



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Cirano Melo Pinheiro

**Filtro de Partículas Baseado em Estimação  
Adaptativa Inovativa**

São Luís - MA

2022

Cirano Melo Pinheiro

# **Filtro de Partículas Baseado em Estimação Adaptativa Inovativa**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, na área de Automação e Controle, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, da Universidade Federal do Maranhão.

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Francisco das Chagas de Souza

São Luís - MA

2022

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Pinheiro, Cirano Melo.

Filtro de partículas baseado em estimação adaptativa inovativa / Cirano Melo Pinheiro. - 2022.

97 f.

Orientador(a): Francisco das Chagas de Souza.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2022.

1. Estimação adaptativa inovativa. 2. Estimação de estado. 3. Filtro de Kalman estendido. 4. Filtro de partículas. 5. Rastreamento. I. Souza, Francisco das Chagas de. II. Título.

Cirano Melo Pinheiro

## **Filtro de Partículas Baseado em Estimação Adaptativa Inovativa**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, na área de Automação e Controle, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, da Universidade Federal do Maranhão.

Trabalho submetido em 16 de setembro de 2022

---

**Prof. Dr. Francisco das Chagas de Souza**  
Orientador  
Universidade Federal do Maranhão

---

**Prof. Dr. Ewaldo Eder Carvalho Santana**  
Examinador Interno  
Universidade Estadual do Maranhão

---

**Profa. Dra. Patrícia Helena Moraes Rêgo**  
Examinador Externo  
Universidade Estadual do Maranhão

São Luís - MA  
2022

*Dedico este trabalho à minha amada esposa Karly e ao meu precioso filho Murilo.*

# Agradecimentos

A Deus, pelo cuidado paternal em meio à sua agri doce Providência.

Aos meus pais, Luiz Antonio e Cleny, e meu irmão, Luiz Fernando, por todo amor e dedicação dispensados a mim.

À minha esposa, Karlyéllem, pelo amor incondicional e incansável apoio.

Ao meu filho, Murilo, por seu contagiante sorriso e inspiradora aprendizagem.

Ao meu orientador, prof. Dr. Francisco das Chagas de Souza, pelos ensinamentos e orientação durante todo o mestrado.

À colega, Dra. Miriam Marcela Serrepe Ranno, por todo auxílio e encorajamento concedidos.

À CAPES, pelo suporte financeiro durante este programa de pós-graduação.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

*"É um negócio perigoso, Frodo, sair porta afora. Você pisa na estrada, e se não controlar seus pés, não há como saber até onde você pode ser levado."*

(J.R.R. Tolkien)

# Resumo

Neste trabalho, é proposto um filtro de partículas baseado em estimação adaptativa inovativa para sistemas não lineares, bem como seus fundamentos e operação. Com o objetivo de mitigar a incerteza ou a falta de conhecimento das matrizes de covariância de ruído de processo e medição, simultaneamente, o filtro de partículas é aliado à estimação adaptativa inovativa. Para tal propósito, a diferença entre as covariâncias de inovação teórica e medida é definida como uma aproximação que utiliza a média de uma janela móvel de estimação para o cálculo da sequência de inovação. Essa diferença é calculada continuamente, usando estimação adaptativa inovativa baseada na teoria da máxima verossimilhança para ajustar dinamicamente as covariâncias do filtro de partículas. A fim de ilustrar a eficiência e aplicabilidade do filtro proposto, são realizadas simulações para estimar o estado de um sistema considerando diferentes cenários, sem incerteza e com incerteza. Os resultados das simulações mostram que o filtro proposto tem um bom desempenho em termos de robustez em comparação com o filtro de Kalman estendido e o filtro de partículas clássico quando aumenta a incerteza sobre os ruídos de processo e medição.

**Palavras-chave:** Estimação adaptativa inovativa; estimação de estado; filtro de Kalman estendido; filtro de partículas; rastreamento.



# Abstract

In this work, a proposal of a particle filter based on innovative adaptive estimation for nonlinear systems is presented, as well as its fundamentals and operation. With the objective of mitigating the uncertainty or the lack of knowledge of the covariance matrices of process and measurement noises, simultaneously, the particle filter is allied to the innovative adaptive estimation. For such purpose, the difference between the theoretical and measured innovation covariances is defined as an approximation that uses the average of a moving estimation window for the innovation sequence calculus. This difference is computed continuously, using innovative adaptive estimation based on maximum likelihood theory to dynamically adjust the covariances of the particle filter. To illustrate the efficiency and applicability of the proposed filter, simulations are carried out for estimating the state of a system considering different scenarios, with and without uncertainty. The simulation results show that the proposed filter performs well in terms of robustness compared to extended Kalman filter and classic particle filter when uncertainty about process and measurement noises increases.

**Keywords:** Innovative adaptive estimation; state estimation; extended Kalman filter; particle filter; tracking.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Ilustração de um processo não linear discreto. Inclui entrada e saída do sistema, também ruídos de processo e medição. . . . .	21
Figura 2 – Um robô móvel estimando o estado de uma porta. (Fonte: Thrun et al., 2005). . . . .	25
Figura 3 – Confiança do robô sobre o estado de uma porta. São representadas as medições da câmera, as ações de controle do robô e as confianças complementares sobre o estado da porta. . . . .	26
Figura 4 – Média das populações variando no tempo, conforme sistema do problema proposto. Média dos predadores (vermelho) e das presas (azul). . . . .	29
Figura 5 – Covariância das populações variando no tempo, conforme sistema do problema proposto. Covariância dos predadores (vermelho) e das presas (azul). . . . .	30
Figura 6 – Linha do tempo que mostra as estimações do estado e da covariância do erro, <i>a priori</i> e <i>a posteriori</i> . . . . .	32
Figura 7 – A distribuição $P(x)$ e a distribuição cumulativa das amostras, $P_s(x)$ . Na reamostragem, quanto maior o peso da partícula, $w_k^j$ , maior probabilidade de ser replicada ( $\mathbf{x}_k^i = \mathbf{x}_k^j$ ). . . . .	45
Figura 8 – Um ciclo de operação de um filtro de partículas (adaptado de (Wang et al., 2018)). . . . .	47
Figura 9 – Estimação do estado feita pelo EKF. É possível notar que, em pelo menos metade do período de simulação, os valores estimados se desviam do estado verdadeiro. Comparativo entre o estado verdadeiro (vermelho) e a estimativa realizada (azul). . . . .	55
Figura 10 – Estimação do estado feita pelo PF. É possível notar que os valores estimados acompanham o estado verdadeiro com maior confiança probabilística. Comparativo entre o estado verdadeiro (vermelho) e a estimativa realizada (azul). . . . .	56
Figura 11 – Função de verossimilhança logarítmica para distribuições gaussianas com média 5. (a) $N = 20$ , (a) $N = 60$ , (a) $N = 200$ , (a) $N = 500$ , com a utilização de 20, 60, 200 e 500 valores de dados, respectivamente. (Fonte: adaptado de Giron-Sierra (2017)). . . . .	59
Figura 12 – Representação da MLE para o exemplo com distribuição de Weibull. A representação é feita com as amostras (azul) e a MLE (vermelho), onde $MLE \sim Weibull(3321,64; 4,10083)$ (Fonte: MathWorks.com). . . . .	61

Figura 13 – Representação da MLE para o exemplo com distribuição de Weibull. A representação é feita com as amostras (azul) e a MLE (vermelho), onde $MLE \sim Weibull(1711,75; 1,99963)$ (Fonte: MathWorks.com). . . . .	61
Figura 14 – Degradação da estimação com o aumento do ruído. A representação inclui a posição de um alvo (Target) móvel no eixo x (preto) e as estimativas dessa variável feitas com EKF para $\sigma_R^2 = 10^2\mathbf{R}$ (vermelho) e $\sigma_R^2 = 10^3\mathbf{R}$ (azul). . . . .	62
Figura 15 – Estrutura típica de um sistema de monitoramento. . . . .	71
Figura 16 – Representação da trajetória de um alvo móvel em deslocamento (Fonte: CanStockPhoto.com). . . . .	74
Figura 17 – Comparação entre as estimações do estado verdadeiro feitas pelos filtros EKF, PF e IAE-PF, para $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ . São apresentados: estado verdadeiro (preto), estimação EKF (azul), estimação PF (vermelho), estimação IAE-PF (magenta). . . . .	75
Figura 18 – Comparação entre as estimações do estado verdadeiro feitas pelos filtros EKF, PF e IAE-PF, para $10^3\mathbf{Q}$ e $10^3\mathbf{R}$ . São apresentados: estado verdadeiro (preto), estimação EKF (azul), estimação PF (vermelho), estimação IAE-PF (magenta). . . . .	76
Figura 19 – Problema de rastreamento da posição alvo. . . . .	77
Figura 20 – Modelo simulado para rastreamento de um alvo com IAE-PF, com ruídos de processo e medição. Feito em ambiente Simulink <sup>TM</sup> e MATLAB <sup>TM</sup> . . . . .	78
Figura 21 – Sistema de aceleração do alvo móvel com as decorrentes velocidades e posições nos eixos x e y. . . . .	81
Figura 22 – Posição do alvo no eixo x ( $r_k^x$ ) para $10^3\mathbf{R}$ e $10^3\mathbf{Q}$ . <i>Target</i> (preto), estimativa EKF (magenta), estimativa PF (azul) e estimativa IAE-PF (vermelho). . . . .	83
Figura 23 – Velocidade do alvo no eixo x ( $v_k^x$ ) para $10^3\mathbf{R}$ e $10^3\mathbf{Q}$ . <i>Target</i> (preto), estimativa EKF (magenta), estimativa PF (azul) e estimativa IAE-PF (vermelho). . . . .	84
Figura 24 – Posição do alvo no eixo y ( $r_k^y$ ) para $10^3\mathbf{R}$ e $10^3\mathbf{Q}$ . <i>Target</i> (preto), estimativa EKF (magenta), estimativa PF (azul) e estimativa IAE-PF (vermelho). . . . .	85
Figura 25 – Velocidade do alvo no eixo y ( $v_k^y$ ) para $10^3\mathbf{R}$ e $10^3\mathbf{Q}$ . <i>Target</i> (preto), estimativa EKF (magenta), estimativa PF (azul) e estimativa IAE-PF (vermelho). . . . .	86

# Lista de tabelas

Tabela 1	– Índices de desempenho (RMSE e <i>DifPer</i> ) para avaliação da estimação. Comparação dos filtros EKF, PF e IAE-PF para diferentes incertezas sobre as matrizes de covariância. . . . .	76
Tabela 2	– Condições iniciais do sistema e potência dos ruídos. . . . .	81
Tabela 3	– Índices de desempenho para estimações da posição no eixo x ( $r_k^x$ ). Comparação dos filtros EKF, PF e IAE-PF em termos de RMSE e <i>DifPer</i> para diferentes incertezas sobre as matrizes de covariância. . . .	83
Tabela 4	– Índices de desempenho para estimações da velocidade no eixo x ( $v_k^x$ ). Comparação dos filtros EKF, PF e IAE-PF em termos de RMSE e <i>DifPer</i> para diferentes incertezas sobre as matrizes de covariância. . . .	84
Tabela 5	– Índices de desempenho para estimações da posição no eixo y ( $r_k^y$ ). Comparação dos filtros EKF, PF e IAE-PF em termos de RMSE e <i>DifPer</i> para diferentes incertezas sobre as matrizes de covariância. . . .	85
Tabela 6	– Índices de desempenho para estimações da velocidade no eixo y ( $v_k^y$ ). Comparação dos filtros EKF, PF e IAE-PF em termos de RMSE e <i>DifPer</i> para diferentes incertezas sobre as matrizes de covariância. . . .	86

# Lista de abreviaturas e siglas

AKF	<i>Adaptive Kalman Filter</i>
ASIR	<i>Auxiliary Sampling-Importance Resampling</i>
CKF	<i>Cubatura Kalman Filter</i>
CSW	<i>Cumulative Sum of Weights</i>
CWNA	<i>Continuous White Noise Acceleration</i>
DifPer	<i>Diferença Percentual</i>
EKF	<i>Extended Kalman Filter</i>
FPF	<i>Feedback Particle Filter</i>
IAE	<i>Innovative Adaptive Estimation</i>
IAE-PF	<i>Innovative Adaptive Estimation Particle Filter</i>
IID	<i>Independent and Identically Distributed</i>
JPDA	<i>Joint Probabilistic Data Association</i>
KF	<i>Kalman Filter</i>
LLPF	<i>Local Linearization Particle Filter</i>
LS	<i>Least Squares</i>
MAPF	<i>Marginalized Adaptive Particle Filter</i>
MCMC	<i>Markov Chain Monte Carlo</i>
MHT	<i>Multiple-Hypothesis Tracker</i>
MISE	<i>Mean Integrated Square Error</i>
MJLS	<i>Markov Jump Linear Systems</i>
MLE	<i>Maximum Likelihood Estimation</i>
MMPF	<i>Multiple-Model Particle Filter</i>
MMSE	<i>Minimum Mean-Square Error</i>

MV	<i>Máxima Verossimilhança</i>
OIAE-KF	<i>Optimal Innovation based Adaptive Estimation Kalman Filter</i>
OTPF	<i>Optimal Transportation Particle Filter</i>
PF	<i>Particle Filter</i>
QKF	<i>Quadrature Kalman Filter</i>
RCPF	<i>Robust Cubature Particle Filter</i>
RMSE	<i>Root Mean-Square Error</i>
RPF	<i>Regularized Particle Filter</i>
SIR	<i>Sampling-Importance Resampling</i>
SIS	<i>Sequential Importance Sampling</i>
UKF	<i>Unscented Kalman Filter</i>
UT	<i>Unscented Transform</i>

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
<b>1.1</b>	<b>Motivação/Justificativa</b>	<b>18</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos: geral e específicos</b>	<b>18</b>
1.2.1	Objetivo geral	18
1.2.2	Objetivos específicos	18
<b>1.3</b>	<b>Contribuições</b>	<b>18</b>
<b>1.4</b>	<b>Estado da Arte</b>	<b>19</b>
<b>1.5</b>	<b>Organização da Dissertação</b>	<b>19</b>
<b>1.6</b>	<b>Produção Bibliográfica</b>	<b>20</b>
1.6.1	Congressos	20
1.6.2	Capítulo de livro	20
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>21</b>
<b>2.1</b>	<b>Estimação Bayesiana: Problema e Solução</b>	<b>21</b>
2.1.1	Derivação matemática do filtro de Bayes	23
2.1.2	Exemplo de aplicação com filtro de Bayes	24
<b>2.2</b>	<b>Filtro de Kalman</b>	<b>26</b>
2.2.1	Propagação de estados e covariâncias para sistemas em tempo discreto	27
2.2.2	O filtro de Kalman em tempo discreto	31
2.2.3	Propriedades do filtro de Kalman	35
<b>2.3</b>	<b>Filtro de Kalman Estendido</b>	<b>35</b>
<b>2.4</b>	<b>Filtro de Kalman <i>Unscented</i></b>	<b>37</b>
2.4.1	A transformada <i>unscented</i>	38
<b>2.5</b>	<b>Filtro de Partículas</b>	<b>39</b>
2.5.1	Integração de Monte Carlo	40
2.5.2	Amostragem por importância	41
2.5.3	Amostragem por importância sequencial	41
2.5.4	O problema da degeneração	44
2.5.5	Reamostragem	44
2.5.6	Seleção da Densidade de Importância	48
2.5.6.1	A escolha ótima	48
2.5.6.2	Função de importância ótima gaussiana	48
2.5.6.3	Escolhas subótimas	50
2.5.7	Versões de filtros de partículas	50
2.5.7.1	Filtro SIR	50

2.5.7.2	Filtro SIR auxiliar . . . . .	51
2.5.7.3	Filtros de partículas com diversidade amostral aperfeiçoada . . . . .	51
2.5.7.4	Filtros de partículas com linearização local . . . . .	53
2.5.7.5	Filtro de partículas de modelo múltiplo . . . . .	53
<b>2.6</b>	<b>Exemplo Comparativo de Estimação com EKF e PF . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>2.7</b>	<b>Considerações Finais . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA PROPOSTA: IAE-PF . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>3.1</b>	<b>Introdução . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>3.2</b>	<b>Estimativa de Máxima Verossimilhança . . . . .</b>	<b>57</b>
3.2.1	MLE para distribuição gaussiana . . . . .	58
3.2.2	Regressão linear: MLE para ruído gaussiano não branco . . . . .	59
3.2.3	MLE para distribuição de Weibull . . . . .	60
<b>3.3</b>	<b>Estimação Adaptativa Inovativa . . . . .</b>	<b>62</b>
3.3.1	Solução analítica para o problema de MLE . . . . .	64
3.3.2	Adaptabilidade para a covariância de ruído de processo . . . . .	64
3.3.3	Adaptabilidade para a covariância de ruído de medição . . . . .	65
3.3.4	Algoritmo IAE-MLE . . . . .	66
<b>3.4</b>	<b>Filtro de Partículas baseado em IAE . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>3.5</b>	<b>Considerações Finais . . . . .</b>	<b>70</b>
<b>4</b>	<b>SIMULAÇÕES E RESULTADOS . . . . .</b>	<b>71</b>
<b>4.1</b>	<b>Introdução . . . . .</b>	<b>71</b>
<b>4.2</b>	<b>CrITÉRIOS de Avaliação de Desempenho . . . . .</b>	<b>73</b>
<b>4.3</b>	<b>Resultados de Simulação . . . . .</b>	<b>73</b>
4.3.1	Problema Simulado 1 . . . . .	73
4.3.2	Problema Simulado 2 . . . . .	77
4.3.2.1	Modelo cinemático . . . . .	78
4.3.2.2	TrajéTória verdadeira e estimações . . . . .	81
<b>4.4</b>	<b>Considerações Finais . . . . .</b>	<b>86</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>87</b>
	<b>APÊNDICE: Derivação Matemática do Filtro de Kalman Estendido . . . . .</b>	<b>89</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>91</b>



# 1 Introdução

A filtragem não linear tem sido o foco do interesse nas comunidade de estatística e engenharia por mais de cinquenta anos (Jazwinski, 1970). O problema se trata da estimação sequencial do estado de um sistema dinâmico através de uma sequência de medições ruidosas obtidas a partir do sistema. É comum usar a abordagem em espaço de estados para modelar a dinâmica do sistema, assim, equações diferenciais são utilizadas para modelar a evolução do sistema ao longo do tempo. Para a estimação de estado dinâmica, a abordagem em tempo discreto é conveniente e amplamente utilizada (Ristic, 2003).

A abordagem em espaço de estados para modelagem em séries temporais enfoca o vetor de estado de um sistema. O vetor de estado contém toda a informação relevante requerida para descrever o sistema sob investigação. Por exemplo, em problemas de rastreamento, essa informação pode estar relacionada às características cinemáticas do alvo (target). Alternativamente, em um problema de econometria, pode estar relacionado ao fluxo monetário, taxas de interesse, inflação, etc. O vetor de medição representa as observações (ruidosas) que estão relacionadas ao vetor de estado. O vetor de medição é geralmente (mas não obrigatoriamente) de dimensão menor que o vetor de estado. A representação em espaço de estados é conveniente para lidar com dados multivariados e processos não lineares/não gaussianos.

A fim de analisar e realizar inferências sobre um sistema dinâmico, pelo menos dois modelos são requeridos (Ristic, 2003): primeiro, um modelo que descreva a evolução do estado com o tempo (modelo de sistema), e segundo, um modelo que relacione as medições ruidosas ao estado (modelo de medição). Esses modelos são assumidos disponíveis em um formato probabilístico (Ristic, 2003). A formulação probabilística do espaço de estados e a exigência para atualização da informação em função do recebimento de novas medições são adequadas para a abordagem bayesiana. Isso fornece uma estrutura geral para problemas de estimação de estado dinâmica.

Na abordagem bayesiana para a estimação de estado dinâmica, são feitas tentativas de construção da função densidade de probabilidade *a posteriori* do estado, tendo como base toda informação disponível, incluindo a sequência de medições recebida. A princípio, uma estimação ótima (com respeito a qualquer critério) do estado pode ser obtida a partir da distribuição *a posteriori*.

Para muitos problemas, uma estimação é requerida a cada instante em que uma medição é recebida. Nesse caso, um filtro recursivo é uma solução conveniente. Filtragem recursiva significa que os dados recebidos podem ser processados sequencialmente, de forma

que não é necessário armazenar o conjunto completo dos dados nem reprocessar os dados existentes caso uma nova medição esteja disponível. Tal filtro consiste essencialmente de dois estágios: predição e atualização (Ristic, 2003). O estágio de predição usa o modelo de sistema para fazer a predição da densidade de probabilidade do estado um instante de tempo à frente ( $k+1$ ). É sabido que o estado é usualmente sujeito a distúrbios desconhecidos (modelados como ruídos aleatórios), a predição geralmente translada, deforma, e espalha a função densidade do estado. A operação de atualização usa a medição mais recente para modificar (tipicamente, para melhor estimar) a função densidade de predição. Isso é feito baseado no teorema de Bayes, que é o mecanismo para atualizar o conhecimento sobre o estado de um alvo em função da nova informação obtida.

Dentre os filtros mais utilizados para estimação de estado dinâmica estão o filtro de Kalman estendido (EKF - *extended Kalman filter*) e o filtro de partículas (PF - *particle filter*). O EKF é uma derivação do filtro de Kalman clássico (Kalman, 1960). O PF tem suas origens no algoritmo do filtro *bootstrap* (Gordon et al., 1993), uma implementação de um filtro Bayesiano recursivo (Godsill, 2019).

Os algoritmos EKF e PF requerem conhecimento *a priori* das estatísticas de ruído de processo e de medição do sistema em que são aplicados (Simon, 2006). Uma estimativa inicial dessas quantidades pode ser feita. No entanto, os valores permanecem fixos durante todo o processo de estimação do filtro.

Soluções para geração adaptativa de estatísticas de ruído foram propostas em (Deilamsalehy & Havens, 2018) e (Mohamed & Schwarz, 1999). Entre essas soluções estão o filtro de Kalman adaptativo (AKF - *adaptive Kalman filter*) (Mohamed & Schwarz, 1999) para modelos gaussianos lineares, que estima parâmetros desconhecidos nas distribuições de ruído juntamente com o estado. Para modelos não lineares, existe a solução do filtro de partículas adaptativo marginalizado (MAPF - *marginalized adaptive particle filter*), onde os parâmetros de ruído são atualizados usando estatísticas de dimensão finita suficientes para cada partícula (Özkan et al., 2013). A fim de melhorar a estimação das matrizes de covariância de ruído de processo e medição, a estimação adaptativa inovativa (IAE - *innovative adaptive estimation*) foi proposta, permitindo a atualização de matrizes de covariância de ruído durante a estimação de estado (Woo et al., 2019).

O filtro enfatizado neste trabalho é bastante vantajoso, principalmente, nos casos em que o ruído degrada fortemente a estimativa fornecida pelos filtros clássicos (Arulampalam et al., 2002; Hue et al., 2002; Boers & Driessen, 2001). Além disso, o PF baseado em IAE é justificado pelo fato de que as estatísticas sobre ruídos em aplicações do mundo real não são conhecidas *a priori*, principalmente quando tais estatísticas são variantes no tempo. Entre os PFs existentes na literatura, nenhum outro estima as matrizes de covariâncias de ruído com a técnica de estimação adaptativa inovativa.

## 1.1 Motivação/Justificativa

A maioria dos sistemas reais são governados por equações não lineares (Mohler, 1991), e a aquisição de dados sobre o estado de um sistema é sempre ruidosa. Além disso, as matrizes de covariância de ruído de processo e de medição são usualmente desconhecidas ou difíceis de estimar, o que torna a tarefa da filtragem mais difícil, independente da aplicação. Essa dificuldade, em função da incerteza, é encontrada, por exemplo, em identificação de sistemas (Yang et al., 2020), reidentificação de pessoas (Han et al., 2022), comunicação sem fio (Ahmed et al., 2021) e sistemas de rastreamento (Ding & Zhang, 2021; Zhang et al., 2022). Como é um problema atual e com ampla necessidade de resolução, é necessária a criação ou derivação de métodos adaptativos de estimação capazes de lidar com essas características, pois um filtro que supra essas necessidades ou contribua com o desenvolvimento da área, vem a ser muito útil para diversas aplicações.

## 1.2 Objetivos: geral e específicos

### 1.2.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho consiste em propor um método de filtragem adaptativa desenvolvido durante o período de pesquisa do mestrado, o qual se destaca por estimar estados, com precisão maior que outros filtros convencionais, quando a incerteza sobre os parâmetros de ruído de processo e de medição aumentam significativamente.

### 1.2.2 Objetivos específicos

- Usar equações não lineares sempre que possível para alcançar uma estimação mais próxima do estado verdadeiro;
- Obter um ganho de robustez na estimação para os casos de grande incerteza em relação às matrizes de covariância de ruído;
- Demonstrar o uso vantajoso do método de filtragem proposto através de simulações computacionais e comparações com outras técnicas de estimação;
- Descrever detalhadamente os fundamentos e a operação do filtro proposto.

## 1.3 Contribuições

- A combinação de equações não lineares, sempre que disponíveis, e de linearizações advindas da teoria de Kalman para refinar as estimações;

- A adaptabilidade simultânea das matrizes de covariância de ruído de processo e medição por meio do método de estimação adaptativa inovativa.

## 1.4 Estado da Arte

O método IAE, baseado na teoria de máxima verossimilhança, é aplicado a diversos problemas atuais, como em um sistema de detecção em massa de pedestres (Bakibillah et al., 2022), o qual inicia a estimação com grande incerteza em relação à matriz de covariância de ruído de medição,  $\mathbf{R}$ , e obtém resultados superiores comparados a outros filtros. A simulação ocorre somente com a adaptabilidade da matriz  $\mathbf{R}$  em função de um desejado ganho computacional por parte dos autores.

Outra solução proposta, com uma variante do IAE, foi o filtro de Kalman baseado em estimação adaptativa inovativa ótima (OIAE-KF - *optimal innovation based adaptive estimation Kalman filter*) (Sumithra & Vadivel, 2021), que aplica a técnica para estimar adaptativamente os valores das matrizes de covariância de ruído de processo e de medição,  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ , respectivamente, e o aplica para um problema de estimação de posicionamento de veículos em uma rede *ad-hoc*.

Os filtros de partículas também têm se desenvolvido com técnicas de adaptabilidade para casos de alta dimensionalidade e casos de estimação de matrizes relacionadas aos sistemas, como o OTPF (*optimal transportation particle filter*) (Kang et al., 2022), uma derivação do filtro de partículas com realimentação (FPF - *feedback particle filter*), que apresentou desempenho superior a outros filtros em dois cenários simulados.

Um outro exemplo é o filtro de partículas de cubatura robusto (RCPF - *robust cubature particle filter*) (Shi et al., 2021), que incorpora técnicas distintas de filtragem e novas informações ao seu processamento, tendo duas versões propostas pelos autores, as quais consideram as últimas medições recebidas para correção de fatores que minimizem a degradação das partículas, além de utilizar o ganho de Kalman aliado à teoria do estimador-M (Huber, 1964) em sua etapa de atualização.

## 1.5 Organização da Dissertação

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica. No Capítulo 3, o método proposto é fundamentado e introduzido. No Capítulo 4, resultados de simulação para sistemas de rastreamento são apresentados. As conclusões e trabalhos futuros são descritos no Capítulo 5.

- O Capítulo 1 introduz o tema e um breve desenvolvimento histórico, citando trabalhos alusivos aos tópicos a serem explorados, bem como a motivação, objetivos,

contribuições, o estado da arte, a estrutura deste trabalho e a produção bibliográfica desenvolvida ao longo da pesquisa para essa dissertação.

- O Capítulo 2 trata da fundamentação teórica das técnicas utilizadas. São abordados conceitos como estimação bayesiana, propagação de estados, filtro de Kalman, filtro de Kalman estendido e filtro de partículas.
- O Capítulo 3 apresenta a metodologia proposta. A técnica aplicada resulta no filtro de partículas baseado em estimação adaptativa inovativa. Nesse capítulo, os detalhes do filtro, bem como seu algoritmo são apresentados.
- O Capítulo 4 trata sobre os resultados obtidos e discussões em relação às simulações realizadas. Inclui a comparação dos sistemas simulados entre o filtro proposto e outros filtros tipicamente aplicados em casos semelhantes.
- O Capítulo 5 apresenta as considerações finais sobre os resultados e as propostas de trabalhos futuros.

## 1.6 Produção Bibliográfica

### 1.6.1 Congressos

- Pinheiro, C.M., Serrepe Ranno, M.M., das Chagas de Souza, F. (2022). Tracking a Moving Target in 2D Using a Particle Filter Based on Innovative Adaptive Estimation. Apresentado no *15th APCA International Conference on Automatic Control and Soft Computing*, Caparica, Portugal.
- Pinheiro, C.M., Serrepe Ranno, M.M., das Chagas de Souza, F. (2022). Considerações Sobre um Filtro de Partículas Baseado em Estimação Adaptativa Inovativa para Sistemas não Lineares. A ser apresentado no *XXIV Congresso Brasileiro de Automática*. Fortaleza - CE, Brasil.

### 1.6.2 Capítulo de livro

- Pinheiro, C.M., Serrepe Ranno, M.M., das Chagas de Souza, F. (2022). Tracking a Moving Target in 2D Using a Particle Filter Based on Innovative Adaptive Estimation. In: *CONTROLO 2022: Proceedings of the 15th APCA International Conference on Automatic Control and Soft Computing*. Lecture Notes in Electrical Engineering, vol. 930. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-10047-5\\_56](https://doi.org/10.1007/978-3-031-10047-5_56).

## 2 Fundamentação Teórica

Este capítulo apresenta a fundamentação teórica do trabalho. Nele, são abordados conceitos como estimação bayesiana, propagação de estados, filtro de Kalman, filtro de Kalman estendido e filtro de partículas. Aqui, os elementos requeridos para compreensão do método proposto são apresentados.

### 2.1 Estimação Bayesiana: Problema e Solução

Um processo não linear de tempo discreto pode ser representado como ilustra a Figura 1.

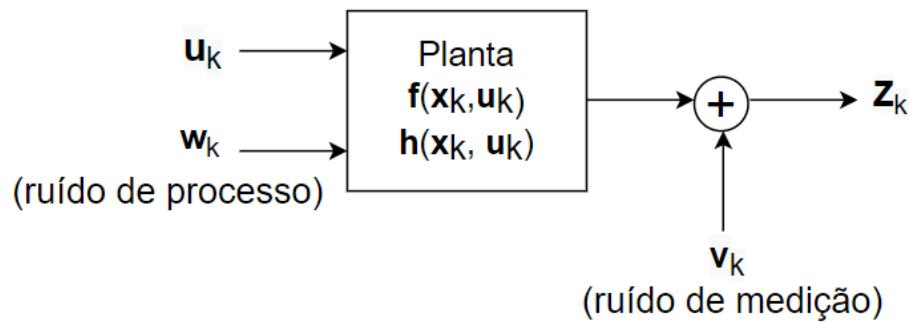


Figura 1 – Ilustração de um processo não linear discreto. Inclui entrada e saída do sistema, também ruídos de processo e medição.

As equações que representam o funcionamento do sistema ilustrado são:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{v}_k, \quad (2.2)$$

onde  $k$  denota um ponto discreto no tempo (com  $k - 1$  sendo o instante imediatamente anterior),  $\mathbf{u}_{k-1}$  é o vetor de entrada do instante anterior,  $\mathbf{x}_k$  é o vetor de estados atual, o qual pode ser observado, mas não pode ser medido,  $\mathbf{z}_k$  é o vetor de saída atual,  $\mathbf{w}_k$  e  $\mathbf{v}_k$  são o ruído de processo e o de medição, respectivamente, os quais são assumidos gaussianos brancos com média zero, e covariância  $\mathbf{Q}_k$  e  $\mathbf{R}_k$ , respectivamente. As funções  $\mathbf{f}(\cdot)$  e  $\mathbf{h}(\cdot)$  são, em geral, não lineares, as quais relacionam o estado anterior ( $\mathbf{x}_k$ ) e a entrada atual ( $\mathbf{u}_k$ ) com o estado seguinte ( $\mathbf{x}_{k+1}$ ) e a saída atual ( $\mathbf{y}_k$ ). Os estados estimados, fornecidos por um filtro, por exemplo, são representados genericamente por  $\hat{\mathbf{x}}_k$ , que é, em geral, um vetor.

Para definir o problema de filtragem não linear, o vetor de estado do alvo,  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ , é introduzido, onde  $n_x$  é a dimensão do vetor de estado;  $\mathbb{R}^{n_x}$  é o espaço  $n_x$ -dimensional

real;  $k \in \mathbb{N}$  é o índice temporal; e  $\mathbb{N}$  é o conjunto dos números naturais. Aqui, o índice  $k$  é assinalado a  $t_k$ , um instante de tempo contínuo, e o intervalo de amostragem  $T_{k-1} \triangleq t_k - t_{k-1}$  pode ser temporalmente dependente (isto é, uma função de  $k$ ). O estado do alvo evolui de acordo com o modelo estocástico de (2.1). O objetivo da filtragem não linear é estimar recursivamente  $\mathbf{x}_k$  a partir das medições  $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ , onde  $n_z$  é a dimensão do vetor de medição;  $\mathbb{R}^{n_z}$  é o espaço  $n_z$ -dimensional real. As medições estão relacionadas ao estado do alvo via equação de medição (2.2).

São desejadas estimações filtradas de  $\mathbf{x}_k$  baseadas na sequência de todas as medições disponíveis até o instante  $k$ ,  $\mathbf{Z}_k \triangleq \{\mathbf{z}_i, i = 1, \dots, k\}$ . De uma perspectiva bayesiana, o problema é quantificar recursivamente algum grau de confiança no estado  $\mathbf{x}_k$  no instante  $k$ , tomando diferentes valores, dada a informação  $\mathbf{Z}_k$  até o instante  $k$ . Assim, a construção da distribuição *a posteriori* (posterior)  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k)$  é requerida. A densidade inicial do vetor de estado é  $p(\mathbf{x}_0) \triangleq p(\mathbf{x}_0 | \mathbf{z}_0)$ , onde  $\mathbf{z}_0$  é o conjunto sem medições. Então, a princípio, a densidade  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k)$  pode ser obtida com os dois estágios de um filtro recursivo: *predição* e *atualização*.

Caso a função densidade requerida  $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Z}_{k-1})$  no instante  $k - 1$  esteja disponível, o estágio de predição envolve o uso do modelo de sistema (2.1) para obter a densidade de predição (também conhecida como distribuição *a priori*) do estado no instante  $k$  através da equação de Chapman-Kolmogorov:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Z}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}. \quad (2.3)$$

É possível notar que na Equação (2.3), foi levado em consideração o fato de que  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Z}_{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$  já que (2.1) descreve um processo Markoviano de ordem um. O modelo probabilístico da evolução do estado (também chamado de densidade transicional),  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ , é definido pela equação de sistema (2.1) e as estatísticas conhecidas de  $\mathbf{w}_{k-1}$ .

No instante  $k$ , quando a medição  $\mathbf{z}_k$  se torna disponível, o estágio de atualização é realizado. Isso envolve uma atualização da densidade de predição através da regra de Bayes:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k) &= p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_k, \mathbf{Z}_{k-1}) \\ &= \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{Z}_{k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{k-1})}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{Z}_{k-1})} \\ &= \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{k-1})}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{Z}_{k-1})}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde a constante de normalização

$$p(\mathbf{z}_k | \mathbf{Z}_{k-1}) = \int p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{k-1}) d\mathbf{x}_k \quad (2.5)$$

depende da função de verossimilhança  $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)$ , definida pelo modelo de medição, Equação (2.2), e das estatísticas conhecidas de  $\mathbf{v}_k$ . No estágio de atualização, (2.4), a medição  $\mathbf{z}_k$  é utilizada para modificar a densidade *a priori* para obter a requerida densidade *a posteriori* do estado atual.

As relações de recorrência (2.3) e (2.4) formam a base para a solução bayesiana ótima. O conhecimento da densidade *a posteriori*  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k)$  permite que se compute uma estimação de estado ótima com respeito a qualquer critério. Por exemplo, o erro quadrático médio mínimo (MMSE - *minimum mean-square error*) estima a média condicional de  $\mathbf{x}_k$  (Bar-Shalom et al., 2008):

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{\text{MMSE}} \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k\} = \int \mathbf{x}_k \cdot p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k) d\mathbf{x}_k, \quad (2.6)$$

enquanto a estimação do máximo valor *a posteriori* ( $\hat{\mathbf{x}}_{\text{MAP}}$ ) é o valor máximo de  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k)$ :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{\text{MAP}} \triangleq \arg \max p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k). \quad (2.7)$$

Similarmente, uma medida de precisão da estimação do sistema (a covariância, por exemplo) pode ser obtida a partir de  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k)$ .

A propagação recursiva da densidade *a priori*, dada por (2.3) e da densidade *a posteriori*, dada por (2.4), formam uma solução somente conceitual no sentido que, em geral, não pode ser determinada analiticamente. A implementação da solução conceitual requer o armazenamento de toda a função densidade, o que é, em termos gerais, equivalente a um vetor de dimensão infinita. Tendo em vista que na maioria dos casos práticos, a solução analítica de (2.3) e (2.4) é intratável, o uso de aproximações ou algoritmos bayesianos subótimos é obrigatório.

### 2.1.1 Derivação matemática do filtro de Bayes

A derivação matemática da estimação bayesiana é apresentada a seguir. A demonstração é feita por indução.

É possível mostrar que o filtro de Bayes calcula corretamente a distribuição posterior  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}, \mathbf{u}_{1:k})$  partindo da correspondente distribuição posterior da iteração anterior, dada por  $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1})$ . A correção segue sob a suposição que a confiança *a priori*  $bel(\mathbf{x}_0)$  foi inicializada corretamente no instante  $k = 0$ , em que o índice  $1:k$  indica que os estados ou medições são dados do instante  $k = 1$  até o instante atual,  $k$ , e  $bel(\mathbf{x})$  é a confiança probabilística sobre o estado  $\mathbf{x}$ .

O primeiro passo da derivação do filtro de Bayes envolve a aplicação da regra de Bayes à densidade *a posteriori*, conforme é apresentado abaixo:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}, \mathbf{u}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k})}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k})} \quad (2.8)$$

$$= \eta p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k}), \quad (2.9)$$



considerando que  $\eta = 1/p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k})$  é um fator de normalização, e que o estado  $\mathbf{x}_k$  está completo, ou seja, nenhuma variável anterior a  $\mathbf{x}_k$  pode influenciar a evolução estocástica de estados futuros. Em particular, caso, hipoteticamente, se conheça o estado  $\mathbf{x}_k$  e havendo o interesse em prever a medição  $\mathbf{z}_k$ , nenhuma medição anterior ou ação de controle forneceria alguma informação adicional. Em termos matemáticos, isso pode ser apresentado pela seguinte expressão:

$$p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k}) = p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k), \quad (2.10)$$

o que, sendo uma independência condicional, permite simplificar para

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}, \mathbf{u}_{1:k}) = \eta p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k}), \quad (2.11)$$

e, portanto,

$$bel(\mathbf{x}_k) = \eta p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) \overline{bel}(\mathbf{x}_k). \quad (2.12)$$

onde  $\overline{bel}(\mathbf{x}_k)$  é a confiança *a posteriori* e  $bel(\mathbf{x}_k)$  é a confiança *a priori*.

A seguir, expandindo o termo  $\overline{bel}(\mathbf{x}_k)$ :

$$\overline{bel}(\mathbf{x}_k) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k}) \quad (2.13)$$

$$= \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{z}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k}) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad (2.14)$$

e, novamente, é feita a suposição de que o estado está completo, o que implica que, caso se conheça  $\mathbf{x}_{k-1}$ , medições e ações de controle anteriores não acrescentam informação com relação ao estado  $\mathbf{x}_k$ . É possível, então, fazer a seguinte consideração:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{z}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k). \quad (2.15)$$

Aqui, a variável de controle  $\mathbf{u}_k$  é retida, haja vista ela não anteceder o estado  $\mathbf{x}_{k-1}$  e pelo fato de que  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k) \neq p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ . Entretanto, o controle  $\mathbf{u}_k$  pode seguramente ser omitido do conjunto de variáveis condicionantes em  $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k})$  para o caso de controles aleatoriamente selecionados, o que conduz à equação de atualização recursiva:

$$\overline{bel}(\mathbf{x}_k) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}. \quad (2.16)$$

Em resumo, o filtro de Bayes calcula a densidade *a posteriori* ao longo do estado  $\mathbf{x}_k$  condicionado aos dados de medição e controle até o instante  $k$ . A derivação assume que o sistema é Markoviano, isto é, que o estado está completo.

## 2.1.2 Exemplo de aplicação com filtro de Bayes

Um robô estima o estado de uma porta, se aberta ou fechada, através de sua câmera, conforme se observa na Figura 2. Além disso, o robô pode aplicar duas ações

de controle aleatoriamente diante da porta, empurrá-la ou não. O robô segue realizando medições e ações de controle até que atinja 100% de confiança sobre o estado da porta.

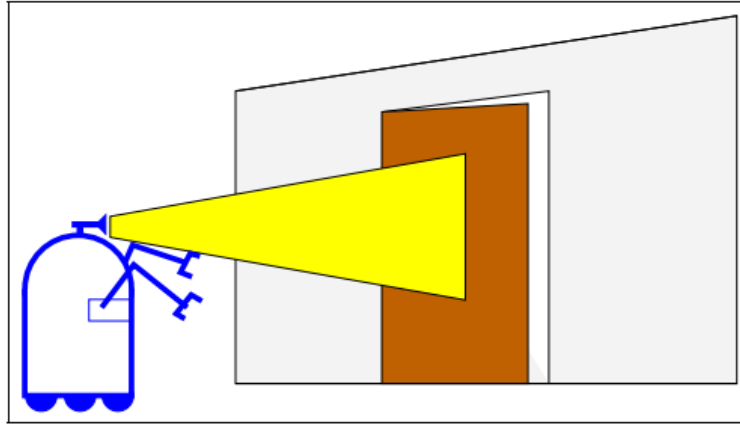


Figura 2 – Um robô móvel estimando o estado de uma porta. (Fonte: Thrun et al., 2005).

Assume que, inicialmente, o robô não conhece o estado da porta, por isso assinala probabilidade *a priori* igual para os dois estados possíveis:

$$bel(\mathbf{x}_0 = \text{aberta}) = 0,5$$

$$bel(\mathbf{x}_0 = \text{fechada}) = 0,5.$$

Os sensores do robô são assumidos ruidosos, caracterizados pelas seguintes probabilidades condicionais:

$$p(\mathbf{z}_k = \text{detecta\_aberta} \mid \mathbf{x}_k = \text{aberta}) = 0,6$$

$$p(\mathbf{z}_k = \text{detecta\_fechada} \mid \mathbf{x}_k = \text{aberta}) = 0,4$$

$$p(\mathbf{z}_k = \text{detecta\_aberta} \mid \mathbf{x}_k = \text{fechada}) = 0,2$$

$$p(\mathbf{z}_k = \text{detecta\_fechada} \mid \mathbf{x}_k = \text{fechada}) = 0,8.$$

Finalmente, são consideradas as ações de controle, para o caso de empurrar a porta:

$$p(\mathbf{x}_k = \text{aberta} \mid \mathbf{u}_k = \text{empurrar}, \mathbf{x}_{k-1} = \text{aberta}) = 1$$

$$p(\mathbf{x}_k = \text{fechada} \mid \mathbf{u}_k = \text{empurrar}, \mathbf{x}_{k-1} = \text{aberta}) = 0$$

$$p(\mathbf{x}_k = \text{aberta} \mid \mathbf{u}_k = \text{empurrar}, \mathbf{x}_{k-1} = \text{fechada}) = 0,8$$

$$p(\mathbf{x}_k = \text{fechada} \mid \mathbf{u}_k = \text{empurrar}, \mathbf{x}_{k-1} = \text{fechada}) = 0,2.$$

ou não empurrá-la:

$$p(\mathbf{x}_k = \text{aberta} \mid \mathbf{u}_k = \text{nada}, \mathbf{x}_{k-1} = \text{aberta}) = 1$$

$$p(\mathbf{x}_k = \text{fechada} \mid \mathbf{u}_k = \text{nada}, \mathbf{x}_{k-1} = \text{aberta}) = 0$$

$$p(\mathbf{x}_k = \text{aberta} \mid \mathbf{u}_k = \text{nada}, \mathbf{x}_{k-1} = \text{fechada}) = 0$$

$$p(\mathbf{x}_k = \text{fechada} \mid \mathbf{u}_k = \text{nada}, \mathbf{x}_{k-1} = \text{fechada}) = 1.$$

A simulação é realizada em 15 iterações, e o resultado de uma detecção pode ser visto na Figura 3, que mostra a confiança crescente do robô sobre o estado da porta aberta. Após 13 iterações, é obtido 100% de confiança sobre o estado, embora na quinta iteração, o valor da confiança já seja de 99%.

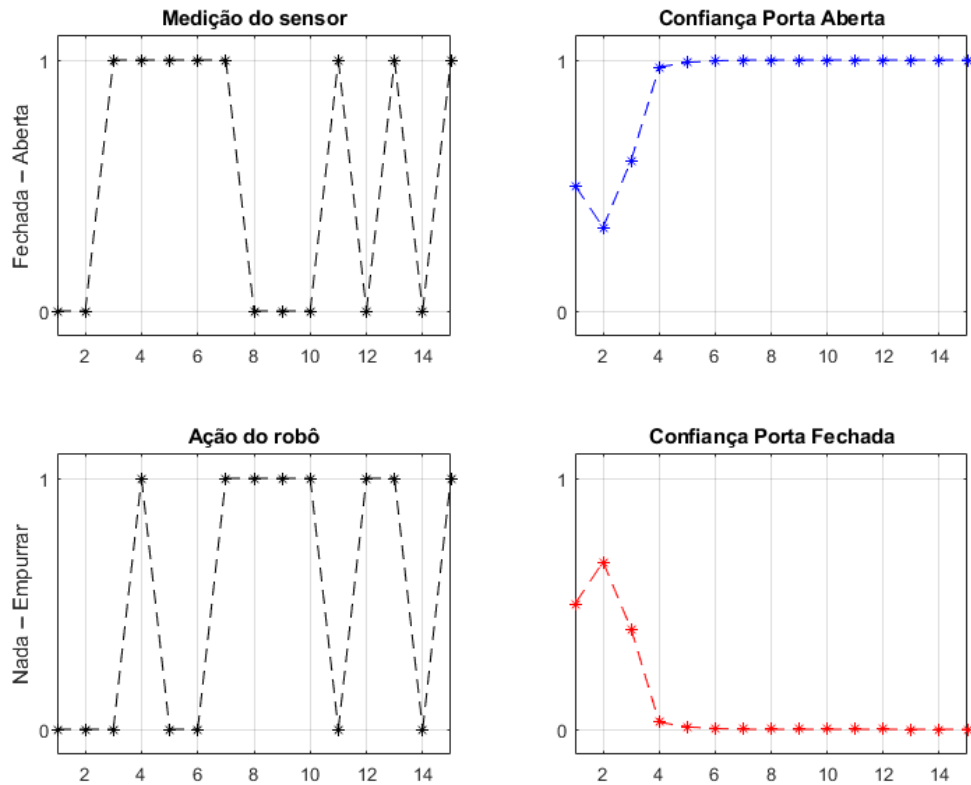


Figura 3 – Confiança do robô sobre o estado de uma porta. São representadas as medições da câmera, as ações de controle do robô e as confianças complementares sobre o estado da porta.

Nas próximas seções, são apresentados filtros recursivos que utilizam a estimação bayesiana subótima.

## 2.2 Filtro de Kalman

O filtro de Kalman (KF - *Kalman filter*) (Kalman, 1960) assume que a densidade *a posteriori* em cada instante de tempo é gaussiana e, portanto, é exata e completamente caracterizada por dois parâmetros, sua média e covariância. Isso é fundamental para o algoritmo do filtro de Kalman, para estimação de estado e covariância, o que é apresentado a seguir.

### 2.2.1 Propagação de estados e covariâncias para sistemas em tempo discreto

Seja considerado o seguinte sistema linear discreto no tempo:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (2.17)$$

onde  $\mathbf{G}_{k-1}$  é a matriz de entrada de controle,  $\mathbf{u}_{k-1}$  é uma entrada conhecida e  $\mathbf{w}_k$  é um ruído branco gaussiano de média zero com covariância  $\mathbf{Q}_k$ . Caso o valor esperado seja calculado dos dois lados da Equação (2.17), é possível observar como a média do estado  $\mathbf{x}_k$  varia ao longo do tempo:

$$\bar{\mathbf{x}}_k = E[\mathbf{x}_k] \quad (2.18)$$

$$= \mathbf{F}_{k-1}\bar{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}, \quad (2.19)$$

e as Equações (2.17) e (2.19) podem ser utilizadas para verificar como a covariância do estado varia ao longo do tempo:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^T &= (\mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_k)^T \\ &= [\mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}][\mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}]^T \\ &= \mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})^T \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{w}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}^T + \\ &+ \mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})\mathbf{w}_{k-1}^T + \mathbf{w}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})^T \mathbf{F}_{k-1}^T. \end{aligned} \quad (2.20)$$

De onde se obtém a covariância de  $\mathbf{x}_k$  como o valor esperado da Equação (2.20). Uma vez que  $(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})$  é decorrelacionada com  $\mathbf{w}_{k-1}$ , segue que:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= E[(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^T] \\ &= \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

A Equação (2.21) é chamada de equação de Lyapunov (Simon, 2006).

A seguir, um teorema é apresentado, cuja prova pode ser encontrada em Kailath et al. (2000):

**Teorema 1** *A partir da equação  $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{P}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q}$ , onde  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{Q}$  são matrizes reais. Os autovalores da matriz  $\mathbf{F}$  são denotados por  $\lambda_i(\mathbf{F})$ .*

1. Uma solução única  $\mathbf{P}$  existe se, e somente se,  $\lambda_i(\mathbf{F})\lambda_j(\mathbf{F}) \neq 1$  para todo  $i, j$ . Essa solução única é simétrica.
2. A condição anterior inclui o caso de  $\mathbf{F}$  estável, porque se  $\mathbf{F}$  é estável todos os seus autovalores possuem magnitude menor que 1 para todo  $i, j$ . Portanto, se  $\mathbf{F}$  é estável, a equação de Lyapunov em tempo discreto possui uma solução  $\mathbf{P}$  que é única e simétrica. Nesse caso, a solução pode ser escrita como

$$\mathbf{P} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{F}^i \mathbf{Q} (\mathbf{F}^T)^i. \quad (2.22)$$

3. Se  $\mathbf{F}$  é estável e  $\mathbf{Q}$  é semidefinida positiva, então a solução única  $\mathbf{P}$  é simétrica e semidefinida positiva.
4. Se  $\mathbf{F}$  é estável e  $\mathbf{Q}$  é semidefinida positiva e  $(\mathbf{F}, \mathbf{Q}^{1/2})$  é controlável, então  $\mathbf{P}$  é única, simétrica e definida positiva. É possível notar que  $\mathbf{Q}^{1/2}$  é definida como qualquer matriz em que  $\mathbf{Q}^{1/2}(\mathbf{Q}^{1/2})^T = \mathbf{Q}$ .

A solução do sistema linear da Equação (2.17) pode ser verificada como:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k,0}\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{F}_{k,i+1}\mathbf{w}_i + \mathbf{F}_{k,i+1}\mathbf{G}_i\mathbf{u}_i). \quad (2.23)$$

A matriz  $\mathbf{F}_{k,i}$  é a matriz de transição de estado do sistema, definida como

$$\mathbf{F}_{k,i} = \begin{cases} \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{F}_{k-2}\cdots\mathbf{F}_i, & \text{se } k > i \\ \mathbf{I}, & \text{se } k = i \\ 0, & \text{se } k < i. \end{cases}$$

A partir da Equação (2.23) é possível observar que  $\mathbf{x}_k$  é uma combinação linear de  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{w}_i$  e  $\mathbf{u}_i$ . Se a sequência de entrada  $\mathbf{u}_k$  é conhecida, então pode ser considerada como uma sequência de variáveis aleatórias gaussianas com covariância zero. Se  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{w}_i$  são desconhecidos, mas são variáveis aleatórias gaussianas, então  $\mathbf{x}_k$  na Equação (2.23) é uma combinação linear de variáveis aleatórias gaussianas, e o próprio  $\mathbf{x}_k$  é uma variável aleatória gaussiana, com média e covariância computadas pelas Equações (2.19) e (2.21). Portanto,

$$\mathbf{x}_k \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{P}_k). \quad (2.24)$$

Isso caracteriza completamente  $\mathbf{x}_k$  em um sentido estatístico haja visto que uma variável aleatória gaussiana é completamente caracterizada por sua média e covariância.

Um exemplo de propagação de estado e covariância é apresentado a seguir. As equações abaixo representam um sistema linear que descreve a população de um predador  $\mathbf{x}(1)$  e de sua presa  $\mathbf{x}(2)$ :

$$\mathbf{x}_{k+1}(1) = \mathbf{x}_k(1) - 0,8\mathbf{x}_k(1) + 0,4\mathbf{x}_k(2) + \mathbf{w}_k(1) \quad (2.25)$$

$$\mathbf{x}_{k+1}(2) = \mathbf{x}_k(2) - 0,4\mathbf{x}_k(1) + \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k(2). \quad (2.26)$$

Da Equação (2.25), é possível perceber que a população do predador causa seu próprio decréscimo dado uma sobrepopulação, mas a população da presa decresce devido à população do predador e aumenta devido à uma fonte externa de suprimento  $\mathbf{u}_k$ , conforme (2.26). As populações são também sujeitas a perturbações aleatórias (com variâncias 1 e 2, respectivamente) devido a fatores ambientais. Esse sistema pode ser escrito na forma de espaço de estados:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \\ -0,4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (2.27)$$

com  $\mathbf{w}_k \sim (0, \mathbf{Q})$  e  $\mathbf{Q} = \text{diag}(1,2)$  e  $\mathbf{u}_k = 1$ .

As Equações (2.19) e (2.21) descrevem como a média e a covariância da população variam com o tempo. As condições iniciais são definidas como  $\bar{\mathbf{x}}_0 = [10 \ 20]^T$  e  $\mathbf{P}_0 = \text{diag}(40,40)$ . Eventualmente, a média e a covariância atingem os valores de regime permanente:

$$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{G} \mathbf{u} \quad (2.28)$$

$$= [2,5 \ 5]^T \quad (2.29)$$

$$P \approx \begin{bmatrix} 2,88 & 3,08 \\ 3,08 & 7,96 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

As Figuras 4 e 5 representam graficamente os valores de média e covariância, respectivamente, para a população do predador e da presa.

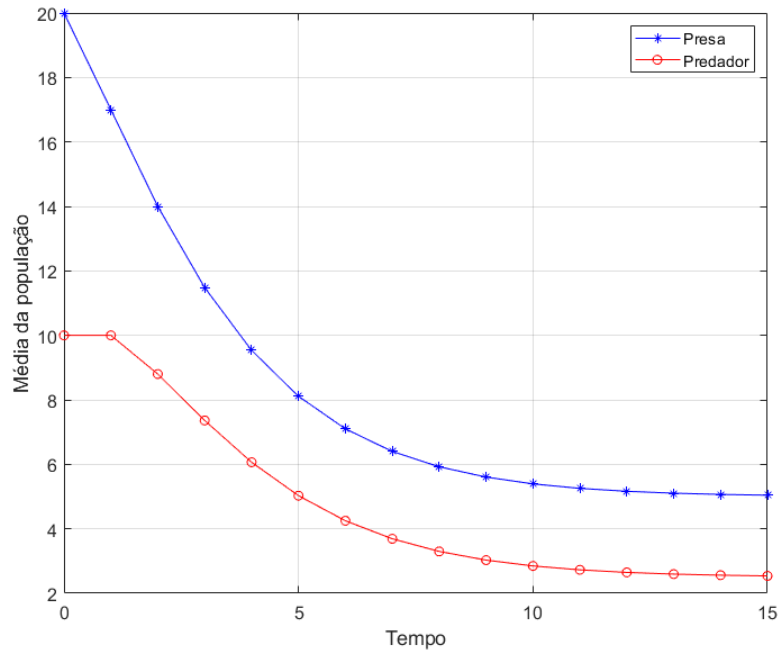


Figura 4 – Média das populações variando no tempo, conforme sistema do problema proposto. Média dos predadores (vermelho) e das presas (azul).

O regime permanente de  $\mathbf{P}$  pode ser calculado de forma direta, sem simulação. Uma vez que  $\mathbf{F}$ , nesse exemplo, é estável e  $\mathbf{Q}$  é definida positiva, o Teorema 1 garante que  $\mathbf{P}$  possui uma única solução em regime permanente.

Na Equação (2.1), o ruído de processo é apresentado com entrada direta na dinâmica do sistema. Entretanto, é comum que o ruído de processo seja primeiro multiplicado por alguma matriz,  $\mathbf{L}_k$  antes de entrar na dinâmica do sistema. Isto é,

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{L}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}, \quad \mathbf{w}_k \sim (0, \mathbf{Q}_k). \quad (2.31)$$

O termo da direita na Equação (2.31) possui uma covariância dada por

$$E[(\mathbf{L}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1})(\mathbf{L}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1})^T] = \mathbf{L}_{k-1}E(\mathbf{w}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}^T)\mathbf{L}_{k-1}^T \quad (2.32)$$

$$= \mathbf{L}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{L}_{k-1}^T. \quad (2.33)$$

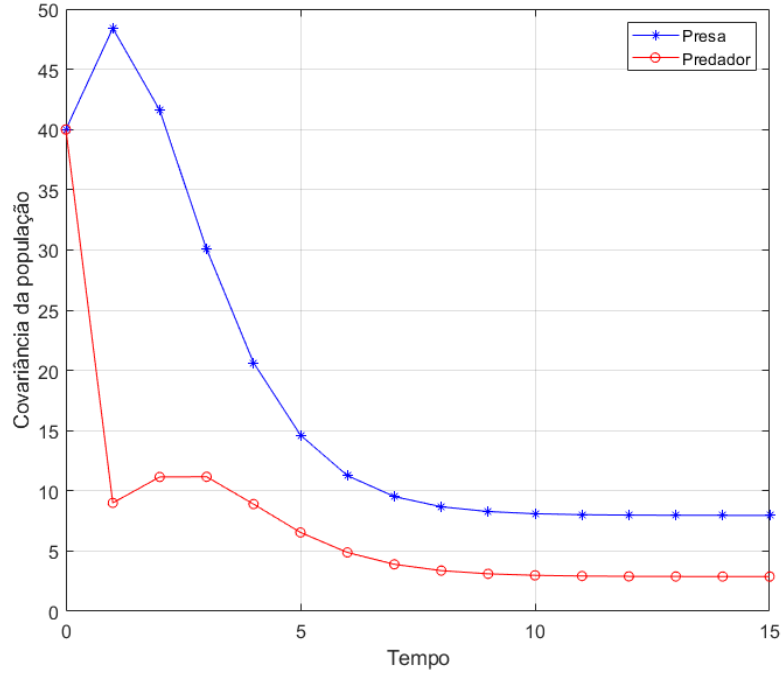


Figura 5 – Covariância das populações variando no tempo, conforme sistema do problema proposto. Covariância dos predadores (vermelho) e das presas (azul).

Portanto, a Equação (2.31) é equivalente à equação

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \quad \mathbf{w}_k \sim (0, \mathbf{L}_k\mathbf{Q}_k\mathbf{L}_k^T). \quad (2.34)$$

O mesmo tipo de transformação pode ser feita com equações de medição ruidosas. Isto é, a equação de medição

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{L}_k\mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k \sim (0, \mathbf{R}_k), \quad (2.35)$$

onde  $\mathbf{R}_k$  é a matriz de covariância do ruído de medição, será equivalente à equação de medição:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k \sim (0, \mathbf{L}_k\mathbf{R}_k\mathbf{L}_k^T). \quad (2.36)$$

A próxima subseção apresenta a derivação e operação do filtro de Kalman discreto.

## 2.2.2 O filtro de Kalman em tempo discreto

Seja considerado um sistema linear em tempo discreto dado pelas equações:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \quad (2.38)$$

Os ruídos  $\mathbf{w}_k$  e  $\mathbf{v}_k$  são brancos, de média zero, descorrelacionados, e possuem matrizes de covariância conhecidas,  $\mathbf{Q}_k$  e  $\mathbf{R}_k$ , respectivamente:

$$\mathbf{w}_k \sim (0, \mathbf{Q}_k) \quad (2.39)$$

$$\mathbf{v}_k \sim (0, \mathbf{R}_k) \quad (2.40)$$

$$E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T] = \mathbf{Q}_k \delta_{k-j} \quad (2.41)$$

$$E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T] = \mathbf{R}_k \delta_{k-j} \quad (2.42)$$

$$E[\mathbf{v}_k \mathbf{w}_j^T] = 0, \quad (2.43)$$

onde  $\delta_{k-j}$  é a função delta de Kronecker; a qual é dada por:  $\delta_{k-j} = 1$ , se  $k = j$ , e  $\delta_{k-j} = 0$ , se  $k \neq j$ .

O objetivo é a estimação do estado  $\mathbf{x}_k$  com base no conhecimento que se tem da dinâmica do sistema e da disponibilidade de medições ruidosas,  $\mathbf{z}_k$ . A quantidade de informação que está disponível para realizar a estimação do estado pode variar, a depender do problema específico que se quer resolver. Caso se tenha todas as medições até, e incluindo, o instante  $k$ , disponíveis para a estimação de  $\mathbf{x}_k$  é possível realizar uma estimativa *a posteriori*, a qual é denotada por  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ . O sobrescrito “+” denota que a estimativa é *a posteriori*. Uma forma de calcular a estimação *a posteriori* do estado é computar o valor esperado de  $\mathbf{x}_k$  condicionado a todas as medições até o instante  $k$ :

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = E[\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_k] = \text{estimação } a \text{ posteriori}. \quad (2.44)$$

Caso se tenha todas as medições antes do (mas sem incluir) instante  $k$ , é possível utilizá-las para a estimação de  $\mathbf{x}_k$ , chamada estimação *a priori*, a qual é denotada por  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ . O “-” sobrescrito indica que a estimação é *a priori*. Uma forma de obter a estimação *a priori* do estado é computar o valor esperado de  $\mathbf{x}_k$  condicionado a todas as medições realizadas até o instante  $k$ :

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = E[\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{k-1}] = \text{estimação } a \text{ priori}. \quad (2.45)$$

É importante notar que tanto  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  como  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$  são ambas estimações da mesma quantidade, estimações de  $\mathbf{x}_k$ . Entretanto,  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  é a estimação de  $\mathbf{x}_k$  *antes* da medição  $\mathbf{z}_k$  ser inclusa no cálculo, e  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$  é a estimação *depois* de se incluir a medição  $\mathbf{z}_k$ :

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \text{estimação de } \mathbf{x}_k \text{ antes de processar a medição no instante } k \quad (2.46)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \text{estimação de } \mathbf{x}_k \text{ depois de processar a medição no instante } k. \quad (2.47)$$



É esperado que a estimação  $\mathbf{x}_k^+$  seja melhor que  $\mathbf{x}_k^-$  por conta da maior informação utilizada no cálculo de  $\mathbf{x}_k^+$ .

Na notação a seguir,  $\hat{\mathbf{x}}_0^+$  denota a estimação inicial de  $\mathbf{x}_0$  antes de qualquer medição estar disponível. A primeira medição é realizada no instante  $k = 1$ . Haja vista a indisponibilidade de qualquer medição no instante inicial, é razoável considerar  $\mathbf{x}_0^+$  como o valor esperado do estado inicial  $\mathbf{x}_0$ :

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = E(\mathbf{x}_0). \quad (2.48)$$

A notação  $\mathbf{P}_k$  é utilizada para denotar a covariância do erro de estimação.  $\mathbf{P}_k^-$  denota a covariância do erro de estimação de  $\mathbf{x}_k^-$ , e  $\mathbf{P}_k^+$  denota a covariância do erro de estimação de  $\mathbf{x}_k^+$ :

$$\mathbf{P}_k^- = E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T] \quad (2.49)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+)^T]. \quad (2.50)$$

Essas notações apresentadas estão relacionadas conforme se expressa na Figura 6. A referida Figura mostra que após processar a medição no instante  $k - 1$ , são obtidas uma estimação de  $\mathbf{x}_{k-1}$  (representada por  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$ ) e a covariância dessa estimação (representada por  $\mathbf{P}_{k-1}^+$ ). No instante  $k$ , antes de a medição feita no instante  $k$  ser processada, uma estimação de  $\mathbf{x}_k$  (representada por  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ ) e a covariância dessa estimação (representada por  $\mathbf{P}_k^-$ ) são computadas. Em seguida, é processada a medição feita no instante  $k$  para refinar a estimação de  $\mathbf{x}_k$ . A estimação resultante de  $\mathbf{x}_k$  é representada por  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ , e sua covariância é representada por  $\mathbf{P}_k^+$ .

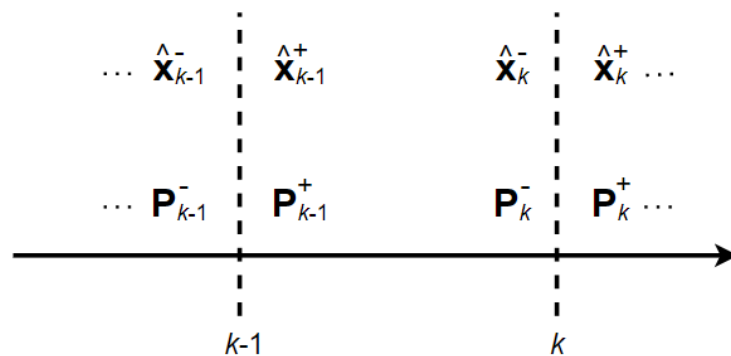


Figura 6 – Linha do tempo que mostra as estimações do estado e da covariância do erro, *a priori* e *a posteriori*.

O processo de estimação é iniciado com  $\hat{\mathbf{x}}_0^+$ . Pela Equação (2.19), a média de  $\mathbf{x}$  se propaga no tempo por  $\bar{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}_{k-1}\bar{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}$ . Portanto, tem-se que

$$\hat{\mathbf{x}}_1^- = \mathbf{F}_0\hat{\mathbf{x}}_0^+ + \mathbf{G}_0\mathbf{u}_0. \quad (2.51)$$

Essa é uma equação específica que mostra como obter  $\hat{\mathbf{x}}_1^-$  a partir de  $\hat{\mathbf{x}}_0^+$ . Entretanto, o raciocínio pode ser estendido para obtenção de uma expressão mais geral como segue:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{F}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}. \quad (2.52)$$

Do instante  $(k-1)^+$  ao instante  $k^-$ , a estimação do estado se propaga da mesma forma que a média do estado se propaga. Isso se justifica pelo fato de que não há ainda medições disponíveis nessa transição de instantes, e a atualização da estimação deve estar baseada apenas no conhecimento que se tem da dinâmica do sistema.

Em seguida, é necessário computar a atualização para  $\mathbf{P}$ , a covariância do erro de estimação. A inicialização ocorre com  $\mathbf{P}_0^+$ , a covariância para a estimação inicial  $\mathbf{x}_0$ . Caso se conheça o estado inicial perfeitamente, então  $\mathbf{P}_0^+ = 0$ , mas caso seja completamente desconhecido o valor de  $\mathbf{x}_0$ , então  $\mathbf{P}_0^+ \approx \infty$ . Em geral,  $\mathbf{P}_0^+$  representa a incerteza sobre a estimação inicial de  $\mathbf{x}_0$ :

$$\mathbf{P}_0^+ = E[(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^T] \quad (2.53)$$

$$= E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)^T]. \quad (2.54)$$

Conforme a Equação (2.21), a covariância do estado de um sistema linear discreto no tempo é propagado com o tempo por  $\mathbf{P}_k = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$ . Portanto,

$$\mathbf{P}_1^- = \mathbf{F}_0\mathbf{P}_0^+\mathbf{F}_0^T + \mathbf{Q}_0. \quad (2.55)$$

De modo semelhante ao que foi feito com a média do estado, é possível estender o raciocínio para a covariância do erro, de modo que:

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}^+\mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}. \quad (2.56)$$

Para derivação da equação de atualização é preciso incluir a medição  $\mathbf{z}_k$ . Pela aplicação do método dos mínimos quadrados recursivo (Simon, 2006; Jazwinski, 1970), a disponibilidade da medição  $\mathbf{z}_k$  altera a estimação de uma constante  $\mathbf{x}$  como segue:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k-1}\mathbf{H}_k^T(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (2.57)$$

$$= \mathbf{P}_k\mathbf{H}_k^T\mathbf{R}_k^{-1} \quad (2.58)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (2.59)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)\mathbf{P}_{k-1}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k\mathbf{R}_k\mathbf{K}_k^T \quad (2.60)$$

$$= (\mathbf{P}_{k-1}^{-1} + \mathbf{H}_k^T\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{H}_k)^{-1} \quad (2.61)$$

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)\mathbf{P}_{k-1}. \quad (2.62)$$

É possível, então, generalizar as fórmulas para estimação de uma constante para as equações de predição e atualização. As seguintes substituições são feitas nas Equações (2.57) a

(2.62),  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  por  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ ,  $\mathbf{P}_{k-1}$  por  $\mathbf{P}_k^-$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_k$  por  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$  e  $\mathbf{P}_k$  por  $\mathbf{P}_k^+$ . O que resulta em

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (2.63)$$

$$= \mathbf{P}_k^+ \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \quad (2.64)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (2.65)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \quad (2.66)$$

$$= ((\mathbf{P}_k^-)^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1} \quad (2.67)$$

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-. \quad (2.68)$$

A matriz  $\mathbf{K}_k$  nas equações acima é chamada de ganho do filtro de Kalman. Para os casos em que  $\mathbf{x}_k$  é uma constante, então  $\mathbf{F}_k = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{Q}_k = 0$ , e  $\mathbf{u}_k = 0$ . Nesse caso, o filtro de Kalman é reduzido ao algoritmo de mínimos quadrados recursivos para a estimação de um vetor constante (Simon, 2006).

O algoritmo do KF também pode ser visto como a seguinte relação recursiva (Ristic, 2004):

$$p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}) \quad (2.69)$$

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) \quad (2.70)$$

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}), \quad (2.71)$$

onde  $\mathcal{N}(\mathbf{x}; \mathbf{m}, \mathbf{P})$  é uma densidade gaussiana com argumento  $\mathbf{x}$ , média  $\mathbf{m}$  e covariância  $\mathbf{P}$ , isto é:

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}; \mathbf{m}, \mathbf{P}) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathbf{P}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \right\}. \quad (2.72)$$

E as médias e covariâncias apropriadas para o KF são computadas como segue (Ristic, 2004):

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \quad (2.73)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{Q}_{k-1} + \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T \quad (2.74)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \quad (2.75)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{S}_k \mathbf{K}_k^T, \quad (2.76)$$

onde

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \quad (2.77)$$

é a covariância do termo de inovação, e

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \quad (2.78)$$

é o ganho de Kalman. É possível observar que com (2.77) e (2.78), a atualização da covariância (2.76) pode ser escrita como

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}, \quad (2.79)$$

onde  $\mathbf{I}$  é uma matriz identidade de dimensão  $n_x \times n_x$ .

### 2.2.3 Propriedades do filtro de Kalman

Nesta seção, um resumo das propriedades mais importantes do filtro de Kalman é apresentado (Simon, 2006).

- Caso  $\mathbf{w}_k$  e  $\mathbf{v}_k$  sejam gaussianas de média zero, decorrelacionadas, brancas, e caso o sistema estimado seja linear, o filtro de Kalman é capaz de solucionar o problema de estimação a partir de medições ruidosas.
- Caso  $\mathbf{w}_k$  e  $\mathbf{v}_k$  sejam gaussianas de média zero, correlacionadas ou coloridas, é possível modificar o filtro de Kalman a fim de obter estimações.
- Para sistemas não lineares, há várias formulações não lineares do filtro de Kalman para aproximar a solução de maneira confiável.

Quando um filtro de Kalman é usado para estimação de estado, as inovações ( $\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-$ ) podem ser medidas e a média e covariância podem ser aproximadas por métodos estatísticos. Se a média e a covariância não estão com os valores que se espera, isso significa que algo está errado com o filtro. Talvez o modelo de sistema assumido esteja incorreto ou as estatísticas de ruído assumidas estejam incorretas (é o caso de grande incerteza). É possível consultar esses valores para verificar o desempenho do filtro de Kalman e seus parâmetros, e até mesmo ajustá-los para melhorar o desempenho.

O KF tem sido derivado ao longo do tempo a fim de contornar suas restrições. Uma das principais variantes é o EKF, cujos detalhes são apresentados a seguir.

## 2.3 Filtro de Kalman Estendido

A realidade costuma se manifestar muito complexa: estados de alvos não lineares, não gaussianos, não estacionários e com valores contínuos. Portanto, na maioria das situações práticas, os filtros não lineares ótimos não podem ser aplicados. Em vez disso, o uso de aproximações ou soluções subótimas se torna obrigatório.

Na categoria de filtros não lineares com aproximações analíticas estão o filtro de Kalman estendido (EKF - *extended Kalman filter*) e alguns de seus variantes, como o EKF de ordem superior e o EKF iterativo, sendo o próprio EKF uma variante do filtro de Kalman, proposto na década de 1960 (Kalman, 1960). A característica principal desses filtros é que eles aproximam (linearizam) as funções não lineares dos modelos de estado e de medição (Anderson & Moore, 1979; Bar-Shalom et al., 2008).

O EKF foi derivado para sistemas não lineares com ruído aditivo (Ristic, 2003); isto é, para um caso especial de (2.1) e (2.2) dados por:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \quad (2.80)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k. \quad (2.81)$$

As sequências aleatórias  $\mathbf{w}_{k-1}$  e  $\mathbf{v}_k$  são mutuamente independentes, gaussianas brancas de média zero, com covariâncias  $\mathbf{Q}_{k-1}$  e  $\mathbf{R}_k$ , respectivamente. As funções  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{h}$  em (2.1) e (2.2), caso sejam não lineares, são aproximadas pelo primeiro termo de suas expansões em série de Taylor. O EKF tem como base a suposição de que a linearização local das equações de estado e de medição será o suficiente para representar suas não linearidades. A densidade *a posteriori*  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k)$  é aproximada por uma densidade gaussiana e que as relações típicas do filtro de Kalman são preservadas (Simon, 2006). A média e a covariância da densidade gaussiana subjacente são calculadas recursivamente como segue:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+) \quad (2.82)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{Q}_{k-1} + \hat{\mathbf{F}}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^- \hat{\mathbf{F}}_{k-1}^T \quad (2.83)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-)) \quad (2.84)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{S}_k \mathbf{K}_k^T, \quad (2.85)$$

onde

$$\mathbf{S}_k = \hat{\mathbf{H}}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \hat{\mathbf{H}}_k^T + \mathbf{R}_k \quad (2.86)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \hat{\mathbf{H}}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \quad (2.87)$$

e  $\hat{\mathbf{F}}_{k-1}$  e  $\hat{\mathbf{H}}_k$  são as linearizações locais das funções não lineares  $\mathbf{f}_{k-1}$  e  $\mathbf{h}_k$ , respectivamente, definidos como Jacobianos (Bar-Shalom et al., 2008), calculados em  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$  e  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ , isto é:

$$\hat{\mathbf{F}}_{k-1} = [\nabla_{\mathbf{x}_{k-1}} \mathbf{f}_{k-1}^T(\mathbf{x}_{k-1})]^T |_{\mathbf{x}_{k-1}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}} \quad (2.88)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_k = [\nabla_{\mathbf{x}_k} \mathbf{h}_k^T(\mathbf{x}_k)]^T |_{\mathbf{x}_k=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}, \quad (2.89)$$

onde

$$\nabla_{\mathbf{x}_k} = \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k[1]} \cdots \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k[n_x]} \right]^T, \quad (2.90)$$

com  $\mathbf{x}_k[i]$ ,  $i = 1, \dots, n_x$  sendo o  $i$ -ésimo componente do vetor  $\mathbf{x}_k$ . Um elemento de  $\hat{\mathbf{H}}_k$  é então dado por:

$$\hat{\mathbf{H}}_k[i, j] = \frac{\partial \mathbf{h}_k[i]}{\partial \mathbf{x}_k[j]} |_{\mathbf{x}_k=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}, \quad (2.91)$$

onde  $\mathbf{h}_k[i]$  denota o  $i$ -ésimo componente do vetor  $\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)$ . Deve ser enfatizado que, de acordo com (2.88) e (2.89), os Jacobianos  $\hat{\mathbf{F}}_{k-1}$  e  $\hat{\mathbf{H}}_k$  são calculados com (e portanto dependem de) as estimações do vetor de estado.

O EKF e suas variantes são chamados de aproximações analíticas porque os Jacobianos precisam ser desenvolvidos analiticamente. Caso as funções não lineares  $\mathbf{f}_k$  ou  $\mathbf{h}_k$  sejam descontínuas, essa classe de filtros não se aplica.

É importante destacar que o EKF sempre aproxima  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k)$  por uma gaussiana. Se a não linearidade dos modelos de estado e de medição forem muito severas, a não gaussianidade da densidade *a posteriori* verdadeira será mais pronunciada. Em tais casos, o desempenho do EKF será significativamente degradado.

A derivação matemática do EKF se encontra no Apêndice B.

## 2.4 Filtro de Kalman *Unscented*

Outro filtro que é derivação do KF, e assim como o EKF é utilizado para estimação de sistemas não lineares, é o filtro de Kalman *unscented* (UKF - *unscented Kalman filter*). Na seção de simulações e comparações de resultados, o UKF não foi utilizado, entretanto, trabalhos futuros podem se beneficiar desse tópico.

Diferente do EKF, o UKF não aproxima as funções não lineares  $\mathbf{f}_{k-1}$  e  $\mathbf{h}_k$ . Em vez disso, aproxima a densidade posterior  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k)$  por uma densidade gaussiana, a qual é representada por um conjunto de pontos amostrais escolhidos deterministicamente. Esses pontos amostrais captam completamente a média e a covariância verdadeiras da densidade gaussiana. Quando propagada através de uma transformação não linear, esses pontos representam essas estatísticas até a segunda ordem de não linearidade (com erros introduzidos na terceira ordem e superior).

A ideia de filtragem não linear com a utilização de representação gaussiana por meio de pontos amostrais escolhidos deterministicamente foi proposta e aplicada por vários autores (Schei, 1997; Norgaard et al., 2000). Toda essa classe de filtros, incluindo o UKF, é referida como filtros de Kalman de regressão linear (Lefebvre et al., 2001; Lefebvre et al., 2002) porque todos são baseados em linearização estatística em vez de linearização analítica, como o EKF. A linearização estatística é realizada através de regressão linear através de pontos de regressão (amostras). Os filtros que fazem parte dessa classe diferem apenas no método de seleção dos pontos amostrais (sua quantidade, valores e pesos), enquanto as equações de filtragem são idênticas. As equações de filtragem são apresentadas a seguir.

Sejam consideradas as equações de estado e de medição, (2.1) e (2.2). A suposição é que a densidade posterior no instante  $k-1$  é gaussiana:  $p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{Z}_{k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1})$ . O primeiro passo é representar essa densidade por um conjunto de  $N$  pontos amostrais  $\chi_{k-1}^i$  e seus pesos  $W_{k-1}^i, i = 0, \dots, N-1$ . A etapa de predição é realizada como segue

(Ristic, 2004):

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{N-1} W_{k-1}^i \cdot \mathbf{f}_{k-1}(\chi_{k-1}^i) \quad (2.92)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{Q}_{k-1} + \sum_{i=0}^{N-1} W_{k-1}^i [\mathbf{f}_{k-1}(\chi_{k-1}^i) - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}][\mathbf{f}_{k-1}(\chi_{k-1}^i) - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}]^T. \quad (2.93)$$

A densidade predita  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{k-1}) \approx \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1})$  é representada por um conjunto de  $N$  pontos amostrais:

$$\chi_{k|k-1}^i = \mathbf{f}_{k-1}(\chi_{k-1}^i). \quad (2.94)$$

A medição predita é então:

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{N-1} W_{k-1}^i \mathbf{h}_k(\chi_{k|k-1}^i). \quad (2.95)$$

A etapa de atualização se dá como segue:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}) \quad (2.96)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{S}_k \mathbf{K}_k^T, \quad (2.97)$$

onde

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xz} \mathbf{S}_k^{-1} \quad (2.98)$$

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{R}_k + \mathbf{P}_{zz} \quad (2.99)$$

$$\mathbf{P}_{xz} = \sum_{i=0}^{N-1} W_{k-1}^i (\chi_{k|k-1}^i - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\mathbf{h}_k(\chi_{k|k-1}^i) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T \quad (2.100)$$

$$\mathbf{P}_{zz} = \sum_{i=0}^{N-1} W_{k-1}^i (\mathbf{h}_k(\chi_{k|k-1}^i) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})(\mathbf{h}_k(\chi_{k|k-1}^i) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T. \quad (2.101)$$

É possível observar que nenhum cálculo explícito de Jacobianos é necessário para implementar esse algoritmo. Como consequência, essa classe de filtros é aplicável mesmo quando há discontinuidade nas funções não lineares  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{h}$ . A seleção dos pontos amostrais  $\chi_{k-1}^i$  e dos pesos  $W_{k-1}^i$  do UKF é apresentada a seguir.

#### 2.4.1 A transformada *unscented*

A transformada *unscented* (UT - *unscented transform*) é um método para calcular as estatísticas de uma variável aleatória que passa por uma transformação não linear. Seja considerada a propagação de uma variável aleatória  $\mathbf{a}$ , com média  $\bar{\mathbf{a}}$  e covariância  $\mathbf{P}_a$ , através de uma função não linear  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^{n_a} \rightarrow \mathbb{R}^{n_b}$  a fim de produzir uma variável aleatória  $\mathbf{b}$ , tal que

$$\mathbf{b} = \mathbf{g}(\mathbf{a}). \quad (2.102)$$

Os primeiros dois momentos de  $\mathbf{b}$  são computados com a utilização da UT, como segue. Primeiro,  $2n_a + 1$  pontos amostrais ponderados  $(A_i, W_i)$  são escolhidos deterministicamente para que descrevam completamente a média e a covariância de  $\mathbf{a}$ ,  $\bar{\mathbf{a}}$  e  $\mathbf{P}_a$ , respectivamente. Um esquema que satisfaz esses requisitos é:

$$A_i = \bar{\mathbf{a}} + (\sqrt{(n_a + \kappa)\mathbf{P}_a})_i \quad (2.103)$$

$$W_i = \frac{1}{2(n_a + \kappa)}, \quad (2.104)$$

onde  $k$  é um parâmetro escalar (tal que  $k + n_a \neq 0$ ) e  $(\sqrt{(n_a + k)\mathbf{P}_a})_i$  é a  $i$ -ésima linha da raiz quadrada da matriz  $\mathbf{L}$  de  $(n_a + k)\mathbf{P}_a$ , tal que  $(n_a + \kappa)\mathbf{P}_a = \mathbf{L}^T\mathbf{L}$ . Os pesos são normalizados; isto é, satisfazem a condição  $\sum_{i=0}^{2n_a} W_i = 1$ . Em seguida, cada ponto amostral é propagado através da função não linear  $\mathbf{g}$ :

$$\mathcal{B}_i = \mathbf{g}(A_i) \quad (i = 0, 1, \dots, 2n_a) \quad (2.105)$$

e os dois primeiros momentos de  $\mathbf{b}$  são computados como segue:

$$\bar{\mathbf{b}} = \sum_{i=0}^{2n_a} W_i \mathcal{B}_i \quad (2.106)$$

$$\mathbf{P}_b = \sum_{i=0}^{n_a} W_i (\mathcal{B}_i - \bar{\mathbf{b}})(\mathcal{B}_i - \bar{\mathbf{b}})^T. \quad (2.107)$$

É possível mostrar que essas estimações são precisas até a segunda ordem da expansão em série de Taylor (Julier et al., 2000) de  $\mathbf{g}(\mathbf{a})$ . É possível notar que a distância dos pontos amostrais  $A_i, i = 1, \dots, n_a$  a partir de  $\bar{\mathbf{a}}$  aumenta com a dimensão  $n_a$ . Isso pode ser controlado até certo ponto com a escolha de  $\kappa$ . Entretanto, quando  $\kappa$  é negativo, é possível que  $\mathbf{P}_b$  não seja semidefinida positiva. A fim de adicionar um grau extra de liberdade em escalar os pontos amostrais para longe ou em direção a  $\bar{\mathbf{a}}$ , a UT *escalada* foi introduzida por (Julier, 2002).

Uma outra classe de método bayesiano é o filtro de partículas, enfatizado neste trabalho. A seguir, os seus fundamentos são apresentados.

## 2.5 Filtro de Partículas

O filtro de partículas (PF - *particle filter*) faz parte da categoria dos filtros subótimos. O PF realiza uma estimação sequencial de Monte Carlo (SMC - *sequential Monte Carlo*) baseada na representação em pontos de massa (ou "partículas") de densidades de probabilidades. As ideias básicas do SMC foram aplicadas esporadicamente durante os anos 1960 e 1970 (Handschin & Mayne, 1969), entretanto permaneceu amplamente negligenciado e ignorado. A razão mais provável para isso era o poder computacional disponível na época. A maior contribuição para o desenvolvimento do SMC foi a inclusão da



etapa de reamostragem (Gordon et al., 1993), a qual, em conjunto com computadores mais modernos, fez com que os PFs fossem utilizáveis na prática pela primeira vez. Desde então, a atividade de pesquisa aumentou consideravelmente (Doucet et al., 2001a), resultando em inúmeras melhorias e aplicações relacionadas aos PFs. As bases teóricas e alguns desenvolvimentos recentes são apresentados a seguir, conforme se encontra em (Ristic, 2003; Arulampalam, 2002).

### 2.5.1 Integração de Monte Carlo

A integração de Monte Carlo é a base para os métodos SMC. Seja considerando o objetivo de calcular numericamente a seguinte integral multidimensional:

$$I = \int \mathbf{g}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad (2.108)$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ . Os métodos de Monte Carlo para integração numérica fatorizam  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \pi(\mathbf{x})$  de modo que  $\pi(\mathbf{x})$  é interpretada como uma densidade de probabilidade que satisfaz  $\pi(\mathbf{x}) \geq 0$  e  $\int \pi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 1$ . A suposição feita é de que é possível retirar  $N \gg 1$  amostras  $\{\mathbf{x}^i; i = 1, \dots, N\}$  distribuídas de acordo com  $\pi(\mathbf{x})$ . A estimação de Monte Carlo da integral

$$I = \int \mathbf{f}(\mathbf{x}) \pi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (2.109)$$

é a média amostral

$$I_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}(\mathbf{x}^i). \quad (2.110)$$

Se as amostras  $\mathbf{x}^i$  são independentes, então  $I_N$  é um estimador sem tendência e  $I_N$  certamente convergirá para  $I$ . Se a variância de  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,

$$\sigma^2 = \int (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - I)^2 \pi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad (2.111)$$

é finita, então o teorema do limite central se aplica e o erro de estimação converge para a distribuição

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N}(I_N - I) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2). \quad (2.112)$$

O erro da estimação de Monte Carlo,  $e = I_N - I$ , é da ordem  $O(N^{-1/2})$ , o que significa que a taxa de convergência da estimação é independente da dimensão do integrando. Em contraste, qualquer integração numérica determinística possui uma taxa de convergência que decai à medida em que a dimensão  $n_x$  aumenta. Essa útil e importante propriedade da integração de Monte Carlo é devida à escolha das amostras  $\{\mathbf{x}^i; i = 1, \dots, N\}$ , já que elas vêm das regiões do espaço de estado que são mais importantes para o resultado da integração. No contexto da estimação bayesiana, a densidade  $\pi(\mathbf{x})$  é a densidade *a posteriori*. Usualmente não é possível amostrar a partir da distribuição *a posteriori*, sendo ela multivariada, não padronizada, e conhecida somente até uma constante de proporcionalidade. Uma possível solução é aplicar o método de *amostragem por importância*.

## 2.5.2 Amostragem por importância

Idealmente, o objetivo é gerar amostras diretamente de  $\pi(\mathbf{x})$  e estimar  $I$  usando a Equação (2.110). Considerando a suposição de que só é possível gerar amostras a partir de uma densidade  $q(\mathbf{x})$ , a qual é similar a  $\pi(\mathbf{x})$ . Então uma ponderação correta do conjunto de amostras ainda faz com que a estimação de Monte Carlo seja possível. A fdp (função densidade de probabilidade)  $q(\mathbf{x})$  é referida como a densidade de *importância* ou *proposta*. Sua "similaridade" com  $\pi(\mathbf{x})$  pode ser expressa pela seguinte condição:

$$\pi(\mathbf{x}) > 0 \Rightarrow q(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad (2.113)$$

o que significa que  $q(\mathbf{x})$  e  $\pi(\mathbf{x})$  possuem o mesmo suporte matemático. A condição apresentada na Equação (2.113) é necessária para a teoria da amostragem por importância e, se for válida, qualquer integral da forma (2.109) pode ser reescrita como

$$I = \int \mathbf{f}(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int \mathbf{f}(\mathbf{x}) \frac{\pi(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})} q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (2.114)$$

dado que  $\pi(\mathbf{x})/q(\mathbf{x})$  é limitada superiormente. A estimação de Monte Carlo de  $I$  é computada ao gerar-se  $N \gg 1$  amostras independentes  $\{\mathbf{x}^i; i = 1, \dots, N\}$  distribuídas de acordo com  $q(\mathbf{x})$  e que formam a soma ponderada

$$I_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}(\mathbf{x}^i) \tilde{w}(\mathbf{x}^i), \quad (2.115)$$

onde

$$\tilde{w}(\mathbf{x}^i) = \frac{\pi(\mathbf{x}^i)}{q(\mathbf{x}^i)} \quad (2.116)$$

são os pesos de importância. Se o fator de normalização da densidade desejada  $\pi(\mathbf{x})$  é desconhecido, é necessário efetuar a normalização dos pesos de importância. Então,  $I_N$  é estimada como segue:

$$I_N = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}(\mathbf{x}^i) \tilde{w}(\mathbf{x}^i)}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \tilde{w}(\mathbf{x}^j)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}(\mathbf{x}^i) w(\mathbf{x}^i), \quad (2.117)$$

onde os pesos normalizados são dados por

$$w(\mathbf{x}^i) = \frac{\tilde{w}(\mathbf{x}^i)}{\sum_{j=1}^N \tilde{w}(\mathbf{x}^j)}. \quad (2.118)$$

Essa técnica é aplicada na estrutura bayesiana, onde  $\pi(\mathbf{x})$  é a densidade *a posteriori*.

## 2.5.3 Amostragem por importância sequencial

Amostragem por importância é um método geral de integração de Monte Carlo, o qual é aplicado para realizar a filtragem não linear. O algoritmo de amostragem por importância sequencial (SIS - *sequential importance sampling*) é um método que forma a

base da maioria dos filtros de Monte Carlo sequenciais desenvolvidos ao longo das últimas décadas (Doucet et al., 2000). A abordagem sequencial de Monte Carlo é uma técnica para implementar um filtro bayesiano recursivo através de simulações de Monte Carlo. A ideia-chave é representar a requerida função densidade *a posteriori* por um conjunto de amostras aleatórias com pesos associados e calcular estimativas baseadas nessas amostras e pesos. Conforme o número de amostras se torna muito grande, essa caracterização de Monte Carlo é uma representação equivalente da fdp *a posteriori*, e o filtro SIS será uma aproximação mais exata do estimador bayesiano ótimo.

Seja  $\mathbf{X}_k = \{\mathbf{x}_j, j = 0, \dots, k\}$ , o qual representa a sequência de todos os estados alvos até o instante  $k$ . A densidade conjunta *a posteriori* no instante  $k$  é denotada por  $p(\mathbf{X}_k|\mathbf{Z}_k)$ , e sua distribuição marginal é  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k)$ . Seja  $\{\mathbf{X}_k^i, w_k^i\}_{i=1}^N$  uma medida aleatória que caracteriza a probabilidade conjunta *a posteriori*  $p(\mathbf{X}_k|\mathbf{Z}_k)$ , onde  $\{\mathbf{X}_k^i, i = 1, \dots, N\}$  é um conjunto de pontos de suporte com pesos associados  $\{w_k^i, i = 1, \dots, N\}$ . Os pesos são normalizados de modo que  $\sum_i w_k^i = 1$ . Então, a densidade conjunta *a posteriori* no instante  $k$  pode ser aproximada por (Doucet et al., 2000):

$$p(\mathbf{X}_k|\mathbf{Z}_k) \approx \sum_{i=1}^N w_k^i \delta(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k^i). \quad (2.119)$$

É obtida, portanto, uma aproximação discreta ponderada da verdadeira *a posteriori*,  $p(\mathbf{X}_k|\mathbf{Z}_k)$ . Os pesos normalizados,  $w_k^i$  são escolhidos a partir do princípio da amostragem por importância, descrito anteriormente. Se as amostras  $\mathbf{X}_k^i$  foram obtidas a partir de uma densidade de importância  $q(\mathbf{X}_k|\mathbf{Z}_k)$ , então de acordo com (2.116),

$$w_k^i \propto \frac{p(\mathbf{X}_k^i|\mathbf{Z}_k)}{q(\mathbf{X}_k^i|\mathbf{Z}_k)}. \quad (2.120)$$

Seja feita a suposição de que no instante  $k-1$  existem amostras que constituem uma aproximação de  $p(\mathbf{X}_{k-1}|\mathbf{Z}_{k-1})$ . Com a recepção da medição  $\mathbf{z}_k$  no instante  $k$ , o objetivo passa a ser aproximar  $p(\mathbf{X}_k|\mathbf{Z}_k)$  por um novo conjunto de amostras. Se a densidade de importância para fatorar é escolhida de forma que

$$q(\mathbf{X}_k|\mathbf{Z}_k) \triangleq q(\mathbf{x}_k|\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Z}_k)q(\mathbf{X}_{k-1}|\mathbf{Z}_{k-1}), \quad (2.121)$$

então é possível obter amostras  $\mathbf{X}_k^i \sim q(\mathbf{X}_k|\mathbf{Z}_k)$  através da ampliação de cada uma das amostras existentes  $\mathbf{X}_{k-1}^i \sim q(\mathbf{X}_{k-1}|\mathbf{Z}_{k-1})$  com o novo estado  $\mathbf{x}_k^i \sim q(\mathbf{x}_k|\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Z}_k)$ .

Para obter a derivação da equação de atualização de pesos, a fdp  $p(\mathbf{X}_k|\mathbf{Z}_k)$  é

primeiro expressa em termos de  $p(\mathbf{X}_{k-1}|\mathbf{Z}_{k-1})$ ,  $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)$  e  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})$ :

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{X}_{k-1}|\mathbf{Z}_{k-1}) &= \frac{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_{k-1})p(\mathbf{X}_k|\mathbf{Z}_{k-1})}{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{Z}_{k-1})} \\
&= \frac{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_{k-1})p(\mathbf{x}_k|\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Z}_{k-1})p(\mathbf{X}_{k-1}|\mathbf{Z}_{k-1})}{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{Z}_{k-1})} \\
&= \frac{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})}{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{Z}_{k-1})}p(\mathbf{X}_{k-1}|\mathbf{Z}_{k-1}) \\
&\propto p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})p(\mathbf{X}_{k-1}|\mathbf{Z}_{k-1}). \tag{2.122}
\end{aligned}$$

Com a substituição de (2.121) e (2.122) em (2.120), a equação de atualização de pesos pode ser representada por

$$w_k^i \propto \frac{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k^i)p(\mathbf{x}_k^i|\mathbf{x}_{k-1}^i)p(\mathbf{X}_{k-1}^i|\mathbf{Z}_{k-1})}{q(\mathbf{x}_k^i|\mathbf{X}_{k-1}^i, \mathbf{Z}_k)q(\mathbf{X}_{k-1}^i|\mathbf{Z}_{k-1})} \tag{2.123}$$

$$= w_{k-1}^i \frac{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k^i)p(\mathbf{x}_k^i|\mathbf{x}_{k-1}^i)}{q(\mathbf{x}_k^i|\mathbf{X}_{k-1}^i, \mathbf{Z}_k)}. \tag{2.124}$$

Além disso, se  $q(\mathbf{x}_k|\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Z}_k) = q(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{z}_k)$ , então a densidade de importância depende apenas de  $\mathbf{x}_{k-1}$  e  $\mathbf{z}_k$ . Isso é particularmente útil no caso muito comum quando apenas uma estimativa filtrada da probabilidade *a posteriori*  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k)$  é requerida a cada instante de tempo. Desse ponto em diante, tal caso é assumido, exceto quando explicitamente afirmado o contrário. Em tais cenários, somente  $\mathbf{x}_k^i$  precisa ser armazenado. O caminho,  $\mathbf{X}_{k-1}^i$ , e o histórico de observações,  $\mathbf{Z}_{k-1}$ , podem ser descartados. Os pesos modificados são dados, então, por

$$w_k^i \propto w_{k-1}^i \frac{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k^i)p(\mathbf{x}_k^i|\mathbf{x}_{k-1}^i)}{q(\mathbf{x}_k^i|\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{z}_k)} \tag{2.125}$$

e a densidade *a posteriori* filtrada  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k)$  pode ser aproximada como

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k) \approx \sum_{i=1}^N w_k^i \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^i), \tag{2.126}$$

onde os pesos são definidos na Equação (2.125). Quando  $N \rightarrow \infty$ , a aproximação da Equação (2.126) tende à densidade *a posteriori* verdadeira,  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k)$ .

Assim, filtrar por meio de SIS consiste em propagação recursiva de pesos de importância  $w_k^i$  e pontos de suporte  $\mathbf{x}_k^i$  conforme cada medição é recebida sequencialmente. O Algoritmo 1, a seguir, apresenta a filtragem via SIS.

A linha 1 indica que o conjunto de partículas do estado atual  $\{\mathbf{x}_k^i, w_k^i\}_{i=1}^N$  decorre da SIS em relação ao conjunto que representa o instante anterior  $\{\mathbf{x}_{k-1}^i, w_{k-1}^i\}_{i=1}^N$  e a medição atual,  $\mathbf{z}_k$ . Na linha 2, um laço *for* é iniciado para obtenção do conjunto de partículas *a posteriori* (linha 3) e a atualização dos pesos de importância (linha 4), então o laço se encerra. Em seguida, o peso total é calculado como a soma dos pesos de cada partícula, a fim de normalizar o peso individual das partículas (linha 8). O objetivo é que os pesos tenham a forma de uma distribuição de probabilidade,  $\sum_{i=1}^N w_k^i = 1$ .

**Algoritmo 1** Filtragem via SIS

---

```

1:  $\{\mathbf{x}_k^i, w_k^i\}_{i=1}^N = \text{SIS}[\{\mathbf{x}_{k-1}^i, w_{k-1}^i\}_{i=1}^N, \mathbf{z}_k]$ 
2: for  $i=1:N$  do
3:    $\mathbf{x}_k^i \sim q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{z}_k)$  ▷ amostrar para o estado a posteriori
4:    $\tilde{w}_k^i = w_k^i \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^i) p(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i)}{q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{z}_k)}$  ▷ atualização dos pesos de importância
5: end for
6:  $t = \text{Soma}[\{\tilde{w}_k^i\}_{i=1}^N]$  ▷ calcular soma dos pesos
7: for  $i=1:N$  do
8:    $w_k^i = t^{-1} \tilde{w}_k^i$  ▷ normalização
9: end for

```

---

### 2.5.4 O problema da degeneração

Idealmente, a função densidade de importância deveria ser a própria distribuição *a posteriori*,  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k)$ . Para a função de importância apresentada na Equação (2.121), foi demonstrado que a variância dos pesos de importância aumenta ao longo do tempo (Doucet et al., 2000), o que prejudica a estimação e leva a um problema conhecido do filtro de partículas SIS: a *degeneração*. Em termos práticos, isso significa que após um certo número de etapas recursivas, todas as partículas, exceto uma, terão pesos normalizados desprezíveis.

Um grande esforço computacional foi despendido para atualizar partículas cujas contribuições para a aproximação de  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k)$  são quase nulas. Uma medida adequada de degeneração é o tamanho da amostra efetiva,  $N_{eff}$ , introduzido por (Kong et al., 1994) e estimado por

$$\hat{N}_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (w_k^i)^2}, \quad (2.127)$$

onde  $w_k^i$  é o peso normalizado obtido através de (2.124), sendo  $1 \leq \hat{N}_{eff} \leq N$ . A subseção a seguir apresenta uma estratégia para superar a degeneração das amostras.

### 2.5.5 Reamostragem

Sempre que uma degeneração significativa é observada, isto é, quando  $\hat{N}_{eff}$  está abaixo de um limiar  $N_{thr}$ , o algoritmo SIS requer uma reamostragem. A reamostragem elimina amostras com baixo peso de importância e multiplica amostras com maiores pesos de importância. Envolve um mapeamento de medição aleatória  $\{\mathbf{x}_k^i, w_k^i\}$  por uma medição aleatória  $\{\mathbf{x}_k^{i*}, 1/N\}$  com pesos uniformemente distribuídos. O novo conjunto de amostras aleatórias  $\{\mathbf{x}_k^{i*}\}_{i=1}^N$  é gerado pela reamostragem (com substituição) a partir de uma representação aproximadamente discreta de  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k)$  dada por

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k) \approx \sum_{i=1}^N w_k^i \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^i), \quad (2.128)$$

de forma que  $P\{\mathbf{x}_k^i = \mathbf{x}_k^j\} = w_k^j$ . A amostra resultante é uma amostra independente e identicamente distribuída (IID - *independent and identically distributed*) da densidade discreta (2.128). A seleção  $\mathbf{x}_k^i = \mathbf{x}_k^j$  é esquematicamente apresentada na Figura 7, onde a sigla CSW significa a soma cumulativa de pesos (CSW - *cumulative sum of weights*) da medida aleratória  $\{\mathbf{x}_k^i, w_k^i\}$ , e a variável aleatória  $u_i, i = 1, \dots, N$  é uniformemente distribuída no intervalo  $[0,1]$ .

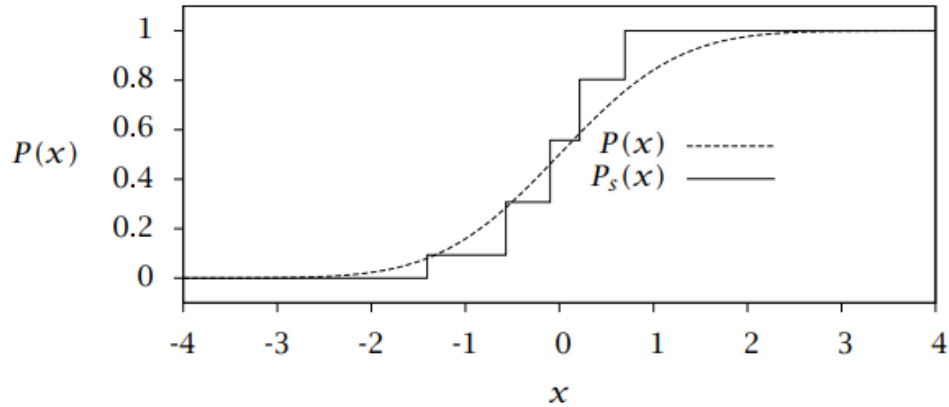


Figura 7 – A distribuição  $P(x)$  e a distribuição cumulativa das amostras,  $P_s(x)$ . Na reamostragem, quanto maior o peso da partícula,  $w_k^j$ , maior probabilidade de ser replicada ( $\mathbf{x}_k^i = \mathbf{x}_k^j$ ).

Uma implementação direta de reamostragem consistiria em gerar  $N$  variáveis IID a partir da distribuição uniforme, ordenando-as em ordem crescente e comparando-as com a CSW normalizada. Outros esquemas de reamostragem podem ser aplicados como alternativas, tais como reamostragem estratificada, reamostragem residual e reamostragem sistemática (Liu & Chen, 1998; Kitagawa, 1996).

O pseudocódigo de um filtro de partículas genérico é apresentado abaixo, no Algoritmo 2.

A linha 1 indica que o conjunto de partículas do estado atual  $\{\mathbf{x}_k^i, w_k^i\}_{i=1}^N$  decorre da aplicação do filtro de partículas genérico (PF) em relação ao conjunto que representa o instante anterior  $\{\mathbf{x}_{k-1}^i, w_{k-1}^i\}_{i=1}^N$  e a medição atual,  $\mathbf{z}_k$ . A linha 3, indica que o primeiro passo para isso é a aplicação do SIS (vide Algoritmo 1), após o que, um valor aleatório  $u$  (linha 5) é definido, o qual servirá como critério para definir as partículas mais prováveis, e uma variável,  $csw$ , para armazenar a soma cumulativa dos pesos (linha 6). Um valor é definido para o tamanho da amostra efetiva,  $N_{thr}$ , geralmente maior que a metade do número de partículas,  $N$ , para comparar com o tamanho da amostra efetiva,  $\hat{N}_{eff}$  (linha 7). As linhas de 8 a 14 realizam o acúmulo dos pesos das partículas e um comparativo com o valor de  $u$ . Caso a soma acumulada até aquele momento seja maior ou igual a  $u$ , a primeira partícula do conjunto *a posteriori*,  $\mathbf{x}_k^i$ , de partículas receberá o valor da partícula

**Algoritmo 2** Filtro de Partículas Genérico

---

```

1:  $\{\mathbf{x}_k^i, w_k^i\}_{i=1}^N = \text{PF}[\{\mathbf{x}_{k-1}^i, w_{k-1}^i\}_{i=1}^N, \mathbf{z}_k]$ 
2: for  $i = 1 : ts$  do ▷ enquanto durar o tempo de simulação  $ts$ 
3:    $\{\mathbf{x}_k^i, w_k^i\}_{i=1}^N = \text{SIS}[\{\mathbf{x}_{k-1}^i, w_{k-1}^i\}_{i=1}^N, \mathbf{z}_k]$  ▷ filtragem via SIS
4:    $\hat{N}_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (w_k^i)^2}$  ▷ tamanho da amostra efetiva
5:    $u \sim U(0, 1)$  ▷ valor aleatório entre 0 e 1
6:    $csw = 0$  ▷ valor inicial de  $csw$  para cada iteração
7:   if  $\hat{N}_{eff} < N_{thr}$  then
8:     for  $j = 1 : N$  do
9:        $csw = csw + w_k^j$  ▷ soma cumulativa de pesos
10:      if  $csw \geq u$  then
11:         $\mathbf{x}_k^i = \mathbf{x}_k^j$  ▷ conjunto das partículas mais prováveis
12:        Break
13:      end if
14:    end for
15:  end if
16:   $\hat{\mathbf{x}}_k = \text{média}(\{\mathbf{x}_k^i, w_k^i\}_{i=1}^N)$  ▷ estimação final
17: end for

```

---

do conjunto *a priori*,  $\mathbf{x}_k^j$ . Isso se repetirá até que o conjunto *a posteriori* esteja com  $N$  partículas mais prováveis. A linha 16 apresenta a saída do filtro,  $\hat{\mathbf{x}}_k$ , sua estimação final para o instante  $k$ , que será a média do conjunto das partículas mais prováveis. A estimação continua até que se complete o tempo de simulação desejado,  $ts$  (linhas 2 e 17).

Uma representação gráfica de um PF, o qual usa a densidade transicional como a função de importância, isto é,  $q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{z}_k) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i)$ , pode ser observada na Figura 8. O filtro é iniciado com uma medida aleatória uniformemente ponderada  $\{\mathbf{x}_k^i, N^{-1}\}$ , a qual é uma aproximação da densidade de predição  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i)$ . A medição recebida,  $\mathbf{z}_k$ , é, então, utilizada para computar o peso de importância para cada partícula. Isso envolve a função de verossimilhança  $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k)$  via Equação (2.124). O resultado é uma medida aleatória  $\{\mathbf{x}_k^i, w_k^i\}$ , a qual é uma aproximação de  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k)$ . Caso  $\hat{N}_{eff} < N_{thr}$ , a etapa de reamostragem é executada, a qual seleciona as partículas com maior peso (importância) para obter a medida uniformemente ponderada  $\{\mathbf{x}^{i*}, N^{-1}\}$ . A última etapa é a atualização da predição, que introduz uma variação (devido aos ruídos considerados, especialmente o de processo) e resulta na medida  $\{\mathbf{x}_{k+1}^i, N^{-1}\}$ , a qual aproxima a distribuição  $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Z}_k)$ .

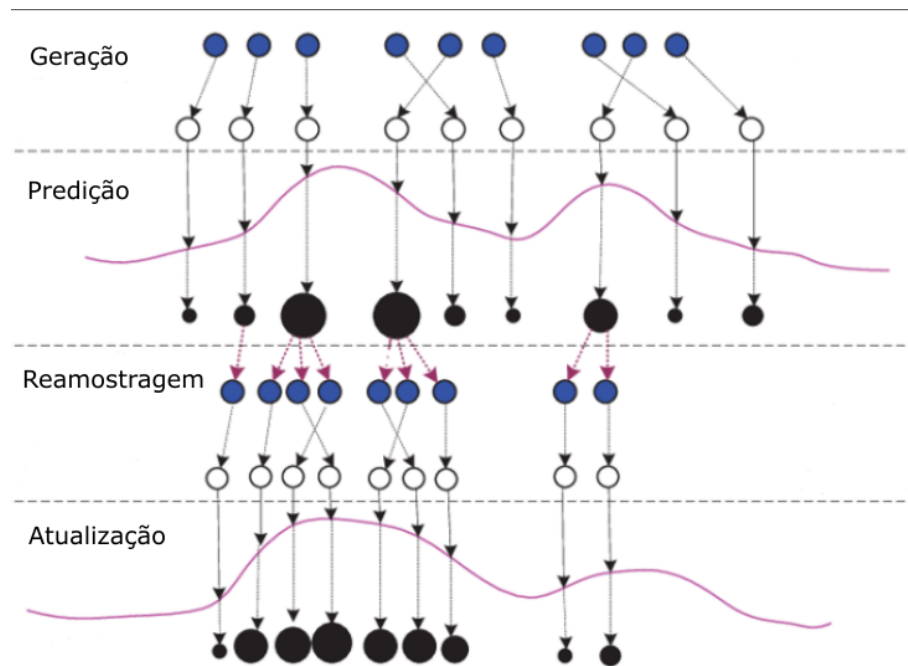


Figura 8 – Um ciclo de operação de um filtro de partículas (adaptado de (Wang et al., 2018)).

Embora a etapa de reamostragem reduza os efeitos da degeneração, ela introduz outros problemas práticos. Por exemplo, as partículas com maior peso  $w_k^i$  são estatisticamente selecionadas mais vezes, o que leva a uma perda de diversidade (variação) entre as partículas já que a amostra resultante irá conter muitos pontos repetidos. Esse problema é conhecido como *empobrecimento da amostra*, o qual pode ser severo para o caso em que o ruído de processo é muito pequeno na dinâmica do estado. Tal empobrecimento leva à situação onde todas as partículas vão colapsar em um único ponto dentro de poucas iterações.

Foram propostas algumas técnicas para solucionar o problema do empobrecimento da amostra. Uma delas é o algoritmo *reamostra-move* (resample-move) (Gilks & Brezuni, 2001), que evita o problema do empobrecimento ao garantir que as partículas se aproximem assintoticamente das amostras da distribuição *a posteriori*. Uma solução alternativa para o mesmo problema é baseada na etapa de *regularização* (Musso et al., 2001), que é frequentemente melhora o desempenho em detrimento de uma derivação menos rigorosa.

Como regra geral, a precisão de qualquer estimação de uma função da distribuição de interesse somente decai como resultado de reamostragem. Portanto, se quantidades como a média e a covariância das amostras devem ser relatadas/informadas pelo filtro de partículas, elas precisam ser calculadas antes da reamostragem.



## 2.5.6 Seleção da Densidade de Importância

### 2.5.6.1 A escolha ótima

A escolha da densidade de importância  $q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{z}_k)$  é um dos problemas mais cruciais no projeto de um filtro de partículas. A função densidade de importância ótima que minimiza a variância dos pesos de importância, condicionada por  $\mathbf{x}_{k-1}^i$  e  $\mathbf{z}_k$  é mostrada como (Doucet et al., 2000)

$$q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{z}_k)_{opt} = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{z}_k) \quad (2.129)$$

$$= \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}^i) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i)}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i)}. \quad (2.130)$$

Com a substituição de (2.130) em (2.125), a seguinte expressão é obtida:

$$w_k^i \propto w_{k-1}^i p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i), \quad (2.131)$$

o que afirma que os pesos de importância no instante  $k$  podem ser computados (e reamostrados, se for necessário) *antes* das partículas serem propagadas no instante  $k$ . Para usar a função de importância ótima, há dois requisitos: (1) amostrar a partir de  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{z}_k)$ , e (2) calcular

$$p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i) = \int p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i) d\mathbf{x}_k \quad (2.132)$$

como uma constante normalizadora. Em geral, pelos menos um dos requisitos não é obtido facilmente.

Entretanto, existem alguns casos especiais em que o uso da função densidade de importância ótima é possível. O primeiro caso é quando  $\mathbf{x}_k$  é parte de um conjunto finito. Em tal caso, a integral dada em (2.132) é representada por um somatório, e é possível amostrar a partir de  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i)$ . Um exemplo de aplicação onde  $\mathbf{x}_k$  é parte de um conjunto finito é um sistema linear sujeito a saltos markovianos (MJLS - *Markov Jump Linear Systems*) para rastreamento de alvos manobrantés (Doucet et al., 2001b). O segundo caso é uma classe de modelos para a qual  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{z}_k)$  é uma gaussiana (Doucet et al., 2000).

### 2.5.6.2 Função de importância ótima gaussiana

Seja considerado o caso em que a dinâmica de estado é não linear, a equação de medição é linear, e todos os elementos aleatórios no modelo são gaussianos aditivos. Tal sistema é representado por

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \quad (2.133)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (2.134)$$

onde  $\mathbf{w}_{k-1}$  e  $\mathbf{v}_k$  são sequências gaussianas brancas mutuamente independentes com covariâncias  $\mathbf{Q}_{k-1}$  e  $\mathbf{R}_k$ , respectivamente. É possível mostrar que nesse caso, tanto a densidade de importância ótima quanto  $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_{k-1})$  são gaussianas, isto é:

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{z}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{z}_k; \mathbf{a}_k, \Sigma_k) \quad (2.135)$$

$$p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_{k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{b}_k, S_k), \quad (2.136)$$

onde

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \Sigma_k \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{b}_k) \quad (2.137)$$

$$\Sigma_k = \mathbf{Q}_{k-1} - \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{Q}_{k-1} \quad (2.138)$$

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \quad (2.139)$$

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}). \quad (2.140)$$

A seguir, as etapas básicas da prova são apresentadas. De acordo com as considerações relacionadas a (2.133) e (2.134), é possível observar que

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}), \mathbf{Q}_{k-1}) \quad (2.141)$$

$$p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{z}_k; \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k). \quad (2.142)$$

Da fórmula de Bayes, segue que

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{z}_k) = \frac{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})}{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_{k-1})}, \quad (2.143)$$

o qual pode ser igualado como

$$\begin{aligned} & (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k)^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k) \\ & + (\mathbf{x}_k - \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}))^T \mathbf{Q}_{k-1}^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1})) \\ & = (\mathbf{x}_k - \mathbf{a}_k)^T \sum_k^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{a}_k) + (\mathbf{z}_k - \mathbf{b}_k)^T \mathbf{S}_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{b}_k). \end{aligned} \quad (2.144)$$

Realizando a expansão de ambos os lados da Equação (2.144) e igualando os termos similares, a seguinte expressão é obtida:

$$\mathbf{x}_k^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}^{-1} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^T \Sigma_k^{-1} \mathbf{x}_k, \quad (2.145)$$

o que conduz a  $\Sigma_k^{-1} = \mathbf{Q}_{k-1}^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k$ .

A estimativa analítica de  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{z}_k)$  e  $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_{k-1})$  é difícil para a maioria dos casos. A subseção seguinte descreve métodos subótimos que aproximam a densidade de importância ótima.

### 2.5.6.3 Escolhas subótimas

A escolha subótima mais popular é a transição da distribuição *a priori*

$$q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{z}_k) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i). \quad (2.146)$$

Se um modelo de ruído de processo aditivo gaussiano de média zero é utilizado em (2.133), a probabilidade *a priori* transicional é

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{f}_{k-1}, \mathbf{Q}_{k-1}). \quad (2.147)$$

Pela substituição da Equação (2.146) na Equação (2.125), a seguinte expressão é obtida:

$$w_k^i \propto w_{k-1}^i p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^i). \quad (2.148)$$

Caso a distribuição *a priori* transicional  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$  seja usada como densidade de importância, e é uma distribuição muito mais ampla que a verossimilhança  $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k)$ , então apenas algumas partículas serão assinaladas com peso alto. Consequentemente, as partículas vão se degenerar rapidamente e o filtro não funcionará. Alguns métodos foram propostos a fim de que as partículas do conjunto estejam nas regiões de maior verossimilhança quando a observação (medição) atual for incorporada, como as densidades de ponte (Clapp & Godsill, 2001) ou a correção progressiva (Oudjane & Musso, 2000), as quais introduzem distribuições intermediárias entre *a priori* e verossimilhança. É possível também construir aproximações subótimas através de técnicas de linearização local (Doucet et al., 2000). Tais linearizações usam uma densidade de importância que é uma aproximação gaussiana de  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{z}_k)$  e são baseadas em EKF ou UKF.

## 2.5.7 Versões de filtros de partículas

O algoritmo de amostragem por importância sequencial, apresentado anteriormente, forma a base da maioria dos filtros de partículas existentes (Ristic et al., 2003). Nesta seção, são apresentadas cinco versões diferentes do referido filtro. Os seguintes filtros são descritos: (1) filtro de reamostragem por importância (SIR - *Sampling Importance Resampling*); (2) filtro auxiliar de reamostragem por importância (ASIR - *Auxiliary Sampling Importance Resampling*); (3) filtros de partículas com diversidade de amostras aperfeiçoada; (4) filtros de partículas com linearização local; (5) filtro de partículas de modelo múltiplo. Esses filtros podem ser (e comumente são) combinados (Ristic et al., 2003).

### 2.5.7.1 Filtro SIR

O filtro SIR foi proposto em (Gordon et al., 1993) sob o nome de filtro *bootstrap*. Os requisitos para o uso do filtro SIR são simples: as funções de dinâmica do estado e de medição,  $\mathbf{f}_{k-1}(\cdot)$  e  $\mathbf{h}_k(\cdot)$ , respectivamente, devem ser conhecidas; e é requerido que seja

possível amostrar a partir da distribuição do ruído de processo,  $\mathbf{v}_{k-1}$ , e da distribuição *a priori*. Finalmente, a função verossimilhança,  $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)$ , precisa estar disponível para cálculo pontual. O algoritmo SIR é derivado do algoritmo SIS quando a densidade de importância é escolhida como a densidade *a priori* transicional e ao realizar a etapa de reamostragem em todos os instantes de tempo. O cálculo dos pesos de importância é dado por

$$w_k^i \propto p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k^i) \quad (2.149)$$

e são normalizados antes da etapa de reamostragem.

Devido ao fato de a função densidade de amostragem por importância não depender de  $\mathbf{z}_k$ , o filtro SIR pode ser ineficiente em alguns casos, além do risco de uma rápida perda de diversidade das amostras em função da reamostragem em cada iteração. Entretanto, o método tem a vantagem de que os pesos de importância são mais facilmente calculados e a densidade de importância pode ser amostrada de forma simples.

### 2.5.7.2 Filtro SIR auxiliar

O filtro ASIR foi introduzido em (Pitt & Shephard, 1999) como uma variante do filtro SIR. A ideia básica é realizar a etapa de reamostragem no instante  $k - 1$ , usando a medição disponível no instante  $k$ . Dessa forma, o filtro ASIR tenta imitar a sequência de etapas realizadas quando a densidade de importância ótima está disponível. Essa variante do filtro SIR segue a estrutura do seu antecessor, mas introduz uma densidade de importância  $q(\mathbf{x}_{k,i}|\mathbf{Z}_k)$ , a qual amostra o par  $\{\mathbf{x}_k^j, i^j\}_{j=1}^N$ , onde  $i^j$  é o índice da partícula no instante  $k - 1$ .

Comparado ao filtro SIR, a vantagem obtida com o filtro ASIR é que ele gera pontos da amostra no instante  $k - 1$ , o qual, condicionado à medição atual, tem maior probabilidade de estar na região de alta verossimilhança, ou seja é capaz de reamostrar no instante de tempo "prévio" baseado em uma estimativa pontual que caracteriza  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}^i)$ .

Caso o ruído de processo seja muito pequeno, de forma que  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}^i)$ , o filtro ASIR é menos sensível a valores atípicos e os pesos são mais nivelados. Caso contrário, a reamostragem será baseada em uma aproximação pior de  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}^i)$  e terá seu desempenho degradado.

### 2.5.7.3 Filtros de partículas com diversidade amostral aperfeiçoada

A reamostragem foi uma etapa sugerida no filtro SIR como um método para reduzir o problema de degeneração. No entanto, conforme já apresentado, a reamostragem introduz outros problemas, particularmente, a perda de diversidade entre as partículas. Isso ocorre devido ao fato de que no estágio de reamostragem, as amostras são obtidas de uma distribuição discreta em vez de uma contínua. Caso o problema da diversidade não seja

tratado adequadamente, podendo chegar a um "colapso de partículas", onde todas as  $N$  partículas ocupam o mesmo ponto do espaço de estados, gerando uma representação pobre da densidade *a posteriori*.

Duas técnicas são comumente aplicadas para aperfeiçoar a diversidade entre as partículas, a regularização e a movimentação MCMC (Markov Chain Monte Carlo). Em ambos os casos, o filtro de partículas resultante é idêntico ao SIR, exceto a etapa de reamostragem.

O filtro de partículas regularizado (RPF - *Regularized Particle Filter*) reamostra a partir de uma aproximação contínua da densidade *a posteriori*, enquanto o SIR reamostra da aproximação discreta (2.128). Especificamente, no RPF, as amostras são obtidas da aproximação

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k) \approx \sum_{i=1}^N w_k^i K_h(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^i), \quad (2.150)$$

onde

$$K_h(\mathbf{x}) = \frac{1}{h^{n_x}} K \frac{\mathbf{x}}{h} \quad (2.151)$$

é a densidade do *kernel* reescalada  $K(\cdot)$ ,  $h > 0$  é a largura de banda do *kernel* (um parâmetro escalar),  $n_x$  é a dimensão do vetor de estado  $\mathbf{x}$ , e  $w_k^i$  são os pesos normalizados.

O *kernel* e a banda são escolhidos de forma a minimizar o erro quadrático médio integrado (MISE - *mean integrated square error*) entre a densidade *a posteriori* verdadeira e a representação empírica regularizada correspondente

$$MISE(\hat{p}) = \mathbb{E} \left[ \int [\hat{p}(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k) - p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k)]^2 d\mathbf{x}_k \right]. \quad (2.152)$$

A desvantagem teórica do RPF é que suas amostras não são mais garantidas que sejam assintoticamente aproximadas da *posteriori*.

Já a técnica da etapa de movimento MCMC, baseada no algoritmo Metropolis-Hastings (Robert & Casella, 1999), tem como sua ideia fundamental que uma partícula reamostrada  $\mathbf{x}_k^i$  é movida para um novo estado  $\mathbf{x}_k^{i*}$  somente se  $u \leq \alpha$ , onde  $u \sim U[0, 1]$  e  $\alpha$  é a probabilidade de aceitação. Caso contrário, o movimento é rejeitado.

A probabilidade de aceitação é dada por (Robert & Casella, 1999):

$$\alpha = \min \left\{ 1, \frac{p(\mathbf{X}_k^{i*} | \mathbf{Z}_k) q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_k^{i*})}{p(\mathbf{X}_k^i | \mathbf{Z}_k) q(\mathbf{x}_k^{i*} | \mathbf{x}_k^i)} \right\}. \quad (2.153)$$

A vantagem teórica do filtro de partículas de movimento MCMC sobre o RPF é que suas amostras são garantidas que sejam assintoticamente aproximadas da *posteriori*. Em cenários práticos, as duas variantes têm desempenho superior ao filtro SIR para os casos em que o empobrecimento da amostra é severo.

#### 2.5.7.4 Filtros de partículas com linearização local

A densidade de importância ótima pode ser aproximada através da incorporação da medição  $\mathbf{z}_k$  mais atual através de um filtro de Kalman estendido (EKF) ou *unscented* (UKF) (Doucet et al., 2000; van der Merwe et al., 2000). A ideia é usar para cada partícula (índice  $i$ ) um EKF( $i$ ) ou UKF( $i$ ) para gerar e propagar uma distribuição de importância gaussiana, isto é:

$$q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{z}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k^i; \hat{\mathbf{x}}_k^i, \hat{\mathbf{P}}_k^i), \quad (2.154)$$

onde  $\hat{\mathbf{x}}_k^i$  e  $\hat{\mathbf{P}}_k^i$  são estimativas da média e da covariância computadas pelo EKF ou UKF no instante  $k$  utilizando a medição  $\mathbf{z}_k$ . Esse filtro é conhecido como filtro de partículas com linearização local (LLPF - *Local Linearization Particle Filter*).

O método de linearização local para aproximação da densidade de importância propaga as partículas em direção à função de verossimilhança, o que produz um desempenho melhor que o filtro SIR. O custo computacional adicional pelo uso de tal densidade de importância é compensado pela redução do número de partículas requeridas para obtenção do melhor desempenho.

#### 2.5.7.5 Filtro de partículas de modelo múltiplo

O filtro de partículas de modelo múltiplo (MMPF - *Multiple-Model Particle Filter*) foi proposto por diversos autores (Musso et al., 2001; Angelova et al., 2000) para realizar uma filtragem não linear com modelos de dinâmica comutáveis. Esse problema pertence à classe mais ampla de *estimação de estados híbrida*, onde o vetor de estados (aumentado) consiste tanto da parte em valores contínuos quanto da parte em valores discretos.

Os componentes do vetor de valores contínuos são usualmente as variáveis cinemáticas do alvo (target), como posição, velocidade, etc. e possíveis parâmetros desconhecidos (por exemplo, um coeficiente balístico). O vetor de valores discretos pode ser uma combinação de:

- Uma variável de regime  $r_k$ , a qual determina qual modelo dinâmico está em efeito de  $k - 1$  a  $k$ ;
- Atributos não cinemáticos do alvo, usado em conjunto em problemas de classificação (Boers & Driessen, 2002);
- Vetor de associação de dados, o qual determina a origem das medições na presença de desordem e/ou múltiplos alvos (Hue et al., 2002).

A primeira etapa desse algoritmo é gerar um conjunto aleatório  $\{r_k^n\}_{n=1}^N$  baseado em  $\{r_{k-1}^n\}_{n=1}^N$  e a matriz de probabilidade transicional  $\Pi = [\pi_{ij}]$ , onde  $i, j \in S$ .

A próxima etapa do MMPF realiza uma filtragem SIS condicionada a regime. A densidade de importância condicionada a regime ótima é dada por

$$q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^n, r_k^n, \mathbf{z}_k)_{opt} = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^n, r_k^n, \mathbf{z}_k), \quad (2.155)$$

embora a escolha mais comum (Musso et al., 2001; Angelova et al., 2000) é a transicional *a priori*

$$q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^n, r_k^n, \mathbf{z}_k) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^n, r_k^n). \quad (2.156)$$

## 2.6 Exemplo Comparativo de Estimação com EKF e PF

O exemplo a seguir, adaptado de Simon (2006), mostra os filtros EKF e PF em operação simulada.

Seja considerado um sistema que é dado pelas seguintes equações:

$$x_k = \frac{1}{2}x_{k-1} + \frac{25x_{k-1}}{1 + x_{k-1}^2} + 8\cos[1, 2(k-1)] + w_k \quad (2.157)$$

$$z_k = \frac{1}{20}x_k^2 + v_k, \quad (2.158)$$

onde  $w_k$  e  $v_k$  são sequências de ruído branco gaussiano de média zero, ambos com variância igual a 1. O alto grau de não linearidade nas equações de estado (processo) e de medição tornam a estimação mais difícil para o EKF. O estado inicial é considerado como a posição do alvo móvel  $x_0 = 0, 1$ , e a estimação inicial como  $\hat{x}_0 = x_0$ , e a estimação inicial da covariância para o EKF como  $P_0 = 2$ . Uma extensão de 50 instantes de tempo foi utilizada na simulação. A Figura 9 mostra que o EKF faz uma estimação mais pobre do estado verdadeiro do sistema.

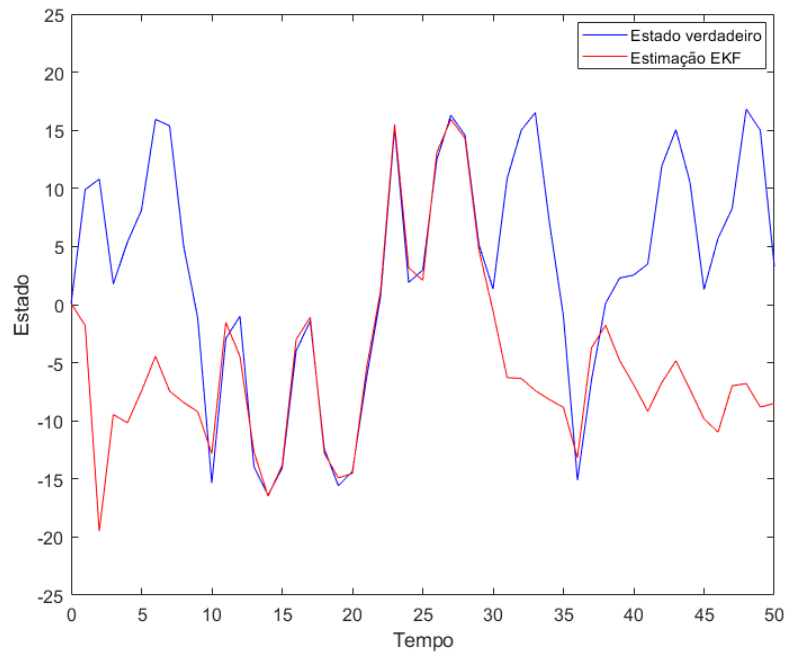


Figura 9 – Estimação do estado feita pelo EKF. É possível notar que, em pelo menos metade do período de simulação, os valores estimados se desviam do estado verdadeiro. Comparativo entre o estado verdadeiro (vermelho) e a estimativa realizada (azul).

Com o PF, foram utilizadas 100 partículas para realizar a estimativa, e é possível observar a partir da Figura 10 que a estimativa feita pelo PF é mais próxima dos valores do sistema. O fator mais decisivo para esse caso, foi a grande não linearidade do sistema, favorecendo o PF, já que utiliza as próprias equações do sistema em vez de uma aproximação localmente linearizada delas.



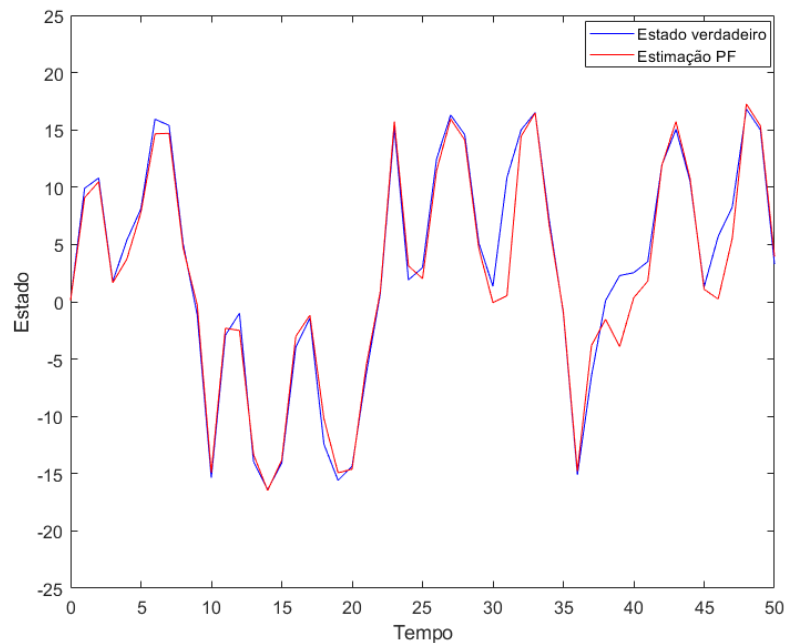


Figura 10 – Estimação do estado feita pelo PF. É possível notar que os valores estimados acompanham o estado verdadeiro com maior confiança probabilística. Comparativo entre o estado verdadeiro (vermelho) e a estimativa realizada (azul).

Após vinte realizações, como métrica comparativa, foram obtidos os valores RMSE (vide Seção 4.2) para as duas estimativas, sendo 8,41 para o EKF, e 2,57 para o PF.

## 2.7 Considerações Finais

A estimativa bayesiana ocorre em duas etapas: predição e atualização (ou correção). A predição realiza uma estimativa inicial do estado do sistema para o instante seguinte, entretanto, quando uma medição ruidosa é incorporada ao algoritmo do filtro, uma nova estimativa, geralmente mais correta, é obtida, essa é a etapa de atualização. Aplicações comuns da estimativa bayesiana são O EKF e o UKF, que estão na categoria de filtros não lineares analíticos, aproximando as equações de modelo e de medição com linearizações, levando em consideração as matrizes de covariância de ruído, sem no entanto serem adaptativos. Outro filtro comum que aplica a estimativa bayesiana é o PF, o qual utiliza funções não lineares em seu processamento e possui duas etapas-chaves: (1) a amostragem por importância sequencial e (2) a reamostragem. Foi enfatizada a necessidade de escolher uma boa densidade de importância e algumas possíveis soluções foram revistas, além de apresentar versões existentes de PFs. A ênfase foi colocada sobre o PF por ser o destaque do Capítulo 3 e deste trabalho como um todo.

## 3 Metodologia Proposta: IAE-PF

Neste Capítulo, após introduzir o assunto de variantes de filtros de partículas, a teoria da estimativa de máxima verossimilhança é apresentada, base para a estimação adaptativa inovativa, a qual é incorporada no IAE-PF a fim de obter o ganho de robustez desejado com o filtro proposto. Em seguida, o IAE-PF é detalhado por meio de seu equacionamento comentado e de seu algoritmo.

### 3.1 Introdução

Uma abordagem proposta como variação do PF clássico, segundo Simon (2006), é combiná-lo com outro filtro, como EKF ou UKF (UKF - *unscented Kalman filter*) (Julier et al., 1995; Wan & Merwe, 2001). Nesta abordagem, cada partícula é atualizada no momento da medição usando equações derivadas do EKF ou UKF e, em seguida, a reamostragem é realizada usando a medição ruidosa recebida. Depois que  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  é obtido, é possível refinar a estimação por meio de equações de atualização derivadas de outro filtro.

Novas propostas de filtros são feitas como derivação de técnicas já existentes, como o filtro de Kalman em Quadratura (QKF - *quadrature Kalman filter*) (Arasaratnam et al., 2007) e o filtro de Kalman de cubatura (CKF - *cubature Kalman filter*) (Arasaratnam & Haykin, 2009), além disso, como método de filtragem, há os filtros gaussianos (Afshari et al., 2017), e todos podem ser utilizados em conjunto com o PF, respeitadas suas particularidades. Filtros que incorporam outras técnicas tem sido utilizados em trabalhos recentes com resultados pertinentes, como em (Lu et al., 2022), que utiliza um PF baseado no filtro de Kalman clássico, e (Ma et al., 2022), que propõe um PF para posicionamento *indoor* baseado em modelo de observação de reconstrução com máquina de aprendizado extremo. O filtro proposto é um filtro de partículas que utiliza equações derivadas da teoria de Kalman e também do método IAE, baseado na estimativa de máxima verossimilhança.

### 3.2 Estimativa de Máxima Verossimilhança

A tarefa de ajustar dados a um modelo é fundamental em estatística (Améndola et al., 2021). Um modelo estatístico é um conjunto de distribuições de probabilidade. Um ponto no modelo que melhor se ajuste a alguns dados empíricos, como observações e incertezas, é o objetivo da tarefa. Uma abordagem comum é maximizar a probabilidade de observar os dados à medida em que o modelo é executado. Um ponto que maximize a verossimilhança é chamado de estimativa de máxima verossimilhança (MLE - *Maximum Likelihood Estimation*). Existem diversas maneiras de calcular uma MLE para diferentes

modelos estatísticos, geralmente por meio de abordagens de otimização que encontram um máximo local (Mai et al., 2014). Há um interesse crescente em entender quando os algoritmos garantem encontrar uma MLE e sob quais condições ela existe ou é única (Sullivant, 2018; Améndola et al., 2021).

### 3.2.1 MLE para distribuição gaussiana

Seja considerado um conjunto de dados  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  com uma certa fdp. Essa fdp é caracterizada por um conjunto de parâmetros  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ . Para o caso de uma fdp gaussiana, os parâmetros são  $\mu$  e  $\sigma^2$ . É possível representar a fdp como  $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ .

O objetivo é encontrar a fdp que mais provavelmente produziu o conjunto de dados. A função de verossimilhança é definida como:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}). \quad (3.1)$$

Ou seja, o problema é: de posse do conjunto de dados, encontrar os parâmetros da fdp. A MLE de  $\boldsymbol{\theta}$  é o valor de  $\boldsymbol{\theta}$  que maximiza  $L(\boldsymbol{\theta})$  (Myung, 2003).

Com a suposição de que os dados aleatórios são mutuamente independentes, a função de verossimilhança pode ser escrita como um produto (Giron-Sierra, 2017):

$$L(\boldsymbol{\theta}) = f(\mathbf{x}_1|\boldsymbol{\theta}) \cdot f(\mathbf{x}_2|\boldsymbol{\theta}) \cdots f(\mathbf{x}_n|\boldsymbol{\theta}). \quad (3.2)$$

É comum, nesse contexto, utilizar logaritmos naturais, pois o logaritmo é uma função monótona, e seu valor máximo será encontrado exatamente onde a função de verossimilhança tiver seu valor máximo (Theodoridis, 2020). A função de verossimilhança logarítmica é dada por

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_i \ln(f(x_i|\boldsymbol{\theta})), \quad (3.3)$$

e a função de verossimilhança logarítmica para a distribuição gaussiana é:

$$l(\mu, \sigma) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_i (x_i - \mu)^2. \quad (3.4)$$

Na Figura 11 é apresentado um exemplo de função de verossimilhança logarítmica para a distribuição gaussiana. O valor da variância é suposto constante e igual a 1. A simulação computacional realizada utilizou 100 valores diferentes do parâmetro  $\mu$  (média), a partir do valor  $\mu = 5$  combinado com uma distribuição aleatória normal entre 0 e 1, resultando em N dados aleatórios. Quatro valores para N foram escolhidos a fim de demonstrar que, à medida em que o número de dados aumenta, a curva fica mais pontiaguda, melhor representando os dados, e o pico da curva, ou seja, o valor máximo, corresponde à média 5.

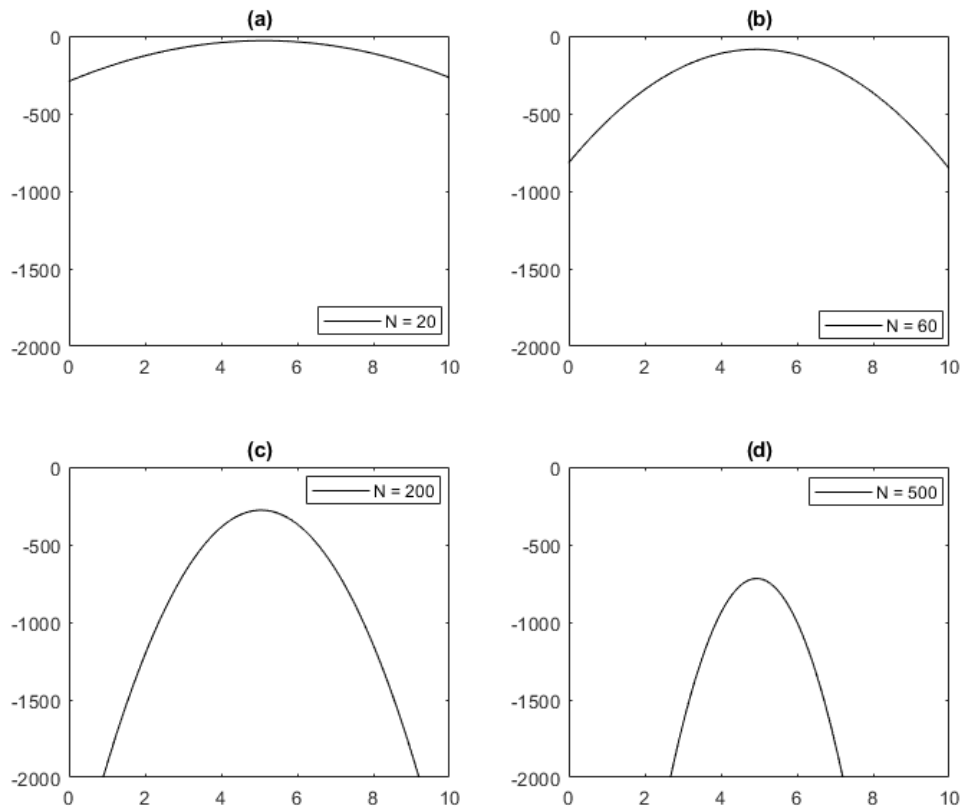


Figura 11 – Função de verossimilhança logarítmica para distribuições gaussianas com média 5. (a)  $N = 20$ , (a)  $N = 60$ , (a)  $N = 200$ , (a)  $N = 500$ , com a utilização de 20, 60, 200 e 500 valores de dados, respectivamente. (Fonte: adaptado de Giron-Sierra (2017)).

O valor máximo da verossimilhança logarítmica pode ser determinado analiticamente, por derivação (Holmes, 2001). Para o caso da distribuição gaussiana, as respectivas equações e relações são obtidas (Giron-Sierra, 2017):

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu} = 0 \rightarrow \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma} = 0 \rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2. \quad (3.6)$$

### 3.2.2 Regressão linear: MLE para ruído gaussiano não branco

Seja considerado o modelo de regressão linear dado por

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x} + \eta. \quad (3.7)$$

Dado  $N$  pontos de dados  $(y_n, \mathbf{x}_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . As amostras de ruído correspondentes,  $\eta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , são obtidas de uma distribuição gaussiana conjunta com média zero e matriz de covariância  $\Sigma_\eta$ . O objetivo permanece: obter a MLE dos parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$ .

A função de verossimilhança logarítmica de  $\boldsymbol{\theta}$  com relação ao conjunto de pontos dados, é representada por (Theodoridis, 2020)

$$L(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{N}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln|\Sigma_\eta| - \frac{1}{2}(\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta})^T \Sigma_\eta^{-1}(\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta}), \quad (3.8)$$

onde  $\mathbf{y} := [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ , e  $X := [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N]^T$  é a matriz de entrada. Pelo cálculo do gradiente com relação à  $\boldsymbol{\theta}$ , a seguinte expressão é obtida:

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = X^T \Sigma_\eta^{-1}(\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta}), \quad (3.9)$$

a qual, sendo igualada a zero, produz a expressão a seguir:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MV} = (X^T \Sigma_\eta^{-1} X)^{-1} X^T \Sigma_\eta^{-1} \mathbf{y}. \quad (3.10)$$

Foi demonstrado por Theodoridis (2020) que, para o caso de gaussianas não brancas, a MLE é eficiente, mesmo se o número de pontos,  $N$ , for finito.

É possível aplicar a MLE para diversas outras distribuições, como geométrica, Poisson, exponencial, gamma e Weibull (Giron-Sierra, 2017), por exemplo. A próxima seção apresenta as diretrizes e um exemplo de MLE para a distribuição de Weibull.

### 3.2.3 MLE para distribuição de Weibull

A estimativa de uma MLE pode ser feita para outros tipos de distribuição de probabilidade, como a distribuição de Weibull. Essa distribuição utiliza dois parâmetros, o de escala,  $a$ , e o de forma,  $b$ , mas pode ainda ter um terceiro parâmetro,  $c$ , de localização. A distribuição de Weibull é matematicamente definida por

$$f(x|a, b, c) = \begin{cases} \frac{b}{a} \left(\frac{x-c}{a}\right)^{(b-1)} \exp\left(-\left(\frac{x-c}{a}\right)^b\right) & \text{se } x > c \\ 0 & \text{se } x \leq c, \end{cases} \quad (3.11)$$

onde  $a$  e  $b$  são valores positivos e  $c$  é um valor real, que assume zero para o caso de apenas dois parâmetros.

O exemplo a seguir calcula a MLE para uma distribuição de Weibull de dois parâmetros. É dado um conjunto de dados do peso médio (em libras) dos carros entre o final da década de 1970 e início de 1980. Através do cálculo computacional da MLE, os valores dos parâmetros são obtidos,  $a = 3321,64$  e  $b = 4,10083$ , e a representação gráfica da aproximação gerada é apresentada na Figura 12.

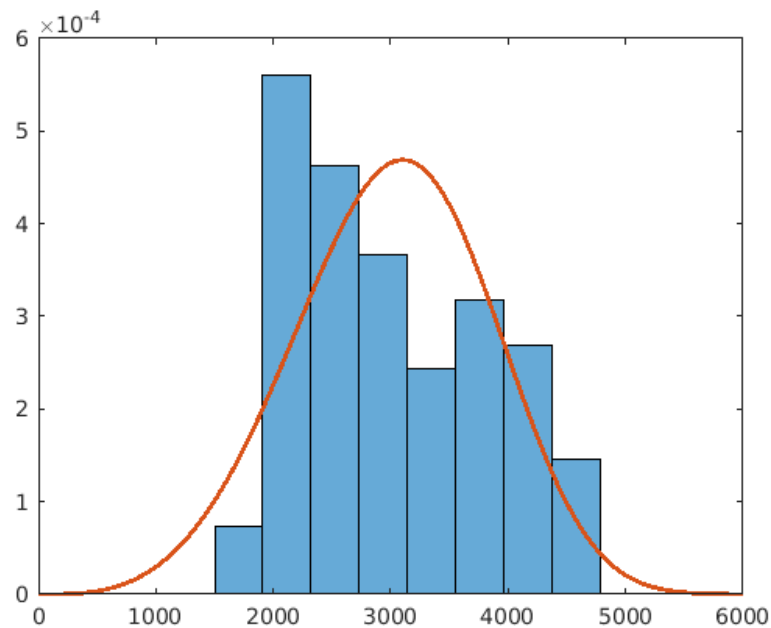


Figura 12 – Representação da MLE para o exemplo com distribuição de Weibull. A representação é feita com as amostras (azul) e a MLE (vermelho), onde  $MLE \sim Weibull(3321,64; 4,10083)$  (Fonte: MathWorks.com).

O gráfico de distribuição ajustado não corresponde bem ao histograma. O histograma não mostra amostras na região onde a variável Peso é menor que 1500. Para corrigir esse problema, o valor 1500 é subtraído dessa variável para gerar os novos parâmetros,  $a = 1711,75$  e  $b = 1,99963$ , com a nova forma da MLE apresentada na Figura 13.

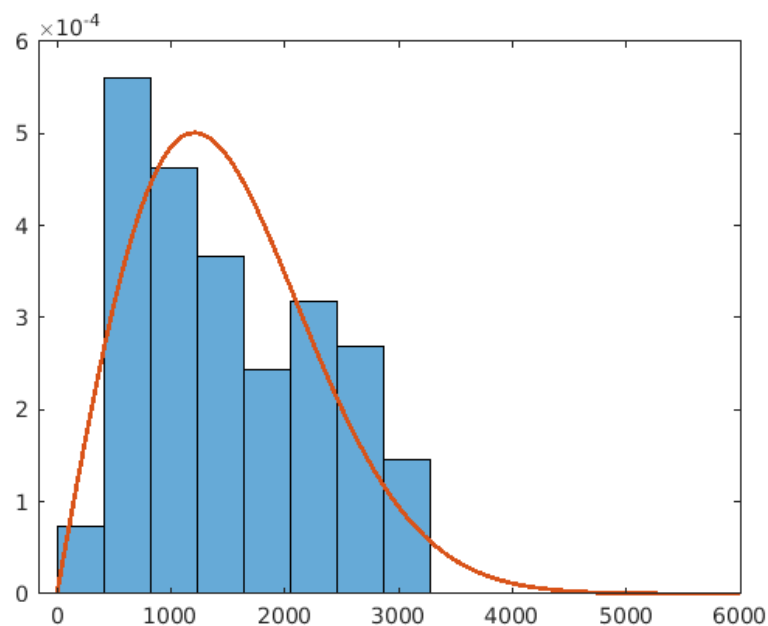


Figura 13 – Representação da MLE para o exemplo com distribuição de Weibull. A representação é feita com as amostras (azul) e a MLE (vermelho), onde  $MLE \sim Weibull(1711,75; 1,99963)$  (Fonte: MathWorks.com).

O gráfico de distribuição ajustado corresponde melhor ao histograma. É possível, ainda, em vez de especificar um valor arbitrário para o limite de distribuição, estimar o limite (parâmetro de localização  $c$ ).

### 3.3 Estimação Adaptativa Inovativa

As estatísticas de ruído  $\mathbf{R}_k$  e  $\mathbf{Q}_k$  são exigidas *a priori* pelos algoritmos de estimação. No entanto, muitas vezes essas informações são indisponíveis ou de difícil obtenção na prática, o que pode comprometer o bom funcionamento do filtro (Woo et al., 2019).

É sabido que quanto mais incerta for a aquisição de dados do sistema, mais a estimação das variáveis de estado tende a se desviar do valor verdadeiro (Tseng et al., 2011). Na Figura 14, é possível observar o valor verdadeiro de uma variável de estado e suas estimativas fornecidas por um EKF, cuja matriz de covariância de ruído de medição é  $\mathbf{R}$ , uma matriz constante, e o filtro assume os seguintes valores incorretos:  $10^2\mathbf{R}$  e  $10^3\mathbf{R}$ , que constituem incertezas nas informações das estatísticas do ruído. Com isso, é possível notar a degradação da estimação à medida que a incerteza sobre o ruído aumenta.

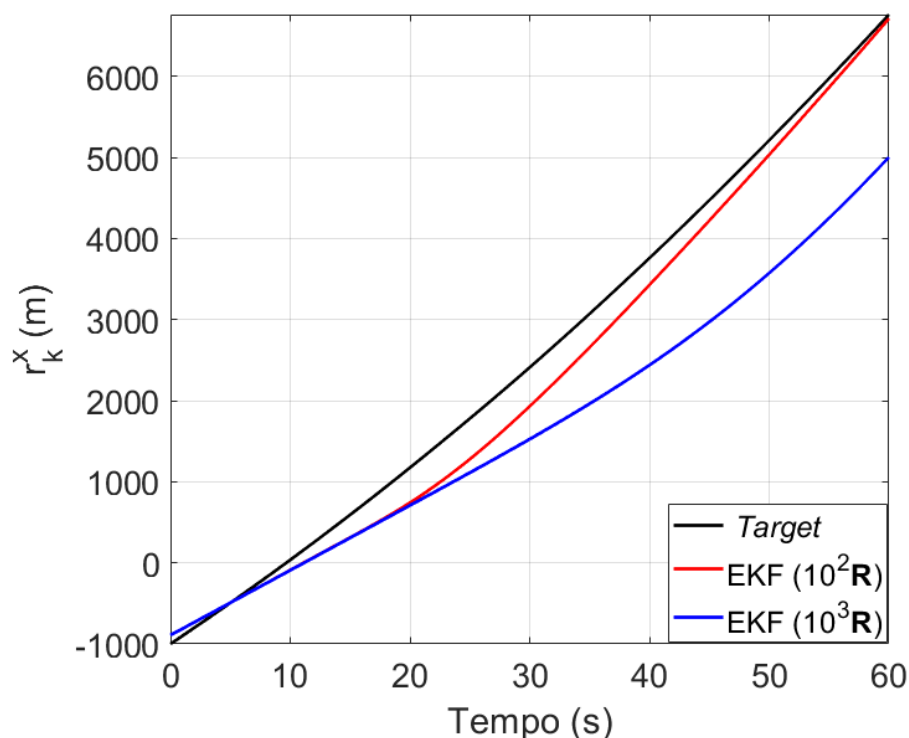


Figura 14 – Degradação da estimação com o aumento do ruído. A representação inclui a posição de um alvo (Target) móvel no eixo x (preto) e as estimativas dessa variável feitas com EKF para  $\sigma_R^2 = 10^2\mathbf{R}$  (vermelho) e  $\sigma_R^2 = 10^3\mathbf{R}$  (azul).

O IAE resolve essa desvantagem estimando as matrizes de covariância de ruído por meio de novas informações, fornecidas de forma adaptativa por uma sequência de inovação

(Mohamed & Schwarz, 1999).

O MLE para estimação de parâmetros visa maximizar a função de verossimilhança  $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Z})$  para um conjunto de  $m$  parâmetros de sistema  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^m$ , baseado no conjunto de  $M$  dados amostrais  $\mathbf{Z}_M \in \mathbb{R}^{m \times M}$ , onde a variável aleatória discreta  $\mathbf{Z}$  é definida por  $\mathbf{Z}_M = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_M\}$  e é assumido que os vetores de medição  $\mathbf{z}_i$ , com a mesma dimensão de  $\boldsymbol{\theta}$ , são independentes e identicamente distribuídos (Fraser & Ulrich, 2021). Os parâmetros a serem estimados para o caso do IAE-PF são definidos como  $\boldsymbol{\theta} \triangleq \{\mathbf{Q}_k, \mathbf{R}_k\}$ , e a função logarítmica de verossimilhança do problema de MLE é formulado como (Fraser & Ulrich, 2021)

$$\max_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ \ln L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Z}_M) = \ln p(\mathbf{Z}_M|\boldsymbol{\theta}) \right\}, \quad (3.12)$$

onde  $p(\mathbf{Z}_M|\boldsymbol{\theta})$  representa a função massa de probabilidade conjunta discreta das observações condicionadas aos parâmetros.

A diferença entre a saída recebida pelo filtro  $\mathbf{z}_k$  e a saída estimada  $\hat{\mathbf{z}}_k^-$  de um sistema é chamada de resíduo (Brown & Hwang, 2012), e representada por  $\mathcal{J}_k$ , assumido gaussiano, com média zero e covariância  $\boldsymbol{\Sigma}_k$ , tal que  $p(\mathcal{J}_k|\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\Sigma}_k)$ . Assim, a função de probabilidade das medições pode ser aproximada por (Fraser & Ulrich, 2021)

$$p(\mathbf{Z}_M|\boldsymbol{\theta}) \approx \prod_{i=i_0}^M p(\mathcal{J}_M|\boldsymbol{\theta}). \quad (3.13)$$

Mas armazenar o conjunto inteiro de dados anteriores é inviável para estimação em tempo real, em vez disso, somente um número fixo de medições anteriores é utilizado no processamento. Dessa forma, a função de verossimilhança é calculada por uma janela de tamanho  $M$ , a qual contém dados do instante atual,  $k$ , até um ponto anterior  $j = k - M + 1$ . Pode ser escrita na forma de função matricial de probabilidade para distribuições gaussianas, como segue:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Z}_M) = \prod_{i=i_0}^M \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\boldsymbol{\Sigma}_i|}} \exp \left[ -\frac{\mathcal{J}_i^T \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathcal{J}_i}{2} \right], \quad (3.14)$$

onde  $|\boldsymbol{\Sigma}_i|$  é o determinante da matriz  $\boldsymbol{\Sigma}_i$ .

Ao aplicar o logaritmo natural da função de verossimilhança, o produtório é eliminado, o que leva a (Fraser & Ulrich, 2021)

$$\ln L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Z}_M) = -\frac{1}{2} \sum_{i=i_0}^M \left[ \ln |\boldsymbol{\Sigma}_i| + \mathcal{J}_i \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathcal{J}_i^T + c_i \right], \quad (3.15)$$

onde o termo constante  $c_i = m \cdot \ln(2\pi)$  é independente dos parâmetros.

O objetivo de maximizar a função logarítmica de verossimilhança é equivalente a minimizar a função logarítmica negativa de verossimilhança. Então, desprezando o termo constante, uma função custo de pseudo-verossimilhança é definida por (Fraser & Ulrich,



2021)

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Z}_M) \triangleq \sum_{i=i_0}^M \left[ \ln|\boldsymbol{\Sigma}_i| + \mathcal{J}_i \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathcal{J}_i^T \right]. \quad (3.16)$$

A solução da MLE para os parâmetros do IAE-PF pode ser aproximada como a minimização da função de custo  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Z}_M)$ , com restrições definidas positivas sobre  $\mathbf{Q}_k$  e  $\mathbf{R}_k$ . A seguir, um método para solução da MLE é descrito (Maybeck, 1982).

### 3.3.1 Solução analítica para o problema de MLE

A MLE é obtida analiticamente pela derivação da Equação (3.16) com relação aos parâmetros de adaptação, e em seguida igualando-a a zero. Considerando que as matrizes de covariância sejam diagonais, a solução pode ser formalmente apresentada como (Fraser & Ulrich, 2021)

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left[ \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Z}_M) \right] = 0, \quad (3.17)$$

onde  $\alpha_k$  são os termos da matriz de observabilidade. A equação diferencial parcial resultante que maximiza a função de verossimilhança para os parâmetros de adaptação é dada por

$$\sum_{i=i_0}^M \text{tr} \left\{ \left[ \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} - \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathcal{J}_i \mathcal{J}_i^T \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \right] \left[ \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \alpha_k} + \mathbf{H}_i \frac{\partial \mathbf{Q}_i}{\partial \alpha_k} \mathbf{H}_i^T \right] \right\} = 0. \quad (3.18)$$

A adaptabilidade tanto de  $\mathbf{Q}_k$  como de  $\mathbf{R}_k$  é possível devido ao fato de que as covariâncias de ruído de processo e medição afetam a sequência residual. Soluções únicas que forneçam regras de atualização para ambas as matrizes de covariância são apresentadas a seguir.

### 3.3.2 Adaptabilidade para a covariância de ruído de processo

A equação de adaptabilidade para a covariância de ruído de processo é obtida pela solução da Equação (3.18) sob a condição de que  $\frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \alpha_k} = 0$ , ou seja,  $\mathbf{R}_k$  é conhecida e independente dos parâmetros de adaptabilidade. A Equação (3.18) é simplificada para (Fraser & Ulrich, 2021)

$$\sum_{i=i_0}^M \mathbf{H}_i^T \left[ \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} - \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathcal{J}_i \mathcal{J}_i^T \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \right] \mathbf{H}_i = 0. \quad (3.19)$$

Considerando que o ganho de Kalman é ótimo, e que os termos de covariância devem ser simétricos definidos positivos, a covariância de ruído de processo estimada,  $\hat{\mathbf{Q}}_k$ , é dada por

$$\hat{\mathbf{Q}}_k = \frac{1}{M} \sum_{i=i_0}^M \left[ \mathbf{K}_i \mathcal{J}_i \mathcal{J}_i^T \mathbf{K}_i^T + (\mathbf{P}_i^+ - \mathbf{F}_{i-1} \mathbf{P}_{i-1}^+ \mathbf{F}_{i-1}^T) \right], \quad (3.20)$$

onde o termo entre parênteses contém a diferença nas covariâncias de erro entre o instante atual e o anterior. Caso o filtro atinja o regime permanente, o ganho de Kalman se torna

constante. A estimação da covariância de ruído de processo é reduzida a (Mohamed & Schwarz, 1999):

$$\hat{\mathbf{Q}}_k = \mathbf{K}_k \left[ \frac{1}{M} \sum_{i=i_0}^M \mathcal{J}_i \mathcal{J}_i^T \right] \mathbf{K}_k^T. \quad (3.21)$$

O termo entre colchetes contém a média do resíduo do filtro ao longo de  $M$  iterações. Esse termo é chamado de matriz de covariância de resíduos ou matriz de covariância de inovação, denotada por  $\mathbf{C}_{\mathcal{J}_k}$ , a qual é definida por (Fraser & Ulrich, 2021)

$$\mathbf{C}_{\mathcal{J}_k} \triangleq \frac{1}{M} \sum_{i=i_0}^M \mathcal{J}_i \mathcal{J}_i^T, \quad (3.22)$$

mas, pode ser representada por

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathcal{J}_k} &= E[\mathcal{J}_k \mathcal{J}_k^T] \\ &= E[(\mathbf{z}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{z}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T] \\ &= \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k, \end{aligned} \quad (3.24)$$

e a regra de adaptabilidade da matriz de covariância de ruído de processo será (Fraser & Ulrich, 2021)

$$\hat{\mathbf{Q}}_k = \mathbf{K}_k \mathbf{C}_{\mathcal{J}_k} \mathbf{K}_k^T. \quad (3.25)$$

### 3.3.3 Adaptabilidade para a covariância de ruído de medição

Similarmente, para o caso de  $\mathbf{R}_k$ , é feita a consideração que  $\frac{\partial \mathbf{Q}_i}{\partial \alpha_k} = 0$ , ou seja,  $\mathbf{Q}_k$  é conhecida e independente dos parâmetros de adaptabilidade, o que leva a

$$\sum_{i=i_0}^M \text{tr} \left\{ \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \left[ \boldsymbol{\Sigma}_i - \mathcal{J}_i \mathcal{J}_i^T \right] \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \right\} = 0. \quad (3.26)$$

A matriz  $\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}$  é considerada aproximadamente constante na janela de memória (Fraser & Ulrich, 2021). Isso permite uma estimação explícita da covariância de ruído de processo, que será dada por

$$\hat{\mathbf{R}}_k = \frac{1}{M} \sum_{i=i_0}^M [\mathcal{J}_i \mathcal{J}_i^T - \mathbf{H}_i \mathbf{P}_i^- \mathbf{H}_i^T], \quad (3.27)$$

que pode ser reescrita como

$$\hat{\mathbf{R}}_k = \left[ \frac{1}{M} \sum_{i=i_0}^M \mathcal{J}_i \mathcal{J}_i^T \right] - \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T. \quad (3.28)$$

Pela definição apresentada na Equação (3.22), a regra de adaptabilidade da matriz de covariância de ruído de medição será (Fraser & Ulrich, 2021)

$$\hat{\mathbf{R}}_k = \mathbf{C}_{\mathcal{J}_k} - \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T. \quad (3.29)$$

Ambas as matrizes,  $\hat{\mathbf{Q}}_k$  e  $\hat{\mathbf{R}}_k$ , são atualizadas em cada etapa de predição do filtro IAE-PF.

O método IAE é aplicado em diversos trabalhos recentes, como na proposta de Ranno et al.(2020), que toma o conceito de MV do IAE e combina com um sistema Fuzzy Mamdani tipo 1 (ITMF) para calcular uma matriz de ajuste mínimo e estimar parâmetros de ruído do sistema.

Algumas variantes do IAE são propostas com regularidade, como a robusta, RIAE (ZhiWen et al., 2013), a *enhanced*, EIAE (Ghaleb et al., 2017), e a ótima, OIAE (Sumithra & Vadivel, 2021). Essas propostas estimulam o desenvolvimento de novos filtros e mais avanços para a área de estimação de estados e suas aplicações.

### 3.3.4 Algoritmo IAE-MLE

O algoritmo do IAE com MLE, Algoritmo 3, é apresentado a seguir, o qual realiza a estimação com equações do EKF associadas ao método IAE (Fraser & Ulrich, 2021; Ranno et al., 2022). É uma etapa que foi adaptada no IAE-PF, mas não é a estimação final do filtro proposto.

---

#### Algoritmo 3 Algoritmo do IAE-MLE

---

```

1: Initialize:
    $\hat{\mathbf{x}}_0^+, \hat{\mathbf{P}}_0^+, \hat{\mathbf{R}}_0^+, \hat{\mathbf{Q}}_0^+$ 
2: for  $k = 1, 2, \dots, ts$  do
3:   Etapa de predição
4:    $\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^T + \hat{\mathbf{Q}}_{k-1}$ 
5:    $\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+)$  ▷ estado a priori
6:    $\hat{\mathbf{z}}_k^- = \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-)$  ▷ saída predita
7:    $\mathcal{J}_k = \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k^-$  ▷ sequência de inovação
8:    $\hat{\mathbf{C}}_{\mathcal{J}_k} = \frac{1}{M} \sum_{j=j_0}^k \mathcal{J}_j \mathcal{J}_j^T$ 
9:   Estimação adaptativa das matrizes de covariância e do ganho de Kalman:
10:  Etapa de correção
11:   $\hat{\mathbf{R}}_k = \hat{\mathbf{C}}_{\mathcal{J}_k} - \hat{\mathbf{H}}_k \hat{\mathbf{P}}_k^- \hat{\mathbf{H}}_k^T$ 
12:   $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \hat{\mathbf{R}}_k)^{-1}$ 
13:   $\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-$ 
14:   $\hat{\mathbf{Q}}_k = \mathbf{K}_k \hat{\mathbf{C}}_{\mathcal{J}_k} \mathbf{K}_k^T$ 
15:   $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \mathcal{J}_k$  ▷ estado estimado
16: end for

```

---

O Algoritmo IAE-MLE é inicializado com valores de estado, matriz de covariância de erro, matriz de covariância de ruído de medição e de processo,  $\hat{\mathbf{x}}_0^+$ ,  $\hat{\mathbf{P}}_0^+$ ,  $\hat{\mathbf{R}}_0^+$ ,  $\hat{\mathbf{Q}}_0^+$ , respectivamente (linha 1). O período de simulação é definido no laço apresentado nas linhas 2 e 16. O Algoritmo contém as duas etapas típicas do EKF, com a diferença que na etapa de predição (linhas 4 a 8) a janela de inovação,  $\mathcal{J}_k$  e a matriz de covariância de inovação,  $\hat{\mathbf{C}}_{\mathcal{J}_k}$  são incluídas. Além disso, na etapa de correção (ou atualização), as

matrizes de covariância e o ganho de Kalman,  $\hat{\mathbf{R}}_k$ ,  $\hat{\mathbf{P}}_k^+$ ,  $\hat{\mathbf{Q}}_k$  e  $\mathbf{K}_k$ , são calculados de forma adaptativa (linhas 11 a 14). A saída do filtro, sua estimação do estado, é mostrada na linha 15, e representada por  $\hat{\mathbf{x}}_k$ .

### 3.4 Filtro de Partículas baseado em IAE

O PF pode incorporar o IAE como forma de refinamento e robustez de sua estimativa, especialmente para medições muito ruidosas, enquanto ainda utiliza equações não lineares, aplica reamostragem e ponderação das amostras para determinar o valor final das estimativas. A filosofia do algoritmo IAE-PF (*Particle Filter based on Innovative Adaptive Estimation*, em inglês) é proposta nesta seção.

O IAE-PF toma como base o Algoritmo 3, do IAE-MLE, mas ajusta as linhas 5 e 6, de forma a utilizar as equações não lineares do sistema, em vez de aproximações, como faz o filtro EKF. O objetivo é uma estimação mais fiel baseada na teoria do PF. No IAE-PF, uma etapa de refinamento é incluída, a qual é explicada a partir desse ponto.

Primeiro, amostras,  $\chi_k^-$ , são geradas a partir da estimação  $\hat{\mathbf{x}}_k$ , o que funciona como uma distribuição *a priori* aperfeiçoada, pois a média é a saída do algoritmo IAE-MLE e o desvio-padrão a estimação da matriz de covariância de ruído de processo,  $\hat{\mathbf{Q}}_k$ , que é atualizada a cada iteração:

$$\chi_k^- \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{Q}}_k), \quad (3.30)$$

e um outro conjunto de amostras é gerado, relativo à saída do sistema,  $\mathbf{z}_k^+$ , em função de  $\chi_k^-$  e da estimação mais recente da matriz de covariância de ruído de medição  $\hat{\mathbf{R}}_k$ :

$$\mathbf{z}_k^+ \sim \mathcal{N}(\chi_k^-, \hat{\mathbf{R}}_k). \quad (3.31)$$

Dessa forma, há um refinamento da propagação do estado e a da medição recebida a cada iteração. O número de amostras,  $N$ , deve ser grande o bastante para que se represente adequadamente as distribuições e se evite o empobrecimento das amostras.

A partir da medição recebida e do conjunto de amostras de saída do sistema, é gerada, então, uma matriz de pesos,  $\mathbf{G}_k$ , através do cálculo da diferença entre a saída estimada e a observada, a qual é ponderada pela estimação mais recente da matriz de covariância de ruído de medição  $\hat{\mathbf{R}}_k$ :

$$\mathbf{G}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{z}_k^+; \mathbf{z}_k, \hat{\mathbf{R}}_k), \quad (3.32)$$

que em seguida é normalizada para tomar a forma de uma distribuição de probabilidade, como mostra a Equação (3.33)

$$\tilde{\mathbf{g}}_k^i = \frac{\mathbf{g}_k^i}{\sum_{i=1}^N \mathbf{g}_k^i} \quad (3.33)$$

onde  $\sum_i p(\tilde{\mathbf{g}}_k^i) = 1$ .

Após essa etapa, o limiar de descarte  $L$  é aplicado:

$$L = \frac{U(0, 1)}{N}, \quad (3.34)$$

onde  $U(0, 1)$  é uma distribuição aleatória uniforme entre 0 e 1. O papel desse limiar é descartar as partículas com menor peso, ou seja, as que têm menor probabilidade de representar o estado verdadeiro. Sua função foi obtida de modo empírico, embora baseada no critério sistemático (Alam & Gustafsson, 2020). Após a aplicação do limiar em testes computacionais, foi observado que havia uma redução do número de partículas, mas nunca um empobrecimento que comprometia a diversidade das partículas (nunca inferior a 60% de  $N$ ). Existem ainda outras técnicas utilizadas com o fim de seleção para o descarte, como as abordagens multinomial, estratificada e residual (Alam & Gustafsson, 2020).

Dado que os valores mais prováveis para as variáveis de estado do sistema estão disponíveis, com seus respectivos pesos, uma simples reamostragem replica os valores mais prováveis a partir dessa distribuição valor-peso, substituindo as que foram descartadas na etapa anterior.

É possível aplicar o filtro sem a etapa de reamostragem, no entanto, o resultado será menos preciso. A reamostragem ocorre com o auxílio da variável  $u$ , um valor aleatório entre 0 e 1 que serve como limiar de inclusão de pesos mais prováveis, e da variável  $csw$  que inicia com valor zero e soma seu valor anterior com o valor dos pesos calculados em (3.33).

$$csw = csw + \tilde{\mathbf{g}}^j \quad (3.35)$$

Quando  $csw$  atinge um valor maior ou igual a  $u$ , então o conjunto final de partículas mais prováveis,  $\chi_k^+$ , assume o valor da partícula em  $\chi_k^-$  que está sendo considerada no laço lógico do algoritmo. Esse processo é repetido até que as  $M$  partículas de  $\chi_k^+$  sejam preenchidas.

$$\chi_k^{+(i)} = \chi_k^{-(j)} \quad (3.36)$$

Por último, a partir de  $\chi_k^+$ , é obtida a estimação final do estado do sistema,  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ , como a média de  $\chi_k^+$ :

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \frac{\sum_{i=1}^N \chi_k^{+(i)}}{N}. \quad (3.37)$$

O valor final estimado será então utilizado para o cálculo *a priori* da próxima iteração do filtro.

A seguir, o Algoritmo 4, do filtro proposto IAE-PF.

**Algoritmo 4** Algoritmo do IAE-PF

---

```

1: Initialize:
    $\hat{\mathbf{x}}_0^+, \hat{\mathbf{P}}_0^+, \hat{\mathbf{R}}_0^+, \hat{\mathbf{Q}}_0^+, N$ 
2: for  $k = 1, 2, \dots, ts$  do
3:    $L = \frac{U(0,1)}{N}$  ▷ limiar de descarte
4:    $csw = 0$  ▷ soma cumulativa de pesos
5:   Etapa de predição
6:    $\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^T + \hat{\mathbf{Q}}_{k-1}$ 
7:    $\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k$  ▷ estado a priori
8:    $\hat{\mathbf{z}}_k^- = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k$  ▷ saída predita
9:    $\mathcal{J}_k = \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k^-$  ▷ sequência de inovação
10:   $\hat{\mathbf{C}}_{\mathcal{J}_k} = \frac{1}{M} \sum_{j=j_0}^k \mathcal{J}_j \mathcal{J}_j^T$ 
11:  Estimaco adaptativa das matrizes de covarincia e do ganho de Kalman
12:   $\hat{\mathbf{R}}_k = \hat{\mathbf{C}}_{\mathcal{J}_k} - \hat{\mathbf{H}}_k \hat{\mathbf{P}}_k^- \hat{\mathbf{H}}_k^T$ 
13:  Etapa de correo
14:   $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \hat{\mathbf{R}}_k)^{-1}$ 
15:   $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \mathcal{J}_k$  ▷ estimaco transitria
16:   $\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-$ 
17:   $\hat{\mathbf{Q}}_k = \mathbf{K}_k \hat{\mathbf{C}}_{\mathcal{J}_k} \mathbf{K}_k^T$ 
18:  Etapa de refinamento
19:   $\chi_k^- \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{Q}}_k)$  ▷ amostragem
20:   $\mathbf{z}_k^+ \sim \mathcal{N}(\chi_k^-, \hat{\mathbf{R}}_k)$  ▷ Estimaco de saída para as amostras
21:   $\mathbf{G}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{z}_k^+; \mathbf{z}_k; \hat{\mathbf{R}}_k)$ 
22:   $\tilde{\mathbf{g}}_k^i = \frac{\mathbf{g}_k^i}{\sum_{i=1}^N \mathbf{g}_k^i}$  ▷ normalização do vetor de pesos
23:  Descarte e Reamostragem
24:  for  $i = 1, 2, \dots, N$  do
25:    if  $\tilde{\mathbf{g}}_k^i < L$  then
26:       $\tilde{\mathbf{g}}_k^i = 0$ 
27:    end if
28:  end for
29:   $u = L \cdot N$  ▷ valor aleatório entre 0 e 1
30:  for  $j = 1, 2, \dots, N$  do
31:     $csw = csw + \tilde{\mathbf{g}}_k^j$ 
32:    if  $csw \geq u$  then
33:       $\chi_k^{+(i)} = \chi_k^{-(j)}$  ▷  $\chi_k^+$   o conjunto final de partículas mais prováveis
34:      Break
35:    end if
36:  end for
37:  Estimaco final de estado
38:   $\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \frac{\sum_{i=1}^N \chi_k^{+(i)}}{N}$  ▷ a média do conjunto das partículas mais prováveis
39: end for

```

---

O Algoritmo 4  inicializado de maneira semelhante ao Algoritmo 3, mas o número de partículas,  $N$ , precisa ser definido. As linhas 6-17 são calculadas de maneira idêntica ao algoritmo de IAE-MLE,  exceção das linhas 7 e 8, onde são usadas as expressões não lineares de sistema e medição. Essa primeira etapa gera uma saída  $\hat{\mathbf{x}}_k$  (linha 15), que será

utilizada na etapa de refinamento (linhas 19-36). A etapa de refinamento toma a estimação  $\hat{\mathbf{x}}_k$  como média e gera um conjunto de partículas *a priori*,  $\chi_k^-$ , utilizando também como parâmetro a última estimação da matriz de covariância de ruído de processo,  $\hat{\mathbf{Q}}_k$  (linha 17). A partir das linhas 20 e 21 é formado um conjunto de medições e pesos gerados em função da matriz de covariância de ruído de medição,  $\hat{\mathbf{R}}_k$ , conforme descrito na Equação (2.141). Os pesos obtidos são normalizados logo em seguida, na linha 22. Foi utilizado um limiar de descarte,  $L$ , (linha 3) a fim de desprezar as partículas com probabilidade mais baixa (linhas 24 a 28), sem no entanto empobrecer o conjunto (foi verificada computacionalmente a taxa de empobrecimento). As linhas de 29 a 36 apresentam o funcionamento descrito no Algoritmo 2, de um filtro de partículas com reamostragem, onde a variável  $csw$  é a soma acumulada dos pesos, necessária para obtenção de um novo conjunto formado com as partículas mais prováveis,  $\chi_k^{+(i)}$ . A estimação final do IAE-PF,  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ , é representada na linha 38, como a média do conjunto das partículas mais prováveis.

### 3.5 Considerações Finais

O Capítulo 3 apresentou a teoria da MLE como base para o método IAE, o qual é utilizado no IAE-PF. A base da teoria de filtro de partículas apresentada no Capítulo 2 é aplicada em conjunto com o IAE, e o detalhamento da operação do filtro é comentado para fins de esclarecimento e colaborações futuras. Por fim, o algoritmo do filtro proposto é exibido e comentado com detalhes. O Capítulo 4 mostrará problemas simulados e os resultados obtidos com a aplicação do IAE-PF, PF e EKF como forma de demonstrar o desempenho do primeiro e usar como base comparativa os dois últimos.

## 4 Simulações e Resultados

Esse Capítulo apresenta uma introdução sobre rastreamento, seguida dos critérios de avaliação adotados e exemplos de operação do filtro. Os exemplos da proposta IAE-PF foram feitos através de simulações realizadas em ambiente MATLAB™ e Simulink™. Os filtros EKF e PF foram utilizados como comparativos a fim de apresentar uma perspectiva mais completa de desempenho e vantagens do IAE-PF.

### 4.1 Introdução

O rastreamento de alvo é um elemento de um sistema mais amplo que realiza monitoramento, orientação, desvio de obstáculos, ou funções similares. A estrutura de tal sistema é usualmente apresentada na forma da Figura 15:

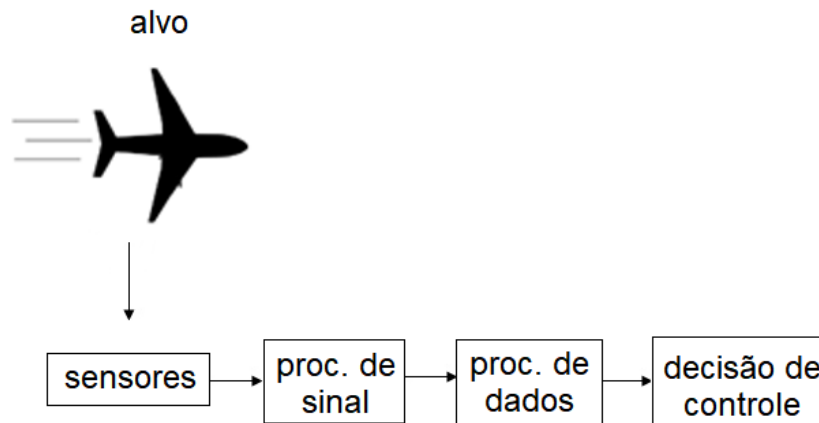


Figura 15 – Estrutura típica de um sistema de monitoramento.

Os sensores fornecem sinais que são canalizados para o subsistema de processamento de sinal, o qual gera medições em sua saída. O rastreamento é parte do subsistema de processamento de dados, cuja função é processar medições a fim de formar e manter rastreamentos. Um rastreamento é uma sequência de estimações de estado do alvo até o instante atual do sistema.

O estado do alvo consiste tipicamente de componentes cinemáticos (posição, velocidade, aceleração, etc.) e atributos (relação sinal-ruído do alvo, características espectrais, classe do alvo, etc.). As medições são observações corrompidas por ruído, relacionadas ao estado do alvo. Elas são tipicamente um resultado de um algoritmo de estimação/detecção no subsistema de processamento de sinal. A detecção é geralmente realizada com a limitação dos dados (a fim de reduzir os custos computacionais) e é



caracterizada pela probabilidade de detecção e a probabilidade de alarme falso. As medições cinemáticas incluem tipicamente a distância direta, azimute e elevação. Medições de atributos são, por exemplo, a potência do sinal recebido, uma imagem em baixa resolução do alvo, a frequência irradiada, a confiabilidade declarada, etc. As medições são coletadas por um ou múltiplos sensores. Detecções falsas e cenários com múltiplos alvos criam um nível adicional de complexidade nesse processo, devido à incerteza na medição. Alguns elementos comuns em sistemas de rastreamento incluem os blocos a seguir (Farina & Studer, 1985; Bar-Shalom & Fortmann, 1988; Blackman & Popoli, 1999):

- **Filtros de rastreamento.** O papel de um filtro de rastreamento é realizar a estimação recursiva do estado do alvo, dados: (1) a equação de estado do alvo; (2) a equação de medição; (3) medições originadas do alvo,  $\mathbf{z}_k$ . Os filtros de rastreamento mais comuns são os de coeficiente fixo (alfa-beta), o filtro de Kalman, o filtro de Kalman estendido e o filtro de partículas.
- **Lógica de Manobra.** Uma manobra pode ser descrita como uma mudança súbita na equação de movimentação dinâmica. Os segmentos não manobráveis da trajetória de um alvo são modelados por uma velocidade (aproximadamente) constante (Bar-Shalom et al., 2008). Para os segmentos manobráveis, há mais possibilidades de modelagem, tais como modelo de giro coordenado (Vargas et al., 2015), modelo de aceleração constante, e modelo de arrancada constante (Freitas, 2017).
- **Portões e associação de dados.** Esses dois componentes de um sistema de rastreamento servem para identificar a origem das medições, sendo um portão uma região de validação com tamanho variável. Eles realizam uma associação de um conjunto discreto de medições coletadas no instante  $k$  com o conjunto de trajetórias existentes. Uma medida típica de similaridade utilizada para associação de dados é a distância no domínio cinemático e/ou de atributos. Algoritmos comuns para associação de dados são o filtro de probabilidade conjunta de associação de dados (JPDA - *joint probabilistic data association*), rastreador multi-hipóteses (MHT - *multi-hypothesis tracker*), algoritmos de atribuição S-dimensionais (Blackman & Popoli, 1999), entre outros.
- **Gerenciamento da vida do rastreamento.** O *status* do rastreamento é comumente definido em termos de três estágios de vida: tentativa de rastreio, rastreio confirmado e rastreio deletado. Uma tentativa de rastreio é tipicamente iniciada com uma medição que não tenha sido associada a nenhuma das trajetórias já existentes. A confirmação do rastreio é baseada no número de atualizações realizadas em uma tentativa de rastreio ao longo de um período de tempo ou número de escaneamentos. O rastreio deletado, por sua vez, é baseado no intervalo de tempo ou número de escaneamentos sem atualização no rastreamento.

Como forma de avaliar o desempenho de um filtro aplicado a problemas de rastreamento, é importante que se aplique critérios de avaliação. Esses critérios devem ser amplamente utilizados para problemas similares proporcionando um comparativo facilitado com outros filtros e/ou outras publicações. Neste trabalho, duas métricas foram aplicadas com esses objetivos, as quais são apresentadas na Seção a seguir.

## 4.2 Critérios de Avaliação de Desempenho

Os índices de desempenho utilizados para medir e comparar os filtros são o RMSE (root mean-square error) e a diferença percentual, *DifPer*. A primeira métrica indica quão distante, em média, do valor verdadeiro do alvo a estimativa está ao longo do tempo de estimação. É calculada por

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i)^2}, \quad (4.1)$$

onde  $N$  é o número de iterações. O segundo índice de desempenho, o *DifPer*, é dado por

$$\text{DifPer} = \frac{|\text{RMSE}_{\text{PF}} - \text{RMSE}_{\text{EKF}}|}{\text{RMSE}_{\text{EKF}}} \cdot 100, \quad (4.2)$$

e mede quão maior ou menor é o valor de RMSE de um filtro em relação a outro. Neste caso, PF e IAE-PF são comparados com o EKF, que é o filtro mais comumente utilizado para sistemas não lineares.

A seguir, são apresentados alguns problemas de rastreamento simulados a fim de exemplificar a operação e o desempenho do IAE-PF, bem como compará-lo em relação a outros filtros.

## 4.3 Resultados de Simulação

Nesta seção, os problemas simulados são apresentados a fim de mensurar numericamente a eficiência da proposta e realizar um comparativo entre o IAE-PF e os filtros EKF e PF em cenários sem incerteza e com grande incerteza sobre as matrizes de covariância de ruído de processo e medição.

### 4.3.1 Problema Simulado 1

O problema apresentado na Seção 2.6, e ilustrado de forma elementar na Figura 16, é um problema de rastreamento de alvo móvel. São aplicações relevante para fins de compreensão e comparação, como mostrado por Kurz (2013). As equações e parâmetros são os mesmos apresentados na citada seção, entretanto, aqui o filtro IAE-PF foi aplicado, além de EKF e PF, para estimar a trajetória. Foram considerados dois cenários distintos:

o primeiro, sem incertezas quanto às matrizes de covariância de ruído de processo e de medição, ou seja, os filtros aplicam  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  em seus processamentos, e o segundo caso, onde a incerteza é mil vezes maior, isto é,  $10^3\mathbf{Q}$  e  $10^3\mathbf{R}$ .

O problema em questão gera uma trajetória a partir da função de propagação do estado, sendo a posição inicial do alvo móvel dada por  $\mathbf{x}_0 = 0, 1$ . Entretanto, foi feita a variação da semente do ruído de processo a fim de realizar uma simulação de Monte Carlo, na qual a operação de rastreamento foi feita vinte vezes, para obtenção da média dos valores de RMSE e *DifPer*.



Figura 16 – Representação da trajetória de um alvo móvel em deslocamento (Fonte: CanStockPhoto.com).

Recapitulando as equações de estado e de medição do problema:

$$x_k = \frac{1}{2}x_{k-1} + \frac{25x_{k-1}}{1 + x_{k-1}^2} + 8 \cos(1, 2(k - 1)) + w_k \quad (4.3)$$

$$z_k = \frac{1}{20}x_k^2 + v_k, \quad (4.4)$$

Os resultados são apresentados nas Figuras 17 e 18, e na Tabela 1 a seguir.

A Figura 17 representa o comparativo feito entre as estimações do estado verdadeiro feitas pelos filtros EKF, PF e IAE-PF para o caso sem incertezas nas matrizes de covariância de ruído de processo e de medição,  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ , respectivamente. É possível notar que o PF acompanha mais proximamente o alvo que os demais filtros.

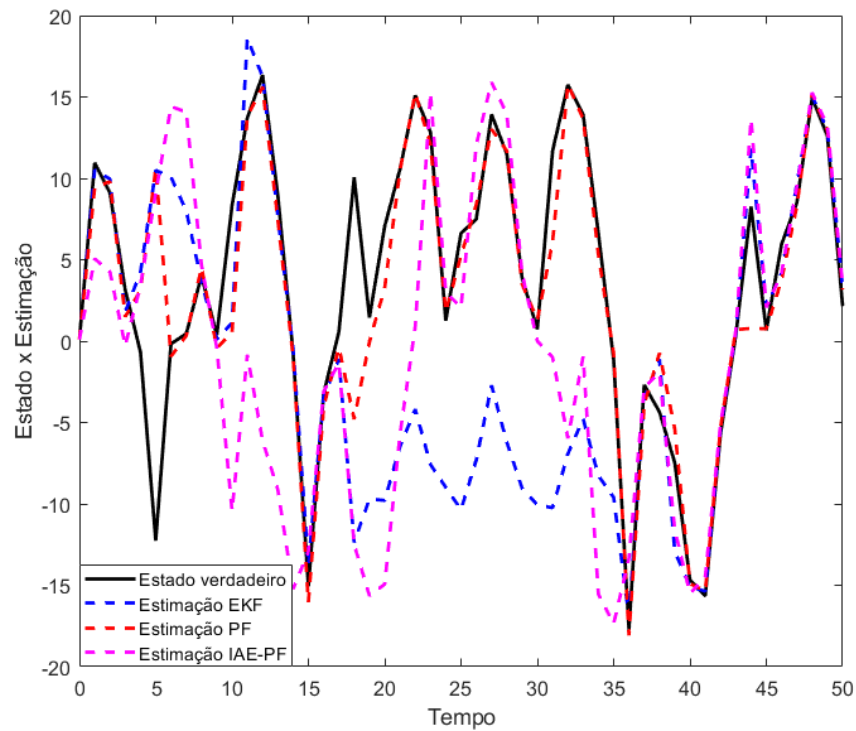


Figura 17 – Comparação entre as estimações do estado verdadeiro feitas pelos filtros EKF, PF e IAE-PF, para  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ . São apresentados: estado verdadeiro (preto), estimação EKF (azul), estimação PF (vermelho), estimação IAE-PF (magenta).

A Figura 18 apresenta o comparativo anterior, entre as estimações do estado verdadeiro feitas pelos filtros EKF, PF e IAE-PF, mas para o caso com incertezas nas matrizes de covariância de ruído de processo e de medição, de  $10^3\mathbf{Q}$  e  $10^3\mathbf{R}$ , respectivamente. É possível observar que dessa vez o IAE-PF é quem segue a trajetória do alvo mais proximamente do estado verdadeiro.

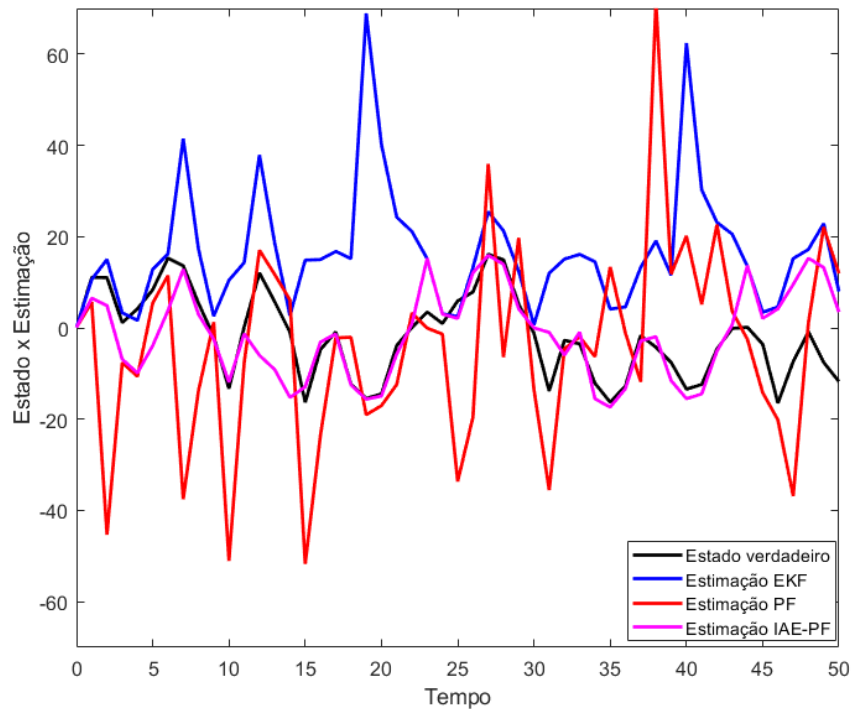


Figura 18 – Comparação entre as estimações do estado verdadeiro feitas pelos filtros EKF, PF e IAE-PF, para  $10^3\mathbf{Q}$  e  $10^3\mathbf{R}$ . São apresentados: estado verdadeiro (preto), estimção EKF (azul), estimção PF (vermelho), estimção IAE-PF (magenta).

A Tabela 1 traz os dados comparativos segundo as métricas adotadas. Pode ser observado que o desempenho do IAE-PF para o caso sem incertezas é 20,30% pior que o EKF, mas para o caso de grande incerteza, possui desempenho 78,97% superior ao EKF nas mesmas condições.

Tabela 1 – Índices de desempenho (RMSE e *DifPer*) para avaliação da estimção. Comparação dos filtros EKF, PF e IAE-PF para diferentes incertezas sobre as matrizes de covariância.

Filtro	$\mathbf{R}$ e $\mathbf{Q}$		$10^3\mathbf{R}$ e $10^3\mathbf{Q}$	
	RMSE	<i>DifPer</i>	RMSE	<i>DifPer</i>
EKF	8,48	-	40,56	-
PF	2,58	69,56%	22,74	43,95%
IAE-PF	10,21	20,30%	8,53	78,97%

O resultado do problema 1, verificado nas Figuras 17 e 18 e na Tabela 1, está de acordo com o esperado. Para os casos em que não há incerteza nas matrizes de covariância de ruído de processo e medição, os filtros clássicos possuem desempenho superior, entretanto,

quando a incerteza aumenta, o IAE-PF obtém grande vantagem sobre os outros filtros utilizados.

A seguir, o problema de rastreamento é apresentado em maior detalhes e com um grau de complexidade maior.

### 4.3.2 Problema Simulado 2

O rastreamento pode ser definido, segundo Patel & Thakore (2013), como uma ação pela qual a trajetória de um alvo móvel pode ser estimada. O rastreamento, em geral, é feito por meio de filtros e sensores, cujos dados são processados por algoritmos. O rastreamento de um alvo em movimento é a estimativa, baseada em medições, da distância e ângulo relativos à posição de um estimador, conforme explicado por Gustaffson et al. (2002) e mostrado na Figura 19. A finalidade dos filtros, segundo Kim (2020), é a estimativa de estados a partir de medições ruidosas, parciais ou totais.

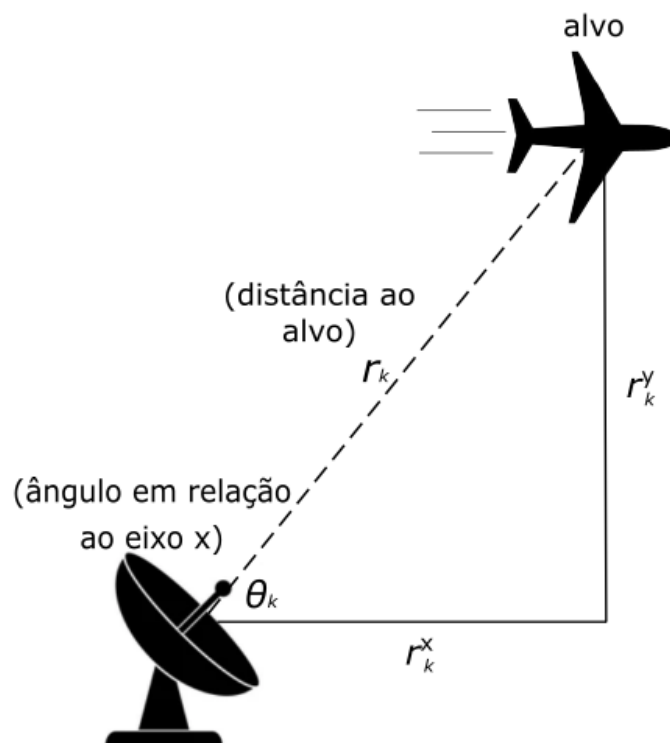


Figura 19 – Problema de rastreamento da posição alvo.

O modelo, ilustrado na Figura 20, consiste em duas partes principais. O primeiro é o modelo de aceleração do sistema, representado pelo bloco "aceleração do sistema", a partir do qual as velocidades nos eixos  $x$  e  $y$ , representadas por  $v_k^x$  e  $v_k^y$ , respectivamente, são obtidas, bem como as posições do alvo em ambos os eixos, com a adição de ruídos. A segunda parte do modelo é representada pelo bloco de filtragem e pelos elementos de medição. No filtro, os dados de entrada são processados e os cálculos são realizados de

acordo com o algoritmo para obter as estimativas desejadas. Para fins de comparação, são considerados EKF, PF e o IAE-PF proposto com um tempo de simulação de 60 s.

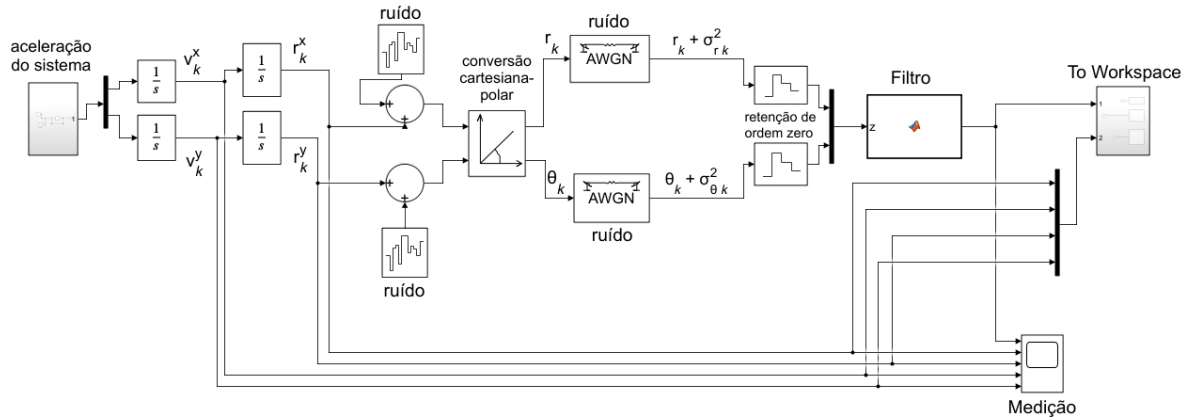


Figura 20 – Modelo simulado para rastreamento de um alvo com IAE-PF, com ruídos de processo e medição. Feito em ambiente Simulink™ e MATLAB™.

A cada instante de tempo, o alvo rastreado possui uma determinada distância e ângulo em relação ao observador, como a antena de radar que rastreia o alvo em movimento. A distância direta entre o observador e o alvo,  $r_k$ , é obtida a partir de suas componentes nos eixos  $x$  e  $y$ , representadas por  $r_k^x$  e  $r_k^y$ , respectivamente (neste exemplo nenhuma variação de altitude é considerada). O ângulo é gerado de forma semelhante, também por  $r_k^x$  e  $r_k^y$ , conforme pode ser visto na Equação (4.16).

O problema de rastreamento envolve estimar as componentes  $r_k^x$  e  $r_k^y$  do alvo móvel e também as componentes  $v_k^x$  e  $v_k^y$  de sua velocidade. Esses quatro estados devem ser estimados usando apenas medições ruidosas de distância e angulação,  $[r_k; \theta_k] + [\sigma_{r_k}^2; \sigma_{\theta_k}^2]$ , conforme a equação de medição (2.2), apresentada no Capítulo 2.

#### 4.3.2.1 Modelo cinemático

Modelos de estado cinemáticos são definidos ao designar-se uma derivação matemática da posição igual a zero. A movimentação do sistema é caracterizada por um polinômio no tempo, por isso são chamados de *modelos polinomiais*, e os correspondentes filtros de estimação de estado são às vezes chamados de filtros polinomiais (Bar-Shalom et al., 2008).

Tendo em vista que não é realista a consideração de que não há perturbações no modelo cinemático, é possível modelar essas entradas aleatórias como um ruído de processo branco contínuo (Bar-Shalom et al., 2008).

Em geral, a movimentação ao longo de cada coordenada é assumida desacoplada das outras coordenadas. Os ruídos relacionados às distintas coordenadas são assumidos mutuamente independentes com possibilidade de variâncias distintas.

Uma vez que as medições do estado são feitas em tempo discreto, são necessárias as correspondentes equações de estado em tempo discreto. Essa seção lidará com modelos cinemáticos em duas coordenadas genéricas.

Um objeto com velocidade constante que se mova em uma coordenada genérica  $\xi$  é descrito pela equação (Bar-Shalom et al., 2008)

$$\ddot{\xi}(t) = 0, \quad (4.5)$$

uma vez que a posição  $\xi(t)$  avança na ausência de ruído.

Na prática, a velocidade sofre ligeiras variações. Isso pode ser modelado por um ruído branco contínuo de média zero,  $\tilde{\nu}$ , como

$$\ddot{\xi}(t) = \tilde{\nu}(t), \quad (4.6)$$

onde

$$E[\tilde{\nu}(t)] = 0 \quad (4.7)$$

$$E[\tilde{\nu}(t)\tilde{\nu}(\tau)] = \tilde{q}(t)\delta(t - \tau) \quad (4.8)$$

e  $\tilde{q}$  é a intensidade do ruído de processo em tempo contínuo, o qual é sua densidade espectral de potência.

O vetor de estado correspondente para duas coordenadas, o qual é bidimensional para cada coordenada, é dado por (Bar-Shalom et al., 2008)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \dot{\xi}_1 \\ \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{posição no eixo x} \\ \text{velocidade no eixo x} \\ \text{posição no eixo y} \\ \text{velocidade no eixo y} \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Esse modelo é chamado de aceleração por ruído branco contínuo (CWNA - *continuous white noise acceleration*), ou modelo cinemático de segunda ordem (dupla integração).

A equação de estado em tempo contínuo é dada por (Bar-Shalom et al., 2008)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\tilde{\nu}(t), \quad (4.10)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

e

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$



A forma discretizada da equação de estado com período de amostragem  $T$  é dada por (Bar-Shalom et al., 2008)

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k \quad (4.13)$$

onde a matriz  $\mathbf{F}$  é

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Para o problema proposto, é feita a suposição que o alvo se mova com uma velocidade quase constante (Bar-Shalom et al., 2008). Assim, a equação de estado, em um curto período de tempo pode ser considerada conforme visto anteriormente (Bar-Shalom et al., 2008; Ristic et al., 2002):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} r_{k+1}^x \\ v_{k+1}^x \\ r_{k+1}^y \\ v_{k+1}^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_k^x \\ v_k^x \\ r_k^y \\ v_k^y \end{bmatrix} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k, \quad (4.15)$$

onde  $\mathbf{F}_k$  é a matriz necessária para a propagação de estado. A Equação (4.15) mostra que em um pequeno período de tempo,  $\Delta t$ , a posição varia através da velocidade de  $\Delta t \cdot$  (em ambas as direções,  $x$  e  $y$ ) e a velocidade permanece constante (em ambas as direções,  $x$  e  $y$ ).

A equação de atualização de medição é um pouco mais complexa. Os valores de distância e angulação verdadeiros,  $r_k$  e  $\theta_k$ , respectivamente, estão relacionadas às posições,  $r_k^x$  e  $r_k^y$  (Liu et al., 2022):

$$\begin{bmatrix} r_k \\ \theta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(r_k^x)^2 + (r_k^y)^2} \\ \arctan2(r_k^y, r_k^x) \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

onde  $\arctan2(\cdot)$  é definida em Siciliano (2009).

Ao realizar a derivação da Equação (4.16), o Jacobiano para a medição é obtido como

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \cos(\hat{\theta}_k) & 0 & \sin(\hat{\theta}_k) & 0 \\ -\sin(\hat{\theta}_k)/\hat{r}_k & 0 & \cos(\hat{\theta}_k)/\hat{r}_k & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

de onde se obtém as estimações,  $\hat{r}_k^x$  e  $\hat{r}_k^y$ , das posições. Embora o PF e o IAE-PF utilizem a própria função não linear de medição em seus algoritmos.

Para gerar o sinal de aceleração do sistema, foi considerada uma função de valor constante sujeita a perturbações aleatórias. A Equação (4.18) expressa a função de aceleração adotada neste trabalho:

$$a(t) = \int u(t) + n(t) - a(t) dt, \quad (4.18)$$

conforme mostra a Figura 21, onde  $a(t)$  é a aceleração do sistema,  $u(t)$  é uma função degrau e  $n(t)$  é um ruído branco com média 0 e variância 1.

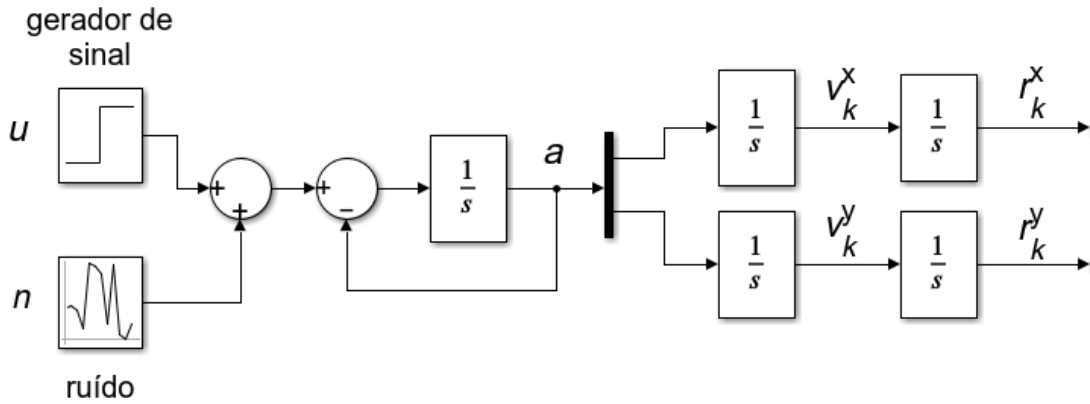


Figura 21 – Sistema de aceleração do alvo móvel com as decorrentes velocidades e posições nos eixos x e y.

No exemplo implementado, adaptado de Goddard (2011), o objeto viaja de noroeste para leste a uma velocidade de 100 m/s. As condições do problema são dadas na Tabela 2.

Tabela 2 – Condições iniciais do sistema e potência dos ruídos.

Variável	Valor
$r_0^x$	-1000 m
$r_0^y$	1000 m
$v_0^x$	100 m/s
$v_0^y$	0 m/s
Potência do ruído para $r_k^x$	10
Potência do ruído para $r_k^y$	0,1

#### 4.3.2.2 Trajetória verdadeira e estimações

Nesse problema, a trajetória do alvo móvel ocorre em um espaço bidimensional. As variáveis medidas são a distância ao alvo e a angulação em relação ao observador,  $r_k$  e  $\theta_k$ , respectivamente, ambas afetadas por ruído, conforme descrito na Equação (4.19). Para o problema de rastreamento sob consideração, os dados medidos são a distância e angulação verdadeiras,  $r_k$  e  $\theta_k$  (em metros e radianos, respectivamente), do objeto, corrompidos por ruído Gaussiano de média zero, e amostrados em intervalos de 0,1 s. O ruído de medição de distância tem uma variância de 100, enquanto o ruído de medição de ângulo tem uma variância de 0,005.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0,005 \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

O ruído de processo é representado pela matriz diagonal a seguir,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0,00033 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,00033 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,001 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Os valores utilizados no problema de rastreamento têm como base trabalhos similares (Kramer & Stubberud, 2005; Sadeghi & Moshiri, 2007).

O algoritmo IAE-PF proposto é avaliado em relação ao rastreamento de um alvo móvel. Para tanto, as estimativas geradas pelos filtros EKF, PF e IAE-PF são comparadas em função das métricas apresentadas na Seção 4.2, considerando os cenários sem incerteza e com incerteza sobre os parâmetros de ruído de processo e medição apresentados.

Nas Figuras 22 a 25, juntamente com as Tabelas 3 a 6, é apresentado um comparativo do desempenho de EKF, PF e IAE-PF com o valor verdadeiro do alvo para as quatro variáveis de estado: posição no eixo x ( $r_k^x$ ), velocidade no eixo x ( $v_k^x$ ), posição no eixo y ( $r_k^y$ ) e velocidade no eixo y ( $v_k^y$ ).

Na Figura 22 são comparadas a posição do alvo no eixo x ( $r_k^x$ ) e as estimativas dos filtros. As incertezas das matrizes de covariância de ruído de medição e de processo são, respectivamente,  $10^3\mathbf{R}$  e  $10^3\mathbf{Q}$ , enquanto os valores das matrizes do sistema permanecem  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{Q}$ . A figura mostra que os três filtros convergem, mas a Tabela 3 detalha que o IAE-PF possui menor RMSE, 31,05, sendo 75,48% menor se comparado com o EKF.

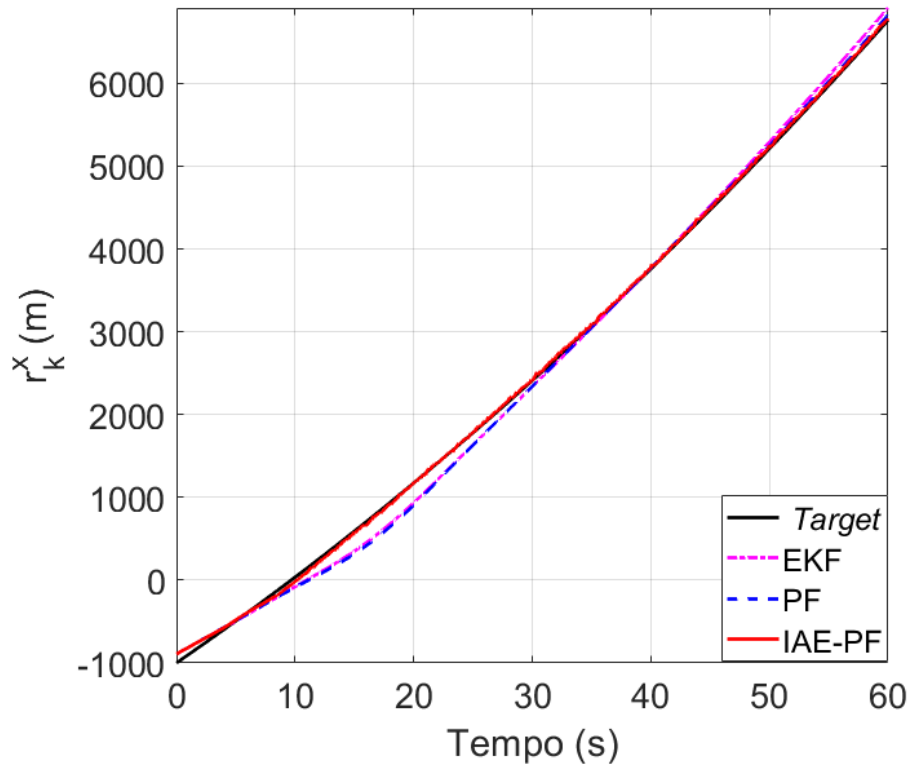


Figura 22 – Posição do alvo no eixo x ( $r_k^x$ ) para  $10^3\mathbf{R}$  e  $10^3\mathbf{Q}$ . *Target* (preto), estimativa EKF (magenta), estimativa PF (azul) e estimativa IAE-PF (vermelho).

Tabela 3 – Índices de desempenho para estimações da posição no eixo x ( $r_k^x$ ). Comparação dos filtros EKF, PF e IAE-PF em termos de RMSE e *DifPer* para diferentes incertezas sobre as matrizes de covariância.

Filtro	$\mathbf{R}$ e $\mathbf{Q}$		$10^3\mathbf{R}$ e $10^3\mathbf{Q}$	
	RMSE	<i>DifPer</i>	RMSE	<i>DifPer</i>
EKF	36,58	-	126,65	-
PF	35,53	2,87%	128,57	1,52%
IAE-PF	56,67	54,90%	31,05	75,48%

Na Figura 23, a seguir, é feito um comparativo entre a velocidade do alvo no eixo x ( $v_k^x$ ) e as estimativas dos filtros. As incertezas adotadas nas matrizes de covariância de ruído de medição e de processo são, respectivamente,  $10^3\mathbf{R}$  e  $10^3\mathbf{Q}$ . É possível observar a partir da figura que ao fim do tempo de estimação, o EKF e o PF atingem o valor do alvo, não obstante, pela Tabela 4, o valor RMSE do IAE-PF, 12,70, foi o menor dentre os três filtros, isto é, as estimativas foram mais próximas do valor verdadeiro na maior parte do tempo.

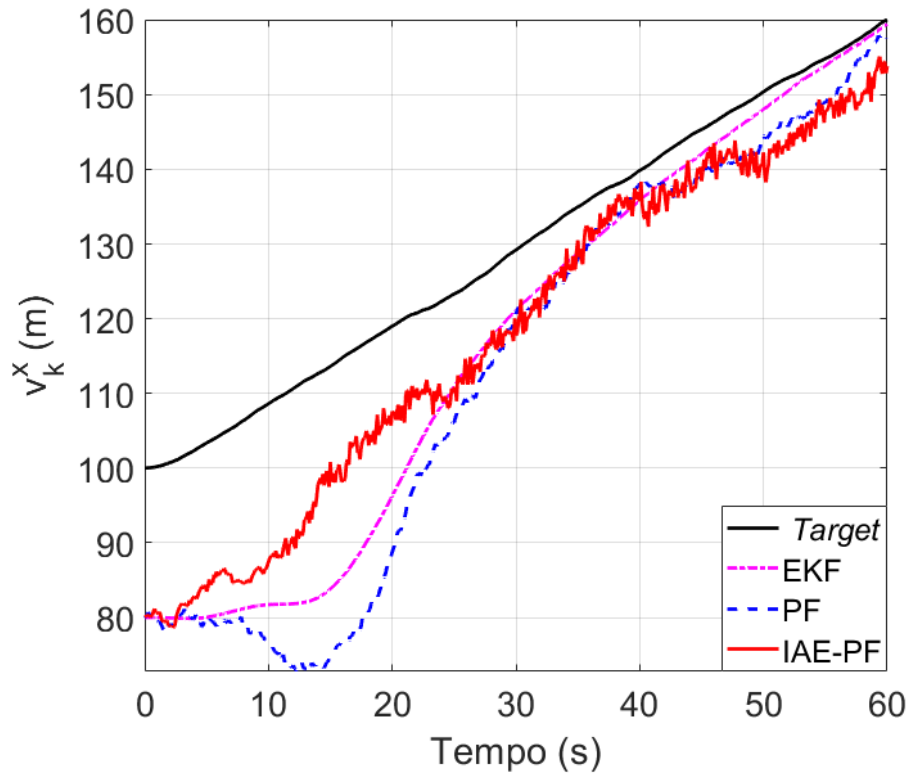


Figura 23 – Velocidade do alvo no eixo  $x$  ( $v_k^x$ ) para  $10^3\mathbf{R}$  e  $10^3\mathbf{Q}$ . *Target* (preto), estimativa EKF (magenta), estimativa PF (azul) e estimativa IAE-PF (vermelho).

Tabela 4 – Índices de desempenho para estimações da velocidade no eixo  $x$  ( $v_k^x$ ). Comparação dos filtros EKF, PF e IAE-PF em termos de RMSE e *DifPer* para diferentes incertezas sobre as matrizes de covariância.

Filtro	$\mathbf{R}$ e $\mathbf{Q}$		$10^3\mathbf{R}$ e $10^3\mathbf{Q}$	
	RMSE	<i>DifPer</i>	RMSE	<i>DifPer</i>
EKF	9,85	-	16,23	-
PF	9,73	1,22%	20,02	23,35%
IAE-PF	15,62	58,60%	12,70	21,75%

Na Figura 24 é apresentada a comparação da posição do alvo no eixo  $y$  ( $r_k^y$ ) com as estimativas dos filtros. As incertezas adotadas nas matrizes de covariância de ruído de medição e de processo são, respectivamente,  $10^3\mathbf{R}$  e  $10^3\mathbf{Q}$ . A figura mostra o IAE-PF estimando o valor do alvo com variação menor que ambos os outros filtros. A Tabela 5 informa que o RMSE do IAE-PF, em relação ao EKF, é 77,67% menor. Devem ser comparados ainda os casos sem e com incertezas, onde o EKF e o PF aumentaram seus valores de RMSE para mais do dobro, de 45,17 para 181,40 (EKF), e de 42,75 para 103,81 (PF), enquanto o IAE-PF reduziu o seu RMSE para menos da metade, de 106,03 para 40,50.

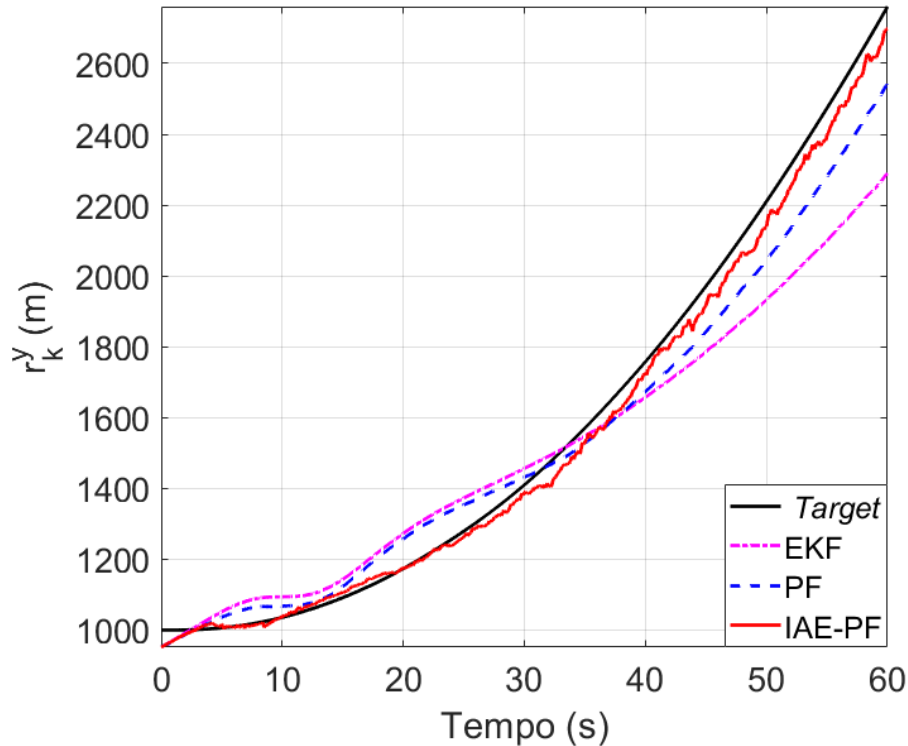


Figura 24 – Posição do alvo no eixo  $y$  ( $r_k^y$ ) para  $10^3\mathbf{R}$  e  $10^3\mathbf{Q}$ . *Target* (preto), estimativa EKF (magenta), estimativa PF (azul) e estimativa IAE-PF (vermelho).

Tabela 5 – Índices de desempenho para estimações da posição no eixo  $y$  ( $r_k^y$ ). Comparação dos filtros EKF, PF e IAE-PF em termos de RMSE e *DifPer* para diferentes incertezas sobre as matrizes de covariância.

Filtro	$\mathbf{R}$ e $\mathbf{Q}$		$10^3\mathbf{R}$ e $10^3\mathbf{Q}$	
	RMSE	<i>DifPer</i>	RMSE	<i>DifPer</i>
EKF	45,17	-	181,40	-
PF	42,75	5,36%	103,81	42,77%
IAE-PF	106,03	134,74%	40,50	77,67%

A seguir, a partir da Figura 25, é feito um comparativo da velocidade do alvo no eixo  $y$  ( $v_k^y$ ) com as estimativas dos filtros. As incertezas nas matrizes de covariância de ruído de medição e de processo são, respectivamente,  $10^3\mathbf{R}$  e  $10^3\mathbf{Q}$ . A figura mostra que o IAE-PF é o filtro que mais se aproxima do valor do alvo, embora nenhum convirja. Esse desempenho do IAE-PF é ratificado pela Tabela 6, a qual mostra que para as incertezas adotadas, o filtro proposto neste trabalho tem taxa de erro 48,17% menor que a do EKF.

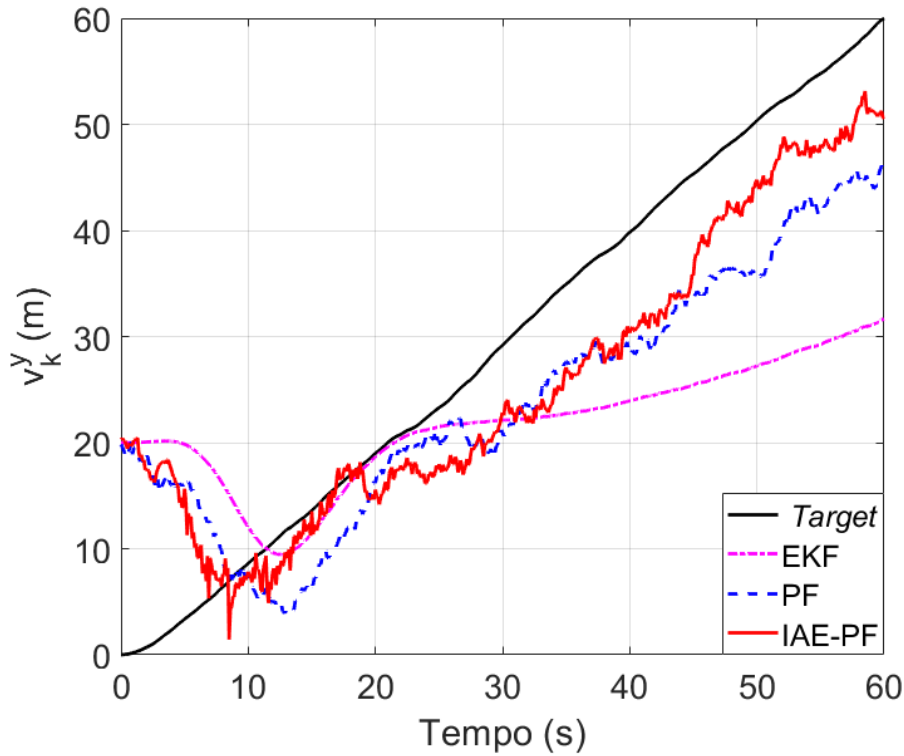


Figura 25 – Velocidade do alvo no eixo  $y$  ( $v_k^y$ ) para  $10^3\mathbf{R}$  e  $10^3\mathbf{Q}$ . *Target* (preto), estimativa EKF (magenta), estimativa PF (azul) e estimativa IAE-PF (vermelho).

Tabela 6 – Índices de desempenho para estimações da velocidade no eixo  $y$  ( $v_k^y$ ). Comparação dos filtros EKF, PF e IAE-PF em termos de RMSE e *DifPer* para diferentes incertezas sobre as matrizes de covariância.

Filtro	$\mathbf{R}$ e $\mathbf{Q}$		$10^3\mathbf{R}$ e $10^3\mathbf{Q}$	
	RMSE	<i>DifPer</i>	RMSE	<i>DifPer</i>
EKF	9,29	-	15,61	-
PF	9,08	2,26%	9,97	36,13%
IAE-PF	12,35	32,94%	8,09	48,17%

## 4.4 Considerações Finais

Neste Capítulo, foram apresentados exemplos de operação do IAE-PF. No primeiro caso, foram utilizadas equações não lineares para os modelos de estado e de medição; no segundo, a equação de propagação do estado é linearizada, enquanto a equação de medição utilizada é a não linear e, em ambos os problemas, dois cenários foram considerados: sem incertezas, matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ , e com grande incerteza,  $10^3\mathbf{R}$  e  $10^3\mathbf{Q}$ . O funcionamento do filtro não é desprezível para o cenário sem incertezas, mas o IAE-PF apresenta superioridade significativa para os cenários de maior incerteza. As simulações feitas e os resultados obtidos levaram às conclusões e propostas apresentadas no Capítulo 5.

## 5 Conclusões e Trabalhos Futuros

Os objetivos gerais e específicos deste trabalho foram alcançados. A metodologia proposta de um filtro de partículas baseado em estimação adaptativa inovativa foi apresentada em seus detalhes e fundamentos, além de analisada através de exemplos e comparativos com resultados numéricos.

Um modelo de filtragem para cenários de grande incerteza sobre as matrizes de covariância de ruído foi apresentado na forma de um algoritmo de filtro de partículas baseado em estimação adaptativa inovativa (IAE-PF). Os resultados obtidos pelo referido filtro, observados através de simulações, são promissores dadas as comparações realizadas com outros filtros.

A adaptabilidade da proposta foi inserida no algoritmo através da estimação adaptativa inovativa, baseada na teoria de máxima verossimilhança. Isso permite ao filtro contornar incertezas paramétricas que possam existir no processo de estimação.

A adaptação simultânea das matrizes de covariância de ruído pode, em alguns casos, prejudicar o desempenho de um filtro adaptativo, mas essa dupla adaptação através da técnica proposta neste trabalho mostrou ser benéfica, conforme os resultados apresentados no Capítulo 4.

O algoritmo IAE-PF foi avaliado em relação ao seu desempenho computacional. Foram comparados cenários sem e com incerteza sobre as estatísticas de ruído, e os resultados se mostraram animadores para futura implementação, com a possibilidade de embarcar o algoritmo em sistemas de estimação.

Assim, a metodologia de filtragem apresentada nessa dissertação, que resultou no desenvolvimento do algoritmo do IAE-PF, é promissora para aplicações de estimação em tempo real para cenários de grande incerteza sobre as matrizes de covariância de ruído de processo e medição.

Como trabalhos futuros, são propostos:

- Implementar em laboratório um sistema de rastreamento em 2D com o IAE-PF a fim de detectar as principais dificuldades de execução e comparar os resultados teóricos e práticos;
- Simular a aplicação da técnica proposta para um sistema de rastreamento em 3D a fim de que um modelo completo para qualquer alvo móvel seja obtido e para facilitar comparações com outros trabalhos;



- 
- Utilizar outras técnicas de reamostragem no IAE-PF a fim de comparar o desempenho em função dessas variações;
  - Aplicar variantes do método IAE, como EIAE (Enhanced IAE), RIAE (Robust IAE) ou OIAE (Optimal IAE), para avaliar eventuais ganhos de desempenho.

# APÊNDICE: Derivação Matemática do Filtro de Kalman Estendido

## Etapa de Predição

Para obtenção da predição do estado  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ , a função não linear do modelo de propagação é expandida em série de Taylor em torno da última estimacão  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  com termos até primeira ou segunda ordem, o que leva ao EKF de primeira ou segunda ordem, respectivamente. O EKF de segunda ordem é apresentado, a partir do qual o de primeira ordem é um caso particular.

A expansão em série de Taylor do modelo de estado até os termos de segunda ordem é

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}[k, \hat{\mathbf{x}}_{k|k}] \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) [\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_{k|k}] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_x} e_i [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}]^T \mathbf{f}_{xx}^i(\mathbf{x}_k) [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}] + \\ &+ HOT + \mathbf{v}_k, \end{aligned}$$

onde  $e_i$  é o  $i$ -ésimo vetor base cartesiano  $n_x$ -dimensional, e  $HOT$  são os termos de ordens superiores,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \triangleq [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)^T]^T |_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k}} \triangleq \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$$

é o jacobiano do vetor  $\mathbf{f}$ , calculado na última estimacão do estado. Similarmente,

$$\mathbf{f}_{xx}^i(\mathbf{x}_k) \triangleq [\nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}^i(\mathbf{x}_k)] |_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k}} \triangleq \frac{\partial^2 \mathbf{f}^i}{\partial \mathbf{x}^2}$$

é a Hessiana do  $i$ -ésimo componente de  $\mathbf{f}$ . Os elementos de  $HOT$  podem ser desprezados. É possível notar que, dado  $\mathbf{Z}_k$ , tanto o Jacobiano quanto a Hessiana são quantidades determinísticas, somente  $\mathbf{x}_k$  e  $\mathbf{v}_k$  são variáveis aleatórias.

O estado predito no instante  $k+1$  a partir do instante  $k$  é obtido pelo valor esperado da expansão em série de Taylor condicionada a  $\mathbf{Z}_k$ :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{f}[k, \hat{\mathbf{x}}_{k|k}] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_x} e_i \text{tr}[\mathbf{f}_{xx}^i(k) \mathbf{P}_{k|k}].$$

O erro de predição do estado é obtido pela subtração da equação acima, da expansão em série de Taylor, que leva a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \tilde{\mathbf{x}}_{k|k} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_x} e_i \{ \tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^T \mathbf{f}_{xx}^i(k) \tilde{\mathbf{x}}_{k|k} \\ &- \text{tr}[\mathbf{f}_{xx}^i(k) \mathbf{P}_{k|k}] \} + \mathbf{v}_k. \end{aligned}$$

Pela multiplicação da equação anterior por sua transposta e através do cálculo do valor esperado condicionado por  $\mathbf{Z}_k$ , a covariância de predição de estado é obtida (a matriz MSE):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1|k} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)^T \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_x} e_i e_j^T \text{tr}[\mathbf{f}_{xx}^i(k) \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{f}_{xx}^j \mathbf{P}_{k|k}] + \mathbf{Q}_k \end{aligned}$$

A predição do estado inclui o termo de correção de segunda ordem. Para o EKF de primeira ordem, esse termo é desprezado. A covariância da predição contém um termo de quarta ordem obtido quando o termo de segunda ordem é elevado ao quadrado.

## Etapa de Atualização

Similarmente, a predição de medição é, para o filtro de segunda ordem,

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} = \mathbf{h}_{k+1}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_x} e_i \text{tr}[\mathbf{h}_{xx}^i(k+1) \mathbf{P}_{k+1|k}].$$

A covariância de predição de medição ou covariância residual (matriz MSE) é

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{k+1} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1})^T \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_x} e_i e_j^T \text{tr}[\mathbf{h}_{xx}^i(k+1) \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{h}_{xx}^j(k+1) \mathbf{P}_{k+1|k}] + \mathbf{R}_{k+1}, \end{aligned}$$

onde o Jacobiano de  $\mathbf{h}$  é dado por

$$\mathbf{h}_x(\mathbf{x}_{k+1}) \triangleq [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1})^T]^T|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}} \triangleq \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}},$$

e a Hessiana de seu  $i$ -ésimo componente é

$$\mathbf{h}_{xx}^i(\mathbf{x}_{k+1}) \triangleq [\nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}}^T \mathbf{h}^i(\mathbf{x}_{k+1})]|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}} \triangleq \frac{\partial^2 \mathbf{h}^i}{\partial \mathbf{x}^2}.$$

Dessa forma, são obtidas as expressões de linearização para o EKF de segunda ordem, e para o de primeira ordem como caso especial.

# Referências

- Afshari, H.H., Gadsden, S.A., and Habibi, S. (2017). Gaussian filters for parameter and state estimation: A general review of theory and recent trends. *Signal Processing*, 135, pp. 218-238.
- Ahmed, R., Chen, Y., and Hassan, B. (2021). Optimal Spectrum Sensing in MIMO-Based Cognitive Radio Wireless Sensor Network (CR-WSN) Using GLRT With Noise Uncertainty at Low SNR. *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, vol. 136.
- Alam, S.A., and Gustafsson, O. (2020). Improved particle filter resampling architectures. *Journal of Signal Processing Systems*, 92, pp. 555-568.
- Améndola, C., Kohn, K., Reichenbach, P., and Seigal, A. (2021). Invariant Theory and Scaling Algorithms for Maximum Likelihood Estimation. *Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Journal on Applied Algebra and Geometry*, vol. 5, Issue 2.
- Anderson, B.D.O., and Moore, J.B. (1979). *Optimal Filtering*, Prentice-Hall.
- Angelova, D.S., Semerdjiev, T.A., Jilkov, V.P., and Semerdjiev, E.A. (2000). Application of Monte Carlo method for tracking maneuvering target in clutter. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 1851, pp. 1-9.
- Arasaratnam, I., Haykin, S., and Elliot, R.J. (2007). Discrete-time nonlinear filtering algorithms using gausshermite quadrature. *Proceedings of IEEE*, 95(5), 953–977.
- Arasaratnam, I., and Haykin, S. (2009). Cubature Kalman filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(6), 1254–1269.
- Arulampalam, M.S., Maskell, S., Gordon, N., and Clapp, T. (2002). A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian bayesian tracking. *IEEE Transactions on signal processing*, vol. 50(2), 174-188.
- Bakibillah, A.S.M., Tan, Y.H., Loo, J.Y., Tan, C.P., Kamal, M.A.S., and Pu, Z. (2022). Robust estimation of traffic density with missing data using an adaptive-R extended Kalman filter. *Applied Mathematics and Computation*, 421, 300.
- Bar-Shalom, Y., and Fortmann, T.E. (1988). *Tracking and Data Association*. Academic Press.
- Bar-Shalom, Y., Li, X.R., and Kirubarajan, T. (2008). *Estimation with applications to tracking and navigation: theory, algorithms and software*. New York: Wiley-Interscience.

- Blackman, S., and Popoli, R. (1999). *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*. Artech House.
- Boers, Y. and Driessen, H. (2002). Hybrid state estimation: a target tracking application. *Automatica*, vol. 38, pp. 2153-2158.
- Brown, R.G., and Hwang, P.Y.C. (2012). *Introduction to random signals and applied Kalman filtering with Matlab exercises*. Wiley.
- Clapp, T. and Godsill, S. (2001). Improvement strategies for Monte Carlo particle filters. *Sequential Monte Carlo methods in practice*. Springer.
- Deilamsalehy, H., and Havens, T.C. (2018). Fuzzy adaptive extended Kalman filter for robot 3D pose estimation. *International Journal of Intelligent Unmanned Systems*, 6(2), 50-68.
- Ding, J., and Zhang, W. (2021). Finite-time adaptive control for nonlinear systems with uncertain parameters based on the command filters. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 35, issue 9, pp. 1754-1767.
- Doucet, A., Godsill, S., and Andrieu, C. (2000). On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering. *Statistics and Computing*, vol. 10, no. 3, pp. 197-208.
- Doucet, A., de Freitas, N., and Gordon, N.J. (2001). *Sequential Monte Carlo methods in practice*. Springer.
- Doucet, A., Gordon, N., and Krishnamurthy, V. (2001). Particle filters for state estimation of jump Markov linear systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, pp. 613-624.
- Farina, A., and Studer, F.A. (1985). *Radar Data Processing*. Wiley.
- Fraser, C.T., and Ulrich, S. (2021). Adaptive extended Kalman filtering strategies for spacecraft formation relative navigation. *Acta Astronautica*, 178, 700-721.
- Freitas, E.J.R. (2015). Uma estratégia para navegação de robôs de serviço semiautônomos usando informação local e planejadores probabilísticos. *Computação e Robótica (UFMG)*, *Dissertação de mestrado*. No. 1012.
- Ghaleb, F.A., Zainal, A., Rassam, M.A., and Abraham, A. (2017). Robust innovation-based adaptive Kalman filter for INS/GPS land navigation. *Chinese Automation Congress*, pp. 374-379.
- Gilks, W.R., and Berzuini, C. (2001). Following a moving target - Monte Carlo inference for dynamic Bayesian models. *Journal of the Royal Statistical Society, B*, vol. 63, pp. 127-146.

- Giron-Sierra, J.M. (2017). *Digital Signal Processing with Matlab Examples, Volume 1: signals and data, filtering, non-stationary signals, modulation*, Springer.
- Goddard, P. (2011). *Using an extended Kalman filter for object tracking in Simulink*. [Online]. Goddard Consulting. Available at: <http://www.goddardconsulting.ca/simulink-extended-kalman-filter-tracking.html> [accessed 06 may 2022].
- Godsill, S. (2019). Particle filtering: the first 25 years and beyond. *ICASSP 2019 - 2019 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 7760-7764.
- Gordon, N.J., Salmond, D.J., and Smith, A.F.M. (1993). Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation, *IEE Proceedings*, 140(2), 107-113.
- Gustafsson, F., Gunnarsson, F., Bergman, N., Forssell, U., Jansson, J., Karlsson, R., and Nordlund, P.-J. (2002). Particle filters for positioning, navigation, and tracking. *IEEE Transactions on signal processing*, 50(2), 425-437.
- Han, J., Li, Y-L., and Wang, S. (2022). Delving into Probabilistic Uncertainty for Unsupervised Domain Adaptive Person Re-identification. *The Thirty-Sixth AAAI Conference on Artificial Intelligence*.
- Handschin J.E and Mayne, D.Q. (1969). Monte Carlo techniques to estimate the conditional expectation in multi-stage non-linear filtering. *International Journal of Control*, vol. 9, no. 5, pp. 547-559.
- Ho, Y.C., and Lee, R.C.K. (1964). A bayesian approach to problems in stochastic estimation and control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 9, pp. 333-339.
- Holmes, S. (2001). Maximum likelihood estimation. *Lecture Notes*. [<http://statweb.stanford.edu/susan/courses/s200/lect11.pdf>].
- Huber, P. (1964). Robust estimation of a location parameter. *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 35(1), 73-101.
- Hue, C., Cadre, J.L, and Pérez, P. (2002). Sequential Monte Carlo methods for multiple target tracking and data fusion. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, pp. 736-746.
- Jazwinski, A.H. (1970). *Process and Filtering Theory*. Academic Press.
- Julier, S.J., Uhlmann, J.K., and Durrant-Whyte, H.F. (1995). A new approach for filtering nonlinear systems. *Proceedings of the American Control Conference - ACC'95*, 3, 1628-1632.

- Julier, S., Uhlmann, J., and Durrant-White, H.F. (2000). A new method for nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators. *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 45, pp. 477-482.
- Julier, S. (2002). The scaled unscented transform. *Proceedings of American Control Conference*, pp. 4555-4559.
- Kailath, T., Sayed, A., and Hassibi, B. (2000). *Linear Estimation*. Prentice-Hall.
- Kalman, R.E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME – Journal of Basic Engineering*, 82(1), 35–45.
- Kang, J., Chen, X., Tao, Y., and Yau, S.S-T. (2022). Optimal transportation particle filter for linear filtering systems with correlated noises. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, (a ser publicado), DOI: 10.1109/TAES.2022.3166863.
- Kim, P.S. (2020). An alternative state estimation filtering algorithm for temporarily uncertain continuous time system. *Journal of Information Processing Systems*, 16(3), 588-598.
- Kitagawa, G. (1996). Monte Carlo filter and smoother for non-Gaussian non-linear state space models. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, vol. 5, no. 1, pp. 1-25.
- Kong, A., Liu, J.S., and Wong, W.H. (1994). Sequential imputations and Bayesian missing data problems. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 89, no. 425, pp. 278-288.
- Kramer, K.A., and Stubberud, S.C. (2005). Impact time and point predicted using a neural extended Kalman filter. *2005 International Conference on Intelligent Sensors, Sensor Networks and Information Processing*, pp. 199-204.
- Kurz, G., Faion, F., and Hanebeck, U.D. (2014). Constrained object tracking on compact one-dimensional manifolds based on directional statistics. *International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation*, pp. 1-9.
- Lefebvre, T., Bruynickx, H., and Schutter, J.D. (2001). Kalman filters for nonlinear systems: a comparison of performance. *Tech. Rep. 01R033*, Katholieke Universiteit Leuven.
- Lefebvre, T., Bruynickx, H., and Schutter, J.D. (2002). Comment on 'a new method for nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators'. *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 47, pp. 1406-1408.
- Liu, J.S., and Chen, R. (1998). Sequential Monte Carlo methods for dynamical systems. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 93, pp. 1032-1044.

- Liu, Z., Chen, Y., and Lu, Y. (2022). Mid-state Kalman filter for nonlinear problems. *Sensors*, 22(4), 1302.
- Lu, X., Li, F., Tang, J., Chai, Z., and Hu, M. (2022). A new performance index for measuring the effect of single target tracking with Kalman particle filter. *International Journal of Modern Physics C*.
- Ma, L., Cao, N., Feng, X., Zhang, J., and Yan, J. (2022). Indoor positioning algorithm based on reconstructed observation model and particle filter. *ISPRS International Journal of Geo-Information*, 11, 71.
- Mai, A.T., Bastin, F., and Toulouse, M. (2014). On optimization algorithms for maximum likelihood estimation. *CIRRELT 2014-64*.
- Maybeck, P.S. (1982). Stochastic Models, Estimation and Control, Vol. 2, *Academic Press*.
- Mohamed, A.H., and Schwarz, K.P. (1999). Adaptive Kalman filtering for INS/GPS. *Journal of Geodesy*, 73(4), 193–203.
- Mohler, R.R. (1991). *Nonlinear systems: dynamics and control*. Prentice-Hall.
- Musso, C., Oudjane, N., and LeGland, F. (2001). Improving regularised particle filter. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Springer.
- Myung, I.J. (2003). Tutorial on maximum likelihood estimation. *Journal of Mathematical Psychology*, vol. 47, issue 1, pp. 90-100.
- Norgaard, M., Poulsen, N.K., and Ravn, O. (2000). New developments in state estimation of nonlinear systems. *Automatica*, vol. 36, pp. 1627-1638.
- Oudjane, N., and Musso, C. (2000). Progressive correction for regularized particle filters. *Proceeding of the 3rd International Conference on Information Fusion*, pp. THB2/10-THB2/17 vol. 2.
- Özkan, E., Smídl, V., Saha, S., Lundquist, C., and Gustafsson, F. (2013). Marginalized adaptive particle filtering for nonlinear models with unknown time-varying noise parameters. *Automatica*, 49, 1566-1575.
- Patel, H.A., and Thakore, D.G. (2013). Moving object tracking using Kalman filter. *International Journal of Computer Science and Mobile Computing - IJCSMC*, 2(4), 326–332.
- Pitt, M., and Shephard, N. (1999). Filtering via simulation: auxiliary particle filters. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 94, no. 446, pp. 590-599.



- R. van der Merwe, A., Doucet, A., de Freitas, N., and Wan, E. (2000). The unscented particle filter. *Advances in Neural Information Processing Systems 13 (NIPS)*. Tech. Rep. CUED/F-INFENG/TR380, Cambridge University Engineering Department.
- Ranno, M.M., de Souza, F.C., and Serra, G.L. (2020). Maximum Likelihood-Based Fuzzy Adaptive Kalman Filter Applied to State Estimation of Permanent Magnet Synchronous Motors. In *S. Khalid (Ed.), Applications of Artificial Intelligence in Electrical Engineering*, IGI Global, pp. 23-50.
- Ranno, M.M., de Souza, F.C., and Serra, G.L. (2022). Interval Type-2 Mamdani Fuzzy Innovative Adaptive Extended Kalman Filter Based on Maximum Likelihood Applied to State Estimation. *a ser publicado pela Elsevier*.
- Ristic, B., Arulampalam, S. and Gordon, N. (2003). *Beyond the Kalman filter: Particle filters for tracking applications*. Artech house.
- Robert, C.P., and Casella, G. (1999). *Monte Carlo Statistical Methods*, Springer.
- Sadeghi, B., and Moshiri, B. (2007). Second-order EKF and unscented Kalman filter fusion for tracking maneuvering targets. *2007 International Conference on Information Reuse and Integration*, 514-519.
- Schei, T.S. (1997). A finite-difference method for linearisation in nonlinear estimation algorithms. *Automatica*, vol. 33, no. 11, pp. 2053-2058.
- Shi, Q., Liu, M., and Hang, L. (2021). A novel distribution system state estimator based on robust cubature particle filter used for non-gaussian noise and bad data scenarios. *IET Generation, Transmission & Distribution*, vol. 16, 1385-1399.
- Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., and Oriolo, G. (2009). *Robotics: modelling, planning and control*. Springer.
- Simon, D. (2006). *Optimal state estimation: Kalman,  $H_\infty$ , and nonlinear approaches*. Wiley-Interscience.
- Sullivant, S. (2018). Algebraic Statistics. *Graduate Studies in Mathematics*, vol. 194.
- Sumithra, S., Vadivel, R. (2021). An optimal innovation based adaptive estimation Kalman filter for accurate positioning in a vehicular ad-hoc networking. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, Vol. 31, No. 1, 45–57.
- Theodoridis, S. (2020). *Machine Learning: a bayesian and optimization perspective*, Academic Press.
- Thrun, S., Burgard, W., and Fox, D. (2005). *Probabilistic Robotics*. MIT Press.

- Tseng, C-H., Chang, C-W., and Jwo, D-J. (2011). Fuzzy adaptive interacting multiple model nonlinear filter for integrated navigation sensor fusion. *Sensors*, 11(2), 2090–2111.
- Vargas, M.R, Assane, C.C., Oliveira, R.L., and Lima, B.P. (2015). Estratégias de acompanhamento de múltiplos alvos: uma comparação entre as abordagens de associação de dados MHT e redes neurais. *Simpósio de Pesquisa Operacional e Logística da Marinha*.
- Wan, E., and Merwe, R. van der. (2001). “*The unscented Kalman filter*” in *Kalman Filtering and Neural Networks*, edited by Haykin, S. New York: John Wiley & Sons.
- Wang, F., Zhang, J., Lin, B., and Li, X. (2018). Two stage particle filter for nonlinear bayesian estimation. *IEEE Access*, vol. 6, pp. 13803-13809.
- Woo, R., Yang, E-J., and Seo, D-W. (2019). A Fuzzy-innovation-based adaptive Kalman filter for enhanced vehicle positioning in dense urban environments. *Sensors*, 19(5), 1142.
- Xie, D., Jiang, J., Wu, J., Yan, P., Tang, Y., Zhang, C., and Liu, J. (2022). A robust GNSS/PDR integration scheme with GRU-based zero-velocity detection for mass-pedestrians. *Remote sensing*, 14, 300.
- Yang, Y., Aziz Bhourri, M., and Perdikaris, P. (2020). Bayesian differential programming for robust systems identification under uncertainty. *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 476, Issue 2243.
- Zhang, H., Xi, R., Wang, Y., Sun, S., and Sun, J. (2022). Event-Triggered Adaptive Tracking Control for Random Systems With Coexisting Parametric Uncertainties and Severe Nonlinearities. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 67, issue 4, pp. 2011-2018.
- ZhiWen, X., XiaoPing, H., and JunXiang, L. (2013). Improved vehicle positioning algorithm using enhanced innovation-based adaptive Kalman filter. *Pervasive and Mobile Computing*, vol. 40.