Universidade Federal do Maranhão - UFMA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - CCET
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT

Dissertação de Mestrado

Rafael Ferreira Santos Soares

Aplicação do modelo Black-Sholes e Binomial para precificação de opções europeias

São Luís - MA

2021

Rafael Ferreira Santos Soares

Aplicação do modelo Black-Sholes e Binomial para precificação de opções europeias

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva

São Luís - MA

2021

Rafael Ferreira Santos Soares

Aplicação do modelo Black-Sholes e Binomial para precificação de opções europeias

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Jairo Santos da Silva (Examinador Interno)
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite (Examinador Externo)
Universidade Federal do Piauí - UFPI

Em memória de Maria da Paz e Gilberto Nunes...

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu Deus pela oportunidade de ingressar em um mestrado, a todos os meus familiares pelos incetivos e palavras de ânimo para continuar a jornada. Jornada essa árdua e desafiadora. Gostaria de agradecer ao professor João de Deus pela paciência e pelo desafio que me foi proposto, pois agora sou mais um que irá adentrar de vez nesse "mundo financeiro". Gostaria de agradecer a todos os colegas e amigos da graduação, em especial: Marco Antonio Maranhão, Bia, Anderson, Pablo, Willderson, Arnando, Filipe, Jeiferson, Gabriel e todas aqueles que faziam parte da "sala de estudos". Agradeço imensamente por todas as risadas e estudos que ali foram colocados naquela sala. Gostaria de agradecer também, a todos os alunos da minha turma de mestrado: Claudomiro, Bruno, Roclilson e Denilson. Agradecer também a Marisa e Marcus, alunos de outra turma, mas que também foram marcantes nessa jornada. Agradeço a todos os professores do programa de mestrado pelas disciplinas ministradas, por todos os ensinamentos e conversas que com toda certeza, fizeram a diferença em minha vida. Gratidão por tudo!

“Tudo tem o seu tempo determinado, e há tempo para todo o propósito debaixo do céu”.

(Eclesiastes 3:1)

RESUMO

Neste trabalho, iremos estudar a precificação de uma opção de compra do tipo europeia, mostrar os fatores que interferem positivamente e negativamente no preço de uma opção e usaremos os modelos matemáticos de Black-Sholes e o Binomial para precificação de opção de compra do tipo europeia. Apresentaremos também uma aplicação dos modelos estudados para precificação de opções de Petróleo Brasileiro S.A - PETROBRAS.

Palavras-chave: Opções, Movimento Browniano, Black-Sholes, Binomial.

ABSTRACT

In this work, we will study the pricing of a european type call option, show the factors that positively and negatively affect the price of an option and we will use the Black-Sholes and Binomial mathematical models for European type call option pricing. We also present an application of the models studied for pricing options for Petroleo Brasileiro SA - PETROBRAS.

Keywords: Options, Brownian Motion, Black-Sholes, Binomial.

SUMÁRIO

Introdução

De maneira sintética, a modelagem matemática está relacionada à construção de um modelo matemático, ou um padrão matemático capaz de explicar ou compreender um fenômeno natural. Tal fenômeno pode ser referente a qualquer área do conhecimento, como física, química, biologia, finanças, engenharia, dentre outros. Especificamente neste trabalho, a modelagem matemática está relacionada à área de finanças (mercado de derivativos), onde serão usados modelos matemáticos, com o objetivo de precificar opções do tipo europeia.

Em finanças, podemos definir mercado financeiro como o ambiente da ocorrência de negociações de ativos, tais como títulos, moedas, ações, derivativos, commodities, dentre outros bens e ativos que tem algum valor financeiro. O mercado financeiro pode ser subdivido em quatro tipos de mercado: mercado de crédito, de câmbio, monetário e de capitais. Dentre essas subdivisões, daremos ênfase para o mercado de capitais, pois além de ser possível a negociação de títulos e ações, também é possível negociar derivativos, conceito importante para o desenvolvimento deste trabalho. No mercado de capitais, os investimentos são divididos em dois tipos: renda fixa e renda variável. A respeito de derivativos, segundo Hull [14], nos últimos anos, a utilização de derivativos tem se tornado cada vez mais importantes no mundo das finanças. Essa importância se dá pelo fato de o mercado apresentar oscilações de preços, o que gera o chamado “risco” para o investidor, que nesse caso é a incerteza em relação aos movimentos nos preços das ações no futuro e dessa maneira, os derivativos podem ser usados para “eliminar” esse risco.

Os derivativos são contratos com acordos no presente e compromissos futuros, funcionando como uma espécie de seguro ou proteção aos agentes econômicos, contra os riscos das flutuações dos preços das ações. De acordo com Silva [27], como o próprio nome indica, os derivativos são instrumentos financeiros em que os seus preços dependem de outros instrumentos que lhe serve como referência. No mercado de derivativos, os preços são negociados de forma a satisfazer ambas as partes (compra e venda). Dentro do mercado de derivativo, existem três divisões: mercado a termo, mercado futuro e mercado de opções. Os tipos de mercado de derivativos serão melhores explicados na Seção 2.1 e destacaremos o mercado de opções, pois é o objeto de estudo deste trabalho. Os derivativos e em particular, as opções, são tipos de investimentos de renda variável, ou seja, a rentabilidade do investimento pode variar para mais ou para menos. Isso acontece pois o mercado de renda variável é bastante volátil, o que pode gerar um lucro ou prejuízo ao investidor no final do período. Segundo Silva [27], um problema bastante comum na análise de mercado de opções é que tendo em vista que o preço de uma ação é fixado em uma data futura, torna-se muito arriscado efetuar operações de compra e venda nesse tipo de mercado, uma vez que eventualidades futuras podem ocorrer.

Na tentativa de prever a movimentação dos preços das ações no futuro, a matemática surge como uma ferramenta de suma importância para os investidores. De acordo com Levada, Maceti, Lautenschleguer[16], em 1900, surgiu uma nova relação entre a física/matemática e a economia através do trabalho defendido por Louis Barchelier, na Academia de Ciência de Paris, sua tese de doutourado intitulada "théori de la Speculatión". A tese tratava de opções de preços em mercados financeiros especulativos, embasada na teoria do movimento browniano (MB). Porém, a expectativa de Barchelier foi frustada após seu trabalho receber conceito ruim e ser rejeitada por seus avaliadores. Segundo Maciel [17], após um período de esquecimento, a ideia de Barchelier sobre a utilização do MB no mercado financeiro foi retomada em 1965 por Samuelsen e posteriormente, em 1970, por Fischer Black e Myron Scholes, que desenvolveram o famoso modelo de Black – Sholes. A fórmula é obtida através da solução da equação diferencial de Black-Sholes, com a pretensão de nos fornecer uma estimativa do preço teórico de uma opção do tipo europeia.

Esse trabalho é uma revisão bibliográfica, cujo objetivo principal é o desenvolvimento de um estudo sobre as opções do tipo europeia e utilizar os modelos de Black-Sholes e o modelo binomial para estimar o valor teórico do preço de uma opção de compra do tipo europeia, visando uma aproximação teórica satisfatória. Buscando cumprir as metas do trabalho, foram consultados livros, artigos, teses, notas de aula e trabalhos de conclusão de curso.

O trabalho está organizado em quatro capítulos. No primeiro Capítulo é feita uma breve revisão sobre conceitos de probabilidade, modelos de distribuição de probabilidade contínua, como o modelo normal e lognormal, medida e processos estocásticos, conceitos que serão muito importantes no decorrer do trabalho. No segundo Capítulo, abordaremos os principais conceitos do mercado financeiro, além de introduzir a teoria das opções, explicar o funcionamento de um contrato de opção e alguns fatores que podem afetar a precificação de uma opção. No terceiro Capítulo, apresentamos os elementos matemáticos essenciais para compreender a solução da equação de Black-Sholes. Abordamos o processo de Wiener (ou movimento browniano), um tipo específico de processo de Markov, na qual vemos com mais detalhes no Capítulo 1 e o lema de Itô, um resultado importante em finanças. No quarto Capítulo, tratamos a respeito dos modelos de Black-Sholes e Binomial, dos pressupostos referentes a conceitos que precisam ser definidos, além das hipóteses que precisam ser assumidas, para que assim possamos determinar a formula do preço de uma opção de compra do tipo europeia referente a cada modelo.

1 Preliminares

O estudo da teoria de probabilidade tem grande importância no processo de tomada de decisões. A probabilidade é a área matemática na qual ocorrem estudos sobre a chance da ocorrência de um evento aleatório. Neste capítulo apresentamos alguns conceitos básicos de probabilidade, os quais envolvem a definição de espaço de probabilidade e suas principais propriedades; variáveis aleatórias, função densidade de probabilidade (em particular, da distribuição normal e lognormal), função distribuição acumulada, além da definição espaço de medida e dos chamados processos markovianos. Utilizaremos como base para o desenvolvimento deste capítulo, os trabalhos de Bussab [4], Cardoso [5], Duque [7], Magalhães [18] e Meyer [19]. Todos esses conceitos serão necessários no decorrer deste trabalho.

1.1 Noções Básicas da Teoria de Probabilidade

O primeiro conceito que aparece em um experimento aleatório é o *espaço amostral*, que é o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento. Geralmente o espaço amostral é representado pela letra Ω. Considere o seguinte experimento: "Lançar uma moeda e verificar se a face é cara ou coroa". Então temos que o espaço amostral associado a esse experimento aleatório é $\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$. Considere agora outro experimento: "Lançamento de um dado (não viciado) de seis faces". Temos que o espaço amostral associado a esse experimento será $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Chamaremos de *evento,* um subconjunto de um espaço amostral. Considerando novamente o experimento: " lançamento de um dado de seis faces". Podemos ter os seguintes eventos associados a esse experimento: A $= \{$sair número par$\}$, B $= \{$sair número ímpar$\}$, C $= \{$sair número maior do que 3$\}$. Esses eventos podem ser representados, respectivamente, pelos conjuntos: A $= \{2, 4, 6\}$, B $= \{1, 3, 5\}$ e C $= \{4, 5, 6\}$. Podemos afirmar que o próprio espaço amostral é um evento e é chamado de *evento certo*, enquanto o conjunto $\varnothing$ é chamado de *evento impossível*. De maneira geral, chegamos na seguinte definição:

Definição 1.1. Um *espaço de probabilidade* é uma terna ordenada da forma $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde:

1) Ω é um conjunto arbitrário não vazio, o qual o chamaremos de *espaço amostral*;

2) Uma família $\mathcal{F}$ é uma σ- álgebra de subconjuntos de Ω, ou seja

   a) $\emptyset \in \mathcal{F}$;

   b) É fechada em relação ao complementar, ou seja
   $$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F};$$

   c) É fechada em relação à união enumerável, ou seja,
   $$A_1, A_2, ... \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F};$$

   É imediato que a partir dessas duas condições, as sigmas-álgebras também sejam fechadas em relação à intersecção enumerável, ou seja
   $$A_1, A_2, ... \in \mathcal{F} \Rightarrow \cap_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

   Isso vem do fato de
   $$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
   e portanto $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$.

3) $\mathbb{P}$ é uma medida de probabilidade, ou seja, é uma função real definida em uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de um conjunto não vazio Ω, satisfazendo:

   a) $\mathbb{P}(A) \geq 0,$ para todo $A \ \in \mathcal{F}$ (positividade);

   b) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (normalidade);

   c) $\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n),$ se $A_n \in \mathcal{F},\ n = 1, ...$ e $A_n \cap A_m = \emptyset,$ para $n \neq m$ ($\sigma -$ aditividade).

Na teoria de probabilidade, os pontos $\omega \in \Omega$ representam os possíveis resultados de um experimento aleatório, os subconjuntos $E \in \mathcal{F}$ são chamados de *eventos* e medida $\mathbb{P}$ é uma função que designa graus de incerteza aos eventos de $\mathcal{F}$.

Definição 1.2. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Dois eventos A e E em $\mathcal{F}$ são chamados de *independentes* se
$$\mathbb{P}(A \cap E) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(E).$$

Uma classe de eventos $\beta \subset \mathcal{F}$ será chamada *uma classe de eventos independentes* se, para toda coleção finita de eventos $E_1, E_2, ..., E_n$ em β, tivermos

$$\mathbb{P}(\cap_{k=1}^{n} E_k) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k).$$

Definição 1.3. Se $\beta_\lambda \subset \mathcal{F}$ for uma classe de eventos, com λ pertencente a um conjunto de índices Λ , diremos que $\{\beta_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é uma família de classes independentes se, para cada seleção de $E_\lambda \in \beta_\lambda$, a classe $\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ contiver somente eventos independentes.

Definição 1.4. (Probabilidade Condicional). A probabilidade da ocorrência de um evento A, dado que o evento E já ocorreu é

$$\mathbb{P}[A|E] = \frac{P[A \cap E]}{\mathbb{P}[E]}.$$

1.2 Variáveis Aleatórias

Dado um fenômeno aleatório qualquer, com um determinado espaço amostral Ω, estamos interessados na atribuição de um número real a cada elemento do espaço amostral. Em alguns casos, os resultados já são expressos numericamente. Podemos citar como exemplo, uma peça fabricada e estamos interessados em observar a característica "defeituosa". O resultado desse experimento não está descrito numericamente, mas podemos assim atribuir um valor numérico a cada característica, respectivamente "um" e "zero". Em geral Meyer [19], nos mais diversos experimentos, buscaremos atribuir um número real x a todo elemento ω do espaço amostral Ω, ou seja, $x = X(\omega)$ é o valor da função de X do espaço amostral, no espaço do conjunto dos números reais. Podemos assim formular a seguinte definição:

Definição 1.5. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, onde Ω é um espaço amostral relacionado a um experimento aleatório. Uma função X que associe a cada elemento $\omega \in \Omega$ um número real $X(\omega)$, é chamada de v.a (*variável aleatória*). A cada $\omega \in \Omega$ corresponderá um $X(\omega) \in \mathbb{R}$. Em termos matemáticos, temos

$$\begin{aligned} X: \ \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega). \end{aligned}$$

As variáveis aleatórias podem ser classificadas em dois tipos: discretas e contínuas.

Definição 1.6. Dizemos que uma v.a é discreta, se os possíveis valores de X forem finito ou infinito enumerável e além disso quando podem ser colocados em uma lista, como por exemplo, $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Quando finito, a lista acaba, do contrário, a lista continua indefinidamente. Já uma função X definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores em um intervalo do conjunto dos número reais, é dita uma variável aleatória contínua. Em termos matemáticos, temos:

Definição 1.7. Seja X uma v.a discreta, então X poderá assumir no máximo um número infinito enumerável de valores $x_1, x_2, x_3, ...$ Chamaremos de *função de probabilidade*, a função que a cada resultado x_i associa sua probabilidade de ocorrência. Em termos matemáticos, $p(x_i) = P(X = x_i)$. Os números $p(x_i), i = 1, 2, ...$ devem satisfazer as seguintes condições:

$$\text{i) } 0 \leqslant p(x_i) \leqslant 1 \tag{1.1}$$

e

$$\text{ii) } \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1. \tag{1.2}$$

Definição 1.8. Diz-se que X é uma v.a contínua, se existir um a função $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, denominada Função Densidade de Probabilidade (fdp) de X que satisfaça as seguintes condições:

$$\text{a) } \quad f(x) \geqslant 0, \text{ para todo } x, \tag{1.3}$$

$$\text{b) } \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1, \tag{1.4}$$

$$\text{c) } \quad P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx, \tag{1.5}$$

para quaisquer a, b, com $-\infty < a < b < +\infty$.

Mostraremos agora algumas propriedades da fdp. A probabilidade de uma v.a X contínua pertencer a um intervalo $(a, b]$,é dada por:

Propriedade 1.2.1. *$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$, que caracteriza a área sob a curva da fdp entre a e b e eixo das abscissas.*

Propriedade 1.2.2. *Para todo e qualquer valor de X e em particular, seja $x_0 \in X$, então $P(X = x_0) = 0$, pelo fato de termos $P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx = 0$.*

Propriedade 1.2.3. *Pela Propriedade 1.2.2, vimos que a probabilidade de X assumir valores em pontos quaisquer é nula, então temos: $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) =$
$= P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$.*

A fdp nos mostra uma forma de descrever como as probabilidades são relacionadas aos valores ou aos intervalos de valores de uma v.a.

Definição 1.9. Dada a v.a X em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, chamaremos de fda, *Função de Distribuição Acumulada* ou simplesmente de fd, *Função de Distribuição* a seguinte função:

$$F(x) = P(X \leq x), \; -\infty < x < \infty. \tag{1.6}$$

Observe que o domínio de F é todo o conjunto dos números reais, ao passo que o contradomínio é o intervalo $[0, 1]$.

A fd pode ser obtida imediatamente a partir da definição de *Função de Probabilidade* ou pela *Função Densidade de Probabilidade*. Seja X uma v.a. Então teremos:

a) Se X for uma v.a discreta:

$$F(x) = \sum_j p(x_j), \tag{1.7}$$

onde o somatório é estendido a todos os índices j que satisfaçam a condição $x_j \leq x$.

b) Se X for uma v.a contínua, com *fdp f*,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds. \tag{1.8}$$

A seguir, apresentaremos algumas propriedades importantes da $F(x)$.

Propriedade 1.2.4. *Se X é contínua, $F(x)$ é contínua $\forall\, x$.*

Propriedade 1.2.5. *A função F é não descrescente. Isto é, se $x_1 \leq x_2, \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$. Basta definir os eventos A e B como sendo: $A = \{X \leq x_1\}$, $B = \{X \leq x_2\}$. Logo, como $x_1 \leq x_2$, teremos $A \subset B$, e o resultado segue agora da teoria de probabilidade.*

Propriedade 1.2.6. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *e* $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

No caso contínuo, teremos:

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds = 0,$$

$$F(\infty) = \lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds = 1.$$

O caso discreto segue de maneira análoga.

Teorema 1.2.1. *a) Seja $F(x)$ a fd de uma v.a contínua, com fdp f. Então,*

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) \tag{1.9}$$

para todo x no qual F seja derivável.

b) Seja X uma v.a discreta, com valores possíveis $x_1, x_2, ...,$ e suponha-se que esses valores tenham sido indexados de modo que $x_1 < x_2 < ...$ Seja F a fd de X. Então,

$$p(x_j) = P(X = x_j) = F(x_j) - F(x_{j-1}). \tag{1.10}$$

Demonstração.

a) $F(x) = P(X \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds$. Por isso, aplicando-se o teorema fundamental do cálculo, obteremos $F'(x) = f(x)$.

b) Como admitimos $x_1 < x_2 ...$, teremos

$$F(x_j) = P(X = x_j \cup X = x_{j-1} \cup ... \cup X = x_1)$$

$$= p(x_j) + p(x_{j-1}) + ... + p(x_1).$$

e

$$F(x_{j-1}) = P(X = x_{j-1} \cup X = x_{j-2} \cup ... \cup X = x_1)$$

$$= p(x_{j-1}) + p(x_{j-2}) + ... + p(x_1).$$

Portanto,

$$F(x_j) - F(x_{j-1}) = P(X = x_j) = p(x_j).$$

□

Definição 1.10. Dada a v.a X discreta, em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ assumindo os valores $x_1, ...x_n$, chamamos *valor médio, esperado ou esperança matemática* de X ao valor

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i). \tag{1.11}$$

onde $p(x_i)$ é a distribuição de probabilidade da v.a. X.

Definição 1.11. O valor esperado ou média da v.a contínua X, em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, com função densidade dada por $f(x)$, é dada pela expressão

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx, \tag{1.12}$$

onde $f(x)$ é função densidade de probablidade. Frequentemente, usaremos $E(X) = \mu$.

1.2.1 Propriedades do Valor Esperado

i) Se $X = C$, onde C é uma constante. Então, $E(X) = C$.

Então, aplicando a Definição 1.12, temos

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} C f(x) dx = C \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = C.$$

ii) Suponha que C é uma constante e X uma v.a. Então,

$E(CX) = CE(X)$.

$$\text{Façamos: } E(CX) = \int_{-\infty}^{+\infty} C x f(x) dx = C \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = CE(X).$$

iii) Sejam X_1 e X_2 duas v.a's. Então $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$.

Basta aplicar a Definição 1.12 à soma de duas variáveis, ou seja,

$$E(X_1 + X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 + x_2) f(x_1) f(x_2) dx_1 dx_2$$

.

Aplicando as propriedades de integrais duplas, temos:

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f(x_1) dx_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 f(x_2) dx_2 \\ &= E(X_1) + E(X_2). \end{aligned}$$

iv) Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$, n v.a's. Então, $E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + ... + E(X_n)$. Basta aplicar a prop. acima n vezes.

v) Suponha que X_1 e X_2 sejam variáveis aleatórias independentes. Então,

$$E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2)$$

. Basta aplicar a Definição 1.12 à multiplicação de duas variáveis, ou seja,

$$\begin{aligned}
E(X_1X_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2f(x_1,x_2)dx_1dx_2 \\
&\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)dx_1dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1f_{X_1}(x_1)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_2f_{X_2}(x_2)dx_2\right)dx_1 \\
&= E(X_1)E(X_2).
\end{aligned}$$

vi) Seja X uma v.a discreta e $Y = aX + b$. Então, $E(Y) = aE(X) + b$. Basta fazer

$$\begin{aligned}
E(aX+b) &= \int_{-\infty}^{+\infty}(ax+b)f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} axf(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} bf(x)dx \\
&= a\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx + b\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \\
&= aE(X) + b.
\end{aligned}$$

Observação 1.2.1. As propriedades acima podem ser verificadas no caso discreto, usando a definição de função densidade de probabilidade para o caso discreto e aplicando as propriedades dos somatorios.

Definição 1.12. Seja X uma variável aleatória discreta com $P(X = x_i) = p(x_i), i = 1, 2, ..., k$ e média μ. A variância de X é a ponderação pelas respectivas probabilidades, dos desvios relativos à média, elevados ao quadrado, ou seja,

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \mu)^2p(x_i). \tag{1.13}$$

A variância também poderá ser denotada por σ^2 e, em muitos casos, poderemos usar também a notação σ_X^2. O desvio padrão de X é obtido a partir da raiz quadrada da variância, e será denotado por σ ou σ_X. Outra forma de representar a variância de X é expressa na seguinte forma

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2], \tag{1.14}$$

Na qual desenvolvendo $E\left[(X-\mu)^2\right]$ e empregando as propriedades do valor esperado, pode ser reescrita como

$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] \Leftrightarrow Var(X) = E\left\{X^2 - 2X\mu + \mu^2\right\},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - 2\mu\mu + [\mu]^2 \\
&= E(X^2) - [\mu]^2 = E(X^2) - \mu^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k} p(x_i)^2 x_i^2 - \mu^2.
\end{aligned}$$

Definição 1.13. Para uma v.a contínua X com densidade $f(x)$, a variância é dada por

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx. \tag{1.15}$$

Da mesma forma que obtemos uma fórmula alternativa para o cálculo da variância da v.a. discretas, Equação (1.14), podemos também fazer o uso da seguinte fórmula para o cáculo da variância de v.a contínuas

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2. \tag{1.16}$$

1.2.2 Propriedades da Variância

1. Se a for uma constante e X uma v.a.,

   i) $Var(a+X) = Var(X)$;

   Basta fazer

$$\begin{aligned}
Var(a+X) &= E\{(a+X) - E(a+X)]^2\} \\
&= E\{(a+X) - E(X) - a]^2\} \\
&= E\{[X - E(X)]^2\} \\
&= Var(X).
\end{aligned}$$

ii) $Var(aX + b) = a^2Var(X)$.

Basta fazer

$$\begin{aligned} Var(aX+b) &= E\{(aX+b)^2]\} - E\{(aX+b)]^2\} \\ &= a^2\left(E(X^2) - [E(X)]^2) + (b^2 - b^2\right) + 2bE(X) - 2bE(X) \\ &= a^2Var(X). \end{aligned}$$

2. Se X e Y são v.a's independentes, então:
$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$.
Basta fazer

$$\begin{aligned} Var(X+Y) &= E[(X+Y)^2] - [E(X+Y)]^2 \\ &= E(X^2 + 2XY + Y^2) - [E(X)]^2 - 2E(X)E(Y) - [E(Y)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\ &= V(X) + V(Y). \end{aligned}$$

Introduziremos agora um importante modelo de distribuição de probabilidade contínua, com propriedades importantes que são utilizadas em mercado financeiro: A Distribuição Normal. Tal modelo servirá como suporte para definir a distribuição log-normal. Desde já, adiantamos que sob um *processo estocástico* (conceito que será definido nos ṕroximos capítulos), o retorno para o titular de um ação em um breve peŕiodo de tempo segue uma distribuição normal.

1.3 Distribuição Normal

Definição 1.14. Dizemos que uma v.a contínua X tem distribuição *Normal* com parâmetros μ e σ^2, se sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \text{para } -\infty < x < \infty. \tag{1.17}$$

A notação usual é $X \backsim N(\mu, \sigma^2)$, e a usaremos para denotar que X tem distribuição Normal com parâmetros μ e σ^2. Mostraremos agora algumas propriedades importantes da função densidade de probabilidade da distribuição Normal, que podem ser observadas em seu gráfico.

Propriedade 1.3.1. *Vamos mostrar que f é uma fdp. É fácil ver que $f(x) \geqslant 0$. Queremos verificar que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 1$. Fazendo uma mudança de variável tal que $t = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$, teremos $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$, onde $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$.*

Empregaremos agora a estratégia de calcular o quadrado desta integral,

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-s^2}{2}} ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(s^2+t^2)}{2}} dsdt
\end{aligned}
$$

Para o cálculo dessa integral dupla, usamos coordenadas polares. Então, teremos

$$s = r\cos\alpha, \quad t = r\sin\alpha.$$

O elemento de área $dsdt$ se torna $rdrd\alpha$. Temos que s e t variam entre $-\infty$ e $+\infty$, r varia entre 0 e ∞, e α varia entre 0 e 2π. Logo temos,

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} re^{\frac{-r^2}{2}} drd\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} -e^{\frac{-r^2}{2}} |_0^{\infty} d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} d\alpha = 1.
\end{aligned}
$$

Por isso, $I = 1$.

Propriedade 1.3.2. *$f(x)$ é simétrica em relação à μ;*

Propriedade 1.3.3. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; *O resultado segue diretamente do fato de termos $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$.*

Propriedade 1.3.4. *O Ponto de máximo de $f(x)$ se dá para $x = \mu$, e o valor máximo é $1/\sigma\sqrt{2\pi}$.*

Antes de calcular as derivadas de $f(x)$, precisamos lembrar que $(e^x)' = e^x$ e que $(e^{g(x)})' = e^{g(x)}g'(x)$(Regra da Cadeia). Aplicando à função densidade, Equação (1.17) temos:

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\left[-\frac{1}{2\sigma^2}2(x-\mu)\right] = -f(x)\left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right). \tag{1.18}$$

Derivando novamente, temos:

$$f''(x) = -f'(x)\left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right) - f(x)\frac{1}{\sigma^2} = -\left[-f(x)\left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)\right]\left[\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right] - f(x)\frac{1}{\sigma^2}$$
$$= f(x)\left[\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4}\right] - f(x)\frac{1}{\sigma^2} = f(x)\left[\frac{(x-\mu)^2-\sigma^2}{\sigma^4}\right] \quad (1.19)$$

Analisando a Equação (1.18) e lembrando que $f(x) \geq 0$, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mu$$

e assim $x = \mu$ é um ponto crítico. Como temos que $f'(x) > 0, (se f(x) > 0)$ e $x < \mu$ e $f'(x) < 0, (se f(x) > 0)$ e $x > \mu$, então f é crescente à esquerda de μ e decrescente à direita de μ. Então, temos que $x = \mu$ é um ponto de máximo e nesse ponto

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}. \quad (1.20)$$

Propriedade 1.3.5. *Pontos de inflexão. Analisando a Equação (1.19), se $f(x) \geq 0$, temos:*

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x-\mu)^2 = \sigma^2 \Leftrightarrow |x-\mu| = \sigma \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mu + \sigma \\ x = \mu - \sigma \end{cases} \quad (1.21)$$

Além disso,

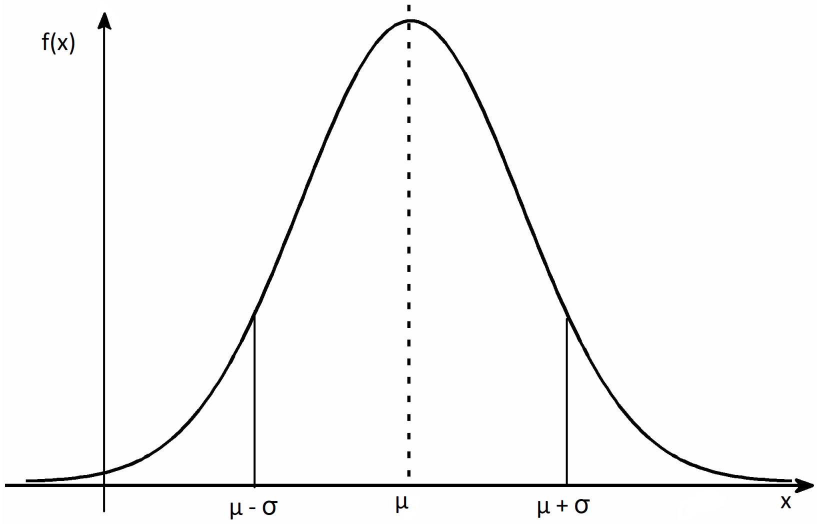
$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\Leftrightarrow (x-\mu)^2 > \sigma^2 \Leftrightarrow |x-\mu| > \sigma \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x-\mu > \sigma \quad ou \quad \mu - x > \sigma \\ &\Leftrightarrow x > \mu + \sigma \quad ou \quad x < \mu - \sigma \end{aligned} \quad (1.22)$$

e

$$\begin{aligned} f''(x) < 0 &\Leftrightarrow (x-\mu)^2 < \sigma^2 \Leftrightarrow |x-\mu| < \sigma \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - \mu < \sigma \\ \mu - x < \sigma \end{cases} \Leftrightarrow \mu - \sigma < x < \mu + \sigma \end{aligned} \quad (1.23)$$

Então temos que que o gráfico de $f(x)$ tem concavidade voltada para cima quando $x > \mu + \sigma$ ou $x < \mu - \sigma$ e tem concavidade voltada para baixo quando $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$. A Figura 1.1 mostra o gráfico de uma fdp de uma v.a. com média μ e σ^2.

Figura 1.1: fdp de uma v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.



Verifiquemos agora que os parâmetros μ e σ^2 representam respectivamente a média e a variância da distribuição normal. Consideremos $X \backsim (\mu, \sigma^2)$ e

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right] dx.$$

Fazendo $z = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$, temos que $dz = \frac{1}{\sigma} dx \Rightarrow dx = \sigma dz$ e $x = \sigma z + \mu$. Logo, temos:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + \mu) e^{\frac{-z^2}{2}} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma \int_{-\infty}^{\infty} z e^{\frac{-z^2}{2}} dz + \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} dz. \end{aligned}$$

Pela Propriedade 1.3.1 temos que a segunda (sem o fator μ) integral é igual a 1. Calculando a primeira integral e usando a definição de integral imprópria, temos:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{\frac{-z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} z e^{\frac{-z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} z e^{\frac{-z^2}{2}} dz.$$

Consideremos a seguinte integral:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} z e^{\frac{-z^2}{2}} dz.$$

Fazendo uma mudança de variável, $y = -z \Rightarrow z = -y \Rightarrow dz = -dy$ teremos:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} z e^{\frac{-z^2}{2}} dz = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} y e^{\frac{-y^2}{2}} dy.$$

logo,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{\frac{-z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} z e^{\frac{-z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} y e^{\frac{-y^2}{2}} dy = 0.$$

Logo, $E(X) = \mu$.

Para o cálculo da variância, usando a Equação (1.14), temos:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\ dx.$$

Fazendo $z = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$, temos que $dz = \frac{1}{\sigma}dx \Rightarrow dx = \sigma dz$ e $x = \sigma z + \mu$,e utilizando o método de integração por partes, temos:

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + \mu)^2 e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

$$= \mu^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} dz + \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{\frac{-z^2}{2}} dz + 2\mu\sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{\frac{-z^2}{2}} dz.$$

Vimos anteriormente que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} dz = 1$ e que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} z e^{\frac{-z^2}{2}} dz = 0$. Utilizando mais uma vez o método de integração por partes, temos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{\frac{-z^2}{2}} dz = \underbrace{\left[-z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{0} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} dz}_{1} = 1.$$

Logo:

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$Var(X) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2.$$

Para o cálculo da probabilidade para variáveis continuas, devemos resolver a integral da função densidade, no intervalo de interesse, ou seja,

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

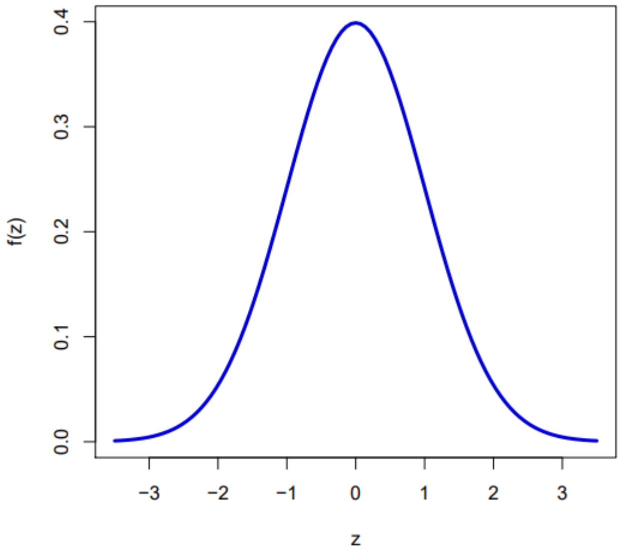
Como sabemos do Cálculo, essa integral só é resolvida através de métodos numéricos. Por esse fato, a probabilidade para o modelo normal pode ser calculada através de tabelas. Porém, para cada valor de μ e σ, teríamos que obter $P(a < X < b)$ para vários valores de a e b. Então é viável ultilizar uma tranformação que nos dá o cálculo da probabilidade em questão, isto é, uma variável de parâmetros $(0, 1)$, média 0 e variância 1.

Consideremos agora $X \backsim N(\mu, \sigma^2)$, e fazemos o uso de uma nova variável, definida como

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}. \tag{1.24}$$

Então, a variável aleatória Z terá distribuição $N(0,1)$ é será chamada de *Normal padrão* ou *Normal Reduzida.* A demonstração desse fato será omitida aqui e apenas admitiremos como verdade o resultado. Na Figura 1.2, observamos o gráfico de uma distribuição padronizada, com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

Figura 1.2: Gráfico de uma distribuição normal padronizada com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.



Determinaremos a probabilidade de $X \in [a, b]$, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P(a \leqslant X \leqslant b) &= P(a - \mu \leqslant X - \mu \leqslant b - \mu) \\ &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Logo, para qualquer valor de μ e σ, utilizaremos a *Normal Padrão* para se obter a probabilidade com a distribuição Normal. A probabilidade $P(0 \leqslant Z \leqslant z)$, $z \geqslant 0$ pode ser obtida em uma tabela, disponível por exemplo, em Bussab e Morenttin [4]. Podemos também calcular valores de probabilidade em outros intervalos, devido a simetria da densidade normal. Notemos que devido a simetria, temos que $P(Z \geqslant 0) = 0,5 = P(Z \leqslant 0)$. Podemos agora fazer uma introdução a respeito da distribuição lognormal. Veremos mais a frente que o valor do preço de uma ação em um dado momento futuro, segue uma distribuição lognormal.

1.4 Distribuição Lognormal

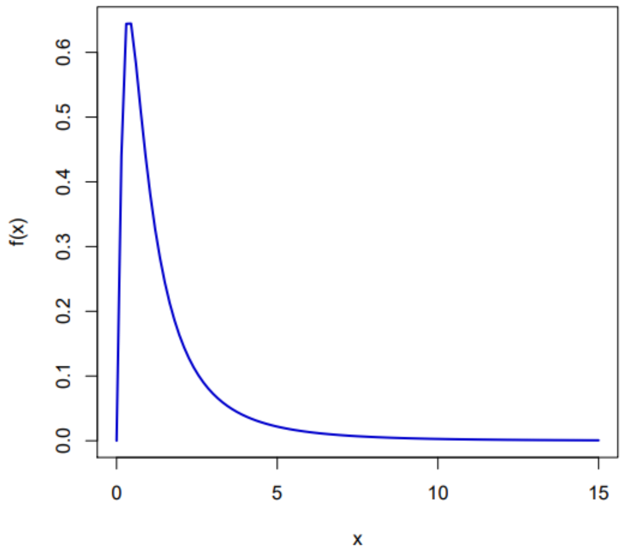
Definição 1.15. Seja $X \backsim N(\mu, \sigma^2)$. Se $Y = e^X$, então a v.a Y tem distribuição lognormal com parâmetros μ e σ^2. Reciprocamente, se Y tem distribuição lognormal, então $X = \log Y$ tem distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. A função densidade de probabilidade de uma v.a lognormal é dada pela seguinte expressão,

$$f(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], \; y > 0 \tag{1.25}$$

sendo que $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$.

Dados que seguem de uma distribuição lognormal podem ser examinados seguindo o modelo normal, usando-se o logaritmo dos dados na base e, em vez dos dados originais. Logo a fdp de Y é uma lognormal com parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma = 1$. A Figura 1.3 mostra o gráfico de uma fdp lognormal com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

Figura 1.3: Gráfico de uma função densidade log-normal padronizada com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.



Propriedade 1.4.1. *Se X segue uma distribuição normal padronizada então, $Y = e^X$ segue uma distribuição lognormal com parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma = 1$. Então teremos:*

$$F_y(y) = P(Y \leqslant y) = P(e^x \leqslant y) = P(X \leqslant \log y) = \int_{-\infty}^{\log y} f_x(x)\; dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\log y} e^{\frac{-x^2}{2}} dx.$$

Utilizaremos agora um importante resultado do cálculo para mudança de variável,

$$\int_a^b f(x)\; dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)\; dt, \; com\; g(c) = a \; e \; g(d) = b.$$

Vamos considerar $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$, *e* $g(t) = \log t$. *Sabemos que*

$$\int_{g(0)}^{g(y)} f(x)\ dx = \int_0^y f(g(t))g'(t)\ dt.$$

Temos que $g(0) = -\infty$ *e* $g(y) = \log y$, *logo*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\log y} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y \frac{1}{t} e^{\frac{-(\log t)^2}{2}} dt = f_y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(\log y)^2}{2}}.$$

1.4.1 Valor Esperado

O Valor Esperado de da v.a Y é dada por

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dy, \tag{1.26}$$

e fazendo uma mudança de variável, temos: $t = \log\ y \Rightarrow dt = \frac{1}{y}dy$. Se $y = 0 \Rightarrow t = -\infty$. Se $y = \infty \Rightarrow t = \infty$. Observe que $y = e^t$. Então teremos:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^t exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} + t\right] dt \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left[-\frac{t^2 - 2t\mu + \mu^2 - 2\sigma^2 t}{2\sigma^2}\right] dt \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left[-\frac{t^2 - 2t(\mu+\sigma^2) + \mu^2}{2\sigma^2}\right] dt \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left[-\frac{t^2 - 2t(\mu+\sigma^2)}{2\sigma^2}\right] exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) dt \\
&= exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left[-\frac{t^2 - 2t(\mu+\sigma^2) + (\mu+\sigma^2)^2 - (\mu+\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right] dt \\
&= exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-\frac{[t-(\mu+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right\} exp\left[\frac{(\mu+\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right] dt \\
&= exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \frac{(\mu+\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-\frac{[t-(\mu+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right\} dt\right]
\end{aligned}$$

Porém, o termo entre os colchetes mais externos é a integral de uma densidade normal com média $\lambda = (\mu + \sigma^2)$ e variância σ^2, logo essa integral é igual a 1. Assim teremos:

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}+\frac{(\mu+\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right)\\
&= exp\left(\frac{-\mu^2+\mu^2+2\mu\sigma^2+\sigma^4}{2\sigma^2}\right)\\
&= exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right).
\end{aligned}
$$

1.4.2 Variância

De maneira análoga, vamos calcular $E(Y^2)$ usando a mesma tranformação. Então teremos:

$$E(Y^2)=\int_0^\infty y^2\frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}}exp\left[-\frac{(\log y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dy,$$

e fazendo uma mudança de variável, temos: $t=\log\ y\Rightarrow dt=\frac{1}{y}dy$. Se $y=0\Rightarrow t=-\infty$. Se $y=\infty\Rightarrow t=\infty$. Observe que $y=e^t\Rightarrow y^2=e^{2t}$ Então teremos:

$$
\begin{aligned}
E(Y^2) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{2t}exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dt=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}+2t\right]dt\\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}exp\left[-\frac{t^2-2t\mu+\mu^2-4\sigma^2t}{2\sigma^2}\right]dt\\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}exp\left[-\frac{t^2-2t(\mu+2\sigma^2)+\mu^2}{2\sigma^2}\right]dt\\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}exp\left[-\frac{t^2-2t(\mu+2\sigma^2)}{2\sigma^2}\right]exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)dt\\
&= exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}exp\left[-\frac{t^2-2t(\mu+2\sigma^2)+(\mu+2\sigma^2)^2-(\mu+2\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right]dt\\
&= exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}exp\left\{-\frac{[t-(\mu+2\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right\}exp\left[\frac{(\mu+2\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right]dt\\
&= exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}+\frac{(\mu+2\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right)\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}exp\left\{-\frac{[t-(\mu+2\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right\}dt\right]
\end{aligned}
$$

Assim como no valor esperado, o termo entre os colchetes mais externo é igual a 1, por se tratar de uma integral de densidade normal com média $\gamma=(\mu+2\sigma^2)$, e variância

σ^2. Assim, teremos:

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}+\frac{(\mu+2\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= exp\left(\frac{-\mu^2+\mu^2+4\mu\sigma^2+4\sigma^4}{2\sigma^2}\right) \\ &= exp\left(2\mu+2\sigma^2\right). \end{aligned}$$

Usaremos a Equação (1.14) para determinar $Var(Y)$. Assim temos:

$$\begin{aligned} Var(Y) &= E(Y^2)-[E(Y)]^2 \\ &= exp\left(2\mu+2\sigma^2\right)-\left[exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)\right]^2 \\ &= exp\left(2\mu+2\sigma^2\right)-exp\left[2\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)\right] \\ &= exp\left(2\mu+2\sigma^2\right)-exp\left(2\mu+\sigma^2\right) \\ &= exp\left(2\mu+\sigma^2\right)\left[\frac{exp(2\mu+2\sigma^2)}{exp(2\mu+\sigma^2)}-1\right] \\ &= exp\left(2\mu+\sigma^2\right)\left[exp(2\mu+2\sigma^2-2\mu-\sigma^2)-1\right] \\ &= exp\left(2\mu+\sigma^2\right)\left[exp\ \sigma^2-1\right]. \end{aligned}$$

1.5 Processo Estocástico

Anteriormente, definimos *variável aleatória* como uma função real X que associa a cada elemento $\omega \in \Omega$, a um número $X(\omega) \in \mathbb{R}$. Podemos estender esse conceito de variável aleatória para o caso no qual cada $\omega \in \Omega$ é associado a um ponto no espaço $\mathbb{R}^n$. A função X que associa pontos de Ω em $\mathbb{R}^n$, é chamada de *vetor aleatório*.

Definição 1.16. Fixado um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e uma família de índices T, que é um conjunto de números inteiros não-negativos, um processo estocástico $\{X_t; t \in T\}$ é um coleção de variáveis aleatórias $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^n$) para cada $t \in T$. Se $X := \{X(t,\omega); t \in T, \omega \in \Omega\}$ é um processo estocástico, então X é uma função de dois parâmetros: para $t \in T$ fixo, $X(t,\cdot)$ é uma variável aleatória; para ω fixo, $X(\cdot,t)$ é uma função do tempo, que é denominada trajetória do processo estocástico.

Em resumo, um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indexados por um conjunto T. Essa coleção serve para representar a evolução aleatória de um sistema ao longo do tempo. De maneira geral, as variáveis aleatórias que constituem um processo estocástico não são independentes. As diferentes maneiras que se pode tomar essas dependências é o que difere um processo do outro.

O processo estocástico pode ser caracterizado como um modelo matemático para a ocorrência em cada $t \in T$, de um fenômeno aleatório e essa aleatoriedade é capturada através de um espaço de probabilidade. Se considerarmos $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^n$), com uma $\sigma-$álgebra de borel $\mathcal{B}$, uma variável t que representa o tempo e T um conjunto enumerável, dizemos que o processo é de tempo discreto. Assim, X_t representa o *estado* do sistema no instante t, de modo que seus únicos possíveis valores são $0, 1, ..., M$. O sistema é caracterizado por pontos determinados do tempo, como $t = 0, 1, 2, ...$ Assim, pode-se dizer que X_t é definido em um espaço denominado de *espaço de estado*. Quando T é um intervalo de $\mathbb{R}$, limitado ou não, dizemos que o processo é de tempo contínuo. Em relação ao estado, o processo estocástico também pode ser classificado como discreto ou contínuo. No estado discreto, X_t é definido em um conjunto enumerável ou finito. O caso em que o estado é contínuo, tem-se o oposto do discreto.

Existe um tipo específico de processo estocástico, que são chamados *processos de Markov ou processos markovianos,* onde seu estado futuro depende apenas do seu estado atual e os estados passados não influenciam no estado futuro.

1.5.1 Processo de Markov

Um *processo de Markov ou processo markoviano*, é um tipo de processo estocástico no qual possui a propriedade de que as probabilidades que envolvem a evolução do processo no futuro, dependem somente do estado atual do processo e consequentemente, são independentes de eventos no passado. De acordo com Hull [14], pode-se deduzir que os preços das ações seguem um *processo markoviano*. Imagine a seguinte situação: o preço de uma ação hoje é $R\$$ 150. Se o preço dessa ação segue um *processo markoviano*, as previsões futuras sobre aumento ou queda no preço dessa ação não devem ser afetadas pelo preço da semana passada, mês passado ou ano passado. A informação que importa é que o preço é $R\$$ 150 hoje. A estatística no histórico do preço da ação nesse caso, tem um papel importante no sentido de ser útil para determinar características do processo estocástico (volatilidade, por exemplo) junto ao preço da ação. Como as previsões sobre o futuro são incertas, segue que elas devem ser expressas em forma de distribuições de probabilidade. Dessa maneira, a propriedade markoviana indica que a distribuição de probabilidade do preço de uma ação no futuro não depende do caminho seguido pelo preço dessa ação no passado. De maneira formal, temos a seguinte definição:

Definição 1.17. Um processo estocástico é dito ser um *processo markoviano* se

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X(t_{k+1}) \leq x_{k+1}|X(t_k) &= x_k, X(t_{k-1}) = x_{k-1}, ..., X(t_0) = x_0\} \\ &= \mathbb{P}\{X(t_{k+1}) \leq x_{k+1}|X(t_k) = x_k\} \end{aligned} \tag{1.27}$$

para $t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_k \leq t_{k+1} = 0, 1, ...$ e toda sequência $k_0, k_1, ..., k_{t-1}, k_t, k_{t+1}$.

A Expressão (1.27) determina que a probabilidade condicional de qualquer evento futuro, dado qualquer evento passado e estado presente $X(t_k) = x_k$, não depende do evento passado e depende apenas do estado presente. O *processo markoviano* é também denominado de *memoryless process* (processo sem memória), já que o passado é desprezado. As probabilidades condicionais $\mathbb{P}\{X(t_{k+1}) = x_{k+1}|X(t_k) = x_k\}$ são chamadas *probabilidade de transição* e determinam a probabilidade do estado $X(t_{k+1})$ ser x_{k+1} no instante t_{k+1} dado que o estado $X(t_k)$ é x_k, no instante t_k.

1.5.2 Cadeias de Markov em Tempo Discreto

Definição 1.18. Um *processo markoviano* é chamado *cadeia de markov*, quando as variáveis aleatórias $X(t)$ estão definidas em um espaço de estado discreto. Quando o tempo é discreto, a *cadeia de Markov* é denominada *cadeia de Markov em tempo discreto* e nesse caso, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X(k+1) = x_{k+1}|X(k) &= x_k, X(k-1) = x_{k-1}, ..., X(0) = x_0\} \\ &= \mathbb{P}\{X(k+1) = x_{k+1}|X(k) = x_k\}, \end{aligned} \tag{1.28}$$

para toda sequência $0, 1, ..., k-1, k, k+1$.

As *probabilidades de transição* expressas em (1.28), representam portanto a probabilidade do estado $X(k+1)$ ser x_{k+1} no tempo $k+1$ dado que o estado $X(k)$ é x_k no tempo k. Se para cada X_{k+1}, x_k tem-se

$$\mathbb{P}\{X(k+1) = x_{k+1}|X(k) = x_k\} = \mathbb{P}\{X(1) = x_1|X(0) = x_0\}, \tag{1.29}$$

para toda sequência $1, 2, ..., k-1, k, k+1$, então, as *probabilidades de transição* são chamadas de *estacionárias* e isso implica que as *probabilidades de transição* não mudam em relação ao tempo. De acordo com a Expressão (1.29), as *probabilidades de transição* são denominadas *probabilidades de transição de passo 1* e sua existência implica que para cada X_{k+n} e x_k e n $(n = 0, 1, 2, ...)$, tem-se

$$\mathbb{P}\{X(k+n) = x_{k+n}|X(k) = x_k\} = \mathbb{P}\{X(n) = x_n|X(0) = x_0\}, \tag{1.30}$$

para toda sequência $1, 2, ..., k-1, k, k+1$.
As probabilidades condicionais expressas em (1.30), são chamadas de *probabilidades de transição de passo n*. Simplificando a notação, chamando X_{k+1} ou X_{k+n} de j e X_k de i, pode-se definir:

$$p_{ij} = \mathbb{P}\{X(k+1) = j|X(k) = i\}$$

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}\{X(k+n) = j|X(k) = i.\} \tag{1.31}$$

Pelo fato de $p_{ij}^{(n)}$ serem probabilidades condicionais, estas precisam ser não negativas e como o processo precisa realizar uma transição em algum estado, a Expressão (1.31) precisa satisfazer as seguintes condições:

- $p_{ij}^{(n)} \geq 0, \ \forall (i,j); n = 0, 1, 2, ...$
- $\displaystyle\sum_{j=0}^{M} p_{ij}^{(n)} = 1, \forall i; n = 0, 1, 2, ...$

Uma forma conveniente de expressar todas as probabilidades de transição de passo n é dado na Tabela 1.1. De maneira equivalente, todas as probabilidades de passo n podem ser expressas pela seguinte matrix $p^(n)$

$$p^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} p_{01}^{(n)} & \cdots & p_{0M}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} p_{11}^{(n)} & \cdots & p_{1M}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M0}^{(n)} p_{M1}^{(n)} & \cdots & p_{MM}^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Tabela 1.1: Tabela das probabilidades de transição de passo n.

Estados	**0**	**1**	**...**	**M**
0	$p_{00}^{(n)}$	$p_{01}^{(n)}$	...	$p_{0M}^{(n)}$
1	$p_{10}^{(n)}$	$p_{11}^{(n)}$	...	$p_{1M}^{(n)}$
.	.	.	...	.
M	$p_{M0}^{(n)}$	$p_{M1}^{(n)}$	...	$p_{MM}^{(n)}$

A matriz $p^{(n)}$ é denominada *matriz de transição de passo n.* Quando em particular, $n = 1$, a matriz é denominada apenas *matriz de transição.*

1.5.3 Cadeias de Markov em Tempo Contínuo

Na seção anterior, o parâmetro t relativo ao tempo era discreto. De acordo com Hillier e Lieberman [12], tal hipótese é adequada em diversas situações, porém, há casos nos quais é necessário o uso de um parâmetro contínuo, o qual o chamaremos de t', em razão da evolução do processo estar sendo observado continuamente ao longo do tempo. Identificamos os estados do sistema como $0, 1, ..., M$. Começando em um instante 0 e permitindo que o parâmetro t' opere continuamente para $t' \geq 0$, a variável aleatória $X(t')$ é o estado do sistema num instante t'. Dessa maneira, $X(t')$ assumirá um dos M valores possíveis ao decorrer de algum intervalo, $0 \leq t' \leq t_1$, logo após assumirá outro valor no próximo intervalo $t_1 \leq t' \leq t_2$ e assim sucessivamente. Esses pontos de trasição $(t_1, t_2, ..)$ são pontos aleatórios no intervalo de tempo, não necessariamente inteiros. Seja agora três pontos no tempo tais que, $t' = r$ $(r \geq 0), t' = s$ $(s > r)$ e $t' = s + t$ $(t > 0)$, onde $t' = r$ é um tempo passado, $t' = s$ é o tempo presente e $t' = s + t$ representa t unidades de tempo no futuro. Considere que o estado do sistema foi observado nos tempos $t' = s$ e $t' = r$. Denotaremos esses estados por $X(s) = i$ e $X(r) = x(r)$, respectivamente. Com base nessas informações, é natural procurar a distribuição de probabilidade do estado do sistema no tempo $t' = s + t$, ou seja,

$$\mathbb{P}\{X(s + t) = j | X(s) = i \text{ e } X(r) = x(r)\},$$

com $j = 0, 1, ..., M$. Porém, essa probabilidade condicional é difícil de se obter. A tarefa se torna viável, caso satisfaça a seguinte condição:

Definição 1.19. Um processo estocástico de tempo contínuo $\{X(t'); t \geq 0\}$ é denominado *cadeia de Markov em tempo contínuo,* se possuir a seguinte propriedade, chamada *propriedade markoviana*

$$\mathbb{P}\{X(t+s) = j | X(s) = i \text{ e } X(r) = x(r)\} = \mathbb{P}\{X(t+s) = j | X(s) = i\},$$

$\forall i, j = 0, 1, ..., M$ e $\forall r \geq 0, s > r$ e $t > 0$.

Observe que $\mathbb{P}\{X(t+s) = j | X(s) = i\}$ é uma *probabilidade de transição,* da mesma forma que as *probabilidades de transição* para as cadeias de Markov em tempo discreto, com a diferença de que o parâmetro t não precisa ser um inteiro. Se essas probabilidades de transição forem independentes, de tal forma que

$$\mathbb{P}\{X(t+s) = j | X(s) = i\} = \mathbb{P}\{X(t) = j | X(0) = i\},$$

$\forall s > 0$, então são chamadas de *probabilidades de transição estacionárias* e representamos essas probabilidades por

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}\{X(t) = j | X(0) = i\},$$

onde $p_{ij}(t)$ é chamada de *função de probabilidade de transição de tempo contínuo* , onde

$$\lim_{t \to 0} p_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} .$$

2 Conceitos de Mercado Financeiro

Nesse capítulo, serão abordados alguns conceitos de finanças que serão utilizados no decorrer dos próximos capítulos. A teoria apresentada nesse tópico está embasada nos trabalhos de Bonotto [3], Hull[14], Selan [26], Hissa [13] e do glossário do site Infomoney[15]. Segundo Selan [26], por definição, *mercado financeiro* é o mecanismo ou ambiente no qual se produz um intercâmbio de ativos financeiros e assim se determinam seus preços. Em outras palavras, é um ambiente onde ocorrem operações de investimento financeiro, tais como compra e venda de diversos ativos financeiros. Podemos dividir o mercado em quatro segmentos específicos: cambial, de crédito, monetário e de capital.

Mercado Cambial: Onde são negociados as trocas de moedas estrangeiras. Tem como característica suprir as necessidades quanto a realização de compra e venda de moeda estrangeira (fechamento de cambio). Como exemplo, podemos citar as importações (necessidade de compra de moeda estrangeira) pelas empresas.

Mercado de Crédito: Ocorre por meio de instituições financeiras, como o objetivo de atender necessidades de pessoas e empresas que precisam de recursos para consumo ou capital de giro, executando operações de curto e médio prazo. Podemos citar como exemplo, empréstimos e financiamentos. O banco Central é um dos grandes responsáveis pelo controle, normatização e fiscalização desse mercado.

Mercado Monetário: Onde ocorrem transações de curto e curtíssimo prazo, na qual envolve as instituições financeiras. Centralizam-se as operações para controle da oferta de moeda e da taxa de juros, objetivando garantir a liquidez na economia.

Mercado de Capital: Ocorrem as operações de compra e venda de títulos e valores mobiliários entre empresas, investimentos e intermediários, vizando o médio e longo prazo para empresas. Permite liquidez aos títulos de emissão de empresas e facilita o processo de capitalização. Como principais títulos, destacam-se as ações, na qual representam o capital da empresa e os empréstimos, mais especificamente, debêntures, bônus de subscrição e *conmercial pappers*.

Vejamos agora alguns conceitos importantes do mercado financeiro.

Ativo(*Asset*): É um termo usado para determinar propriedades ou itens de valor pertencentes a um indivíduo ou empresa. Em particular, para as empresas, representa os itens (caixa, estoque, crédito, imóveis, equipamentos, investimentos, ações dentre outros) que a empresa possui e que estão agregados ao seu patrimônio.

Valor Mobiliário (*Security*): São títulos financeiros. Podem ser de propriedade (ações) ou de crédito (obrigações), nas quais podem ser emitidos por entidades públicas, como o governo ou privadas, como empresas e instituições financeiras. Os principais tipos de valores mobiliários são ações, debêntures, bôbus de subscrição, dentre outros.

Ação (*Share*): Valor mobiliário emitido pelas sociedades anônimas, na qual representam a menor fração do capital dessas empresas, ou seja, é o resultado da divisão do capital em partes iguais. São negociadas em bolsa de valores ou no *mercado de balcão*, quando emitidas por companhias abertas ou assemelhadas. Dessa forma, o investidor torna-se sócio da empresa e sua influência é limitada pelo tipo de ação adquirida e pela quantidade também.

Mercadorias (*Commodities*): Produtos tais como cereais, metais e alimentos que são negociados em uma bolsa de mercadoria ou mercado à vista.

Dividendo (*Dividend*): É o pagamento efetuado pela empresa aos seus acionistas, através da distribuição de parte do lucro líquido da empresa, de acordo com a quantidade de ações possuídas.

Rentabilidade ou Retorno (*Return*): Termo usado para expressar a valorização (ou desvalorização) de um investimento em termos percentuais. Por exemplo, um indivíduo que tenha feito um investimento de $R\$ \ 100,00$, que após um mês vale $R\$ \ 110,00$ registrou uma rentabilidade de 10%.

Risco (*Risky*): Termo utilizado para denominar a variabilidade de retornos relativos a um investimento, ou seja, é o grau de incerteza de um investimento. Sendo assim, quando se afirma que um investimento é de *alto risco*, significa dizer que é muito difícil de prever com precisão a rentabilidade desse investimento. O termo **risco** no mercado financeiro é usado para determinar a probabilidade de perdas ou gamhos abaixo ou acima da média.

Ativo Financeiro (*Financial Asset*): Qualquer título representativo da parte patrimonial ou dívida. Podemos destacar títulos da dívida pública, contratos derivativos, açoes e etc.

Derivativos (*Derivatives*): São instrumentos financeiros nos quais suas características estão vinculadas a outros títulos ou ativos, que lhes servem de referência. Podemos citar opções sobre ações, contratos futuros sobre o dólar comercial ou sobre o índice Bovespa.

Tendência (*Drift*): Termo usado no mercado financeiro para se referir a um movimento consistente e ordenado de preço de um ativo, o que representa uma mudança nas expectativas dos investidores. Pode ser definida como a taxa de retorno esperada para um ativo com relação a uma medida de probabilidade. É representada pela letra μ.

Volatilidade (*Volatility*): Indica o grau médio de variação da cotação de um titulo ou determinado mercado subir ou cair inteiramente em um curto período de tempo. Quanto maior a volatilidade, maior o risco para o investidor. O cálculo deste indicador, considera a dispersão para cima ou para baixo da rentabilidade diária em relação à media de rentabilidade em determinado período (desvio padrão). Representa-se a volatilidade pela letra σ.

Venda à descoberto (*Short - selling*): Consiste na venda de um ativo ou derivativo que não possui, esperando que seu preço caia para comprá-lo novamente e lucrar na transação com a diferença. Considere a seguinte situação: José, através de algumas análises e suposições, percebe que o preço das ações de uma empresa no ramo de bebidas esta muito alto, em $R\$\ 65,00$ e que uma queda nessa cotação é evidente. No entanto, José não possui nenhum papel dessa empresa. Mesmo assim, ele vende 1000 papéis. Sua conta então na corretora ficará com um saldo positivo de $1000 \times R\$\ 65,00 = R\$\ 65.000,00$. Alguns dias após a operação de venda, o preço da ação cai e a nova cotação é $R\$50,00$. José efetua a compra de 1000 papéis e sua conta é debitada em $1000 \times R\$\ 50,00 = R\$\ 50.000,00$. José obtém um lucro de $R\$\ 15.000,00$. O problema dessa operação é caso a previsão não se concretize e o preço aumente em vez de cair. Se o preço da ação alcançasse $R\$\ 75,00$, José armagaria um prejuízo de $R\$\ 10.000,00$. Podemos dizer que não há um limite para o prejuízo em uma venda a descoberto. No entanto, o lucro é limitado pelo valor creditado no momento da venda, sendo que o negociante só obterá o lucro quando o preço do ativo chegar a zero.

Mercado Eficiente (*Efficient market*): Todos os agentes financeiros tem o mesmo conjunto de informações disponíveis ao mesmo tempo, ou seja, as informações e expectativas se refletem corretamente e imediatamente nos preços dos ativos. Essa teoria diz que não existiriam distorções nos preços dos ativos, já que os preços refletem toda as variáveis disponíveis e nenhum investidor seria capaz de obter rendimentos acima do normal, ou seja, acima da média de mercado. De forma geral, através de observações empíricas, podemos dizer que o mercado não age de forma eficiente.

Arbitragem (*Arbitrage*): Define operação que busca oferecer lucros de variações na diferença de preços entre dois ativos ou entre dois mercados, ou seja, é a compra de um valor mobiliário e a sua venda simultânea para obtenção de lucros sem risco. Um mercado livre de arbitragem não possui oportunidades de lucros certos. Um mercado é denominado livre de riscos, se de maneira nenhuma houver oportunidades de arbitragem.

Portifólio ou Carteira : Trata-se de um termo utilizado para descrever um grupo de investimentos que o investidor possui, ou que compõe o fundo de investimentos. A carteira, como também pode ser chamado um portifólio, pode ser composa por exemplo, por ações, títulos de renda fixa ou variável e etc.

Taxa de Juros (*Interest rate*): Em determinada situação, uma taxa de juros define a quantidade de dinheiro que o devedor promete pagar a um credor. A taxa de juros que é aplicada em uma determinada situação, depende do risco do crédito. Esse risco é o de inadimplência por parte de quem tomou emprestado, de modo que os juros e o principal não sejam pagos ao credor como acordado. Quanto maior o risco de crédito, maior a taxa de juros prometida pelo tomador do empréstimo.

Taxa de Juros Livre de Risco (*Risk-free interest rate*): É uma taxa de referência utilizada no mercado financeiro e finanças em geral, para comparar diferentes tipos de investimentos. Pode ser chamada também de *taxa de retorno livre de risco*, ou seja, é a rentabilidade esperada em um investimento que tem risco baixo.

2.1 Mercado de Derivativos

De acordo com Hull [14], nos últimos anos, o mercado de derivativos ganhou uma importância significativa no mundo das finanças. Essa importância se dá pelo fato dos derivativos terem sido criados como uma maneira de proteção aos agentes econômicos, contra os riscos da volatilidade dos preços das ações. Os derivativos podem ser usados também como especulação, arbitragem, alavancagem e hedge. De maneira formal, podemos definir um derivativo como sendo um instrumento financeiro que depende de valores de outras variáveis subjacentes. Podemos citar como um exemplo de derivativo, uma opção sobre ações, pois o valor da opção depende do preço da ação associada. Segundo Bonotto [3], podemos dizer que o mercado de derivativos surgiu para viabilizar a tranferência do risco entre os agentes econômicos e que devido as expectativas criadas e pela lei da oferta e demanda, começa a influenciar na formação futura dos preços das mercadorias e ativos financeiros que são negociáveis nesse tipo de mercado.

As transações que envolvem derivativos não ocorrem apenas em bolsa; muitas acontecem em *mercado de balcão.* Podemos definir *mercado de balcão (over the counter)*, com sendo o ambiente que são negociados títulos e ações que não estão registradas em uma bolsa. No mercado de balcão, não existe um local físico determinado para a ocorrência de operações de compra e venda. Geralmente, essas operações acontecem por telefone ou por sistemas eletrônicos. O mercado de balcão é de suma importância para muitas empresas, pelo fato de existirem uma série de condições que precisam ser preenchidas pelas mesmas para que ações e outros ativos possam ser negocidos na bolsa e no mercado de balcão. As exigências são menores e mais flexíveis, o que atrai mais empresas a participarem desse mercado, se aproximando dos investidores.

De acordo com Selan [26], os derivativos não padronizados são contratos que são negociados no mercado de balcão, ou seja, as especificações como preços, quantidades, cotações e entregas são determinadas pelas partes contratantes e não são intermediadas. Já no caso dos derivativos padronizados, esses consistem em contratos que são negociados em bolsa e são líquidos, já que atendem às especificações do mercado. São contratos intermediados e podem ser repassados a outros em qualquer instante. Podemos classificar os derivativos em três grupos: contrato a termo e futuro, opção e swap.

Contrato a termo: É um acordo para a compra ou venda de um ativo em uma data futura por um preço estabelecido no presente. Esse tipo de contrato é negociado no mercado de balcão;

Contrato futuro: Similarmente ao contrato a termo, o contrato futuro também é um acordo entre duas partes para compra ou venda de um ativo em uma data futura, por um preço fixado no presente. A diferença é que esses contratos são negociados em bolsa e ela especifica as características padronizadas do contrato;

Opção: É um contrato que dá ao titular, o direito (mas não a obrigação) da compra ou venda de um ativo em uma data futura estabelecida e que é adquirido através do pagamento de uma quantia negociada entre o comprador e o vendedor da opção;

Swap: É um conceito utilizado no mercado financeiro para um contrato de troca. Em outras palavras, consiste em um acordo entre ambas as partes trocarem os riscos de uma posição ativa (credora) ou passiva (devedora) no futuro, com critérios preestabelecidos. Swaps são comuns em posições que envolvam taxas de juros, moedas e commodities. Dos três grupos de derivativos, destaca-se as opções, que é onde esse trabalho está concentrado.

2.2 Mercado de Opções

2.2.1 Introdução Histórica

Existe uma história atrelada ao filósofo, matemático e astrônomo da Grécia Antiga Tales de Mileto (624 a.C - 546 a.C), que foi um dos primeiros cientistas da historia ocidental, onde surgira, as primeiras negociações com a "estrutura" de opções. Tales conseguiu prever um eclipse solar através de seus estudos em astronomia, ele também sabia medir a altura de uma pirâmide pelo comprimento da sombra e a altura do sol no horizonte. Foi o primeiro a elaborar teoremas matemáticos, 300 anos antes de Euclides. Porém, era muito censurado devido a sua pobreza, o que para seus contenporâneos da época era prova de que sua ciência não tinha muito valor. Tales através de seus estudos em astronomia, conseguiu prever com um mês de antecedência que uma grande safra de azeitonas estava por vir. Então Tales se direcionou aos donos de prensa de oliva e comprou o *direito* de usar as prensas de oliva para a próxima safra. Resultado: houve uma grande safra de azeitonas e Tales ficou muito rico, pois pagou um *prêmio* para ter o direito de usar as prensas e na maturidade (data de vencimento da opção), exerceu esse direito. Depois ele vendeu a opção para outra pessoa usar a prensa. Então essa foi a primeira operação com "cara" de opção. Quem escreveu essa história foi um grande filósofo da Grécia antiga, chamado Aristóteles (384 a.C - 322 a.C) em sua obra *Política*, um texto composto por oito livros.

De acordo com Selan [26] definimos um contrato de opção como sendo um contrato que concede o direito (mas não a obrigação) da compra ou venda de um ativo em uma data futura, estabelecida mediante o pagamento de um prêmio, uma quantia negociada entre o comprador e o vendedor da opção. Em outras palavras, é um contrato onde uma das parte tem o direito (por exemplo, comprar uma ação por um preço estabelecido nesse contrato), e a outra parte tem a obrigação de vender a ação pelo preço acordado. Por se tratar de um contrato que concede o direito de comprar ou vender uma opção, o titular da opção pode não exercê-lo e deixar que a opção expire. Em contrapartida, o lançador da opção que recebeu um prêmio, não pode deixar de cumprir suas obrigações, caso necessário.

2.2.2 Nomenclatura

Alguns detalhes desse tipo de contrato podem ser destacados. Listaremos alguns termos específicos que são utilizados nesse tipo de mercado. São eles:

i) **Titular da Opção:** É o investidor que compra um contrato de opção, adquirindo o direito de comprar ou vender a ação no futuro, por um preço estabelecido nesse contrato.

ii) **Lançador da Opção:** É a parte que vende o contrato de opção para outro investidor, isto é, a parte que tem a obrigação de vender (no caso de uma opção de compra) ou comprar (no caso de uma opção de venda) a ação no futuro por um preço acordado em contrato.

iii) **Prêmio da Opção:** É o preço pago para adquirir o direito de comprar ou vender a opção no futuro, pelo preço estabelecido no contrato de opção.

iv) **Preço de exercício** K (*strike*): É o preço do ativo subjacente vigente no contrato da opção, isto é, é o valor pago no momento do exercício da opção para se obter o ativo-objeto previsto no contrato.

v) **Preço do ativo-objeto** S (*Spot*): Preço do ativo subjacente no mercado.

vi) **Data de exercício** (maturidade): É a data que cessam os direitos do titular, ou seja, o prazo máximo para que o titular da opção exerça o direito de comprar ou vender o ativo subjacente.

vii) **Opção do tipo "Americana":** Pode ser exercida em qualquer momento, desde o lançamento da opção até a data de expiração.

viii) **Opção do tipo "Européia":** O exercício só pode ser feito na data de vencimento do contrato. Destacamos então as opções européias, onde concetra-se esse trabalho.

ix) **Posição comprada:** Posição na qual o investidor adquire uma opção.

x) **Posição vendida:** Posição na qual o investidor vendeu ou lançou a opção.

2.2.3 Tipos de Opções

Existem dois tipos de opções: opção de compra e opção de venda.

i) **Opção de compra** (*Call*): Dá ao titular o direito (mas não a obrigação) de comprar um ativo em uma data futura, por um preço estabelecido. Para ter esse direito, o adquirinte da opção de compra paga ao detentor da opção, que também é denominado lançador, uma quantia que é chamada de *prêmio* (*premium*): Tal quantia será perdida caso o comprador não exerça a opção até a data estabelecida. Dessa maneira, o adquirinte da opção de compra espera que os preços das ações subam em um futuro próximo, dentro do período estabelecido, para assim aferir lucros. Considere a seguinte situação, apresentada por Hull [14], na qual a chamaremos de *situação* 1: Imagine que um investidor instrui um corretor a comprar um contrato de opção de compra de dezembro sobre a Google, com preço de exercício de \$ 880, 00. O corretor transmitirá essas instruções a um trader (investidor) na CBOE (Chicado Board Options Exchange) e a operação será fechada. O preço de venda é \$ 56, 00, referente ao preço por uma opção de comprar uma ação. Nos Estados Unidos, um contrato de opção é um contrato para comprar ou vender 100 ações. Assim, o investidor deve fazer com que \$ 5.600, 00 sejam transferidos para a bolsa por meio do corretor. A seguir, a bolsa faz com que esse montante seja repassado para a parte no outro lado da transação. O investidor obteve, ao custo de \$ 5.600, 00 o direito de comprar 100 ações da Google por \$ 880, 00 cada. Se o preço da Google não passar de \$ 880, 00 até o 21 de dezembro de 2013, a opção não é exercida e o investidor perde \$ 5.630, 00. Mas se a Google se sair bem e a opção for exercida quando a oferta de compra para a ação for de \$ 1.000, 00 o investidor poderá comprar 100 ações por \$ 880, 00 e imediatamente vendê-las por \$ 1.000, 00, obtendo um lucro de \$ 12.000, 00 ou \$ 6.400, 00 se levarmos em conta o custo inicial das opções.

ii) **Opções de venda** (*Putt*): É o oposto da opção de compra. Dá ao titular o direito (mas não a obrigação) de vender um ativo por um preço estabelecido até o vencimento. Os adquirintes desse tipo de contrato, apostam na queda do preço das ações para aferir lucros. Considerando o mesmo exemplo dado de uma call, nos moldes de um contrato de opção de venda e chamando de agora de *situação* 2, se na maturidade, o preço da ação for menor que $ 880, 00, o comprador exercerá a opção. Suponhamos que o preço da ação seja $ 800, 00 no vencimento. Exercendo a opção, o comprador irá comprar 100 ações por $ 800, 00 cada e sob os termos do contrato da opção de venda, as venderá por $ 880, 00, realizando um ganho de $ 80, 00 por ação, ou seja, $ 8.000, 00. Levando em conta o custo inicial da ação, o lucro líquido do comprador é de $ 24, 00 por ação, ou seja, $ 2.400, 00. Se o preço da ação for maior que $ 880, 00 no vencimento, o comprador não exercerá a opção, pois a opção não terá valor e o comprador perderá $56, 00 por ação, ou seja, $ 5.600, 00.

Observação 2.1. A principal diferença entre opções e contratos futuro e a termo é que, como visto anteriormente, a opção dá ao titular o direito de compra ou venda, mas não é necessário exercer esse direito. Já em contratos futuro e a termo, o titular obrigatoriamente tem que comprar ou vender o ativo subjacente. Firmar um contrato futuro ou a termo tem custo zero. Por outro lado, existe um custo para adquirir uma opção, e esse custo é o prêmio.

Podemos destacar os principais agentes que atuam no mercado de opções. São eles: *Compradores de opções de compra*, *vendedores de opções de compra*, *compradores de opção de venda* e *vendedores de opções de venda*. Na situação 1, o investidor assume a posição comprada na opção e o trader da CBOE assume a posição vendida (*short*). Analogamente, na situação 2, o investidor adota uma posição comprada, só que agora a posição é referente a uma opção de venda e o trader da CBOE assume uma posição de venda referente a uma opção de venda. Na maioria das vezes, é útil denotar uma opção européia em relação ao seu resultado para o comprador da opção. Dessa meneira, o custo inicial da opção não é incluído no cálculo da opção. Na Figura 2.1, destacamos o lucro e a perda em ambas as partes , comprada e vendida em uma opção de compra.

Figura 2.1: Ganhos e perdas em posições sobre opções

TITULAR DE UMA OPÇÃO		LANÇADOR DE UMA OPÇÃO	
GANHA	PERDE	GANHA	PERDE
Se exercer o direito no vencimento, ganha a diferença entre o preço de mercado e o preço de exercício, menos o valor do prêmio pago pelo direiro (ganho limitado).	Perde no máximo o valor pago pelo direito, o prêmio (perda limitada).	Recomprando a opção de compra por um preço inferior do que recebido na venda, ou esperando que o direito não seja exercido na maturidade, lucrando o prêmio.	O lançador de uma opção de compra assume a possibilidade de vender a ação ao titular da opção (troca um ganho limitado por uma perda limitada), assume o risco de perda limitada. É um especulador.

Seja K o preço de exercíco e S_T o preço final do ativo subjacente, o resultado de uma posição comprada em uma opção de compra europeia é dada por

$$\max(S_T - K, 0). \tag{2.1}$$

Isso indica que a opção será exercida se $S_T > K$ e não será exercida se $S_T \leq K$. Já o resultado para o titular da posição vendida na opção de compra é

$$\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0). \tag{2.2}$$

O resultado para o titular de uma posição comprada em uma opção de venda é

$$\max(K - S_T, 0), \tag{2.3}$$

e o resultado para o titular de uma posição vendida em uma opção de venda é

$$\max(K - S_T, 0) = \min(S_T - K, 0). \tag{2.4}$$

De acordo com Hissa [13], as opções têm aspectos diferentes de acordo com a sua posição em relação ao preço da ação. As opções podem ser ditas *dentro do dinheiro* (*in the money*), *no dinheiro* (*at the money*) ou *fora do dinheiro* (*out the money*). Se S_T é o preço da ação e K o preço de exercicio, então temos as seguintes situações referentes a uma opção de compra (*call*) ou venda (*put*):

- **Call:** Uma opção de compra está *dentro do dinheiro (in the money)*, se $S_T > K$, *no dinheiro (at the money)*, se $S_T = K$ e *fora do dinheiro (out the money)*, quando $S_T < K$.

- **Put:** Uma opção de venda está *dentro do dinheiro (in the money)*, quando $S_T < K$, *no dinheiro (at the money)*, quando $S_T = K$ e *fora do dinheiro (out the money)*, quando $S_T > K$. Note que uma opção será exercida apenas quando estiver dentro do dinheiro.

2.2.4 Componentes do Preço da Opção

Como visto anteriormente, o preço de uma opção é chamado de *prêmio*. Esse *prêmio* é constituído de dois valores que são chamados de *valor instrínseco (ou verdadeiro)* e *valor extrínseco (ou de expectativa)*. O primeiro diz respeito a parte do prêmio que está *dentro do dinheiro*, isto é, que fica entre o preço da ação e o preço de exercício. Já o segundo, é uma parte do *prêmio* que está além do valor instrínseco e também além do preço da ação. Uma opção pode ter apenas um desses valores ou uma combinação dos dois, isto é

$$O_c = V_{ic} + V_{ec}$$

$$O_p = V_{ip} + V_{ep},$$

onde O_c representa uma opção de compra européia e O_p representa uma opção de venda européia e V_{ic} e V_{ip} representam os valores intrínsecos de um prêmio de uma call e uma put, respectivamente.

Definição 2.1. Para uma *opção de compra (call)*, o valor intrínseco é a diferença entre o preço do ativo subjacente (*spot*) e o preço de exercício (*strike*). Para uma *opção de venda (put),* o valor instrínseco é a diferença entre o *strike* e o *spot* e assim temos respectivamente,

$$V_{ic} = \max(S_T - e^{-r(T-t)}K, 0) \tag{2.5}$$

$$V_{ip} = \max(e^{-r(T-t)}K - S_T, 0), \tag{2.6}$$

onde S_T representa o preço do ativo subjacente no tempo T, r é a taxa de juros livre de risco e o termo $e^{-r(T-t)}K$ representa o valor presente.

Exemplo 1. Considere uma opção de compra de $PETRH44$ (opção de compra da petrobras PN para agosto, com preço de exercício de $R\$ \ 44,00$). Essa opção possui $R\$ \ 2,00$ de valor intrínseco se a $PETR4$ estiver cotada a $R\$ \ 46,00$. Vale destacar que somente as opções dentro do dinheiro tem valor intrínseco, pois para as opções fora do dinheiro, o cálculo do valor intrínseco resultaria em um valor negativo.

Exemplo 2. Considerando a $PETR4$ (Petrobras PN) a $R\$$ 40, 00, a opção de compra de preço de exercício de $R\$$ 38, 00 teria $R\$$ 2, 00 de valor intrínseco, enquanto a opção de preço de exercício de $R\$$ 44, 00 não teria valor intrínseco, pois $40 - 44 = -4$, e não existe valor instrínseco negativo, como visto na Equação (2.5). Portanto, se a opção é fora do dinheiro, isto é, possui um *strike* K acima do *Spot* S_T, ela não possui valor intrínseco.

Definição 2.2. O valor extrínseco de uma opção de compra é calculado como sendo a diferença entre o preço da opção (prêmio) pelo valor intrínseco. Da mesma forma para uma opção de venda, o valor extrínseco será a difrença entre o prêmio pela valor instrínseco, isto é

$$V_{ec} = c - V_{ic}$$

$$V_{ep} = p - V_{ip},$$

onde c e p representam o prêmio de uma call e uma put, respectivamente.

O valor extrínseco é caracterizado por ser o valor da opção preenchido pela expectativa de alta do mercado e pelo tempo que ainda falta para o vencimento. Na maturidade, as opções não possuem mais valor extrínseco. Pode-se dizer que o valor extrínseco é a parte mais importante do prêmio das opções, pois ele é afetado diretamente pela volatilidade da ação, pelas expectativas do mercado e pelo tempo decorrido.

Exemplo 3. Se uma opção call de preço de exercício de $R\$$ 38, 00 com a ação cotada a $R\$$ 40, 00 tiver um prêmio de $R\$$ 2, 50, por exemplo, $R\$$ 0, 50 será o valor extrínseco, pois é a parte do prêmio além do valor intrínseco, que é de $R\$$ 2, 00. Quanto as opções fora do dinheiro, como não possuem valor intrínseco, todo seu valor consiste em valor extrínseco.

2.2.5 Fatores que Influenciam o Preço das Opções

Existem cinco fatores que afetam o preço de uma opção: preço do ativo-objeto (ação subjacente , ou *Spot*), o preço de exercício (*Strike*) da opção, o tempo que resta até a maturidade, a volatilidade e a taxa de juros. Pode-se destacar como fatores que influenciam positivamente o preço de uma opção: o preço do ativo-objeto, volatilidade e taxa de juros. Por outro lado, pode-se destacar como fatores que influenciam negativamente o preço de uma opção: o tempo e o preço de exercício (*Strike*). Para entender melhor como cada fator influencia no apreçamento das opções, vamos analizar cada um separadamente.

Preço da ação: Apesar de as opções serem influenciadas diretamente pelo preço da ação, existem outros fatores que fazem com que essa influência seja maior ou menor, como é o caso da volatilidade, o tempo de exercício e a sua posição em relação ao preço da ação ("in the money", "at the money" ou "out the money "). Em princípio, se a ação sobe, a opção sobe e se a ação cai, a opção também cai. Porém, quando se trata de mercado financeiro, vários outros aspectos podem modificar esse quadro. A situação em que a ação não sobe de preço, faz com que a opção perca valor ao longo do tempo. A parte do preço da opção que é afetada é o valor extrínseco, que é perdida a cada dia que passa sem a ação subir. Dessa forma, basta que a ação não suba para que as opções percam valor com a passagem do tempo. Quanto mais "fora do dinheiro "(out the money) for uma opção, menos o preço da ação influenciará no preço da opção. Quanto mais "dentro do dinheiro"(in the money) for uma opção, maior será a influência do preço da ação no preço da opção. Em situações onde a volatilidade está em alta, significa que o preço da ação pouco vai influenciar no preço da opção. Como são cinco os fatores que influenciam no valor do prêmio, em situações na qual um desses aumenta expressivamente, então esse fator comparado aos outros, passa a ter mais importância, como é o caso da volatilidade. Já no caso de um mercado menos volátil, o preço da ação tende a influenciar o preço da opção. A alta volatilidade está relacionanda a um risco maior, afetando o preço das opções, que sobem como forma de compensar esse risco. Dessa maneira, o lançamento de opções se torna perigoso (isso ocorre independentemente da alta ou queda da ação). É importante entender que quando uma ação está em alta ou em queda, a influência do preço dessa ação na opção, passa a ser o fator mais importante em questão, enquanto os outros influenciam bem menos, nesse caso.

Volatilidade: É uma medida associada à incerteza em relação aos movimentos do preço de uma ação no futuro. Quanto maior a volatilidade, maior a probabilidade dessa ação "subir" ou "despencar." A volatilidade interfere diretamente no preço das opções, pois quanto mais volátil for uma ação, maior será o valor extrínseco da opção e assim implicando em um prêmio maior. Note que esse é apenas um dos fatores e devemos também levar em conta a posição do preço de exercício em relação ao preço da ação e o tempo até a maturidade. Porém, de forma geral, a volatilidade da ação aumenta o valor extrínseco das opções. A volatildiade pode ser classificada em histórica ou implícita. A primeira é calculada pelo desvio padrão dos movimentos no preço da ação e calculada em períodos curtos e recentes, quase sempre diários. Já o cálculo da volatilidade implícita, leva em conta o prêmio da opção mais líquida do mercado e a partir daí, se obtem o nível de volatilidade implícita do preço de mercado da opção que está sendo analisada. No geral, a volatilidade implícita é o desvio padrão que torna o preço da opção obtido pelo modelo de *Black-Scholes* igual ao prêmio da opção negociada pelo mercado. A volatilidade implícita é comparada a que o investidor considera adequada e assim possa usá-la como uma orientação para a negociação da opção.

Taxas de Juros: Sua influência é muito pequena quando as taxas de juros estão em níveis considerados normais ou quando estão em baixa. Porém, o impacto produzido pela alta nas taxas de juros da economia é que o retorno esperado exigido pelos investidores aumenta. Além do mais, o valor presente de qualquer fluxo de caixa futuro recebido pelo titular da opção diminui. O efeito desses dois fatores é aumentar os valor das *call's* e diminuir os valores das *put's*. Na prática, o aumento das taxas de juros pode influenciar negativamente o mercado de ações e levar a uma redução no preço das opções. De qualquer maneira, esse fator não afeta tanto se as taxas de juros do país permanecerem em níveis normais e com variações inexpressivas.

Tempo: Normalmente, as opções perdem algum valor (parte do prêmio que é o valor extrínseco) com a passagem do tempo. Pode-se dizer que quanto menos tempo faltar para o vencimento da opção, mais a passagem do tempo irá influenciar negativamente essa opção. Por outro lado, quanto maior foi o tempo, maior será o prêmio dessa opção, já que aumentam as possibilidades para que ela seja exercida. A volatilidade alta é um fator que pode compensar o efeito do tempo e assim as opções permanecem com valor extrínseco alto, mesmo estando próximas do vencimento. Em geral, as opções que mais perdem valor em centavos são as ditas “no dinheiro”(at the money), pois são justamente as que tem mais valor extrínseco e essa perda só acontece no valor extrínseco. Assim, as opções ditas “dentro do dinheiro”(in the money) são as que perdem pouco valor com a passagem do tempo, tanto em centavos, quanto em termos proporcionais ao prêmio. No caso das opções “fora do dinheiro” (out the money), tem pouco valor extrínseco, que é todo o seu valor, já que não possuem valor intrínseco por estarem acima do preço da ação.

Dessa forma, perdem menos centavos pela passagem do tempo comparadas com as opções "no dinheiro" (at the money). Porém, como elas valem pouco, são as que percentualmente perdem mais valor pela passagem do tempo.

Preço de exercício: Sua influência é direta e objetiva. Quanto mais "dentro do dinheiro" (in the money) for esse preço de exercício, menos ela vai custar, independetemente de o premio da opção consistir em valor intrínseco ou extrínseco. Note que o preço de exercício é sempre fixo (a não ser quando existe distribuição de dividendos). Porém a distância do preço da ação e o preço de exercício não. Conforme o caminho pelo qual o preço da ação percorre, o preço de exercício pode se aproximar ou ficar mais distante do preço da ação.

2.3 Tipos de Investidores no Mercado de Opções

Como visto anteriormente, os mercados de maneira geral apresentam oscilações de preços. O risco é caracterizado por incertezas e pela volatilidade. Uma maneira de diminuir esses riscos é o lançamento no presente, de contratos com compromissos futuros, onde os preços são acordados de forma a se tornar interessantes para ambas as partes (compra e venda). Segundo Selan [26], existem três tipos de *traders* atuantes no mercado de derivativos: hedgers, especuladores e arbitradores. Os hedgers usam derivativos para diminuir os riscos enfrentados por movimentações futuras de uma variável de mercado, ou seja, tem o papel de desenvolver proteção frente aos riscos causados pelas flutuações dos preços das ações. Na maioria das vezes, os hedgers se colocam em uma posição contrária ao mercado à vista. Os especuladores utilizam derivativos para arriscar em qual direção uma variável de mercado deve seguir no futuro, ou seja, assumem os riscos de variações de preços. Sua atuação consiste em comprar, vender e lucrar com a diferença entre os preços de compra e venda. E por último, os arbitradores buscam distorções de preços entre dois ou mais mercados para aferir lucros. Os arbitradores operam em um nível muito baixo de risco. Sua estratégia é a compra em um mercado onde o preço está mais barato e a venda em um mercado que está mais caro e assim lucrar com a diferença sem risco, pois nesse caso, sabe-se por quanto irá compra e por quanto irá vender. Nas próximas seções, destacam-se as estratégias de cada um desses traders usando opções.

2.3.1 Diferenças entre Estratégias de Investimento / Investidores

Destacamos abaixo as principais diferenças entre os estratégias de investimentos do mercado de opções, no que diz repeito à segurança, liquidez e atuação.

Segurança: O especulador é considerado um investidor de risco (agressivo), ou seja, um investidor que assume o risco da flutuação dos preços das ações no mercado. Por outro lado, o hedger é considerado um investidor conservador, o mais seguro, já que sua proposta é reduzir os riscos futuros atrelados às ações. O arbitrador também é considerado um investidor de segurança, pois ele se aproveita das imperfeições momentâneas causadas por distorções de preços entre mercados.

Aplicação: O hedger tem atuação frequente nas commodities, índice e câmbio, pois são mercados de bastante incerteza. As commodities por exemplo, sofrem pressões internacionais a respeito de preços de venda, além de sofrerem com as aspectos naturais que afetam em seus preços. O especulador atua principalmente no mercado de ações e nesse caso, é importante que não se aplique um montante que comprometa a subsistência, pois o risco de perda é elevado. O arbitrador, como já visto, atua em diferentes mercados, mas é necessário que o capital alocado seja maior para que assim se obtenha um lucro significativo. Por esse motivo, a especulação é utilizada apenas por grandes instituições e por investidores experientes.

Liquidez de Operações: O hedge tem uma baixa liquidez, pois exige prazos mais longos para aberturas e fechamento de operações. Diferentemente da arbitragem e especulação, que a liquidez é maior devido a rapidez das operações. Vale destacar também que o fato de os especuladores abrirem e fecharem suas posições a todo instante, isso faz com que a quantidade de negociações a curto prazo aumente, trazendo liquidez ao mercado, exercendo um papel fundamental de injeção de capital no mercado. De toda forma, saber utilizar essas três estrátégias é a principal diferença entre fracasso e sucesso no mercado de opções. Essas estratégias fazem com que o investidor gerencie riscos e viabilize um possível lucro.

2.3.2 Estratégia de Hedge em Opções

Como visto em seções anteriores, o mercado de opções funciona como uma espécie de seguro, pois fornece ao investidor proteção em um cenário de oscilação, atrelado ao mercado de renda variável. As opções tem por características, estabelecer um preço de compra e venda de ativos no futuro, mesmo que o mercado esteja precificando esse ativo a um valor superior ou inferior ao que foi acordado em um contrato de opção. Considere duas situações abaixo, referentes à estratégias de hedge.

Situação 1: Suponhamos um investidor que em maio de 2010, possui mil ações de (PETR4). O preço de cada ação é de $R\$ \ 28,00$. O investidor está preocupado com uma possível queda do preço da ação nos próximos dois meses e quer se proteger disso. O investidor poderia comprar dez contratos de opção de venda de julho sobre as ações da empresa, com um preço de exercício de $R\$ \ 27,50$. Isso daria a ele o direito de vender um total de 1.000 ações por um preço de $R\$ \ 27,50$. Se o preço da opção cotada é de $R\$ \ 1,00$, cada contrato de opção custaria $100 \times R\$ \ 1,00 = \$100$ e o custo total da estratégia de hedge seria $10 \times R\$ \ 100,00 = R\$ \ 1.000,00$. A estratégia custa $R\$ \ 1.000,00$, mas garante que cada ação poderá ser vendida por pelo menos $R\$ \ 27,50$ durante a vida da opção. Se o preço de mercado da ação cair abaixo de $R\$ \ 27,50$, as opções serão exercidas de modo que $R\$ \ 27.500,00$ serão realizados para toda a posição. Quando o custo das opções é levado em conta, o montante realizado é de $R\$ \ 26.500,00$. Se o preço de mercado permanece acima de $R\$ \ 27,50$, as opções não serão exercidas e expiram, tendo perdido seu valor. Contudo, nesse caso, o valor da posição sempre fica acima de $R\$ \ 27.500,00$ (ou acima de $R\$ \ 26.500,00$ quando levamos em conta o custo das opções).

Situação 2: Suponhamos que em janeiro de 2019 um investidor tinha mil ações de (VALE3), sem interesse de vendê-las a curto ou médio prazo. Apesar de estarem sendo cotadas no mercado à vista em $R\$ \ 93,00$ cada, em decorrência do desastre ambiental acorrido em Brumadinho - MG, ocorrido naquele ano, o investidor teve medo que a crise desvalorizasse o valor de mercado de suas ações. Para proteger o seu patrimônio, que naquele momento vale $R\$ \ 93.000,00$ $(= 1.000 \times R\$ \ 93,00)$, ele comprou mil contratos de opções de venda VALEV90 a $R\$ \ 1,00$ cada. A estratégia de proteção utilizada nessa situação é a de limitar o prejuízo, ou seja, investiu-se $R\$ \ 1.000,00$ $(= 1.000 \times R\$ \ 1,00)$, para se ter um prejuízo de no máximo $R\$ \ 3.000,00$ no valor do seu patrimônio, caso as ações se desvalorizassem. Se de fato a previsão do investidor se concretiza-se, e as ações de VALE3 despencassem, o investidor que adquiriu as opções de venda VALEV90, garantiu o direito de vender as mil ações de VALE3 à $R\$$ $90,00$ cada, independente do que a aconteça com os preços da ação no mercado à vista. Dessa forma, o hedge nesse caso, limitou o prejuízo a um valor relacionado à sua estratégia de investimento.

Situação 3**:** Um investidor está disposto a investir $R\$$ $10.000,00$ em compras de ações de PETR4, em julho de 2021. Sabendo que cada ação de PETR4 estava cotada a $R\$$ $25,00$ no mercado à vista, esse investidor teria condições de adiquirir quatro lotes com cem ações cada. O problema em questão é que o investidor só teria esse montante na segunda semana de julho. As ações nesse período poderiam se valorizar, o que não seria bom para o investidor. Pensando nessa situação de valorização dos preços das ações, o investidor decide comprar quatrocentos contratos de opções de compra (*call*) de PETRD25, a $R\$$ $1,00$ cada. A estratégia de proteção nesse caso, consiste em investir $R\$$ $400,00$ ($400 \times R\$$ $1,00$), para assegurar o direito de comprar quatrocentas ações de PETR4 até a segunda semana do mês seguinte, quando o investidor já teria o montante para comprar as ações. Caso suas previsões sobre o aumento nos preços das ações de PETR4 de fato se concretizasse, o investidor teria o direito de comprar essas ações à $R\$$ $25,00$ cada, independentemente da sua cotação no mercado à vista, ou seja, o investimento pôde ser limitado a um valor referente ao capital que se queria investir inicialmente.

2.3.3 Estratégia de Especulação em Opções

Basicamente, os especuladores apostam na queda ou na subida do preço de um ativo. Suponha as situações abaixo.

Situação 1**:** Imagine que é outubro e um especulador considera que uma ação provavelmente aumentará de valor durante os próximos dois meses. O preço atual da ação é de $R\$$ $20,00$ e uma opção de compra de dois meses com preço de exercício de $R\$$ $22,50$ é vendida por $R\$$ $1,00$. Supondo que o especulador está disposto a investir $R\$$ $2.000,00$, uma alternativa é comprar 100 ações; a outra, envolve comprar $R\$$ $2.000,00$ opções de compra (ou seja, 20 contratos de opções de compra). Imagine que o palpite do especulador está correto e o preço da ação sobe para $R\$$ $27,00$ até dezembro. A primeira alternativa, a de comprar a ação, rende um lucro de

$$100 \times (R\$ \ 27,00 - R\$20,00) = R\$ \ 700,00.$$

A segunda alternativa, contudo, é mais lucrativa. A opção de compra sobre a ação com preço de exercício de $R\$ \ 22,50$ dá um resultado de $R\$ \ 4,50$, pois permite que algo que vale $R\$ \ 27,00$ seja comprado por $R\$ \ 22,50$. O resultado total das 2.000 opções compradas sob a segunda alternativa é

$$2.000 \times R\$ \ 4,50 = R\$ \ 9.000,00.$$

Subtraindo o custo original das opções, temos um lucro líquido de:

$$R\$ \ 9.000,00 - R\$ \ 2.000,00 = R\$ \ 7.000,00.$$

Logo, a estratégia de opções é dez vezes mais lucrativa do que a compra direta das ações.

Situação 2**:** As opções também dão origem a uma perda potencial maior. Imagine que o preço da ação cai para $R\$ \ 15,00$ até dezembro. A primeira alternativa, a compra da ação, rende uma perda de:

$$100 \times (R\$ \ 20,00 - R\$ \ 15,00) = R\$ \ 500,00.$$

Como as opções de compra expiram sem serem exercidas, a estratégia de opções levaria a uma perda de $R\$ \ 2.000,00$, o montante original pago pelas opções. Assim como os futuros, as opções oferecem uma forma de alavancagem. Para um determinado investimento, o uso de opções amplia as consequências financeiras. Os bons resultados se tornam ótimos , enquanto os maus resultados levam à perda de todo o investimento inicial.

2.3.4 Estratégia de Arbitragem em Opções

A arbitragem visa garatir um lucro de risco zero pelo fechamento simultâneo de transações entre dois ou mais mercados.

Situação 1**:** Considere um contrato de opção de compra VALEI92, sobre ações de VALE3, com vencimento hoje, cuja ação está sendo cotada a $R\$ \ 95,00$, o strike é de $R\$ \ 92,00$ e o contrato de opções é de $R\$ \ 2,00$. Uma estratégia simples de arbitragem, nesse caso, seria adquirir cem contratos de opções de compra, ou seja, pagar um prêmio de $R\$ \ 200,00$ ($100 \times R\$ \ 2,00 = R\$ \ 200,00$), exercer a opção de compra, ou seja, comprar ações de

VALE3 a $R\$ \ 92,00$, e vendê-las no mesmo dia a preço de mercado ($R\$ \ 95,00$). O lucro adquirido pelo investidor com essas estratégia de arbitragem será de $-R\$ \ 200,00$ (prêmio pago pelas opções)$-R\$ \ 9.200,00$ (valor pago pelas ações a preço de exercício) $+R\$ \ 9.500,00$ (venda das ações a preço de mercado) $= R\$ \ 100,00$.

Situação 2: Considere uma ação negociada tanto na *New York Exchange* (w.w.w.nyse.com) quanto na *London Stock Exchange* (w.w.w.stockex.com.uk). Imagine que o preço da ação é de \$ 150,00 em Nova Iorque e £100 em Londres em uma data em que o câmbio é de 1,5300 dólares por libra. Um arbitrador poderia simultaneamente comprar 100 ações em Nova Iorque e vendê-las em Londres para obter um lucro livre de risco de

$$100 \times [(\$ \ 1,53 \times 100) - \$ \ 150,00]$$

ou 300 dólares na ausência de custos de transação. Os custos de transação provavelmente eliminariam o lucro para um pequeno investidor. Contudo, um grande banco de investimentos tem custos de transação baixíssimo tanto na bolsa de valores, quanto no mercado de câmbio. Ele consideraria a oportunidade de arbitragem bastante atraente e tentaria tirar o máximo de vantagens possível dela. Oportunidades de arbitragem como a descrita acima, não tem como durar muito tempo. A medida que os arbitradores compram a ação em Nova Iorque, as forças da oferta e da procura fazem com que o preço do dólar suba. Da mesma forma, a medida que vendem a ação em Londres, o preço em libras esterlinas cai. Rapidamente, os dois preços se tornam equivalentes à taxa de câmbio atual. Na verdade, a simples existência de arbitradores sedentos por lucros, impossibilita o surgimento de uma disparidade de preço significativa em dólares e libras. Generalizando, a partir desse princípio, pode-se dizer que a própria existência de arbitradores significa que na prática, se observam apenas oportunidades mínimas de arbitragem nos preços cotados na maioria dos mercados financeiros.

3 Processo de Wiener e Lema de Itô

Em 1827, o biólogo Robert Brown observou por meio de um microscópio, partículas que se moviam através da água, causando um espécie de movimento irregular das partículas. Após vários estudos e descobertas, esse movimento irregular de partículas foi chamado de *movimento browniano ou processo de Wiener*, com grande aplicação no mercado financeiro. A teoria a respeito dessas aplicações em mercado financeiro foi desenvolvida pelo francês Louis Bachelier[1] em sua tese de doutourado em 1900 (*Teoria da Especulação*), cinco anos antes da publicação do artigo de Albert Einstein, que explicava detalhes de como o movimento que Robert Brown observou era consequência do pólem movido por moléculas de água individuais. Bachelier[1] em sua tese, obteve expressões próximas ao que seria desenvolvido por Einstein cinco anos após a apresenetação de sua tese. A grande diferença é que o trabalho de Bachelier [1] não descrevia um sistema físico, mas sim as flutuações das ações em uma bolsa de valores. O lema de Itô é um resultado desenvolvido pelo matemático japonês Kiyoshi Itô e tem grande aplicação em finanças e equações diferenciais estocásticas. Sua principal aplicação em finanças é a derivação da equação de Black-Sholes para valores de opção, na qual será visto no decorrer deste trabalho. Esse capítulo tem por base os trabalhos de Hull [14] e Bonotto [3].

3.1 Processo de Wiener

Um processo de Wiener é caracterizado como um processo de Markov, ou seja, a distribuição de probabilidade para os valores futuros dependem apenas do valor atual e não dependem de eventos passados. Pode-se afirmar que os incrementos na variável são independentes, ou seja, a variação em um intervalo de tempo não depende da variação em outros intervalos de tempo. As variações do processo tem distribuição normal, onde a variância cresce linearmente em função do tempo. De maneira formal, temos:

Definição 3.1. Fixado um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ e uma família de índices $\mathbb{T}$, que é um conjunto de números reais não-negativos, um processo de Wiener (também chamado de movimento browniano) é um processo estocástico $\{Z_t; t \in \mathbb{T}\}$, que satisfaz as seguintes condições:

1 $\mathbb{P}(z_0 = 0) = 1$ e z_t é contínua para todo $t \in \mathbb{T}$;

2 O processo $\{z_t; t \in \mathbb{T}\}$ tem incrementos estacionários e independentes;

3 Para $0 \leq s < s + t$, o incremento $z_{s+t} - z_s \sim N(0, t)$.

No ítem 2, o termo *incrementos independentes* significa que para cada escolha de números reais não-negativos (intervalos disjuntos do tempo) $0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq ... \leq s_n < t_n < \infty$, o incremento de variáveis aleatórias

$$z_{t_1} - z_{s_1}, z_{t_2} - z_{s_2}, ..., z_{t_n} - z_{s_n}$$

, são independentes em conjunto. O termo *incrementos estacionários*, signfica que para qualquer $0 < s,\ t < \infty$, a distribuição do incremento $z_{s+t} - z_s$ tem a mesma distribuição que $z_t - z_0 = z_t$. Note no ítem 3 que uma variável aleatória $z_t - z_s$ tem distribuição normal com média 0 e variância $(t - s)$, isto é, $z_t - z_s \sim N(0, (t - s))$. Se chamarmos Δz_t, como sendo a mudança durante um período curto de tempo Δt, teremos

$$\Delta z_t = \epsilon\sqrt{\Delta t}, \tag{3.1}$$

onde ϵ tem distribuição normal padrão, ou seja, $\epsilon \sim N(0, 1)$. Dessa maneira, pelo ítem 2, os valores de Δz_t para qualquer dois intervalos curtos de tempo (disjuntos) Δt são independentes. De acordo com a Equação (3.1), Δz_t segue uma distribuição normal com média 0 e variância Δt, isto é, $\Delta z_t \sim N(0, \Delta t)$. O ítem 2 implica que z_t segue um *processo de Markov*. Denota-se por $z_T - z_0$ a mudança no valor de z_t em um período longo de T. Essa mudança é encarada como sendo a soma das mudanças em z_t em N intervalos de duração Δt, tal que

$$N = \frac{T}{\Delta t}.$$

Então, temos

$$z_T - z_0 = \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i\sqrt{\Delta t}, \tag{3.2}$$

onde $\epsilon_i \sim N(0, 1)$, com $i = 1, ..., N$. Sabe-se que todos os ϵ_i são independentes e pela Equação (3.2), $z_T - z_0 \sim N(0, N\Delta T = T)$. Podemos destacar que se Z_t é uma variável que segue um processo de Wiener, com o tempo é medido em anos, então o grau de incerteza a respeito do valor assumido pela v.a em um momento no futuro, como medida pelo seu desvio padrão, aumenta com a raiz quadrada do acréscimo do período futuro analizado.

Observação 3.1. Denotaremos $dx = adt$ para indicar que $\Delta x = a\Delta t$ no limite à medida que $\Delta t \to 0$. Ao referir-nos dz como um processo de Wiener, implicitamente queremos dizer que o processo dz possui as mesmas características citadas acima no limite, sempre que $\Delta t \to 0$.

3.1.1 Processo de Wiener Generalizado

Também conhecido como *movimento aritmético browniano*, é o exemplo mais simples de processo estocástico com incremento de Wiener dz. Em um processo estocástico, a mudança média por unidade de tempo é conhecida por *taxa de deriva* e sua variância por unidade de tempo é chamada de *taxa de variância*. Para um processo de Wiener que estamos construindo até aqui, podemos dizer que esse processo tem taxa de deriva zero e taxa de variância um, onde a taxa de deriva zero diz que o valor esperado de z_t no futuro é igual ao seu valor atual e a taxa de variância um, diz que a variância da mudança de z_t em um intervalo de temo T é igual a T.

Definição 3.2. O processo de Wiener Generalizado para uma variável x é dado por

$$dx = adt + bdz, \tag{3.3}$$

com a e b constantes.

Na Equação (3.3), o termo adt indica que x tem uma taxa de deriva esperada de a por unidade de tempo. Se excluirmos o termo bdz, a Equação (3.3) fica na seguinte forma

$$dx = adt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = a. \tag{3.4}$$

Integrando ambos os membros da ultima igualdade em relação a t na Equação (3.4), temos

$$\frac{dx}{dt} = a \Rightarrow \int_0^t \frac{dx}{dt} dt = \int_0^t adt \Rightarrow x_t = at + x_0,$$

onde x_0 é o valor de x no tempo 0. Em um período de tempo, digamos T, a variável x aumenta na quantidade aT. O termo bdz na Equação (3.3) é considerado a variabilidade do caminho seguido por x e o nível dessa variabilidade é b vezes um processo de Wiener. Como um proceso de Wiener tem taxa de variância de 1, então pelas propriedades da variância temos que b vezes um processo de Wiener tem taxa de variância por unidade de tempo de b^2, isto é,

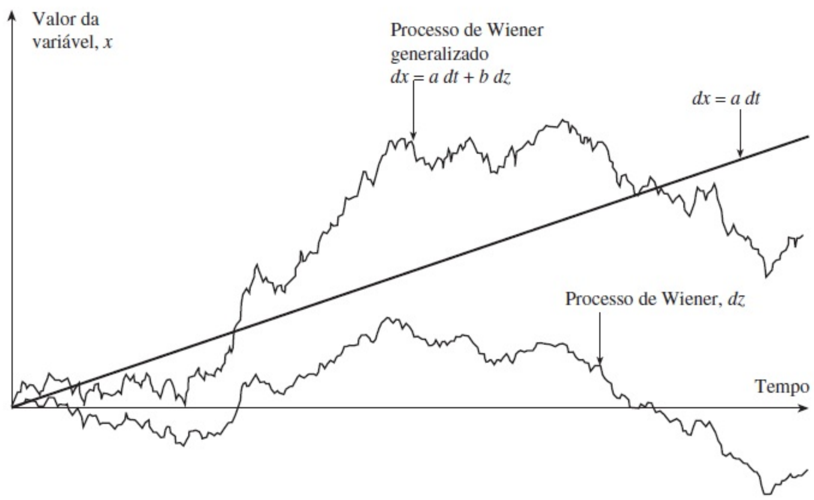
$$\text{Var}(dz) = 1 \Rightarrow \ \text{Var}(bdz) = b^2 Var(dz) = b^2, \text{ onde Var}(dz) = 1.$$

Em um intervalo Δt, a mudança Δx no valor de x é dada pelas Equações (3.1) e (3.3) e temos

$$\Delta x = a\Delta t + b\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

, onde $\epsilon \sim N(0,1)$, o que implica que $\Delta x \sim N(a\Delta t, b^2\Delta t)$. A mudança do valor de x em qualquer intervalo de tempo T também tem distribuição normal, isto é, $\Delta x_T \sim N(aT, b^2T)$. A Figura 3.1 mostra que o processo de Wiener dado pela Expressão (3.3) tem taxa de deriva esperada de a e taxa de variância de b^2.

Figura 3.1: Processo de Wiener generalizado com $a = 0,3$ e $b = 1,5$.



Fonte: Hull (2015).

3.1.2 Processo de Itô

Um processo de Itô é um tipo de processo estocástico. De forma mais específica, é um processo de Wiener generalizado, onde os parâmetros a e b são funções de x e t, isto é, são funções que dependem da variável subjacente e do tempo, respectivamente.

Definição 3.3. Sejam a e b funções de x e t, isto é, $a = (x, t)$ e $b = (x, t)$. Um processo de Itô é representado por

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$$

onde

a) $a(x, t)$ é o drift ou tendência instantânea (taxa de deriva esperada) do processo de Itô;

b) $b^2(x, t)$ é a taxa de variância instantânea do processo;

c) dz é o incremento de Wiener, ou seja, $dz = \epsilon\sqrt{dt}$, com $\epsilon \sim N(0, 1)$.

Propriedade 3.1.1. *O valor esperado e a variância de um processo de Itô são respectivamente $E(dx) = a(x, t)dt$ e $Var(dx) = b^2(x, t)dt$.*

Demonstração. De fato,

a)

$$\begin{aligned} E(dx) &= E[a(x,t)dt + b(x,t)dz] = E[a(x,t)dt] + E[b(x,t)dz] \\ &= a(x,t)E(dt) + b(x,t)E(dz). \end{aligned}$$

Como $dz \sim N(0, 1)$, então $E(dz) = 0$ e assim temos

$$E(dx) = a(x, t)dt$$

b)

$$\begin{aligned} Var(dx) &= E[(dx - E(dx))^2] = E[(dx - a(x,t)dx)^2] \\ &= E[(a(x,t)dt + b(x,t)dz - a(x,t)dx)^2] \\ &= E[b^2(x,t)(dz)^2] = b^2(x,t)E[(dz)^2]. \end{aligned}$$

Note que $dz = \epsilon\sqrt{dt} \Leftrightarrow (dz)^2 = \epsilon^2 dt$ e como $\epsilon \sim N(0, 1)$, pela propriedade da variância, temos

$$E(\epsilon^2) - [E(\epsilon)]^2 = 1,$$

e como $E(\epsilon) = 0$, então $E(\epsilon^2) = 1$. Então, temos

$$\begin{aligned} Var(dx) &= E[b^2(x,t)(dz)^2] = b^2(x,t)E[(dz)^2] = b^2(x,t)E(\epsilon^2 dt) \\ &= b^2(x,t)dtE(\epsilon^2) = b^2(x,t)dt. \end{aligned}$$

□

Um pressuposto importate de um processo de Itô é que o *drift* e a *taxa de variância instantânea* podem mudar com o tempo, isto é, em um intervalo $[t, t + \Delta t]$, a variável mudar de x para $x + \Delta x$, onde

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\epsilon\sqrt{\Delta t}. \tag{3.5}$$

A Equação (3.5) propõe que o *drift* e a *taxa de variância instantânea* de x permaneçam constantes iguais a seus valores no tempo entre t e $t+\Delta t$, ou seja, ela envolve uma pequena aproximação.

3.2 O Processo para o Preço de uma Ação

Intuitivamente, podemos ser induzidos a achar que o preço de uma ação segue um processo de Wiener generalizado, com taxa de deriva e variância constantes. Porém, existem alguns aspectos que fazem com que esse processo não seja o mais adequado para modelar preços de ações ou ativos em geral, sendo eles:

i) A possibilidade da variável assumir valores negativos, já que o componente aleatório é uma variável com distribuição normal, o que não adequa a preços de ativos, pois não existem preços negativos;

ii) Para uma ação que não paga dividendos, a taxa de retorno esperada diminui com o tempo à medida que o valor da ação aumenta. Contudo, sabe-se que os investidores exigem uma taxa de retorno esperada constante (a deriva espera dividida pelo preço da ação) é constante. Por exemplo, se um investidor exige um retorno esperado de 12% ao ano, quando o preço da ação é $R\$ \ 10,00$, então tudo permanecendo nas mesmas condições, ele também esperará um retorno de 12% ao ano quando o papel subir para $R\$ \ 40,00$.

iii) A incerteza sobre a posição em dinheiro em algum momento no futuro, como medida pelo desvio padrão, aumenta com a raiz quadrada da extensão de tempo analisada. Por exemplo, suponha que a posição em dinheiro de uma empresa medida em milhares de dólares segue um processo de Wiener generalizado com taxa de deriva de

20 ao ano e taxa de variância de 900 ao ano. Suponha também que inicialmente a posição do papel é de 50. Ao final de um ano, a posição do papel terá uma distribuição normal com média de 70 e desvio padrão de $\sqrt{900}$ ou 30. Ao final de seis meses, ela terá uma distribuição normal com média de 60 e desvio padrão de $30\sqrt{0,5} = 21,21$.

Seja S o preço da ação no tempo t. A taxa de deriva esperada em S é pressuposta como sendo μS, para algum parâmetro constante μ. Isso implica que em um pequeno intervalo de tempo Δt, o aumento esperado em S é $\mu S \Delta t$. O parâmetro μ é chamado de *taxa de retorno esperada da ação.* Suponhamos que o coeficiente de dz é zero, então isso implica que no modelo não há incertezas e temos

$$\Delta S = \mu S \Delta t.$$

Fazendo Δt tender a zero no limite, temos

$$dS = \mu S dt \Rightarrow \frac{dS}{S} = \mu dt.$$

Aplicando a integral definida entre o tempo 0 e T, obtemos

$$\int_0^T \frac{dS}{S} = \int_0^T \mu dt \Rightarrow Log[S_T] - Log[S_0] = \mu T. \tag{3.6}$$

Aplicando a propriedade de logaritmos na Expressão (3.6) , temos

$$Log(\frac{S_T}{S_0}) = \mu T \Rightarrow e^{Log(\frac{S_T}{S_0})} = e^{\mu t} \Rightarrow \frac{S_T}{S_0} = e^{\mu T} \Rightarrow S_T = S_0 e^{\mu T}, \tag{3.7}$$

onde S_0 e S_T são o preço da ação no tempo 0 e no tempo T, respectivamente. A Equação (3.7) nos diz que quando não há incertezas, o preço da ação cresce à taxa de capitalização contínua de μ por unidade de tempo. Porém, o mercado é composto por incertezas. A variabilidade do retorno em um período Δt é a mesma independente do preço da ação. Por exemplo, um investidor tem a mesma incerteza a respeito do retorno quando o preço da ação é \$ 60 e quando é \$ 15. Isso nos dá um indicativo de que o desvio padrão da mudança em um período de tempo Δt deve ser proporcional ao preço da ação e consequentemente, obtemos o seguinte modelo

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \tag{3.8}$$

ou

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz. \tag{3.9}$$

O modelo descrito na Equação (3.8) é conhecido como *movimento browniano geométrico*, um processo estocástico empregado para modelar o comportamento de preço de ações, mercadorias, taxas de juros e de outras variáveis financeiras e econômicas, já que esse modelo considera que os retornos efetivos do ativo e as suas variâncias são proporcionais ao valor de S. A Equação (3.8) é o modelo mais utilizado na análise de comportamento do preço de ações , onde μ é taxa de retorno esperada da ação e σ é a volatilidade do preço da ação. Na Equação (3.9), o termo $\frac{dS}{S}$ denota a mudança no valor de S sobre o intervalo de tempo $(t, t + dt)$ sobre o preço inicial de S no tempo t. Observa-se que essa razão é o retorno obtido ao se investir na ação no período $(t+t+dt)$. Na ausencia de dividendos, apenas a mudança no preço será responsável pelo retorno. Ao calcular a razão $\frac{dS}{S}$ em (3.9), percebe-se que o lado direito da expressão é um processo de Wiener generalizado, conforme visto anteriormente.

Observação 3.2. Note que a razão $\frac{dS}{S}$, ou seja, a mudança percentual em S segue uma distribuição normal. Isso pode ser verificado da seguinte forma:

$$\frac{dS}{S}(LogS) = \frac{1}{S}dS = \frac{dS}{S}.$$

Dessa forma, temos que $LogS$ tem distribuição normal e assim, S terá distribuição log-normal. Isso ocorre pelo fato de $\frac{dS}{S}$ ser o incremento em $LogS$ e ter distribuição normal, pois seu processo é um processo de Wiener generalizado.

Essa observação é de suma importância, pois permite que os preços S de um ativo sejam sempre positivos. Falaremos com mais detalhes no próximo capítulo a respeito do valor esperado e variância de uma variável que se comporta conforme um movimento geométrico browniano, porém, podemos adiantar que o valor esperado e a variância são dadas pelas seguintes expressões , respectivamente:

$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T} \text{ e } \mathrm{Var} S_T = S_0 e^{2\mu T}(e^{\sigma^{2T}} - 1).$$

Podemos interpretar o valor esperado de S_T como sendo o que esperamos que S cresça (diminua) a uma taxa μ, enquanto que a variância é ilimitada, ou seja, a medida que o intervalo de tempo tende ao infinito, a variância cresce ao londo do tempo. A versão discreta desse modelo é dada por

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t} \tag{3.10}$$

ou

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \epsilon \sqrt{\Delta t}, \tag{3.11}$$

onde ΔS é a mudança no preço de S no intervalo de tempo Δt, ϵ tem distribuição normal padrão, μ é a taxa de retorno esperada por unidade de tempo e σ é a volatilidade do preço da ação. O retorno $\mu\Delta t$ é o valor esperado desse retorno e o termo $\sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}$ é o componente estocástico do retorno. A variância do componente estocástico, e portanto de todo o retorno, é $\sigma^2\Delta t$ e $\sigma\sqrt{\Delta t}$ é o desvio padrão do retorno em um pequeno intervalo de tempo Δt. A Equação (3.10) no diz que $\frac{\Delta S}{S}$ tem distribuição normal com média $\mu\Delta t$ e desvio padrão $\sigma\sqrt{\Delta t}$, ou seja

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t).$$

3.3 Parâmetros

De acordo com Hull [14], o processo para o preço de uma ação que está sendo construído até aqui, contém dois parâmetros: μ e σ. O primeiro é o retorno esperado anual que é obtido pelo investidor em um curto intervalo de tempo e o seu valor depende do risco do retorno da ação e do nível das taxas de juros da economia. Já o segundo, chamado de volatilidade do preço de uma ação, tem grande importância para determinar o valor de vários derivativos. Os valores considerados ideias de σ para uma ação estão entre 15% à 60%. A mudança proporcional no preço da ação em um curto intervalo de tempo Δt tem como desvio padrão $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Por outro lado, o desvio padrão da mudança proporcional no preço da ação durante um período de tempo longo T é $\sigma\sqrt{\Delta t}$, o que significa que como aproximação, a volatilidade pode ser compreendida como o desvio padrão da mudança no preço da ação em 1 ano.

3.4 Lema de Itô

Kiyoshi Itô foi um matemáico Japonês precursor na teoria da integração estocástica e nas equações diferenciais estocásticas. De acordo com Gil [11], Itô expressou em seu artigo publicado em 1951 (denominado "On Stochastic Differential Equations"), a regra da cadeia do cálculo estocástico, que é um resultado análogo à regra da cadeia do cálculo comum. O lema é bastante empregado em finanças e a sua aplicação mais conhecida é derivação da equação de Black-Sholes para valores de opções. O termo "estocástico" em negociações de ações, nos diz a respeito das oscilações nos preços de fechamento, ou seja, os traders usam a análise estocástica para decidir quando comprar ou vender títulos. Sua suposição é que quando o preço de fechamento atual de uma ação está próximo do preço mínimo ou máximo anterior, o preço do dia seguinte não será radicalmente maior ou menor, respectivamente. Baseado nisso, o lema de Itô é constantemente utilizado para derivar o processo estocástico seguido pelo preço de um título derivativo. Como exemplo, se um ativo subjacente segue um movimento geométrico browniano, então o lema mostra que um título derivado, cujo preço é uma função do preço do ativo subjacente e do tempo, segue também um movimento geométrico browniano. Suponhamos que o valor de uma variável x segue um processo de Itô, ou seja,

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz,$$

onde dz é um processo (ou incremento) de Wiener, onde $dz = \epsilon\sqrt{dt}$, $\epsilon \sim N(0,1)$ e a e b são funções de x e t. Além disso, como visto anteriormente, $a(x,t)$ e $b^2(x,t)$ são respectivamente, a tendência instantânea e taxa de variância instantânea do processo. Então podemos enunciar o seguinte resultado:

Lema 3.1. *(Lema de Itô) Suponhamos que a variável x siga um processo de Itô,*

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz. \tag{3.12}$$

Considere f uma função que dependa do processo x e do tempo t, isto é, $f = (x,t)$. Assumimos que f é uma função de classe $C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Então f segue um processo de Itô que satisfaz a seguinte equação estocástica

$$df = (\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2)dt + \frac{\partial f}{\partial x}bdz, \tag{3.13}$$

onde dz é o processo de Wiener da Equação (3.12). A taxa de drift e a taxa de variância do processo f são dados por $\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2$ e $(\frac{\partial f}{\partial x})^2 b^2$, respectivamente.

Demonstração. Como $f \in C^2$, sua expansão em uma série de Taylor é dada por

$$df = \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}dx^2 + ... \tag{3.14}$$

Por hipótese, temos que $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$ e substituindo em (3.14), temos

$$df = \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}[a(x,t)dt + b(x,t)dz] + \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx^2)... \tag{3.15}$$

Note que

$$(dx)^2 = [a(x,t)dt + b(x,t)dz]^2 = a^2(x,t)dt^2 + 2a(x,t)b(x,t)dtdz + b^2(x,t)(dz)^2 \tag{3.16}$$

Como $dz = \epsilon\sqrt{dt}$, então $(dz)^2 = \epsilon^2 dt$. Isso mostra que o termo $(dz)^2$ em $(dx)^2$ possui um componente dt que não pode ser ignorado. Como $\epsilon \sim N(0,1)$, então pelo mesmo argumento usado na prova da variância da Propriedade 3.1.1, temos que o valor esperado de $(dz)^2$ é dt. Pelas propriedades da distribuição normal, a variância de $(dz)^2$ é $2dt^2$. Sabemos que a variância da mudança em uma variável estocástica no tempo dt é proporcional a dt e não a dt^2. Dessa forma, a variância de $(dz)^2$ é pequena demais para ter um componente estocástico. Logo, podemos considerar $(dz)^2$ como não estocástico e igual ao seu valor esperado, que é dt, à medida que $dt \to 0$. Fazendo isso na Equação (3.16), temos

$$(dx)^2 = b^2(x,t)dt. \tag{3.17}$$

Substituindo (3.17) em (3.15), obtemos

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}[a(x,t)dt + b(x,t)dz] + \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2(x,t)dt \\ &= \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}a(x,t)dt + \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}b(x,t)dz + \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2(x,t)dt \end{aligned}$$

Organizando os termos que dependem de dt e dz, respectivamente, obtemos

$$df = (\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2)dt + \frac{\partial f}{\partial x}bdz,$$

como queriamos demonstrar. Para o cálculo do valor esperado de df, temos

$$E(df) = E[Ydt + \frac{\partial f}{\partial x}bdz],$$

onde $Y = \frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2$.

Logo, temos

$$E(df) = [YE(dt) + \frac{\partial f}{\partial x}bE(dz)].$$

Como $E[d(z)] = 0$ e $E(dt) = dt$, então

$$E(df) = Ydt \Rightarrow E(df) = (\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2 dt).$$

Já para o cálculo da variância de df, temos

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(df) &= E[(df - E(df))^2] = E[(df - (\frac{\partial f}{\partial x}a - \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2 dt))^2] \\ &= E[((\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2)dt + \frac{\partial f}{\partial x}bdz - (\frac{\partial f}{\partial x}a - \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2 dt)^2)].\end{aligned}$$

Note que no parêntese mais externo, existem termos simétricos. A expressão acima então fica da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(dt) &= E[(\frac{\partial f}{\partial x}bdz)^2] \\ &= E[(\frac{\partial f}{\partial x})^2 b^2 (dz)^2] \\ &= (\frac{\partial f}{\partial x})^2 b^2 E[(dz)^2]\end{aligned}$$

Como $E[(dz)^2] = dt$, então concluímos que

$$\mathrm{Var}(df) = (\frac{\partial f}{\partial x})^2 b^2 dt.$$

□

Propriedade 3.4.1. *O preço de uma ação S_t no futuro segue uma distribuição lognormal.*

Demonstração. De fato, usaremos o Lema 3.1 para derivar o processo seguido por $LogS_t$, quando S_t segue um movimento geométrico browniano, dado na Equação (3.8). Seja G_t uma função que dependa do processo S_t e do tempo t, isto é, $G = (S, t)$. Definamos $G_t = \log S_t$. Então, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_t}{\partial S_t} &= \frac{1}{S_t} \\ \frac{\partial^2 G_t}{\partial S_t^2} &= -\frac{1}{S_t^2} \\ \frac{\partial G_t}{\partial t} &= 0.\end{aligned}$$

Como consequência do Lema 3.1 e da Equação (3.8), o processo seguido por G de S e t será

$$dG_t = (\frac{\partial G_t}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{\partial G_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G_t}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2)dt + \frac{\partial G_t}{\partial S_t}\sigma S_t dz. \tag{3.18}$$

De acordo com a Equação (3.18), e substituindo os valores o processo seguido por G_t será

$$dG_t = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dz. \tag{3.19}$$

Na Expressão (3.19), os parâmetros μ e σ são constantes, o que indica que G segue um processo de Wiener generalizado. Dessa maneira, a taxa de deriva é $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ e a taxa de variância é σ^2. A mudança em $\log S_t$ entre o tempo 0 e algum tempo futuro T, tem distribuição normal com média $\mu - \frac{\sigma^2}{2}T$ e variância de $\sigma^2 T$. Em termos matemáticos, temos

$$\log S_T - \log S_0 \sim N[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T] \tag{3.20}$$

ou

$$\log S_T \sim N[\log S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T]. \tag{3.21}$$

□

A Equação (3.21) diz que $\log S_T$ tem distribuição normal. Como visto no Capítulo 1, uma variável tem distribuição lognormal se o logaritmo natural da variável em questão tem distribuição normal. Logo, como $\log S_T$ tem distribuição normal, o preço da ação S_t, com $t \in T$ segue uma distribuição lognormal.

4 Modelos de Precificação de Opções

A ideia de opções certamente não é nova: antigos romanos, gregos e fenícios negociavam opções de cargas saindo de seus portos. De acordo com Rubash [23], as modernas técnicas de precificação de opções, com suas origens no cálculo estocástico, surgem de um livro de Charles Castelli, denominado"The Theory of Options in Stock and Shares", publicado em 1877, que apresentou ao público os conceitos de hedge e aspectos especulativos das opções, ainda que não houvesse apresentado qualquer base teórica no mesmo. Vinte e três anos depois, Louis Bachelier apresentou a primeira avaliação analítica para opções de que se tem conhecimento, em sua dissertação "Theorie de la Speculation" em Sorbonne em 1900. Este trabalho criou interesse em um professor do Massachusetts Institute of Technology, chamado Paul Samuelson, que em 1955 escreveu um artigo não publicado, entitulado "Brownian Motion in the Stock Market". No mesmo ano, Richard Kruizenga, aluno de Samuelson, citou o trabalho de Bachelier na sua dissertação entitulada "Put and Call Options: A Theoretical and Market Analysis".

Em 1962, outra dissertação, desta vez por A. James Boness, focalizada em opções e entitulada "A Theory of Measurement of Stock Option Value" desenvolveu um modelo de precificação que foi um salto significativo na teoria em comparação a seus antecessores. Mais especificamente, seu trabalho serviu como precursor ao desenvolvido por Fischer Black, Myron Scholes e Robert Merton, que em meados de 1970 produziram um modelo de precificação de opções européias. Segundo Hull [14], o modelo se tornaria conhecido pelo nome de *Black-Sholes-Merton* ou simplesmente *Black-Sholes*, em homenagem a seus idealizadores. Em 1997 a impotância do modelo para o mercado financeiro foi reconhecida quando Merton e Scholes receberam o prêmio Nobel da economia. Black morreu em 1995 e com certeza teria divido o prêmio com os outros. A abordagem de Black e Scholes envolvia o *modelo de precificação de ativos financeiros* para determinar a relação entre o retorno exigido do mercado sobre a opção e o retorno exigido sobre a ação. Porém, essa abordagem não é simples, pois depende do preço da ação e do tempo. A abordagem proposta por Merton é mais geral pois não dependia dos pressupostos do Modelo de Precificação de ativos Financeiros: envolve estruturar uma carteira livre de risco, composto pela opção e ação subjacente, com argumento de que o retorno sobre a carteira durante um pequeno período de tempo deve ser o retorno livre de risco.

Nesse capítulo, apresentamos a abordagem de Merton à derivação da equação de *Black-Sholes*. Antes, definiremos alguns conceitos que serão importantes no decorrer deste capítulo. Mostraremos também o modelo elementar de precificação de opções: o modelo Binomial. Desenvolvido em 1979 por Cox, Ross e Rubistein [6] e diferentemente do modelo Black-Sholes que é um modelo contínuo, o modelo Binomial é um modelo que fornece uma aproximação em tempo discreto para o processo contínuo subjacente ao modelo de Black-Sholes. Em diversas situações, podemos considerá-lo mais próximo da realidade do que o próprio modelo de Black-Sholes e outros modelos contínuos. A importância do modelo Binomial se dá pela sua flexibilidade, pois é bastante utilizado para precificação de opções em geral, em particular, europeias e americanas. A teoria desenvolvida neste capítulo esta embasada nos trabalhos de Hull [14], Bonotto [3], Hissa [13], Silva [27], Salomão [24] e Cox [6].

4.1 A Propriedade Lognormal do Preço das Ações

De acordo com Hull [14], o modelo de comportamento de preço utilizado por Black, Scholes e Merton pressupõe que as mudanças percentuais no preço da ação em um breve período de tempo tem distribuição normal.

Definição 4.1. Os parâmetros μ e σ representam respectivamente o retorno esperado e a volatilidade do preço da ação anuais.

Como mostrado na Seção 3.2 anterior, a média e o desvio padrão no tempo Δt são aproximadamente $\mu\Delta t$ e $\sigma\sqrt{\Delta t}$, onde

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t), \tag{4.1}$$

na qual ΔS representa a variação do preço da ação S no tempo Δt e $N(m, v)$ representa uma distribuição normal com média m e variância v. O modelo implica em

$$\log S_T - \log S_0 \sim N[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T] \tag{4.2}$$

ou

$$\log S_T \sim N[\log S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T], \tag{4.3}$$

onde S_T é o preço da ação em um tempo futuro T e S_0 representa o preço da ação no tempo 0, não havendo aproximações nesse caso. A variável $\log S_T$ tem distribuição normal e S_T tem distribuição lognormal. A média de $\log S_T$ é $\log S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T$ e o desvio padrão de $\log S_T$ é dado por $\sigma\sqrt{T}$. Um variável que possui distribuição lognormal, pode assumir qualquer valor entre zero e infinito. Seja $Y = S_T$ uma variável aleatória com distribuição lognormal. Da Expressão (4.3) e pelas propriedades do valor esperado e variância de uma variável com distribuição lognormal, vistas no Capítulo 1, temos

$$E(Y) = \exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2}), \tag{4.4}$$

onde $\exp(x) = e^x$ e pela Expressão (4.3), a média é $\log S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T$ e a variância é $\sigma^2 T$. Substituindo esses dados na Equação (4.4), temos

$$\begin{aligned} E(S_T) &= \exp[\log S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \frac{\sigma^2}{2}T] \\ &= \exp[\log S_0 + \mu T - \frac{\sigma^2}{2}T + \frac{\sigma^2}{2}T] \\ &= S_0 e^{\mu T}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Como $E(Y^2) = \exp(2\mu + 2\sigma^2)$, substituindo os dados na Expressão (4.5), obtemos

$$\begin{aligned} E(S_T^2) &= \exp(2\log S_0 + 2\mu T - \sigma^2 T + 2\sigma^2 T) \\ &= \exp(\log S_0^2 + 2\mu T + \sigma^2 T) \\ &= S_0^2 e^{2\mu T} e^{\sigma^2 T}. \end{aligned}$$

Note que $\text{Var}(Y) = \exp\ (2\mu + \sigma^2)[\exp\ \sigma^2 - 1]$, e assim, temos

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_T) &= \exp\ (2\log S_0 + 2\mu T - \sigma^2 T + \sigma^2 T)[\exp\ \sigma^2 T - 1] \\ &= \exp\ (\log S_0^2 + 2\mu T)[\exp\ \sigma^2 T - 1] \\ &= (S_0^2 e^{2\mu T})[e^{\sigma^2 T} - 1]. \end{aligned}$$

4.2 A Taxa de Retorno

De acordo com Hull [14], a propriedade lognormal dos preços de ações fornece informações a cerca da distribuição de probabilidade da taxa de retorno com capitalização contínua sobre uma ação entre os tempos 0 e T. Definindo x como a taxa de retorno com capitalização contínua anual, realizada entre os tempos 0 e T, então substituindo x no lugar do parâmetro μ na Equação (4.5), temos

$$S_T = S_0 e^{xT} \Rightarrow x = \frac{1}{T} \log \frac{S_T}{S_0}. \tag{4.6}$$

Pela Expressão (4.2), tem-se

$$x \sim N(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T}), \tag{4.7}$$

ou seja, a taxa de retorno tem distribuição normal com média $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ e desvio padrão $\frac{\sigma}{\sqrt{T}}$.

Observação 4.1. Na proporção que T aumenta, o desvio padrão da variável x diminui. Dessa forma, temos mais certeza a respeito do retorno médio anual durante 20 anos do que o retorno em qualquer ano específico.

4.3 Retorno Esperado

Seja μ o retorno esperado exigido pelos investidores. É de se esperar que o parâmetro μ seja proporcional ao nível do risco associado à ação. Além disso, μ depende do nível das taxas de juros da economia. Quanto maior forem as taxas de juros, maior será o retorno exigido sobre uma ação. O modelo de comportamento do preço de ações discutido neste trabalho leva em conta que em um período breve de tempo, o retorno médio é dado por $\mu \Delta t$. É intuitivo a partir disso imaginar que μ é o retorno esperado sobre a ação com capitalização contínua. Porém, esse não é o caso. Na seção anterior, o retorno com capitalização contínua, x, durante um período de tempo T é dado pela Equação (4.6), onde o valor esperado é $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$. O argumento para o qual o retorno esperado com capitalização contínua ser diferente de μ é bem sutil. Considere a Expressão (4.5). Aplicando o logarítmo, obtemos

$$\log[E(S_T)] = \log(S_0) + \mu T.$$

Suponhamos que $E(x) = \mu$. Então

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad E(\frac{1}{T}\log\frac{S_T}{S_0}) = \mu \\
&\Leftrightarrow \quad E(\log\frac{S_T}{S_0}) = \mu T \\
&\Leftrightarrow \quad E(\log(S_T)) - \log(S_0) = \mu T \\
&\Leftrightarrow \quad E(\log(S_T)) - \log[E(S_T)] + \mu T = \mu T \\
&\Leftrightarrow \quad E(\log(S_T)) = \log[E(S_T)],
\end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois essa ultima igualdade acima só é válida para funções lineares, e a função log não é linear. Note que $E(\log(S_T)) < \log[E(S_T)]$, o que implica que $E[\log(\frac{S_T}{S_0})] < \mu T$ e concluímos que $E(x) < \mu$, como descrito anteriomente, ou seja $E(x) = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$.

4.4 Volatilidade

De acordo com Hissa [13], a volatilidade σ é uma medida que se refere ao desvio padrão das mudanças do preço de uma ação dentro de um período específico de tempo. É uma medida de incerteza em relação aos retornos oferecidos por ela. Geralmente, a volatilidade de uma ação varia entre 15% a 60%. Pela Expressão (4.7), a volatilidade do preço de uma ação é definida como sendo o desvio padrão do retorno da ação em um período de 1 ano, quando o retorno utiliza capitalização contínua. Note que na Expressão (4.1) quando Δt é pequeno, $\sigma^2\Delta t$ é aproximadamente igual a variância da mudança percentual no preço da ação no tempo Δt. Dessa forma, $\sigma\sqrt{\Delta t}$ é aproximadamente igual ao desvio padrão da mudança percentual no preço da ação no tempo Δt.

Exemplo 4. Suponha que $\sigma = 0,3$ ou 30% ao ano e que o preço da ação atual é $R\$50,00$. O desvio padrão da mudança percentual no preço da ação em 1 semana é aproximadamente

$$30 \times \sqrt{\frac{1}{52}} = 4,16\% = 0,0416.$$

Uma mudança de 1 desvio padrão no preço da ação em 1 semana é $50 \times 0,0416 = 2,08$. Observe qeu se extendermos essa análise para 4 semanas, ou seja, o desvio padrão da ação em 4 semanas, teremos o dobro do desvio padrão em 1 semana. Dessa forma, podemos afirmar que a incerteza sobre o preço da ação no futuro medida pelo desvio padrão, aumenta aproximadamente com a raiz quadrada da extensão do tempo analizado.

4.4.1 A Volatilidade a partir de Dados Históricos

A volatilidade histórica é aquela que é conhecida pelo mercado. Seu cálculo envolve as variações de preços ao longo de um período específico de tempo, podendo servir como base para estimar uma volatilidade futura. Porém, isso não significa que essa previsão se concretize, pois sabe-se que existem diversos fatores que afetam os preços de uma ação. Para estimar a volatilidade do preço de uma ação na prática, de maneira geral, observa-se o preço da ação em intervalos de tempo fixos, como por exemplo, dias, semanas ou meses. Considere $n+1$, s_i e τ respectivamente, o número de observações, o preço da ação ao final do i-ésimo intervalo, onde $i = 0, ..., n$ e o intervalo de tempo em anos. Seja u_i o retorno do período i que é dado pela seguinte expressão

$$u_i = \log(\frac{S_i}{S_{i-1}}) \text{ com } i = 1, ..., n.$$

A estimativa normal, s, do desvio padrão de u_i é dada por

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i}^{n}(u_i - \overline{u})^2}$$

, ou

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n}u_i)^2},$$

onde $\overline{u}$ é a média dos retornos. Da Expressão (4.2), o desvio padrão de u_i é $\sigma\sqrt{\tau}$. Assim a variável s é uma estimativa de $\sigma\sqrt{\tau}$. Assim, σ pode ser estimado como $\hat{\sigma}$, onde

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}},$$

como erro padrão dado por $\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2n}}$.

Escolher um valor ideal para n não é uma tarefa fácil, embora intuitivamente compreendamos que mais dados levam a uma precisão maior. Porém, σ é uma medida que depende do tempo e dados defasados demais se tornam irrelevantes para a tentativa de prever a volatilidade futura. O uso de dados de preço de fechamento diários dos últimos 90 à 180 dias, são ideais para esse tipo de estimativa. Outra opção, seria determiiar n como igual ao número de dias na qual a volatilidade será aplicada.

Exemplo 5. A Tabela 4.1 mostra uma sequência de preços de ações da VALE3 durante 22 dias de negociação consecutivos. As siglas PAF, PR e RD, significam, respectivamente, o

Figura 4.1: Cotação histórica da VALE3 nos últimos 30 dias

Data	Fechamento	Variação	Variação (%)	Abertura	Máxima	Mínima	Volume
10 Jun 2021	111,90	-0,35	-0,31%	112,22	113,37	111,04	30.662.700
09 Jun 2021	112,25	2,33	2,12%	110,00	113,34	109,20	22.460.500
08 Jun 2021	109,92	-1,98	-1,77%	112,48	112,77	109,70	22.571.700
07 Jun 2021	111,90	-0,94	-0,83%	112,20	112,65	110,70	22.710.100
04 Jun 2021	112,84	-1,96	-1,71%	114,50	114,78	112,39	18.330.600
02 Jun 2021	114,80	1,59	1,4%	114,22	115,70	113,50	20.297.800
01 Jun 2021	113,21	-1,48	-1,29%	117,00	118,00	113,15	31.181.800
31 Mai 2021	114,69	3,10	2,78%	112,50	114,89	112,50	17.744.300
28 Mai 2021	111,59	0,84	0,76%	111,11	112,75	109,42	25.110.100
27 Mai 2021	110,75	0,64	0,58%	110,80	112,09	109,77	55.352.700
26 Mai 2021	110,11	2,88	2,69%	106,37	110,32	106,03	28.157.000
25 Mai 2021	107,23	-2,49	-2,27%	110,28	110,89	106,78	23.242.000
24 Mai 2021	109,72	0,32	0,29%	108,00	110,14	107,51	19.251.500
21 Mai 2021	109,40	-1,60	-1,44%	111,11	111,25	108,50	27.198.200
20 Mai 2021	111,00	-1,26	-1,12%	111,70	112,10	110,20	20.951.000
19 Mai 2021	112,26	-2,48	-2,16%	112,10	112,78	109,84	32.856.900
18 Mai 2021	114,74	1,34	1,18%	114,56	115,40	113,19	27.047.000
17 Mai 2021	113,40	2,60	2,35%	111,50	113,82	111,17	26.045.500
14 Mai 2021	110,80	-1,60	-1,42%	111,20	111,79	109,62	25.606.700
13 Mai 2021	112,40	-1,95	-1,71%	112,00	114,22	110,72	34.274.300
12 Mai 2021	114,35	-4,27	-3,6%	118,00	118,46	113,96	31.633.300
11 Mai 2021	118,62	3,97	3,46%	113,98	118,72	113,32	28.600.200

preço da ação no fechamento, o preço relativo e o retorno diário. Os dados foram extraídos da Figura 4.1.

Nesse caso, $n = 21$, de modo que

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = -0,0564 \text{ e } \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 0,0063.$$

A estimativa do desvio padrão do retorno diário é

$$\sqrt{\frac{0,0063}{20} - \frac{(-0,0564)^2}{21(20)}} \simeq 0,0173 \simeq 1,7320\%.$$

Considerando que há 252 dias de negociação ao ano, $\tau = \frac{1}{252}$ e os dados no mostram uma estimativa para a volatilidade anual de $0,0173\sqrt{252} \simeq 0,2746 \simeq 27,46\%$, para um erro de aproximadamente

$$\frac{0,2746}{\sqrt{2 \times 21}} \simeq 0,0424 \simeq 4,24\%$$

ao ano. A estimativa acima pressupõe que a ação não paga dividendos, porém pode ser adaptada para abranger ações que pagam dividendos. O retorno, u_i, durante um intervalo

Tabela 4.1: Cálculo da volatilidade

Dia i	**PAF**(S_i)	**PR** ($\frac{S_i}{S_{i-1}}$)	**RD** ($u_i = \log(\frac{S_i}{S_{i-1}})$)	u_i^2
0	$118,62$	...	...	...
1	$114,35$	$0,9640$	$-0,0367$	$0,0013$
2	$112,40$	$0,9829$	$-0,0172$	$0,0003$
3	$110,80$	$0,9858$	$-0,0143$	$0,0002$
4	$113,40$	$1,0235$	$0,0223$	$0,0005$
5	$114,74$	$1,0118$	$0,0117$	$0,0001$
6	$112,26$	$0,9784$	$-0,0218$	$0,0005$
7	$111,00$	$0,9888$	$-0,0113$	$0,0001$
8	$109,40$	$0,9856$	$-0,0145$	$0,0002$
9	$109,72$	$1,0029$	$0,0029$	0
10	$107,23$	$0,9773$	$-0,0230$	$0,0005$
11	$110,11$	$1,0269$	$0,0265$	$0,0007$
12	$110,75$	$1,0058$	$0,0058$	0
13	$111,59$	$1,0076$	$0,0076$	0
14	$114,69$	$1,0278$	$0,0227$	$0,0005$
15	$113,21$	$0,9871$	$-0,0130$	$0,0002$
16	$114,80$	$1,0140$	$0,0139$	$0,0002$
17	$112,84$	$0,9829$	$-0,0172$	$0,0003$
18	$111,90$	$0,9992$	$-0,0008$	0
19	$109,92$	$0,9823$	$-0,0179$	$0,0003$
20	$112,25$	$1,0212$	$0,0210$	$0,0004$
21	$111,90$	$0,9969$	$-0,0031$	0
$\sum$	...	...	$-0,0564$	$0,0063$

que inclui uma data ex-dividendos é dado por:

$$u_i = \log \frac{S_i + D}{S_{i-1}},$$

onde D é o valor do dividendo. O retorno em outros intervalos de tempo é :

$$u_i = \log \frac{S_i}{S_{i-1}}.$$

Introduziremos agora os conceitos de *princípio da não-arbitragem* e *delta hedging* que serão importantes para a obtenção da equação de Black-Sholes.

4.5 Princípio da Não-Arbitragem

Considere a seguinte situação: O preço atual da ação é de R\$20 e ao final de 3 meses o preço dessa ação será R\$$22,00$ ou R\$ $18,00$. Um contrato de opção européia está sendo analizado, com vencimento de 3 meses e preço de exercício de R\$ $21,00$. Se o preço da ação ao final de 3 meses for R\$ $22,00$, então a opção valerá R\$ $1,00$; se o preço da ação for R\$ $18,00$, a opção valerá R\$ 0. Segundo Hull [14], o argumento que pode ser usado nessa situação é o de que não existam oportunidades de arbitragem. Dessa forma, estrutura-se uma carteira da ação e da opção de tal maneira que não haja incertezas a respeito do valor do portifólio ao final dos 3 meses. Assim, argumenta-se que a carteira é "livre de risco" e o retorno gerado deve ser igual à taxa de juros livre de risco. Representamos pela letra grega Δ uma certa quantidade de ações, considere uma carteira que adota uma posição comprada em Δ ações de uma empresa e uma posição vendida em uma opção de compra. A idéia é calcular o valor de Δ que torne a carteira livre de risco. Se o preço da ação passa de R\$$20,00$ para R\$ $22,00$, o valor das ações passam a ser R\$ $\Delta 22,00$ e o valor da opção é 1 (diferença entre o spot e o strike) e o valor da carteira passa a ser $[\prod]_1 = 22\Delta - 1$. Já no caso em que o preço da ação cai de R\$ $20,00$ para R\$ $18,00$, o valor das ações é 18Δ e o valor da opção é zero e portanto, o valor total da carteira será $[\prod]_2 = 18\Delta$. A carteira será considerado "livre de risco", quando Δ é escolhido de maneira que o valor final da carteira seja igual em ambas as situações descritas acima, isto é

$$[\prod]_1 = [\prod]_2 = 22\Delta - 1 = 18\Delta \Rightarrow \Delta = 0,25,$$

o que significa dizer que uma carteira "sem risco" é comprada em $0,25$ ação e vendida em 1 opção. Retornando às expressões de $[\prod]_1$ e $[\prod]_2$, temos que se o preço da ação sobe para R\$ $22,00$, o valor da carteira $[\prod]_1$ será

$$[\prod]_1 = 22 \times 0,25 - 1 = 4,5.$$

Já no caso em que o preço da ação cai para R\$ $18,00$, o valor da carteira $[\prod]_2$ será

$$[\prod]_2 = 18 \times 0,25 = 4,5.$$

Note que independente do movimento do preço da ação, o valor da carteira é o mesmo ao final da data de expiração da opção.

Observação 4.2. Uma carteira "livre de risco" deve obter a taxa de juros livre de risco, na ausência de oportunidades de arbitragem. Se a taxa de juros livre de risco é de 13% ao ano, o valor da carteira hoje deve ser $4,5$ ou

$$4,5e^{-0,13\times\frac{3}{12}} = 4,356.$$

Como o preço da ação hoje é R\$ $20,00$ e denotando o preço da opção por f, o valor da carteira hoje será de

$$\prod = 20 \times 0,25 - f = 5 - f.$$

Então,

$$5 - f = 4,356 \Rightarrow f = 0,644.$$

Na ausência de oportunidades de arbitragem, o valor atual da opção será de $0,644$. Observe que é inviável negociar $0,25$ ação. Na prática, isso significa , por exemplo, a venda de 400 opções e a compra de 100 ações, ou seja, é ncessário comprar Δ ações para cada opção vendida, de modo a manter uma carteira "livre de risco".

Propriedade 4.5.1. *Considere $\prod$ uma carteira sem risco. Essa carteira deve ser corrigida no tempo pela taxa de juros livre de risco r, ou seja*

$$d\prod = r\prod dt, \tag{4.8}$$

onde $d\prod$ é a variação da carteira em um intervalo de tempo dt. Considere agora que a carteira seja composta por uma opção e por uma fração da ação subjacente. Para que a Equação (4.8) seja verdadeira, é necessário eliminar o risco dessa carteira.

4.5.1 Delta Hedging

De acordo com Silva [27], Delta Hedging é uma estratégia que faz com que a carteira (opção vendida mais ações compradas) se torne "imune" às pequenas variações no preço da ação subjacente em um pequeno intervalo de tempo, o que é feito pela neutralização do delta. A posição na ação deve ser frequentemente rebalanceada de modo que a carteira permaneça "delta-neutro". Então, temos a seguinte definição:

Definição 4.2. O Delta Hedging, ou hedging dinâmico é uma carteira que iguala uma opção financeira f a uma fração da ação subjacente $\frac{\partial f}{\partial S}$, o delta em cada instante do tempo, ou seja,

$$\prod = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S, \tag{4.9}$$

onde f é o prêmio da opção, S é o preço da ação e $\prod$ é o valor da carteira. A variação de $\prod$ é dada por

$$d\prod = -df + \frac{\partial f}{\partial S} dS. \tag{4.10}$$

O Delta Hedging tem por objetivo eliminar todo o risco da opção e da fração $\frac{\partial f}{\partial S}$ da ação na carteira.

4.6 As Hipóteses do Modelo de Black-Sholes

De acordo com Bonotto [3], para obter a equação, Fischer black e Myron Scholes admitiram as seguintes hipóteses:

- O preço da ação, a qual denotaremos por S, segue um processo estocástico em tempo contínuo, isto é

  $$dS = \mu S dt + \sigma S dz,$$

  onde z representa o movimento browniano, S é um movimento browniano geométrico e o drift μ e a volatilidade σ são constantes; Isso significa que o preço da ação segue uma distribuição lognormal;

- A taxa de juros de curto prazo livre de risco r é conhecida e constante no tempo;

- A ação não paga dividendos;

- O mercado é perfeito;

- É possível vender a ação a descoberto (short-selling);

- Não existem oportunidades de arbitragem sem risco. Todos os participantes no mercado estão sujeitos à mesma taxa de juros livre de risco.

De acordo com Black e Scholes [2], o objetivo principal desse conjuto de hipóteses é fazer com que o valor da opção dependa apenas do preço da ação e do tempo. Os outros parâmetros, como a taxa de juros, volatilidade e preço de exercício são dados com constantes.

4.6.1 Construção da Equação Diferencial de Black-Sholes

Considere $f = (S, t)$ uma função que define o preço de uma opção de compra europeia em um tempo t, para um certo valor da ação subjacente S. Para obtermos um modelo sem arbitragem, é feito uma contrução da equação diferencial de Black-Sholes a partir do pressuposto de uma carteira que contém uma opção e uma certa quantidade $\frac{\partial f}{\partial S}$ de ações:

- -1 : Opção;
- $+\frac{\partial f}{\partial S}$: Ações.

Dessa forma, a valor dessa carteira será dado por

$$\prod := -f + \frac{\partial f}{\partial S} S. \tag{4.11}$$

A variação $\Delta \prod$ do valor da carteira entre os instantes $t,\ t + dt$ é dado por

$$\Delta \prod = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S. \tag{4.12}$$

Por hipótese, S segue um processo estocástico dado por

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz. \tag{4.13}$$

Pelo Lema de Itô 3.12, temos

$$df = (\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz. \tag{4.14}$$

As formas discretas das Equações (4.13) e (4.14) são, respectivamente

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z. \tag{4.15}$$

$$\Delta f = (\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z. \tag{4.16}$$

Subistituindo as Equações (4.15) e (4.16) em (4.12), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta \prod &= -(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)\Delta t - \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z + \frac{\partial f}{\partial S}[\mu S \Delta t + \sigma S \Delta z] \\ &= -\frac{\partial f}{\partial S}\mu S \Delta t - \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \Delta t - \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z + \frac{\partial f}{\partial S}\mu S \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z. \end{aligned}$$

Dessa forma, eliminando os termos que são simétricos, obtemos

$$\Delta\prod = -(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)\Delta t. \tag{4.17}$$

Note que a Equação (4.17) não contém o termo Δz. Isso significa que durante o tempo Δt, a carteira é sem risco e dessa maneira, a carteira é isenta de riscos nas condições do modelo. Logo, pelo princípio da não-arbitragem, o valor da variação da carteira deve ser, instantaneamente, o mesmo valor da carteira multiplicada pela taxa de juros livre de risco, a qual a denotaremos por r. Então, temos

$$\Delta\prod = r\prod\Delta t. \tag{4.18}$$

Substituindo as Equações (4.11) e (4.17) em (4.18), obtemos

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(-f + \frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t,$$

e assim obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = rf. \tag{4.19}$$

A Equação (4.19) é a famosa equação diferencial parcial de Black-Sholes, na qual possui várias soluções, que dependem do tipo de derivativo definido, com S sendo a variável subjacente. Segundo Bonotto [3], o derivativo conveniente obtido pela resolução da equação, depende das condições de fronteiras que são utilizadas. Como visto anteriormente, a condição de contorno de uma opção de compra (*call*) do tipo européia é

$$f(S_T, T) = \max\{S_T - K, 0\},$$

onde T, K e S_T são, respectivamente a maturidade, o preço de exercício da opção e o preço da ação subjacente na maturidade. Já para opções de venda (*put*) do tipo eurpéia, a condição de contorno será

$$f(S_T, T) = \max\{K - S_T, 0\}.$$

Observação 4.3. Quando $S = 0$, o valor do contrato de opção de compra se torna $f(0,t) = 0$, para todo $t \in (0,T)$ e $\lim_{S\to+\infty}\frac{f(S,t)}{S} = 1$.

Podemos agora enunciar o teorema referente à formula de apreçamento de uma opção de compra européia:

Teorema 4.1. Seja $f(S,t)$ uma opção de compra europeia (*call*), modelada pela Equação (4.19) (equação de Black-Sholes)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 - rf(S,t) = 0 \tag{4.20}$$

onde $f(S_T, T) = \max\{S_T - K, 0\}, f(0,t) = 0$ e $f(S,t) \sim S$ quando $S \to +\infty$, são respectivamente as condições final, de fronteira e assintótica do problema. Então o valor de uma opção de compra européia é dado por

$$f(S,t) = SN(q_1) - Ke^{-r(T-t)}N(q_2),$$

onde

$$\begin{aligned}
N(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}q^2}dq \\
q_1 &= \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
q_2 &= \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.
\end{aligned}$$

Demonstração. A ideia da demonstração do modelo de Black-Sholes é resolvê-la para uma opção de compra, já que para uma opção de venda, utiliza-se procedimentos análogos. Para resolver o modelo, é necessário estudar algumas condições, que foram dadas como hipóteses acima. A condição final que se espera é que $f(S_T, T) = \max\{S_T - K, 0\}$, ou seja, espera-se que na maturidade, o valor S da ação seja maior que seu preço de exercício K, pois do contrário, o valor da operação a ser pago é zero. Na condição de fronteira, se o valor da ação S for muito pequeno, ou seja, $S \to 0^+$, então $\lim_{S\to 0^+} f(S,t) = 0$. Já na condição assintótica, se o preço da ação for muito grande, $S \to +\infty$, ou seja, o preço da ação S se torna mais cara do que o preço de exercício K, o comportamento da opção converge para o comportamento da ação e assim, obtemos $\lim_{S\to+\infty} \frac{f(S,t)}{S} = 1$. O modelo de Black-Sholes é resolvido como uma equação de difusão do calor e assim, sua solução é semelhante à solução da equação do calor, resolvida por método usuais, onde a Equação (4.20) é uma E.D.P parabólica, de acordo com Silva [27]. Façamos as seguintes mudanças de variáveis,

- $t = T - \left(\frac{2}{\sigma^2}\tau\right) \Rightarrow \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t);$
- $S = Ke^x$ e $x = \log\left(\frac{S}{K}\right),$

pois o preço da ação S segue uma distribuição lognormal. Essa mudança de variável é necessária para converter a Equação (4.20) com coeficientes variáveis em uma equação com coeficientes constantes, eliminando os termos $\frac{\partial^2 f(S,t)}{\partial S^2}$ e $\frac{\partial f(S,t)}{\partial S}$. Então, temos

$$f(S,t) = f(Ke^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}) := Kv(x,\tau); \tag{4.21}$$

Como $t \in (0,T)$ e $S \in (0,\infty)$, então $t \in (0, \frac{1}{\sigma^2 T})$ e $x \in (-\infty, +\infty)$. Daí,

$$\frac{\partial f(S,t)}{\partial S} = \frac{\partial f(S,t)}{\partial x}\frac{dx}{dS} = \frac{K}{S}\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x}, \tag{4.22}$$

onde $\frac{dx}{dS} = \frac{1}{S}$. Derivando parcialmente f pela segunda vez em relação a S, temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{K}{S}\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x}\right) = \frac{-K}{S^2}\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x} + \frac{K}{S^2}\frac{\partial^2 v(x,\tau)}{\partial x^2}. \tag{4.23}$$

Derivando f em relação a t, temos

$$\frac{\partial f(S,t)}{\partial t} = \frac{\partial f(S,t)}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{-K\sigma^2}{2}\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial \tau}, \tag{4.24}$$

onde $\frac{d\tau}{dt} = \frac{-\sigma^2}{2}$. Substituindo $f(S,t) = Kv(x,\tau)$ e as Equações (4.22), (4.23) e (4.24) na Equação (4.20), temos

$$-K\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial \tau} + Sr\left(\frac{K}{S}\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x}\right) + S^2\sigma^2\frac{1}{2}\left(\frac{-K}{S^2}\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x} + \frac{K}{S^2}\frac{\partial^2 v(x,\tau)}{\partial x^2}\right) - rKv(x,\tau) = 0$$

$$-K\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial \tau} + rK\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x} - \frac{1}{2}\sigma^2 K\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 K\frac{\partial v^2(x,\tau)}{\partial x^2} - rKv(x,\tau) = 0. \tag{4.25}$$

Multiplicando a Equação (4.25) por $\left(\frac{-2}{\sigma^2 K}\right)$, obtemos

$$\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial \tau} - \frac{2r}{\sigma^2}\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x} + \frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x} - \frac{\partial^2 v(x,\tau)}{\partial x^2} + \frac{2r}{\sigma^2}v(x,\tau) = 0.$$

Definindo $A_1 = \frac{2r}{\sigma^2}$, obtemos

$$\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial \tau} - A_1\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x} + \frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x} - \frac{\partial^2 v(x,\tau)}{\partial x^2} + A_1 v(x,\tau) = 0, \tag{4.26}$$

ou seja, organizando os termos, temos

$$\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v(x,\tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x}(A_1 - 1) - A_1 v(x,\tau). \tag{4.27}$$

É necessário transformar a Equação (4.27) em uma equação de difusão do calor, eliminando os termos $\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x}$ e $v(x,\tau)$. Para obter a equação de difusão correspondente à Equação (4.27), devemos fazer a seguinte mudança de variável

$$v(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta \tau}\mu(x,\tau), \tag{4.28}$$

de forma que os parâmetros α e β foram escolhidos de maneira a anular termos da Equação (4.27). Considere $\alpha = -\frac{1}{2}(A_1 - 1)$ e $\beta = -\frac{1}{4}(A_1 + 1)^2$. Vamos mostrar que

$$\frac{\partial\mu(x,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\mu(x,\tau)}{\partial x^2}. \tag{4.29}$$

De fato, derivando $v(x,\tau)$ e substituindo em (4.27), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial\tau} &= e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\beta\mu(x,\tau) + \frac{\partial\mu(x,\tau)}{\partial\tau}\right)\\
A_1 v(x,\tau) &= e^{\alpha x+\beta\tau}\mu(x,\tau)A_1\\
\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x} &= e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\alpha\mu(x,\tau) + \frac{\partial\mu(x,\tau)}{\partial x}\right)\\
\frac{\partial^2 v(x,\tau)}{\partial x^2} &= e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\alpha^2\mu(x,\tau) + 2\alpha\frac{\partial\mu(x,\tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2\mu(x,\tau)}{\partial x^2}\right).
\end{aligned}$$

Substituindo as derivadas acima na Equação (4.27), temos

$$\begin{aligned}
e^{\alpha x+\beta\tau} & \left[\beta\mu(x,\tau) + \frac{\partial\mu(x,\tau)}{\partial\tau}\right] = e^{\alpha x+\beta\tau}\left[\alpha^2\mu(x,\tau) + 2\alpha\frac{\partial\mu(x,\tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2\mu(x,\tau)}{\partial x^2}\right]\\
+ \quad & (A_1-1)\left[e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\alpha\mu(x,\tau) + \frac{\partial\mu(x,\tau)}{\partial x}\right)\right] - e^{\alpha x+\beta\tau}\mu(x,\tau)A_1\\
\Rightarrow \quad & \beta\mu(x,\tau) + \frac{\partial\mu(x,\tau)}{\partial\tau} = \alpha^2\mu(x,\tau) + 2\alpha\frac{\partial\mu(x,\tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2\mu(x,\tau)}{\partial x^2} + \alpha\mu(x,\tau)A_1\\
+ \quad & \frac{\partial\mu(x,\tau)A_1}{\partial x} - \alpha\mu(x,\tau) - \frac{\partial\mu(x,\tau)}{\partial x} - \mu(x,\tau)A_1 = \alpha^2\mu(x,\tau) + \frac{\partial\mu(x,\tau)}{\partial x}(A_1-1)\\
+ \quad & \frac{\partial^2\mu(x,\tau)}{\partial x^2} + \alpha\mu(x,\tau)(A_1-1) + 2\alpha\frac{\partial\mu(x,\tau)}{\partial x} - \mu(x,\tau)A_1\\
\Rightarrow \quad & \frac{\partial\mu(x,\tau)}{\partial\tau} = -\beta\mu(x,\tau) + \alpha^2\mu(x,\tau) + \frac{\partial\mu(x,\tau)}{\partial x}(A_1-1) + \frac{\partial^2\mu(x,\tau)}{\partial x^2}\\
+ \quad & \alpha\mu(x,\tau)(A_1-1) - \mu(x,\tau)A_1 + 2\alpha\frac{\partial\mu(x,\tau)}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Iremos desenvolver apenas o segundo membro da última expressão acima.Substituindo os valores de α e β temos:

$$\begin{aligned}
= \quad & \frac{1}{4}(A_1+1)^2\mu(x,\tau) + \frac{1}{4}(A_1-1)^2\mu(x,\tau) + \frac{\partial\mu(x,\tau)}{\partial x}(A_1-1) + \frac{\partial^2\mu(x,\tau)}{\partial x^2}\\
- \quad & \frac{1}{2}(A_1-1)^2\mu(x,\tau) - \mu(x,\tau)A_1 + -2\frac{1}{2}(A_1-1)\frac{\partial\mu(x,\tau)}{\partial x}.\\
= \quad & \frac{(A_1+1)^2\mu(x,\tau) + (A_1-1)^2\mu(x,\tau) + 4\frac{\partial^2\mu(x,\tau)}{\partial x^2} - 2(A_1-1)^2\mu(x,\tau) - 4\mu(x,\tau)A_1}{4}\\
= \quad & \frac{({A_1}^2+2A_1+1)\mu(x,\tau) + ({A_1}^2-2A_1+1)\mu(x,\tau) + 4\frac{\partial^2\mu(x,\tau)}{\partial x^2}}{4}\\
- \quad & \frac{2({A_1}^2-2A_1+1)\mu(x,\tau) - 4\mu(x,\tau)A_1}{4}.
\end{aligned}$$

$$= \frac{\mu(x,\tau)[{A_1}^2+2A_1+1+{A_1}^2-2A_1+1-2{A_1}^2+4A_1-2-4A_1]+4\dfrac{\partial^2\mu(x,\tau)}{\partial x^2}}{4}$$

$$= \frac{4\dfrac{\partial^2\mu(x,\tau)}{\partial x^2}}{4} = \frac{\partial^2\mu(x,\tau)}{\partial x^2},$$

e assim chegamos em (4.29), como queríamos demonstrar.

Note que pela Equação (4.21), com $\tau = 0$ e $t = T$, temos

$$v(x,\tau) = \frac{f(S,t)}{K} = \frac{\max\{Ke^x - k, 0\}}{K} = \max\{e^x - 1, 0\}.$$

Pela Expressão (4.28), para $\tau = 0$,

$$\begin{aligned}
\mu(x,0) &= \frac{v(x,0)}{e^{\alpha x}} \\
&= \frac{\max\{e^x - 1, 0\}}{e^{\alpha x}} \\
&= \max\{e^x e^{-\alpha x} - e^{-\alpha x}, 0\} \\
&= \max\{e^{x-\alpha x} - e^{-\alpha x}, 0\} \\
&= \max\{e^{x(1+\frac{1}{2}(A_1-1))} - e^{-\alpha x}, 0\} \\
&= \max\{e^{x(1+\frac{1}{2}A_1-\frac{1}{2})-e^{-\alpha x}}, 0\} \\
&= \max\{e^{x(\frac{1}{2}A_1+\frac{1}{2})} - e^{-\alpha x}, 0\} \\
&= \max\{e^{x(\frac{1}{2}(A_1+1))} - e^{\frac{1}{2}(A_1-1)x}, 0\}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, as condições de fronteira passam a ser

i) $\mu(x,0) = \max\{e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(A_1-1)x}, 0\}$;

ii) $\lim_{x\to-\infty} \exp[-\frac{1}{2}(A_1-1)x - \frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau]\mu(x,\tau) = 0$;

iii) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mu(x,\tau)}{\exp(\frac{1}{2}(A_1+1)x + \frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau)} = 1$.

A condição *ii*) indica que $\lim_{x\to-\infty}\mu(x,\tau) = 0$. Observe que na condição *i*),

$$\mu(x,0) = \mu_0(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(A_1-1)x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Antes de exibir a fórmula de apreçamento de uma opção de compra européia pelo modelo de Black-Sholes, precisamos de algumas definições e propriedades que serão utilizadas no decorrer da demonstação da solução da equação. A Equação (4.29) é uma equação de difusão do calor e utilizaremos a tranformada de Fourier para resolvê-la.

Definição 4.3. A transformada de Fourier $F(\omega)$ de uma função $\mu(x,\tau)$ é dada por

$$F(\omega) = \mathcal{F}(\mu(x,\tau)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x,\tau) e^{-i\omega x} dx. \tag{4.30}$$

Definição 4.4. A transformada inversa de Fourier $\mu(x,\tau)$ de $F(\omega)$ é dada por

$$\mu(x,\tau) = \mathcal{F}^{-1}(F(w)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \tag{4.31}$$

Propriedade 4.6.1. *(**A transformada de Fourier das derivadas**). Se as derivadas são realizadas em relação à variável x, escrevemos*

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) = \mathcal{F}(\mu_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_x(x,\tau) e^{-i\omega x} dx = i\omega F(\mu(x,\tau)). \tag{4.32}$$

De fato, fazendo uma mudança de variável, denotando $u = e^{-i\omega x}$, $dv = \mu_x(x,\tau)$, $du = -i\omega e^{-i\omega x} dx$, $v = \mu(x,\tau)$, pelo método de integração por partes, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mu_x) &= [e^{-i\omega x}\mu(x,\tau)]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x,\tau)(-i\omega) e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{M\to\infty} M(\mu,\tau) e^{-i\omega M} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N\to-\infty} N(\mu,\tau) e^{-i\omega N} \\
&- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x,\tau)(-i\omega) e^{-i\omega x} dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathcal{F}(\mu_x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x,\tau)(-i\omega) e^{-i\omega x} dx$$

e concluímos que

$$\mathcal{F}(\mu_x) = i\omega \mathcal{F}(\mu(x,\tau)).$$

Aplicando novamente a derivada em relação a x no processo anterior, temos

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}\right) = \mathcal{F}(\mu_{xx}) = -\omega^2 \mathcal{F}(\mu(x,\tau)). \tag{4.33}$$

Se as derivadas forem realizadas em relação à variável τ, obtemos as transformadas de Fourier da seguinte forma:

$$\mathcal{F}(\mu_\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_\tau(x,\tau) e^{-i\omega x} dx = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{F}(\mu(x,\tau)). \tag{4.34}$$

De fato,

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial \mu}{\partial \tau}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu_{\tau}(x,\tau)e^{-i\omega x}dx=\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(x,\tau)e^{-i\omega x}dx=\frac{\partial}{\partial \tau}\mathcal{F}(\mu(x,\tau)). \tag{4.35}$$

De maneira análoga,

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial \tau^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu_{\tau\tau}(x,\tau)e^{-i\omega x}dx=\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\mathcal{F}(\mu(x,\tau)). \tag{4.36}$$

Aplicando a definição dada pela Expressão (4.30) na Equação (4.29), temos

$$\mathcal{F}(\frac{\partial \mu(x,\tau)}{\partial \tau})=\mathcal{F}(\frac{\partial^2 \mu(x,\tau)}{\partial x^2}). \tag{4.37}$$

Agora, substituindo as Equações (4.33) e (4.35) na Equação (4.37), obtemos

$$\frac{\partial(\mu(x,\tau))}{\partial \tau}=-\omega^2\mathcal{F}(\mu(x,\tau). \tag{4.38}$$

Note que a Equação (4.38) é do tipo $\frac{dx}{dt}+ax=0$, ou seja, uma E.D.O linear homogênea de primeira ordem, com coeficientes constantes. Sabe-se que a solução geral dessa E.D.O é da forma $x=Ce^{-at}$. Logo, a solução da equação diferencial em (4.38) é

$$\mathcal{F}(\mu(x,\tau))=Ce^{-\omega^2\tau}. \tag{4.39}$$

Da Equação (4.39), temos

$$\mathcal{F}(\mu(x,0))=C, \tag{4.40}$$

e substituindo (4.40) em (4.39), obtemos

$$\mathcal{F}(\mu(x,\tau))=\mathcal{F}(\mu(x,0))e^{-\omega^2\tau}. \tag{4.41}$$

Afirmação 4.1. A transformada inversa da função $f(x)=e^{-ax^2}$ é dada por $F_\omega(e^{-ax^2})=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$. De fato, derivando $f(x)$, obtemos

$$f'(x)=-2axf(x). \tag{4.42}$$

Aplicando a transformada em ambos os membros da Equação (4.42) , obtemos

$$\begin{aligned} i\omega F(\omega) &= -2aiF'(\omega) \\ \omega F(\omega) &+ 2aF'(\omega)=0 \\ F'(\omega) &+ \frac{\omega}{2a}F(\omega)=0. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Multiplicando a Equação (4.43) por um fator integrante do tipo $\mu(t) = e^{\int \frac{\omega}{2a} d\omega} = e^{\frac{\omega^2}{4a}}$, temos

$$\frac{d}{d\omega}\left(e^{\frac{\omega^2}{4a}} F(\omega)\right) = 0. \tag{4.44}$$

Integrando a Equação (4.44) em relação a ω, obtemos

$$e^{\frac{\omega^2}{4a}} F(\omega) = C, \tag{4.45}$$

e, portanto,

$$F(\omega) = Ce^{\frac{-\omega^2}{4a}}. \tag{4.46}$$

Usando o fato de que $F(0) = C$, obtemos

$$F(\omega) = F(0)e^{\frac{-\omega^2}{4a}}. \tag{4.47}$$

Porém,

$$\begin{aligned} F(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ar^2} r dr d\theta\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2a}\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{2\pi} [e^{-ar^2}]_0^{\infty} d\theta\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}}. \end{aligned}$$

Portanto, $F_\omega(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{-\omega^2}{4a}}$.

Aplicando a transformada inversa ao termo $e^{-\omega^2\tau}$ na Equação (4.39), obtemos

$$k(x,\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{(e^{-\omega^2\tau})\}. \tag{4.48}$$

Calculando o resultado mostrado anteriormente, em (4.48), temos

$$k(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2\tau} e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{\frac{x^2}{4\tau}}. \tag{4.49}$$

Aplicando a transformada inversa em (4.41), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mu(x,\tau)\} &= \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mu(x,0)\}e^{-\omega^2\tau}\} && (4.50) \\ \mu(x,\tau) &= \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mu(x,0)\}\mathcal{F}\{k(x,\tau)\}\}. && (4.51) \end{aligned}$$

Pela propriedade da tranformada de Fourier da convolução, com $*$ denotando o operador convolução, a Equação (4.51) pode ser rescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mu(x,\tau) &= \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mu(x,0)\}\mathcal{F}\{k(x,\tau)\}\} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mu(x,0) * k(x,\tau)\}\} && (4.52) \\ &= \mu(x,0) * k(x,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(S,0)k(x-S,\tau)dS. && (4.53) \end{aligned}$$

Substituindo (4.49) em (4.53), obtemos

$$\mu(x,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \mu_0(S) \exp\left[\frac{-(x-S)^2}{4\tau}\right] dS, \tag{4.54}$$

onde $\mu(x,\tau)$ dada acima é a solução da equação de difusão do calor. Reescrevendo a Equação (4.54) de uma forma mais simplificada, fazendo uma mudança de variável, obtemos

$$e^{-\frac{1}{4\tau}(x-S)^2} = e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-S)^2}{2\tau}} \text{ e } y^2 = \frac{(x-S)^2}{2\tau} \Rightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{(x-S)^2}{2\tau}}.$$

Como $(x-S)^2 \geq 0$ e $|x-S| = |S-x|$, então

$$y = \frac{(S-x)}{\sqrt{2\tau}}. \tag{4.55}$$

Se $S = 0$, então $y = \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}$. Isolando S em (4.55), temos que $S = x + y\sqrt{2\tau}$ e assim $\frac{dS}{dy} = \sqrt{2\tau}$, o que implica que $dS = \sqrt{2\tau}dy$. Substituindo os termos acima em (4.54), temos

$$\begin{aligned}
\mu(x,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_0(x+y\sqrt{2\tau}) \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) \sqrt{2\tau}dy && (4.56)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_0(x+y\sqrt{2\tau}) \exp\left(\frac{-y^2}{2}dy\right), && (4.57)
\end{aligned}$$

onde

$$\mu_0(x+y\sqrt{2\tau}) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}(A_1+1)(x+y\sqrt{2\tau})} - e^{\frac{1}{2}(A_1-1)(x+y\sqrt{2\tau})}, & \text{se } y \geq \frac{-x}{\sqrt{2\tau}} \\ 0, \ \text{se } y < \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}. \end{cases}$$

Substituindo a expressão acima em (4.57), temos

$$\mu(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(A_1+1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{\frac{-y^2}{2}} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(A_1-1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{\frac{-y^2}{2}} dy. \tag{4.58}$$

Resolveremos a primeira integral da Expressão (4.58), na qual a chamaremos de I. A outra segue analogamente. Então segue,

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}[(A_1+1)y\sqrt{2\tau}-y^2]} dy,$$

e usando o método de completar quadrados, somamos e subtraímos o termo $\frac{\tau}{2}(A_1+1)^2$ no expoente da exponencial da integral de I, para assim obter

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}[(A_1+1)y\sqrt{2\tau}-y^2-\frac{\tau}{2}(A_1+1)^2+\frac{\tau}{2}(A_1+1)^2]} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}[-(-y+\frac{(A_1+1)\sqrt{2\tau}}{2})^2+\frac{\tau(A_1+1)^2}{2}]} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x} e^{\frac{1}{2}\frac{\tau(A_1+1)^2}{2}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}[-(-y+\frac{(A_1+1)\sqrt{2\pi}}{2})^2]} dy. && (4.59)
\end{aligned}$$

Simplificando a notação e chamando de q_1 o termo referente ao parênteses mais interno do expoente da integral da Expressão (4.59), temos

$$q_1 = -y + \frac{1}{2}(A_1+1)\sqrt{2\tau} = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(A_1+1)\sqrt{2\tau} \tag{4.60}$$

e $dq_1 = -dy$. Se y está variando de $\left(\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}, +\infty\right)$, então q_1 vai variar de $\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(A_1+1)\sqrt{2\tau}, +\infty\right)$. Logo, segue que

$$I = e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x+\frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau}\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\frac{1}{2}(A_1+1)\sqrt{2\tau}} e^{-\frac{1}{2}q_1^2}dq_1. \tag{4.61}$$

De maneira análoga, faremos com a segunda integral da Equação (4.58), na qual a chamaremos de II. Fazendo

$$q_2 = -y + \frac{1}{2}(A_1-1)\sqrt{2\tau} = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(A_1-1)\sqrt{2\tau}), \tag{4.62}$$

temos

$$II = e^{\frac{1}{2}(A_1-1)x+\frac{1}{4}(A_1-1)^2\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\frac{1}{2}(A_1-1)\sqrt{2\tau}} e^{-\frac{1}{2}q_2^2}dq_2. \tag{4.63}$$

Como o modelo de Black-Sholes possui distribuição normal, podemos considerar sua forma padronizada, de forma que a fdp com média 0 e variância 1 é dada por

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}q^2}dq. \tag{4.64}$$

Fazendo $q_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(A_1+1)\sqrt{2\tau}$ no limitante superior da integral da Expressão (4.61), obtemos

$$I = e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x+\frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{q_1} e^{-\frac{1}{2}q_1^2}dq_1, \tag{4.65}$$

onde $N(q_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{q_1} e^{-\frac{1}{2}q_1^2}dq_1$. Portanto, reescrevendo a Expressão (4.65), teremos

$$I = e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x+\frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau}N(q_1). \tag{4.66}$$

Procedendo de maneira análoga com a Expressão (4.63), obtemos

$$II = e^{\frac{1}{2}(A_1-1)x+\frac{1}{4}(A_1-1)^2\tau}N(q_2), \tag{4.67}$$

e, portanto, substituindo as Expressões (4.66) e (4.67) em (4.58), obtemos

$$\mu(x,\tau) = e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x+\frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau}N(q_1) - e^{\frac{1}{2}(A_1-1)x+\frac{1}{4}(A_1-1)^2\tau}N(q_2), \tag{4.68}$$

que é a solução da equação do calor em função dos termos do problema. É necessário agora reverter as mudanças de variáveis para determinar a solução da equação de Black-Sholes nas variáveis originais. Note que

$$v(x,\tau) = e^{-\frac{1}{2}(A_1-1)x-\frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau}\mu(x,\tau), \tag{4.69}$$

e substituindo (4.68) em (4.69), temos

$$\begin{aligned} v(x,\tau) &= e^{-\frac{1}{2}(A_1-1)x-\frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau}[e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x+\frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau N(q_1)} \\ &- e^{\frac{1}{2}(A_1-1)x+\frac{1}{4}(A_1-1)^2\tau N(q_2)}] \\ &= e^{-\frac{1}{2}(A_1-1)x-\frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau+\frac{1}{2}(A_1+1)x+\frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau N(q_1)} \\ &- e^{-\frac{1}{2}(A_1-1)x-\frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau+\frac{1}{2}(A_1-1)x+\frac{1}{4}(A_1-1)^2\tau N(q_2)} \\ &= e^x N(q_1) - e^{-A_1\tau}N(q_2). \end{aligned} \tag{4.70}$$

Como $A_1 = \frac{2r}{\sigma^2}$, então substituindo na Expressão (4.70), temos

$$v(x,\tau) = e^x N(q_1) - e^{-\frac{2r}{\sigma^2}\tau}N(q_2). \tag{4.71}$$

Anteriormente, definimos $f(S,t) := Kv(x,\tau)$. Basta agora multiplicar K em ambos os membros da Equação (4.71), lembrando que $S = Ke^x$ e $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$ e assim temos

$$Kv(x,\tau) = Ke^x N(q_1) - Ke^{-\frac{2r}{\sigma^2}(T-t)\frac{\sigma^2}{2}}N(q_2) \tag{4.72}$$

e, portanto,

$$f(S,t) = SN(q_1) - Ke^{-r(T-t)}N(q_2). \tag{4.73}$$

Note que o termo $SN(q_1)$ na Equação (4.73) significa o valor que o detentor do direito da opção de compra irá receber pelo papel no futuro. Enquanto o termo $Ke^{-r(T-t)}N(q_2)$, é o valor presente do preço de exercício final da data de expiração do contrato, ou seja, é o valor pelo qual o detentor do direito da opção de compra irá pagar pelo papel na maturidade. Note ainda que $N(q_1)$ é a probabilidade do exercício da opção na maturidade e $N(q_2)$ representa a probabilidade do número de opções que é preciso vender por cada unidade da ação. Aplicando os valores $x = \log\left(\frac{S}{K}\right)$, $A_1 = \frac{2r}{\sigma^2}$ e $\tau =$

$(T-t)\frac{\sigma^2}{2}$ em (4.60) e (4.62), temos

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right)}{\sqrt{2(T-t)\frac{\sigma^2}{2}}} + \frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\sqrt{2(T-t)\frac{\sigma^2}{2}} \\
&= \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} + \left(\frac{r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right)\sigma\sqrt{(T-t)} \\
&= \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} + \frac{r}{\sigma^2}\sigma\sqrt{(T-t)} + \frac{\sigma\sqrt{(T-t)}}{2} \\
&= \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} + \frac{r}{\sigma}\sqrt{T-t} + \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2} \\
&= \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + r\sqrt{(T-t)}\sqrt{(T-t)} + \frac{\sigma\sqrt{(T-t)}\sigma\sqrt{(T-t)}}{2}}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\
&= \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + r(T-t) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2}}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\
&= \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + (r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.
\end{aligned}
$$

Procedendo de maneira inteiramente análoga com q_2, temos

$$
q_2 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}. \tag{4.74}
$$

Substituindo q_1 e q_2 em (4.73), obtemos a solução do modelo de Black-Sholes para o apreçamento de opções européias (opção de compra), que tem a seguinte forma

$$
f(S,t) = SN\left[\frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right] - Ke^{-r(T-t)}N\left[\frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right].
$$

□

Observação 4.4. De acordo com Olga [20], por ter grande importância no mercado de opções, a fórmula desenvolvida por Black-Sholes foi submetida a vários testes empíricos desde a sua publicação. Porém, o que esses testes questionam não é a eficácia do modelo, mas sim a validade das suas hipóteses fundamentais. Os testes mais importantes foram feitos por Black & Sholes [2] e Galai [9], onde eles testaram a possibilidade de se obter retornos além da taxa de juros livre de risco r, usando a estretégia de comprar opções cujos valores estivessem depreciados e vender opções valorizadas. Os estudos mostram que é possível obter tais lucros, porém, não se pôde concluir que ocorreriam sempre. Garman [10] testou alternativas de se obter lucros sem risco (arbitragem) com opções, através de um método do cálculo que permite encontrar possibilidades de arbitragem em qualquer situação de mercado. Os testes indicaram que o modelo de Black-Sholes é eficiente em apontar situações de ganho sem risco. A hipótese de que a volatilidade e taxa de juros são constantes, não condiz com a realidade do mercado financeiro em geral e, em particular, do mercado de opções, pois se o contrato de opção for a longo prazo, a taxa de juros básica pode mudar, de acorco com o que foi acordado pelo COPOM (Comitê de Política Monetária do Banco Central). O comitê se reune a cada 45 dias para definir a taxa básica de juros da economia. Já a volatilidade, quanto maior o prazo de vencimento dessa opção, maior serão os saltos aleatório que a ação pode percorrer, com isso a volatilidade tende a oscilar e não permanecer constante ao longo do período de vencimento. Dessa forma, o modelo se torna eficiente para opções a curto prazo, ou seja, com data de vencimento mais próximas.

Observação 4.5. O modelo é eficiente para calcular o prêmio de opções "in the money"(dentro do dinheiro), ou seja, que estão próximas do valor de exercício, porém é ineficiente para opções " out the money" (fora do dinheiro), ou seja, que estão longe do valor de exercício, apontando grandes diferenças entre o preço dado pelo modelo e o preço real.

Observação 4.6. O modelo de Black-Sholes não leva em conta variáveis subjetivas, tais como a economia do país ou cenário político.

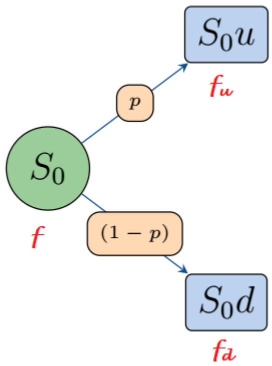
4.7 O Modelo Binomial

De acordo com Hull [14], um método bastante útil para o apreçamento de uma opção, consiste na técnica de construir uma espécie de "árvore binomial," um diagrama que representa os possíveis caminhos seguidos pelo preço de uma ação ao longo da vida de uma opção. O modelo binomial, como é conhecido, foi desenvolvido por Cox, Ross e Rubinstein [6] e por Rendleman e Bartter [22], onde a abordagem propicia soluções tanto para o apreçamento de opções do tipo européia, como opções do tipo americanas, onde também foi demonstrada uma ligação entre este modelo e o modelo de Black-Sholes. O preço de uma opção do tipo europeia, dado por uma árvore binomial, converge para o preço proposto pelo modelo de Black-Sholes, a medida que o número de intervalos de tempo aumenta. Como o preço da ação segue um caminho aleatório, a cada passo no tempo tem probabilidade de subir ou cair por um certo valor percentual.

4.7.1 O Modelo Binomial de Um Passo

Considerando o argumento sem arbitragem caracterizado na Seção 4.5 , suponhamos que f seja o preço de uma opção sobre uma ação, na qual a denotaremos por S_0. Seja T o prazo de expiração dessa opção, que durante a vida dessa opção, o preço da ação possa subir de S_0 para S_0u, ou descer de S_0 para S_0d, onde $u > 1$ e $d < 1$. Quando há um movimento de crescimento no preço da ação, o aumento percentual é dado por $u - 1$. Do contrário, quando há um movimento de queda no preço da ação, a redução percentual é de $1 - d$. Denotemos ainda, por f_u a opção quando o preço da ação sobe para S_0u e por f_d a opção quando o preço da opção cai para S_0d, como mostrado na Figura 4.2

Figura 4.2: Preço da Ação e Opção em uma árvore binomial de um passo.



Como feito anteriormente, consideremos uma carteira comprada em Δ ações e vendida em uma opção e calcula-se o valor de Δ a tornar a carteira livre de risco. Então, temos os seguintes valores para a carteira

$$[\prod]_1 = S_0u\Delta - f_u,$$

caso haja um movimento de crescimento no preço da ação. Em contrapartida, caso haja um movimento de queda no preço da ação, temos

$$[\prod]_2 = S_0d\Delta - fd.$$

A carteira é considerada livre de risco quando $[\prod]_1 = [\prod]_2$, ou seja,

$$S_0u\Delta - f_u = S_0d\Delta - f_d \Rightarrow \Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d}. \tag{4.75}$$

Para que não hajam oportunidades de arbitragem, a carteira deve obter a taxa de juros livre de risco. Denotando por r a taxa de juros livre de risco, o valor presente da carteira será

$$(S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}. \tag{4.76}$$

Como o custo de montar uma carteira é

$$S_0\Delta - f, \tag{4.77}$$

igualando as Expressões (4.76) e (4.77), obtemos

$$\begin{aligned} S_0\Delta - f &= (S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT} && (4.78)\\ &= S_0\Delta(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT}. && (4.79) \end{aligned}$$

Substituindo a Equação (4.75) na Equação (4.79), temos

$$\begin{aligned} f &= S_0\left(\frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}\right)(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT}\\ &= \frac{(f_u - f_d)(1 - ue^{-rT})}{u - d} + f_u e^{-rT}\\ &= \frac{f_u - f_u ue^{-rT} - f_d + f_d ue^{-rT}}{u - d} + f_u e^{-rT}\\ &= \frac{f_u - f_u ue^{-rT} - f_d + f_d ue^{-rT} + uf_u e^{-rT} - df_u e^{-rT}}{u - d}\\ &= \frac{f_u(1 - de^{-rT}) + f_d(ue^{-rT} - 1)}{u - d}\\ &= e^{-rT}[pf_u + (1 - p)f_d], && (4.80) \end{aligned}$$

onde

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}. \tag{4.81}$$

Dessa forma, as Expressões (4.80) e (4.81) caracterizam o apreçamento de uma opção, quando os movimentos do preço da ação são dados por uma árvore binomial de um passo, onde a Equação (4.80) leva em conta o argumento de não haver oportunidades de arbitragem.

4.7.2 Avaliação Neutra ao Risco (Risk-Neutral)

Segundo Hull [14], a avaliação neutra ao risco (risk-neutral) é um princípio importantíssimo no apreçamento de derivativos. Os investidores são considerados neutros ao risco, quando os mesmos não aumentam o retorno esperado exigido em um investimento em detrimento de um risco maior. O mundo onde os investidores são neutros ao risco é chamado de *mundo risk-neutral*. Porém, na prática, sabemos que o mundo em que vivemos não é risk-neutral, pois quanto maiores os riscos assumidos pelos investidores, maiores são os retornos exigidos. Supor que o mundo é risk-neutral nos diz o preço da opção de forma correta tanto para o mundo no qual vivemos, quanto para um mundo risk-neutral. Quando apreçamos uma opção em relação ao preço da ação subjacente, as preferências de risco dos investidores são importantes. Quanto mais os investidores se tornam contrários ao risco, mais os preços das açõs diminuem, porém, as fórmulas que relacionam os preços das opções às ações, continuam as mesmas.

Assumir que os investidores são neutros ao risco simplifica as soluções de alguns problemas de apreçamento de derivativos, pois permite que seja considerado que o retorno requerido de qualquer ação é a taxa de juros livre de risco; além de a taxa de desconto usada para o resultado esperado sobre uma opção também ser a taxa de juros livre de risco. Observando a Equação (4.80), o parâmetro p é caracterizado como a probabilidade neutra ao risco de um movimento de crescimento no preço da ação. Já $1-p$ é a probabilidade de um movimento de queda nesse mundo. Seja $u > e^{rT}$. Então $0 < p < 1$. Note que a expressão

$$pf_u + (1-p)f_d,$$

é o resultado futuro esperado em um mundo risk-neutral e a Equação (4.80) nos diz que o valor da opção hoje é o seu resultado futuro esperado em um mundo risk-neutral, descontado pela taxa de juros livre de risco.

Observação 4.7. Quando p é a probabilidade de um movimento crescente no preço da ação, o preço da ação esperado $E(S_T)$, onde S_T representa o preço da ação no tempo T, é dada por

$$\begin{aligned} E(S_T) &= pS_0u + (1-p)S_0d \\ E(S_T) &= pS_0(u-d) + S_0d. \end{aligned} \tag{4.82}$$

Substituindo a Equação (4.81) na Expressão (4.82), temos

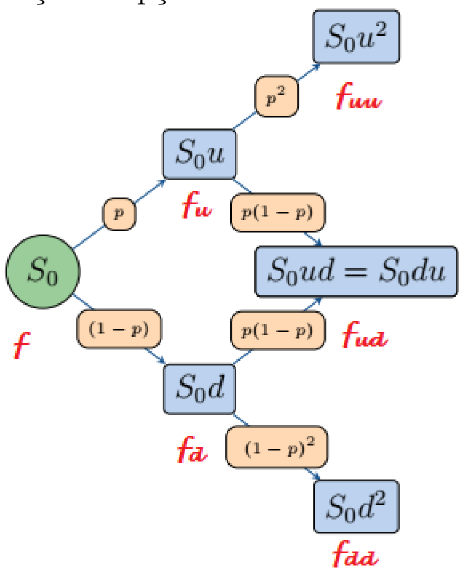
$$E(S_T) = S_0e^{rT},$$

ou seja, o resultado obtido pelo modelo binomial a partir de argumentos de não arbitragem é equivalente ao assumido pela avaliação neutra ao risco. O preço da ação se comporta como é esperado em um mundo risk-neutral, quando p é a probabilidade de um movimento crescente no preço da ação.

4.7.3 O Modelo Binomial de Dois Passos

De acordo com Hull [14], os princípios aplicados anteriormente, devem ser utilizados de maneira repetida, onde o objetivo é calcular o preço da opção no nó inicial da árvore.

Figura 4.3: Preço da Ação e Opção em uma árvore binomial de dois passos.



Pela Figura 4.3, note que o preço da ação no nó inicial é S_0. Durante os nós seguintes, a cada passo no tempo, o preço S_0 da ação sobe para S_0u ou desce para S_0d. A notação para dois movimentos de crescimento no valor da opção será f_{uu}, como mostrado na Figura 4.3. Suponhamos que r é a taxa de juros livre de risco e a duração de cada passo no tempo é Δt anos. Assim, as Equações (4.80) e (4.81) ficam da seguinte forma

$$f = e^{-r\Delta t}[pf_\mu + (1-p)f_d], \tag{4.83}$$

e

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u-d}. \tag{4.84}$$

A aplicação de um movimento crescente na Equação (4.83) nos dá

$$f_u = e^{-r\Delta t}[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}]. \tag{4.85}$$

Já a aplicação de um movimento de queda na Equação (4.83) nos dá

$$f_d = e^{-r\Delta t}[pf_{ud} + (1-p)f_{dd}], \tag{4.86}$$

Substituindo as Expressões (4.85) e (4.86) em (4.83), obtemos

$$\begin{aligned} f &= e^{-r\Delta t}[p(e^{-r\Delta t}pf_{uu} + e^{-r\Delta t}(1-p)f_{ud}) + (1-p)(e^{-r\Delta t}pf_{ud} + e^{-r\Delta t}(1-p)f_{dd})] \\ &= e^{-2r\Delta t}p^2 f_{uu} + e^{-2r\Delta t}p(1-p)f_{ud} + (1-p)e^{-2r\Delta t}pf_{ud} + e^{-2r\Delta t}(1-p)^2 f_{dd} \\ &= e^{-2r\Delta t}[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}], \end{aligned}$$

onde as variáveis p^2, $2p(1-p)$ e $(1-p)^2$ são as probabilidades dos nós finais superior, médio e inferior serem obtidos. Na proporção que adicionamos passos à árvore binomial, o princípio da avaliação neutra do risco continua sendo válido.

4.7.4 Determinação dos Valores de u e d

Segundo Hull [14], são necessários três parâmetros para a construção da arvore binomial com passos no tempo Δt : os parâmetros u, d, e p. O parâmetro p já foi dado anteriormente pela Equação (4.81). Já os parâmetros u e d são escolhidos para corresponder à volatilidade. Como visto anteriormente, sabemos que o desvio padrão da mudança percentual no preço da ação em um curto intervalo de tempo Δt é $\sigma\sqrt{\Delta t}$ e sua respectiva variância é $\sigma^2\Delta t$. além disso, sabemos que a variância de uma variável aleatória qualquer, digamos Y é dada por $E(Y^2) - [E(Y)]^2$, na qual E é o valor esperado. Existe uma probabilidade p de que a ação ofereça um retorno de $u-1$. Por outro lado, existe uma probabilidade $1-p$ de que a ação ofereça um retorno de $d-1$, durante um passo no tempo Δt. Dessa forma, temos

$$\sigma^2\Delta t = p(u-1)^2 + (1-p)(d-1)^2 - [p(u-1) + (1-p)(d-1)^2]. \tag{4.87}$$

Substituindo o parâmetro p que está na Equação (4.84) e ignorando os termos em Δt^2 e potências maiores de Δt, chegamos em uma solução para a Equação (4.87) que é

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta}} \;\; \text{e} \;\; d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tag{4.88}$$

mais detalhes de como foram descobertos esses valores de u e d, consultar Cox,Ross e Rubinstein [6]. No processo feito acima, correspondem à volatilidade em um mundo risk-neutral.

Observação 4.8. As fórmulas dos parâmetros u e d permanecem as mesmas, quando correspondem à volatilidade em um mundo real. Portanto, os parâmetros u, d e p precificam uma árvore binomial. Note que o termo $e^{r\Delta t}$ em p é chamado de fator de crescimento.

Observação 4.9. O modelo binomial apresentado aqui nesta seção é uma "aproximação grosseira" do preço da opção, já que analizamos o preço da ação durante o tempo de contrato da opção seguindo o modelo binomial. Na prática, são considerados 30 ou até mais passos no tempo. De acordo com Hull [14], à medida que aumenta-se o número de passos no tempo, de forma que Δt diminui, o modelo binomial faz o uso das mesmas hipóteses do modelo de Black-Sholes em relação ao comportamento do preço da ação. Quando o modelo binomial é usado para o apreçamento de uma opção do tipo europeia, o preço dessa ação converge para o preço proposto pelo modelo de Black-Sholes, na proporção que aumenta-se a quantidade de passos no tempo.

4.8 Precificação de Opções usando os Modelos Black-Sholes e Binomial

Nesta seção, iremos apresentar uma aplicação considerando dados reais, obtidos do site opções.net[21], que disponibiliza as cotações de fechamento do mercado.

Exemplo 6. Considere a empresa Petróleo Brasileiro S.A - PETROBRAS, cujas ações (PETR4) são negociadas em bolsa. Seja PETRH247 uma opção de compra (call) do tipo europeia, com strike de $R\$ \ 27,96$, onde a ação hoje está cotada a $R\$ \ 29,02$ o vencimento da opção é 20 de agosto e a taxa de juros é de $5,25\%$ a.a. Esses dados tem por referência a data de 16 de agosto. A volatilidade é estimada a partir de dados históricos dos últimos 21 dias úteis de negociação e estão dispostos na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Cálculo da volatilidade Histórica de PETR4.

Dia i	**PAF**(S_i)	**PR** ($\frac{S_i}{S_{i-1}}$)	**RD** ($u_i = \log(\frac{S_i}{S_{i-1}})$)	u_i^2
0	$22,24$	...	...	...
1	$26,59$	$1,0133$	$0,0132$	$0,0001$
2	$26,96$	$1,0139$	$0,0138$	$0,0001$
3	$26,9$	$0,9978$	$-0,0022$	0
4	$26,74$	$0,9941$	$-0,0059$	0
5	$27,47$	$1,0273$	$0,0269$	$0,0007$
6	$27,15$	$0,9884$	$-0,0117$	$0,0001$
7	$27,71$	$1,0206$	$0,0204$	$0,0004$
8	$27,81$	$1,0036$	$0,0035$	0
9	$26,91$	$0,9676$	$-0,0329$	$0,0010$
10	$26,41$	$0,9814$	$-0,0188$	$0,0003$
11	$26,85$	$1,0167$	$0,0166$	$0,0002$
12	$26,28$	$0,9788$	$-0,0214$	$0,0004$
13	$28,35$	$1,0788$	$0,0758$	$0,0057$
14	$28,39$	$1,0014$	$0,0013$	0
15	$28,19$	$0,9930$	$-0,0070$	0
16	$28,28$	$1,0032$	$0,0031$	0
17	$28,67$	$1,0138$	$0,0137$	$0,0001$
18	$29,10$	$1,0150$	$0,0149$	$0,0002$
19	$29,35$	$1,0086$	$0,0085$	0
20	$28,64$	$0,9758$	$-0,0245$	$0,0006$
$\sum$	...	...	$0,0873$	$0,0099$

Dessa forma, temos $n = 20$ e

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = 0,0873 \text{ e } \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 0,0099.$$

A estimativa do desvio padrão do retorno diário é

$$\sqrt{\frac{0,0099}{19} - \frac{0,0873^2}{20(19)}} \simeq 0,0224 \simeq 2,24\%.$$

Considerando 252 dias de negociação ao ano, $\tau = \frac{1}{252}$, e os dados nos mostram uma estimativa para a volatilidade anual de $0,0224\sqrt{252} \simeq 0,3556 \simeq 35,56\%$, para um erro de aproximadamente

$$\frac{0,3556}{\sqrt{2 \times 20}} \simeq 0,0562 \simeq 5,62\%$$

ao ano. Como usaremos a frequência diária, devemos transformar a volatilidade e a taxa de juros que estão em anos, para dias. Logo, a taxa de juros de $5,25\%$ pode ser convertida pela eguinte fórmula

$$r_d = (1+r_a)^{\frac{1}{252}} - 1 = (1+0,0525)^{\frac{1}{252}} - 1 \simeq 0,0002 = 0,02\%.$$

onde r_d e r_a são respecivamente os retornos diário e anual. Já a volatilidade pode ser convertida usando a seguinte relação

$$v_d = \frac{v_a}{\sqrt{252}} = \frac{0,3556}{\sqrt{252}} = 0,0224 = 2,24\%,$$

onde v_d e v_a são respectivamente as volatilidades diária e anual. Substituindo esses valores em u e d dados na Expressão (4.88), temos

$$u = e^{0,0224\times 1} \simeq 1,0227 \quad \text{e} \quad d = e^{-0,0224\times 1} \simeq 0,9778.$$

A probabilidade do preço da ação subir será de

$$p = \frac{e^{0,0002\times 1} - 0,9778}{1,0227 - 0,9778} \simeq 0,4989,$$

onde $\Delta t = \frac{\text{prazo de vencimento}}{\text{número de passos}} = \frac{4}{4} = 1$ e consequentemente a probabilidade de cair, $1 - p = 0,5011$. Dessa maneira, temos todos os dados que precisamos para montar a árvore binomial. Com o auxílio do *excel*, construímos uma árvore binomial de 4 passos. Os dados foram obtidos a partir da cotação da ação no dia 16 de agosto, onde em cada nó, cada valor da ação tem uma probabilidade de crescimento ou queda, assim como foi mostrado na Seção 4.7.1, ou seja, se o preço da ação hoje é 29,02, amanhã o preço pode subir por um fator u ou cair por um fator d. Na Figura 4.4, segue a movimentação dos preços da ação nos próximos 4 dias.

Figura 4.4: Estimação de preços de PETR4 através da árvore binomial de 4 passos.

		Período em dias (Δt)				
		0	1	2	3	4
Nós	**Preço da Ação na Árvore**					
0	R$	29,02	29,68	30,35	31,04	31,74
1			28,38	29,02	29,68	30,35
2				27,75	28,38	29,02
3					27,13	27,75
4						26,53

No primeiro dia , o preço da ação pode subir para $29,68$ ou cair para $28,38$, ou seja

$$\text{Preço no primeiro dia } (crescimento) = \text{Preço no dia } 0 \times u = 29,02 \times 1,0227 = 29,68$$

$$\text{Preço no primeiro dia } (queda) = \text{Preço no dia } 0 \times d = 29,02 \times 0,9778 = 28,38,$$

e assim sucessivamente a cada passo no tempo.

Como agora temos os possíveis valores da ação em cada passo no tempo (em cada dia), agora devemos analisar a opção de compra. Essa análise na árvore deve deve ser feita de maneira retroativa, ou seja, do futuro para o presente. Na Figura 4.5, obtemos os valores refentes à opção em cada nó.

Figura 4.5: Estimação de preços de uma call através da árvore binomial de 4 passos.

	Período em dias (Δt)				
	0	1	2	3	4
Nós	**Preço da Opção na Árvore**				
0	R$ 1,2256	1,76	2,40	3,08	3,78
1		0,69	1,12	1,72	2,39
2			0,26	0,53	1,06
3				0,00	0,00
4					0,00

Os valores obtidos no último passo, são calculados usando a fórmula referente a uma posição comprada em uma opção de compra, isto é,

$$\max(S - K; 0),$$

ou seja

$$\begin{aligned}
\max(31,74 - 27,96; 0) &= 3,78; \\
\max(30,35 - 27,96; 0) &= 2,39; \\
\max(29,02 - 27,96; 0) &= 1,06; \\
\max(27,75 - 27,96; 0) &= 0; \\
\max(26,53 - 27,96; 0) &= 0.
\end{aligned}$$

Já os valores nos passos 3, 2, 1 e 0 são obtidos aplicando as fórmula dadas em (4.83), (4.84), onde $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ e $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$. Então, calculando os valores no terceiro passo obtemos

$$
\begin{aligned}
f &= e^{-0,0002\times 1}[0,4989 \times 0 + 0,5011 \times 0] = 0;\\
f &= e^{-0,0002\times 1}[0,4989 \times 1,06 + 0,5011 \times 0] = 0,53;\\
f &= e^{-0,0002\times 1}[0,4989 \times 2,39 + 0,5011 \times 1,06] = 1,72;\\
f &= e^{-0,0002\times 1}[0,4989 \times 3,78 + 0,5011 \times 2,39] = 3,08.
\end{aligned}
$$

Os demais valores nos passos anteriores são adquiridos de maneira análoga. Portanto,o preço da opção de compra é de $R\$\ 1,2256$. Porém, a medida que diminuímos Δt, ou seja, aumentamos a quantidade de passos no tempo, a árvore binomial se torna cada vez mais precisa quanto ao valor da opção de compra e se aproxima do valor dado pelo modelo de Black-Sholes. De acordo com Hull [14], uma simulação através da árvore binomial de 30 passos no tempo ou mais é considerável satisfatória. Com o auxílio também do *excel*, agora calculamos o valor da opção de compra através de uma árvore binomial de 30 passos no tempo e chegamos no resultado dado pela Figura 4.6.

Figura 4.6: Preço de uma call através da árvore binomial de 30 passos.

OPÇÃO DE COMPRA PETRH247		
Valor da Ação - S	29,02	
Strike - K	27,96	
Tempo/Passos - Δt/N	0,13	#valores convertidos para dias
Volatilidade - σ	35,56%	2,24%
Taxa livre de risco - r	5,25%	0,02%
Parâmetros		
u	1,0082	
d	0,9919	
p	0,4996	
1-p	0,5004	

Valor da Opção de Compra
R$ 1,2242

Portanto, o valor de uma opção de compra PETRH247 dado pelo modelo Binomial de 30 passos é de $R\$\ 1,2242$. Disponibilizamos no Apêndice A, a figura extraída do *excel* referente à árvore binomial de 30 passos no tempo.

4.8.1 Modelo Binomial x Black-Sholes

Vejamos agora como esses valores se comportam quando comparados com o resultado obtido pelo modelo de Black- Sholes. Como visto na Seção 4.6.1, para o preço de uma opção de compra europeia, temos a seguinte equação

$$f(S,t) = SN(q_1) - Ke^{-r(T-t)}N(q_2) \tag{4.89}$$

onde q_1 e q_2 são dados por

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right)\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ q_2 &= \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

Substituindo os parâmetros em q_1 e q_2, obtemos

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{ln\left(\frac{29{,}02}{27{,}96}\right) + \left(0,0525 + \frac{0{,}1265}{2}\right)\left(\frac{4}{252}\right)}{0,3557\sqrt{\frac{4}{252}}} \simeq 0,8714 \\ q_2 &= \frac{ln\left(\frac{29{,}02}{27{,}96}\right) + \left(0,0525 - \frac{0{,}1265}{2}\right)\left(\frac{4}{252}\right)}{0,3557\sqrt{\frac{4}{252}}} \simeq 0,8266. \end{aligned}$$

Sabe-se que $N(d)$ é a fdp normal e usando a função *DISTNORM* do excel, obtemos os valores

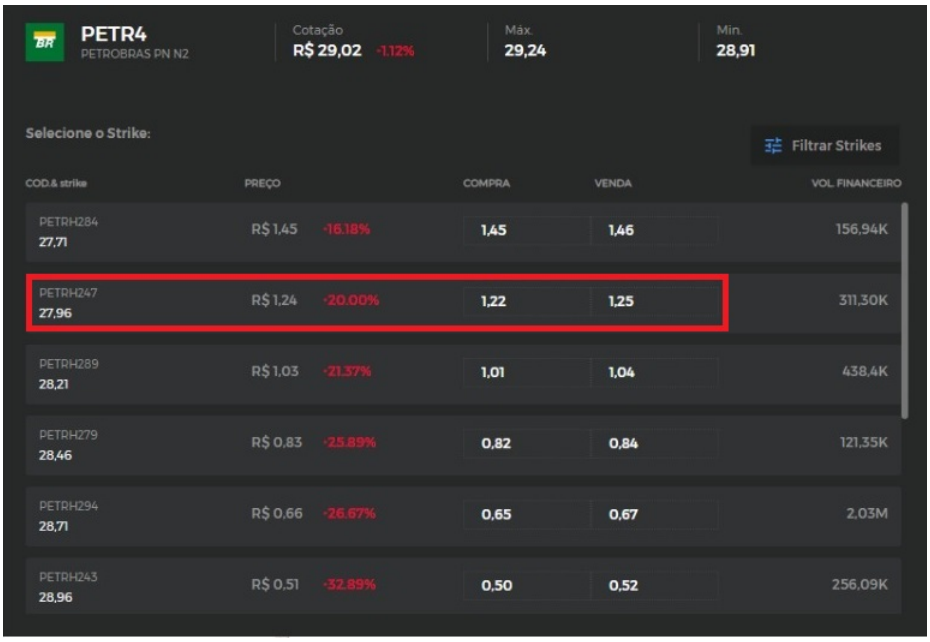
$$\begin{aligned} N(q_1) &= N(0,8714) = 0,8082 \\ N(q_2) &= N(0,8266) = 0,7958. \end{aligned}$$

Aplicando os valores de $N(q_1)$ e $N(q_2)$ em (4.89), temos

$$f(S,t) = 29,02(0,8082) - 27,96e^{-0{,}0525\left(\frac{4}{252}\right)}0,7958 \simeq 1,2238. \tag{4.90}$$

Portanto, o valor da opção de compra PETRH247, com vencimento de 20 de Agosto dado pelo modelo de Black-Sholes é de $R\$$ 1,2238. Nota-se que esse preço é bem próximo do preço dado pela tabela de opções da Petrobrás, Figura 4.7. A diferença de preço se dá por fatores externos que não são incorporados no modelo.

Figura 4.7: Opções da PETR4.



Observe que os valores dados pelos modelos Binomial de 4 passos e 30 passos, são bem próximos do preço dado pelo modelo de Black-Sholes. Porém, constata-se que o preço dado pelo modelo Binomial de fato se aproxima do preço dado pelo modelo de Black-Sholes, à medida que aumenta-se a quantidade de passos no tempo. A variação percentual de cada modelo é mostrada nas Figuras 4.8 e 4.9.

Figura 4.8: Diferença percentual entre o modelo de Black-Sholes e Binomial de 4 passos.

DIFERENÇA BINOMIAL vs BLACK-SHOLES (%)	
Opção de Compra	14,7248%

Figura 4.9: Diferença percentual entre o modelo de Black-Sholes e Binomial de 30 passos.

DIFERENÇA BINOMIAL vs BLACK-SHOLES (%)	
Opção de compra	2,9375%

Considerações Finais

A busca por entender matematicamente o movimento dos preços das ações, levou os estudiosos da época à criação de modelos matemáticos que pudessem descrever as flutuações dos preços das ações.

Neste trabalho, apresentamos uma teoria acerca das opções europeias, na qual a finalidade é a precificação de uma opção desse tipo. Realizamos um estudo bibliográfico dos modelos de precificação de opções europeias: Black-Sholes e Binomial, onde pudemos observar, com riqueza de detalhes, como a modelagem matemática é aplicada em situações reais.

Foi proposto uma construção acerca da fórmula de apreçamento de opções de compra europeia, através do modelo de Black-Sholes. Embora esse modelo tenha algumas limitações em relação a variáveis externas que não são consideradas ou mesmo algumas hipóteses que fogem de um cenário mais realista, ainda assim é o mais utilizado para determinar o prêmio de uma opção europeia, tendo grande sucesso e aceitação no âmbito dos mercados financeiros.

O modelo Binomial que estudamos, surge como um outro meio de precificar opções europeias, também de grande importância para a precificação dessas opções, como também aplicável em outros tipos de opções.

Realizamos uma aplicação dos modelos estudados, Black-Sholes e Binomial em situação real com opções de compra da empresa Petróleo Brasileiro S.A - PETROBRAS. Fora utilizados dados em tempo real do mercado no dia 16 de agosto. O prazo de vencimento do contrato era 20 de agosto. A taxa de juros (SELIC) em vigência para esta data era de $5,25\%$ a.a. Por meio desses dados, pudemos fazer uma estimativa teórica do prêmio da opção de compra PETRH247. Mostramos através da comparação dos resultados obtidos pelos dois modelos, com utilização de dados realistas, a diferença mínima em relação ao modelo binomial de 30 passos no tempo e o modelo de Black-Sholes, constatando a convergência para a solução encontrada por Black-Sholes, à medida que se aumentam a quantidade de passos no tempo. Essa comprovação reafirma ainda mais a importância do modelo de Black-Sholes no contexto da precificação de opções. Nesse sentido, a modelagem matemática contribui para o desenvolvimento da teoria de opções e espera-se que esse trabalho possa motivar pessoas que queiram estudar o mercado de opções sobre um aspecto matemático.

Referências

[1] BACHELIER,L. Theórie de la Speculatión. **Annales scientifiques de l'É.N.S**, 3 série, v.17, p.21-86, 1900.

[2] BLACK, F; SHOLES, M. The valuation of options contracts and a test of market efficiency. **Journal Political Economy**, Chicago, v.27, 2.ed , p.497-505, May 1972.

[3] BONOTTO, M. E. **A Equação de Black-Scholes com ação impulsiva**. 2008. 115f. Tese (Instituto de Ciências Matemáticas e Computação), USP-São Carlos, São Carlos, 2008.

[4] BUSSAB, W.O; MORENTTIN, P.A. **Estatística Básica**. 7.ed. São Paulo: Saraiva, 2012.

[5] CARDOSO, R.F. **Distribuição Log-normal e aplicações**. 2017. 43f. Monografia (Graduação) – Universidade Federal do Maranhão, Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, São Luis, 2017.

[6] COX, J.C; ROSS, S.A; RUBINSTEIN, M.Option Princing: A simplifield Approach. **Jornal of Financial Economics** ,v.7, p.229-263, 1979. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0304405X79900151. Acesso: 01/08/2021.

[7] DUQUE, O.M.L. **Uma breve análise do movimento browniano**, 2014. 142f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Espírito Santo, Espírito Santo, 2014.

[8] FERNANDES, F.N. **Modelos de precificação em finanças:** Uma aplicação em opções sobre ações, 2016. 50f. Monografia (MBA em finanças empresariais) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Economia, Rio de janeiro, 2016.

[9] GALAI, D. Test of marktet efficiency and the Chicago Board Exchange. **Journal of Business**, Chicago, v.50, n.2, p.167-197, april l977. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/2352152. Acesso:18/09/2021.

[10] GARMAN, M,B. An Álgebra for evaluating hedges portifolios. **Journal of Financial Economics** , Rochester, v.3, 4.ed, p.403-427, october 1976. Disponível:https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0304405X76900295. Acesso: 18/09/2021.

[11] GIL, S. Lema de Ito. **Economipedia**, 2015. Disponível em: https://economipedia.com/definiciones/lema-de-ito.html. Acesso em: 18/08/2021.

[12] HILLIER, F. S; LIEBERMAN, G.J. **Introdução à pesquisa operacional**. 8.ed. tradução Ariovaldo Griesi; revisão técnica João Chang Junior. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

[13] HISSA, M.B. **Introdução às Opções:** aprenda a operar com segurança. 3.ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

[14] HULL, J. C. **Options, futures and other derivatives**. 7.ed. Boston: Pearson Prentice-Hall, 2008.

[15] INFOMONEY. **Glossário Financeiro**. Disponível em : http://https://www.infomoney.com.br/glossario/. Acesso em: 06/09/2021

[16] LEVADA, C.L.; Maceti, H.; LAUTENSCHLEGUER, I. J. Considerações sobre Econofísica. Uniesp, 2017. Disponível em: http://uniesp.edu.br/sites/_biblioteca/revistas/20170602114001.pdf. Acesso em: 30/07/2021.

[17] MACIEL, E.G. **Avaliação sobre a percepção do mercado de ações**. Disponível em: http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/13993/000649777.pdf , 2007. Acesso em 02/08/2021.

[18] MAGALHÃES, M.N; LIMA, A.C.P. **Noções de probabilidade**. 6.ed. rev.1. reimpr. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2017.

[19] MEYER, P.L. **Probabilidade:** Aplicações estatísticas à estatística. 2.ed. reimpr. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

[20] OLGA,L.F.**A teoria da ciência no modelo Black-Sholes de apreçamento de opções**,2007. 61f. Dissertação (Mestrado em Filosofia)- Universidade de São Paulo, Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, São Paulo, 2007.

[21] OPÇÕ̃ES.NET.**Opções.net.br**. Disponível em: http://https://opcoes.net.br/opcoes /bovespa/PETR4. Acesso em: 23/09/2021.

[22] RENDLEMAN, R.J; BARTTER, B.J. Two-State Option Pricing. **The Jornal of Finance**, v.34, 5.ed, p.1093-1110, 1979. Disponível em: https://www.scirp.org(S(czeh2tfqyw2orz553k1w0r45))/reference/ReferencesPapers. aspx?ReferenceID=2187035. Acesso:17/08/2021.

[23] RUBASH, K. **A Study of Option Pricing Models**. Bradley University, Foster College of Business Administration, Peoria, Illinois, USA, 2001. Disponível em: http://bradley.bradley.edu/ arr/bsm/model.html. Acesso em 01/08/2021.

[24] SALOMÃO, M, F. **Precicação de opções financeiras:** um estudo sobre os modelos de Black-sholes e Garch, 2011. 106f. Dissertação (Mestrado em Economia) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Jurídicas e Econômicas, Vitória, 2011.

[25] SANTOS, R.J. **Equações diferenciais parciais:** Uma introdução. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2011. Disponível em: http:www.mat.ufmg.br/ regi. Acesso: 17/08/2021.

[26] SELAN, B. **Mercado Financeiro**. 1.ed. Rio de Janeiro: SESES, 2014.

[27] SILVA, B. F. C.S. **Modelo de Black-Sholes como alternativa de investimento para os produtores rurais dos vales Jequitinhonha e Mucuri**, 2017. 183f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Programa de Pós Graduação em Tecnologia, Ambiente e Sociedade, Teófilo Otoni, 2017.

[28] SILVA, L. M.S. **Cadeias de Markov e Aplicações**, 2017. 71f. Monografia (Graduação em Matemática com ênfase computacional) – Universidade Federal Fluminense, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Volta Redonda, 2017.

Apêndice

A Binomial de 30 passos no tempo

Figura A.1: Árvore binomial de 30 passos no tempo para o preço da ação.

ÁRVORE BINOMIAL DOS PREÇOS DA AÇÃO

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	29,02																														
1	29,26	28,78																													
2	29,50	29,02	28,55																												
3	29,74	29,26	28,78	28,32																											
4	29,99	29,50	29,02	28,55	28,09																										
5	30,23	29,74	29,26	28,78	28,32	27,86																									
6	30,48	29,99	29,50	29,02	28,55	28,09	27,63																								
7	30,73	30,23	29,74	29,26	28,78	28,32	27,86	27,41																							
8	30,98	30,48	29,99	29,50	29,02	28,55	28,09	27,63	27,18																						
9	31,24	30,73	30,23	29,74	29,26	28,78	28,32	27,86	27,41	26,96																					
10	31,49	30,98	30,48	29,99	29,50	29,02	28,55	28,09	27,63	27,18	26,74																				
11	31,75	31,24	30,73	30,23	29,74	29,26	28,78	28,32	27,86	27,41	26,96	26,52																			
12	32,01	31,49	30,98	30,48	29,99	29,50	29,02	28,55	28,09	27,63	27,18	26,74	26,31																		
13	32,28	31,75	31,24	30,73	30,23	29,74	29,26	28,78	28,32	27,86	27,41	26,96	26,52	26,09																	
14	32,54	32,01	31,49	30,98	30,48	29,99	29,50	29,02	28,55	28,09	27,63	27,18	26,74	26,31	25,88																
15	32,81	32,28	31,75	31,24	30,73	30,23	29,74	29,26	28,78	28,32	27,86	27,41	26,96	26,52	26,09	25,67															
16	33,08	32,54	32,01	31,49	30,98	30,48	29,99	29,50	29,02	28,55	28,09	27,63	27,18	26,74	26,31	25,88	25,46														
17	33,35	32,81	32,28	31,75	31,24	30,73	30,23	29,74	29,26	28,78	28,32	27,86	27,41	26,96	26,52	26,09	25,67	25,25													
18	33,62	33,08	32,54	32,01	31,49	30,98	30,48	29,99	29,50	29,02	28,55	28,09	27,63	27,18	26,74	26,31	25,88	25,46	25,05												
19	33,90	33,35	32,81	32,28	31,75	31,24	30,73	30,23	29,74	29,26	28,78	28,32	27,86	27,41	26,96	26,52	26,09	25,67	25,25	24,84											
20	34,18	33,62	33,08	32,54	32,01	31,49	30,98	30,48	29,99	29,50	29,02	28,55	28,09	27,63	27,18	26,74	26,31	25,88	25,46	25,05	24,64										
21	34,46	33,90	33,35	32,81	32,28	31,75	31,24	30,73	30,23	29,74	29,26	28,78	28,32	27,86	27,41	26,96	26,52	26,09	25,67	25,25	24,84	24,44									
22	34,74	34,18	33,62	33,08	32,54	32,01	31,49	30,98	30,48	29,99	29,50	29,02	28,55	28,09	27,63	27,18	26,74	26,31	25,88	25,46	25,05	24,64	24,24								
23	35,03	34,46	33,90	33,35	32,81	32,28	31,75	31,24	30,73	30,23	29,74	29,26	28,78	28,32	27,86	27,41	26,96	26,52	26,09	25,67	25,25	24,84	24,44	24,04							
24	35,31	34,74	34,18	33,62	33,08	32,54	32,01	31,49	30,98	30,48	29,99	29,50	29,02	28,55	28,09	27,63	27,18	26,74	26,31	25,88	25,46	25,05	24,64	24,24	23,85						
25	35,60	35,03	34,46	33,90	33,35	32,81	32,28	31,75	31,24	30,73	30,23	29,74	29,26	28,78	28,32	27,86	27,41	26,96	26,52	26,09	25,67	25,25	24,84	24,44	24,04	23,65					
26	35,90	35,31	34,74	34,18	33,62	33,08	32,54	32,01	31,49	30,98	30,48	29,99	29,50	29,02	28,55	28,09	27,63	27,18	26,74	26,31	25,88	25,46	25,05	24,64	24,24	23,85	23,46				
27	36,19	35,60	35,03	34,46	33,90	33,35	32,81	32,28	31,75	31,24	30,73	30,23	29,74	29,26	28,78	28,32	27,86	27,41	26,96	26,52	26,09	25,67	25,25	24,84	24,44	24,04	23,65	23,27			
28	36,49	35,90	35,31	34,74	34,18	33,62	33,08	32,54	32,01	31,49	30,98	30,48	29,99	29,50	29,02	28,55	28,09	27,63	27,18	26,74	26,31	25,88	25,46	25,05	24,64	24,24	23,85	23,46	23,08		
29	36,79	36,19	35,60	35,03	34,46	33,90	33,35	32,81	32,28	31,75	31,24	30,73	30,23	29,74	29,26	28,78	28,32	27,86	27,41	26,96	26,52	26,09	25,67	25,25	24,84	24,44	24,04	23,65	23,27	22,89	
30	37,09	36,49	35,90	35,31	34,74	34,18	33,62	33,08	32,54	32,01	31,49	30,98	30,48	29,99	29,50	29,02	28,55	28,09	27,63	27,18	26,74	26,31	25,88	25,46	25,05	24,64	24,24	23,85	23,46	23,08	22,71

Figura A.2: Árvore binomial de 30 passos no tempo para o preço da opção.

ÁRVORE BINOMIAL DOS PREÇOS DA OPÇÃO

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	R$ 1,2242
1	1,42	1,03
2	1,62	1,21	0,85
3	1,84	1,40	1,02	0,69
4	2,07	1,61	1,20	0,84	0,55
5	2,30	1,83	1,39	1,00	0,67	0,42
6	2,54	2,06	1,60	1,18	0,82	0,53	0,31
7	2,79	2,30	1,82	1,38	0,99	0,65	0,40	0,22
8	3,04	2,54	2,06	1,59	1,17	0,80	0,51	0,29	0,15
9	3,29	2,79	2,29	1,82	1,37	0,97	0,64	0,38	0,20	0,09
10	3,55	3,04	2,54	2,05	1,59	1,16	0,78	0,49	0,27	0,13	0,06
11	3,81	3,29	2,79	2,29	1,81	1,36	0,95	0,62	0,36	0,18	0,08	0,03
12	4,07	3,55	3,04	2,53	2,05	1,58	1,14	0,77	0,46	0,25	0,12	0,05	0,02
13	4,33	3,81	3,29	2,78	2,29	1,81	1,35	0,94	0,59	0,34	0,16	0,07	0,02	0,01
14	4,59	4,07	3,55	3,03	2,53	2,04	1,57	1,13	0,75	0,44	0,23	0,10	0,04	0,01	0,00
15	4,86	4,33	3,80	3,29	2,78	2,28	1,80	1,34	0,92	0,57	0,31	0,15	0,06	0,02	0,00	0,00
16	5,13	4,59	4,06	3,54	3,03	2,53	2,04	1,56	1,12	0,73	0,42	0,21	0,08	0,03	0,01	0,00	0,00
17	5,40	4,86	4,33	3,80	3,29	2,78	2,28	1,80	1,33	0,90	0,55	0,29	0,13	0,04	0,01	0,00	0,00	0,00
18	5,67	5,13	4,59	4,06	3,54	3,03	2,53	2,04	1,56	1,10	0,71	0,39	0,18	0,07	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00
19	5,95	5,40	4,86	4,32	3,80	3,29	2,78	2,28	1,79	1,32	0,89	0,52	0,26	0,10	0,03	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
20	6,23	5,67	5,13	4,59	4,06	3,54	3,03	2,53	2,03	1,55	1,09	0,68	0,36	0,16	0,05	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
21	6,51	5,95	5,40	4,86	4,32	3,80	3,28	2,78	2,28	1,79	1,31	0,87	0,50	0,23	0,08	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
22	6,79	6,22	5,67	5,12	4,59	4,06	3,54	3,03	2,53	2,03	1,55	1,08	0,66	0,33	0,13	0,04	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
23	7,07	6,50	5,94	5,39	4,85	4,32	3,80	3,28	2,78	2,28	1,79	1,31	0,85	0,47	0,20	0,06	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
24	7,36	6,79	6,22	5,67	5,12	4,59	4,06	3,54	3,03	2,52	2,03	1,54	1,07	0,64	0,30	0,10	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
25	7,65	7,07	6,50	5,94	5,39	4,85	4,32	3,80	3,28	2,77	2,28	1,78	1,30	0,84	0,44	0,16	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
26	7,94	7,36	6,78	6,22	5,67	5,12	4,58	4,06	3,54	3,03	2,52	2,03	1,54	1,06	0,61	0,26	0,07	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
27	8,23	7,65	7,07	6,50	5,94	5,39	4,85	4,32	3,79	3,28	2,77	2,27	1,78	1,30	0,83	0,40	0,12	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
28	8,53	7,94	7,36	6,78	6,22	5,66	5,12	4,58	4,05	3,54	3,02	2,52	2,03	1,54	1,06	0,59	0,21	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
29	8,83	8,23	7,65	7,07	6,50	5,94	5,39	4,85	4,32	3,79	3,28	2,77	2,27	1,78	1,30	0,82	0,36	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
30	9,13	8,53	7,94	7,35	6,78	6,22	5,66	5,12	4,58	4,05	3,53	3,02	2,52	2,03	1,54	1,06	0,59	0,13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Note que nas Figuras A.1 e A.2, o esquema de árvore binomial foi obtido com o auxílio do *excel*. Na Figura A.1, os valores obtidos em cada cédula, são o resultado da multiplicação do valor da ação em cada passo, por um movimento de crescimento u ou de queda d. Já na Figura A.2, árvore é preenchida de trás para frente, onde os valores do passo 30 são encontrados através da Fórmula (2.1). Os demais valores são encontrados através das Equações (4.83) e (4.84).