UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

BELYT SOUSA ANDRADE

O PENSAMENTO ALGÉBRICO EM LIVROS DIDÁTICOS DA COLEÇÃO A CONQUISTA DA MATEMÁTICA DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: um olhar a partir da Teoria Antropológica do Didático

SÃO LUÍS - MA
2021

BELYT SOUSA ANDRADE

O PENSAMENTO ALGÉBRICO EM LIVROS DIDÁTICOS DA COLEÇÃO A CONQUISTA DA MATEMÁTICA DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: um olhar a partir da Teoria Antropológica do Didático

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Antonio José da Silva

SÃO LUÍS - MA
2021

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Andrade, Belyt Sousa.
O pensamento algébrico em livros didáticos da coleção A Conquista da Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental : um olhar a partir da Teoria Antropológica do Didático / Belyt Sousa Andrade. - 2021.
123 f.

Orientador(a): Antonio José da Silva.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2021.

1. Álgebra. 2. Livro Didático. 3. Pensamento Algébrico. 4. Praxeologia. I. Silva, Antonio José da. II. Título.

BELYT SOUSA ANDRADE

O PENSAMENTO ALGÉBRICO EM LIVROS DIDÁTICOS DA COLEÇÃO A CONQUISTA DA MATEMÁTICA DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: um olhar a partir da Teoria Antropológica do Didático

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovada em: 25 de agosto de 2021

Banca Examinadora

____

Prof. Dr. Antonio José da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

____

Profa. Dr. Rodrigo Sychocki da Silva
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

____

Prof. Dr. Carlos Erick Brito de Sousa
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

"Dentro de pouco tempo quase tudo aquilo que lhes foi aparentemente ensinado terá sido esquecido. Não por burrice. Mas por inteligência. O corpo não suporta carregar o peso de um conhecimento morto que ele não consegue integrar com a vida"

(Rubem Alves)

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal do Maranhão, pela infraestrutura disponibilizada.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento da pesquisa.

Ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPECEM) pelas oportunidades de crescimento acadêmico.

Ao professor Dr. Antonio José da Silva, pela orientação e paciência ao longo desta pesquisa.

Aos docentes Dr. Carlos Erick B. de Sousa, Dr. Cícero Wellington B. Bezerra, Dra. Clara Virginia V. C. O. Marques, Dr. Hawbertt R. Costa, Dr. Marcos Denilson Guimarães, Dra. Maria Consuelo A. Lima e Dra. Silvete C. Guerini, por contribuir diretamente em minha formação docente.

Aos meus colegas de turma, Danielle Sousa, Esteves Fernandes, Helismar Medeiros, Stella Camara, Talita Raiol, pelo incentivo e companheirismo.

Aos meus pais, Luzilene e Gledson, por todo amor e suporte nessa jornada.
Ao meu namorado, Francisco Júnior, pelo companheirismo e incentivo.

A todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a finalização deste trabalho.

RESUMO

As dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de Matemática tem sido objeto de atenção entre professores e pesquisadores da Educação Básica. Constantemente as dificuldades dos alunos estão associadas à passagem dos conceitos aritméticos para os algébricos, ao uso da linguagem simbólica e ao foco na repetição de procedimentos. Acerca disso, nota-se que a concepção de aprendizagem pautada apenas no treino e fixação de procedimentos algébricos não atende mais as demandas atuais da escola e da sociedade. Desta forma, torna-se essencial que o aluno tenha que acessar o saber matemático a fim de desenvolver o pensamento algébrico. Diante disso, destaca-se o livro didático como material repleto de intenções didáticas que, de certa forma, conduzem o processo de ensino e aprendizagem de Matemática em sala de aula. Assim, a fim de compreender uma das faces deste fenômeno, busca-se ao longo desta investigação responder ao seguinte questionamento: Como a coleção de livros didáticos A Conquista da Matemática, para os anos finais do Ensino Fundamental, aborda o processo de desenvolvimento do pensamento algébrico? Objetivando responder esta pergunta, fundamentou-se esta pesquisa a partir da Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard, a fim de compreender as organizações didáticas e matemáticas nos livros da coleção cuja análise dos dados permitiu perceber sua estrutura concisa e direta. Ao longo de suas unidades nota-se uma concepção mais voltada para uma abordagem empirista e construtivista. Porém, não deixa de abordar situações relacionadas a resolução de problemas e modelação matemática. Observa-se que as praxeologias são completadas ao final do último livro da coleção, configurando caminhos para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Palavras-chave: Álgebra. Livro Didático. Praxeologia. Pensamento Algébrico.

ABSTRACT

Difficulties in the teaching and learning process of Mathematics have been the object of attention among Basic Education teachers and researchers. Students' difficulties are constantly associated with the transition from arithmetic to algebraic concepts, the use of symbolic language and the focus on repetition of procedures. In this regard, we have noticed that the concept of learning based only on training and setting algebraic procedures no longer meets the current demands of school and society. Thus, it is essential that the student has access to mathematical knowledge in order to develop algebraic thinking. Therefore, the textbook stands out as a material full of didactic intentions that, in a way, drive the teaching and learning process of Mathematics in the classroom. Thus, in order to understand one of the faces of this phenomenon, throughout this investigation, we sought to answer the following question: *how the collection of textbooks A Conquista da Matemática, approved by the PNLD, for thefinal years of elementary school, approached the algebraic thinking development process?* Aiming to answer this question, we base this research on the foundations of Yves Chevallard's Anthropological Theory of Didactics, in order to understand the didactic and mathematical organizations in the textbooks of the collection. Data analysis allowed us to realize the concise and straightforward structure of the collection. Throughout its units, a conception more focused on an empiricist and constructivist approach can be noted. However, it does not fail to address situations related to problem solving and mathematical modeling. It is observed that the praxeologies are completed at the end of the last book in the collection, configuring paths for the development of algebraic thought.

Keywords: Algebra. Textbook. Praxeologies. Algebraic Thinking

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
IFMA	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão
LD	Livro Didático
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
OD	Organização Didática
OM	Organização Matemática
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	Plano Nacional do Livro Didático
TAD	Teoria Antropológica do Didático
UFMA	Universidade Federal do Maranhão

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Durante a minha jornada escolar passei por diversos momentos em que tive muita dificuldade em compreender os conceitos algébricos. A memória mais antiga desta época está associada a Educação Básica, quando cursei a 7° série (atual 8° ano) do Ensino Fundamental. Lembro-me de não ver sentido em aprender um conteúdo que misturava letras e símbolos. Aquilo não tinha significado real, parecia desconfigurar toda percepção que havia construído acerca do que deveria ser objeto de estudo da Matemática.

Essa experiência me causou desinteresse profundo naquele ano, pois não conseguia compreender a linguagem simbólica utilizada e, consequentemente, tive os piores resultados nas provas bimestrais. A média de aprovação nos testes bimestrais daquela escola era de, no mínimo, 70% das questões. Não conseguia alcançar, sequer, 50% de aproveitamento.

O professor, vendo que a turma toda estava com problemas de desempenho nas provas, decidiu que faríamos um trabalho de resolução de questões como atividade para complementar a nota. Daquele ano, 2010, lembro-me de decretar ódio pela disciplina de Matemática. Fugia dos questionamentos sobre qualquer assunto que relacionasse operações e equações.

A minha percepção sobre a disciplina de Matemática começou a ser modificada, quando, nos anos seguintes, cursando o Ensino Médio, fui motivada a selecionar e resolver questões para o vestibular. A autoestima começou a ser reconstruída e, então, passei a cogitar escolher cursos na área de exatas. Não sabia ao certo se seria uma boa decisão, mas acreditava que poderia ser uma boa alternativa encarar os problemas de frente.

Buscando os cursos disponíveis em minha cidade, escolhi me candidatar para o curso de Licenciatura em Matemática. A escolha por este caminho me permitiria quebrar minhas barreiras pessoais e ainda possibilitar aos meus futuros alunos uma perspectiva diferente da que obtive nos anos finais do ensino fundamental.

Ao concluir o terceiro ano do Ensino Médio, depois preparar-me para o vestibular e obter boas experiências dando aulas particulares para amigos de turma, pude confirmar minha decisão em escolher cursar Matemática Licenciatura.

Após o exame de vestibular, recebi a feliz notícia de ter sido aprovada para cursar Licenciatura em Matemática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA). Passados os primeiros períodos, tive sérios problemas nas disciplinas de Álgebra linear[1]. Era como um fantasma que voltava para me assombrar.

[1] Disciplina que trata sobre os conteúdos de Matrizes, determinantes, solução de sistemas lineares, espaços vetoriais, transformações lineares e matriz de uma transformação.

Pensei em desistir do curso de Matemática diversas vezes. No entanto, foi diante das dificuldades encontradas que tive a oportunidade de, em outra disciplina, agregar elementos formativos que me ajudaram a perceber que o estudo de Álgebra era muito mais que resolver equações, se tratava de um grande ramo da Matemática responsável por generalizar modelos e auxiliar na resolução de problemas matemáticos.

As dificuldades encontradas nas disciplinas de Álgebra Linear no 4º período não foram dissipadas instantaneamente, porém os debates e leituras experienciados na disciplina de Seminário da Matemática[2] daquele ano me fizeram perceber que haviam caminhos alternativos para a aprendizagem da Álgebra.

Comecei a perceber que a didática que havia internalizado estava focada na repetição de procedimentos e memorização de técnicas. Até então, reproduzia essa prática sem compreender as intenções didáticas e os aspectos epistemológicos envolvidos. Havia uma repetição da forma como os meus professores, da época da Educação Básica, abordavam os conteúdos em sala de aula. Eu estava reproduzindo um modelo de ensino sem perceber que o estava fazendo.

Comecei a me questionar sobre a estrutura dos livros didáticos e qual a razão de a maioria dos professores seguir os mesmos caminhos elucidativos na exposição dos conceitos matemáticos. Observava, também, que os livros didáticos seguiam um modelo estrutural na apresentação dos conteúdos, tal similaridade era notada até mesmo no enunciado das questões propostas.

Após concluir a graduação continuei buscando entender estes fenômenos, foi quando tive a oportunidade de cursar o mestrado no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPECEM) da Universidade Federal do Maranhão (UFMA). A escolha pela área de ensino permitiu que eu pudesse adentrar nesta temática e aprofundar na pesquisa.

Então tive a oportunidade de cursar algumas disciplinas, dentre elas Pesquisas em Educação Matemática e Análise Crítica de Recursos Didáticos para o Ensino de Ciências que vieram a contribuir diretamente para o desenvolvimento deste trabalho.

Após cursar a disciplina de Pesquisas em Educação Matemática, pude perceber que a dificuldades vivenciadas por mim nos anos finais do Ensino Fundamental não se tratavam de um caso particular, mas de uma realidade da educação brasileira.

---

[2] Disciplina que aborda o ensino superior e a formação de professores no Brasil: história, características e perspectivas. Temáticas associadas a indissociabilidade entre ensino, pesquisa e extensão, o currículo do curso deLicenciatura em Matemática e prática do professor em sala de aula.

Os índices dos alunos da educação básica nos exames nacionais apontavam resultados preocupantes, tendo, então, os estudos em Álgebra como uma das principais fontes de fracasso de estudantes na escola, pois seu ensino restringe-se, muitas vezes, a mecanismo de cálculo algébrico (LINS e GIMENEZ, 1997).

Diante da relevância em pesquisar sobre a temática da Álgebra, busquei investigar sobre os conceitos algébricos associados aos processos de ensino e aprendizagem de Matemática. Diante das múltiplas possibilidades de investigação, optei por construir a pesquisa olhando para as propostas apresentadas pelos livros didáticos de Matemática, considerando que os livros didáticos representam, muitas vezes, a principal, senão a única, fonte de trabalho como material impresso na sala de aula em muitas escolas da rede pública de ensino, tornando-se um recurso básico para o aluno e para o professor no processo de ensino e aprendizagem. (FRISON et al, 2009)

Diante disso, direcionamos esta pesquisa com a intenção de responder a seguinte questão: *como a coleção de livros didáticos A Conquista da Matemática, aprovada pelo PNLD (2020), para os anos finais do Ensino Fundamental, abordado o processo de desenvolvimento do pensamento algébrico?* A fim de responder a esta problemática, objetivamos analisar como os livros didáticos da coleção A conquista da Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental, sob os aspectos das Organizações Didáticas e Matemática[3], abordam o processo de desenvolvimento do pensamento algébrico.

Tendo em vista que, esta pesquisa se propõe a investigar aspectos não quantificáveis, enfatiza-se neste trabalho uma pesquisa de abordagem qualitativa, pois busca responder questões particulares, preocupando-se em investigar motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, correspondendo a um espaço mais profundo dos fenômenos sociais (MINAYO, 2001). Para alcance dos objetivos, a pesquisa será concretizada a partir da análise dos livros didáticos de Matemática sob os fundamentos da Teoria da Transposição Didática e, principalmente da Teoria Antropológica do Didático de Yes Chevallard (1990, 1991, 1997, 1998, 1999, 2002).

Para organização desta pesquisa, dividiu-se o texto em quatro capítulos. O primeiro capítulo apresenta as diferentes perspectivas em torno do estudo de Álgebra e as mudanças ao longo do processo de escolarização até a constituição da concepção de pensamento algébrico. O segundo trata sobre os aspectos teóricos e metodológicos desta pesquisa, apresentando os fundamentos da Teoria Antropológica do Didático. O terceiro capítulo objetiva tornar claro o

[3] A perspectiva acerca das Organizações Didáticas e Matemáticas serão apresentadas no segundo capítulo deste trabalho.

percurso metodológico ao longo da constituição desta pesquisa. E, por fim, o quarto capítulo, apresentando as análises realizadas ao longo da coleção de livros didáticos A Conquista da Matemática.

1.1 A natureza da pesquisa

Quanto à natureza do trabalho trata-se de uma pesquisa qualitativa de cunho documental desenvolvida sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático do Yves Chevallard (1990, 1991, 1997, 1998, 1999, 2002). A dimensão de investigação da pesquisa qualitativa relaciona diversos elementos de análise, permitindo a interpretação dos fenômenos do ponto de vista particular. Para Minayo *et al.*:

> A pesquisa qualitativa se preocupa com um nível de realidade que não pode ser quantificado. Ela trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis (MIMAYO *et al.* s/d, p. 21)

Bogdan e Biklen (2006, p.16) utilizam-se da expressão “investigação qualitativa”, como um termo genérico que agrupa diversas estratégias de investigação que compartilham determinadas características.

> A abordagem de investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que o mundo tem pontencial para construir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo (BOGDAN; BIKLEN, 2006, p. 49).

Desta forma, espera-se que os caminhos traçados a partir de uma pesquisa qualitativa nos permita compreender as diversas facetas do nosso objeto de pesquisa, a fim de alcançar os resultados propostos ao longo desta investigação.

Sendo o objetivo deste estudo analisar como a coleção *A Conquista da Matemática,* destinada aos anos finais do Ensino Fundamental, aborda o processo de desenvolvimento do pensamento algébrico, esta centra-se na atividade humana frente aos símbolos algébricos dispostos em materiais didáticos a fim de compreender como ocorre o processo de aprendizagem a partir da proposta didática dos livros de Matemática.

Diante disso, pretende-se conhecer a realidade de construção do pensamento algébrico a partir da abordagem propiciada pelos livros didáticos de Matemática, de forma a interpretar o saber algébrico e descrevê-lo conforme a interpretação dos dados analisados.

A partir do objeto de pesquisa, associamos esta investigação como uma pesquisa descritiva, pois segundo Fiorentini (2012, p. 70) “uma pesquisa é considerada descritiva quando o pesquisador deseja descrever ou caracterizar com detalhes uma situação, um fenômeno ou um problema”, de forma a priorizar aspectos particulares e descritivos de fenômenos reais.

Imprimimos também a essa dissertação um caráter de pesquisa qualitativa e documental, ao se analisar documentos como o livro didático. Para Lüdke e André (1986) a análise documental é entendida como uma série de operações que visa analisar documentos com objetivo de identificar informações factuais ou circunstâncias sociais. É necessário estabelecer procedimentos metodológicos a serem seguidos na análise dos documentos, a fim de caracterizar, decodificar e realizar uma análise crítica acerca dos documentos investigados.

Ao longo de nossa investigação foi realizada a caracterização e categorização tomando por base os aspectos teóricos da TAD no que concerne as Organizações Matemáticas e Didáticas dispostas ao longo dos livros didáticos analisados.

2.2 Revisão de literatura

O momento destinado a revisão bibliográfica compõe parte essencial para o (re)direcionamento da pesquisa. Nesta etapa o pesquisador tem condições de situar sua busca frente a comunidade científica e reafirmar a necessidade, ou não, de investigação do problema proposto. Além disso,

> O conhecimento daquilo que já está disponível fornece, em geral, boas sugestões quanto às técnicas mais adequadas à investigação de problemas específicos, poupando, desta maneira, esforços significativos por parte daquele que pretende iniciar um empreendimento na área. (MOROZ; GIANFALDONI, 2006, p. 29)

Assim, torna-se indispensável a familiarização do pesquisador com as demais pesquisas já realizadas em sua área, para que o trabalho a ser construído venha trazer novas contribuições para o campo de pesquisa em questão.

Desta forma, realizamos o levantamento da produção acadêmica em duas bases de dados: Banco de Teses e Dissertações da CAPES e Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD.

No Banco de Teses e Dissertações da CAPES, a pesquisa pelas expressões “álgebra” e “livro didático” retornou 32 resultados. Dentre os trabalhados localizados, foram selecionados[4] aqueles que abordam aspectos sobre a Álgebra presente em livros didáticos de Matemática destinados aos anos finais do Ensino Fundamental. Foram desconsiderados trabalhos com

---

[4] Para realizar esta seleção, considerou-se o título do trabalho e, ainda, no caso de ele não revelar as informações necessárias, o resumo do trabalho.

abordagem focalizada em apenas um ano escolar ou em materiais didáticos regionalizados. O quadro 1 mostra os trabalhos selecionados.

Quadro 1 – Trabalhos encontrados no Banco de Teses e Dissertações da CAPES

Título	Autor	Tipo	Instituição	Ano
A noção de variável em livros didáticos de ensino fundamental: um estudo sob ótica da organização praxeológica	Eliana da Silva Cruz	Dissertação		2005
Introdução do Pensamento Algébrico: um olhar sobre professores e livros didáticos de Matemática.	Leandra Gonçalves dos Santos	Dissertação	UFES	2007
A Álgebra nos livros didáticos do ensino fundamental: uma análise praxeológica	Rosane Corsini Silva Nogueira	Dissertação	UFMS	2008
Um estudo a respeito da generalização de padrões em livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental	Paulo Ferreira do Carmo	Dissertação	PUC-SP	2014
O percurso da didatização do Pensamento Algébrico no Ensino Fundamental: uma análise a partir da Transposição Didática e da Teoria Antropológica do Didático	Marcia Aguiar	Tese	USP	2014
Estudo sobre Aspectos da Álgebra na passagem da Aritmética para a Álgebra	Lourival Pereira Martins	Tese	UNIAN-SP	2015
Apresentação da Álgebra por Livros Didáticos Aprovados no PNLD 2014	Carla Naíra Milhossi	Dissertação	USP	2017

Fonte: Elaboração própria (2021)

A busca realizada na BDTD seguiu o mesmo critério aplicada na plataforma anterior. A pesquisa pelas expressões “álgebra” e “livro didático” retornou 129 resultados. Dentre os trabalhos localizados, foi selecionado a tese intitulada *O percurso da didatização do Pensamento Algébrico no Ensino Fundamental: uma análise a partir da Transposição Didática e da Teoria Antropológica do Didático* de autoria de Marcia Aguiar. Porém, este trabalho já consta no quadro 1, referente aos trabalhos encontrados no Banco de Teses e Dissertações da CAPES. Desta forma, a busca na BDTD não retornou nenhum resultado além daqueles localizados no banco da CAPES.

CRUZ (2005)

A pesquisa intitulada *A noção de variável em livros didáticos de ensino fundamental: um estudo sob a ótica da organização praxeológica* de autoria de Eliana da Silva Cruz está apoiada na Teoria Antropológica do Didático proposta por Chevallard (1991), tendo como objetivo central da pesquisa investigar a construção da noção de um conceito algébrico específico.

De forma geral, Cruz (2005) busca investigar como ocorre o processo de introdução dos conceitos de variável no 3° e 4° ciclo do ensino fundamental, de forma a compreender a problemática por trás das dificuldades de certas noções ou interpretações que os estudantes desenvolvem em relação ao uso das letras na notação, escrita e convenções associadas a certos conceitos matemáticos. (CRUZ, 2005).

“O problema surge em identificar quando uma letra representa uma variável, ou não.” (CRUZ, 2005, p. 25) A autora aponta este aspecto como essencial na busca por orientar o processo de ensino e aprendizagem da Álgebra. Associado a esta questão vem o fato de que os alunos das escolas públicas têm acesso gratuito ao livro didático como recurso que fornece informações, propõe atividades e direciona a dinâmica em sala de aula. Desta forma, o livro didático se destaca como instrumento de acesso ao ensino (CRUZ, 2005)

Sendo assim, o foco central da pesquisa está em responder o seguinte problema de pesquisa: *como os livros didáticos abordam a noção de variável sob a ótica da organização praxeológica de Chevallard?*

O critério de seleção dos livros didáticos foi baseado nas coleções escolhidas pela maioria dos professores do Estado de São Paulo. A partir da fixação deste critério, a pesquisa se desenvolveu a partir da análise das quatro coleções com maior vendagem: Coleção *A Conquista da Matemática; coleção Tudo é Matemática; coleção Matemática para todos e a coleção Matemática e Realidade.*

No processo de construção desta pesquisa, é possível identificar o desenvolvimento de quatro aspectos base para constituição das análises. Primeiramente é analisado como os livros didáticos vêm abordando as orientações dadas pelos PCNs; depois faz-se a verificação da abordagem que os autores utilizaram para introduzir os conceitos algébricos e, por fim, analisar quais as diferentes perspectivas dadas ao conceito de variável.

Ela finaliza apontando ser “unânime o trabalho com equações tendo a variável como incógnita, porém as variáveis como parâmetro, relacionando grandezas deveria ser estimulado já no 3° ciclo (5° e 6° séries), assim, possibilitaria ao aluno compreender a distinção das duas.” (CRUZ, 2005, p. 89). Desta forma, embora os livros didáticos tragam várias concepções da

Álgebra e venha trabalhando as variáveis sob diferentes enfoques, ainda há a predominância de exercícios para aplicação de técnicas.

SANTOS (2007)

O trabalho desenvolvido por Santos (2007) aborda um aspecto adicional que é extremamente relevante quando se trata do processo de ensino e aprendizagem de Matemática: o professor. Um dos pontos de investigação da pesquisa situa-se na necessidade de examinar a influência dos livros didáticos na concepção algébrica dos professores e em suas ações pedagógicas.

A proposta de pesquisa intitulada *Introdução do pensamento algébrico: um olhar sobre professores e livros didáticos de Matemática* apresenta um aspecto relevante na dinâmica de aprendizagem em sala de aula, objetivando identificar e caracterizar a forma como a Álgebra é apresentada nos manuais didáticos e como docentes e discentes são influenciados por essa apresentação.

O processo de regularização e implementação do livro didático percorreu um longo caminho e que embora seja um material que veicula informações significativas, a autora ressalta "a importância de analisar as abordagens que introduzem o pensamento algébrico e as possíveis contribuições das informações veiculadas por esses livros para a compreensão do leitor/aluno/professor." (SANTOS, 2007, p. 30)

Considerando a relevância da investigação entorno da introdução do pensamento algébrico e como ocorre a abordagem da Álgebra em sala de aula e as influências do livro didático nas concepções dos alunos e professores, a autora se propõe a responder algumas questões: *Que abordagens alguns livros didáticos de Matemática atuais apresentam na introdução do pensamento algébrico? Que discurso do autor do livro didático evidencia sua concepção algébrica e o que ele considera relevante para a introdução do pensamento algébrico? Em que comportamentos e atitudes professores e aluno evidenciam a influência do livro didático na introdução do pensamento algébrico? Que sinalizações/indicações há sobre a abordagem da introdução à Álgebra escolar nos livros didáticos?* (SANTOS, 2007)

Para o alcance os resultados o estudo em questão tomou por base a análise dos discursos de professores, informações orais e escritas de alguns alunos, ao mesmo tempo que eram consideradas o conteúdo dos manuais didáticos e o discurso dos autores dos livros adotados pelas escolas.

Ao longo da constituição da pesquisa, Santos (2007) fez um acompanhamento junto aos professores e alunos, de forma a captar, a partir do diálogo de cada sujeito, as dificuldades no ensino e aprendizagem de Álgebra e sobre a prática do professor, qual concepção este apresentava acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico.

Ela finaliza evidenciando que alguns aspectos os professores entrevistados na pesquisa concebem as ações pedagógicas no ensino de Álgebra devido à sua formação acadêmica e a exposição a um currículo prescrito influenciado pelo livro didático. No entanto, a autora acredita que uma exploração do livro didático de forma mais sábia e mais consciente pelo professor pode ser fundamental no seu trabalho de álgebra, onde o livro não permaneça sendo a única ferramenta utilizada pelo professor no ensino de Matemática.

NOGUEIRA (2008)

Outro estudo importante para embasar aspectos estruturantes desta investigação intitula-se: "*A Álgebra nos livros didáticos do ensino fundamental: uma análise praxeológica*", dissertação com foco na caracterização da introdução formal da Álgebra por meio dos livros didáticos do Ensino Fundamental.

Os estudos realizados por Nogueira (2008) direcionam o foco para a investigação em torno da Álgebra nos livros didáticos do ensino fundamental, a partir de uma perspectiva praxeológica. Esta dissertação nos permitiu compreender a introdução formal da Álgebra nos livros didáticos brasileiros do Ensino Fundamental, a fim de perceber como o processo de formalização dos conceitos algébricos acontecem no momento de introdução aos conteúdos a partir do 7° ano do Ensino Fundamental.

Como referencial teórico e metodológico, Nogueira (2008) apoiou sua pesquisa na Teoria Antropológica do Didático (TAD). Diante disso, ela estruturou sua análise a partir das Organizações Matemáticas e Didáticas, a fim de encontrar os tipos tarefas e técnicas que caracterizassem os aspectos correspondentes a introdução formal da Álgebra nos livros didáticos selecionados.

No que concerne aos resultados encontrados, a pesquisadora destaca que os indicativos principais da formalização do saber algébrico estão relacionados a tarefas que se referem à resolução de equações. Nogueira (2008) ainda propõe que mesmo não havendo enunciado que proponha explicitamente a resolução de equações, elas aparecem com outros objetivos como encontrar expressões equivalentes ou verificar se certo valor torna verdadeiro a sentença dada.

Além do foco dado a resolução de equações como abordagem explicita na introdução formal da Álgebra, destacam-se, também, técnicas voltadas para a valorização das analogias com a balança em equilíbrio, de forma a oportunizar o desenvolvimento do raciocínio algébrico dos alunos. Nogueira (2008), ainda ressalta o trabalho com equações do 1° grau por meio de problemas como abordagem comum na introdução da Álgebra em livros didáticos no Ensino Fundamental.

Por fim, a autora destaca o uso da linguagem natural como recurso utilizado dentre os tipos de tarefas a fim de conceder elementos para a transcrição para a linguagem algébrica, o que indica que este procedimento é bastante valorizado na educação algébrica.

CARMO (2014)

A dissertação de Carmo (2014) intitulada *Um estudo a respeito da generalização de padrões nos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental* aborda um conceito essencial no processo de construção do saber algébrico. A introdução ao estudo da Álgebra por meio de atividades de generalizações e padrões possibilita ao aluno a capacidade de ampliação da habilidade na resolução de problemas.

O autor expõe diversas pesquisas (PONTE, 2005; SESSA, 2005; BRANCO, 2008; VALE *et al.,* 2008), mostrando como os alunos da educação básica apresentam inúmeras dificuldades ao utilizarem a linguagem algébrica para expressar suas ideias e resolver problemas.

Este problema é ainda mais agravado pelo fato de que "o ensino da álgebra não possui significado para os alunos, fazendo com que a vejam como conteúdo matemático de manipulações de letras sem sentido." (CARMO, 2014, p. 23)

Um dos autores citados por Carmo (2014) sugere atividades relacionadas a generalização de padrões como alternativa para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos (PONTE, 2005). Este caminho permite que os alunos desenvolvam habilidades em compreender e manipular símbolos no processo de construção do saber algébrico.

Diante disso, surge o direcionamento da pesquisa por meio da seguinte pergunta: *os livros didáticos de Matemática dos 6° e 7° anos do Ensino Fundamental escolhidos no PNLD/2011 introduzem a linguagem algébrica por meio de atividades de generalizações de padrões? E como isso ocorre?*

Diante da problemática, o autor objetiva analisar 4 coleções de livros didáticos de matemática do ensino fundamental II avaliados pelo PNLD/2011, a fim de investigar como introduzem a linguagem algébrica está estruturada nas atividades de generalizações de padrões.

Carmo (2014) estabeleceu que a análise das atividades dos livros didáticos seria guiada sob a classificação de quatro critérios, a saber: padrões figurais, numéricos, em operação e classificados como funções.

Ele conclui que, das quatro coleções de livros didáticos analisados, três utilizaram atividades de generalização de padrões pra introduzir a linguagem algébrica e, destas três, só uma emprega os quatro tipos de atividades de generalizações de padrões que categorizamos.

AGUIAR (2014)

A tese *O percurso da didatização do pensamento algébrico no ensino fundamental: uma análise a partir da Transposição Didática e da Teoria Antropológica do Didático* de autoria de Marcia Aguiar traz uma reflexão sobre como o ensino de Álgebra nos últimos três anos do Ensino Fundamental tem se reduzido a um momento destinado ao treino e à fixação de regras algébricas.

Ainda sobre este contexto, Aguiar (2014) traz à tona que os livros didáticos corroboram com essa visão de ensino, onde há uma supervalorização da memorização de procedimentos e mecanização da aprendizagem dos conceitos algébricos.

Tendo em vista que o professor, muitas vezes só possui o livro didático como material para preparar as aulas, cabe ao docente transformar o saber ensinado em sala de aula a fim de contribuir na construção de um pensamento algébrico, superando as práticas rotinizadas. (AGUIAR, 2014)

Assim, esta pesquisa teve como objetivo analisar de que modo os livros didáticos do 7°, 8° e 9° anos do Ensino Fundamental permitem a construção do pensamento algébrico. Em outras palavras, Aguiar (2014) buscou investigar o percurso de didatização da álgebra nos livros didáticos de Matemática.

Para alcance do objetivo, Aguiar (2014) analisou três materiais pedagógicos: dois livros didáticos aprovados no PNLD-2011 e o *Caderno* elaborado pelo governo do Estado de São Paulo proveniente da proposta *São Paulo Faz Escola.* Mesmo que parte das análises sejam direcionadas para a investigação de materiais didáticos regionalizados, é possível extrair deste trabalho grande contribuição para a estruturação da nossa pesquisa.

Ao final da pesquisa, Aguiar (2014) finaliza ressaltando que a programabilidade do saber legitimada pela *noosfera* impossibilita muitas inovações na didatização referente ao ensino de álgebra, e que alguns livros didáticos mantêm o ensino dos conceitos algébricos voltados para o treino de procedimento e resoluções de exercícios. Por outro lado, a autora destacou que é possível encontrar outros caminhos de forma a desenvolver o pensamento algébrico.

Ela traz uma reflexão importante sobre o percurso proposto pelos materiais didáticos e como estes apresentam os conceitos algébricos. Aguiar (2014) destaca que os livros continuam com a mesma estrutura de desenvolvimento de conteúdo de décadas atrás. "As inovações aparecem, mas esbarram nos conteúdos arraigados que não perdem o seu espaço no Ensino Fundamental." (AGUIAR, 2014, p. 286)

Mesmo diante de uma crescente de pesquisas neste campo do saber, os problemas referentes ao ensino de Álgebra ainda não foram resolvidos. As diretrizes educacionais avançaram, houve um aumento de materiais didáticos disponíveis, um leque amplo de pesquisas e investimento na formação do corpo docente, no entanto, há uma constante constatação acerca das dificuldades do processo de ensino e aprendizagem da Álgebra.

MARTINS (2015)

A pesquisa de Martins (2015) trata sobre um aspecto essencial para o processo de consolidação da aprendizagem Matemática. A tese intitulada *Estudo sobre aspectos da Álgebra na passagem da Aritmética para a Álgebra* realizou um estudo com o propósito de compreender as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes em função das relações institucionais que criam as condições para a passagem da Aritmética para a Álgebra.

Tomando por base os estudos desenvolvidos por Chevallard e Robinet, o pesquisador definiu sete categorias de análise: memória, linguagem, equivalência da igualdade, equivalência entre *ostensivos,* análise, estrutura e generalização. Estes aspectos foram caracterizados como fundamentais no trabalho com os saberes matemáticos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem da Álgebra.

Com o intuito de alcançar o objetivo da pesquisa, Martins (2015) buscou compreender, primeiramente, as relações institucionais propostas aos estudantes a fim de investigar se há condições suficientes para o processo de passagem da Aritmética para a Álgebra.

Para constituição da pesquisa, Martins (2015) procurou definir o que é Álgebra, quais relações institucionais e pessoais devem ser desenvolvidas de a forma a possibilitar a aprendizagem, considerando o aspecto didático-epistemológico. Em seguida foi realizado um levantamento dos aspectos relacionados ao ensino de Álgebra via análise de livros didáticos do Ensino Fundamental, a fim de compreender os tipos de tarefas técnicas que auxiliassem o estabelecimento de relações do aluno com os objetos da Álgebra.

Ele finaliza enfatizando que para que ocorra a passagem da Aritmética para a Álgebra, os alunos precisam desenvolver uma relação pessoal satisfatória com os procedimentos de estudo, de forma a construir habilidades relacionadas a aspectos de memória e linguagem. Assim, o aluno tem condições de escrever e interpretar corretamente informações referente aos conceitos matemáticos.

Ele ainda destaca que uma relação pessoa satisfatória com estes aspectos capacita os alunos a reconhecerem um mesmo objeto matemático de várias formas diferentes, isto é, manter um bom relacionamento com o saber algébrico durante o processo de consolidação da aprendizagem. (MARTINS, 2015)

Referente à relação institucional, identificada nos livros didáticos analisados, Martins (2015) observou que embora a estrutura do material didático auxilie na passagem da Aritmética para a Álgebra, esse não de ser o único instrumento utilizado em sala de aula. Ele destaca que uma "boa organização dos momentos didáticos, incluindo os momentos de reinvestimento, que possibilitam a familiarização e naturalização dos conhecimentos por parte dos estudantes deve ser realizada, levando em conta a flexibilidade do sistema didático" (MARTINS, 2015, p. 296-297)

MILHOSSI (2017)

Milhossi (2017) encaminha sua pesquisa motivada pela busca em encontrar respostas para as dificuldades dos alunos em aprender Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental. Diante das buscas realizadas pela pesquisadora, há um destaque para o quantitativo reduzido de pesquisas sobre Álgebra e livro didático nos bancos[5] de trabalhos acadêmicos. Assim, a partir das reflexões realizadas, ela destacou a necessidade de "compreender como a álgebra aparece nos suportes disponíveis para o professor e para o estudante, ou seja, nos materiais didáticos usados." (MILHOSSI, 2017, p. 11).

Desse modo, a pesquisa objetivou "investigar de que modo a álgebra é introduzida no Ensino Fundamental II por meio dos livros didáticos aprovados no Programa Nacional do Livro Didático, edição 2014." (MILHOSSI, 2017, p. 11). Em outras palavras, a pesquisadora buscou

[5] Não há indicação de quais bancos de trabalhos acadêmicos foram realizadas as pesquisas.

identificar “a partir de qual conteúdo explicitamente algébrico ela é iniciada e a partir de qual abordagem e se, anterior a esse conteúdo, a coleção apresentava elementos implícitos do campo algébrico.” (ibidem, p. 11).

Para viabilizar a pesquisa, foi estabelecido a restrição do objeto de análise a três coleções, sendo estas destacadas como as coleções mais vendidas daquele ano. A primeira coleção ocupando 22,4% das aquisições foi a *Praticando Matemática – edição renovada.* Seguida pela coleção *Vontade de Saber Matemática,* com 21,3%. Por fim, a coleção *Projeto Teláris* representando 18% do total de aquisições.

Guiada pelo objetivo de investigar como a álgebra é introduzida pelos livros didáticos nos anos finais do Ensino Fundamental, constatou-se que nenhuma das coleções selecionadas encaminha a álgebra tal qual a literatura e os PCN vêm apontando como ideal no que diz respeito à efetivação da aprendizagem. A pesquisadora destacou que “as coleções analisadas iniciam a álgebra como o foco em equações, diferentemente do recomendado pela literatura, que afirma que o caminho mais adequado seja inicia-lo abordando situações que exploram a ideia de variável” (MILHOSSI, 2017, resumo)

Ela finaliza levantando uma reflexão que aponta para a necessidade de (re)ver os elementos constitutivos na produção dos livros didáticos, tendo em vista o papel relevante que este material exerce na dinâmica em sala de aula, principalmente no processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Assim, diante dos resultados encontrados, a autora conclui que “pelo menos por enquanto e no que depende dos livros didáticos em circulação, os professores vão continuar sem resposta embasadas a esse tipo de questionamento de seus alunos”.

Diante desta problemática, atual e relevante, direcionamos nosso olhar em busca de elementos que indiquem caminhos que favoreçam o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A revisão bibliográfica dos trabalhos realizados acerca do estudo da Álgebra em livros didáticos nos permitiu conhecer diversos problemas de pesquisa e como cada pesquisador estruturou o referencial teórico-metodológico. Outro aspecto interessante, revelado por esta pesquisa, encontra-se da não limitação de busca por um período de tempo, mas considerando todo os trabalhos já depositados nestas bases. Esta estratégia nos permitiu observar que as pesquisas em torno da Álgebra e do livro didático surgem constantemente, configurando-se como temática pertinente para a investigação.

No total foram mapeadas 7 pesquisas, sendo 5 dissertações de mestrado e 2 teses de doutorado. Ao longo da leitura e investigação destas pesquisas observamos diversas similaridades em torno de nossa temática, de forma que foi possível traçar um paralelo a fim de nortear nosso caminhar para estruturar nossa pesquisa diante do foco estabelecido. No entanto, diante das particularidades estabelecidas por nosso problema de pesquisa, percebemos que era necessário renovar a investigação em torno do estudo da Álgebra em livros didáticos de Matemática devido as novas diretrizes educacionais vigentes e reelaboração dos livros diante das exigências estabelecidas pela escola e sociedade.

Diante disso, ressaltamos que a partir dessa etapa da investigação pudemos (re)direcionar nosso olhar a fim de contribuir neste campo de pesquisa. Diante das novas propostas curriculares e das demandas atualizadas pelo PNLD 2020, nossa pesquisa irá avançar ainda mais rumo ao desenvolvimento do pensamento algébrico em livros didáticos de Matemática, ampliando ainda mais o espectro de contribuição acerca deste campo do saber.

2 A ÁLGEBRA E O PENSAMENTO ALGÉBRICO

Neste capítulo apresentaremos um breve percurso histórico sobre a Álgebra e as concepções associadas ao ensino de Álgebra no espaço escolar. Traremos, também, sobre algumas abordagens didáticas do ensino de Álgebra e como estes elementos de caracterizam para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Para concluirmos o capítulo, apresentaremos as abordagens orientadas pelos PCNs e pela BNCC no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra e desenvolvimento do pensamento algébrico na Educação Básica.

2.1 Álgebra e as Concepções da Educação Algébrica

A Álgebra destaca-se como um grande ramo da Matemática, estando ao lado da Geometria e Análise Infinitesimal (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009). Ao longo da história destacam-se grandes contribuições conceituais que são essenciais para composição do corpo do saber da Álgebra e, conjuntamente a isto, observam-se, também, diferentes concepções que estão associadas ao rastro da sua constituição histórica.

Historicamente, os conceitos estudados em Álgebra estão fortemente associados a formalização e sistematização de técnicas para a resolução de problemas. Esta concepção firma-se em aspectos epistemológicos de sua constituição, pois, ao longo da história, observa-se que documentos associados aos primeiros artefatos em civilizações como Egito, Babilônia, China e Índia, apontavam para a constate busca por encontrar a resolução de problemas por meio de registros de cunho algébrico.

Por bastante tempo a Álgebra estudada pelos matemáticos nem sequer era organizada por símbolos e expressões, como a conhecemos hoje. Havia uma mistura de enunciados tornando o processo de registros de informações extremamente exaustivo.

Até mesmo o termo “Álgebra” só começa a ser utilizado algum tempo depois, em trabalhos de Al-Khwarizmi (790-840), apresentando a “transposição de termos” como operação na resolução de problemas de uma equação.

Bastante tempo depois, tem-se registro, em meados do século XVI, dos estudos de François Viète (1540-1603), trazendo grandes contribuições para o que se tornaria a Álgebra simbólica. Outros matemáticos como Scipione del Ferro (1465-1526), Cardano (1501-1576) e Ferrari (1522-1565) contribuíram diretamente nos processos de desenvolvimento dos conceitos algébricos, marcando progressos significativos para a constituição da Álgebra moderna (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Nos séculos seguintes, os estudos em Álgebra continuaram avançando. Diversos pesquisadores envolveram-se na busca por estruturar ainda mais este ramo do saber. Então, a partir de meados do século XIX, a Álgebra alcança um grande marco na sua história evolutiva. Com os sucessivos estudos em busca por resolver equações com grau superior ao 4° grau, tem-se a demonstração de que não existe métodos gerais para este tipo de equação. Esgotados os esforços em demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra[6], o foco dos matemáticos volta-se para desenvolver o estudo de equações diferenciais, ampliando o estudo de objetos matemáticos relacionados ao conceito de funções. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Todo este percurso nos remete a complexidade em contar a história acerca da constituição de um saber matemático. Porém, não temos a intenção de reconstruir este caminho, já que o nosso foco está situado no cenário educacional. Porém, ao imergir no percurso histórico do saber, podemos perceber a importância de rever os aspectos históricos da Matemática a fim de compreender as concepções de educação associadas aos marcos temporais da história.

Para Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), as concepções da Álgebra são caracterizadas em três momentos, sendo estes: linguístico-pragmática, fundamentalista-estrutural e fundamentalista-analógica.

Na concepção *linguístico-pragmática* a abordagem dada para a resolução de problemas algébricos consistia em manipular atividades descontextualizadas, a partir do cálculo literal. Antes de aplicar a Álgebra em situações-problema, acreditava-se que para os estudantes deveriam adquirir, mecanicamente, o transformismo algébrico. Seria necessário a aplicação de regras e propriedades, a fim de obter o resultado das expressões algébricas. (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993)

Nesta concepção havia grande foco no domínio da linguagem algébrica como procedimento necessário para a resolução de problemas. Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) chamaram esta primeira concepção de linguístico-pragmática devido a sua forte indicação de uso da linguagem como caminho indispensável para compreensão dos conceitos algébricos.

A segunda concepção é marcada pelo Movimento da Matemática Moderna na décadade 1960, quando ocorreu a tentativa de instituir temas unificadores para estruturação da Matemática escolar.

---

[6] Em Matemática, o teorema fundamental da Álgebra afirma que qualquer polinômio p(z) com coeficientes complexos de uma variável e de grau $n \geq 1$ tem alguma raiz complexa. Ou seja, o corpo dos números complexos é algebricamente fechado e, portanto, tal como com qualquer outro corpo algebricamente fechado, a equação $p(z) = 0$ tem n soluções (não necessariamente distintas).

Rompendo com a abordagem anterior, surge, então, a nova concepção que deixaria para trás as características pragmáticas e sem justificativas, para, enfim, instituir uma concepção *fundamentalista-estrutural.* Com a intenção de fundamentar a Matemática e unir temas como Aritmética, Álgebra e Geometria, buscou-se justificar cada passagem do transformismo algébrico utilizando-se da Teoria dos Conjuntos, das estruturas e propriedades. (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993)

A ideia era que após a justificação dos procedimentos os estudantes teriam condiçõesde aplicar os conceitos em outros contextos. Para tanto, houve uma reorganização curricular, de forma que os tópicos algébricos fossem antecedidos pelo estudo do conjunto numérico. (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993).

Por fim, após o Movimento da Matemática Moderna surge uma nova concepção designada como *fundamentalista-analógica,* que pretende reunir as duas concepções anteriores. Nesta terceira etapa tem-se a intenção de recuperar o transformismo algébrico e a preocupação em justificar as passagens deste mesmo transformismo. (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993).

Nesta concepção, destaca-se as justificativas do transformismo algébrico voltadas para o uso de recursos geométricos-visuais. Porém, cabe ressaltar que, segundo Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), utilizar de uma abordagem pautada em uma "Álgebra geométrica" não impede de o aluno compreender os conceitos por outros meios. O que deve ser lembrando é que "a etapa geométrico-visual se constitui em um estágio intermediário e/ou concomitante à abordagem simbólica-formal." (ibidem, 1993, p.84)

A partir de outro ângulo, Usiskin (1995) aborda a Álgebra sob quatro aspectos: como Aritmética generalizada; como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas; como estudo de relações entre grandezas; e como estudodas estruturas.

Na concepção de *Álgebra como Aritmética generalizada* as variáveis são tidas como generalizações dos modelos aritméticos. Ocorre a generalização das operações aritméticas e são extraídas as propriedades. (USISKIN, 1995)

Na concepção da *Álgebra como um estudo para resolver certos tipos de problemas,* não é mais suficiente apenas traduzir o que está descrito para a linguagem algébrica, mas resolver a equação descrita tomando por base o problema (USISKIN, 1995).

Temos, então na concepção que aborda a *Álgebra como estudo de relações entre grandezas* a compreensão de que as variáveis apresentadas ocupam o papel de grandezas que realmente variam. (USISKIN, 1995).

E, por fim, a concepção de *Álgebra como estudo das estruturas* que se organiza por meio do reconhecimento das propriedades na atribuição às operações com Números Reais e polinomiais. Neste caso, a utilização das variáveis não coincide com nenhuma das outras formas de uso explicitado nas concepções anteriores. Nesta concepção as variáveis representam pouco mais que um símbolo arbitrário. (USISKIN, 1995)

As concepções de Álgebra apresentadas por estes pesquisadores possuem relações entre elas, justamente por se tratar do mesmo campo do saber. Porém, mesmo que possuam semelhanças, as formas como são definidas são bastante distintas.

Enquanto que as concepções apresentadas por Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) estão direcionadas pelos aspectos da linguagem algébrica, as concepções de Usiskin (1995) estão voltadas para as diferentes representações das variáveis algébricas. Ambas as concepçõesnão se anulam entre si, pelo contrário, ampliam ainda mais a compreensão acerca do estudo daÁlgebra.

As concepções apresentadas no permitem perceber como a Álgebra se estrutura no currículo escolar, de forma a compreender as diferentes fases do processo de escolarização da Álgebra, considerando a natureza dos objetos algébricos por entender que, em termos epistemológicos, há relação direta do saber instituído pelo matemático e aquele saber que está nos livros didáticos.

Para avançarmos nas discussões acerca do ensino e aprendizagem da Álgebra faz-se necessário compreender o cenário evolutivo das concepções sobre o que foi desenvolvido ao longo da história no que se refere ao ensino de Álgebra.

A concepção identificada por Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) como linguística-pragmática remete às práticas com foco constante do estudo em torno das regras operativas e transformações de expressões algébricas. Esta perspectiva busca abordar os conceitos algébricos em torno apenas do “cálculo” reduzindo o estudo da Álgebra a processos repetitivos das regras.

Esta concepção reafirma uma ideia reducionista da Álgebra focalizando apenas na manipulação dos símbolos e expressões algébricas, sem ter, por parte do aluno, compreensão sobre os conceitos algébricos.

Não estamos afirmando que a simbologia algébrica é descartável, pelo contrário, reafirmamos seu papel para o desenvolvimento da abstração e desenvolvimento do pensamento. Porém, o foco exacerbado a simbologia e manipulação dos signos algébricos reduz o estudo da Álgebra aos processos de repetição de técnicas e exercícios, focalizando a aprendizagem em estruturas algébricas, tornando a repetir os erros cometidos pelo Movimento da Matemática Moderna.

Recentemente, com o advento das mudanças curriculares, observamos o espaço dado para as discussões em torno de novas concepções da prática em sala de aula, porém, poucas alterações práticas ocorreram quanto ao processo do ensino de Álgebra. Segundo Usiskin (1995), o ensino de álgebra na escola básica ainda está baseado na capacidade de trabalhar com diversas técnicas operatórias.

Concordamos com Borralho e Barbosa (2009) quando afirmam que ainda prevalece, no ensino de álgebra, o desenvolvimento de um conjunto de técnicas operatórias que busca apenas resolver equações. Os alunos estão sendo submetidos a processos mecânicos, aprendendo sobre o como fazer, mas não sabem sobre o porquê e o para quê.

Desta forma, para o avanço da aprendizagem da Álgebra faz-se necessário muito mais que o manejo mecânico das operações, mas, sim, possibilitar aos alunos condições de desenvolver o raciocínio matemático voltado para a significação dos conceitos e a resolução de problemas.

A formação algébrica dos alunos na Educação Básica tem fortes interferências de sua constituição ao longo da história e, também, das finalidades de ensinar cada conceito dentro desse ramo da Matemática. Segundo House (1994), o ensino de álgebra está muito pautado em formar alunos que terão aulas de Cálculo Diferencial e Integral[7] na sua formação superior.

A formação Matemática dos alunos não pode estar fundamentada em estruturas algébricas complexas somente para suprir as necessidades acadêmicas futuras. Em contrapartida a esta forma de ensino, Machado (1991) defende um ensino mais voltado para a compreensão a forma de pensar do que com a escrita algébrica:

> Pensamos que a Matemática tem sido ensinada em quase todos os níveis com uma ênfase que consideramos exagerada na linguagem matemática. A preocupação central parece ser escrever corretamente, falar corretamente, em detrimento essencial do papelque a Matemática pode desempenhar quanto ao favorecimento de um pensamento, e umtempo, ordenado e criativo.
>
> Evidentemente, não se trata de contrapor o pensamento à linguagem; não se pode pretender considera-los desvinculadamente, ou entificá-los, tratando-os um por vez, uma vez que é só na relação entre ambos que se pode aprendê-los. No entanto, em Matemática, como uma frequência muito grande, o pensamento situa-se a reboque da linguagem matemática. Numa parte

[7] O cálculo diferencial e integral, também conhecido como cálculo infinitesimal ou simplesmente cálculo, é um ramo importante da matemática, desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria, que se dedica ao estudo de taxasde variação de grandezas e a acumulação de quantidades.

> considerável dos textos, mesmo nos didáticos, o caminho escolhido para a obtenção dos resultados é o mais curto, o mais cômodo ou o esteticamente mais agradável, sempre de um ponto de vista linguístico. (MACHADO, 1991, p.97-98)

Assim, Machado (1991) defende o ensino de Álgebra por meio do desenvolvimento do pensamento e do raciocínio algébrico vinculado a escrita. As duas habilidades precisam estar vinculadas para que a aprendizagem da Álgebra aconteça de forma global.

Neste aspecto, ressaltamos que a Álgebra precisa ser desenvolvida não somente sob aspectos próprios da escrita, mas deve buscar possibilitar aos alunos uma forma de pensar que favoreça essa construção.

Precisamos compreender, também, que além de resolver problemas práticos do cotidiano, a Álgebra possui propriedades que devem ser trabalhadas de forma interna a Matemática. No processo de maturação dos conceitos algébricos, destaca-se a necessidade do desenvolvimento do raciocínio abstrato dos alunos para a sua participação ativa nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática.

Das constantes discussões em torno da necessidade de reformular o ensino de Álgebra, tem-se, então a proposta de desenvolver o *pensamento algébrico,* como alternativa na formação escolar dos alunos

Assim, o ensino de Álgebra deve ter como objetivo o desenvolvimento do pensamento algébrico, conjuntamente com o uso da linguagem algébrica e os demais aspectos associados ao estudo da Álgebra.

2.2 Abordagens didáticas no ensino de Álgebra e o pensamento algébrico

As pesquisas em busca de novos caminhos para o processo de ensino e aprendizagem de Álgebra levam a consolidação de uma nova concepção que aponta para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Como pensar algebricamente? Primeiramente faz-se necessário caracterizar o que vem a ser o pensamento algébrico. Um dos autores que escreveu sobre esta ideia foi James Kaput, destacando que o pensamento algébrico se manifesta por meio de conjecturas, argumentações e no estabelecimento de generalizações sobre relações matemáticas.

Segundo o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), o pensamento algébrico está relacionado a compreensão de padrões e relações, análise de situações e símbolos matemáticos, modelação e análise de variáveis em diversos contextos.

Deste modo, o pensamento algébrico inclui diversas capacidades, tendo como habilidade inerente a manipulação dos símbolos, mas também a compreensão em torno do que ele representa.

Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) destacam que a linguagem é a expressão do pensamento e para desenvolver o pensamento algébrico faz-se necessário o uso das diversas linguagens como meio para desenvolver a linguagem algébrica. Desta forma, os alunos podem passar pela linguagem materna e geométrica para, posteriormente, compreender a linguagem algébrica.

Ainda sobre a progressão necessária na aprendizagem da linguagem algébrica, Machado (1993), ressalta que

> Em nenhum caso seria razoável uma iniciação [do ensino de álgebra] através de uma linguagem formal; em qualquer caso, a mediação da Língua Materna funciona como uma ponte que viabiliza contatos com os mais variados discursos, impedindo um isolamento precoce que conduz ao estiolamento mais facilmente do que à precisão. (MACHADO, 1993, p. 157)

Assim, a aprendizagem da Álgebra consolida-se por meio da compreensão da linguagem, do uso dos símbolos e o significado que eles tomam em cada espaço. É nesse contexto que o pensar algebricamente acontece e se estrutura. Para Arcavi (2006), só é possível desenvolver o pensamento algébrico quando há a compreensão do sentido do símbolo.

Segundo Arcavi (2006), o pensamento algébrico reside na conceitualização e na aplicação da generalidade, a ideia de variabilidade e a presença de uma simbologia.

Para Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), os caracterizadores do pensamento algébrico são: “percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização” (Idem, p.87)

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009), o pensamento algébrico apresenta-se a partir de três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas. A fim de sintetizar as concepções elencadas por estes autores, apresentaremos a seguir um quadro que organiza as contribuições apresentadas por Ponte, Branco e Matos (2009).

Quadro 2 – Vertentes fundamentais do pensamento algébrico

Representar	• Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usandoas convenções algébricas usuais; • Traduzir informações representadas simbolicamente para outras formas de representação (por objetos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; • Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo emdiferentes contextos.
Raciocinar	• Relacionar (em particular, analisar propriedades);
	• Generalizar e agir sobre essas generalizações revelandocompreensão das regras; • Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	• Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Fonte: PONTE; BRANCO; MATOS (2009, p.12)

A Álgebra pode contribuir para a formação do aluno quando em sua experiência escolar teve oportunidades de desenvolver habilidades matemáticas voltadas para a construção do raciocínio lógico, tendo desenvolvido a percepção para generalizações, padrões e análise de modelos na resolução de problemas.

Essa abordagem não se concretiza com o estudo mecânico, mas, sim, na busca por desenvolver a criatividade, o pensamento crítico e a tomada de decisão. Por isso, temos como objetivo investigar a estruturação do ensino de Álgebra por meio do desenvolvimento do pensamento algébrico. Não somente como uma tendência que possibilita a significação dos conceitos algébricos, mas sim como uma orientação que transversaliza o ensino da matemática, e não como um conteúdo isolado no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. (BORRALHO; BARBOSA, 2009).

2.3 Os PCN e a BNCC na perspectiva da Álgebra

O ensino de Álgebra passou por diversos enfoques ao longo do tempo, havendo discussões em torno do seu papel e da finalidade nos currículos e práticas pedagógicas. Nesta seção, objetivamos (re)ver as principais orientações indicadas para o ensino de Álgebra nos anos finais do ensino fundamental nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a fim de compreender os caminhos construídos para o desenvolvimento do pensamento algébrico até aqui.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais foram elaborados com a finalidade de orientar os atores da área de educação acerca dos elementos que deveriam ser integrados a cada componente curricular da Educação Básica (BRASIL, 1997).

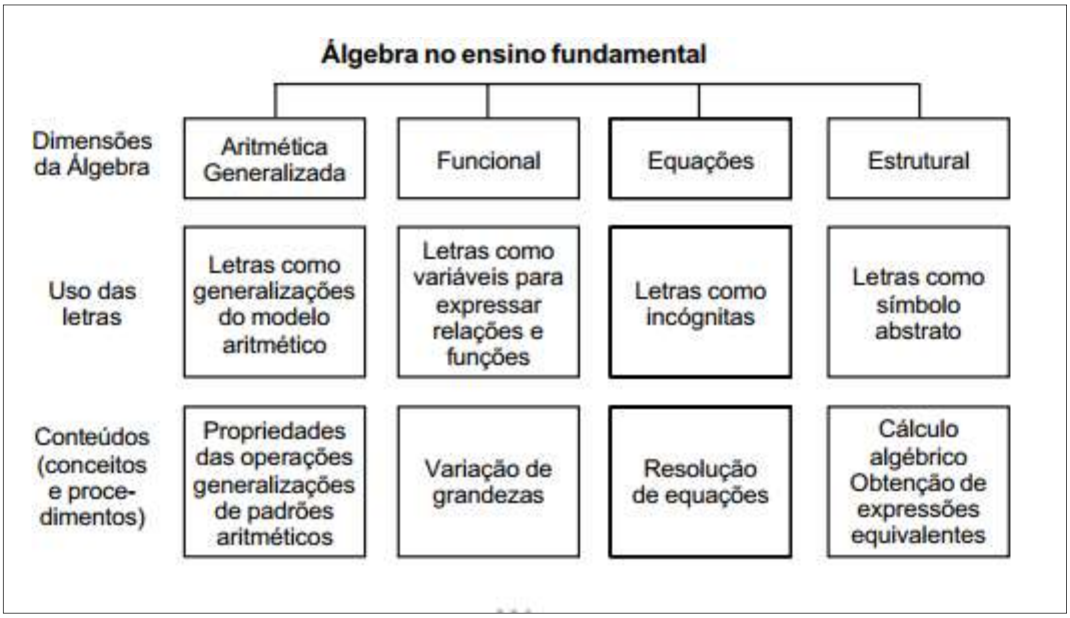
Este documento está organizado em quatro ciclos, compreendendo as séries bianuais (1º Ciclo: 1ª e 2ª séries, 2º Ciclo: 3ª e 4ª séries, 3º Ciclo: 5ª e 6ª séries, 4º Ciclo: 7ª e 8ª séries). O ciclo que está correlacionado a esta pesquisa refere-se ao 3° e 4° ciclo, ambos direcionados para os anos finais do Ensino Fundamental.

A organização com a relação aos conteúdos que deveriam ser abordados no currículo para o Ensino Fundamental, identifica-se quatro blocos: *número e operações* (no campo da Aritmética e Álgebra); *espaço e forma* (no campo da Geometria); *grandezas e medidas* (relação com Aritmética, Álgebra, Geometria e outros áreas do conhecimento) e *tratamento da informação* (contextualização da Matemática com informações do cotidiano).

A perspectiva do ensino de Álgebra indicado pelos PCN destaca que o estudo em torno dos entes algébricos se constitui como "um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas" (BRASIL, 1997, p.115)

Este documento amplia ainda mais as discussões sobre como garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno, direcionando o engajamento das atividades a fim de relacionar com as diferentes concepções da Álgebra.

Figura 1 – Dimensões da Álgebra conforme o PCN



Fonte: Brasil (1997, p. 116)

Estas dimensões situam as fases do desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de álgebra ao longo da escolarização e precisam ser trabalhadas, a fim de concluir as etapas de estudo. Compreendendo os diversos entraves em torno da estruturação do planejamento objetivando visitar todas estas dimensões, o PCN apresenta algumas indicações essenciais para a efetivação da construção do pensamento algébrico.

Neste sentido, de acordo com o citado no documento são objetivos:

> - Reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problemas e favorecer as possíveis soluções;
> - Traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice- versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras;
> - Utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico;
> - Produzir e interpretar diferentes escritas algébricas, expressões, igualdades edesigualdades, identificando as equações, inequações e sistemas;
> - Resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;
> - Observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressam a relação de dependência entre variáveis. (BRASIL, 1998, p. 64)

Observa-se que os objetivos destacados pelos PCN orientam e contribuem no processo de desenvolvimento do pensamento algébrico.

Tendo conhecido as dimensões da abordagem do ensino de Álgebra e buscando avançar nas compreensões dadas pra o desenvolvimento do pensamento algébrico, ampliamos nossas investigações para compreender como a Base Nacional Comum Curricular organiza o processo acerca da Álgebra

A BNCC é "um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao logo das etapas e modalidades da Educação Básica". (BRASIL, 2017, p. 5)

Sendo o documento mais atual que o anterior, espera-se que apresente novas contribuições acerca da temática investigada, pois os fundamentos pedagógicos que nortearam a sua construção buscam justamente desenvolver competências atendendo as novas demandas sociais.

Atendendo a novas exigências, o documento reorganiza as áreas de estudo do Ensino Fundamental, tendo a Matemática como área do conhecimento como componente próprio da disciplina de Matemática. A partir da instituição desde componente, apresentam-se um conjunto de habilidades que deverão ser exploradas.

A partir disso, a BNCC estabelece cinco unidades temáticas: *Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística* (BRASIL, 2017). Destaca-se que a Álgebra ganha um espaço exclusivo ao lado da demais unidades temáticas. Essa organização fortalece o processo de estabelecimento para novas abordagens em torno do ensino e aprendizagem de Álgebra.

Desta forma, destaca-se que a unidade temática de Álgebra tem por objetivo desenvolver o pensamento algébrico e por meio do estudo de equivalências, relações, variação,

interdependência, proporcionalidade, desenvolvimento da linguagem algébrica e resolução de problemas com equações e inequações (BRASIL, 2017).

Diferente das orientações dos PCN quanto ao processo de inserção dos conteúdos algébricos, observa-se que a BNCC indica que o trabalho da Álgebra por meio do pensamento algébrico seja realizado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

A expectativa gerada a partir das orientações dadas pela BNCC é que os alunos consigam desenvolver habilidades relacionadas aos conceitos algébricos antes mesmo de acessar o estudo de equações nos últimos anos do Ensino Fundamental.

Segundo a BNCC, "é importante iniciar os alunos, gradativamente na compreensão, análise e avaliação da argumentação matemática", pois esta abordagem possibilita aos alunos do Ensino Fundamental o desenvolvimento do senso crítico e construção do pensamento algébrico.

De forma geral, a BNCC, na apresentação de sua proposta para o ensino de matemática, visa superar com a fragmentação disciplinar do conhecimento, estimulando sua aplicação na vida real, atribuindo sentido aos que se aprende, bem como o protagonismo dos alunos durante suas aprendizagens (BRASIL, 2017).

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA

Os fenômenos associados ao ensino e aprendizagem de Matemática possuem aspectos que precisam ser identificados e compreendidos. Para que haja produção de resultados no processo de ensinar e aprender, é fundamental buscar por modelos teóricos que caracterizem o saber matemático, ampliando, assim, a compreensão acerca dos caminhos para a construção do conhecimento por parte dos alunos.

No contexto da busca por compreender os fenômenos associados a este cenário, as pesquisas em Didática da Matemática têm apresentado diversas contribuições no direcionamento de novas investigações frente as demandas do processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Parte importante das pesquisas relacionadas a Didática da Matemática tem sua base teórica nos estudos desenvolvidos por matemáticos franceses por volta de 1970. Dentre os estudos realizados nesta área, evidenciamos a Teoria Antropológica do Didático (TAD) desenvolvida por Yves Chevallard (1990, 1991, 1997, 1998.1999, 2002).

A Teoria Antropológica do Didático busca oferecer instrumentos para a investigação e modelização das atividades humanas, especificamente as atividades dentro do campo da Matemática. Segundo Chevallard (1998) toda atividade humana consiste na realização de uma tarefa que logo exigirá uma maneira de fazer e, posteriormente, exigirá uma teoria que a justifique. Assim, a atividade matemática, concebida a partir da ação humana, pode ser investigada sob aspectos antropológicos.

Para situar e discutir sobre o nosso foco de pesquisa ajustaremos nosso olhar a partir dos aspectos teóricos e metodológicos da TAD. Esta teoria nos concede um panorama favorável para compreender o cenário dos fenômenos associados as atividades matemáticas frente as instituições e sua relação com os sujeitos.

3.1 A Teoria Antropológica do Didático

A Teoria Antropológica do Didático está ancorada no aspecto antropológico do conhecimento. Pautado no interesse pelas condições de possibilidade e funcionamento de sistemas didáticos, destacam-se nesta teoria as contribuições no estudo das relações entre sujeito, instituição e saber, sendo apontada como instrumento importante para a análise das práticas didáticas.

Segundo Chevallard, a Teoria Antropológica do Didático busca compreender as razões do homem frente ao saber matemático, especificamente, frente as situações matemáticas.A TAD deve "[...] ser encarada como um desenvolvimento e uma articulação das noções cuja elaboração visa permitir pensar de maneira unificada um grande número de fenômenos didáticos, que surgem no final de múltiplas análises." (CHEVALLARD, 1998, p. 92).

Dentro do quadro teórico da TAD há diversos aspectos possíveis para análise, podendo, a partir desta teoria, conferir análise acerca de situações didáticas, organizações didáticas, organizações matemáticas e, muitos outros fenômenos que envolvem a dinâmica da sala de aula.

O termo "antropológico" utilizado na caracterização da teoria busca estabelecer o foco de investigação no estudo da Matemática no âmbito do conjunto de atividades humanas e das instituições sociais (CHEVALLARD, 1999).

Para a estruturação da teoria são necessários três conceitos básicos: os objetos (O), as pessoas (X) e as instituições (I). Compreender as relações dos objetos, dos sujeitos e das posições que estes ocupam dentro das instituições figuram a centralidade da Teoria Antropológica do Didático.

O objeto passa a existir quando é reconhecido por uma pessoa X ou uma instituição I. A partir disso, surgirão relações tais como: pessoa X com o objeto O, representada por R(X,O), ou uma instituição I com o objeto O representada por R(I,O). A relação de uma pessoa ou uma instituição com o objeto em questão garante a sua existência no sistema didático. (CHEVALLARD, p. 93, 1998)

A respeito das instituições, Chevallard (1998) afirma que vários elementos podem ocupar o lugar de uma instituição. Objetos e instituições podem trocar de função à medida que o ponto de referência de observação é modificado. Assim, é possível caracterizar a sala de aula, em um certo momento, como objeto dentro da perspectiva global do sistema educativo. Já em outra situação, a sala de aula pode ser considerada instituição quando vista a partir da perspectiva dos alunos, passando a ser considerada o local que rege a dinâmica de ensino e possui regras particulares de convivência.

A partir disso é possível caracterizar a instituição como sendo um dispositivo social que organiza a dinâmica e impõe aos sujeitos uma forma de agir e pensar, próprio desta instituição. Assim, para que uma instituição se constitua plenamente, faz-se necessário a existência de relações entre pessoas (X) e objetos (O).

> (...) A cada instituição I está associado um conjunto de objetos 01, chamado conjunto dos objetos institucionais (para I), que é o conjunto dos objetos O que I conhece, ou seja, para os quais existe uma relação institucional R1(O). Um objeto O é institucionalpara I ou, dito de outro modo, existe para I, quando I define uma relação (institucional)com O. (CHEVALLARD, 1999, p.225)

A relação estabelecida dentro de uma instituição segue características próprias que orientarão as formas de interação das pessoas (X) com os objetos (O). Desta forma, as relações estabelecidas entre os objetos e as instituições podem evoluir, modificar, envelhecer ou até mesmo desaparecer.

Um certo conteúdo trabalhado dentro da instituição escolar pode sofrer modificações ao longo do tempo de forma a atender as novas demandas exigidas socialmente, assim, como também pode desaparecer à medida que não se encontra mais significado dentro daquela instituição.

Esta situação pode ser exemplificada a partir dos acontecimentos provenientes do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Ao estabelecer o currículo escolar como instituição de referência, nota-se que após o advento da II Guerra Mundial, surge, então, as primeiras discussões acerca da necessidade de modernização dos conteúdos matemáticos.

Neste contexto, "[...] a reforma da "matemática moderna" expulsa, por volta de 1970, muitos elementos teóricos e tecnológicos da matemática "clássica" considerados obsoletos" (CHEVALLARD, 1998, p. 6), eliminando alguns conceitos que, posteriormente, deverão ser substituídos por outros, na dinâmica viabilizada pela praxeologia.

Chevallard (1990) ainda define, dentro do quadro teórico da TAD, outros conceitos como: Organização Didática, Organização Matemática, noção de momentos didáticos que serão fundamentados a seguir.

3.2 A praxeologia

A Teoria Antropológica do Didático se baseia no estudo da atividade matemática inserida em um conjunto de atividades humanas e das instituições sociais. Chevallard (1998) atribui à sua teoria a análise das práticas de ensino, guiadas pela praxeologia das organizações matemática e didáticas, a fim de orientar a busca por compreender as atividades humanas frente a Matemática.

> O ponto crucial a esse respeito, cujas implicações descobrimos gradualmente, é que o TAD situa a atividade matemática e, portanto, a atividade de estudo em matemática, noconjunto das atividades humanas e instituições sociais. Mas, esse viés epistemológico leva quem se sujeitou a atravessar em todos os sentidos – ou até mesmo ignorar – muitasfronteiras institucionais dentro das quais é habitual permanecer, porque, normalmente,respeita-se a divisão do mundo social que as instituições estabelecidas, e a cultura atualque espalha as mensagens à sociedade, nos apresentam como evidentes, quase natural e, em última instância, obrigadas. (CHEVALLARD, 1998, p. 1)

As instituições sociais lançam sobre os sujeitos quem compõem suas organizações, regras que precisam ser seguidas para manter a dinâmica e particularidade daquele espaço social. Essas regras são modeladas pelas praxeologias que tornam a dinâmica destas instituições uma rotina socialmente compreensível e aceitável.

Chevallard (1998) reforça que as atividades humanas visualizadas por meio das instituições podem ser organizadas em um único modelo. Esse modelo é denominado de *praxeologia.*

A atividade matemática, assim como qualquer outra atividade humana, se constitui por meio de duas partes inseparáveis: o saber e a prática. Um bloco está a "prática" – *práxis*, e em outro bloco está o "saber" – o *logos,* constituindo-se, assim, a praxeologia (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001).

O modelo explicitado por Chevallard (1998) organiza as atividades humanas através da concretização de tarefas a serem cumpridas. A identificação das tarefas permite estabelecer uma técnica, tecnologia e uma teoria, aspectos caracterizadores de uma instituição.

Para Chevallard, toda atividade humana pode ser registrada por meio de uma tarefa. Por exemplo: colher uma fruta é uma tarefa; colher uma melancia é um tipo de tarefa que tem correlação com a anteriormente. Porém, quando o complemento da tarefa é estabelecido, configura-se um tipo de tarefa que exigirá uma técnica de colheita diferente de outras com o mesmo comando. Identifica-se um conjunto com tarefas do mesmo tipo: colher uma fruta. Quando se tem a especificação qual tipo de fruta associado a execução da tarefa, designa-se, então, uma técnica a ser executada, que dependerá das condições de colheita daquela fruta em particular.

A partir da identificação da atividade e de sua execução, tem-se o registro da tarefa [T] e da técnica [τ]. Ambas compõem o bloco [T, τ] denominado de prático-técnico, ou bloco do saber-fazer.

Sobre o segundo bloco, tem-se dois outros elementos. Primeiramente, a tecnologia [θ] que tem como objetivos essenciais o de justificar, explicar e produzir novas técnicas (Chevallard, 1999). Esta se estabelece a partir do discurso racional dobre uma técnica. Enquanto a técnica vem mostrando os meios de resolução de uma tarefa, a tecnologia vem justificar os meios de resolução dado àquele problema matemático.

Finalmente, tem-se a *teoria* [Θ] com seu discurso justificativo sobre a tecnologia, apresentando-se por meio de seu caráter abstrato, afirmando o saber em símbolos matemáticos. O bloco [θ, Θ] é denominado de saber matemática, bloco do *logos.*

As praxeologias também podem ser denominadas como *organizações.* Desta forma, tem-se uma praxeologia matemática, ou *organização matemática* (OM), responsável pela modelagem de atividades matemáticas. E a praxeologia didática, ou organização didática (OD), aquela responsável pelas representações didáticas dos saberes matemáticos.

3.3 Praxeologia Matemática Ou Organização Matemática (OM)

Uma Praxeologia Matemática ou Organização Matemática é um sistema que possibilita a análise de um certo conceito matemático. Segundo Chevallard (1997), esta organização instala-se em torno de tarefas matemáticas (T), que necessitam de técnicas (τ) que deverão ser justificadas por tecnologias (θ) e, posteriormente, fundamentadas por uma teoria (Θ).

> Tal organização não é senão uma organização praxeológica de natureza matemática: ela se constitui em torno de uma ou vários tipos de tarefas matemáticas, mais ou menos bem identificadas, que demandam a criação de técnicas matemáticas mais ou menos adaptadas, e mais ou menos justificadas por tecnologias mais ou menos sólidas, que são desenvolvidas no quadro de uma teoria mais ou menos explícita (CHEVALLARD, 1997, p. 35).

Assim, uma Organização Matemática se estabelece em torno de um conceito inerente à própria Matemática. Porém, para que os saberes associados a uma praxeologia sejam identificados, Chevallard (1998) estabelece ao professor/pesquisador alguns critérios que devem ser considerados no processo de análise das Praxeologias Matemáticas.

Quanto as *tarefas*, questiona-se: existem tarefas bem identificadas? As necessidades matemáticas propostas nos conteúdos curriculares são aprovadas por esses tipos de tarefas?

As *técnicas* recomendadas para a resolução dos tipos de tarefas foram efetivamente elaboradas? As técnicas são suficientes para os tipos de tarefas propostos? As técnicas identificadas poderão sofrer progressos?

Quanto as *tecnologias*, será se elas dão conta de justificar as técnicas usadas? Elas conseguem esclarecer as técnicas utilizadas?

Os elementos teóricos estão sendo explicitados? A teoria consegue justificar a tecnologia empregada?

Todas essas questões nos permitem traçar um caminho investigativo sobre a constituição da Praxeologia Matemática, buscando compreender as estruturas organizacionais das situações matemáticas propostas pelo livro didático.

3.4 Praxeologia Didática Ou Organização Didática (OD)

A Teoria Antropológica do Didático traz em sua teorização aspectos importantes sobre a Organização Didática. Chevallard (1999), define que toda Organização Didática, assim como a Organização Matemática, se articula em tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias.

> Por organização didática podemos entender, a priori, o conjunto dos tipos de tarefas, de técnicas, de tecnologias, etc., mobilizadas para o estudo concreto em uma instituição concreta. O enfoque clássico em didática da matemática tem ignorado em geral os aspectos mais genéricos de uma organização de estudo de um tipo de sistemas didáticos (CHEVALLARD, 1999, p. 238)

Nesta fase da TAD há a definição da palavra estudo como forma de situar este processo de organização. O estudo é caracterizado pela "ideia de fazer qualquer coisa com o fim de aprender qualquer coisa (saber) ou de aprender a fazer qualquer coisa (saber-fazer)" (CHEVALLARD, 1999, p. 15). Sendo, então, possível de ser modelado por uma praxeologia ou por uma organização matemática.

Chevallard (1999) descreve essa modelação por meio de momentos de estudo ou momentos didáticos. Desta forma, temos que

> A noção de momento não remete mais que em aparência à estrutura temporal do processo de estudo. Um momento, no sentido dado da palavra aqui, é em primeiro lugar uma dimensão em um espaço multidimensional (...) uma sã gestão do estudo exige que cada um dos momentos didáticos se realize *no bom momento,* ou mais exatamente, nos *bons momentos* (CHEVALLARD, 1999, p. 242, grifos do autor)

Desta forma, descreveremos cada momento de estudo a fim de torná-los conhecidos e, posteriormente, tornarão a ser abordados para a análise dos livros didáticos.

O primeiro momento é definido como o primeiro encontro. Este representa o primeiro contato que um grupo ou pessoa tem com a organização em jogo. Tal encontro pode ocorrer por meio de algum tipo de tarefa tendo a função de problematizar um tema ainda não aprofundado pelo estudante. O primeiro encontro configura-se como o estágio inicial da aprendizagem, da descoberta do novo.

O segundo momento é caracterizado como exploratório. A partir do tipo de abordagem estruturada no primeiro encontro, este momento permite o surgimento de, pelo menos, uma técnica para solucionar a problema proposto.

O terceiro momento é marcado pelo trabalho da técnica. Nesta fase, é marcado o instante do desenvolvimento da técnica, onde há a demarcação da sua precisão, validade e alcance. Pode ocorrer modificações ou ampliações do uso da técnica, com o surgimento de outras técnicas juntamente com a explicação das tecnologias e teorias.

O quarto momento é conhecido como o tecnológico-teórico. Nesta etapa é necessário que haja uma explicação sobre as técnicas envolvidas na resolução das tarefas associadas ao momento de estudo.

O quinto momento é registrado como a institucionalização do saber. Após as diversas apresentações dos tipos de tarefas e seus desdobramentos tem-se a oficialização do saber levando em considerações as regras especificas de cada instituição.

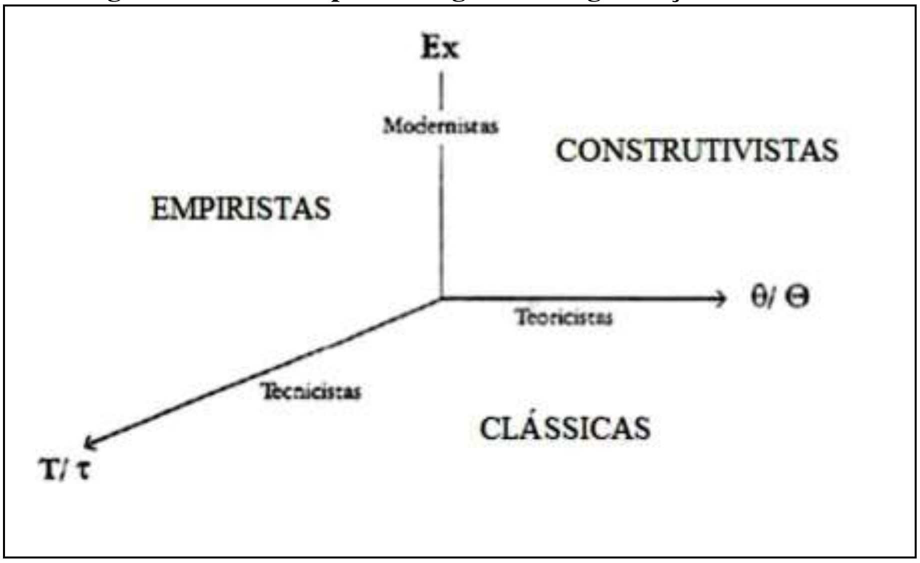
O sexto e último momento é registrado como o momento de avaliação. Esse momento coloca à prova o domínio que o aluno tem sobre determinado saber matemático.

A organização praxeológica apresenta a partir dos momentos didáticos, segundo Chevallard (1998) constitui uma realidade funcional de estudo. Através da observação dos momentos de estudo ao longo das aprendizagens torna-se possível compreender os processos didáticos associados.

Assim, ao investigar sobre a instituição de uma organização matemática podemos observar a associação de diferentes Organizações Didáticas. Ou seja, é possível ver por meio das relações educativas quando que uma etapa da praxeologia é mais valorizada que outra. Esta perspectiva nos concede meios para compreender como o saber é vivenciado em certa instituição.

Gascón (2003) resume as Organizações Didáticas em um espaço tridimensional com os seguintes eixos: teoricista, tecnicista e modernista.

Figura 2 – Modelo epistemológico das organizações didáticas



Fonte: Gascón (2003, p. 21)

No eixo teoricista temos o bloco tecnológico-teórico (θ/Θ), composto pelas tecnologias e teorias. Um modelo de prática pedagógica que prioriza o teoricismo compreende que aprender Matemática significa aprender teorias, ou seja, realizar organizações dedutivas envolvendo definições, postulados, demonstrações, tautologias e outras provas.

No eixo tecnicista, temos o bloco prático (T, τ), composto pelas tarefas e técnicas. A Organização Didática tecnicista compreende que aprender Matemática resulta do trabalho com diversas tarefas e técnicas, ou seja, a aprendizagem ocorre por meio da repetição de vários exercícios do mesmo tipo, que conduzirão à memorização de regras e procedimentos.

Ambos os eixos, teoricista e tecnicista, compreendem um processo didático totalmente mecânico, considerando o aluno, respectivamente, como uma "caixa vazia" que aprende conforme as informações recebidas e o como um "autômata", que aprende mediante o domínio de técnicas repetitivas.

O terceiro eixo, denominado modernista, é composto pela prática de experimentação. A prática valorizada nesse eixo está na exploração de problemas não triviais. Segundo Gascón (2003), nessa prática a aprendizagem da Matemática ocorre mediante exploração (tentar técnicas diversas, aplicar algum resultado conhecido, buscar problemas semelhantes, formular conjecturas, buscar contraexemplos).

Ao combinar os momentos do bloco tecnológico-teórico (θ/Θ) com os do bloco prático (T, τ) temos uma abordagem clássica, que considera que o processo de ensino é totalmente controlado pelo professor.

Da combinação dos momentos do bloco prático (T, τ) com a experimentação, temos a abordagem empirista, que considera que aprender matemática é um processo indutivo baseado em imitar o modelo proposto de atividade por meio de várias práticas.

E por fim, da articulação entre a experimentação e a valorização do bloco tecnológico-teórico (θ/Θ), temos a abordagem construtivista, que se propõe a contextualizar a atividade, considerando que aprender Matemática significa um processo ativo de construção do conhecimento.

A partir da abordagem dos momentos de estudo associadas ao modelo epistemológico organizado por Gascón (2003) teremos condições de perceber a *práxis* e o *logos* acerca do estudo em torno da Álgebra.

Assim, ao longo das organizações propostas pelos livros didáticos de Matemática consolidaremos nossa investigação acerca da abordagem proposta pela coleção *A Conquista da Matemática* no processo de desenvolvimento do pensamento algébrico.

4 O LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA

Com o objetivo de analisar a abordagem realizada pela coleção de livros didáticos de Matemática e como estão organizados o processo de desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de suas tarefas, encontramos elementos de resposta às nossas questões a partir da contribuição teórica e metodológica dos estudos de Yves Chevallard.

Nesse sentido, a Teoria Antropológica do Didático adequa-se como aporte norteador para as análises e discussões em torno das abordagens em livros didáticos de Matemática relacionados aos conteúdos de Álgebra e o pensamento algébrico.

Adotamos a Teoria Antropológica do Didático para investigar, tanto a abordagem do conteúdo do ponto de vista matemático, quanto do ponto de vista das escolhas didáticas. A teoria desenvolvida por Chevallard (1999) nos permite realizar uma análise delimitada por questões praxeológicas, tanto em aspectos de uma Organização Didática, quanto de uma Organização Matemática.

Guiados pela Teoria Antropológica do Didático estabelecemos critérios para análise das praxeologias. Os critérios organizam-se sobre os fundamentados estruturantes da TAD, possibilitando, assim, alcance das respostas à nossa questão de pesquisa.

4.1 O livro didático e processo de escolha da coleção

Em meio a tantos outros materiais didáticos disponíveis para esta investigação, optamos porinvestigar os livros didáticos, pois, segundo Bittar (2017)

> A origem do ensino da Matemática no Brasil está fortemente associada à própria história dos livros didáticos. Esta é uma das conclusões dos estudos empreendidos por Valente(2003 a), ao mostrar também a existência de uma relação de dependência entre o enfoque dados a um curso de Matemática e as características do livro adotado. Assim, consideramos ser um pressuposto plausível admitir que o livro didático exerça uma importância considerável nas atuais tendências da Educação Matemática. (BITTAR, 2017, p.5)

Assim, optamos por analisar os livros didáticos por representar o principal recurso didático de divulgação no país. Tanto por materializar o currículo designado por documentos normativos da educação, quanto por se aproximar das práticas pedagógicas de professores, já que estes participam diretamente do processo de escolha dos livros didáticos.

No aspecto da TAD, o livro didático vem ocupar posição de instituição, ou seja, estabelecerá relação com o sujeito e com o objeto, de forma a definir o modo e o local em que o saber matemático será apresentado.

> Uma instituição I é um dispositivo social que impõe às pessoas que ocupam uma posiçãoem I, modos de fazer e pensar próprios (Chevallard, 1992). Assim, o livro didático podeser considerado uma instituição para alunos e professores que o utilizam (a depender doobjetivo da pesquisa realizada) (BITTAR, 2017, p. 366)

Assim, o livro didático ocupa espaço de instituição com uma abrangência nacional, apoiado pelo Plano Nacional do Livro Didático, a fim de atuar como elemento norteador do currículo para alunos e professores. Desta forma, julgamos a necessidade desta pesquisa, de forma a investigar a abordagem dada a partir das perspectivas organizacionais do livro didático. Para estudar o nosso objeto de pesquisa, estabelecemos dois critérios para seleção da coleção de livros didáticos de Matemática. O primeiro critério está restringido pela escolha a

partir coleções aprovadas pelo Plano Nacional do Livro Didático[8] (PNLD) 2020.

Quadro 3 – Coleções de livros didáticos aprovados pelo PNLD 2020

Livro Didático	Editora	Quantitativo de aquisições
A Conquista da Matemática	FTD	5.033.531
Apoema – Matemática	Editora do Brasil	345.904
Araribá Mais – Matemática	Modena	620.824
Convergências Matemática	Edições SM	192.738
Geração Alpha Matemática	Edições SM	223.150
Matemática – Bianchini	Moderna	899.923
Matemática – Compreensão e Prática	Moderna	514.953
Matemática Essencial	Scipione	507.969
Matemática Realidade & Tecnologia	FTD	520.972
Teláris Matemática	Ática	1.025.496
Trilhas da Matemática	Saraiva Educação	218.718

Fonte: Elaboração própria (2021)

A fim de restringir ainda mais o foco de pesquisa, estabelecemos o segundo critério, direcionando para a escolha da coleção que apresentasse maior quantitativo de aquisições das coleções de livros didáticos daquela edição. A partir disso, selecionamos a coleção de livros didáticos *A Conquista da Matemática* da editora FTD, que, mesmo diante de tantas coleções, representou 49,81% do total de aquisições pelas escolas da rede pública em âmbito nacional.

De um total de 11 coleções, esta coleção obteve um quantitativo elevado, sendo dentre todas as outras as mais solicitadas para compor o material escolar de grande parte dos alunos do 6° ao 9° do Ensino Fundamental durante os anos de 2020 a 2023.

[8] O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) é o mais antigo dos programas voltados à distribuição deobras didáticas aos estudantes da rede pública de ensino brasileira.

4.2 Conhecendo a coleção *A Conquista da Matemática*

A coleção *A Conquista da Matemática* destinada para os anos finais do Ensino Fundamental foi publicada pela editora FTD em 2018 em sua 4ª edição sob a autoria de José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci.

A obra aborda os objetos de conhecimento por meio de uma linguagem matemática direta, a fim de alcançar a compreensão dos conceitos matemáticos. Um destaque observado ao longo da coleção está na utilização de imagens, gráficos e infográficos na apresentação dos conceitos. Estes elementos aparecem de forma a contribuir no processo de sentido dos conteúdos matemáticos.

Além disso, destacamos a exploração da temas interdisciplinares, em que se apresentam diversas possibilidades de conexão entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. No entanto, a ocorrência destes temas surge em situações desconexas com o conteúdo que está sendo tratado na seção, de forma que, será necessário atribuir ao professor a missão de relacionar os temas apresentados aos saberes matemáticos.

Cada livro didático para os anos finais da coleção está dividido em unidades e, cada unidade está subdivida em capítulos. A coleção apresenta-se de forma bastante ilustrativa, abordando diversos campos do conhecimento.

As unidades, em geral, estão organizadas nas seguintes seções:

- Abertura: capa da unidade que aborda temáticas na introdução do estudo;
- Para quem quer mais: apresentação de informação complementares sobreo que está sendo estudado;
- Atividades: proposta de exercícios para praticar o conteúdo aprendido;
- Pense e responda: espaço que valoriza a exploração das próprias hipóteses;
- Fórum: apresenta questões para provocar o debate;
- Saiba que: traz informações complementares de forma rápida e acessível
- Descubra mais: espaço para referências complementares para oaprofundamento da temática;
- Um novo olhar: espaço para a reflexão sobre a aprendizagem da unidade
- Nós: potencializa espaços de reflexão em grupos
- Por toda parte: aplicações diretas no cotidiano
- Educação financeira: questões relacionadas ao despertar sobre o consumoconsciente

- Tratamento da informação: organiza o tratamento dos dados
- Tecnologias: apresenta a possibilidade para o uso de recursos tecnológicos
- Atualidade em foco: apresentação de temas atuais de importância social
- Retomando o que aprendeu: sistematiza questões em torno dos conceitosabordados na unidade;
- Respostas: apresentação de todas as respostas das atividades propostas nolivro didático.

4. 3 Procedimentos de análise

Para análise da coleção de livros didáticos de Matemática estabelecemos algumas etapas para alcance dos objetivos da pesquisa. Guiados pelo objetivo de *analisar como a coleção A Conquista da Matemática, destinada aos anos finais do ensino fundamental, aborda o processo de desenvolvimento do pensamento algébrico*, dividimos esta pesquisa em dois objetivos específicos.

- Analisar as Organizações Matemáticas acerca do pensamento algébrico na coleção *A Conquista da Matemática* para os anos finais do ensino fundamental.

- Analisar as Organizações Didáticas acerca do pensamento algébrico na coleção *A Conquista da Matemática* para os anos finais do ensino fundamental.

Interessa-nos observar a forma que o livro didático de Matemática apresenta e organiza os elementos destinados ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Levaremos em consideração, tanto a parte destinada para o desenvolvimento dos conceitos quanto a parte designada para a proposta de atividades.

Além da análise do curso e dos exercícios propostos, analisaremos o manual do professor, visando entender, a partir das indicações e respostas dadas ao professor, qual a concepção dos autores acerca dos conteúdos e como eles devem ser trabalhados, buscando evidenciar as concepções indicadas, por parte das editoras, quanto a escolha de cada elemento contido na coleção de livros didáticos de Matemática.

Para organização das análises, buscaremos investigar as unidades que desenvolvem conteúdos baseados no desenvolvimento das habilidades e competências apontadas pela BNCC para o estudo de Álgebra. Para isso, identificamos todos as unidades e capítulos que apresentavam indicações diretas com as habilidades associadas a unidade temática de Álgebra segundo a BNCC.

Ao todo foram identificadas 20 habilidades distribuídas ao longo dos 4 livros da coleção, sendo 2 para o LD do 6° ano, 6 para o LD do 7° ano, 8 para o LD do 8° ano e 4 para o LD do 9° ano.

Partimos da identificação das tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, organizadas em tabelas. As tarefas (T) foram numeradas a fim de esclarecer a quantidade total ao longo de toda a coleção. Desta forma, a numeração é apresentada de forma contínua por todos os quatro livros da coleção.

As técnicas (τ) foram identificadas a partir de números e letras. A numeração é contínua, porém o índice literal representa o ano em que aquela técnica foi desenvolvida ou apresentada. Por exemplo, o índice *a* indica as técnicas do LD do 6° ano. Já o índice *b* as técnicas do LD do 7° ano, até chegar no LD do 9° ano que é representado pelo índice *d.*

As tecnologias e teorias são apresentas em uma única coluna. Decidimos ordenar desta maneira por considerar que as tecnologias e teorias (θ) exercem papel extremamente semelhante na justificação de técnicas quando vista nos anos da Educação Básica. Desta forma, decidimos representa-los conjuntamente, seguindo uma numeração contínua ao longo de toda a coleção.

Acerca das Organizações Didáticas seguiremos embasados pela teoria da TAD estruturando a análise a partir dos 6 momentos de estudo ao longo da parte do curso. foram identificados ao longo da parte do curso.

5 RESULTADOS DA PESQUISA

5.1 Análise do livro didático do 6° ano

O livro didático do 6° ano está organizado em 9 unidades, nas quais são abordadas as5 Unidades Temáticas do componente curricular de matemática descritas na BNCC. Para análise destacamos duas unidades que abordam diretamente sobre a unidade temática de Álgebra.

As habilidades destinadas ao desenvolvimento do ensino de Álgebra no livro do 6° aparecem nas unidades 5 e 9. Desta forma, iniciaremos com apresentação das unidades do livro e como estão dividas e, posteriormente, abordaremos sobre as Organizações Matemáticas e Didáticas sob a perspectiva da Teoria Antropológica do Didático.

Quadro 4 – Lista das unidades do livro didático do 6° Ano

LIVRO DO 6° ANO
Unidade 1 – Sistemas de numeração
Unidade 2 – Cálculos com números naturais
Unidade 3 – Figuras geométricas
Unidade 4 – Múltiplos e divisores
Unidade 5 – A forma fracionária dos números racionais
Unidade 6 – A forma decimal dos números racionais
Unidade 7 – Ângulos e polígonos
Unidade 8 – Comprimento e área
Unidade 9 – Massa, volume e capacidade

Fonte: Elaboração própria (2021)

As partes sombreadas no quadro 1 representam as unidades identificadas com associação as habilidades descritas dentro da unidade temática de Álgebra.

Cabe ressaltar que as unidades 5 e 9 abordam objetos de conhecimento e habilidades das demais unidades temáticas. Observa-se que os conceitos são inseridos acompanhados pelos saberes associados a unidade temática de *números*, *geometria*, *grandezas e medidas* e *probabilidade e estatística*. Tal abordagem sinaliza para uma perspectiva de introdução dos conceitos algébricos com associação a outros saberes matemáticos, reafirmando uma transversalização[9] do pensamento algébrico, elemento necessário para a aprendizagem global dos conceitos.

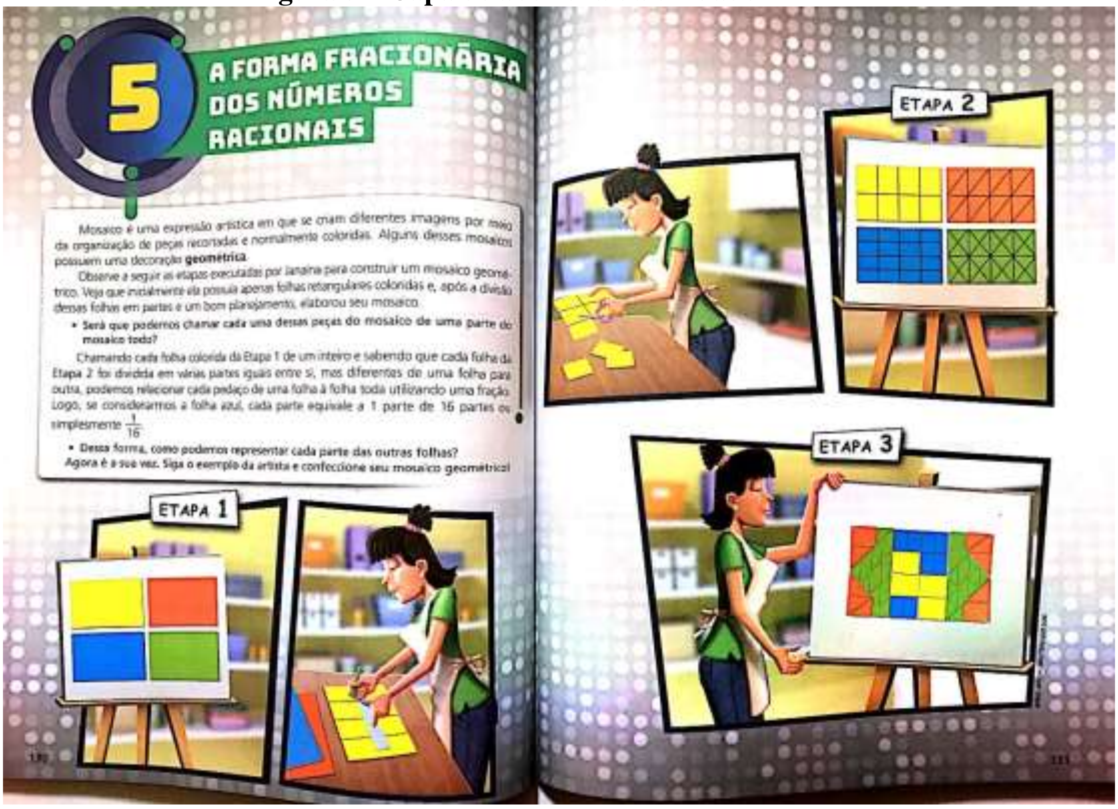
Na abertura da unidade 5 tem-se a apresentação do mosaico como uma expressão artística que se criam diferentes imagens por meio da organização de peças recortadas com o

---

[9] Entende pelo trabalho de forma contínua, abrangente e integrada do saber algébrico ao longo de todos osconteúdos e etapas do ensino fundamental.

objetivo de relacionar, inicialmente, a dois conceitos matemáticos: frações e polígonos. Porém, o livro destinado ao professor, sugere que sejam feitas relações com os mais diversos assuntos, abrindo espaço para que os alunos levantem hipóteses antes mesmo de iniciar a leitura da parte textual da abertura.

Figura 3 – Capa de abertura da unidade 5



Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 6° ano, p.130

A abertura da unidade representa uma etapa importante destacada pela Organização Didática. Observa-se que o conceito de fração não é abordado imediatamente, configurando, assim, o *primeiro contato* do aluno com aquele tipo de problema.

Destacamos que, esta etapa da organização didática pode utilizar de elementos já conhecidos dos alunos objetivando aproximá-los dos conceitos que serão abordados a posteriori. A abordagem de novos conceitos utilizando elementos conhecidos ou de fácil percepção contribuem para a compreensão gradual de conceitos matemáticos.

As páginas seguintes são organizadas em 8 capítulos, listados no quadro a seguir.

Quadro 5 – Lista dos capítulos da unidade 5 do livro do 6° ano

Unidade 5 – A formação fracionária dos números racionais
Capítulo 1 – A ideia de fração
Capítulo 2 – Problemas envolvendo frações
Capítulo 3 – Comparando frações
Capítulo 4 – Obtendo frações equivalentes

Capítulo 5 – Adição e subtração de frações
Capítulo 6 – A forma mista
Capítulo 7 – As frações e a porcentagem
Capítulo 8 – Probabilidade

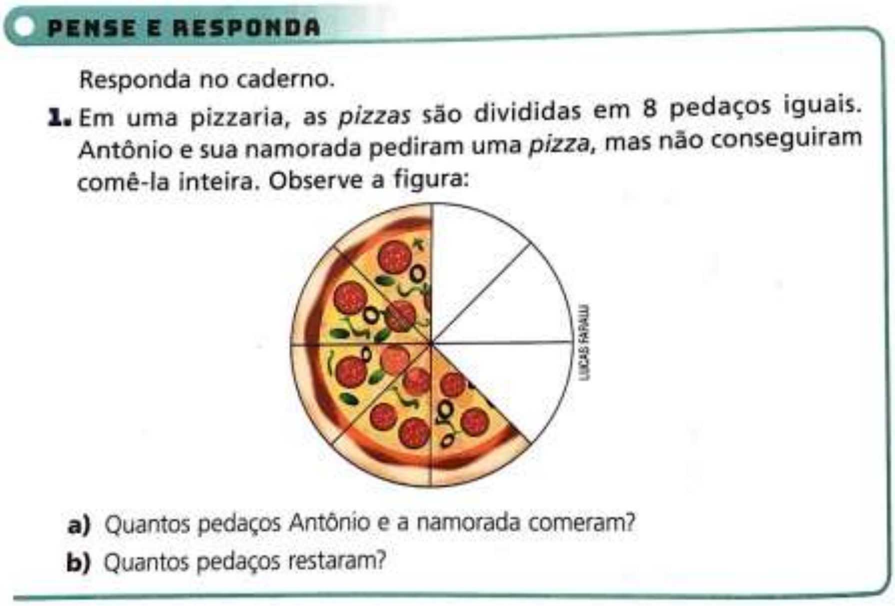
Fonte: Elaboração própria (2021)

A introdução ao capítulo 1 é feita por meio da abordagem histórica da matemática, apresentando, ligeiramente, como os egípcios utilizavam as frações em suas civilizações. Posteriormente, observa-se a ampliação da perspectiva, acerca da ideia de fração, para a aplicação de uma questão envolvendo a partilha de uma pizza entre duas pessoas.

Esta abordagem configura o momento *exploratório* da Organização Didática, que busca por meio de um problema ou questão ampliar o espaço de investigação do sujeito que estuda, a fim de aproximá-lo dos níveis subsequentes das praxeologias.

Porém, a introdução realizada por este capítulo ocorre de forma sucinta, citando, brevemente, sobre o conhecimento dos egípcios e a forma representativa da fração de numerar 1. Não há continuidade na abordagem histórica e tão pouco espaço para que os alunos se apropriem da forma de representação realizada pelos egípcios. Observa-se uma ruptura na forma de pensar, destacando, logo em seguida, uma sessão destinada a resolução de uma questão.

Figura 4 – Atividade da seção “pense responda”



Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 6° ano, p. 132

Direciono o olhar para reflexão acerca das múltiplas abordagens realizadas para a introdução da ideia de fração. A proposta didática do livro não se compromete em aprofundar um ponto, mas utiliza de três caminhos distintos para apresentação inicial do conteúdo de fração. A abertura da unidade traz aspectos relativos a Arte e a Matemática, na página seguinte destaca-se a apresentação do conceito sob o aspecto histórico e em seguida a estruturação de uma questão-problema. Após esta breve introdução, sem retomada aos pontos apresentados anteriormente, o livro didático segue a textualização do saber com a apresentação de novos elementos, sem referenciar o que já foi apresentado.

Em seguida, a abordagem escolhida para tratar sobre os conceitos de fração são organizados a partir da exposição de cortes barras e gráfico de setores.

Esta abordagem facilita na compreensão dos alunos acerca dos conceitos de fração, pois utiliza de recursos visuais para exemplificação dos conteúdos. A visualização geométrica dos conceitos permite que os alunos tenham acesso mais facilmente ao saber algébrico, para que, posteriormente, construa caminhos para a abstração e consolide o pensamento algébrico.

Após a parte introdutória do capítulo observa-se o surgimento das tarefas e técnicas, que irão compor os momentos de estudo e, consequentemente, a estruturação das praxeologias didáticas e matemáticas.

Ao olhar para a estrutura geral da unidade 5 e como seus capítulos estão dispostos, podemos destacar uma organização que remete a sequência dos momentos de estudo tratados na Teoria Antropológica do Didático. Destaca-se como *primeiro momento* o capítulo 1, os capítulos 2 e 3 como o momento *exploratório,* já os capítulos 4 ao 6 representam os momentos relativos ao *trabalho da técnica, tecnológico-teórico e institucionalização.* Os capítulos 7 e 8 apresentam aplicações acerca dos conceitos de fração, ampliando, assim, os horizontes de aprendizagem. O momento de *avaliação* está presente em todos os capítulos, tendo ao final de cada unidade um espaço destinado para recapitulação do que foi aprendido.

A partir disto, guiados pelas praxeologias, organizamos a análise das tarefas e técnicas buscando identificar em que situação ocorrem os momentos didáticos associados ao conteúdo abordado nesta unidade.

Quadro 6 - Praxeologias associadas ao capítulo 1 da unidade 5

Tarefa	Técnica	Tecnológico-teórico
T_1 – Identificar se as figuras representadas estão divididas em partes iguais	τ_{a1} – Observação das imagens.	θ_1 – Caracterização dos termos de uma fração
T_2 – Escrever a fração que está sendo representada pela figura ou problema descrito	τ_{a2} – Representar numericamente as partes divididas e as que foram consideradas.	

Fonte: Elaboração própria (2021)

O quadro anterior apresenta as tarefas e técnicas encontradas ao longo do capítulo 1 da unidade 5. Observa-se que as técnicas estão associadas interpretação de texto e compreensão das definições. Além do contato inicial que o aluno tem com as ideias de fração, ressaltamos que há uma relação, também, com o momento de institucionalização, quando os conceitos que outrora eram informais, agora passam a uma apresentação mais formal.

O capítulo 2 marca o 2° momento de estudo, aquele conhecido como exploratório. Claramente descrito no título deste capítulo, tem-se a exploração dos conceitos por meio de problemas envolvendo frações.

Figura 5 – Atividade da unidade 5


ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Em um grupo de 224 pessoas, verificou-se que $\frac{1}{8}$ dessas pessoas nasceu na região Nordeste do Brasil.

WANDSON ROCHA

Quantas pessoas desse grupo nasceram na região Nordeste?

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 6° ano, p. 138

Ao explorar problemas como este, o livro didático apresenta, conjuntamente, algumas técnicas para resolução desta questão. Tem-se, então, o surgimento das primeiras técnicas para solucionar problema. Destacamos duas técnicas associadas a este tipo de tarefa: τ_{a3} e τ_{a4}[10] que tratam do uso de representações geométricas e interpretação dos dados coletados. Esta abordagem é frequentemente observada no percurso de didatização do ensino de Álgebra, iniciando com recursos com grande apelo imagético para, posteriormente, utilizar de técnicas cada vez mais complexa.

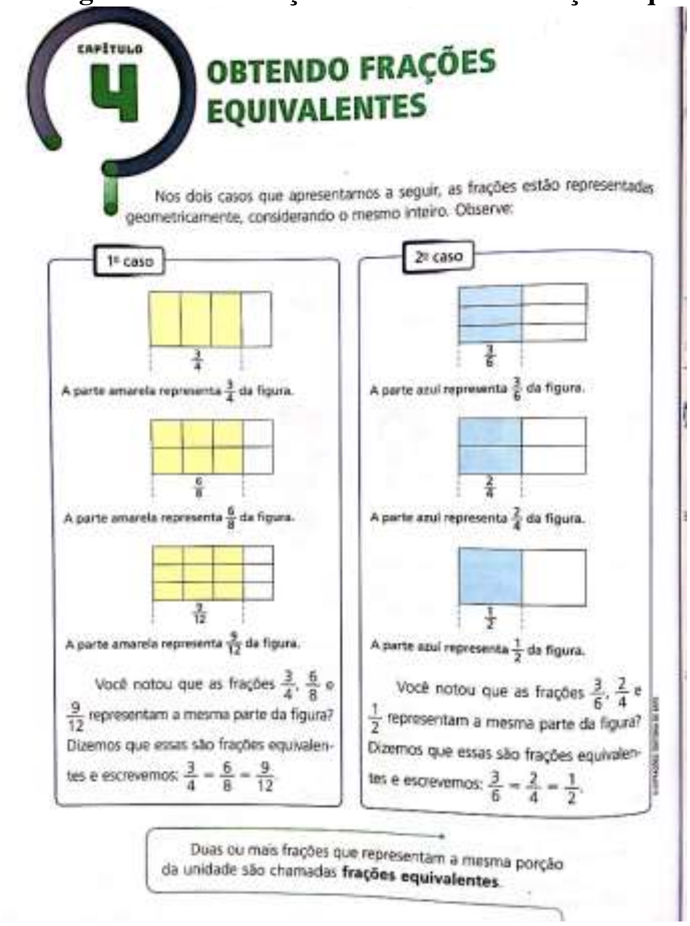
Nos capítulos seguintes observa-se o aumento substancial das técnicas, tendo mais de uma técnica associada a uma tarefa. Tal característica marca o momento didático com foco no

[10] τ_{a3} – Representar geometricamente; τ_{a4} – Interpretar os dados.

trabalho da técnica, onde se tem a necessidade de apresentar as formas aceitável de resolução das tarefas daquela instituição.

Destaca-se, também, o surgimento de uma tecnologia [θ_2][11] no capítulo 4, que busca formalizar a compreensão sobre as frações equivalentes após diversas representações geométricas sobre este tipo de fração

Figura 6 – Introdução ao conteúdo de frações equivalentes



Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 6° ano, p. 142

Observa-se que a tecnologia apresentada não utiliza de recursos da notação matemática para fundamentar os conceitos sobre frações equivalentes. Destacamos que, esta característica dada ao bloco tecnológico-teórico ocorre devido ao processo de transposição didática do saber ao longo do tempo, objetivando tornar compreensível os conceitos matemáticos. Porém, é importante ressaltar que esta abordagem pode ser aceitável em anos iniciais devido à baixa habilidade de abstração dos alunos, mas não deve prolongar-se ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental.

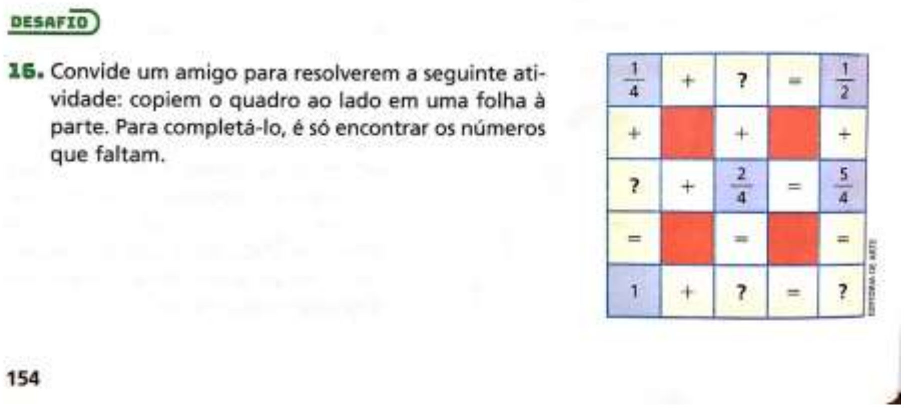
[11] θ_2 – Caracterização das frações equivalentes.

Segundo Chevallard (1991, p. 31), “para restabelecer a compatibilidades, torna-se indispensável a instauração de uma corrente do saber proveniente do saber sábio”, reestruturando o processo de transposição didática.

Ainda sobre o processo de transposição didática, observa-se que o livro didático destinado ao 6° ano possui poucos elementos formais relacionados a Álgebra. Porém, ressaltamos que para a construção do pensamento algébrico faz-se necessário muito mais que a operacionalização da linguagem algébrica. Desta forma, concordamos com Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) quando defendem a necessidade de abordar os aspectos relacionados ao desenvolvimento do pensamento algébrico desde o início da escolarização mesmo quando os alunos não apresentem conhecimento sobre a linguagem algébrica simbólica.

A partir disso, pudemos destacar alguns momentos em que surge a necessidade de ampliar a percepção do aluno e extrapolar o uso imediato das técnicas indicadas pelo livro didático. Estes momentos são apresentados pela coleção como os “desafios”. São atividades que exploram os conteúdos da unidade e podem resgatar técnicas trabalhadas, até mesmo, em anos anteriores.

Figura 7 – Desafio sobre frações equivalentes



Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 6° ano, p. 154

Este desafio exige a utilização dos saberes relativos a operações com frações. No capítulo em questão detectamos duas técnicas associadas a operações com frações, a saber: [τ_{a7} e τ_{a8}] que tratam da forma de operar com frações de denominador igual e diferente. Além disso, o manual do professor sugere que o docente relembre os alunos de que a adição e subtração são operações inversas, optando por agregar esta forma ao processo de resolução do desafio.

Ainda sobre esta questão observamos que o sinal de interrogação ocupa um espaço desconhecido, remetendo a busca pela incógnita da questão. A abordagem é focalizada no conteúdo de operações com frações, porém observa-se que já ocorre a introdução da ideia de equação que será trabalhada nos anos posteriores.

Atividades como esta, que extrapolam a imediata utilização das técnicas apresentadas, possibilitam a construção de um raciocínio matemático que não se limita a mecanização do saber. Ainda que em doses sutis observa-se que há uma inserção de tarefas voltadas para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Seguindo para o capítulo 6 observa-se o estabelecimento do 3° momento de estudo, em que há o *trabalho com a técnica.* Tem-se diversas representações geométricas e numéricas das frações mistas, focalizando para o aprimoramento de técnicas já utilizadas anteriormente.

Nos capítulos 7 e 8 o uso de frações associados a porcentagem e probabilidade. Esta conexão permite que os alunos tenham uma perspectiva ampliada acerca do uso das frações, não limitando a representações sobre associadas a pizza e barras de chocolate. Nestes capítulos, observamos o estabelecimento do 1°, 2° e 3° momento de estudo. Não identificamos etapas relacionadas ao bloco tecnológico-teórico e formalização do saber, estes dois últimos capítulos têm objetivo de registrar o início de um estudo que será abordado em anos posteriores.

Ao final da unidade observa-se uma seção intitulada “retomando o que aprendeu” que visa avaliar por meio de atividades os conteúdos trabalhados durante toda a unidade. Esta seção foi identificada como sendo a fase final dos momentos de estudo, onde ocorre a *avaliação* sobre os conteúdos aprendidos ao longo da unidade 5.

Agora abordaremos a unidade 9 do livro didático de matemática do 6° ano. Esta unidade é composta por 3 capítulos, organizados no quadro a seguir:

Quadro 7 – Lista dos capítulos da unidade 9 do livro do 6° ano

Unidade 9 – Massa, volume e capacidade
Capítulo 1 – Unidade de massa
Capítulo 2 – Medindo o espaço ocupado
Capítulo 3 – Unidade de medida de capacidade

Fonte: Elaboração própria (2021)

A abertura da unidade aborda uma proposta que objetiva apresentar formas de captação de água que envolvam medida de capacidade e de volume. Inicialmente, levanta uma questão importante sobre a economia de água e a necessidade de manter a rotina de higienização. O livro didático, por meio de problemáticas como estas, aproxima o aluno do conteúdo a ser estudando e possibilita o diálogo de um assunto socialmente importante.

Os capítulos 1, 2 e 3 abordam sobre unidades de massa, volume e capacidade, respectivamente. Em geral, contabilizamos 4 tarefas, 2 técnicas e 1 tecnologia.

O capítulo 1 é iniciado por um diálogo entre dois personagens, mãe e filho conversando sobre a unidade de medida adequada para representar as medidas de massa. Este momento marca o que descreveríamos como o *primeiro momento* de estudo, aquele em que o aluno é envolvido por um enredo ou problema, a fim de buscar compreender mais sobre o assunto.

Posteriormente, tem-se a apresentação de um box denominado "pense e responda" destinado a valorização da construção e experimentação das hipóteses dos alunos. Sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático reconhecemos como o momento destinado a *exploração* da temática, estabelecendo espaço para que o aluno utilize recursos internos e externos ao livro didático para solucionar a questão.

Em seguida há o registro de tabelas e réguas representando as unidades de medida de massa frequentemente utilizadas no dia a dia e pelo livro didático. A representação gráfica das unidades de medida nesta etapa afirma o momento em que se faz o *trabalho da técnica,* determinando a precisão, validade e alcance diante das tarefas apresentadas.

Ressaltamos que é exatamente esta técnica (τ_{a12}) que se faz presente ao longo da textualização dos três capítulos da unidade 9. Veja a seguir o quadro referente as tarefas, técnicas e tecnologias observadas ao longo da nona unidade.

Quadro 7 – Praxeologias referente a 9 unidade do livro didático do 6° ano

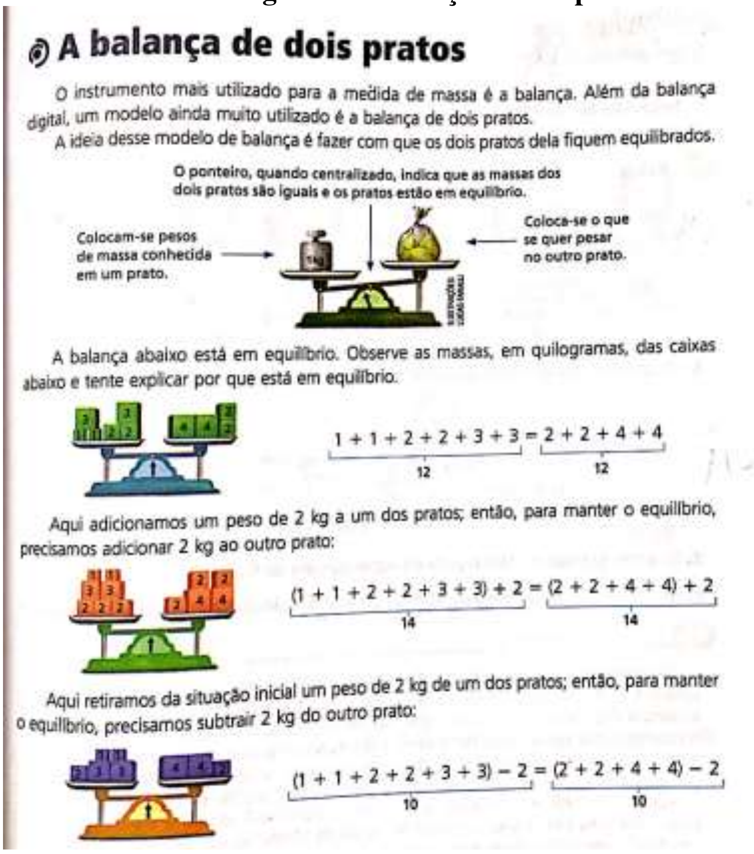
Tarefa	Técnica	Tecnológico-teórico
T_{14} – Transformar as unidades de medida de massa.	τ_{a12} – Utilizar a tabela e a réguas das unidades	
T_{15} – Comparar unidade de medida	τ_{a13} – Usar a balança de dois pratos	θ_3 – Descrição do conceito de volume
T_{16} – Calcular as unidades de medida de volume	(τ_{a12})	
T_{16} – Calcular as unidades de medida de capacidade	(τ_{a12})	

Fonte: Elaboração própria (2021)

As tarefas T_{14} a T_{16} não se restringem ao exercício de transformação de unidades de medida, em diversas questões há uma contextualização em torno do exigido pela questão. Para que o aluno resolva o problema é necessário que ele faça a transformação das unidades de medida e para isso cabe a utilização da técnica que orienta o aluno a recorrer a uma tabela ou construção da régua. A esta régua de transformação de unidade de medidas está associada a compreensão sobre a equivalências entre as unidades e que deverá multiplicar ou dividir a fim de transformar para unidade de medida que deseja.

A τ_{a13} é a técnica que está associada a comparação de unidades de medida. Está técnica está diretamente associada ao desenvolvimento da habilidade EF06MA15 da BNCC, que objetiva trabalhar com a propriedade de igualdade.

Figura 8 – Balança de dois pratos



Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 6° ano, p. 263

A balança de dois pratos como técnica associada a comparação de unidades de medida é interessante para fazer com o que o aluno tenha o contato inicial acerca da propriedade de igualdade. Este conceito já foi introduzido desde os anos iniciais do ensino fundamental, mas será nos anos finais do ensino fundamental que este conceito tornar-se-á complexo.

Esta técnica não tem um fim em si mesma, mas servirá para a construção do pensamento algébrico, dando suporte para a compreensão do que em Álgebra será reconhecido como princípio aditivo e multiplicativo. Vale destacar que este princípio se torna base para a compreensão das técnicas operativas na resolução de equações no 7° e 8° ano do ensino fundamental.

Os entraves no processo de ensino e aprendizagem de álgebra recaem, diversas vezes, sobsituações em que o aluno não compreende a razão de estar operando daquela maneira, faz parasatisfazer as exigências de uma instituição, a fim de ser aprovado.

É comum observarmos alunos do 8° operando com equações utilizando técnicas como "Se está somando desse lado, passa para o outro lado com o sinal trocado". Esta técnica se não observada pode gerar erros na resolução. Não compreender sobre a técnica sempre tornará o processo de aprendizagem incompleto, gerando lacunas na construção do saber.

A cerca dos momentos de estudo observamos que associado a esta parte do capítulo temos a *primeiro contato,* momento *exploratório, trabalho da técnica* e momento destinado a *avaliação,* momentos 1, 2, 3 e 6 respectivamente.

Observa-se que, de forma geral, não há ocorrência de muitos momentos associados ao *tecnológico-teórico* e *institucionalização.* Destacamos que o livro didático do 6° preocupa-se com o estabelecimento de tarefas e técnicas, remetendo a uma abordagem tecnicista (GASCÓN, 2003).

Ao trabalhar a ideia de partilha em partes desiguais foi explorado a relação de proporcionalidade. Já ao tratar sobre a propriedade de igualdade por meio da balança de dois pratos observou-se que foi possível favorecer a compreensão inicial para o trabalho com equações. Por isso, situações em que os alunos são levados a explorar e concluir que uma igualdade não se altera a adicionar ou subtrair por mesmo número ou quantidade, como representado na balança de dois pratos.

Em geral, as unidades 5 e 9 destinadas ao desenvolvimento, também, de habilidades algébricas apresenta a introdução de questão que envolvam situações relacionadas a proporcionalidade e propriedades de igualdade. Ambas desempenharão função essencial para consolidação do pensamento algébrico.

5.2 Análise do livro didático do 7° ano

O livro didático do 7° ano está organizado em 9 unidades, com destaque para duas unidades específicas, que abordam sobre a Unidade Temática de Álgebra como apontada pela BNCC. O quadro a seguir mostra as unidades contidas no livro didático do 7° ano e quais serão analisados.

Quadro 8 – Lista das unidades do livro didático do 7° Ano

LIVRO DIDÁTICO DO 7° ANO
Unidade 1 – Números naturais e operações
Unidade 2 – O conjunto dos números inteiros
Unidade 3 – Transformações geométricas e simetria
Unidade 4 – O conjunto dos números racionais
Unidade 5 – Linguagem algébrica e equações
Unidade 6 – Figuras geométricas planas

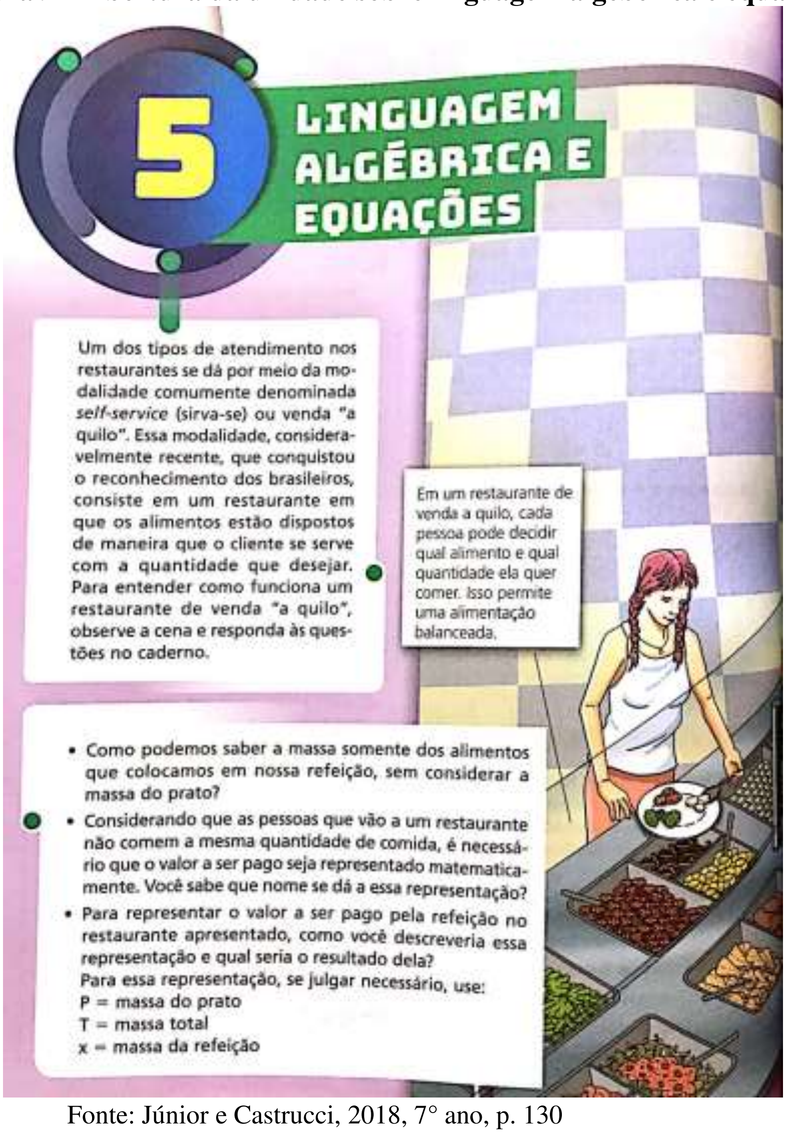
Unidade 7 – Grandezas proporcionais
Unidade 8 – Porcentagem, probabilidade e estatística
Unidade 9 – Área e volume

Fonte: Elaboração própria (2021)

As habilidades relativas ao ensino de Álgebra identificadas no livro didático do 7° ano aparecem nas unidades 5 e 7. Destacaremos neste livro a ocorrência da *institucionalização* de diversos conceitos introduzidos no livro do 6° ano. Ou seja, conceitos que outrora haviam sido apenas mencionados, agora são apresentados formalmente por meio da linguagem algébrica.

A unidade 5 focaliza em tópicos essenciais para a compreensão dos conceitos algébricos, trazendo, ao longo de seus capítulos, elementos associados a construção da linguagem algébrica e das equações. Esta unidade tem por objetivo retomar os estudos de regularidades em sequências, a fim de ampliar o trabalho realizado em anos anteriores e em unidades anteriores do próprio livro.

Figura 9 – Abertura da unidade sobre linguagem algéberica e equações



Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 7° ano, p. 130

A introdução da abertura desta unidade representa o primeiro momento de estudo, que possibilita ao aluno o *primeiro encontro* com a linguagem algébrica partindo da contextualização sobre consumo e gastos em um restaurante.

Destaca-se nesta página a apresentação de caixas de perguntas a fim de levantar questionamentos para a participação dos alunos na construção de hipóteses para resolução da problemática.

O manual do professor sugere que sejam lançadas questões para os alunos com a finalidade de que eles deem as respostas a sua maneira. O objetivo inicial desta abertura não está focado em seguir as representações matemáticas convencionais, pois é esperado que nem todos cheguem a elas. A indicação feita pelo manual é que após avançar no estudo sobre a linguagem algébrica o professor retorne à temática desta abertura para debater as mesmas questões sob uma nova ótica das técnicas aprendidas.

As páginas seguintes são divididas em 8 capítulos que serão organizados no quadro a seguir:

Quadro 9 – Lista dos capítulos da unidade 5 do livro do 7° ano

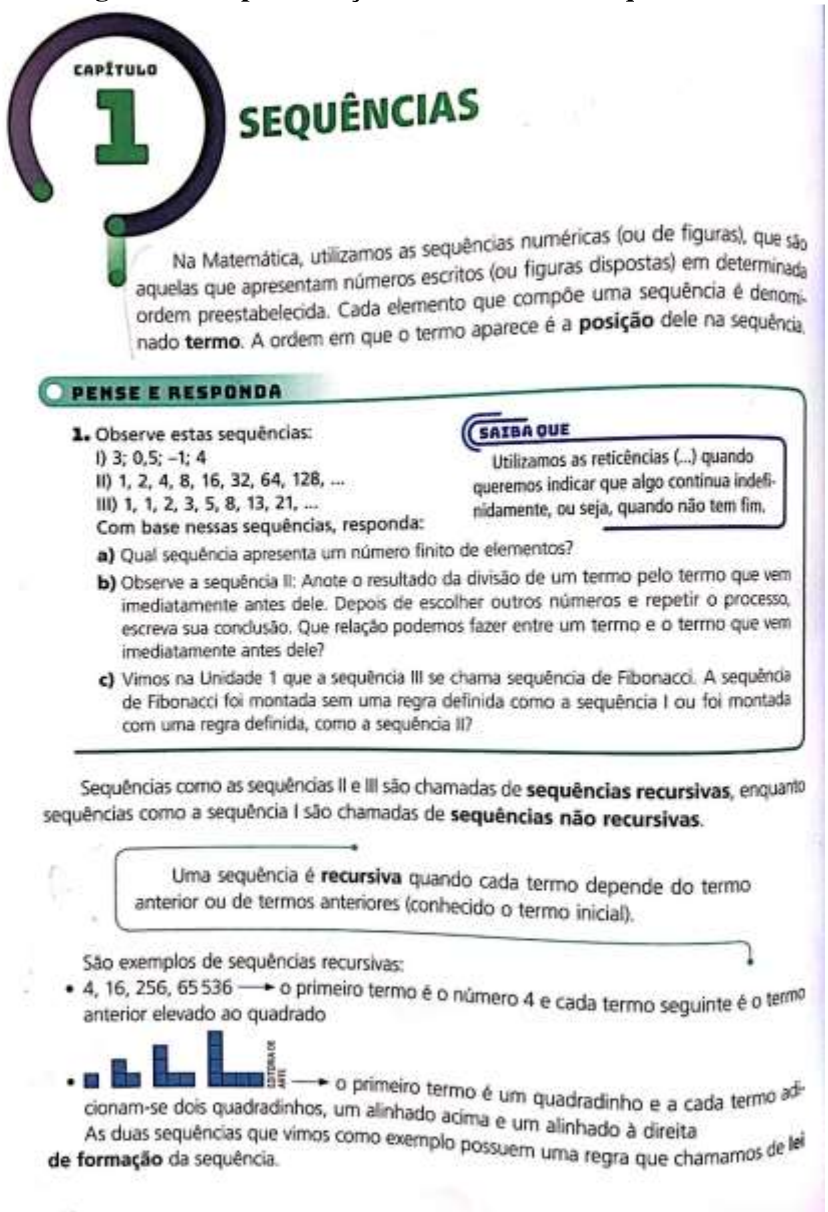
Unidade 5 – Linguagem algébrica e equações
Capítulo 1 – Sequências
Capítulo 2 – Expressões algébricas
Capítulo 3 – Igualdade
Capítulo 4 – Equações
Capítulo 5 – Conjunto universo e solução de uma equação
Capítulo 6 – Equações equivalentes
Capítulo 7 – Equações do 1° grau com uma incógnita
Capítulo 8 – Equações na resolução de problemas

Fonte: Elaboração própria (2021)

No capítulo 1 desta unidade observa-se que há o objetivo de trabalhar com conceito de sequência e a observação de regularidades de modo a caracterizar a sequência, indo além das classificações de finitude e infinitude ou de crescente e decrescente.

O manual do professor sugere que os alunos já tenham acessado a ideia de regularidades de sequências de figuras ou outros tipos de sequências ao longo da escolarização. Porém é nesta fase que ocorre a formalização deste conceito, ou seja, a *institucionalização* deste saber.

Figura 10 – Apresentação do conteúdo de sequências



CAPÍTULO 1

SEQUÊNCIAS

Na Matemática, utilizamos as sequências numéricas (ou de figuras), que são aquelas que apresentam números escritos (ou figuras dispostas) em determinada ordem preestabelecida. Cada elemento que compõe uma sequência é denominado **termo**. A ordem em que o termo aparece é a **posição** dele na sequência.

PENSE E RESPONDA

1. Observe estas sequências:

I) 3; 0,5; −1; 4

II) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...

III) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Com base nessas sequências, responda:

SAIBA QUE

Utilizamos as reticências (...) quando queremos indicar que algo continua indefinidamente, ou seja, quando não tem fim.

a) Qual sequência apresenta um número finito de elementos?

b) Observe a sequência II: Anote o resultado da divisão de um termo pelo termo que vem imediatamente antes dele. Depois de escolher outros números e repetir o processo, escreva sua conclusão. Que relação podemos fazer entre um termo e o termo que vem imediatamente antes dele?

c) Vimos na Unidade 1 que a sequência III se chama sequência de Fibonacci. A sequência de Fibonacci foi montada sem uma regra definida como a sequência I ou foi montada com uma regra definida, como a sequência II?

Sequências como as sequências II e III são chamadas de **sequências recursivas**, enquanto sequências como a sequência I são chamadas de **sequências não recursivas**.

Uma sequência é **recursiva** quando cada termo depende do termo anterior ou de termos anteriores (conhecido o termo inicial).

São exemplos de sequências recursivas:

- 4, 16, 256, 65 536 → o primeiro termo é o número 4 e cada termo seguinte é o termo anterior elevado ao quadrado
- → o primeiro termo é um quadradinho e a cada termo adicionam-se dois quadradinhos, um alinhado acima e um alinhado à direita

As duas sequências que vimos como exemplo possuem uma regra que chamamos de **lei de formação** da sequência.

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 7° ano, p. 132

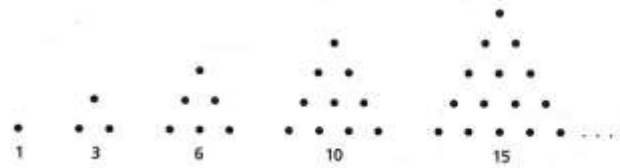
Na introdução do capítulo destinado ao estudo de sequências não há a apresentação de uma escrita em linguagem algébrica, mas sim, o processo de construção da ideia deste conceito. Observa-se na seção “Pense e responda” a presença de questionamentos que deverão direcionar o aluno para a construção do pensamento acerca do conceito de sequência. Esta abordagem, configura-se como o momento *exploratório,* em que são utilizados de recursos para ampliar o conhecimento do sujeito por meio da investigação das proposições. Este movimento de investigação favorece para a construção do pensamento como elemento essencial da aprendizagem, de forma a romper com concepções de passividade do aluno frente ao saber matemático, geralmente atribuídas a um sistema educacional tradicional.

Ainda, na mesma página observa-se a identificação dos elementos que compõem uma sequência, a instituição do conceito de sequência recursiva e não recursiva. Os autores apresentam estes conceitos sem utilizar da linguagem algébrica, registrando, então, como marco importante para a consolidação dos conceitos algébricos a partir de uma linguagem acessível aos alunos do 7° ano.

Ainda sobre este momento, destacamos que o registro feito nesta parte inicial do capítulo configura-se como momento de *institucionalização*, consolidando-se como tecnologia (θ_4) que justificará uma série de tarefas ao longo do capítulo. A identificação desta tecnologia demonstra a abordagem realizada nesta etapa de ensino, onde não há, necessariamente, a ocorrência de uma formalização dos conceitos a partir do uso da linguagem algébrica, mas sim, de recursos que estão à disposição dos alunos.

Após a apresentação das técnicas que buscam solucionar as tarefas sobre sequências, olivro didático aborda exemplos sobre sequências recursivas a fim de consolidar a validade e alcance das técnicas dadas.

Figura 11 – Exemplo sobre sequência dos números triangulares



2 A sequência de figuras a seguir é denominada **sequência dos números triangulares**, cujas figuras são arranjos de pontos em forma de triângulos. Os números associados a cada uma dessas figuras (um número triangular) correspondente ao número de pontos da figura:

Analisando a formação das figuras, percebemos que a segunda figura tem 2 pontos a mais que a primeira, a terceira tem 3 pontos a mais que a segunda, a quarta tem 4 pontos a mais que a terceira e assim por diante.

Então, temos: $T_1 = 1$ $\quad T_3 = 6 = T_2 + \mathbf{3}$ $\quad T_5 = 15 = T_4 + \mathbf{5}$

$T_2 = 3 = T_1 + \mathbf{2}$ $\quad T_4 = 10 = T_3 + \mathbf{4}$

Logo, o termo geral é $\mathbf{T_n = T_{n-1} + n}$, em que n é um número natural e $n > 1$ e $\mathbf{T_1 = 1}$.

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 7° ano, p. 134

A imagem anterior apresenta uma sequência de números triangulares, buscando, a partir dos termos dados, obter os próximos termos desta sequência. O livro didático estabelece como técnica de resolução a observação da sequência a anotação dos termos já observados. Não há uma designação fixa para construção da lei de formação de uma sequência recursiva, faz-se necessário observar e registrar os eventos que ocorrem a cada a termo e, somente assim, escrever a formula do termo geral da sequência.

Este tipo de tarefa demanda muito mais que a aplicação de uma fórmula pronta, exige que os alunos sejam estimulados a observação de regularidades. Concordamos com Ponte, Branco e Matos (2009) quando afirmam que

> Um elemento igualmente central ao pensamento algébrico é a ideia de generalização: descobrir e comprovar propriedades que se verificam em toda uma classe de objetos. Ou seja, no pensamento algébrico dá-se atenção não só aos objectos mas principalmenteàs relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tantoquanto possível de modo geral e abstrato. Por isso, uma das vias privilegiadas para promover este raciocínio é o estudo de regularidades num dado conjunto de objectos. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009)

Assim, a observação de regularidades e o registro do comportamento dos termos de uma sequência estão relacionados diretamente ao desenvolvimento do pensamento algébrico, pois não se limita a um conteúdo matemático, mas pode ser aplicado de forma transversal a outros contextos de estudo, ampliando, assim, a aprendizagem dos alunos.

Seguindo para o capítulo 2, destacamos o trabalho a partir das expressões algébricas, trazendo em seu texto três tecnologias. Não identificamos tarefas e nem técnicas novas, pois o foco deste capítulo está na instituição de conceitos algébricos.

Quadro 10 – Tecnologias do capítulo sobre expressões algébricas

Bloco Tecnológico-teórico	
θ_6	Conceito de expressão algébrica
θ_7	Conceito de variável
θ_8	Conceito de incógnita

Fonte: Elaboração própria (2021)

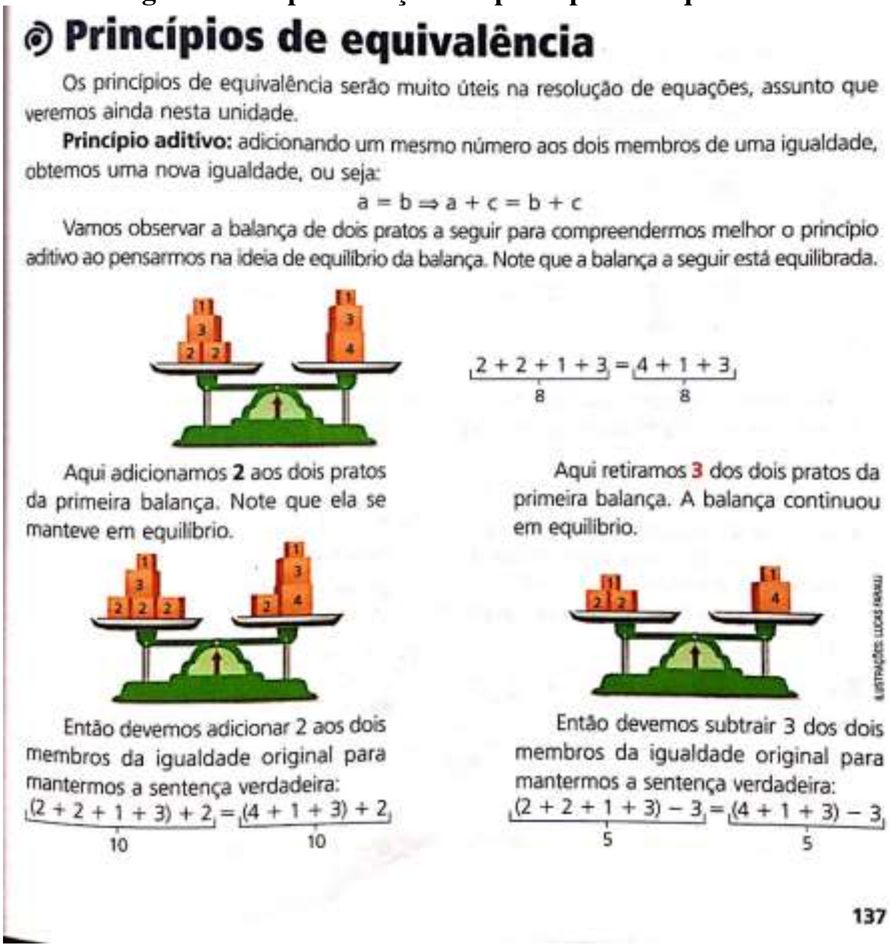
Todos estes conceitos são organizados no livro como caracterizadores como o primeiro momento de estudo, por pontuar o *primeiro contato* com este conteúdo, além de registrar, também, momento de *institucionalização,* pois apresenta, conjuntamente, a ideia conceitual associada a elas.

As tecnologias (θ_7) e (θ_8) apresentam os conceitos de variável e incógnita, respectivamente. Estes dois conceitos são primordiais para a compreensão das técnicas ao longo do estudo da Álgebra. Assim, ao iniciar o estudo posterior de equações e funções, a consolidação destes conceitos completará sua função na praxeologia, e consequentemente, caracterizará a conclusão do processo de aprendizagem.

O capítulo 3 retoma e aprofunda estudos encontrados no livro didático do 6° ano. Observa-se, a retomada da técnica (τ_{a13})[12], que foi utilizada, anteriormente, para comparar unidades de medida. No entanto, neste momento é destacada a ampliação de funcionalidade dentro da organização praxeológica do livro do 7° ano, sendo empregada agora a fim de tornar compreensível os princípios aditivos e multiplicativos da igualdade.

A técnica (τ_{a13}) outrora acompanhada por representações aritméticas buscava explorar apenas o princípio aditivo, agora utiliza-se da linguagem algébrica a fim de explicitar, também, o princípio multiplicativo da igualdade.

Figura 12 – Apresentação dos princípios de equivalência



Princípios de equivalência

Os princípios de equivalência serão muito úteis na resolução de equações, assunto que veremos ainda nesta unidade.

Princípio aditivo: adicionando um mesmo número aos dois membros de uma igualdade, obtemos uma nova igualdade, ou seja:

$$a = b \Rightarrow a + c = b + c$$

Vamos observar a balança de dois pratos a seguir para compreendermos melhor o princípio aditivo ao pensarmos na ideia de equilíbrio da balança. Note que a balança a seguir está equilibrada.

$$\underbrace{2 + 2 + 1 + 3}_{8} = \underbrace{4 + 1 + 3}_{8}$$

Aqui adicionamos **2** aos dois pratos da primeira balança. Note que ela se manteve em equilíbrio.

Então devemos adicionar 2 aos dois membros da igualdade original para mantermos a sentença verdadeira:

$$\underbrace{(2 + 2 + 1 + 3) + 2}_{10} = \underbrace{(4 + 1 + 3) + 2}_{10}$$

Aqui retiramos **3** dos dois pratos da primeira balança. A balança continuou em equilíbrio.

Então devemos subtrair 3 dos dois membros da igualdade original para mantermos a sentença verdadeira:

$$\underbrace{(2 + 2 + 1 + 3) - 3}_{5} = \underbrace{(4 + 1 + 3) - 3}_{5}$$

137

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 7° ano, p. 137

Os momentos de estudo associados a esta situação são reconhecidos como a *institucionalização* do saber, onde ocorre a apresentação dos conceitos relacionados ao princípio de equivalência de uma igualdade (θ_7 e θ_8).

[12] Técnica encontrada no livro do 6° ano que utiliza da balança de dois pratos como recurso para comparar unidades de medida e conduzir a aprendizagem das propriedades de igualdade.

Posteriormente, ocorre o *trabalho da técnica* associado a representação aritmética dos elementos presentes na balança de dois pratos e, logo depois, a justificação das técnicas caracterizando o momento *tecnológico-teórico,* registrando a necessidade de cada técnica apresentada dentro da organização didática e matemática observada.

Seguindo para o capítulo 4, destaca-se a abordagem do conceito de equações, estabelecendo uma nova tecnologia (θ_{11}) estruturada sob conceitos já mencionados na unidade.

Quadro 11 – Organização Matemática indicada no capítulo sobre Equações

Tarefa	Técnica	Tecnológico-teórico
T_{23} – Identificar as sentenças matemáticas como equações ou não.	τ_{b21} – Identificar a partir da dos exemplos de equação.	θ_{11} – Definição de equação

Fonte: Elaboração própria (2021)

Observa-se que neste capítulo há caracterização do momento de estudo associado ao *primeiro encontro.* Tal afirmativa decorre a observância do primeiro registro acerca deste assunto, configurando, assim, contato inicial dos alunos com esta temática, mesmo que os conceitos fundamentais deste momento lhe pareçam familiares.

A ideia de equação já havia sido trabalhada informalmente em momentos anteriores, a partir do recurso apresentado por meio da balança de dois pratos, porém é nesta fase que o conceito é *institucionalizado,* ou seja, firma-se os conceitos explicitamente.

Os capítulos 5, 6 e 7 estão associados ao *trabalho da técnica,* mesmo que ao longo da textualização observa-se momentos destinados a construção de aspectos voltados para o *tecnológico-teórico* e *institucionalização.*

Percebe-se que há uma sobreposição dos momentos de estudo ao longo dos capítulos. Tal acontecimento permite uma movimentação que favorece o processo de ensino e aprendizagem, permitindo que os alunos tenham acesso a uma organização didática mais dinâmica e que não se estruture apenas pela tríade conceito-exemplo-exercício.

Em diversos momentos, os autores do livro didático do 7° ano recorrem a recursos de visualização, exemplos práticos, contextualização em ambientes próximos da vivência do aluno, ou de recursos da história da Matemática, para tornar compreensível os conceitos apresentados. Veja como o capítulo 6, que tem por título "equações equivalentes" será introduzido.

Figura 13 – Introdução ao estudo de equações equivalentes

CAPÍTULO 6

EQUAÇÕES EQUIVALENTES

A primeira referência a equações de que se tem notícia consta no papiro de Rhind, um dos documentos egípcios mais antigos que tratam da Matemática.

Os egípcios não utilizavam a notação algébrica atual, e os métodos de solução de uma equação eram complexos e cansativos.

Os gregos resolviam equações usando a Geometria.

Na obra **Os elementos**, de Euclides de Alexandria, encontramos soluções geométricas de equações.

Foram os árabes que, cultivando a matemática dos gregos, promoveram um acentuado progresso na resolução de equações. No estudo dos árabes, destaca-se o trabalho de al-Khwarizmi (século IX), que resolveu e discutiu equações de vários tipos.

SAIBA QUE

Euclides de Alexandria viveu por volta de 300 a.C. e participou da Escola de Alexandria. Escreveu vários tratados sobre ótica, astronomia, música e mecânica. Euclides é mais conhecido por ter sistematizado o conhecimento em Geometria.

Como reconhecer equações equivalentes

Um número pode ser representado de diferentes modos. Por exemplo, podemos representar o número 9 de diversas maneiras:

$3^2 \quad 2^3 + 1 \quad 5^2 - 4^2 \quad 18 : 2 \quad 6 + 3 \quad 10 - 1$

A maneira mais simples de todas é, sem dúvida, **9**.

Fato semelhante ocorre com as equações. Veja a seguir.

- Observe as equações, sendo $U = \mathbb{Q}$:

$x + 3 = 10 \longrightarrow$ raiz ou solução: 7
$x = 10 - 3 \longrightarrow$ raiz ou solução: 7
$x = 7 \longrightarrow$ raiz ou solução: 7

As equações $x + 3 = 10$, $x = 10 - 3$ e $x = 7$ são chamadas **equações equivalentes**, porque apresentam a mesma raiz ou solução em um mesmo conjunto universo. O modo mais simples de representar essas equações é $x = 7$.

Em um mesmo conjunto universo, duas ou mais equações que apresentam a mesma raiz ou solução são denominadas **equações equivalentes**.

146

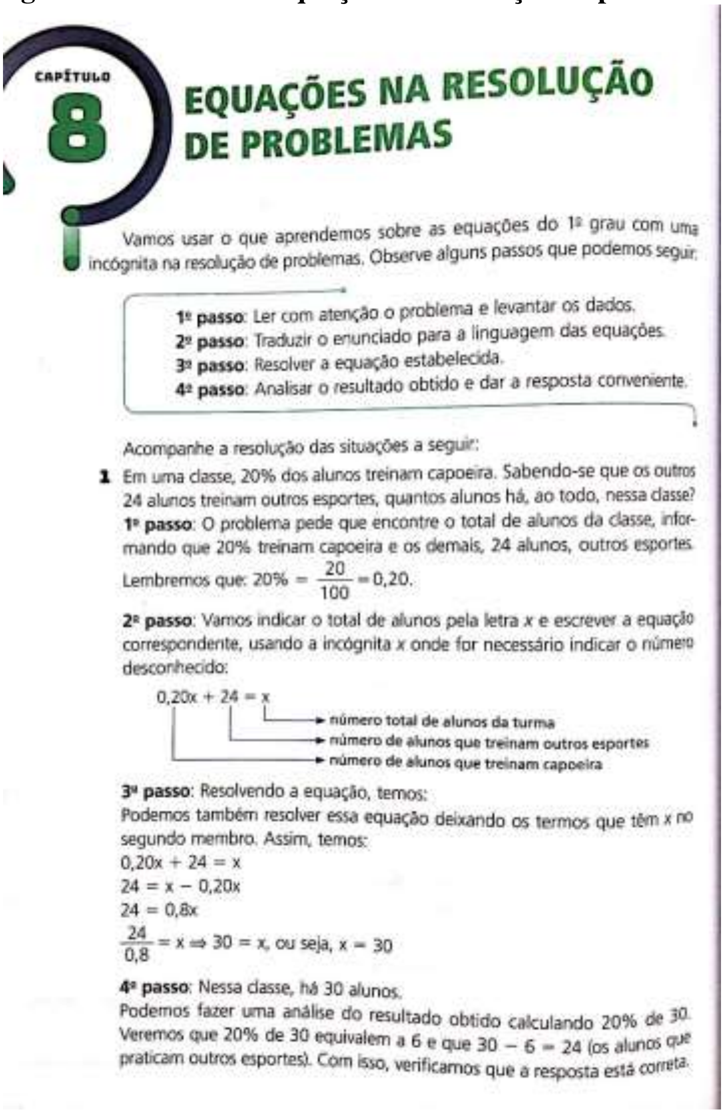
Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 7° ano, p. 146

Ao introduzir o capítulo 6, observa-se que o autor não apresenta diretamente o conceito de equações equivalentes, mas utiliza de elementos históricos para construir o *primeiro momento* de estudo sobre este conteúdo. Posteriormente, identificamos o momento em que o autor amplia o conceito sobre equivalência, utilizando de um problema a fim de ampliar o conceito de equações equivalentes. Durante este percurso, destacamos o momento *exploratório, tecnológico-teórico* e, por fim, a *institucionalização* do conceito de equações equivalentes.

No entanto, destacamos que, mesmo com as últimas atualizações das propostas curriculares, é possível perceber que, os livros didáticos de Matemática destinados a esta etapa de ensino tendem a apresentar um foco voltado para a utilização das técnicas e resolução de exercícios. Mesmo com a presença de alguns elementos que atenuam a valorização pela aprendizagem dos procedimentos no processo de ensino de Álgebra, é possível destacar situações críticas em que a estrutura proposta pelos autores desta coleção tende a favorecer a repetição de técnicas e procedimentos.

Isto fica perceptível no último capítulo da unidade 5, no oitavo capítulo intitulado "equações na resolução de problemas". A partir do que está descrito no título do capítulo podemos ser levados a pensar que o trabalho realizado neste capítulo permitirá que os alunos acessem a problemas matemáticos que possibilitem a investigação dos meios de resolução até o desdobramento da problemática, caminhando por diversas estratégias até a resolução das questões. No entanto, a proposta organizada pelos autores da coleção segue outros caminhos. Veja a seguir.

Figura 14 – Estudo de equações na resolução de problemas


CAPÍTULO 8

EQUAÇÕES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Vamos usar o que aprendemos sobre as equações do 1º grau com uma incógnita na resolução de problemas. Observe alguns passos que podemos seguir:

1º passo: Ler com atenção o problema e levantar os dados.
2º passo: Traduzir o enunciado para a linguagem das equações.
3º passo: Resolver a equação estabelecida.
4º passo: Analisar o resultado obtido e dar a resposta conveniente.

Acompanhe a resolução das situações a seguir:

1 Em uma classe, 20% dos alunos treinam capoeira. Sabendo-se que os outros 24 alunos treinam outros esportes, quantos alunos há, ao todo, nessa classe?

1º passo: O problema pede que encontre o total de alunos da classe, informando que 20% treinam capoeira e os demais, 24 alunos, outros esportes.

Lembremos que: $20\% = \frac{20}{100} = 0{,}20$.

2º passo: Vamos indicar o total de alunos pela letra *x* e escrever a equação correspondente, usando a incógnita *x* onde for necessário indicar o número desconhecido:

$0{,}20x + 24 = x$

número total de alunos da turma
número de alunos que treinam outros esportes
número de alunos que treinam capoeira

3º passo: Resolvendo a equação, temos:
Podemos também resolver essa equação deixando os termos que têm *x* no segundo membro. Assim, temos:

$0{,}20x + 24 = x$
$24 = x - 0{,}20x$
$24 = 0{,}8x$
$\frac{24}{0{,}8} = x \Rightarrow 30 = x$, ou seja, $x = 30$

4º passo: Nessa classe, há 30 alunos.
Podemos fazer uma análise do resultado obtido calculando 20% de 30. Veremos que 20% de 30 equivalem a 6 e que $30 - 6 = 24$ (os alunos que praticam outros esportes). Com isso, verificamos que a resposta está correta.

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 7° ano, p. 156

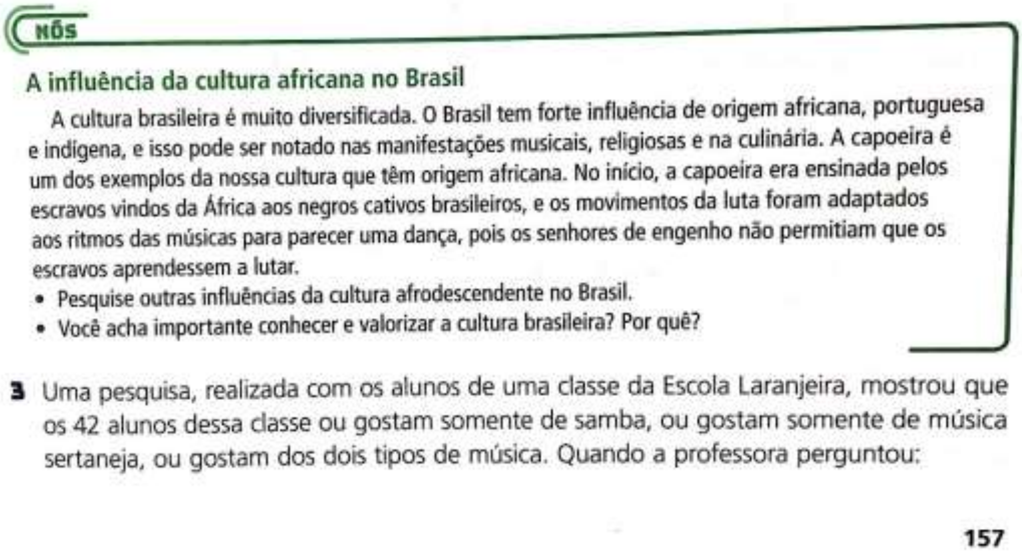
Observa-se que, logo no início do capítulo, institui-se um procedimento padronizado para a resolução dos problemas propostos no capítulo. Não que o raciocínio de resolução de problemas matemáticos divirja deste, porém, a sua apresentação precoce interrompe qualquer possibilidade de construção do raciocínio. Destaca-se, que até mesmo, no momento que deveria estar voltado para a discussão das possibilidades de resolução, há uma abordagem voltada para a aplicação do "passo a passo".

Esta abordagem caracteriza uma perspectiva associada a abordagem tecnicista apontada por Gascón (2003), onde se tem a estruturação didática voltada para o tratamento de conceitos matemáticos a partir de diversas tarefas e técnicas, conduzindo a aprendizagem por meio da repetição e memorização de exercícios.

Observa-se que a questão selecionada para a categoria de problemas não atende as expectativas de uma problemática em torno do conteúdo de equações. O que vemos é apenas dados quantitativos diluídos em uma frase interrogativa. Não há espaço para que os alunos dialoguem sobre o "como" resolver. As técnicas já estão postas, só basta aplicá-las.

A resolução indicada no livro didático sugere aplicação de "passos", sem levantar nenhum diálogo sobre a temática da questão. Somente na página seguinte há uma seção intitulada "nós" que aborda a capoeira originada da cultura africana, tendo influências sobre a cultura brasileira.

Figura 15 – Apresentação da seção sobre a influência da cultura africana



NÓS

A influência da cultura africana no Brasil

A cultura brasileira é muito diversificada. O Brasil tem forte influência de origem africana, portuguesa e indígena, e isso pode ser notado nas manifestações musicais, religiosas e na culinária. A capoeira é um dos exemplos da nossa cultura que têm origem africana. No início, a capoeira era ensinada pelos escravos vindos da África aos negros cativos brasileiros, e os movimentos da luta foram adaptados aos ritmos das músicas para parecer uma dança, pois os senhores de engenho não permitiam que os escravos aprendessem a lutar.

- Pesquise outras influências da cultura afrodescendente no Brasil.
- Você acha importante conhecer e valorizar a cultura brasileira? Por quê?

3 Uma pesquisa, realizada com os alunos de uma classe da Escola Laranjeira, mostrou que os 42 alunos dessa classe ou gostam somente de samba, ou gostam somente de música sertaneja, ou gostam dos dois tipos de música. Quando a professora perguntou:

157

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 7° ano, p. 157

Esta abordagem configura um interesse dos autores e editores em adequar-se as regras instituídas pelo PNLD, mas, na prática, há um esvaziamento do pensamento, não contribuindo de forma significativa.

A próxima unidade destacada com habilidades voltadas para o estudo de Álgebra é a unidade 7. Esta unidade está organizada em 3 capítulos, a saber:

Quadro 12 – Lista dos capítulos da unidade 7 do livro do 7° ano

Unidade 7 – Grandezas proporcionais
Capítulo 1 – Razão
Capítulo 2 – Proporção
Capítulo 3 – Regra de três

Fonte: Elaboração própria (2021)

Nesta unidade, encontra-se a habilidade EF07MA17 associada a unidade temática de Álgebra, que busca “resolver e elaborar problemas que envolvam variações de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas” (BRASIL, 2019)

Além de habilidades relacionadas a Álgebra, encontramos, também, o desenvolvimento de habilidades voltadas para a aprendizagem dos conceitos de Números, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística. Todas elas compõem a unidade 7 no trabalho dos conceitos de razão e proporção.

Observa-se que, nesta unidade, o foco não são os conceitos algébricos, mas, sim, a linguagem algébrica a serviço dos demais conceitos matemáticos.

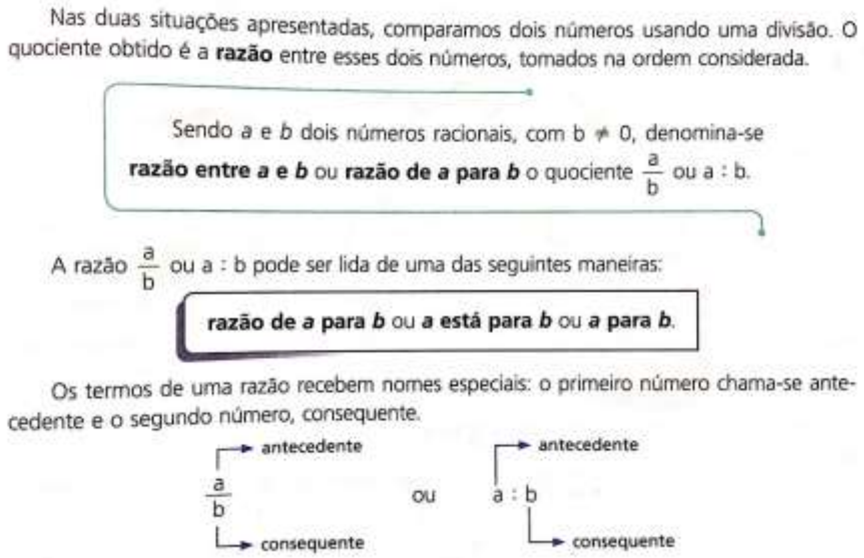
Pressupõe-se que os alunos já saibam utilizar, mesmo que parcialmente, a estrutura simbólica como recurso na organização dos elementos associados a diversos contextos de representação de situações matemáticas.

Além da linguagem algébrica, esta unidade embasa-se nos conhecimentos das propriedades de igualdade e na resolução de equações polinomiais do 1° grau, conteúdos estudados anteriormente.

No capítulo 1 desta unidade, a introdução ao conceito de razão é descrita a partir de duas situações relacionadas ao cotidiano escolar do aluno. O momento de estudo inicial está associado a exploração de situações convergentes a vivências dos alunos. São apresentadas duas situações, a primeira está relacionada ao treino de vôlei na aula de educação física e, a segunda, a aplicação de uma prova em sala de aula. Ambas comparam a quantidades de eventos e representam por meio da razão entre eles.

A fim, de sinalizar a ideia de razão, tem-se a caracterização do quinto momento de estudo, à saber: *institucionalização.*

Figura 16 – Apresentação do conceito de razão



Nas duas situações apresentadas, comparamos dois números usando uma divisão. O quociente obtido é a **razão** entre esses dois números, tomados na ordem considerada.

Sendo *a* e *b* dois números racionais, com $b \neq 0$, denomina-se **razão entre *a* e *b*** ou **razão de *a* para *b*** o quociente $\frac{a}{b}$ ou a : b.

A razão $\frac{a}{b}$ ou a : b pode ser lida de uma das seguintes maneiras:

razão de *a* para *b* ou ***a* está para *b*** ou ***a* para *b*.**

Os termos de uma razão recebem nomes especiais: o primeiro número chama-se antecedente e o segundo número, consequente.

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 7° ano, p. 203

Observa-se que a representação associada ao conceito de razão está descrita por meio da linguagem algébrica, de forma a sinalizar o avanço na aprendizagem quanto a escrita matemática e a percepção acerca das generalizações dos conceitos matemáticos.

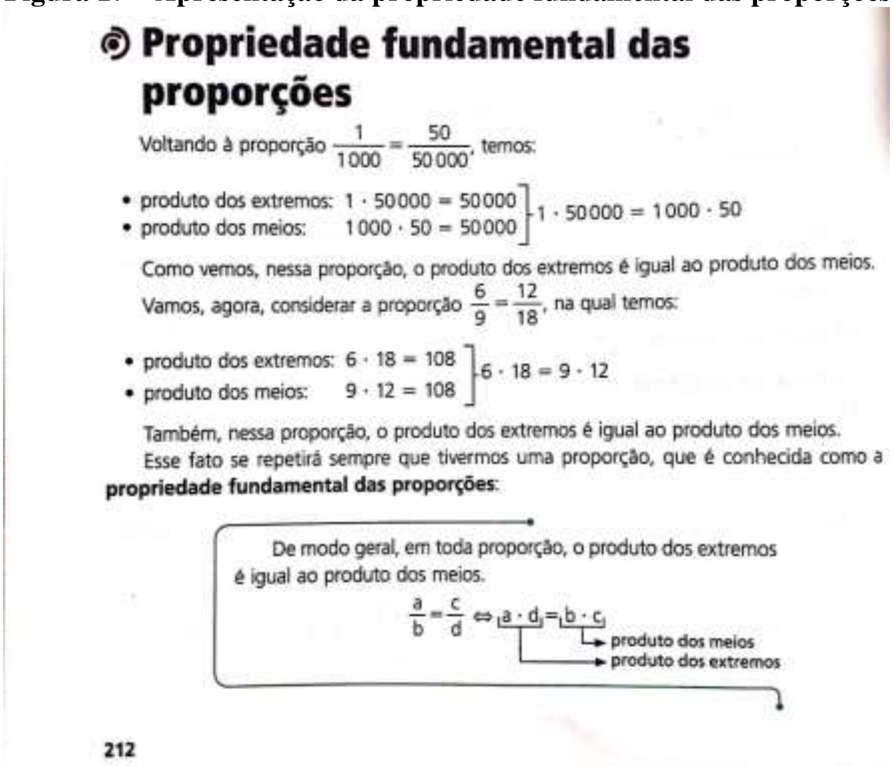
No capítulo 2 consolida-se o estudo das proporções e observa-se a instituição de um equilíbrio no surgimento de tarefas, técnicas e tecnologias, se comparada com unidades anteriores.

Destaca-se a tecnologia (θ_{17}) por configurar uma importante propriedade associada ao estudo de equações do 1° grau, a saber a propriedade fundamental das proporções[13].

Esta tecnologia justifica diversas técnicas e, consequentemente, contribui para a resolução de diversas tarefas. É importante ressaltar que a explicitação desta tecnologia garante caminhos para a compreensão das técnicas associadas, pois ao utilizar desta formalização o aluno perceberá a propriedade matemática concretamente, de forma a dar sentido aos procedimentos algébricos, que por vezes são mencionados em sala de aula, mas não são justificados.

[13] A **proporção** é a igualdade entre duas razões. A **propriedade fundamental das proporções** garante que a igualdade entre duas razões pode ser escrita na forma de igualdade entre o produto dos extremos e o produto dos meios.

Figura 17 – Apresentação da propriedade fundamental das proporções



Propriedade fundamental das proporções

Voltando à proporção $\frac{1}{1000} = \frac{50}{50\,000}$, temos:

- produto dos extremos: $1 \cdot 50000 = 50000$
- produto dos meios: $1000 \cdot 50 = 50000$

$1 \cdot 50000 = 1000 \cdot 50$

Como vemos, nessa proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Vamos, agora, considerar a proporção $\frac{6}{9} = \frac{12}{18}$, na qual temos:

- produto dos extremos: $6 \cdot 18 = 108$
- produto dos meios: $9 \cdot 12 = 108$

$6 \cdot 18 = 9 \cdot 12$

Também, nessa proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Esse fato se repetirá sempre que tivermos uma proporção, que é conhecida como a **propriedade fundamental das proporções**:

De modo geral, em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \underbrace{a \cdot d}_{\text{produto dos extremos}} = \underbrace{b \cdot c}_{\text{produto dos meios}}$$

212

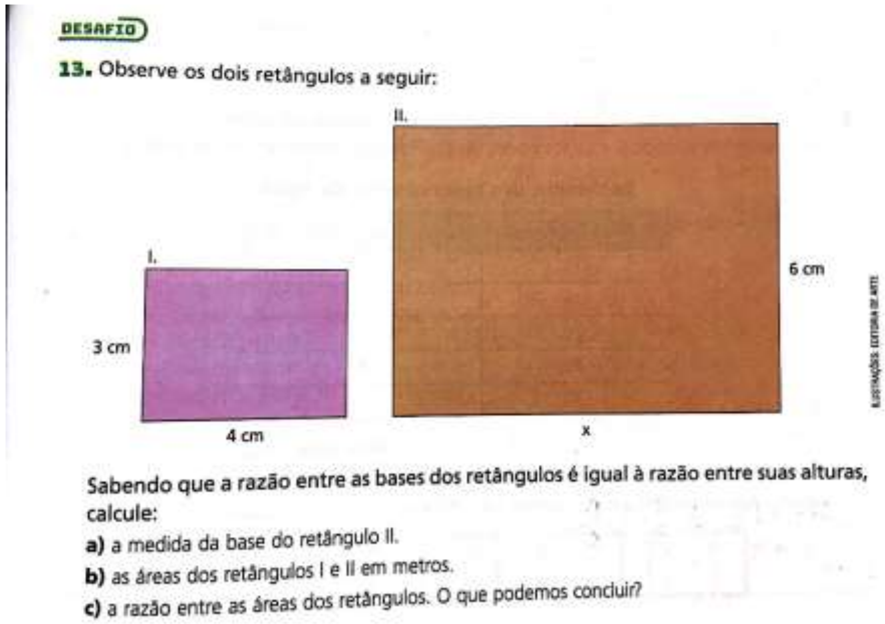
Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 7° ano, p. 212

Este momento de estudo está relacionado ao *tecnológico-teórico,* por justificar as técnicas empregadas na resolução de tarefas, e ao processo de *institucionalização,* por apresentar a propriedade fundamental das proporções

Observa-se que, a longo das análises, há uma construção de uma linha de pensamento que interliga as primeiras ideias de proporcionalidade a conteúdos cada vez mais complexos. Em uma visão geral, destacamos que, os momentos de estudo vão se estruturando à medida que avanço das praxeologias consolidam-se nos livros didáticos.

Um desafio apresentado neste capítulo abrange conceitos já aprendidos e começa, então, a introduzir ideias que serão posteriormente abordadas.

Figura 18 – Desafio sobre o conteúdo de proporções


DESAFIO

13. Observe os dois retângulos a seguir:

Sabendo que a razão entre as bases dos retângulos é igual à razão entre suas alturas, calcule:

a) a medida da base do retângulo II.

b) as áreas dos retângulos I e II em metros.

c) a razão entre as áreas dos retângulos. O que podemos concluir?

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 7° ano, p. 215

Observa-se que para resolver a questão (a) será necessário a aplicação de duas técnicas (τ_{b31}) e (τ_{b36}): escrever a razão entre as medidas dos retângulos e depois aplicar a propriedade fundamental das proporções, respectivamente. Após fazer o “produto dos extremos igual ao produto dos meios”, temos a resolução da primeira tarefa.

Ainda neste desafio, percebemos que há a relação de conceitos relacionados aos cálculos de áreas e transformação das unidades de medidas, conteúdos estudados anteriormente. Observa-se que o avanço no estudo dos conceitos matemáticos é como uma sequência recursiva, sempre haverá a necessidade de aplicar técnicas trabalhadas anteriormente para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Mesmo contendo poucos indícios de questões que tratam da ampliação do raciocínio para além da aplicação imediata da técnica, destacamos que, a abordagem realizada em questões com esta favorecem a conexão com outros conteúdos, tornando possível a construção do pensamento algébrico por parte dos alunos.

A letra (c) concede espaço para que o aluno responda livremente. As orientações didáticas apresentadas pelo manual do professor sugerem que este momento seja aproveitado para retomar ao conceito de razão e ampliar para a construção do conceito de proporção e semelhança entre polígonos. Não é necessário a formalização, mas que se lance a ideia inicial.

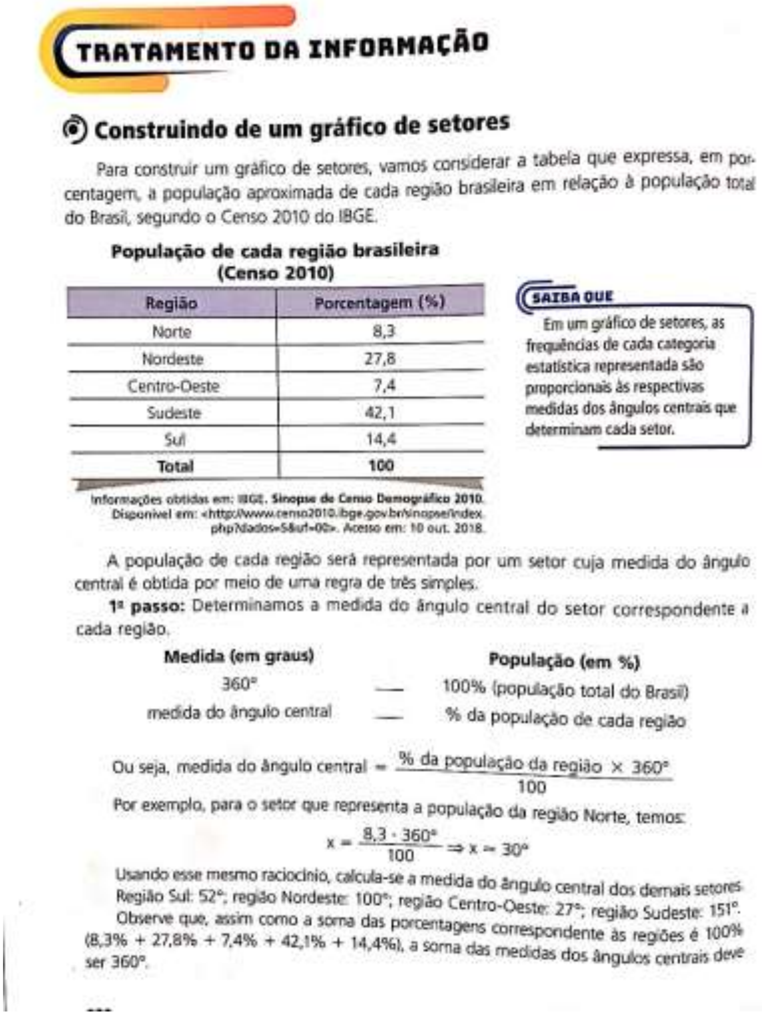
Por fim, o capítulo 3 marca o momento de estudo destinado ao *primeiro encontro* com a regra três. O capítulo inicia a abordagem trazendo elementos da história da matemática sobre como esta regra era utilizada pelos povos ao longo do tempo.

Posteriormente, tem-se a apresentação da regra de três simples e composta estruturando-se por meio do momento de estudo destinado ao *trabalho da técnica.* Algumas questões são utilizadas como exemplos e seguido do momento de *avaliação,* onde são lançadas propostas de atividades para resolução.

As questões envolvem situações do cotidiano apresentando três valores proporcionais disponíveis. Desta forma, é possível aplicar a regra de três para resolução. Além das seções regulares das unidades, ainda neste capítulo destaca-se o espaço destinado ao "tratamento da informação", onde tem-se a organização de dados, probabilidade e estatística sobre temas variados.

Neste espaço, o objetivo está em construir e interpretar gráficos de setores. Utilizando de conteúdos trabalhados anteriormente, como por exemplo, as representações em forma percentual e sobre a regra de três, é possível saber calcular a medida do ângulo central dos setores a partir da disponibilização dos dados percentuais.

Figura 19 – Apresentação da seção "tratamento da informação"



TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Construindo de um gráfico de setores

Para construir um gráfico de setores, vamos considerar a tabela que expressa, em porcentagem, a população aproximada de cada região brasileira em relação à população total do Brasil, segundo o Censo 2010 do IBGE.

População de cada região brasileira (Censo 2010)

Região	Porcentagem (%)
Norte	8,3
Nordeste	27,8
Centro-Oeste	7,4
Sudeste	42,1
Sul	14,4
Total	**100**

Informações obtidas em: IBGE. **Sinopse do Censo Demográfico 2010.** Disponível em: <http://www.censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados=5&uf=00>. Acesso em: 10 out. 2018.

SAIBA QUE

Em um gráfico de setores, as frequências de cada categoria estatística representada são proporcionais às respectivas medidas dos ângulos centrais que determinam cada setor.

A população de cada região será representada por um setor cuja medida do ângulo central é obtida por meio de uma regra de três simples.

1º passo: Determinamos a medida do ângulo central do setor correspondente a cada região.

Medida (em graus)		**População (em %)**
360°	—	100% (população total do Brasil)
medida do ângulo central	—	% da população de cada região

Ou seja, medida do ângulo central $= \dfrac{\text{\% da população da região} \times 360°}{100}$

Por exemplo, para o setor que representa a população da região Norte, temos:

$$x = \frac{8{,}3 \cdot 360°}{100} \Rightarrow x \simeq 30°$$

Usando esse mesmo raciocínio, calcula-se a medida do ângulo central dos demais setores. Região Sul: 52°; região Nordeste: 100°; região Centro-Oeste: 27°; região Sudeste: 151°.

Observe que, assim como a soma das porcentagens correspondente às regiões é 100% (8,3% + 27,8% + 7,4% + 42,1% + 14,4%), a soma das medidas dos ângulos centrais deve ser 360°.

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 7° ano, p.232

Esta seção demonstra que os aspectos associados ao uso das técnicas em Álgebra são necessários para compreensão do mundo e devem ser aprendidos, pois, a aprendizagem somente será concretizada quando o aluno perpassar por todas as fases da praxeologia. O estudo das técnicas associadas a Álgebra e ao desenvolvimento de habilidades apontadas pela BNCC não devem ser direcionadas apenas para alcançar bons resultados nos testes escolares. O desenvolvimento do pensamento algébrico exige que os alunos tenham autonomia para levantar questionamento e expandir seus processos investigativos, a fim de exercer plenamente a sua cidadania.

5.3 Análise do livro didático do 8° ano

A estrutura do livro didático do 8° ano assemelha-se em diversos aspectos ao livro do 7° ano. A começar pela ordem dos capítulos destinados a Álgebra e, também, aos elementos internos de cada unidade. Além das semelhanças é possível notar as diferenças, como por exemplo o foco dado ao longo da textualização do saber, quando um prioriza aspectos voltados para o trabalho da técnica, o outro volta-se para a introdução dos conceitos algébricos.

Este paralelo nos permitirá perceber a transição entre as etapas de ensino, de modo a tornar possível a compreensão acerca da abordagem identificada em cada livro da coleção.

A coleção “A conquista da Matemática” organiza estas oito habilidades exigidas em três unidades do livro didático do 8° ano. A fim de situar em que espaço estas unidades são inseridas no livro, apresentamos todas as unidades que constituem o livro didático de matemática do 8° ano.

Quadro 13 – Lista das unidades do livro didático do 8° Ano

LIVRO DIDÁTICO DO 8° ANO
Unidade 1 – Números racionais
Unidade 2 – Potências, raízes e números reais
Unidade 3 – Ângulos e triângulos
Unidade 4 – Expressões e cálculo algébrico
Unidade 5 – Equações
Unidade 6 – Polígonos e transformações
Unidade 7 – Contagem, probabilidade e estatística
Unidade 8 – Área, volume e capacidade
Unidade 9 – Estudo de grandezas

Fonte: Elaboração própria (2021)

As linhas sombreadas representam as unidades que abordam alguma habilidade relacionada ao estudo de Álgebra dentro deste livro.

A partir do conhecimento das unidades estudadas anteriormente, observa-se que as unidades do livro didático do 8° ano tem o objetivo de aprofundar os conteúdos já introduzidos no livro didático do 7° ano. Veja a seguir a correspondência das unidades entre os dois livros.

Quadro 14 – Correspondência entre as unidades do livro didático do 7° e 8° ano

Livro didático do 7° ano	Livro didático do 8° ano
Unidade 5 – Linguagem algébrica e equações	Unidade 4 – Expressões e cálculo algébrico
	Unidade 5 – Equações
Unidade 7 – Grandezas proporcionais	Unidade 9 – Estudo de grandezas

Fonte: Elaboração própria (2021)

Ao olhar para a organização das tarefas e técnicas estabelecidas ao longo do livro didático do 8° ano, percebe-se que algumas tarefas são lançadas e não há a apresentação de novas técnicas, mas sim a reutilização de técnicas já estudadas no livro do 7° ano. O autor espera que os alunos já tenham consolidado as formas de resolução destas questões, permitindo, assim, o aprofundamento em outros conteúdos.

A 4° unidade do livro didático do 8° ano está estritamente relacionada ao que foi introduzido nos três primeiros capítulos da 5ª unidade do livro didático do 7° ano. Destacamos que, os elementos que compõem a praxeologia são dinâmicos. O que outrora exercia o papel de momento de estudo associado a *institucionalização,* quandocomparado com a nova Organização Didática do livro do 8° ano, nota-se uma nova posição doselementos.

Os saberes apresentados em momento de institucionalização no livro do 7° ano,agora, no livro do 8° ano ocupam espaço de momento *exploratório* ou do *trabalho da técnica.*Os momentos de estudo vão se alterando à medida que novas tecnologias e teorias vão surgindo. Esta dinamicidade ocorre também com as organizações matemáticas. O que outrorafazia parte do bloco tecnológico-teórico, agora é remodelado e aplicado como técnicas na resolução de tarefas.

Exemplo disto, ocorre na instituição da tecnologia (θ_{17})[14] como técnica aplicada para a resolução de problemas sobre grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

[14] θ_{17} – Aplicar a propriedade fundamental das proporções.

Figura 20 – Capítulo sobre grandezas diretamente proporcionais

CAPÍTULO 3

GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Considere as seguintes situações:

1 Para adubar um pomar de área igual a 15 000 m², utilizam-se 30 kg de fertilizante. Vamos calcular a quantidade de fertilizante necessária para adubar um pomar de 32 000 m².
Essa situação relaciona duas grandezas proporcionais: área (em m²) e quantidade de fertilizante (em kg).

Para responder à pergunta proposta, vamos organizar os dados em um quadro:

Área do pomar (em m²)	Quantidade de fertilizante (em kg)
15 000	30
32 000	x

Como as grandezas são proporcionais, para encontrar a quantidade de fertilizante para adubar uma área de 1 000 m², vamos utilizar a relação:

$$\frac{15000}{32000} = \frac{30}{x} \Rightarrow 15000 \cdot x = 30 \cdot 32000 \Rightarrow x = 64$$

Dessa maneira, 32 000 m² necessitarão de 64 kg de fertilizante.

Percebemos que, quanto maior a área do pomar, maior a quantidade de fertilizante, na mesma proporção. Dizemos assim que as grandezas área e quantidade de fertilizante são diretamente proporcionais.

Veja no material audiovisual o vídeo sobre o desperdício de água causado por uma torneira pingando.

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando variam sempre na mesma razão, ou seja, uma aumenta e a outra aumenta na mesma proporção ou, quando uma diminui, a outra diminui na mesma proporção.

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 8° ano, p. 262

Além de aplicar a propriedade fundamental das proporções será necessário interpretar os dados disponibilizados pelo problema (τ_{a4}). Esta estruturação desta problemática nesse momento de estudo sugere que os alunos já tenham consolidado diversas técnicas e compreendidos certos conceitos, inclusive dominem a linguagem simbólica utilizada na resoluçãode problemas matemáticos.

Retornando algumas páginas, destacamos a abertura da 4ª unidade quandoaborda uma questão recorrente entre os alunos no processo de introdução dos estudos em Álgebra: “por que temos que calcular expressões misturando letras e números?” Associados a esta pergunta podemos destacar diversas concepções acerca dos entraves no processo de ensino e aprendizagem na Educação Básica.

Figura 21 – Abertura da unidade sobre expressões e cálculo algébrico

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 8° ano, p. 96

Os baixos índices de rendimento relativos ao estudo de Álgebra estão fortemente associados as concepções dos alunos sobre o que devem, ou não, estudar na disciplina de matemática. Ao deparar-se com o estudo que utiliza de letras e símbolos nas operações para expressar sentenças matemáticas, os alunos podem sentir-se como o personagem da abertura da 4ª unidade, se questionando sobre o motivo sem nunca chegar a uma justificativa.

Umas das resistências ao estudo da Álgebra ocorre devido ao longo tempo dos alunos aplicados ao estudo de conteúdos associados a Aritmética. Então, quando se deparam com a modificação deste sistema de representação enfrentam dificuldades de acomodação dos novos conceitos.

Outro elemento de complicação no processo de aprendizagem da Álgebra relaciona-se ao fato de o aluno trazer para o contexto algébrico dificuldades herdadas do contexto aritmético ou por estender para o estudo algébrico, procedimentos aritméticos equivocados. (OLIVEIRA, 2002)

Sobre a organização apresentada pelo livro didático do 8° ano destacamos o seguinte questionamento: por que tratar sobre os motivos da simbologia matemática somente no livro do

8° ano, quando já se observa a presença de elementos da linguagem algébrica já no livro do 7° ano?

Inicialmente, defendemos a hipótese de que a correspondência dos conteúdos destacados anteriormente nos livros didáticos do 7° e 8° ano exercem uma função dentro da praxeologia, porém, a estrutura sobreposta dos conteúdos, em vez de fortalecer o processo de construção do pensamento algébrico, abre espaço para que, na rotina de sala de aula os conteúdos voltados para o estudo de Álgebra sejam iniciados somente no 8° ano do ensino fundamental.

Nossas suspeitas são reafirmadas ao perceber que o quantitativo de habilidades destinadas ao 7° ano em comparação com as habilidades relacionadas a unidade temática de Aritmética e Geometria, é de apenas 19% em comparação com os 60% das habilidades destinadas ao estudo de Aritmética e Geometria. Consequentemente, haverá mais espaço para a instituição de unidades e capítulos, dentro do livro, para o trabalho com os conteúdos de Aritmética e Geometria.

Associado a estas situações, recordo que durante a minha vivência como aluna da Educação Básica, só tive acesso aos conteúdos relacionados a simbologia algébrica a partir da 7° série (atual 8° ano). Esta realidade me sentenciou a problemas sérios na compreensão de diversos conceitos e a incômoda sensação de "repentino" surgimento de letras em meio aos números. Não compreendia as tarefas, o motivo das técnicas, o porquê de ter que operar com letras.

O primeiro capítulo da unidade 4 continua guiado pelo pensamento iniciado pela abertura da unidade. Temos, então, a introdução ao capítulo por meio da história da Matemática relatando aspectos ligados ao uso de letras para indicar números desconhecidos. Esta etapa é caracterizada como o *primeiro contato* da organização didática, momento importante para dar sentido ao uso da simbologia no estudo da Álgebra.

Em seguida, observa-se o surgimento do momento *exploratório,* seguido do *trabalho da técnica, tecnológico-teórico* e, por fim, a *avaliação.* Não há indícios de *institucionalização* neste capítulo. Este é um dos poucos capítulos que seguem os momentos de estudo de forma linear, ou seja, a organização didática estabelecida neste capítulo segue a ordem sequencial dos momentos de estudo em sua estrutura.

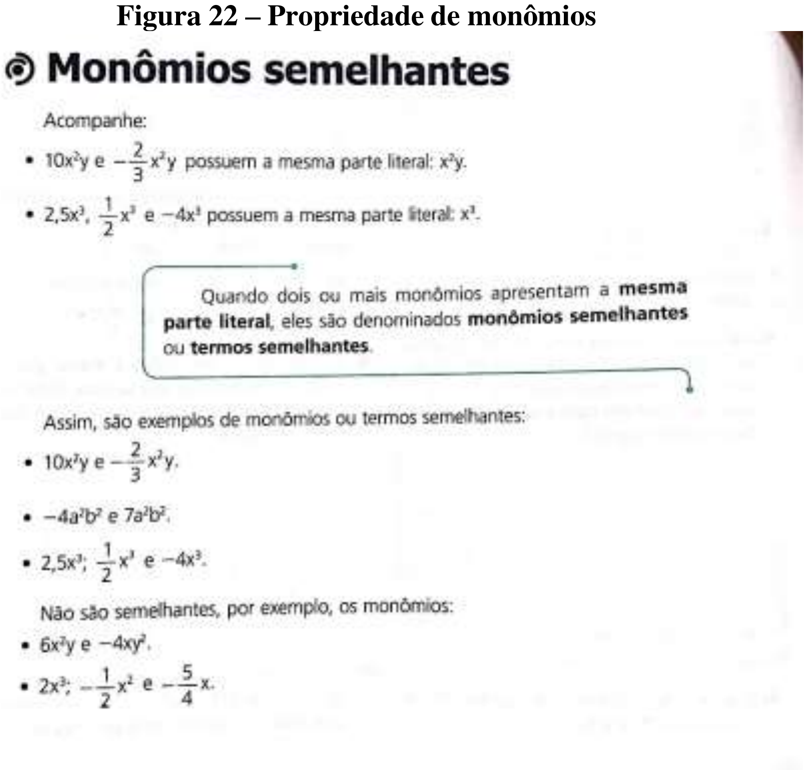
A fim de estabelecer uma visão global sobre esta unidade, temos que, o capítulo 1 representa, dentro da estrutura praxeológica, o primeiro momento de estudo, aquele destinado ao *primeiro contato*, mesmo que os alunos já tenham tido contato, anteriormente, com as noções de expressões e equações algébricas.

Seguindo esta linha de análise, identificamos o capítulo 2 associado ao segundo momento de estudo: *exploratório.* As características e a forma das expressões algébricas são identificadas neste capítulo.

Os capítulos seguintes apresentam-se a partir de uma organização padronizada que segue até o final da unidade. Destaca-se nos capítulos 3, 4 e 5 a estrutura introduzida pelo *primeiro contato,* depois com a apresentação de exemplos respondidos e, então, a apresentação das atividades. Associada a esta estrutura, observa-se que os momentos de estudo 3 e 6 estão sempre identificados. Tem-se a focalização no *trabalho da técnica* e resolução de atividades como *avaliação* inerente a praxeologia.

Em algumas etapas é possível identificar outros momentos de estudo, como por exemplo o *tecnológico-teórico* na organização dos conceitos sobre monômios.

Figura 22 – Propriedade de monômios



Monômios semelhantes

Acompanhe:

- $10x^2y$ e $-\frac{2}{3}x^2y$ possuem a mesma parte literal: x^2y.
- $2,5x^3$, $\frac{1}{2}x^3$ e $-4x^3$ possuem a mesma parte literal: x^3.

Quando dois ou mais monômios apresentam a **mesma parte literal**, eles são denominados **monômios semelhantes** ou **termos semelhantes**.

Assim, são exemplos de monômios ou termos semelhantes:

- $10x^2y$ e $-\frac{2}{3}x^2y$.
- $-4a^2b^2$ e $7a^2b^2$.
- $2,5x^3$; $\frac{1}{2}x^3$ e $-4x^3$.

Não são semelhantes, por exemplo, os monômios:

- $6x^2y$ e $-4xy^2$.
- $2x^3$; $-\frac{1}{2}x^2$ e $-\frac{5}{4}x$.

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 8° ano, p. 110

Após o excessivo contato com as técnicas, observa-se, também, a estruturação de momentos destinados a explicação ou justificação dos procedimentos ao longo do capítulo.

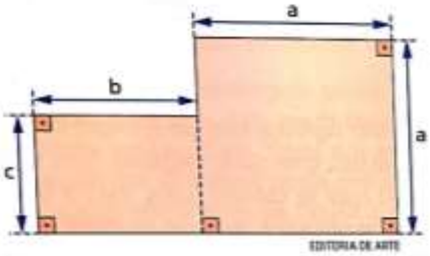
É comum percebermos momentos destinados a justificação de técnicas de transformações de linguagens(τ_{b21})[15], partindo da utilização da representação geométrica para a linguagem algébrica.

---

[15] τ_{b21} – Transformar os dados observados na imagem para a linguagem algébrica.

Figura 23 – Construção da linguagem algébrica

2 A forma e as medidas de um terreno estão representadas na figura a seguir:



A área desse terreno é dada pela expressão algébrica:

$a^2 + bc$

bc → **área do retângulo de lados *b* e *c***

a^2 → **área do quadrado de lado *a***

Vamos supor que:

- o lado do quadrado meça 20 unidades de comprimento;
- as medidas dos lados *b* e *c* do retângulo sejam 16 e 12 unidades de comprimento, respectivamente.

Nessas condições, vamos calcular a área desse terreno:

$$a^2 + bc = 20^2 + 16 \cdot 12 = 400 + 192 = 592$$

A área desse terreno será 592 unidades de área.

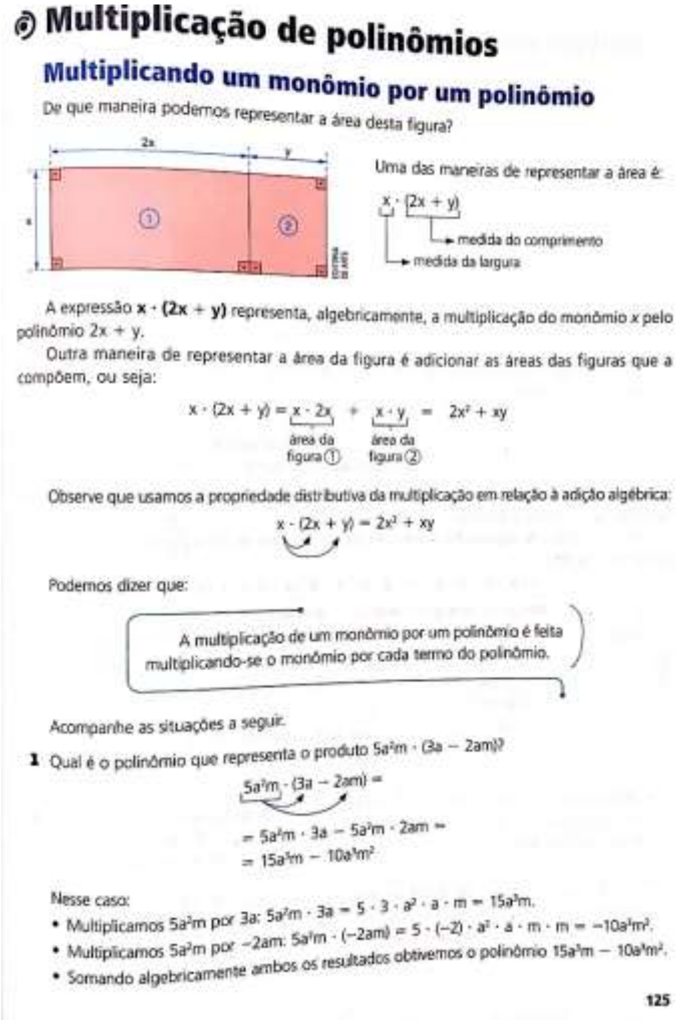
O número 592, assim obtido, chama-se **valor numérico** da expressão algébrica $a^2 + bc$ para $a = 20$, $b = 16$ e $c = 12$.

Quando substituímos as variáveis de uma expressão algébrica por números e efetuamos os cálculos indicados, obtemos o **valor numérico** da expressão algébrica dada para esses números.

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 8° ano, p. 104

A representação geométrica tem se tornando recurso essencial para o processo de consolidação da compreensão e aprendizagem dos conceitos algébricos. Assim, é possível perceber, em diversos momentos a exemplificação dos conceitos algébricos desta unidade por meio da representação algébrica.

Figura 24 – Operações com polinômios



Multiplicação de polinômios

Multiplicando um monômio por um polinômio

De que maneira podemos representar a área desta figura?

Uma das maneiras de representar a área é:

$x \cdot (2x + y)$

medida do comprimento

medida da largura

A expressão $\mathbf{x \cdot (2x + y)}$ representa, algebricamente, a multiplicação do monômio x pelo polinômio $2x + y$.

Outra maneira de representar a área da figura é adicionar as áreas das figuras que a compõem, ou seja:

$$x \cdot (2x + y) = \underbrace{x \cdot 2x}_{\text{área da figura 1}} + \underbrace{x \cdot y}_{\text{área da figura 2}} = 2x^2 + xy$$

Observe que usamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica:

$$x \cdot (2x + y) = 2x^2 + xy$$

Podemos dizer que:

A multiplicação de um monômio por um polinômio é feita multiplicando-se o monômio por cada termo do polinômio.

Acompanhe as situações a seguir.

1 Qual é o polinômio que representa o produto $5a^2m \cdot (3a - 2am)$?

$$5a^2m \cdot (3a - 2am) =$$
$$= 5a^2m \cdot 3a - 5a^2m \cdot 2am =$$
$$= 15a^3m - 10a^3m^2$$

Nesse caso:

- Multiplicamos $5a^2m$ por $3a$: $5a^2m \cdot 3a = 5 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot a \cdot m = 15a^3m$.
- Multiplicamos $5a^2m$ por $-2am$: $5a^2m \cdot (-2am) = 5 \cdot (-2) \cdot a^2 \cdot a \cdot m \cdot m = -10a^3m^2$.
- Somando algebricamente ambos os resultados obtivemos o polinômio $15a^3m - 10a^3m^2$.

125

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 8° ano, p. 125

Esta associação permanece ao longo de toda a unidade. A Geometria, segundo Fiorentini (1992) tende a subsidiar a construção dos conceitos algébricos. Para Castro (2003), a Geometria, desde muito tempo, foi tendenciosa à Álgebra e fez o uso desta, e até hoje, a Geometria trabalhada na escola está impregnada de Álgebra, se tornando imprescindível o uso desta para o ensino e aprendizagem da álgebra escolar, se tornando metodologicamente viável a associação destas.

A unidade 5, objetiva o estudo de “equações” abordando questões já estudadas no livro didático do 7° propondo-se a ampliar a proposta de tarefas e, consequente, de técnicas a cerca deste conteúdo.

A capa de abertura da unidade 5 demonstra situações associadas ao estudo de equações, onde se tem a intenção de iniciar o estudo sobre os conteúdos matemáticos a partir de uma situação problema que, em muitos casos, só faz sentido dentro da escola.

Figura 25 – Abertura da unidade sobre o conteúdo de equações

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 8° ano, p. 134

As questões motivadoras para o *primeiro contato* propostas pela abertura desta unidade são caracterizadas como questões periféricas. A questão em torno desta problemática não está necessariamente sobre o interesse dos alunos na quantidade de galinhas e vacas em uma fazenda, mas em como a problemática é estruturada. Ou seja, a forma como o tema motivador conduz a temática não representa a estrutura de problema que serão apresentados na realidade da vida dos alunos.

Diversas vezes os conceitos são lançados aos alunos sem a preocupação sobre a ordenação do pensamento e o processo de progressão necessário para a construção do saber matemático. Os exemplos colocados nos livros didáticos são os mesmos utilizados há anos.

Faz-se necessário uma remodelação da abordagem dos exemplos e exercícios dentro dos livros didáticos a fim de conduzir os alunos a um processo de construção da aprendizagem.

Um elemento importante para a (re)estruturação da abordagem dada pelos livros didáticos está na implementação da história da matemática como recurso no processo de construção do saber matemático e, consequentemente do pensamento algébrico.

Destacamos esta contribuição associada ao estudo da equação do 1° grau com uma incógnita, no primeiro capítulo da unidade, registrando o *primeiro encontro* a partir da história da matemática. Esta abordagem traz vida a praxeologia didática, pois concede ao aluno, sujeito desta instituição, oportunidade de compreender a dimensão dos conteúdos estudados em sala, possibilitando reconstruir seu olhar sobre a Matemática e reconhecer seu valor antropológico frente a humanidade (CHEVALLARD, 1991).

Se tratando de conceitos algébricos, ressaltamos que se faz ainda mais necessário a aproximação do aluno aos aspectos da história da Matemática a fim de fazê-lo compreender, mesmo que de forma elementar, acerca dos temas sociados a constituição do saber. Esta abordagem é responsável pelo processo de humanização dos conteúdos matemáticos, pois, rompe com a concepção equivocada de que a matemática sempre existiu e que não há espaço para o diálogo acerca de seus fundamentos. Faz-se necessário permitir que os alunos tenham acesso as mais diversas representações matemáticas buscando incentivá-los ao processo de construção do conhecimento para além da aprendizagem de procedimentos.

Compreendemos que esta discussão não é solucionada mediante a inserção de elementos históricos em um capítulo do livro didático, porém, reafirmamos que, as modificações das perspectivas associadas a Álgebra precisam ser feitas. Espaços como estes, identificados ao longo das unidades, configuram mudanças iniciais já alcançadas no âmbito dos materiais didáticos de Matemática no Brasil, no entanto, faz-se necessário avançar muito mais.

Por isso, faz-se essencial o debate sobre as organizações em torno do livro didático. Observa-se que este material produz um *modus operandi* sobre "o quê" e "como" ensinar. Os capítulos seguintes, até o final da unidade estão focados em mostrar o caminho para se resolver as questões relativas à equação do 1° e 2° grau.

Há um destaque para o "como resolver..." ou o "método de..." ao longo das páginas seguintes. Observam-se poucos momentos destinados ao bloco tecnológico-teórico, configurando que o estudo do *trabalho da técnica* é mais valorizado que a compreensão dos conceitos matemáticos e suas construções teóricas.

Ressalto que não estamos antagonizando a aprendizagem das técnicas no estudo de Álgebra, estamos apenas dando espaço para a discussão de que um momento de estudo não deve ser mais valorizado em detrimento de outro. Esta abordagem causará desequilíbrio das praxeologias, pois a operacionalização das técnicas estará dissociada da compreensão da forma de resolução, desconfigurando a aprendizagem matemática.

Diante disso, destaco que houve, sim, momentos voltados para a exploração dos conceitos na busca por formular caminhos para a solucionar problemas algébricos.

Figura 26 – Desafio o conteúdo de equações

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 8° ano, p. 160

No meio de tantas outras questões que direcionavam apenas para o cálculo de sistemas de equações, encontramos este desafio que sugere que os alunos se juntem com amigos e busquem solucionar o problema proposto. Observa-se que, além do uso das técnicas indicadas ao longo da unidade, os alunos poderão solucionar o desafio por meio da troca de ideias, tentativa e erro e aplicação das mais diversas estratégias possíveis.

O livro do 8° ano propõe a resolução a partir da aplicação das seguintes técnicas:

Quadro 15 – Técnicas indicadas no capítulo 6 para a resolução do desafio 8

Técnicas (τ)
τ_{b21} – Transformar os dados da frase para a linguagem algébrica
τ_{b27} – Ler com atenção o problema e levantar dados.

τ_{c64} – Usar o método da substituição
τ_{c65} – Usar o método da adição

Fonte: Elaboração própria (2021)

Observa-se que a condução dos conteúdos se dá pela valorização das regras de resolução de questões, não havendo produção de significados dos conceitos para os alunos. Esta abordagem contribui para que os saberes construídos logo caiam em esquecimento.

Nesse sentido, Alves (2003) ilustra a discussão quando afirma:

> Dentro de pouco tempo quase tudo aquilo que lhes foi aparentemente ensinado terá sidoesquecido. Não por burrice. Mas por inteligência. O corpo não suporta carregar o pesode um conhecimento morto que ele não consegue integrar com a vida (ALVES, 2003, p. 24).

Assim, um conhecimento que não tem nenhuma utilidade na vida não pode ser chamado de conhecimento e necessariamente precisa se evadido para que se aprenda coisas úteis.

No entanto, a ênfase para uma abordagem voltada para a construção do conhecimento de forma significativa pelo aluno já estava evidente desde os PCNs.

> [...] para que a aprendizagem possa ser significativa é preciso que os conteúdos sejam analisados e abordados de modo a formarem uma rede de significados. Se a premissa de que compreender é apreender o significado, e de que para apreender o significado dealgum objeto ou acontecimento é preciso vê-lo em suas relações com outros objetos ouacontecimentos, é possível dizer que a idéia de conhecer assemelha-se a idéia de tecer uma teia (BRASIL, 1998, p. 75).

Desta forma, torna-se essencial para a construção do pensamento algébrico a construção do conhecimento de forma mais significativa, onde há a possibilidade de os alunos conhecerem os símbolos e significados.

Ao final da unidade há uma seção intitulada “um novo olhar” que pelo título dado pressupõe-se que o autor abordará os conceitos matemáticos sob uma perspectiva diferente da trabalhada ao longo da unidade. A indicação do livro didático sugere que esta seção está destinada para um momento de reflexão acerca dos conhecimentos adquiridos ao longo do estudo da unidade, ampliando o comprometimento do aluno com a aprendizagem.

Figura 27 – Apresentação da seção "um novo olhar"

UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, realizamos estudos sobre as equações do 1º grau com uma incógnita, equações fracionárias com uma incógnita, equações literais do 1º grau na incógnita *x*, equações do 1º grau com duas incógnitas, sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, tipos de resoluções para esse modelo de sistema e equação do 2º grau incompleta, do tipo $ax^2 - b = 0$.

Na Educação Financeira, foi abordado o "juro zero" como uma estratégia de *marketing*, pois o juro, muitas vezes, pode estar embutido no preço.

Para que possa perceber suas aprendizagens e possíveis dúvidas, sugerimos a você que faça um roteiro contendo os conceitos abordados nesta Unidade e não se esqueça de acrescentar alguns exemplos.

Na abertura da Unidade, pudemos ver um uso do sistema de equações do 1º grau. Vamos retomar as aprendizagens e refletir sobre elas. Responda no caderno.

- O que devemos excluir do conjunto universo de uma equação fracionária?
- Nesta Unidade, quais foram os métodos estudados que podem ser usados para calcular a resolução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas?
- Na abertura da Unidade, você foi questionado sobre a interpretação de um problema. Represente o sistema que resolve o problema da abertura desta Unidade.
- Se, na situação da abertura da Unidade, o número de animais fosse 122 e o número de pernas fosse 418, quantos animais de cada espécie haveria?

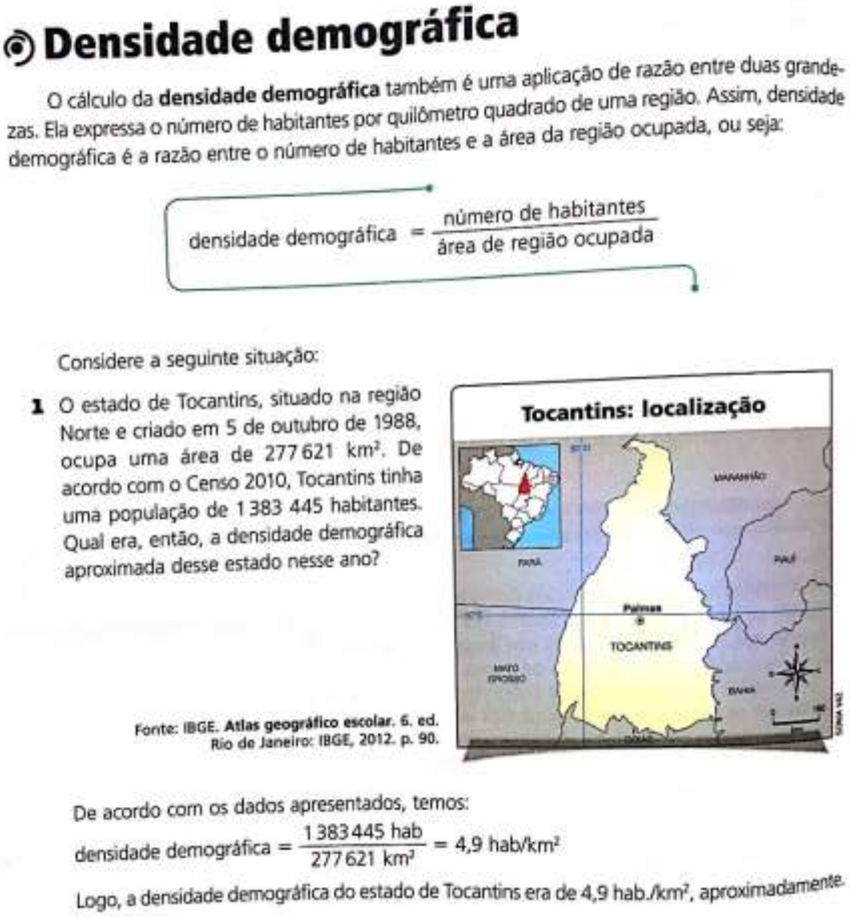
Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 8° ano, p. 165

No entanto, observa-se que os tópicos destinados para nortear a reflexão focalizam, novamente, sobre o uso das técnicas e, ainda, utiliza novos dados para remeter as questões abordadas na abertura da unidade. Destacamos a perpetuação da proposta de questões periféricas relacionadas ao estudo de Álgebra, tornando o desenvolvimento do pensamento algébrico uma realidade utópica para os alunos do ensino fundamental.

Em geral, as duas unidades do livro do 8° apresentadas até aqui estruturam-se sob uma perspectiva voltada para a aprendizagem por meio da repetição dos exemplos e exploração de certos problemas na tentativa de buscar a compreensão dos conceitos algébricos. Estas características fundamentam-se, principalmente, nos eixos tecnicistas e modernistas (GASCÓN, 2003), apontando, assim, para uma abordagem empirista. Ou seja, a presença de um direcionamento didático voltado para o processo indutivo, baseado em aspectos fundamentados em imitar modelos proposto em atividades por meio de várias práticas.

No entanto, a abordagem que valoriza predominantemente o exercício da técnica está mais evidente quando se trata das unidades voltadas para os conteúdos exclusivamente algébricos. Ao olhar para a 9º unidade deste livro, observa-se uma reorientação para aspectos voltados para uma abordagem construtivista.

Figura 28 – Estudo sobre a densidade demográfica



Densidade demográfica

O cálculo da **densidade demográfica** também é uma aplicação de razão entre duas grandezas. Ela expressa o número de habitantes por quilômetro quadrado de uma região. Assim, densidade demográfica é a razão entre o número de habitantes e a área da região ocupada, ou seja:

$$\text{densidade demográfica} = \frac{\text{número de habitantes}}{\text{área de região ocupada}}$$

Considere a seguinte situação:

1 O estado de Tocantins, situado na região Norte e criado em 5 de outubro de 1988, ocupa uma área de 277 621 km². De acordo com o Censo 2010, Tocantins tinha uma população de 1 383 445 habitantes. Qual era, então, a densidade demográfica aproximada desse estado nesse ano?

Fonte: IBGE. **Atlas geográfico escolar.** 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 90.

De acordo com os dados apresentados, temos:

$$\text{densidade demográfica} = \frac{1\,383\,445 \text{ hab}}{277\,621 \text{ km}^2} = 4{,}9 \text{ hab/km}^2$$

Logo, a densidade demográfica do estado de Tocantins era de 4,9 hab./km², aproximadamente.

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 8° ano, p. 260

Temos nesta unidade o estudo de grandezas, com a perspectiva ajustada para encarar os conceitos algébricos como suporte de aprendizagem dos conceitos matemáticos. Há o direcionamento para a compreensão acerca da densidade demográfica ancorado nos conceitos de razão e proporção. Assim, como a retomada de técnicas e tecnologias.

As técnicas estudadas nas unidades 4 e 5 serão utilizadas nesta seção, porém, observa-se a valorização maior para a compreensão dos conceitos e a contextualização da atividade, de forma a tornar ativo o aluno frente a construção do conhecimento.

Ao final, identificamos um total de 35 tarefas, 42 técnicas e 4 tecnologias. A partir deste quantitativo destaca-se o aumento da ocorrência de técnicas e a diminuição de tecnologias, direcionando para uma perspectiva mais tecnicista. Ou seja, há uma valorização do bloco prático (T, τ), resultando no trabalho de diversas tarefas e técnicas por meio da repetição de vários exemplos e exercícios.

5.4 Análise do livro didático do 9° ano

O último livro didático desta coleção está organizado em 9 unidades. Para tornar conhecido a organização dos conteúdos deste livro, organizamos as unidades no quadro a seguir:

Quadro 16 – Lista das unidades do livro didático do 9° Ano

LIVRO DIDÁTICO DO 9° ANO
Unidade 1 – Números reais, potências e radicais
Unidade 2 – Produtos notáveis e fatoração
Unidade 3 – Equações do 2° grau
Unidade 4 – Relações entre ângulos
Unidade 5 – Proporção e semelhança
Unidade 6 – Porcentagem, probabilidade e estatística
Unidade 7 – Relações métricas no triângulo retângulo e na circunferência
Unidade 8 – Figuras planas, espaciais e vistas
Unidade 9 – Função

Fonte: Elaboração própria (2021)

As linhas sombreadas referem-se as unidades que tratam acerca das habilidades relacionadas a unidade temática de Álgebra. Diante disso, separamos 4 unidades para a análise, das quais três estruturam-se como extensão dos conceitos trabalhados em livros anteriores e, por fim, a 9ª unidade apresentando a ideia inicial acerca das funções.

Destacamos as unidades 2, 3 e 5 por apresentar, de forma ampliada, os conteúdos abordados nos livros didáticos anteriores. Esta organização, acompanhada de novas propostas e aprofundamento dos conteúdos, favorece a aprendizagem em torno dos conceitos algébricos, pois tem-se uma progressão acerca da complexidade do saber matemático, de forma a apresentar os conteúdos respeitando o desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Já a aprendizagem de novos conceitos, torna-se produtiva quando os alunos tem a oportunidade de acessá-lo por meio das mais diversas representações matemáticas. Assim, estudar os conceitos algébricos utilizando apenas da linguagem natural, tornar-se-á insuficiente para a aprendizagem. Ou seja, a depender das habilidades de abstração do aluno, e do estágio cognitivo, será necessário o contato com representações gráficas, imagéticas, linguísticas para que o aluno apreenda os conceitos matemáticos. Ao longo do processo de escolarização, quanto mais representações disponíveis aos alunos, maiores são as possibilidades de aprendizagem.

Acerca disso, destacamos que o livro didático do 9º ano, ao longo de suas unidades, trabalha constantemente com representações geométricas e gráficas para a explicitação dos conceitos algébricos, de forma a consolidar o saber e desenvolver o raciocínio abstrato.

Diante disso, destacamos a abertura da unidade 2, que utiliza da representação geométrica para tornar compreensível os conceitos sobre produtos notáveis e fatoração.

Figura 29 – Abertura da unidade sobre produtos notáveis e fatoração

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 9° ano, p. 60-61

Esta abordagem favorece o *trabalho da técnica* para a consolidação do ensino de Álgebra. Por meio das representações geométricas tem-se a construção favorável para a compreensão dos conceitos algébricos.

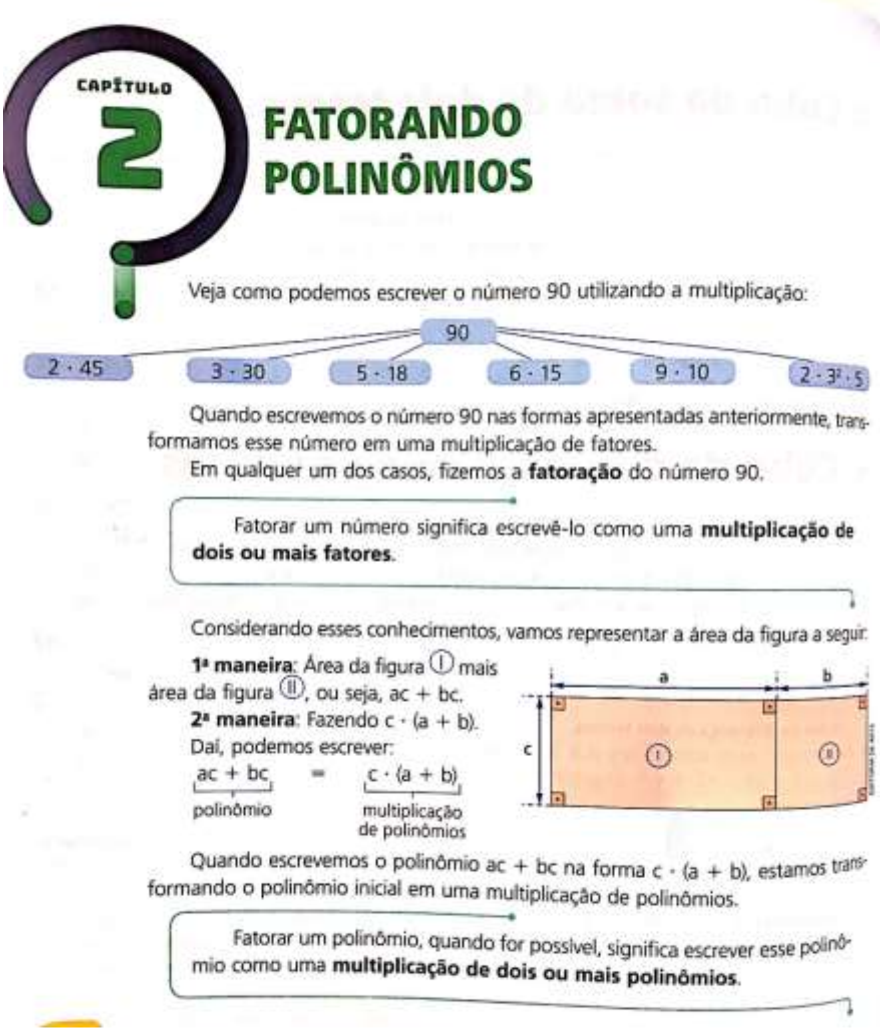
Nesse contexto, os PCN reafirmam que o ensino de Álgebra torna-se proveitoso quando há a possibilidade de construção do conhecimento por meio do recurso de representações geométricas.

> É interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Esse trabalho favorece a que o aluno construa a ideia de Álgebra como uma linguagem paraexpressar regularidades (BRASIL, 1998, p.117).

Assim, faz necessário que, ao buscar pelo desenvolvimento das habilidades algébricas, os alunos sejam expostos a situações com foco no pensamento algébrico a fim de possibilitar a aquisição de habilidades voltadas para a percepção de regularidades.

O processo constitutivo dos saberes expressos na unidade 2 apresentam ao longo de sua estrutura os conteúdos acerca dos produtos notáveis e fatoração por meio da representação geométrica, linguagem natural e, por fim, a linguagem simbólica para a consolidação da linguagem algébrica.

Figura 30 – Capítulo sobre fatoração de polinômios



CAPÍTULO 2

FATORANDO POLINÔMIOS

Veja como podemos escrever o número 90 utilizando a multiplicação:

90

$2 \cdot 45$ | $3 \cdot 30$ | $5 \cdot 18$ | $6 \cdot 15$ | $9 \cdot 10$ | $2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Quando escrevemos o número 90 nas formas apresentadas anteriormente, transformamos esse número em uma multiplicação de fatores.

Em qualquer um dos casos, fizemos a **fatoração** do número 90.

Fatorar um número significa escrevê-lo como uma **multiplicação de dois ou mais fatores**.

Considerando esses conhecimentos, vamos representar a área da figura a seguir.

1ª maneira: Área da figura I mais área da figura II, ou seja, $ac + bc$.

2ª maneira: Fazendo $c \cdot (a + b)$.

Daí, podemos escrever:

$$\underbrace{ac + bc}_{\text{polinômio}} = \underbrace{c \cdot (a + b)}_{\text{multiplicação de polinômios}}$$

Quando escrevemos o polinômio $ac + bc$ na forma $c \cdot (a + b)$, estamos transformando o polinômio inicial em uma multiplicação de polinômios.

Fatorar um polinômio, quando for possível, significa escrever esse polinômio como uma **multiplicação de dois ou mais polinômios**.

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018,9° ano, p. 70

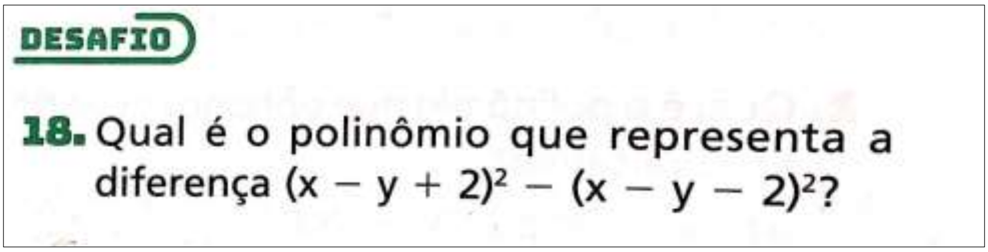
A introdução ao capítulo 2 demonstra bem a padronização desta estrutura. Vemos que a representação por meio da linguagem numérica e geométrica é anterior a linguagem algébrica. Desta forma, os alunos, mesmo que já tenham tido acesso a linguagem algébrica em anos anteriores, cabe ressaltar sua utilidade e registrar e generalizar fenômenos matemáticos.

Em relação a Organização Matemática, destacamos o foco dado a estrutura da técnica, de forma preponderante ao longo desta unidade. A abordagem ao longo do estudo do conteúdo de produtos notáveis e fatoração é amplamente associado ao *trabalho da técnica* e repetição de procedimentos.

A tarefas associadas a este momento de estudo giram em torno de questões que direcionam para a aplicação imediata da técnica. Como por exemplo: "coloque o fator comum em evidência", "escreva a forma fatorada de cada polinômio", "fatore o polinômio", "determine o valor numérico do polinômio", etc.

Até mesmo em questões enquadradas na modalidade de "desafios" estão focadas na aplicação imediata da técnica. A proposta de resolução de problema do livro didático não favorece a investigação de resolução, mas apenas a aplicação das operações sobre os produtos notáveis do quadrado da soma e da diferença.

Figura 31 – Desafio sobre produtos notáveis



DESAFIO

18. Qual é o polinômio que representa a diferença $(x - y + 2)^2 - (x - y - 2)^2$?

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018,9° ano, p. 68

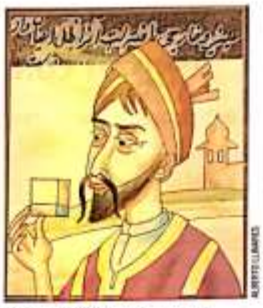
O manual do professor sugere que os alunos escrevam cada quadrado como soma ou diferença de dois termos. Depois disso, eles devem aplicar, separadamente, o produto notável para resolver a atividade.

Esta abordagem se estende até o final da unidade. Destaca-se o constante trabalho da técnica, configurando, segundo Gascón (2003) uma abordagem focalizada em práticas tecnicistas, ou seja, a aprendizagem está situada em aspectos relativos ao estudo a partir das tarefas e técnicas, tendo como elemento principal a repetição de exercícios e memorização de regras.

Na unidade 3, observamos a ampliação do estudo sobre equações do 2° grau. Ao longo da unidade, destaca-se o momento de estudo voltado para o *trabalho da técnica,* porém, ainda assim, podemos notar, também, momentos com foco no desenvolvimento *tecnológico-teórico.*

Figura 32 – Apresentação do processo algébrico de Bhaskara

O processo algébrico de Bhaskara



No século XII, o matemático hindu Bhaskara baseou-se em estudos de al-Khwarizmi para apresentar um processo algébrico que permitia resolver qualquer equação do 2º grau. Usando o processo de Bhaskara e partindo da equação escrita em sua forma reduzida, foi possível determinar, de maneira mais simples, as raízes de qualquer equação do 2º grau com uma incógnita.

Voltemos a considerar as equações $x^2 + 6x + 8 = 0$ e $x^2 + 3x - 4 = 0$, que já resolvemos usando o processo geométrico de al-Khwarizmi.

- Em $x^2 + 6x + 8 = 0$, o número que acrescentamos aos dois membros da equação foi $9 = (3)^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2$.

$$\left(\frac{\boxed{6}}{2}\right)^2 \rightarrow \text{coeficiente } b$$

- Em $x^2 + 3x - 4 = 0$, o número que acrescentamos aos dois membros da equação foi $\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$$\left(\frac{\boxed{3}}{2}\right)^2 \rightarrow \text{coeficiente } b$$

Nas duas equações, nas quais o coeficiente a é igual a 1, o número acrescentado aos dois membros corresponde **à metade do coeficiente *b*, elevada ao quadrado**.

Esse fato foi constatado por Bhaskara ao estudar o processo de al-Khwarizmi. Bhaskara apresentou, então, um processo algébrico que não mais necessitava da interpretação geométrica para a resolução de equações do 2º grau com uma incógnita.

Veja a seguir o caminho trilhado por Bhaskara.

1 Resolver a equação $x^2 - 2x - 8 = 0$, sendo $U = \mathbb{R}$.

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$x^2 - 2x = 8$

$x^2 - 2x + 1^2 = 8 + 1^2 \rightarrow$ **adicionamos em ambos os membros da equação a expressão** $\left(-\frac{2}{2}\right)^2 = (-1)^2 = 1^2$

$x^2 - 2x + 1 = 8 + 1$

$(x - 1)^2 = 9$

$x - 1 = \pm\sqrt{9}$

$x - 1 = \pm 3$

Daí, temos:

$x - 1 = 3$ ou $x - 1 = -3$

$x = 3 + 1 = 4$ $\quad$ $x = -3 + 1 = -2$

Logo, os números reais -2 e 4 são as raízes da equação dada.

99

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018,9° ano, p. 99

Simultaneamente, vemos outros momentos surgindo ao longo da unidade, como por exemplo, o momento de *exploração* associado a inserção de elementos da história da Matemática, ou a *institucionalização* dos conceitos por meio da apresentação das tecnologias e teorias.

Como vemos na imagem anterior, é possível notar a apresentação das técnicas associadas ao processo algébrico de Bhaskara como elemento dominante na estrutura didática desta página. No entanto, destacamos a apresentação de uma pequena caixa de texto colocada no canto superior direito a fim de mostrar aspectos históricos que relatam sobre o matemático hindu Bhaskara e qual seu lugar frente ao saber matemático.

Cabe ressaltar que, mesmo com a apresentação resumida de elementos históricos da Matemática, é importante que sejam postos nos livros didáticos, pois estes favorecem no processo de ampliação da percepção dos alunos acerca da constituição da Matemática ao longo da história. Esta abordagem contextualiza a ideia acerca do conhecimento matemático, ampliando para além da perspectiva de que Bhaskara é apenas mais um método a ser aplicado. Para que haja espaço propício para o desenvolvimento do pensamento algébrico a aprendizagem do aluno precisa estar firmada em três pilares: representação, raciocínio e resolução de problemas através da modelação de situações matemáticas (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Torna-se imprescindível o trabalho pedagógico em torno dos conteúdos de Álgebra situados na perspectiva de construção de habilidades que relacionem o uso da técnica com a busca por resolver problemas matemáticos. Porém, a organização proposta pela coleção *A Conquista da Matemática* focaliza sua estrutura na supervalorização de exercícios e repetição de procedimentos encontrados em exemplos.

Tanto a unidade 2 quanto a unidade 5 carregam a característica com foco em procedimentos e a frequência do momento de estudo relativo ao *trabalho da técnica.* Segundo Gascón (2003), esta abordagem expõe um caráter tecnicista, tendo então, a aprendizagem pautada na memorização e repetição de exercícios.

Para que haja aprendizagem dos conceitos algébricos faz-se necessário ir além desta abordagem. O desenvolvimento algébrico carece de uma abordagem mais ampla, abordando também aspectos relativos à modelação Matemática.

A abordagem dos conteúdos começa a sofrer alterações a partir da unidade 5, quando o livro didático do 9° ano se propõe a apresentar os conteúdos relativos à proporção e semelhança.

Figura 33 – Abertura da unidade sobre proporção e semelhança


5 PROPORÇÃO E SEMELHANÇA

Quando utilizamos um *software* para ampliar ou reduzir imagens, existe uma opção que pode ser selecionada, que é a de fixar a proporção.

Com essa opção selecionada, mesmo que você deforme a imagem manualmente somente em uma direção, o *software* vai aumentar a imagem na outra, fixando a proporção entre as medidas horizontal e vertical da imagem.

Observe as imagens ao lado e responda às questões no caderno.

- Três das imagens apresentadas foram ampliadas sem que fossem fixadas as suas proporções. O que aconteceu com essas imagens?
- As imagens que estão em sequência foram ampliadas mantendo-se suas proporções. O que você nota nessas imagens?
- Quando duas figuras são semelhantes?

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018,9° ano, p. 144

Os conteúdos desenvolvidos nesta unidade tratam de a temas tanto algébricos quanto geométrico. Ao trabalhar com a ampliação e redução de imagens os alunos poderão compreender, de forma prática, os conceitos associados a proporção e semelhança.

Ao longo da unidade observa-se a relação direta com o tema motivador apresentado na capa da unidade e como ele pode ser reapresentado ao longo do estudo caso os alunos tenham dificuldade em compreender os conceitos.

Destacamos que, a organização didática e matemática desta unidade se apresenta com fortes elementos associados a uma perspectiva teoricista e experimental. Acerca da perspectiva teoricista, podemos exemplificar por meio do aparecimento substancial do bloco tecnológico-teórico, ou seja, um aumento de tecnologias ao longo da textualização do saber. De forma mais clara, identificamos, apenas nesta unidade, 7 tecnologias de um total de 14 em todo o livro do 9° ano.

Quadro 17 – Tecnologias identificadas na unidade 5 do livro didático do 9° Ano

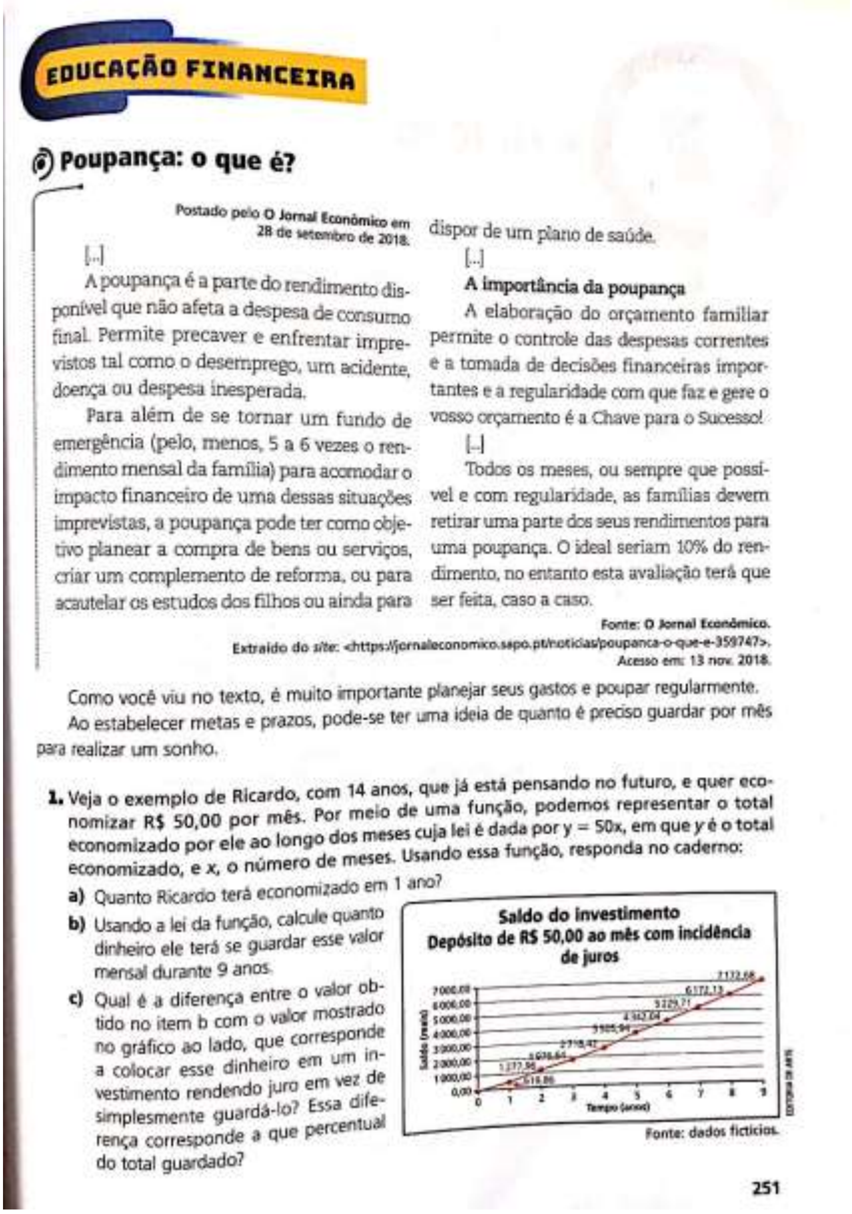
Tecnologias associadas aos conteúdos de proporção e semelhança
θ_{26} - Caracterização do conceito de razão e proporção
θ_{27} - Definição de retas paralelas
θ_{28} - Generalização da congruência de segmentos sobre qualquer reta transversal em feixes de retas paralelas.
θ_{29} - Apresentação do teorema de Tales.
θ_{30} - Apresentação do teorema da bissetriz interna.
θ_{31} - Apresentação das propriedades de polígonos semelhantes.
θ_{32} - Apresentação do teorema fundamental da semelhança de triângulos.

Fonte: Elaboração própria (2021)

Tecnologias com função praxeológica de fundamentar a ocorrência das técnicas ao longo da unidade. Todas estas tecnologias serviram como base conceitual para a consolidação dos conteúdos algébricos ao longo do estudo da unidade 5.

Em direção a parte final do livro, temos a 9ª unidade trazendo a proposta de estudo sobre as funções. Esta unidade se apresenta em poucas páginas, tendo como objetivo expor, aos alunos do último ano do ensino fundamental, a noção de função e seus primeiros fundamentos. Destaca-se ao longo desta unidade uma abordagem mais voltada para a resolução de questões e modelação matemática. Observa-se, por exemplo, na seção destinada para o estudo da educação financeira, a apresentação da temática que objetiva tratar sobre a importância da poupança no planejamento dos gastos.

Figura 34 – Estudo sobre educação financeira



EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Poupança: o que é?

Postado pelo **O Jornal Econômico** em 28 de setembro de 2018.

[...]

A poupança é a parte do rendimento disponível que não afeta a despesa de consumo final. Permite precaver e enfrentar imprevistos tal como o desemprego, um acidente, doença ou despesa inesperada.

Para além de se tornar um fundo de emergência (pelo, menos, 5 a 6 vezes o rendimento mensal da família) para acomodar o impacto financeiro de uma dessas situações imprevistas, a poupança pode ter como objetivo planear a compra de bens ou serviços, criar um complemento de reforma, ou para acautelar os estudos dos filhos ou ainda para dispor de um plano de saúde.

[...]

A importância da poupança

A elaboração do orçamento familiar permite o controle das despesas correntes e a tomada de decisões financeiras importantes e a regularidade com que faz e gere o vosso orçamento é a Chave para o Sucesso!

[...]

Todos os meses, ou sempre que possível e com regularidade, as famílias devem retirar uma parte dos seus rendimentos para uma poupança. O ideal seriam 10% do rendimento, no entanto esta avaliação terá que ser feita, caso a caso.

Fonte: **O Jornal Econômico.**
Extraído do *site*: <https://jornaleconomico.sapo.pt/noticias/poupanca-o-que-e-359747>. Acesso em: 13 nov. 2018.

Como você viu no texto, é muito importante planejar seus gastos e poupar regularmente. Ao estabelecer metas e prazos, pode-se ter uma ideia de quanto é preciso guardar por mês para realizar um sonho.

1. Veja o exemplo de Ricardo, com 14 anos, que já está pensando no futuro, e quer economizar R$ 50,00 por mês. Por meio de uma função, podemos representar o total economizado por ele ao longo dos meses cuja lei é dada por $y = 50x$, em que y é o total economizado, e x, o número de meses. Usando essa função, responda no caderno:

a) Quanto Ricardo terá economizado em 1 ano?

b) Usando a lei da função, calcule quanto dinheiro ele terá se guardar esse valor mensal durante 9 anos.

c) Qual é a diferença entre o valor obtido no item b com o valor mostrado no gráfico ao lado, que corresponde a colocar esse dinheiro em um investimento rendendo juro em vez de simplesmente guardá-lo? Essa diferença corresponde a que percentual do total guardado?

Fonte: dados fictícios.

251

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018,9° ano, p. 251

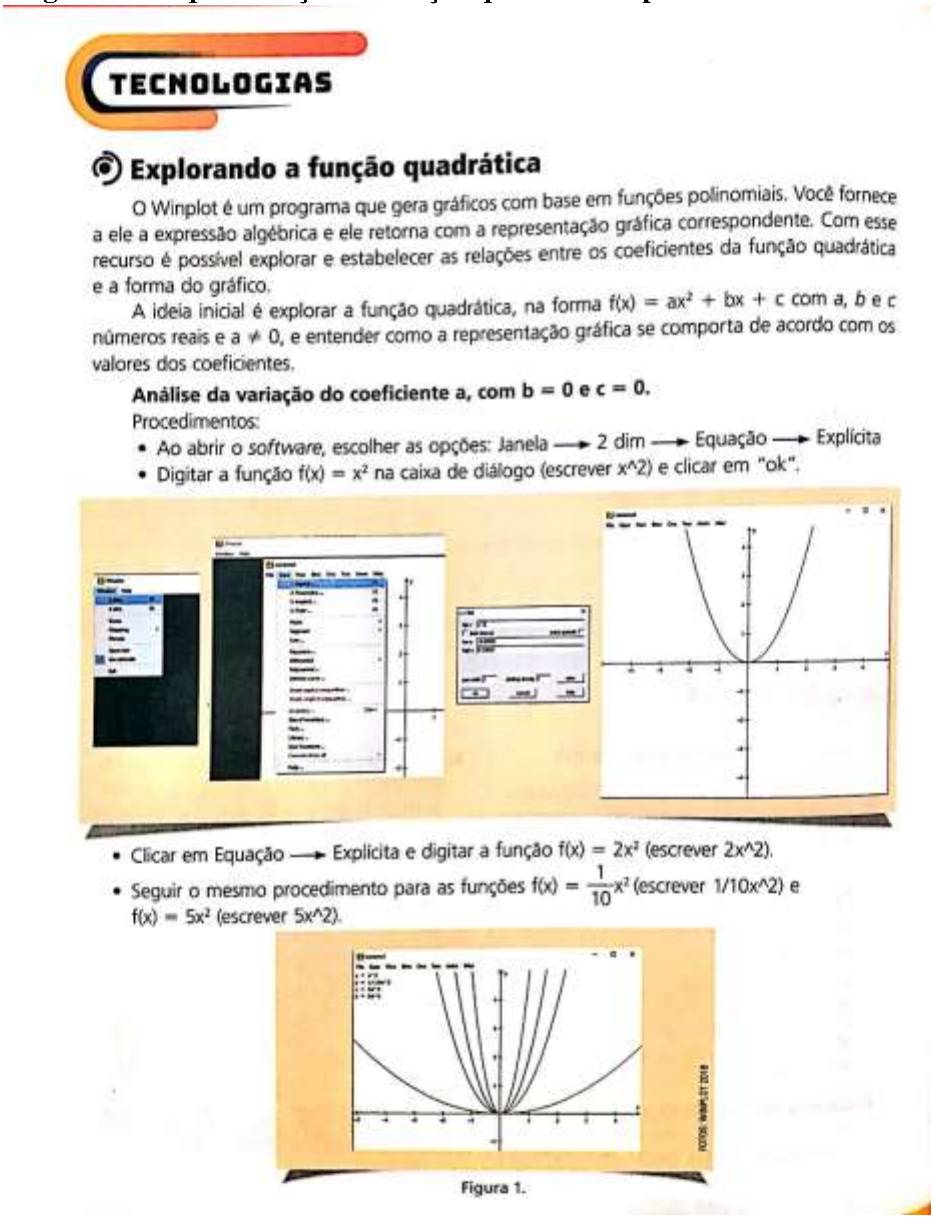
A partir da noção de função apresentada os alunos tem condições de acessar as questões, compreender e, a partir do modelo matemático, dar sentido a situação dada. Ou seja, a modelagem matemática aparece como recurso pedagógico para possibilitar ao aluno a interpretação de uma situação matemática e transformá-la para a sua realidade.

Esta perspectiva de ensino contribui para que os alunos o conhecimento algébrico para a formulação de hipóteses. Desta forma, os alunos passam não somente pela aquisição de habilidades voltadas para a aplicação de técnicas, mas sim para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Podemos destacar que, ao final deste estudo tem-se uma ponte mais evidente para o trabalho da Álgebra a partir de uma abordagem construtivista (GASCÓN, 2003). Esta abordagem direciona a aprendizagem por meio do aspecto teórico e exploração de temas não triviais, ou seja, é possível perceber, por meio dos momentos de estudo, um foco mais voltado para o *exploratório* e *tecnológico-teórico.*

Ao final da unidade, observa-se um espaço destinado ao trabalho envolvendo o estudo de funções associado ao uso de tecnologias digitais, buscando explorar a função quadrática utilizando de um software que gera gráficos com base em funções polinomiais.

Figura 35 – Apresentação da função quadrática a partir de um software



TECNOLOGIAS

Explorando a função quadrática

O Winplot é um programa que gera gráficos com base em funções polinomiais. Você fornece a ele a expressão algébrica e ele retorna com a representação gráfica correspondente. Com esse recurso é possível explorar e estabelecer as relações entre os coeficientes da função quadrática e a forma do gráfico.

A ideia inicial é explorar a função quadrática, na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ com *a*, *b* e *c* números reais e $a \neq 0$, e entender como a representação gráfica se comporta de acordo com os valores dos coeficientes.

Análise da variação do coeficiente a, com b = 0 e c = 0.

Procedimentos:

- Ao abrir o *software*, escolher as opções: Janela ⟶ 2 dim ⟶ Equação ⟶ Explícita
- Digitar a função $f(x) = x^2$ na caixa de diálogo (escrever x^2) e clicar em "ok".

- Clicar em Equação ⟶ Explícita e digitar a função $f(x) = 2x^2$ (escrever 2x^2).
- Seguir o mesmo procedimento para as funções $f(x) = \frac{1}{10}x^2$ (escrever 1/10x^2) e $f(x) = 5x^2$ (escrever 5x^2).

FOTOS: WINPLOT 2018

Figura 1.

Fonte: Júnior e Castrucci, 2018, 9° ano, p. 272

Esta abordagem amplia os horizontes de experiências dos alunos, possibilitando que utilize recursos tecnológicos na busca por desenvolver o espírito de investigação.

De forma geral, o livro didático do 9° ano apresenta-se com aspectos situados tanto e uma abordagem empirista quanto em uma construtivista. É possível notar um grande número de técnicas, caracterizando uma perspectiva mais tecnicista. Ao passo que tem-se a presença de diversas representações do bloco tecnológico-teórico ao lado de situações de experimentação.

Quadro 18 – Quantitativo de tarefas, técnicas e tecnologias do livro didático 9º Ano

Organização Matemática		
T – 61	τ - 79	θ - 14

Fonte: Elaboração própria (2021)

O livro didático do 9° ano apresenta o maior quantitativo de tarefas e técnicas associadas ao estudo de Álgebra de toda a coleção. Um livro que apresenta muitos métodos de resolução de exercício,mas em contrapartida, também estrutura-se de modo a trazer aspectos relacionados a modelação matemática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo de nossa investigação buscamos analisar como os livros didáticos de Matemática destinados aos anos finais do Ensino Fundamental abordavam o processo de desenvolvimento do pensamento algébrico. Para isso, voltamos nosso olhar para a coleção *A conquista da Matemática* a fim de compreender os caminhos dados para o estudo da Álgebra.

A partir da Teoria Antropológica do Didático pudemos identificar e analisar as organizações praxeológicas dentro de cada livro da coleção, possibilitando a identificação de tarefas e de técnicas, além do estabelecimento de tecnologias e teorias.

A coleção *A conquista da Matemática* tem a característica de abordar os conteúdos de forma concisa e direta. Há também uma recorrência da textualização concentrada no bloco do saber fazer, ou seja, no bloco prático-técnico (T, τ), predominando o trabalho da técnica.

Ao longo dos livros didáticos encontramos, também, uma abordagem focalizada nos aspectos teóricos do saber. Observa-se que há a preocupação em abordar os teoremas algébricos principalmente no 7 e 9° ano do Ensino Fundamental, quando se identifica o maior quantitativo de elementos teóricos, configurando, então, o responsável pelo saber (θ, Θ).

Ainda assim, ao longo da coleção, pudemos observar, elementos que apontavam para o trabalho a partir da resolução de problemas e modelagem matemática, dando espaço para uma abordagem construtivista.

Diante desta perspectiva, destacamos o papel do professor como agente importante para a concretização de um processo de ensino e aprendizagem que rompa com os paradigmas de uma abordagem extremamente clássica, ou seja, aquela que tem como elemento norteador a aprendizagem teórica e repetição da técnica, tudo sob controle do professor.

A abordagem proposta por esta coleção apresenta algumas limitações quanto ao estabelecimento de um percurso necessário para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Desta forma, o professor poderá, em sua prática em sala de aula, analisar o material, observar as organizações praxeológicas e planejar ações que focalizem em aspectos voltados para o trabalho com a resolução de problemas.

Diante disso, surge a necessidade de olhar para a atuação docente e a formação de professores, no entanto, este não é o foco desta pesquisa. Ainda assim, cabe ressaltar que os resultados aqui alcançados serão uteis para nortear o professor frente a sua prática em sala de aula, de forma a tornar compreensível a estrutura organizacional dos conteúdos apresentados pelos livros didáticos.

De forma geral, identificamos dois momentos de apresentação da coleção *A conquista da Matemática*. O primeiro relaciona-se aos dois primeiros livros (6° e 7°) e o segundo, relaciona-se aos dois últimos livros (8º e 9º) destinados aos anos finais desta coleção.

Observa-se que o primeiro bloco (6° e 7°) focaliza-se na apresentação inicial de conceitos relacionados com operações aritméticas, tradução, relações, generalizações e deduções, predominando uma abordagem empirista. Estas características estão diretamente relacionadas aos momentos didáticos das praxeologias relativos à introdução, exploração e institucionalização, elementos que compõem essencialmente o processo de aprendizagem da Álgebra.

O segundo bloco (8° e 9°) volta-se para os aspectos focalizados na aprendizagem das técnicas, resolução de problemas e modelação matemática, predominando uma abordagem mais empirista. Algumas fases mais intensificadas que outras, no entanto reafirmarmos que nosanos finais do Ensino Fundamental tem-se a conclusão das praxeologias e, portanto, segundo Chevallard (1991) a concretização da aprendizagem.

Percebemos que a coleção *A conquista da Matemática* apresenta, ao longo de sua coleção, a constituição completa das praxeologias e dos momentos de estudo, de forma a contribuir no processo de desenvolvimento do pensamento algébrico.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, M. O percurso da didatização do pensamento algébrico no ensino fundamental: uma análise a partir da transposição didática e da teoria antropológica do didático. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo. P. 312, 2014.

ALVES, Rubem. A alegria de ensinar. Campinas: Papirus, 2003.

ARCAVI, A. El desarrolho y el uso del sentido de los símbolos. In: VALE, et al (org.). Númerose Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores. Lisboa, Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, pág. 29-48, 2006.

BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análisede livros didáticos. Zetetiké. ISSN 2176-1744. Campinas, SP, v.25, n. 3, p.364-387, set./dez, 2017.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. Investigações em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos. In: Fundamentos da investigação qualitativa em educação: uma introdução. São Paulo: Porto Editora. 2006. p. 13-74

BORRALHO, A.; BARBOSA, E. Exploração de padrões e pensamento algébrico. In: VALE, I.; BARBOSA, A. (Orgs.), Padrões: Múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Vianado Castelo, p. 59-68, 2009.

BRASIL. *Secretaria de Educação Fundamental.* Parâmetros curriculares nacionais: matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em:http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 20 out 2020.

BRASIL. *Ministério da Educação.* Base Nacional Comum Curricular. Versão Final. Brasília: MEC, 2017 Disponível em:http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias =79601- anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192.Acesso em: 07 jun 2019.

CARMO, P. F. Um estudo a respeito da generalização de padrões nos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, p. 107. 2014.

CASTRO, Mônica Rabelo de. Educação Algébrica e Resolução de problemas. Disponível em:<http://tvebrasil.com.br/salto/boletins2003/eda/index.htm>. Acesso em 25 mar 2021

CHEVALLARD, Y. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiquesau collège. Troisième partie. Petit x n°30, IREM de Grenoble, pp.5-38, 1990.

______________. La transposición didátictica: Del saber sábio al saber enseñado. Bueno Aires:Aique Grupo Editor S. A, 1991.

______________. CHEVALLARD, Y. Familière et problématique, la figure du professeur.

Recherches en didactique des mathématiques, Grenoble, v. 17, n. 3, p. 17-54, 1997.
.

_______________Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. In: **L'UNIVERSITE D'ETE**, 1998, p.91-118. Actes del'Université d'été La Rochelle. Clermont-Ferrand, France: IREM, 1998

_______________. L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. In: **Recherches en Didactiques des Mathématiques 19(2).** Grenoble: La Pensée Sauvage, 1999. p. 221-266

_______________. **Approche Anthropologiche du rapport au savoir et didactique des mathematiques.** Communication aux *3es Journées d'étude franco-québécoises* (Université René-Descartes Paris 5, 17-18 juin 2002). Disponível em: yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Approche_anthropologique_rapport_au_savoir.pdf. Acesso em: 30/05/2020.

CHEVALLARD, Y; BOSCH, M; GASCÓN, J. Estudar Matemáticas: o elo perdido entre oensino e a aprendizagem. Tradução: Daisy Vaz de Moraes, Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

CRUZ, E. da S. A noção de variável em livros didáticos de Ensino Fundamental: um estudo sob ótica da organização praxeológica. 2005. 106 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela e MIGUEL, Antônio. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? 3. ed. Pro-Posições, 39:52, 1992.

FIORENTINI, D. MIGUEL, A. MIORIM, M, A. Contribuição para um repensar... a educaçãoalgébrica elementar. In: Pro-Posições, Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação – Unicamp. Vol. 4, n. 1[10]. Campinas: Cortez Editora, p. 78-91, 1993.

FIORENTINI, D. À Guisa de Prefácio: a dor e a delícia de narrar e escutar histórias de professores. In: GOMES, M. L. M.; TEIXEIRA, I. A. C; AUAREK, W. A.; PAULA, M. J. (Org.). Viver e Contar: experiências e práticas de professores de Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2012. p. 11-20.

FRISON, M.D; VIANNA, J; CHAVES, J.M; BERNARDI, F.N. Livro Didático como Instrumento de Apoio para a Construção de Propostas de Ensino de Ciências Naturais. EncontroNacional de Pesquisa em Educação em Ciências. Florianópolis, 2009, p.4-5.

GASCÓN, J. La necesidad de utilizar modelos en didáctica de las matemáticas. Educ. Mat.Pesqui., São Paulo, v.5, n.2, pp. 11-37, 2003.

HOUSE, P. A. Reformular a álgebra da escola média: por que e como? In: Coxford, A. F. e Shulte, A. P. As idéias da álgebra. The National Council of Teachers of Mathematics. Tradução:Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

JÚNIOR, G. R., CASTRUCCI, B. A conquista da matemática. 6° ano: ensino fundamental: anos finais. – 4. Ed. – São Paulo: FTD, 2018.

JÚNIOR, G. R., CASTRUCCI, B. A conquista da matemática. 7° ano: ensino fundamental: anos finais. – 4. Ed. – São Paulo: FTD, 2018.

JÚNIOR, G. R., CASTRUCCI, B. A conquista da matemática. 8° ano: ensino fundamental: anos finais. – 4. Ed. – São Paulo: FTD, 2018.

JÚNIOR, G. R., CASTRUCCI, B. A conquista da matemática. 9° ano: ensino fundamental: anos finais. – 4. Ed. – São Paulo: FTD, 2018.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI. Campinas:Papirus, 1997. 176 p.

Lüdke, M.; André, M. . 1986. A pesquisa em educação: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU.

MACHADO, N. J. Matemática e Realidade: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino de matemática. 2° ed. São Paulo: Cortez, 1991.

MACHADO, N. J. Matemática e Língua Materna: análise de uma impregnação mútua. 3° ed.São Paulo: Cortez, 1993.

MARTINS, L. P. Estudos sobre aspectos da Álgebra na passagem da Aritmética para a Álgebra. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo. p. 325. 2015.

MILHOSSI, C. N. **Apresentação da álgebra por livros didáticos aprovados no PNLD 2014**. 2017. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação) Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo. São Paulo, 2017.

MINAYO, Maria Cecília de Souza (org.). Pesquisa Social. Teoria, método e criatividade. 18ed. Petrópolis: Vozes, 2001.

MOROZ, Melania; GIANFALDONI, Mônica Helena Tiepo Alves. **O processo de pesquisa**: iniciação. 2. ed. Brasília: Liber Livro Editora, 2006.

NOGUEIRA, R. C. S. A álgebra nos livros didáticos do ensino fundamental: uma análise praxeológica. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Ciências Humanas e Sociais, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. p. 125. 2008.

OLIVEIRA, Ana Teresa de C. C. Reflexões sobre a aprendizagem da álgebra. Educação Matemática em Revista, São Paulo: SBEM, ano 9, n. 12, p. (35 – 39), jun. 2002.

PONTE. J. P. D; BRANCO. N.; MATOS. A. Álgebra no Ensino Básico. Ministério da Educação. Setembro 2009.

SANTOS, L. G. dos. Introdução do pensamento algébrico: um olhar sobre professores e livros didáticos de matemática. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, p. 198. 2007.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: Coxford, A. F. e Shulte, A. P. As idéias da álgebra. The National Council of Teachers of Mathematics. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

APÊNDICE A – Praxeológia referente ao livro didático do 6° ano

Tarefa	Técnica	Tecnológico-teórico
T_1 – Identificar quais figuras estão divididas em partes iguais	τ_{a1} – Observação das imagens.	θ_1 – Caracterização dos termos de uma fração
T_2 – Escrever a fração que está sendo representada pela figura ou enunciado.	τ_{a2} – Identificar a "parte" e o "todo".	
T_3 – Resolver problemas envolvendo frações.	τ_{a3} – Representar geometricamente τ_{a4} – Interpretar os dados.	
T_4 – Verificar se as frações são equivalentes	τ_{a4} – Simplificar as frações dadas	θ_2 – Caracterização das frações equivalentes
T_5 – Escrever uma fração equivalente a fração dada	τ_{a5} – Multiplicar ou dividir o numerador e o denominador por um mesmo número	
T_6 – Calcular frações com o mesmo denominador	τ_{a6} – Adicionar ou subtrair o numerador e conservar o denominador	
T_7 – Calcular frações com denominador diferente.	τ_{a7} – Reduzir as frações a um denominador comum (τ_{a6})	
T_8 – Escrever na forma mista ou na forma de fração imprópria os números Racionais	τ_{a8} – Observação dos exemplos.	
T_9 – Somar fração mista e/ou fração imprópria.	(τ_{a6}), (τ_{a7}) e (τ_{a8})	
T_{10} – Representar as frações em forma de porcentagem	(τ_{a8})	
T_{11} – Representar por meio de uma fração a probabilidade de ocorrência de um evento.	(τ_{a4}) e (τ_{a8})	
T_{12} – Transformar as unidades de medida de massa, volume e capacidade.	τ_{a9} – Utilizar a tabela e a réguas das unidades	
T_{13} – Comparar unidade de medida	τ_{a10} – Usar a balança de dois pratos	θ_3 – Descrição do conceito de volume
T_{14} – Calcular as unidades de medida de massa, volume e capacidade.	(τ_{a9})	
T_{15} – Indicar a unidade de medida mais adequada para expressar massa, volume e capacidade.		

APÊNDICE B – Praxeológia referente ao livro didático do 7° ano

Tarefa	Técnica	Tecnológico-teórico
T_{16} – Identificar os termos de uma sequência recursiva.	τ_{b11} – Observar o comportamento de sequência.	θ_4 – Apresentação dos elementos que compõem uma sequência.
	τ_{b12} – Relacionar um termo e o seu antecessor.	
	τ_{b13} – Usar a lei de formação para expressar o termo geral da sequência.	θ_5 – Caracterização de uma sequência recursiva.
T_{17} – Classificar como sequência recursiva e não-recursiva.	τ_{b14} – Identificar se é possível determinar (ou não) o próximo termo da sequência.	
T_{18} – Descobrir a lei de formação da sequência recursiva.	τ_{b15} – Usar a lei de formação para expressar o termo geral da sequência. (τ_{b12})	
T_{19} – Identificar os membros de uma igualdade	τ_{b16} – Identificar os termos a direita e à esquerda do símbolo da igualdade	θ_6 – Conceito de expressão algébrica
T_{20} – Identificar a propriedade utilizada na resolução da Equação	τ_{a10} – Usar a balança de dois pratos	θ_7 – Conceito de variável
T_{21} – Resolver as equações Algébricas	τ_{b17} – Aplicar as propriedades da igualdade.	θ_8 – Conceito de incógnita
		θ_9 – Apresentação das propriedades de uma igualdade
	τ_{b18} – Aplicar os princípios de equivalência.	θ_{10} – Apresentação dos princípios de equivalência
T_{22} – Identificar as sentenças matemáticas como equações ou Não	τ_{b19} – Identificar a partir da dos exemplos de equação.	θ_{11} – Definição de equação
T_{23} – Identificar a quantidade de incógnitas em uma equação		
T_{24} – Escrever uma equação a partir de uma frase	τ_{b20} – Transformar os dados da frase para a linguagem algébrica	

T_{25} – Escrever uma equação a partir das relações com figuras geométricas	τ_{b21} – Transformar os dados observados na imagem para a linguagem algébrica	
T_{26} – Encontrar a raiz ou solução das equações.	τ_{b22} – Substituir a incógnita pelos valores do conjunto universo. (τ_{b18})	θ_{12} – Apresentação da definição de conjunto universo e raiz deuma equação.
T_{27} – Verificar se o número dado é raiz (ou não) da equação	τ_{b23} – Substituir a incógnita pelo número dado.	
	τ_{b24} – Calcular separadamente o valor numérico de cada membro da igualdade.	
	τ_{b25} – Observar se a igualdade foi satisfeita	
T_{28} – Obter uma equação equivalente	τ_{a10} – Usar a balança de dois pratos	θ_{13} – Conceito de equação equivalente
	τ_{b18} – Aplicar os princípios de equivalência.	
T_{29} – Verificar se as equações são equivalentes	τ_{b26} – Substituir a letra pelos valores numéricos possíveis	
T_{30} – Resolver uma equação do 1° grau com uma incógnita	τ_{b18} – Aplicar os princípios de equivalência.	θ_{14} – Conceito de equação do 1° grau
T_{31} – Encontrar a raiz ou solução da equação do 1° grau		
T_{32} – Resolver uma equação do 1° grau a partir de um problema dado.	τ_{b27} – Ler com atenção o problema e levantardados. (τ_{b18}), (τ_{b20}). τ_{b28} – Construir esquemas expressando o problema dado.	

T_{33} – Calcular a razão entre duas grandezas	τ_{b29} – Expressar as medidas na mesma unidade	θ_{15} – Definição de razão
	τ_{b30} – Escrever o quociente entre os números que representam as suas medidas	
T_{34} – Expressar uma razão na forma decimal	τ_{b31} – Efetuar a divisão do antecedente pelo consequente	

T_{35} – Expressar uma razão na forma percentual	τ_{b32} – Transformar a razão em uma equivalente de consequente igual a 100	
	τ_{b33} – Transformar em forma decimal e depois em forma percentual.	
T_{36} – Determinar o valor de x de uma proporção	τ_{b34} – Aplicar a propriedade fundamental das proporções	θ_{16} – Conceito de proporção
T_{37} – Escrever a proporcionalidade a partir de um Problema	τ_{a4} – Interpretar os dados.	θ_{17} – Propriedade fundamental das proporções
T_{38} – Verificar se os números dados formam uma proporção	(τ_{b34})	
T_{39} – Elaborar um problema matemático que envolva a proporção dada		
T_{40} – Compreender a proporcionalidade direta e inversa entre duas grandezas	τ_{b35} – Observar se há variação das grandezas na mesma razão, ou uma razão inversa da outra.	θ_{18} – Conceito de grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais.
T_{41} – Resolver problemas de proporcionalidade direta e inversa	τ_{b36} – Construir uma tabela com os valores das grandezas.	
	τ_{b37} – Utilizar a regra de três simples e composta (τ_{b34}), (τ_{a4})	

APÊNDICE C – Praxeológia referente ao livro didático do 8° ano

Tarefa	Técnica	Tecnológico-teórico
T_{42} – Compreender o objetivo de representar números por meio de letras e símbolos.	τ_{c39} – Observação de exemplos com diferentes formas de escrita.	θ_{19} – Conceito de expressão algébrica ou literal
T_{43} – Identificar as diferentes expressões matemáticas	τ_{c40} – Observar as expressões escritas somente com números e aquelas com letras e números.	
T_{44} – Escrever as operações matemática de forma sintética	τ_{b20} – Substituir os dados da frase para a linguagem algébrica	
T_{45} – Escrever a expressão algébrica a partir de um problema dado.	(τ_{b20})	
T_{46} – Escrever expressões algébricas a partir de figuras Geométricas	τ_{b21} – Transformar os dados observados na imagem para a linguagem algébrica	
T_{47} – Encontrar o valor numérico de uma expressão algébrica	τ_{c41} – Considerar a condição de existência das expressões algébricas fracionárias.	
	τ_{b18} – Aplicar os princípios de equivalência.	
T_{48} – Identificar monômios	τ_{c42} – Observação de exemplos de tipos de monômios	θ_{20} – Apresentação do conceito de monômio ou termo algébrico.
T_{49} – Escrever monômios em resposta a problemas matemáticos	τ_{b26} – Substituir a letra por valores numéricos.	
T_{50} – Identificar o coeficiente e parte literal de monômios	τ_{c43} – Caracterização das partes de um monômio	
T_{51} – Identificar o grau de um monômio	τ_{c44} – Somar os expoentes das variáveis	
T_{52} – Identificar monômios semelhantes	τ_{c45} – Comparar monômios com a mesma parte literal	
T_{53} – Fazer operações com monômios	τ_{c46} – Adicionar os termos algébricos semelhantes	
	τ_{c47} – Aplicar a propriedade de potenciação	

	τ_{c48} – Multiplicar ou dividir os coeficientes entre si e as partes literais	

	τ_{c49} – Construir fluxogramas com os passos de identificação do termo geral da sequência	
T_{54} – Reduzir termos semelhantes das expressões algébricas	τ_{c50} – Operar com os termos semelhantes adicionando os coeficientes.	
T_{55} – Descobrir os termos de uma sequência de monômios	τ_{b12} – Relacionar um termo e o seu anterior τ_{b13} – Usar a lei de formação para expressar o termo geral da sequência.	
T_{56} – Escrever polinômios em resposta à problemas matemáticos	τ_{b26} – Substituir a letra pelos valores numéricos.	θ_{21} – Apresentação do conceito de polinômios
T_{57} – Escrever a forma reduzida do polinômio	τ_{c51} – Eliminar os parênteses	
	τ_{c52} – Aplicar a propriedade da comutatividade (τ_{c46})	
T_{58} – Identificar os tipos de polinômio	τ_{c53} – Identificar a quantidade de termos	
T_{59} – Identificar o grau do polinômio	τ_{c54} – Identificar o maior expoente relacionado a variável considerada	
T_{60} – Ordenar os polinômios de mesma variável	τ_{c55} – Escrever as potências decrescentes da variável	
T_{61} – Adequar o polinômio a forma geral	τ_{c56} – Colocar o zero nos coeficientes dos termos que não aparecem polinômios (τ_{c55})	
T_{62} – Fazer operações com polinômios	τ_{c57} – Reduzir os termos semelhantes	
	τ_{c58} – Aplicar a propriedade distributiva	
	τ_{c47} – Aplicar a propriedade de potenciação	
	τ_{c48} – Multiplicar ou dividir os coeficientes entre si e as partes literais (τ_{c46}), (τ_{c47}), (τ_{c48})	

T_{63} – Resolver uma equação fracionária	τ_{c59} – Determinar o conjunto solução que não anule o denominador da equação	θ_{22} – Conceito de equação fracionária.
	τ_{c60} – Encontrar o M.M.C entre os denominadores	
	τ_{b17} – Aplicar as propriedades da igualdade.	
	τ_{b18} – Aplicar os princípios de equivalência.	
	τ_{b21} – Transformar os dados da frase para a linguagem algébrica	
T_{64} – Escrever uma equação fracionária a partir de um problema dado	τ_{b27} – Ler com atenção o problema e levantar dados. (τ_{b17}), (τ_{b18}), (τ_{b20}), (τ_{b27})	
T_{65} – Verificar se o par ordenado dado é solução para a equação do 1° grau com duas incógnitas.	τ_{b23} – Substituir a incógnita pelo número dado. (τ_{b18})	
T_{66} – Resolver a equação do 1° grau com duas incógnitas	(τ_{b23})	
T_{67} – Representar a equação do 1° grau com duas incógnitas no plano cartesiano	τ_{c61} – Construir um quadro com valores para x e y.	
	τ_{c62} – Indicar os pares ordenados no plano cartesiano	
T_{68} – Escrever sistemas de equação a partir de problemas Matemáticos	(τ_{b17}), (τ_{b18}), (τ_{b20}), (τ_{b27})	
T_{69} – Verificar se o par ordenado é solução para o sistema de equação	τ_{c63} – Substituir o par ordenado dado no sistemade equação e verificar se a igualdade é verdadeira.	
T_{705} – Determinar a solução dos sistemas de equação do 1° grau nas incógnitas x e y	τ_{c64} – Usar o método da substituição	
	τ_{c65} – Usar o método da adição	
T_{71} – Resolver equação do 2° grau	τ_{c66} – Fatorar a equação	
	τ_{c67} – Usar a propriedade: sendo $x^2 = y$, então $x = \pm\sqrt{y}$	

	(τ_{b20})	
T_{72} – Compreender a proporcionalidade e não proporcionalidade entre duas Grandezas	τ_{c68} – Observar os exemplos dados.	
T_{73} – Classificar as grandezas em proporcionais e não proporcionais	τ_{c69} – Verificar se ocorre variação das grandezas na mesma razão ou inversa uma da outra	
T_{74} – Entender a razão entre Grandezas		
T_{75} – Resolver problemas que envolvam a razão de grandezas especiais	τ_{b29} – Expressar as medidas na mesma unidade	
	τ_{b30} – Escrever o quociente entre os números que representam as suas medidas Aplicar a propriedade fundamental das proporções (7° ano – Tecno17)	
T_{76} – Resolver problemas sobre grandezas diretamente e inversamente proporcionais	τ_{a4} – Interpretar os dados.	
	τ_{b37} – Utilizar a regra de três simples e composta	

APÊNDICE D – Praxeológia referente ao livro didático do 9° ano

Tarefa	Técnica	Tecnológico-teórico
T_{77} – Representar a área da figura por meio de expressões algébricas	τ_{d70} – Relação com a soma de figuras geométricas.	
T_{78} – Resolver os produtos notáveis: $(x + y)^2$, $(x - y)^2$ e $(x + y).(x - y)$.	τ_{d71} – Quadrado da soma. Relação com a soma de figuras geométricas. τ_{d72} – Relação com a linguagem corrente	
T_{79} – Resolver produto entre polinômios	τ_{c68} – Observar os exemplos dados.	
T_{80} – Identificar equivalência entre polinômios		
T_{81} – Resolver a divisão entre polinômios	τ_{c68} – Observar os exemplos dados.	
T_{82} – Identificar a operação inversa da multiplicação para resolver uma questão com polinômios		
T_{83} – Determinar o valor de uma variável para resolver o polinômio		
T_{84} – Identificar a expressão algébrica pela leitura em linguagem corrente.	τ_{d73} – Relação com a linguagem corrente.	
T_{85} – Escrever a forma reduzida do polinômio	τ_{d74} – Aplicar o princípio aditivo e multiplicativo da igualdade.	
T_{86} – Resolver os produtos notáveis: $(x + y)^3$ e $(x - y)^3$.	τ_{d75} – Propriedade da potência de mesma base	
		θ_{23} - Explicitando o significado de fatoração.
T_{87} – Resolver a fatoração dos polinômios	τ_{d76} – Colocar o fator comum em evidência. τ_{d77} – Agrupamento de termos	
T_{88} – Dar o valor numérico das variáveis de um polinômio	τ_{d78} – Simplificar e substituir os valores numéricos dados.	
T_{89} – Fatorar polinômios do tipo: diferença de dois quadrados	τ_{d79} – Relacionar com o produto notável $(a + b).(a - b)$	
T_{90} – Fatorar polinômios do tipo: trinômio quadrado perfeito	τ_{d80} – Relacionar com o produto notável $(a + b)^2$ e $(a - b)^2$	

T_{91} – Fatorar polinômios da soma ou da diferença de dois cubos ($a^3 + b^3$) e ($a^3 - b^3$)	τ_{d81} – Relacionar com o produto notável (a + b).(a^2 – ab + b^2) e (a - b).(a^2 + ab + b^2) τ_{d82} – Usar a propriedade distributiva.	
T_{92} – Encontrar as raízes de uma equação do 2° grau do tipo incompleta	τ_{d83} – Relacionando com a diferença de quadrados. τ_{d84} – Colocar o fator comum em evidência	θ_{24} - Identificação da solução da equação como raízes de uma equação.
T_{93} – Simplificar fração algébrica.	τ_{d85} – Soma e multiplicação de polinômios τ_{d86} – Colocar o fator comum em evidência τ_{d87} – Agrupamento de termos	
T_{94} – Expressar algebricamente o perímetro do retângulo	τ_{d88} – Soma e multiplicação de polinômios.	
T_{95} – Encontrar os termos de uma sequência em expressão algébrica		
T_{96} – Escrever equações a partir de figuras geométricas.	τ_{d89} – Relação com a soma de figuras geométricas.	
T_{97} – Encontrar valor numérico que satisfaça a igualdade da Equação	τ_{d90} – Uso do método baseado em tentativa e erro.	
T_{98} – Identificar a estrutura de uma equação do 2° grau com uma incógnita. e seus diferentes tipos: $ax^2 + bx + c = 0$ $ax^2 + bx = 0$ $ax^2 + c = 0$	τ_{d91} – Observação das diferenças com a equação do 1° grau. τ_{d92} – Identificação do expoente 2 associado a incógnita.	θ_{25} - Caracterização da equação do 2° grau quanto a sua estrutura e condição de existência.
T_{99} – Classificar uma equação do 2° grau como sendo completa ou incompleta.	τ_{d93} – Identificação dos coeficientes da equação como $b \neq 0$ e $c \neq 0$ se diz completa e $b = 0$ ou $c = 0$ se diz incompleta.	
T_{100} – Escrever a equação do 2° na forma reduzida.	τ_{d94} – Aplicar o princípio aditivo e multiplicativo da igualdade.	
T_{101} – Escrever equações do 2° grau a partir da expressão em linguagem corrente.		

T_{102} – Resolver equações do 2° grau incompletas do tipo $ax^2 + bx = 0$	τ_{d95} – Fatoração: colocar x em evidência	

	τ_{d96} – Usar a propriedade: sendo x.y = 0, então x = 0 ou y = 0.	
T_{102} – Resolver equações do 2° grau incompletas do tipo $ax^2 + c = 0$	τ_{d97} – Usar a propriedade: sendo $x^2 = y$, então $x = \pm\sqrt{y}$	
T_{103} – Determinar o conjunto solução das equações do 2° grau (tipo de tarefa (28))		
T_{104} – Encontrar o valor numérico de equações do 2° grau com duas Incógnitas	τ_{d98} – Substituição de valores dados.	
T_{105} – Resolver equações do 2° grau a partir da descrição defiguras geométricas	τ_{d99} – Usar a propriedade: sendo $x^2 = y$, então $x = \pm\sqrt{y}$ τ_{d100} – Substituição de valores dados.	
T_{106} – Encontrar as raízes de uma equação do 2° grau completa (similar (17))	τ_{d101} – Usando o processo de completar quadrados. τ_{d102} – Usando o processo geométrico de al-Khwarizmi τ_{d103} – Usando o processo algébrico de Bhaskara.	
T_{107} – Estudar as raízes da equação do 2° grau $ax^2 + bx + c = 0$	τ_{d104} – Relacionar a quantidade de raízes pelo valor do discriminante delta.	
T_{108} – Resolver problemas relacionados a medidas de perímetro e área.	τ_{d105} – Relações com equações do 2° grau e suas técnicas.	
T_{109} – Resolver equação do 2° grau calculando a soma e o produto das raízes (Relações de Girard)	τ_{d106} – Encontrar as raízes a através da ralação de Girard. (27) Usando a equação $x^2 + Sx + P = 0$	
T_{110} – Identificar equações biquadradas.	τ_{d107} – Apresentação da estrutura de uma equação biquadrada.	
T_{111} – Determinar a solução das equações biquadradas.	τ_{d108} – Substituição por uma incógnita auxiliar $x^2 = p$. τ_{d109} – Usando o processo algébrico de Bhaskara.	
T_{112} – Resolver uma equação irracional do 2° grau	τ_{d110} – Elevar os dois membros da equação a uma potência conveniente. τ_{d111} – Usando o processo algébrico de Bhaskara.	

	τ_{d112} – Verificar se as raízes encontradas satisfazem a equação irracional dada.	
T_{113} – Determinar a razão entre dois segmentos	τ_{d113} – Quociente entre os números que expressam as medidas desse segmento.	θ_{26} - Caracterização do conceito de razão e proporção
T_{114} – Determinar se os segmentos são proporcionais.	τ_{d114} – Verificar se a razão entre as medidas dos dois primeiros é igual a razão entre as medidas dos dois últimos.	
T_{115} – Calcular o valor de x considerando as medidas dos segmentos de reta.	τ_{d115} – Aplicar o teorema de Tales. τ_{d116} – Aplicar a propriedade fundamental das proporções: produto dos extremos é igual ao produto dos meios.	θ_{27} - Definição de retas paralelas
T_{116} – Calcular o valor de x considerando as medidas do triângulo.	τ_{d117} – Aplicar o teorema da bissetriz interna. τ_{d118} – Aplicar a propriedade fundamental das proporções: produto dos extremos é igual ao produto dos meios.	θ_{28} - Generalização da congruência de segmentos sobre qualquer reta transversal em feixes de retas paralelas.
		θ_{29} - Apresentação do teorema de Tales.
		θ_{30} - Apresentação do teorema da bissetriz interna.
T_{117} – Verificar se os polígonos são semelhantes entre si.	τ_{d119} – Verificar a congruência dos ângulos internos. τ_{d120} – Verificar se os lados correspondentes são proporcionais	θ_{31} - Apresentação das propriedades de polígonos semelhantes.
T_{118} – Verificar as condições que permitem a semelhança de triângulos.	τ_{d121} – Aplicar as relações de semelhança de triângulos.	θ_{32} - Apresentação do teorema fundamental da semelhança de triângulos.
T_{119} – Determine as medidas indicadas no triângulo.		
T_{120} – Escrever a lei de formação da função do 1° grau.	τ_{d122} – Construir um quadro estabelecendo relação entre as grandezas.	θ_{33} - Apresentação do conceito de função

T_{121} – Resolver problemas relacionando as grandezas dadas.	τ_{d123} – Interpretar os dados fornecidos no texto. τ_{d124} – Escrever a generalização das grandezas explicitadas no texto.	
T_{122} – Identificar a função afim a partir da definição.		θ_{34} - Apresentação do conceito de função afim.
T_{123} – Determinar a imagem da função afim	τ_{d125} – Substituir x por um número na lei de formação.	
T_{124} – Construir o gráfico da função afim	τ_{d126} – Construir uma tabela atribuindo valores arbitrários para x. τ_{d127} – Associar a cada par ordenado obtido um ponto do plano cartesiano. τ_{d128} – Traçar uma reta.	
T_{125} – Determinar o zero da função (algebricamente e a partir da observação do gráfico)	τ_{d129} – Igualar y = 0 e resolver a equação. τ_{d130} – Observar no gráfico o ponto que cruza o eixo x	
T_{126} – Identificar a função quadrática a partir da definição.		θ_{35} - Apresentação do conceito de função quadrática.
T_{127} – Determinar a imagem da função quadrática.	τ_{d131} – Substituir x por um número na lei de formação.	
T_{128} – Resolver uma situação problema	τ_{d132} – Escrever a generalização da regra em forma de função.	
T_{129} – Construir o gráfico de uma função quadrática no plano cartesiano	τ_{d133} – Construir uma tabela atribuindo valores arbitrários para x. τ_{d134} – Determinar as coordenadas do vértice. τ_{d135} – Associar a cada par ordenado obtido um ponto do plano cartesiano. τ_{d136} – Traçar uma uma parábola.	
T_{130} – Determinar a concavidade de uma parábola da função quadrática	τ_{d137} – Relacionar a concavidade com o sinal do coeficiente *a* da função quadrática.	

T_{131} – Identificar o vértice de uma parábola.	τ_{d138} – Observar o vértice em uma parábola.	
T_{132} – Determinar as coordenadas do vértice da parábola.	τ_{d139} – Utilizar a formula da coordenada do vértice.	
T_{133} – Determinar os zeros (ou raízes) da função quadrática.	τ_{d140} – Relacionar a quantidade de raízes ao valor do discriminante. τ_{d141} – Aplicar a formula de bhaskara. τ_{d142} – Observar no gráfico as raízes da função quadrática.	
T_{134} – Verificar a concavidade de uma parábola.	τ_{d143} – Relacionar a concavidade com o sinal do coeficiente *a* da função quadrática	
T_{135} – Verificar os pontos de máximo e mínimo da função quadrática.	τ_{d144} – Relacionar o ponto de máximo e mínimo com sinal do coeficiente *a* da função quadrática	
T_{136} – Encontrar o ponto de máximo e mínimo em situações problema.	τ_{d145} – Reconhecer no texto as informações para resolução do problema.	