



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PPGMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CLAUDOMIRO AGUIAR DA CUNHA

ACESSIBILIDADE E ESTABILIDADE ERGÓDICA

São Luís - MA

2021

CLAUDOMIRO AGUIAR DA CUNHA

ACESSIBILIDADE E ESTABILIDADE ERGÓDICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Santana Campos
Costa

São Luís - MA

2021

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Aguiar da Cunha, Claudomiro.

Acessibilidade e estabilidade ergódica / Claudomiro
Aguiar da Cunha. - 2021.
98 f.

Orientador(a): José Santana Campos Costa.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em
Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São
Luís, 2021.

1. Acessibilidade estável. 2. Difeomorfismo
Parcialmente Hiperbólico. 3. Estabilidade ergódica. I.
Santana Campos Costa, José. II. Título.

CLAUDOMIRO AGUIAR DA CUNHA

ACESSIBILIDADE E ESTABILIDADE ERGÓDICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Santana Campos Costa (Orientador)
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Fernando Pereira Micena
Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI

Prof. Dr. Giovane Ferreira Silva
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

*À minha amada esposa, Cleidiana
Aguilar, cuja dedicação e carinho
nunca a mim faltaram, dedico*

Agradecimentos

Primeiro a Deus por me dá saúde e conhecimento, nunca me deixando se desviar de seus caminhos.

Aos meus pais que sempre estiveram comigo, me apoiando em tudo quanto precisei. A minha (única) irmã Débora Raquel pelo imenso carinho a mim.

À minha esposa amada e companheira Cleidiana por entender os momentos de minha ausência (mesmo estando sempre comigo), por sempre cuidar de mim e por sempre me apoiar em busca dos meus sonhos.

Aos meus amigos de graduação Tom Victor, João Augusto, Caio Vinicius, Edmundo, Sandro Mota, Bruno Pereira, Belyt Andrade, Ariane Lins e Warley Teixeira.

À todos os meus amigos de pós-graduação, em especial, a Roclilson Abreu, Denilson Nobre, Bruno Pereira, Osvaldo Mesquita, Stanley Protázio, Beatriz Catarene, Marisa Lemos, Marcus, Jeiferson e a Rafael Soares, por me ajudarem a enriquecer o conhecimento nas discussões do dia-a-dia.

À Universidade Federal do Maranhão e ao Departamento de Matemática por disponibilizarem estrutura material. A todos os professores do programa de Pós-Graduação, em especial, para prof. Marcos Antônio, prof. Ivaldo Nunes, prof. Pedro Apoliano, Profa. Dra. Sandra Neto, Profa. Vanessa Ramos, prof. Marão e prof. Giovane, os quais tive o prazer de cursar as disciplinas do mestrado.

De Forma muito especial, ao meu orientador e amigo prof. Dr. José Santana Campos Costa pela paciência, dedicação e cuidado em ensinar ricas lições, desde o início deste trabalho, que vão além das aulas de orientações; mais ainda, pela motivação ao aprimoramento contínuo.

À CAPES pelo apoio financeiro, o qual foi de suma importância para a finalização dessa etapa.

*As leis da Natureza nada mais são
que pensamentos matemáticos de
Deus*

(Johannes Kepler)

Resumo

Esta dissertação tem como principal objetivo estudar a propriedade de acessibilidade estável de um C^r -difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Estudaremos como essa propriedade implica em ergodicidade e mais, estabilidade ergódica. Veremos que existe um conjunto C^1 aberto e denso de difeomorfismos acessíveis no espaço dos C^r -difeomorfismos parcialmente hiperbólicos com $r \geq 1$. Na parte final do capítulo 2 veremos que o mesmo resultado vale para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos simpléticos.

Palavras-chave: Difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Acessibilidade Estável. Estabilidade ergódica.

Abstract

This dissertation aims to study of the property of stable accessibility of a partially hyperbolic C^r -diffeomorphism. We will study how this property implies ergodicity and more, ergodic stability. We will see that exist an open and dense set of diffeomorphism accessible in the space of the partially hyperbolic C^r -diffeomorphism with $r \geq 1$. We will also see that the same result is valid for partially hyperbolic diffeomorphism symplectic.

Keywords: Partially Hiperbolic Difeomorphism. Stable Accessibility. Ergodic stability.

Lista de Figuras

1.1	Orbita de f	25
1.2	Conjugação do Teorema de Hartman-Grobman	26
1.3	λ -Lema	30
1.4	Construção da ferradura	31
1.5	Ferradura em torno de um ponto homoclínico	33
1.6	Conjunto hiperbólico formado pela órbita de um ponto homoclínico união com p	33
1.7	Folheações	35
1.8	Aplicação holonomia	41
2.1	Um us -caminho conectando os pontos p e q	46
2.2	us -caminho conectando $U_r(x_i)$ a $M \setminus \cup U_r(x_i)$	56
2.3	us -caminho conectando q_1 a q_2	56
2.4	Um us -caminho conectando $\frac{1}{2}D_i$ a $\frac{1}{2}D_j$	58
2.5	f é acessível módulo $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_4\}$	58
2.6	f é acessível módulo $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_4\}$ caso $q \notin A_r$	59
2.7	A Folheação \mathcal{F}_2 está ϵ (C^0 -) próximo de \mathcal{F}_1	65
2.8	Interseção de $g^n(V)$ com $\mathcal{W}_g^s(g^n(p))$ usando a família de cones $K^{cu}(p)$	66
2.9	Holonomia de $W^{cs}(p)$ em $W^{cs}(q)$	68
2.10	θ - acessibilidade de g	69
2.11	Argumento quadrilateral de Brin	70
2.12	Homotopia de q a $H^i(1, q)$	72

Notações

\mathcal{W} - Folheação de M .

W - Folha da folheação \mathcal{W}

\mathcal{W}^s - Folheação estável.

\mathcal{W}^u - Folheação instável.

W^σ - Folha da folheação \mathcal{W}^σ , com $\sigma = s, u$.

W_x^s - Variedade estável global de x .

W_x^u - Variedade Instável global de x .

$W_{loc}^s(p)$ - Conjunto estável local de p .

$W_{loc}^u(p)$ - Conjunto instável local de p .

$\widetilde{\mathcal{W}}_p^s$ - Folheação de classe C^∞ tangente ao espaço estável \widetilde{E}^s

$\widetilde{\mathcal{W}}_p^u$ - Folheação de classe C^∞ tangente ao espaço instável \widetilde{E}^u

$\widetilde{\mathcal{W}}_p^{cs}$ - Folheação de classe C^∞ tangente ao espaço $\widetilde{E}^c \oplus \widetilde{E}^s$

$\widetilde{\mathcal{W}}_p^{cu}$ - Folheação de classe C^∞ tangente ao espaço $\widetilde{E}^c \oplus \widetilde{E}^u$

$T\mathcal{W}$ - Fibrado tangente da folheação \mathcal{W} .

E^s - Espaço estável.

\widetilde{E}^s - Espaço estável da C^∞ -decomposição $T\varphi_p(\mathbb{R}^s \oplus \mathbb{R}^c \oplus \mathbb{R}^u)$.

E^u - Espaço instável.

\widetilde{E}^u - Espaço instável da C^∞ -decomposição $T\varphi_p(\mathbb{R}^s \oplus \mathbb{R}^c \oplus \mathbb{R}^u)$.

E^c - Espaço central.

\widetilde{E}^c - Espaço central da C^∞ -decomposição $T\varphi_p(\mathbb{R}^s \oplus \mathbb{R}^c \oplus \mathbb{R}^u)$.

$\Omega(f)$ - Conjunto dos pontos não-errantes.

$\text{Per}(f)$ - Conjunto dos pontos periódicos de f .

$\omega_f(x)$ - Conjunto de todos os pontos de acumulação da órbita $\{x_0, x_1, \dots\}$.
 $\mathcal{O}^+(x)$ - Órbita futura de x .
 $\mathcal{O}^-(x)$ - Órbita passada de x .
 $Diff^r$ - Conjunto dos difeomorfismos de classe C^r de M .
 M - Variedade Riemanniana.
 T_pM - Espaço tangente.
 T_p^*M - Espaço cotangente.
 $\mathcal{C}(p)$ - Família de curvas $c : I \rightarrow M$, com $I \subset \mathbb{R}$.
 $[c]$ - Classe de equivalência da curva $c \in \mathcal{C}(p)$.
 φ_α - Carta local.
 $T\varphi_\alpha(p)$ - Diferencial da carta local no ponto p .
 TM - Fibrado tangente da variedade M .
 T^*M - Fibrado cotangente da variedade M .
 ξ - Funcional linear
 ξ_t^i - Fluxos que preservam volume de classe C^∞ com $i = 1, \dots, c$.
 Λ - Conjunto hiperbólico.
 τ_t^u - Aplicação holonomia enviando folhas de $\widetilde{\mathcal{W}}^{cs}$ em folhas de $\widetilde{\mathcal{W}}^{cs}$.
 τ_t^s - Aplicação holonomia enviando folhas de $\widetilde{\mathcal{W}}^{cu}$ em folhas de $\widetilde{\mathcal{W}}^{cu}$.
 ζ_t^i - Fluxos parciais tangentes as folhas de $\widetilde{\mathcal{W}}^c$, para $i = 1, \dots, c$.
 $\overline{\cap}$ - Interseção transversal
 $\mathcal{P}H^r$ - Conjunto dos C^r - difeomorfismos parcialmente hiperbólicos
 $\mathcal{P}H_\mu^r$ - Conjunto dos C^r - difeomorfismo parcialmente hiperbólicos que preservam a medida μ .
 $\mathcal{P}(M)$ - Conjunto das partes de M .
 \mathcal{X} - Subconjunto de $\mathcal{P}(M)$.
 D - Disco c -admissível.

\mathcal{D} - Família de discos c -admissíveis.

$\mathcal{K}(x)$ - Família de variedades locais tais que $x \in B(x, r)$

$V_\rho(p)$ - Imagem da bola $B^c(0, \rho)$ por φ_α

$m(Tf)$ - Inverso da norma de $T^{-1}f$

$\bar{a}_p(r)$ - Máximo da norma de $T_q f|_{E^s(q)}$, com $q \in B_r(p)$.

$\bar{b}_p(r)$ - Mínimo de $m(T_q f|_{E^s(q)})$, com $q \in B_r(p)$.

$\bar{B}_p(r)$ - Máximo da norma de $T_q f|_{E^c(q)}$, com $q \in B_r(p)$.

$\bar{A}_p(r)$ - Mínimo de $m(T_q f|_{E^u(q)})$, com $q \in B_r(p)$.

K^{cu} - Família de cones em torno de $E^u \oplus E^c$.

d_p - Métrica de caminhos.

$N_r(D)$ - Vizinhança tubular do disco c -admissível D .

\angle_q - Função ângulo no ponto q .

ω - Forma diferenciável

\mathfrak{G} - Simplectomorfismo.

\wedge - Produto wedge.

$\mathcal{X}^i, \mathcal{Y}^i$ - Campos de vetores Hamiltonianos.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Lista de Figuras	i
Introdução	14
1 Preliminares	18
1.1 Variedade Diferenciável	18
1.1.1 Espaço tangente e aplicação derivada	19
1.1.2 Espaço cotangente e formas diferenciais	20
1.1.3 Variedades Riemannianas	22
1.2 Dinâmica Hiperbólica	22
1.3 Folheação	34
1.4 Dinâmica Parcialmente Hiperbólica	36
1.4.1 A aplicação holonomia	40
1.5 Teoria Ergódica	40
2 Acessibilidade	46
2.1 Demonstração do Teorema 2.1	51
2.2 Acessibilidade Global	55
2.3 Acessibilidade Local	67

2.3.1	Um critério para acessibilidade estável	69
2.3.2	Construção da Perturbação	74
2.4	Caso simplético	83
3	Ergodicidade Estável	89
4	Conclusões	95
	Bibliografia	96

Introdução

Uma dinâmica é hiperbólica se o espaço tangente se decompõe em dois subespaços: Um que contrai e outro que expande os vetores, chamados espaço estável e espaço instável, respectivamente. Essa dissertação se propõe a estudar a propriedade de acessibilidade no espaço dos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos: há fortes direções invariantes de contração e forte expansão, mas uma direção central (chamada espaço central) também aparece. Desde então, a área tornou-se bastante ativa e muitos exemplos ergódicos de forma estável apareceram. Faremos uma abordagem sobre o que já foi feito em relação à acessibilidade, quais outras propriedades está relacionada, quais consequências e o que ainda está em aberto. Além disso, veremos na segunda parte do trabalho um estudo sobre como ergodicidade estável está relacionada com a acessibilidade

Os difeomorfismos parcialmente hiperbólicos são semelhantes aos *difeomorfismos de Anosov* no sentido de possuírem as direções hiperbólicas invariantes. No entanto, os difeomorfismos parcialmente hiperbólicos podem possuir direções não-hiperbólicas invariantes.

Estamos interessados em estudar a propriedade de acessibilidade para um difeomorfismo parcialmente hiperbólico: quaisquer dois pontos da variedade pode ser conectados por um caminho formado por arcos que se intersectam, onde cada arco pertence a uma variedade estável ou instável alternadamente.

A acessibilidade é uma ferramenta poderosa que permite dizer quando um sistema dinâmico é ergodicamente estável: qualquer difeomorfismo na vizinhança de um ergódico ainda é ergódico. Com ergodicidade nos referimos aos sistemas dinâmicos relativamente a medidas que permanecem invariantes sob a ação da dinâmica. A análise é feita usando como bases perturbações numa vizinhança do difeomorfismo e estudando como se comportam tais perturbações nos espaços estável, instável e central. Ao final concluiremos que a acessibilidade estável vale para um conjunto C^1 aberto e denso no espaço de todos os difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, resolvendo assim a versão C^1 de uma conjectura de Pugh e Shub, que diz que a acessibilidade estável é C^r -densa nos parcialmente

hiperbólicos (Ver conjectura 2.1).

A seguir faremos um resumo da história dos principais resultados relacionados com acessibilidade e ergodicidade estável como motivação ao leitor. Veremos como cada resultado foi se aperfeiçoando ao longo do tempo e como as contribuições de cada autor foram enriquecendo os resultados.

Historicamente, os primeiros exemplos não Anosov com a propriedade de acessibilidade foram aqueles no trabalho de Sacksteder, [30], para alguns difeomorfismos afins. Um dos principais marcos no desenvolvimento da teoria ergódica é a teoria Kolmogorov–Arnold–Moser (1954) e a dinâmica hiperbólica iniciada por Steven Smale, Dmitry Anosov, Yakov Sinai, Hopf entre outros como a hipótese ergódica de Boltzman.

Até onde sabemos, a acessibilidade foi usada para provar ergodicidade pela primeira vez por Sacksteder em ([30], 1968). Ele basicamente provou que acessibilidade implica ergodicidade quando as folheações fortes são suaves. Mais tarde, Brin e Pesin em ([9], 1974) provaram novamente, desta vez para fluxos e *skew-product*, onde também examinaram sua relação com a transitividade. Finalmente, Pugh e Shub, usaram-no sistematicamente em um plano para provar ergodicidade de sistemas parcialmente hiperbólicos.

No contexto de dinâmica hiperbólica, Smale-Anosov-Hopf-Sinai forneceu (ainda na década de 60) conjuntos abertos de sistemas ergódicos, um fato desconhecido até então. Os sistemas Anosov, também chamados de dinâmica completamente hiperbólica, foram por algum tempo os únicos exemplos conhecidos de sistemas ergódicos estáveis.

Em 1994, Grayson, Pugh e Shub chegaram ao primeiro exemplo não hiperbólico de um sistema ergódico estável onde foi provado a ergodicidade estável das aplicações de primeiro retorno dos fluxos geodésicos em superfícies com curvatura negativa. Eles também precisaram da hipótese de coerência dinâmica, que essencialmente significa que as distribuições centro-estável e centro-instável são integráveis. Posteriormente, a condição de *center bunched* foi melhorada. Esse exemplo têm uma dinâmica parcialmente hiperbólica. Vamos também mencionar que já existem exemplos de sistemas ergódicos estáveis conservativos que não são parcialmente hiperbólicos. (Ver [17])

Em 1997, Pugh e Shub restringiram o problema a difeomorfismos parcialmente hiperbólicos em variedades, preservando a medida de Lebesgue e substituindo a esta-

bilidade estrutural por ergodicidade estável. Eles conjecturaram que no mundo dos C^r -difeomorfismos parcialmente hiperbólicos que preservam a medida de Lebesgue m , a ergodicidade estável se mantém em um conjunto aberto e denso.

Em 2000, outros resultados sobre acessibilidade estável abordam classes mais especiais de difeomorfismos, como aplicações de primeiro retorno de fluxos Anosov (Ver [5]) e sistemas onde $E^u \oplus E^s$ é integrável. (Ver [32])

Em 2001, Nițică e Török (Ver [24]) provaram que a acessibilidade estável é C^r -densa no conjunto dos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos com distribuição central integrável e unidimensional. O principal resultado deles mostra que em uma classe aberta de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, existe um conjunto aberto e denso de difeomorfismos acessíveis.

Houve também um grande avanço nas principais conjecturas da topologia C^1 . Por exemplo, Hertz, Hertz, Ures e Tahzibi (2008) provaram que, para difeomorfismo, a ergodicidade estável é C^1 densa quando a dimensão central é dois.

Após esse passo, Burns e Wilkinson (2010) deram um salto da condição de *center bunched* global para uma condição pontual aperfeiçoada, com o ganho de que agora a condição é trivialmente satisfeita quando a dimensão central é unidimensional. Mas a coerência dinâmica ainda era necessária. Após isso, em [4] eles removeram a condição de coerência dinâmica usando a noção de folheações falsas. As folheações falsas consistem, a grosso modo, em famílias de folheações locais que são quase invariantes e quase tangentes aos espaços invariantes.

Em (2016), um resultado foi obtido por A. Avila, S. Crovisier e A. Wilkinson [2] o qual diz que a ergodicidade estável é C^1 densa em qualquer caso (sem qualquer hipótese sobre a dimensão da distribuição central).

Esses resultados dependem fortemente das técnicas de perturbação disponíveis na topologia C^1 e não são conhecidas técnicas em topologias superiores. A C^r -densidade da ergodicidade estável, para $r \geq 2$, é um problema completamente diferente. Pouco se sabe neste caso quando a distribuição central tem dimensão maior que um. Em [4], os autores provam a C^r -densidade da ergodicidade estável para extensões de grupo sobre difeomorfismos de Anosov. Além disso, em [32] são dados dois exemplos que podem ser C^r , $r \geq 2$, aproximados por exemplos ergódicos estáveis. E muito recentemente Z. Zhang

[35] obteve C^r -densidade de ergodicidade estável para difeomorfismos que preservam o volume, satisfazendo algumas condições de compressão e um certo tipo de decomposição dominada. A. Avila e M. Viana anunciaram abertura em C^1 e densidade em C^r para certos *skew-products* de difeomorfismos de superfícies ao longo de Anosov e o trabalho de M. Sambarino e V. Horita pode ter alguma sobreposição com os deles, embora os métodos sejam diferentes. O objetivo de M. Sambarino e V. Horita é contribuir para a densidade de ergodicidade estável, em particular quando a dimensão central é dois. Prova-se que para grandes classes de C^r -difeomorfismos parcialmente hiperbólico que preservam volume com central bidimensional, ergodicidade estável é mantida em subconjuntos C^r -densos.

O trabalho está estruturado em 3 capítulos.

No Primeiro Capítulo será feito uma abordagem de assuntos preliminares, fundamentais ao entendimento dos capítulos 2 e 3. Nele falaremos sobre variedades diferenciáveis e como será o ambiente a serem definidos os difeomorfismos. Adiante, construiremos a ideia por trás de forma diferenciável, essencial para entender a acessibilidade de difeomorfismos simpléticos. Ainda nesse Capítulo, abordamos alguns conceitos de dinâmica hiperbólica e parcialmente hiperbólica bem como algumas definições fundamentais e teoremas extremamente úteis no entendimento das provas que virão. Por ultimo falamos um pouco da teoria ergódica, passando pelos seus principais resultados de forma a embasar o que falaremos no Capítulo 3.

No Segundo Capítulo está a parte central dessa dissertação, onde estudamos o artigo de Dolgopyart-Wilkinson (Ver [13]) para trazer a tona a importância e grande utilidade da propriedade de acessibilidade estável em difeomorfismos parcialmente hiperbólicos. Neste artigo provou-se que a acessibilidade vale em um conjunto C^1 -aberto e C^r -denso de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, preservando volume ou não. Exploramos as conjecturas que deram origem a este trabalho, seus corolários e lemas principais para a construção da prova. Suas principais aplicações é dada no Capítulo 3.

No Capítulo 3 veremos como a propriedade de acessibilidade está intimamente interligada com ergodicidade estável. Faremos um apanhado geral dos principais resultados relacionados com o tema. Veremos quais destes ainda podem ser melhorados e como as topologias são rigorosamente influenciadoras no ambiente em que se deseja trabalhar.

1 Preliminares

Neste capítulo, apresentam-se definições e resultados essenciais ao entendimento da acessibilidade estável de difeomorfismos. Introduce-se uma noção de variedade diferenciável, formas diferenciáveis, difeomorfismos simpléticos, folheações, dinâmica hiperbólica e dinâmica parcialmente hiperbólica. Falaremos ainda de aplicações especiais como a holonomia, necessário para demonstração do Lema 2.1.

1.1 Variedade Diferenciável

Definição 1.1. *Uma Variedade Diferenciável de dimensão d é um espaço topológico M munido de um atlas diferenciável de dimensão d , ou seja, uma família de homeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha$ tais que*

- i) Cada U_α é um aberto de M e cada X_α é um aberto de \mathbb{R}^d e $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$;*
- ii) A aplicação $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ é diferenciável para quaisquer α e β tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$*

Os homeomorfismos φ_α são chamados *cartas locais* e as transformações $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ são chamadas *mudança de coordenadas*. Ao inverter tais transformações vemos que a aplicação inversa $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ também é diferenciável. Isso nos diz que a definição de variedade também requer que as mudanças de coordenadas sejam difeomorfismos abertos do espaço euclidiano.

Seja $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Se toda mudança de coordenadas é de classe C^r (isto é, se todas as suas derivadas parciais de ordem r existem e são contínuas) dizemos que a variedade M é diferenciável.

Exemplo 1.1. *O espaço euclidiano \mathbb{R}^d é uma variedade diferenciável. Com efeito, considere o atlas formado por uma única aplicação, a aplicação identidade $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.*

Exemplo 1.2. O toro $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ é uma variedade diferenciável. De fato, basta considerar o atlas formado pela inversa das aplicações $g_z : (0,1)^d \rightarrow \mathbb{T}^d$, definidas por $g_z(x) = z + x(\text{mod } \mathbb{Z}^d)$ para cada $z \in \mathbb{R}^d$.

1.1.1 Espaço tangente e aplicação derivada

Seja M uma variedade. Para cada $p \in M$ considere o conjunto $\mathcal{C}(p)$ de todas as curvas $c : I \rightarrow M$, onde I é um intervalo aberto contendo $0 \in \mathbb{R}$, tais que $c(0) = p$ e c é diferenciável no ponto 0, ou seja, a aplicação $\varphi_\alpha \circ c$ é diferenciável no ponto 0, para toda carta local $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha$ com $p \in U_\alpha$. Dizemos que duas curvas $c_1, c_2 \in \mathcal{C}(p)$ são equivalentes se $(\varphi_\alpha \circ c_1)'(0) = (\varphi_\alpha \circ c_2)'(0)$ para toda carta local $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha$ com $p \in U_\alpha$. Denotamos por $[c]$ a classe de equivalência de qualquer curva $c \in \mathcal{C}(p)$

O *Espaço tangente* à variedade M no ponto p é o conjunto, que representamos por T_pM , de tais classes de equivalência. Dada uma carta local $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha$ qualquer com $p \in U_\alpha$, a aplicação

$$\begin{aligned} T\varphi_\alpha(p) : T_pM &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ [c] &\mapsto (\varphi_\alpha \circ c)'(0) \end{aligned}$$

está bem definida e é uma bijeção. Podemos usar esta bijeção para identificar T_pM com \mathbb{R}^d . Desta forma, o espaço tangente adquire uma estrutura de espaço vetorial, transportada de \mathbb{R}^d por $T\varphi_\alpha(p)$.

Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável, a sua *derivada* num ponto $p \in M$ é a aplicação linear $Tf(p) : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ definida por

$$Tf(p) = T\psi_\beta(f(p))^{-1} \circ T(\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(p)) \circ T\varphi_\alpha(p)$$

onde $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha$ é carta local de M com $p \in U_\alpha$ e $\psi_\beta : V_\beta \rightarrow Y_\beta$ é carta local de N com $f(p) \in V_\beta$. Note que a definição não depende da escolha das cartas.

O *fibrado tangente* a M é $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^d / p \in M, v \in T_pM\}$ de todos os espaços tangentes a M . Veja que essa união é disjunta. Para cada carta local $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha$, considere $T_{U_\alpha}M = \bigcup_{p \in U_\alpha} T_pM$ e a aplicação

$$T\varphi_\alpha : T_{U_\alpha}M \rightarrow X_\alpha \times \mathbb{R}^d$$

que associa a cada $[c] \in T_{U_\alpha}M$ o par $((\varphi_\alpha \circ c)(0), (\varphi_\alpha \circ c)'(0)) \in X_\alpha \times \mathbb{R}^d$. Consideremos em TM a topologia que faz de cada $T\varphi_\alpha$ um homeomorfismo. Supondo que o atlas $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha\}$ de M é de classe C^r , então a mudança de coordenadas

$$T\varphi_\beta \circ T\varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^d$$

é uma aplicação de classe C^{r-1} para quaisquer α e β tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Portanto, o fibrado tangente TM está munido com a estrutura de variedade de classe C^{r-1} e dimensão $2d$.

A *derivada* de uma transformação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é a aplicação $Tf : TM \rightarrow TN$ cuja restrição a cada espaço tangente T_pM está dada por $Tf(p)$. Veja que se f for de classe C^r então Tf será de classe C^{r-1} . (Ver [34])

1.1.2 Espaço cotangente e formas diferenciais

O *espaço cotangente* $T_p^*(M)$ a uma variedade M num ponto p é o dual do espaço tangente T_pM , ou seja, o espaço dos funcionais lineares $\xi : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$. Dada qualquer carta local $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha$ com $p \in U_\alpha$ temos um isomorfismo

$$T\varphi_\alpha^*(p) : T_p^*M \rightarrow \mathbb{R}^d$$

induzido pelo isomorfismo $T\varphi_\alpha(p) : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^d$ da seguinte forma. Para cada $i = 1, \dots, d$, considere $dx_i = \pi_i \circ T\varphi_\alpha(p)$, onde $\pi_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção na i -ésima coordenada. Então $dx_i \in T_p^*(M)$ e a família $\{dx_1, \dots, dx_d\}$ é uma base de $T_p^*(M)$. Para cada $\xi \in T_p^*(M)$, defina

$$T\varphi_\alpha^*(p)\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \Leftrightarrow \xi = \sum_{i=1}^d \xi_i dx_i$$

O *fibrado cotangente* de M é a união (disjunta) $T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$ de todos os espaços cotangentes a M . Dada qualquer carta local $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha$, considere a união $T_{U_\alpha}^*M = \bigcup_{p \in U_\alpha} T_p^*M$ é a aplicação

$$T\varphi_\alpha^* : T_{U_\alpha}^*M \rightarrow X_\alpha \times \mathbb{R}^d$$

definida por $T\varphi_\alpha^*\xi = (\varphi_\alpha(p), T\varphi_\alpha^*(p)\xi)$ se $\xi \in T_p^*(M)$. Veja que a aplicação se trata de uma bijeção. Considere em T^*M a topologia segundo a qual todos os $T\varphi_\alpha^*$ são homeomorfismos.

Se $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha\}$ é um atlas de classe C^r para a variedade M , então

$$\{T\varphi_\alpha^* : T_{U_\alpha}^* M \rightarrow X_\alpha \times \mathbb{R}^d\}$$

é um atlas de classe C^{r-1} para T^*M . Isso nos diz que o fibrado cotangente T^*M também está munido com uma estrutura de variedade de classe C^{r-1} e dimensão $2d$. (Ver [34])

Definição 1.2. Chamamos 1-forma diferenciável na variedade M toda aplicação diferenciável $\theta : M \rightarrow T^*M$ tal que $\pi \circ \theta = id$. Noutras palavras, θ associa a cada ponto $p \in M$ um funcional linear $\theta_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ que depende diferenciavelmente do ponto.

Mais geralmente, para qualquer $0 \leq k \leq d$, uma forma k -linear alternada em $T_p M$ é uma aplicação

$$\theta_p : (T_p M)^k \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v_1, \dots, v_k) \mapsto \theta_p(v_1, \dots, v_k)$$

onde cada θ_p é linear em cada variável v_i e

$$\theta_p(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k) = -\theta_p(v_1, \dots, v_{i+1}, v_i, \dots, v_k)$$

para todo $1 \leq i < k$ e todo $(v_1, \dots, v_k) \in (T_p M)^k$.

Definição 1.3. Uma k -forma diferencial em M é uma aplicação θ que associa a cada ponto $p \in M$ uma forma k -linear alternada no espaço tangente $T_p M$, dependendo diferenciavelmente do ponto.

Em coordenadas locais podemos escrever

$$\theta_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} a_{i_1, \dots, i_k}(p) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

A condição de diferenciabilidade significa que os coeficientes $a_{i_1, \dots, i_k}(p)$ dependem diferenciavelmente do ponto p .

Supondo que $k < d$, a derivada exterior de θ é a $(k+1)$ -forma diferencial $d\theta$ determinada por

$$d\theta_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \sum_j \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_k}(p)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

onde a segunda soma é sobre todos os $j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$. Veja que a expressão no lado direito não depende da escolha da carta local. Além disso dizemos que uma k -forma diferencial é fechada se $d\theta \equiv 0$ (ou $k = d$) e é exata se existe alguma $(k-1)$ -forma η tal que $d\eta = \theta$ (ou então $k = 0$). Toda forma diferencial exata é fechada.

1.1.3 Variedades Riemannianas

Uma *métrica riemanniana* numa variedade M é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno no espaço tangente T_pM , isto é, uma aplicação bilinear simétrica

$$\cdot_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que $v \cdot_p v > 0$ para todo vetor não nulo $v \in T_pM$. (Ver [34])

Por definição, \cdot_p varia diferenciavelmente com o ponto p no seguinte sentido: Considere uma carta local qualquer $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha$ de M . Desse modo, para cada $p \in U_\alpha$ podemos identificar T_pM com \mathbb{R}^d , via a diferencial $T\varphi_\alpha(p)$ para assim podermos trabalhar com \cdot_p como sendo um produto interno no espaço euclidiano.

Seja e_1, \dots, e_d uma base de \mathbb{R}^d . Então pedimos para que as funções $g_{\alpha,i,j}(p) = e_i \cdot_p e_j$ sejam diferenciáveis para todo par (i, j) e para qualquer escolha da carta local e da base.

Dizemos que M é uma **Variedade Riemanniana** se M é uma variedade munida de uma métrica riemanniana. Toda subvariedade S de uma variedade riemanniana M herda uma estrutura de variedade riemanniana dada pela restrição do produto interno \cdot_p de M ao subespaço tangente T_pS de cada ponto $p \in S$.

1.2 Dinâmica Hiperbólica

A hiperbolicidade desempenha um papel fundamental no estudo do comportamento dos sistemas dinâmicos, além de ser uma propriedade bem compreendida. Nesta seção discutimos as propriedades mais interessantes de sistemas dinâmicos hiperbólicos. Isso é essencial à compreensão das seções seguintes e do restante do texto. Para tanto, inicia-se dando a definição de ponto fixo hiperbólico.

Definição 1.4. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de uma variedade Riemanniana M . Dizemos que $p \in M$ é um **ponto fixo hiperbólico** de f se $Tf_p : T_pM \rightarrow T_pM$ é tal que o espectro de Tf_p não intersecta a bola de raio 1. Isto significa que o conjunto dos autovalores da matriz jacobiana de f são todos diferentes de 1.*

O conjunto desses pontos formam um conjunto com algumas propriedades, que descrevemos a seguir.

Definição 1.5. Um subconjunto invariante $\Lambda \subset U$ é dito **hiperbólico** para f se, para cada $p \in \Lambda$ temos que:

$$1) T_p M = E_p^s \oplus E_p^u$$

$$2) T f_p(E_p^s) = E_{f(p)}^s \quad T f_p(E_p^u) = E_{f(p)}^u$$

(ou seja, a decomposição é invariante pela ação da derivada)

3) E_p^s e E_p^u variam continuamente com p

4) Existem $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que

$$\|T f_p^n(v)\| \leq C \lambda^n \|v\|, \quad \forall n \geq 0, v \in E^s$$

e

$$\|T f_p^{-n}(v)\| \leq C \lambda^n \|v\|, \quad \forall n \geq 0, v \in E^u$$

O espaço $E_p^s(A)$ é chamado **subespaço estável de p** e o espaço $E_p^u(A)$ é chamado **subespaço instável de p** .

Observação 1.1. Um ponto periódico p de período k é dito hiperbólico se p é fixo hiperbólico para f^k com $k \geq 1$

Ainda nesse sentido, definimos:

Definição 1.6. Um ponto x_0 é dito **não-errante** se, e somente se, para cada vizinhança N de x_0 , existe um número inteiro $k \geq 1$ tal que

$$N \cap f^k(N) \neq \emptyset$$

Isso nos diz que devem haver pontos arbitrariamente próximos de x_0 que retornam para pontos arbitrariamente próximos de x_0 sob a iteração da aplicação. Denotamos por $\Omega(f)$ o conjunto dos pontos não-errantes de f e $Per(f)$ como o conjunto dos pontos periódicos de f .

Exemplo 1.3 (Anosov Linear no Toro). Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbb{T}^2 = \frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}$.

Considere o operador

$$A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$$

$$v \mapsto Av$$

Temos que

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\Leftrightarrow (2 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_+ = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1 \text{ e } \lambda_- = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1 \end{aligned}$$

Assim, temos que as inclinações λ_+ e λ_- estão relacionadas com os autovetores dos subespaços E^u e E^s , respectivamente. Desse modo, para $q \in \mathbb{Z}^*$ considere

$$C_q = \left\{ \left(\frac{m}{q}, \frac{n}{q} \right), m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Temos que

$$A \begin{pmatrix} \frac{m}{q} \\ \frac{n}{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{m}{q} \\ \frac{n}{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2m+n}{q} \\ \frac{m+n}{q} \end{pmatrix} \in C_q$$

Isto significa que, $AC_q \subset C_q$. Mais ainda, dado $\left(\frac{l}{q}, \frac{r}{q}\right)$ existem m, n tais que $A \begin{pmatrix} \frac{m}{q} \\ \frac{n}{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l}{q} \\ \frac{r}{q} \end{pmatrix} \Rightarrow A(C_q) = C_q$. Mas C_q é finita $\Rightarrow C_q \subset \text{Per}(A)$. Uma vez que $\bigcup_{q \in \mathbb{Z}} C_q$ é denso em \mathbb{R}^2 temos que $\overline{\bigcup_{q \in \mathbb{Z}} C_q} \subseteq \overline{\text{Per}(A)} = \mathbb{T}^2$

Em particular, $\Omega(A) = \overline{\text{Per}(A)} = \mathbb{T}^2$ e $\text{Per}(A)$ são hiperbólicos.

Denotamos ainda a órbita positiva de x como $\mathcal{O}^+(x) := \{f^n(x)/n \in \mathbb{N}\}$. Se f for invertível, também podemos ter a órbita negativa que é denotada por $\mathcal{O}^-(x) := \{f^n(x)/n < 0\}$. Com isso, temos a seguinte definição:

Definição 1.7. Para qualquer $x_0 \in X$ a coleção de todos os pontos de acumulação da órbita positiva $\{x_0, x_1, \dots\}$ é chamado conjunto ω -**limite** e denotamos por $\omega_f(x)$ o qual é subconjunto de X , ou seja,

$$\omega_f(x) = \{y \in M; \exists n_k \rightarrow +\infty / f^{n_k}(x) \rightarrow y\}$$

Os pontos $y \in \omega_f(x)$ são ditos **recorrentes**.

Se f for um sistema dinâmico invertível definimos analogamente o conjunto α -limite denotado por

$$\alpha_f(x) = \{y \in M; \exists n_k \rightarrow -\infty / f^{n_k}(x) \rightarrow y\}$$

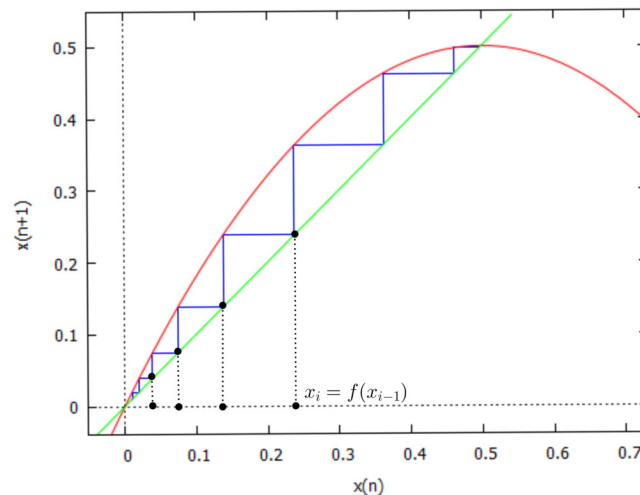
Definimos ainda o conjunto limite de f por

$$L(f) := \overline{\bigcup_{x \in M} \omega_f(x)} \cup \overline{\bigcup_{x \in M} \alpha_f(x)}$$

ou seja, $L(f)$ é o conjunto de todos os pontos de acumulação de todas as órbitas

Exemplo 1.4. Seja $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x(1 - x)$ e $g(x) = id$, respectivamente. Construiremos o gráfico cobweb para analisar o comportamento da órbita de um ponto inicial x_0 pela f . Primeiro encontramos a imagem de x_0 pela f que tem coordenada $(x_0, f(x_0))$. Em seguida, fazemos f variar horizontalmente até tocar a função identidade g . Este ponto tem coordenada $(f(x_0), f(x_0))$. O passo seguinte é plotar verticalmente a partir do ponto da diagonal em que f tocou a identidade. Este ponto tem coordenada $(f(x_0), f(f(x_0)))$. Então o gráfico cobweb de f é descrita na figura 1.1 abaixo e foi feito pelo software Maxima com ponto inicial $x_0 = 0.01$ e 25 iterações.

Figura 1.1: Órbita de f



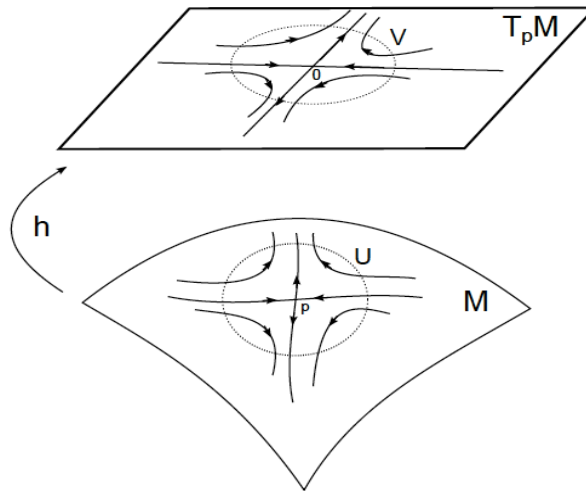
Fonte: Autoria própria

A seguir veremos o Teorema de Hartman e Grobman segundo o qual um difeomorfismo f é localmente conjugado à sua parte linear em um ponto fixo hiperbólico.

Teorema 1.1. [Teorema de Hartman-Grobman] Sejam $f \in \text{Diff}^r(M)$ e $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico de f . Seja $Tf_p : T_pM \rightarrow T_pM$. Então existem vizinhanças $V(p) \subset M$ e $U(0) \subset T_pM$ e $h : U \rightarrow V$ homeomorfismo tal que

$$h \circ Tf_p = f \circ h$$

Figura 1.2: Conjugação do Teorema de Hartman-Grobman



Fonte: [11]

No contexto do Teorema Hartan-Grobman o espaço tangente de um ponto periódico hiperbólico se decompõe em subespaços que contraem e expandem uniformemente sob ação da diferencial, ou seja é uma aproximação linear do que acontece na variedade.

Assim, os conjuntos

$$W_{loc}^u(p) := h(E^u \cap U),$$

$$W_{loc}^s(p) := h(E^s \cap U).$$

são chamados *Conjunto instável local de p* e *Conjunto estável local de p*

É importante salientar que o Teorema de Hartman-Grobman fornece apenas uma estrutura de variedade topológica para $W^s(p)$. Entretanto o Teorema que apresentaremos a seguir é independente do Teorema de Hartman-Grobman e mostra que de fato $W^s(p)$ é uma variedade diferenciável imersa, de mesma classe que o difeomorfismo.

Teorema 1.2 (Teorema da variedade estável). *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^r , com M variedade Riemanniana completa e $p \in M$ um ponto periódico hiperbólico de período k para f , então existem discos C^r -mergulhados $W_{loc}^u(p)$ e $W_{loc}^s(p)$ tais que*

$$i) \quad p \in W_{loc}^u(p) \cap W_{loc}^s(p)$$

$$ii) \quad T_p W_{loc}^u(p) = E^u(p)$$

$$iii) T_p W_{loc}^s(p) = E^s(p)$$

$$iv) f^k(W_{loc}^s(p)) \subset W_{loc}^s(p)$$

$$v) f^k(W_{loc}^u(p)) \subset W_{loc}^u(p)$$

Denotamos

$$W^s(p) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-nk}(W_{loc}^s(p)) : \text{Variedade estável global,}$$

$$W^u(p) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{nk}(W_{loc}^u(p)) : \text{Variedade instável global.}$$

Teorema 1.3 (Teorema da variedade estável para conjuntos hiperbólicos). *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico de classe C^r , M é uma variedade Riemanniana compacta, $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico, então para todo $x \in \Lambda$, $\exists \varepsilon > 0$ tal que os conjuntos $W_\varepsilon^s(x)$ e $W_\varepsilon^u(x)$ existem e*

$$(i) f(W_\varepsilon^s(x)) \subset W_\varepsilon^s(f(x)) \text{ e } f^{-1}(W_\varepsilon^u(x)) \subset W_\varepsilon^u(f^{-1}(x))$$

$$(ii) T_x W_\varepsilon^s(x) = E^s(x) \text{ e } T_x W_\varepsilon^u(x) = E^u(x)$$

(iii)

$$W_\varepsilon^s(x) = \{y \in M / d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon \forall n \geq 0, d(f^n(x), f^n(y)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\}$$

$$W_\varepsilon^u(x) = \{y \in M / d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \varepsilon \forall n \geq 0, d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\}$$

(iv) $W_\varepsilon^s(x)$ e $W_\varepsilon^u(x)$ são variedades C^r -mergulhadas.

(v) A aplicação

$$\theta^s : \Lambda \rightarrow \text{Emb}(\mathbb{D}^s, M)$$

$$x \mapsto W_\varepsilon^s(x)$$

é contínua, ou seja, as variedades variam continuamente.

Além disso, vale que

$$\begin{cases} d(f^n(y), f^n(x)) \leq \lambda^n d(x, y), y \in W_\varepsilon^s(x) \\ d(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) \leq \lambda^n d(x, y), y \in W_\varepsilon^u(x) \end{cases}$$

Desse modo, se tomarmos y na variedade estável de x , a distância da órbita para frente de y à órbita de x decai exponencialmente por uma taxa de contração λ . Analogamente, tomando y na variedade instável de x , a distância da órbita para trás de x decai exponencialmente por uma taxa de contração λ .

Definição 1.8. $f : M \rightarrow M$ é dita **topologicamente mixing** se $\forall U, V$ abertos $\exists n_0 \geq 0$ tal que

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset \quad \forall n \geq n_0$$

Um exemplo de aplicação topologicamente mixing é o Anosov linear no toro (Ver exemplo 1.3).

Definição 1.9. Seja Λ um conjunto hiperbólico, compacto e invariante por f . Dizemos que Λ é **isolado** se existe uma vizinhança U de Λ tal que

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$$

Em outras palavras, Λ é o único conjunto hiperbólico de sua vizinhança. Desse modo, não existe nenhum outro conjunto hiperbólico que o contém propriamente e está contido na vizinhança.

A seguir temos um Axioma escrito por Smale que relaciona pontos não-errantes e pontos periódicos com hiperbolicidade.

Definição 1.10. Dizemos que f é **Axioma A** se Ω é hiperbólico para f e $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$, isto é, os pontos periódicos de f são densos em Ω . (Ver [25])

Se f satisfaz o Axioma A, Smale demonstrou (Ver [33], (1967)) que $\Omega = \Omega(f)$ se decompõe em uma união finita e disjunta de subconjuntos fechados, invariantes e transitivos, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_k$, onde cada Ω_i é uma peça básica, para $i = 1, 2, \dots, k$. Isso é traduzido no seguinte corolário.

Teorema 1.4 (Decomposição espectral). *Seja f Axioma A tal que $f \in \text{Diff}^1(M)$, onde M é uma variedade compacta. Então existe uma única decomposição de $\overline{Per(f)}$ em finitos conjuntos compactos, invariantes, transitivos e isolados Λ_i , isto é,*

$$\overline{Per(f)} = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_n$$

onde a união é disjunta.

Mais ainda, $\Lambda_i = \bigcap_{j=1}^{k_i} \Lambda_{i,j}$, onde $f(\Lambda_{i,j}) = \Lambda_{i,j+1(\text{mod}(k_i))}$ e $f|_{\Lambda_{i,j}}$ é topologicamente mixing.

Cada Λ_i da decomposição espectral é conhecido como peça básica pois é um componente indivisível. Informalmente o Teorema diz que dados os conjuntos periódicos, a dinâmica pode ser quebrada em finitos "pedaços".

Corolário 1.1. *Se f é Axioma A então f tem decomposição espectral.*

A transitividade significa que existem órbitas densas em cada Ω_i . E cada Ω_i todas as órbitas periódicas tem suas variedades estáveis de mesma dimensão. Temos ainda o corolário.

Corolário 1.2. *Se $L(f)$ for hiperbólico então $L(f) = \overline{\text{Per}(f)}$*

Teorema 1.5. *Suponha $L(f)$ hiperbólico. Então*

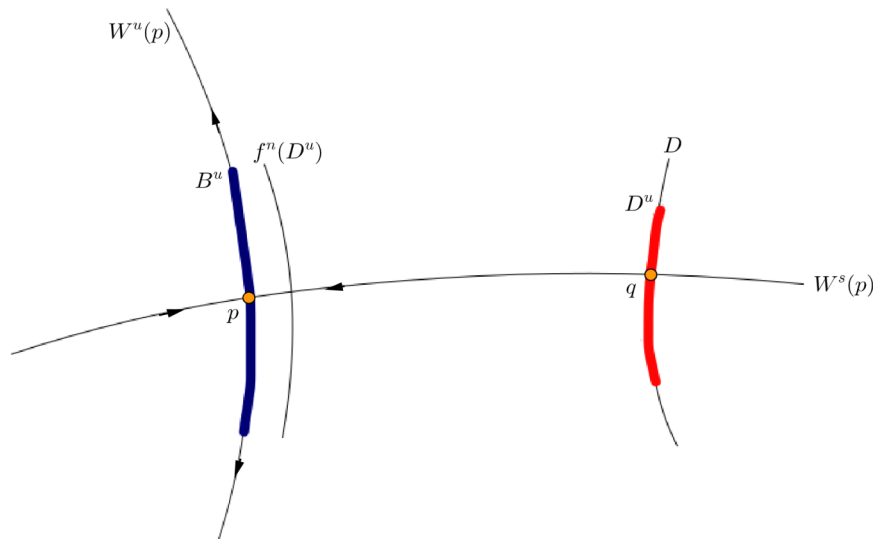
$$\begin{aligned} M &= \bigcup_{x \in L(f)} W^s(x) = \bigcup_{x \in L(f)} W^u(x) \\ \Leftrightarrow M &= \bigcup_{i=1}^n W^s(\Lambda_i) = \bigcup_{i=1}^n W^u(\Lambda_i) \end{aligned}$$

O Lema a seguir é um resultado muito importante sobre a dinâmica perto de um ponto fixo hiperbólico e é extremamente útil para obter interseções entre as variedades estável e instável por argumentos geométricos simples, isso o torna relevante para vários resultados em sistemas dinâmicos.

Seja $B^s \subset E^s$ uma bola contida em $W_{loc}^s(0)$, $B^u \subset E^u$ uma bola contida em $W_{loc}^u(0)$ e $V = B^s \times B^u$. Considere um ponto $q \in W_{loc}^s(0)$ e um disco D^u de dimensão $u = \dim E^u$, transversal a $W_{loc}^s(0)$ em q .

Lema 1.1 (λ -Lema). *Seja p um ponto fixo hiperbólico. Então $\forall q \in W^s(p)$, para todo u -disco D (onde D é um disco de dimensão u , com $u = \dim(W^u)$) transversal a $W^s(p)$ em q , e para todo u -disco B^u em $W^u(p)$ existe um disco $D^u \subset D$ que contém q tal que $\exists n_0 \geq 0$ tal que $f^{n_0}(D^u)$ está $\varepsilon - C^1$ -próximo de B^u . (Ver Figura 1.3)*

Como aplicação do λ -Lema, temos a seguinte definição

Figura 1.3: λ -Lema

Fonte: Autoria Própria

Definição 1.11. *Seja $f \in \text{Diff}^r(M)$ satisfazendo o Axioma A. Dizemos que f satisfaz a condição de transversalidade se as variedades $W^s(p)$ e $W^u(q)$ são transversais para quaisquer $p, q \in \Omega(f)$.*

Essa condição também é conhecida como pontos homoclinicamente relacionados. Como essa condição vale para todo ponto então temos as relações

$$\begin{cases} W^u(p) \bar{\cap} W^s(q) \\ W^s(p) \bar{\cap} W^u(q) \end{cases}$$

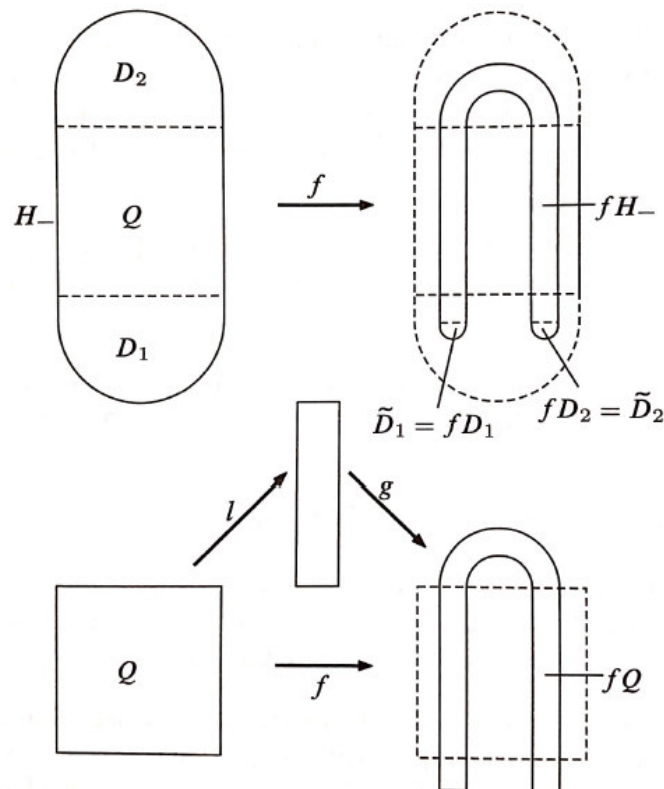
Um caso relacionado a transversalidade mas diferente são os pontos homoclínicos.

Definição 1.12. *Dado um ponto $q \in M$, dizemos que q é um **ponto homoclínico** se $q \in W^u(p) \bar{\cap} W^s(p)$, onde $p \in M$.*

A seguir iremos construir um difeomorfismo f de S^2 , que é Axioma A e satisfaz a condição de transversalidade. Antes disso, veremos como seu criador (Smale) teve tais ideias. Veja que a forma mais tradicional de se descrever como os estados de um sistema físico evoluem com o tempo é usando expressões algébricas. Mas, muitas vezes, a descrição de um sistema dinâmico através de fórmulas é complicada, dada a complexidade de muitos fenômenos naturais. Em vez de uma descrição algébrica, Steve Smale usou neste caso uma mais geométrica, como se verá a seguir.

Exemplo 1.5. [Ferradura de Smale] O conjunto não errante consiste em três conjuntos: Ω_1 é ponto fixo repulsor, Ω_3 é ponto fixo atrator e Ω_2 é um conjunto de cantos em que as selas periódicas (pontos que tem contração e expansão) são densas. No polo norte da esfera colocamos uma fonte hiperbólica Ω_1 , e todo o hemisfério norte H_+ , inclusive o equador, pertence a sua variedade instável $W^u(\Omega_1)$. Portanto, H_- indica o hemisfério sul, $f(H_-) \subset \text{Int}(H_-)$. Iremos começar descrevendo f em H_- . A aplicação linear l é linear e comprime as horizontais com um fator de compressão $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ e expande as verticais com um fator de expansão $\mu > 4$. A aplicação g entorta o quadrado central do retângulo $l(Q)$ formando assim uma ferradura F e a translada para a posição, como na Figura 1.4 abaixo. Assim, $Q \cap f(Q)$ tem duas componentes retangulares \tilde{R}_1 e \tilde{R}_2 que são imagens

Figura 1.4: Construção da ferradura



Fonte: [25]

dos retângulos R_1 e R_2 em Q . Finalmente, no centro do disco $\tilde{D}_1 = fD_1$, colocamos um ponto fixo hiperbólico atrator Ω_3 e $\tilde{D}_1 \subset W^s(\Omega_3)$. Vamos analisar o conjunto $\Omega = \Omega(f)$. Se $x \in H_+$ e x não é o polo norte então x é errante, pois pertence à variedade instável de uma fonte. Se $x \in \tilde{D}_1$, $x \neq \Omega_3$ então x é errante pois pertence à variedade estável de um poço. Se $x \in D_1$ então $f(x) \in \tilde{D}_1$ e x é errante. Se $x \in D_2$, então $f(x) \in D_1$ e x também

é errante. Daí concluímos que, $x \in H_-$ e $x \neq \Omega_3$, então x só pode ser não errante se sua órbita estiver inteiramente contida em Q (Ver figura 1.5). Portanto, se $x \in \Omega$, $x \neq \Omega_1$ e $x \in \Omega_3$, temos que $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n Q = \Lambda$. (Ver [25])

Temos também a definição de um sistema dinâmico caótico.

Definição 1.13. Dizemos que a aplicação $f : M \rightarrow M$ tem sensibilidade às condições iniciais no ponto $x_0 \in M$ se existir um número $\varepsilon > 0$ tal que toda vizinhança de x_0 contém um ponto y_0 tal que $d(f^n(x_0), f^n(y_0)) > \varepsilon$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Se um sistema apresenta sensibilidade às condições iniciais então dizemos que tal sistema é caótico.

Por exemplo a *Doubling Map* é caótica. Com efeito, dado $0 < \varepsilon < 1$, para toda vizinhança V de $x \in \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ e qualquer ponto $y \in V$, sendo r a distância de x a y temos que:

$$d(x, y) = r$$

$$d(f(x), f(y)) = 2r$$

$$\vdots$$

Assim, por indução ganhamos que $d(f^n(x), f^n(y)) = 2^n r$ e portanto existe n suficientemente grande tal que

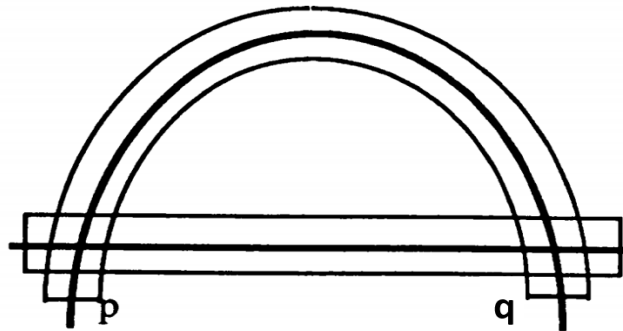
$$d(f^n(x), f^n(y)) = 2^n r > \varepsilon$$

Observação 1.2. Todo sistema que tem um ponto homoclínico transversal p tem uma ferradura de Smale, e como sabemos a ferradura é um conjunto hiperbólico e caótico, ou seja, todo sistema que tem ponto homoclínico é caótico. (Ver [11])

De fato suponha que p seja um ponto fixo. Tomamos um retângulo "fino" paralelo a $W^s(p)$ que contém p e q . Iterando f um número grande de vezes, se o retângulo for estreito o suficiente, podemos usar o λ -Lema para mostrar que a imagem do retângulo terá a aparência mostrada na Figura 1.5.

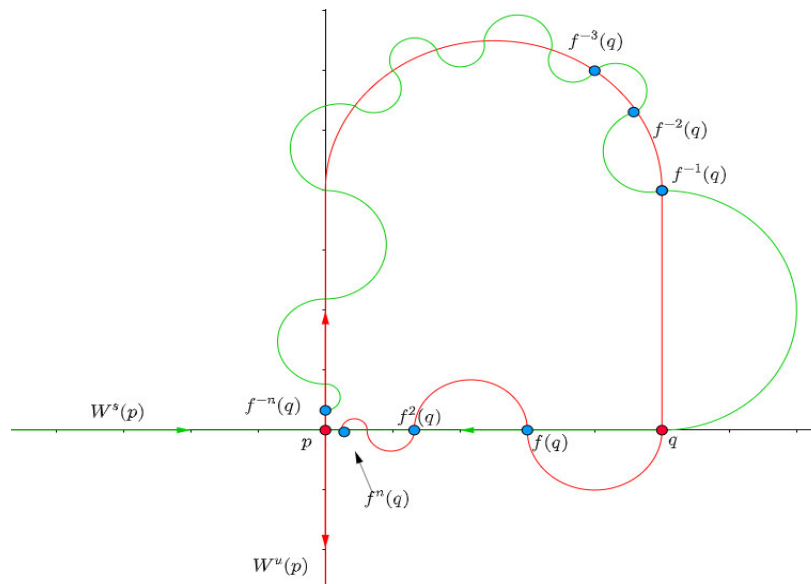
Exemplo 1.6. Seja p um ponto fixo hiperbólico e q um ponto homoclínico. Então o conjunto hiperbólico nesse caso é $\Lambda = p \cup \mathcal{O}(q)$, onde $\mathcal{O}(q)$ é a órbita de q . O ponto q é chamado interseção homoclínica transversal e significa que $W^u(p)$ e $W^s(p)$ são transversais em todos os seus pontos (órbitas) de interseção. A transversalidade não é necessariamente ortogonal, mas apenas soma direta. (Ver Figura 1.6)

Figura 1.5: Ferradura em torno de um ponto homoclínico



Fonte: [31]

Figura 1.6: Conjunto hiperbólico formado pela órbita de um ponto homoclínico união com p



Fonte: Autoria própria

Nesse exemplo vemos que as variedades estáveis e instáveis de p se amarram pois Λ é hiperbólico.

Definição 1.14. Dada a decomposição espectral por $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ podemos definir a pré-ordem entre os Λ_i da seguinte forma:

$$\Lambda_i > \Lambda_j \Leftrightarrow (W^u(\Lambda_i) \setminus \Lambda_i) \cap (W^s(\Lambda_j) \setminus \Lambda_j) \neq \emptyset$$

ou seja, $\exists x \in M$ tal que ω -limite de x está em Λ_j e α -limite de x está em Λ_i .

Definição 1.15. Dizemos que a pré-ordem tem um k -ciclo se existem i_1, \dots, i_k tais que

$$\Lambda_{i_1} > \Lambda_{i_2} \cdots \Lambda_{i_k} > \Lambda_{i_{k+1}} = \Lambda_{i_1}$$

Por exemplo se f é axioma A sem ciclo então existe uma peça básica atratora (repulsora).

Teorema 1.6 (Teorema da Ω –estabilidade). *Se f é hiperbólico e não tem ciclos então f é Ω –estável, ou seja, existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^k(M)$ e para cada $g \in \mathcal{U}$ existe um homeomorfismo $h : \Omega(f) \rightarrow \Omega(g)$ tal que $g \circ h = h \circ f$.*

O Teorema da Ω –estabilidade diz que o homeomorfismo h conjugua a dinâmica de f no seu conjunto não-errante à dinâmica de g no seu respectivo conjunto não errante.

$$\begin{array}{ccc} \Omega(f) & \xrightarrow{h} & \Omega(g) \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \Omega(f) & \xrightarrow{h} & \Omega(g) \end{array}$$

Teorema 1.7. *Se $f : M \rightarrow M$ é hiperbólico e não tem ciclos então para toda vizinhança V de $\Omega(f)$ existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^k(M)$ de f tal que $\Omega(g) \subset V$ para todo $g \in \mathcal{U}$.*

1.3 Folheação

Uma *folheação* de dimensão q de uma variedade diferenciável é, a grosso modo, uma decomposição de M numa união disjunta de subvariedades conexas de dimensão q chamadas *folhas*. Os planos tangentes as folhas definem um campo de q –planos o qual é dito completamente integrável. Formalmente temos

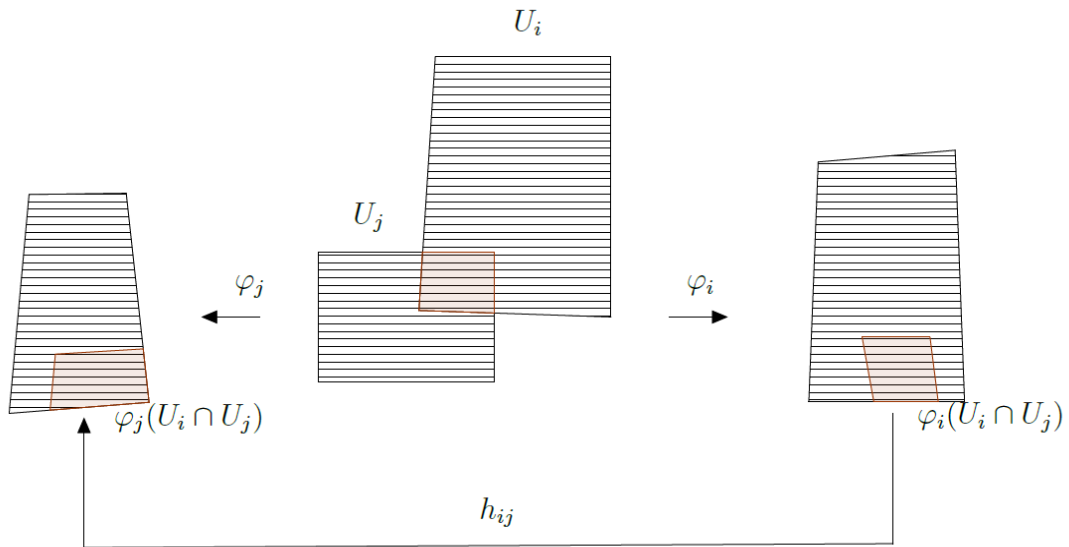
Definição 1.16. *Uma folheação \mathcal{W} de M de classe C^r e codimensão p (dimensão q) é uma coleção de cartas locais $\varphi_i : U_i \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m, i \in I$ tal que*

$$1) \bigcup_{i \in I} U_i = M$$

2) *Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ as mudanças de coordenadas $h_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ tem a forma $(h_{ij}(x, y) = (h^1(x, y), h^2(y)), (x, y) \in \mathbb{R}^{m-p} \times \mathbb{R}^p$ e são de classe C^r .*

(Ver Figura 1.7)

Figura 1.7: Folheações



Fonte: [23]

As componentes $\varphi_i^{-1}(x, y_0)$, com $y_0 = \text{constante}$, são denominadas *placas* de U_i . As placas são subvariedades mergulhadas de U_i de codimensão p .

Uma folha de \mathcal{W} é um subconjunto conexo que é união maximal de placas de \mathcal{W} , ou seja, se W é uma folha e α é uma placa com $\alpha \cap W \neq \emptyset$ então $\alpha \subset W$.

Seja uma C^r -folheação \mathcal{W} de dimensão p de uma variedade M . Em cada ponto $x \in M$ o espaço tangente a folha passando por x é um subespaço do espaço tangente $T_x M$. Eles dão origem à um subfibrado de TM de dimensão p chamado de **fibrado tangente de \mathcal{W}** e é denotado por $T\mathcal{W}$. Em geral um subfibrado de TM não é um fibrado tangente à folheação. Dizemos que E é **integrável** se ele é um fibrado tangente à folheação.

Teorema 1.8. E^u e E^s são integráveis

Esse resultado está relacionado com o Teorema da variedade estável para conjuntos hiperbólicos (Ver 1.3) e diz à respeito de integrabilidade de subfibrados, o que é de grande importância em sistemas hiperbólicos. Sua demonstração requer um alto nível de técnica e por isso será omitida. Esta pode ser encontrada em [20].

Definição 1.17. A folheação \mathcal{W}^s tangente a E^s é chamada Folheação Estável e a folheação \mathcal{W}^u tangente a E^u é chamada Folheação Instável do difeomorfismo f

A Df -invariância do espaço tangente E^σ , $\sigma = u, s$, e a unicidade da folheação

tangente a E^σ implica na seguinte proposição.

Proposição 1.1. *A folheação \mathcal{W}^σ é f -invariante, ou seja, $f(\mathcal{W}_x^\sigma) = \mathcal{W}_{f(x)}^\sigma$*

O Teorema a seguir diz respeito a suavidade da folheação.

Teorema 1.9. *Seja f um C^r -difeomorfismo. Então a folheação \mathcal{W}^σ é contínua por folhas C^r . As folhas dependem continuamente de x na topologia C^r .*

Esse Teorema é necessário pois sabemos da Definição 1.16 que as folhas serem suaves não implica que a folheação é suave. Sua demonstração pode ser encontrada em [20].

1.4 Dinâmica Parcialmente Hiperbólica

A hiperbolicidade remonta aos tempos de Poincaré, quando foi descoberto a noção de ponto homoclínico. Mas falando da história moderna dos sistemas dinâmicos, viajamos até a década de 60, onde descobriu-se uma vasta gama de resultados sobre a estabilidade e obstruções para hiperbolicidade. Alguns nomes que marcaram época foram Peixoto, Kupka, Smale, Anosov, Palis, Mañé, Melo, Newhouse, dentre outros. Daí por diante, o estudo da dinâmica parcialmente hiperbólica começou a tomar corpo com os trabalhos de Brin, Pesin, Hirsch, Pugh e Shub.

O estudo dessa forma mais fraca de dinâmica se motiva pois os sistemas dinâmicos que satisfazem as condições de hiperbolicidade muitas das vezes são raros de serem encontrados no mundo físico. Por isso, estudou-se estratégias para enfraquecer a noção hiperbólica gerando assim propriedades mais gerais como decomposição dominada e hiperbolicidade parcial, que é um caso particular da decomposição dominada.

Definição 1.18. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e $\Lambda \subset M$ um conjunto compacto invariante. Dizemos que $T_\Lambda M = E \oplus F$ é uma **decomposição dominada** se existem $C > 0$, $0 < \lambda < 1$ satisfazendo as seguintes condições:*

a)

$$Tf(x)(E_x) = E_{f(x)}$$

$$Tf(x)(F_x) = F_{f(x)}$$

$$\forall x \in \Lambda,$$

b)

$$\frac{\|Tf^n(x) \cdot v\|}{\|v\|} \leq C \cdot \lambda^n \leq \frac{\|Tf^{-n}(x) \cdot w\|}{\|w\|}$$

$\forall v \in E, \forall w \in F, \forall x \in \Lambda, n \geq 0$. Em outras palavras, quando n é grande a maior expansão de Tf^n sobre E é menor que a maior contração de Tf^n sobre F e torna-se exponencialmente menor conforme n cresce,

c) $x \mapsto E_x$ é contínua. (Controle de ângulos)

Note que a hiperbolicidade parcial é uma decomposição dominada da forma $E = E^s \oplus E^c$ e $F = E^u$, ou $E = E^s$ e $F = E^c \oplus E^u$.

Definição 1.19. Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e Λ um conjunto compacto invariante. Dizemos que $\Lambda \subset M$ é **parcialmente hiperbólico** se $T_\Lambda M = E^1 \oplus E^2 \oplus \dots \oplus E^n$, onde pelo menos um dos subfibrados E^1 ou E^n é hiperbólico, ou seja, E^1 é uniformemente contrativo e/ou E^n é uniformemente expansor (Ver [11]). Além disso $E^2 \oplus \dots \oplus E^{n-1}$ é dominado (por baixo pela contração de E^1 e por cima pela expansão de E^n).

Em particular, podemos escrever $T_\Lambda M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$. Assim, a diferencial $Tf(x)$ contrai uniformemente se, dado $v \in Tf(x)$, $v \in E^s$ e expande uniformemente se $v \in E^u$ e pode contrair ou expandir na direção E^c , mas não contrai tanto como em E^s e nem expande tanto como em E^u .

Definição 1.20. Dizemos que a decomposição $T_\Lambda M = E^1 \oplus E^2 \oplus \dots \oplus E^n$ é **volume hiperbólico em Λ** se $\exists m > 1$ tal que o jacobiano $|\det(Tf|_{E^1}(v))| < 1$ e $|\det(Tf|_{E^m}(v))| > 1$.

Note que a definição de parcialmente hiperbólico é mais forte que o volume hiperbólico.

Exemplo 1.7. Vamos comparar o comportamento do conjunto parcialmente hiperbólico e volume hiperbólico no subfibrado E^n . Nesse caso, para a hiperbolicidade parcial todas as direções de E^n são expandidas via derivada $Tf|_{E^n}$. Por outro lado, no conjunto volume hiperbólico, dizer que $|Tf|_{E^n}(v)| > 1$ é o mesmo que dizer que a média das direções é expandida, ou seja, seu volume é expandido. Entretanto, diferente da hiperbolicidade

parcial, uma das direções pode contrair. Por exemplo, considere a função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (2x, \frac{1}{2}y, 3z)$. Sua matriz jacobiana A é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e portanto o jacobiano de A em \mathbb{R}^3 será $|\det A(v)| = 3 > 1$, o que significa que o volume hiperbólico expandiu, mas na direção da segunda coordenada contraiu, o que foi compensado com as outras direções de modo que a média ficasse acima de 1.

Definição 1.21. Dizemos que $f : M \rightarrow M$ é **absolutamente parcialmente hiperbólico** se $\Lambda = M$ é um conjunto parcialmente hiperbólico.

Exemplo 1.8. Seja $SL(d, \mathbb{Z}) = \{\text{matrizes de ordem } d \text{ com coeficientes inteiros e } \det = 1\}$. Seja $B \in SL(d, \mathbb{Z})$ com algum autovalor fora do círculo unitário do plano complexo. Considere o automorfismo linear associado $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$. Então f é parcialmente hiperbólico. De fato, basta tomar E^s associado aos autovalores com módulo < 1 , E^c associado aos autovalores com módulo $= 1$ e E^u associado aos autovalores com módulo > 1 .

Proposição 1.2. O conjunto dos difeomorfismos parcialmente hiperbólico é aberto em $\text{Dif}^k(M)$

Teorema 1.10 (Teorema de Crovisier-Pujals-Sambarino). Considere Λ um conjunto hiperbólico compacto invariante. Então qualquer difeomorfismo $f \in C^1$ pode ser aproximado por um difeomorfismo g com as seguintes características:

- Se g possui uma decomposição parcialmente hiperbólica sem poços e sem fontes, então

$$T_\Lambda M = E^s \oplus E_1^c \oplus \dots \oplus E_k^c \oplus E^u$$

onde, E_i^c é unidimensional.

- g é um difeomorfismo que exibe uma tangência homoclínica.

O Teorema diz que qualquer difeomorfismo pode ser aproximado por um difeomorfismo parcialmente hiperbólico ou por um difeomorfismo que apresente uma tangência homoclínica. Veja que o Teorema está associado a topologia C^1 .

Seja $f \in \text{Diff}^r(M)$, $r \geq 1$ e $\Lambda \subset M$ um conjunto compacto invariante de forma que Λ tem uma decomposição dominada $T_\Lambda M = E^s \oplus E^c$, $\dim E^s \geq 1$.

Definição 1.22. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno o **conjunto estável forte** de $x \in \Lambda$ é dado por

$$W^{ss}(x) = \{y \in M / \exists c > 0, \forall n \geq 0, \text{ com } d(f^n(y), f^n(x)) \leq Ce^{-\varepsilon n} \cdot \min\{m(Tf^n|_{E^c}(x)), 1\}\}$$

$$\text{onde } m(Tf^n|_{E^c}(x)) = \min \frac{\|Tf^n|_{E^c}(x)(v)\|}{\|v\|}.$$

Ou seja, $W^{ss}(x)$ é o conjunto de pontos cuja órbita converge para a órbita de x mais rápido do que todas as contrações do espaço central.

Se $T_\Lambda M = E^c \oplus E^u$, o conjunto instável forte $W^{uu}(x)$ de f é o conjunto estável forte de f^{-1} .

Teorema 1.11 (Hirsh-Pugh-Shub). *Seja $f : M \rightarrow M$, difeomorfismo de classe C^r , $r \geq 1$ e $\Lambda \subset M$ um conjunto compacto invariante tal que $T_\Lambda M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$. Então,*

- a) $\forall x \in \Lambda; W^{ss}(x)$ é uma subvariedade C^r -mergulhada, difeomorfa a $\mathbb{R}^{\dim E^s(x)}$ e tangente a $E^s(x)$.
- b) $W^{ss}(x)$ não depende de ε , desde que $\varepsilon > 0$ seja suficientemente pequeno.
- c) Sejam $x, y \in \Lambda$, então $W^{ss}(x)$ e $W^{ss}(y)$ coincidem ou são disjuntos.
- d) $\forall \eta \geq 0$, seja $D_\eta(x) \subset W^{ss}(x)$, o disco centrado em x de raio η contido na variedade estável forte, depende continuamente de x e de f na topologia C^r .

Dizemos, então, que $W^{ss}(x)$ é a variedade estável forte de $x \in \Lambda$.

Observação 1.3. (1) Se $\Lambda = M$, então $W^{ss}(x)$ é tangente a E^s em todo ponto e a recíproca vale nesse caso, ou seja, se tivermos uma C^1 -subvariedade tangente a E^s em todo ponto então ela deve estar contida em W^{ss}

(2) r não precisa ser inteiro. De fato, temos que existem todas as $[r]$ -derivadas e a $[r]$ -ésima derivada é $(r - [r])$ -Hölder.

(3) Temos que $\{W^{ss}(x)\}_{x \in \Lambda}$ forma uma laminação conhecida como laminação estável forte, denotada por \mathcal{W}^{ss} . Se $\Lambda = M$ a laminação é de fato uma folheação, cujas folhas são C^r e a variação é, a princípio, apenas contínua, ou seja, cada \mathcal{W}^{ss} é C^r mas na direção transversal é apenas contínua, sem diferenciabilidade. Veja que a laminação não está bem definida em todos os pontos, ao passo que a folheação sim.

1.4.1 A aplicação holonomia

Considere um C^2 -difeomorfismo parcialmente hiperbólico f com uma decomposição Tf -invariante do fibrado tangente

$$TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$$

satisfazendo

$$|Tf|_{E^s(x)} \leq \lambda$$

e

$$|Tf^{-1}|_{E^u(x)}^{-1} \geq \mu$$

onde $0 < \lambda < \min\{1, \mu\}$

Seja \mathcal{W}^s a folheação tangente ao espaço estável E^s . Fixe $x \in M$, $r > 0$ e considere a família de variedades locais definida por

$$\mathcal{K}(x) := \{W_i^s(z_i) : z \in B(x, r)\} \quad (1.1)$$

Escolha dois discos locais D_1 e D_2 transversais à família $\mathcal{K}(x)$, e defina a aplicação holonomia $\tau = \tau(x, \mathcal{W}) : D_1 \rightarrow D_2$ (gerado pela família de variedades locais) por

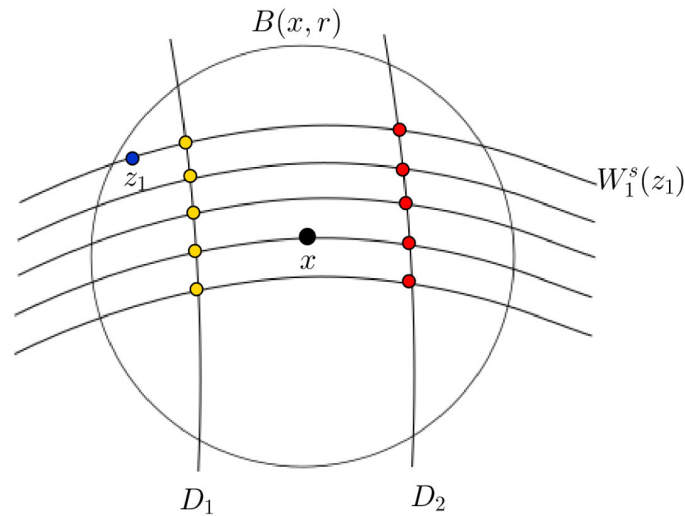
$$\tau(y) = D_2 \cap W_i(z_i) \text{ se } y = D_1 \cap W_i(z_i), z \in B(x, r)$$

Note que a holonomia é tangente a folheação W^{cu} . Além disso, τ é um homeomorfismo sobre sua imagem. Para ilustrar isso, nós representamos na Figura 1.8 a holonomia τ com domínio $D_1 \cap W_i(z_i)$ (pontos amarelos) e imagem $D_2 \cap W_i(z_i)$ (pontos vermelhos).

1.5 Teoria Ergódica

A ergodicidade remonta ao físico austríaco Boltzmann, que introduziu o termo ergódico pela primeira vez no estudo de partículas de gás. O problema da teoria cinética

Figura 1.8: Aplicação holonomia



Fonte: Autoria própria

dos gases era explicar o comportamento dos gases no nível macroscópico, como resultado estatístico de todos os movimentos das partículas. Desde então, embora em sua formulação inicial a hipótese ergódica fosse ambígua, a teoria ergódica cresceu para ser uma ferramenta útil em muitos ramos da matemática e da física. Reformulações e desenvolvimentos subsequentes transformaram a hipótese ergódica original na afirmação: *o tempo médio de visita a qualquer subconjunto mensurável E existe e é igual a medida de E , para quase todo ponto x .*

A teoria ergódica estuda o comportamento de sistemas dinâmicos relativamente a medidas que permanecem invariantes sob a ação da dinâmica. Mais precisamente, busca-se descrever as propriedades que são válidas para quase toda trajetória do sistema, relativamente à medida invariante (Ver [34]). Ao longo dos últimos anos diversas aplicações da Teoria Ergódica têm sido feitas para resolver problemas nas mais diversas áreas, desde problemas em Teoria dos Números e Topologia até aplicações em Geometria Diferencial e Probabilidade. Numa outra direção, a riqueza da motivação geralmente oriunda da Física, torna a teoria ergódica promissora. Mas transportar os resultados e heurística obtidos através de experimentos e simulações de problemas físicos para uma linguagem matemática precisa é uma tarefa árdua e que pode gerar excelentes resultados do ponto de vista matemático.

O tema central da teoria ergódica é a dinâmica das transformações que preservam

medida. Considere um conjunto mensurável $E \subset M$ com medida positiva e um ponto $x \in M$ qualquer. Estamos interessado em analisar o conjunto dos iterados de x que visitam E , ou seja

$$\{j \geq 0 : f^j(x) \in E\}$$

Sendo ainda mais preciso, o *tempo médio de visita* de x a E é dado por

$$\tau(E, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leq j \leq n-1 \mid f^j(x) \in E\} \quad (1.2)$$

É natural nos perguntarmos se tal limite existe e se o tempo médio de visita é positivo. E foi pensando em algo desse tipo que Boltzmann introduziu o termo "*ergódico*" no contexto do estudo de partículas de gás.

A hipótese ergódica citada acima afirma que para os sistemas que descrevem o movimento das partículas de um gás, o tempo médio de visita a qualquer subconjunto mensurável E existe e é igual à medida de E , para quase todo ponto x (ver [34]).

Seja $\varphi = f|_E$. Podemos reescrever 1.2 como

$$\tau(E, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) \quad (1.3)$$

A seguir definimos uma medida invariante

Definição 1.23. *Seja (M, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida e seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável. Dizemos que a medida μ é **invariante** por f se*

$$\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E) \text{ para todo conjunto mensurável } E \subset M.$$

Neste caso dizemos que f preserva μ .

Note que a definição 1.23 faz sentido uma vez que a pré-imagem de um conjunto mensurável por uma transformação mensurável ainda é um conjunto mensurável. Em outras palavras, ela significa que a probabilidade de um ponto está num dado conjunto é igual a probabilidade de que a sua imagem esteja nesse conjunto.

Definição 1.24. *Um difeomorfismo f em uma variedade Riemanniana compacta suave M preservando uma medida suave ν é dito **ergódico** se para qualquer conjunto mensurável f -invariante $E \subset M$ ou $\mu(E) = 0$ ou $\mu(M \setminus E) = 0$. Se qualquer pequena perturbação de f preservando ν for ergódica dizemos que f é **estavelmente ergódico**.*

A exemplo disso, temos o Teorema de recorrência Poincaré.

Teorema 1.12 (Teorema de recorrência de Poincaré). *Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação e μ uma medida invariante por f finita. Então para todo mensurável $E \subset M$ com $\mu(E) > 0$ e para μ -quase todo $x \in E$ existem infinitos valores de n para os quais $f^n(x) \in E$ (Ver [34]).*

Prova do Teorema 1.12. Seja E_0 o conjunto dos pontos $x \in E$ que nunca retornam para E . Primeiramente, vamos provar que E_0 tem medida nula. Para isso, observe que as pré-imagens $f^{-n}(E_0)$ são disjuntas duas-a-duas. De fato, suponhamos que existem $m > n \geq 1$ tais que $f^{-m}(E_0)$ intersecta $f^{-n}(E_0)$. Seja x um ponto na interseção e seja $y = f^n(x)$. Então $y \in E_0$ e $f^{m-n}(y) = f^m(x) \in E_0$, que está contido em E . Isso significa que y volta pelo menos uma vez a E , o que contradiz a definição de E_0 . Esta contradição prova que as pré-imagens são disjuntas duas-a-duas como afirmamos.

Observando que $\mu(f^{-n}(E_0)) = \mu(E_0)$ para todo $n \geq 1$, porque μ é invariante, concluimos que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(E_0)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f^{-n}(E_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_0)$$

Como supomos que a medida é finita, a expressão do lado esquerdo é finita. Por outro lado, à direita temos uma soma de infinitos termos, todos iguais. O único jeito dessa soma ser finita é que as parcelas sejam nulas. Portanto, devemos ter $\mu(E_0) = 0$, tal como foi afirmado.

Agora, denotemos por F o conjunto dos pontos $X \in E$ que regressam a E apenas um número finito de vezes. Como consequência direta da definição, temos que todo ponto $x \in F$ tem algum iterado $f^k(x)$ em E_0 . Ou seja,

$$F \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(E_0)$$

Como $\mu(E_0) = 0$ e μ é invariante, temos:

$$\mu(F) \leq \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(E_0)\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(f^{-k}(E_0)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_0) = 0$$

Portanto, $\mu(F) = 0$ como queríamos demonstrar. \square

A ergodicidade é só a primeira de uma série de propriedades gradualmente mais fortes utilizadas na descrição das transformações que preservam medida. Ainda assim é

uma propriedade forte no sentido em que é frequente encontrar transformações que não são ergódicas.

Por exemplo a *mesa de bilhar* origina transformações que não são ergódicas. É provado que quando o bordo da mesa de bilhar é uma circunferência então este sistema não é ergódico.

Um dos resultados fundamentais da teoria ergódica é o Teorema de Birkhoff. O Teorema que será enunciado a seguir é uma versão geral em que φ é uma função integrável qualquer:

Teorema 1.13 (Birkhoff). *Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável e seja μ uma probabilidade invariante por f . Dada qualquer função integrável $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, o limite*

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) \quad (1.4)$$

existe em μ -quase todo ponto $x \in M$. Além disso, a função $\tilde{\varphi}$ definida dessa forma é integrável e satisfaz

$$\int \tilde{\varphi}(x) d\mu(x) = \int \varphi(x) d\mu(x)$$

O Teorema de Birkhoff sairá como caso particular de um resultado mais geral, o Teorema ergódico subaditivo.

O limite $\tilde{\varphi}$ é chamado **média temporal** ou **média orbital** de φ

A proposição a seguir diz que as médias temporais são constantes ao longo de órbitas, em μ -quase todo ponto.

Proposição 1.3. *Seja $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Então,*

$$\tilde{\varphi}(f(x)) = \tilde{\varphi}(x)$$

Dizemos que uma sequência de funções $\varphi_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ é subaditiva para uma transformação $f : M \rightarrow M$ se

$$\varphi_{m+n} \leq \varphi_m + \varphi_n \circ f^m \quad \text{para todo } m, n \geq 1$$

Teorema 1.14 (Teorema subaditivo). *Seja μ uma probabilidade invariante para uma transformação $f : M \rightarrow M$ e seja $\varphi_n : M \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ uma sequência subaditiva de*

funções mensuráveis tal que $\varphi_1^+ \in L^1(\mu)$. Então a sequência $(\frac{\varphi_n}{n})_n$ converge em μ quase todo ponto para uma função f invariante $\varphi : M \rightarrow [-\infty, +\infty)$. Além disso, $\varphi^+ \in L^1(\mu)$ e

$$\int \varphi d\mu = \lim_n \frac{1}{n} \int \varphi_n d\mu = \inf_n \frac{1}{n} \int \varphi_n d\mu \in [-\infty, +\infty).$$

A prova desse Teorema pode ser encontrada em [34].

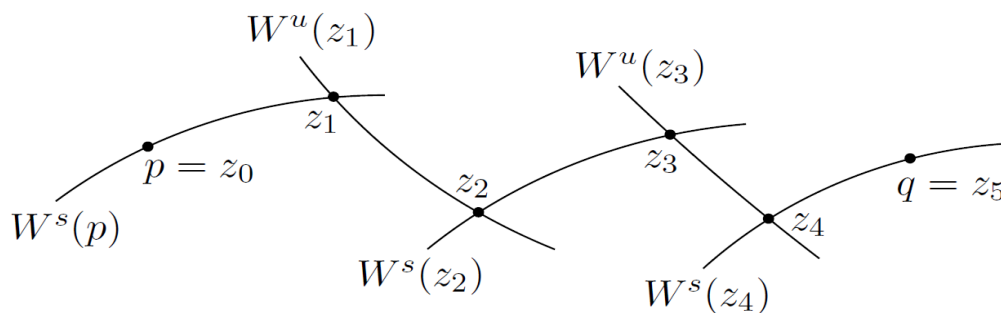
2 Acessibilidade

Neste capítulo iremos estudar a propriedade de acessibilidade de um difeomorfismo parcialmente hiperbólico usando como base o artigo de Dolgopyart e Wilkinson [13] intitulado: "stable accessibility is C^1 -dense". Este trabalho foi publicado pela revista *Astérisque* em 2003 e surgiu a partir de uma conjectura de Pugh e Shub [27].

Definição 2.1. Um *us*-caminho é um caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ constituído de um número finito de arcos consecutivos, cada um dos quais é uma curva contida numa única folha W^u ou W^s . Denotamos um *us*-caminho por $[p, q]_f$.

Por exemplo, se $l = 5$ obtemos um *us*-caminho com 5 arcos e uma coleção de 6 pontos de interseção $\{z_0 = p, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 = q\}$. (Ver figura 2.1)

Figura 2.1: Um *us*-caminho conectando os pontos p e q



Fonte: [26]

Definição 2.2. Seja $\mathcal{P}(M)$ a coleção de todos os subconjuntos da variedade M . Seja $\mathcal{P}H^r(M)$ o conjunto dos C^r -difeomorfismos parcialmente hiperbólicos de M . Dizemos que $f \in \mathcal{P}H^r(M)$ é **acessível** em $X \in \mathcal{P}(M)$ se, $\forall p, q \in X$, existir um *us*-caminho, C^1 por partes, de p para q cujo vetor tangente sempre está em $E^u \cup E^s$.

Definição 2.3. A classe de acessibilidade de $p \in M$ é o conjunto de pontos $q \in M$ que são pontos acessíveis a partir de p . Se houver apenas uma classe de acessibilidade, isto é, cada q é acessível a partir de cada p , dizemos que f tem a propriedade de acessibilidade.

Definição 2.4. Dada uma medida de volume Riemanniana μ definimos

$$\mathcal{PH}_\mu^r(M) := \{f \in \mathcal{PH}^r(M); f_*(\mu) = \mu\}$$

ou seja, $\mathcal{PH}_\mu^r(M)$ é o conjunto dos C^r -difeomorfismos parcialmente hiperbólicos de M tal que a medida μ é preservada pelo pull back.

Definição 2.5. Seja ω uma forma simplética de M definimos

$$\mathcal{PH}_\omega^r(M) := \{f \in \mathcal{PH}^r(M); f^*(\omega) = \omega\}$$

ou seja, $\mathcal{PH}_\omega^r(M)$ é o conjunto dos C^r -difeomorfismos parcialmente hiperbólicos de M tal que a forma ω é preservada pelo push forward.

Se f tiver a propriedade de acessibilidade, então $E^s \oplus E^u$ não é integrável. De fato, não existe uma folheação tal que o espaço tangente em cada ponto x da folheação seja $E^s \oplus E^u$ pois se existisse tal folheação, a classe de acessibilidade de qualquer ponto $p \in M$ seria somente uma folha da folheação passando por p , e portanto f não teria a propriedade de acessibilidade.

Definição 2.6. Se todo difeomorfismo g C^1 -próximo de f tem a propriedade de acessibilidade, dizemos que f é **acessivelmente estável**.

Definição 2.7. O difeomorfismo f é **acessível módulo** $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(M)$ se, para todo $p, q \in M$, existem $X_1, \dots, X_r \in \mathcal{X}$ e um us-caminho de f : de p para X_1 , de X_r para q e de X_m para X_{m+1} , para $m = 1, \dots, r - 1$.

Definição 2.8. Dizemos que f é **uniformemente acessível módulo** \mathcal{X} se, f é acessível módulo \mathcal{X} e $\exists N \in \mathbb{R}$ e tal que os us-caminhos são escolhidos de modo que cada arco tenha comprimento menor do que N e a quantidade de arcos seja menor do que N .

Afirmção 2.1. Se f é estavelmente acessível módulo $\{X_1, \dots, X_r\}$ e f é estavelmente acessível em cada X_i então f é estavelmente acessível.

Prova: Segue diretamente das definições 2.6 e 2.8.

Definição 2.9 (Acessibilidade Essencial). Um difeomorfismo parcialmente hiperbólico f é essencialmente acessível se todo conjunto mensurável composto pela união de classes de acessibilidade tiver volume total ou nulo.

O artigo de Dolgopyat e Wilkinson [13] surgiu de uma tentativa de provar a seguinte conjectura de Pugh e Shub.

Conjectura 2.1. *A Acessibilidade Estável é C^r -densa em $\mathcal{P}H^r(M)$ e $\mathcal{P}H_\mu^r(M)$.*

Ainda inspirado no Teorema 2.2 Pugh e Shub também conjecturaram:

Conjectura 2.2. *Um C^2 -difeomorfismo parcialmente hiperbólico preservando volume com a propriedade de acessibilidade essencial é ergódico.*

Finalmente, combinando as conjecturas 2.1 e 2.2, eles conjecturaram:

Conjectura 2.3. *A ergodicidade estável é C^r -densa em $\mathcal{P}H_\mu^r(M)$.*

A seguir enunciamos o Teorema central deste trabalho, segundo o qual nos propomos a estudar sua prova.

Teorema 2.1. *Para todo $r \geq 1$, a acessibilidade estável é C^1 densa no conjunto dos C^r -difeomorfismos parcialmente hiperbólicos de M . Além disso, se M é uma variedade simplética então a acessibilidade estável é C^1 densa no conjunto dos difeomorfismos simpléticos parcialmente hiperbólicos.*

Quando nós dizemos que o difeomorfismo f preserva volume queremos dizer que f preserva a medida de probabilidade μ que se encontra na classe de medida de um volume Riemanniano m de M . (Ver 1.23)

O Teorema 2.1 possui vários Corolários. O primeiro deles diz respeito à transitividade topológica de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos e segue imediatamente de um Teorema de Brin (Ver [7]).

Corolário 2.1. *Para $r \geq 1$, existe um conjunto C^1 -aberto e denso de difeomorfismos topologicamente transitivos em $\mathcal{P}H_\mu^r(M)$. Se M tem uma forma simplética ω , então existe um conjunto C^1 -aberto e denso de difeomorfismos transitivos em $\mathcal{P}H_\omega^r(M)$.*

Esse corolário é falso sem a suposição de que o difeomorfismo preserva volume. Nițică e Török mostraram em [24] que existe um conjunto aberto de difeomorfismos acessíveis não transitivos. Embora seja plausível que para um conjunto aberto e denso de

C^1 -difeomorfismos no espaço $\mathcal{P}^r(M)$, existam apenas um número finito de componentes de transitividade, ou seja, não é um corolário direto do Teorema 2.1.

M. Arnaud mostrou em [1] que se M é uma variedade simplética de dimensão 4, então os difeomorfismos estavelmente transitivos em $Diff_\omega^r(M)$ são parcialmente hiperbólicos. Portanto, há uma imagem completa em dimensão 4 dos difeomorfismos estavelmente transitivos, que resumimos no próximo corolário.

Corolário 2.2. *Seja M uma variedade simplética com $\dim(M) \leq 4$. O C^1 -fecho dos difeomorfismos estavelmente transitivos em $Diff_\omega^r(M)$ coincide com o C^1 -fecho dos parcialmente hiperbólicos.*

Em outras palavras, toro invariante é essencialmente o único obstáculo para transitividade topológica na categoria simplética, pelo menos se $\dim(M) \leq 4$. Dolgopyart e Wilkinson conjecturaram que o mesmo é verdadeiro no caso que preserva volume.

Conjectura 2.4. *No espaço dos difeomorfismos que preservam volume, o C^1 -fecho dos difeomorfismos estavelmente transitivos coincide com o fecho dos difeomorfismos que admitem uma decomposição dominada.*

Embora os resultados do artigo de Dolgopyart e Wilkinson possam ser úteis para atacar esta conjectura, algumas outras ideias são necessárias para resolver este problema. Aqui, observamos apenas que em [3] é apresentado um exemplo que preserva volume que estavelmente transitivo, mas não parcialmente hiperbólico. A. Tahzhibi anunciou uma prova de que esses exemplos são, de fato, estavelmente ergódicos.

A noção a seguir é naturalmente mais fraca que acessibilidade. Vamos precisar também da seguinte definição.

Definição 2.10 (*center bunched*). *Sejam $\nu, \widehat{\nu}, \gamma, \widehat{\gamma}$ funções positivas tais que*

$$(i) \quad \nu, \widehat{\nu} < 1.$$

$$(ii) \quad \nu < \gamma < \widehat{\gamma}^{-1} < \widehat{\nu}^{-1}.$$

$$(iii) \quad \|Tf(v)\| < \nu(p), \text{ se } v \in E^s(p).$$

$$(iv) \quad \gamma(p) < \|Tf(v)\| < \widehat{\gamma}^{-1} \text{ se } v \in E^c(p).$$

(v) $\widehat{\nu}^{-1} < \|Tf(v)\|$ se $v \in E^u(p)$.

onde v é qualquer vetor unitário em T_pM . Então um difeomorfismo parcialmente hiperbólico é dito *center bunched* se as funções $\nu, \widehat{\nu}, \gamma, \widehat{\gamma}$ são escolhidas tal que

$$\nu < \gamma\widehat{\gamma} \text{ e } \widehat{\nu} < \gamma\widehat{\gamma}$$

Definição 2.11. Um difeomorfismo f tal que $E^{cs} = E^s \oplus E^c$ e $E^{cu} = E^u \oplus E^c$ são integráveis é dito *dinamicamente coerente*.

Pugh e Shub provaram o seguinte teorema:

Teorema 2.2. Seja $f \in \mathcal{P}H_\mu^2(M)$. Se f é *center bunched*, *dinamicamente coerente*, *essencialmente acessível* e \mathcal{W}^c é *Lipshitziana*, então f é *ergódico*.

O Teorema 2.2 refere-se a difeomorfismos parcialmente hiperbólicos no sentido mais forte descrito anteriormente, mas recentemente Burns e Wilkinson [6] mostraram que esses resultados se estendem à classe maior de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos (ou seja, satisfazendo condições adicionais de *center bunched*).

O Teorema 2.1 implica em outro corolário que é dado a seguir

Corolário 2.3. No conjunto dos difeomorfismos *center bunched* e *dinamicamente coerentes* em $\mathcal{P}H_\mu^r(M)$, a *ergodicidade estável* é C^1 aberto e denso

O Corolário 2.3 implica que existe uma vizinhança \mathcal{U} de f , C^1 -aberta em $\mathcal{P}H_\mu^2(M)$ em que a *ergodicidade estável* é C^1 -aberta e densa, onde f é a aplicação tempo t de um fluxo Anosov, uma extensão de grupo compacto de um difeomorfismo de Anosov, um automorfismo ergódico de um toro ou uma nilvariedade, ou uma translação parcialmente hiperbólica em um espaço homogêneo compacto.

A seguir daremos uma **ideia da prova** do Teorema 2.1 do artigo de Dolgopyat e Wilkinson (Ver 2.1).

Para provar o Teorema 2.1 primeiro encontramos uma coleção de discos disjuntos de M , onde cada disco é aproximadamente tangente a direção central E^c . Escolhemos essa coleção grande o suficiente para que f seja acessível, módulo esses discos. Mais precisamente, para cada $p, q \in M$ existe uma sequência finita de *us*-caminhos de f com o

primeiro caminho começando em p e terminando em um dos discos, o último caminho começando em um disco e terminando em q . Todos os caminhos intermediários começam e terminam em discos, cada caminho começando no disco onde termina o caminho anterior. Em seguida perturbamos f em uma pequena vizinhança e vemos que se essa vizinhança e o tamanho da perturbação forem ambos suficientemente pequenos então o sistema perturbado ainda estará acessível, módulo a coleção desses discos (Ver Definição 2.7).

A estrutura da demonstração se apoiará em três lemas principais. No Lema (2.1) mostraremos que é possível perturbar f numa vizinhança desses discos por uma pequena C^1 -perturbação para obter determinado g estável e acessível. Concluímos a acessibilidade estável mostrando que quaisquer dois pontos em um dado disco podem ser conectados por um us -caminho de g e de qualquer pequena perturbação de g . Uma vez que qualquer pequena perturbação ainda é acessível módulo esses discos, isso garante a acessibilidade de g . No Lema (2.1) será o único lugar onde é essencial que a perturbação seja C^1 pequena.

Quando analisamos o efeito de perturbar f em E^u e E^s descobrimos que no ambiente C^1 a contribuição da perturbação para $E^u(p)$ e $E^s(p)$ perto de p é maior do que as contribuições combinadas ao longo do resto da órbita de p .

Observação 2.1. *Essa técnica não pode ser aplicada no ambiente C^2 . Para isso, seria necessário uma análise mais sutil e delicada levando-se em consideração os vários primeiros retornos para se estabelecer um resultado análogo a esse em C^2 .*

2.1 Demonstração do Teorema 2.1

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{P}H_\mu^r(M)$ e $\delta > 0$ dados. Nosso objetivo é encontrar $g \in \mathcal{P}H_\mu^r(M)$ estavelmente acessível com $d_{C^1}(f, g) < \delta$.

Defina uma função $\mathcal{R} : \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ da seguinte forma. Para qualquer $X \in \mathcal{P}(M)$ seja $\mathcal{R}(X)$ o menor $J \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ satisfazendo

$$f^i(X) \cap X \neq \emptyset \tag{2.1}$$

com $|i| = J + 1$. Em outras palavras, $\mathcal{R}(X)$ é um momento anterior ao primeiro retorno do difeomorfismo ao conjunto X .

Note que $\mathcal{R}(B_\rho(p)) \rightarrow \text{per}(p)$ se $\rho \rightarrow 0$. Com efeito, quando $\rho \rightarrow 0$, então por continuidade temos que $\mathcal{R}(B_\rho(p)) = \min\{|i| - 1; f^i(X) \cap X \neq \emptyset\} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \text{per}(p)$

Se p não é periódico dizemos que $\text{per}(p) = \infty$.

Em seguida fixamos um sistema de cartas locais em M . Em muitas ocasiões nos referimos a decomposição ortogonal $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^u \oplus \mathbb{R}^c \oplus \mathbb{R}^s$.

Seja $B^n(v, \rho)$ uma bola de centro $v \in \mathbb{R}^n$ e raio ρ com a norma do supremo nas coordenadas. De maneira geral, usaremos a notação $B^a(v, \rho)$, onde $a = u, c, s, c+u, c+s, u+s$ para denotar a bola de centro v e raio ρ com a norma do supremo no espaço $v + \mathbb{R}^a$.

Aplicando o Teorema de Morse sobre a equivalência das formas de volume obtemos, para qualquer $p \in M$, uma aplicação C^∞

$$\varphi_p : B^n(0, 1) \rightarrow M$$

tal que:

- 1) $\varphi_p(0) = p$
- 2) $T \circ \varphi_p$ envia o splitting $T \circ \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^u \oplus \mathbb{R}^c \oplus \mathbb{R}^s$ no splitting $T_p M = E^u \oplus E^c \oplus E^s$
- 3) φ_p envia campos livres de divergência em campos livres de divergência.
- 4) $p \mapsto \varphi_p$ é uma aplicação uniformemente contínua de M em $C^1(B^n(0, 1), M)$. A dependência de φ_p em f também é contínua.

Com relação aos campos livres de divergência citados no item (3), tratam-se de campos vetoriais com divergência zero em todos os vetores do campo, ou seja, o campo não tem poços ou fontes. Precisamente, um campo de vetores livre de divergência em \mathbb{R}^n é localmente expresso como um produto exterior de $(n - 1)$ -gradientes.

Como não assumimos que E^c é tangente a alguma folheação trabalharemos com variedades aproximadas.

Definição 2.12. Para $p \in M$, seja $V_\rho(p) = \varphi_p(B^c(0, \rho))$. Dizemos que $V_\rho(p)$ é um **disco c -admissível** de centro p e raio ρ e escrevemos $r(V_\rho(p)) = \rho$

Se D é um disco c -admissível de centro p e raio ρ , então para $\beta \in (0, 1)$ denotamos por βD o disco de centro p e raio $\beta\rho$.

Uma **família c-admissível** é uma coleção finita de discos c -admissíveis disjuntos dois-a-dois.

Se \mathcal{D} é uma família c -admissível e $\beta < 1$ então temos que

- $\beta\mathcal{D} = \{\beta D; D \in \mathcal{D}\}$
- $|\mathcal{D}| = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$
- $r(\mathcal{D}) = \sup_{D \in \mathcal{D}} r(D)$
- $\mathcal{R}(\mathcal{D}) = \mathcal{R}(|\mathcal{D}|)$

A seguir enunciamos três lemas necessários à prova do Teorema 2.1. Suas demonstrações são dadas nas secções de acessibilidade global e acessibilidade local.

Lema 2.1 (Acessibilidade em discos centrais). *Sejam $f \in \mathcal{P}H_{\mu}^r(M)$ e $\delta > 0$ dados. Então existem $J > 0$ com a seguinte propriedade: Se \mathcal{D} é uma família c -admissível com $r(\mathcal{D}) < J^{-1}$ e $\mathcal{R}(\mathcal{D}) > J$, então para todo $\sigma > 0$ e $\beta \in (0, 1)$, existe $g \in \mathcal{P}H_{\mu}^r(M)$ tal que*

- 1) $d_{C^1}(f, g) < \delta$
- 2) $d_{C^0}(f, g) < \sigma$
- 3) Para cada $D \in \mathcal{D}$, g é estavelmente acessível em βD .

Esse Lema garante não só acessibilidade em cada disco mas acessibilidade estável, e por isso será o mais trabalhoso dos três para se demonstrar.

Podemos assumir que os pontos fixos de f^i são isolados, para todo $i \geq 1$. Essa propriedade é C^r -densa em $Diff_{\mu}^r(M)$, isto é, o conjunto dos C^r -difeomorfismos que tem essa propriedade é denso. Com essa suposição adicional obtemos o seguinte Lema.

Lema 2.2 (Acessibilidade módulo discos centrais). *Seja $f \in \mathcal{P}H_{\mu}^r(M)$ dado. Suponha que os pontos fixos de f^i são isolados para todo $i \geq 1$. Então, para todo $J > 0$ existe uma família c -admissível \mathcal{D} tal que*

- 1) $r(\mathcal{D}) < J^{-1}$
- 2) $\mathcal{R}(\mathcal{D}) > J$

3) f é uniformemente acessível módulo $\frac{1}{2}\mathcal{D}$

Em outras palavras, existe um conjunto denso em $\mathcal{P}H_\mu^r(M)$ tal que todo elemento desse conjunto tem uma forma fraca de acessibilidade.

A seguir temos o último dos três Lemas que nos ajudarão a provar o Teorema 2.1.

Lema 2.3 (Persistência de acessibilidade módulo \mathcal{D}). *Existe $\delta_0 > 0$ de forma que, dado $\delta < \delta_0$, dada uma família c -admissível \mathcal{D} , com f uniformemente acessível módulo $\frac{1}{2}\mathcal{D}$ e dado $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$, $\exists \sigma > 0$ tal que qualquer $g \in \mathcal{P}H_\mu^r(M)$ satisfazendo*

$$1) d_{C^1}(f, g) < \delta$$

$$2) d_{C^0}(f, g) < \sigma$$

é acessível módulo $\beta\mathcal{D}$ (e conseqüentemente g é estavelmente acessível módulo $\beta\mathcal{D}$, pois 1) e 2) sejam condições abertas)

Note que os Lemas 2.2 e 2.3 complementam um ao outro. O Lema 2.2 implica uma acessibilidade mais fraca no sentido de ser acessível módulo os discos. Isso enfraquece a noção pois dentro de cada disco o us -caminho não necessariamente irá se cruzar nas variedades estáveis e instáveis. O Lema 2.3 diz que se as propriedades forem abertas então é possível obter g acessível módulo os discos.

A prova do Teorema 2.1 segue dos lemas 2.1, 2.2 e 2.3. Com efeito, sejam f e δ dados. Após uma perturbação C^r -pequena podemos assumir que os pontos fixos de f^i são isolados $\forall i$. Podemos assumir que $\delta < \delta_0$, onde δ_0 é dado pelo Lema 2.3.

Escolha J de acordo com o Lema 2.1. Pelo Lema 2.2 existe uma família c -admissível \mathcal{D} , com $\mathcal{R}(\mathcal{D}) > J$ e $r(\mathcal{D}) < J^{-1}$ tal que f é acessível módulo $\frac{1}{2}\mathcal{D}$.

Agora fixe $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$ e escolha σ de acordo com o Lema 2.3. Aplicando o Lema 2.1 obtemos $g \in \text{Diff}_\mu^r(M)$ com $d_{C^1}(f, g) < \delta$ e $d_{C^0}(f, g) < \sigma$ tal que g é estavelmente acessível em $\beta\mathcal{D}$ com $D \in \mathcal{D}$. Pelo Lema 2.3 g também é estavelmente acessível módulo $\beta\mathcal{D}$.

Portanto g é estavelmente acessível. Isso mostra o Teorema 2.1. \square

Para completarmos a prova do Teorema 2.1 precisamos mostrar que também valem os três Lemas apresentados anteriormente.

As provas dos Lemas 2.2 e 2.3 serão apresentadas na próxima seção e a prova do Lema (2.1) é dada na seção 2.2.

Os argumentos da seção 2.2 tornam-se mais simples se E^c for integrável, isto é, se existir uma folheação \mathcal{W}^c tal que o espaço tangente em cada ponto $x \in \mathcal{W}^c$ é igual à E^c . Assim, poderíamos trabalhar com discos em E^c ao invés de discos c -admissíveis. Nesse caso, para construir uma família de discos centrais satisfazendo as condições do Lema 2.2 deve-se tomar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, escolher $\{p_j\}$ e tomar \mathcal{D} como a união de discos centrais unitários centrados em p_j . Caso E^c não seja integrável, a demonstração torna-se muito mais difícil pois precisamos trabalhar com discos que são aproximadamente tangentes a E^c , no entanto a ideia permanece a mesma. A parte mais difícil da prova é a seção 2.3 onde a abundância de C^1 -perturbações é crucial.

2.2 Acessibilidade Global

Nessa seção vamos provar os Lemas 2.2 e 2.3

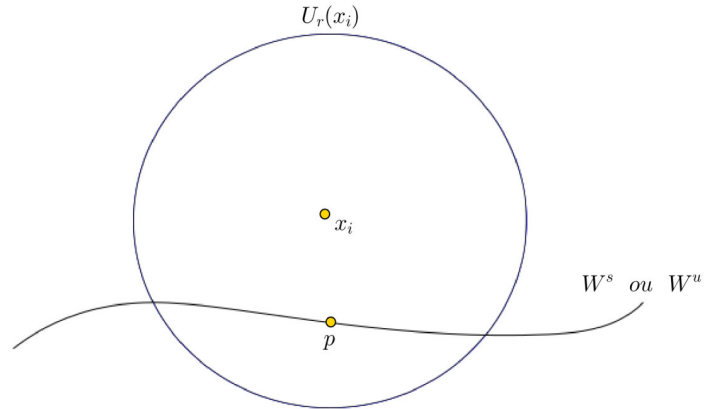
Demonstração do Lema 2.2. Seja $J > 0$ dado. Defina $A := \{p \in M; \text{per}(p) \geq J + 2\}$. Como os pontos fixos de f^j com $j < J + 2$ são isolados então existem $x_1, \dots, x_m \in M$ tais que $A = M \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$. Para $\rho > 0$ seja $U_\rho(p) := \varphi_p(B^n(0, \rho))$.

Lema 2.4. *Se $r > 0$ é suficientemente pequeno, então todo $p \in \bigcup U_r(x_i)$ pode ser conectado a um ponto em $M \setminus \bigcup U_r(x_i)$ por um us-caminho com um único arco. (Ver Figura 2.2)*

Seja r de acordo com o Lema 2.4 e seja $A_r = M \setminus \bigcup U_r(x_i)$. Suponha que r seja suficientemente pequeno de modo que A_r seja conexo. Como A_r é compacto e contido em A então existe $\rho_0 < \frac{1}{2J}$ ($\Rightarrow 2\rho_0 < J^{-1}$) tal que $\mathcal{R}(U_{2\rho_0}(q)) > J, \forall q \in A_r$.

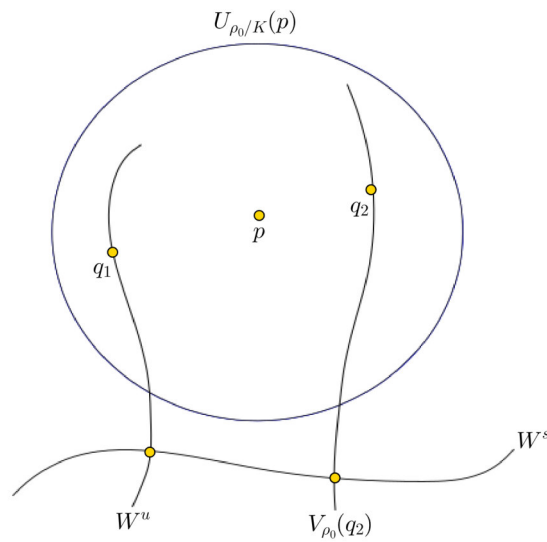
Lema 2.5. *Existe $K > 1$ tal que, para ρ_0 suficientemente pequeno, para todo $p \in M$ e para todo $q_1, q_2 \in U_{\rho_0/K}(p)$ existe um us-caminho, com dois ou menos arcos de q_1 para algum ponto de $V_{\rho_0}(q_2)$. (Ver Figura 2.3)*

Figura 2.2: us -caminho conectando $U_r(x_i)$ a $M \setminus \cup U_r(x_i)$



Fonte: Autoria própria

Figura 2.3: us -caminho conectando q_1 a q_2



Fonte: Autoria própria

De fato, como a decomposição do fibrado tangente a folheação é uniformemente contínua e os espaços E^s , E^c e E^u são transversais então segue que o ângulo entre esses espaços permanece uniforme e diferente de zero ao longo do transporte paralelo em um caminho diferenciável.

O Lema a seguir é chave.

Lema 2.6. *Seja $K > 1$. Se ρ_0 suficientemente pequeno, então existe uma cobertura de A_r por um número finito de vizinhanças U_1, \dots, U_k da forma $U_i = U_{\rho_0/K}(q_i)$ e para*

$i = 1, \dots, k$, os pontos $p_i \in U_i$ são tais que

$$\begin{aligned} V_{2\rho_0}(p_i) \cap V_{2\rho_0}(p_j) &= \emptyset \quad \forall i \neq j \text{ e} \\ V_{2\rho_0}(p_i) \cap f^m(V_{2\rho_0}(p_j)) &= \emptyset \quad \forall i, j \text{ e } 0 < |m| \leq J \end{aligned}$$

Assumindo como verdade (por enquanto) o Lema 2.6 vamos concluir a prova do Lema 2.2.

Sejam U_1, \dots, U_k e p_1, \dots, p_k dados pelo Lema 2.6. Para $i = 1, \dots, c$, seja $D_i = V_{2\rho_0}(p_i)$. Note que a coleção $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$ satisfaz as condições 1) e 2) do Lema 2.2, se ρ_0 é suficientemente pequeno. De fato, temos que

$$1) \quad r(\mathcal{D}) = \sup_{D_i \in \mathcal{D}} r(D_i) = \sup_{p_i \in U_i} r(V_{2\rho_0}(p_i)) = \sup(2\rho_0) \leq J^{-1}$$

onde $U_i = U_{\rho_0/K}(q_i)$, $K > 1$, ρ_0 suficientemente pequeno.

$$\begin{aligned} 2) \quad \mathcal{R}(\mathcal{D}) &= \mathcal{R}(\cup_{D_i \in \mathcal{D}} D_i) = \mathcal{R}(\cup_{p_i \in U_i} V_{2\rho_0}(p_i)) = \\ &= \min\{|i| - 1; f^i(\cup_{p_i \in U_i} V_{2\rho_0}(p_i)) \cap (\cup_{p_i \in U_i} V_{2\rho_0}(p_i)) \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

onde esse mínimo é maior do que J , pois pelo Lema 2.6 temos

$$f^i(V_{2\rho_0}(p_i)) \cap (\cup_{p_j \in U_j} V_{2\rho_0}(p_j)) = \emptyset$$

$\forall i, j$ e $0 < |i| - 1 < |i| \leq J$. Portanto vale a condição 2).

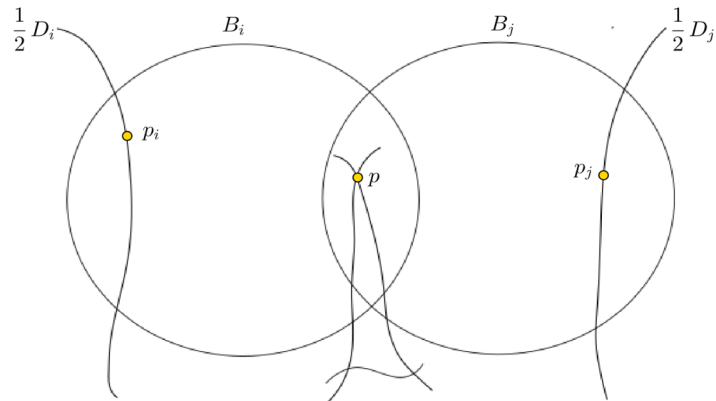
O Lema 2.5 implica que, para todo $p \in B_i$ existe um us -caminho com dois ou menos arcos de p para algum ponto de $\frac{1}{2}D_i$. Daí, segue que se $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ existe um us -caminho com 4 ou menos arcos de algum ponto de $\frac{1}{2}D_i$ para algum ponto de $\frac{1}{2}D_j$. (Ver Figura 2.4)

Como A_r é conexa e as bolas B_i, \dots, B_k cobrem A_r nós obtemos, para qualquer i, j , sequência de discos $D_{a_0} = D_i, D_{a_1}, \dots, D_{a_l} = D_j$ tal que $\frac{1}{2}D_{a_m}$ é conectado a $\frac{1}{2}D_{a_{m+1}}$ por um us -caminho para $m = 0, \dots, l - 1$.

Portanto, para qualquer $p, q \in A_r$ existe uma sequência de discos D_{b_0}, \dots, D_{b_s} e um us -caminho de p para $\frac{1}{2}D_{b_0}$, de q para $\frac{1}{2}D_{b_s}$ e de $\frac{1}{2}D_{b_m}$ para $\frac{1}{2}D_{b_{m+1}}$, para $m = 0, \dots, s - 1$. O comprimento e o número de arcos desses caminhos é claramente limitado.

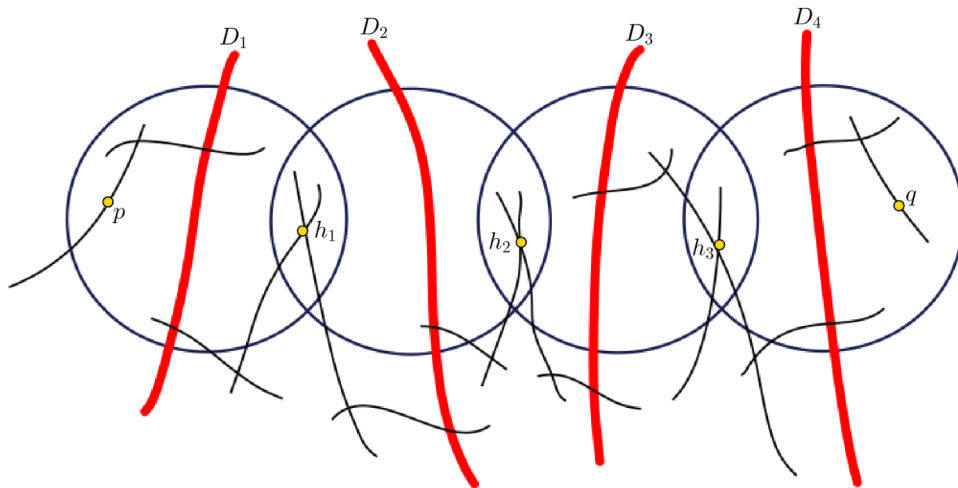
Como qualquer ponto de $M \setminus A_r = \bigcup B_r(x_i)$ pode ser conectado a um ponto em A_r por um us -caminho com um arco, então f é uniformemente acessível módulo $\{\frac{1}{2}D_1, \dots, \frac{1}{2}D_k\}$ (Ver Figura 2.5). Isso prova o Item 3) e portanto segue o Lema 2.2.

Figura 2.4: Um us -caminho conectando $\frac{1}{2}D_i$ a $\frac{1}{2}D_j$



Fonte: Autoria própria

Figura 2.5: f é acessível módulo $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_4\}$



Fonte: Autoria própria

Entretanto, se $q \notin A_r$, então pelo Lema 2.4 existe um us -caminho de q que contém $m \in A_r$ (Ver Figura 2.6).

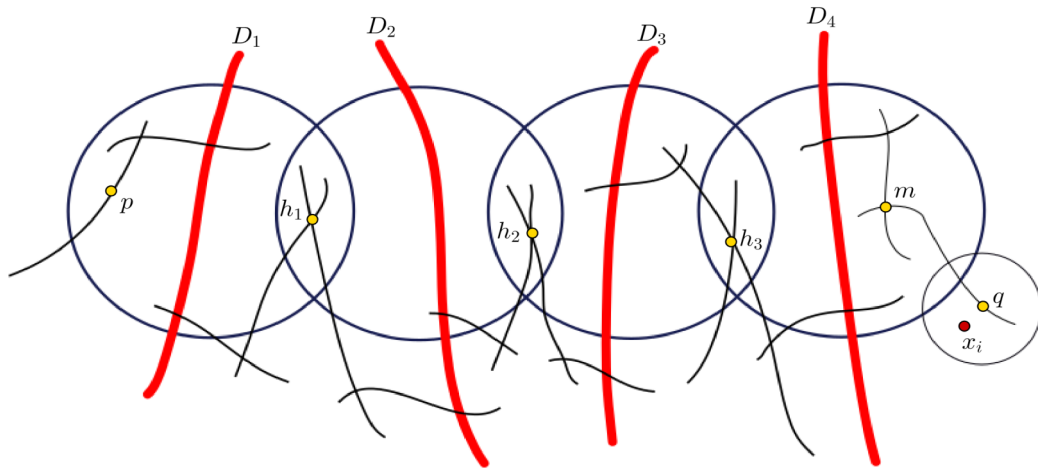
□

Retornemos pois, à prova do Lema (2.6)

Demonstração do Lema 2.6. Começamos a prova com o Lema de cobertura.

Lema 2.7 (Lema de cobertura). *Para qualquer $C > 0$ existe um inteiro $N > 0$ tal que, para todo conjunto compacto $A \subset M$ para $\rho > 0$ suficientemente pequeno, e existem*

Figura 2.6: f é acessível módulo $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_4\}$ caso $q \notin A_r$



Fonte: Autoria própria

$q_1, \dots, q_k \in A$ com as seguintes propriedades para $i = 1, \dots, k$:

$$1) A \subseteq B_\rho(q_1) \cup \dots \cup B_\rho(q_k)$$

$$2) \#\{j; B_{C\rho}(q_i) \cap B_{C\rho}(q_j) \neq \emptyset\} \leq N$$

Demonstração do Lema 2.7. Existe $K > 0$ tal que para todo $\rho < 1$ e todo $p \in M$, o volume da bola $B_\rho(p)$ está entre ρ^n/K e $K\rho^n$. Seja $N = (4C + 2)^n K^2$. Este é um limite superior para o número de bolas disjuntas de raio $\rho/2$ que pode caber dentro de uma bola de raio $(2C + 1)\rho$.

Definição 2.13. Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação contínua num espaço métrico M , não necessariamente compacto e seja $K \subset M$ um subconjunto compacto qualquer. Quando M é compacto basta considerar $K = M$. Assim, dados $\rho > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, dizemos que um conjunto $E \subset M$ é um (n, ρ) -**gerador de K** (ou simplesmente ρ -gerador), se para todo $x \in K$, existe $a \in E$ tal que $d(f^i(x), f^i(a)) < \rho$ para todo $i \in \{0, \dots, n - 1\}$.

Em outras palavras,

$$K \subset \bigcup_{a \in E} B(a, n, \rho),$$

onde $B(a, n, \rho) = \{x \in M : d(f^i(x), f^i(a)) < \rho \text{ para } i = 0, \dots, n - 1\}$ é a *bola dinâmica* de centro a , comprimento n e raio ρ .

Também introduzimos a seguinte noção dual.

Definição 2.14. *Dados $\rho > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, dizemos que um conjunto $E \subset K$ é (n, ρ) -separado (ou simplesmente ρ -separado) se dados $x, y \in E$, existe $j \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que $d(f^j(x), f^j(y)) \geq \rho$. Em outras palavras, se $x \in E$, então $B(x, n, \rho)$ não contém nenhum outro ponto de E .*

Sejam A e ρ dados. Seja $S_\rho \subset M$ um subconjunto maximal ρ -separado de A . O conjunto S_ρ existe pela compacidade de A . Afirmamos que S_ρ é ρ -gerador de A . De fato, pois caso contrário existiria $x \in A$, com $x \notin S_\rho$, tal que $d(x, y) > \rho$, $\forall y \in S_\rho$, o que contradiz a maximalidade de S_ρ .

Consequentemente, se q_1, \dots, q_k são elementos de S_ρ , então

$$A \subset B_\rho(q_1) \cup \dots \cup B_\rho(q_k)$$

Para $p \in S_\rho$ seja $N(p) := \{q \in S_\rho; B_{C\rho}(p) \cap B_{C\rho}(q) \neq \emptyset\}$. Para cada $q \in N(p)$, a distância $d(p, q) < 2C\rho$, e então $B_{\frac{\rho}{2}}(q) \subset B_{(2C+1)\rho}(p)$. Como $d(S_\rho, A) \geq \rho$, então $B_{\frac{\rho}{2}}(q) \cap B_{\frac{\rho}{2}}(q') = \emptyset$ para $q, q' \in N(p)$. Portanto, como $\#N(p) \leq N$ então segue o Lema de cobertura.

□

O Lema 2.7 implica o seguinte Corolário:

Corolário 2.4 (Lema de cobertura forte). *Seja $C, J > 0$ dados. Existe um inteiro $N > 0$ tal que, para qualquer conjunto compacto $A \subseteq M$, e para qualquer $\rho > 0$ existe $q_1, \dots, q_k \in A$ com as seguintes propriedades para $i = 1, \dots, k$:*

- $A \subseteq U_\rho(q_1) \cup \dots \cup U_\rho(q_k)$
- $\#\{j; U_{C\rho}(q_i) \cap f^m(U_{C\rho}(q_j)) \neq \emptyset, \text{ para algum } |m| < J\} \leq N$

Voltemos então à demonstração do Lema 2.6. Seja $\rho_0 < \frac{1}{2J}$, $\rho_1 = \frac{\rho_0}{K}$ e $\rho_2 = 4\rho_0$. Portanto $\rho_1 < \rho_0 < \rho_2$. Com essa notação temos que

$$\mathcal{R}(U_{\rho_2}(p)) = \mathcal{R}(U_{4\rho_0}(p)) > \mathcal{R}(U_{2\rho_0}(p)) > J, \forall p \in A_r$$

Para $p \in M$ e $\rho > 0$ definimos $T_\rho(p)$ como a componente conexa de p em $\varphi_p(B^{u+s}(0, \rho))$. Para $d(p, q)$ pequena o suficiente, a aplicação $\varphi_q^{-1}\varphi_p$ distorce a estrutura euclidiana por um fator ≤ 1.5 . Em outras palavras, como $\varphi_q^{-1}\varphi_p \in C^1$ e M é uma

variedade compacta, então a norma da derivada de $\varphi_q^{-1}\varphi_p$ assume o máximo em 1.5. Assim, considerando uma bola euclidiana de volume V , temos que $\varphi_q^{-1}\varphi_p(V) \leq 1.5V$.

Suponha que ρ_2 seja pequena o suficiente para que esse limite de distorção se mantenha em todo $p, q \in U_{\rho_2}(z)$. A partir disso, para todo $p \in M$ e todo $q \in T_{\rho_1}(p)$

$$V_{2\rho_0}(q) \subset U_{\rho_1+3\rho_0}(p) \subset U_{\rho_2}(p) \quad (2.2)$$

A segunda inclusão segue das definições de ρ_0, ρ_1 e ρ_2 pois

$$\rho_1 + 3\rho_0 = \frac{\rho_0}{K} + 3\rho_0 \leq 4\rho_0 = \rho_2.$$

Tomando $C = 4K$, $A = A_r$ e $\rho = \rho_1$ temos que,

$$C\rho = 4K\rho_1 = 4K \cdot \frac{\rho_0}{K} = 4\rho_0 = \rho_2$$

Desse modo, aplicando o Corolário 2.4 existem $N > 0$ e $q_1, \dots, q_k \in A_r$ tal que

- (i) $A_r = U_{\rho_1}(q_1) \cup \dots \cup U_{\rho_1}(q_k)$
- (ii) $\#\{j / U_{\rho_2}(q_i) \cap f^m(U_{\rho_2}(q_j)) \neq \emptyset, \text{ para algum } |m| < J\} \leq N$

Para $i = 1, \dots, k$, seja $U_i = U_{\rho_1}(q_i)$. As vizinhanças U_1, \dots, U_k cobrem A_r . Daí, escolhamos p_1, \dots, p_k indutivamente. Seja $p_1 = q_1$. Como $V_{2\rho_0}(p_1) \subset U_{\rho_2}(p_1)$ e $\mathcal{R}(U_{\rho_2}(p_1)) > J$ temos que

$$V_{2\rho_0}(p_1) \cap f^m(V_{2\rho_0}(p_1)) = \emptyset$$

para $0 < |m| \leq J$.

Fixando $i > 1$ e suponha que os pontos p_1, \dots, p_{i-1} já foram escolhidos. Quanto a p_i queremos escolher tal que

$$V_{2\rho_0}(p_i) \cap f^m(V_{2\rho_0}(p_i)) = \emptyset$$

com $0 < |m| \leq J$, e

$$V_{2\rho_0}(p_i) \cap f^m(V_{2\rho_0}(p_j)) = \emptyset$$

com $0 < |m| \leq J$ e $j < i$. A primeira das duas propriedades é satisfeita se nós escolhermos p_i tal que $V_{2\rho_0}(p_i) \subset U_{\rho_2}(q_i)$. Pela equação 2.2 isto será verdade se nós escolhermos $p_i \in T_{\rho_1}(q_i)$. Portanto, vamos encontrar $p_i \in T_{\rho_1}(q_i)$ tal que

$$V_{2\rho_0}(p_i) \cap f^m(V_{2\rho_0}(p_j)) = \emptyset \quad (2.3)$$

para $0 < |m| \leq J$ e $j < i$. A vizinhança $U_{\rho_2}(q_i)$ intersecta no máximo N conjuntos do tipo $f^m(U_{\rho_2}(q_j))$ para $m \in (-J, J)$. Daí, seja

$$\mathcal{J}_i := \{(j, m); U_{\rho_2}(q_i) \cap f^m(U_{\rho_2}(q_j)) \neq \emptyset, \text{ onde } j < i, |m| < J\}$$

Portanto, $\#\mathcal{J}_i \leq N$. Para $q \in M$ e $|m| \leq J$, seja $V_\rho^m(q)$ a componente conexa de $f^m(q)$ em $U_\rho(f^m(q)) \cap f^m(V_1(q))$

Consequentemente existe $C_0 \geq 1$ tal que para todo $p, q \in M$,

$$(i) \ V_{C_0\rho_2}^m(q) \supseteq f^m(V_{2\rho_0}(q))$$

(ii) Se $U_{\rho_2}(p) \cap f^m(U_{\rho_2}(q)) \neq \emptyset$ e ρ_0 suficientemente pequeno, então $V_{C_0\rho_2}^m(q)$ intersecta $T_{C_0\rho_1}$ em exatamente um ponto.

Para $(j, m) \in \mathcal{J}_i$, seja $p'_{j,m}$ o ponto de interseção de $V_{C_0\rho_2}^m(q)$ e $T_{C_0\rho_1}(q_i)$, isto é

$$\{p'_{j,m}\} = V_{C_0\rho_2}^m(p_j) \cap T_{C_0\rho_1}(q_i)$$

Considere a coleção desses pontos

$$\mathcal{P}_i = \{p'_{j,m}; (j, m) \in \mathcal{J}_i\} \subset T_{C_0\rho_1}(q_i)$$

Os pontos de $\varphi_{q_i}^{-1}(\mathcal{P}_i)$ estão sobre $B^{u+s}(0, C_0\rho_1) \subset \mathbb{R}^n$. Assim temos que existe $C_1 > 0$ tal que, para qualquer $\rho > 0$ e qualquer coleção finita de pontos $\mathcal{Q} \subset B^{u+s}(0, C_0\rho)$ existe um ponto $v \in B^{u+s}(0, C_0\rho)$ tal que $d(v, \mathcal{Q}) \geq \frac{\rho}{C_1\#\mathcal{Q}}$.

Aplicando este fato aos pontos de $\varphi_{q_i}^{-1}(\mathcal{P}_i)$ nós concluímos que existe um ponto $p_i \in T_{\rho_1}(q_i) \subset U_i$ tal que para todo $p \in \mathcal{P}_i$,

$$\|\varphi_{q_i}^{-1}(p_i) - \varphi_{q_i}^{-1}(p)\| \geq \frac{\rho_1}{C_1\#\mathcal{P}_i} \geq \frac{\rho_1}{C_1N} \quad (2.4)$$

Afirmamos que se ρ_0 é suficientemente pequeno então p_i , satisfaz 2.3, isto é, para todo $j < i$ e $|m| \leq J$,

$$V_{2\rho_0}(p_i) \cap f^m(V_{2\rho_0}(p_j)) = \emptyset$$

De fato, a afirmação é verdadeira para (j, m) tais que $U_{\rho_2}(q_i) \cap f^m(U_{\rho_2}(q_j)) = \emptyset$. Então, suponha que $(j, m) \in \mathcal{J}_i$. Vamos mostrar que

$$V_{2\rho_0}(p_i) \cap V_{C_0\rho_2}^m(p_j) = \emptyset$$

o que implicará o resultado, pois $V_{C_0\rho_2}^m(p_j) \supseteq f^m(V_{2\rho_0}(p_j))$.

Vamos analisar o que acontece em \mathbb{R}^n . Aplicando $\varphi_{p_i}^{-1}$, os conjuntos $V_{2\rho_0}(p_i)$ e $V_{C_0\rho_2}^m(p_j)$ são respectivamente $B^c(0, 2\rho_0)$ e um conjunto que chamaremos de W . Mostraremos que $B^c(0, 2\rho_0)$ e W são disjuntos, para ρ_0 suficientemente pequenos. Isso será suficiente para mostrar que $V_{2\rho_0}(p_i) \cap V_{C_0\rho_2}^m(p_j) = \emptyset$ pois φ_{p_i} é homeomorfismo. Por outro lado, o conjunto $V_{C_0\rho_2}^m(p_j)$ é um disco C^1 , tangente a M no ponto $f^m(p_j)$ em $E^c(f^m(p_j))$. Assim, W é um disco C^1 , tangente no ponto $w_1 \in W$ para a distribuição uniformemente contínua $T\varphi_{p_i}^{-1}(E^c)$. Note que a distribuição $T\varphi_{p_i}^{-1}(E^c)$ coincide com \mathbb{R}^c em p_i .

Seja $w_2 = \varphi_{p_i}^{-1}(p'_{j,m}) \in W$. Segue da equação (2.4) que

$$\|w_2\| = \|\varphi_{p_i}^{-1}(p_i) - \varphi_{p_i}^{-1}(p'_{j,m})\| \geq \frac{2\rho_1}{3C_1N} \quad (2.5)$$

Todas essas afirmações - sobre a suavidade de W , continuidade da distribuição $T\varphi_{p_i}^{-1}E^c$, etc. se mantém uniformemente sobre p_i, ρ_0 e $|m| < J$. Assim, para resumir as observações anteriores, nós temos uma constante $C_2 > 0$ e funções $\theta_1, \theta_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, todas independentes de p_i, ρ_0 e m , de modo que W está contido no gráfico de uma função $F : B^c(0, C_2\rho_0) \rightarrow \mathbb{R}^{u+s}$, de classe C^1 com

$$(1) \|DF(x_1)\| \leq \theta_1(\|x_1\|) \text{ para algum } x_1 \in B^c(0, C_2\rho_0) \text{ (} x_1 \text{ corresponde ao ponto } w_1 \in W)$$

$$(2) \|F(x_2)\| \geq \frac{\rho_0}{C_2} \text{ para algum } x_2 \in B^c(0, C_2\rho_0) \text{ (} x_2 \text{ corresponde ao ponto } w_2 \in W)$$

$$(3) \|F(y) - F(x) - DF(x)(y - x)\| \leq \theta_2(\|y - x\|) \text{ para todo } x, y \in B^c(0, C_2\rho_0)$$

$$(4)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \theta_1(r) = 0, \quad e \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\theta_2(r)}{r} = 0$$

Afirmamos que se ρ_0 for pequeno o suficiente então $\|F(x)\| > 0$, para todo $x \in B^c(0, C_2\rho_0)$. Isso é suficiente para mostrar que $W \cap B^c(0, C_2\rho_0) = \emptyset$ pois o ângulo W e $B^c(0, C_2\rho_0)$ será positivo e portanto tais conjuntos são transversais com dimensões complementares. Segue do item (3) que para todo $x \in B^c(0, 2\rho_0)$ e para algum $x_1, x_2 \in B^c(0, C_2\rho_0)$ temos

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(x_1)\| &\leq \|DF(x_1)(x - x_1)\| + \theta_2(\|x - x_1\|) \leq \\ &\leq \|DF(x_1)\| \cdot \|x - x_1\| + \theta_2(\|x - x_1\|) \leq \theta_1(\|x_1\|) \cdot \|x - x_1\| + \theta_2(\|x - x_1\|) \end{aligned}$$

$$\leq \theta_1(C_2\rho_0)2C_2\rho_0 + \theta_2(2C_2\rho_0)$$

Analogamente, $\|F(x_2) - F(x_1)\| \leq \theta_1(C_2\rho_0)2C_2\rho_0 + \theta_2(2C_2\rho_0)$. Assim, pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned} \|F(x)\| &= \|F(x) + F(x_1) - F(x_1) + F(x_2) - F(x_2)\| \geq \\ &\geq \|F(x_2)\| - \|F(x_2) - F(x_1)\| - \|F(x_1) - F(x)\| \\ &\geq \frac{\rho_0}{C_2} - 2[\theta_1(C_2\rho_0)2C_2\rho_0 + \theta_2(2C_2\rho_0)] \\ &= \frac{\rho_0}{C_2} - 2C_2\rho_0\theta_1(2C_2\rho_0) - 2\theta_2(2C_2\rho_0). \end{aligned}$$

Se ρ_0 for suficientemente pequeno, essa quantidade é positiva. Isso implica que W é disjunto de $B^c(0, 2\rho_0)$, que é o resultado desejado.

□

Demonstração do Lema 2.3. Lembre-se que um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é parcialmente hiperbólico se o fibrado tangente a M se decompõe como uma soma direta Tf -invariante $TM = E^u \oplus E^c \oplus E^s$ tal que Tf expande uniformemente todos os vetores em E^u e contrai uniformemente todos os vetores em E^s , enquanto os vetores em E^c não são contraídos tão fortemente quanto os vetores de E^s nem expandidos tão fortemente quanto os vetores de E^u . Mais precisamente, para cada $p \in M$, existem $0 < a_p < b_p < 1 < B_p < A_p$, tal que:

$$\|T_p f|_{E^s}\| \leq a_p < b_p \leq m(T_p f|_{E^c}) \leq \|T_p f|_{E^c}\| \leq B_p < A_p \leq m(T_p f|_{E^u}) \quad (2.6)$$

onde $m(T) = \|T^{-1}\|^{-1}$

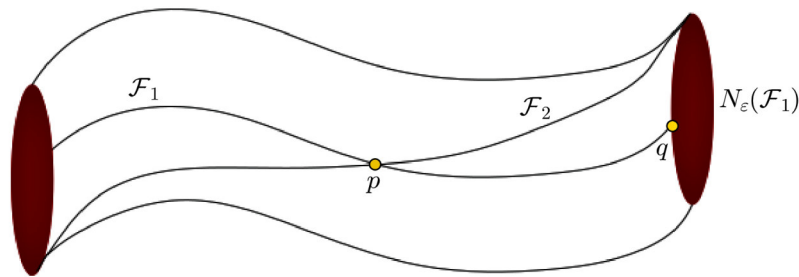
Desejamos passar das condições infinitesimais dadas na definição de hiperbolicidade parcial para condições locais. Para isso seja

$$\begin{aligned} \bar{a}_p(r) &= \max_{q \in B_r(p)} \|T_q f|_{E^s(q)}\| \\ \bar{b}_p(r) &= \min_{q \in B_r(p)} m(T_q f|_{E^c(q)}) = \min_{q \in B_r(p)} \{\|T_q^{-1} f|_{E^c(q)}\|^{-1}\} \\ \bar{B}_p(r) &= \max_{q \in B_r(p)} \|T_q f|_{E^c(q)}\| \\ \bar{A}_p(r) &= \min_{q \in B_r(p)} m(T_q f|_{E^u(q)}) = \min_{q \in B_r(p)} \{\|T_q^{-1} f|_{E^u(q)}\|^{-1}\} \end{aligned}$$

Pela continuidade de Tf escolhemos $r_0 > 0$ e $\theta < 1$ tal que $\bar{a}_p(r_0) < \theta \bar{b}_p(r_0)$ e $\bar{A}_p(r_0) < \theta \bar{B}_p(r_0)$. Fixaremos r_0 e escreveremos apenas \bar{a}_p , \bar{b}_p , \bar{A}_p e \bar{B}_p .

Sejam \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 folheações contínuas com folhas de classe C^1 em M . Dizemos que \mathcal{F}_2 é ϵ (C^0 -) próximo de \mathcal{F}_1 se dados p, q qualquer numa mesma folha de \mathcal{F}_1 com $d_{\mathcal{F}_1}(p, q) \leq 1$, tivermos uma folha da folheação \mathcal{F}_2 passando por p e intersectando a ϵ -bola centrada em q . (Ver Figura 2.7)

Figura 2.7: A Folheação \mathcal{F}_2 está ϵ (C^0 -) próximo de \mathcal{F}_1



Fonte: Autoria própria

Se a folheação \mathcal{W}_g^u é ϵ (C^0 -) próxima de \mathcal{W}_f^u e \mathcal{W}_g^s é ϵ (C^0 -) próxima de \mathcal{W}_f^s então g é acessivelmente estável módulo βD , $\forall \epsilon > 0$. Portanto precisamos mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe $\sigma > 0$ tal que as condições do Lema (2.3) com este σ implicam as ϵ -proximidades das folheações dinâmicas de g com as de f . Assim, teremos provado que para todo $p, q \in B_{\frac{r_0}{2}}^s(f, p)$, a interseção $W^s(g, p) \cap B_\epsilon(q) \neq \emptyset$. (Isto é, substituímos 1 na distância $d_{\mathcal{F}_1}$ por $\frac{r_0}{2}$, o que é suficiente pois a bola unitária pode ser coberta por um número finito de bolas de raio $\frac{r_0}{2}$).

Vamos fazer o caso em que \mathcal{W}_g^s é ϵ (C^0 -) próxima de \mathcal{W}_f^s . O outro é inteiramente análogo, basta considerar a dinâmica de f^{-1} .

Defina $\alpha_p(n)$ por

$$\alpha_p(n) := \alpha_p \cdot \alpha_{f(p)} \cdots \alpha_{f^{n-1}(p)}$$

onde $\alpha \in \{\bar{a}, \bar{A}, \bar{b}, \bar{B}\}$

A hiperbolicidade parcial implica que dado $\eta \in (\theta, 1)$ existe uma família contínua de cones K^{cu} em torno de $E^u \oplus E^c$ tal que

$$(a) \quad Tf(K^{cu}(p)) \subset K^{cu}(f(p)).$$

(b) K^{cu} é uniformemente transversal a E_f^s .

(c) Para qualquer $v \in K^{cu}(p)$

$$\|Tf(v)\| > \bar{a}_p \eta \|v\|.$$

Seja δ_0 suficientemente pequeno. Se f for substituído por qualquer g tal que $d_{C^1}(f, g) \leq \delta_0$ então K^{cu} irá satisfazer as condições (a), (b) e (c) dadas anteriormente.

Seja $q \in \mathcal{W}_f^s(p)$ e $d_{\mathcal{W}_f^s}(p, q) \leq \frac{r_0}{2}$. Então

$$d(f^N(p), f^N(q)) \leq \bar{a}_p(N) = \bar{a}_p \bar{a}_{f(p)} \cdots \bar{a}_{f^{N-1}(p)}$$

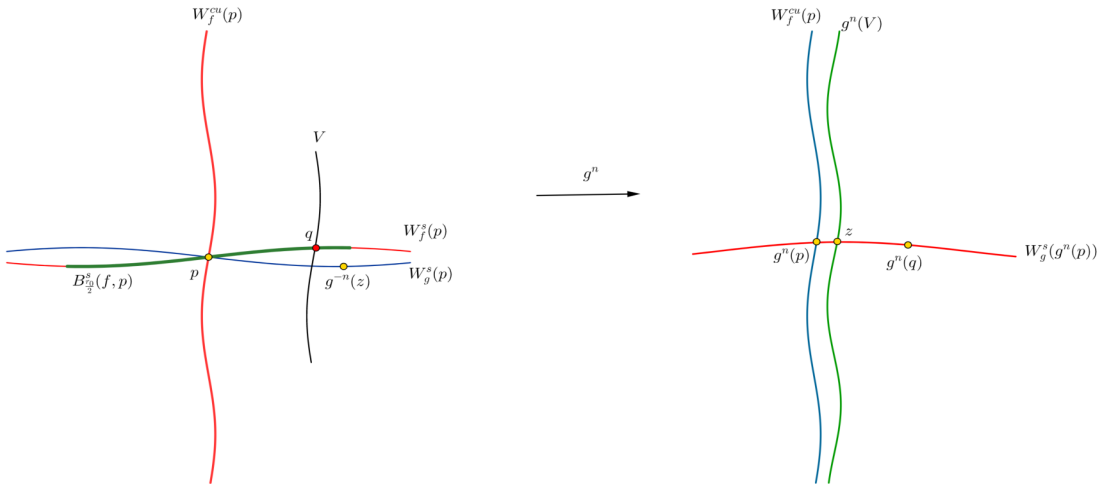
Seja V um disco topológico transversal a $\mathcal{W}_f^s(p)$ em q de dimensão $= \dim(E^u \oplus E^c)$ tal que TV pertença à K^{cu} (por exemplo, poderíamos tomar $V = \varphi_q(B^{u+c}(0, 1))$).

Por outro lado, dado n , podemos encontrar σ tão pequeno tal que $d_{C^0}(f, g) < \sigma$ implica que

$$d(g^n(p), g^n(V)) < 2\bar{a}_p(n)$$

Como $Tg^n(V)$ é uniformemente transversal a E^s existe $C = C(f)$ tal que a interseção $\mathcal{W}_g^s(g^n(p)) \cap g^n(V)$ contém um ponto z onde $d(g^n(q), z) \leq C \bar{a}_p(n)$. Consequentemente $g^{-n}(z) \in \mathcal{W}_f^s(p)$. Portanto, se n for suficientemente grande, \mathcal{W}_g^s é ϵ -próximo de W_f^s . (Ver Figura 2.8)

Figura 2.8: Interseção de $g^n(V)$ com $\mathcal{W}_g^s(g^n(p))$ usando a família de cones $K^{cu}(p)$



Fonte: Autoria própria

□

2.3 Acessibilidade Local

Prova do Lema 2.1. Como f é parcialmente hiperbólica e o conjunto dos parcialmente hiperbólicos é aberto então existe $\delta_0 > \delta$ tal que qualquer g na topologia C^1 ainda é parcialmente hiperbólico.

Como nossas perturbações são locais é conveniente adaptar as estruturas que usamos para a vizinhança de um ponto p . Assim, para cada $p \in M$ devemos associar:

- (1) Uma vizinhança $U_p = \varphi_p(B^n(0, 1))$,
- (2) Uma estrutura Riemanniana g_p em U_p com métrica de caminhos d_p , isométrica pela carta φ_p^{-1} a métrica Euclidiana na bola $B^n(0, 1)$,
- (3) Uma C^∞ -decomposição $TU = \tilde{E}^u \oplus \tilde{E}^c \oplus \tilde{E}^s = T\varphi_p(\mathbb{R}^u \oplus \mathbb{R}^c \oplus \mathbb{R}^s)$ que coincide com $E^u \oplus E^c \oplus E^s$ em p ,
- (4) C^∞ -folheações $\tilde{\mathcal{W}}_p^u, \tilde{\mathcal{W}}_p^s, \tilde{\mathcal{W}}_p^{cu}$ e $\tilde{\mathcal{W}}_p^{cs}$ de U_p , as quais os subfibrados correspondentes da C^∞ -decomposição do item (3) são tangentes a elas,
- (5) Para $i = 1, \dots, c$, fluxos parciais $\zeta_t^i : U_p \rightarrow U_p$ tangentes as folhas de $\tilde{\mathcal{W}}^c$,
- (6) fluxos parciais $\tau_t^u : U_p \rightarrow U_p$ e $\tau_t^s : U_p \rightarrow U_p$ tangentes as folhas de $\tilde{\mathcal{W}}^u$ e $\tilde{\mathcal{W}}^s$, respectivamente.

Iremos detalhar agora como se dá a construção dos itens (5) e (6). Seja $\{e_1, \dots, e_c\}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^c na decomposição $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^u \oplus \mathbb{R}^c \oplus \mathbb{R}^s$. Para $i = 1, \dots, c$ defina os fluxos parciais $\zeta_t^i : B \rightarrow B$ por

$$\zeta_t^i(\varphi_p(v)) = \varphi_p(v + te_i)$$

Analogamente, fixamos os vetores unitários w^u e w^s tangentes a \mathbb{R}^u e \mathbb{R}^s na decomposição $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^u \oplus \mathbb{R}^c \oplus \mathbb{R}^s$ e definimos os fluxos parciais $\tau_t^u, \tau_t^s : B \rightarrow B$, por

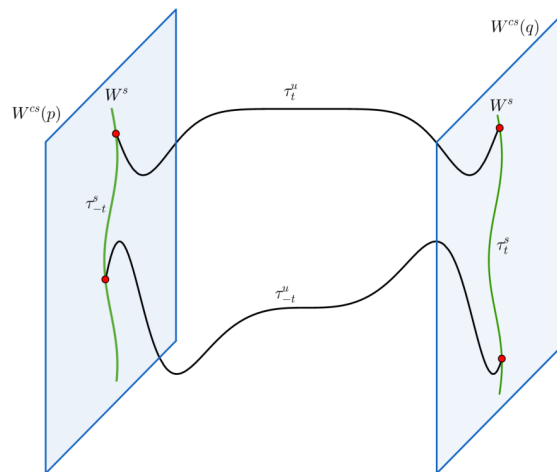
$$\tau_t^u(\varphi_p(v)) = \varphi_p(v + tw^u) \quad e$$

$$\tau_t^s(\varphi_p(v)) = \varphi_p(v + tw^s)$$

Note que τ_t^u envia folhas de $\widetilde{\mathcal{W}}^{cs}$ em folhas de $\widetilde{\mathcal{W}}^{cs}$ e entre as folhas de $\widetilde{\mathcal{W}}^{cs}$ está a aplicação *holonomia* associada à $\widetilde{\mathcal{W}}^u$. Analogamente, τ_t^s envia folhas de $\widetilde{\mathcal{W}}^{cu}$ em folhas de $\widetilde{\mathcal{W}}^{cu}$ e entre as folhas de $\widetilde{\mathcal{W}}^{cu}$ está a aplicação *holonomia* associada à $\widetilde{\mathcal{W}}^s$.

Note que a identidade de tais holonomias é dada por $\tau_{-t}^s \tau_{-t}^u \tau_t^s \tau_t^u$. De fato, o tempo t do primeiro fluxo τ^u é determinado pois precisamos escolher a folha onde o fluxo esteja na holonomia. O segundo t é livre na folheação $W^{cs}(q)$. O terceiro tempo em τ_{-t}^s também é específico para que o fluxo encontre a holonomia na volta. E por ultimo, escolhemos um t tal que τ_{-t}^s retorne ao ponto inicial $\varphi_p(v)$. (Ver figura 2.9)

Figura 2.9: Holonomia de $W^{cs}(p)$ em $W^{cs}(q)$



Fonte: Autoria própria

Isso expressa o fato de que $\widetilde{\mathcal{W}}^u$ e $\widetilde{\mathcal{W}}^s$ são integráveis em conjunto.

O próximo Lema segue diretamente da continuidade uniforme de φ_p .

Lema 2.8. *As estruturas descritas de (1) a (6) são uniformes sobre $p \in M$ e sobre g suficientemente C^1 -próxima de f . Para todo $p \in M$, a estrutura g_p é uniformemente comparável a estrutura Riemanniana original U_p .*

Uma vez que todas as estimativas envolvendo a estrutura de Riemann em M são locais e uniformes sobre $p \in M$, qualquer afirmação sobre a estrutura de Riemann torna-se válida para g_p apenas adicionando uma constante multiplicativa. Portanto seremos ambíguos em nossa notação usando d alternadamente para a métrica Riemanniana e para

a métrica local d_p . Além disso, quando o ponto estiver claro no contexto deixaremos o índice p ao descrever as várias estruturas.

2.3.1 Um critério para acessibilidade estável

Seja D um disco c -admissível de f centrado em $p \in M$, e seja $\rho = r(D)$. Seja $N_r(D)$ uma vizinhança tubular de D de raio r . Seja $m = m(c, \dim(M))$ a constante dada pelo Lema (2.17). Suponha que g é parcialmente hiperbólico. Dizemos que g é θ -acessível em D se, para cada $i = 1, \dots, c$, existe uma aplicação contínua

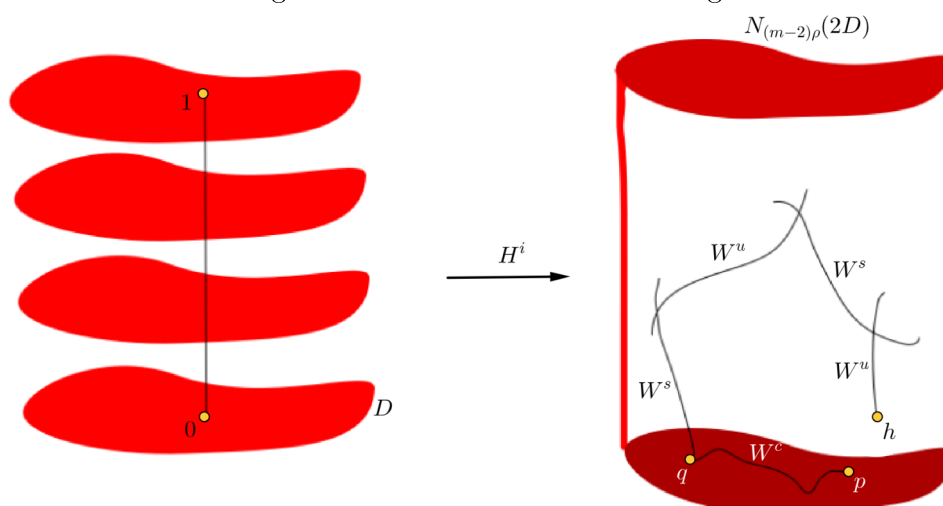
$$H^i : [0, 1] \times D \rightarrow N_{(m-2)\rho}(2D),$$

tal que $t \mapsto H^i(t, q)$ é um us -caminho de g com 4 arcos começando em q , e, para algum $t_0 \in (0, \frac{\rho}{2})$ a condição

$$d(H^i(1, q), \zeta_{t_0}^i(q)) < t_0\theta \quad (2.7)$$

vale para todo $q \in D'$. Em outras palavras, g é θ -acessível em D se $\forall q, p \in D$ existe um us -caminho de q para h tal que a distância $d(p, h) < t_0\theta$, onde p é o ponto final do fluxo $\zeta_{t_0}^i(q)$ em D e h é o ponto final do us -caminho. Veja que t_0 varia no intervalo $(0, \frac{\rho}{2})$ e θ permanece fixo. (Ver Figura 2.10)

Figura 2.10: θ -acessibilidade de g



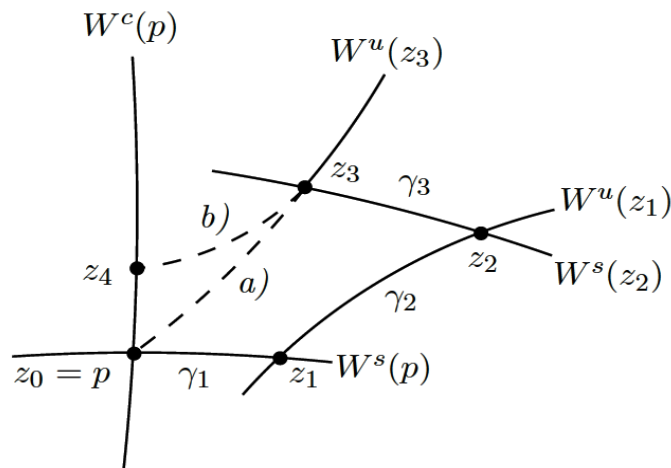
Fonte: Autoria própria

O próximo Lema nos dá um critério para acessibilidade central. O elemento base da prova é o argumento quadrilateral de Brin (Ver [8]). Este argumento é usado

para estabelecer acessibilidade estável em várias situações. A Grosso modo, é o seguinte (assumimos, para simplificar, que a distribuição central E^c é integrável. Isso não trará ônus às hipóteses pois estamos supondo que os discos c -admissíveis são aproximadamente tangentes à direção central). Dado um ponto $p \in M$, considere um us -caminho de arcos denotado por $[z_0, z_1, z_2, z_3, z_4]$ começando em $z_0 = p$. Conectamos z_{i-1} com z_i por uma geodésica γ_i localizada na variedade estável ou instável e obtemos a curva $\Gamma_p = \bigcup_{1 \leq i \leq 4} \gamma_i$. Parametrizamos por $t \in [0, 1]$ com $\Gamma_p(0) = p$.

Se a distribuição $E^s \oplus E^u$ fosse integrável (e, portanto f não seria acessível), o ponto final $z_4 = \Gamma_p(1)$ estaria na folha da folheação correspondente passando por p . Portanto, podemos ter f acessível se pudermos organizar um us -caminho de 4 arcos tal que $\Gamma_p(1) \in W^c(p)$ e $\Gamma_p(1) \neq p$ (Ver Figura 2.11). Neste caso, o caminho Γ_p pode ser homotopado através de us -caminhos de 4 arcos começados em p até o caminho trivial de modo que os pontos finais fiquem em $W^c(p)$ durante a homotopia e formem uma curva contínua. Tal situação é geralmente persistente sob pequenas perturbações de f e, portanto, leva a uma acessibilidade estável.

Figura 2.11: Argumento quadrilateral de Brin



Fonte: Pesin [26]

Lema 2.9 (Critério para acessibilidade central). *Suponha $\beta > \frac{1}{2}$. Para cada $\beta' \in (\beta, 1)$ existem $\theta > 0$, $\delta_1 > 0$ e $\rho_0 > 0$ tal que, para todo disco c -admissível D de raio $r(D) < \rho_0$, se*

- $d_{C^1}(f, g) < \delta_1$

- g é θ -acessível em $\beta'D$

então g é estavelmente acessível em βD .

Prova do Lema (2.9). Na Figura 2.10 escrevemos $h = H^i(1, q)$ e $p = \zeta_{t_0}^i(q)$. Para mostrar a acessibilidade precisamos mostrar que $p = h$. Para verificar isso, sejam β, β' dados. Escolha $\theta < \frac{\beta' - \beta}{4\beta'c}$. Pela continuidade dos subfibrados $E_g^u(p)$ e $E_g^s(p)$ em g , existem $\delta_1 > 0$ e $\rho_0 > 0$ tais que se $d_{C^1}(f, g) < \delta_1$, se D é um disco c -admissível de raio $r(D) = \rho < \rho_0$ e se $s : [0, 1] \rightarrow N_{(m-2)\rho}(D)$ é qualquer us -caminho de 4 arcos de g com $s(0), s(1) \in D$ então

$$d(s(0), s(1)) \leq \rho \frac{\beta' - \beta}{4c} \quad (2.8)$$

Suponha que g é θ -acessível em $\beta'D$. Para $i = 1, \dots, c$ temos que as aplicações H^i satisfazem a equação (2.7) com $D' = \beta'D$.

Como a existência de H^i é uma condição C^1 -aberta ¹ então a θ -acessibilidade é uma condição C^1 -aberta. Portanto a acessibilidade também é aberta (pois o Lema 2.9 afirma que θ -acessibilidade implica acessibilidade). Desse modo, restará apenas provar que f é θ -acessível para concluir o Lema 2.1.

Variando o comprimento dos dois últimos arcos do caminho $t \mapsto H^i(t, q)$ podemos fazer com que $H^i(1, q) \in D$, $\forall q \in \beta'D$. De fato é possível fazer isso sem ferir a propriedade (2.7), pois podemos diminuir um pouco θ caso seja necessário.

A seguir definimos a noção de homotopia de caminhos.

Definição 2.15. *Sejam $a, b : I \rightarrow X$ caminhos num espaço topológico X . Diz que uma aplicação contínua $H : I \times I \rightarrow X$ é uma homotopia de caminhos entre a e b quando $H(0, t) = a(t)$ e $H(1, t) = b(t)$, para todo $t \in I$. Nesse caso, os caminhos a e b chamam-se caminhos homotópicos e escreve-se $a \cong b$.*

Desse modo aplicamos uma homotopia ao us -caminho $t \mapsto H^i(t, q)$, $\forall q \in \beta'D$ de 4 arcos começando em q e terminando no caminho trivial, de modo que os pontos finais fiquem em D durante a homotopia. O traço desses pontos finais ao longo da homotopia fornece uma curva em D de q para $H^i(1, q)$. Mais precisamente, para $i = 1, \dots, c$, nós

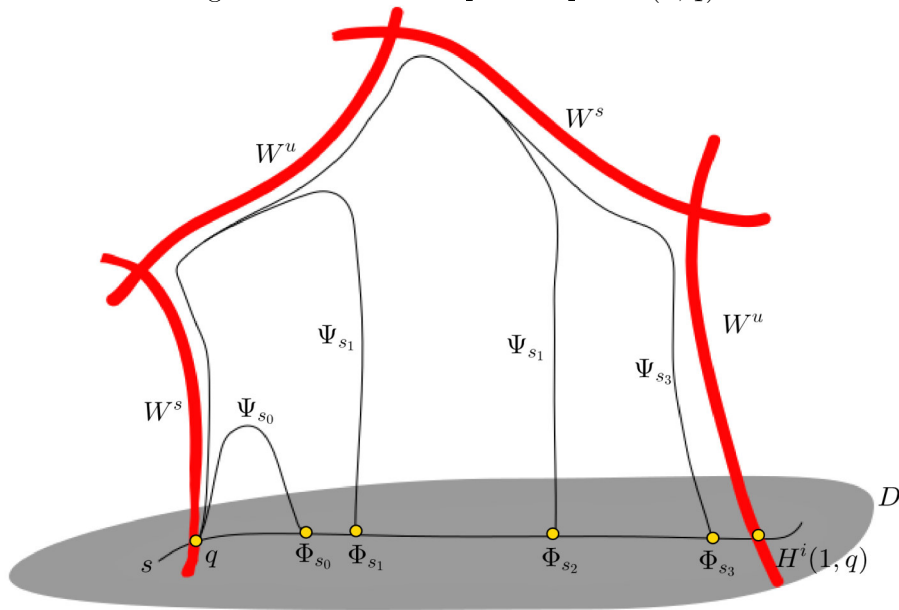
¹Dizer que $H^i(q)$ é C^1 -aberta significa que H^i existe para g e para uma perturbação de g .

obtemos

$$\Psi^i : [0, 1] \times [0, 1] \times \beta' D \rightarrow N_\theta(D)$$

tal que, para todo $s \in [0, 1], t \mapsto \Psi^i(s, t, q)$ é um us -caminho de g com $\Psi^i(s, 1, q) \in D$, $\Psi^i(0, t, q) = q$ e $\Psi^i(1, t, q) = H^i(t, q)$. Portanto, $s \mapsto \Psi^i(s, 1, q) := \Phi_s^i(q)$ é uma curva em D de q para $H^i(1, q)$. Note que cada ponto dessa curva é ponto final de um caminho começando em q . (Ver Figura 2.12)

Figura 2.12: Homotopia de q a $H^i(1, q)$



Fonte: Autoria própria

Segue de (2.8) que para $q \in \beta' D$:

$$\text{diam}(\Phi_s^i(q)) < d(s(0), s(1)) \leq \frac{\rho(\beta' - \beta)}{4c}, \quad \forall s \in [0, 1] \quad (2.9)$$

Para $q \in \beta' D$ estendemos a definição de $\Phi_s^i(q)$ para valores de $s > 1$ pela fórmula indutiva

$$\Phi_{s+m}^i = \Phi_s^i(\Phi_m(q))$$

para $s \in (0, 1]$ e $m \in \mathbb{N}$. Por exemplo, para $m = 1$ temos que

$$\Phi_{s+m}^i = \Phi_s^i(\Phi_1(q)) = \Phi_s^i(\Psi^i(1, 1, q)) = \Phi_s^i(H^i(1, q))$$

O ponto máximo que $\Phi_s^i(q)$ pode ser estendido em s depende de q . Note que, de (2.7) obtemos:

$$\begin{aligned}
d(\Phi_m^i(q), \zeta_{mt_0}^i(q)) &= d(H^i(1, H^i(1, \dots, H^i(1, q) \dots)), \zeta_{t_0}^i(q'_{m-1})) = d(H^i(1, q_{m-1}), \zeta_{t_0}^i(q'_{m-1})) \\
&\leq d(H^i(1, q_{m-1}), \zeta_{t_0}^i(q_{m-1})) + d(\zeta_{t_0}^i(q_{m-1}), \zeta_{t_0}^i(q'_{m-1})) \\
&< t_0\theta + d(q_{m-1}, q'_{m-1}) \\
&< t_0 \frac{\beta' - \beta}{4\beta'c} + d(H^i(1, q_{m-2}), \zeta_{t_0}^i(q'_{m-2})) \\
&< t_0 \frac{\beta' - \beta}{4\beta'c} + t_0\theta + d(q_{m-2}, q'_{m-2}) \\
&< 2t_0 \frac{\beta' - \beta}{4\beta'c} + d(q_{m-2}, q'_{m-2}) \\
&\vdots \\
&< mt_0 \frac{\beta' - \beta}{4\beta'c} \\
\Rightarrow d(\Phi_m^i(q), \zeta_{mt_0}^i(q)) &= < mt_0 \frac{\beta' - \beta}{4\beta'c}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Seja $q_0 = \varphi(-\beta'\rho/2(e_1 + \dots + e_c))$. Defina a aplicação $Z : [0, \beta'\rho]^c \rightarrow M$ por:

$$Z(a_1, \dots, a_c) = \zeta_{a_1}^1 \cdots \zeta_{a_c}^c(q_0)$$

Observação 2.2. Z é um homeomorfismo em $\beta'D$.

Em seguida considere a aplicação

$$P : [0, \rho\beta']^c \rightarrow D$$

definida por $P(a_1, \dots, a_c) = \Phi_{\frac{a_1}{t_0}}^1 \Phi_{\frac{a_2}{t_0}}^2 \cdots \Phi_{\frac{a_c}{t_0}}^c(q_0)$

Cada ponto na imagem de P é ponto final de um us -caminho de g começando em q_0 . Afirmamos que D está no interior da imagem $P(a_1, \dots, a_c)$. Como Z é homeomorfismo em $\beta'D$ é suficiente mostrar que $d_{C^0}(P, Z) < d(\partial\beta D, \partial\beta'D) = \frac{\rho(\beta' - \beta)}{2}$

Se $a = (a_1, \dots, a_c) \in [0, \beta'\rho]^c$ com $a_i = t_0(m_i + s_i)$, $m_i \in \mathbb{N}$ e $s_i \in (0, 1]$ então

$$\begin{aligned}
d(P(a), Z(a)) &= d\left(\Phi_{\frac{a_1}{t_0}}^1 \Phi_{\frac{a_2}{t_0}}^2 \cdots \Phi_{\frac{a_c}{t_0}}^c(q_0), \zeta_{a_1}^1 \zeta_{a_2}^2 \cdots \zeta_{a_c}^c(q_0)\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^c d\left(\Phi_{\frac{a_i}{t_0}}^i \Phi_{\frac{a_{i+1}}{t_0}}^{i+1} \cdots \Phi_{\frac{a_c}{t_0}}^c(q_0), \zeta_{a_i}^i \Phi_{\frac{a_{i+1}}{t_0}}^{i+1} \cdots \Phi_{\frac{a_c}{t_0}}^c(q_0)\right) \\
&= d\left(\Phi_{\frac{a_1}{t_0}}^1 \left(\Phi_{\frac{a_2}{t_0}}^2 \cdots \Phi_{\frac{a_c}{t_0}}^c(q_0)\right), \zeta_{a_1}^1 \left(\Phi_{\frac{a_2}{t_0}}^2 \cdots \Phi_{\frac{a_c}{t_0}}^c(q_0)\right)\right) + \\
&d\left(\Phi_{\frac{a_2}{t_0}}^2 \left(\Phi_{\frac{a_3}{t_0}}^3 \cdots \Phi_{\frac{a_c}{t_0}}^c(q_0)\right), \zeta_{a_2}^2 \left(\Phi_{\frac{a_3}{t_0}}^3 \cdots \Phi_{\frac{a_c}{t_0}}^c(q_0)\right)\right) + \cdots + d\left(\Phi_{\frac{a_c}{t_0}}^c(q_0), \zeta_{a_c}^c(q_0)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \text{diam} \left(\Phi([0, 1] \times \left\{ \Phi_{\frac{a_2}{t_0}}^2 \cdots \Phi_{\frac{a_c}{t_0}}^c(q_0) \right\}) \right) + \text{diam} \left(\Phi([0, 1] \times \left\{ \Phi_{\frac{a_3}{t_0}}^3 \cdots \Phi_{\frac{a_c}{t_0}}^c(q_0) \right\}) \right) + \cdots + \\
&\text{diam} \left(\Phi([0, 1] \times \{(q_0)\}) \right) + d \left(\Phi_{m_1}^1 \left(\Phi_{\frac{a_2}{t_0}}^2 \cdots \Phi_{\frac{a_c}{t_0}}^c(q_0) \right), \zeta_{m_1 t_0}^1 \left(\Phi_{\frac{a_2}{t_0}}^2 \cdots \Phi_{\frac{a_c}{t_0}}^c(q_0) \right) \right) \\
&+ d \left(\Phi_{m_2}^2 \left(\Phi_{\frac{a_3}{t_0}}^3 \cdots \Phi_{\frac{a_c}{t_0}}^c(q_0) \right), \zeta_{m_2 t_0}^2 \left(\Phi_{\frac{a_3}{t_0}}^3 \cdots \Phi_{\frac{a_c}{t_0}}^c(q_0) \right) \right) + d \left(\Phi_{m_c}^c(q_0), \zeta_{m_c t_0}^c(q_0) \right) \\
&< \frac{(\beta' - \beta)}{4c} + \frac{(\beta' - \beta)}{4c} + \cdots + \frac{(\beta' - \beta)}{4c} + \frac{m_1 t_0 (\beta' - \beta)}{4\beta' c} + \frac{m_2 t_0 (\beta' - \beta)}{4\beta' c} + \cdots + \frac{m_c t_0 (\beta' - \beta)}{4\beta' c} \\
&\leq \frac{c(\beta - \beta')}{4c} + \sum_{i=1}^c m_i t_0 \frac{(\beta - \beta')}{4\beta' c} \\
&= \frac{\beta - \beta'}{4} \left(1 + \sum_{i=1}^c \frac{m_i t_0}{\beta' c} \right)
\end{aligned}$$

Como $m_i t_0 < \rho \beta'$ então

$$d(P(a), Z(a)) < \frac{\beta - \beta'}{4} \left(1 + \sum_{i=1}^c \frac{\rho \beta'}{\beta' c} \right) = \frac{\beta - \beta'}{4} \left(1 + \frac{\rho}{c} \right) \leq \rho \frac{\beta' - \beta}{2}$$

Portanto, concluímos que g é acessível βD . □

2.3.2 Construção da Perturbação

Fixe $\beta' \in (\beta, 1)$. O próximo Lema completa a prova do Lema 2.1.

Lema 2.10. *Para todo $\delta, \theta > 0$, se $r(\mathcal{D})$ é suficientemente pequeno e $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ é suficientemente grande, então existe $g \in \mathcal{P}H_\mu^r(M)$ tal que*

$$(1) \quad d_{C^1}(f, g) < \delta$$

$$(2) \quad d_{C^0}(f, g) < \theta$$

$$(3) \quad g \text{ é } \theta\text{-acessível em } \beta' D, \text{ para cada } D \in \mathcal{D}$$

A prova do Lema 2.1 decorrerá facilmente deste Lema. De fato, basta tomar $\theta < \sigma$ satisfazendo as hipóteses do Lema 2.9. Seja g dada pelo Lema 2.10. Uma vez que g é θ -acessível em $\beta' D$, g é estavelmente acessível em D . □

Prova do Lema 2.10. Seja $\delta, \theta > 0$ dados. Iremos perturbar f fazendo a composição com um C^∞ -difeomorfismo $\psi : M \rightarrow M$ que preserve volume. Inicialmente estimamos os efeitos da composição $\psi \circ f$ numa decomposição parcialmente hiperbólica.

Definição 2.16. Dizemos que $\psi : M \rightarrow M$ está **suportada** em $X \subset M$ se $\psi = id$ fora de $X \subset M$.

O próximo Lema afirma que se $\mathcal{R}(X)$ é suficientemente grande, e, $p, q \in X$ são suficientemente próximos então, para qualquer g , com $g \circ f^{-1}$ suportada em X , os subespaços $T\psi^{-1}(E_g^u)(q)$ e $E_g^s(q)$ estão próximos de $\tilde{E}_p^u(q)$ e $\tilde{E}_p^s(q)$, respectivamente.

Lema 2.11 (Lema de perturbação do fibrado). *Existe $\delta_0 > 0$ tal que a seguinte afirmação é verdadeira. Para todo $\gamma > 0$, existe $J > 0$ tal que, se $\psi = g \circ f^{-1}$ é suportada num conjunto X com $\mathcal{R}(X) > J$, e $d_{C^1}(\psi, id) < \delta_0$, então para todo $p, q \in X$ com $d(p, q) < J^{-1}$, temos que*

$$1) \angle_q(E_g^s, \tilde{E}_p^s) \leq \gamma$$

$$2) \angle_q(T\psi^{-1}(E_g^u), \tilde{E}_p^u(q)) \leq \gamma$$

O item (1) do Lema nos diz que o ângulo entre os espaços E_g^s e \tilde{E}_p^s distam menos que γ . Em outras palavras, os fibrados de f e g estão γ -próximos.

Prova do Lema 2.11. Seja $\gamma > 0$ dado. Lembre-se que as distribuições $TU_p = E^u \oplus E^c \oplus E^s$ e $TU_p = \tilde{E}_p^u \oplus \tilde{E}_p^c \oplus \tilde{E}_p^s$ coincidem em p .

Pela continuidade uniforme da decomposição $E^u \oplus E^c \oplus E^s$, a uniformidade de φ_p e a suavidade de ψ , existe uma função contínua $\theta_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ com $\theta_1(0) = 0$ tal que $\forall p, q \in M$

$$\angle_q(T\psi(E^u), T\psi(\tilde{E}_p^u)) \leq \theta_1(d(p, q)) \quad (2.11)$$

$$\angle_q(E^s, \tilde{E}_p^s) \leq \theta_1(d(p, q)) \quad (2.12)$$

com $d_{C^1}(\psi, id)$ suficientemente pequeno.

Seja

$$\lambda = \max_p \left(\max \left(\frac{a_p}{b_p}, \left(\frac{B_p}{A_p} \right) \right) \right)$$

(ver 2.6). Note que $\lambda < 1$ pois f é hiperbólico e os vetores b_p e A_p são maiores que a_p e B_p , respetivamente.

Então, existe $C_1, \theta_2 > 0$ tal que para todo subespaço F^u, F^s com

$$\max\{\angle(F^u, E^u), \angle(F^s, E^s)\} \leq \theta_0$$

temos

$$\angle(Tf^{-j}(F^s), Tf^{-j}(E^s)) \leq C_1 \lambda^j \quad \text{e}$$

$$\angle(Tf^j(F^u), Tf^j(E^u)) \leq C_1 \lambda^j$$

$\forall j \geq 0$. A decomposição $E_g^u \oplus E_g^c \oplus E_g^s$ depende continuamente de g , e então

$$\max\{\angle(E_g^u, E^u), \angle(E_g^s, E^s)\} \leq \theta_0$$

se $d_{C^1}(\psi, \text{id})$ (e portanto $d_{C^1}(f, g)$) são suficientemente pequenas. Ou seja, quando f é perturbada os fibrados ficam próximos.

Fixe $R < \mathcal{R}(X)$. Se $q \in X$, então $g^i(q) = f^i(q)$ para todo i entre 0 e R .

Para o dado q temos

$$\angle(E_g^s, E^s) = \angle_q(Tg^{-R}E_g^s, Tf^{-R}E^s)$$

$$\angle_q(Tf^{-R}E_g^s, Tf^{-R}E^s)$$

$$\leq C^1 \lambda^R$$

Analogamente, para $q \in X$ obtemos

$$\psi^{-1} = (g \circ f^{-1})^{-1} = f \circ g^{-1}$$

Analogamente, para $q \in X$, $g^{-i}(q) = f^{-i} \circ \psi^{-1}(q) = f^{-i+1} \circ g^{-1}(q) \forall i \in (1, R-1)$.

Segue que

$$\angle_q(E_g^u, T\psi(E^u)) = \angle_q(Tg(E_g^u), Tg(E^u))$$

$$\leq C_2 \angle_{g^{-1}(q)}(E_g^u, E^u)$$

$$= C_2 \angle_{g^{-1}(q)}(Tf^{R-1}E_g^u, Tf^{R-1}E^u)$$

$$\leq C_1 C_2 \lambda^{R-1}$$

Combinando essas desigualdades com a equação (2.11) mostramos que existem $\lambda, \theta_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $C > 0$ tal que, para qualquer ψ suficientemente perto da identidade e suportada em X , para todo $R < \mathcal{R}(X)$, e para todo $q \in X$, $p \in M$, temos:

- $\angle_q(E_g^s, \tilde{E}_p^s) \leq C(\lambda^R + \theta_1(d(p, q)))$
- $\angle_q(T\psi^{-1}(E_g^u), \tilde{E}_p^u) \leq \angle_q(E_g^u, T\psi(\tilde{E}_p^u)) \leq C(\lambda^R + \theta_1(d(p, q)))$

Como R é suficientemente grande e $d(p, q)$ suficientemente pequena, esses tamanhos são limitados por γ . \square

Também vamos precisar do seguinte Lema.

Lema 2.12. *Existe $T > 0$ tal que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, para cada $p \in M$, e para cada disco c -admissível D centrado em p , existem C^∞ -fluxos que preservam volume $\xi_t^1, \dots, \xi_t^c : U_p \rightarrow U_p$ tal que, para cada i*

$$(1) \xi_t^i = id \text{ fora de } N_{2\varepsilon}(D)$$

$$(2) \text{ Para } q \in N_\varepsilon(D),$$

$$\xi_t^i(q) = \zeta_{\varepsilon t}^i(q)$$

Portanto, cada ξ_t^i preserva as folhas de $\widetilde{\mathcal{W}}^c \cap N_\varepsilon(D)$.

$$(3) d_{C^1}(id, \xi_t^i) < T|t|$$

Prova do Lema 2.12. Seja $G = \varphi_p^{-1}(D) = B^c(0, \rho)$, para algum $\rho > 0$. Fixe i , seja E o campo de vetores livre e divergente em $N_{2\varepsilon}(G) \subset \mathbb{R}^n$ tal que, para todo v :

$$E(v) = \varepsilon e_i$$

Seja ω a forma de volume euclidiana em \mathbb{R}^n , e seja $\phi_0 = i_E \omega$. Como E não é divergente, a $(n-1)$ -forma ϕ_0 é fechada temos $d\phi_0 = di_E \omega = \text{div}(E)\omega = 0$

Como $N_{2\varepsilon}(G)$ é contrátil então existe uma $(n-2)$ -forma ν em $N_{2\varepsilon}(G)$ tal que $d\nu = \phi_0$. Nós podemos escolher ν tal que

$$\begin{cases} \|\nu\| \leq 2\varepsilon^2 \\ \|\nu\|_{C^1} \leq \varepsilon \end{cases}$$

Seja $\sigma : N_{2\varepsilon}(G) \rightarrow [0, 1]$ uma bump function de classe C^∞ que se anula na vizinhança de $\partial N_{2\varepsilon}(G)$ e é identicamente 1 em $N_\varepsilon(G)$ tal que

$$\begin{cases} \|d\sigma\| \leq \frac{2}{\varepsilon} \\ \|d\sigma\|_{C^1} \leq \frac{2}{\varepsilon^2} \end{cases}$$

Seja $\phi = d(\sigma\nu)$. Portanto

$$\begin{aligned}\|\phi\|_{C^1} &= \|d\sigma \wedge \nu + \sigma\phi_0\|_{C^1} \leq \|d\sigma\| \cdot \|\nu\|_{C^1} + \|d\sigma\|_{C^1} \cdot \|\nu\| + \|\sigma\|_{C^1} \cdot \|\phi_0\|_{C^1} \\ &\leq \frac{2}{\varepsilon} \cdot \varepsilon + \frac{2}{\varepsilon^2} \cdot 2\varepsilon^2 + \frac{2}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 8\end{aligned}$$

Consequentemente ϕ tem as seguintes propriedades:

- $\|\phi\|_{C^1} \leq T$, onde $T = 8$,
- $d\phi = 0$,
- $\phi = \phi_0$ em $N_\varepsilon(G)$,
- $\phi = 0$ em $\partial N_{2\varepsilon}(G)$

Definição 2.17. *Seja $M \subset \mathbb{R}^k$ uma variedade diferenciável. Um campo de vetores de classe C^r em M é uma aplicação de classe C^r $X : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ que, a cada ponto p de M associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Isso corresponde a uma aplicação C^r $X : M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X = id_M$, onde π é a projeção natural de TM em M .*

Seja X o campo de vetores em \mathbb{R}^n satisfazendo $i_X\omega = \phi$ e seja X_t o fluxo gerado por X .

Seja $\xi_t^i = \varphi \circ X_t \circ \varphi^{-1}$. Então ξ^i satisfaz os três itens do Lema.

□

Retornando à prova do Lema 2.10, seja T dado pelo Lema 2.12. Seja $\gamma = \frac{\theta\delta}{100cT}$. Escolha $J > 0$ de acordo com o Lema 2.11.

Agora seja $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$ uma família qualquer de discos c -admissíveis com $\mathcal{R}(\mathcal{D}) > J$ e $r(\mathcal{D}) < J^{-1}$. Escolha $\eta < r(\mathcal{D})$ tal que as η -vizinhanças de quaisquer dois discos c -admissíveis em \mathcal{D} são disjuntas.

Para mostrar o Lema 2.10 é suficiente mostrar que para qualquer $D \in \mathcal{D}$ existe um C^∞ -difeomorfismo ψ preservando volume, suportado na η -vizinhança $N_\eta(D)$ tal que

$$(1) \quad d_{C^1}(\psi, id) < \delta$$

$$(2) \quad d_{C^0}(\psi, id) < \theta$$

- (3) Se \bar{f} é um difeomorfismo com $f^{-1} \circ \bar{f}$ suportada em $N_\eta(|\mathcal{D}|) \setminus N_\eta(D)$ e $d_{C^1}(\bar{f}, f) < \delta$, então $\psi \circ \bar{f}$ é θ -acessível em $\beta'D$.

Para construir o difeomorfismo final g , vamos trabalhar disco por disco, construindo para cada $D_i \in \mathcal{D}$ um difeomorfismo ψ_i que é suportado em $N_\eta(D_i)$ tal que $\psi_i \circ \psi_{i-1} \circ \cdots \circ \psi_1 \circ f$ é θ -acessível em $\beta'D_i$. Portanto $g = \psi_k \cdots \psi_1 \circ f$ satisfará as condições do Lema 2.10.

Fixe $D \in \mathcal{D}$ centrado em p e escolha $\varepsilon < \frac{\eta}{4c}$ pequeno o suficiente para satisfazer as hipóteses do Lema 2.12. Sejam ξ_t^1, \dots, ξ_t^c dados pelo Lema 2.12.

Para $i = 1, \dots, c$, seja $\varepsilon_i = 4i\varepsilon$, seja $Z_i = \tau_{\varepsilon_i}^u(D)$ e seja

$$N_i = N_{2\varepsilon}(Z_i) = \tau_{\varepsilon_i}^u(N_{2\varepsilon}(D))$$

Note que podemos tomar ε pequeno o suficiente para que as vizinhanças $N_{2\varepsilon}(D)$ sejam disjuntas. Logo as vizinhanças N_1, \dots, N_c são duas a duas disjuntas.

Defina $\psi : M \rightarrow M$ por

$$\psi(q) = \begin{cases} \tau_{-\varepsilon_i}^s \tau_{\varepsilon_i}^u \tau_{\varepsilon_i}^s \xi_{\frac{\delta}{T}}^i \tau_{-\varepsilon_i}^u(q), & \text{se } q \in N_i, \text{ para algum } i. \\ q, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que ψ tem as seguintes propriedades:

- ψ preserva μ ,
- $\psi = \text{id}$ fora da união $N_1 \cup \dots \cup N_c \subset N_\eta(D)$
- ψ preserva as folhas $\widetilde{\mathcal{W}}^c$ fora de $N_1 \cup \dots \cup N_c$ e dentro de $N_\varepsilon(Z_i)$ para $i = 1, \dots, c$
- $d_{C^1}(\psi, \text{id}) < \delta$

Seja \bar{f} um difeomorfismo com $d_{C^1}(\bar{f}, f) < \delta$ e $f^{-1}\bar{f}$ suportada em $N_\eta(|\mathcal{D}|) \setminus N_\eta(D)$ e seja $g = \psi \circ \bar{f}$. Resta mostrar que g é θ -acessível em $\beta'D$. Para isso, iremos analisar a dinâmica das holonomias de g ao longo dos us -caminhos cujas interseções estão próximos dos seguintes pontos:

$$\tau_{\varepsilon_i}^u(p), \tau_{\varepsilon_i}^s \tau_{\varepsilon_i}^u(p), \tau_{-\varepsilon_i}^u \tau_{\varepsilon_i}^s \tau_{\varepsilon_i}^u(p)$$

Em analogia com τ_t^u e τ_t^s , os quais se deslocam ao longo das folhas $\widetilde{\mathcal{W}}^u$ e $\widetilde{\mathcal{W}}^s$ respectivamente, nós introduzimos as aplicações $\pi_t^u, \pi_t^s : N_\eta(\beta'D) \rightarrow B$, as quais se deslocam ao longo das folhas \mathcal{W}_g^u e \mathcal{W}_g^s e são definidas como

$$\{\pi_t^u(q)\} = \mathcal{W}_g^u(q) \cap \widetilde{\mathcal{W}}^{cs}(\tau_t^u(q))$$

$$\{\pi_t^s(q)\} = \mathcal{W}_g^s(q) \cap \widetilde{\mathcal{W}}^{cs}(\tau_t^s(q))$$

Se $d_{C^1}(f, g)$ é suficientemente pequeno, essas aplicações estão bem definidos para $|t| \leq \varepsilon_c$. Note que se substituirmos \mathcal{W}_g^u por $\widetilde{\mathcal{W}}^u$ e \mathcal{W}_g^s por $\widetilde{\mathcal{W}}^s$, essas equações em vez disso seriam τ_t^u e τ_t^s respectivamente. A \mathcal{W}^u -holonomia π_t^u leva folhas $\widetilde{\mathcal{W}}^{cs}$ em folhas $\widetilde{\mathcal{W}}^{cs}$. Analogamente a \mathcal{W}^s -holonomia π_t^s leva folhas $\widetilde{\mathcal{W}}^{cu}$ em folhas $\widetilde{\mathcal{W}}^{cu}$. O Lema 2.11 nos permitirá prever o comportamento dessas aplicações. Um resultado importante diz que:

Em domínios apropriados, $\pi^u \sim \psi\tau^u$ e $\pi^s \sim \tau^s$

Mais tarde falaremos sobre a semelhança \sim com mais cuidado.

Para $i = 1, \dots, c$, seja

$$h^i = \pi_{-\varepsilon_i}^s \pi_{-\varepsilon_i}^u \pi_{\varepsilon_i}^s \pi_{\varepsilon_i}^u$$

Portanto, h^i é um homeomorfismo de $N_\varepsilon(\beta'D)$ sobre sua imagem. Observe que $h^i(q)$ é o ponto final de um us -caminho de quatro arcos de g , começando em q . Pela construção, esses caminhos dependem continuamente de q , e então existem aplicações contínuas

$$H^i : [0, 1] \times \beta'D \rightarrow N_\eta(D)$$

onde $t \mapsto H^i(t, q)$ é definido como us -caminho de quatro arcos de g , tal que $H^i(0, q) = q$ e $H^i(1, q) = h^i(q)$. O resto do argumento é o seguinte: Mostraremos que $\pi^u \sim \psi\tau^u$ e $\pi^s \sim \tau^s$, o que implicará que $h^i \sim \tau_{-\varepsilon_i}^s \psi \tau_{-\varepsilon_i}^u \tau_{\varepsilon_i}^s \psi \tau_{\varepsilon_i}^u$. Como τ^u e τ^s são apenas translações, $\psi = \zeta_{t_0}^i$ em $\tau_{\varepsilon_i}^u(D)$ e $\psi = \text{id}$ em $\tau_{-\varepsilon_i}^u \tau_{\varepsilon_i}^s \tau_{\varepsilon_i}^u(D)$ temos que $h^i \sim \zeta_{t_0}^i$, onde $t_0 = \frac{\varepsilon\delta}{T}$. O argumento restante é dedicado para tornar \sim preciso.

Lema 2.13 (Lema de perturbação da holonomia). *Para ε e δ suficientemente pequenos*

$$d_{C^0}(h^i, \zeta_{t_0}^i) \leq t_0\theta$$

onde $t_0 = \frac{\varepsilon\delta}{T}$ e a C^0 -distância é mensurada em $\beta'D$

Prova do Lema 2.13. Para δ suficientemente pequeno, existe uma vizinhança $Q \subset N_\varepsilon(\beta'D)$ de $\beta'D$ tal que, para $i = 1, \dots, c$,

$$\begin{aligned}\pi_{\varepsilon_i}^u(Q) &\subseteq \psi\tau_{\varepsilon_i}^u(N_\varepsilon(\beta'D)) \\ \pi_{\varepsilon_i}^s\pi_{\varepsilon_i}^u(Q) &\subseteq \tau_{\varepsilon_i}^s\psi\tau_{\varepsilon_i}^u(N_\varepsilon(\beta'D)) \\ \pi_{-\varepsilon_i}^u\pi_{\varepsilon_i}^s\pi_{\varepsilon_i}^u(Q) &\subseteq \tau_{-\varepsilon_i}^u\tau_{\varepsilon_i}^s\psi\tau_{\varepsilon_i}^u(N_\varepsilon(\beta'D))\end{aligned}$$

Vamos mostrar agora que $d(h^i(q), \zeta_{t_0}^i(q)) \leq t_0\theta \ \forall q \in Q$ e $i = 1, \dots, c$, o que implica a conclusão do Lema.

Pela definição de ψ , para $q \in Q$ escrevemos

$$\begin{aligned}\zeta_{t_0}^i(q) &= \xi_{\frac{t_0}{\varepsilon}}^i(q) = \xi_{\frac{\delta}{T}}^i(q) = \tau_{-\varepsilon_i}^s\tau_{-\varepsilon_i}^u\tau_{\varepsilon_i}^s\tau_{-\varepsilon_i}^u\tau_{\varepsilon_i}^s\tau_{\varepsilon_i}^u\xi_{\frac{\delta}{T}}^i\tau_{-\varepsilon_i}^u\tau_{\varepsilon_i}^u(q) = \tau_{-\varepsilon_i}^s\tau_{-\varepsilon_i}^u\tau_{\varepsilon_i}^s\psi\tau_{\varepsilon_i}^u(q) \\ &= \tau_{-\varepsilon_i}^s\psi\tau_{-\varepsilon_i}^u\tau_{\varepsilon_i}^s\psi\tau_{\varepsilon_i}^u(q)\end{aligned}\tag{2.13}$$

A última igualdade é consequência da ψ ser suportada em $N_1 \cup \dots \cup N_c$, a qual é disjunta de $\pi_{\varepsilon_i}^s\pi_{\varepsilon_i}^u(Q)$. Por outro lado

$$h^i(q) = \pi_{-\varepsilon_i}^s\pi_{-\varepsilon_i}^u\pi_{\varepsilon_i}^s\pi_{\varepsilon_i}^u(q)\tag{2.14}$$

Nós mostraremos que os fatores correspondentes nas duas composições (2.13) e (2.14) satisfazem a desigualdade desejada.

Mais especificamente, nós mostraremos que, restrita aos domínios apropriados, as distâncias $d_{C^0}(\pi_{\pm\varepsilon_i}^u, \psi\tau_{\pm\varepsilon_i}^u)$ e $d_{C^0}(\pi_{\pm\varepsilon_i}^s, \tau_{\pm\varepsilon_i}^s)$ são limitadas por $\frac{\theta t_0}{4}$.

Primeiramente considere as aplicações $\psi \circ \tau_{\varepsilon_i}^u$ e $\pi_{\varepsilon_i}^u$ no domínio Q . Lembre-se que, restrita as folhas de $\widetilde{\mathcal{W}}^{cs}$, $\tau_{\varepsilon_i}^u$ é uma $\widetilde{\mathcal{W}}^u$ -holonomia. Mas $\psi \circ \tau_{\varepsilon_i}^u$ envia folhas de $\widetilde{\mathcal{W}}^{cs}$ que estão em $Q \subset N_\varepsilon(\beta'D)$ em folhas de $\widetilde{\mathcal{W}}^{cs}$: $\tau_{\varepsilon_i}^u$ envia folhas de $\widetilde{\mathcal{W}}^{cs}$ em folhas de $\widetilde{\mathcal{W}}^{cs}$ e ψ preserva $\widetilde{\mathcal{W}}^{cs}$ em $\tau_{\varepsilon_i}^u(Q) \subset N'_i$. Disto segue que, restrito a $\widetilde{\mathcal{W}}^{cs}(q) \cap Q$, a aplicação $\psi \circ \tau_{\varepsilon_i}^u$ é a $\psi(\widetilde{\mathcal{W}}^u)$ -holonomia transversal a $\widetilde{\mathcal{W}}^{cs}(\tau_{\varepsilon_i}^u(q))$, onde $\psi(\widetilde{\mathcal{W}}^u)$ é a imagem de $\widetilde{\mathcal{W}}^u$ por ψ . Lembre-se que $\pi_{\varepsilon_i}^u$ restringe a \mathcal{W}_g^u -holonomia entre $\widetilde{\mathcal{W}}^{cs}(q) \cap N_\varepsilon(\beta'D)$ e $\widetilde{\mathcal{W}}^{cs}(\tau_{\varepsilon_i}^u(q))$.

Portanto dentre as folhas $\widetilde{\mathcal{W}}^{cs}$, estamos comparando as holonomias das folheações \mathcal{W}_g^u e $\psi(\widetilde{\mathcal{W}}^u)$. Para comparar as holonomias entre \mathcal{W}_g^u e $\psi(\widetilde{\mathcal{W}}^u)$ nós primeiro aplicamos a mudança de coordenadas suave $p \mapsto \psi^{-1}(p)$ e comparamos as holonomias por $\psi^{-1}(\mathcal{W}_g^u)$ e $\widetilde{\mathcal{W}}^u$. Como $d_{C^1}(\psi, \text{id})$ é pequena, esta mudança de coordenadas distorce as distâncias por um fator próximo de 1.

Os espaços tangentes de $\psi^{-1}(\mathcal{W}_g^u)$ e $\widetilde{\mathcal{W}}^u$ são $T\psi^{-1}E_g^u$ e \widetilde{E}^u , respectivamente. De acordo com o Lema de perturbação dos fibrados (Ver 2.11), os espaços $T\psi^{-1}(E_g^u)$ e \widetilde{E}^u são fechados. Em particular,

$$\angle_q(T\psi^{-1}(E_g^u), \widetilde{E}^u) \leq \gamma = \frac{\theta\delta}{100cT}. \quad (2.15)$$

para todo $q \in N_\eta(D)$. Nós iremos apenas aplicar o próximo Lema.

Lema 2.14. *Seja \mathcal{F} uma folheação contínua de $B \subset U_p$ com C^1 folhas u -dimensionais, transversais a $\widetilde{E}^s \oplus \widetilde{E}^c$. Seja T_1 e T_2 discos suaves tangentes a $\widetilde{E}^s \oplus \widetilde{E}^c$. Suponha que a \mathcal{F} -holonomia e a $\widetilde{\mathcal{W}}^u$ -holonomia entre T_1 e T_2 estejam bem definidas e as denote por $h^{\mathcal{F}}$ e $h^{\widetilde{\mathcal{W}}^u}$, respectivamente. Portanto, $\forall q \in T_1$,*

$$d(h^{\mathcal{F}}(q), h^{\widetilde{\mathcal{W}}^u}(q)) \leq \text{dist}(T_1, T_2) \cdot \sup_{q \in B} \angle_q(T\mathcal{F}, \widetilde{E}^u)$$

Um resultado análogo vale para folheações s -dimensionais transversais a $\widetilde{E}^c \oplus \widetilde{E}^u$.

Aplicando o Lema 2.14 na folheação $\psi^{-1}\mathcal{W}_g^u$ e usando a desigualdade (2.15) temos que, para quaisquer dois transversais $T_1 \subset Q$ e $T_2 = \tau_{\varepsilon_i}^u(T_1)$ e $q \in T_1$

$$\begin{aligned} d(h^{\psi^{-1}(\mathcal{W}_g^u)}(q), h^{\widetilde{\mathcal{W}}^u}(q)) &\leq \text{dist}(T_1, T_2) \cdot \sup_{q \in N_\eta(D)} \angle_q(T\psi^{-1}(E_g^u), \widetilde{E}^u) \leq \\ &\leq \varepsilon_i \gamma \leq 4c\varepsilon \left(\frac{\theta\delta}{100cT} \right) = \frac{\theta}{25} \left(\frac{\varepsilon\delta}{T} \right) = \frac{\theta t_0}{25} < \frac{\theta t_0}{8} \end{aligned}$$

Mas então, para todo $q \in Q$,

$$d(\pi_{\varepsilon_i}^u(q), \psi\tau_{\varepsilon_i}^u(q)) = d(\psi h^{\psi^{-1}(\mathcal{W}_g^u)}(q), \psi h^{\widetilde{\mathcal{W}}^u}(q)) \leq \text{Lip}(\psi)\theta \frac{t_0}{8} \leq \theta \frac{t_0}{4}$$

Similarmente, para $q \in \psi\tau_{\varepsilon_i}^u(Q)$,

$$d(\pi_{\varepsilon_i}^s(q), \tau_{\varepsilon_i}^s(q)) \leq 2\varepsilon_i \angle(E_g^s, \widetilde{E}^s) < \frac{\theta t_0}{4}$$

Combinando essas inequações e usando o fato de que $\tau_{\varepsilon_i}^s$ é uma isometria, temos que $\forall q \in Q$,

$$\begin{aligned} d(\pi_{\varepsilon_i}^s \pi_{\varepsilon_i}^u(q), \tau_{\varepsilon_i}^s \psi\tau_{\varepsilon_i}^u(q)) &\leq d(\pi_{\varepsilon_i}^s \pi_{\varepsilon_i}^u(q), \tau_{\varepsilon_i}^s \pi_{\varepsilon_i}^u(q)) + d(\tau_{\varepsilon_i}^s \pi_{\varepsilon_i}^u(q), \tau_{\varepsilon_i}^s \psi\tau_{\varepsilon_i}^u(q)) \\ &= d(\pi_{\varepsilon_i}^s \pi_{\varepsilon_i}^u(q), \tau_{\varepsilon_i}^s \pi_{\varepsilon_i}^u(q)) + d(\pi_{\varepsilon_i}^u(q), \psi\tau_{\varepsilon_i}^u(q)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &< \frac{\theta t_0}{4} + \frac{\theta t_0}{4} \\ &= \frac{\theta t_0}{2} \end{aligned}$$

Procedendo desse modo nós obtemos que para todo $q \in Q$,

$$d(\pi_{-\varepsilon_i}^s \pi_{-\varepsilon_i}^u \pi_{\varepsilon_i}^s \pi_{\varepsilon_i}^u(q), \tau_{-\varepsilon_i}^s \psi \tau_{-\varepsilon_i}^u \tau_{\varepsilon_i}^s \psi \tau_{\varepsilon_i}^u(q)) < \theta t_0$$

o que completa a prova do Lema 2.10. □

Nós acabamos de mostrar que para cada i existe

$$H^i : [0, 1] \times \beta' D \rightarrow N_\eta(D)$$

onde $t \mapsto H^i(t, q)$ é um us -caminho de quatro arcos de g , tal que $H^i(0, q) = q$ e

$$d(H^i(1, q), \zeta_{t_0}^i(q)) = d(h^i(q), \zeta_{t_0}^i(q)) < \theta t_0$$

onde $t_0 = \frac{\varepsilon \delta}{T}$.

Finalmente concluímos que g é θ -acessível. Com isso finalmente demonstramos o Teorema 2.1 de Dolgopyat e Wilkinson para o caso de preservação ou não de volume. □

2.4 Caso simplético

Uma forma bilinear alternada $\sigma : V \times V \rightarrow K$ em um K -espaço vetorial V de dimensão finita é não degenerada se $\sigma(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ implicar que $v = 0$. Quando V admite uma tal forma, temos que V deve ter necessariamente dimensão par e, além disso, existe uma base $[v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_m]$ de V tal que $\sigma(v_i, v_j) = \sigma(w_i, w_j) = 0$ e $\sigma(v_i, w_j) = \delta_{ij}$

Definição 2.18. *Uma forma simplética em uma variedade M é uma 2-forma ω que é fechada, $d\omega = 0$, e não degenerada, isto é, a aplicação $\omega^\#(x) : TM_x \rightarrow TM_x^*$ é um isomorfismo para cada $x \in M$. Uma variedade simplética é um par (M, ω) em que M é uma variedade e ω é uma forma simplética em M .*

Pelo que vimos acima, uma variedade simplética sempre tem dimensão par $2m$.

Um **espaço vetorial simplético** (V, σ) é um espaço vetorial V com uma forma (ou estrutura) simplética σ . Um **simplectomorfismo** \mathfrak{G} entre dois espaços vetoriais simpléticos (V_1, σ_1) e (V_2, σ_2) é um isomorfismo linear $S : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $\mathfrak{G}^*\sigma_2 = \sigma_1$, ou seja, $(\mathfrak{G}^*\sigma_2)(u, v) = \sigma(S(u), S(v))$, para todo $u, v \in V_1$. Se existe um simplectomorfismo $\mathfrak{G} : V_1 \rightarrow V_2$, dizemos que (V_1, σ_1) e (V_2, σ_2) são simplectomorfos (ver [14]).

Exemplo 2.1. *O espaço vetorial $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ tem uma forma simplética canônica, que é definida por*

$$\omega_0(x, y) = \sum_{i=1}^m dx_i \wedge dy_i$$

A Fórmula de Cartan dá a seguinte relação entre derivada de Lie, derivada exterior e o produto interior:

$$\mathcal{L}_X\omega = d(i_X\omega) + i_X(d\omega)$$

Como a 2-forma ω é fechada, segue que $\mathcal{L}_X\omega = d(df) = 0$ para todo campo diferenciável X na variedade simplética. Dizemos que um campo é **simplético** se $\mathcal{L}_X\omega = 0$, ou seja, se $i_X\omega$ é fechada. E analogamente, um campo \mathcal{X} é **Hamiltoniano** global na variedade M , se $i_X\omega$ é uma forma exata, ou seja, existe $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tal que $i_X\omega = dh$, e neste caso denotamos o campo por X_h .

Dizemos que \mathcal{X} é um campo **Hamiltoniano** local se para cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança U de p , no qual o campo \mathcal{X} é Hamiltoniano em U . Notemos que todo campo Hamiltoniano (global) é localmente Hamiltoniano.

Um dos Teoremas clássicos para tais variedades, é o Teorema de Darboux que garante que toda variedade simplética é localmente simplectomorfa a um aberto do \mathbb{R}^{2n} munida da forma simplética canônica. Mais precisamente temos

Teorema 2.3 (Teorema de Darboux). *Seja (M, ω) uma variedade simplética de dimensão $2m$. Para cada ponto $x \in M$ existe uma vizinhança V de x e um difeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow V$ de classe C^∞ , tal que $\phi^*\omega = \omega_0$, em que ω_0 é a forma simplética canônica de \mathbb{R}^{2m} .*

Por outro lado se f preserva a forma simplética ω , então a perturbação g também pode ser simplética.

Em análogo a prova para o caso que preserva volume começamos com um sistemas de cartas locais C^∞ $\varphi_p : B^{2m}(0, 1) \rightarrow M$, definida em cada ponto $p \in M$, onde $2m = n$. Tais cartas são escolhidas de modo à satisfazer as seguintes propriedades:

- (1) $\varphi_p(0) = p$,
- (2) $T \circ \varphi_p$ envia o splitting $T \circ \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^s \oplus \mathbb{R}^c \oplus \mathbb{R}^u$ no splitting $T_p M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$,
- (3) A forma simplética $\varphi_p^* \omega$ é um pullback linear da forma simplética padrão em \mathbb{R}^{2m} :

$$\varphi_p^* \omega = A_p^* \left(\sum dp_i \wedge dq_i \right)$$

para alguma aplicação linear $A_p \in \mathbb{R}^{2m}$,

- (4) $p \mapsto \varphi_p$ é uma aplicação uniformemente contínua de M em $C^1(B^n(0, 1), M)$. Com relação a dependência de φ_p, A_p em f também é contínua.

Pelo Teorema de Darboux (2.3), para cada $p \in M$ existe uma vizinhança U_p de p e coordenadas $k_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ tal que, nessas coordenadas, a forma ω assumo a forma padrão $\sum dp_i \wedge dq_i$. Para cada p , $T_p k_p$ envia o splitting $T_p M = E^s(p) \oplus E^c(p) \oplus E^u(p)$ no splitting $\mathbb{R}^{2m} = \mathbb{R}_p^s \oplus \mathbb{R}_p^c \oplus \mathbb{R}_p^u$. Seja $A_p : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ uma aplicação linear que envia $B^{2m}(0, 1)$ em $k_p(U_p)$ e envia o splitting trivial $\mathbb{R}^{2m} = \mathbb{R}^s \oplus \mathbb{R}^c \oplus \mathbb{R}^u$ no splitting $\mathbb{R}^{2m} = \mathbb{R}_p^s \oplus \mathbb{R}_p^c \oplus \mathbb{R}_p^u$, escolhido para depender continuamente de p . Portanto $\varphi_p = k_p^{-1} \circ A_p$ satisfaz as propriedades (1)-(4).

Com esta modificação, a prova do Teorema 2.1 no caso simplético procede exatamente igual ao caso de preservação de volume, apenas substituindo a medida μ pela forma ω do Lema 2.10. Vamos modificar um pouco a afirmação do Lema 2.10 e dá a prova no caso simplético.

Lema 2.15. *Para todo $\delta, \theta > 0$, se $r(\mathcal{D})$ é suficientemente pequeno e $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ é suficientemente grande, então existe $g \in Diff_\omega^r(M)$ tal que*

- (1) $d_{C^1}(f, g) < \delta$
- (2) $d_{C^0}(f, g) < \theta$ e
- (3) Cada $D \in \mathcal{D}$ é coberto por discos c -admissíveis $\beta V_1, \dots, \beta V_k$ tal que g é θ -acessível em V_i para cada i .

Observação 2.3. *Se θ e δ são suficientemente pequenos, então qualquer $g \in \text{Diff}_\omega^r(M)$ satisfazendo as condições (1) – (3) do Lema (2.15) é estavelmente acessível em D : Pois o Lema 2.9 implica que g é estavelmente acessível em cada βV_i , o que implica acessibilidade estável em sua união que contém D .*

Prova do Lema 2.15. Seja \mathcal{D} uma família de discos c -admissíveis. Usando o Lema 2.17 abaixo, cobriremos cada $D \in \mathcal{D}$ com c -discos $\beta V_1, \dots, \beta V_k$. O lema associa para cada i um conjunto aberto (que é a união de bolas) $N(D, i) \subset N_\eta(D)$ tal que, para i 's diferentes, esses conjuntos são disjuntos. Em seguida, perturbaremos dentro de $N(D, i)$ para obter θ -acessibilidade em V_i .

Semelhantemente ao caso que preserva volume, precisaremos mostrar que se $r(\mathcal{D})$ é suficientemente pequeno e $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ é suficientemente grande, então para cada $D \in \mathcal{D}$ e cada c -disco V_i na cobertura de D , há um C^∞ -difeomorfismo simplético ψ , suportado em $N(D, i)$, com

- (a) $d_{C^1}(\psi, \text{id}) < \delta$
- (b) $d_{C^0}(\psi, \text{id}) < \theta$
- (c) Se \bar{f} é qualquer difeomorfismo com $f^{-1}\bar{f}$ suportada em $N_\eta(|\mathcal{D}|) \setminus N(D, i)$ e $d_{C^1}(\bar{f}, f) < \delta$, então $\psi \circ \bar{f}$ é θ -acessível em V_i .

Cada perturbação, ψ é suportada numa união de bolas (em oposição a uma vizinhança tubular); Isso permite perturbações simpléticas. O próximo lema substitui o Lema (2.12) para o caso simplético.

Lema 2.16. *Existe $T > 0$ tal que, para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, para cada $p \in M$ e $q \in B_{\frac{1}{2}}(p)$, existem C^∞ -fluxos simpléticos $\xi_t^i = \xi_t^{i,q} : M \rightarrow M$, $i = 1, \dots, c$ tal que, para cada i :*

(1) $\xi_t^i = \text{id}$ fora de $B_{2\epsilon}(q)$

(2) Para $x \in B_\epsilon(q)$,

$$\xi_t^i(x) = \zeta_{\epsilon t}^i(x)$$

(consequentemente ξ_t^i preserva as folhas $\widetilde{\mathcal{W}}^c \cap B_\epsilon(q)$)

(3) $d_{C^1}(id, \xi_t^i) < T|t|$.

Aqui, todas as bolas são medidas na métrica d_p , e todas as outras estruturas invariantes $\widetilde{\mathcal{W}}^c, \zeta^i$, etc. são adaptadas a p .

Prova do Lema 2.16. Sejam p, q, i dados e seja $v = \varphi_p^{-1}(q) \in B^n(0, \frac{1}{2})$. Mais tarde diremos como T é escolhido. Como os campos vetoriais constantes são localmente Hamiltonianos em relação a $\varphi_p^*\omega = A_p^*(\sum dp_i \wedge dq_i)$, existe um campo de vetores Hamiltoniano \mathcal{X}^i suportado em $B^n(v, \frac{1}{2})$ tal que $\mathcal{X}^i = e_i$ em $B^n(v, \frac{1}{4})$. Como o C^1 -tamanho de φ_p é uniformemente controlado, existe $T_0 > 0$, independente de p, q, i tal que $\|\mathcal{X}^i\|_{C^1} < T_0$. Dado $\varepsilon < \frac{1}{4}$, seja

$$\mathcal{Y}^i(x) = \varepsilon \mathcal{X}^i \left(\frac{x - v}{4\varepsilon} \right)$$

Assim, se \mathcal{X}^i tem Hamiltoniano H então \mathcal{Y}^i tem Hamiltoniano $4\varepsilon^2 H((x - v)/4\varepsilon)$. Portanto \mathcal{Y}^i satisfaz $\|\mathcal{Y}^i\|_{C^1} \leq 4T_0$. Além disso, $\mathcal{Y}^i = \varepsilon e_i$ em $B^n(v, \varepsilon)$. O campo de vetores $(\varphi_p)_*\mathcal{Y}^i$ gera o fluxo desejado ξ_i .

□

Em seguida, escolhemos as bolas. A prova do próximo lema é um exercício elementar de geometria euclidiana.

Lema 2.17. *Existe $m > 2$, dependendo somente de c e $\dim(M)$, tal que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e para todo $p \in M$, existe $k > 0$ e pontos*

$$\{q_{i,j} \mid i = 1, \dots, c, j = 1, \dots, k\} \subset N_{(m-2)\varepsilon}(D)$$

com as seguintes propriedades:

(1) *Existem $p_1, \dots, p_k \in D$ e $\varepsilon_{i,j} > 0$ tal que $\tau_{-\varepsilon_{i,j}}^u(q_{i,j}) = p_j$,*

(2) *As bolas da coleção*

$$\{B_{2\varepsilon}(q_{i,j}), B_{2\varepsilon}(\tau_{\varepsilon_{i,j}}^u), B_{2\varepsilon}(\tau_{\varepsilon_{i,j}}^s \tau_{\varepsilon_{i,j}}^s(q_{i,j})) \mid i = 1, \dots, c, j = 1, \dots, k\}$$

são duas a duas disjuntas

(3) *As bolas*

$$B_{\beta\varepsilon}(p_1), \dots, B_{\beta\varepsilon}(p_k)$$

cobrem D

Segue que, dado δ e θ , seja T dado pela Lema 2.16, seja $\gamma = \frac{\theta\delta}{100cT}$, e escolha J de acordo com o Lema 2.11. Seja \mathcal{D} uma família qualquer de discos c -admissíveis com $\mathcal{R}(\mathcal{D}) > J$ e $r(\mathcal{D}) < J^{-1}$. Seja $D \in \mathcal{D}$ com centro p . Procedendo como na prova do Lema 2.10, escolha $\varepsilon < \frac{\theta}{4mc}$ satisfazendo as hipóteses do Lema 2.16, onde m é dado pelo Lema 2.17. Fixe $1 \leq i \leq c$, e seja os pontos $\{q_{i,j}\}, p_i$ dado pelo Lema 2.17. Seja $V_i = V_\varepsilon(p_i)$. Pelo Lema 2.17 os discos $\beta V_1, \dots, \beta V_k$ cobrem D . Seja

$$N(D, i) = \bigcup \{B_{2\varepsilon}(q_{i,j}), B_{2\varepsilon}(\tau_{\varepsilon_{i,j}}^s(q_{i,j})), B_{2\varepsilon}(\tau_{\varepsilon_{i,j}}^u \tau_{\varepsilon_{i,j}}^s(q_{i,j})) \mid j = 1, \dots, c\}$$

Com isso, mostrou-se que as propriedades (a) – (c) acima foram satisfeitas para todo i .

Em cada bola $B_{2\varepsilon}(q_{i,j})$, seja $\xi_t^{i,j} = \xi_t^{i,q_j}$ o fluxo dado pelo Lema 2.16, com $q = q_j$. Defina $\psi : M \rightarrow M$ por

$$\psi(q) = \begin{cases} \xi_{\frac{\delta}{T}}^{i,j} & \text{se } q \in B_{2\varepsilon}(q_{i,j}), \text{ para algum } j, \\ q & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Portanto ψ tem as seguintes propriedades:

- $\psi^*\omega = \omega$,
- $\psi = \text{id}$ fora de $N(D, i)$,
- ψ preserva as folhas de \widetilde{W}^c fora de $\bigcup_j B_\varepsilon(q_{i,j})$,
- $d_{C^1}(\psi, \text{id}) < \delta$.

Seja \bar{f} um difeomorfismo qualquer com $f^{-1}\bar{f}$ suportada em $N_\eta(|\mathcal{D}|) \setminus N(D, i)$, e seja $g = \psi \circ \bar{f}$. Resta somente mostrar que g é θ -acessível em V_i .

Pelo mesmo argumento da prova do Teorema 2.1, nós obtemos que, para cada $x \in V_i$ existe um us -caminho de 4 arcos em g de x para $y \in N_{(m-2)\varepsilon}(D)$ tal que $d(y, \zeta_{t_0}^i(x)) < \theta t_0$. Em outras palavras, g é acessível em V_i .

□

3 Ergodicidade Estável

Primeiramente vejamos o *paper* de F. Hertz, M. Hertz e R. Ures. (Ver [17]) onde é tratado da acessibilidade e da ergodicidade estável para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos com dimensão do central igual a um. No trabalho de Hertz-Hertz-Ures (Ver [17]) foi provado que a ergodicidade é C^r -densa no caso em que o central é unidimensional e os difeomorfismos preservam volume (Ver Conjectura 2.3) A seguir temos o Teorema principal de Hertz - Hertz - Ures. A seguir temos o Teorema principal daquele trabalho.

Teorema 3.1. *(Teorema de Hertz-Hertz-Ures) A ergodicidade estável é C^r -densa no conjunto dos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos que preservam volume e que tenham fibrado central unidimensional, para todo $r \geq 2$.*

Temos também outros dois teoremas.

Teorema 3.2 (Teorema A). *Se $\dim(E^c) = 1$, então a acessibilidade é C^1 -aberta e C^r -densa em \mathcal{PH}_μ^r , para todo $1 \leq r \leq \infty$.*

A seguir definimos uma propriedade mais forte que ergodicidade a qual está presente nos resultados de Hertz-Hertz-Ures.

Definição 3.1 (Sistemas Kolmogorov). *Seja (M, \mathcal{B}, μ) um espaço de probabilidade não trivial. Representamos por $\vee_\alpha \mathcal{U}_\alpha$ a σ -álgebra gerada por uma família qualquer de subconjuntos \mathcal{U}_α de \mathcal{B} . Dizemos que (f, μ) é um sistema Kolmogorov se existe alguma σ -álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ tal que*

- (a) $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ a menos de medida nula;
- (b) $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\mathcal{A}) = \{\emptyset, M\}$ a menos de medida nula;
- (c) $\bigvee_{n=0}^{\infty} \{B \in \mathcal{B} : f^{-n}(B) \in \mathcal{A}\} = \mathcal{B}$ a menos de medida nula.

Teorema 3.3 (Teorema B). *Acessibilidade Essencial implica Kolmogorov (Em particular ergodicidade) em \mathcal{PH}_μ^2 se $\dim(E^c) = 1$.*

A prova do Teorema B foi apresentada em meados de 2008 por K. Burns e A. Wilkinson e pode ser encontrada em [4]. Na verdade, eles deduzem o Teorema B de um Teorema de Burns mais geral envolvendo a condição de *center bunched* que é trivialmente satisfeita quando a dimensão do espaço central é 1.

Além disso, Hopf também provou que os $C^{1+\delta}$ -difeomorfismos conservativos (hoje chamados) de Anosov são ergódicos. E, uma vez que os difeomorfismos de Anosov são abertos temos que os sistemas Anosov conservativos são estavelmente ergódicos. (Ver [21])

Como já vimos anteriormente, em [13] Dolgopyart e Wilkinson provaram que a acessibilidade se mantém para um subconjunto C^1 -aberto e C^r -denso de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, que preserva volume ou não. Este resultado é central em nosso trabalho.

Por outro lado, Sambarino, M. e Horita, V. tratam da acessibilidade e ergodicidade estável no caso em que as folhas centrais são bidimensionais. (Ver [21]) Considere classes de difeomorfismo parcialmente hiperbólico $f : M \rightarrow M$ com decomposição dominada $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ e $\dim E^c = 2$. Essas classes incluem, por exemplo (perturbação do) produto de Anosov e difeomorfismos conservativos em superfície, symplectomorfismos parcialmente hiperbólicos em variedades de dimensão quatro com folheação central bidimensional cujas folhas centrais são compactas. Desse modo, a principal contribuição de Sambarino e Horita foi a C^r -densidade da ergodicidade estável quando a dimensão central é dois. Especificamente eles provaram que para grandes classes de C^r -difeomorfismos parcialmente hiperbólicos que preservam volume com espaço central bidimensional, a ergodicidade estável é mantida em subconjuntos C^r -densos. Mais precisamente temos

Teorema 3.4 (Teorema de Sambarino-Horita). *A ergodicidade se mantém em um subconjunto C^1 -aberto e C^r -denso nas seguintes restrições:*

- *Difeomorfismos skew-products conservativos em superfícies sobre difeomorfismos conservativos de Anosov.*
- *Symplectomorfismos parcialmente hiperbólicos em (M, ω) onde $\dim M = 4$ com folheação central bidimensional cujas folhas são todas compactas.*

A principal ferramenta que foi utilizada para provar ergodicidade foi a acessibi-

lidade. Assim, teríamos que provar que a acessibilidade se mantém em um subconjunto C^1 -aberto e C^r -denso no ambiente com o qual se está trabalhando. A ideia principal é usar resultados da dinâmica conservativa em superfície para mostrar que a genericidade implica acessibilidade. De fato, quando a dimensão central é dois se olharmos para a classe de acessibilidade em uma folha central compacta (periódica), teremos três possibilidades: ela tem dimensão topológica zero, um ou dois. Provou-se que genericamente classes de acessibilidade de dimensão zero não existem. Usou-se todos os resultados da dinâmica conservativa em superfície para provar que também não existem classes de acessibilidade genericamente unidimensionais e, portanto, as classes de acessibilidade são abertas na folha central. Logo, há apenas uma classe de acessibilidade.

Definição 3.2. *Um subconjunto \mathcal{R} de um espaço de Baire é chamado **Residual** se ele pode ser escrito como interseção enumerável de subconjuntos abertos e densos*

Por outro lado, conforme introduzimos anteriormente, em [4] Burns e Wilkinson provaram a conjectura 2.3 de Pugh e Shub com a hipótese de *center bunched*, o que é satisfeito em particular por todos os sistemas parcialmente hiperbólicos com espaço central unidimensional. Eles também provaram resultados em ergodicidade para $C^{1+\delta}$ -sistemas parcialmente hiperbólicos, com $\delta > 0$. Eles melhoraram muito o resultado de Pugh e Shub em dois sentidos: a coerência dinâmica não mais é necessária e a condição de *center bunched* é mais suave do que originalmente declarada. Esse resultado é enunciado a seguir.

Teorema 3.5 (Teorema de Burns-Wilkinson). *Seja $f \in \mathcal{P}H_\mu^2(M)$ um difeomorfismo *center bunched*. Se f é essencialmente acessível então f é ergódico e mais que isso, tem a propriedade Kolmogorov.*

Brin e Pesin [9] e independentemente Pugh e Shub [29] examinaram pela primeira vez as propriedades ergódicas de sistemas parcialmente hiperbólicos logo após o trabalho de Anosov e Sinai. A definição atual de hiperbolicidade parcial é mais geral do que a deles, mas tem as mesmas características básicas.

Por mais que o argumento de Brin e Pesin se aplicam a muitos exemplos de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, ele é, de alguma forma, muito restritivo pois pedia que \mathcal{W}^c fosse Lipshitziana. Desse modo, retirou-se essa condição por meio de uma pequena perturbação nas cartas. O teorema de Brin e Pesin (Ver [9]), que será

enunciado a seguir, se aplica no caso particular para aplicação de primeiro retorno τ do fluxo geodésico de uma superfície compacta de curvatura constante negativa. Se fizermos uma C^1 -perturbação em τ todas as outras hipóteses de continuidade continuam valendo, exceto o fato de \mathcal{W}^c ser Lipschitziana.

Teorema 3.6 (Teorema de Brin-Pesin). *Seja f um C^2 -difeomorfismo parcialmente hiperbólico de uma variedade suave compacta M . Considere $x \in M$ e dois discos D^1 e D^2 transversais a família $\mathcal{L}(x)$ de variedades estáveis locais $V(y)$, $B(x, r)$. Então a aplicação de holonomia π é absolutamente contínua (em respeito as medidas m_{D^1} e m_{D^2} e o Jacobiano $\text{Jac}(\pi)$ é limitado superiormente e diferente de zero.*

Corolário 3.1. *Seja f um C^2 -difeomorfismo parcialmente hiperbólico preservando volume com $\dim(E^c) = 1$. Se f é essencialmente acessível então f é ergódico e mais que isso, f tem a propriedade de Kolmogorov.*

Isso estabelece a conjectura de Pugh-Shub no caso em que E^c é unidimensional. Combinando este resultado com o Teorema 3.5 obtemos outro resultado.

Corolário 3.2. *Seja f um $C^{1+\delta}$ -difeomorfismo parcialmente hiperbólico preservando volume com $\dim(E^c) = 1$. Se f é essencialmente acessível, então f é ergódico e de fato f tem a propriedade Kolmogorov.*

A seguir falaremos um pouco de acessibilidade em endomorfismos.

Definição 3.3. *Seja M uma variedade. Um endomorfismo é uma aplicação contínua $f : M \rightarrow M$ tal que f é uma imersão de M nela mesma, ou seja, a derivada de f é sobrejetiva. Caso a dimensão de M seja finita, f também é injetiva e portanto um isomorfismo. Além disso, em geral, os endomorfismos não são invertíveis como os difeomorfismos.*

Há casos de endomorfismos invertíveis, por exemplo os difeomorfismos são endomorfismos de grau 1.

Em seu trabalho, He prova em [16] que endomorfismos parcialmente hiperbólicos com espaços centrais unidimensionais são estavelmente acessíveis. E além disso, existe um subconjunto residual \mathcal{R} de endomorfismos parcialmente hiperbólicos com espaços centrais unidimensionais que preservam volume, de modo que cada $f \in \mathcal{R}$ é estavelmente acessível.

Iremos introduzir agora a noção de endomorfismos parcialmente hiperbólico, a qual é semelhante a definição para difeomorfismos.

Definição 3.4. *Um endomorfismo f é dito **parcialmente hiperbólico** se o fibrado tangente TM se decompõe como $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$. Além disso, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\forall x \in M$, $\theta^s \in E^s$, $\theta^c \in E^c$ e $\theta^u \in E^u$ temos*

- $\|Df^l(x)(\theta^s)\| < \frac{1}{2}$
- $\|Df^l(x)(\theta^u)\| > 2$
- $\|Df^l(x)(\theta^s)\| < \frac{1}{2}\|Df^l(x)(\theta^c)\| < \frac{1}{4}\|Df^l(x)(\theta^u)\|$

Para definir a acessibilidade no sentido de He iremos definir uma classe de acessibilidade de um endomorfismo.

Definição 3.5. *Para um endomorfismo parcialmente hiperbólico f , a classe de acessibilidade $A_f(x)$ é o conjunto constituído pelos pontos que possuem us -caminhos desses pontos até o ponto x . Aqui, o us -caminho é uma concatenação de muitos subcaminhos, cada um deles inteiramente em uma variedade local estável ou instável.*

Assim temos

Definição 3.6. *Um endomorfismo parcialmente hiperbólico f é dito acessível se existir somente uma classe de acessibilidade*

Observe que as variedades estáveis fortes não dependem da escolha das órbitas. Então, se um endomorfismo parcialmente hiperbólico não tem subfibrado instável, ele não pode ser acessível. Porém, podemos usar as diversas órbitas do ponto para sistemas não invertíveis para obter a acessibilidade. Portanto, $\dim E^s$ pode ser zero.

Desse modo, análogo a definição para difeomorfismos, os endomorfismos parcialmente hiperbólicos f são considerados estavelmente acessíveis, se houver uma C^1 -vizinhança \mathcal{U} tal que todo $g \in \mathcal{U}$ seja acessível.

O artigo de He é motivado pelo seguinte problema:

Problema 3.1. *Seja f um endomorfismo no 2-toro $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dado por*

$$f(x, y) = (2x, y + \lambda \sin(2\pi x)), \text{ com } \lambda \neq 0$$

Então f é ergódica?

O exemplo acima é um endomorfismo parcialmente hiperbólico. É principalmente motivado pela famosa conjectura de ergodicidade estável de Pugh-Shub. (Ver conjectura 2.3)

Em trabalhos sobre a conjectura de ergodicidade estável, a acessibilidade da dinâmica é a ferramenta chave para provar ergodicidade. No artigo de Baolin, generaliza-se principalmente os resultados parciais de Didier [12] e Hertz-Hertz-Ures [17] para endomorfismos.

Definição 3.7. *Seja $\mathcal{P}H^{1,1}(M)$ o conjunto dos endomorfismos parcialmente hiperbólicos de M com $\dim(E^s) \leq 1$ e $\dim(E^u) \geq 1$.*

Definição 3.8. *Seja $r \geq 1$. Definimos $\mathcal{P}H_m^{r,1}(M)$ como o conjunto dos C^r -endomorfismos parcialmente hiperbólicos preservando volume em M com $\dim(E^s) \leq 1$ e $\dim(E^u) \geq 1$.*

A seguir enunciamos os resultados principais de Baolin.

Teorema 3.7 ((Ver [16])). *Seja $f \in \mathcal{P}H^{1,1}(M)$. Se f é acessível então f é estavelmente acessível.*

O próximo resultado caracteriza a C^r -densidade da acessibilidade em $\mathcal{P}H_m^{r,1}(M)$.

Teorema 3.8 ((Ver [16])). *Existe um subconjunto residual $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}H_m^{r,1}$ tal que para qualquer $f \in \mathcal{R}$, onde f é acessível, $r > 1$.*

4 Conclusões

Nesse trabalho buscou-se deixar claro as relações entre acessibilidade e ergodicidade. Nos voltamos basicamente ao trabalho de Dolgopyat e Wilkinson para entender a densidade da acessibilidade estável de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos. Especificamente, estudamos que a acessibilidade estável é C^1 -densa no conjunto dos C^r -difeomorfismos parcialmente hiperbólicos de M , para todo $r \geq 1$, preservando volume ou não. Vimos também que se M é uma variedade simplética então a acessibilidade estável é C^1 densa no conjunto dos difeomorfismos simpléticos parcialmente hiperbólicos. Buscamos em outros trabalhos mais recentes o que já foi feito em relação à acessibilidade, quais outras propriedades está relacionada a ela, quais consequências é possível se obter e o que ainda está em aberto nesse campo. Com isso concluímos que a acessibilidade é uma propriedade que nos permite responder se um sistema dinâmico é ergodicamente estável ou não. A análise é feita usando como bases perturbações numa vizinhança de um difeomorfismo e estudando como se comportam tais perturbações nos espaços estável, instável e central.

Bibliografia

- [1] ARNALD, M. C., *The generic symplectic C^1 diffeomorphisms of 4-dimensional symplectic manifolds are hyperbolic, partially hyperbolic or have a completely elliptic periodic point*, Prépublications d'Orsay. 2000, p. 1-17.
- [2] AVILA, A., CROVISIER, S. e A. Wilkinson, *Diffeomorphisms with positive metric entropy*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 2016, p. 319–347.
- [3] BONATTI, C. e VIANA, M., *SRB measures for partially hyperbolic Systems whose central direction is mostly contracting*, Israel J. Math. 2000, p. 157-194.
- [4] BURNS, K., Wilkinson, A. *On the ergodicity of partially hyperbolic systems*. Ann. Math.
- [5] BURNS, K., PUGH, S. e WILKINSON, A., *Stable ergodic and Anosov flows*, Topologia. Volume 39, edição 1 , p. 149-159. janeiro de 2000.
- [6] BURNS, K. e WILKINSON, A. *Stable ergodic of skew products*. Annales scientifiques de l'É.N.S. edição 4. 1999, p. 859-889.
- [7] BRIN, M. *Topological transitivity of one class of dynamical systems and flows of frames on manifolds of negative curvature*. Func Anal. 1975, p. 9-19.
- [8] BRIN, M. *The topology of group extensions of C systems*. Mat Zametki, 18 (1975), 453–465.
- [9] BRIN, M. e PESIN, Y. *Partially hyperbolic dynamical systems*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1974, p. 170–212.
- [10] CAMACHO, C.; NETO, A., *Introdução à Teoria das Folheações*. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.vol 1. 320 p.
- [11] COSTA, J. *Transitividade e Classes homoclínicas*. Dissertação (Mestrado) - Programa de pós-graduação em Matemática, Universidade Federal do Maranhão, São Luis, 2012. 64 p.

-
- [12] DIDIER, P. *Stability of accessibility*, Ergodic theory Dyn.Syst., 2003, p. 1717 - 1731.
- [13] DOLGOPYAT, D. e WILKINSON, A. *Accessibility is C^1 dense*. Astérisque. França, p. 33-60. 2003.
- [14] FERREIRA, R. e SILVA, F., *Campos Hamiltonianos e primeiro grupo de cohomologia de De Rham*. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, p. 10-15, dez. 2015.
- [15] M. GRAYSON, C. PUGH e M. SHUB, M., *Stably ergodic diffeomorphisms*, Annals of Mathematics 1994, p. 295-329.
- [16] HE, BAOLIN. *Accessibility of partially hyperbolic endomorphism with 1D center-bundles*. Journal of Applied Analysis and Computation, Shanghai, China, v. 7, n. 1, p. 334-345, 1 fev. 2017. DOI 10.11948/2017022. Disponível em: <http://jaac-online.com/>. Acesso em: 25 maio 2021.
- [17] HERTZ, F., HERTZ, M. e URES, R. *Accessibility and stable ergodicity for partially hyperbolic diffeomorphisms with 1D-center bundle*. Inventiones Mathematicae. 2008. p. 353-381. jan.
- [18] HERTZ, F., HERTZ, M., URES, R. e TAHZIBI, A., *A criterion for ergodicity of non-uniformly hyperbolic diffeomorphisms*, Electron. Res. Announc. Math. Sci. 2007. p. 74-81.
- [19] HERTZ, F., *Stable ergodicity of certain linear automorphisms of the torus*, Ann. of Math., 2005, p. 65-107.
- [20] HIRSCH, M. e PUGH, C., *Stable Manifolds and hiperbolic sets*, Global Analysis, Proc. Sym. Pure Math. AMS XIV, 1970.
- [21] HORITA, V. e SAMBARINO, M. *Stable ergodicity and accessibility for certain partially hyperbolic diffeomorphisms with bidimensional center leaves*. Uruguai, p. 467-512, 14 jun. 2017.
- [22] MAÑÉ, R., *Introdução à teoria ergódica*. Rio de Janeiro: Impa, 1983. 389 p.
- [23] MENEZES, K., *Difeomorfismos de Anosov*. 2016. 57 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de pós graduação em Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2016.

-
- [24] NIȚICĂ, V. e TÖRÖK, A., *An open dense set of stably ergodic diffeomorphisms in a neighborhood of a non-ergodic one*, *Topology*, p. 259-278, 2001.
- [25] PALIS, J. e MELO, W., *Introdução aos sistemas dinâmicos*. 2. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2017. 232 p.
- [26] PESIN, Y., *Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity*. Pennsylvania: European Mathematical Society, 2004. 122 p.
- [27] PUGH, C. e SHUB, M., *Stably ergodic dynamical and partial hyperbolicity*, *J. of complexity*, p. 125-179. 1997.
- [28] PUGH, C. e SHUB, M., *Stably ergodic and julienne quasiconformality*, *J. of complexity*, p. 125-179. 1997.
- [29] C. Pugh and M. Shub. *Ergodicity of Anosov actions*. *Invent. Math.*, p. 1–23, 1972.
- [30] SACKSTEDER, R., *Strongly mixing transformations*. *Global Analysis Proc. Sympos. Pure Math, Vol XIV, Berkeley, Calif.* 1968, p. 245-252.
- [31] SHUB, M., *Global stability of dynamical systems*. Nova York: Springer-Verlag, 1987. 163 p.
- [32] SHUB, M. e WILKINSON, A., *Stable ergodic approximation: two examples*. *Ergodic.* p. 875-893. 2000.
- [33] SMALE, S. *Differentiable dynamical systems*. *Bull. Amer. Math. Soc.* 73. p. 747-817.
- [34] VIANA, M. e OLIVEIRA, K. *Fundamentos da Teoria Ergódica*. 2. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2019. 520 p.
- [35] ZHANG, Z. *C^r density of stable ergodicity for a class of partially hyperbolic systems*, 2015.