e densidade de energia são dados por:

$$B(r) \approx 1 - \frac{(f_n)^2}{2} r^{2n} + \frac{4m^2 \pi^2 r^{4\sigma}}{(\lambda^2 + 1)r_0^{4\sigma}} + \dots, \quad (7.120)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\Sigma(r) \approx & 1 + n^2 (f_n)^2 r^{2n-2} - \frac{(n^2 + 2n + 2)(f_n)^2 r^{2n}}{2} \\ & - \frac{n^2 (f_n)^4 r^{4n-2}}{2} - \frac{4m^2 \pi^2 r^{4\sigma}}{(\lambda^2 + 1)r_0^{4\sigma}} + \dots \end{aligned} \quad (7.121)$$

Já para $r \rightarrow \infty$, curiosamente, os perfis assintóticos coincidem com aqueles calculados em (7.111)-(7.114), em sequência. No que segue, apresentaremos os gráficos numéricos para dois subcasos interessantes: $\lambda = 0$ e $\lambda \neq 0$, a fim de descartar a influência desse novo parâmetro sobre as soluções.

7.2.5.2 Gráfico das Soluções Numéricas

7.2.5.2.1 O caso mais simples: $\lambda = 0$

Fazemos aqui uma discussão gráfica das soluções numéricas do sistema BPS (7.116)-(7.117), sob as condições de contorno (7.62) e (7.63), para o caso $\lambda = 0$, no qual os efeitos da estrutura interna são mais evidentes.

A Figura 42 esboça o perfil do campo sigma $f(r)$ no primeiro setor topológico. Para σ e m constantes (por exemplo, $\sigma = m = 1$, Fig. 42a), as linhas de $f(r)$ se localizam mais à medida que r_0 aumenta. O mesmo efeito, porém menos pronunciado, ocorre quando σ cresce com r_0 e m fixos (por exemplo, $r_0 = 1$ e $m = 2$, Fig. 42b). Os efeitos de m sobre as curvas de $f(r)$ não são muito apreciáveis.

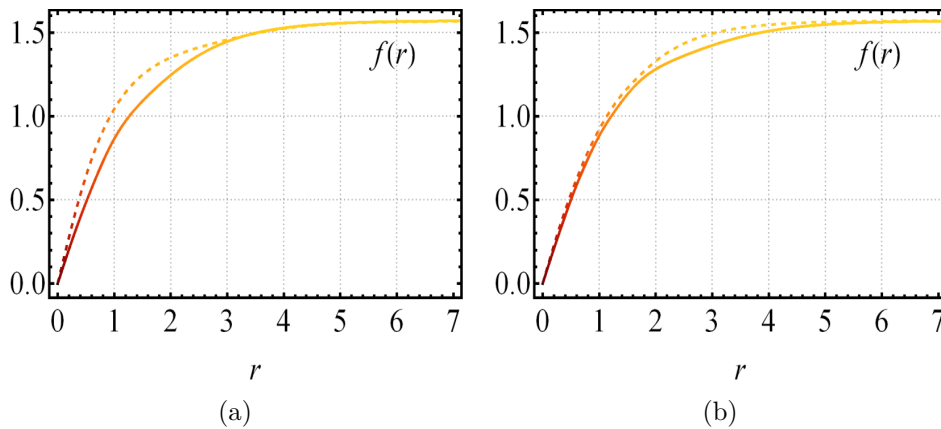


Figura 42 – Gráficos do campo sigma $f(r)$ para $n = 1$ e $\lambda = 0$. Na Fig. 42a, usamos $\sigma = 1$ e $m = 1$, sendo $r_0 = 1$ (linha contínua) e $r_0 = 5$ (linha tracejada). Já na Fig. 42b, adotamos $r_0 = 1$ e $m = 2$, sendo $\sigma = 1$ (linha sólida) e $\sigma = 2$ (linha tracejada).

Na Figura 43, destacamos os papéis desempenhados pelos parâmetros m , σ e r_0 : o primeiro parâmetro provoca o surgimento de $2m$ -plateaus nos perfis do campo de calibre; enquanto o segundo e o terceiro, à medida que crescem, tornam o defeito mais localizado em torno da origem (compare as Figs. 43a e 43b).

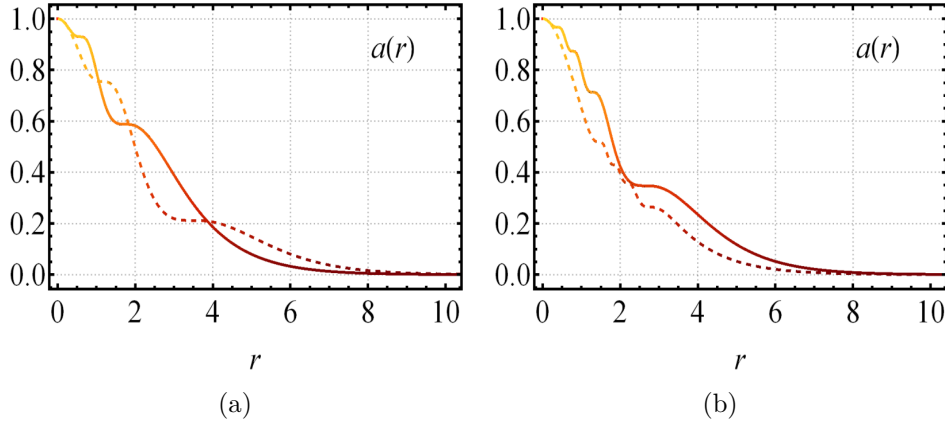


Figura 43 – Perfis do campo de calibre $a(r)$ com os valores fixos $n = 1$ e $\lambda = 0$. Na Fig. 43a, escolhemos $\sigma = 1$ e $m = 1$, sendo $r_0 = 1$ (linha contínua) e $r_0 = 2$ (linha tracejada). Na Fig. 43b, as curvas foram obtidas com os valores $r_0 = 1$ e $m = 2$, sendo $\sigma = 1$ (linha contínua) e $\sigma = 3$ (linha tracejada).

A Figura 44 ilustra o comportamento do campo magnético para distintos valores

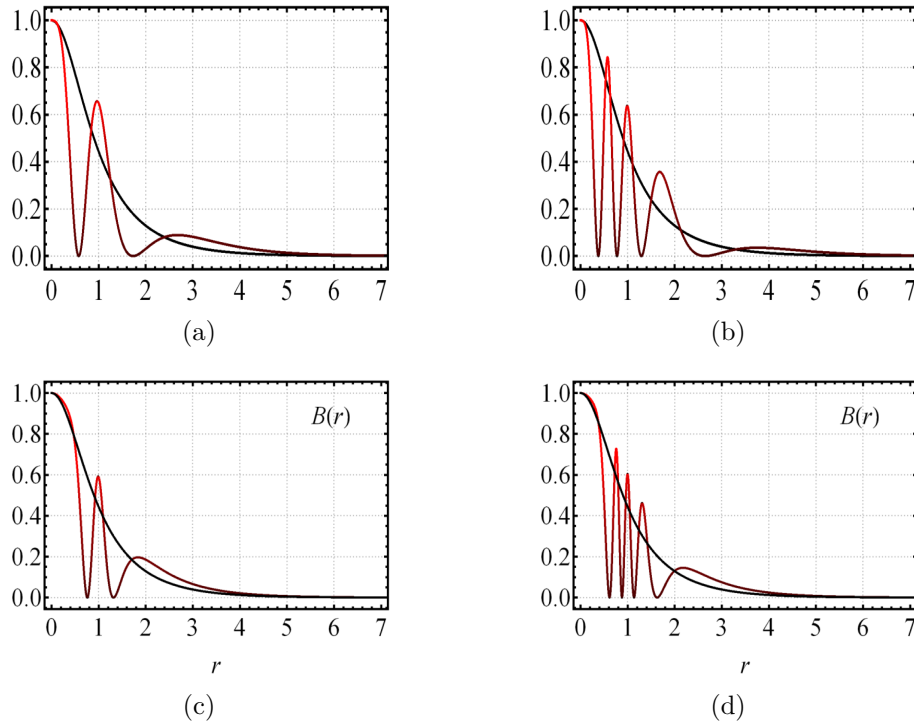


Figura 44 – Perfis do campo magnético na presença (linha colorida) e na ausência (linha preta) do meio dielétrico (7.115). Nós usamos $\lambda = 0$, $n = 1$ e $r_0 = 1$, sendo $\sigma = 1$ ((a) e (b)), $\sigma = 2$ ((c) e (d)), $m = 1$ ((a) e (c)) e $m = 2$ ((b) e (d)).

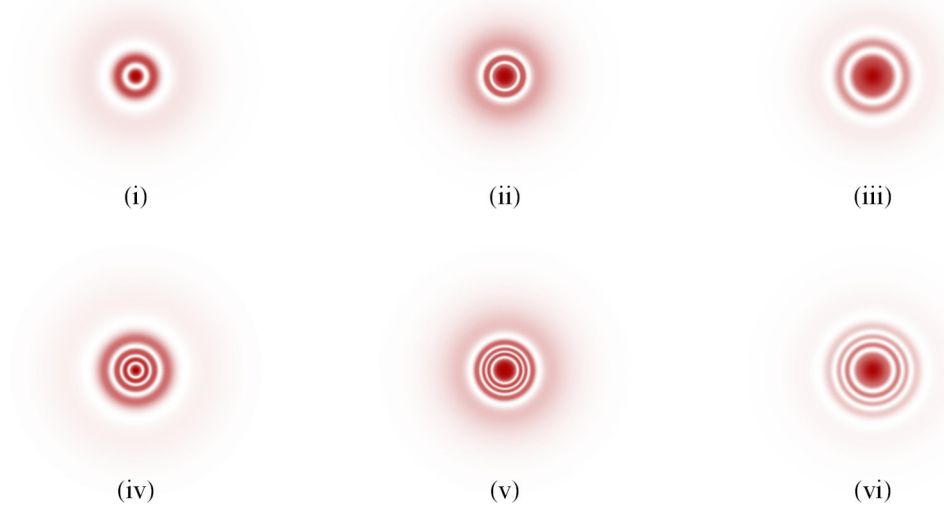


Figura 45 – Gráfico de cores do campo magnético, com $n = 1$ e $\lambda = 0$. Para $m = 1$, consideramos: $r_0 = 1$, sendo $\sigma = 1$ (i) e $\sigma = 2$ (ii), e $r_0 = 2$, sendo $\sigma = 2$ (iii); e para $m = 2$ usamos: $r_0 = 1$, sendo $\sigma = 1$ (iv) e $\sigma = 2$ (v), e $r_0 = 2$, sendo $\sigma = 2$ (vi).

dos parâmetros r_0 , σ e m , comparando-o com o correspondente perfil do modelo sigma original (linha preta). Analogamente aos casos anteriores, percebemos aqui que r_0 controla a intensidade e a largura das estruturas, enquanto o raio dos respectivos núcleos aumentam quando σ cresce. Ademais, o parâmetro adicional m , associado à geração de $2m$ -plateaus nos perfis do campo de calibre, determina aqui a formação de m anéis em torno do núcleo do vórtice, conforme podemos perceber na Figura 45.

Os efeitos de r_0 e σ sobre a densidade de energia $\mathcal{E}_\Sigma(r)$ são semelhantes (apesar

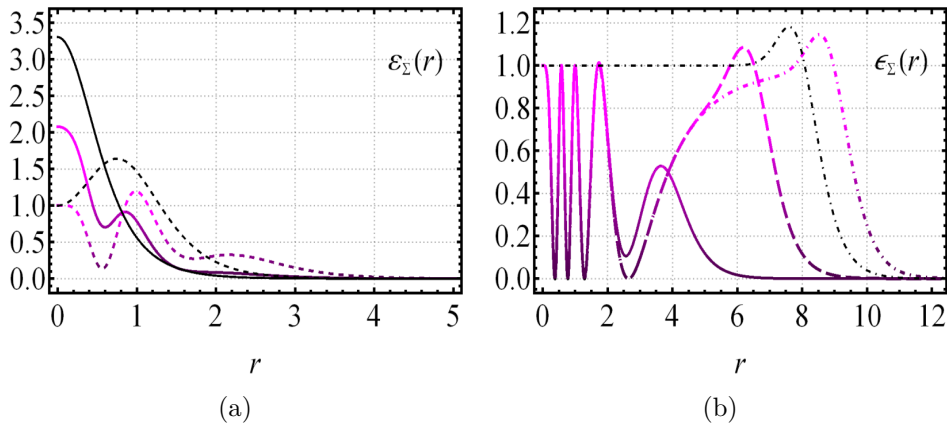


Figura 46 – Perfis da densidade de energia $\mathcal{E}_\Sigma(r)$ na presença (linha colorida) e na ausência (linha preta) do meio dielétrico (7.115), adotando $\lambda = 0$, $\sigma = 1$ e $r_0 = 1$. Na Figura 46a, usamos ainda $m = 1$, $n = 1$ (linha contínua) e $n = 2$ (linha tracejada). Já na Figura 46a, escolhemos $m = 2$, $n = 5$ (linha contínua), $n = 20$ (linha longo-tracejada) e $n = 40$ (linha ponto tracejada).

de menos intensos) àqueles apresentados sobre o campo magnético da Figura 44. Nós computamos na Figura 46 os perfis de $\mathcal{E}_\Sigma(r)$ para diferentes valores de n e m , comparando-os com aqueles do modelo sigma usual (linha preta). Na origem, a densidade de energia é sempre não nula e possui os seguintes valores de acordo com n : $\mathcal{E}_\Sigma(0) = 1 + (f_1)^2$ para $n = 1$, ao passo que $\mathcal{E}_\Sigma(0) = 1$ para $n \geq 2$. Na Figura 46, tal como no caso do campo magnético, podemos ver a formação de várias estruturas anelares, as quais estão associadas aos valores de m , tornando-se mais evidentes para $n \geq 2$, com as bordas dos perfis seguindo o formato do modelo sigma original (veja a Figura 44b, para $n = 40$).

7.2.5.2.2 O caso geral: $\lambda \neq 0$

Agora, fazemos uma análise do caso $\lambda \neq 0$. Segundo já dissemos, para valores de λ suficientemente grandes, nós recaímos no modelo sigma original, haja vista que a função dielétrica tende à unidade.

A Figura 47 esboça os perfis dos campos sigma e de calibre, os quais são mais e mais localizados ao redor da origem à proporção que λ aumenta. Mesmo neste caso, o campo sigma não tem apresentado distorções nos perfis. Todavia, com a diminuição de λ , os *plateaus* nas curvas de $a(r)$ tendem a aumentar de tamanho (Fig. 47b).

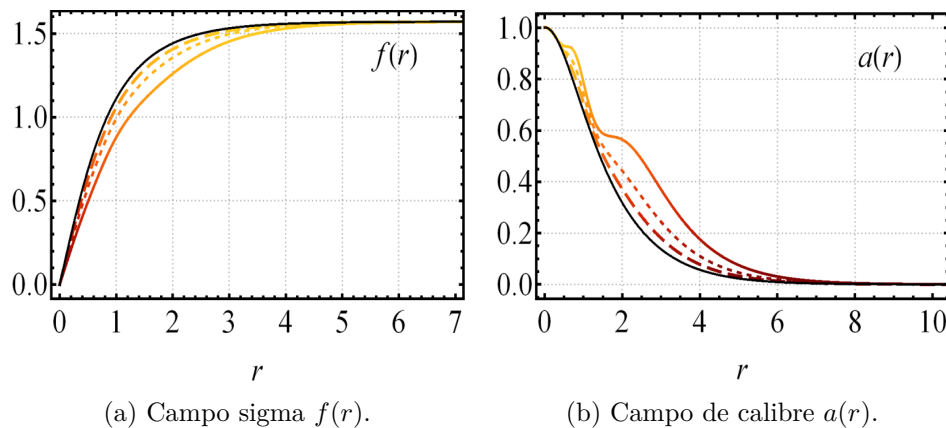


Figura 47 – Todas as linhas referem-se a $n = 1$. Em particular, a curva preta corresponde ao modelo sigma usual. Nós fixamos $\sigma = 1$, $r_0 = 1$ e $m = 1$ para $\lambda = 0.2$ (linha colorida contínua), $\lambda = 0.8$ (linha tracejada) e $\lambda = 1.5$ (linha longo-tracejada).

Na Figura 48, mostramos um gráfico de cores do campo magnético tanto na presença quanto na ausência do meio dielétrico, para critério de comparação. À medida que os *plateaus* nos perfis de $a(r)$ aumentam, notamos que os anéis de campo magnético são mais perceptíveis. Por outro lado, quando λ cresce, a distribuição de $B(r)$ recupera a forma de um “caroço”, como na ausência do meio dielétrico.

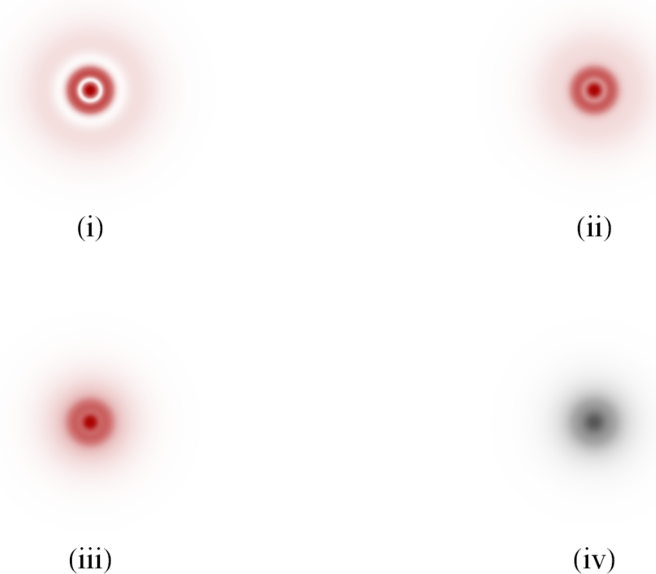


Figura 48 – Gráfico de cores do campo magnético na presença (colorido) e na ausência (em preto) do meio dielétrico (7.115). As convenções são as mesmas da Figura 47, sendo $\lambda = 0.2$ (i), $\lambda = 0.8$ (ii) $\lambda = 1.5$ (iii) e o modelo sigma usual (iv).

8 SÓLITONS AUTODUAIS TIPO VÓRTICES COM ESTRUTURA INTERNA NO MODELO MAXWELL-CHERN-SIMONS-SIGMA $O(3)$

Neste capítulo, consideramos uma extensão do modelo Maxwell-Chern-Simons-Sigma (MCSS) $O(3)$ para estudar sólitons autoduais, os quais podem se comportar como vórtices carregados imersos em um meio dielétrico. Considerando uma função dielétrica generalizada, modificamos a dinâmica do setor de Maxwell e descrevemos as propriedades das estruturas internas. Além disso, no limite BPS, indicamos a existência de configurações estáveis com fluxo magnético quantizado em dois meios dielétricos.

Os novos resultados discutidos neste capítulo estão em fase de publicação.

8.1 Modelo Maxwell-Chern-Simons-Sigma $O(3)$

Para descrever as novas configurações aniônicas imersas em um meio dielétrico, nós consideramos o modelo Maxwell-Chern-Simons-Sigma $O(3)$ generalizado

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{G(\chi)}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\kappa}{4}\varepsilon_{\mu\alpha\beta}A^\mu F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}D_\mu\vec{\phi}\cdot D^\mu\vec{\phi} \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \frac{G(\chi)}{2}\partial_\mu\Psi\partial^\mu\Psi - U(\hat{n}_3\cdot\vec{\phi},\chi,\Psi), \end{aligned} \quad (8.1)$$

em que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor eletromagnético associado ao campo de calibre abeliano A_μ e $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ é o campo sigma $O(3)$. Note que o termo de Maxwell usual está sendo modificado pela função dielétrica generalizada $G(\chi)$, a qual acopla o campo de calibre ao campo real χ . O segundo termo em (8.1) vem da ação de CS, sendo κ o parâmetro de CS. A derivada covariante é dada em (7.51). O último termo em (8.1) é o potencial expresso na forma

$$U(\hat{n}_3\cdot\vec{\phi},\chi,\Psi) = \frac{1}{2}\Psi^2(\hat{n}_3\times\vec{\phi})^2 + V(\hat{n}_3\cdot\vec{\phi},\chi,\Psi), \quad (8.2)$$

em que $V(\hat{n}_3\cdot\vec{\phi},\chi,\Psi)$ é algum potencial a ser determinado para suportar soluções autoduais e \hat{n}_3 é o terceiro versor do espaço interno. Por fim, motivados por Ref. [16], introduzimos um campo escalar real auxiliar Ψ que nos permite aplicar o formalismo BPS, de maneira similar ao que fizemos na seção 3.4.

A estabilidade das novas soluções solitônicas ainda é garantida pela conservação das cargas topológicas (7.52) e (7.53), já que as novas configurações possuem o mesmo limite BPS (7.83).

8.2 O Ansatz para o Vórtice Carregado no Modelo Maxwell-Chern-Simons-Sigma $O(3)$

Uma vez que estamos procurando soluções estacionárias, vale a pena verificar a validade do calibre temporal. Portanto, vamos considerar a equação de movimento para o campo de calibre

$$\partial^\nu (GF_{\nu\mu}) - \frac{\kappa}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha}F^{\nu\alpha} = (\hat{n}_3 \times \vec{\phi}) \cdot D_\mu \vec{\phi}, \quad (8.3)$$

a qual nos fornece a lei de Gauss (fixando $\mu = 0$)

$$\partial_i (G\partial_i A_0) + \kappa B = A_0 |\vec{n}_3 \times \vec{\phi}|^2, \quad (8.4)$$

em que temos definido o campo magnético $B = F_{12}$. Em contraste com o modelo anterior (7.50), notamos que a fixação de calibre $A_0 = 0$ não é mais satisfeita. Como resultado, esta teoria pode prever a existência de novos sólitons tipo vórtices possuindo campo elétrico, além de magnético.

Para computar as nossas soluções, vamos utilizar novamente o *hedgehog ansatz* para campo sigma (7.58). Já para os campos escalares neutros, nós adotamos

$$\chi = \chi(r), \quad \Psi = \Psi(r). \quad (8.5)$$

Além disso, vamos propor as seguintes parametrizações para o campo de calibre:

$$A_0 = A_0(r), \quad A_r = 0, \quad A_\theta = -\frac{a(r) - n}{r}. \quad (8.6)$$

A fim de obter um sóliton ou um antissóliton localizado com energia finita e positiva, impomos que as funções regulares $f(r)$, $a(r)$ e $\chi(r)$ devam satisfazer as condições de contorno em $r = 0$

$$A_0(0) = \pm\omega_0, \quad a(0) = n, \quad f(0) = 0, \quad \chi(0) = \chi_0, \quad (8.7)$$

enquanto no limite assintótico

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A'_0(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \chi(r) = \chi_\infty, \quad (8.8)$$

sendo χ_0 e χ_∞ constantes a serem fixadas adiante e ω_0 uma constante positiva determinada numericamente. Já as condições de contorno para $\Psi(r)$ são as mesmas para $A_0(r)$, pois o estado BPS vincula essas duas funções. Todas essas dependências funcionais são compatíveis com uma configuração simetricamente rotacional. Ademais, as condições de contorno (8.7)

e (8.8) são válidas para os sóliton e antissóliton cujos mapas de homotopia cobrem apenas o hemisfério norte da esfera no espaço interno. Todavia, os sóliton e antissóliton associados ao cobrimento do hemisfério sul podem ser descritos pelos mapas

$$f_{sul}(r) = \pi - f_{norte}(r), \quad (8.9)$$

$$A_{0,sul}(r) = -A_{0,norte}(r), \quad (8.10)$$

$$a_{sul}(r) = -a_{norte}(r). \quad (8.11)$$

Utilizando o *ansatz* anterior, reexpressamos a lei de Gauss (8.4) em uma forma mais conveniente,

$$\frac{1}{r} (rGE)' - \kappa B + A_0 \sin^2 f = 0, \quad (8.12)$$

com os campos elétrico e magnético dados por

$$E = -A'_0, \quad B = -\frac{a'}{r}, \quad (8.13)$$

respectivamente, em que a linha indica a derivada em relação a r .

8.3 Formalismo BPS

Para garantir a estabilidade das soluções, implementamos o formalismo BPS e determinamos qual é o potencial autodual $V(\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}, \chi, \Psi)$ em (8.2). Para isso, vamos considerar o funcional de energia estacionário relacionado à densidade lagrangeana (8.1)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} = 2\pi \int r dr \mathcal{E} &= 2\pi \int r dr \left\{ \frac{G}{2} [(A'_0)^2 + (\Psi')^2] + \frac{1}{2} (A_0^2 + \Psi^2) \sin^2 f + \frac{1}{2} GB^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [(f')^2 + \frac{a^2}{r^2} \sin^2 f] + \frac{1}{2} (\chi')^2 + V \right\}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Podemos introduzir duas funções auxiliares, $W \equiv W(f)$ e $\mathcal{W} \equiv \mathcal{W}(\chi)$, as quais permitem reescrever (8.14) como

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= 2\pi \int r dr \left\{ \frac{G}{2} (A'_0 \mp \Psi')^2 + \frac{1}{2} (A_0 \mp \Psi)^2 \sin^2 f + \frac{(GB \mp W)^2}{2G} \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(f' \mp \frac{a}{r} \sin f \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\chi' \mp \frac{\mathcal{W}_\chi}{r} \right)^2 \\ &\quad \mp \frac{1}{r} [a'(W + \kappa\Psi) + a(\cos f)'] \pm \frac{\mathcal{W}'}{r} \\ &\quad \left. + V - \frac{W^2}{2G} - \frac{\mathcal{W}_\chi^2}{2r^2} \right\}, \end{aligned} \quad (8.15)$$

em que temos usado a lei de Gauss (8.12) e descartado um termo de superfície, semelhante feito na seção 3.6 e nas Refs. [16, 60]. Perceba que a expressão na penúltima linha de (8.15) pode ser transformada em uma derivada total, se impusermos a condição

$$W + \kappa\Psi = \cos f. \quad (8.16)$$

Além disso, se cancelarmos os três últimos termos em (8.15), é possível determinar o potencial autodual como

$$V = \frac{1}{2G}(\cos f - \kappa\Psi)^2 + \frac{\mathcal{W}_\chi^2}{2r^2} = \frac{1}{2G}(\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi} - \kappa\Psi)^2 + \frac{\mathcal{W}_\chi^2}{2r^2}, \quad (8.17)$$

em que já utilizamos o resultado (8.16) e $\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi} = \cos f$.

A referida derivada total corresponde à densidade de energia BPS

$$\mathcal{E}_{BPS} = \mp \frac{1}{r}(a \cos f)' \pm \frac{\mathcal{W}'}{r}, \quad (8.18)$$

cuja integração sob as condições de contorno (8.7) e (8.8) conduz ao limite de Bogomol'nyi

$$\mathbb{E}_{BPS} = 2\pi \int_0^\infty r dr \mathcal{E}_{BPS} = \Phi \pm 2\pi \Delta\mathcal{W} \geq 0, \quad (8.19)$$

com $\Delta\mathcal{W} = \mathcal{W}(\chi_\infty) - \mathcal{W}(\chi_0)$. Como acontece com o ANO vórtice, o primeiro termo em (8.19) é a contribuição do setor sigma calibrado, conectada ao fluxo magnético quantizado

$$\Phi = \int d^2x B = 2\pi |n|. \quad (8.20)$$

Assim, a energia total oriunda de (8.15) se reduz a

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_{BPS} + \bar{\mathbb{E}}, \quad (8.21)$$

sendo $\bar{\mathbb{E}}$ o funcional

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}} = & \pi \int_0^\infty r dr \left\{ G(A'_0 \mp \Psi')^2 dr + (A_0 \mp \Psi)^2 \sin^2 f \right. \\ & + \frac{1}{G} [GB \mp (\cos f - \kappa\Psi)]^2 + \left(f' \mp \frac{a}{r} \sin f \right)^2 \\ & \left. + \left(\chi' \mp \frac{\mathcal{W}_\chi}{r} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (8.22)$$

a partir do qual concluímos que o limite de Bogomol'nyi $\mathbb{E}_{BPS} \leq \mathbb{E}$ é atingido quando $\bar{\mathbb{E}} = 0$, ou seja, quando as seguintes equações BPSs são satisfeitas:

$$\chi' = \pm \frac{\mathcal{W}_\chi}{r}, \quad (8.23)$$

$$f' = \pm \frac{a}{r} \sin f, \quad (8.24)$$

$$A'_0 = \pm \Psi', \quad A_0 = \pm \Psi, \quad (8.25)$$

$$B = \pm \frac{1}{G}(\cos f - \kappa\Psi). \quad (8.26)$$

Observe na Eq. (8.23) que o campo $\Psi(r)$ não representa um grau de liberdade físico extra e deve obedecer às mesmas condições de contorno que $A_0(r)$. Assim como ocorre com a

teoria (7.50), o critério de estabilidade anterior também exige a inserção de um termo no potencial (8.17) dependendo explicitamente de r , como discutido na Ref. [86]. Como resultado, a equação BPS (8.23) nos permite explorar várias formas para o campo χ . Outro ponto interessante é que obtivemos equações de primeira ordem que são equivalentes às equações de Euler-Lagrange (veja apêndice A.5) para quaisquer funções $G(\chi)$ e $\mathcal{W}(\chi)$. Por causa dessas arbitrariedades, esperamos que este modelo seja de grande interesse científico.

Note que as equações BPSs nos permitem ainda dividir a densidade de energia em duas partes

$$\mathcal{E}_{BPS} = \mathcal{E}_{\Sigma} + \mathcal{E}_{\chi}, \quad (8.27)$$

sendo \mathcal{E}_{Σ} a contribuição do setor sigma calibrado,

$$\mathcal{E}_{\Sigma} = G(A'_0)^2 + A_0^2 \sin^2 f + GB^2 + (f')^2, \quad (8.28)$$

e \mathcal{E}_{χ} sendo a parcela vinda do campo fonte χ ,

$$\mathcal{E}_{\chi} = (\chi')^2 = \frac{\mathcal{W}'}{r}. \quad (8.29)$$

Na próxima seção, discutiremos algumas soluções aniônicas surgindo do sistema BPS (8.23)-(8.26), juntamente com a lei de Gauss (8.12), considerando dois meios dielétricos como exemplos.

8.4 Soluções de Primeira Ordem

Para obter as soluções numéricas das equações BPSs (8.24)-(8.26) e da lei de Gauss (8.12), adotamos também o campo fonte tipo-kink (7.86), já que as equações BPSs (8.23) e (7.82) são iguais. Além disso, selecionamos os meios dielétricos (7.91) e (7.103). Em ambos os casos, o campo fonte satisfaz as condições de contorno $\chi_0 = \mp 1$ e $\chi_{\infty} = \pm 1$, levando a Eq. (8.19) a

$$\mathbb{E}_{BPS} = 2\pi|n| + \frac{8\sigma}{3}, \quad (8.30)$$

sendo o mesmo limite BPS (7.87), com a primeira parcela vindo do fluxo magnético quantizado e a segunda, do setor χ .

Daqui em diante, vamos tratar somente do sóliton topológico ($N > 0$ e sinal superior), sem perda de generalidade.

8.4.1 Primeiro Cenário

Para encontrar as novas configurações aniônicas, o primeiro meio dielétrico que consideramos é mapeado pela função dielétrica generalizada (7.91). Para $\sigma \geq 2$, não encontramos soluções fisicamente aceitáveis satisfazendo as condições de contorno. Essa

propriedade é interessante porque é válida mesmo na ausência da ação de CS (modelo 7.50). Dessa forma, abordamos apenas o caso $\sigma = 1$, o qual reduz a lei de Gauss (8.12) a

$$\frac{1}{4r} \left[\frac{(r^2 + r_0^2)^2}{rr_0^2} A_0' \right]' - \kappa \frac{a'}{r} - A_0 \sin^2 f = 0, \quad (8.31)$$

enquanto as equações BPSs (8.24) e (8.26) resultam, respectivamente, em

$$f' = \frac{a}{r} \sin f = 0, \quad (8.32)$$

$$\frac{a'}{r} = -\frac{4r^2 r_0^2}{(r^2 + r_0^2)^2} (\cos f - \kappa A_0). \quad (8.33)$$

8.4.1.1 Perfis Assintóticos dos Campos

Primeiramente, nós analisamos as soluções aproximadas das equações (8.31)-(8.33) perto da origem (para as três menores ordens) e no limite assintótico ($r \rightarrow \infty$). Por exemplo, o potencial elétrico $A_0(r)$ e o campo correspondente $E(r)$ são dados próximo a $r = 0$ por

$$A_0(r) \approx \omega_0 + \omega_2 r^2 - \frac{\omega_2 r^4}{r_0^2} + A_0^{(I)}(r), \quad (8.34)$$

$$E(r) \approx -2\omega_2 r + \frac{4\omega_2 r^3}{r_0^2} + E^{(I)}(r), \quad (8.35)$$

com as constates $\omega_0 > 0$ e $\omega_2 < 0$ dependendo de n e r_0 . As funções $A_0^{(I)}(r)$ e $E^{(I)}(r)$ são definidas no apêndice B.1. Para o campo sigma $f(r)$, encontramos a série aproximada perto da origem

$$f(r) \approx f_n r^n - \frac{B_0 f_n}{4r_0^2} r^{n+4} + f^{(I)}(r), \quad (8.36)$$

com termo $f^{(I)}(r)$ dado em (B.3) e

$$B_0 = 1 - \kappa \omega_0 \quad (8.37)$$

sendo o campo magnético avaliado em $r = 0$ na ausência de um meio dielétrico (veja Eq. (8.26)). Além disso, o potencial vetor $a(r)$ e o campo magnético associado $B(r)$ se comportam próximo da origem como

$$a(r) \approx n - \frac{B_0}{r_0^2} r^4 + a^{(I)}(r), \quad (8.38)$$

$$B(r) \approx \frac{4B_0}{r_0^2} r^2 - \left(\frac{4|\kappa|\omega_2}{r_0^2} + \frac{8B_0}{r_0^4} \right) r^4 + B^{(I)}(r), \quad (8.39)$$

em que temos expressado $a^{(I)}$ em (B.4) e $B^{(I)}$ em (B.5). Por fim, nós verificamos também o perfil da densidade de energia BPS (sem a contribuição do kink) perto origem, a saber

$$\mathcal{E}_\Sigma(r) \approx n^2 (f_n)^2 r^{2n-2} + \mathcal{E}_\Sigma^{(I)}(r), \quad (8.40)$$

com a parcela $\mathcal{E}_\Sigma^{(I)}(r)$ dada em (B.6). O resultado anterior nos diz que $\mathcal{E}_\Sigma(0)$ sempre se anula em $r = 0$, exceto para $n = 1$, quando encontramos o valor $\mathcal{E}_\Sigma(0) = v^2 (f_1)^2$.

Por outro lado, o potencial e o campo elétricos se comportam no infinito como

$$A_0(r) \approx -C_\infty \frac{2}{|\kappa|(\lambda - 2)} r^{-\lambda}, \quad (8.41)$$

$$E(r) \approx -C_\infty \frac{2\lambda}{|\kappa|(\lambda - 2)} r^{-\lambda-1}, \quad (8.42)$$

em que $\lambda = 1 + \sqrt{1 + 4r_0^2}$ é um parâmetro que controla o decaimento das soluções e C_∞ é uma constante positiva. Já o campo sigma se comporta no infinito como

$$f(r) \approx \frac{\pi}{2} - C_\infty r^{-\lambda}, \quad (8.43)$$

enquanto o potencial vetor e o campo magnético associado,

$$a(r) \approx C_\infty \frac{4r_0^2}{(\lambda - 2)} r^{-\lambda}, \quad (8.44)$$

$$B(r) \approx C_\infty \frac{4\lambda r_0^2}{(\lambda - 2)} r^{-\lambda-2}. \quad (8.45)$$

Ademais, para $r \rightarrow \infty$, a densidade de energia $\mathcal{E}_\Sigma(r)$ tende a zero na forma

$$\mathcal{E}_\Sigma(r) \approx C_\infty^2 \frac{1}{\kappa^2 (\lambda - 2)^2} \left(\frac{\lambda}{r_0^2} + 4 \right) r^{-2\lambda}, \quad (8.46)$$

para qualquer n .

Como comentado em Ref. [16], o MCSH vórtice interpola o ANO e o CS vórtices, todos apresentando decaimento exponencial. Inclusive, esse mesmo comportamento também tem sido reportado nos modelos MCSS $O(3)$ [94,95], Lorentz-violating [83,96] e $CP(2)$ [97]. Entretanto, percebemos que tal característica pode mudar devido a influência de um meio dielétrico.

8.4.1.2 Gráfico das Soluções Numéricas

Para obter as soluções numéricas da lei de Gauss (8.31) e do sistema BPS (8.32)-(8.33), sob as condições de contorno (8.7) e (8.8), adotamos $\kappa = 1$ por simplicidade. Comparando com o modelo usual no qual $G = 1$, apresentamos as nossas análises em duas maneiras: primeiro, fixamos $r_0 = 1$ e variamos o *winding number*; segundo, escolhemos $n = 1$ e mudamos r_0 . Nas Figuras 49 - 51, esboçamos os perfis do campo sigma, dos potenciais vetor e escalar, dos campos elétrico e magnético e, por último, da densidade de energia $\mathcal{E}_\Sigma(r)$. Já nas Figuras 52 e 53, descrevemos como os máximos dessas grandezas físicas junto com as posições deles dependem de n e r_0 .

A Figura 49 mostra que, para $n = 1$ e $r_0 = 1$ (linhas pretas tracejadas), os perfis do campo sigma (Fig. 49a) e do potencial vetor (Fig. 49b) são bem similares àqueles do modelo

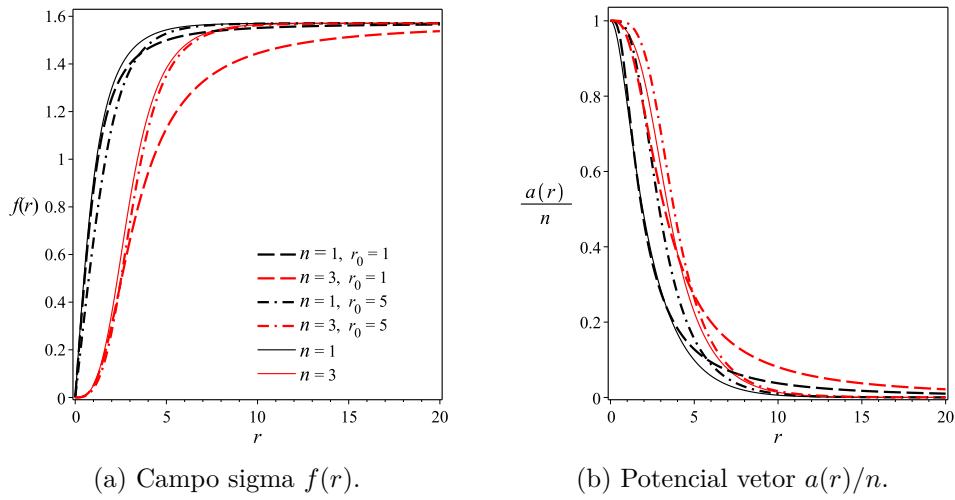


Figura 49 – Perfis numéricos do campo sigma $f(r)$ (Fig. 49a) e do potencial vetor $a(r)/n$ (Fig. 49b). Usamos as cores para as linhas: preta ($n = 1$) e vermelha ($n = 3$); e os estilos de linha: tracejado ($r_0 = 1$) e ponto-tracejado ($r_0 = 5$). As linhas sólidas referem-se ao modelo sigma usual na ausência de um meio dielétrico. Em todos os casos, consideramos $\kappa = \sigma = 1$.

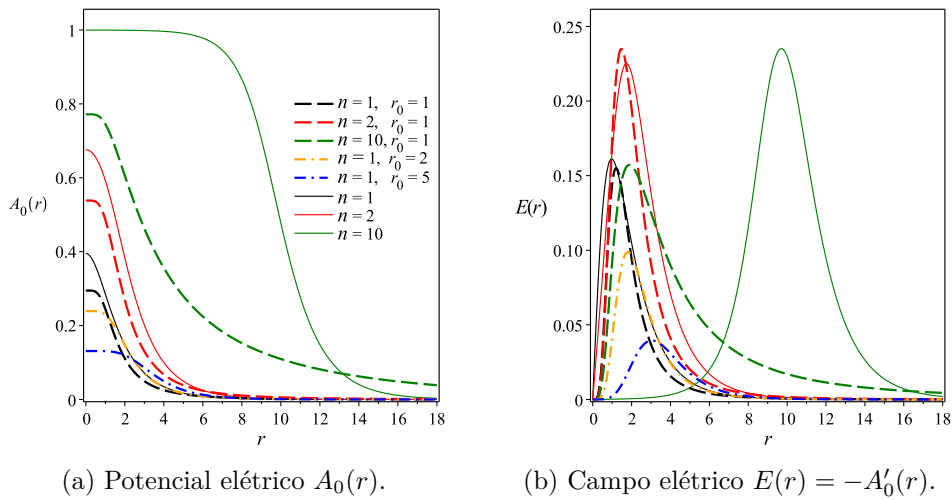


Figura 50 – Potencial $A_0(r)$ (Fig. 50a) e campo $E(r)$ (Fig. 50b) elétricos para $\kappa = \sigma = 1$ e alguns valores de n e r_0 . As linhas sólidas correspondem ao modelo MCSS $O(3)$ sem um meio dielétrico. A Fig. 50a segue as conveções da Fig. 50b.

usual (linhas pretas sólidas) [94, 95], da mesma forma que acontece com o potencial e o campo elétricos (Fig. 50). Entretanto, para grandes valores desses parâmetros, a presença o meio dielétrico torna os perfis menos localizados (veja linhas vermelhas, por exemplo). Em especial, a Figura 49b destaca que o meio dielétrico induz a formação de um *lump* no perfil do potencial vetor, o qual cresce à medida que r_0 aumenta. Consequentemente, o campo magnético se anula na origem e sua distribuição se torna anelar, em vez de possuir um máximo central (Fig. 51). Este comportamento é análogo àqueles apresentados pelos vórtices topológicos de CSH [13, 15] e CSS $O(3)$ [28].

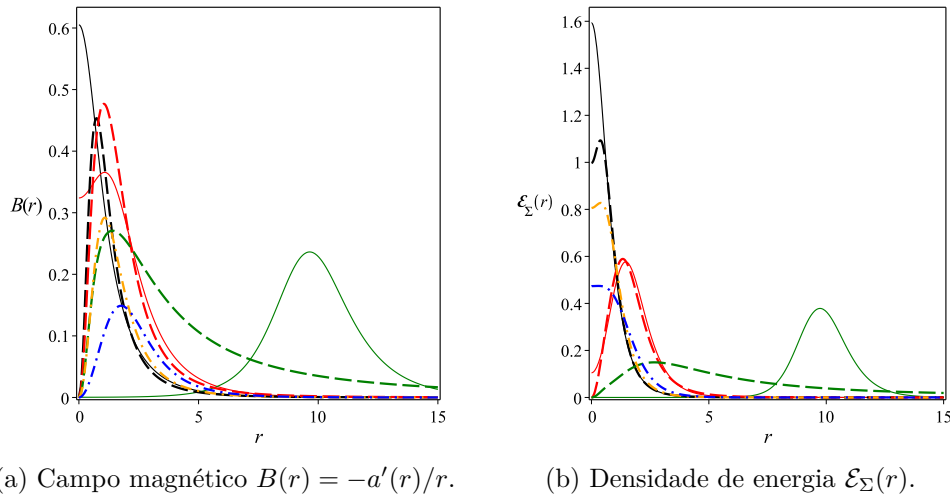


Figura 51 – Apresentamos os perfis do campo magnético $B(r) = -a'(r)/r$ (Fig. 51a) e da densidade de energia $\mathcal{E}_\Sigma(r)$ (Fig. 51b) para diferentes valores de n e r_0 . Adotamos as mesmas conveções da Fig. 50.

As Figuras 50 e 51 revelam que os campos elétrico e magnético e a densidade de energia (esta, para $n > 1$) são distribuídos como anéis centrados na origem. Na Figura 52, ilustramos como o potencial escalar em $r = 0$, $A_0(0) = \omega_0$, as amplitudes e os raios dos anéis dependem de n para r_0 fixo. A Figura 52a mostra que $A_0(0)$ aumenta, enquanto os máximos dos campos elétrico (E_{\max}) e magnético (B_{\max}) e da densidade de energia ($\mathcal{E}_{\Sigma, \max}$) decrescem monotonicamente com n até atingirem um ponto de saturação para $n \geq n^*$ (símbolo bola). O mesmo efeito acontece no modelo usual (símbolo diamante). Por exemplo, veja $n^* \sim 10$ (linhas verdes) na Figuras 50 and 51. Além disso, a Figura 52b retrata que os raios dos anéis de campos elétrico (r_E) e magnético (r_B) e de densidade de energia (r_ϵ) aumentam linearmente com n na ausência de um meio dielétrico (símbolo diamante). Contudo, esses raios crescem apenas para $n < n^{**}$ (por exemplo, $n^{**} \sim 6$) e então saturam seus crescimentos para $n \geq n^{**}$ na presença do meio dielétrico (símbolo bola).

Por outro lado, a Figura 53 descreve os comportamentos gerais de $A_0(0) = \omega_0$, E_{\max} , r_E , B_{\max} , r_B and $\mathcal{E}_\Sigma(0)$ como funções de r_0 no primeiro setor topológico. Note que B_{\max} é sempre decrescente, enquanto r_E e r_B são sempre crescentes. Em contrapartida, as quantidades E_{\max} , B_{\max} e $\mathcal{E}_\Sigma(0)$ crescem no intervalo $0 < r_0 < r_0^*$, ao passo que diminuem para $r_0 > r_0^*$ (por exemplo, $r_0^* \sim 1$). Para $r \gg r_0^*$, as funções $A_0(0) = \omega_0$, B_{\max} e $\mathcal{E}_\Sigma(0)$ decaem como $1/r_0$ e E_{\max} , como $1/r_0^{1.4}$. Além disso, os raios r_E e r_B aumentam como $r_0^{1/2}$. Portanto, indicamos que o raio característico r_0 tem que assumir valores moderados para que os campos elétrico e magnético e a densidade de energia não se anulem em toda a região.

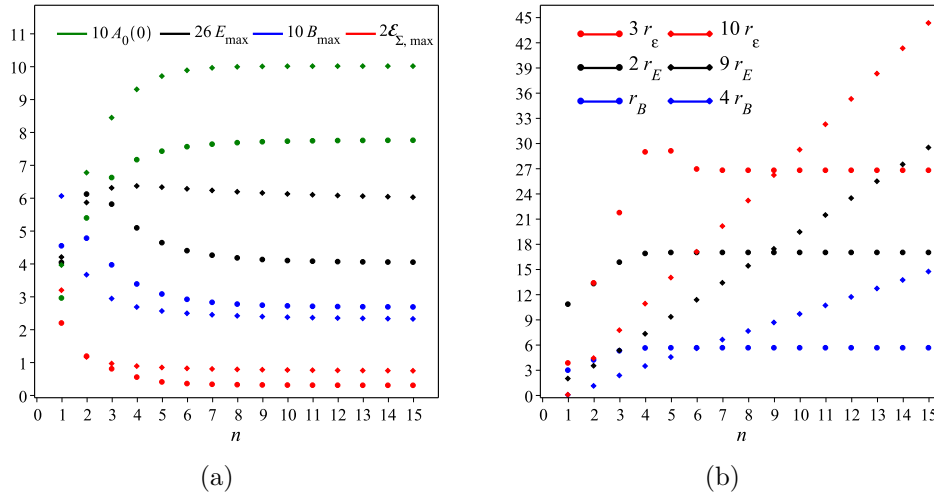


Figura 52 – Na Fig. 52a, potencial escalar na origem ($A_0(0) = \omega_0$, verde) e máximos dos campos elétrico (E_{\max} , preto) e magnético (B_{\max} , azul) e da densidade de energia ($\mathcal{E}_{\Sigma, \max}$, vermelho) como funções de n . Na Fig. 52b, posições radiais de E_{\max} (r_E , preto), B_{\max} (r_B , azul) e $\mathcal{E}_{\Sigma, \max}$ (r_ϵ , vermelho) v.s. n . Em ambas as figuras, fixamos $\kappa = r_0 = \sigma = 1$ e os símbolos bola (diamante) concernem ao modelo com (sem) meio dielétrico.

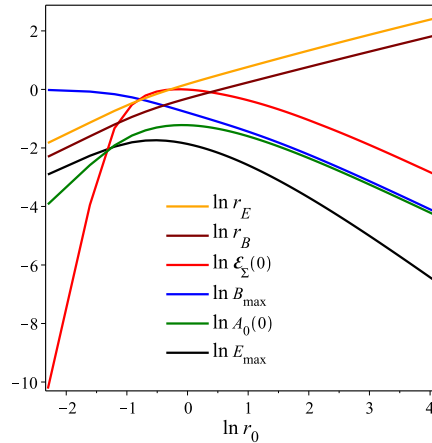


Figura 53 – Potential escalar ($A_0(0) = \omega_0$, verde) e densidade de energia ($\mathcal{E}_\Sigma(0)$, vermelho) na origem e máximos dos campos elétrico (E_{\max} , preto) e magnético (B_{\max} , azul) juntos com suas respectivas posições radiais r_E (laranja) e r_B (marrom) como funções de r_0 . Adotamos a escala logarítmica e $\kappa = n = \sigma = 1$.

8.4.2 Segundo Cenário

Nesta seção, investigamos novas estruturas tipo vórtices carregados na presença de um segundo meio dielétrico caracterizado pela função dielétrica (7.103). Vimos que essa função é regular para $r \neq r_0$, mas singular para $r = r_0$. Apesar da singularidade, a densidade de energia (8.28) é finita, pois os campos elétrico e magnético são nulos no ponto de divergência de $G(\chi)$ (veja as equações Eqs. (8.62) e (8.63)). Assim, a lei de

Gauss (8.12) torna-se

$$\frac{1}{r} \left[\frac{(r^{2\sigma} + r_0^{2\sigma})^2}{(r^{2\sigma} - r_0^{2\sigma})^2} r A_0' \right]' - \kappa \frac{a'}{r} - A_0 \sin^2 f = 0 \quad (8.47)$$

e as equações (8.24) e (8.26) são escritas agora como

$$f' = \frac{a}{r} \sin f, \quad (8.48)$$

$$\frac{a'}{r} = - \frac{(r^{2\sigma} - r_0^{2\sigma})^2}{(r^{2\sigma} + r_0^{2\sigma})^2} (\cos f - \kappa A_0). \quad (8.49)$$

8.4.2.1 Perfis Assintóticos dos Campos

Antes de resolver numericamente a lei de Gauss (8.47) e as equações BPSs (8.48) e (8.49), analisamos os comportamentos das soluções nas fronteiras. Inicialmente, calculamos séries aproximadas até a terceira ordem em $r = 0$ e, em seguida, verificamos os perfis no infinito. Por exemplo, o potencial $A_0(r)$ e o campo $E(r)$ elétricos se comportam perto da origem como

$$A_0(r) \approx \omega_0 - \frac{|\kappa| B_0 r^2}{4} - \frac{|\kappa|^3 B_0 r^4}{64} + A_0^{(II)}(r), \quad (8.50)$$

$$E(r) \approx \frac{|\kappa| B_0 r}{2} + \frac{|\kappa|^3 B_0 r^3}{16} + \frac{|\kappa|^5 B_0 r^5}{384} + E^{(II)}(r), \quad (8.51)$$

com B_0 definido na Eq. (8.37) e as funções $A_0^{(II)}(r)$ e $E^{(II)}(r)$ dadas na seção B.2 do apêndice B. Além disso, para $r \rightarrow 0$, o campo sigma $f(r)$ tem a forma

$$f(r) \approx f_n r^n - \frac{B_0 f_n r^{n+2}}{4} + f^{(II)}(r), \quad (8.52)$$

em que f_n é uma constante positiva dependente de n e $f^{(II)}(r)$ é denotada na Eq. (B.10). Já o potencial vetor e o campo magnético relativo tendem a n e B_0 na origem de acordo com as séries aproximadas

$$a(r) \approx n - \frac{B_0 r^2}{2} - \frac{\kappa^2 B_0 r^4}{16} + a^{(II)}(r), \quad (8.53)$$

$$B(r) \approx B_0 + \frac{\kappa^2 B_0 r^2}{4} + \frac{\kappa^4 B_0 r^4}{64} + B^{(II)}(r), \quad (8.54)$$

respectivamente, com o termo $a^{(II)}(r)$ dado na Eq. (B.11) e $B^{(II)}(r)$ na Eq. (B.12). Por último, também analisamos o perfil aproximado da densidade de energia em torno de $r = 0$, sem a contribuição do kink. Diferente do primeiro caso (Eq. (8.40)), a série

$$\mathcal{E}_\Sigma(r) \approx (B_0)^2 + \frac{3\kappa^2 (B_0)^2 r^2}{4} + \mathcal{E}_\Sigma^{(II)}(r) \quad (8.55)$$

demonstra que $\mathcal{E}_\Sigma(r)$ é diferente de zero na origem para qualquer n (o último termo é expresso na Eq. (B.13)).

Em contrapartida, no limite $r \rightarrow \infty$, o potencial $A_0(r)$ e o campo $E(r)$ elétricos decaem como

$$A_0(r) \approx C_\infty \frac{(|\kappa| + m)}{(1 + \kappa^2 + m|\kappa|)} r^{-1/2} e^{-mr}, \quad (8.56)$$

$$E(r) \approx C_\infty \frac{(|\kappa| + m)(mr - 1)}{(1 + \kappa^2 + m|\kappa|)} r^{-3/2} e^{-mr}. \quad (8.57)$$

em que $m = 1/2(\sqrt{4 + \kappa^2} - |\kappa|)$ corresponde à massa dos bósons escalar e vetorial e C_∞ é uma constante positiva dependente de n . Este resultado também mostra que um meio dielétrico não necessariamente altera o típico decaimento exponencial dos vórtices carregados [94,95]. Obviamente, o campo sigma possui também decaimento exponencial, a saber

$$f(r) \approx \frac{\pi}{2} - C_\infty r^{-1/2} e^{-mr}. \quad (8.58)$$

Já o potencial vetor $a(r)$ e o campo magnético associado $B(r)$ tendem a zero do infinito como

$$a(r) \approx C_\infty \frac{1}{m(1 + \kappa^2 + m|\kappa|)} r^{1/2} e^{-mr}, \quad (8.59)$$

$$B(r) \approx C_\infty \frac{(2mr - 1)}{2m(1 + \kappa^2 + m|\kappa|)} r^{-3/2} e^{-mr}. \quad (8.60)$$

Por fim, para $r \rightarrow \infty$, a densidade energia decresce como

$$\mathcal{E}_\Sigma(r) \approx C_\infty^2 \frac{(1 + m^2)[1 + (|\kappa| + m)^2 m^2]}{m^2(1 + \kappa^2 + m|\kappa|)^2} r^{-1} e^{-2mr}, \quad (8.61)$$

revelando que este segundo sóliton é mais localizado do que o primeiro.

8.4.2.2 Gráfico das Soluções Numéricas

Perante as condições de contorno (8.7) e (8.8), as equações (8.47) - (8.49) descrevem completamente o estado BPS do novo sóliton aniônico. As soluções numéricas dessas equações, os correspondentes campos elétrico e magnético e a densidade de energia (8.28) são mostrados nas Figuras 54 - 59 para três casos nos quais $\kappa = 1$. No primeiro caso, fixamos $r_0 = \sigma = 1$ e variamos n . No segundo caso, fazemos $n = \sigma = 1$ e mudamos r_0 . Finalmente, no terceiro caso, selecionamos $n = r_0 = 1$ e alteramos σ . Além disso, nas Figuras 60 e 61, descrevemos como os extremos dessas grandezas físicas juntamente com as posições deles dependem de n , r_0 e σ . Em todas as situações, comparamos nossos resultados com aqueles na ausência de um meio dielétrico, $G = 1$ [94,95].

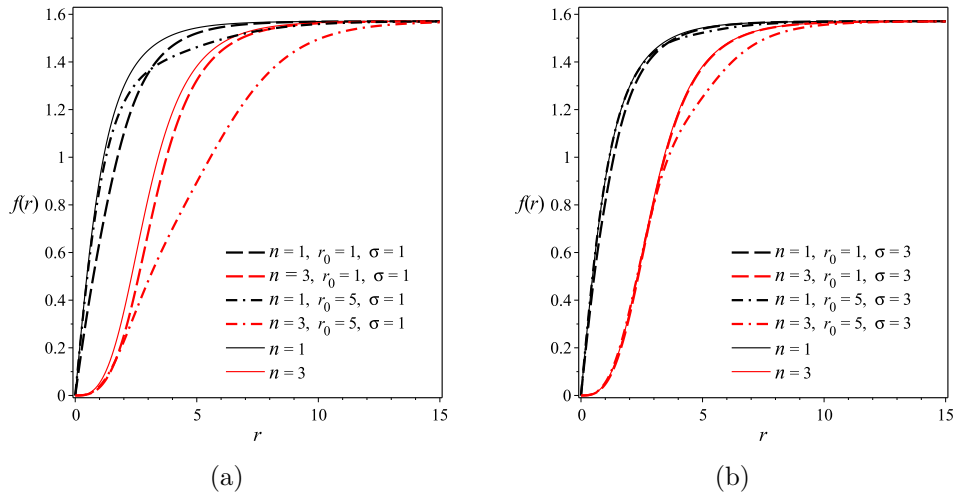


Figura 54 – Perfis numéricos do campo sigma $f(r)$ no primeiro e terceiro setores topológicos para alguns valores de r_0 , $\sigma = 1$ (Fig. 54a) e $\sigma = 3$ (Fig. 54b). As linhas sólidas referem-se ao modelo usual no qual $G = 1$. Em ambas as Figs., adotamos $\kappa = 1$.

Esboçamos na Figura 54 a forma do campo sigma $f(r)$ para algumas escolhas de n , r_0 e σ . Em geral, a presença do meio dielétrico torna a distribuição do campo sigma menos localizada em relação ao previsto pela teoria usual na qual $G = 1$ (linhas sólidas). Um interessante efeito do parâmetro σ quando cresce é sobrepor os perfis associados a diferentes r_0 no mesmo setor topológico (54b).

Na Figura 55, os perfis no primeiro e terceiro setores topológicos são suficientes para descrever as propriedades mais relevantes do potencial vetor. Veja que o meio dielétrico produz um *plateau* nas curvas de $a(r)$ onde a parede de domínio se localiza, $r = r_0$.

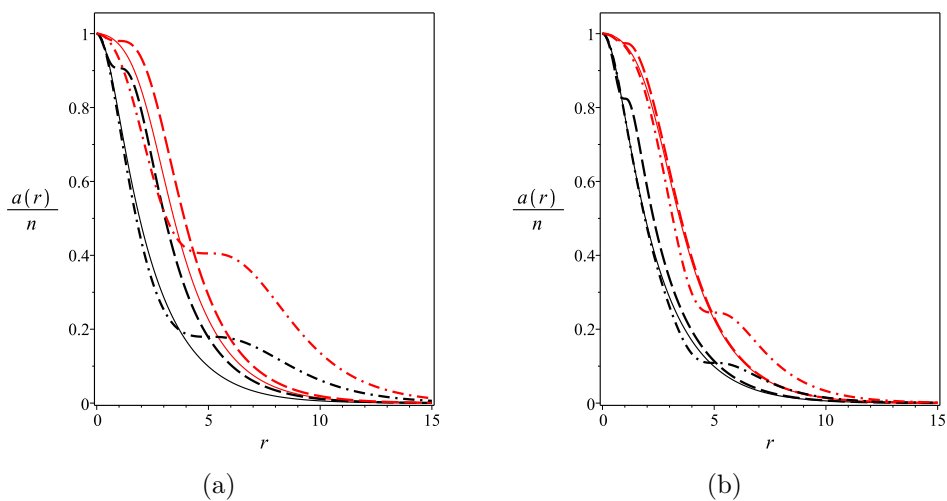


Figura 55 – Soluções numéricas para o potencial vetor $a(r)/n$ no primeiro e terceiro setores topológicos para alguns r_0 , $\sigma = 1$ (Fig. 55a) e $\sigma = 3$ (Fig. 55b). A Fig. 55a (55b) segue as mesmas convenções da Fig. 54a (54b).

Ademais, quando o parâmetro σ aumenta, as linhas de $a(r)$ associadas com diferentes valores de r_0 também se sobrepõem.

Na Figura 56a, esboçamos os comportamentos de $A_0(r)$ para alguns valores de N e r_0 com $\sigma = 1$. Os perfis do potencial elétrico também revelam o surgimento de um *plateau* exatamente onde a parede de domínio é localizada, isto é, em $r = r_0$. Entretanto, para $n \geq n^*$ (por exemplo, $n^* = 10$, linha verde), o *plateau* desaparece e as curvas na presença (linhas tracejadas) e ausência (linhas sólidas) do meio dielétrico se sobrepõem. Ademais, percebam que o *plateau* torna-se mais distante da origem e menos evidente quando o raio característico r_0 cresce com $n = \sigma = 1$. Por outro lado, a Figura 57a mostra o potencial elétrico no primeiro setor topológico para $r_0 = 1$ e diferentes valores de σ . Note que o tamanho do *plateau* aumenta quando σ diminui, porém os perfis na presença e na ausência do meio dielétrico são quase sobrepostos para σ grande.

A Figura 56b mostra os perfis do campo elétrico para alguns valores de n e r_0 com $\sigma = 1$, indicando a formação de duplos anéis. Na posição $r = r_0$, onde a parede de domínio se localiza, o campo elétrico se anula, ou seja, $E(r_0) = 0$. Podemos facilmente verificar isso a partir da Lei de Gauss (8.47) reescrita como

$$E = \frac{(r^{2\sigma} - r_0^{2\sigma})}{(r^{2\sigma} + r_0^{2\sigma})} \tilde{E}, \quad (8.62)$$

com \tilde{E} sendo uma função bem comportada (com dimensão de campo elétrico) definida na equação (B.9). Dessa forma, o primeiro termo em (8.28) é zero em $r = r_0$, fornecendo a energia BPS finita (8.30). Esse comportamento muda consideravelmente em relação ao modelo usual em que $G = 1$ (linhas sólidas). Observe que, quando o *winding number* cresce, o anel interno decresce enquanto o externo cresce. Há um valor máximo $n = n^*$

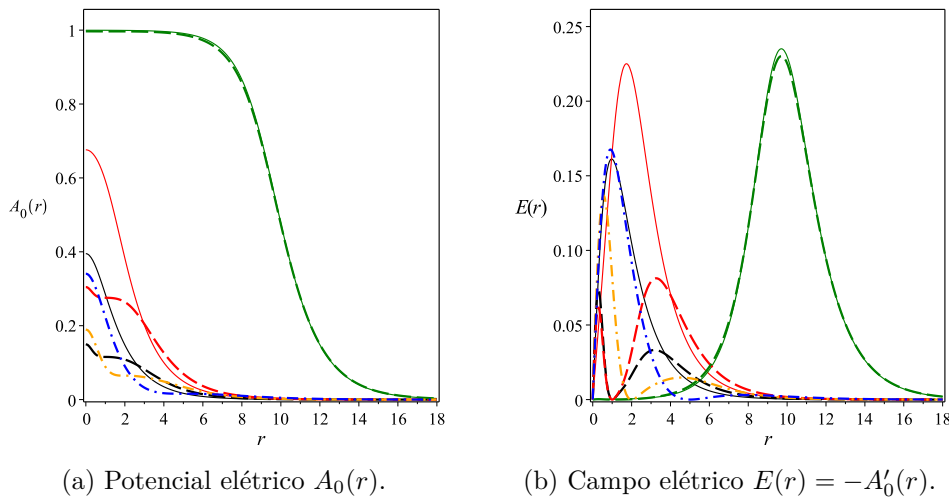


Figura 56 – Perfis numéricos do potencial $A_0(r)$ (Fig. 56a) e do campo $E(r) = -A'_0(r)$ (Fig. 56b) elétricos para alguns setores topológicos. Nos dois gráficos, assumimos as mesmas convenções da Fig. 50.

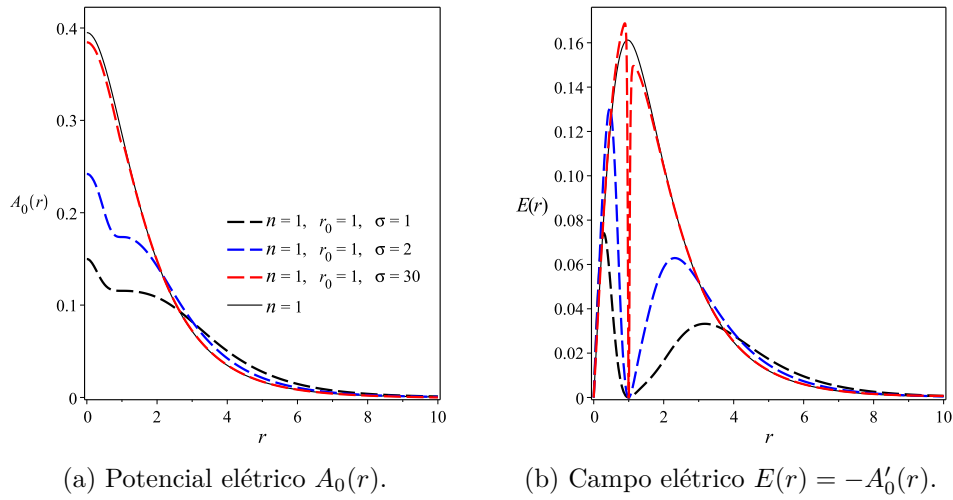


Figura 57 – Perfis numéricos do potencial $A_0(r)$ (Fig. 57a) e do campo $E(r) = -A'_0(r)$ (Fig. 57b) elétricos no primeiro setor topológico para $r_0 = 1$ e alguns valores de σ .

(por exemplo, $n^* \sim 10$, linha verde) a partir do qual o anel interno desaparece, enquanto o externo para de crescer. Consequentemente, as curvas dos campos elétricos com e sem meio dielétrico coincidem. Em contrapartida, o anel interno cresce ao passo que o externo decresce quando r_0 aumenta com σ constante no primeiro setor topológico (por exemplo, veja linhas ponto-tracejadas). Ao contrário das duas situações anteriores, a Figura 57b revela que, para n e r_0 fixos, os dois anéis aumentam e se aproximam quando σ cresce. Além disso, o anel interno é sempre maior do que o externo.

A Figura 58a ilustra o gráfico do campo magnético para alguns setores topológicos e r_0 com $\sigma = 1$. Conforme vemos, o surgimento dos *plateaus* na Figura 55 conduz a um círculo de raio r_0 sobre o qual o campo magnético é nulo, ou seja, $B(r_0) = 0$. De fato, olhando a equação (8.49) expressa na forma

$$B = \frac{(r^{2\sigma} - r_0^{2\sigma})^2}{(r^{2\sigma} + r_0^{2\sigma})^2} (\cos f - \kappa A_0), \quad (8.63)$$

concluimos que esse fenômeno surge como uma consequência direta do estado BPS. Note que o círculo divide a distribuição do campo magnético em um núcleo rodeado por um anel. Quando n aumenta, o núcleo tende a desaparecer, enquanto o anel aumenta. Desse modo, após um dado n^* (por exemplo, $n^* \sim 10$, linha verde), o núcleo se anula enquanto a amplitude do anel satura em um certo máximo, assim como acontece também com os duplos anéis de campo elétrico na Figura 56b. Por outro lado, a Figura 59a esboça a distribuição do campo magnético no primeiro setor topológico para $\sigma = 1$ e r_0 variando. Conforme r_0 aumenta, notamos que o núcleo se torna maior, alcançando um máximo valor na origem, enquanto os anéis tendem a sumir. Em contraste à Figura 58a, quando fixamos n e r_0 e aumentamos σ , a Figura 59a mostra que o núcleo e o anel se aproximam, similarmente aos duplos anéis de campo elétrico na Figura 57b.

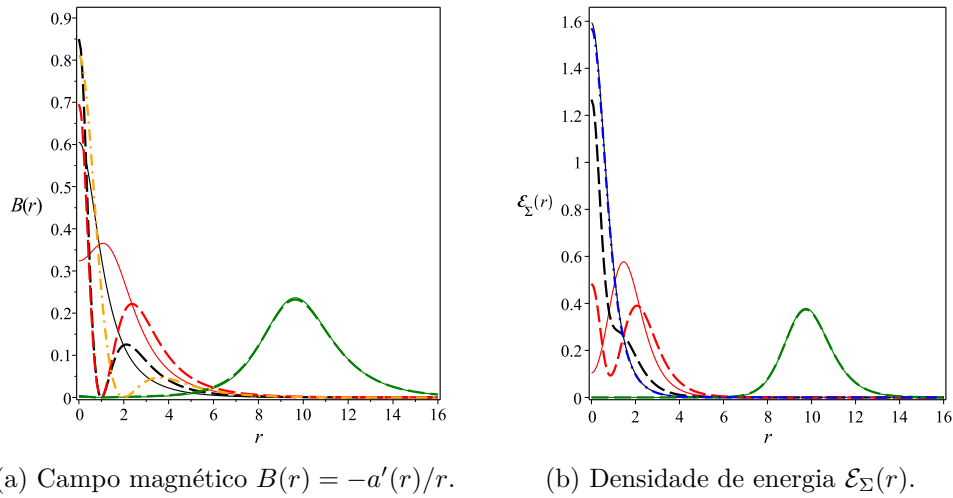


Figura 58 – Soluções numéricas para o campo magnético $B(r) = -a'(r)/r$ (Fig. 58a) e a densidade de energia $\mathcal{E}_\Sigma(r)$ (Fig. 58b) em alguns setores topológicos. As duas Figs. obedecem às convenções da Fig. 50.

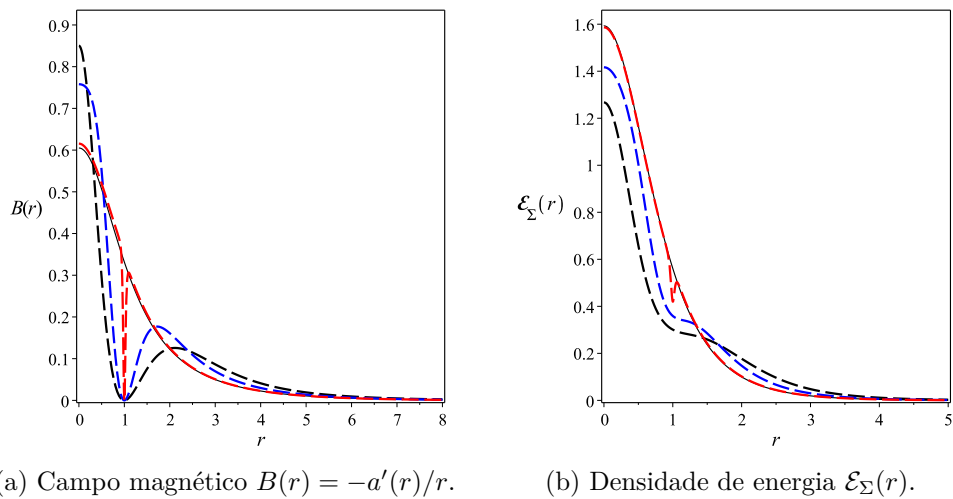


Figura 59 – Perfis numéricos do campo magnético $B(r) = -a'(r)/r$ (Fig. 59a) e da densidade de energia $\mathcal{E}_\Sigma(r)$ (Fig. 59b) no primeiro setor topológico para $r_0 = 1$ e alguns valores de σ . Ambas as Figs. seguem as convenções da Fig. 57.

Apresentamos na Figura 58b como a energia se distribui para alguns setores topológicos e r_0 com $\sigma = 1$. Para $n = 1$, toda a energia se concentra na origem. Entretanto, quando n aumenta em um dado intervalo $1 < n < n^*$ com $r_0 = 1$, a distribuição da energia forma um núcleo cercado por um anel. Enquanto isso, a amplitude do núcleo diminui e o raio do anel cresce. Assim, existe um máximo $n = n^*$ além do qual o núcleo desaparece e a distribuição de energia se torna completamente anelar, coincidindo com os perfis preditos pelo modelo usual (por exemplo, $n^* \sim 10$, linhas verdes). Em particular, no primeiro setor topológico com $\sigma = 1$, observamos que os perfis na presença e ausência do meio dielétrico se sobrepõem quando r_0 aumenta (por exemplo, veja as linhas sólidas pretas e ponto-tracejadas azuis). Já o efeito de σ sobre a distribuição da energia para $n = r_0 = 1$

é ilustrado na Figura 59b. Quando σ cresce, os perfis na presença e ausência do meio dielétrico tendem a se sobrepor, exceto em $r = r_0$, onde a parede de domínio se localiza (compare as linhas pretas sólidas com as tracejadas vermelhas).

Na Figura 60a, retratamos como o potencial escalar em $r = 0$ ($A_0(0) = \omega_0$) e os máximos dos campos elétrico (E_{\max}) e magnético (B_{\max}) e da densidade de energia ($\mathcal{E}_{\Sigma, \max}$) dependem de n (símbolos bola e caixa), comparando-os com os resultados do modelo sem o meio dielétrico (símbolo diamante). Como podemos ver, os máximos internos dos campos elétrico (caixa preta) e magnético (caixa azul) e da densidade de energia (caixa vermelha) diminuem quando o *winding number* cresce. Em contrapartida, $A_0(0) = \omega_0$ (bola verde) e os máximos externos dos campos elétrico (bola preta) e magnético (bola azul) e da densidade de energia (bola vermelha) aumentam quando o *winding number* cresce, concordando com os resultados preditos pelo modelo usual (símbolos diamantes com as respectivas cores) para $n \geq n^*$ (por exemplo, $n^* \sim 10$). Note na Figura 60b que as correspondentes posições r_E (bola preta), r_B (bola azul) e r_ε (bola vermelha) desses máximos externos são funções lineares de n . Para $n \geq n^{**}$ (por exemplo, $n^{**} \sim 6$), esses raios aumentam similarmente àqueles da teoria sem um meio dielétrico (símbolos diamantes com as respectivas cores).

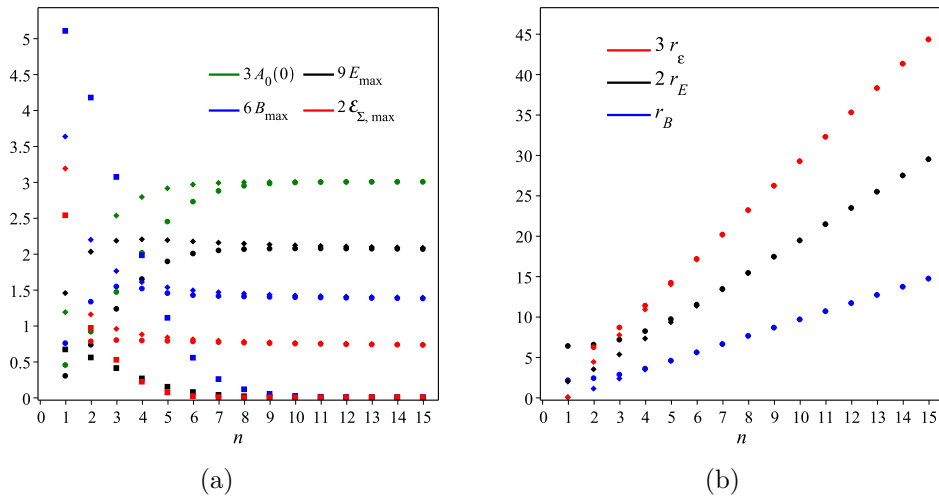


Figura 60 – Na Fig. 60a, potencial elétrico na origem ($A_0(0) = \omega_0$, verde) e máximos dos campos elétrico (E_{\max} , preto) e magnético (B_{\max} , azul) e da densidade de energia ($\mathcal{E}_{\Sigma, \max}$, vermelho) em função de n . Na Fig. 60b, posições radiais de E_{\max} (r_E , preto), B_{\max} (r_B , azul) e $\mathcal{E}_{\Sigma, \max}$ (r_ε , vermelho) como funções de n . Nas duas Figs., consideramos $\kappa = r_0 = \sigma = 1$. Os símbolos bola e caixa (diamante) referem-se ao modelo com (sem) um meio dielétrico. Em particular, o símbolo bola (caixa) corresponde ao máximo externo (interno).

A Figura 61a demonstra como o potencial escalar $A_0(0) = \omega_0$ (linha verde) e a densidade de energia $\mathcal{E}_\Sigma(0)$ (linha vermelha) na origem, os máximos interno E_{\max}^{inner} (linha preta) e externo E_{\max}^{outer} (linha lilás) do campo elétrico, os máximos interno B_{\max}^{inner} (linha

azul) e externo B_{\max}^{outer} (linha rosa) do campo magnético e o raio r_E^{inner} (linha laranja) de E_{\max}^{inner} mudam com r_0 no primeiro setor topológico para $\sigma = 1$. Podemos perceber que E_{\max}^{inner} , B_{\max}^{inner} e r_E^{inner} aumentam quando r_0 aumenta no intervalo $0 < r_0 < r_0^*$ (por exemplo, $r_0^* \sim 1$), tornando-se constante para $r_0 \gg r_0^*$. Em particular, as quantidades E_{\max}^{inner} e r_E^{inner} crescem linearmente no intervalo $0 < r_0 < r_0^*$. Além disso, as grandezas $A_0(0) = \omega_0$ e $\mathcal{E}_\Sigma(0)$ decrescem no intervalo $0 < r_0 < r_0^*$, porém também se tornam constantes para $r_0 \gg r_0^*$. Já as amplitudes E_{\max}^{outer} e B_{\max}^{outer} são sempre decrescente e, portanto, desprezíveis para $r_0 \gg r_0^*$.

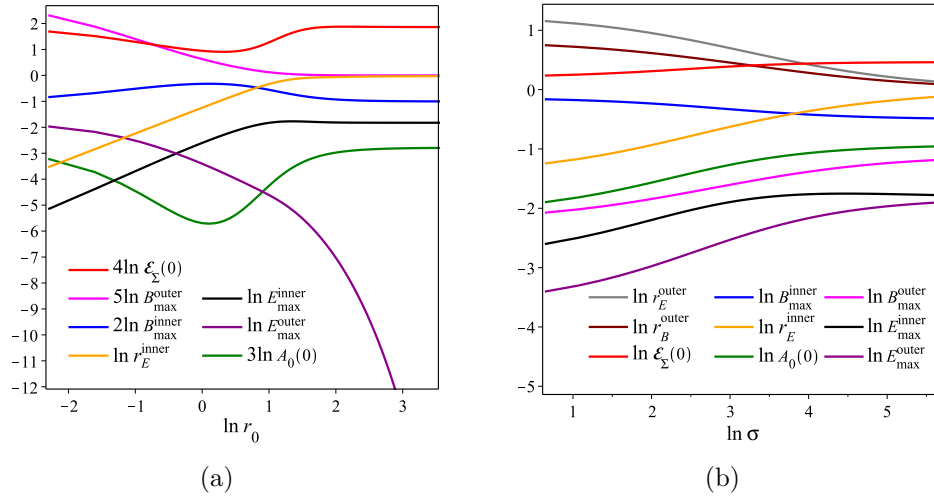


Figura 61 – Potencial elétrico $A_0(0) = \omega_0$ e densidade de energia $\mathcal{E}_\Sigma(0)$ em $r = 0$ e extremos dos campos elétrico e magnético com suas respectivas posições radiais em função de r_0 com $n = \sigma = \kappa = 1$ (Fig. 61a) e de σ com $n = r_0 = \kappa = 1$ (Fig. 61b). As duas Figs. estão em escala logarítmica.

Finalmente, na Figura 61b, exibimos os comportamentos de $A_0(0) = \omega_0$ (linha verde), $\mathcal{E}_\Sigma(0)$ (linha vermelha), E_{\max}^{inner} (linha preta), E_{\max}^{outer} (linha lilás), suas respectivas posições r_E^{inner} (linha laranja) e r_E^{outer} (linha cinza), B_{\max}^{inner} (linha azul) e B_{\max}^{outer} (linha rosa) com sua correspondente posição r_B^{outer} (linha marrom) em função de σ . Podemos checar que as quantidades $A_0(0) = \omega_0$, $\mathcal{E}_\Sigma(0)$, E_{\max}^{inner} , E_{\max}^{outer} , r_E^{inner} e B_{\max}^{outer} são sempre crescentes, enquanto r_E^{outer} , B_{\max}^{inner} e r_B^{outer} são sempre decrescentes funções de σ . Ademais, para σ grande, todas essas grandezas tendem a saturar.

9 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

9.1 CONCLUSÕES

Primeiramente, introduzimos uma contextualização geral a respeito do estudo do vórtice, desde a sua descoberta no estudo da supercondutividade até seu aparecimento no cenário da Teoria de Campos como um sóliton topológico.

Estudamos no segundo capítulo alguns conceitos fundamentais sobre Topologia e Teoria de Grupo, enfatizando ideias básicas acerca de homotopia pelas quais foi possível compreender que as quantizações da carga topológica, da energia e do fluxo magnético do vórtice se dão em função do *winding number*, um número inteiro n associado ao grupo fundamental de Poincaré $\pi_1(S^1)$.

No terceiro capítulo, apresentamos brevemente os principais aspectos da Teoria de Ginzburg-Landau e destacamos que essa teoria trata-se do limite não relativístico do modelo de Maxwell-Higgs. Além disso, falamos sobre o vórtice eletricamente carregado, o qual pode surgir em cenários onde dinâmica do campo de calibre é controlada pela ação de Chern-Simons ou de Maxwell-Chern-Simons. Aprendemos que o primeiro tipo de sóliton carregado desempenha um papel importante na descrição do Efeito Hall Quântico, bem como no estudo de ânions, enquanto o segundo interpola os vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen e de Chern-Simons.

Mostramos no capítulo 4 que os vórtices topológicos com os fluxos magnéticos quantizado ($\beta = \beta_1$) e não quantizado ($\beta = \beta_2$) de Loginov possuem os mesmos estados BPSs, reduzindo-se, assim, a uma só configuração – exceto por uma renormalização de um fator $1/4$ – com fluxo quantizado. Inferimos que o fator de normalização aparece porque o mapa de homotopia com $\beta = \beta_1$ cobre quatro vezes o mapa com $\beta = \beta_2$. Isso foi possível acontecer devido ao vínculo imposto sobre o potencial ter implicado na troca de uma condição de contorno de Neumann por uma de Dirichlet sobre o campo de calibre no infinito. Notamos também que esses defeitos têm revelado perfis similares ao de Abrikosov-Nielsen-Olesen [6, 9]. Enquanto este último modelo relaciona o campo de Higgs ao parâmetro de ordem, dentre os três campos escalares envolvidos na teoria $CP(2)$, somente dois estão relacionados efetivamente ao referido parâmetro, conforme visto em (4.85). Desse capítulo, surgiu a nossa primeira publicação, na revista *Physics Letters B* [24].

No capítulo 5, averiguamos a existência de vórtices $CP(2)$ autoduais não topológicos na presença de um meio dielétrico, onde a função dielétrica é dependente do campo escalar $CP(2)$, ou seja, $G(\phi_3)$. Vimos que os casos com $\beta = \beta_1$ e $\beta = \beta_2$ ainda podem ser

mapeados um no outro. Com o intuito de introduzir uma estrutura de mínimo simétrico, nós propusemos uma função dielétrica adequada e obtivemos soluções bem diferentes dos vórtices de Abrikosov. Como a forma para essa função não é única, podemos escolhê-la a fim de fitar diversos meios dielétricos de interesse físico. Em particular, sob a condição $\alpha(r) \ll 1$, temos visto que é possível encontrar soluções analíticas aproximadas e estados de vórtices com fluxos discretos para valores restritos do *winding number*. Os centros dos novos defeitos mostraram-se ligeiramente deslocados da origem, com posições e máximos dependendo explicitamente dos *winding numbers* permitidos. Já as soluções numéricas irrestritas têm revelado a formação de “duplos anéis” nos perfis do campo magnético – com fluxo não quantizado – e da densidade de energia. Vale destacar que o meio dielétrico tem introduzido pequenas ondulações no perfil do potencial vetor (principalmente para maiores valores de n), que são percebidas também tanto nos perfis do campo magnético como da densidade de energia BPS. Esses resultados originaram a nossa segunda publicação, na revista *Physical Review D* [25].

Vórtices não topológicos possuindo carga elétrica também foram estudados no capítulo 6 na teoria $CP(2)$ calibrada com a ação de Chern-Simons. De modo análogo ao modelo anterior, obtivemos soluções analíticas aproximadas, para $\alpha(r) \ll 1$, com fluxo magnético discreto para certos valores do *winding number*. Para as soluções numéricas sem a restrição $\alpha(r) \ll 1$, os comportamentos do campo magnético e da densidade de energia também apontam a formação de “duplos anéis”. Observamos ondulações nos perfis do potencial vetor similares àquelas na presença do meio dielétrico. É interessante atentar para o fato de que tanto as configurações aproximadas quanto as gerais evidenciam efeitos de inversão do campo elétrico. Isso acontece em virtude de o potencial elétrico ser proporcional ao campo ϕ_3 . Esse estudo culminou na nossa terceira publicação, na revista *Physical Review D* [26].

No capítulo 7, apresentamos o modelo sigma $O(3)$ não linear, mostrando como ele é capaz de prever soluções solitônicas tipo-vórtices. Indo além, ainda no capítulo 7, investigamos a formação desses defeitos topológicos na presença de meios dielétricos, onde a função dielétrica é dependente de um campo escalar real extra ($G(\chi)$), responsável por descrever os efeitos das estruturas internas. Vimos que tal campo satisfaz uma equação BPS à parte. Isso é um aspecto importante a comentar, frente à liberdade que podemos ter na escolha do superpotencial desse setor escalar, a fim de descrever diferentes configurações de sólitons autoduais. Dentre os três tipos de meios dielétricos que consideramos como exemplo para caso do campo escalar χ tipo-kink com largura controlada pelo parâmetro $\sigma > 0$, o primeiro deles (Eq. 7.91) não admite soluções fisicamente aceitáveis se $\sigma \geq 2$. Já as configurações com $\sigma = 1$ têm revelado o deslocamento da distribuição do campo magnético e da densidade de energia (esta exceto para $n = 1$) com respeito ao centro do defeito. Temos visto que a nulidade do campo magnético na origem e no infinito são fundamentais para compensar as divergências que seriam introduzidas pela função dielétrica. Por outro

lado, os comportamentos do campo sigma e do campo de calibre não manifestaram mudanças significativas em relação aos perfis da literatura, com $G(\chi) = 1$ [29]. Em suma, as configurações encontradas lembram-nos dos vórtices de Chern-Simons [13]. Quanto ao segundo meio (Eq. 7.103), devido à função dielétrica possuir uma singularidade no raio característico r_0 onde o kink se anula, o campo magnético zerou nesse ponto, formando um máximo global no centro do vórtice e um máximo local um pouco mais afastado, o que originou um núcleo envolvido por um anel. É possível concluir, inclusive, que o campo magnético sempre se anulará nos pontos onde $G(\chi)$ for irregular. Podemos ainda notar que este segundo meio tem provocado a formação de um *plateau* no perfil do potencial vetor em r_0 , além de consideráveis mudanças nos gráficos da densidade de energia similares às daquelas do campo magnético. No intervalo $0 \leq r \leq r_0$, o campo magnético comporta-se como os dos vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen [6, 9], enquanto para $r > r_0$, conforme aqueles dos de Chern-Simons [13]. O parâmetro σ tem desempenhado o papel de regular o tamanho do núcleo e a amplitude do anel. No terceiro e último cenário, nós consideramos uma função dielétrica oscilante (Eq. 7.115) controlada por dois parâmetros adicionais ($m \in \mathbb{Z}$ $\lambda \in \mathbb{R}$) capaz de descrever configurações multianelares. Os efeitos das estruturas internas têm sido mais evidentes para $\lambda = 0$ do que para $\lambda \neq 0$. Neste último subcaso, a influência do meio dielétrico tem se tornado mais relevante para menores valores de λ , de modo que, para valores suficientemente grandes, recuperamos o modelo sigma original [29]. Nos dois subcasos $\lambda = 0$ e $\lambda \neq 0$, tem ocorrido o surgimento de $2m$ -plateaus ao longo do perfil do campo de calibre, implicando no mesmo número de anéis de campo magnético ao redor do núcleo. Neste terceiro meio dielétrico, o parâmetro σ também tem regulado o tamanho do núcleo e a intensidade do anel externo. Todas essas previsões teóricas foram publicadas no nosso quarto artigo, na revista *Physical Review D* [35].

No capítulo 8, propusemos uma extensão generalizada do modelo Maxwell-Chern-Simons-Sigma $O(3)$ para descrever novos defeitos tipo vórtices carregados com fluxo magnético quantizado imersos nos dois primeiros meios dielétricos considerados no capítulo 7. No meio (7.91), descobrimos que, mesmo com a ação de Chern-Simons, não existem soluções satisfazendo as condições de contorno para $\sigma \geq 2$. Assim, discutimos apenas o caso $\sigma = 1$. Temos observado que as soluções numéricas calculadas mudam consideravelmente em relação ao modelo usual, no qual $G = 1$ [94, 95]. Por exemplo, o campo magnético se anula na origem, assim como nos vórtices de CSH [13, 15] e de CSS $O(3)$ [28]. Temos notado também que n e r_0 controlam as amplitudes e os raios dos anéis de campos elétrico e magnético, bem como os valores do potencial elétrico e da densidade de energia na origem. Em particular, temos visto que r_0 não pode ser muito grande, a ponto dessas grandezas se anularem em toda região. Vale a pena mencionar ainda que o meio dielétrico tem modificado o típico decaimento exponencial [94, 95] dos campos, tornando esses novos defeitos menos localizados. Por outro lado, no segundo meio dielétrico (7.103), há soluções estáveis para $\sigma \geq 2$. Neste cenário, o comprimento característico r_0 pode ser ilimitado, já

que recuperamos o modelo usual para $r_0 \gg 1$. Por causa da divergência da função dielétrica (7.103) em $r = r_0$, temos visto que os campos elétrico e magnético zeram nesse ponto para manter a energia finita. Consequentemente, a distribuição do campo elétrico forma duplos anéis, ao passo que as do campo magnético e da densidade de energia (exceto para $n = 1$) geram um núcleo cercado por um anel. Contudo, os campos têm preservado o decaimento exponencial no infinito. De maneira geral, temos percebido que as singularidades da função dielétrica têm sido suficientes para gerar estruturas anelares. Baseado nisso, sugerimos que este último modelo seja capaz também de descrever configurações multianelares. Esses novos resultados estão em processo de publicação.

9.2 PERSPECTIVAS

Variações dos modelos que investivamos podem resultar também em objetos de grande interesse científico. Por exemplo, é possível ainda introduzir uma função generalizada nos setores escalares $CP(2)$ e sigma $O(3)$, na expectativa de se obter configurações tipo vórtices com características exóticas, conforme feito nos modelos de Maxwell-Higgs [23], o qual prediz a existência de sólitons não topológicos com soluções analíticas aproximadas, bem como nos modelos generalizados $CP(1)$ [74] e de Maxwell-Higgs [98], que apontam a formação de sólitons topológicos com soluções gerais analíticas. Tais soluções podem ter importantes utilidades, principalmente para descrever de forma computacional processos de colisões entre vórtices na presença de meios dielétricos, já que a analiticidade facilita a implementação do *boost* de Lorentz nas soluções estacionárias, assim como é feito com os kinks [12].

Outra alternativa seria introduzir funções generalizadas em acoplamentos não mínimos entre o setor de calibre e os setores $CP(2)$ e sigma $O(3)$, com o intuito de estudar efeitos similares ao do momento magnético anômalo, consoante proposto nas Refs. [81, 82, 99]. Essa proposta é consistente porque o acoplamento de Pauli para os férmions em (2+1)-dimensões pode ser incorporado em uma derivada covariante não mínima para campos escalares, graças à decomposição de Gordon para a corrente espinorial [100]. Além disso, poderíamos considerar derivadas superiores como uma extensão relativística de modelos que descrevem *efeitos de proximidade* entre camadas de materiais supercondutores e ferromagnéticos. Neste último caso, é provável que encontremos pequenas oscilações nos perfis dos campos escalares, como sugerido ocorrer com o parâmetro de ordem na Ref. [101].

Seria interessante também considerar extensões dos modelos $CP(2)$ e sigma $O(3)$ calibrados, introduzindo termos responsáveis por violar a simetria de Lorentz. Trabalhos nessa direção têm sido intensamente desenvolvidos com o objetivo de encontrar limites superiores para os coeficientes de violação e observar as influências desses parâmetros

nas soluções estendidas. A exemplo, podemos destacar a Ref. [102], a qual aponta que a presença de tal violação apenas no setor de calibre se comporta efetivamente como um meio dielétrico, fornecendo soluções tipo vórtices descarregados compactos, e que a presença da violação nos setores de calibre e de Higgs induz a formação de vórtices descarregados com fluxo magnético fracionário. Ademais, tem sido mostrado que a violação da simetria de Lorentz pode acarretar a formação de vórtices carregados, mesmo na ausência do termo de Chern-Simons, exibindo inversão de fluxo magnético [83, 96]. Em todos os casos, as configurações foram obtidas em um *ansatz* simetricamente rotacional. É claro que fora desse *ansatz* os termos de violação introduzem anisotropia no meio. Assim, uma matriz de violação no setor de calibre pode ser reinterpretada como uma matriz dielétrica, enquanto uma no setor escalar, como uma matriz de massa (do par de cooper), no âmbito da matéria condensada. Aliás, os efeitos anisotrópicos são características marcantes dos supercondutores multilaminares, como aqueles descritos dentro do modelo Lawrence-Doniach [103, 104].

Por fim, dentre outros projetos de pesquisa, pretendemos ainda estudar uma extensão da teoria sigma $O(3)$, conhecida como modelo de Skyrme [105]. Os modelos de Skyrme possuem lugar de destaque na comunidade científica, pois suas aplicações vão desde a Cromodinâmica Quântica, onde os skyrmions apresentam efetivamente propriedades hadrônicas [106, 107], até a Física da Matéria Condensada, tal como condensados de Bose-Einstein [108] e materiais magnéticos [109, 110]. Especialmente, nos materiais magnéticos, os skyrmions são defeitos topológicos formados ao longo da textura da magnetização. A natureza solitônica deles permite que eles sejam organizados de forma extremamente compacta em uma pista de magnetização, possibilitando uma altíssima capacidade de armazenamento e processamento de informação [111, 112]. Em teoria de campos, o modelo de Skyrme foi proposto originalmente em (3+1)-dimensões. Não obstante, existe uma versão em (2+1)-dimensões conhecida como modelo de baby Skyrme [113]. Apesar de esta última teoria fornecer sólitons estáveis, ela não suporta estados autoduais. Entretanto, na ausência do termo sigma usual, ou seja, no caso do chamado modelo de baby Skyrme restrito, o limite BPS existe [114, 115]. De maneira natural, um excelente objeto de estudo seria investigar a existência de estados autoduais quando o campo de baby Skyrme restrito interage com um campo de calibre abeliano. Nessa direção, vários trabalhos têm sido publicados, discutindo cenários nos quais, por exemplo, a dinâmica do campo calibre é regida pela ação de Maxwell [116, 117], Chern-Simons [118, 119] ou de Maxwell-Chern-Simons [120]. Indo adiante, poderíamos investigar a influência de meios dielétricos, acoplamentos não mínimos ou de efeitos anisotrópicos sobre o estado BPS do baby skyrmion calibrado.

Referências

- 1 Kamerlingh Onnes, H. Further experiments with liquid helium. C. On the change of electric resistance of pure metals at very low temperatures etc. IV. The resistance of pure mercury at helium temperatures. **Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences**, v. 13, p. 1274–1276, abr. 1911. Citado na página 20.
- 2 MEISSNER, W.; OCHSENFELD, R. Ein neuer effekt bei eintritt der supraleitfähigkeit. **Naturwissenschaften**, v. 21, n. 44, p. 787–788, Nov 1933. ISSN 1432-1904. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 37.
- 3 LONDON, F.; LONDON, H. The electromagnetic equations of the supraconductor. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A - Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society, v. 149, n. 866, p. 71–88, mar 1935. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 37.
- 4 GINZBURG, V. L. On the theory of superconductivity. **Il Nuovo Cimento (1955-1965)**, v. 2, n. 6, p. 1234–1250, Dec 1955. ISSN 1827-6121. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 37.
- 5 GINZBURG, V. L.; LANDAU, L. D. **On the Theory of Superconductivity**. Heidelberg, Berlin: Springer, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 37.
- 6 ABRIKOSOV, A. A. On the magnetic properties of superconductors of the second group. **Soviet Physics JETP**, v. 5, n. 6, p. 1174–1182, jun. 1957. Citado 8 vezes nas páginas 20, 35, 39, 123, 126, 127, 153 e 155.
- 7 ESSMANN, U.; TRÄUBLE, H. The direct observation of individual flux lines in type ii superconductors. **Physics Letters A**, v. 24, n. 10, p. 526 – 527, 1967. ISSN 0375-9601. Citado na página 20.
- 8 BARDEEN, J.; COOPER, L. N.; SCHRIEFFER, J. R. Theory of superconductivity. **Physical Review**, American Physical Society (APS), v. 108, n. 5, p. 1175–1204, dec 1957. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 41.
- 9 NIELSEN, H.; OLESEN, P. Vortex-line models for dual strings. **Nuclear Physics B**, Elsevier BV, v. 61, p. 45–61, sep 1973. Citado 9 vezes nas páginas 20, 35, 42, 45, 123, 126, 127, 153 e 155.
- 10 BOGOMOL'NYI, E. B. The stability of classical solutions. **Sov. J. Nucl. Phys.**, v. 24, n. 4, p. 861–870, out. 1976. Citado 3 vezes nas páginas 21, 43 e 46.
- 11 PRASAD, M. K.; SOMMERFIELD, C. M. Exact classical solution for the t hooft monopole and the julia-zee dyon. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 35, n. 12, p. 760–762, sep 1975. Citado 3 vezes nas páginas 21, 36 e 46.
- 12 MANTON, N.; SUTCLIFFE, P. **Topological Solitons (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)**. New York, USA: Cambridge University Press, 2010. ISBN 9780511617034. Citado 4 vezes nas páginas 21, 36, 43 e 156.

- 13 JACKIW, R.; WEINBERG, E. J. Self-dual chern-simons vortices. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 64, n. 19, p. 2234–2237, may 1990. Citado 8 vezes nas páginas [21](#), [48](#), [52](#), [54](#), [123](#), [127](#), [142](#) e [155](#).
- 14 HONG, J.; KIM, Y.; PAC, P. Y. Multivortex solutions of the abelian chern-simons-higgs theory. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 64, n. 19, p. 2230–2233, may 1990. Citado 3 vezes nas páginas [21](#), [52](#) e [54](#).
- 15 JACKIW, R.; LEE, K.; WEINBERG, E. J. Self-dual chern-simons solitons. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 42, p. 3488–3499, Nov 1990. Citado 7 vezes nas páginas [21](#), [52](#), [54](#), [56](#), [127](#), [142](#) e [155](#).
- 16 LEE, C.; LEE, K.; MIN, H. Self-dual maxwell chern-simons solitons. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 252, n. 1, p. 79–83, dec 1990. Citado 6 vezes nas páginas [21](#), [65](#), [66](#), [135](#), [137](#) e [141](#).
- 17 HALL, E. H. On a new action of the magnet on electric currents. **American Journal of Mathematics**, JSTOR, v. 2, n. 3, p. 287, sep 1879. Citado 2 vezes nas páginas [21](#) e [51](#).
- 18 PRANGE, R. E.; GIRVIN, S. M. **The Quantum Hall Effect**. New York, USA: Springer New York, 1990. ISBN 13:978-0-387-97 177-3. Citado 2 vezes nas páginas [21](#) e [51](#).
- 19 LAUGHLIN, R. B. Anomalous quantum hall effect: An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 50, n. 18, p. 1395–1398, may 1983. Citado 2 vezes nas páginas [21](#) e [51](#).
- 20 COMTET, A. *et al.* (Ed.). **Topological aspects of low dimensional systems**. Berlin ,Heidelberg, New York: Springer, 1999. v. 69. (Les Houches Ecole d Ete de Physique Theorique, v. 69). ISBN 978-3-540-66909-8. Citado 2 vezes nas páginas [21](#) e [64](#).
- 21 GEIM, A. K. *et al.* Non quantized penetration of magnetic field in the vortex state of superconductors. **Nature**, Springer Science and Business Media LLC, v. 407, n. 6800, p. 55–57, sep 2000. Citado 2 vezes nas páginas [21](#) e [86](#).
- 22 BARDEEN, J. Quantization of flux in a superconducting cylinder. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 7, n. 5, p. 162–163, sep 1961. Citado 2 vezes nas páginas [21](#) e [86](#).
- 23 BAZEIA, D. *et al.* Nontopological self-dual maxwell-higgs vortices. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 109, n. 2, p. 21001, jan 2015. Citado 4 vezes nas páginas [21](#), [86](#), [87](#) e [156](#).
- 24 CASANA, R.; DIAS, M.; HORA, E. da. Topological first-order vortices in a gauged CP (2) model. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 768, p. 254–259, may 2017. Citado 3 vezes nas páginas [22](#), [71](#) e [153](#).
- 25 CASANA, R.; DIAS, M.; HORA, E. da. Nontopological first-order vortices in a gauged CP(2) model with a dielectric function. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 96, n. 7, oct 2017. Citado 3 vezes nas páginas [22](#), [86](#) e [154](#).

- 26 CASANA, R.; DIAS, M.; HORA, E. da. Nontopological first-order vortices in a gauged $CP(2)$ theory endowed with the chern-simons action. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 98, n. 5, sep 2018. Citado 3 vezes nas páginas 22, 97 e 154.
- 27 SCHROERS, B. Bogomol'nyi solitons in a gauged $o(3)$ sigma model. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 356, n. 2-3, p. 291–296, Aug 1995. ISSN 0370-2693. Citado 5 vezes nas páginas 22, 112, 114, 116 e 117.
- 28 MUKHERJEE, P. On the question of degeneracy of topological solitons in a gauged $o(3)$ non-linear sigma model with chern-simons term. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 403, n. 1-2, p. 70–74, jun 1997. Citado 5 vezes nas páginas 22, 111, 114, 142 e 155.
- 29 MUKHERJEE, P. Magnetic vortices in a gauged $o(3)$ sigma model with symmetry breaking self-interaction. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 58, n. 10, oct 1998. Citado 7 vezes nas páginas 22, 114, 123, 124, 127, 128 e 155.
- 30 BAZEIA, D.; MARQUES, M.; MENEZES, R. Maxwell - higgs vortices with internal structure. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 780, p. 485–490, may 2018. Citado 3 vezes nas páginas 22, 116 e 120.
- 31 ANDRADE, J. *et al.* First-order solitons with internal structures in an extended maxwell- $CP(2)$ model. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 99, n. 5, mar 2019. Citado 3 vezes nas páginas 22, 116 e 120.
- 32 SHELBY, R. A. Experimental verification of a negative index of refraction. **Science**, American Association for the Advancement of Science (AAAS), v. 292, n. 5514, p. 77–79, apr 2001. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 116.
- 33 RAMAKRISHNA, S. A. Physics of negative refractive index materials. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 68, n. 2, p. 449–521, jan 2005. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 116.
- 34 CALOZ, C. Perspectives on em metamaterials. **Materials Today**, Elsevier BV, v. 12, n. 3, p. 12–20, mar 2009. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 116.
- 35 CASANA, R.; SANTOS, A. C.; DIAS, M. BPS solitons with internal structure in the gauged $o(3)$ sigma model. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 102, n. 8, oct 2020. Citado 3 vezes nas páginas 22, 109 e 155.
- 36 DIXMIER, J. **General Topology**. New York, USA: Springer-Verlag, 1984. Título traduzido da edição francesa: *Topologie Général*. ISBN 0387909729. Citado na página 24.
- 37 VILCHES, M. A. **Topologia Geral**. Departamento de Análise, IME-UERJ. Citado na página 24.
- 38 CAPITELLI, N.; MINIAN, G. Unión matemática argentina. In: **Notas de Topología Combinatoria**. FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argetina: [s.n.], 2009. p. 48. Citado na página 24.
- 39 HATCHER, A. **Algebraic Topology**. 1. ed. New York, USA: Cambridge University Press, 2001. ISBN 9780521795401. Citado 4 vezes nas páginas 24, 31, 34 e 36.

- 40 HU, S.-T. **Homotopy Theory, Volume 8 (Pure and Applied Mathematics)**. New York, USA: Academic Press, 1959. ISBN 9780123584502. Citado 4 vezes nas páginas 24, 31, 34 e 36.
- 41 COHEN, M. **A Course in Simple-Homotopy Theory**. 1. ed. New York, USA: Springer, 1973. (Graduate Texts in Mathematics (Book 10)). ISBN 0387900551. Citado 3 vezes nas páginas 24, 34 e 36.
- 42 LIMA, E. L. **Introdução à Topologia**. 2. ed. Rio de Janeiro, Brasil: [s.n.], 1961. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 34.
- 43 NAKAHARA, M. **Geometry, Topology and Physics**. 2. ed. Philadelphia, USA: IoP, 1990. (Graduate Student Series in Physics). ISBN 0750306068. Citado 5 vezes nas páginas 24, 26, 30, 34 e 36.
- 44 RENTELN, P. **Manifolds, Tensors, and Forms**. California State University, San Bernardino, USA: Cambridge University Press, 2017. ISBN 978-1107042193. Citado 3 vezes nas páginas 24, 34 e 36.
- 45 PIRES, A. S. T. **Geometria Diferencial Para Físicos**. 1. ed. São Paulo, Brasil: Livraria da Física, 2015. ISBN 9788578613211. Citado 3 vezes nas páginas 24, 26 e 31.
- 46 COSTA, J. C. R. R. da; ANDRADE, M. G. C. Algumas considerações sobre homotopia e homologia. p. 14, dez. 2013. Citado na página 31.
- 47 MUG and donut homotopy equivalence. Disponível em: <<https://calculus123.com/index.php?curid=2482>>. Citado na página 32.
- 48 BASSALO, J. M. F.; CATTANI, M. S. D. **Teoria de Grupos**. 2. ed. São Paulo, Brasil: Livraria da Física, 2008. ISBN 9788578610005. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 36.
- 49 RUBAKOV, V. **Classical Theory of Gauge Fields**. Princeton, Ney Jersey, USA: Princeton University Press, 2002. ISBN 9780691059273. Citado 6 vezes nas páginas 35, 36, 38, 43, 45 e 72.
- 50 CIRCLE Homotopy groups of spheres BPST instanton Map, circle, blue, text, symmetry, sphere, number png. Internet. Disponível em: <<https://www.nextpng.com/en/transparent-png-cwnej>>. Citado na página 36.
- 51 ARAFUNE, J. Topology of higgs fields. **Journal of Mathematical Physics**, AIP Publishing, v. 16, n. 2, p. 433–437, out. 1975. Citado na página 36.
- 52 TIMM, C. **Theory of Superconductivity**. Institute of Theoretical Physics, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.
- 53 RJABININ, J. N.; SHUBNIKOW, L. W. Magnetic properties and critical currents of supra-conducting alloys. **Nature**, Springer Science and Business Media LLC, v. 135, n. 3415, p. 581–582, apr 1935. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.
- 54 KLEINER, W. H.; ROTH, L. M.; AUTLER, S. H. Bulk solution of ginzburg-landau equations for type ii superconductors: Upper critical field region. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 133, p. A1226–A1227, Mar 1964. Citado na página 40.

- 55 HORVATHY, P. A.; ZHANG, P. Vortices in (abelian) chern–simons gauge theory. **Physics Reports**, Elsevier BV, v. 481, n. 5-6, p. 83–142, sep 2009. Citado na página 51.
- 56 AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. **Physical Review**, American Physical Society (APS), v. 115, n. 3, p. 485–491, aug 1959. Citado na página 52.
- 57 GRIFFITHS, D. J. **Mecânica Quântica**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2011. Citado na página 52.
- 58 DUNNE, G. V. **Aspects of Chern-Simons Theory**. 1999. Citado na página 64.
- 59 DESER, S.; JACKIW, R.; TEMPLETON, S. Three-dimensional massive gauge theories. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 48, n. 15, p. 975–978, apr 1982. Citado na página 64.
- 60 MENTECH, G. L. **Vórtices BPS com fluxo magnético fracionário no Modelo Padrão Estendido**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Maranhão, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 65, 66 e 137.
- 61 LOGINOV, A. Topological solitons in a gauged CP(2) model. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 93, n. 6, mar 2016. Citado 6 vezes nas páginas 71, 72, 73, 76, 79 e 86.
- 62 CREMMER, E.; SCHERK, J. The supersymmetric non-linear σ - model in four dimensions and its coupling to supergravity. **Physics Letters B**, v. 74, n. 4, p. 341 – 343, 1978. ISSN 0370-2693. Citado na página 71.
- 63 EICHENHERR, H. $su(n)$ invariant non-linear σ models. **Nuclear Physics B**, v. 146, n. 1, p. 215 – 223, 1978. ISSN 0550-3213. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 111.
- 64 GOLO, V. L.; PERELOMOV, A. M. A few remarks on chiral theories with sophisticated topology. **Letters in Mathematical Physics**, v. 2, n. 6, p. 477–482, Nov 1978. ISSN 1573-0530. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 111.
- 65 GOLO, A. M. P. V. L. Solution of the duality equations for the two-dimensional $su(n)$ -invariant chiral model. **Physics Letters B**, v. 79, n. 1, p. 112 – 113, 1978. ISSN 0370-2693. Citado na página 71.
- 66 POLYAKOV, A. Interaction of goldstone particles in two dimensions. applications to ferromagnets and massive yang-mills fields. **Physics Letters B**, v. 59, n. 1, p. 79 – 81, 1975. ISSN 0370-2693. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 111.
- 67 SHIFMAN, M.; YUNG, A. Supersymmetric solitons. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 79, p. 1139–1196, Oct 2007. Citado na página 71.
- 68 DADDA M. LUSCHER, P. D. V. A. A $1/n$ expandable series of non-linear σ models with instantons. **Nuclear Physics B**, v. 146, n. 1, p. 63 – 76, 1978. ISSN 0550-3213. Citado na página 71.
- 69 WITTEN, E. Instantons, the quark model, and the $1/n$ expansion. **Nuclear Physics B**, v. 149, n. 2, p. 285 – 320, 1979. ISSN 0550-3213. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 111.

- 70 MORANDI, G. **The Role of Topology in Classical and Quantum Physics**. Heidelberg: Springer - Verlag, 1992. Citado na página 72.
- 71 GODDARD, P.; OLIVE, D. I. Magnetic monopoles in gauge field theories. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 41, n. 9, p. 1357–1437, sep 1978. Citado na página 72.
- 72 LEE, T. D.; PANG, Y. Nontopological solitons. **Physics Reports**, Elsevier BV, v. 221, n. 5-6, p. 251–350, nov 1992. Citado na página 86.
- 73 BAZEIA, D. *et al.* Generalized self-dual chern-simons vortices. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 81, n. 12, jun 2010. Citado na página 86.
- 74 CASANA, R.; SOURROUILLE, L. Self-dual soliton solutions in a chern-simons-CP(1) model with a nonstandard kinetic term. **Modern Physics Letters A**, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 29, n. 23, p. 1450124, jul 2014. Citado 2 vezes nas páginas 86 e 156.
- 75 BAZEIA, D. *et al.* BPS solutions to a generalized maxwell-higgs model. **The European Physical Journal C**, Springer Science and Business Media LLC, v. 71, n. 12, dec 2011. Citado na página 86.
- 76 KETOV, S. V. **Quantum Non-linear Sigma-Models**. [S.l.]: Springer-Verlag, 2000. ISBN 978-3540674610. Citado na página 109.
- 77 RAJARAMAN, R. **Solitons and instantons. An introduction to solitons and instantons in Quantum Field Theory**. North Holland: NHPL, 1982. (North-Holland Personal Library, 15). Citado na página 111.
- 78 ZAKRZEWSKI, W. J. **Low-dimensional Sigma Models**. [S.l.]: CRC Press, 1989. ISBN 978-0852742310. Citado na página 111.
- 79 LEESE, R. A.; PEYRARD, M.; ZAKRZEWSKI, W. J. Soliton stability in the $o(3)$ sigma model in $2 + 1$ dimensions. **Nonlinearity**, IOP Publishing, v. 3, n. 2, p. 387–412, may 1990. Citado na página 113.
- 80 GHOSH, P. K.; GHOSH, S. K. Topological and nontopological solitons in a gauged $o(3)$ sigma model with chern-simons term. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 366, n. 1-4, p. 199–204, jan 1996. Citado na página 114.
- 81 CAVALCANTE, F.; CUNHA, M.; ALMEIDA, C. Vortices in a nonminimal maxwell-chern-simons $o(3)$ sigma model. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 475, n. 3-4, p. 315–323, mar 2000. Citado 2 vezes nas páginas 116 e 156.
- 82 CUNHA, M. S.; LANDIM, R. R.; ALMEIDA, C. A. S. Nonminimal maxwell-chern-simons- $o(3)$ -sigma vortices: Asymmetric potential case. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 74, n. 6, sep 2006. Citado 2 vezes nas páginas 116 e 156.
- 83 CASANA, R.; FARIAS, C. F.; FERREIRA, M. M. Topological self-dual configurations in a lorentz-violating gauged $O(3)$ sigma model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 92, p. 125024, Dec 2015. Citado 3 vezes nas páginas 116, 141 e 157.
- 84 WITTEN, E. Superconducting strings. **Nuclear Physics B**, Elsevier BV, v. 249, n. 4, p. 557–592, feb 1985. Citado na página 116.

- 85 PETERSON, A. J.; SHIFMAN, M.; TALLARITA, G. Low energy dynamics of $u(1)$ vortices in systems with cholesteric vacuum structure. **Annals of Physics**, Elsevier BV, v. 353, p. 48–63, feb 2015. Citado na página [116](#).
- 86 BAZEIA, D.; MENEZES, J.; MENEZES, R. New global defect structures. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 91, n. 24, dec 2003. Citado 3 vezes nas páginas [116](#), [120](#) e [139](#).
- 87 DERRICK, G. H. Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles. **Journal of Mathematical Physics**, AIP Publishing, v. 5, n. 9, p. 1252–1254, sep 1964. Citado na página [120](#).
- 88 HOBART, R. H. On the instability of a class of unitary field models. **Proceedings of the Physical Society**, IOP Publishing, v. 82, n. 2, p. 201–203, aug 1963. Citado na página [120](#).
- 89 BAZEIA, D.; DORIA, M.; RODRIGUES, E. Topological excitations in magnetic materials. **Physics Letters A**, Elsevier BV, v. 380, n. 22-23, p. 1947–1952, may 2016. Citado na página [120](#).
- 90 BAZEIA, D.; RAMOS, J.; RODRIGUES, E. Topological strength of magnetic skyrmions. **Journal of Magnetism and Magnetic Materials**, Elsevier BV, v. 423, p. 411–420, feb 2017. Citado na página [120](#).
- 91 BAZEIA, D.; MOHAMMADI, A. Dirac field in the background of a planar defect. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 779, p. 420–424, apr 2018. Citado na página [120](#).
- 92 BAZEIA, D. *et al.* Multilayered vortices. **Physical Review Research**, American Physical Society (APS), v. 1, n. 3, oct 2019. Citado 2 vezes nas páginas [120](#) e [129](#).
- 93 CHAIKIN, P. M.; LUBENSKY, T. C. **Principles of condensed matter physics**. Cambridge: Cambridge University Press (CUP), 1995. ISBN 0-52143224-3. Citado na página [121](#).
- 94 HAN, J.; NAM, H. seok. On the topological multivortex solutions of the self-dual maxwell-chern-simons gauged $o(3)$ sigma model. **Letters in Mathematical Physics**, Springer Science and Business Media LLC, v. 73, n. 1, p. 17–31, jul 2005. Citado 4 vezes nas páginas [141](#), [142](#), [146](#) e [155](#).
- 95 YANG, S.-G.; CHEN, Z.-Y.; CHERN, J.-L. The solution structure of the $o(3)$ sigma model in a maxwell-chern-simons theory. **Journal of Mathematical Physics**, AIP Publishing, v. 58, n. 7, p. 071503, jul 2017. Citado 4 vezes nas páginas [141](#), [142](#), [146](#) e [155](#).
- 96 CASANA, R. *et al.* Magnetic flux inversion in charged bps vortices in a lorentz-violating maxwell higgs framework. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 718, n. 2, p. 620–624, dec 2012. Citado 2 vezes nas páginas [141](#) e [157](#).
- 97 CASANA, R.; GONZALEZ-GUTIERREZ, N. H.; HORA, E. da. Topological BPS solitons in a maxwell-chern-simons gauged $CP(2)$ model. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 127, n. 6, p. 61001, nov 2019. Citado na página [141](#).
- 98 CASANA, R. *et al.* Analytical bps maxwell-higgs vortices. **Advances in High Energy Physics**, Hindawi Limited, v. 2014, p. 1–9, 2014. Citado na página [156](#).

- 99 TORRES, M. Bogomol'nyi limit for nontopological solitons in a chern-simons model with anomalous magnetic moment. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 46, n. 6, p. R2295–R2298, sep 1992. Citado na página 156.
- 100 KOGAN, I. I. Induced magnetic moment for anyons. Elsevier BV, v. 262, n. 1, p. 83–87, jun 1991. Citado na página 156.
- 101 BUZDIN, A. I. Proximity effects in superconductor-ferromagnet heterostructures. American Physical Society (APS), v. 77, n. 3, p. 935–976, sep 2005. Citado na página 156.
- 102 MILLER, C. *et al.* Uncharged compactlike and fractional lorentz-violating BPS vortices in the CPT-even sector of the standard model extension. American Physical Society (APS), v. 86, n. 6, p. 065011, sep 2012. Citado na página 157.
- 103 KETTERSON, J. B. **Superconductivity**. Cambridge New York: Cambridge University Press, 1999. ISBN 9780521562959. Citado na página 157.
- 104 BUSCHOW, K. H. J. **Concise encyclopedia of magnetic and superconducting materials**. Amsterdam Boston: Elsevier, 2005. ISBN 0080445861. Citado na página 157.
- 105 SKYRME, T. H. R. A non-linear field theory. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society, v. 260, n. 1300, p. 127–138, feb 1961. Citado na página 157.
- 106 ADKINS, G. S.; NAPPI, C. R.; WITTEN, E. Static properties of nucleons in the skyrme model. **Nuclear Physics B**, Elsevier BV, v. 228, n. 3, p. 552–566, dec 1983. Citado na página 157.
- 107 ADKINS, G. S.; NAPPI, C. R. The skyrme model with pion masses. **Nuclear Physics B**, Elsevier BV, v. 233, n. 1, p. 109–115, feb 1984. Citado na página 157.
- 108 KHAWAJA, U. A.; STOOFF, H. Skyrmions in a ferromagnetic bose–einstein condensate. **Nature**, Springer Science and Business Media LLC, v. 411, n. 6840, p. 918–920, jun 2001. Citado na página 157.
- 109 MUHLBAUER, S. *et al.* Skyrmion lattice in a chiral magnet. **Science**, American Association for the Advancement of Science (AAAS), v. 323, n. 5916, p. 915–919, feb 2009. Citado na página 157.
- 110 YU, X. Z. *et al.* Real-space observation of a two-dimensional skyrmion crystal. **Nature**, Springer Science and Business Media LLC, v. 465, n. 7300, p. 901–904, jun 2010. Citado na página 157.
- 111 FERT, A.; REYREN, N.; CROS, V. Magnetic skyrmions: advances in physics and potential applications. Springer Science and Business Media LLC, v. 2, n. 7, jun 2017. Citado na página 157.
- 112 BACK, C. *et al.* The 2020 skyrmionics roadmap. IOP Publishing, v. 53, n. 36, p. 363001, jun 2020. Citado na página 157.
- 113 PIETTE, B.; SCHROERS, B.; ZAKRZEWSKI, W. Dynamics of baby skyrmions. Elsevier BV, v. 439, n. 1-2, p. 205–235, apr 1995. Citado na página 157.

-
- 114 GISIGER, T.; PARANJAPE, M. B. Solitons in a baby-skyrme model with invariance under area-preserving diffeomorphisms. *American Physical Society (APS)*, v. 55, n. 12, p. 7731–7738, jun 1997. Citado na página [157](#).
- 115 ADAM, C. *et al.* Investigation of restricted baby skyrme models. *American Physical Society (APS)*, v. 81, n. 8, apr 2010. Citado na página [157](#).
- 116 ADAM, C. *et al.* Gauged BPS baby skyrme model. *American Physical Society (APS)*, v. 86, n. 4, aug 2012. Citado na página [157](#).
- 117 ADAM, C. *et al.* Topological phase transitions in the gauged BPS baby skyrme model. *Springer Science and Business Media LLC*, v. 2015, n. 5, may 2015. Citado na página [157](#).
- 118 ADAM, C. *et al.* Lifshitz field theories with SDiff symmetries. *Springer Science and Business Media LLC*, v. 2013, n. 3, mar 2013. Citado na página [157](#).
- 119 CASANA, R. *et al.* Self-dual solitons in a generalized chern-simons baby skyrme model. **Physical Review D**, *American Physical Society (APS)*, v. 100, n. 4, aug 2019. Citado na página [157](#).
- 120 CASANA, R. *et al.* Self-dual solitons in a maxwell-chern-simons baby skyrme model. **Physical Review D**, *American Physical Society (APS)*, v. 101, n. 4, feb 2020. Citado na página [157](#).

Apêndices

APÊNDICE A – EQUIVALÊNCIA ENTRE AS EQUAÇÕES AUTODUAIS E DE EULER - LAGRANGE

A.1 Capítulo 4

A.1.1 Lei de Ampère

Para verificar a correspondência entre as equações BPSs e as de Euler-Lagrange, vamos considerar inicialmente a densidade lagrangeana associada a (4.69),

$$\mathcal{L} = -\mathcal{E} = -\frac{1}{2} \left(\frac{A'}{gr} \right)^2 - h (\alpha')^2 - \frac{h}{r^2} \left(\frac{A}{2} - m \right)^2 \sin^2 \alpha - \frac{g^2 h^2}{2} \cos^2 \alpha, \quad (\text{A.1})$$

em que temos considerado apenas o caso $\beta = \beta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, em vista do caso $\beta = \beta_2 = \frac{\pi}{2}k$ ser fisicamente equiparado pelas renormalizações dadas em (4.104). Também já temos usado o potencial BPS (4.80).

A equação de Euler-Lagrange para o campo de gauge é dada por

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial A'} (r\mathcal{L}) \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Assim, encontramos de (A.1) a igualdade

$$r\mathcal{L} = -\frac{1}{2g^2} \frac{(A')^2}{r} - hr (\alpha')^2 - \frac{h}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right)^2 \sin^2 \alpha - \frac{rg^2 h^2}{2} \cos^2 \alpha. \quad (\text{A.3})$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial A'} (r\mathcal{L}) = -\frac{1}{g^2} \frac{A'}{r} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial A'} (r\mathcal{L}) = -\frac{1}{r^2 g^2} \left(A'' - \frac{A'}{r} \right). \quad (\text{A.4})$$

Além disso, obtemos de (A.1) a relação

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = -\frac{h}{r^2} \left(\frac{A}{2} - m \right) \sin^2 \alpha. \quad (\text{A.5})$$

Os resultados (A.4) e (A.5) levados a (A.2) nos guiam à lei de Ampère

$$A'' - \frac{A'}{r} - \left(\frac{A}{2} - m \right) g^2 h \sin^2 \alpha = 0. \quad (\text{A.6})$$

Agora, vamos partir das equações BPSs (4.87) e (4.88), respectivamente:

$$\frac{A'}{r} = \mp g^2 h \cos \alpha, \quad (\text{A.7})$$

$$\alpha' = \pm \frac{\sin \alpha}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right). \quad (\text{A.8})$$

Derivando mais uma vez (A.7) em relação a r , temos:

$$\frac{A''}{r} - \frac{A'}{r^2} = \pm g^2 h \alpha' \sin \alpha. \quad (\text{A.9})$$

Adicionalmente, com a ajuda de (A.8), a equação (A.9) torna-se

$$\frac{A''}{r} - \frac{A'}{r^2} - \frac{g^2 h \sin^2 \alpha}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right) = 0, \quad (\text{A.10})$$

sendo compatível com a lei de Ampère (A.6), conforme desejado.

A.1.2 Equação de Movimento para o Campo Escalar $\alpha(r)$

Procedendo da mesma forma que em (A.2), temos a equação de Euler-Lagrange para o campo escalar $\alpha(r)$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha'} (r\mathcal{L}) \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 0. \quad (\text{A.11})$$

Desse modo, a partir da expressão (A.3), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \alpha'} (r\mathcal{L}) = -2hr\alpha' \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha'} (r\mathcal{L}) \right] = -2h \left(\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} \right). \quad (\text{A.12})$$

Ademais, utilizando (A.1), calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} &= -\frac{h}{r^2} \left(\frac{A}{2} - m \right)^2 2 \sin \alpha \cos \alpha + g^2 h^2 \cos \alpha \sin \alpha \\ &= -\frac{h \sin 2\alpha}{r^2} \left(\frac{A}{2} - m \right)^2 + \frac{g^2 h^2}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Substituindo (A.12) e (A.13) em (A.11), determinamos finalmente a equação de movimento do campo escalar $\alpha(r)$

$$\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} - \frac{\sin 2\alpha}{2r^2} \left(\frac{A}{2} - m \right)^2 + \frac{g^2 h}{4} \sin 2\alpha = 0. \quad (\text{A.14})$$

Por outro lado, vamos calcular agora a segunda derivada de (A.8) e relação a r , a saber

$$\alpha'' = \pm \frac{\cos \alpha}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right) \alpha' \pm \frac{\sin \alpha}{2} \left(\frac{A'}{r} \right) \mp \frac{1}{r} \left[\frac{\sin \alpha}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right) \right]. \quad (\text{A.15})$$

Podemos ainda substituir (A.7) e (A.8) em (A.15), achando

$$\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} - \frac{\sin 2\alpha}{2r^2} \left(\frac{A}{2} - m \right)^2 + \frac{g^2 h}{4} \sin 2\alpha = 0, \quad (\text{A.16})$$

o que mostra a consistência entre (A.14) e (A.16).

A.2 Capítulo 5

A.2.1 Lei de Ampère

Com o intuito de demonstrar que as equações BPSs levam às de Euler-Lagrange, vamos considerar apenas o caso $\beta = \beta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, em virtude de (4.104). Portanto, partimos da densidade lagrangeana correspondente a (5.9)

$$\mathcal{L} = -\mathcal{E} = -\frac{G(\alpha)}{2} \left(\frac{A'}{gr}\right)^2 - h(\alpha')^2 - \frac{h}{r^2} \left(\frac{A}{2} - m\right)^2 \sin^2 \alpha - \frac{g^2 h^2}{G(\alpha)} \cos^2 \alpha, \quad (\text{A.17})$$

em que já admitimos o potencial (5.22).

A equação de Euler-Lagrange para o campo de calibre $a(r)$ é dada por

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial A'} (r\mathcal{L}) \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = 0. \quad (\text{A.18})$$

Dessa forma, por meio de (A.17), encontramos

$$r\mathcal{L} = -\frac{G}{2g^2} \frac{(A')^2}{r} - hr(\alpha')^2 - \frac{h}{r} \left(\frac{A}{2} - m\right)^2 \sin^2 \alpha - \frac{rg^2 h^2}{G} \cos^2 \alpha, \quad (\text{A.19})$$

o que nos conduz a

$$\frac{\partial}{\partial A'} (r\mathcal{L}) = -\frac{GA'}{g^2 r} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial A'} (r\mathcal{L}) = -\frac{1}{rg^2} \left(\frac{GA'}{r}\right)'. \quad (\text{A.20})$$

Além disso, podemos obter o seguinte resultado de (A.17):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = -\frac{h}{r^2} \left(\frac{A}{2} - m\right) \sin^2 \alpha. \quad (\text{A.21})$$

Com o auxílio de (A.18), (A.20) e (A.21), chegamos à lei de Ampère

$$\frac{1}{rg^2} \left(\frac{GA'}{r}\right)' - \left(\frac{A}{2} - m\right) g^2 h \sin^2 \alpha = 0. \quad (\text{A.22})$$

De outro modo, vamos encontrar (A.22) via as equações BPSs (5.19) e (5.20),

$$\frac{A'}{r} = \mp g^2 h \frac{\cos \alpha}{G}, \quad (\text{A.23})$$

$$\alpha' = \pm \frac{\sin \alpha}{r} \left(\frac{A}{2} - m\right). \quad (\text{A.24})$$

Tomando a segunda derivada de (A.23) em relação a r , encontramos

$$\frac{1}{g^2} \left(\frac{GA'}{r}\right)' = \pm h \alpha' \sin \alpha. \quad (\text{A.25})$$

Substituindo (A.24) em (A.25), determinamos a lei de Ampère

$$\frac{1}{g^2} \left(\frac{GA'}{r}\right)' - \left(\frac{A}{2} - m\right) \frac{g^2 h \sin^2 \alpha}{r} = 0, \quad (\text{A.26})$$

em perfeita igualdade com a equação (A.22).

A.2.2 Equação de Movimento para o Campo Escalar $\alpha(r)$

A equação de Euler-Lagrange para o campo escalar $\alpha(r)$ é computada como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha'} (r\mathcal{L}) \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 0. \quad (\text{A.27})$$

Dessa maneira, da expressão (A.19), precisamos da seguinte relação:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha'} (r\mathcal{L}) = -2hr\alpha' \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha'} (r\mathcal{L}) \right] = -2h \left(\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} \right). \quad (\text{A.28})$$

A segunda relação útil determinamos de (A.17), a saber

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2} \left(\frac{A'}{gr} \right)^2 G_\alpha - \frac{h \sin(2\alpha)}{r^2} \left(\frac{A}{2} - m \right)^2 + \frac{g^2 h^2 \sin(2\alpha)}{2G} + \frac{g^2 h^2 \cos^2 \alpha}{2G^2} G_\alpha, \quad (\text{A.29})$$

em que $G_\alpha = \partial_\alpha G$. Logo, reescrevendo (A.27) em termos de (A.28) e (A.29), achamos a equação de movimento para $\alpha(r)$

$$\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} - \frac{\sin(2\alpha)}{2r^2} \left(\frac{A}{2} - m \right)^2 + \frac{g^2 h \sin(2\alpha)}{4G} - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{A'}{gr} \right)^2 - \frac{g^2 h^2 \cos^2 \alpha}{4G^2} \right] G_\alpha = 0. \quad (\text{A.30})$$

Podemos ainda substituir (A.27) no último termo de (A.30), zerando-o. O resultado disso corresponde a

$$\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} - \frac{\sin(2\alpha)}{2r^2} \left(\frac{A}{2} - m \right)^2 + \frac{g^2 h \sin(2\alpha)}{4G} = 0. \quad (\text{A.31})$$

Por outro lado, vamos encontrar (A.30) por intermédio das equações BPSs. Para isso, derivamos outra vez (A.24) com respeito a r ,

$$\alpha'' = \pm \frac{\cos \alpha}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right) \alpha' \pm \frac{\sin \alpha}{2} \left(\frac{A'}{r} \right) \mp \frac{1}{r} \left[\frac{\sin \alpha}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right) \right]. \quad (\text{A.32})$$

Os termos do lado direito de (A.32) podem ser reescritos em função de (A.23) e (A.24), gerando a equação

$$\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} - \frac{\sin(2\alpha)}{2r^2} \left(\frac{A}{2} - m \right)^2 + \frac{g^2 h \sin(2\alpha)}{4G} = 0, \quad (\text{A.33})$$

exatamente igual a (A.31).

A.3 Capítulo 6

A.3.1 Lei de Gauss

Vamos começar introduzindo a densidade lagrangeana ligada a (6.18),

$$\mathcal{L} = -\kappa \frac{A'}{gr} A_0 + \frac{1}{4} h A_0^2 g^2 \sin^2 \alpha - h (\alpha')^2 - \frac{h}{r^2} \left(\frac{A}{2} - m \right)^2 \sin^2 \alpha - \frac{g^4 h^3}{16 \kappa^2} \sin^2 (2\alpha), \quad (\text{A.34})$$

em que já assumimos o potencial BPS encontrado em (6.23). Vamos tratar somente do caso $\beta = \beta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k$ devido a (4.104), de acordo discutido na subseção (6.3.2).

A lei de Gauss é obtida a partir da equação de Euler-Lagrange para $A_0(r)$,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial A_0'} (r\mathcal{L}) \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} = 0. \quad (\text{A.35})$$

Desse modo, da densidade lagrangeana (A.34), temos a relação

$$r\mathcal{L} = -\kappa \frac{A'}{g} A_0 + \frac{1}{4} r h A_0^2 g^2 \sin^2 \alpha - r h (\alpha')^2 - \frac{h}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right)^2 \sin^2 \alpha - \frac{r g^4 h^3}{4 \kappa^2} \sin^2 (2\alpha), \quad (\text{A.36})$$

implicando em

$$\frac{\partial}{\partial A_0'} (r\mathcal{L}) = 0 \quad (\text{A.37})$$

e ainda em

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} = -\frac{\kappa A'}{gr} + \frac{1}{2} h A_0 g^2 \sin^2 \alpha. \quad (\text{A.38})$$

Substituindo tanto (A.37) quanto (A.38) em (A.35), encontramos a lei de Gauss

$$\frac{\kappa A'}{r} = \frac{1}{2} h A_0 g^3 \sin^2 \alpha. \quad (\text{A.39})$$

A.3.2 Lei de Ampère

De maneira análoga ao caso anterior, calculamos a lei de Ampère por meio de

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial A'} (r\mathcal{L}) \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = 0. \quad (\text{A.40})$$

Assim, da igualdade (A.36), podemos obter os resultados

$$\frac{\partial}{\partial A'} (r\mathcal{L}) = -\kappa \frac{A_0}{g} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial A'} (r\mathcal{L}) \right] = -\frac{\kappa A_0'}{r g} \quad (\text{A.41})$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = -\frac{h}{r^2} \left(\frac{A}{2} - m \right) \sin^2 \alpha, \quad (\text{A.42})$$

os quais, quando levados a (A.40), fornecem a lei de Ampère

$$\frac{\kappa A_0'}{r g} - \frac{h}{r^2} \left(\frac{A}{2} - m \right) \sin^2 \alpha = 0. \quad (\text{A.43})$$

Adicionalmente, podemos substituir (A.39) em (A.43), achando

$$\frac{2\kappa^2}{g^4h} \left(\frac{A'}{r \sin^2 \alpha} \right)' - \frac{h}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right) \sin^2 \alpha = 0. \quad (\text{A.44})$$

Tratamos agora de reproduzir (A.44) por intermédio de (6.31) e (6.32), ou seja,

$$\frac{A'}{r} = \mp \frac{g^4h^2}{4\kappa^2} \sin \alpha \sin(2\alpha), \quad (\text{A.45})$$

$$\alpha' = \pm \frac{\sin \alpha}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right). \quad (\text{A.46})$$

Aplicando a derivada segunda em relação a r em (A.45), determinamos

$$\frac{2\kappa^2}{g^2h} \left(\frac{A'}{\sin^2 \alpha r} \right)' = \pm g^2h \sin \alpha \alpha'. \quad (\text{A.47})$$

É possível ainda reescrever (A.47) com o auxílio de (A.46) no seguinte modo:

$$\frac{2\kappa^2}{g^4h} \left(\frac{A'}{\sin^2 \alpha r} \right)' - \frac{gh}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right) \sin^2 \alpha = 0, \quad (\text{A.48})$$

em concordância com (A.44).

A.3.3 Equação de Movimento para o Campo Escalar $\alpha(r)$

Vamos calcular agora a equação de Euler-Lagrange para o campo escalar $\alpha(r)$,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha'} (r\mathcal{L}) \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 0. \quad (\text{A.49})$$

Desse modo, a partir de (A.36), temos

$$\frac{\partial}{\partial \alpha'} (r\mathcal{L}) = -2rh\alpha' \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha'} (r\mathcal{L}) \right] = -2h \frac{(r\alpha)'}{r}. \quad (\text{A.50})$$

Ademais, podemos encontrar de (A.34) a relação

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = \frac{1}{4}hA_0^2g^2 \sin(2\alpha) - \frac{h}{r^2} \left(\frac{A}{2} - m \right)^2 \sin(2\alpha) - \frac{g^4h^3}{8\kappa^2} \sin(4\alpha). \quad (\text{A.51})$$

Substituindo (A.50) e (A.51) em (A.49), chegamos a

$$-2h \frac{(r\alpha)'}{r} - \frac{1}{4}hA_0^2g^2 \sin(2\alpha) + \frac{h}{r^2} \left(\frac{A}{2} - m \right)^2 \sin(2\alpha) + \frac{g^4h^3}{8\kappa^2} \sin(4\alpha) = 0. \quad (\text{A.52})$$

Comparando (A.39) e (A.45), estabelecemos a equivalência

$$A_0 = \mp \frac{gh}{\kappa} \cos \alpha, \quad (\text{A.53})$$

a qual, levada ao segundo termo de (A.52), resulta em

$$\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} - \frac{1}{2r^2} \left(\frac{A}{2} - m \right)^2 \sin(2\alpha) + \frac{g^4h^2}{8\kappa^2} \sin^2 \alpha \sin(2\alpha) = 0. \quad (\text{A.54})$$

De outro modo, vamos determinar (A.54) via equações BPSs. Derivamos então (A.46) novamente com respeito a r ,

$$\alpha'' = \pm \frac{\cos \alpha}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right) \alpha' \pm \frac{\sin \alpha}{2} \left(\frac{A'}{r} \right) \mp \frac{1}{r} \left[\frac{\sin \alpha}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right) \right]. \quad (\text{A.55})$$

O resultado acima pode ser reescrito na seguinte maneira:

$$\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} - \frac{1}{2r^2} \left(\frac{A}{2} - m \right)^2 \sin(2\alpha) + \frac{g^4 h^2}{2\kappa^2} \sin^2 \alpha \sin(2\alpha) = 0, \quad (\text{A.56})$$

em que temos utilizado as equações BPS (A.45) e (A.46). Portanto, notamos que (A.54) é igual a (A.56).

A.4 Capítulo 7

A.4.1 Lei Ampère

Vamos começar reintroduzindo a densidade lagrangeana (7.66),

$$\mathcal{L} = -\frac{G(\chi)}{2} \left(\frac{a'}{r}\right)^2 - \frac{1}{2} (f')^2 - \frac{a^2}{2r^2} \sin^2 f - \frac{1}{2} (\chi')^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\cos^2 f}{G(\chi)} + \frac{\mathcal{W}_\chi^2}{r^2}\right), \quad (\text{A.57})$$

em que já temos utilizado o potencial (7.75) e adotado o gauge temporal $A_0 = 0$.

Calculamos a equação de Euler-Lagrange para o campo de calibre por meio de

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial a'} (r\mathcal{L}) \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = 0. \quad (\text{A.58})$$

Desse modo, partindo de (A.57), temos:

$$r\mathcal{L} = -\frac{G}{2} \frac{(a')^2}{r} - \frac{1}{2} r (f')^2 - \frac{a^2}{2r} \sin^2 f - \frac{1}{2} r (\chi')^2 - \frac{r}{2} \left(\frac{\cos^2 f}{G} + \frac{\mathcal{W}_\chi^2}{r^2}\right). \quad (\text{A.59})$$

Esse resultado nos leva a

$$\frac{\partial}{\partial a'} (r\mathcal{L}) = -\frac{Ga'}{r} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial a'} (r\mathcal{L}) \right] = -\frac{1}{r} \left(\frac{Ga'}{r}\right)'. \quad (\text{A.60})$$

Adicionalmente, obtemos de (A.57) a quantidade

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = -\frac{a}{r^2} \sin^2 f. \quad (\text{A.61})$$

As igualdades (A.60) e (A.61) avaliadas em (A.58) nos fornecem a lei de Ampère

$$\left(\frac{Ga'}{r}\right)' + \frac{a}{r} \sin^2 f = 0. \quad (\text{A.62})$$

Agora, vamos considerar as equações BPSs (7.80) e (7.81), respectivamente:

$$\frac{a'}{r} = \mp \frac{\cos f}{G}, \quad (\text{A.63})$$

$$f' = \pm \frac{a}{r} \sin f. \quad (\text{A.64})$$

Derivando novamente (A.63) em relação a r , achamos

$$\left(\frac{Ga'}{r}\right)' = \pm f' \sin f. \quad (\text{A.65})$$

Ademais, usando (A.64), a equação (A.65) torna-se

$$\left(\frac{Ga'}{r}\right)' + \frac{a}{r} \sin^2 f = 0. \quad (\text{A.66})$$

Logo, vemos que (A.66) é exatamente a lei de Ampère (A.62).

A.4.2 Equação de Movimento para o Campo Escalar Sigma $f(r)$

Seguindo o mesmo raciocínio que em (A.58), escrevemos a equação de Euler-Lagrange para o campo escalar sigma $f(r)$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial f'} (r\mathcal{L}) \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = 0. \quad (\text{A.67})$$

Assim, da relação (A.59), temos:

$$\frac{\partial}{\partial f'} (r\mathcal{L}) = -r(f') \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial f'} (r\mathcal{L}) \right] = -\frac{1}{r} (rf')'. \quad (\text{A.68})$$

Além disso, calculamos de (A.57) a quantidade

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = -\frac{a^2}{2r^2} \sin 2f + \frac{\sin 2f}{2G}. \quad (\text{A.69})$$

Frente às igualdades (A.68) e (A.69), a equação de movimento para o campo escalar sigma (A.67) resulta em

$$\frac{1}{r} (rf')' - \frac{a^2}{2r^2} \sin 2f + \frac{\sin 2f}{2G} = 0. \quad (\text{A.70})$$

De outro modo, tomamos agora a segunda derivada de (A.64) com respeito a r , a saber

$$\frac{1}{r} (rf')' = \pm \frac{a'}{r} \sin f \pm a \frac{f'}{r} \cos f. \quad (\text{A.71})$$

Com o uso de (A.63) e (A.64), a equação (A.71) fica como

$$\frac{1}{r} (rf')' - \frac{a^2}{2r^2} \sin 2f + \frac{\sin 2f}{2G} = 0, \quad (\text{A.72})$$

provando a equivalência entre (A.70) e (A.72).

A.4.3 Equação de Movimento para o Campo Escalar $\chi(r)$

Por último, apresentamos a equação de Euler-Lagrange para o campo escalar $\chi(r)$,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial \chi'} (r\mathcal{L}) \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} = 0. \quad (\text{A.73})$$

Dessa maneira, com a ajuda de (A.59), achamos

$$\frac{\partial}{\partial \chi'} (r\mathcal{L}) = -r\chi' \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \chi'} (r\mathcal{L}) = -\frac{1}{r} (r\chi')' \quad (\text{A.74})$$

e ainda, por meio de (A.57), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{a'}{r} \right)^2 G_\chi - \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos^2 f}{G^2} G_\chi + \frac{2\mathcal{W}_\chi \mathcal{W}_{\chi,\chi}}{r^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{a'}{r} \right)^2 - \frac{\cos^2 f}{G^2} \right] G_\chi - \frac{\mathcal{W}_\chi \mathcal{W}_{\chi,\chi}}{r^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

em que $G_\chi = \partial_\chi G$, $\mathcal{W}_\chi = \partial_\chi \mathcal{W}$ e $\mathcal{W}_{\chi,\chi} = \partial_\chi^2 \mathcal{W}$. Pela equação BPS (A.63), os termos entre colchetes se cancelam, implicando em

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} = -\frac{\mathcal{W}_\chi \mathcal{W}_{\chi,\chi}}{r^2}. \quad (\text{A.76})$$

Substituindo (A.74) e (A.76) em (A.73), temos finalmente a equação de movimento para o campo escalar χ

$$(r\chi')' - \frac{\mathcal{W}_{\chi,\chi}}{r} = 0. \quad (\text{A.77})$$

Por outra via, efetuando a derivada segunda de (7.82) em relação a r , estabelecemos que

$$(r\chi')' = \pm \mathcal{W}_{\chi,\chi} \chi' \Rightarrow \frac{1}{r} (r\chi')' = \pm \mathcal{W}_{\chi,\chi} \frac{\chi'}{r}. \quad (\text{A.78})$$

Ademais, introduzindo (7.82) em (A.78), alcançamos como resposta

$$(r\chi')' - \frac{\mathcal{W}_\chi \mathcal{W}_{\chi,\chi}}{r} = 0, \quad (\text{A.79})$$

correspondendo à mesma equação de movimento (A.77).

A.5 Capítulo 8

A.5.1 Lei de Gauss e Equação de Movimento para o Campo Escalar $\Psi(r)$

Para verificar a equivalência entre as equações BPSs e as de Euler-Lagrange, vamos considerar inicialmente a densidade lagrangeana (8.1) projetada no *ansatz* (7.58), (8.5) e (8.6),

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{G(\chi)}{2} \left[(A'_0)^2 - \left(\frac{a'}{r} \right)^2 \right] - \kappa \frac{a'}{r} A_0 + \frac{1}{2} A_0^2 \sin^2 f - \frac{1}{2} (f')^2 - \frac{a^2}{2r^2} \sin^2 f \\ & - \frac{1}{2} (\chi')^2 - \frac{G(\chi)}{2} (\Psi')^2 - \frac{1}{2} \Psi^2 \sin^2 f - U, \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

em que já assumimos o potencial autodual (8.2)

$$U = \frac{1}{2} \Psi^2 \sin^2 f + \frac{1}{2G(\chi)} (\cos f - \kappa \Psi)^2 + \frac{\mathcal{W}_\chi^2}{2r^2}, \quad (\text{A.81})$$

considerando o potencial V definido em (8.17).

A equação de Euler-Lagrange que fornece a lei de Gauss é dada por

$$\frac{1}{r} \left(r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A'_0} \right)' - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} = 0. \quad (\text{A.82})$$

Dessa forma, a partir de (A.80), obtemos

$$\left(r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A'_0} \right)' = (rGA'_0)', \quad (\text{A.83})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} = -\kappa \frac{Na'}{r} + A_0 \sin^2 f. \quad (\text{A.84})$$

Substituindo (A.83) e (A.84) em (A.82), encontramos a lei de Gauss

$$\frac{1}{r} (rGA'_0)' + \frac{\kappa a'}{r} - A_0 \sin^2 f = 0, \quad (\text{A.85})$$

ou ainda na forma

$$\frac{1}{r} (rGA'_0)' - \kappa B - A_0 \sin^2 f = 0, \quad (\text{A.86})$$

considerando a definição do campo magnético

$$B = -\frac{a'}{r}. \quad (\text{A.87})$$

Por outro lado, a equação de movimento para o campo $\Psi(r)$ é determinada por meio de

$$\frac{1}{r} \left(r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi'} \right)' - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} = 0. \quad (\text{A.88})$$

Assim, substituindo (A.80) em (A.88), temos

$$\frac{1}{r} (rG\Psi')' - \frac{\kappa}{G} (\cos f - \kappa \Psi) - \Psi \sin^2 f = 0. \quad (\text{A.89})$$

Além disso, utilizando as equações BPSs (8.25) e (8.26), a saber

$$\Psi = \pm A_0, \quad (\text{A.90})$$

$$B = \pm \frac{1}{G} (\cos f - \kappa \Psi), \quad (\text{A.91})$$

respectivamente, a expressão (A.89) se torna

$$\frac{1}{r} (rGA'_0)' - \kappa B - A_0 \sin^2 f = 0, \quad (\text{A.92})$$

provando a equivalência entre a Lei de Gauss (A.86), a equação de movimento (A.89) e as equações BPSs (A.90) e (A.91).

A.5.2 Lei Ampère

Podemos obter a lei de Ampère por meio da equação de movimento para $a(r)$, ou seja,

$$\frac{1}{r} \left(r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a'} \right)' - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = 0. \quad (\text{A.93})$$

Portanto, substituindo (A.80) em (A.93), determinamos a lei de Ampère

$$\frac{1}{r} \left(\frac{Ga'}{r} \right)' - \kappa \frac{A'_0}{r} - \frac{a}{r^2} \sin^2 f = 0. \quad (\text{A.94})$$

Vamos partir agora da equação BPS (A.91). Aplicando a derivada com respeito a r em ambos os lados dessa equação, encontramos

$$\left(\frac{Ga'}{r} \right)' - \kappa A'_0 = \pm (\cos f)' = \pm f' \sin f, \quad (\text{A.95})$$

em que já usamos a equação autodual (A.90) e a definição (A.87). Com o auxílio da equação BPS (8.24),

$$f' = \pm \frac{a}{r} \sin f, \quad (\text{A.96})$$

a expressão (A.95) resulta em

$$\frac{1}{r} \left(\frac{Ga'}{r} \right)' - \kappa \frac{A'_0}{r} - \frac{a}{r^2} \sin^2 f = 0, \quad (\text{A.97})$$

mostrando a correspondência entre as equações BPSs (A.90) e (A.91) e a lei de Ampère (A.94).

A.5.3 Equação de Movimento para o Campo Escalar Sigma $f(r)$

Calculamos a equação de movimento para o campo sigma $f(r)$ com o uso de

$$\frac{1}{r} \left(r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} \right)' - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = 0. \quad (\text{A.98})$$

Logo, substituindo (A.80) em (A.98), achamos

$$\frac{1}{r} (rf')' + \frac{1}{2} \left(A_0^2 - \Psi^2 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin 2f + \frac{1}{G} (\cos f - \kappa\Psi) \sin f = 0. \quad (\text{A.99})$$

Por outro lado, vamos chegar no resultado (A.99) utilizando a equação BPS (A.96). Para isso, vamos aplicar a deriva com respeito a r nos dois membros dessa igualdade, a saber

$$(rf')' = (\pm a') \sin f + a (\pm f') \cos f. \quad (\text{A.100})$$

Com a ajuda das equações BPSs (A.91) e (A.96), reescrevemos (A.100) como

$$\frac{1}{r} (rf')' - \frac{a^2}{2r^2} \sin 2f + \frac{1}{G} (\cos f - \kappa\Psi) \sin f = 0. \quad (\text{A.101})$$

Assim, provamos que as equações (A.99) e (A.101) são iguais, se a equação BPS (A.90) também for verificada.

A.5.4 Equação de Movimento para o Campo Escalar $\chi(r)$

A equação de movimento para campo fonte $\chi(r)$ no *ansatz* é obtida por meio de

$$\frac{1}{r} \left(r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi'} \right)' - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} = 0. \quad (\text{A.102})$$

Dessa maneira, levando a densidade lagrangeana (A.80) a (A.102), chegamos a

$$\frac{1}{r} (r\chi')' + \frac{1}{2} \left[(A_0')^2 - B^2 - (\Psi')^2 \right] G_\chi = U_\chi, \quad (\text{A.103})$$

com

$$U_\chi = \frac{\partial U}{\partial \chi} = \frac{1}{r^2} \mathcal{W}_\chi \mathcal{W}_{\chi,\chi} - \frac{1}{2G^2} (\cos g - \kappa\Psi)^2 G_\chi, \quad (\text{A.104})$$

sendo $G_\chi = \partial_\chi G$, $\mathcal{W}_\chi = \partial_\chi \mathcal{W}$ e $\mathcal{W}_{\chi,\chi} = \partial_\chi^2 \mathcal{W}$. Podemos ainda substituir a equação BPS (A.91) em (A.104), obtendo

$$U_\chi = \frac{1}{r^2} \mathcal{W}_\chi \mathcal{W}_{\chi,\chi} - B^2 \frac{1}{2} G_\chi. \quad (\text{A.105})$$

O resultado (A.105) transforma (A.103) em

$$\frac{1}{r} (r\chi')' + \frac{1}{2} \left[(A_0')^2 - (\Psi')^2 \right] G_\chi - \frac{1}{r^2} \mathcal{W}_\chi \mathcal{W}_{\chi,\chi} = 0. \quad (\text{A.106})$$

Vamos agora partir da equação BPS para o campo $\chi(r)$ (8.23), a saber

$$\chi' = \frac{\mathcal{W}_\chi}{r}, \quad (\text{A.107})$$

para chegar a (A.106). Assim, derivando (A.107) em relação a r , temos:

$$(r\chi')' = \chi' \mathcal{W}_{\chi,\chi}. \quad (\text{A.108})$$

Substituindo (A.107) em (A.108), achamos

$$\frac{1}{r} (r\chi')' - \frac{1}{r^2} \mathcal{W}_\chi \mathcal{W}_{\chi,\chi} = 0. \quad (\text{A.109})$$

Considerando a equação autodual (A.90), provamos igualdade entre (A.106) e (A.109), como desejado.

APÊNDICE B – TERMOS
COMPLEMENTARES DAS TRÊS ORDENS
MAIS BAIXAS

B.1 Primeiro Meio Dielétrico do Capítulo 8

Os termos restantes do potencial (8.34) e do campo (8.35) elétricos perto da origem são

$$A_0^{(I)}(r) = \left(\frac{\omega_2}{r_0^4} - \frac{2|\kappa|B_0}{3r_0^4} \right) r^6 + \frac{\omega_0(f_n)^2 r^{2n+4}}{(n+1)(n+2)r_0^2}, \quad (\text{B.1})$$

$$E^{(I)}(r) = -6 \left(\frac{\omega_2}{r_0^4} - \frac{2|\kappa|B_0}{3r_0^4} \right) r^5 - \frac{2\omega_0(f_n)^2 r^{2n+3}}{(n+1)r_0^2}, \quad (\text{B.2})$$

respeçivamente, em que f_n é uma constante positiva que depende de n (veja Eq.(8.36)) e $B_0 = 1 - \kappa\omega_0$ é o campo magnético na origem e na ausência de um meio dielétrico (veja Eq. (8.37)).

O último termo da Eq. (8.36) é dado por

$$\begin{aligned} f^{(I)}(r) = & \left(\frac{|\kappa|\omega_2}{9r_0^2} + \frac{2B_0}{9r_0^4} \right) f_n r^{n+6} - \frac{(f_n)^3 r^{3n}}{12} + \frac{(n^2 + 4n + 12) B_0 (f_n)^3 r^{3n+4}}{16(n+2)^2 r_0^2} \\ & + \frac{|\kappa|\omega_0 (f_n)^3 r^{3n+4}}{2(n+2)^2 r_0^2} + \frac{(f_n)^5 r^{5n}}{80} - \frac{(f_n)^7 r^{7n}}{448}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Nós determinamos as funções $a^{(I)}(r)$ (Eq. (8.38)) e $B^{(I)}(r)$ (Eq. (8.39)) como

$$\begin{aligned} a^{(I)}(r) = & \left(\frac{2|\kappa|\omega_2}{3r_0^2} + \frac{4B_0}{3r_0^4} \right) r^6 - \left(\frac{3|\kappa|\omega_2}{2r_0^4} + \frac{3B_0}{2r_0^6} \right) r^8 + \frac{(f_n)^2 r^{2n+4}}{(n+2)r_0^2} \\ & - \frac{2(f_n)^2 r^{2n+6}}{(n+3)r_0^4} - \frac{(f_n)^4 r^{4n+4}}{8(n+1)r_0^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} B^{(I)}(r) = & \left(\frac{12|\kappa|\omega_2}{r_0^4} + \frac{12B_0}{r_0^6} \right) r^6 - \frac{2(f_n)^2}{r_0^2} r^{2n+2} + \frac{4(f_n)^2 r^{2n+4}}{r_0^4} \\ & + \frac{(f_n)^4 r^{4n+2}}{2r_0^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

respectivamente.

A última parcela da densidade de energia (8.40) e definida da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\Sigma^{(I)}(r) = & -2 \left[(\omega_2)^2 - \frac{2(B_0)^2}{r_0^2} \right] r^2 - \left[\frac{12|\kappa|\omega_2 B_0}{r_0^2} - \frac{3(\omega_2)^2}{r_0^2} + \frac{8(B_0^2)}{r_0^4} \right] r^4 \\ & - \frac{(f_n)^4 r^{4n-2}}{2} + \frac{3(f_n)^6 r^{6n-2}}{16} - \frac{13B_0(f_n)^2 r^{2n+2}}{2r_0^2} + r_0^2 (\omega_2)^2 \\ & + (\omega_0)^2 (f_n)^2 r^{2n} + 3\omega_0\omega_2 (f_n)^2 r^{2n+2} - \frac{\omega_0^2 (f_n)^4 r^{4n}}{2}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

B.2 Segundo Meio Dielétrico do Capítulo 8

As funções $A_0^{(II)}(r)$ e $E_0^{(II)}(r)$ são dadas por

$$\begin{aligned}
 A_0^{(II)}(r) = & -\frac{|\kappa|^5 B_0 r^6}{2304} + \frac{(2\omega_0 + |\kappa|)(f_n)^2 r^{2+2n}}{8(n+1)^2} + \frac{(2n^2 + 4n + 3)\kappa^2 \omega_0 (f_n)^2 r^{4+2n}}{16(n+1)^2(n+2)^2} \\
 & + \frac{(\sigma^3 + 6\sigma^2 + 11\sigma + 8)|\kappa|^3 B_0 r^{4+2\sigma}}{8(\sigma+1)^2(\sigma+2)^2 r_0^{2\sigma}} - \frac{(2n+\sigma+2)|\kappa|(f_n)^2 r^{2+2n+2\sigma}}{2(n+1)(n+\sigma+1)^2 r_0^{2\sigma}} \\
 & - \frac{(4\omega_0 + |\kappa|)(f_n)^4 r^{2+4n}}{32(2n+1)^2} - \frac{(B_0 \omega_0 + |\kappa|)^2 (f_n)^2 r^{4+2n}}{8(n+2)^2} \\
 & - \frac{4(\sigma^2 + 4\sigma + 2)|\kappa| B_0 r^{2+4\sigma}}{(2\sigma+1)^2(\sigma+1)r_0^{4\sigma}} - \frac{\omega_0 (f_n)^2 r^{2+2n+2\sigma}}{(n+1)(n+\sigma+1)r_0^{2\sigma}} \\
 & + \frac{|\kappa|^3 (f_n)^2 r^{4+2n}}{32(n+1)^2(n+2)^2} + \frac{(\sigma+2)|\kappa| B_0 r^{2+2\sigma}}{(\sigma+1)^2 r_0^{2\sigma}}, \tag{B.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_0^{(II)}(r) = & -\frac{(2n^2 + 4n + 3)\kappa^2 \omega_0 (f_n)^2 r^{2n+3}}{8(n+1)^2(n+2)} - \frac{(\sigma^3 + 6\sigma^2 + 11\sigma + 8)|\kappa|^3 B_0 r^{2\sigma+3}}{4(\sigma+1)^2(\sigma+2)r_0^{2\sigma}} \\
 & + \frac{(2n+\sigma+2)|\kappa|(f_n)^2 r^{2n+2\sigma+1}}{(n+1)(n+\sigma+1)r_0^{2\sigma}} - \frac{(2\omega_0 + |\kappa|)(f_n)^2 r^{2n+1}}{4(n+1)} \\
 & + \frac{(4\omega_0 + |\kappa|)(f_n)^4 r^{4n+1}}{16(2n+1)} + \frac{(B_0 \omega_0 + |\kappa|)^2 (f_n)^2 r^{2n+3}}{4(n+2)} \\
 & + \frac{8(\sigma^2 + 4\sigma + 2)|\kappa| B_0 r^{4\sigma+1}}{(2\sigma+1)(\sigma+1)r_0^{4\sigma}} + \frac{2\omega_0 (f_n)^2 r^{2+2\sigma+1}}{(n+1)r_0^{2\sigma}} \\
 & - \frac{|\kappa|^3 (f_n)^2 r^{2n+3}}{16(n+1)^2(n+2)} - \frac{2(\sigma+2)|\kappa| B_0 r^{2\sigma+1}}{(\sigma+1)r_0^{2\sigma}}, \tag{B.8}
 \end{aligned}$$

as quais dizem respeito às Eqs. (8.50) e (8.51), respectivamente.

O campo elétrico auxiliar \tilde{E} na Eq. (8.62) é expresso como

$$\begin{aligned}
 \tilde{E} = & \frac{(r^{2\sigma} - r_0^{2\sigma})^2 r \kappa B}{(r^{4\sigma} - r_0^{4\sigma} - 8\sigma r^{2\sigma} r_0^{2\sigma})} - \frac{r(r^{2\sigma} + r_0^{2\sigma})^2 E'}{(r^{4\sigma} - r_0^{4\sigma} - 8\sigma r^{2\sigma} r_0^{2\sigma})} \\
 & - \frac{(r^{2\sigma} - r_0^{2\sigma})^2 r A_0 \sin^2 f}{(r^{4\sigma} - r_0^{4\sigma} - 8\sigma r^{2\sigma} r_0^{2\sigma})}. \tag{B.9}
 \end{aligned}$$

A expressão $f^{(II)}$ na Eq. (8.52) corresponde a

$$\begin{aligned}
 f^{(II)}(r) = & -\frac{(f_n)^3 r^{3N}}{12} + \frac{B_0 f_n r^{n+4}}{4r_0^2} + \frac{B_0 f_n r^{n+2\sigma+2}}{(\sigma+1)^2 r_0^{2\sigma}} \\
 & + \left[\frac{(n^2 + 2n + 3)}{(n+1)^2} - |\kappa| \omega_0 \right] \frac{(f_n)^3 r^{3n+2}}{16} \\
 & - \frac{(f_n)^7 r^{7n}}{448} + \frac{(f_n)^5 r^{5n}}{80}. \tag{B.10}
 \end{aligned}$$

Os termos complementares do potencial vetor (8.53) e do campo magnético (8.54) perto da origem são respectivamente

$$\begin{aligned}
 a^{(II)}(r) = & -\frac{B_0(f_n)^2 r^{2n+4}}{8(n+2)} - \frac{(f_n)^4 r^{4n+2}}{16(2n+1)} - \frac{\kappa^4 B_0 r^6}{384} + \frac{(f_n)^2 r^{2n+2}}{4(n+1)} \\
 & + \frac{2B_0 r^{2+2\sigma}}{(\sigma+1)r_0^{2\sigma}} - \frac{4B_0 r^{2+4\sigma}}{(2\sigma+1)r_0^{4\sigma}} + \frac{(\sigma^2+3\sigma+3)\kappa^2 B_0 r^{4+2\sigma}}{(2\sigma^3+8\sigma^2+10\sigma+4)r_0^{2\sigma}} \\
 & - \frac{(f_n)^2 r^{2+2\sigma+2n}}{(\sigma+n+1)r_0^{2\sigma}}, \tag{B.11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B^{(II)}(r) = & \frac{B_0(f_n)^2 r^{2n+2}}{4} + \frac{(f_n)^4 r^{4n}}{8} - \frac{2(\sigma^2+3\sigma+3)(\sigma+2)\kappa^2 B_0 r^{2+2\sigma}}{(2\sigma^3+8\sigma^2+10\sigma+4)r_0^{2\sigma}} \\
 & + \frac{8B_0 r^{4\sigma}}{r_0^{4\sigma}} + \frac{2(f_n)^2 r^{2\sigma+2n}}{r_0^{2\sigma}} - \frac{(f_n)^2 r^{2n}}{2} - \frac{4B_0 r^{2\sigma}}{r_0^{2\sigma}}. \tag{B.12}
 \end{aligned}$$

Finalmente, a última contribuição da densidade de energia (8.55) é definida como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_\Sigma^{(II)}(r) = & \frac{2[(\sigma+1)^2+(n+\sigma+1)^2]B_0(f_n)^2 r^{2\sigma+2n}}{(1+\sigma)^2 r_0^{2\sigma}} - \frac{n^2 \omega_0^2 (f_n)^4 r^{4n}}{2(n+1)^2} \\
 & - \frac{B_0 \omega_0^2 (f_n)^2 r^{2+2n}}{2} + \left[\omega_0^2 - \frac{1+(n+1)^2}{2} B_0 \right] (f_n)^2 r^{2n} \\
 & + n^2 (f_n)^2 r^{2n-2} - \frac{n^2 (f_n)^4 r^{4n-2}}{2} + \frac{3n^2 (f_n)^6 r^{6n-2}}{16} - \frac{4(B_0)^2 r^{2\sigma}}{r_0^{2\sigma}} \\
 & - \frac{(3\sigma^2+10\sigma+9)\kappa^2 (B_0)^2 r^{2+2\sigma}}{(1+\sigma)^2 r_0^{2\sigma}} + \frac{8B_0^2 r^{4\sigma}}{r_0^{4\sigma}} + \frac{5\kappa^4 (B_0)^2 r^4}{32}. \tag{B.13}
 \end{aligned}$$

APÊNDICE C – CONVENÇÕES E UNIDADES

- Adotamos o sistema de unidades naturais $\hbar = \frac{h}{2\pi} = c = 1$, em que consideramos $\mu_0 = \varepsilon_0 = 1$, com h sendo a constante de Planck e c , μ_0 e ε_0 , a velocidade da luz, a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica no vácuo, respectivamente.
- Usamos a assinatura da métrica de Minkowski $g_{\mu\nu} = (+, -, -)$.
- Os índices gregos vão de zero a dois (por exemplo, $\mu, \nu = 0, 1, 2$) e os latinos podem ir de um a três (como os modelos $a, b, c = 1, 2, 3$ e $i, j, l = 1, 2, 3$). Na maioria dos casos, escolhemos a, b, c, m e n para representar índices do espaço interno dos campos, enquanto i, j, l e k , para índices espaciais do espaço-tempo. Ao longo do texto, sempre que conveniente, essas questões serão elucidadas e expostas sem ambiguidades, quando admitirmos alguma definição diferente.