UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

WALEFF MESQUITA LEAL

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO:
uma análise de erros em provas da OBMEP no Maranhão

São Luís – MA

2021

WALEFF MESQUITA LEAL

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO:
uma análise de erros em provas da OBMEP no Maranhão

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Valdiane Sales Araújo

São Luís – MA

2021

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Mesquita Leal, Waleff.
RESOLUCÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO : uma análise de erros em provas da OBMEP no Maranhão / Waleff Mesquita Leal. - 2021.
68 f.

Orientador(a): Valdiane Sales Araujo.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luis, 2021.

1. Análise de erro. 2. Ensino Médio. 3. Geometria. 4. OBMEP. I. Sales Araujo, Valdiane. II. Título.

WALEFF MESQUITA LEAL

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO:
uma análise de erros em provas da OBMEP no Maranhão

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em ___/___/_____

Banca Examinadora

____

Prof. Dr. Domício Magalhaes Maciel – UFMA

Avaliador interno ao Programa

____

Prof. Dr. Raimundo José Barbosa Brandão – UEMA

Avaliador externo ao Programa

____

Prof.ª Dr.ª Valdiane Sales Araújo – UFMA

Orientadora

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por conceder esta oportunidade. À minha família, em especial meu Pai, Raimundo Leal, que não mediu esforços no auxílio de minha formação.

Aos colegas do PROFMAT, Celso H. A. Berredo, David Sousa Costa, Frederico Carvalho da Silva, João Reis de Carvalho, Moises Rego Dourado, Orley de Bastos Santos, Samuel Vaz Costa, Valdir de O. Junior, por estarem comigo nessa jornada.

À minha namorada, Alexane Nascimento da Silva, pelo apoio e incentivo.

Aos meus amigos Adaias Pacheco e Mateus Pacheco, que fizeram parte indiretamente nessa jornada.

À CAPES, por proporcionar e financiar um programa como o PROFMAT. À UFMA, pela oportunidade de acesso ao conhecimento. Ao Prof. Antônio José da Silva, coordenador do PROFMAT/UFMA, pelo apoio aos discentes.

À minha Orientadora, Prof.ª Dr.ª Valdiane Sales Araújo, pelas orientações e pelo apoio intelectual e incondicional para conclusão deste trabalho.

“Feliz aquele que transfere o que sabe
e aprende o que ensina”

Cora Coralina

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo subsidiar professores de Matemática na produção de seu plano de trabalho docente, a partir dos resultados e discussões apresentados, bem como promover o debate acerca da qualidade do ensino de geometria no Ensino Médio, mediante a análise e classificação de erros nas provas da segunda fase da OBMEP. Para tanto, foram selecionadas aleatoriamente 100 provas e, posteriormente, analisada a questão 4, que envolve conhecimentos ligados à geometria. A pesquisa é de caráter quanti-qualitativa, na qual foram classificados os erros presentes nas soluções dadas pelos alunos, seguindo como base a metodologia de erro utilizada por Radatz (1979), com pressupostos teóricos de Cury (2007), no intuito de fornecer uma sistemática de investigação na qual se possa questionar sobre os erros dos alunos, analisando e buscando entender as causas deles. Ao final da pesquisa, pode-se observar que a maioria dos alunos compreende o Teorema de Pitágoras, no entanto, apresentam dificuldades na sua aplicação, além da grande dificuldade acerca do uso da álgebra em problemas geométricos.

Palavras-chave: Análise de erro. Ensino Médio. OBMEP. Geometria.

ABSTRACT

This work aims to support Mathematics teachers in the production of their teaching work plan, based on the results and discussions presented, as well as to promote the debate about the quality of geometry teaching in High School, through the analysis and classification of errors in the evidence of the second phase of OBMEP. For this purpose, 100 tests were randomly selected and, subsequently, question 4, which involves knowledge related to geometry, was analyzed. The research is of a quanti-qualitative character in which the errors present in the solutions given by the students were classified, following as a basis the error methodology used by Radatz (1979), with theoretical assumptions by Cury (2007), in order to provide a systematic research in which students' mistakes can be questioned, analyzing and seeking to understand their causes. At the end of the research it can be seen that most students understand the Pythagorean Theorem, however they have difficulties in its application, in addition to the great difficulty about the use of algebra in geometric problems.

Keywords: Error analysis. Secondary School. OBMEP. Geometry.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A matemática como ciência vem se transformando ao longo do tempo, a metodologia de ensino não se resume apenas ao “calcular”. Tal conhecimento vem sendo contextualizado com o intuito de formar cidadãos críticos e capazes de interpretar e analisar informações, de resolver problemas e tomar decisões no desenvolvimento e construção do saber matemático.

Nesse contexto, a Matemática, em especial a geometria, torna-se uma ferramenta imprescindível, pois pode ser concebida como uma fonte de modelos para os fenômenos nas mais diversas áreas do saber. “Tais modelos são construções abstratas que se constituem em instrumentos para ajudar na compreensão desses fenômenos” (BRASIL, 2013). Para tanto, necessita-se que o indivíduo desenvolva certas competências e habilidades, que o capacitam a agir de forma eficiente e eficaz em situações diversas, as quais são os princípios norteadores da OBMEP.

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) foi criada em 2005 para estimular o estudo da matemática e identificar talentos na área. A OBMEP tem como objetivo principal estimular e promover o estudo da Matemática, contribuindo para a melhoria e qualidade da Educação Básica.

Pretende-se, com esta pesquisa, identificar, analisar e classificar os erros cometidos pelos estudantes do Ensino Médio das escolas públicas do Estado do Maranhão, em questões de geometria, mediante sua análise e classificação nas provas da segunda fase da OBMEP – Nível 3 do ano de 2019.

Espera-se entender as principais dificuldades apresentadas pelos alunos do Ensino Médio sobre questões de geometria, a partir dos resultados e discussões apresentadas, bem como promover o debate acerca da qualidade do ensino de geometria na educação básica.

Esta pesquisa possui caráter quanti-qualitativo, e optou-se pela análise e classificação dos erros como metodologia de pesquisa.

Este estudo está estruturado em quatro capítulos, além desta introdução e das considerações finais.

No capítulo 2, apresentam-se os procedimentos metodológicos utilizados na pesquisa quanti-qualitativa.

No capítulo 3, apresentam-se algumas leituras sobre o ensino da matemática, revisão de literatura composta de um breve histórico sobre a geometria e suas origens, o ensino da geometria no Ensino Médio e BNCC.

No capítulo 4, apresenta-se um pouco da história da Análise de Erro, bem como as classificações propostas por autores que serviram como sustentação teórica a este trabalho, além de um breve histórico sobre a OBMEP, seus objetivos e sua importância para os estudantes de escolas públicas, descrevendo as competências e habilidades que devem ser desenvolvidas no estudo da matemática e a questão envolvida na pesquisa, além da solução proposta pela OBMEP.

No capítulo 5, aborda-se o erro no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, buscando evidenciar a visão positiva sobre o erro e como é possível usá-lo no enriquecimento da prática docente e em prol do desenvolvimento cognitivo dos alunos. De modo geral, o capítulo apresenta uma análise das resoluções e tentativas de soluções dos alunos, compreendendo de que maneira eles lidam com as informações contidas nos enunciados das questões e como as utilizam, analisando, classificando e explanando os principais erros cometidos por eles.

Nas considerações finais, são apresentadas as maiores dificuldades encontradas pelos alunos nas resoluções das questões, bem como algumas sugestões para o trabalho em sala de aula.

2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este estudo tem uma abordagem quanti-qualitativa, pois, enquanto a investigação quantitativa se apoia predominantemente nas apresentações dos resultados, dados primários coletados e processados, por meio de gráficos e tabelas, no estudo qualitativo, segundo Brandão (2020, p. 51), o pesquisador se constitui como sujeito principal e foca o seu trabalho na interpretação da realidade, trabalhando com valores, crenças, hábitos, atitudes, representações e opiniões.

Dadas as limitações destas abordagens, separadamente, a pesquisa quati-qualitativa surge como opção para uma melhor inserção nos campos das pesquisas mistas. A esse respeito, Dal-Farra e Lopes (2013) enfatizam que:

> Os estudos quantitativos e qualitativos possuem, separadamente, aplicações muito profícuas e limitações deveras conhecidas, por parte de quem os utiliza há longo tempo. Por esta razão, a construção de estudos com métodos mistos pode proporcionar pesquisas de grande relevância para a Educação como corpus organizado de conhecimento, desde que os pesquisadores saibam identificar com clareza as potencialidades e as limitações no momento de aplicar os métodos em questão (DAL-FARRA; LOPES, 2013, p. 71).

Com relação à metodologia, utilizou-se a “Análise de erro”, por se constituir em uma ferramenta metodológica que tem o propósito de estudar dificuldades, estratégias, procedimentos e erros de naturezas diversas na resolução de problemas matemáticos.

Segundo Cury (2007), a análise de erros é uma metodologia de pesquisa e ensino que pode auxiliar professores e alunos a reverem conteúdos nos quais surgem dificuldades.

> A análise de erros nas soluções dos alunos em questões matemáticas vem sendo empregada por muitos pesquisadores, com características diversas, que dependem do tema enfocado pela pesquisa, dos seus objetivos, dos pressupostos teóricos que embasam a investigação e dos resultados obtidos. (CURY, 2007 apud).

Neste estudo, analisou-se a resolução de problemas de 100 provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) do ano de 2019, em uma questão de Geometria.

A seleção das provas para a análise foi feita de forma aleatória no universo de 4.775 provas, do nível 3, resolvidas por alunos maranhenses. Primeiro, foram escolhidos aleatoriamente 11 pacotes com aproximadamente 100 provas cada. Dentre essas, foram desconsideradas aquelas provas cujo exercício 4 estava totalmente em branco, ou seja, as provas em que os alunos não tentaram resolver esta questão. Em seguida, foram selecionadas as provas escolhendo-se a primeira de cada pacote e, a cada 5 provas, selecionava-se uma até completar as 100 provas que seriam utilizadas no estudo.

3. ENSINO DE GEOMETRIA

A Geometria se desenvolveu em várias culturas antigas de acordo com as necessidades dos povos em cada época. O conhecimento matemático e geométrico que possuímos atualmente é a soma dos conhecimentos adquiridos por diversos povos, em diferentes países, ao longo do tempo.

Por volta de 3500 a.C., quando na Mesopotâmia e no Egito começaram a ser construídos os primeiros templos, foi necessário desenvolver unidades de medidas mais uniformes e precisas. Segundo Gorodski, adotaram, então, a longitude das partes do corpo de um único homem (geralmente o rei) e, com essas medidas, construíram réguas de madeira e metal, ou cordas com nós, que foram as primeiras medidas sociais de comprimento.

Por volta de 500 a.C., na Grécia, foram fundadas as primeiras academias. Tales e Pitágoras reuniram os conhecimentos egípcios, etruscos, babilônicos e indianos, na perspectiva de desenvolvê-los e aplicá-los à matemática, navegação, astronomia e religião. Os livros sobre geometria eram de grande procura devido à crescente curiosidade sobre o assunto. Vários instrumentos foram aperfeiçoados e novos instrumentos foram criados, como, por exemplo, o compasso, que substituiu a corda e a estaca para traçar círculos. O conhecimento da época se aprofundava com rapidez, e a escola pitagórica chegou a afirmar que a terra era esférica, e não plana. Surgiram novas construções geométricas, e suas áreas e perímetros agora podiam ser facilmente calculados.

Segundo Gorodski (2002), Tales, juntamente com a escola pitagórica, fez grandes contribuições de suma importância para estabelecer o método dedutivo-formal em matemática, o que foi finalmente concretizado com o aparecimento de “Os Elementos”, obra máxima de Euclides e provavelmente um dos tratados mais importantes já escritos em toda a história ocidental. Os treze volumes de Os Elementos não apenas incluíram toda a matemática da sua época, mas também forneceram um modelo para o desenvolvimento rigoroso das ideias matemáticas que é utilizado até os dias de hoje:

inicialmente definições e axiomas são apresentados, então proposições são provadas a partir dessas premissas e de outras proposições através de dedução lógica.

3.1 A Geometria e sua importância no currículo escolar

A geometria, assim como qualquer outra área da Matemática, é de suma importância na vida do aluno, uma vez que ela incorpora situações da vivência relacionando as figuras geométricas a objetos os quais os alunos observam no seu dia a dia. Lorenzato (1995) justificou a necessidade de se ter a Geometria na escola, argumentando que “[...] sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas [...]”. Além disso, a geometria é um facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer a Geometria, a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida.

Os PCNEM subdividem o estudo da geometria do Ensino Médio em quatro unidades temáticas: geometria plana, geometria espacial, geometria métrica e geometria analítica. Nelas, destaca-se a necessidade de compreensão das demonstrações das fórmulas e teoremas, conhecer e aplicar as regras e conversões matemáticas, tanto no estudo da geometria de posição, como no cálculo de área de figuras geométricas planas e espaciais e de volume de sólidos geométricos, como prismas, pirâmides, cilindro, cone e esfera.

> O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos – a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes. (PCNEM, 2006 p. 75).

A aquisição do saber geométrico, segundo o PCNEM, retrata que o mesmo não deve se focar apenas na transmissão do conteúdo, visto que, dessa maneira, o ensino basear-se-ia essencialmente na “verbalização” do conhecimento por parte do professor, estagnando o aluno como mero receptor do conteúdo. Dessa forma, o mesmo retrata que a aprendizagem se concretiza quando o professor gera situações que confrontem as concepções do aluno, para que ele possa estar construindo o seu próprio conhecimento matemático.

No Ensino Médio, deve-se assegurar ao aluno o entendimento e aprofundamento dos conceitos da geometria, tanto plana como espacial, em um nível de abstração mais complexo. Destacando-se a necessidade de conhecer as demonstrações das fórmulas e teoremas; conhecer e aplicar as regras e conversões matemáticas, tanto no estudo da geometria de posição, como no cálculo de área de figuras geométricas planas, espaciais e volumes de sólidos geométricos, contextualizando todos os problemas geométricos com algo de sua vivência e realidade.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) distribui o ensino de Matemática em cinco unidades temáticas correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental, dentre elas, temos a geometria:

> A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. (BRASIL 2017, p. 271).

No que se refere ao ensino de Geometria nos anos iniciais, segundo a BNCC, espera-se que o aluno compreenda a noção de ponto e localização de algo em seu meio, bem como identificar as principais figuras geométricas planas e espaciais, comparando-as com objetos do seu cotidiano. Para os anos finais, é estabelecido que:

> [...] o ensino de Geometria precisa ser visto como consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas. Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. (BRASIL 2017, p. 272).

Tal fragmento reforça a importância do ensino de geometria, para a compreensão do seu meio, buscando sempre o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico do aluno, visto que, segundo a BNCC,

> [...] a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras (BRASIL 2017, p. 272).

No próximo capítulo, apresentaremos um estudo sobre a Análise de Erros como metodologia de ensino, bem como o objeto de estudo.

4. ANÁLISE DE ERROS

A forma como o erro é trabalhado em sala de aula pode ser distinto de professor para professor. Alguns consideram o erro como o produto da falta de dedicação do aluno e o tratam de forma punitiva. Outros o encaram como uma falha no processo de ensino e aprendizagem, destacando que o mesmo ocorre devido à ausência do conteúdo estudado no ano anterior.

Alguns professores não gostam de usar o termo “erro”, pois pensam que pode causar problemas na relação professor-aluno. No entanto, acredita-se que o estudo dos erros deve ser feito com naturalidade no sistema de ensino, pois os professores só entendem verdadeiramente as dificuldades dos alunos quando atentam para os erros que eles cometem. Portanto, quando o aluno acerta sua atividade ou prova, nem sempre significa compreensão do conteúdo, em muitos casos, o resultado correto é fruto da utilização de procedimentos não desejados (como "cola", "decoração") ou sorte.

Porém, não basta que o professor reconheça os erros ou acertos dos alunos. É necessário analisar cada resposta para que se descubram as principais dificuldades e se utilizem diferentes estratégias de ensino no intuito de compensar a falta de compreensão do conteúdo.

Desse modo, é possível utilizar o erro como parâmetro norteador do processo educativo. Cury (2007) destaca a ideia de que o erro se constitui como um conhecimento. Segundo a autora, o erro é um saber que o aluno possui, construído de alguma forma e “é necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, levando o estudante a um questionamento sobre suas respostas”. Assim, existe a possibilidade da criação de novas situações de ensino, levando em conta os erros ocasionados por eles, utilizando-os como fatores influenciadores na criação de diferentes estratégias para a aprendizagem dos conteúdos de geometria.

Cury (2007) destaca, ainda, que é muito importante analisar as reações dos alunos, não só pelos acertos e erros assinalados na avaliação da aprendizagem, mas também pela forma como certos conhecimentos são utilizados, o que pode indicar dificuldades de aprendizagem.

Apesar de os erros serem vistos como algo “ruim”, eles podem auxiliar na construção do conhecimento dos alunos. A autora comenta que alguns professores

> [...] estão preocupados, unicamente, em detectar os erros, sem discuti-los com os alunos; outros, aproveitam os erros encontrados e retomam o conteúdo em questão, permitindo que os alunos identifiquem suas dificuldades e tentem superá-las; outros, ainda, exploram os erros com os alunos, questionando os limites de validade da resposta dada, ou, mesmo, tentando entender como os alunos raciocinam ao resolver a questão. Em qualquer uma das formas de considerar os erros dos alunos, os professores estão agindo, em geral, conforme suas concepções e crenças sobre a natureza da Matemática, sobre a melhor forma de ensiná-la e sobre o que significa aprender Matemática. (CURY, 1995, p. 40).

Dessa forma, a abordagem da análise de erro servirá de fundamento para o professor, ou seja, o professor poderá utilizar as situações apresentadas em sala de aula para compreender as dificuldades enfrentadas pela maioria dos alunos do Ensino Médio, bem como as possibilidades e metodologias que irão surgir para reforçar, modificar e inovar a sua forma de ensinar.

Radatz (1979) afirma que o diagnóstico e os aspectos de causa dos erros podem dar ajuda específica para os professores, permitindo integrar seu conhecimento do conteúdo do currículo com seus conhecimentos a respeito das diferenças individuais das crianças. Dessa forma, a análise de erros pode ser considerada uma metodologia de ensino, visto que sua devolutiva aos alunos pode, de fato, proporcionar-lhes a oportunidade de conscientização acerca de suas dificuldades.

Em seu trabalho, Radatz (1979, apud CORDEIRO, 2009) apresentou um estudo a partir dos elementos da teoria do processamento da informação e enumerou cinco categorias de erros matemáticos:

- Erros devido a dificuldades na linguagem: são erros apresentados na utilização de conceitos, vocabulário e símbolos matemáticos, e ao efetuar a passagem da linguagem corrente para linguagem matemática;
- Erros devido a dificuldades para obter informação espacial (dificuldades em obter informação a partir de representações gráficas): aparecem na representação espacial de uma situação matemática ou um problema geométrico.

- Erros devido a uma aprendizagem deficiente de fatos, habilidades e conceitos prévios (deficiência de pré-requisitos): são os cometidos por deficiências na manipulação de algoritmos, fatos básicos, procedimentos, símbolos e conceitos matemáticos.
- Erros devido a associações incorretas ou a rigidez de raciocínio: são causados pela falta de flexibilidade no pensamento para adaptar-se a novas situações; compreendem os erros por persistência, erros de associação, de interferência e de assimilação.
- Erros devido à aplicação de regras ou estratégias irrelevantes: são produzidas por aplicação de regras ou estratégias semelhantes em diferentes conteúdos.

Nesse estudo, assume-se a análise de erros em Matemática, proposta por Cury (2007) e Radatz (1979), como uma metodologia de pesquisa, no sentido de que pode fornecer-nos uma sistemática de investigação a qual possibilitar-nos-á o questionamento sobre os erros dos alunos, coletando os dados, analisando-os e buscando entender as causas dos mesmos. Além do mais, a análise das produções propostas pelos alunos permitirá que entendamos como o saber matemático é compreendido por eles.

4.1 OBMEP

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) teve sua primeira edição realizada em 2005, com a participação de 10,5 milhões de alunos, de 31 mil escolas. Na edição de 2010, foram reunidos 19,6 milhões de estudantes de 44,7 mil escolas públicas, em 99,16% dos municípios brasileiros. Os sucessivos recordes de participação fazem da OBMEP a maior competição de matemática do mundo (MEC, 2011).

Atualmente, ela é direcionada aos alunos do 6º ao 9º ano de escolaridade do ensino fundamental e aos estudantes do ensino médio de escolas públicas municipais, estaduais e federais de todo o Brasil. As inscrições são voluntárias, ou seja, qualquer escola pública pode participar, desde que os alunos estejam devidamente matriculados.

A participação na OBMEP é separada por níveis de escolaridade: no nível 1, participam alunos do 6º e 7º anos de escolaridade do ensino fundamental; no nível 2, alunos do 8º e 9º anos do ensino fundamental; e, no nível 3, alunos de todo o Ensino Médio. É subdividida em duas fases, onde, na primeira, as questões apresentadas são objetivas e, na segunda, as questões são subjetivas, e desta participam apenas os 5% mais bem-sucedidos da primeira fase de cada nível de escolaridade.

São distribuídas premiações como: medalhas de ouro, prata e bronze e bolsa do Programa de Iniciação Científica (PIC) para os primeiros três mil alunos, certificados de Menção Honrosa a até trinta mil e são premiados também 127 professores com curso de aperfeiçoamento no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e 27 escolas municipais ou estaduais com Kits para exibição audiovisual e livros.

A OBMEP é promovida pelo Ministério da Ciência e Tecnologia (MCT) e Ministério da Educação, com realização do IMPA e da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), responsáveis pela Direção Acadêmica.

Os objetivos da OBMEP, os quais se encontram em seu site oficial (OBMEP, 2020), são:

> Estimular e promover o estudo da Matemática entre alunos das escolas públicas; Contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica; Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso nas áreas científicas e tecnológicas; Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional; Contribuir para a integração das escolas públicas com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e sociedades científicas; Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento. (OBMEP, 2020).

De fato, a OBMEP tem grande reconhecimento e valorização na educação matemática. Mas, cabe esclarecer que as provas da OBMEP não são instrumentos de avaliação do ensino público de Matemática no Brasil. Ela visa apenas à premiação acerca do desempenho de alunos, professores e escolas públicas. As questões elaboradas nessas provas refletem os conteúdos básicos que os alunos deveriam dominar ao concluir a escola básica.

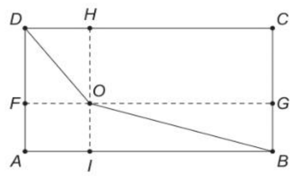
4.2 A questão envolvida na pesquisa

A figura 1 a seguir mostra a quarta questão da 2ª Fase da OBMEP 2019, nível 3, a qual se encontra disponível no site oficial da OBMEP, tendo por objetivo: Avaliar a capacidade de compreensão e visão dos alunos acerca do teorema de Pitágoras; da visualização geométrica espacial e do manuseio da álgebra para demonstrações.

15ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP 2019
Somando novos talentos para o Brasil

Respostas sem justificativa não serão consideradas. **NÍVEL 3**

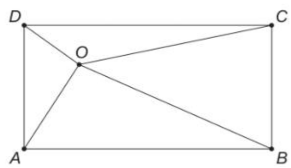
4. a) Na figura abaixo, o ponto O no interior do retângulo $ABCD$ é tal que $OF = 2$, $OG = 6$, $OH = 3$ e $OI = 1$. Os segmentos FG e HI são paralelos aos lados AB e BC, respectivamente. Calcule $OB^2 + OD^2$.



Correção Regional | Correção Nacional

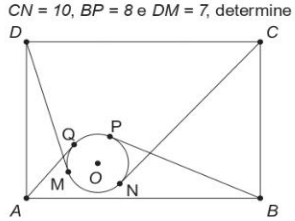
b) Seja O um ponto qualquer no interior de um retângulo $ABCD$, como na figura abaixo. Mostre que

$$OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2.$$



Correção Regional | Correção Nacional

c) Na figura abaixo, $ABCD$ é um retângulo e os segmentos AQ, BP, CN e DM são tangentes ao círculo de centro O. Se $CN = 10$, $BP = 8$ e $DM = 7$, determine o comprimento de AQ.



Correção Regional | Correção Nacional

TOTAL Correção Regional | Correção Nacional

5

Figura 1: Questão 4, nível 3 da segunda fase da OBMEP 2019 (OBMEP, 2020).

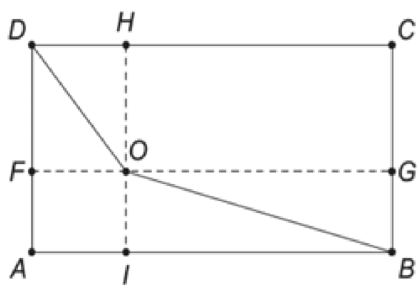
Nessa questão, assim como em todas as questões da OBMEP, o grau de dificuldade aparece em ordem crescente. Em geral, o primeiro item é bem simples, exigindo do aluno apenas leitura e interpretação e um pouco de conhecimento acerca de conceitos geométricos.

Neste caso específico, o aluno precisaria ter conhecimento sobre o teorema de Pitágoras para resolver o primeiro item da questão — conhecimento que já vem sendo abordado desde o Ensino Fundamental —, além da visualização de mensuração de cada segmento. Para solucionar o item (b), o aluno precisaria dos mesmos conhecimentos do item anterior, no entanto, aquele item não envolve valores numéricos, apenas o manuseio algébrico dos segmentos a fim da demonstração da igualdade. Por fim, no item (c), fazendo-se o uso da igualdade do item anterior e do Teorema de Pitágoras relacionado com o raio e a propriedade da tangência ao círculo, e por meio de substituições algébricas chega-se na solução do problema.

A comissão organizadora da OBMEP disponibiliza no site: www.obmep.com possíveis soluções esperadas para cada item da questão.

Conforme é mostrado a seguir:

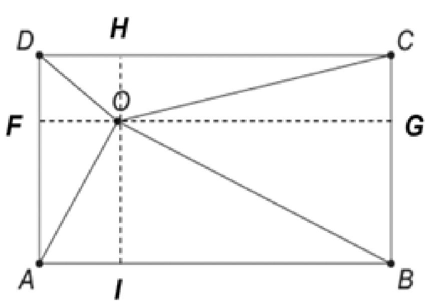
a) Solução do item (a)



Pelo Teorema de Pitágoras, temos: $OD^2 = OF^2 + FD^2 = OF^2 + OH^2$ e, da mesma forma, $OB^2 = OG^2 + GB^2 = OG^2 + OI^2$. Assim, $OD^2 + OB^2 = OF^2 + OH^2 + OG^2 + OI^2 = 4 + 9 + 36 + 1 = 50$.

b) Solução do item (b)

Observemos a figura a seguir, onde estão traçados os segmentos HI e FG, perpendiculares aos lados AB e BC, respectivamente:



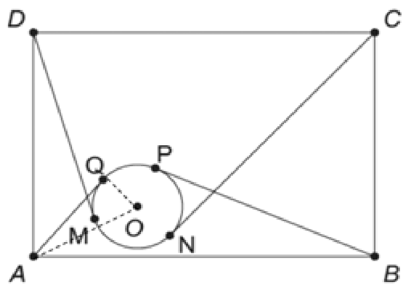
De forma similar ao item a), usando o Teorema de Pitágoras, obtemos as igualdades:

1) $OD^2 + OB^2 = OF^2 + OH^2 + OG^2 + OI^2$,

2) $OA^2 + OC^2 = OF^2 + OI^2 + OH^2 + OG^2$,

de onde decorre a igualdade $OA^2 + OC^2 = OD^2 + OB^2$.

c) Solução do item (c)



De acordo com o item b), temos que:

(1) $OA^2 + OC^2 = OD^2 + OB^2$.

Por outro lado, denotando por R o raio do círculo e usando propriedades de tangência ao círculo, valem as relações:

(2) $OA^2 = AQ^2 + R^2$,

(3) $OC^2 = NC^2 + R^2$,

(4) $OD^2 = MD^2 + R^2$,

(5) $OB^2 = PB^2 + R^2$.

Finalmente, substituindo as igualdades (2), (3), (4) e (5) em (1), obtemos:

$AQ^2 + R^2 + NC^2 + R^2 = MD^2 + R^2 + PB^2 + R^2$, de onde segue que

$AQ^2 = - NC^2 + MD^2 + PB^2 = - 100 + 49 + 64 = 13$.

Portanto, $AQ = \sqrt{13}$.

Observação: O resultado obtido mostra que, independentemente do raio do círculo, conhecendo-se três das quatro medidas AQ, BP, CN e DM, podemos determinar a que falta.

No próximo capítulo, analisaremos cada item referente à questão estudada, bem como a apresentação das classes de erros para cada um deles.

5. A PESQUISA

Neste capítulo, faremos a análise das resoluções apresentadas pelos alunos para a quarta questão da prova de nível 3 da segunda fase da OBMEP do ano de 2019.

5.1 Análises das soluções apresentadas pelos alunos

As 100 provas selecionadas foram escaneadas e agrupadas de acordo com o desempenho dos alunos após a realização de uma leitura para identificação dos erros presentes nas soluções.

Após a leitura e catalogação dos erros encontrados, as provas foram categorizadas de acordo com erros e acertos em cada item, em quatro níveis: **totalmente correto, parcialmente correto, incorreto e não respondeu**, conforme mostra a Tabela 1.

Tabela 1 Desempenho dos alunos na 4ª questão da prova da segunda fase Nível 3 da OBMEP 2019.

DESEMPENHO	ITENS					
	a		B		C	
Totalmente Correto	14	14%	0	0%	0	0%
Parcialmente Correto	10	10%	0	0%	0	0%
Incorreto	70	70%	86	86%	84	84%
Não Respondeu	6	6%	14	14%	16	16%
TOTAL	100	100%	100	100%	100	100%

Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

De acordo com os resultados expostos na Tabela 1, verificou-se que o percentual dos alunos que conseguiram responder totalmente correto o item a foram 14%, já quanto aos itens b e c, não houve nenhuma solução totalmente correta, sendo 86% a taxa de resoluções incorretas para o item b e 84% para o item c, além disso, 14% dos alunos não responderam o item b, e 16% não responderam o item c.

De modo geral, percebe-se que os alunos apresentam dificuldades em resolver problemas de Geometria, em especial, aqueles que envolvem manipulações algébricas como nos casos dos itens b e c.

Conforme já visto, a questão em análise é composta por três itens, sendo que o primeiro, item a, poderia ser resolvido de maneira simples, apenas comparando-se as medidas dos segmentos a partir das propriedades do retângulo e, posteriormente, aplicando o Teorema de Pitágoras. Mesmo sendo a questão mais fácil, o índice de acerto foi baixo, como mostra a Tabela 1. A maioria dos alunos, mesmo aplicando os valores corretos e utilizando o Teorema de Pitágoras, não conseguiu finalizar corretamente a solução.

Para o item b, o maior percentual, de 86%, corresponde aos alunos que tentaram de alguma forma responder o exercício, porém não obtiveram êxito. Isso mostra que esses alunos não estão preparados para solucionar problemas geométricos que envolvam demonstrações algébricas. Isso pode estar relacionado ao fato de tal conhecimento não ser muito trabalhado no Ensino Médio.

Para o item c, por ser uma consequência dos itens anteriores, o percentual de alunos que não tentou responder foi maior em relação a todos os outros. Ao todo, 16% dos alunos nem tentaram resolver o problema. Um fator que possa ter dificultado a solução e favorecido a taxa de erro, de 84%, foi o fato de os alunos não terem solucionado o item anterior, visto que ele servia de suporte para a resolução deste. Além disso, havia ainda a necessidade de conhecer as propriedades de tangência em um círculo e relacionar tal conhecimento com a construção de triângulos retângulos para a aplicação do Teorema de Pitágoras.

Por uma questão de praticidade, denotou-se sistematicamente as cem provas por A1, A2, A3, ..., A100, para facilitar a citação dentro do texto, além de preservar as identidades dos alunos.

As classificações definidas para serem utilizadas na Análise de Erros dos itens do problema selecionado seguem a metodologia sugerida por Cury (2007) e Radatz (1979), que estabelecem a elaboração das classes e subclasses, que serão apresentadas separadamente para cada item da questão.

5.1.1 Classificação de erros para o item a

Para o estudo do item a, foram elaboradas três classes, A, B e C. Foram, ainda, estabelecidas duas subclasses para a Classe A e duas subclasses para a Classe C, referenciadas abaixo:

a) **Classe A -** alunos que cometeram erros devido a associações incorretas no uso de uma regra, caso específico ou cometeram erros de operações aritméticas;

Nesta classe, foram agrupados os alunos que tinham conhecimento do Teorema de Pitágoras, porém não associaram corretamente os valores correspondentes a cada segmento.

b) **Classe B -** alunos que cometeram erros devido à deficiência de pré-requisitos Geométricos;

Nesta classe, foram agrupados os alunos que não apresentaram nenhum conhecimento acerca do Teorema de Pitágoras, além daqueles que apresentaram soluções dedutivas sem fundamentação adequada. Nesta classe, não houve a classificação de subclasses, uma vez que as soluções apresentadas pelos alunos eram poucas fundamentadas e muito similares, porém há dois alunos cujas tentativas de soluções apresentaram erros de operações aritméticas e estão inseridos na classe A.

c) **Classe C -** alunos que cometeram erros devido à dificuldade na linguagem;

Nesta classe, foram agrupados os alunos que compreenderam erroneamente a questão e usaram de situações adversas para a solução da mesma, ou seja, aqueles que se equivocaram na resolução perante a inserção de métodos ou teoremas que não condiziam com o que estava sendo pedido na questão.

Para a Classe A, foram criadas subclasses para identificar, de modo mais específico, o erro cometido pelos alunos na resolução da questão analisada. Desta forma, foram estabelecidas as seguintes subclasses:

- **Subclasse 1 -** Erros cometidos ao definir os valores correspondentes a cada segmento;
- **Subclasse 2** - Erros cometidos em operações aritméticas.

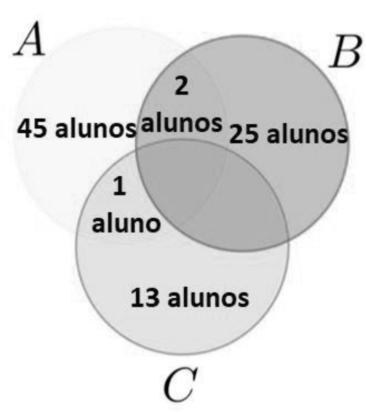
Para a Classe C, foram criadas também duas subclasses com o intuito de especificar os erros da classe abordada.

- **Subclasse 1** - Erros de redação matemática;
- **Subclasse 2** - Erros no uso de alguma definição auxiliar;

Neste item, esperava-se que o aluno relacionasse corretamente o comprimento de cada segmento e observasse que as medidas dos segmentos opostos apresentavam mesmo tamanho, para, após essa correlação, aplicar os valores no Teorema de Pitágoras, resolvendo as potências, somas e, consequentemente, obtendo a medida procurada.

Para análise, não focaremos nos 14 alunos que acertaram esse item, uma vez que nosso intuito aqui é analisar os erros apresentados nas resoluções dos exercícios. Vale observar que alguns alunos foram enquadrados em mais de uma classe, conforme mostra a figura 2.

Figura 2: Diagrama de Venn das classes do item a.



Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

Em relação às três classes analisadas, a tabela 2 mostra o resultado da contagem de erros para cada uma delas, com exceção dos 14 alunos que acertaram este item.

Tabela 2: Números das três classes de erros para o item a.

Classe	Item a
A	*48 alunos*
B	*27 alunos*
C	*14 alunos*

Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

Observemos que a classe A foi aquela que obteve o maior quantitativo de alunos, o que leva a crer que os alunos, em sua maioria, compreenderam, mesmo que com falhas na aprendizagem, o conceito do Teorema de Pitágoras. No entanto, erros de interpretações e dificuldade em relacionar os valores correspondentes a cada segmento levaram os alunos a não terem sucesso na resolução do item. Desses 48 alunos, a maioria cometeu erros de associação e compreensão da questão.

Os alunos classificados na classe B são aqueles que não apresentaram conhecimento geométrico para solucionar o item em questão, ou seja, não aparentavam subsídios que lhes fundamentasse acerca do problema, dando mais ênfase sobre a falta de saber geométrico presente na maioria dos alunos, tal índice demonstra que em especial muitos alunos mal conhecem o Teorema de Pitágoras e tampouco sabem manuseá-lo.

Para a classe C, grupo que compreende aqueles alunos que apresentaram o saber geométrico, porém não solucionaram o problema por não compreenderem de fato o enunciado, além de erros relacionados à redação matemática, conta-se com 14 alunos, mostrando que são poucos aqueles alunos que buscaram resolver o enunciado por métodos não convencionais, além da falta de organização em suas soluções, acarretando erros de redação.

Nas cem provas analisadas, foram constatados erros nas três classes e nas duas subclasses das classes A e C, conforme mostrado nas Tabela 3 e Tabela 4.

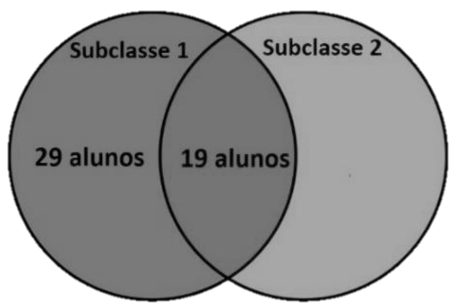
Tabela 3: Erros cometidos nas subclasses da classe A para o item a.

Classe A	Item a
Subclasse 1	*48 alunos*
Subclasse 2	*19 alunos*

Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

A Tabela 3 apresenta o quantitativo de erros registrados nas subclasses da classe A. Nesta classe, constam erros de 48 alunos, o que corresponde a um total de 48% da amostra. Isso evidencia que parte considerável dos alunos buscou resolver este item utilizando o Teorema de Pitágoras, mas cometeu erros pertencentes a alguma das duas subclasses. Vale ressaltar que, desses 48 alunos, todos foram incluídos na subclasse 1, e, desses, 19 cometeram erros classificados para a subclasse 2. Observe na figura 3 o diagrama de Venn da classe A, para melhor compreensão.

Figura 3: Diagrama de Venn das subclasses da classe A, para o item a.



Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

Na subclasse 1, foram incluídos os alunos A1, A3, A4, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A17, A18, A24, A27, A32, A33, A35, A37, A42, A45, A46, A49, A50, A52, A53, A54, A55, A56, A59, A60, A61, A62, A63, A65, A71, A75, A77, A88, A91, A92 A93, A94, A95, A96, A97, A98 e A100, que correspondem aos 48 alunos da classe A.

Observe, na figura 4, a resposta apresentada pelo aluno A4.

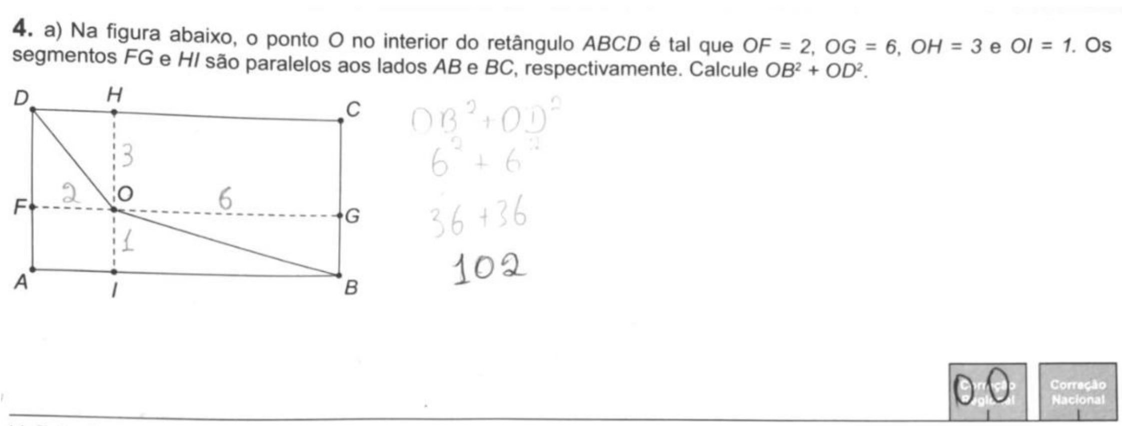


Figura 4: Resolução apresentada pelo aluno A4 ao item a (OBMEP 2019).

Nesta solução, o aluno A4 associou erroneamente às hipotenusas OB e OD as medidas dos catetos e sugere que elas apresentam mesmo tamanho. Outra observação pertinente diz respeito ao erro de adição dos dois valores, erro esse que será analisado na próxima subclasse.

Outra maneira de analisar esta solução é observar que o erro em questão se dá pelo fato de que o aluno não apresenta conhecimento básico de espaço e capacidade de abstração, para associar e relacionar os valores corretamente apenas observando a figura, mostrando assim uma deficiência no saber geométrico adquirido em sua vida escolar.

Na subclasse 2, foram incluídos os alunos A4, A12, A13, A16, A17, A27, A37, A45, A50, A54, A55, A56, A62, A63, A65, A71, A75, A77 e A95 o que corresponde a 19 alunos. Estes alunos cometeram erros nas operações aritméticas.

Observe, na figura 5, a resposta apresentada pelo aluno A12.

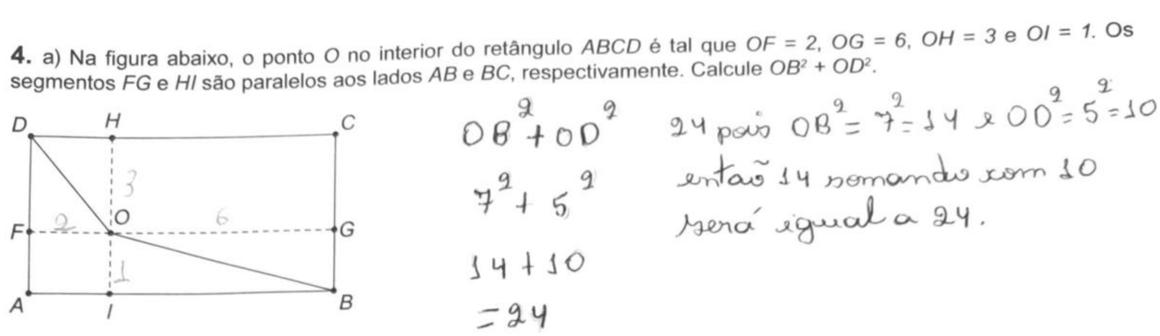


Figura 5: Resolução apresentada pelo aluno A12 ao item a (OBMEP 2019).

Na resolução apresentada pelo aluno A12, além do erro especificado pela subclasse 1, em associar erroneamente o valor correspondente a cada segmento, ele se mostrou ineficiente ao tentar resolver as potenciações por ele estipuladas. Esse erro é bem comum, pois os alunos acabam confundindo as potências como uma multiplicação da base pelo expoente. Presume-se que o erro tenha acontecido por falhas ocorridas no processo de aprendizagem do aluno em relação às operações com potenciações.

Na classe B, foram incluídos os alunos A2, A5, A6, A7, A8, A17, A19, A22, A23, A25, A26, A28, A29, A30, A34, A36, A38, A39, A41, A43, A44, A48, A51, A53, A57, A58 e A89. Esses são os 27 alunos que cometeram erros classificados para esta classe.

Em relação aos erros da classe B, percebe-se que o conhecimento construído pelo aluno carece de entendimento e habilidades para aplicar as regras de conversões matemáticas. Esses alunos cometeram erros devido à deficiência de pré-requisitos.

Observe, na figura 6, a resposta apresentada pelo aluno A2.

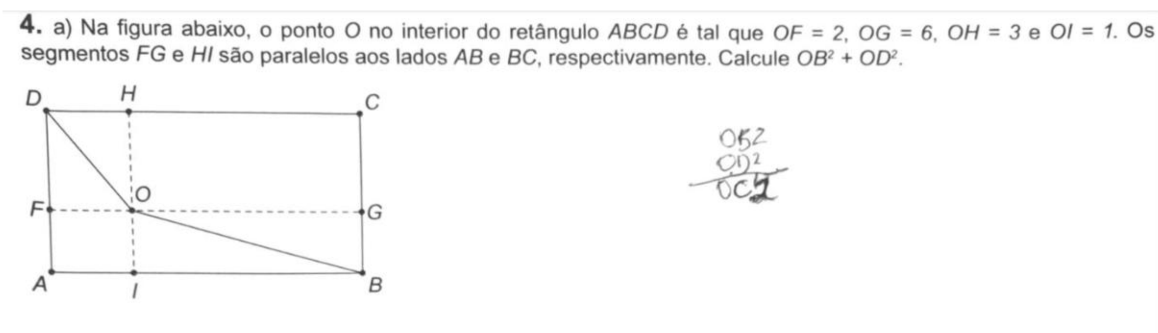


Figura 6: Resolução apresentada pelo aluno A2 ao item a (OBMEP 2019).

Na solução apresentada pelo aluno A2, é notória a ausência de conhecimento matemático que fundamente a resolução do problema, pois, de certa forma, sua solução foi bem inusitada, uma vez que a questão pede a soma $OB^2 + OD^2$, e ele literalmente somou os segmentos chegando à conclusão que seria OC^2. Este aluno não demonstrou algum saber matemático que fundamentasse sua solução, algo que também pode ser observado pela resolução do aluno A35, na figura 7.

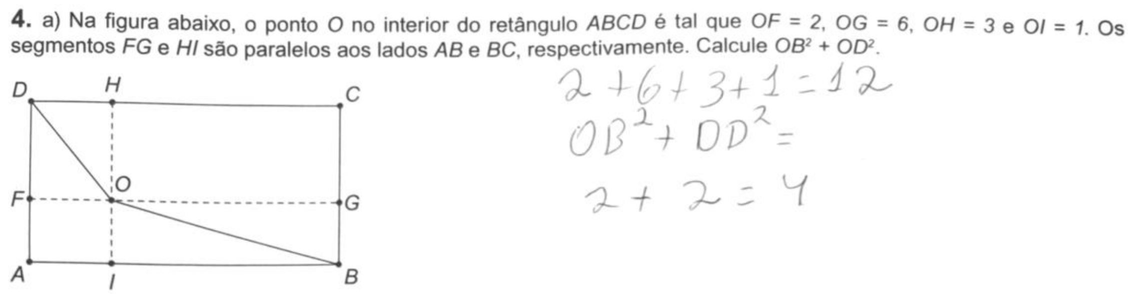


Figura 7: Resolução apresentada pelo aluno A35 ao item a (OBMEP 2019).

É perceptível, pela solução apresentada, a dificuldade do aluno em expor suas ideias. Aparentemente, sua solução se resumiu apenas a somar todos os números presentes na questão e sugerindo valores aleatórios para os segmentos OB^2 e OD^2. A solução apresentada não permite compreender claramente a estratégia utilizada na solução.

Na classe C, é onde se concentra uma pequena parcela dos alunos aqui analisados, sendo constituída apenas por 14 alunos, os quais foram subdivididos nas subclasses 1 e 2, como demonstra a tabela 4.

Tabela 4: Erros cometidos nas subclasses da classe C para o item a.

Classe C	**Item a**	
Subclasse 1	*11 alunos*	79%
Subclasse 2	*3 alunos*	21%

Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

Para a subclasse 1, que remete aos erros de redação, notou-se uma grande dificuldade dos alunos, em sua maioria, ao resolver as questões de maneira mais sistemática possível, obedecendo a uma sequência lógica na sua redação.

Na subclasse 2, que apresenta o menor quantitativo — somente três alunos —, estão aqueles alunos que fizeram mau uso de alguma definição auxiliar no intuito de resolver o problema.

Na classe C, têm-se os alunos A20, A21, A31, A40, A49, A64, A69, A70, A78, A80, A81, A87, A90 e A99, os quais representam 14% da amostra. Nesta classe, estão aqueles que apresentaram algum conhecimento geométrico, tinham argumentos e bagagem acerca do tema, porém não conseguiram concluir corretamente as soluções. Observe, na figura 8, a resposta apresentada pelo aluno A21.

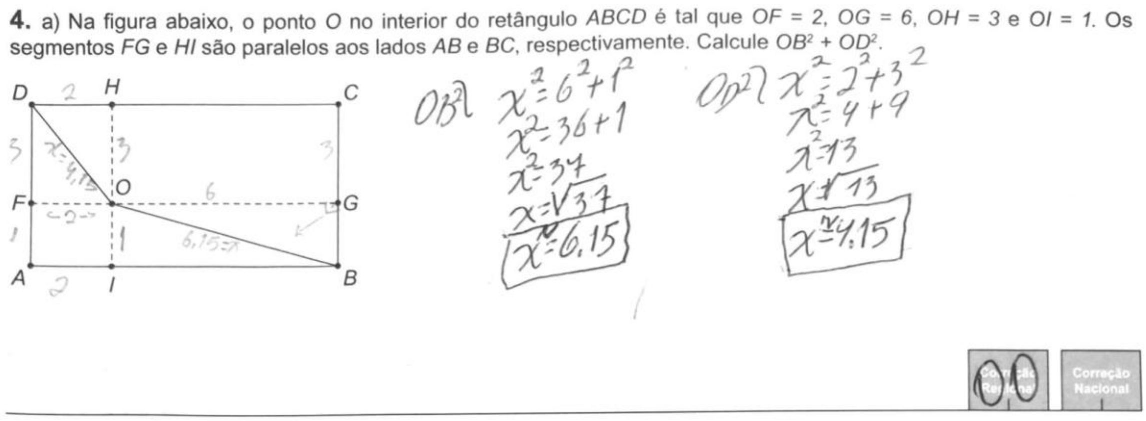


Figura 8: Resolução apresentada pelo aluno A21 ao item a (OBMEP 2019).

É notório o conhecimento acerca do Teorema de Pitágoras, visto que se mostrou apto a relacionar cada segmento, resolvendo as potenciações. Seu equívoco foi tentar resolver as radiciações, o que não foi útil para a solução, uma vez que o enunciado pedia a soma de $OB^2 + OD^2$ e não seus valores individuais.

Na subclasse 1, foram incluídos os alunos A20, A21, A31, A69, A70, A78, A80, A81, A87, A90 e A99, o que corresponde a 79% da classe C. Esses alunos cometeram erros em sua redação matemática. Observe, na figura 9, a resposta apresentada pelo aluno A78.

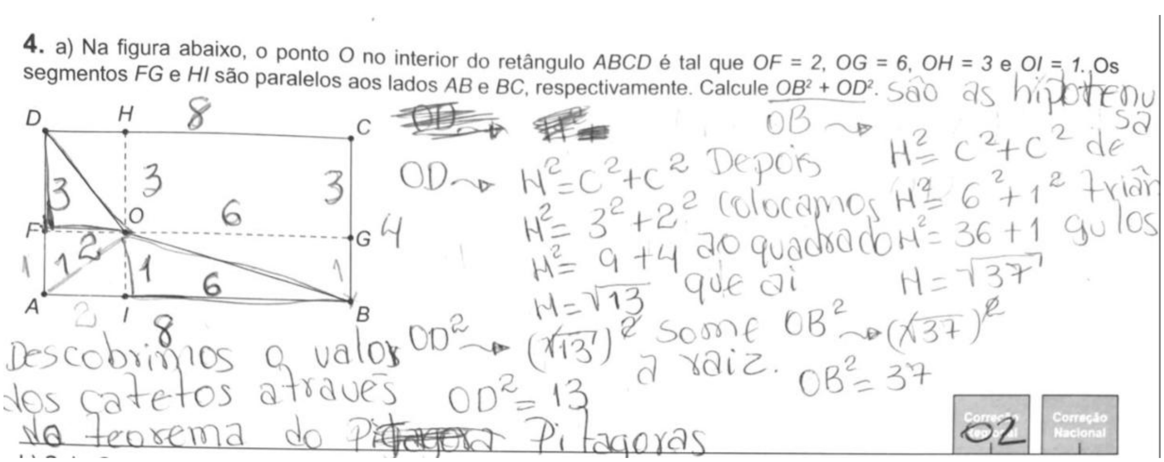


Figura 9: Resolução apresentada pelo aluno A78 ao item a (OBMEP 2019).

O aluno A78 conseguiu chegar aos valores corretos de OD^2 e OB^2, ao relacionar de maneira eficaz cada segmento com seu respectivo comprimento e fazendo o uso do Teorema de Pitágoras para chegar nos resultados desejados.

Infere-se o erro de redação matemática, uma vez que é evidente a falta de organização na solução do problema, porém, o que se enquadra no erro é a maneira pela qual ele calcula cada segmento estipulado, pois o aluno chama tanto OD de H^2 quanto OB e usa C^2 para ambos os cálculos da hipotenusa, fazendo, assim, uma confusão na relação de cada segmento. Além da falta de uma conclusão para suprir o que se pede, uma vez que o enunciado quer saber a soma de OD^2 e OB^2 e não dos valores individuais.

Daí, acredita-se que os erros de interpretação e redação matemática cometidos pela maioria dos alunos registrados na subclasse 1 se deram pelo fato de os mesmos não atentarem para o real propósito do item, ou seja, o que realmente a questão estava pedindo. Um exemplo disso é mostrado pela solução do aluno A78, que encontrou os respectivos valores corretos para OD^2 e OB^2, no entanto, não finalizou a conclusão da questão, faltando a adição dos dois segmentos.

Na subclasse 2, foram incluídos os alunos A40, A49 e A64, o que corresponde a 21% da classe C. Esses alunos se enquadram no uso inadequado de alguma definição auxiliar para a conclusão de suas soluções.

Observe, na figura 10, a resposta apresentada pelo aluno A40.

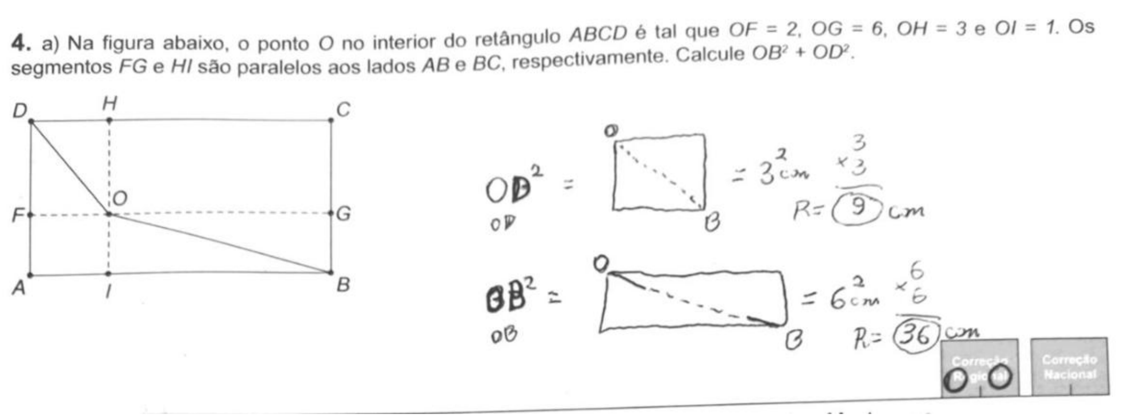


Figura 10: Resolução apresentada pelo aluno A40 ao item a (OBMEP 2019).

O aluno A40 não apresentou nenhuma proposta de solução condizente com o enunciado, visto que sua abordagem se deu de maneira inesperada e pouco fundamentada.

É notória a presença do erro no uso de definições auxiliares, uma vez que optou por calcular os segmentos OB^2 e OD^2, por meio do cálculo das áreas dos retângulos DHOF e OGBI. Esta estratégia mostrou-se ineficiente, visto que os segmentos abordados em sua solução não condizem com os propostos pelo enunciado nem com a figura apresentada pela questão.

Daí, presume-se que os erros cometidos pelo mau uso de uma definição auxiliar, a que faz referência a subclasse 2, deram-se pelo fato de que os alunos não associaram a figura ao Teorema de Pitágoras. Pois, ao ver um retângulo seccionado em retângulos menores e a questão induzindo-os a determinar a soma de dois segmentos ao quadrado, eles optaram por uma solução baseada na área da figura geométrica plana, uma vez que algo ao quadrado dá ideia de área. A ideia de usar o Teorema de Pitágoras, para eles, mostra-se viável apenas quando houver um triângulo retângulo explícito na figura geométrica.

5.1.2 Classificação de erros para o item b

Neste item, esperava-se que o aluno assemelhasse a figura ao problema anterior e construísse triângulos retângulos a fim de usar o Teorema de Pitágoras e demonstrar a igualdade estabelecida pelo enunciado.

Para a classificação dos erros apresentados, foram elaboradas quatro classes: A, B C e D, referenciadas abaixo:

a) **Classe A -** alunos que utilizaram estratégias adequadas à resolução do problema, mas não conseguiram concluir a solução.

Nesta classe, foram agrupados os alunos que tentaram solucionar o problema por meio da construção de triângulos retângulos e utilizaram o Teorema de Pitágoras, mas não conseguiram concluir a demonstração pedida na questão.

b) **Classe B -** alunos que cometeram erros devido à aplicação de regras ou estratégias inadequadas para a solução do problema.

Nesta classe, foram agrupados os alunos que atribuíram valores aos segmentos e utilizaram outras estratégias de forma incorreta sem sucesso para a conclusão do problema. Estas estratégias estão especificadas nas subclasses a seguir.

- **Subclasse 1 –** alunos que tentaram solucionar o problema usando argumentos que envolvem a congruência de triângulos, congruência de segmentos ou, ainda, a congruência dos ângulos.
- **Subclasse 2 –** alunos que fizeram relação incorreta entre os segmentos internos e as diagonais do retângulo.
- **Subclasse 3 –** alunos que tentaram solucionar a questão atribuindo valores aos segmentos.
- **Subclasse 4 –** alunos que cometeram erros em operações aritméticas.

c) **Classe C –** a estratégia adotada pelo aluno não se enquadra nas classes anteriores ou não foi possível identificar a estratégia adotada;

d) **Classe D –** alunos que apresentaram erros de notação e redação matemática.

Dentre as cem provas analisadas, foram constatados erros nas quatro classes e nas três subclasses da classe B, conforme a Tabela 5 apresentada a seguir, além daqueles 14 alunos que deixaram este item em branco.

Tabela 5: Erros cometidos nas classes A, B, C e D para o item b.

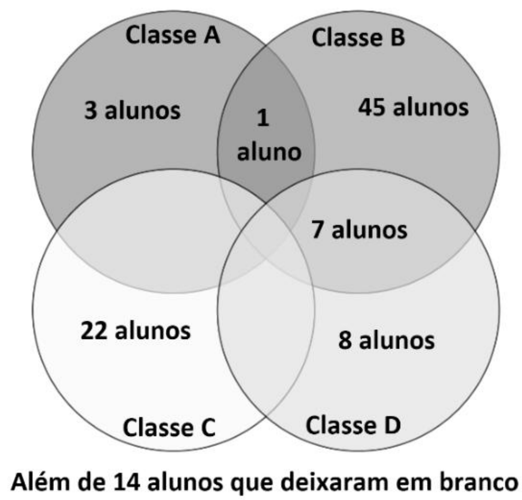
		Item b
Classe	**A**	*4 alunos*
	B	*53 alunos*
	C	*22 alunos*
	D	*15 alunos*
Não Respondeu		*14 alunos*

Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

A Tabela 5 apresenta o quantitativo de erros registrados nas quatro classes estipuladas para o item b. Neste item, a maior concentração dos erros se localiza na classe B, embora alguns alunos tenham sido enquadrados em mais de uma classe. Vale ressaltar que houve registro de erro em todas as subclasses e que a maioria dos alunos foi associada à subclasse 3, ou seja, a maioria dos alunos estipulou valores para os segmentos com o intuito de solucionar o exercício.

Observe, na figura 11, o diagrama de Venn da classificação dos alunos no item b, referente às quatro classes.

Figura 11: Diagrama de Venn dos alunos sobre o item b.



Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

Na classe A, foram incluídos os alunos A73, A83, A84 e A85, que correspondem a 4% da amostra. Nela, estão inseridos aqueles que tentaram solucionar o item por meio da construção de triângulos retângulos e utilizaram o Teorema de Pitágoras, porém não conseguiram demonstrar a situação proposta pela questão.

Observe, na figura 12, a solução proposta pelo aluno A84.

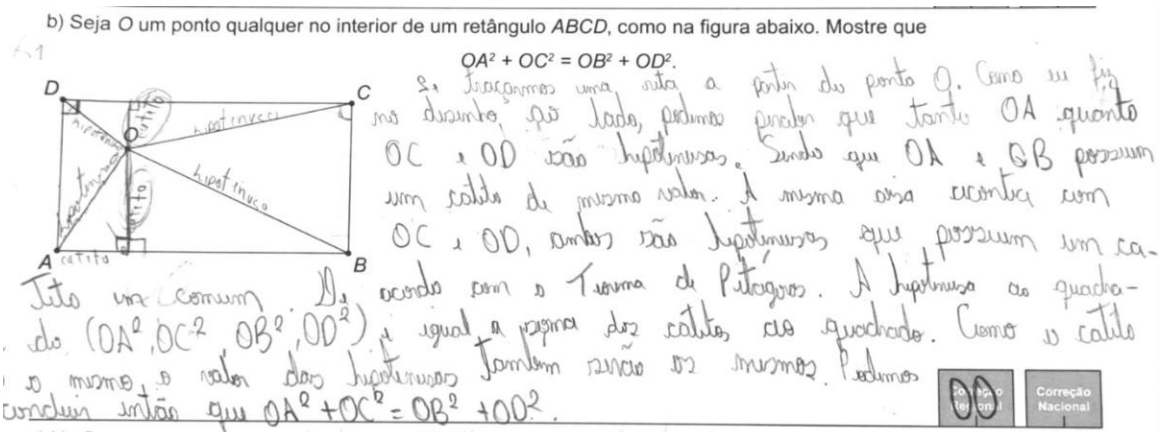


Figura 12: Resolução apresentada pelo aluno A84 ao item b (OBMEP 2019).

O Aluno A84 foi o que chegou mais próximo de solucionar o problema, uma vez que ele conseguiu construir com eficiência os triângulos retângulos, conforme mostra a figura, e classificou de maneira eficaz seus catetos e hipotenusa. No entanto, faltou demonstrar o que ele estava escrevendo, por meio de situações algébricas. Contudo, sua visão geométrica e noção sobre o Teorema de Pitágoras lhe fizeram sobressair diante dos demais alunos aqui em análise.

Observe, na figura 13, a solução proposta pelo aluno A85.

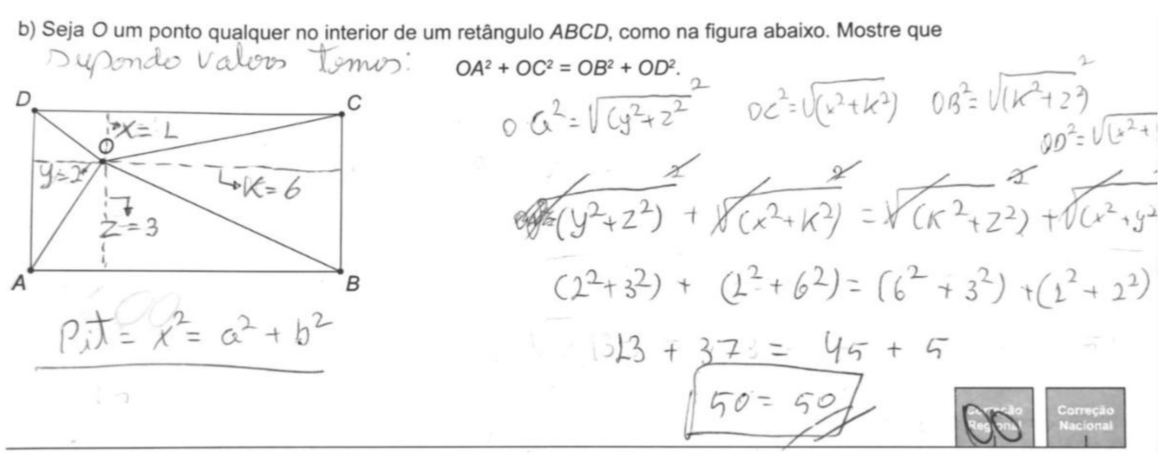


Figura 13: Resolução apresentada pelo aluno A85 ao item b (OBMEP 2019).

A estratégia apresentada pelo aluno A85 parte, também, da construção de triângulos retângulos. No entanto, em sua tentativa de solução, ele acaba comprometendo sua demonstração quando atribui valores para os segmentos e compromete a resolução do problema. Em sua solução, o aluno traçou segmentos paralelos aos lados do retângulo que se intersectam no ponto O, e denotou cada um dos segmentos por X, Y, Z e K. Seu erro foi supor valores para cada um deles, uma vez que, se ele usasse apenas as incógnitas, poderia chegar à igualdade pretendida.

Na classe B, foram incluídos os alunos A1, A3, A4, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A18, A19, A21, A23, A27, A28, A32, A33, A37, A41, A42, A43, A47, A50, A51, A52, A53, A54, A55, A56, A59, A61, A62, A63, A64, A65, A66, A69, A70, A72, A79 A85, A87, A88, A91, A93, A95, A96, A97, A98, A99 e A100, o que corresponde a 53 alunos. Nela, estão inseridos os alunos que optaram por usar outras ferramentas com o intuito de solucionar o problema.

Nesta classe, analisaremos os erros cometidos devido ao uso de estratégias inadequadas, como, por exemplo: atribuir valores aos segmentos, usar congruência onde não havia, associar indevidamente os segmentos traçados no interior do retângulo às suas diagonais. Alguns alunos foram associados a mais de uma subclasse, pois apresentaram erros de duas ou mais subclasses.

É evidente que a classe B foi aquela que apresentou um maior quantitativo de alunos, o que nos leva a concluir que os mesmos, em sua grande maioria, não apresentaram conhecimento necessário acerca do conteúdo em questão. No entanto, é natural que os alunos apresentem dificuldades maiores para demonstrar propriedades matemáticas quando estas não envolvem números, uma vez que, em seu cotidiano escolar, não são apresentados a eles problemas que necessitem de tais demonstrações.

A tabela 6, a seguir, mostra o quantitativo de erros para cada uma das quatro subclasses da classe B.

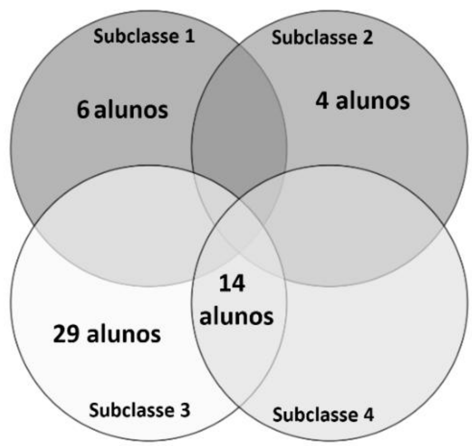
Tabela 6: Erros cometidos nas subclasses da classe B, para o item b.

Classe B	**Item b**
Subclasse 1	*6 alunos*
Subclasse 2	*4 alunos*
Subclasse 3	*43 alunos*
Subclasse 4	*14 alunos*

Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

A classe B, como mencionado anteriormente, é constituída por 53 alunos, sendo que 6 pertencem à subclasse 1; 4, à subclasse 2; 43, à subclasse 3. Desses 43 alunos, 14 pertencem à subclasse 4, ou seja, são alunos que cometeram os dois tipos de erros analisados nas duas subclasses. Observe, na figura 14, o diagrama de Venn da classe B, para melhor compreensão.

Figura 14: Diagrama de venn das subclasses da classe b.



Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

Na subclasse 1, estão inseridos os alunos A14, A18, A19, A69, A70 e A79. Esses são alunos que optaram por solucionar o item usando argumentos que envolvem a congruência de triângulos, segmentos ou ângulos.

Observe, na figura 15, a resposta apresentada pelo aluno A19.

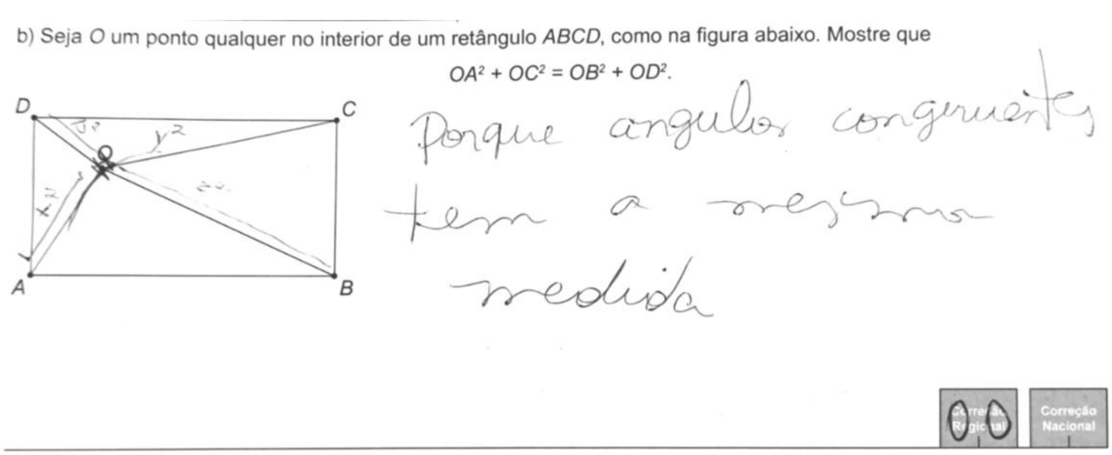


Figura 15: Resolução apresentada pelo aluno A19 ao item b (OBMEP 2019).

O Aluno A19, classificado na subclasse 1, conclui que a igualdade está correta ao afirmar que “ângulos congruentes tem a mesma medida”, e rabisca a figura denotando cada segmento por uma incógnita. Mas, a figura não deixa claro que os ângulos, AÔD, BÔC, AÔB e DÔC são congruentes, e se o fossem, o aluno deveria prová-lo.

Na subclasse 2, temos os alunos A54, A66, A95 e A99. Nesta subclasse, estão inseridos aqueles alunos que relacionaram incorretamente os segmentos no interior do retângulo às suas diagonais.

Observe, na figura 16, a resposta apresentada pelo aluno A95.

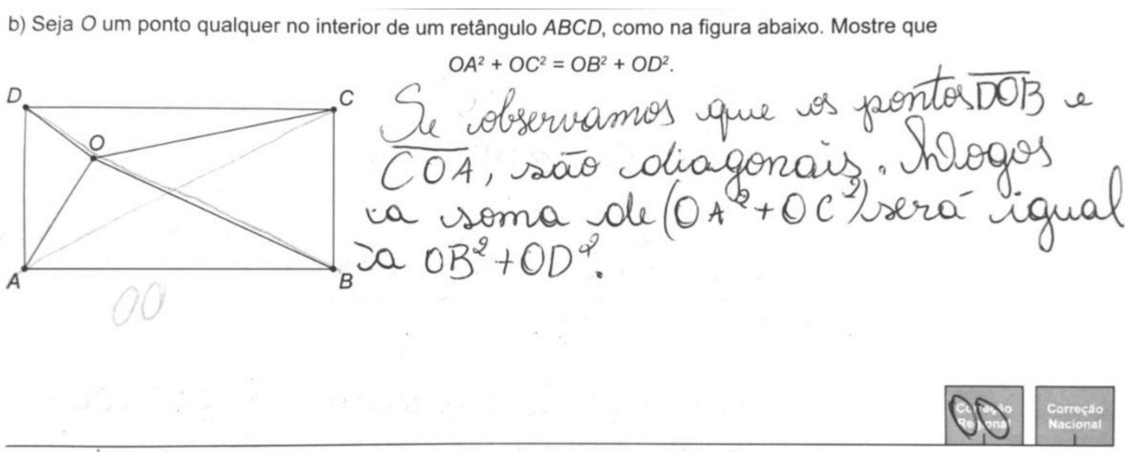


Figura 16: Resolução apresentada pelo aluno A95 ao item b (OBMEP 2019).

O aluno A95 afirma que os segmentos apresentados pela questão poderiam ser associados às diagonais do retângulo e que apresentavam as mesmas propriedades, partindo dessa ideia, ele concluiu sua solução.

É caracterizado o erro uma vez que sua ideia se resume à associação incorreta dos segmentos DO, OB, AO e OC às diagonais do retângulo DB e AC, respectivamente.

Além do erro classificado na subclasse 1, o aluno comete um erro de redação e notação ao denotar a união entre os segmentos $\overline{CO}$ e $\overline{OA}$ por $\overline{COA}$, e a união dos segmentos $\overline{DO}$ e $\overline{OB}$ por $\overline{DOB}.$ Além disso, A95 se refere a estes segmentos como sendo “pontos”, caracterizando, assim, o erro que será analisado na classe D.

Na subclasse 3, foram incluídos os alunos A1, A3, A4, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A15, A21, A23, A27, A28, A32, A33, A37, A41, A42, A43, A47, A50, A51, A52, A53, A55,

A56, A59, A61, A62, A63, A64, A65, A72, A85, A87, A88, A91, A93, A96, A97, A98 e A100, os quais representam 43 alunos da classe B. São aqueles que tentaram solucionar o exercício atribuindo valores aos segmentos.

Observe, na figura 17, a resposta apresentada pelo aluno A93.

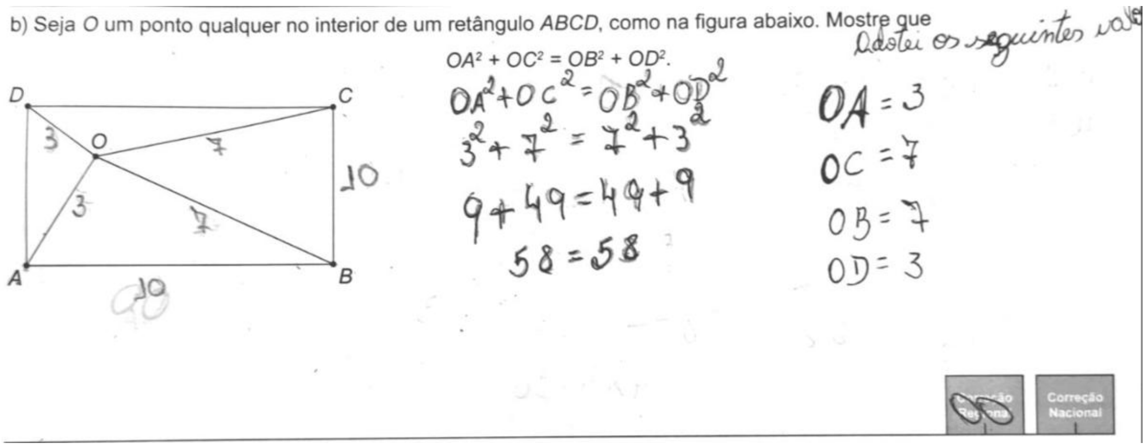


Figura 17: Resolução apresentada pelo aluno A93 ao item b (OBMEP 2019).

Nessa solução, o aluno adotou, de forma astuta, valores específicos que viriam a satisfazer a igualdade proposta pela questão, porém sua solução mostra apenas uma situação particular em que a igualdade prevalece.

Na subclasse 4, foram incluídos os alunos A3, A4, A8, A11, A13, A15, A27, A32, A37, A41, A52, A55, A59 e A100, os quais representam 14 alunos da classe B. Estes alunos, além de atribuírem valores para os segmentos, cometeram erros de operações aritméticas.

Observe, na figura 18, a resposta apresentada pelo aluno A37.

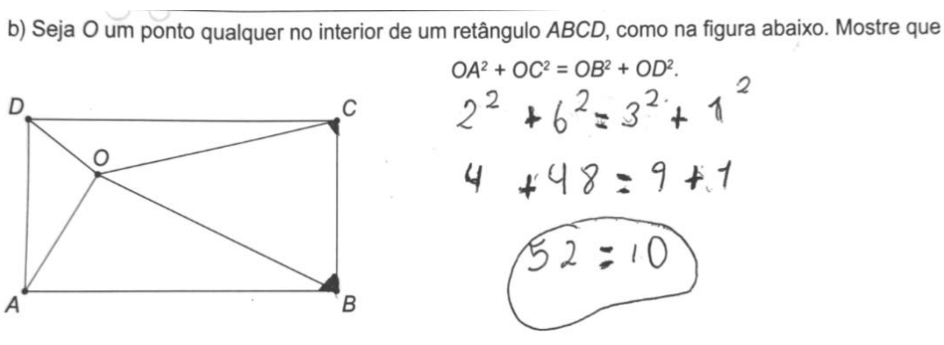


Figura 18: Resolução apresentada pelo aluno A37 ao item b (OBMEP 2019).

O aluno A37 optou por atribuir valores aos segmentos: AO=2, OC=6, OB=3 e OD=1, sendo estes os valores denotados pelo item (a) para outros segmentos. Além disso, ao substituir os valores na igualdade, ele comete o erro na operação aritmética ao resolver as potenciações, em especial 6² = 48. Após concluir a soma, é perceptível que sua reposta não é apropriada para a questão, uma vez que a igualdade não se mostra verdadeira.

A maioria dos erros aritméticos estão relacionados à potenciação e adição. Contudo, como os alunos que cometeram esses erros se mostraram eficientes em outros cálculos, presume-se que o erro ocorreu por falta de atenção.

Na classe C, têm-se os alunos A5, A7, A16, A20, A22, A25, A26, A30, A35, A39, A40, A44, A45, A46, A57, A58, A60, A71, A81, A86, A90 e A94, os quais representam os 22% da amostra. Nela, estão inseridos os alunos que utilizaram estratégias de soluções que não se encaixam em nenhuma das outras classes.

Observe, na figura 19, a solução proposta pelo aluno A5.

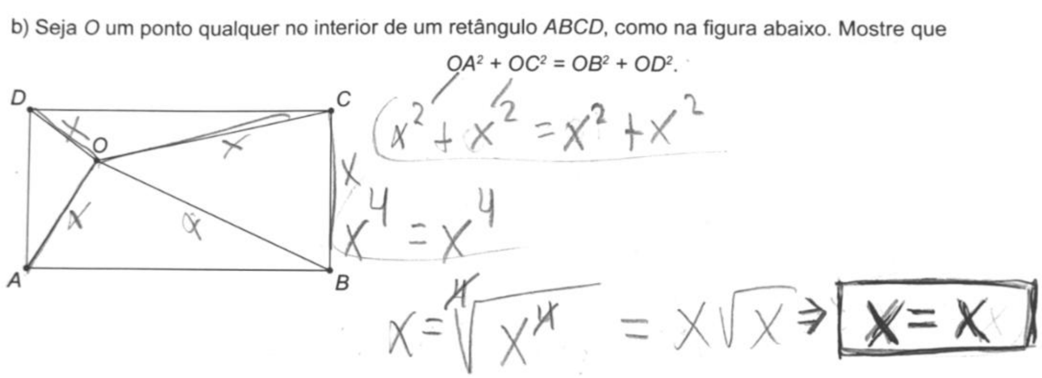


Figura 19: Resolução apresentada pelo aluno A5 ao item b (OBMEP 2019).

O aluno A5 optou por denotar os segmentos por incógnitas. Esta é uma ferramenta muito usada, e de grande utilidade em demonstrações matemáticas, no entanto, seu erro foi representar cada segmento distinto por uma mesma letra, dando a ideia de que todos possuem as mesmas medidas, fato que, se fosse verdade, deveria ser provado.

O que ocorre, em muitos casos, é que os alunos não conseguem visualizar a possibilidade de construção de outras figuras geométricas que poderiam auxiliar na resolução do problema. Como, por exemplo, os quatro triângulos retângulos mostrados no item anterior que permitiriam, por meio do Teorema de Pitágoras, demonstrar a igualdade. Isso é exemplificado pela solução do aluno A90, na figura 20, afirmando que, na figura, não se encontra nenhum triângulo retângulo.

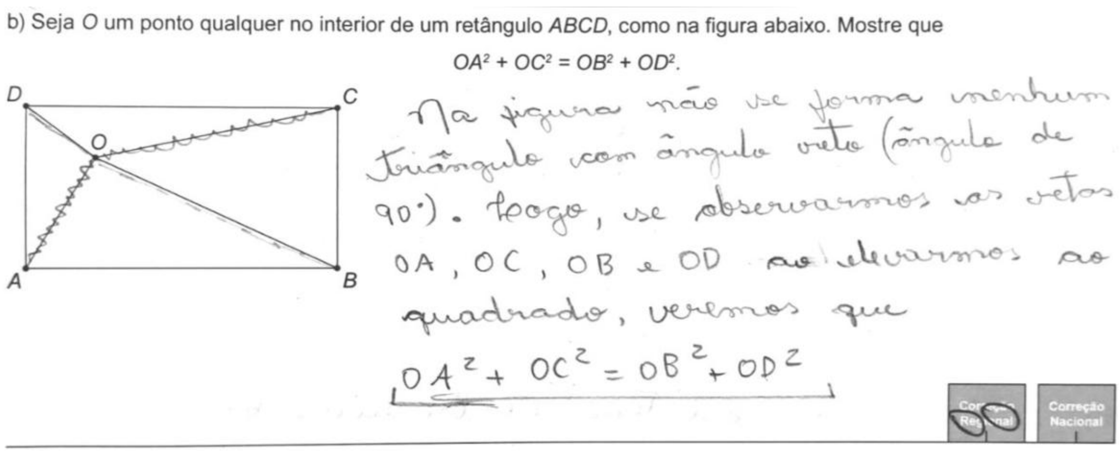


Figura 20: Resolução apresentada pelo aluno A90 ao item b (OBMEP 2019).

Na classe D, estão os alunos A2, A3, A12, A27, A29, A36, A38, A49, A69, A70, A78, A79, A89, A92 e A95. Nesta classe, encontram-se erros cometidos devido a dificuldades na linguagem. Entre estes, estão os erros cometidos na utilização dos símbolos e notação matemática, além daqueles que envolvem a utilização de conceitos e vocabulário. Por exemplo, alguns alunos utilizam a palavra "equivalência" com sentido de congruência, muitos utilizaram a palavra "ponto" para se referirem a segmentos de reta. Isso mostra que os alunos, em análise, possuem pouca familiaridade com a notação e a linguagem matemática, em especial, aqueles conceitos próprios da geometria.

Observe, na figura 21, a resposta apresentada pelo aluno A79.

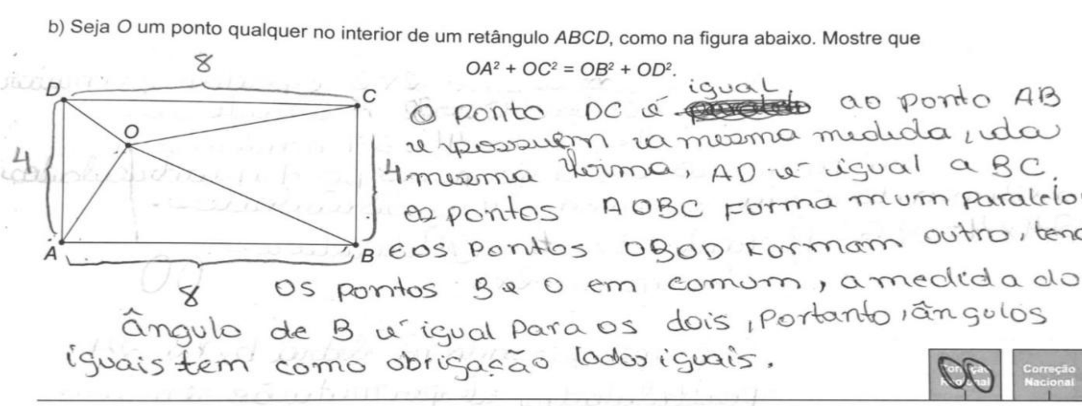


Figura 21: Resolução apresentada pelo aluno A79 ao item b (OBMEP 2019).

Em sua solução, o aluno A79 escreve “ponto” se referindo a segmento, além disso, ele afirma que os “pontos OBOD” formam outro paralelogramo, o que evidentemente não ocorre. Isso mostra uma dificuldade em reconhecer e nomear figuras geométricas, e em utilizar a simbologia própria da geometria para expressar seu pensamento.

5.1.3 Classificação de erros para o item c

Para a análise do item c, foram elaboradas três classes, A, B e C, e três subclasses para a classe B, referenciadas abaixo:

a) **Classe A –** alunos que tentaram solucionar o problema por meio do Teorema de Pitágoras, mas não obtiveram êxito na solução.

Nesta classe, foram inseridos os alunos que utilizaram uma estratégia correta, como determinar triângulos retângulos a fim de solucionar o problema por meio do Teorema de Pitágoras, mas não conseguiram concluir a solução;

b) **Classe B –** alunos que cometeram erros devido a associações incorretas e situações adversas à solução da questão;

Nesta classe, foram agrupados os alunos que tentaram resolver o exercício utilizando estratégias inadequadas para a solução do problema, como regra de três, proporção entre os segmentos, entre outros. Também estão nesta classe os alunos que cometeram erros nas operações aritméticas.

c) **Classe C –** alunos dos quais não foi possível identificar a estratégia adotada;

Nesta classe, foram agrupados os alunos em que não foi possível determinar o raciocínio adotado por eles, além daqueles que apresentaram soluções dedutivas a fim de “acertar no chute”.

Para a classe B, foram criadas três subclasses, no intuito de analisar de maneira mais específica os erros relacionados ao uso das ferramentas adotadas pelos alunos. Desta forma, foram estabelecidas as seguintes subclasses:

- **Subclasse 1:** alunos que cometeram erros de mensuração e comparação;

- **Subclasse 2:** alunos que cometeram erros com operações aritméticas;
- **Subclasse 3:** alunos que tentaram solucionar o problema usando proporção e regra de três simples;

Para a solução do item c, esperava-se que o aluno utilizasse a igualdade demonstrada no item anterior e atentasse para a propriedade de tangência ao círculo para a construção de triângulos retângulos a fim de concluir a questão.

Dentre as cem provas analisadas, foram constatados erros nas três classes, conforme a Tabela 7, além daqueles 16 alunos que deixaram o item em branco.

Tabela 7: Erros cometidos nas classes A, B e C para o item c.

		Item c	
Classe	**A**	5	5%
	B	28	28%
	C	60	60%
Não Respondeu		16	16%

Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

A Tabela 7 apresenta o quantitativo de erros registrados nas classes estipuladas para o item c, onde a maior concentração se localiza na classe C. Observa-se que a maioria dos alunos fez o uso de ferramentas não favoráveis à solução do problema, além de apresentarem soluções diretas para o item, ou seja, atribuírem um valor para o segmento procurado. Vale ressaltar que algumas soluções foram enquadradas em mais de uma classe.

Observe, na figura 22, o diagrama de Venn da classificação dos erros para o item c, referente às três classes.

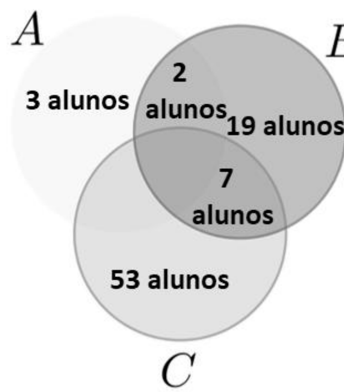


Figura 22: Diagrama de Venn das classes do item c.

Na classe A, foram incluídos os alunos A21, A69, A73, A77 e A83, o que corresponde a 5% da amostra. São aqueles alunos que tentaram solucionar o item partindo da construção de um triângulo retângulo, no intuito de usar o Teorema de Pitágoras, o qual é o principal descritor da questão, mesmo assim, não conseguiram concluir corretamente a solução.

Observe, na figura 23, a resposta apresentada pelo aluno A21.

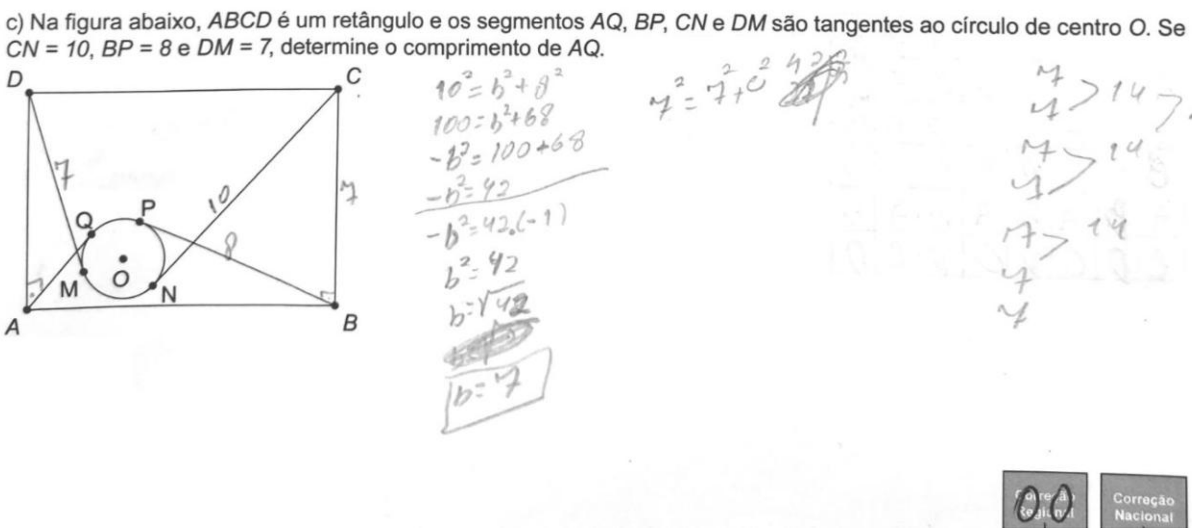


Figura 23: Resolução apresentada pelo aluno A21 ao item c (OBMEP 2019).

Em sua solução, o aluno A21 indicou que os ângulos DÂQ e PBC são retos, o que não é verdade. Partindo dessa ideia, aplicou o Teorema de Pitágoras, supondo que o segmento CN seria a hipotenusa e PB e AQ, os catetos. Observa-se que esta escolha, para hipotenusa e catetos, não faz sentido. Vale ressaltar que além do erro da classe A, o aluno também foi enquadrado na subclasse 2 da classe B, por apresentar erros de operações aritméticas.

Na classe B, foram incluídos os alunos A1, A8, A12, A15, A16, A18, A19, A21, A24, A27, A38, A39, A42, A43, A44, A45, A59, A60, A63, A64, A71, A73, A90, A91, A93, A95, A97 e A100, o que corresponde a 28% da amostra. Nela, estão inseridos os alunos que tentaram solucionar o item partindo de estratégias inusitadas, como supor situações não condizentes com o problema ou elencar suposições sobre o enunciado. Como já mencionado anteriormente, a classe B foi subdivida em três subclasses, conforme mostra a tabela 8.

Tabela 8: Erros cometidos na classe B e em suas subclasses, para o item c.

Classe B	**Item C**	
Subclasse 1	*12*	*43%*
Subclasse 2	*11*	*40%*
Subclasse 3	*5*	*17%*

Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

A subclasse 1 compreende os alunos A1, A15, A18, A19, A24, A27, A38, A42, A64, A71, A93 e A95, o que corresponde a 43% dos alunos da classe B. Sendo estes os alunos que usaram de situações curiosas em suas soluções, em especial, na comparação das medidas dos segmentos.

Observe, na figura 24, a resposta apresentada pelo aluno A19.

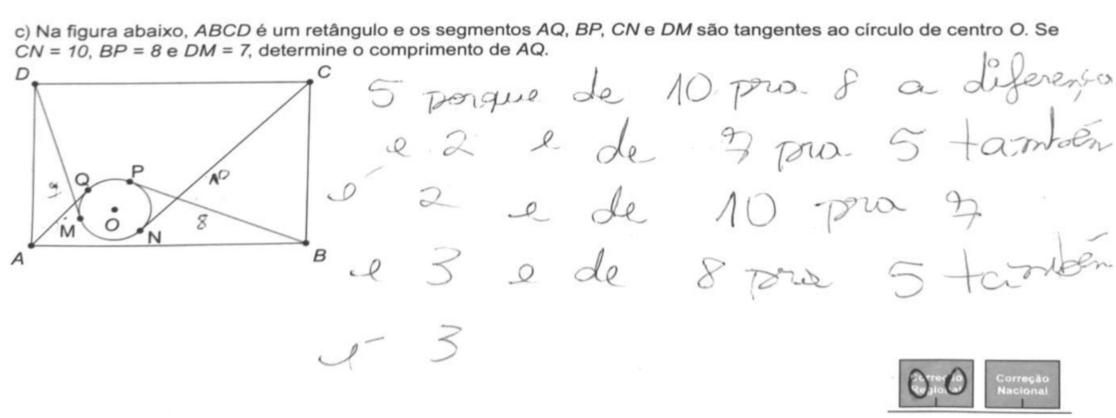


Figura 24: Resolução apresentada pelo aluno A19 ao item c (OBMEP 2019).

A solução proposta pelo aluno A19 se resume a identificar uma lógica presente nas medidas dos segmentos. Ele observou as diferenças numéricas entre os segmentos apresentados pelo problema e, partindo dessa ideia, chegou à sua resposta.

A proposta apresentada pelo aluno é bem comum em situações em que o aluno apresenta dificuldades para solucionar um exercício. Intuitivamente, ele vai analisar todas as situações e procurar uma lógica que lhe auxilie na solução do problema.

Outras situações propostas pelos alunos se resumiram a supor situações de mensuração para cada segmento, ou seja, comparar as demais medidas e definir um valor que seja proporcional às medidas dadas. Observe, na figura 25, a solução apresentada pelo aluno A27.

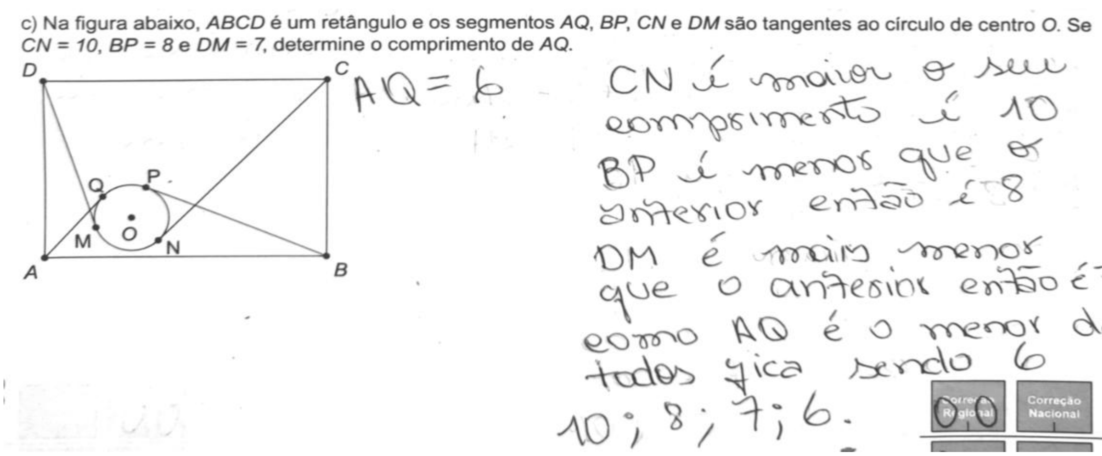


Figura 25: Resolução apresentada pelo aluno A27 ao item c (OBMEP 2019).

O aluno A27 comparou a medida de cada segmento, do maior para o menor, e, olhando para a figura, chegou à conclusão de que o segmento AQ é o menor entre os quatro e acabou estipulando que AQ=6.

Na subclasse 2, foram incluídos os alunos A8, A16, A21, A43, A44, A45, A59, A63, A73, A91 e A97, o que corresponde a 40% da classe B, sendo estes os alunos que cometeram erros relacionados a operações aritméticas. Observe, na figura 26, a resposta apresentada pelo aluno A59.

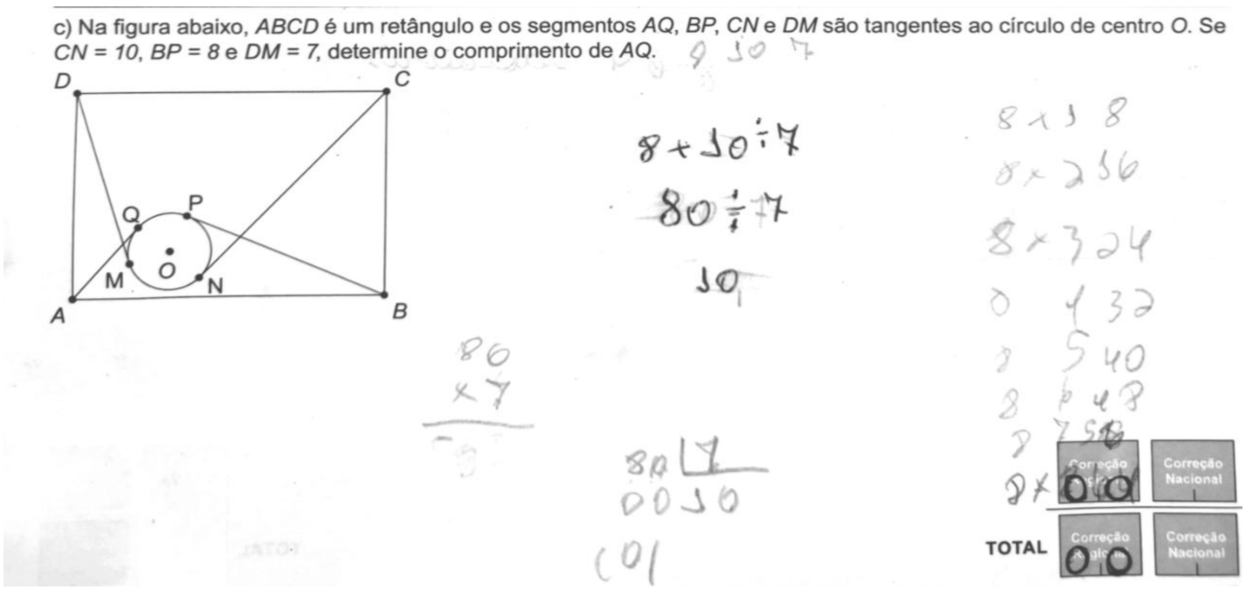


Figura 26: Resolução apresentada pelo aluno A59 ao item c (OBMEP 2019).

Na solução apresentada pelo aluno A59, além do erro específico pela subclasse, vale ressaltar que sua proposta de solução não é eficiente para o item, uma vez que ela se resume apenas a resolver operações sem apresentar fundamentos lógicos para a solução da questão.

Na subclasse 3, foram incluídos os alunos A12, A39, A60, A90 e A100, o que corresponde a 17% da classe B. Nela, estão inseridos os alunos que tentaram solucionar o item usando proporcionalidade entre os segmentos, bem como regra de três simples. Observe, na figura 27, a resposta apresentada pelo aluno A90.

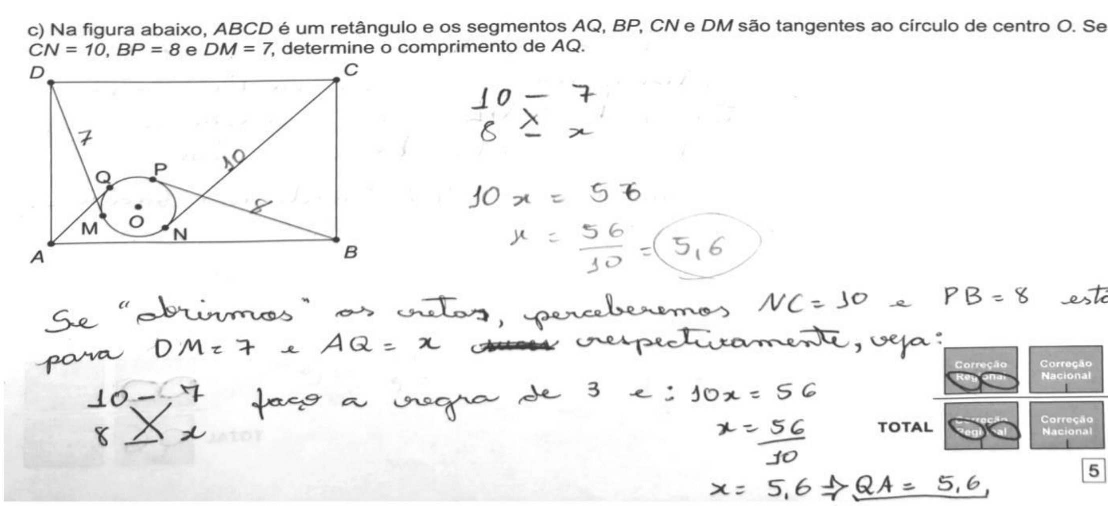


Figura 27: Resolução apresentada pelo aluno A90 ao item c (OBMEP 2019).

O Aluno A90 tentou solucionar o exercício por meio de proporções, na sua solução, ele sugere que o segmento NC está para DM, assim como PB está para AQ. Partindo dessa ideia, monta a proporção e chega a um determinado valor para o segmento AQ. No entanto, por mais que sua solução se fundamente em uma ferramenta muito utilizada para resolver diversos tipos de problemas, no caso a regra de três, tal recurso se mostrou ineficiente para a solução deste exercício.

Na classe C, têm-se os alunos A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A13, A14, A17, A20, A22, A23, A25, A26, A28, A29, A30, A31, A32, A33, A34, A35, A36, A37, A40, A41, A44, A45, A46, A48, A49, A50, A51, A52, A53, A54, A55, A56, A57, A58, A59, A61, A62, A63, A65, A66, A68, A88, A89, A91, A92, A94, A96, A97, A98 e A99, o que corresponde a 60% da amostra. Sendo estes os alunos que apresentaram soluções dedutivas a fim de "acertar no chute". O que difere esta das classes anteriores é que os alunos aqui abordados não fundamentaram nem tampouco justificaram suas conclusões. Observe, na figura 28, a solução apresentada pelo aluno A68.

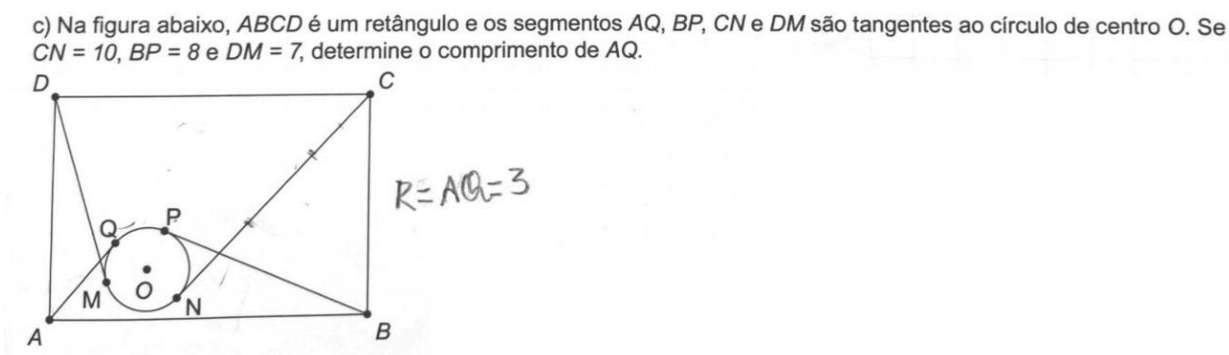


Figura 28: Resolução apresentada pelo aluno A68 ao item c (OBMEP 2019).

O aluno A68 apenas escreveu um valor para o segmento procurado, sem deixar claro qual foi sua estratégia ou dedução sobre a questão. Em especial, em soluções dessa natureza, fica difícil analisar a solução do aluno, uma vez que não se sabe ao certo qual o raciocínio utilizado para chegar ao resultado encontrado. Contudo, pelos traços estipulados pelo aluno no segmento NC, na figura ao lado, podemos criar uma hipótese acerca de sua solução, pois nota-se que o aluno tentou dividir o segmento em três partes iguais, sendo elas de tamanhos quase iguais ao segmento procurado (AQ). Daí, pelo fato de o segmento NC ter 10 de comprimento e, como ele dividiu em três partes, podemos supor que seria aproximadamente 3 o comprimento do segmento AQ, uma vez que $10 \div 3 \approx 3{,}33$.

Existem também aqueles que apresentaram uma proposta de solução na qual não foi possível entender seu raciocínio. Observe, na figura 29, a resposta apresentada pelo aluno A54.

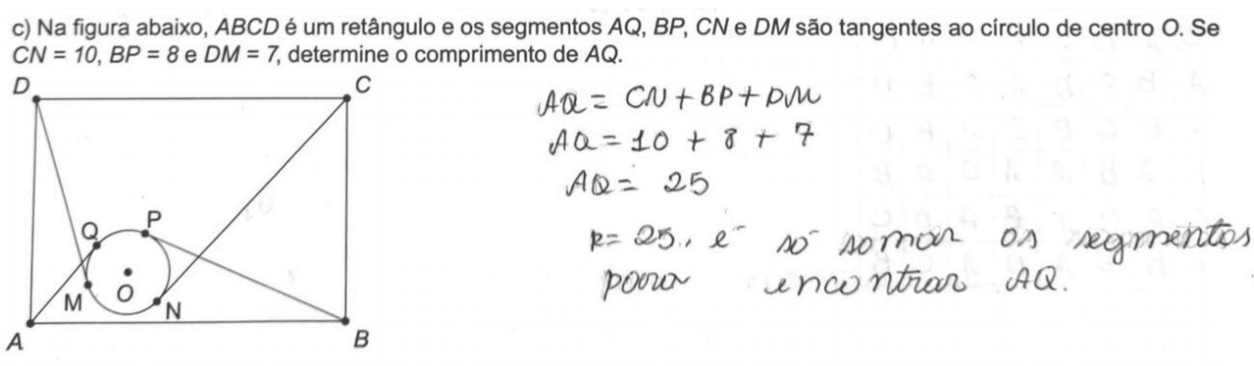


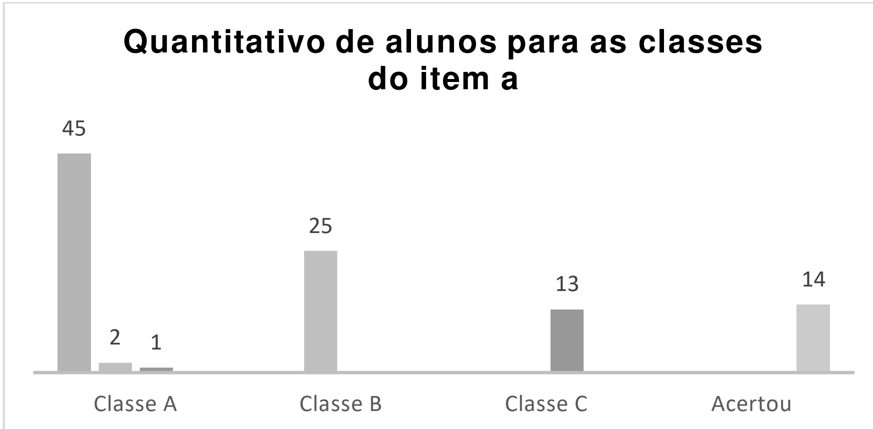
Figura 29: Resolução apresentada pelo aluno A54 ao item c (OBMEP 2019).

O Aluno A54 sugere que o segmento procurado (AQ) pode ser obtido pela soma dos segmentos (CN+BP+DM), no entanto, tal ideia sugere que o segmento AQ seja maior do que os demais, porém, se observarmos a figura ao lado, tal hipótese se torna refutada. Vale ressaltar que sua ideia de solução se resumiu apenas à adição dos valores estipulados pela questão, deixando sem entender qual foi sua estratégia e o que o levou a adotá-la.

5.2 Resumo da análise

A seguir, apresentar-se-ão os gráficos que sintetizam as conclusões aqui pontuadas.

Gráfico 1: Quantitativo de alunos para as classes do item a.



Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

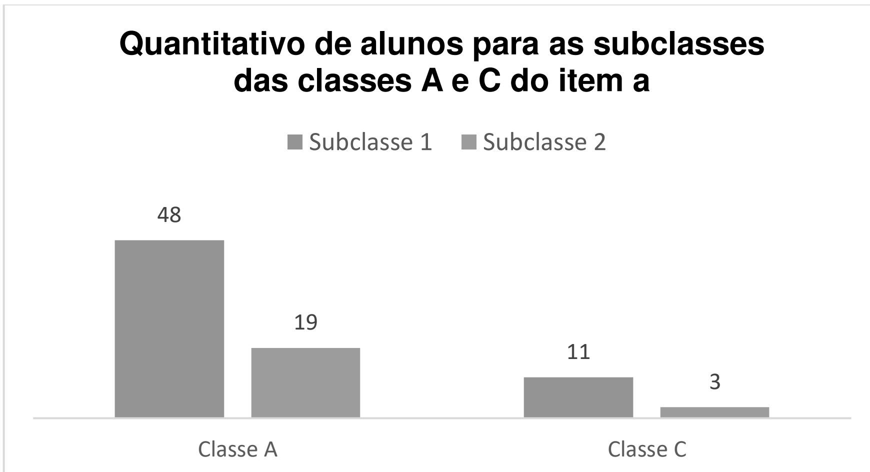
O gráfico 1 relaciona o quantitativo de alunos com as três classes estipuladas para o item a, foi utilizado um sistema de cores para cada uma das classes, uma vez que existem alunos classificados para mais de uma classe, dessa forma, podemos observar que, na classe A, constam 48 alunos, sendo 45 exclusivos dela, 2 mesclados com a classe B e 1 com a C. Na classe B, constam 27 alunos, sendo 25 exclusivos da classe B e 2 alunos mesclados com a classe A. Na classe C, constam 14 alunos, sendo 13 exclusivos dela e 1 mesclado com a classe A e, ainda, existem 14 alunos que acertaram o item.

É perceptível que a classe A apresenta um maior quantitativo em relação às outras. Esta classe se refere aos alunos que compreendem o conteúdo do Teorema de Pitágoras, pois ele é citado em suas soluções, mas não associaram corretamente os valores dos catetos e, assim, acabaram comprometendo a solução.

Para a classe C, denotada no gráfico em verde, é aquela que demonstra o menor índice em relação aos demais, uma vez que ela se remete àqueles que apresentaram situações adversas, que não se mostraram relevantes e eficientes na solução do item. Vale ressaltar que, diante destas 100 provas analisadas, apenas 14 alunos acertaram um item, em especial o item a, o qual era o mais fácil perante os outros.

Observe, no gráfico 2, o quantitativo de alunos classificados para as duas subclasses das classes A e C, respectivamente, onde, na classe A, temos alunos mesclados em suas subclasses.

Gráfico 2: Quantitativo de alunos para as subclasses das classes A e C.



Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

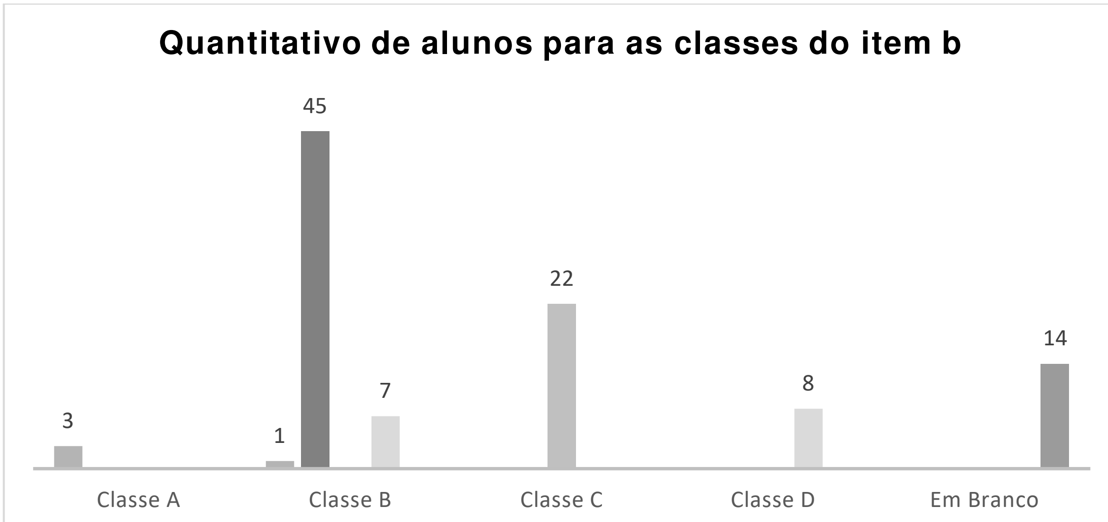
O gráfico 2 aponta o quantitativo de alunos para as subclasses das classes A e C do item a. Nota-se que a subclasse 1 da classe C é aquela que apresenta um maior percentual em relação às demais. Nesta subclasse, está representado o principal motivo de erros observados nas resoluções, qual seja a definição dos valores dos segmentos.

Quando olhamos para a subclasse 2 da classe C, que contém 3 alunos, percebemos que poucos tentaram solucionar o item por meio da utilização de definições auxiliares, ou seja, a utilização de outras fórmulas ou estratégias não muito comuns. No entanto, por mais que tal feito seja sempre bem-vindo e deva ser apreciado e motivado pelo professor, neste caso em particular, os alunos que optaram por uma solução diferente não obtiveram êxito ao tentar solucionar o problema.

As subclasses 2 e 1, das classes A e C, respectivamente, são aquelas que apresentam o quantitativo de alunos que cometeram erros de operações aritméticas, erros esses relacionados a potenciação e até mesmo a adição de números naturais. Apontando que existem, ainda, alunos que, mesmo no Ensino Médio, cometem erros de matemática básica.

No gráfico 3 abaixo, temos o quantitativo de alunos por classe de erro para o item b.

Gráfico 3: Quantitativo de alunos para as classes do item b.



Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

O gráfico 3 relaciona o quantitativo de alunos com as quatro classes estipuladas para o item B. Podemos observar que, na classe A, constam 4 alunos, sendo 3 exclusivos dela e 1 mesclado com a classe B. Na classe B, constam 53 alunos, sendo 45 exclusivos da classe B, 1 aluno mesclado com a classe A e 7 com a D. Na classe C, constam 22 alunos, já na classe D temos 15 alunos, sendo 8 exclusivos dela e 7 mesclados com a B, e, ainda, existem 14 alunos que deixaram seus itens em branco.

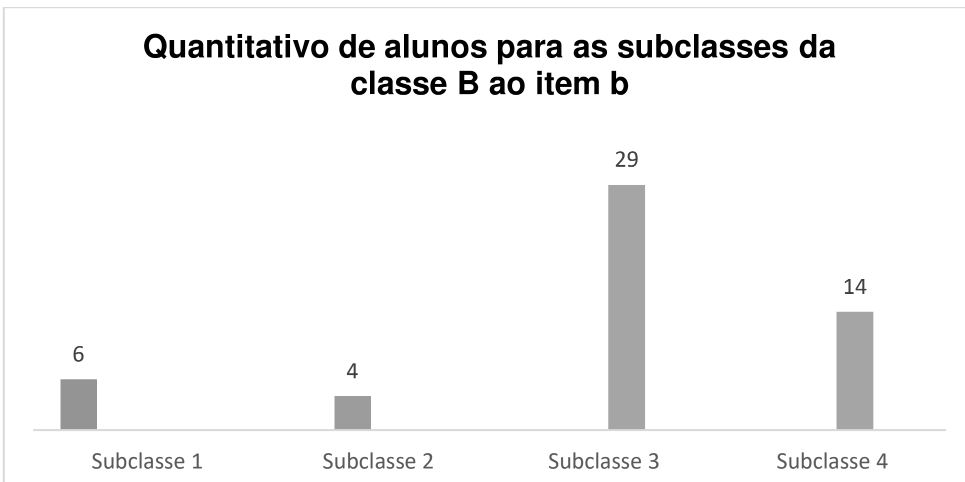
É perceptível, pelo gráfico, que a classe B apresenta o maior quantitativo em relação às demais, sendo ela referente aos alunos que denotaram valores para os segmentos no intuito de solucionar o problema. Vale ressaltar que o objetivo da questão seria aplicar o Teorema de Pitágoras, na intenção de favorecer o desenvolvimento e demonstração dela. Esse objetivo não foi alcançado completamente por nenhum dos alunos da amostra.

Podemos observar que 14 alunos deixaram o item b em branco, que, em especial, é a mesma quantidade de alunos que solucionaram o item anterior. Outra curiosidade é que, desses 14%, a maioria acertou o item a, ou seja, podemos concluir que são alunos que conhecem o Teorema de Pitágoras, no entanto, não conseguiram utilizar este teorema em suas demonstrações. Isso pode ter ocorrido devido à falta de experiência em demonstrações algébricas, visto que, provavelmente, em sua vivência escolar, esta não é uma abordagem rotineira.

Na classe A, têm-se 4 alunos, sendo ela a que representa o menor quantitativo em relação às demais. Vale lembrar que os alunos aqui inseridos se referem aos que usaram ferramentas adequadas, em suas soluções, porém não conseguiram concluir suas soluções.

Observe o gráfico 4 abaixo, que representa o quantitativo de alunos para as quatro subclasses da classe B, para o item b.

Gráfico 4: Quantitativo de alunos para as subclasses da classe B ao item b.



Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

O gráfico 4 relaciona o quantitativo de alunos com as quatro subclasses da classe B. Nele, podemos verificar que, diante dos 53 alunos presentes nesta classe, 6 pertencem à subclasse 1; 4, à subclasse 2; 43, à subclasse 3, sendo 29 exclusivos dela e 14 mesclados com a subclasse 4; e, por último, temos aqueles 14 já mencionados, na subclasse 4.

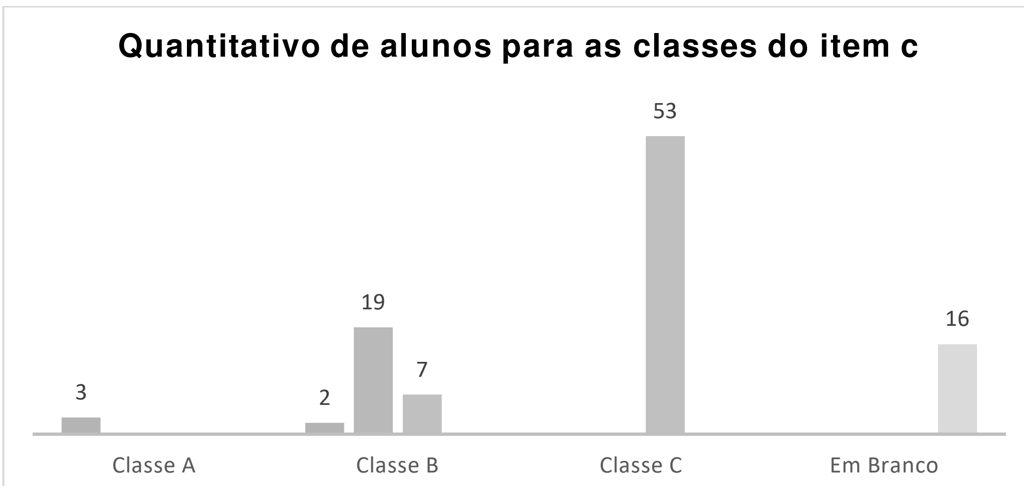
Diante do gráfico, podemos observar que, dentre os 53 alunos presentes na classe B, a subclasse 3 é a que detém a maioria deles. Estes são os alunos que atribuíram valores para os segmentos e acabaram cometendo erros recorrentes de suas escolhas, uma vez que o item se solucionava por manipulações algébricas.

A subclasse 4, constituída por 14 alunos, corresponde àqueles que cometeram erros com operações aritméticas. Os erros referentes aos cálculos de potenciações e adições foram os mais comuns.

Podemos constatar, pelo gráfico, que o menor quantitativo pertence à subclasse 2. São alunos que tentaram provar a igualdade do problema, por meio de congruência de triângulos, congruência de segmentos ou relacionando os ângulos presentes na figura.

No gráfico 5 abaixo, temos o quantitativo de alunos por classe de erro para o item c.

Gráfico 5: Quantitativo de alunos para as classes do item c.



Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

O gráfico 5 relaciona o quantitativo de alunos com as três classes estipuladas para o item c. Nele, podemos verificar que 5 alunos pertencem à classe A, sendo 3 exclusivos dela e 2 mesclados com a classe B. A classe B contém 28 alunos, sendo 19 exclusivos dela, 2 mesclados com a classe A e 7 com a classe C.

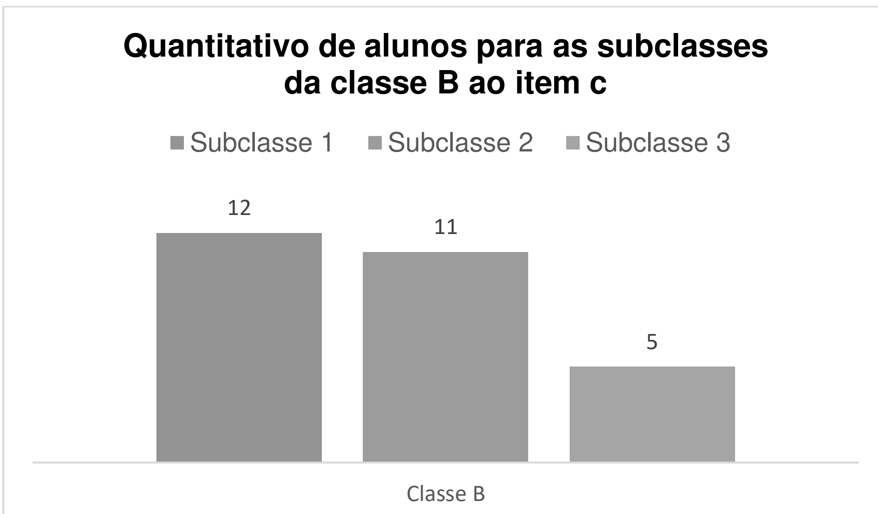
Na classe C, temos 60 alunos, onde 53 são exclusivos dela e 7 mesclados com a classe B e, ainda, temos 16 alunos que deixaram o item em branco.

No gráfico 5, é notório que, para este item, a maior concentração de alunos se encontra na classe C, sendo ela constituída por 60 alunos. Nela, estão os alunos que apresentaram uma solução dedutiva para o item, ou seja, aqueles que apenas “chutaram” um valor no intuito de pontuar na questão. Isso mostra que os alunos não compreenderem o enunciado e não dispunham de conhecimentos para solucioná-lo.

Podemos constatar, pelo gráfico, que a classe A é aquela que apresenta o menor quantitativo, uma vez que nela temos os alunos que tentaram solucionar o exercício usando o Teorema de Pitágoras. Contudo, vale lembrar que o item não se resolvia apenas com o conhecimento do teorema.

Observe o gráfico 6 abaixo, que representa o quantitativo de alunos para as três subclasses da classe B, para o item c.

Gráfico 6: Quantitativo de alunos para as subclasses da classe B ao item c.



Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

Dentre as três subclasses da classe B, a subclasse 1 é a que apresenta o maior quantitativo dentre as outras. Nela, concentram-se aqueles que, para solucionar o item, usaram de comparação entre as medidas propostas no enunciado, e, por meio de estimativas e proporções, obtiveram seus resultados. No entanto, tal método não é muito efetivo e suas soluções foram pouco fundamentadas.

Na subclasse 3, que corresponde a 11 alunos, concentram-se aqueles que optaram por situações adversas perante o enunciado. Esses alunos, supostamente por não compreenderam a real proposta do enunciado, acabaram usando estratégias que se tornaram falhas no desenvolvimento da solução, uma vez que elas não se enquadravam no contexto abordado e tampouco foram concluídas por eles.

No item c, os alunos que cometeram erros de operações aritméticas foram em quantidade menor em relação aos itens anteriores. As soluções apresentadas pelos alunos foram pouco fundamentadas e, diante daqueles que apresentaram situações que envolvesse cálculos, apenas 5 alunos cometeram erros para a subclasse 3, conforme mostra o gráfico 6.

5.3 Considerações sobre os erros analisados na pesquisa

A análise realizada das respostas apresentadas pelos 100 alunos à questão 4, da prova de nível 3 da OBMEP 2019, que exige conhecimento de Geometria, direcionou a algumas conclusões, umas já mencionadas durante toda a análise, descrita nos itens deste capítulo. Em resumo, podemos dizer que:

- A maioria dos alunos que compõem a amostra analisada compreende o conteúdo do Teorema de Pitágoras, no entanto apresenta dificuldade em aplicá-lo na resolução de situações-problemas;
- Os alunos que compreendem o Teorema de Pitágoras, em sua maioria, possuem dificuldades para usá-lo em demonstrações algébricas;
- A maioria dos alunos apresenta dificuldade em organizar e apresentar o raciocínio utilizado na solução;
- A interpretação errada do enunciado dos itens levou alguns alunos a cometerem erros em suas respostas;
- Um pequeno número de alunos demonstrou ter dificuldade com as operações aritméticas simples;
- Além da dificuldade em determinar as ferramentas corretas para resolver problemas geométricos, muitos alunos demonstraram pouca habilidade em resolver problemas de cunho algébrico.

6. CONCLUSÃO

Esta pesquisa teve como objetivos analisar e classificar os erros cometidos por alunos do Ensino Médio ao resolverem a prova da segunda fase da OBMEP nível 3, em uma questão que envolve conhecimentos de geometria. Este objetivo foi alcançado com a ampla listagem de erros, classificados através de grupos nos quais foram categorizados.

Foi possível concluir que, diante da questão em análise, os erros mais frequentes foram aqueles relacionados à deficiência de pré-requisitos geométricos.

De acordo com o método de análise de erros proposto pela Helena Noronha Cury (2007), verificou-se que os erros cometidos pelos alunos aqui retratados devem ser encarados de forma positiva, pois podem revelar as dificuldades que eles encontram em determinado conteúdo. Ou seja, tanto professores quanto alunos devem encarar o erro como uma ferramenta capaz de refletir o próprio conhecimento. É importante ressignificar o erro eliminando o aspecto negativo e tornando-o um meio de alcance para o acerto.

A análise aqui realizada permitiu identificar os principais erros cometidos pelos alunos na questão estudada. Assim, foi possível apontar as principais dificuldades enfrentadas pelos alunos ao tentarem responder uma questão envolvendo geometria. Ao analisar os erros, constatou-se que o ensino de Geometria admite falhas na construção do conhecimento. Tal fator interfere no entendimento de situações problemas e, consequentemente, na construção de estratégias de resoluções adotadas pelos alunos, criando falsas generalizações, a partir de conhecimentos que não foram totalmente consolidados.

É perceptível tal realidade quando analisamos os erros classificados na classe A para o item a, onde temos alunos que apresentavam um conhecimento geométrico incompleto, pois conheciam o Teorema de Pitágoras, porém quanto ao uso e suas propriedades foram insuficientes. Há, ainda, aqueles que se incluem na subclasse 2, a qual se remete aos erros de operações aritméticas básicas, em especial potenciação e adição.

Quanto à presença de erros nas operações aritméticas, conclui-se que os alunos chegam ao Ensino Médio com muitas lacunas no aprendizado. Este déficit é difícil de ser recuperado, uma vez que os alunos já se encontram no Ensino Médio, e há uma exigência por parte da escola para que se cumpra o cronograma e o conteúdo estipulado para essas séries. Mas, vale ressaltar que a falta dos conhecimentos básicos de matemática interfere de forma decisiva no aprendizado dos novos conteúdos.

Segundo Cury (2007), há necessidade de explorar o erro como ferramenta para a aprendizagem. Isso pode ser feito através de atividades que permitam ao aluno lidar com seus próprios erros, descobrindo suas causas. A abordagem do erro deve ser construída de uma forma que não venha a deixar o aluno constrangido, buscando sempre incentivá-lo a melhorar. Trabalhos em grupo podem ser propostos no intuito de promover o compartilhamento de informações, visto que muitas vezes o aluno assimila mais rápido o conteúdo quando é explicado pelo colega, do que quando é abordado pelo professor.

Em provas da segunda fase da OBMEP, que são discursivas, o avaliador não computará nota a alunos que simplesmente chegaram na solução desejada, mas também avalia o método e a estratégia utilizados para chegar a esta solução.

Nesse sentido, utilizar metodologias de análise de erros em provas discursivas, como as da OBMEP, é buscar compreender o funcionamento do processo de ensino e aprendizagem de matemática em escolas públicas. Uma vez que, através das análises dos erros apontados, pode-se buscar formas e métodos de corrigi-los no intuito de remediar deficiências no aprendizado. Tal ferramenta deve ser utilizada paralelamente ao ensino, não deixando que as dificuldades apresentadas se tornem intransponíveis.

A análise aqui realizada permitiu identificar os principais erros cometidos pelos alunos na questão estudada. Assim, foi possível apontar as principais dificuldades enfrentadas pelos alunos ao tentarem responder uma questão envolvendo geometria.

Sugere-se que os professores, ao menos uma vez a cada bimestre, devem promover encontros através de oficinas de matemática. Sendo que tais oficinas devem ser feitas mesclando os diferentes níveis de ensino, uma vez que as dificuldades apresentadas por um aluno do Ensino Médio podem ter origem na deficiência do aprendizado das séries anteriores. Assim, podem ser sanadas por um conteúdo abordado no 6º ano do Ensino Fundamental, por exemplo. A utilização de materiais lúdicos e jogos também pode favorecer o desenvolvimento e aprimoramento do raciocínio lógico e podem ser utilizados em diversas situações no âmbito escolar.

Concluí, ao final do trabalho, que o ensino de geometria ainda é mais focado na aplicação de fórmulas do que na criatividade, já que a maioria dos erros se concentrou nos itens que envolviam um pensamento geométrico abstrato e demonstrações de situações algébricas. Percebi, também, que os estudantes têm muita dificuldade em interpretação de questões envolvendo geometria e ainda não compreendem, e tampouco conseguem aplicar o Teorema de Pitágoras quando esta possibilidade não é explicitada no problema.

REFERÊNCIAS

BRANDÃO, R. J. B. Estatística e Probabilidade na Formação do Engenheiro Civil. In. Engenharia 4.0: a era da produção inteligente / Eduardo Mendonça Pinheiro, Glauber Tulio Fonseca Coelho, Patrício Moreira de Araújo Filho (Org.) São Luís: Editora Pascal Ltda, 2020.

BRASIL, Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM**. Vol 2. Ministério da Educação, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Guia de Livros didáticos: PNLD 2014: Matemática. Brasília, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Olimpíadas de Matemática. Brasília: junho, 2011. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211-218175739/16789-medalhas-dos-vencedores-serao-entregues-por-dilma-e-haddad. Acesso em: 9 nov. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação; Secretaria de Educação Básica; Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão; Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. Conselho Nacional de Educação; Câmara de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC; SEB; DICEI, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 19 jan. 2021.

CORDEIRO, C. C; FRIEDMANN, C. V. P; **Análise de erros de questões de geometria da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**: Alguns resultados; disponível em https://educere.bruc.com.br/cd2009/pdf/3044_1388.pdf

CURY, H. N. **Retrospectiva Histórica e perspectivas atuais da análise de erros em Educação Matemática**. Revista Zetetiké, v.3, n. 4, 1995.

CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007

DAL-FARRA, Rossano André Paulo; LOPES, Tadeu Campos. Métodos Mistos de Pesquisa em Educação: pressupostos teóricos. Nuances: estudos sobre Educação, Presidente Prudente – SP, V. 24, n. 3, p. 67-80, set./dez. 2013.

GORODSKI, C; **Alguns aspectos do desenvolvimento da geometria, 2002**. Disponível em: http://www.ime.usp.br/ gorodski/ps/

LORENZATO, S.; **Por que não ensinar Geometria?** In: Revista A Educação Matemática em Revista. São Paulo: SBEM, 1995, v.4.

OLIMPÍADA Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Rio de Janeiro. Disponível em <www.obmep.org.br>. Acessado em: setembro de 2020.

RADATZ, H.; **Error Analysis in Mathematics Education. Journal for Research in Mathematics Education** v.10, n.2, p. 165-169. Maio, 1979.

SANTOS, Marney Araújo; Aprendendo por meio da Análise de erros dos nossos Alunos: uma investigação sobre a resolução de problemas de matemática financeira. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Tocantins – Palmas – TO, p. 40. 2016